Chapitre 18 : Calcul différentiel

Calcul différentiel 18

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels sont sur $\mathbb{R}$ et E, F et G désignent des espaces vectoriels non nuls de dimension finie. Ils sont munis de normes, notées en général $\| \ \|$. Enfin, U est un ouvert non vide de E et V un ouvert non vide de F.

I Introduction

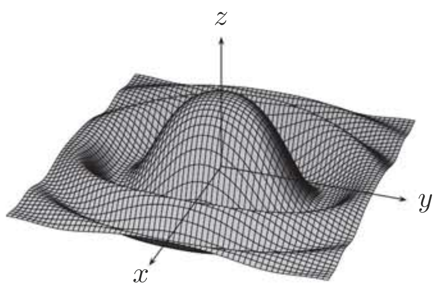
1 Présentation informelle

Ce chapitre a pour but d'étendre si possible aux fonctions définies sur une partie d'un espace vectoriel certains concepts de l'analyse des fonctions de la variable réelle : continuité, dérivabilité, tangente, étude d'extrema, etc.

Considérons une fonction f à valeurs réelles définie sur un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^2$. Son graphe :

$$G = \Big\{ (x, y, f(x, y)) \ ; \ (x, y) \in U \Big\}$$

est alors une surface de $\mathbb{R}^3$.



Pour étudier f, il est naturel de chercher à s'appuyer sur nos connaissances concernant les fonctions de la variable réelle.

Le plus simple est sans doute d'étudier les applications partielles, c'est-à-dire les applications $f_{1,x} : y \mapsto f(x, y)$ et $f_{2,y} : x \mapsto f(x, y)$. D'ailleurs, la représentation des applications partielles est l'un des points de vue adoptés par certains logiciels, tel que Python, pour représenter les surfaces.

Par exemple, dans la figure ci-dessus, les lignes tracées correspondent aux graphes des ces fonctions partielles : intersection de la surface avec des plans verticaux d'équations $x = x_0$ ou $y = y_0$.

Continuité

La démarche qui consiste à étudier les applications partielles est instructive, mais non exempte de pièges. Par exemple, il est facile de vérifier que si f est une fonction continue, alors toutes les applications partielles sont continues. On pourrait facilement penser que la réciproque est vraie, mais il n'en n'est rien.

p.1143

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Démontrer que si f est continue, alors toutes les applications partielles sont continues.
2. En considérant l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\ ; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
démontrer que la réciproque est fausse.
Indication. Considérer $x \mapsto f(x,x)$.

De manière générale, pour les limites et la continuité on se reportera au chapitre 5. De plus, dans certains cas, on peut utiliser la méthode ci-dessous.

Point méthode

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant 0 et $f : U \setminus \{0\} \to F$ une fonction.

Pour établir l'existence d'une limite en 0, il est parfois utile d'évaluer $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et de considérer son comportement lorsque r tend vers 0.

p.1143

Exercice 2 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ par $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$?

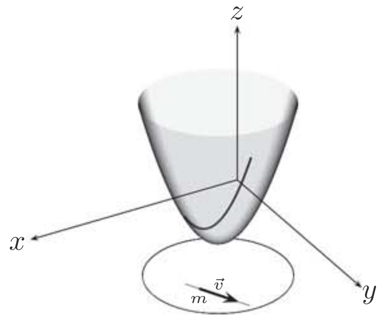
Dérivées partielles

Pour appréhender le comportement d'une fonction au voisinage d'un point (a,b), il est là encore naturel de s'intéresser aux variations de ses applications partielles. Cela conduit à calculer les dérivées de ses applications partielles. Si elles existent, ce sont les dérivées partielles de f, notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, que le lecteur aura déjà rencontrées au cours de ses études dans d'autres disciplines.

Les dérivées partielles constituent un outil pratique, mais à elles seules elles ne permettent pas généraliser la notion de fonction dérivable de manière satisfaisante. L'exercice suivant permet d'appréhender pourquoi.

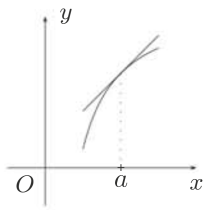
p.1143 **Exercice 3** En prenant l'exemple de l'exercice 1 de la page précédente, montrer qu'une fonction peut avoir des dérivées partielles en $(0,0)$ et pourtant ne pas être continue en ce point.

Étude dans une direction



Plus généralement, toujours dans l'optique d'appréhender le comportement d'une fonction au voisinage d'un point $m \in U$, on peut s'intéresser à f dans une direction donnée. Cela veut dire que l'on peut étudier la fonction $t \mapsto f(m+tv)$, où $v \in \mathbb{R}^2$. Pour que cela soit pertinent, il faut pouvoir faire au voisinage de 0 l'étude suivant toutes les directions. C'est pourquoi en calcul différentiel on ne s'intéresse qu'à des fonctions définies sur des ouverts.

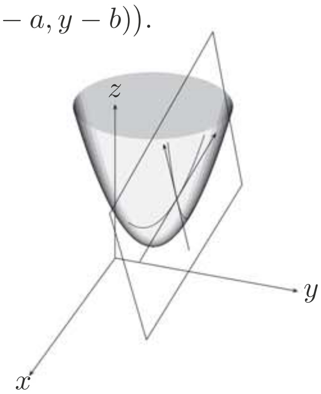
Plans tangents



Nous savons que pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Ce développement limité implique que parmi toutes les droites passant par $(a, f(a))$, la tangente, qui est la droite d'équation $y = f(a)+f'(a)(x-a)$, est celle qui approche le mieux le graphe de f en a.

Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ sera différentiable en (a,b) si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en (a,b) c'est-à-dire s'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel qu'au voisinage de (a,b) on ait :

$$f(x,y) = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \mathrm{o}((x-a, y-b)).$$



Cela signifie *grosso modo* que parmi tous les plans affines, le plan d'équation

$$z = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b)$$

est celui qui approche le mieux le graphe de f en (a,b). C'est le plan tangent au point (a,b,c) à la surface S d'équation $z = f(x,y)$, où l'on a noté $c = f(a,b)$.

Par ailleurs, si $\Gamma(I,\gamma)$ est un arc tracé sur S, il est alors intuitif que la tangente au point (a,b,c) de paramètre t_0 à Γ sera dans le plan tangent au point (a,b,c) à la surface S.

2 Remarques préliminaires et conventions

Invariance par rapport à la norme

Dans la suite du chapitre, nous définirons plusieurs notions telles que les dérivées partielles, les différentielles, etc. Ces définitions se feront à l'aide de limites. Puisque les espaces sont ici tous de dimension finie, ces définitions sont indépendantes du choix des normes.

Identification aux fonctions de plusieurs variables

Lorsque l'on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E, on sait que l'application Φ définie sur $\mathbb{R}^p$ par $\Phi(x_1, \ldots, x_p) = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$ sur E.

À toute application $f : U \to F$ on peut associer une application $f_{\mathcal{B}}$ définie sur $\Phi^{-1}(U)$ par :

$$f_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p) = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right).$$

En outre, le domaine de définition de $f_{\mathcal{B}}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. En effet, en tant qu'application linéaire entres des espaces vectoriels de dimension finie, Φ est continue, et donc $\Phi^{-1}(U)$ est un ouvert. De plus, on peut remarquer, en utilisant de plus le fait que Φ^{-1} est continue, que f est une application continue si, et seulement si, $f_{\mathcal{B}}$ l'est.

Il est clair que l'application $f \mapsto f_{\mathcal{B}}$ définit une bijection de $\mathcal{F}(U, F)$ sur $\mathcal{F}(\Phi^{-1}(U), F)$; ce qui nous autorise à identifier si nécessaire f et $f_{\mathcal{B}}$.

La fonction $f_{\mathcal{B}}$ étant définie sur une partie de $\mathbb{R}^p$, on parle alors de **fonction de plusieurs variables**.

II Différentielle d'une fonction

1 Dérivées partielles

Dérivée suivant un vecteur

Définition 1

Soit $f : U \to F$ une application, a un élément de U et $v \in E$.
La **dérivée de f en a suivant v**, notée $\mathrm{D}_v f(a)$, est, si elle existe, la dérivée de la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ en 0.

Si f admet en tout point de U une dérivée suivant v, l'application $\mathrm{D}_v f : a \mapsto \mathrm{D}_v f(a)$ est l'application **dérivée de f suivant v**.

Remarques

- L'ensemble U étant ouvert, pour tout $a \in U$ la fonction $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$ est définie sur un voisinage de 0. En effet, cela est immédiat si $v = 0$. Sinon, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$, et donc φ est définie sur l'intervalle $\left]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}\right[$.

- Pour toute fonction f, on a $\mathrm{D}_0 f(a) = 0$.
- Si U est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $v \neq 0$, et si a est un point de U, alors $\mathrm{D}_v f(a)$ est définie si, et seulement si, la fonction f est dérivable en $a \in U$. On a alors $\mathrm{D}_v f(a) = v f'(a)$.

Exemples

- Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + 5y$, alors $\mathrm{D}_{(2,3)} f(0, 0) = 15$. En effet, posons $g : t \mapsto f(2t, 3t)$, qui est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $g(t) = 8t^3 + 15t$ et $g'(t) = 24t^2 + 15$. L'existence de la dérivée de f selon $(2, 3)$ en $(0, 0)$ en découle et elle vaut 15.
- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (r, \theta) & \longmapsto & \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ r\sin\theta & -r\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$

  Un calcul direct donne $\mathrm{D}_{(1,1)} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2. \end{array}$

  Pour $(M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

  $$f(M + tH) = M^2 + t(MH + HM) + t^2 H^2.$$

  Il s'ensuit que $\mathrm{D}_H f(M)$ est définie et $\mathrm{D}_H f(M) = MH + HM$.

p.1143 **Exercice 4** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\mathrm{D}_H \exp(0)$.

p.1143 **Exercice 5** Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_p : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^p. \end{array}$

Pour $(M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, calculer $\mathrm{D}_H f_p(M)$.

Dérivées partielles

Définition 2

Supposons $E = \mathbb{R}^p$; soit $j \in [\![1, p]\!]$.

- Pour toute fonction $f : U \to F$ et $j \in [\![1, p]\!]$, la ***j*-ème application partielle en $\boldsymbol{a = (a_1, \dots, a_p)}$** est l'application de la variable réelle :

  $$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_p).$$

- La ***j*-ème dérivée partielle de *f* en *a*** est, si elle existe, la dérivée en 0 de la j-ème application partielle de f en a, que l'on note :

  $$\partial_j f(a) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Remarques

- Puisque U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, les applications partielles sont définies au voisinage de 0.
- La j-ème dérivée partielle de f en a n'est autre que la dérivée de f en a selon le j-ème vecteur de la base canonique.

En fixant une base de E on peut généraliser ces notions aux fonctions définies sur un ouvert d'un espace vectoriel quelconque de dimension finie.

Définition 3

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et une fonction $f : U \to F$.

Pour $a = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k e_k \in U$ et $j \in [\![1, p]\!]$:

- la ***j*-ème application partielle de *f* en *a* dans la base $\mathcal{B}$** est la j-ème application partielle de $f_{\mathcal{B}}$ en $(a_1, \dots, a_p)$;
- la ***j*-ème dérivée partielle de *f* en *a* dans la base $\mathcal{B}$**, notée :

$$\partial_j f(a) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

  est la j-ème dérivée partielle de $f_{\mathcal{B}}$ en $(a_1, \dots, a_p)$.

Si f admet une j-ème dérivée partielle dans la base $\mathcal{B}$ en tout point, l'application définie sur U par $x \mapsto \partial_j f(x)$ est la ***j*-ème dérivée partielle de *f* dans la base $\mathcal{B}$**.

Remarques

- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base, on parle plus simplement de « j-ème dérivée partielle de f en a ». Cela est cohérent avec le cas des fonctions de plusieurs variables traité au début de cette section : il s'agit dans ce cas des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
- Lorsqu'une fonction de plusieurs variables est définie par une expression du type $f(x, y, z, \dots)$, on peut noter la première dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la seconde $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, la troisième $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, etc.
  Plus généralement, si $f : U \to F$ est définie par une expression où les variables sont notées $u_1, \dots, u_p$ (ou toute autre lettre), on pourra noter $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial u_p}$ les dérivées partielles.
- Exploitation des symétries. Si $f : U \to F$ est définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$

stable par l'application $(x,y) \mapsto (y,x)$ et si f vérifie :

$$\forall (x,y) \in U \quad f(x,y) = \alpha f(y,x),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est définie si, et seulement si, $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ l'est et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$

En effet, en dérivant par rapport à t la relation $f(x,t) = \alpha\, f(t,x)$, on obtient $\partial_2 f(x,t) = \alpha\, \partial_1 f(t,x)$, ce qui donne le résultat en remplaçant t par y et en reprenant la notation traditionnelle des dérivées partielles.

On généralisera sans difficulté aux fonctions définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^p$.

Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}\cdot$

   Un calcul simple donne :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2+2xy-x^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}\cdot$$

   Puisque $f(x,y) = -f(y,x)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{y^2-2xy-x^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}\cdot$$

2. Si f est l'application définie sur $\mathbb{R}^p$ par :

$$f(x_1,\dots,x_p) = x_1^1 x_2^2 \cdots x_p^p,$$

   alors la j-ème dérivée partielle en $x = (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p$ est :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_p) = j\, x_1^1 \cdots x_{j-1}^{j-1} x_j^{j-1} x_{j+1}^{j+1} \cdots x_p^p.$$

Attention Rappelons que si $\dim E > 1$, une fonction peut avoir toutes ses dérivées partielles en a sans qu'elle soit continue en a (*cf.* l'exercice 3 de la page 1100).

Plus généralement une fonction peut avoir des dérivées en a suivant tout vecteur sans qu'elle soit continue en a.

p.1144 **Exercice 6** Soit f la application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\ ; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\mathrm{D}_{(u,v)} f\,(0,0)$.
2. Calculer $f(x,x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Conclure.

2 Différentielle

Différentiabilité

Définition 4

Soit $f : U \to F$.

- La fonction f est **différentiable en $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{U}$** s'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle qu'au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h).$$

- La fonction f est **différentiable** si elle est différentiable en tout point de U.

Remarques

- Si f est différentiable en $a \in U$, alors $f(a+h) - f(a) = \mathrm{O}(h)$ au voisinage de 0. En effet l'application u étant linéaire et continue, puisqu'elle est linéaire et définie sur un espace vectoriel de dimension finie, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|u(h)\| \leqslant C\,\|h\|$ pour tout $h \in E$. Par suite, au voisinage de 0 on a $f(a+h) - f(a) = u(h) + \mathrm{o}(h) = \mathrm{O}(h)$.
- On dit qu'une fonction $f : U \to F$ admet un **développement limité à l'ordre 1 en $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{U}$** s'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel qu'au voisinage de 0 on ait $f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h)$. Les locutions « être différentiable en a » et « admettre un développement limité à l'ordre 1 en a » sont donc synonymes.
- La notion de différentiabilité est une notion locale : si $f : U \to F$ est une fonction, $a \in U$ et $V \subset U$ est un voisinage ouvert de a, alors f est différentiable en a si, et seulement si, $f_{|V}$ est différentiable en a.
- Contrairement aux fonctions de la variable réelle, pour lesquelles la dérivabilité concerne des fonctions définies sur un intervalle quelconque, la notion de différentiabilité ne s'applique qu'à des fonctions définies sur des ouverts.

Proposition 1 (Différentiabilité et continuité)

Soit $a \in U$ et $f : U \to F$ une fonction différentiable en a. Alors f est continue en a.

Démonstration.

Si f soit différentiable en a, alors au voisinage de 0 on a $f(a+h) - f(a) = \mathrm{O}(h)$. La continuité de f en a en découle. □

Application linéaire tangente

Lemme 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle qu'au voisinage de 0 on ait $u(h) = \mathrm{o}(h)$.

L'application u est alors nulle.

Démonstration page 1144

Conséquence Si $f \in \mathcal{F}(U,F)$ et $a \in U$, alors il existe au plus une application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que l'on ait $f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h)$ au voisinage de 0.

Définition 5 (Différentielle en un point)

Soit $f : U \to F$. Si f est différentiable en $a \in U$, l'unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que l'on ait $f(a+h) = f(a)+u(h)+\mathrm{o}(h)$ au voisinage de 0 est l'**application linéaire tangente à f en a** ou la **différentielle de f en a**.

Notations

- La différentielle de f en a se note $\mathrm{d}f(a)$.
- La valeur en $h \in E$ de la différentielle de f en a se note $\mathrm{d}f(a) \cdot h$.

Remarques

- La notation $\mathrm{d}f(a) \cdot h$, qui désigne $\big(\mathrm{d}f(a)\big)(h)$, est utilisée pour alléger les écritures. Noter que le point« $\cdot$ » ne correspond pas à un produit scalaire.
- Puisque $\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire entres espaces vectoriels de dimension finie, $\mathrm{d}f(a)$ est continue et au voisinage de 0 on a $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \mathrm{O}(h)$.
- Lorsque $f : U \to F$ est différentiable en a, le développement limité de f en a à l'ordre 1 s'écrit :
$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(h).$$
- Caractère local de la différentielle : si $f : U \to F$ est une fonction différentiable en $a \in U$ et $V \subset U$ est un voisinage ouvert de a, alors la différentielle de f en a et la différentielle de $f_{|V}$ en a coïncident.

Proposition 3 (Cas d'une seule variable)

Supposons $E = \mathbb{R}$ et considérons un intervalle ouvert U.

Une application $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ si, et seulement si, f est dérivable en a et alors $\mathrm{d}f(a)$ est l'application linéaire $h \mapsto h\,f'(a)$.

Principe de démonstration. Utiliser la définition de la dérivabilité et remarquer que les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans F sont les applications de la forme $t \mapsto tu$, avec $u \in F$.

Démonstration page 1144

Remarque Avec les notations de la proposition précédente, $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$.

Définition 6

Soit une application $f : U \to F$.

- Si f est différentiable, alors la **différentielle de f** est l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ & x & \longmapsto & \mathrm{d}f(x). \end{array}$$

- La fonction f est de **classe $\mathcal{C}^1$** si elle est différentiable et si l'application $\mathrm{d}f$ est continue.

Notation L'ensemble des fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ définies sur U à valeurs dans F est noté $\mathcal{C}^1(U,F)$.

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : U \to F$ est différentiable en a en utilisant la définition :

- il faut trouver au préalable un « candidat » u pour $\mathrm{d}f(a)$,
- il faut ensuite établir $f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h)$ au voisinage de 0.

Pour trouver un « candidat » on peut évaluer $f(a+h) - f(a)$ et chercher à détecter une partie « principale » linéaire.
Toutefois, des méthodes souvent plus efficaces seront données plus loin.

Exemple Si E est un espace euclidien, alors $f : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable.
En effet, E est un ouvert et pour tout $(x,h) \in E^2$:

$$f(x+h) = f(x) + 2(\,x \mid h\,) + \|h\|^2.$$

Ainsi, au voisinage de 0, on a $f(x+h) = f(x) + 2(\,x \mid h\,) + \mathrm{o}(h)$. Puisque l'application $u : h \mapsto (\,x \mid h\,)$ est linéaire, il s'ensuit que f est différentiable en x et $\mathrm{d}f(x) : h \mapsto 2(\,x \mid h\,)$.

p.1145 **Exercice 7** Démontrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^2 \end{array}$ est différentiable et donner sa différentielle.

p.1145 **Exercice 8** La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

est-elle différentiable en 0 ?

Différentielle et dérivée selon un vecteur

Proposition 4

Soit $f : U \to F$ une fonction différentiable en $a \in U$. Alors la dérivée de f en a selon tout vecteur $v \in E$ existe et :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v.$$

Principe de démonstration. Remplacer h par tv dans : Démonstration page 1145

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \|h\|\, \varepsilon(h).$$

Corollaire 5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $f : U \to F$.

- Si f est différentiable en $a \in U$, alors, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la dérivée partielle $\partial_j f(a)$ est définie et $\partial_j f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot e_j$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors toutes les dérivées partielles sont définies et continues.

Démonstration page 1146

p.1146 **Exercice 9** Démontrer qu'une norme sur E n'est jamais différentiable en 0.

Corollaire 6

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Si $f : U \to F$ est une fonction différentiable en $a \in U$, alors, pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{p} h_j\, \partial_j f(a).$$

Principe de démonstration. Utiliser la linéarité de $\mathrm{d}f(a)$ et le corollaire 5.

Démonstration page 1146

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : U \to F$ est différentiable en a en utilisant la définition, on peut introduire une application définie :

- soit par $u : h \mapsto \mathrm{D}_h f(a)$, puis vérifier que u est linéaire,
- soit par $u : h \mapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a)$.

Ensuite, on cherche à démontrer que u est la différentielle de f en a, c'est-à-dire que $f(a+h) - f(a) - u(h) = \mathrm{o}(h)$.

p.1146 **Exercice 10** La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

est-elle différentiable en 0 ?

Premiers exemples

Proposition 7 (Différentielles des applications constantes)

Soit $f : U \to F$ une fonction constante. Elle est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}f = 0$.

Démonstration page 1147

Remarque La réciproque est fausse. On verra qu'elle est vraie si U est de plus connexe par arcs.

p.1147 **Exercice 11** Donner un exemple de fonction différentiable non constante dont la différentielle est nulle.

Proposition 8 (Différentielle d'une application linéaire)

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. L'application u est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}u(a) = u$ pour tout $a \in U$.

Démonstration page 1147

Remarque Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. La restriction $u_{|U}$ est différentiable en tout point a de U et $\mathrm{d}(u_{|U})(a) = u$.

Proposition 9 (Différentielle d'une application bilinéaire)

Toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(a,b) \in E \times F$ on a :

$$\forall (h,k) \in E \times F \quad \mathrm{d}B(a,b)\cdot(h,k) = B(a,k) + B(h,b).$$

Démonstration page 1147

Matrices jacobiennes

Posons $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1,\dots,e'_n)$ une base de F. Soit $f : U \to F$ une fonction différentiable en $a \in U$. Notons $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i e'_i$. Rappelons que les f_i sont les applications composantes de f dans la base $\mathcal{B}'$. On sait qu'une fonction de la variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie est dérivable si, et seulement si, toutes les applications composantes sont dérivables (*cf.* la proposition 3 de la page 345). Ainsi, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, puisque $\partial_j f(a)$ est définie, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les dérivées partielles $\partial_j f_i(a)$ sont définies et $\partial_j f(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\, e'_i$.

