COURS

Algèbre 1 – Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I- ESPACES VECTORIELS

1. STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

DÉFINITION 1 *Espace vectoriel*

Un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* est un triplet $(E,+,\cdot)$ où E est un ensemble et

- $+$ une loi de composition interne sur E c'est-à-dire une application de $E\times E$ dans E, telle que $(E,+)$ soit un groupe abélien :
  - ***(i)*** la loi + est associative : $\forall (x,y,z)\in E^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)$;
  - ***(ii)*** la loi + est commutative : $\forall (x,y)\in E^2,\ x+y=y+x$;
  - ***(iii)*** la loi + possède un élément neutre, noté 0_E : $\forall x\in E, x+0_E=x$;
  - ***(iv)*** tout élément x de E possède un symétrique, noté $-x$: $x+(-x)=0_E$.
- $\cdot$ une *loi de composition externe à coefficients dans* $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une application $\begin{vmatrix} K\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\cdot x\end{vmatrix}$ vérifiant : $\forall(\lambda,\mu)\in K^2, \forall(x,y)\in E^2$,
  - ***(i)*** $1\cdot x=x$;
  - ***(ii)*** $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$;
  - ***(iii)*** $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$;
  - ***(iv)*** $\lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\mu)\cdot x$.

Les éléments du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont appelés les *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés les *scalaires*.

PROPOSITION 1

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors :

- $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall x\in E,\quad \lambda.x=0_E \iff \lambda=0 \text{ ou } x=0_E$
- $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\forall x\in E,\quad (\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x$
- $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall(x,y)\in E^2,\quad \lambda.(x-y)=\lambda.x-\lambda.y$

2. PRODUIT CARTÉSIEN D'ESPACES VECTORIELS *new*

DÉFINITION 2 *Espace produit*

Soient $E_1,\dots,E_p$ des $\mathbb{K}$−espaces vectoriels.
On définit une structure d'espace vectoriel sur $E=E_1\times\cdots\times E_p$ par :

- $0_E=(0_{E_1},\dots,0_{E_p})$
- $(x_1,\dots,x_p)+\lambda\cdot(y_1,\dots,y_p)=(x_1+\lambda\cdot y_1,\dots,x_p+\lambda\cdot y_p)$

Les opérations se font *composante par composante.*

Les propriétés requises découlent directement de celles des espaces E_i *composante par composante.*

3. COMBINAISONS LINÉAIRES

DÉFINITION 3 *Combinaison linéaire*

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tout vecteur de E s'écrivant sous la forme $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^n$.

4. FAMILLES GÉNÉRATRICES

DÉFINITION 4 *Famille génératrice d'un espace*

Une famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs de E est dite *famille génératrice de* E si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

5. FAMILLES LIBRES ET LIÉES

DÉFINITION 5 *Famille libre – famille liée*

Une famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs de E est appelée *famille liée* si et seulement si un des vecteurs de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des **autres** vecteurs de la famille.
Une famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs de E est appelée *famille libre* si et seulement elle n'est pas liée.

PROPOSITION 2 *Caractérisation pratique de la liberté*

Une famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs de E est libre ssi pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0_E \implies \forall i\in[\![1,n]\!],\quad \lambda_i=0$$

REMARQUES

- Toute famille contenant le vecteur nul est liée
- Une famille de **deux** vecteurs (x_1,x_2) est libre $\iff$ x_1 et x_2 ne sont pas proportionnels.
  Attention, c'est faux pour une famille de trois vecteurs ou plus.

EXEMPLE

La famille $(P_0,\dots,P_n)$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est dite de degrés échelonnés si $\deg(P_0)<\cdots<\deg(P_n)$. Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre.

6. Bases

Définition 6 *Base*

Une famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs de E est appelée *base* de E si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de E.

Proposition 3 *Coordonnées*

Soit $\mathscr{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. Tout vecteur de E se décompose de façon unique comme combinaison linéaire de $\mathscr{B}$:

$$\forall x\in E,\ \exists!(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\quad x=\sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Cet unique n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ s'appelle *coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$*.

7. Exemples fondamentaux

Exemples

- Le plan $\mathscr{P}$ et l'espace $\mathscr{E}$ des vecteurs de la géométrie ;
- $\mathbb{K}^n$, base canonique : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$;
- Polynômes : $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, base canonique : $(1,X,\dots,X^n)$;
- Fonctions : $\mathscr{F}(D,\mathbb{K})$ et, plus généralement $\mathscr{F}(D,E)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev ;
- Suites : $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (scalaires) et, plus généralement $E^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à valeurs dans E (vectorielles) où E est un $\mathbb{K}$-ev ;

II- Sous-espaces vectoriels

1. Définition et premières propriétés

Définition 7 *Sous-espace vectoriel*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Un *sous-espace vectoriel* de E est une partie de E vérifiant

- $0_E\in F$;
- F est stable par combinaison linéaire : $\forall x,y\in F,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \lambda x+\mu y\in F$.