Proposition 10

Avec les hypothèses précédentes, la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est $\left(\partial_j f_i(a)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Démonstration page 1148

Remarque Avec les notations de la proposition 10, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors toutes les applications $\partial_j f_i$ sont continues.

Définition 7

Lorsque $E=\mathbb{R}^p$ et $F=\mathbb{R}^n$ et $f:U\to\mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable en $a\in U$, la **matrice jacobienne de f en a**, notée $Jf(a)$ est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques, c'est-à-dire :

$$Jf(a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a)\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

Remarques La matrice $Jf(a)$ se note également $\left(\dfrac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_p)}\right)(a)$.

III Opérations sur les fonctions différentiables

1 Opérations algébriques

Proposition 11 (Linéarité de la différentielle)

Soit f et g deux applications de U dans F.

1. Si f et g sont différentiables en $a\in U$, alors pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f+\mu g$ est différentiable en a et :
$$\mathrm{d}(\lambda f+\mu g)(a)=\lambda\,\mathrm{d}f(a)+\mu\,\mathrm{d}g(a).$$
2. Si f et g sont différentiables sur U, alors pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f+\mu g$ est différentiable et :
$$\mathrm{d}(\lambda f+\mu g)=\lambda\,\mathrm{d}f+\mu\,\mathrm{d}g.$$
3. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f+\mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1148

Corollaire 12

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,F)$.

Proposition 13 (Produit de fonctions réelles)

Soit f et g deux applications de U dans $\mathbb{R}$.

1. Si f et g sont différentiables en a, alors fg est différentiable en a et :
$$\mathrm{d}(fg)(a) = g(a)\,\mathrm{d}f(a) + f(a)\,\mathrm{d}g(a).$$
2. Si f et g sont différentiables sur U, alors fg est différentiable et :
$$\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g.$$
3. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f\,g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1148

Corollaire 14

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ est muni d'une structure d'algèbre pour les lois usuelles.

Démonstration. Les théorèmes 11 de la page ci-contre et 13 donnent facilement que $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$. □

Proposition 15

Les applications polynomiales sur E sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1149

p.1149 **Exercice 12** Justifier que l'application f définie par $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+xyz$ sur $\mathbb{R}^3$ est différentiable et donner $\mathrm{d}f$.

p.1149 **Exercice 13** Justifier que l'application det définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle.

2 Composition

Théorème 16

Soit $f : U \to F$ et $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$.

1. Si f est différentiable en $a \in U$ et si g est différentiable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :
$$\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a).$$
2. Si f et g sont différentiables sur U et V respectivement, alors $g \circ f$ est différentiable.
3. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1150

p.1151 **Exercice 14** Avec les notations du théorème 16 de la page précédente, on trouve parfois la formule $\mathrm{d}(g \circ f) = (\mathrm{d}g \circ f) \cdot \mathrm{d}f$. Quel sens donner au « $\cdot$ » dans cette expression ?

Image d'un arc par une fonction différentiable

Proposition 17

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, ainsi que $\gamma : I \to U$ et $f : U \to F$. Si γ est dérivable en $t_0 \in I$ et si f est différentiable en $a = \gamma(t_0)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et :

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}f(a) \cdot \gamma'(t_0).$$

Principe de démonstration. Remarquer que $(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}(f \circ \gamma)(t_0) \cdot 1$ et utiliser le théorème 16 de la page précédente. Démonstration page 1151

Cas particulier fondamental

Dans le cas où $\gamma : t \mapsto a + th$ est définie sur $[0,1]$, alors, pour tout $t \in [0,1]$ on a $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(a+th) \cdot h$, *i.e.* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(a+th)\big) = \mathrm{d}f(a+th) \cdot h = \mathrm{D}_h f(a+th).$$

Un autre cas particulier important

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$. Si $f : U \to F$ est une fonction différentiable et si $t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_p(t))$ est une fonction dérivable sur un intervalle d'intérieur non vide I à valeurs dans U, alors la fonction $g : t \mapsto f(x_1(t), \ldots, x_p(t))$ est dérivable et, pour tout $t \in I$:

$$\boxed{g'(t) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t) \, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(t), \ldots, x_p(t)).}$$

Exemple Considérons une quantité physique qui dépend du temps et de l'espace. Cela peut être modélisé en introduisant une fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & f(x,y,z,t). \end{array}$

La position dans l'espace d'un point matériel au cours du temps est donnée par une fonction $\gamma : t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Posons $h : t \mapsto f\big(x(t), y(t), z(t), t\big)$. Si f est différentiable et γ dérivable, alors la fonction h est dérivable et :

$$h'(t) = x'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t), t\big) + y'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t), t\big) + z'(t)\,\frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t), t\big) + \frac{\partial f}{\partial t}\big(\gamma(t), t\big).$$

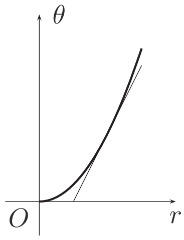
On écrit de manière plus simple, en omettant le point sur lequel les dérivées partielles de f sont évaluées :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f\big(x(t), y(t), z(t), t\big)\Big) = x'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x} + y'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y} + z'(t)\,\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

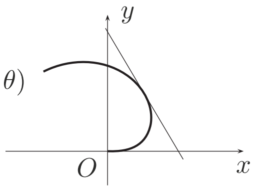
Interprétation géométrique

Soit t_0 un paramètre régulier d'un arc Γ paramétré par γ. Si $\mathrm{d}f$ est injective en $a = \gamma(t_0)$, alors t_0 est un paramètre régulier de l'arc $f(\Gamma)$. Dans ce cas, si $a + \mathbb{R}\vec{u}$ est la tangente à Γ au point de paramètre t_0, alors la tangente à $f(\Gamma)$ au point de paramètre t_0 est $f(a) + \mathbb{R}\,\mathrm{d}f(a)\cdot\vec{u}$.

Exemple Considérons l'arc Γ paramétré par $\gamma : t \mapsto (t, t^2)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'application f définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(r,\theta) = (r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$.



$$(r,\theta) \overset{f}{\longmapsto} (r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$$



Admettons que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ (conséquence du fait que ses fonctions composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ par les théorèmes généraux). La matrice de $\mathrm{d}f(r,\theta)$ dans la base canonique est :

$$Jf(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pour tout $(r,\theta) \in U$, on a $\det\big(Jf(r,\theta)\big) = r$ et donc $\mathrm{d}f(r,\theta)$ est injective. Le point a de Γ de paramètre $r > 0$ est régulier pour Γ ; la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, 2r)$. Ainsi, le point de paramètre r est régulier pour l'arc $f(\Gamma)$. La tangente passe par $b = \gamma(a) = (r\cos r^2, r\sin r^2)$ et elle est dirigée par $\vec{v} = (\cos r^2 - 2r^2\sin r^2, \sin r^2 + 2r^2\cos r^2)$. Ce dernier vecteur peut être obtenu, soit directement en dérivant $r \mapsto (r\cos r^2, r\sin r^2)$, soit matriciellement :

$$V = Jf(r, r^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2r \end{pmatrix}.$$

Composition par une fonction de la variable réelle

Proposition 18

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, où I est un intervalle d'intérieur non vide et $f(U) \subset I$.
L'application $\varphi \circ f$ est alors différentiable et :

$$\mathrm{d}(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\,\mathrm{d}f.$$

Si f et φ sont de plus de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1151

p.1152 **Exercice 15** On suppose que F est un espace euclidien. Soit $f : U \to F$ une fonction différentiable en $a \in U$ telle que $f(a) \neq 0$. Montrer que la fonction $\|f\|$ est différentiable en a et calculer $\mathrm{d}\|f\|(a)$.

Proposition 19 (Différentielle d'une inverse)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction ne s'annulant pas.

- Si f est différentiable en a, alors $1/f$ est différentiable en a et :
$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{\mathrm{d}f(a)}{f^2(a)}.$$
- Si f est différentiable sur U, alors $1/f$ est également différentiable et :
$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\mathrm{d}f}{f^2}.$$
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $1/f$ est également de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. Il s'agit de la proposition 18 de la page précédente appliquée à f et la fonction $\varphi : t \mapsto 1/t$. □

Exemple Toute fonction rationnelle sur E est différentiable sur tout ouvert où elle est définie.

Différentielles et applications linéaires

Proposition 20 (Composition par une application linéaire)

Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f : U \to F$.

- Si f est différentiable en $a \in U$, alors $u \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(u \circ f)(a) = u \circ \mathrm{d}f(a)$.
- Si f est différentiable sur U, alors $u \circ f$ est différentiable et :
$$\mathrm{d}(u \circ f) = u \circ \mathrm{d}f.$$
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $u \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Principe de démonstration. Utiliser le théorème 16 de la page 1111 et la proposition 8 de la page 1109.

Démonstration page 1152

Corollaire 21

Soit $\mathcal{B}'$ une base de F et $f : U \to F$.

1. La fonction f est différentiable en $a \in U$ si, et seulement si, toutes les applications composantes sont différentiables en a et l'on a alors :
$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \big(\mathrm{d}f(a)\big)_i = \mathrm{d}f_i(a).$$
2. La fonction f est différentiable sur U si, et seulement si, toutes les applications composantes sont différentiables.
3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, toutes les applications composantes sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1152

p.1152

Exercice 16 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M^p$.

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $\mathrm{d}f$.

Notation différentielle

Cette notation est hors programme, mais elle est omniprésente en physique, en science de l'ingénieur, etc.
On suppose E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, l'application $\sum\limits_{k=1}^{p} x_k e_k \mapsto x_j$ est linéaire. Elle est donc différentiable et égale à sa différentielle en tout point. Cela mène à noter, pour $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}x_j : & E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & x_j. \end{array}$$

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en $a \in U$, pour tout $h \in E$ on a :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, h_k.$$

Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut alors écrire :

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, \mathrm{d}x_j.$$

Si de plus f est différentiable sur U : $\boxed{\mathrm{d}f = \sum\limits_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j}$

Différentielles et applications bilinéaires

Théorème 22

Soit F_1 et F_2 deux espaces vectoriels non nuls de dimension finie et $B : F_1 \times F_2 \to F$ une application bilinéaire. Considérons également $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$ deux applications et posons :

$$B(f_1, f_2) : x \mapsto B\big(f_1(x), f_2(x)\big).$$

- Si f_1 et f_2 sont différentiables en $a \in U$, alors $B(f_1, f_2)$ est différentiable en a et :

  $$\forall h \in E \quad \mathrm{d}\big(B(f_1, f_2)\big)(a) \cdot h = B\big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h, f_2(a)\big) + B\big(f_1(a), \mathrm{d}f_2(a) \cdot h\big).$$

- Si f_1 et f_2 sont différentiables sur U, alors $B(f_1, f_2)$ est différentiable.
- Si f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $B(f_1, f_2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration page 1152

Remarque On retrouve de manière indépendante le résultat de la proposition 13 de la page 1111 concernat le produit de fonctions différentiables.

Exemple Supposons que F soit un espace euclidien. Si $f : U \to F$ et $g : U \to F$ sont deux applications différentiables en $a \in U$, alors $\varphi = (\, f \mid g\,)$ est différentiable en a et :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}\varphi(a) \cdot h = (\, \mathrm{d}f(a) \cdot h \mid g(a)\,) + (\, f(a) \mid \mathrm{d}g(a) \cdot h\,).$$

En particulier :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}\left(\|f\|^2\right)(a) \cdot h = 2\,(\, f(a) \mid \mathrm{d}f(a) \cdot h\,).$$

Corollaire 23

Si F est en plus muni d'une structure d'algèbre, alors $\mathcal{C}^1(U, F)$ est une algèbre pour les lois usuelles.

p.1153 **Exercice 17** Soit f l'application définie sur $\mathcal{GL}_n(\mathrm{IR})$ par $f(M) = M^{-1}$.

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $\mathrm{d}f$.

3 Application au calcul des dérivées partielles

Proposition 24 (Matrice jacobienne d'une composée)

Supposons $E = \mathrm{IR}^p$, $F = \mathrm{IR}^n$ et $G = \mathrm{IR}^m$. Soit $f : U \to F$ et $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$.
Si f est différentiable en $a \in U$ et si g est différentiable en $b = f(a)$, alors :

$$J(g \circ f)(a) = Jg(b) \times Jf(a)$$

Démonstration.

Il s'agit de la traduction matricielle du premier point du théorème 16 de la page 1111. □

La proposition précédente est également un cas particulier du théorème suivant.

Théorème 25

Soit $f : U \to F$ différentiable en $a \in U$ et $g : V \to G$ différentiable en $b = f(a)$ telles que $f(U) \subset V$. On pose $h = g \circ f$.
Dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a alors pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\partial_j h(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\, \partial_i g(b).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1153

Utiliser la relation $\partial_j h(a) = \mathrm{d}h(a) \cdot e_j$, ainsi que la différentielle de la composée de deux applications différentiables et l'expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles.

Remarques

- La formule qui est donnée est plus facile à retenir avec les notations $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$:

$$\boxed{\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\,\frac{\partial g}{\partial y_i}(b)} \tag{1}$$

- Dans le cas où g est à valeurs réelles, les $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y_i}(b)$ sont des scalaires. On peut alors réécrire (1) dans un ordre « plus naturel » :

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\cdot$$

Règle de la chaîne

On rencontre très fréquemment le cas particulier où $E=\mathbb{R}^p$, $F=\mathbb{R}^n$ et $G=\mathbb{R}$. Considérons $f:V\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable ainsi que des fonctions différentiables $x_i:U\to\mathbb{R}$, avec $i\in[\![1,n]\!]$, telles que l'application :

$$\Phi : u\mapsto \big(x_1(u),\dots,x_n(u)\big)$$

soit à valeurs dans V. Considérons enfin g l'application définie par :

$$\forall (u_1,\dots,u_p)\in V\quad g(u_1,\dots,u_p)=f\big(x_1(u_1,\dots,u_p),\dots,x_n(u_1,\dots,u_p)\big),$$

c'est-à-dire $g=f\circ\Phi$. L'application Φ étant différentiable, le théorème 25 de la page précédente donne, pour tout $j\in[\![1,p]\!]$ et $(u_1,\dots,u_p)\in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial u_j}(u_1,\dots,u_p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x_1(u_1,\dots,u_p),\dots,x_n(u_1,\dots,u_p)\big)\,\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1,\dots,u_p)\cdot$$

On retient facilement cette relation, dite **règle de la chaîne**, sous la forme concise ci-dessous, où les points où sont évaluées les dérivées partielles sont sous-entendus.

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial u_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_j}}$$

Cette notation est certes abusive, mais elle est très efficace. Il faut simplement ne pas perdre de vue, pour chaque dérivée partielle, le point où elle est évaluée.

Exemple Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Par opérations sur les fonctions différentiables, les applications $(r,\cos\theta)\mapsto r\cos\theta$ et $(r,\cos\theta)\mapsto r\sin\theta$ sont différentiables. Par conséquent la fonction g est différentiable et pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial g}{\partial\theta}=-r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\cdot$$

p.1153

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
On pose $g : (x, y) \mapsto f(x+y\,,\, xy)$. Calculer en tout point (x, y) les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

IV Fonctions numériques

1 Gradient

Dans cette section, E est un espace euclidien.
Rappelons (*cf.* le théorème 5 de la page 798) que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique $u \in E$ tel que :

$$\forall h \in E \quad \varphi(h) = (\, u \mid h\,).$$

Il s'ensuit que si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, il existe un unique $u \in E$ tel que :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = (\, u \mid h\,).$$

Cela conduit à la définition suivante.

Définition 8

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$. Le **gradient de f en a**, noté $\nabla f(a)$, est l'unique élément de E vérifiant :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = (\, \nabla f(a) \mid h\,).$$

Proposition 26 (Composantes du gradient en base orthonormée)

On suppose E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.
Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en $a \in U$, alors :

$$\nabla f\,(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a)\, e_j.$$

Démonstration page 1154

Corollaire 27

On munit $E = \mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique. Si $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$, alors :

$$\nabla f\,(a) = \big(\partial_1 f(a), \ldots, \partial_p f(a)\big).$$

Remarque Lorsque f et g sont des fonctions réelles différentiables définies sur un ouvert d'un espace euclidien et φ une fonction réelle de la variable réelle, on obtient facilement les relations suivantes, qui ne sont que des reformulations des calculs de différentielle :

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g\\ \nabla(fg)=g\,\nabla f+f\,\nabla g\\ \nabla(\varphi\circ f)=(\varphi'\circ f)\,\nabla f\\ \nabla\left(\frac{1}{f}\right)=-\frac{\nabla f}{f^2}\end{gathered}}$$

Première interprétation géométrique du gradient

De manière informelle, le gradient donne la direction de « variation maximale » de f. Plus précisément, on dispose du résultat suivant.

Proposition 28

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$.
Si $\nabla f(a) \neq 0$, alors la fonction $h \mapsto \mathrm{D}_h f(a)$ restreinte à la sphère unité admet un unique maximum. Celui-ci est le point de la sphère colinéaire et de même sens que $\nabla f(a)$.

Principe de démonstration. Démonstration page 1154

Utiliser l'expression $\mathrm{d}f(a)\cdot h = (\,\nabla f(a) \mid h\,)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Interprétation géométrique

La proposition précédente indique que $\nabla f(m)$ donne la direction dans laquelle f croît le plus vite au voisinage de m.
Considérons une surface S d'équation $z = f(x,y)$. On peut de manière informelle interpréter la proposition 28 de la manière suivante : parmi toutes les droites affines tangentes à S en $(x_0,y_0,z_0) \in S$, il en existe une unique de « pente » maximale. Celle-ci est la tangente en 0 à l'arc paramétré par :

$$\gamma : t \mapsto \big(x_0+ta, y_0+tb, f(x_0+ta, y_0+tb)\big),$$

où $m=(x_0,y_0)$, et $\nabla f(m)=(a,b)$.
Voici une façon ludique de résumer cela : en haut d'une pente de ski, pour dévaler la pente il vaut mieux positionner ses skis dans le sens opposé du gradient, du moins si l'on veut aller vite.

2 Extrema

Définition 9 (Extremum local)

Soit A une partie de E, ainsi qu'une application $f : A \to \mathbb{R}$ et $x \in A$.

- La fonction f admet un **maximum local** en a s'il existe un voisinage W de a tel que :
$$\forall y \in W \cap A \quad f(y) \leqslant f(x).$$
- La fonction f admet un **minimum local** en a s'il existe un voisinage W de a tel que :
$$\forall y \in W \cap A \quad f(y) \geqslant f(x).$$
- La fonction f admet un **extremum local** en a si elle admet un maximum local ou un minimum local.

Remarques

- Il est clair si f admet un extremum (global) en a, alors il admet un extremum local.
- Dans ce contexte, déterminer la nature d'un point x, consiste à déterminer si f admet un maximum, un minimum ou pas, en x.

Théorème 29

Soit une application $f : U \to \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en a et si f est différentiable en a, alors $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Principe de démonstration. Remarquer que si f admet un extremum local en a, alors pour tout $h \in E$ la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto f(a+th)$ admet un extremum local en 0.

Démonstration page 1154

Jusqu'à présent dans ce chapitre nous n'avons considéré que des fonctions définies sur des ouverts. Si A est une partie non vide de E, on dira que $f : A \to F$ est différentiable en a si, et seulement si, $a \in \mathring{A}$ et $f_{|\mathring{A}}$ est différentiable en a. Dans ces conditions la différentielle de f en a est celle de $f_{|\mathring{A}}$.

Définition 10

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$. Le point a est un **point critique de f** :

- si le point a est un élément de l'intérieur de A et
- si la fonction f est différentiable en a avec $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Remarque Les extrema, s'ils existent, d'une fonction différentiable sur un ouvert sont atteints en des points critiques de la fonction.

Attention Un point critique n'est pas un extremum en général.

Exemple Considérons la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Il est facile de vérifier que $(0,0)$ est un point critique de f. Ce n'est pas un extremum local. En effet $f(0,0) = 0$ tandis que la fonction de variable réelle $x \mapsto f(x,0)$ définie sur $\mathbb{R}$ prend des valeurs strictement positives dans tout voisinage de 0 et la fonction $y \mapsto f(0,y)$ définie sur $\mathbb{R}$ prend des valeurs strictement négatives dans tout voisinage de 0.

Attention Une fonction peut avoir en un point un minimum local dans toutes les directions, sans pour autant que ce point soit un minimum local.

p.1154

Exercice 19 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y^2(y^2 - x^4). \end{array}$

1. Visualiser sur un dessin (x en abscisse et y en ordonnée) les trois domaines de $\mathbb{R}^2$ où la fonction f est nulle, où elle prend des valeurs strictement positives, et où elle prend des valeurs strictement négatives.
2. Justifier alors rigoureusement ce que la question précédente permet d'intuiter :
   - pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi : t \mapsto f(tu)$ admet un minimum local en 0 ;
   - pourtant, la fonction f ne présente pas de minimum local en 0.

Recherche d'extrema

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en a, on cherche à démontrer que $h \mapsto f(a+h) - f(a)$ est à valeurs positives au voisinage de 0.

Remarque On adaptera *mutatis mutandis* pour démontrer que f admet un maximum local en a.

p.1155

Exercice 20 Le point $(0,0)$ est-il un extremum local pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3 - x^2y^5$?

Point méthode

Pour trouver les extrema (locaux ou globaux) d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$:

1. on cherche les points critiques,
2. puis on étudie la nature de chacun des points critiques et des points où f n'est pas différentiable, en particulier les points de $A \setminus \overset{\circ}{A}$.

p.1155 **Exercice 21** Déterminer les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2 + y^2$.

Utilisation de la compacité

Lorsque l'on cherche les extrema d'une fonction continue sur un compact non vide, les raisonnements sont souvent allégés par le fait que l'on sait *a priori* qu'il y a un maximum et un minimum.

Exemple Déterminons les extrema de :

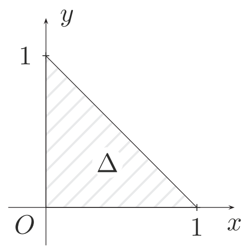
$$f : \begin{array}{rcl} \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy\,(1-x-y)\,, \end{array}$$

où $\Delta = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant 1\big\}$.

- La fonction f est continue car polynomiale et sa restriction à $\mathring{\Delta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- L'ensemble Δ est un compact. Il est en effet fermé, car c'est l'intersection de trois demi-plans fermés. De plus, pour tout $(x,y) \in \Delta$, on a :

  $$0 \leqslant x \leqslant 1 - y \leqslant 1$$

  et de même pour y. Par suite, $\Delta \subset [0,1]^2$. Ainsi, Δ est un fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie, il s'agit bien d'une partie compacte.