La stabilité fait que les lois $+$ et $\cdot$ induites sur F par restriction sont des lois de F, interne et externe à coefficients dans $\mathbb{K}$, et qu'elles vérifient les axiomes de la définition 1, F est donc lui aussi un modèle de $\mathbb{K}$-ev.

Proposition 4 *Intersection de sev*

Toute intersection de sev de E est un sev de E.

Remarque

La réunion de sev n'est en général pas un sev.
On peut montrer que $F_1\cup F_2$ est un sev $\iff F_1\subset F_2$ ou $F_2\subset F_1$.

Proposition 5 *Sous-espace engendré par une famille*

Soit $\mathscr{F}=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel , le plus petit (au sens de l'inclusion) qui contienne tous les e_i.
On l'appelle *sous-espace vectoriel engendré* par la famille $\mathscr{F}$ et on le note $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\big)$.

2. Sommes et sommes directes *new*

Définition 8 *Somme de sev*

Soient $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ des sous-espaces vectoriels de E.

On appelle *somme des* F_i l'ensemble $F=F_1+F_2+\dots+F_p=\sum_{i=1}^p F_i$ défini par

$$F=\left\{\sum_{i=1}^p x_i\ /\ (x_1,\dots,x_p)\in F_1\times\dots\times F_p\right\}$$

La somme des F_i est l'ensemble des vecteurs de E qui se décomposent selon les F_i.

Définition 9 *Somme directe*

On dit que *la somme est directe* si et seulement si la décomposition est unique ;

c'est-à-dire $\quad\forall(x_1,\dots,x_p),(y_1,\dots,y_p)\in\prod_{i=1}^p F_i,\quad \sum_{i=1}^p x_i=\sum_{i=1}^p y_i\implies\forall i\in[\![1,p]\!],\ x_i=y_i$.

On note alors $F=F_1\oplus F_2\oplus\dots\oplus F_p=\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Proposition 6

La somme (et la somme directe) de sous-espaces vectoriels est associative et commutative.

PROPOSITION 7

$\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
C'est le plus petit sous-espace vectoriel incluant tous les F_i.

THÉORÈME 1 *Caractérisation des sommes directes*

La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si

$$\forall (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \prod_{i=1}^{p} F_i\,, \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i = 0_E$$

qui traduit l'unicité de la décomposition du vecteur nul.

Cela s'exprime également par : $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} F_1 \times \cdots \times F_p & \to & \sum_{i=1}^{p} F_i \\ (x_1,\dots,x_p) & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \end{array}\right.$ est un isomorphisme.

REMARQUE

Il ne suffit pas que $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour $i \neq j$. Prendre l'exemple de 3 droites du plan.

Cas particulier où $p = 2$: sous-espaces supplémentaires

PROPOSITION 8 *Sous-espaces supplémentaires*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F_1 \oplus F_2$

(ii) $\forall x \in E\,,\ \exists!(x_1,x_2) \in F_1 \times F_2\,,\ x = x_1 + x_2$

(iii) $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et $E = F_1 + F_2$

EXEMPLES

- Espace vectoriel des fonctions paires et des fonctions impaires dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- Espaces vectoriels des matrices symétriques et des antisymétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- 2 droites distinctes en dimension 2
- Un plan et une droite non incluse dans le plan dans l'espace de dimension 3
- Une droite et un sev de E qui n'inclut pas la droite
- $\mathbb{K}[X] = P_0\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_n[X]$ si P_0 est un polynôme de degré $n+1$.

III- APPLICATIONS LINÉAIRES

1. DÉFINITION

DÉFINITION 10 *Application linéaire*

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est une application vérifiant

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Une telle application conserve les combinaisons linéaires .

Un *endomorphisme* est une application linéaire de E dans lui-même $(E = F)$.
Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.
Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif (auto = endo + iso).
Une *forme linéaire* est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, le corps de base.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F,
$\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E,
$GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

REMARQUE

Si f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$, c'est automatique !

EXEMPLES

L'application nulle : $x \in E \mapsto 0_F$ est linéaire.
L'application *identité* est un endomorphisme de E (et même un automorphisme).
La dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, de $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K})$.
L'application *évaluation en un point* : $f \mapsto f(a)$ est linéaire.

PROPOSITION 9 *Détermination par l'image d'une base*

Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image d'une base de E.
Si $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$.