- Il est clair que $\mathring{\Delta} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \text{ et } x+y < 1\big\}$. Par ailleurs, pour tout $(x,y) \in \Delta$, on a $f(x,y) \geqslant 0$.
  Sur tout point de la frontière, on a $f(x,y) = 0$ et donc tous les points de la frontière sont des point où f atteint son minimum. Puisque f est à valeurs strictement positives sur l'intérieur de Δ, nous avons déterminé tous les minima de f.
- Par continuité et compacité, f admet un maximum et puisque que f n'est pas la fonction nulle, ce maximum est atteint en des points de l'intérieur de Δ. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur, il s'agit de points critiques.
- Pour tout $(x,y) \in \mathring{\Delta}$ on a :

  $$\nabla f(x,y) = \big(y(1-2x-y)\,,\, x(1-x-2y)\big).$$

  Par conséquent, (x,y) est un point critique si, et seulement si, :

  $$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

  i.e. $x = y = 1/3$. Par suite, la fonction f a un seul point critique. Ainsi $(1/3, 1/3)$ est l'unique point où f atteint son maximum.

La compacité peut parfois être utilisée pour établir l'existence d'extrema même lorsque la fonction est définie sur un ouvert.

p.1155

Exercice 22 Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1. Démontrer que f admet un minimum.
2. Que peut-on dire si de plus la fonction f est différentiable et admet un unique point critique ?

V Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Dans toute cette section, E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.

1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème fondamental

Théorème 30

Soit $f : U \to F$ une fonction. Les assertions ci-dessous sont équivalentes.

(i) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(ii) Toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues.

Démonstration (non exigible) page 1156

Point méthode

Pour démontrer qu'une fonction $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$:

- on cherche d'abord à utiliser les théorèmes généraux de manipulation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$;
- si ceux-ci ne s'appliquent pas, on peut chercher à montrer que dans une base donnée toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues sur U.

Exemples

1. Par les théorèmes généraux, la fonction $f : (x,y) \mapsto e^x \ln\left(x^2 + 2y^2 + 1\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, les fonctions $(x,y) \mapsto x^2 + 2y^2 + 1$ et $(x,y) \mapsto x$ sont polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque les fonctions exp et ln sont de classe $\mathcal{C}^1$, par composition et produit, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

   Montrons que $g : (x,y) \mapsto \int_0^x f(t,y)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

   - Calculons les dérivées partielles de g. Il est immédiat que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y).$$
   Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$. Notons $I = [0,x]$ si $x > 0$ et $I = [x,0]$ sinon.
     * Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t,y)$ est continue.

* Pour tout $t \in I$, l'application $y \mapsto f(t,y)$ est continue.
* Si M est un majorant de $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ sur $I \times [-a,a]$ — il en existe un car la fonction $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ est continue sur le compact $I \times [-a,a]$ —, on a :

$$\forall (t,y) \in I \times [-a,a] \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \leqslant M$$

  et la fonction constante M est intégrable sur le segment I.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre avec hypothèse de domination sur tout segment, la fonction $y \mapsto \int_0^x f(t,y)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{IR}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\,\mathrm{d}t.$$

• Démontrons la continuité des dérivées partielles. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x} = f$ est continue. Par ailleurs, pour $(x,y) \in \mathrm{IR}^2$, en posant le changement de variable $t = xu$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)\,\mathrm{d}u.$$

Montrons que $\Phi : (x,y) \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)\,\mathrm{d}u$ est continue, pour cela nous ferons une domination au voisinage de tout point. Soit $a > 0$. Par continuité, la fonction $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ est majorée par une constante M sur $K_a = [-a,a]^2$ et donc :

* pour tout $(x,y) \in K_a$, la fonction $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)$ est continue ;
* pour tout $u \in [0,1]$, la fonction $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)$ est continue ;
* on a la domination :

$$\forall (x,y) \in K_a \quad \forall u \in [0,1] \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)\right| \leqslant M$$

  et la fonction constante M est intégrable sur le segment $[0,1]$.

Comme tout point de IR^2 se trouve dans l'intérieur d'un tel compact K_a, on a domination de $\frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)$ au voisinage de tout point de IR^2. Par conséquent, la fonction $(x,y) \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu,y)\,\mathrm{d}u$ est continue sur IR^2. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

p.1157

Exercice 23 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi que deux fonctions $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $\beta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Déduire de l'exemple 2 de la page 1123 que $F : x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer F'.

p.1157

Exercice 24 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ admet-elle un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et intégration

Théorème 31

Soit $f : U \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour toute application $\gamma : [0,1] \to E$ à valeurs dans U de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 1158

Introduire $\varphi : t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)$ et justifier $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque

Noter que ce résultat est valable *pour toute application* $\gamma : [0,1] \to E$ à valeurs dans U de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Lemme 32

Supposons que U soit une partie (ouverte) convexe de E ; soit $f : U \to F$.
La fonction f est alors constante si, et seulement si, f est différentiable et $\mathrm{d}f = 0$.

Démonstration page 1158

Théorème 33

Supposons que U soit un ouvert connexe par arcs de E ; soit $f : U \to F$.
La fonction f est alors constante si, et seulement si, f est différentiable et $\mathrm{d}f = 0$.

Démonstration (non exigible) page 1158

2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Dérivées partielles successives

Rappelons que E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.
Les dérivées partielles d'une fonction $f : U \to F$, lorsqu'elles existent en tout point de U sont des applications de U dans F. On peut donc s'intéresser à leurs dérivées partielles éventuelles.

Définition 11

Soit $(j_1, \ldots, j_k) \in [\![1, p]\!]^k$.
Lorsqu'elle existe, la fonction $\partial_{j_1}\Big(\partial_{j_2}(\cdots(\partial_{j_k} f)\cdots)\Big)$ est appelée **dérivée partielle de f selon les indices $(j_1, \ldots, j_k)$** et notée $\partial_{j_1}\partial_{j_2}\cdots\partial_{j_k} f$ ou $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}$.

On appelle **dérivée partielle d'ordre k**, une dérivée partielle par rapport à une liste d'indices de longueur k.

Remarque Munissons F d'une base $\mathcal{B}'$. Pour $(j_1, \ldots, j_k) \in [\![1, p]\!]^k$, les propriétés de la dérivation dans un espace vectoriel de dimension finie donnent, que $\partial_{j_1}\partial_{j_2}\cdots\partial_{j_k} f$ est définie si, et seulement si, toutes les dérivées partielles selon les indices $(j_1, \ldots, j_k)$ des applications composantes sont définies.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 12

Une application $f : U \to F$ est de **classe $\mathcal{C}^k$** si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.

On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans F.

Remarques

- On convient que les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues.
- Lorsque F est muni d'une base $\mathcal{B}'$, le lien entre la continuité d'une fonction à valeurs dans F et la continuité de ses applications composantes, donne qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ si, et seulement si, toutes les applications composantes f_i sont de classe $\mathcal{C}^k$.
- Il est clair que la restriction à un ouvert $V \subset U$ d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemples

1. Les fonctions constantes sont de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, toutes ses dérivées partielles sont nulles.

2. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors u de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont constantes (*cf.* la proposition 20 de la page 1114) et toutes les dérivées partielles d'ordre $k > 1$ sont nulles.
3. Le **laplacien** d'une application $f \in \mathcal{C}^2(U,F)$ est :
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}.$$
Une application est dite **harmonique** si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et si son laplacien est nul.

Il vient de la définition et du théorème fondamental le résultat suivant.

Proposition 34

Si $f \in \mathcal{C}^k(U,F)$, alors f est de classe $\mathcal{C}^i$, pour tout $i \in [\![0,k]\!]$.

Démonstration page 1158

Corollaire 35

Une application $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 1$) si, et seulement si, toutes les dérivées partielles de f d'ordre 1 existent et sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Démonstration page 1158

Définition 13

Une application f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** si elle est de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On note $\mathcal{C}^\infty(U,F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de U dans F.

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Les résultats sur les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ se généralisent sans difficulté aux applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 36

Soit f et g sont deux applications de U dans F de classe $\mathcal{C}^k$.
Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration page 1159

Remarque Il s'ensuit que $\mathcal{C}^k(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,F)$.

Proposition 37

Soit F_1 et F_2 deux espaces vectoriels non nuls de dimension finie et $B : F_1 \times F_2 \to F$ une application bilinéaire. Soit également $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$ deux applications de classe $\mathcal{C}^k$. L'application $B(f_1,f_2)$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration page 1159

Exemples

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$. Le produit fg est alors de classe $\mathcal{C}^k$.
2. Supposons que F soit un espace euclidien. Si $f : U \to F$ et $g : U \to F$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\varphi = (\,f \mid g\,)$ est de classe $\mathcal{C}^k$. En particulier $\|f\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarques

- Il vient de la proposition 37 de la page précédente que $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ est une une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.
- Plus généralement, si F est une algèbre, alors $\mathcal{C}^k(U\,,\,F)$ est une algèbre.
- En particulier, $\mathcal{C}^k(U\,,\,\mathbb{C})$ est une algèbre, en considérant $\mathbb{C}$ comme une $\mathbb{R}$-algèbre.

Proposition 38

Les applications polynomiales sur E sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. C'est une conséquence du fait que les dérivées partielles d'une application polynomiale sont elles-mêmes des fonctions polynomiales. □

Exemples

1. L'application det définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
2. Si $p \in \mathbb{N}$ et si f_p est l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_p(M) = M^p$, alors f_p est de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème 39

Soit $f : U \to F$ et $g : V \to G$ deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $f(U) \subset V$. L'application $g \circ f$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration page 1159

Exemples

1. Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f : U \to F$ une fonction classe $\mathcal{C}^k$. L'application $u \circ f$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$. L'application $g : (x, y) \mapsto f(x + y\,,\,xy)$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 40

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ne s'annulant pas. La fonction $1/f$ est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème 39, en considérant $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1/x$. □

Exemples

1. Toute fonction rationnelle sur E est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout ouvert où elle est définie.
2. L'application définie sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (*cf.* l'exercice 17 de la page 1116).

3 Théorème de Schwarz

Lemme 41

Soit $f : U \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On a alors :

$$\forall (u,v) \in E^2 \quad \mathrm{D}_u \mathrm{D}_v f = \mathrm{D}_v \mathrm{D}_u f$$

Démonstration (non exigible) page 1160

Théorème 42

Soit $f : U \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 41 à $u = e_i$ et $v = e_j$. □

Corollaire 43

Soit f de classe $\mathcal{C}^k$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.
Pour tout $(j_i, \ldots, j_k) \in [\![1,p]\!]^k$, on a $\partial_{j_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{j_{\sigma(k)}} f = \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f$.

Principe de démonstration. Utiliser le fait que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ est un produit de transpositions du type $(i, i+1)$ (*cf.* l'exercice 1.7 de la page 52). Démonstration page 1161

Notation Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, on écrira donc les dérivées partielles d'ordre k sous la forme $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_p^{\alpha_p}}$, où $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = k$.

p.1161 **Exercice 25** Dans cet exercice, $E = \mathbb{R}^p$.

1. Combien y a-t-il de dérivées partielles d'ordre k lorsque E est de dimension p ?
2. Combien suffit-il d'en considérer lorsque la fonction est de classe $\mathcal{C}^k$?

L'existence de dérivées partielles « croisées » ne suffit pas pour démontrer qu'elles sont égales.

p.1162 **Exercice 26** Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Une application physique : champs de vecteurs dérivant d'un potentiel

Supposons de plus que E soit un espace euclidien.

Un **champ de vecteurs** sur U est une application de U dans E. Le gradient d'une fonction différentiable sur U à valeurs réelles est un exemple de champ de vecteurs.

On dit qu'un champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ sur U **dérive d'un potentiel** s'il existe une fonction f différentiable de U dans $\mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \nabla f$. La fonction f est alors un **potentiel** de $\overrightarrow{V}$.

Dans le cas où $\overrightarrow{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dérive d'un potentiel, on a d'après le théorème de Schwarz, en notant $(V_1,\ldots,V_p)$ les composantes de $\overrightarrow{V}$ dans une base orthonormale de E :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}. \tag{$\star$}$$

p.1162 **Exercice 27** Le champ de vecteurs $(x,y) \mapsto (xy^2, -xy)$ dérive-t-il d'un potentiel ?

p.1162 **Exercice 28** Déterminer un potentiel pour le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ par $\overrightarrow{V}(x,t) = (2xy\,,\,x^2+y)$.

p.1163 **Exercice 29** Démontrer que le champ de vecteurs $(x,y) \mapsto \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vérifie $(\star)$, mais ne dérive pas d'un potentiel.

Indication. Considérer l'arc paramétré par $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ *et le théorème 31 de la page 1125 .*

Calcul des dérivées partielles d'ordre k de fonctions composées

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$ et $G = \mathbb{R}$.

Soit $k \geqslant 2$. Considérons des fonctions $x_i : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, avec $i \in [\![1, n]\!]$, telles que l'application $\Phi : u \mapsto (x_1(u), \ldots, x_n(u))$ soit à valeurs dans V.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, R)$, par composition la fonction $g = f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \Phi\right). \qquad (\star)$$

Cette expression étant valable pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$, elle permet par itération de calculer les dérivées partielles d'ordre k de $g = f \circ \Phi$ pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^k$. Par exemple, si f est de classe $\mathcal{C}^2$, pour tout $(j,k) \in [\![1, p]\!]^2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u_k \partial u_j} &= \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \Phi\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_j} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \Phi\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \times \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial x_\ell}{\partial u_k} \times \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_i} \circ \Phi\right)\right).\end{aligned}$$

Il faut bien reconnaître que ces notations sont très lourdes. On préfère en général rédiger ces calculs avec les conventions données lors de l'introduction de la règle de la chaîne (*cf.* page 1117). Ainsi, on note $(\star)$ sous la forme :

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (\star)$$

et pour tout $(j,k) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u_k \partial u_j} &= \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial x_\ell}{\partial u_k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_i}\right).\end{aligned}$$

Il ne faut pas, bien entendu, apprendre cette formule par cœur, mais il faut savoir faire le calcul au cas par cas.

Exemple Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (u+v, uv). \end{array}$

L'application Φ, dont les applications composantes sont polynomiales sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour toute $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(u,v) = f(u+v, uv)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + v\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + u\,\frac{\partial f}{\partial y}\cdot$$

Ainsi, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, compte tenu du théorème de Schwarz, on a pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + u\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} + u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (u+v)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\end{aligned}$$

p.1163

Exercice 30 Le **laplacien** d'une fonction f définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^2$ est $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (voir page 1127).

Soit $f \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R}\big)$. On définit sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ les fonctions u et g par $u(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de g.
2. Exprimer $(\Delta f)(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de g.

Montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$

Point méthode

On essaie tout d'abord d'utiliser les théorèmes généraux ou de s'y ramener.

Point méthode

Dans les cas plus compliqués, pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut chercher une classe $\mathcal{S}$ d'applications telle que :

- $f \in \mathcal{S}$,
- tout élément de $\mathcal{S}$ est continu,
- $\mathcal{S}$ est stable par dérivation partielle.

p.1165

Exercice 31 On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ soit strictement positif. Démontrer que la fonction g définie sur $D_O(0,R) \subset \mathbb{C}$ par $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

VI Applications

1 Vecteurs tangents à une partie

Généralités

Définition 14

Soit X une partie de E et $x \in X$. Un élément $v \in E$ est un **vecteur tangent à X en x** s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un arc paramétré par $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Exemples

1. Le vecteur 0 est tangent à X en tout point de X, comme on le voit en considérant un chemin constant.
2. L'ensemble des vecteurs tangents à E en un point $x \in E$ est E.

   En effet, pour $v \in E$, la dérivée en 0 de $\gamma : t \mapsto x + tv$ est v.
3. Plus généralement, si U est un ouvert de E, l'ensemble des vecteurs tangents à U en un point $x \in U$ est E.
4. Si $Y \subset X$ et si v est tangent à $y \in Y$, alors v est tangent à X.

Remarques

- L'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ des vecteurs tangents à X en x est un cône de E, c'est-à-dire une partie stable par toutes les homothéties de E. En effet, soit $v \in \overrightarrow{\mathcal{T}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ a pour dérivée v en 0, alors la dérivée en de 0 de l'application $t \mapsto \gamma(\lambda t)$, qui est définie sur un voisinage de 0 et à valeurs dans X, est $\lambda\, v$. Ainsi $\lambda v \in \overrightarrow{\mathcal{T}}$. En d'autres termes, $\mathbb{R}v$ est inclus dans $\overrightarrow{\mathcal{T}}$.
- Caractère local des vecteurs tangents. Soit X une partie de E et $x \in X$. Pour tout voisinage W de x et $v \in V$, le vecteur v est tangent à X en x si, et seulement si, v est tangent à $X \cap W$ en x.

p.1165 **Exercice 32** Soit $a \in E$, E_1 un sous-espace vectoriel de E et X le sous-espace affine $a + E_1$. Quels sont les vecteurs tangents à X en a ?

p.1165 **Exercice 33** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Donner l'ensemble des vecteurs tangents au graphe de f en x_0.

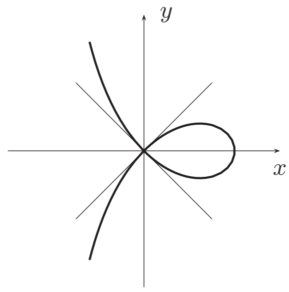
p.1165 **Exercice 34**

Quels sont les vecteurs tangents à $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ en $(0,0)$? en $(1,0)$? en $(1,1)$?

p.1166 **Exercice 35** Soit $X = \{(x,y) \in \mathrm{IR}^2 \mid xy = 0\}$. Déterminer l'ensemble $\vec{\mathcal{T}}_{(0,0)}$ des vecteurs tangents à X en $(0,0)$.

Attention

Soit Γ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ paramétré par $\gamma : I \to \mathrm{IR}^2$. Il est clair que $\mathrm{IR}\gamma'(t_0)$ est inclus dans l'ensemble des vecteurs tangents à $\gamma(I)$ en $\gamma(t_0)$. Cependant, même lorsque t_0 est un paramètre régulier, l'inclusion peut être stricte.



Exemple Considérons l'arc Γ paramétré sur IR par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = t\,x(t). \end{cases}$$

On a $\gamma(1) = (0,0)$ et $\gamma'(1) = (-1,-1)$, ainsi que $\gamma(-1) = (0,0)$ et $\gamma'(1) = (1,-1)$. Par conséquent, l'ensemble des vecteurs tangents à $\gamma(\mathrm{IR})$ contient $\mathrm{IR}(1,1) \cup \mathrm{IR}(1,-1)$. On peut démontrer, mais nous ne le ferons pas, que cette inclusion est une égalité.

Plans tangents à une surface d'équation $z = f(x,y)$

Considérons $g : I \to \mathrm{IR}$ une fonction définie sur un intervalle d'intérieur non vide I. Il a été vu en première année que la tangente $\mathcal{T}$ à une courbe d'équation $y = g(x)$ en un point de paramètre a tel que g soit dérivable en a, est la droite d'équation :

$$y = f(a) + g'(a)(x-a).$$

Cette définition est cohérente avec la définition de la tangente en un point de paramètre régulier d'un arc paramétré (*cf.* la définition 14 de la page 363). Par ailleurs, nous avons vu en exercice que l'ensemble des vecteurs tangents au graphe G de g en un point $M_a = \big(a, f(a)\big)$ où g est dérivable est $\vec{\mathcal{T}} = \mathrm{IR}\big(1, g'(a)\big)$ (*cf.* l'exercice 33 de la page précédente). Par conséquent, $\mathcal{T}$ est le sous-espace affine $M_a + \vec{\mathcal{T}}$. Ce point de vue va nous permettre de définir la notion de plan tangent.

Proposition 44

Supposons que $E = \mathrm{IR}^2$ et soit $f : U \to \mathrm{IR}$ une fonction différentiable. L'ensemble des vecteurs tangents à l'ensemble $S \subset \mathrm{IR}^3$ d'équation :

$$x_3 = f(x_1, x_2)$$

en $a = \big(a_1, a_2, f(a_1,a_2)\big)$ est alors le plan vectoriel d'équation :

$$v_3 = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

Démonstration page 1166

Définition 15

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$.

Le **plan tangent à S en m** est le sous-espace affine $m + \overrightarrow{\mathcal{T}}$ de $\mathbb{R}^3$, où $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ est l'ensemble des vecteurs tangents à S en m.

Proposition 45

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface d'équation $z = f(x, y)$.
L'espace tangent à S en $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ a pour équation :

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(m_0).$$

Démonstration page 1167

Exemple Le plan tangent à la surface d'équation $z = xy$ en $(1, 2, 2)$ a pour équation $z = 2x + y - 2$.

Seconde interprétation géométrique du gradient

Proposition 46

Supposons de plus que E soit un espace euclidien. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et si γ une fonction dérivable d'un intervalle I dans U telle que $f \circ \gamma$ soit constante, alors :

$$\forall t \in I \quad (\, \gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t))\,)$$

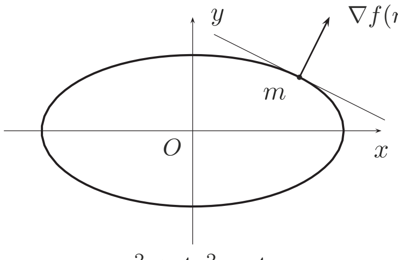
On dit que ∇f est **normal** aux **lignes de niveau** de f, c'est-à-dire aux parties de U d'équations $f = k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Principe de démonstration. Dériver la fonction $f \circ \gamma$. Démonstration page 1167

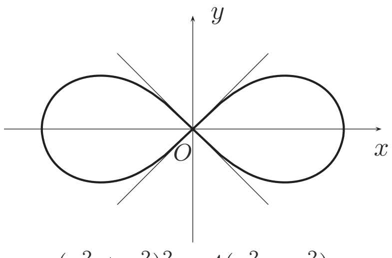
Remarques

- Si C est une partie du plan d'équation $f(x, y) = 0$ et si $m \in C$ est un point **régulier**, c'est-à-dire si $\nabla f(m) \neq 0$, alors l'ensemble des vecteurs tangents à C en m est inclus dans la droite vectorielle $\nabla f(m)^{\perp}$.

  De même, si S et une partie de l'espace d'équation $f(x, y, z) = 0$ et si $m \in S$ est un point régulier, alors l'ensemble des vecteurs tangents à S en m est inclus dans le plan vectoriel $\nabla f(m)^{\perp}$.



$x^2 + 4y^2 = 4$



$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

- Lorsque $m \in C$ est un point critique de f, alors l'ensemble des vecteurs tangents à S en m peut être la réunion de plusieurs droites vectorielles. En effet la condition que cette ensemble soit inclus dans $\nabla f(m)^{\perp}$ n'est alors pas contraignante.

Application à l'équation du plan tangent

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble d'équation $f(x, y, z) = 0$ et $m_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ un point régulier, où $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. Si S peut être paramétrée par x et y au voisinage de m_0, c'est-à-dire s'il existe un voisinage ouvert W de m_0, un voisinage ouvert W' de (x_0, y_0) et une fonction différentiable $g : W' \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall (x, y, z) \in W \quad (x, y, z) \in S \iff \big((x, y) \in W' \quad \text{et} \quad z = g(x, y)\big)\,,$$

alors, d'après la proposition 45 de la page précédente, S a un plan tangent en m_0. D'après la proposition 46 de la page précédente l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ des vecteurs tangents à S en m_0 vérifie $\overrightarrow{\mathcal{T}} \subset \nabla f(m_0)^{\perp}$. Puisque les deux ensembles sont des espaces vectoriels de dimension 2, on a l'égalité. Par conséquent, puisque m_0 est un point régulier, l'équation du plan tangent $\mathcal{T}$ à S en m_0 est :

$$(\, \nabla f(m_0) \mid m - m_0 \,) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{T} : (x - x_0)\, \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + (y - y_0)\, \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) + (z - z_0)\, \frac{\partial f}{\partial z}(m_0) = 0.$$

On adaptera dans cas où l'on peut paramétrer par x et z, ou par y et z.

L'analyse faite ci-dessous s'adapte aux « courbes » du plan d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.

Exemple Soit $(a, b, c) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$ et S la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Soit $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Les coordonnées de m_0 ne sont pas toutes nulle. Pour fixer les idées, supposons $z_0 > 0$. Posons alors $W = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, qui est un voisinage ouvert de m_0 et :

$$\forall (x, y, z) \in W \quad (x, y, z) \in S \iff \left((x, y) \in W' \quad \text{et} \quad z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\right),$$

où $W' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1\right\}$ est un voisinage ouvert de (x_0, y_0).

Puisque $g : (x, y) \mapsto c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur W', la surface S admet un plan tangent $\mathcal{T}$ en m_0. Puisque $m_0 \neq 0$ et donc $\nabla f(m_0) = 2\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right) \neq 0$, le point m_0 est régulier et :

$$\mathcal{T} : 2\frac{x_0}{a^2}\,(x - x_0) + 2\frac{y_0}{b^2}\,(y - y_0) + 2\frac{z_0}{c^2}\,(z - z_0) = 0.$$

On arrive à la même relation pour tout $m_0 \in S$ (sans imposer $z_0 > 0$). Compte tenu de la relation $\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 = 1$:

$$\mathcal{T} : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

En particulier, si $a = b = c = R$, la sphère de centre 0 et de rayon R a des plans tangents en tout points. Le plan tangent à la sphère en m_0 est le plan passant par m_0 et orthogonal à m_0.

2 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Deux exemples

Commençons par un exemple simple, mais important.

Exemple Déterminons les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

- Soit une applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

  Soit $y \in \mathbb{R}^2$. La fonction $x \mapsto f(x, y)$ est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et a sa dérivée nulle. Par conséquent il existe une constante α, qui dépend *a priori* de y, telle que $f(x, y) = \alpha$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \varphi(y).$$

  La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $\varphi : y \mapsto f(0, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Réciproquement, lorsque $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il est facile de vérifier que la fonction f définie par $f(x, y) = \varphi(y)$ vérifie la relation $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Ainsi l'ensemble des solutions du problème est :

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \mapsto \varphi(y) \,;\, \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right\}$$

Remarque Les solutions du problème peuvent être moins simples selon la « forme » du domaine de définition. Voir par exemple l'exercice 18.19 de la page 1173.

p.1167 **Exercice 36**

En utilisant l'exemple précédent, déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Un exemples d'utilisation de changement de variables

Malheureusement tous les cas ne sont pas aussi simple que ceux des exercices précédents. Il arrive toutefois que l'on puisse se ramener à des cas très simples à traiter à l'aide d'un changement de variables.

On note V le demi-plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Cherchons à déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (\star)$$

Pour cela, introduisons $\Phi : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta), \end{array}$

où $U = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Posons le changement de variable polaire $(x,y) = \Phi(r,\theta)$, c'est-à-dire pour tout $(r,\theta) \in U$, on note $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$; posons $f(x,y) = g(r,\theta)$, c'est-à-dire que la fonction g est définie par $g = f \circ \Phi$.

Puisque Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, par composition g l'est également. D'après la dérivation des fonctions composées, pour tout $(r,\theta) \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

et donc :

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Puisque Φ est surjective sur V, la fonction f est solutions de $(\star)$ si, et seulement si :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = 0. \qquad (\star\star)$$

En d'autres termes l'ensemble des solutions de $(\star)$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}) \mid f \circ \Phi \in \mathcal{S}'\right\},$$

où $\mathcal{S}'$ est l'ensemble des solutions de $(\star\star)$. En raisonnant comme à l'exemple de la page précédente : $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ est solutions de $(\star)$ si, et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$ telle que :

$$\forall (r,\theta) \in U \quad f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta) = \varphi(\theta).$$

Soyons plus précis. L'application Φ est bijective et

$$\Phi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ (x,y) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\right) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. Par conséquent :

$$\mathcal{S} = \left\{f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}) \mid f \circ \Phi \in \mathcal{S}'\right\} = \{g \circ \Phi^{-1}\,;\; g \in \mathcal{S}'\}.$$

En conclusion, l'ensemble des solutions de $(\star)$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y) \mapsto \varphi\left(\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}\right)\;;\; \varphi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)\right\}$$

ou encore, la fonction Arctan étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ dont la réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y) \mapsto \psi\left(\frac{y}{x}\right) \ ; \ \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}.$$

Un second exemple : l'équation d'onde

Cherchons à déterminer les $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ vérifiant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \tag{$\star$}$$

où $c \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Il s'agit d'un cas particulier d'équations de propagation, dites aussi équations d'onde.

- Pour cela, considérons :

  $$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \end{array}$$

  avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Cette dernière condition s'impose du fait que l'on souhaite φ bijective. Posons le changement de variables :

  $$(x,t) = (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$

  ce qui signifie que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on note $x = \alpha u + \beta v$ et $t = \gamma u + \delta v$.

  Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; posons :

  $$f(x,t) = g(u,v),$$

  c'est-à-dire que l'on définit g par $g = f \circ \varphi$.

- Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$, car les applications composantes sont polynomiales sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, par la règle de la chaîne, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

  $$\frac{\partial g}{\partial u} = \alpha\,\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma\,\frac{\partial f}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \beta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial f}{\partial t}\cdot \tag{1}$$

  En itérant, la formule (1) étant valable pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et $g = f \circ \varphi$, il vient :

  $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= \alpha\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \gamma\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\alpha\delta + \beta\gamma)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \gamma\delta\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot \end{aligned}$$

  La dernière relation a été obtenue en utilisant le théorème de Schwarz. En prenant $\alpha = \beta = c$ et $\delta = -\gamma = 1$, on a $\alpha\delta - \beta\gamma = 2c \neq 0$ et ainsi :

  $$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot$$

- Il vient de l'étude ci-dessus que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est solution de $(\star)$ si, et seulement si, $g = f \circ \varphi$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \qquad (\star\star)$$

D'après l'exercice 36 de la page 1137, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est une solution de $(\star)$ si, et seulement s'il existe $(\Phi_1, \Psi_1) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ tel que :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad f\big(\varphi(u,v)\big) = \Phi_1(u) + \Psi_1(v)$$

L'application φ est bijective et :

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,t) & \longmapsto & \left(\dfrac{x-ct}{2c}, \dfrac{x+ct}{2c}\right). \end{array}$$

Puisque φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^2$, en adaptant le raisonnement développé à la page 1138, l'ensemble des solutions de l'équation $(\star)$ est :

$$\mathcal{S} = \big\{(x,t) \mapsto \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)\,;\ (\Phi, \Psi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\big\}$$

Généralités sur les changement de variables

Pour fixer les idées, on se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$.

- Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\varphi(U) = V$.

Pour tout $(u,v) \in U$ et $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, on pose :

$$(x,y) = \varphi(u,v) \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = g(u,v),$$

c'est-à-dire $g = f \circ \varphi$. La règle de la chaîne donne :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

En d'autres termes :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) J\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right). \qquad (*)$$

- Si de plus on a $\det\big(J\varphi(u,v)\big) \neq 0$ pour tout $(u,v) \in V$, alors la relation $(*)$ devient :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}. \qquad (**)$$

Cela nous donne donc des expressions de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ uniquement en fonction de u, v, $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$.

Notons que si φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$, la relation $(**)$ est toujours vérifiée, car alors $\det\big(J\varphi(u,v)\big) \neq 0$ pour tout $(u,v) \in V$. En effet, du fait que $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}$, on a pour tout $(u,v) \in V$:

$$J\varphi^{-1}(x,y) \times J\varphi(u,v) = I_2$$

et donc $J\varphi(u,v)$ est inversible.

- **Application aux équations aux dérivées partielles**

Considérons sur $V \subset \mathbb{R}^2$ une équation au dérivées partielles d'ordre 1 :

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, x, y\right) = 0. \tag{1}$$

Il arrive qu'un choix judicieux de changement de variables $(x,y) = \varphi(u,v)$, où $\varphi : U \to V$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$, donne, éventuellement à l'aide des relations $(**)$, que f est une solution de (1) si, et seulement si, la fonction g définie par $f(x,y) = g(u,v)$ est une solution de :

$$\frac{\partial g}{\partial u} + G(u,v) = 0. \tag{2}$$

Cette dernière équation se résout par primitivation.

Remarques

* Si φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit les solutions de (1) des solutions de (2), car alors les ensembles $\mathcal{S}_1$ des solutions de (1) et $\mathcal{S}_2$ des solutions de (2) sont liés par :

$$\mathcal{S}_1 = \big\{f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}) \mid f \circ \varphi \in \mathcal{S}_2\big\} = \big\{g \circ \varphi^{-1} \,;\ g \in \mathcal{S}_2\big\}.$$

* Parfois, on propose le changement de variable sous la forme « inverse », à savoir, $(u,v) = \varphi(x,y)$ et $f(x,y) = g(u,v)$, où $\varphi : V \to U$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective. Dans ce cas, il est impératif que φ^{-1} soit également de classe $\mathcal{C}^1$, car g est définie à partir de f par $g = f \circ \varphi^{-1}$. Dans ces conditions, en remarquant que $f = g \circ \varphi$ pour tout $(x,y) \in V$:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}.$$

* On ne dispose pas de méthode systématique pour trouver un changement de variable. Concrètement, dans les exercices le changement de variable sera toujours donné.

Exemples de changements de variables

Changement de variables linéaire. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$. Pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^2$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (au+bv, cu+dv) \end{array}$$

induit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur l'ouvert $U = \varphi(V)$. Il est immédiat que $J\varphi(u,v) = \left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = M$. L'expression de φ^{-1} s'obtient à l'aide de M^{-1}.

Changement de variables en polaire. L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}_-\} \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. L'application réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,;\ x \in \mathbb{R}_-\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[\\ (x,y) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array}$$

est également de classe $\mathcal{C}^1$.

p.1167

Exercice 37 À l'aide d'un changement de variables linéaire, déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial t} + c\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, avec $c \in \mathbb{R}_+^*$ (*équation de transport*).

p.1168

Exercice 38

1. Démontrer que :

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & U \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(y - \dfrac{x^2}{2}, y\right) \end{array}$$

   est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U à préciser et que φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$.

2. En posant $(u,v) = \varphi(x,y)$, résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $y \mapsto (x, y)$ est une fonction polynomiale, donc continue. Par conséquent, par composition $f_x : y \mapsto f(x, y)$ est continue. On démontre de même que toutes les applications f_y sont continues.
2. Dans ce cas, si $x \neq 0$, la fonction $f_x : y \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ est continue. De plus, f_0 est l'application nulle. Par suite, les fonctions f_x sont continues. Par symétrie, il en est de même des fonctions f_y.

   Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x, x) = \frac{1}{2}$ et donc :

$$f(x,x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

   Si f était continue en $(0,0)$, on aurait $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x,x) = f(0,0) = 0$.

   Par conséquent, la fonction f n'est pas continue en 0.

Exercice 2 En tant que fonction rationnelle, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a :

$$\left|f(x,y)\right| = \left|\frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\right| = r\left|\cos^3\theta + \sin^3\theta\right| \leqslant 2r.$$

Puisque $r = \left\|(x,y)\right\|_2$, il s'ensuit par encadrement que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Par suite, la fonction $\widehat{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\widehat{f}(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\widehat{f}(0,0) = 0$ est continue.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. À l'exercice 1 il a été démontré que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x,0) = 0$. De plus, $f(0,0) = 0$. Ainsi f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Exercice 4 Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que l'application $g : t \mapsto \exp(tH)$ est dérivable et $g'(t) = H\exp(tH)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque $\exp(0) = I_n$, on a $\mathrm{D}_H \exp(0) = H$.

Exercice 5 Fixons $(M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et notons g_p l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g_p(t) = (M + tH)^p$.

Pour $p = 1$, on a $g_1(t) = M + tH$ et il est immédiat que $\mathrm{D}_H f_1(M) = H$. Le cas $p = 2$ a été traité en exemple page 1102. En considérant éventuellement le cas $p = 3$, on est amené à émettre l'hypothèse :

$$\mathcal{H}_p : \text{« } g_p \text{ est dérivable et } g_p(0) = \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-i-1} \text{ »}$$

Démontrons cette assertion par récurrence. Il n'y a plus que l'hérédité à vérifier. Supposons le résultat vrai pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Puisque g_p est dérivable et puisque $(A,B) \mapsto AB$ est bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, l'application $g_{p+1} = g_p g_1$ est dérivable et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'_{p+1}(t) = g'_p(t) g_1(t) + g_p(t) g'_1(t).$$

En particulier, à l'aide de l'hypothèse de récurrence :

$$g'_{p+1}(0) = g'_p(0) g_1(0) + g_p(0) g'_1(0) = \left(\sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-i-1}\right) M + M^p H,$$

et donc $\mathrm{D}_H f_{p+1}(M) = \sum\limits_{i=0}^{p} M^i H M^{p-i}$.

Exercice 6

1. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour tout $t \neq 0$ on a :

   $$f(tu,tv) = t\frac{u^2 v}{t^2 u^4 + v^2}.$$

   Cette expression est encore valable pour $t = 0$ et $v \neq 0$.

   Si $v \neq 0$, alors $f(tu,tv) \underset{0}{\sim} t\frac{u^2}{v}$, donc $\mathrm{D}_{(u,v)} f(0,0) = \frac{u^2}{v}$. Si $v = 0$, alors, pour tout t, on a $f(tu,tv) = 0$, donc $\mathrm{D}_{(u,v)} f(0,0) = 0$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x,x^2) = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que :

   $$f\left(x,x^2\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

   et donc que f n'est pas continue en 0.

Lemme 2 Par définition des relations de comparaison, il existe une boule $B = B_F(0,r)$ de E, avec $r > 0$, et une fonction $\varepsilon : B \to F$ telles que $u(h) = \|h\| \varepsilon(h)$ pour tout $h \in B$ et $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$.

Soit $x \in E$. Si $x = 0$, du fait que u est linéaire, on a $u(0) = 0$.
Si $x \neq 0$, pour tout $t \in \left]0, \frac{r}{\|x\|}\right]$, on a $u(tx) = \|tx\| \varepsilon(tx)$ et donc, par linéarité de u et homogénéité de la norme, $tu(x) = t\|x\|\varepsilon(tx)$, d'où :

$$u(x) = \|x\| \varepsilon(tx).$$

Puisque $tx \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $\varepsilon(tx) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc $u(x) = 0$.

Par suite u est l'application nulle.

Proposition 3

- Si f est dérivable en a, alors au voisinage de 0 :

  $$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \mathrm{o}(h).$$

  L'application $u : h \mapsto hf(a)$ étant linéaire, on en déduit que f est différentiable en a et que $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto hf'a)$.

- Si f est différentiable en a, il existe $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ telle qu'au voisinage de 0 on ait :
$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \mathrm{o}(h).$$
Par ailleurs, puisque $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$, en posant $\alpha = u(1) \in F$, on a $u : t \mapsto t\alpha$. Ainsi, au voisinage de 0, on a :
$$f(a+h) = f(a) + h\alpha + \mathrm{o}(h)$$
et f est dérivable en a.

Exercice 7 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\| \ \|$ sous-multiplicative (*cf.* l'exercice 22 de la page 305), c'est-à-dire telle que :
$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|.$$
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$f(M+H) = f(M) + HM + MH + H^2.$$
Par ailleurs, $\|H^2\| \leqslant \|H\|^2$. Par conséquent, au voisinage de 0, on a $\|H^2\| = \mathrm{o}\big(\|H\|\big)$, c'est-à-dire $H^2 = \mathrm{o}(H)$.
De plus, il est facile de vérifier que l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \longmapsto & MH + HM \end{array}$ est linéaire. Ainsi, au voisinage de 0 :
$$f(M+H) = f(M) + u(H) + \mathrm{o}(H).$$
Par définition, f, qui est définie sur un ouvert, est différentiable en M et, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :
$$\mathrm{d}f(M) \cdot H = MH + HM.$$

Exercice 8 On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$. Il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a :
$$0 \leqslant f(x,y) = \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r^2\,\big(\cos^4\theta + \sin^4\theta\big) \leqslant 2r^2.$$
Cette dernière inégalité est encore vérifiée lorsque $(x,y) = (0,0)$. Par conséquent, sachant que $r = \|(x,y)\|_2$, on a au voisinage de 0 :
$$f(x,y) = \mathrm{O}\big(\|(x,y)\|_2^2\big)$$
et donc $f(x,y) = f(0) + 0 \cdot (x,y) + \mathrm{o}\big((x,y)\big)$. Par suite, f est différentiable en 0 et $\mathrm{d}f(0)$ est la fonction nulle.

Proposition 4 Par définition, il existe un voisinage W de 0 et une fonction $\varepsilon : W \to F$ telle que :
$$\forall h \in W \quad f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \|h\|\,\varepsilon(h) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Fixons $v \in E$ et posons $g : t \mapsto f(a + tv)$. Il existe $r > 0$ tel que $B_F(0, r\|v\|) \subset W$. Par conséquent, pour $t \in \left]-r, r\right[$:
$$g(t) = f(a+tv) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot (tv) + |t|\|v\|\varepsilon\big(|t|\|v\|\big),$$

et donc, en utilisant la linéarité de $\mathrm{d}f(a)$, on a au voisinage de 0 :

$$g(t) = g(0) + t\,\mathrm{d}f(a)\cdot v + \mathrm{o}(t).$$

Par suite, g est dérivable en 0 et $g'(0) = \mathrm{d}f(a)\cdot v$. Ainsi f a une dérivée en a selon v et $\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot v$.

Corollaire 5

- Si f est différentiable en a, alors d'après la proposition 4 de la page 1108, $\mathrm{D}_{e_j} f(a)$ est définie et :

$$\partial_j f(a) = \mathrm{D}_{e_j} f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot e_j.$$

- Si f est différentiable, on a ainsi, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, la relation $\partial_j = \Phi_j \circ \mathrm{d}f$, où :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_j : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & u\cdot e_j. \end{array}$$

  Cette dernière application est linéaire et donc continue puisque $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie. On en déduit, par composition d'applications continues, que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, les fonctions $\partial_j f$ sont continues.

Exercice 9 Soit $\mathcal{N}$ une norme sur E et supposons que cette application soit différentiable en 0. Dans ce cas, $\mathrm{D}_x\mathcal{N}(0)$ est définie pour tout $x \in E$, c'est-à-dire que l'application $g_x : t \mapsto \mathcal{N}(tx)$ est dérivable en 0. Cependant, $g_x(t) = |t|\,\|x\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; cette expression montre que g_x n'est pas dérivable en 0 lorsque $x \neq 0$. Par suite, $\mathcal{N}$ n'est pas différentiable en 0.

Corollaire 6 Par linéarité de $\mathrm{d}f(a)$, pour tout $h = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a :

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h = \mathrm{d}f(a)\cdot\left(\sum_{j=1}^{p} h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{d}f(a)\cdot e_j,$$

donc, d'après le corollaire 5 de la page 1108, on obtient :

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h = \sum_{j=1}^{p} h_j\,\partial_j f(a).$$

Exercice 10 Étudions l'existence de $\mathrm{D}_{(h,k)}f(0,0)$.

Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Si $(h,k) = (0,0)$, alors $\mathrm{D}_{(0,0)}f(0,0) = 0$.

Supposons donc que $(h,k) \neq (0,0)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$f(th,tk) = t\,\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}\cdot$$

On en déduit que f admet une dérivée en 0 suivant (x,y) et que :

$$\mathrm{D}_{(x,y)}f(0,0) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\cdot$$

On constate que l'application $u : (x,y) \mapsto \mathrm{D}_{(x,y)}f(0,0)$ n'est pas linéaire, car, par exemple, $u(1,0) = u(0,1) = 1$ et $u(1,1) = 1 \neq u(1,0) + u(0,1)$. Par conséquent, f n'est pas différentiable en 0.

Proposition 7 Soit $a \in U$. Pour tout $h \in E$ tel que $a+h \in U$, on a $f(a+h) = f(a)$ et donc au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) = f(a) + 0 \cdot h + \mathrm{o}(h).$$

Il s'ensuit, l'application nulle étant linéaire, que l'application f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = 0$. Puisque $\mathrm{d}f$ est constante, elle est continue et donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 11 Considérons $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (c'est un produit d'ouverts de $\mathbb{R}$). La fonction indicatrice sur U de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ convient.

Proposition 8 Soit $a \in E$. Pour tout $h \in E$ on a :

$$u(a+h) = u(a) + u(h)$$

et donc au voisinage de 0 :

$$u(a+h) = u(a) + u \cdot h + \mathrm{o}(h).$$

Par suite, l'application u est différentiable en a et $\mathrm{d}u(a) = u$.
Puisque l'application $\mathrm{d}u$ est constante, donc continue, l'application u est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 9 On munit $E \times F$ de la norme définie par $\big\|(x,y)\big\| = \max\big\{\|x\|, \|y\|\big\}$.