PROPOSITION 10 *Caractérisation de l'in-, sur-, bi-jectivité par l'image d'une base*

Soient E et F des espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On a alors :

- u est injective $\iff$ l'image d'une base de E par u est une famille libre de F ;
- u est surjective $\iff$ l'image d'une base de E par u est génératrice de F ;
- u est bijective $\iff$ l'image d'une base de E par u est une base de F.

2. Noyau et image

Proposition 11 *Noyau et image sont des sev*

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. $\ker f = \{x \in \mathrm{E}, f(x) = 0_\mathrm{F}\} = f^{-1}\{0_\mathrm{F}\}$ est un sev de E et $\mathrm{Im}\, f$ est un sev de F.

Proposition 12 *Injectivité et noyau*

$f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est injective $\iff \ker f = \{0_\mathrm{E}\}$.

Proposition 13 *L'image d'une famille génératrice engendre l'image*

Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille génératrice de E. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
La famille $\big(u(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\big)$ est alors une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.

Autrement dit : l'image est engendrée par l'image d'une base.

Proposition 14 *Image isomorphe à un supplémentaire du noyau*

Toute application linéaire induit un isomorphisme d'un supplémentaire de son noyau sur son image.

3. Opérations sur les applications linéaires

Théorème 2 *Structure linéaire*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire.

Théorème 3 *Composition*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ Alors $g\circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$.
Toute composée d'applications linéaires est linéaire.
La composition est bilinéaire : $f\circ(g+\lambda h) = f\circ g+\lambda(f\circ h)$ et $(g+\lambda h)\circ f = g\circ f+\lambda(h\circ f)$

Proposition 15 *Isomorphisme réciproque*

Si $f : \mathrm{E}\to\mathrm{F}$ est un isomorphisme alors $f^{-1} : \mathrm{F}\to\mathrm{E}$ est également un isomorphisme (f^{-1} est linéaire).

Cas où E = F : $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}),\circ)$ est un groupe (non abélien en général).

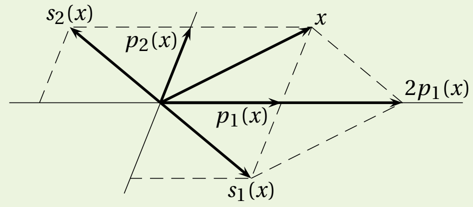
4. Projecteurs et symétries

Définition 11 *Projecteurs et symétries*

Soient F_1 et F_2 deux sev supplémentaires de E : $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1\oplus\mathrm{F}_2$.

La projection sur F_1 parallèlement à F_2 est l'application $p_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E} = \mathrm{F}_1\oplus\mathrm{F}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = x_1+x_2 & \longmapsto & x_1 \end{array}\right.$

La symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 est l'application $s_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{array}\right.$



Proposition 16 *Caractérisation algébrique*

- p est un projecteur de E $\iff p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $p\circ p = p$.
  Alors $\mathrm{Im}\, p = \ker(p - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$
  $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p$, $\quad x = p(x) + (x - p(x))$
  p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\ker p$
- s est une symétrie de E $\iff s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $s\circ s = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
  Alors $\mathrm{E} = \ker(s - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_\mathrm{E})$, $\quad x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x))$
  s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_\mathrm{E})$
- ${p_1}^2 = p_1$, $\quad p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, $\quad p_1\circ p_2 = p_2\circ p_1 = 0$
  ${s_1}^2 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, $\quad s_1 = p_1 - p_2$, $\quad s_2(x) = -s_1(x)$ $\quad s_1 + \mathrm{Id}_\mathrm{E} = 2p_1$

Proposition 17 *Famille de projecteurs associés à une somme directe*

Soit $\mathrm{E} = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i$. On note p_i la projection sur E_i parallèlement à $\displaystyle\sum_{j\neq i} \mathrm{E}_j$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\quad p_i\circ p_j = \delta_{ij}\, p_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} p_i = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

5. Hyperplans et formes linéaires

Définition 12 *Hyperplan*

On appelle *hyperplan* le noyau d'une forme linéaire non nulle.

IV- Théorie de la dimension

1. Espaces vectoriels de dimension finie

DÉFINITION 13 *Espace de dimension finie*

L'espace vectoriel E est *de dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

THÉORÈME 4 *de la base incomplète*

Soit E un espace de dimension finie.

- Version faible : soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E. On peut compléter $\mathscr{L}$ pour obtenir une base de E.
- Version forte : soit $\mathscr{L}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. On peut compléter $\mathscr{L}$ avec des vecteurs de $\mathscr{G}$ pour obtenir une base de E.

THÉORÈME 5 *de la dimension*

Soit E de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal.

Ce cardinal commun à toutes les bases s'appelle la *dimension* de E.

THÉORÈME 6 *Cardinal des familles libres, génératrices*

Soit E une espace de dimension finie n.

- Toute famille libre a au plus n vecteurs.
- Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs.