Rappelons, B étant une application bilinéaire définie sur le produit de deux espaces vectoriels de dimension finie, qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\big\|B(x,y)\big\| \leqslant C\,\|x\|\,\|y\|$ pour tout $(x,y) \in E \times F$.

- Soit $(a,b) \in E \times F$. Par bilinéarité :

$$\forall (h,k) \in E \times F \quad B(a+h, b+k) = B(a,b) + B(a,k) + B(h,b) + B(h,k).$$

Par ailleurs, pour $(h,k) \in E \times F$:

$$\big\|B(h,k)\big\| \leqslant C\,\|h\|\,\|k\| \leqslant C\,\big\|(h,k)\big\|^2,$$

par conséquent, au voisinage de 0, on a la domination :

$$\big\|B(h,k)\big\| = \mathrm{O}\left(\big\|(h,k)\big\|^2\right) = \mathrm{o}\big((h,k)\big)$$

et donc :

$$B(a+h, b+k) = B(a,b) + B(a,k) + B(h,b) + \mathrm{o}\big((h,k)\big).$$

L'application $u : (h,k) \mapsto B(a,k) + B(h,b)$ étant linéaire, on en déduit que B est différentiable en (a,b) et :

$$\forall (h,k) \in E \times F \quad \mathrm{d}B(a,b) \cdot (h,k) = B(a,k) + B(h,b).$$

- La bilinéarité de B implique que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}B : & E \times F & \longrightarrow & \mathcal{L}(E \times F, G) \\ & (a,b) & \longmapsto & (h,k) \mapsto B(a,k) + B(h,b) \end{array}$$

est linéaire. Les espaces étant tous de dimension finie, $\mathrm{d}B$ est continue et B est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 10 Il suffit de remarquer que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\mathrm{d}f(a) \cdot e_j = \partial_j f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\, e'_i.$$

Proposition 11

1. Supposons que f et g soient différentiables en $a \in U$. Ainsi, au voisinage de 0, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(h) \qquad (1)$$

$$g(a+h) = g(a) + \mathrm{d}g(a) \cdot h + \mathrm{o}(h) \qquad (2)$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$; posons $\varphi = \lambda\, f + \mu\, g$. Par combinaison linéaire des égalités (1) et (2), sachant que $\lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a) \in \mathcal{L}(E, F)$, il vient qu'au voisinage de 0 on a :

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \underbrace{\lambda\, \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mu\, \mathrm{d}g(a) \cdot h}_{= \left(\lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a)\right) \cdot h} + \mathrm{o}(h).$$

Il s'ensuit que $\lambda\, f + \mu\, g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}\,(\lambda f + \mu g)\,(a) = \lambda\, \mathrm{d}f(a) + \mu\, \mathrm{d}g(a)$.

2. Il s'agit d'une conséquence immédiate de ce qui précède.
3. Si f et g sont de classes $\mathcal{C}^1$, les applications $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}g$ sont continues. Par combinaison linéaire, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda\, \mathrm{d}f + \mu\, \mathrm{d}g$ est continue. Par suite $\lambda\, f + \mu\, g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 13 Pour simplifier, notons $f_1 = f$ et $f_2 = g$ et $\Phi = fg$.

1. Supposons que f_1 et f_2 soient différentiables en a. Il existe alors des fonctions ε_1 et ε_2 définies sur un voisinage W de 0 telles que, pour $i \in \{1, 2\}$:

$$\forall h \in W \quad f_i(a+h) = \underbrace{f_i(a) + \mathrm{d}f_i(a) \cdot h}_{\delta_i(h)} + \|h\|\, \varepsilon_i(h) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_i(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

- Il vient pour $h \in W$:

$$\begin{aligned} \Phi(a+h) &= \big(\delta_1(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\big)\,\big(\delta_2(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)\big) \\ &= \delta_1(h)\, \delta_2(h) + \|h\|\, R(h) \end{aligned}$$

où :

$$R(h) = \delta_1(h)\, \varepsilon_2(h) + \delta_2(h)\, \varepsilon_1(h) + \|h\|\, \varepsilon_1(h)\, \varepsilon_2(h).$$

- Pour $i \in \{1, 2\}$, les applications $\mathrm{d}f_i(a)$ étant continues, on a $\delta_i(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f_i(a)$ et, par définition, $\varepsilon_i(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. Par opérations sur les limites, on obtient $R(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. En d'autres termes :

$$\Phi(a+h) = \delta_1(h)\, \delta_2(h) + \mathrm{o}(h) \qquad (1)$$

- Par ailleurs, on obtient à partir de l'expression (1), que l'on a au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \Phi(a+h) - \Phi(a) - \big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h\big)\, f_2(a) - f_1(a)\, \big(\mathrm{d}f_2(a) \cdot h\big) \\ = \big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h\big)\, \big(\mathrm{d}f_2(a) \cdot h\big) + \mathrm{o}(h). \end{aligned}$$

Puisque qu'au voisinage de 0, on a $\left\|\mathrm{d}f_i(a)\cdot h\right\| = \mathrm{O}\big(\|h\|\big)$:

$$\big(\mathrm{d}f_1(a)\cdot h\big)\left(\mathrm{d}f_2(a)\cdot h\right) = \mathrm{O}\left(\|h\|^2\right) = \mathrm{o}(h).$$

Par suite :

$$\Phi(a+h) - \Phi(a) - \big(\mathrm{d}f_1(a)\cdot h\big)\, f_2(a) - f_1(a)\left(\mathrm{d}f_2(a)\cdot h\right) = \mathrm{o}(h).$$

En remarquant que la fonction $h \mapsto \big(\mathrm{d}f_1(a)\cdot h\big)\, f_2(a) + f_1(a)\big(\mathrm{d}f_2(a)\cdot h\big)$ est linéaire, on conclut qu'il s'agit de la différentielle de fg.

2. C'est immédiat.
3. Supposons que f_1 et f_2 soient de classe $\mathcal{C}^1$.

   L'application définie sur $\mathbb{R}\times\mathcal{L}(E,F)$ par $(\lambda,u)\mapsto \lambda\, u$ est bilinéaire et donc continue, puisque $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(E,F)$ sont de dimension finie. Il s'ensuit alors que $f_1\,\mathrm{d}f_2$ et $f_2\,\mathrm{d}f_1$ sont des applications continues et $f_1 f_2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 15

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ une base de E. Pour $j \in [\![1,p]\!]$ notons π_j la j-ème projection, c'est-à-dire l'application qui à $x = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k e_k \in E$ associe x_j. Les π_j sont linéaires, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque qu'un produit d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, pour $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, les applications $\mu_\alpha = \pi_1^{\alpha_1}\cdots\pi_p^{\alpha_p}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. On conclut en remarquant que toute fonction polynomiale est une combinaison linéaire de fonctions μ_α, donc une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 12

- La fonction f est polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, donc de classe $\mathcal{C}^1$, *a fortiori* elle est différentiable.
- Un calcul direct donne :

  $$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + yz.$$

  Les calculs de $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ se font de la même manière.
- L'expression de la différentielle d'une fonction différentiable à l'aide de ses dérivées partielles donne, pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

  $$\forall (h,k,\ell)\in\mathbb{R}^3 \quad \mathrm{d}f(x,y,z)\cdot(h,k,\ell) = h\left(3x^2+yz\right) + k\left(3y^2+xz\right) + \ell\left(3z^2+xy\right).$$

Exercice 13

- La fonction $f = \det$ est polynomiale sur l'ouvert $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc de classe $\mathcal{C}^1$.
- Soit $M = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculons les dérivées partielles de la fonction f en M dans cette base, c'est-à-dire les $\mathrm{D}_{E_{i,j}} f(M)$. En utilisant la linéarité par rapport à la j-ème

colonne, pour $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\det(M + tE_{i,j}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j}+t & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \det M + t \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \det M + t(-1)^{i+j}\Delta_{i,j},$$

où $\Delta_{i,j}$ est le mineur d'indice (i,j) de M. Il s'ensuit que :

$$\mathrm{D}_{E_{i,j}} f(M) = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

- L'expression de la différentielle d'une fonction différentiable à l'aide de ses dérivées partielles donne, pour tout $H = (h_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{d}f(M)\cdot H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j} = \mathrm{Tr}\big(H\,{}^t\mathrm{Com}(M)\big).$$

En particulier, si M est inversible :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{d}f(M)\cdot H = (\det M)\ \mathrm{Tr}\big(H\,M^{-1}\big).$$

Théorème 16

1. Supposons que f soit différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $b = f(a)$. La différentiabilité de g en b se traduit par l'existence d'une fonction ε' définie sur $W = -b + V = \{-b + v\,;\ v \in V\}$ telle que :

$$\forall h' \in W \quad g(b+h') = g(b) + \mathrm{d}g(b)\cdot h' + \underbrace{\|h'\|\varepsilon'(h')}_{\alpha(h')} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon'(h') \underset{h'\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, pour $h \in U$ tel que $a + h \in U$:

$$g\big(f(a+h)\big) = g(b) + \mathrm{d}g(b)\cdot\big(f(a+h) - f(a)\big) + \alpha\big(f(a+h) - f(a)\big). \qquad (1)$$

Puisque f est différentiable en a, on a la domination $f(a+h) - f(a) = \mathrm{O}(h)$ au voisinage de 0 et donc :

$$\alpha\big(f(a+h) - f(a)\big) = \mathrm{o}\big(f(a+h) - f(a)\big) = \mathrm{o}(h),$$

ce qui nous donne au voisinage de 0 à partir de la relation (1) :

$$g\big(f(a+h)\big) = g(b) + \mathrm{d}g(b)\cdot\big(f(a+h)-f(a)\big) + \mathrm{o}(h). \tag{2}$$

La différentiabilité de f en a implique l'existence d'une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que :

$$f(a+h)-f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot h + \|h\|\,\varepsilon(h) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On obtient ainsi au voisinage de 0 à partir de la relation (2) :

$$g\big(f(a+h)\big) = g(b) + \mathrm{d}g(b)\cdot\big(\mathrm{d}f(a)\cdot h\big) + \|h\|\mathrm{d}g(b)\cdot\varepsilon(h) + \mathrm{o}(h).$$

Enfin, puisque $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$, par continuité on a $\mathrm{d}g(b)\cdot\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc au voisinage de 0 :

$$\|h\|\mathrm{d}g(b)\cdot\varepsilon(h) = \mathrm{o}(h).$$

On en conclut que :

$$g\big(f(a+h)\big) = g(b) + \mathrm{d}g(b)\cdot\big(\mathrm{d}f(a)\cdot h\big) + \mathrm{o}(h),$$

ce qui prouve que $g\circ f$ différentiable en a et $\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g(b)\circ\mathrm{d}f(a)$.

2. C'est immédiat.
3. Supposons que f et g soient de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque f et $\mathrm{d}g$ sont continues, l'application $(\mathrm{d}g)\circ f$ est continue. Par ailleurs, l'application $\mathrm{d}f$ est continue, ce qui implique que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(F,G)\times\mathcal{L}(E,F) \\ & x & \longmapsto & \big(\mathrm{d}g\big(f(x)\big), \mathrm{d}f(x)\big) \end{array}$$

est également continue. De plus l'application :

$$\begin{array}{rccc} B : & \mathcal{L}(F,G)\times\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ & (v,u) & \longmapsto & v\circ u \end{array}$$

est bilinéaire, donc continue (tous les espaces sont de dimension finie).
Ainsi $\mathrm{d}(g\circ f) = B\circ\Phi$ est continue et $g\circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 14 On sait que par convention $u\cdot x$ désigne $u(x)$ lorsque $\mathcal{L}(E,F)$ et $x\in E$. Cela conduit à convenir, si $\varphi : X\to\mathcal{L}(E,F)$ et $\psi : X\to E$, que $\varphi\cdot\psi$ désigne l'application $x\mapsto\big(\varphi(x)\big)\cdot\big(\psi(x)\big)$.

Proposition 17 L'application γ est dérivable en t_0, donc différentiable en t_0 et, par composition, $f\circ\gamma$ l'est également. Par conséquent :

$$\mathrm{d}(f\circ\gamma)(t_0)\cdot 1 = \mathrm{d}f(a)\cdot\big(\mathrm{d}\gamma(t_0)\cdot 1\big) = \mathrm{d}f(a)\cdot\gamma'(t_0).$$

Ainsi, $(f\circ\gamma)'(t_0) = \mathrm{d}(f\circ\gamma)(t_0)\cdot 1 = \mathrm{d}f(a)\cdot\gamma'(t_0)$.

Proposition 18 L'application φ est dérivable, donc différentiable et, puisque φ est à valeurs réelles, pour tout $t\in I$, on a $\mathrm{d}\varphi(t) : h\to\varphi'(t)\,h$. On en déduit du théorème 16 de la page 1111 que $\varphi\circ f$ est différentiable et, pour $x\in U$, on a :

$$\forall h\in E \quad \mathrm{d}(\varphi\circ f)(x)\cdot h = \varphi'\big(f(x)\big)\big)\,\big(\mathrm{d}f(x)\cdot h\big).$$

Toujours d'après le théorème 16 de la page 1111, si f et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$, la composée $\varphi\circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 15 D'après l'exemple de la page 1107, la fonction $\varphi : x \mapsto (x \mid x)$ est différentiable sur F et $\mathrm{d}\varphi(x) \cdot h = 2(x \mid h)$. Par conséquent, par composition avec l'application $\sqrt{\ }$, la fonction $\psi : x \mapsto \|x\|$ est différentiable sur $F \backslash \{0\}$ et $\mathrm{d}\psi(x) : h \to \dfrac{(x \mid h)}{\|x\|}\cdot$
Par composition, $\|f\|$ est différentiable en $a \in U$ tel que $f(a) \neq 0$ et :

$$\mathrm{d}\left(\|f\|\right)(a) \cdot h = \frac{(f(a) \mid \mathrm{d}f(a) \cdot h)}{\|f(a)\|}.$$

Proposition 20 D'après la proposition 8 de la page 1109, l'application linéaire u est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}u$ est l'application constante égale à u. Les résultats sont alors une conséquence immédiate du théorème 16 de la page 1111. En particulier, lorsque f est différentiable en $a \in U$:

$$\mathrm{d}(u \circ f)(a) = u \circ \mathrm{d}f(a).$$

Corollaire 21 Posons $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons π_i la i-ème projection, c'est-à-dire l'application définie par $\pi_i\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e'_k\right) = x_i$.

1. Supposons que f soit différentiable en a. Dans ces conditions, pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'application π_i étant linéaire et donc différentiable, on obtient que $f_i = p_i \circ f$ est différentiable en a.
   Supposons que toutes les applications composantes soient différentiables en a. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $f_i e'_i : x \mapsto f_i(x) e'_i$ est différentiable a (car il s'agit de la composée de f_i et de l'application linéaire $y \mapsto y e'_i$), et :
   $$\forall h \in E \quad \mathrm{d}(f_i e'_i) \cdot h = \big(\mathrm{d}f_i(a) \cdot h\big) e'_i.$$
   Par linéarité, il s'ensuit que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i e'_i$ est différentiable en a et :
   $$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(f_i e'_i)(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(\mathrm{d}f_i(a)\big) e'_i.$$
2. Les deux autres points sont des conséquences simples du premier.

Exercice 16

- Les n^2 applications composantes de f_p sont polynomiales sur l'ouvert $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Par suite, f_p est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Le calcul de $\mathrm{D}_H f_p(M)$ a été réalisé à l'exercice 5 page 1102.
  Il s'ensuit, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
  $$\mathrm{d}f_p(M) : H \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-i-1}.$$

Théorème 22 Notons $g = B(f_1, f_2)$. Rappelons que B est de classe $\mathcal{C}^1$.

- Supposons que f_1 et f_2 soient différentiables en a. L'application définie sur E par $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$ est différentiable en a (puisque ses fonctions composantes le sont) et $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto \big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h, \mathrm{d}f_2(x) \cdot h\big)$. Par composition, puisque B est différentiable, $g = B \circ f$ est différentiable en a et, pour $h \in E$:
  $$\begin{aligned}\mathrm{d}g(a) \cdot h &= \mathrm{d}B\big(f_1(a), f_2(a)\big) \cdot \big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h, \mathrm{d}f_2(a) \cdot h\big) \\ &= B\big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h, f_2(a)\big) + B\big(f_1(a), \mathrm{d}f_2(a) \cdot h\big).\end{aligned}$$

- D'après ce qui précède, si f_1 et f_2 sont différentiables, alors f est différentiable et donc g l'est également par composition.
- De même, si f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc g l'est également par composition.

Exercice 17 Rappelons que $\mathcal{GL}_n(\mathrm{IR})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$. Cela est une conséquence de la continuité de l'application déterminant et du fait que $\mathcal{GL}_n(\mathrm{IR})$ est l'image réciproque de l'ouvert IR^* par cette application.

1. La formule $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,{}^t\mathrm{Com}(M)$ montre que les n^2 applications composantes de l'application $M \mapsto M^{-1}$ sont rationnelles, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Il s'ensuit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathrm{IR})$; on a $M \times M^{-1} = I_n$. Par suite, l'application $M \mapsto M \times f(M)$ est constante sur $\mathcal{GL}_n(\mathrm{IR})$ et donc sa différentielle est nulle. Ainsi, le produit matriciel définissant une application bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})^2$, les règles de calcul de différentielles déjà vues donnent, pour $M \in \mathcal{GL}_n(\mathrm{IR})$:
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathrm{IR}) \quad H \times M^{-1} + M \times \big(\mathrm{d}f(M)\cdot H\big) = 0$$
On en déduit, pour $M \in \mathcal{GL}_n(\mathrm{IR})$, que :
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathrm{IR}) \quad \mathrm{d}f(M)\cdot H = -M^{-1} \times H \times M^{-1}.$$

Théorème 25 Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots e'_n)$, et soit $j \in [\![1,p]\!]$.
Puisque f est différentiable en a et g est différentiable en b, la fonction h est différentiable en a.
Ainsi en a toutes les dérivées partielles de h sont définies et $\partial_j h(a) = \mathrm{d}h(a)\cdot e_j$. D'après le théorème 16 de la page 1111 :
$$\partial_j h(a) = \mathrm{d}h(a)\cdot e_j = \mathrm{d}g(b)\cdot\big(\mathrm{d}f(a)\cdot e_j\big).$$
Par ailleurs, d'après le corollaire 6 de la page 1108 $\mathrm{d}g(b) : k \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} k_i \partial_i g(b)$ et l'on a :
$$\mathrm{d}f(a)\cdot e_j = \partial_j f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\, e_i.$$
Par suite :
$$\partial_j h(a) = \mathrm{d}g(b)\cdot\big(\mathrm{d}f(a)\cdot e_j\big) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(a)\,\partial_i g(b).$$

Exercice 18 Les applications polynomiales $u : (x,y) \mapsto x+y$ et $v : (x,y) \mapsto xy$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert IR^2, donc différentiables. D'après la règle de la chaîne, pour tout $(x,y) \in \mathrm{IR}^2$:
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + y\,\frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + x\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Proposition 26 Pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a :

$$\left(\nabla f(a) \mid h\right) = \mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) = \left(h \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a)\, e_j \right)$$

puisque la base est orthonormée. Par unicité, $\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j f(a)\, e_j$.

Proposition 28 Soit h un vecteur de norme 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot h = (\,\nabla f(a) \mid h\,) \leqslant \|\nabla f(a)\|. \tag{1}$$

De plus, on a l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1) si, et seulement si, h est $\mathbb{R}_+^*$-colinéaire à $\nabla f(a)$. Puisque h est normé, l'égalité est réalisée uniquement lorsque $h = \dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Théorème 29 Supposons que f admette un extremum local en a et que f soit différentiable en a. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse d'une maximum. Il existe alors $\eta > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in B_F(a, \eta)$.

Soit $h \in E \setminus \{0\}$. L'application $\varphi : t \mapsto f(a + th)$ est définie sur l'intervalle ouvert $I = \left]-\frac{\eta}{\|h\|}, \frac{\eta}{\|h\|}\right[$ et φ admet un maximum en 0. Puisque f est différentiable en a, l'application φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot h$. On sait que si une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle ouvert admet un maximum en un point où elle dérivable, alors sa dérivée est nulle en ce point. Par conséquent :

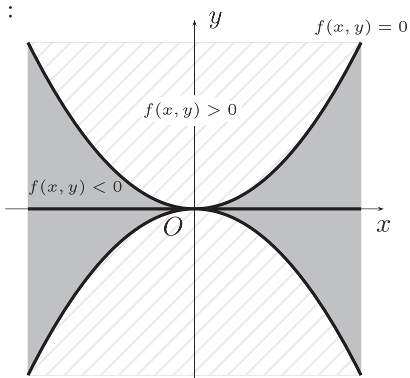
$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \varphi'(0) = 0.$$

Cette dernière relation étant vérifiée pour tout $h \in E$ (c'est immédiat si $h = 0$), on en déduit que $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Exercice 19

1. On obtient facilement la figure ci-contre.
2. • Soit $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(tu) = t^4 b^2 (b^2 - t^2 a^4).$$



Si $b = 0$, alors $f(tu) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et l'application $t \mapsto f(tu)$ a un minimum local en 0.
Si $b \neq 0$, alors au voisinage de 0, on a $f(tb) \underset{0}{\sim} t^4 b^4$. Puisque la fonction $t \mapsto t^4 b^4$ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}^*$, l'application $t \mapsto f(tu)$ est à valeurs strictement positives au voisinage de 0. Cette dernière fonction admet donc un minimum local en 0.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$f\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{3}{16}\,x^8.$$
Par suite, dans tout voisinage de 0, il existe un point (x,y) tel que $f(x,y) < 0$ et un point (x',y') tel que $f(x',y') > 0 = f(0,0)$. Par conséquent, la fonction f n'admet pas de minimum local en $(0,0)$.

Exercice 20 Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) = x^2(1-x-y^5) + y^2.$$
L'ensemble $W = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1-x-y^5 > 0\big\}$ est un ouvert (c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ par l'application continue $(x,y) \mapsto 1-x-y^5$), contenant 0. Sur le voisinage W de 0, on a $f(x,y) \geqslant 0$. Par conséquent f admet minimum local en $(0,0)$.