THÉORÈME 7 *Caractérisation des bases en dimension finie*

Soit E une espace de dimension finie n.

- $\mathscr{F}$ est une base de E $\iff$ $\mathscr{F}$ est libre et $\operatorname{Card}\mathscr{F} = n$.
- $\mathscr{F}$ est une base de E $\iff$ $\mathscr{F}$ est génératrice de E et $\operatorname{Card}\mathscr{F} = n$.

PROPOSITION 18 *Base et dimension d'un produit en dimension finie*

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$−espaces vectoriels de dimensions finies n_i munis de bases $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$. Soit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ leur produit.

- La famille $\left((e_1^1, 0, \dots, 0), (e_{n_1}^1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e_1^p), (0, \dots, 0, e_{n_p}^p)\right)$ est une base de E
- $\dim \prod_{i=1}^{p} E_i = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$.

2. Sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie

THÉORÈME 8

Soit E un espace de dimension finie et F un sev de E.
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$
De plus $F = E \iff \dim F = \dim E$.

PROPOSITION 19 *Existence d'un supplémentaire*

Soit E un espace de dimension finie.
Tout sev de E admet un supplémentaire.
Si $E = F_1 \oplus F_2$, alors $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$.

PROPOSITION 20 *Formule de* GRASSMANN

Soit E un espace vectoriel et F_1, F_2 deux sev de E de dimension finie.
Alors $F_1 + F_2$ est de dimension finie et

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$$

COROLLAIRE 1 *Dimension d'une somme*

Soit E un espace de dimension finie et $F_1, \dots, F_p$ des sev de E.

$$\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

PROPOSITION 21 *Base adaptée à une décomposition en somme directe*

Soient $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des sous espaces vectoriels de E ; on suppose que chaque F_i est muni d'une base $\mathscr{B}_i$.

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \iff$ la réunion de tous les vecteurs des bases $(\mathscr{B}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ forme une base de E.

Une telle base de E est dite *adaptée* à la somme directe.

Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $p \in [\![1, n]\!]$, les sous-espaces $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $\operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E.
Plus généralement, une partition de $\mathscr{B}$ fournit une décomposition de E en somme directe de sev.

PROPOSITION 22 *Dimension d'une somme directe*

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{p} F_i = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

PROPOSITION 23 *Caractérisation d'une somme directe par la dimension*

Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si

$$\dim \sum_{i=1}^{p} F_i = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

3. RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

DÉFINITION 14 *Rang d'une famille de vecteurs*

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{F} = (x_1, \dots x_p)$ une famille (finie) de vecteurs de E.
Le *rang* de $\mathscr{F}$ est la dimension du sous-espace (de dim finie) engendré par $\mathscr{F}$

$$\operatorname{rg} \mathscr{F} = \dim \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$$

PROPOSITION 24 *Liberté, génération et rang*

Soit E un espace de dimension finie n et $\mathscr{F} = (x_1, \dots x_p)$ une famille (finie) de vecteurs de E.

- $\operatorname{rg} \mathscr{F} \leqslant \min(n, p)$
- $\operatorname{rg} \mathscr{F} = \dim E \iff \mathscr{F}$ est génératrice de E
- $\operatorname{rg} \mathscr{F} = \operatorname{Card} \mathscr{F} \iff \mathscr{F}$ est libre

4. APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

PROPOSITION 25

Soient E et F deux espaces de dimension finie.

$$\begin{aligned}
\text{il existe } u \in \mathscr{L}(E,F) \text{ injective} &\iff \dim E \leqslant \dim F \\
\text{il existe } u \in \mathscr{L}(E,F) \text{ surjective} &\iff \dim E \geqslant \dim F \\
\text{il existe } u \in \mathscr{L}(E,F) \text{ bijective} &\iff \dim E = \dim F
\end{aligned}$$

THÉORÈME 9 *Théorème du rang*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont de dimension finie et

$$\dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u$$

REMARQUE

Cela ne signifie pas que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires (*cf* exercices).

DÉFINITION 15 *Rang d'une al*

Soient E et F deux espaces vectoriel, E étant de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Le *rang* de f est la dimension (finie) de son image

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$$

PROPOSITION 26 *Injectivité, surjectivité, bijectivité et rang*

Soient E et F deux espaces de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\begin{aligned}
f \text{ est injective} &\iff \operatorname{rg} f = \dim E \\
f \text{ est surjective} &\iff \operatorname{rg} f = \dim F \\
f \text{ est bijective} &\iff \operatorname{rg} f = \dim E = \dim F
\end{aligned}$$

PROPOSITION 27 *Automorphismes en dim finie*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est inversible (= bijectif = automorphisme)

(ii) $\operatorname{rg} f = n$

(iii) f est injectif

(iv) f est surjectif

(v) f est inversible à droite

(vi) f est inversible à gauche

REMARQUE

Ce résultat est faux en dimension infinie; considérer par exemple les endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ définis par $P \mapsto P'$ et $P \mapsto XP$.