Exercice 21

- La fonction f est polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc différentiable et l'on a :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \nabla f(x,y) = \big(2x(2x^2-1)\,,\, 2y(2y^2+1)\big).$$
Il est alors immédiat que les points critiques de f sont $(0,0)$ et $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
- Étudions ces points critiques.
  - ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x,0) = x^4 - x^2 \underset{0}{\sim} -x^2$, et donc f prend des valeurs strictement négatives dans tout voisinage de $(0,0)$. De même, en considérant la fonction $y \mapsto f(0,y) = y^4 + y^2$, la fonction f prend, dans tout voisinage de $(0,0)$, des valeurs strictement positives.
  Il n'y a donc pas d'extremum en $(0,0)$.
  - ∗ En écrivant, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
  $$f(x,y) = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^4 + y^2$$
  on voit que :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) \geqslant -\frac{1}{4} = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$
  Ainsi la fonction f admet un minimum global en $(1/\sqrt{2}, 0)$et en $(-1/\sqrt{2}, 0)$.

Exercice 22

1. L'hypothèse $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ implique qu'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$:
$$\|x\| > r \Longrightarrow f(x) \geqslant f(0).$$
Puisque E est de dimension finie, la boule fermée $B = B_F(0,r)$ est compacte. Il s'ensuit que $f_{|B}$ atteint son minimum en un point x_0. Puisque $0 \in B$, on a $f(x_0) \leqslant f(0)$.

Pour tout $x \in E$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$ si $x \in B$, et si $x \notin B$, on a :

$$f(x) \geqslant f(0) \geqslant f(x_0).$$

Par suite f atteint son minimum en x_0.

2. Puisque la fonction f admet un minimum, si elle est différentiable, le minimum est atteint en un point critique. Si de plus on suppose qu'elle admet un seul point critique, alors il s'agit de l'unique point où le minimum est atteint.

Théorème 30

- Le sens $(i) \Rightarrow (ii)$ est l'objet du corollaire 5 de la page 1108.
- Montrons $(ii) \Rightarrow (i)$. Supposons que toutes les dérivées partielles soient définies et continues. On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$ associée à la base $\mathcal{B}$.
  Soit $a \in U$. Supposons d'abord que toutes les dérivées partielles soient nulles en a. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B_F(a,\eta)$ et $j \in [\![1,p]\!]$ on ait $\|\partial_j f(x)\| \leqslant \varepsilon/p$. Soit $h = \sum\limits_{j=1}^{p} h_j e_j \in B_F(0,\eta)$.
  On note $s_k = a + h_1 e_1 + \cdots + h_k e_k$ pour $k \in [\![0,p]\!]$.
  Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et $t \in [0,1]$, on a :
  $$s_{k-1} + t h_k e_k = a + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + t h_k e_k \in B_F(a,\eta).$$
  On peut donc définir, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, une fonction g_k de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ par :
  $$g_k(t) = f\left(s_{k-1} + t h_k e_k\right).$$
  Comme $g_k'(t) = h_k \partial_k f(s_{k-1} + t h_k e_k))$ est bornée par $\frac{\varepsilon}{p}|h_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{p}\|h\|$ pour tout $t \in [0,1]$, on a, par l'inégalité des accroissements finis :
  $$\big\|f\left(s_k\right) - f\left(s_{k-1}\right)\big\| = \big\|g_k(1) - g_k(0)\big\| \leqslant \|h\| \frac{\varepsilon}{p}.$$
  Il s'ensuit que :
  $$\begin{aligned}\big\|f(a+h) - f(a)\big\| &= \left\|\sum_{k=1}^{p}\big(f(s_k) - f(s_{k-1})\big)\right\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p}\big\|f(s_k) - f(s_{k-1})\big\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p}\|h\|\,\frac{\varepsilon}{p} = \|h\|\varepsilon.\end{aligned}$$
  Par suite, $f(a+h) = f(a) + \mathrm{o}(h)$ au voisinage de 0 et donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = 0$.
  Dans le cas général, posons $u : h \mapsto \sum\limits_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a)$. Dans ces conditions, toutes les dérivées partielles de $g = f - u$ sont définies et continues. Elles sont de plus toutes

nulles en a. En vertu de ce qui précède, g est différentiable en a. Puisque u est linéaire, u est différentiable en a, et donc $f = g + u$ l'est également.

En conclusion, f est différentiable sur U. En introduisant une base $\mathcal{B}'$ de F, on sait que la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans ces deux bases est la matrice $J(f)(a) = \big(\partial_j f_i(a)\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.
Il s'ensuit que l'application $x \mapsto J(f)(x)$ est continue et donc que l'application $\mathrm{d}f$ est continue. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 23 On conserve les notations de l'exemple 2 de la page 1123.

- Puisque g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et que la fonction β est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $F_1 : x \mapsto g\big(\beta(x), x\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, pour tout $x \in I$, on a, à l'aide de l'exercice précédent :
$$\begin{aligned} F_1'(x) &= \beta'(x)\, \partial_1 g\big(\beta(x), x\big) + \partial_2 g\big(\beta(x), x\big) \\ &= \beta'(x)\, f\big(\beta(x), x\big) + \int_0^{\beta(x)} \partial_2 f\big(t, x\big)\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$
- De même, $F_2 : x \mapsto g\big(\alpha(x), x\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $x \in I$, on a :
$$F_2'(x) = \alpha'(x)\, f\big(\alpha(x), x\big) + \int_0^{\alpha(x)} \partial_2 f\big(t, x\big)\, \mathrm{d}t.$$
- Par conséquent, $F = F_1 - F_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $x \in I$, on a :
$$F'(x) = \beta'(x)\, f\big(\beta(x), x\big) - \alpha'(x)\, f\big(\alpha(x), x\big) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_2 f\big(t, x\big)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 24

En tant que fonction rationnelle, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

À l'exercice 8 page 1107, il a été montré que la fonction f prolongée par 0 en 0 est différentiable et de différentielle nulle en 0. On note encore f ce prolongement. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

La fonction f sera de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si :
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$
Il est facile de vérifier que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\, \frac{x^5 + 2x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$
Ainsi, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, en posant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$:
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = r\left|\cos^5\theta + 2\cos^3\theta\, \sin^2\theta - \cos\theta\, \sin^4\theta\right| \leqslant 4r = 4\big\|(x,y)\big\|_2.$$
Cette inégalité est encore vérifiée pour $(0,0)$. Par comparaison :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$
et par symétrie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. Par suite, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 31 En tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, d'après la proposition 17 de la page 1112 $\varphi'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ et donc :

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lemme 32

- Si la fonction f est constante, alors $\mathrm{d}f = 0$ (*cf.* la proposition 7 de la page 1109).
- Supposons $\mathrm{d}f = 0$. En particulier f est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$. Pour tout $x \in U$, par convexité, l'application $\gamma : t \mapsto (1-t)a + tx$ définie sur $[0,1]$ est à valeurs dans U et de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

  Il s'ensuit que f est une application constante.

Théorème 33

- Si la fonction f est constante, alors $\mathrm{d}f = 0$ (*cf.* la proposition 7 de la page 1109).
- Soit $a \in U$ et posons $A = \{x \in U \mid f(x) = f(a)\}$. Nous allons montrer que $U = A$ en montrant que A est à la fois ouvert et fermé dans U.
  Puisque $A = f^{-1}\big(\{f(a)\}\big)$ et que l'application f est continue, A est un fermé de U. Soit $x \in A$. Puisque U est un ouvert de E, il existe $r > 0$ tel que $B_O(x,r) \subset U$. Puisque les boules sont convexes, d'après le lemme 32 de la page 1125, la restriction de f à $B_O(x,r)$ est constante. Il s'ensuit que $B_O(x,r) \subset A$. Par conséquent A est un ouvert de U. Puisque A est non vide et à la fois ouvert et fermé dans U qui est connexe par arcs, on a $A = U$.

Proposition 34 Raisonnons par récurrence descendante. Vu les hypothèses, il suffit de démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^i$, avec $i > 1$, alors f est de classe $\mathcal{C}^{i-1}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^i$, toutes les dérivées partielles d'ordre i sont définies. Soit une dérivée partielle $\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{i-1}} f$ d'ordre $i-1$. Toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de celle-ci sont définies et continues, car ce sont des dérivées partielles d'ordre i de f. D'après le théorème fondamental $\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{i-1}} f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue. On en conclut que toutes les dérivées partielles d'ordre $i-1$ sont continues et donc que f est de classe $\mathcal{C}^{i-1}$.

Corollaire 35

- Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^k$. D'après la proposition 34 de la page 1127 la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque les dérivées partielles d'ordre k de f sont les dérivées partielles d'ordre $k-1$ de $\partial_1 f$, ..., $\partial_p f$, on en déduit que les dérivées partielles d'ordre 1 sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.
- Supposons que toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de f soient définies, et qu'elles soient toutes de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Puisque les dérivées partielles d'ordre k de f sont les dérivées partielles d'ordre $k-1$ des fonctions $\partial_1 f$,..., $\partial_p f$, les dérivées partielles d'ordre k de f sont toutes continues et f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 36 Démontrons par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$, l'assertion :

$$\mathcal{H}_k \ : \ \forall (f,g) \in \mathcal{C}^k(U,F)^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda f + \mu g \text{ est de classe } \mathcal{C}^k$$

Le cas $k = 0$ correspond à une propriété connue des fonctions continues.

Supposons que $\mathcal{H}_{k-1}$ soit vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : U \to F$ et $g : U \to F$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Il est immédiat, par linéarité de la dérivation, que :

$$\partial_j\,(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\, \partial_j f + \mu\, \partial_j g.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à $\partial_j f$, $\partial_j g$, λ et μ montre que $\lambda\,\partial_j f + \mu\,\partial_j g$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, les fonctions $\partial_j\,(\lambda f + \mu g)$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, et donc $\lambda\, f + \mu\, g$ est de classe $\mathcal{C}^k$. Cela démontre $\mathcal{H}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il vient immédiatement de ce qui précède que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 37 Démontrons par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$, l'assertion :

$$\mathcal{H}_k \ : \ \forall (f_1,f_2) \in \mathcal{C}^k(U,F)^2 \quad B(f_1,f_2) \text{ est de classe } \mathcal{C}^k$$

Le cas $k = 0$ correspond à une propriété connue des fonctions continues.

Supposons $\mathcal{H}_{k-1}$ vrai pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. D'après les propriétés de la dérivation des fonctions vectorielles, on a :

$$\partial_j\big(B\,(f_1\,,\,f_2)\big) = B\,(\partial_j f_1\,,\,f_2) + B\,(f_1\,,\,\partial_j f_2)\,.$$

Puisque f_1 est de classe $\mathcal{C}^k$ et f_2 est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, car de classe $\mathcal{C}^k$, il vient de l'hypothèse de récurrence, que $B\,(\partial_j f_1\,,\,f_2)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. De même, l'application $B\,(f_1\,,\,\partial_j f_2)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Par linéarité $\partial_j\big(B\,(f_1, f_2)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, les fonctions $\partial_j\big(B\,(f_1\,,\,f_2)\big)$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, et donc $B(f_1\,,\,f_2)$ est de classe $\mathcal{C}^k$. Cela démontre $\mathcal{H}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il vient immédiatement de ce qui précède que si f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $B(f_1, f_2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème 39 On munit F d'une base $\mathcal{B}'$. Les applications composantes de f dans cette base sont notées $f_1, \ldots, f_n$. Démontrons par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$, l'assertion :

$\mathcal{H}_k$: « Pour tout $f \in \mathcal{C}^k(U,F)$ et tout $g \in \mathcal{C}^k(V,G)$ telles que $f(U) \subset V$, l'application $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$. »

Le cas $k = 0$ correspond à une propriété connue des fonctions continues.

Supposons que $\mathcal{H}_{k-1}$ soit vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : U \to F$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. En particulier f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et d'après le théorème 25 de la page 1116, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$:

$$\partial_j(g \circ f) = \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i \times \big((\partial_i g) \circ f\big).$$

Les applications $\partial_j f_i$ et $\partial_i g$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. De plus, la fonction f étant en particulier de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, l'hypothèse de récurrence donne que les applications $(\partial_i g) \circ f$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Par somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, l'application $\partial_j(g \circ f)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Par conséquent $g \circ f$ est de classe C^k. Cela termine la démonstration par récurrence.

Il vient immédiatement de ce qui précède, que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Lemme 41 Le résultat est immédiat si $u = 0$ ou $v = 0$. Désormais $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

Puisque U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_F(a, r) \subset U$. Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $\|u\| + \|v\| \leqslant r$.

Notons $C(u, v) = f(a + u + v) - f(a + u) - f(a + v) + f(a)$.

- Montrons que $C(u, v) = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{D}_v D_u f(a + su + tv)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s$. Pour cela posons la fonction $g : s \mapsto f(a + su + v) - f(a + su)$, définie sur $[0, 1]$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$, donc :

  $$C(u, v) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^1 \mathrm{D}_u f(a + su + v) - \mathrm{D}_u f(a + su)\, \mathrm{d}s.$$

  Puisque $\mathrm{D}_u f = \sum\limits_{j=1}^{p} u_j \partial_j f$, la fonction $\mathrm{D}_u f$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, pour $s \in [0, 1]$:

  $$\mathrm{D}_u f(a + su + v) - \mathrm{D}_u f(a + su) = \int_0^1 \mathrm{D}_v \mathrm{D}_u (a + su + tv)\, \mathrm{d}t.$$

  Il s'ensuit que :

  $$C(u, v) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{D}_v\, \mathrm{D}_u f(a + su + tv)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s$$

- Montrons que $\dfrac{C(\lambda u, \lambda v)}{\lambda^2} \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} \mathrm{D}_v \mathrm{D}_u f(a)$.

  Remarquons que $\lambda \mapsto C(\lambda u, \lambda v)$ est définie sur un voisinage de 0 et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

  $$D_{\lambda u} f = \lambda\, \mathrm{D}_u f.$$

  Il s'ensuit que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $|\lambda| \leqslant \lambda_0$, où $\lambda_0 = \frac{r}{\|u\| + \|v\|}$:

  $$\frac{C(\lambda u, \lambda v)}{\lambda^2} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{D}_v\, \mathrm{D}_u f(a + s\lambda u + t\lambda v)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s.$$

  Pour conclure, utilisons la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité, il existe $0 < \eta \leqslant r$ tel que $\|\mathrm{D}_v \mathrm{D}_u f(a + h) - \mathrm{D}_v \mathrm{D}_u f(a)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $h \in B_F(0, \eta)$.

Ainsi, pour $|\lambda| \leqslant \frac{\eta}{\|u\|+\|v\|}$, puisque $\|s\lambda u + t\lambda v\| \leqslant \eta$ pour $(s,t) \in [0,1]^2$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{C(\lambda u, \lambda v)}{\lambda^2} - \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a)\right\| &= \left\|\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{D}_v\,\mathrm{D}_u f(a+s\lambda u+t\lambda v) - \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 \left\|\mathrm{D}_v\,\mathrm{D}_u f(a+s\lambda u+t\lambda v) - \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a)\right\|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 \varepsilon\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent : $\dfrac{C(\lambda u, \lambda v)}{\lambda^2} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a)$.

- En particulier, $\dfrac{C(\lambda v, \lambda u)}{\lambda^2} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v f(a)$. Puisque $C(\lambda v, \lambda u) = C(\lambda u, \lambda v)$, on obtient $\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u f(a) = \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v f(a)$.

Corollaire 43 D'après le théorème de Schwarz, l'ensemble G des $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ telles que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^k(U,F) \quad \forall (j_i,\ldots,j_k) \in [\![1,p]\!]^k \quad \partial_{j_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{j_{\sigma(k)}} f = \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f$$

contient les transpositions $(i, i+1)$. Il est facile de vérifier que G est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_k, \circ)$. Par ailleurs, d'après l'exercice 1.7 de la page 52, le groupe $\mathfrak{S}_k$ est engendré par les transpositions du type $(i, i+1)$. Par suite $G = \mathfrak{S}_k$.

Exercice 25

1. Il y autant de dérivées partielles d'ordre k qu'il y a de k-listes à valeurs dans $[\![1,p]\!]$, c'est-à-dire qu'il y a p^k dérivées partielles d'ordre k en dimension p.
2. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$, on peut, d'après le théorème de Schwarz, se restreindre aux seules dérivées partielles $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_p^{\alpha_p}}$, avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = k$. Le problème se ramène donc à compter le nombre de solutions entières de l'équation $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = k$.
   Il y a autant de solutions qu'il y a de manières de disposer k objets indiscernables dans p boîtes de capacité illimitée. À une telle distribution on peut associer une liste de 0 et 1 et *vice versa* : la liste comprend $p+1$ fois le nombre 1 et k fois 0, et elle commence et se termine par 1. La distribution est alors caractérisée par le nombre de 0 entre deux 1 consécutifs. Il suffit donc de compter le nombre de telles listes, qui compte $k+p+1$ éléments. Sachant qu'elles sont caractérisées par la positions des 1 et que deux des 1 ont une position fixe, il y a $\binom{p+k-1}{p-1}$ telles listes.
   En conclusion, il suffit de considérer $\binom{p+k-1}{p-1}$ dérivées partielles d'ordre k en dimension p lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 26

1. • En tant que fonction rationnelle, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Le calcul donne, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

et puisque $f(t,0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

• Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en posant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = r\left|\sin\theta\left(\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\,\sin^2\theta - \sin^4\theta\right)\right| \leqslant 6r = 6\|(x,y)\|_2.$$

Cette dernière inégalité est encore valable pour $(x,y) = (0,0)$. On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Par suite,la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = -f(y,x)$, et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ sur $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que la fonction f a toutes ses dérivées partielles continues et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y.$$

Cette dernière expression est encore valable lorsque $y = 0$.

Par suite $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$. Cependant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0,x) = x,$$

et donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

Comme le montre cet exercice, l'hypothèse de classe $\mathcal{C}^2$ est importante dans l'énoncé du théorème de Schwarz.

Exercice 27 Notons $V(x,y) = \big(V_1(x,y), V_2(x,y)\big)$.

Le calcul donne $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) = 2xy$ et $\frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) = -y$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Puisque $\frac{\partial V_1}{\partial y} \neq \frac{\partial V_2}{\partial x}$, le champ ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 28 On vérifie pour commencer que la condition de Schwarz est bien satisfaite :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y).$$

Si $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel f, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En fixant un $y \in \mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe alors une constante $\varphi(y)$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^2y + \varphi(y).$$

Puisque f est classe $\mathcal{C}^1$, et que $(x,y) \mapsto x^2y$ l'est également, il vient que la fonction φ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$, car $\varphi(y) = f(0,y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, nécessairement $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + y = x^2 + \varphi'(y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui implique qu'il existe une constante β telle que :

$$f : (x,y) \mapsto x^2 y + \frac{y^2}{2} + \beta.$$

Il est alors facile de vérifier que $\overrightarrow{V} = \nabla f$, où $f : (x,y) \mapsto x^2 y + \frac{y^2}{2}$.

Exercice 29 Notons pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$V(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \big(V_1(x,y), V_2(x,y)\big).$$

Le calcul donne :

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y)$$

et donc f vérifie $(\star)$.

Supposons que V dérive d'un potentiel f. D'après le théorème 31 de la page 1125, on aurait :

$$0 = f(\cos 2\pi, \sin 2\pi) - f(0,0) = \int_0^{2\pi} \nabla f\,(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$\nabla f\,(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{-\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cos t = -1.$$

Il s'ensuit que

$$0 = f(\cos 2\pi, \sin 2\pi) - f(0,0) = \int_0^{2\pi} -1\,\mathrm{d}t = -2\pi,$$

ce qui est impossible. Par suite f ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 30 Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, l'application u est de classe $\mathcal{C}^2$. Il s'ensuit que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

ce qui signifie, rappelons le :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \tag{1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta). \tag{2}$$

2. Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, en appliquant la relation (1) à $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, il vient en notant $h : (r,\theta) \mapsto \cos\theta\,\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r}\,\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$, que pour tout (r,θ) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\,\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta).$$

En d'autre termes, compte tenu du théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\\ &= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{2\cos\theta\,\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\\ &\qquad + \frac{2\sin\theta\,\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\\ &= \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2\cos\theta\,\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\\ &\qquad - \frac{2\sin\theta\,\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\end{aligned}$$

Par conséquent, en additionnant les deux expressions, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2},$$

ce qui signifie :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

Exercice 31 On muni $\mathbb{C}$ de la base $\mathcal{B} = (1, i)$. Soit $R \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Considérons $\mathcal{S}_R$ l'ensemble des fonctions f définies sur $D_O(0, R) \subset \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Les théorèmes sur les séries entières garantissent que les éléments de $\mathcal{S}$ sont continus.

Soit $f \in \mathcal{S}$ associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z \in D_0(0, R)$.

Posons la fonction $u_n : t \mapsto a_n(t+z)^n$. Rappelons que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence (*cf.* la proposition 13 de la page 593).

La convergence normale de la série $\sum n a_n z^n$ sur $D_F(0, r) \subset \mathbb{C}$, pour un r tel que $|z| < r < R$ montre que la série $\sum u_n'$ converge normalement sur $I = [-\rho, \rho]$, où $\rho = r - |z|$. Puisque la série $\sum u_n$ converge en 0, la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dérivable en $0 \in \overset{\circ}{I}$. Par conséquent f a une première dérivée partielle en z et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$. Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{S}$.

De même, en considérant les $v_n : t \mapsto a_n(z+it)^n$, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = i \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{S}$.

Par suite $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}^\infty(D_0(0, R), \mathbb{C})$.

Exercice 32 Notons $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en a.

- Pour tout $v \in E_1$, en considérant $\gamma : t \mapsto a + tv$, on a que $v \in \overrightarrow{\mathcal{T}}$.
- Soit γ une fonction définie sur un voisinage V de 0 et dérivable en 0, à valeurs dans X. Puisque pour tout $t \in V \setminus \{0\}$ on a $\frac{1}{t}\left(\gamma(t) - \gamma(0)\right) \in E_1$ et puisque E_1 est un fermé de E (sous-espace vectoriel en dimension finie), il vient que $\gamma'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\gamma(t) - \gamma(0)\right) \in E_1$.

En conclusion $\overrightarrow{\mathcal{T}} = E_1$.

Exercice 33 Notons $G \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de f. Soit $\gamma : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ une application définie sur un voisinage de 0, dérivable en 0 à valeurs dans G et vérifiant $\gamma(0) = (x_0, y_0)$.

Puisque γ est à valeurs dans G, $y(t) = f\big(x(t)\big)$ pour tout t. La fonction γ étant dérivable en 0, la fonction x est dérivable en 0 et $\gamma'(0) = x'(0)\big(1, f'(x_0)\big)$. On en déduit facilement que l'ensemble des vecteurs tangents est $\mathbb{R}\big(1, f'(x_0)\big)$.

Exercice 34 Notons $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(x,y)}$ l'ensemble des vecteurs tangents à $[-1, 1]^2$ en (x, y).

- Le point $(0, 0)$ est intérieur à $[-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, donc $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(0,0)} = \mathbb{R}^2$ (*cf.* l'exemple 3 de la page 1133).

- Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to [-1,1]^2$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = (1,0)$. On note : $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Puisque la fonction dérivable x à valeurs réelles définie sur l'intervalle ouvert $]-\varepsilon, \varepsilon[$ admet un maximum en 0, on a $x'(0) = 0$. Par suite $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(0,0)} \subset \mathbb{R}\,(0,1)$.

  Pour tout $v = (0,\beta) \in \mathbb{R}\,(0,1)$, en considérant l'application $t \mapsto (1, t\beta)$ qui est définie au voisinage de 0, à valeurs dans $[-1,1]^2$ et dérivable en 0, on obtient que $v \in \overrightarrow{\mathcal{T}}_{(1,0)}$. Par conséquent $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(1,0)} = \mathbb{R}\,(0,1)$.
- Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to [-1,1]^2$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = (1,0)$. On note : $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Puisque x et y ont des extrema en 0, en reprenant le raisonnement précédent, on a $x'(0) = y'(0) = 0$. Il s'ensuit que $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(1,1)} = \big\{(0,0)\big\}$.

Exercice 35

- En considérant l'application $x \mapsto (x,0)$, on obtient que $(1,0)$ est un vecteur tangent à X en $(0,0)$. De même $(0,1) \in T_{(0,0)}$. Par suite $\mathbb{R}(1,0) \cup \mathbb{R}(0,1) \subset \overrightarrow{\mathcal{T}}_{(0,0)}$, puisque l'ensemble des vecteurs tangentes est un cône.
- Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Pour fixer les idées, supposons que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

  Supposons qu'il existe une application $\gamma : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ définie sur un voisinage de 0 et à valeurs dans X dont la dérivée en 0 soit (α,β). Puisque $x'(0) = \alpha > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $x(t) > 0$ pour $t \in]0,\eta]$. De même, il existe $\eta' > 0$ tel que $y(t) > 0$ pour $t \in]0,\eta']$. Il s'ensuit qu'il existe un réel t tel que $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$, ce qui contredit le fait que γ est à valeurs dans X.

Par suite $\overrightarrow{\mathcal{T}}_{(0,0)} = \mathbb{R}(1,0) \cup \mathbb{R}(0,1)$.

Proposition 44 Soit $a = \big(a_1, a_2, f(a_1,a_2)\big) \in S$.

- Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = a$, avec $\varepsilon > 0$. Pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a alors $\gamma_3(t) = f\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$. Ainsi, en dérivant :

$$\gamma_3'(0) = \gamma_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \gamma_2'(0)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

  et donc l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ des vecteurs tangents à X en a vérifie :

$$\overrightarrow{\mathcal{T}} \subset \Big\{(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_3 = v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\Big\}.$$

- Soit $(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$ et posons $\gamma : t \mapsto \big(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, f(a_1+tv_1, a_2+tv_2)\big)$. La fonction γ est définie sur un voisinage de 0 (car U est un ouvert), à valeurs dans S. De plus, γ est dérivable en 0, car f est différentiable, et :

$$\gamma'(0) = \Big(v_1, v_2, v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\Big).$$

  Par suite :

$$\overrightarrow{\mathcal{T}} = \Big\{(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_3 = v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\Big\}.$$

Proposition 45 Le sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne :

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}(m_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(m_0)$$

est un plan affine de $\mathbb{R}^3$. Il passe par m_0 et il est dirigé par le sous-espace vectoriel-d'équation :

$$w = u\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + v\frac{\partial f}{\partial y}(m_0),$$

c'est-à-dire, d'après la proposition 44 de la page 1134, dirigé par l'espace des vecteurs tangents à S en m_0. Par conséquent $\mathcal{T}$ est l'espace tangent à S en m_0.

Proposition 46 Par dérivation des fonctions composées, puisque f est différentiable et γ dérivable, on a pour tout $t \in I$:

$$0 = (f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t) = \big(\nabla f\big(\gamma(t)\big) \mid \gamma'(t)\big).$$

Exercice 36

- Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

  Puisque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, l'exemple de la page 1137 montre qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(y).$$

  Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}$ de la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est φ, il existe une constante $\Psi(x)$ telle que :

  $$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x, y) = \Phi(y) + \Psi(x),$$

  où Φ est une primitive de φ. En particulier, Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, l'application $\Psi : x \mapsto f(x, 0) - \Phi(0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
- Réciproquement, si $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$, il est alors facile de vérifier que la fonction $f : (x, y) \mapsto \Psi(x) + \Phi(y)$ vérifie la relation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Ainsi l'ensemble des solutions du problème est :

$$\mathcal{S} = \big\{(x, y) \mapsto \Psi(x) + \Phi(y)\,;\ (\Phi, \Psi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2\big\}$$

Exercice 37 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; posons un changement de variables :

$$(x, t) = (\alpha u + \beta v\,,\ \gamma u + \delta v) \qquad \text{et} \qquad f(x, t) = g(u, v),$$

avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Le changement de variables est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, d'après la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Prenons $\alpha = c$ et $\gamma = 1$. Pour avoir un changement de variables bijectif, il suffit de choisir $\beta = -1$ et $\delta = c$, car alors $\alpha\delta - \beta\gamma = c^2 + 1 \neq 0$. Il s'ensuit que f est une solution du problème si, et seulement si, g est une solution de $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$. D'après l'exemple de la page 1137, la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est une solution du problème si, et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad g(u,v) = \varphi(v).$$

Puisque le changement de variables réciproque est linéaire, donc de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad u = \frac{cx+t}{1+c^2} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{ct-x}{1+c^2},$$

l'ensemble des solutions du problème est :

$$\mathcal{S} = \big\{(x,t) \mapsto \Phi\,(x - ct)\ ;\ \Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\big\}.$$

Exercice 38

1. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & U \\ (x,y) & \longmapsto & \left(y - \dfrac{x^2}{2}, y\right) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car les applications composantes sont polynomiales sur l'ouvert $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

   Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons à résoudre dans V l'équation :

   $$\begin{cases} u = y - x^2/2 \\ v = y. \end{cases}$$

   Ce système est équivalent à :

   $$\begin{cases} x^2 = 2(v-u) \\ y = v. \end{cases}$$

   Ce dernier n'a de solutions que si $v > u$, et cette solution est alors unique dans $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

   Par conséquent, φ définit une bijection de V sur $U = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; v > u\big\}$, qui est un ouvert et :

   $$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\sqrt{2(v-u)}, v\right). \end{array}$$

   Par suite, l'application φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; posons :

   $$(u,v) = \varphi(x,y) \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = g(u,v).$$

   D'après la règle de la chaîne :

   $$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(J\varphi)^{-1}$$

   Par ailleurs, pour tout $(x,y) \in V$:

   $$J\varphi = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} -1/x & 1/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier :

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ainsi, f est solution du problème si, et seulement si, g est une solution de $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$, c'est-à-dire en reprenant le raisonnement de l'exemple de la page 1137, si, et seulement s'il existe $\Phi_1 \in \mathcal{C}^1(\mathsf{IR}, \mathsf{IR})$ telle que :

$$\forall (u,v) \in U \quad g(u,v) = \Phi_1(u).$$

Puisque φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$, l'ensemble des solutions du problème est :

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y) \mapsto \Phi\big(y - x^2/2\big)\,;\ \Phi \in \mathcal{C}^1(\mathsf{IR}, \mathsf{IR})\right\}.$$

S'entraîner et approfondir

18.1 On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Démontrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 1/z \end{array}$ est différentiable en tout point et donner sa différentielle.

18.2 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in U$ si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe.

En notant $P = \operatorname{Re} f$ et $Q = \operatorname{Im} f$, montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in U$ si, et seulement si, f est différentiable en z_0 avec :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0).$$

Ces relations sont connues sous de le nom d'*équations de Cauchy-Riemann.*

⋆⋆ **18.3** *(Mines 2015)*
Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$f(M) = \big(\operatorname{Tr} M, \ldots, \operatorname{Tr} M^n\big).$$

1. Démontrer que f est différentiable et calculer $\mathrm{d}f(M)$.
2. Comparer le rang de $\mathrm{d}f(M)$ avec le degré du polynôme minimal μ_M de M.
3. Démontrer que $\big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \chi_M = \mu_M\big\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⋆ **18.4** 1. Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable en 0, vérifiant $\gamma(0) = I_n$. Démontrer que $\gamma'(0)$ est une matrice antisymétrique.
2. Démontrer que l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{SO}_n$ en I_n est l'ensemble des matrices antisymétrique réelles d'ordre n.
Indication. Considérer l'application exp *sur l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles.*

⋆ **18.5** Soit F une algèbre de dimension finie et f une application de U dans F. On suppose que $f(x)$ est inversible dans F pour tout x de U et que f est différentiable au point $a \in U$.
1. Démontrer que l'ensemble V des inversibles de F est un ouvert.
2. Démontrer que l'application $y \mapsto y^{-1}$ définie sur V est différentiable.
Indication. Penser aux séries géométriques.
3. Montrer que la fonction $g : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x)^{-1} \end{array}$ est différentiable en a et :

$$\forall h \in E \quad \mathrm{d}g(a) \cdot h = -f(a)^{-1}\big(\mathrm{d}f(a) \cdot h\big)\, f(a)^{-1}.$$

18.6 *(Mines 2015)*

Soit $p>0$ et $\mathcal{P}$ la parabole de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y^2=2px$. On définit une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{P}$ par $M_0\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et M_{n+1} est l'autre point d'intersection de la normale à $\mathcal{P}$ en M_n avec $\mathcal{P}$. On note y_n l'ordonnée de M_n.

Étudier la nature de la série de terme général $\sum \dfrac{1}{\ln(1+|y_n|)}$.

18.7 Déterminer les extrema des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x,y)=-2(x-y)^2+x^4+y^4$
2. $g(x,y)=(2x^2+3y^2)\exp(-(x^2+y^2))$

18.8 Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Donner l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $A(1,0)$, $B(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$ et $C(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$.
   On se restreindra au cas où $0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant 2\pi$.
2. Déterminer les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle de rayon 1.

18.9 On muni le plan $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique.

1. Démontrer que $(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^3$ sont les côtés d'un triangle si, et seulement si :
$$a\leqslant b+c,\qquad b\leqslant a+c,\qquad c\leqslant a+b.$$
2. Démontrer que l'aire d'un triangle ABC de côtés a, b et c est
$$\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
   où $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre (*formule de Héron*).
3. Déterminer les triangles d'aire maximale parmi ceux de périmètre 1.

18.10 On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.
Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}\frac{f(x)}{\|x\|}=+\infty$.

1. Soit $v\in E$. Démontrer que $g:x\mapsto f(x)-(\,x\mid v\,)$ admet un minimum.
2. En déduire que l'application ∇f est surjective.

18.11 On dit que $f:U\to\mathbb{R}$ est convexe si U est convexe et si :
$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2\quad \forall t\in[0,1]\quad f\big((1-t)x+ty\big)\leqslant(1-t)\,f(x)+t\,f(y).$$
Soit U un ouvert convexe et $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable. Démontrer que f admet un minimum en a si, et seulement si, a est un point critique de f.

18.12 Soit $U \in \mathbb{R}^n$ et $A\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire une matrice symétrique vérifiant :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad {}^tXAX > 0.$$

Déterminer les extrema de la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & {}^tXAX + 2\,{}^tUX. \end{array}$

18.13 On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$

La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

18.14 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

18.15 On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^n$ est un **cône positif** si pour tout $x \in C$ et $t > 0$ on a $tx \in C$.

Soit C un cône positif de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est **homogène de degré α** si :

$$\forall (x,t) \in E \times \mathbb{R}_+^* \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

On suppose dans la suite que C est également un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(C, \mathbb{R})$.

1. Démontrer que la fonction f est homogène de degré α, alors les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $\alpha - 1$.
2. Démontrer que la fonction f est homogène de degré α si, et seulement si :

$$\forall x \in U \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha\, f(x). \qquad \textit{(Relation d'Euler)}$$

18.16 Démontrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x,x)\,;\ x \in \mathbb{R}\big\}$ ont un prolongement sur $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. $f(x,y) = \dfrac{e^y - e^x}{y - x}$,
2. $f(x,y) = \dfrac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x}\cdot$

18.17 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x,x)\,;\ x \in \mathbb{R}\big\}$ par :

$$F(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\cdot$$

Démontrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

18.18 On muni $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ telle que Jf soit à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. *Lemme des tresses*
   Soit X un ensemble non vide et $g : X^3 \to \mathbb{R}$ une application antisymétrique par rapport aux deux première variables et symétrique par rapport aux deux dernières. Démontrer que g est nulle .
2. Démontrer que Jf est constante.
3. Déterminer f. *Indication. On pourra utiliser l'égalité de Taylor reste intégral.*

18.19 Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ supposé connexe par arcs.

1. Trouver un exemple d'un tel ouvert U et d'une telle fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ mais que f ne dépende pas seulement de y, autrement dit telle qu'*il n'existe pas* de fonction h à une seule variable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $(x, y) \in U$, $\;f(x, y) = h(y)$.
2. Donner une condition suffisante simple sur U pour que toute fonction f vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ dépende seulement de y.

⋆ **18.20** Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2. \qquad (E)$$

Résoudre (E) successivement dans $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x, 0) \;\big|\; x \leqslant 0\big\}$, dans $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, 0)\big\}$ et dans $\mathbb{R}^2$. On se restreindra aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

18.21 Par un changement de variable affine, résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

où l'un au moins des deux nombres a et b est non nul.

18.22 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $b^2 - 4ac > 0$, et $a \neq 0$. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (E)$$

par un changement de variables linéaire.

18.23 Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, 1[$ telles que la fonction g définie sur $]0, \pi[\times \mathbb{R}$ par :

$$g(x, y) = f\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$$

ait un laplacien nul.

Solution des exercices

18.1 Il est immédiat que $\mathbb{C}^*$ est un ouvert. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ telle que $|h| < |z|$, on a :

$$f(z+h) - f(z) = -\frac{h}{(z+h)z}\cdot$$

Par ailleurs, $\frac{1}{(z+h)z} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{z^2}$
et donc $\frac{1}{z(z+h)} = \frac{1}{z^2} + \mathrm{o}(1)$. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$f(z+h) - f(z) = -\frac{h}{z^2} + h\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+h)z}\right) = -\frac{h}{z^2} + \mathrm{o}(h).$$

Il est clair que l'application $h \mapsto -\frac{h}{z^2}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Par conséquent f est différentiable en z et :

$$\forall h \in \mathbb{C} \quad \mathrm{d}f(z)\cdot h = -\frac{h}{z^2}\cdot$$

18.2 Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est muni de la base $\mathcal{B} = (1, i)$.

- Supposons que f soit $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Il existe alors un nombre complexe noté $f'(z_0)$ tel que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$.

  Notons u l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $u(h) = hf'(z_0)$. Par définition, au voisinage de 0 :

  $$f(z_0+h) = f(z_0) + hf'(z_0) + \mathrm{o}(h) = f(z_0) + u(h) + \mathrm{o}(h).$$

  De plus u est une application $\mathbb{C}$-linéaire, car il s'agit d'une homothétie. *A fortiori* elle est $\mathbb{R}$-linéaire et donc f est différentiable en z_0.

  Donnons un calcul de $f'(z_0)$. La différentiabilité implique l'existence de $\frac{\partial P}{\partial x}(z_0)$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)$. Par définition, on a :

  $$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{\big(P(z_0+h) - P(z_0)\big) + i\big(Q(z_0+h) - Q(z_0)\big)}{h} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0). \end{aligned}$$

  On a également : $$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{f(z_0+ih) - f(z_0)}{ih} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{\big(P(z_0+ih) - P(z_0)\big) + i\big(Q(z_0+ih) - Q(z_0)\big)}{ih} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{Q(z_0+ih) - Q(z_0) - i\big(P(z_0+ih) - P(z_0)\big)}{h} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(z_0). \end{aligned}$$

En identifiant les deux expressions de $f'(z_0)$, il vient que :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_o)\cdot$$

- Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable en z_0 telle que $\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)\cdot$ L'expression de la différentielle en termes de dérivées partielles donne, pour tout $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(z_0)\cdot h &= h_1\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \\ &= \left(h_1\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + h_2\frac{\partial P}{\partial y}(z_0)\right) + i\left(h_1\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) + h_2\frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)\right) \end{aligned}$$

En utilisant les relations entre dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(z_0)\cdot h &= \left(h_1\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) - h_2\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)\right) + i\left(h_1\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) + h_2\frac{\partial P}{\partial x}(z_0)\right) \\ &= (h_1 + ih_2)\left(\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, la différentiabilité donne qu'au voisinage de 0 :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h\ell + \mathrm{o}(h)$$

avec $\ell = \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)$, ce qui implique que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.

18.3 1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a vu en exercice (*cf.* exercice 16 de la page 1115) que l'application $f_p : M \mapsto M^p$ est différentiable et, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{d}f_p(M)\cdot H = \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-i-1}.$$

Puisque l'application trace est linéaire, on en déduit que l'application $g_p = \mathrm{Tr}\circ f_p$ est différentiable et, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{d}g_p(M)\cdot H = \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-i-1}\right).$$

Par propriété de la trace, on a, pour $(M,H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$\mathrm{d}g_p(M)\cdot H = \sum_{i=0}^{p-1} \mathrm{Tr}\left(M^i H M^{p-i-1}\right) = p\,\mathrm{Tr}(M^{p-1}H).$$

Puisqu'une application est différentiable si, et seulement si, ses applications composantes sont différentiables, on en déduit que f est différentiable et :

$$\forall (M,H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \mathrm{d}f(M)\cdot H = \big(\mathrm{Tr}(H), 2\,\mathrm{Tr}(MH), \ldots, n\,\mathrm{Tr}(M^{n-1}H)\big)$$

2. Fixons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
   $$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (i+1) \operatorname{Tr}(M^i H) = 0. \tag{$*$}$$
   Cela peut se traduire par :
   $$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \operatorname{Tr}\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (i+1) M^i\right) H\right) = 0,$$
   ou encore
   $$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \operatorname{Tr}\big(P(M)H\big) = 0, \tag{$**$}$$
   où $P = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i (i+1) X^i$. Par ailleurs, on sait que $(M, N) \mapsto \operatorname{Tr}\left({}^t MN\right)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La condition $(**)$ se traduit par :
   $$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad ({}^t P(M) \mid H) = 0,$$
   Par suite $P(M) = 0$.
   - Si $\deg \mu_M = n$, alors il n'existe pas de polynôme annulateur de degré inférieur à $n-1$. Il s'ensuit, d'après $(*)$, que $\operatorname{Im} \mathrm{d}f(M)$ n'est inclus dans aucun hyperplan. Dans ces conditions $\operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big) = n$.
   - Si $p = \deg \mu_M < n$, alors les polynômes μ_M, $X\mu_M$, ..., $X^{n-1-p}\mu_M$ sont des polynômes annulateurs de M, En notant $\mu_M = \sum\limits_{i=0}^{p} \alpha_i X^i$, les familles :
   $$\Lambda_k = (\lambda_0^{(k)}, \ldots, \lambda_{n-1}^{(k)}) = \big(0, \ldots, \underbrace{\alpha_0}_{k\text{-ième position}}, \ldots, \alpha_p, \ldots, 0\big)$$
   sont linéairement indépendantes et, d'après le point précédent, l'image de $\mathrm{d}f(M)$ est incluse dans l'ensemble des solutions du système :
   $$\begin{cases} \lambda_0^{(1)} x_1 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(1)} x_n = 0 \\ \\ \lambda_0^{(n-p)} x_1 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(n-p)} x_n = 0. \end{cases}$$
   Ce système étant de rang $n-p$, l'image est de dimension au plus p, *i.e.* :
   $$\operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big) \leqslant \deg \mu_M.$$
   - Si $\operatorname{rg}\big(\mathrm{d}f(M)\big) = q < n$, alors on peut trouver une équation de l'image sous la forme :
   $$\begin{cases} \lambda_0^{(1)} x_1 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(1)} x_n = 0 \\ \\ \lambda_0^{(n-q)} x_1 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(n-q)} x_n = 0. \end{cases}$$
   où le rang du système est $n-q$. Cela conduit à une famille libre de $n-q$ polynômes annulateurs de M. Comme :
   $$\big\{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \;\big|\; P(M) = 0\big\} = \mu_M \mathbb{R}_{n-1-\deg \mu_M},$$

on en déduit que :

$$\dim\left\{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \;\middle|\; P(M) = 0\right\} = n - \deg \mu_M,$$

et donc $n - \deg \mu_M \geqslant n - q$, c'est-à-dire :

$$\deg \mu_M \leqslant \operatorname{rg}\bigl(\mathrm{d}f(M)\bigr).$$

En conclusion, dans tous les cas :

$$\deg \mu_M = \operatorname{rg}\bigl(\mathrm{d}f(M)\bigr).$$

3. En vertu du théorème de Cayley-Hamilton et de ce qui précède :

$$\begin{aligned}\bigl\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \chi_M = \mu_M\bigr\} &= \bigl\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \deg \mu_M = n\bigr\}\\ &= \bigl\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rg}\bigl(\mathrm{d}f(M)\bigr) = n\bigr\}.\end{aligned}$$

Pour démontrer que cet ensemble est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il suffit de démontrer que :

$$\bigl\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rg}\bigl(\mathrm{d}f(M)\bigr) \leqslant n-1\bigr\}$$

est un fermé.
Prenons une base $\mathcal{B} = (E_1, \ldots, E_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une $\mathcal{B}' = (F_1, \ldots, F_n)$ de $\mathbb{R}^n$. En notant $Jf(M)$ la matrice jacobienne de f en M dans ces deux bases, il s'agit de montrer que :

$$\bigl\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rg}\bigl(Jf(M)\bigr) \leqslant n-1\bigr\}$$

est un un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,n^2}(\mathbb{R})$ est inférieur ou égale à $n-1$ si pour tout $I \subset [\![1, n^2]\!]$ de cardinal n, le determinant de la matrice extraite $A_{[\![1,n]\!],I}$ est nul.
Soit $I \subset [\![1, n^2]\!]$ de cardinal n. L'application $g_I : A \mapsto \det A_{[\![1,n]\!],I}$ est polynomiale, donc continue. Par composition, $h_I = g_I \circ Jf$ est continue. Il s'ensuit que $h_I^{-1}\bigl(\{0\}\bigr)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite :

$$\bigl\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rg}\bigl(\mathrm{d}f(M)\bigr) \leqslant n-1\bigr\} = \bigcap_{\substack{I \subset [\![1,n^2]\!]\\ |I| = n}} h_I^{-1}\bigl(\{0\}\bigr)$$

est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comme intersection de fermés, ce qui prouve le résultat demandé.