PROPOSITION 28 *Rang et composition*

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \max\left(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\right)$.
De plus si f est un isomorphisme, $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$ et si g est un isomorphisme, $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.

PROPOSITION 29 *Hyperplans en dimension finie*

Si E est de dimension finie, H est un hyperplan de E $\iff \dim H = \dim E - 1$.

THÉORÈME 10 *Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$*

Si E et F sont des espaces de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

V- MATRICES

Dans cette section, tous les espaces vectoriels sont supposés de dimension finie.

1. DÉFINITIONS

DÉFINITION 16 *Matrice* (n,p)

Une *matrice de type* (n,p) est un tableau à n lignes et p colonnes

$$A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{np}\end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices *carrées* de taille n.

DÉFINITION 17 *Matrice d'une famille de vecteurs*

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E_n. Soit $\mathcal{F}=(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de E.
La *matrice de* $\mathcal{F}$ *dans la base* $\mathcal{B}$ est la matrice de type (n,p) dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs x_i de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})=\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{array}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{np}\end{pmatrix}\begin{array}{l}\to e_1\\\to e_2\\\vdots\\\to e_n\end{array}$$

DÉFINITION 18 *Matrice d'une application linéaire*

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E_p et $\mathcal{C}=(e'_1,\dots,e'_n)$ une base de F_n.
Soit $f\in\mathcal{L}(E_p,F_n)$.
La *matrice de* f *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ est la matrice (de type (n,p)) de la famille $f(\mathcal{B})=(f(e_1),\dots,f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)=\begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{array}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{np}\end{pmatrix}\begin{array}{l}\to e'_1\\\to e'_2\\\vdots\\\to e'_n\end{array}$$

PROPOSITION 30

Les bases $\mathcal{B}$ de E_p et $\mathcal{C}$ de F_n étant fixées, l'application $\begin{array}{ccc}\mathcal{L}(E_p,F_n)&\to&\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\\f&\mapsto&\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)\end{array}$ est bijective.

DÉFINITION 19 *Application linéaire canoniquement associée à une matrice*

Soit $A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. L'*application linéaire canoniquement associée à* A est l'application linéaire $f_A:\mathbb{K}^p\to\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

$$\forall X\in\mathbb{K}^p,\quad f_A(X)=AX$$

REMARQUE

Dans ce cas précis, les vecteurs de K^n étant confondus avec leurs coordonnées dans la base canonique, les colonnes de A sont les vecteurs Ae_j où les e_j sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

En notant C_j les colonnes de A et $X=\sum\limits_{j=1}^{p}x_je_j$, $\quad AX=\sum\limits_{i=1}^{p}x_jC_j$.

PROPOSITION 31 *Matrice et coordonnées*

Soit $f\in\mathcal{L}(E_p,F_n)$ et A sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: $A=\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)$.
Soient $x\in E_p$, X ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et $y\in F_n$, Y ses coordonnées dans $\mathcal{C}$.

$$y=f(x)\iff Y=AX$$

DÉFINITION 20 *Rang d'une matrice*

Soit $A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Le *rang* de A noté rg A est le rang de ses colonnes comme vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
Si $A=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, alors $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}\mathcal{F}$.
Si $A=\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)$, alors $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}f$.

2. STRUCTURE LINÉAIRE

DÉFINITION 21 *Somme et produit externe*

Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. La matrice $C=A+\lambda B$ est la matrice de terme général

$$c_{ij}=a_{ij}+\lambda b_{ij}$$

DÉFINITION 22 *Matrices élémentaires*

Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont les matrices E_{ij} définies par : le terme (i,j) de E_{ij} vaut 1, tous les autres sont nuls.

THÉORÈME 11 *Structure linéaire*

Ces opérations munissent $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Cet espace est de dimension finie $n \times p$ et les matrices élémentaires en forment une base appelée *base canonique* de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 32

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E_p et $\mathcal{C} = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F_n.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E_p, F_n) & \to & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

3. PRODUIT MATRICIEL

DÉFINITION 23 *Produit matriciel*

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$. Le *produit matriciel* AB est la matrice $C \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ dont le terme général est

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

PROPOSITION 33 *Produit de matrices élémentaires*

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

PROPOSITION 34 *Produit matriciel et composition*

Si $\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f) = A$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{D}\mathcal{C}}(g) = B$ alors $\mathcal{M}_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(g \circ f) = BA$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{D}\mathcal{C}}(g) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)$$

PROPOSITION 35 *Inversibilité*

Soient E et F deux espaces de même dimension finie n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)$ $(\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff A \text{ est inversible.}$$

Dans ce cas, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f^{-1}) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}$

PROPOSITION 36 *Inversibilité 2*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible

(ii) $\text{rg}\,A = n$

(iii) A est inversible à droite

(iv) A est inversible à gauche

EN PRATIQUE

Pour calculer A^{-1}, on peut utiliser la méthode du pivot ou mieux, inverser le système linéaire $Y = PX$.

4. CHANGEMENT DE BASES ET MATRICES SEMBLABLES

PROPOSITION 37 *Matrice de changement de base*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E_n.

La famille $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E $\iff$ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Dans ce cas, $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)^{-1}$

PROPOSITION 38 *Changement de base et coordonnées*

Soient E de dim finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Soit $x \in E$, X et X′ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. Alors

$$X = PX'$$

REMARQUE

Cette formule exprime les « anciennes » coordonnées en fonction des « nouvelles ». Si on veut les nouvelles en fonction des anciennes, il faudra inverser la matrice P.

PROPOSITION 39 *Changement de base et matrices*

Soient E et F de dim finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}'$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{C}'\mathcal{B}'}(f)$. Alors

$$B = Q^{-1}AP$$

Dans le cas d'un endomorphisme : $E = F$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$, la formule devient

$$B = P^{-1}AP$$

DÉFINITION 24 *Matrices semblables*

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dira que A et B sont *semblables* si et seulement s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

PROPOSITION 40 *Propriétés*

- L'application $A \mapsto P^{-1}AP$ définit un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- La relation de similitude est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.
- Deux matrices semblables ont même rang *(la réciproque est fausse)*.

5. TRACE D'UNE MATRICE CARRÉE ET D'UN ENDOMORPHISME *new*

DÉFINITION 25 *Trace d'une matrice carrée*

La *trace* d'une matrice carrée est la somme des termes de sa diagonale : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

PROPOSITION 41 *Propriétés de la trace d'une matrice carrée*

- La trace définit une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})_n,\ \mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}\,A$
- $\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2, \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
- Deux matrices semblables ont même trace *(la réciproque est fausse)*

REMARQUE

Cela ne signifie pas qu'on peut ré-écrire les facteurs d'un produit dans n'importe quel ordre. Avant d'appliquer cette formule, on s'astreindra à mettre des parenthèses pour n'avoir plus que deux facteurs : $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}\big(A(BC)\big) = \mathrm{tr}\big((BC)A\big) = \mathrm{tr}(BCA)$ mais $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(BAC)$ en général.

DÉFINITION 26 *Trace d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On note A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
La trace de A ne dépend pas de la base de E choisie. On note alors $\mathrm{tr}\,u = \mathrm{tr}\,A$.

PROPOSITION 42 *Propriétés de la trace d'un endomorphisme*

La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ qui vérifie $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

6. DÉCOUPAGE PAR BLOCS ET STABILITÉ *new*

DÉFINITION 27 *Matrice-blocs*

Soit $M \in \mathcal{M}_{n_1+p_1,n_2+p_2}(\mathbb{K})$. On définit la matrice M à l'aide des 4 blocs $A \in \mathcal{M}_{n_1 n_2}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1 p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p_1 n_2}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{p_1 p_2}(\mathbb{K})$ de telle sorte que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

CAS PARTICULIERS :

- Une matrice est diagonale par blocs si les blocs diagonaux sont carrés et si les blocs situées en dehors de la diagonale sont tous nuls.
- Une matrice est triangulaire supérieure (respectivement inférieure) par blocs si et les blocs diagonaux sont carrés et si tous les blocs strictement en-dessous (resp au-dessus) de la diagonale sont nuls.

PROPOSITION 43 *Calcul par blocs*

- Les formules de calculs (somme, produit par un scalaire, produit matriciel) sur les matrices par blocs sont, *à condition que la taille des blocs soit compatible*, les mêmes que pour les matrices définies coefficients par coefficients.
- Transposition : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix}$

DÉFINITION 28 *Sev stable par un endomorphisme*

Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par un endomorphisme u de E si $u(F) \subset F$.

DÉFINITION 29 *Endomorphisme induit*

Soit F un sev de E stable par un endomorphisme u.
La restriction $u_{|F}$ de u à F définie par : $\forall x \in F\ u_{|F}(x) = u(x)$ est un endomorphisme de F, appelé *endomorphisme induit* par u sur F.

PROPOSITION 44 *Stabilité et matrice triangulaire par blocs*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sev stable par u.
Dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à F, c'est-à-dire dont les premiers vecteurs forment une base de F, la matrice de u est triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A est la matrice (carrée) de u_1 dans la base de F formée par les premiers vecteurs de $\mathscr{B}$.

Réciproquement, si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à F dans laquelle la matrice de u est de la forme précédente, alors F est stable par u.

REMARQUE

GÉNÉRALISATION : Soient $F_1, F_2, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E stables par u tels que $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_p = E$. On peut construire une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs et réciproquement...

DÉFINITION 30 *Trigonalisable*

En particulier, si $p = \dim E$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\dim F_i = i$, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
On dit alors que l'endomorphisme u est *trigonalisable*.

PROPOSITION 45 *Stabilité et matrice triangulaire*

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.
On pose $F_i = \text{Vect}(e_1, e_2, \cdots, e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

$$\text{Mat}(u, \mathscr{B}) \text{ est triangulaire supérieure } \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ F_i \text{ est stable par } u$$

a) Matrices diagonales par blocs

PROPOSITION 46 *Stabilité et matrices diagonales par blocs*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie tel que $E = F_1 \oplus F_2$ où F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par u.
Dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette somme directe, la matrice de u est une matrice diagonale par blocs.
Réciproquement, si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la somme directe et dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, alors F_i est stable par u pour tout $i \in \{1, 2\}$.

REMARQUE

GÉNÉRALISATION : Soient $F_1, F_2, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E stables par u tels que $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$. On peut construire une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs et réciproquement...

VI- POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES ET DE MATRICES *new*

1. DÉFINITION

DÉFINITION 31 *Polynômes d'endomorphismes et de matrices*

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k . X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

On note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k . u^k$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. on note P(A) la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k . A^k$.

PROPOSITION 47 *Propriétés en vrac*

- Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, λ un scalaire, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ et $(\lambda P)(u) = \lambda P(u)$.
  $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$, $(PQ)(A) = P(A) \circ Q(A)$ et $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$.
- Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les applications $P \mapsto P(u)$ et $P \mapsto P(A)$ sont des morphismes d'algèbre c'est-à-dire linéaires et respectant les produits.
- Les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent ainsi que les matrices P(A) et Q(A).
- $\ker P(u)$ et $\text{Im}\, P(u)$ sont stables par u.
- Si A et B sont deux matrices semblables, P(A) et P(B) sont semblables pour tout polynôme P.

2. POLYNÔME ANNULATEUR

DÉFINITION 32 *Polynôme annulateur*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme P tel que $P(u) = 0$ est dit *polynôme annulateur de u*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Un polynôme P tel que $P(A) = 0$ est dit *polynôme annulateur de* A.

On dira qu'on a qu'un annulateur est *minimal* s'il est de degré minimal.

EXEMPLE

Recherche de polynôme annulateur minimal lorsque :

(i) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ***(ii)*** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***(iii)*** u est un projecteur ***(iv)*** u est une symétrie

Application au calcul de l'inverse et des puissances.

- A (u) et inversible $\iff$ il admet un annulateur $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ tel que $P(0) \neq 0$ ($a_0 \neq 0$).

  On obtient alors $A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{p} a_k A^{k-1}$ est un polynôme en A de degré $p-1$.

- Si l'on connaît un annulateur scindé $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i}$, on écrit la division euclidienne de X^n par P : $X^n = PQ_n + R_n \quad (*)$ et on calcule $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ grâce aux substitutions $X := \alpha_i$ dans $(*)$ (et ses dérivées successives en cas de racine multiple) en résolvant le système linéaire en les a_k obtenu.

  On effectue enfin la substitution $X := A$ pour obtenir $A^n = R_n(A) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$.

VII- DÉTERMINANT

1. DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

THÉORÈME 12 *Déterminant d'une famille dans une base (dem HP)*

Soit E de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}$. Il existe une unique application $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ vérifiant :

- φ est n-linéaire (linéaire en chacune de ses variables) ;
- φ est alternée : si deux vecteurs de la famille sont égaux, le déterminant est nul ;
- $\varphi(\mathscr{B}) = 1$

Cette application est appelée *déterminant dans la base* $\mathscr{B}$ et notée $\det_{\mathscr{B}}$.
De plus toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.

THÉORÈME 13 *Caractérisation des bases*

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E $\iff \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$

PROPOSITION 48 *Déterminant et changement de base*

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On a : $\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \cdot \det_{\mathscr{B}}$

PROPOSITION 49 *Règles de calcul*

- Si on intervertit deux vecteurs de la famille, son déterminant est changé en son opposé.
- S'il y a répétition dans la famille, son déterminant est nul
- On peut factoriser un scalaire dans chacun des facteurs :
  $$\det_{\mathscr{B}}(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) = \lambda_1 \ldots \lambda_n \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$
  En particulier $\det_{\mathscr{B}}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$
- Le déterminant est inchangé si on ajoute à l'un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des **autres**.
- Si la famille est liée, son déterminant est nul.

2. DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

THÉORÈME 14 *Déterminant d'un endomorphisme*

Soit E un espace de dimension n et f un endomorphisme de E.
Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(f(\mathscr{B})\big) = \det\big(\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
On l'appelle *déterminant* de l'endomorphisme f.

On a la relation :

$$\det_{\mathscr{B}}\big(f(x_1),\dots,f(x_n)\big) = \det f \cdot \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$$

PROPOSITION 50 *Propriétés*

- $\det \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = 1$
- $\det(u \circ v) = \det u \cdot \det v$
- $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \det u \neq 0$ et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det u}$.
- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$.

3. DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

DÉFINITION 33 *Déterminant d'une matrice carrée*

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est celui de l'endomorphisme f_{A} canoniquement associé à A.
C'est aussi le déterminant de ses colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

PROPOSITION 51 *Règle de* SARRUS

Pour une matrice de taille 2, $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ab - bc$

Pour une matrice de taille 3,

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

PROPOSITION 52 *Règles de calcul*

- Si on intervertit deux colonnes de A, son déterminant est changé en son opposé.
- S'il y a répétition dans les colonnes, son déterminant est nul
- Si l'on multiplie une colonne de A par un scalaire λ, son déterminant est multiplié par λ.
  En particulier $\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det \mathrm{A}$
- Le déterminant de A est inchangé si on ajoute à l'une de ses colonnes une combinaison linéaire des **autres**.
- Si l'une des colonnes de A nulle ou combinaison linéaire des autres, son déterminant est nul.
- Deux matrices A et B équivalentes par colonnes (resp. par lignes) ont le même déterminant.
- Le déterminant est invariant par transposition : $\det(\mathrm{A}^\top) = \det \mathrm{A}$.
  CONSÉQUENCE : on peut remplacer « colonne » par « ligne » dans tout ce qui précède.

PROPOSITION 53 *Déterminant et produit*

$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(\mathrm{AB}) = \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B}$$

$\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible $\iff \det \mathrm{M} \neq 0$
Dans ce cas, $\det(\mathrm{M}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathrm{M}}$

PROPOSITION 54 *Matrices semblables et déterminant*

Deux matrices semblables ont même déterminant.

PROPOSITION 55 *Déterminant d'une matrice triangulaire*

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.
Cela reste vrai *a fortiori* pour une matrice diagonale.

PROPOSITION 56 *Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs*

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire par blocs : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$ où A et B sont des blocs carrés. On a alors

$$\det \mathrm{M} = \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B}$$

Ce résultats se généralise à une matrice triangulaire par blocs avec un nombre de blocs quelconque : son déterminant est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

4. Développement selon une rangée

Définition 34 *Mineur principal, cofacteur*

Le *mineur principal de place* (i,j) de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant Δ_{ij} de la matrice de taille $n-1$ obtenue à partie de A en supprimant le i-ème ligne et la j-ème colonne.
Le *cofacteur de place* (i,j) est $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Proposition 57 *Développement suivant une rangée*

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\forall j \in [\![1,n]\!]$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j} \qquad \text{(dvpt selon la colonne } j\text{)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j} \qquad \text{(dvpt selon la ligne } i\text{)}$$

5. Déterminant de Vandermonde

Proposition 58 *Déterminant de Vandermonde*

Étant donné des scalaires x_0, $x_1,\dots$, x_n, on note $V(x_0,x_1,\dots,x_n)$ le déterminant d'ordre $n+1$ défini par :

$$V(x_0,x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

On a :

$$V(x_0,x_1,\dots,x_n) = \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j).$$

On en déduit que :

$$V(x_0,x_1,\dots,x_n) \neq 0 \iff \text{les } (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \text{ sont deux à deux distincts}$$

Note à l'attention des élèves venant de MPSI

L'expression du déterminant à l'aide du groupe symétrique et la notion de comatrice sont hors-programme en PSI.

VIII- Polynômes de Lagrange *new*

Proposition 59 *Polynôme de* LAGRANGE

Soient $(a_0,\cdots,a_n)$ une famille de $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ 2 à 2 distincts.

L'application $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(a_0),\cdots,P(a_n)\big) \end{array}$ est un isomorphisme

Soit $i_0 \in [\![0,n]\!]$. Il existe un unique polynôme L_{i_0} de degré inférieur ou égal à n tel que

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ L_{i_0}(a_j) = \delta_{i_0 j}$$

On a

$$L_{i_0} = \frac{1}{\prod\limits_{j\neq i_0} (a_{i_0} - a_j)} \prod_{j\neq i_0} (X - a_j)$$

$(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et les coordonnées d'un polynôme P dans cette base sont $\big(P(a_0),\dots,P(a_n)\big)$:

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(X)$$