18.4 1. On a, au voisinage de 0, le développement limité :

$$\gamma(s) = I_n + s\gamma'(0) + \mathrm{o}(s)$$

et donc, puisque $\gamma(s)$ est une matrice orthogonale pour tout $s \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$:

$$\begin{aligned} I_n &= {}^t\gamma(s)\,\gamma(s)\\ &= \bigl(I_n + s\,{}^t\gamma'(0) + \mathrm{o}(s)\bigr)\bigl(I_n + s\,\gamma'(0) + \mathrm{o}(s)\bigr)\\ &= I_n + s\left({}^t\gamma'(0) + \gamma'(0)\right) + \mathrm{o}(s).\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, ${}^t\gamma'(0) + \gamma'(0) = 0$ et donc $\gamma'(0)$ est une matrice antisymétrique.

2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrons que l'application $t \mapsto \exp(tA)$ est à valeurs dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Puisque la dérivée en 0 de cette application est A, on déduira que A est un vecteur tangent à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ en I_n.
   - Démontrons que $\exp(A) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Puisque la transposition est continue, on a ${}^t\!(\exp A) = \exp\left({}^tA\right)$. Comme ${}^tA = -A$, les matrices ${}^tA$ et A commutent. Par conséquent :
   $$ {}^t\!(\exp A)(\exp A) = \exp\left({}^tA + A\right) = \exp(0) = I_n. $$
   Il s'ensuit que $\exp A$ est une matrice orthogonale.
   - Démontrons que $\exp(sA) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, $\exp(sA)$ est une matrice orthogonale pour tout s. De plus, par composition, l'application $f : s \mapsto \det\bigl(\exp(sA)\bigr)$ est continue. Comme $f(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$, on en déduit par continuité que f est constante. Enfin, $f(0) = \det(I_n) = 1$ et donc $\det\bigl(\exp(sA)\bigr) = 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
   - L'application $\gamma : s \mapsto \exp(sA)$ est à valeurs dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, dérivable en 0 et $\gamma'(0) = A$. Il s'ensuit que A est un vecteur tangent à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

   En conclusion, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des vecteurs tangents à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

18.5 Notons e l'élément unité de F.

1. Montrons que V est un ouvert.
   - L'application $(y, y') \mapsto yy'$ étant bilinéaire sur des espaces vectoriels de dimension finie, il existe $C > 0$ telle que $\|yy'\| \leqslant C\|y\|\,\|y'\|$ pour tout $(y, y') \in F^2$. Il s'ensuit alors que $\|y^n\| \leqslant \dfrac{\bigl(C\|y\|\bigr)^n}{C}$ pour tout $(y, n) \in F \times \mathbb{N}^*$. En particulier $y^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dès lors que $\|y\| < \frac{1}{C}$.
   - Soit $y \in F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e - y)\sum\limits_{k=0}^{n} y^k = e - y^{n+1}$. Ainsi, si $\|y\| < 1/C$, alors :
   $$ (e - y)\sum_{k=0}^{n} y^k = e - y^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e. $$
   Par ailleurs, puisque $\|y^n\| = \mathrm{O}\bigl((C\|y\|)^n\bigr)$, la série $\sum y^k$ est absolument convergente. Par conséquent :
   $$ (e - y)\sum_{k=0}^{+\infty} y^k = e. $$
   Par suite la boule $B_O(e, 1/C)$ est incluse dans l'ensemble V des éléments inversibles de F et $(e - y)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} y^k$ pour les $y \in B_O(0, 1/C)$.
   - Soit $y \in V$. Pour tout $h \in F$:
   $$ y + h = y\bigl(e - (-y^{-1}h)\bigr) $$

et donc $y+h$ est inversible dès lors que $\|y^{-1}h\| < 1/C$, car alors $y+h$ est le produit de deux éléments inversibles. Cette condition est vérifiée dès que $C\|y^{-1}\|\|h\| < 1/C$, *i.e.* $\|h\| < 1/(C^2\|y^{-1}\|)$.
Par suite la boule ouverte $B_O\big(y, 1/(C^2\|y^{-1}\|)\big)$ est incluse dans V et V est un ouvert. De plus, pour $h \in B_O\big(0, 1/(C^2\|y^{-1}\|)\big)$:

$$(y+h)^{-1} = \big(y(e-(-y^{-1}h))\big)^{-1} = \big(e-(-y^{-1}h)\big)^{-1}y^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-y^{-1}h)^k y^{-1}$$

2. Montrons que l'application $\Phi : y \mapsto y^{-1}$ définie sur V est différentiable. Soit $y \in V$.
   Lorsque $h \in F$ vérifie $\|h\| < 1/(C^2\|y^{-1}\|)$, alors la série $\sum(-y^{-1}h)^n y^{-1}$ étant absolument convergente et donc :
   $$\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}(y^{-1}h)^k y^{-1}\right\| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\|y^{-1}\|\big(C^2\|y^{-1}\|\|h\|\big)^k = \|y^{-1}\|\,\frac{\big(C^2\|y^{-1}\|\|h\|\big)^2}{1-C^2\|y^{-1}\|\|h\|}.$$
   Ainsi, au voisinage de 0 :
   $$\sum_{k=2}^{+\infty}(y^{-1}h)^k y^{-1} = \mathrm{O}\big(\|h\|^2\big) = \mathrm{o}(h),$$
   et donc $(y+h)^{-1} = y^{-1} - y^{-1}hy^{-1} + \mathrm{o}(h)$. Comme l'application $h \mapsto -y^{-1}hy^{-1}$, on en déduit que Φ est différentiable en y. En conclusion, Φ est différentiable et :
   $$\forall y \in V \quad \forall h \in F \quad \mathrm{d}\Phi(y)\cdot h = -y^{-1}hy^{-1}.$$
3. Par composition de fonctions différentiables, si la fonction f est à valeurs dans V et différentiable en $a \in U$, alors $g = f^{-1} = \Phi \circ f$ est différentiable en a et :
   $$\forall h \in F \quad \mathrm{d}g(a)\cdot h = -f^{-1}(a)\,(\mathrm{d}f(a)\cdot h)\,f^{-1}(a).$$

18.6 Posons $f : (x,y) \mapsto 2px - y^2$. On définit ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, car polynomiale, sur $\mathbb{R}^2$.

- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
  $$\nabla f(x,y) = (2p, -2y).$$
  Ainsi, tous les points de $\mathbb{R}^2$ sont réguliers pour f.
  On sait que la normale en un point $A(a,b)$ de $\mathcal{P}$ est dirigée par $\nabla f(a,b)$. Il s'ensuit qu'une équation de cette normale est :
  $$\mathcal{N}_A : b(x-a) + p(y-b) = bx + py - \frac{b^3}{2p} - pb = 0.$$
  * Si $b = 0$, une équation de la normale est : $y = 0$. Cette droite n'a qu'un seul point d'intersection avec $\mathcal{P}$, le point $(0,0)$.

∗ Si $b \neq 0$, les points $M(x,y)$ d'intersection de $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{P}$ sont caractérisés par :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{b}\left(\frac{b^3}{2p} + pb - py\right) \\ 2px - y^2 = 0, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} y^2 = \frac{2p}{b}\left(\frac{b^3}{2p} + pb - py\right) \\ 2px - y^2 = 0, \end{cases}$$

or :

$$y^2 - \frac{2p}{b}\left(\frac{b^3}{2p} + pb - py\right) = y^2 + \frac{2p^2}{b}y - (b^2 + 2p^2) = P(y).$$

Puisque b est une racine réelle du polynôme P du second degré, on en déduit que l'autre racine b' est réelle et vaut :

$$b' = -\frac{2p^2}{b} - b = -\frac{2p^2 + b^2}{b}$$

On constate que $b' \neq 0$. De plus, on aura $b = b'$ si, et seulement si, :

$$2b = -\frac{2p^2}{b}$$

ce qui implique $b^2 = -p^2$, ce qui est impossible.
En conclusion, $\mathcal{N}_A$ a un unique point d'intersection autre que A avec $\mathcal{P}$ et ce point est différent de $(0,0)$.

• Il vient de l'étude précédente que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à valeurs dans $\mathcal{P} \setminus \{(0,0)\}$.
Toujours d'après l'étude précédente, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = -\frac{2p^2 + y_n^2}{y_n}.$$

Donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $z_n = |y_n|$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \frac{2p^2 + z_n^2}{z_n} = \frac{2p^2}{z_n} + z_n.$$

∗ Étudions la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est immédiat qu'elle est à valeurs positives et croissante. Si elle admet une limite finie, celle-ci serait strictement positive et, par opérations sur les limites, on aurait l'égalité $\ell = \ell + \frac{2p^2}{\ell}$, ce qui est impossible. Par conséquent, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite finie et puisqu'elle est croissante :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

∗ Ainsi, puisque z_n tends vers $+\infty$:

$$\ln(1 + z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln z_n.$$

On en déduit que les séries $\sum \frac{1}{\ln(1+|y_n|)}$ et $\sum \frac{1}{\ln z_n}$ sont de même nature.

$*$ Donnons un équivalent de z_n. Pour tout entier n, on a :

$$z_{n+1}^2 = z_n^2 + 4p^2 + \frac{4p^4}{z_n^2}.$$

Ainsi, du fait que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $p \neq 0$, on a :

$$z_{n+1}^2 - z_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4p^2.$$

Par sommation des relations de comparaisons, il vient :

$$z_n^2 - z_0^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4p^2 n$$

et donc :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2p\sqrt{n}.$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\ln z_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\ln n}.$$

Puisque $\frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, par comparaisons aux séries de Riemann, la série de terme général positif $\sum \frac{1}{\ln n}$ est divergence et, par comparaison, la série $\sum \frac{1}{\ln z_n}$ diverge. Par suite $\sum \frac{1}{\ln\left(1+|y_n|\right)}$ est divergente.

18.7 Dans cet exercice, la norme est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$

1. La fonction f est polynomiale, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x^3 - x + y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(y^3 + x - y).$$

Il s'ensuit que si (x,y) est un point critique, alors $x^3 = -y^3$, ce qui implique, puisque x et y sont réels, que $x = -y$. On a alors $x(x^2-2) = 0$.

Ainsi $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont les seuls points critiques de f (il est facile de vérifier réciproquement que ce sont effectivement des points critiques).

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x,x) = 2x^4$ et $f(x,0) = x^2(x^2-2)$ et donc, dans tout voisinage de $(0,0)$, il existe de points où f prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. On en déduit que f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.
- Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) = f(y,x)$, les deux autres points critiques seront de même nature.
- On sait que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$. Il s'ensuit que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$(x-y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad (x^2+y^2)^2 \leqslant 2(x^4+y^4)$$

On en déduit que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) \geqslant \frac{\|(x,y)\|^4}{2} - 4\|(x,y)\|^2 \underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par conséquent, il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big\|(x,y)\big\| > R \Longrightarrow f(x,y) \geqslant 1.$$

Par suite :

$$\inf_{\|(x,y)\|>R} f(x,y) \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \inf_{\|(x,y)\|\leqslant R} f(x,y) \leqslant f(0,0) = 0.$$

On en déduit l'égalité :

$$\inf_{B_F\big((0,0),R\big)} f(x,y) = \inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y). \tag{$*$}$$

La boule fermée $B = B_F\big((0,0),R\big)$ étant un compact de $\mathbb{R}^2$, la restriction de f à B atteint son minimum et ce minimum est le minimum sur $\mathbb{R}^2$ d'après $(*)$. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert, ce minimum est atteint sur un point critique, qui n'est pas $(0,0)$ comme on l'a vu. Par suite, la fonction f atteint son minimum en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

2. Par croissances comparées, la fonction g tend vers 0 à l'infini (*i.e.* lorsque la norme de (x,y) tend vers l'infini) car :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 \leqslant g(x,y) \leqslant 3\big\|(x,y)\big\|^2 \exp\Big(-\big\|(x,y)^2\big\|\Big)$$

Elle admet donc un maximum global. En effet, il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\big\|(x,y)-(1,1)\big\| > r$ on ait $g(x,y) \leqslant f(1,1)/2$. Il s'ensuit que g est bornée et que :

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = \sup_{(x,y)\in B_F\big((1,1),r\big)} g(x,y).$$

Puisque $B_F\big((1,1),r\big)$ est compacte (fermée, bornée en dimension finie) et la fonction g continue, la restriction de g à $B_F\big((1,1),r\big)$ atteint son maximum, qui est donc un maximum global pour g.

Ce maximum est atteint en un point critique, puisque la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Les dérivées partielles de g sont :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}(-2+2x^2+3y^2)$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}(-3+2x^2+3y^2).$$

Les points critiques de g s'en déduisent aisément, et sont :

$$(0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ (1,0),\ (-1,0)$$

Comme $g(0,0)=0$ et que g est positive, le point $(0,0)$ est un minimum global. Aux points $(1,0)$ et $(-1,0)$, g prend la valeur $2e^{-1}$. Un développement limité de $h \mapsto g(1+h,0)$ au voisinage de 0 donne :

$$g(1+h,0) = 2e^{-1} - 4e^{-1}h^2 + \mathrm{o}(h^2))$$

et un développement limité de $h \mapsto g(1,h)$ au voisinage de 0 donne :

$$g(1,h) = 2e^{-1} + e^{-1}h^2 + o(h^2).$$

Le premier développent montre que dans tout voisinage de $(1,0)$ il existe un point de la forme $(1+h,0)$ pour lequel $f(1+h,0) < f(1,0)$; le second développent montre que dans tout voisinage de $(1,0)$ il existe un point de la forme $(1,h)$ pour lequel $f(1,h) > f(1,0)$. Ainsi, la fonction f n'atteint pas d'extremum local en $(1,0)$.
Par symétrie, f n'atteint pas d'extremum en $(-1,0)$.

Aux points $(0,1)$ et $(0,-1)$ g prend la valeur $3e^{-1}$, et ce sont donc deux maxima, car g en admet au moins un.

18.8 1. L'interprétation du déterminant en termes d'aires donne $\mathcal{A} = \dfrac{\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|}{2}\cdot$

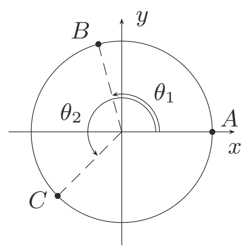
De plus :

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix}\cos\theta_1 - 1 & \cos\theta_1 - 1\\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2\sin^2\frac{\theta_1}{2} & -2\sin^2\frac{\theta_2}{2}\\ 2\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} & 2\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\end{vmatrix}$$

$$= 4\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\begin{vmatrix}-\sin\frac{\theta_1}{2} & -\sin\frac{\theta_2}{2}\\ \cos\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_2}{2}\end{vmatrix} = 4\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$

Puisque $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$, les réels $\frac{\theta_1}{2}$, $\frac{\theta_2}{2}$ et $\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$ sont dans $[0,\pi]$, il s'ensuit que $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \geqslant 0$ et donc que :

$$\mathcal{A} = 2\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\cdot$$

2. 

Considérons un triangle ABC inscrit dans le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Après rotation et symétrie, on peut supposer que :

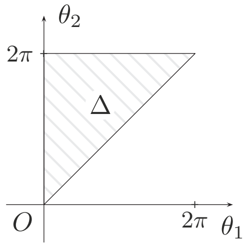
$$A(1,0),\ B(\cos\theta_1,\sin\theta_1)\ \text{ et }\ C(\cos\theta_2,\sin\theta_2),$$

avec $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$, car cela ne change pas l'aire.
Le problème revient à chercher les maxima de la fonction définie sur :

$$\Delta = \left\{(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi\right\}$$

par $f(\theta_1,\theta_2) = \sin\dfrac{\theta_1}{2}\sin\dfrac{\theta_2}{2}\sin\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\cdot$

Par les théorèmes généraux f est continue sur Δ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{\Delta}$.



Le domaine Δ est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet, l'ensemble est fermé comme intersection de demi-plans finis. Il est de plus clairement borné et donc par dimension finie, c'est une partie compacte. Il est facile de vérifier que :

$$\overset{\circ}{\Delta} = \big\{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi\big\}.$$

La fonction f est à valeurs positives et nulle sur la frontière de Δ. Puisque f est non nulle, les maxima, qui existent par compacité et continuité, sont dans l'intérieur de Δ et donc sont des points critiques.
Soit $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. Le calcul donne, :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2} - \theta_1\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\theta_2 - \frac{\theta_1}{2}\right).$$

Sur l'intérieur de Δ on a $0 < \frac{\theta_1}{2} < \pi$ et donc $\sin \frac{\theta_1}{2} \neq 0$. De même $\sin \frac{\theta_2}{2} \neq 0$. Par conséquent, si (θ_1, θ_2) est un point critique, alors :

$$\theta_1 = \frac{\theta_2}{2} \pmod{\pi} \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = \frac{\theta_1}{2} \pmod{\pi},$$

soit encore :

$$\begin{cases} 2\theta_1 + \theta_2 = 0 & \pmod{2\pi} \\ \theta_1 + 2\theta_2 = 0 & \pmod{2\pi} \end{cases}$$

ce qui implique $\theta_1 = \theta_2 = 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$. Compte tenu de $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, la fonction f admet un unique point critique $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$. Puisqu'il est unique, d'après la discussion menée plus haut, la fonction f admet un unique maximum en ce point. Les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle sont donc les triangles équilatéraux.

18.9 Le plans $\mathbb{R}^2$ est muni de structure euclidienne canonique.

1. • Soit ABC un triangle de côtés a, b et c. L'inégalité triangulaire donne :

$$a = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}\| \leqslant \|\overrightarrow{BA}\| + \|\overrightarrow{AC}\| = c + b.$$

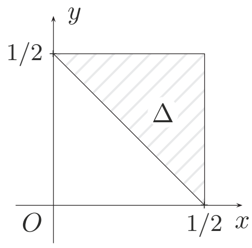
Par symétrie, on obtient les deux autres inégalités.

• Soit a, b et c trois réels positifs vérifiant les trois inégalités.
Posons $A = (0,0)$, $B(c,0)$ et $C_t = (b\cos t, b \sin t)$. Il s'agit de démontrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|\overrightarrow{BC_t}\|^2 = a^2$. Le calcul donne :

$$\varphi(t) = \|\overrightarrow{BC_t}\|^2 = (c - b\cos t)^2 + b^2 \sin^2 t = c^2 + b^2 - 2bc \cos t$$

On a $\varphi(\mathbb{R}) = \big[(b-c)^2, (b+c)^2\big]$. Puisque $a \leqslant b + c$, on a $a^2 \leqslant (b+c)^2$ et les deux inégalités $b \leqslant a + c$ et $c \leqslant a + b$ donnent $|b - c| \leqslant a$, soit $(b-c)^2 \leqslant a^2$.
Par suite, il existe t tel que $f(t) = a^2$.
Ainsi il existe un triangle de côtés a, b et c.

2. L'aire du triangle ABC et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$. Par ailleurs, la formule d'Al-Kashi donne :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$
On en déduit que :
$$\begin{aligned}
4\mathcal{A}^2 &= b^2c^2\sin^2\widehat{A} = b^2c^2\left(1-\cos^2\widehat{A}\right)\\
&= b^2c^2\left(1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(a^2-(b-c)^2\right)\left((b+c)^2-a^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(a+c-b\right)\left(a+b-c\right)\left(-a+b+c\right)\left(a+b+c\right)\\
&= \frac{1}{4}(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)(2p)
\end{aligned}$$
Le résultat annoncé s'ensuit.
3. Posons :
$$D = \left\{(x,y,z)\in \mathrm{IR}_+^3 \mid x+y+z=1,\ x\leqslant y+z,\ y\leqslant x+z,\ z\leqslant x+y\right\}$$
On cherche à maximiser l'aire des triangles de côtés x, y et z, pour $(x,y,z)\in D$. Il est clair que :
$$D = \left\{(x,y,1-x-y)\,;\ 0\leqslant x\leqslant 1-x,\ 0\leqslant y\leqslant 1-y,\ 0\leqslant 1-x-y\leqslant x+y\right\},$$
ou encore $D = \left\{(x,y,1-x-y)\ \middle|\ (x,y)\in\Delta\right\}$, où :
$$\Delta = \left\{(x,y)\in\mathrm{IR}_+^2\ \middle|\ x\leqslant 1/2,\ y\leqslant 1/2,\ 1/2\leqslant x+y\leqslant 1\right\},$$
Il s'agit de maximiser $4\mathcal{A}^4$ sur Δ, c'est-à-dire maximiser $f:(x,y)\mapsto(1-2x)(1-2y)\big(2(x+y)-1\big)$.
L'ensemble Δ est fermé (intersection de demi-plans fermés) et inclus dans $[0,1/2]^2$. Par dimension finie, Δ est un compact. De plus, on vérifie que :
$$\mathring{\Delta} = \left\{(x,y)\in{\mathrm{IR}_+^*}^2 \mid x<1/2,\ y<1/2,\ 1/2<x+y\right\}$$



La fonction f est continue sur Δ, car polynomiale et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{\Delta}$. La fonction f est nulle sur la frontière. Puisque f est à valeurs positives et qu'elle est non nulle, la valeur de son maximum (qui existe par continuité et compacité) est strictement positive. Les maxima sont donc atteints en des points de l'intérieur de Δ, donc en des points critiques de f.

Le calcul donne, pour $(x,y)\in\mathring{\Delta}$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(1-2y)\,(1-2x-y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(1-2x)\,(1-x-2y)\,.$$

Puisque $(x,y) \in \overset{\circ}{\Delta}$, on a $x \neq 1/2$ et $y \neq 1/2$. Si (x,y) est un point critique, alors :

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $(1/3,1/3) \in \overset{\circ}{\Delta}$ est le seul point critique de f. Ainsi la fonction f atteint son unique maximum en $(1/3,1/3)$. Les triangles correspondants sont donc les triangles équilatéraux de côtés $1/3$.

18.10 1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. On a :

$$g(x) = \|x\| \left(\tfrac{f(x)}{\|x\|} - \left(\tfrac{x}{\|x\|} \;\middle|\; v\right)\right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left(\frac{x}{\|x\|} \mid v\right) \leqslant \|v\|$ et donc :

$$g(x) \geqslant \|x\| \left(\frac{f(x)}{\|x\|} - \|v\|\right).$$

Il s'ensuit que $g(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \geqslant g(0)$ pour tout x vérifiant $\|x\| \geqslant M$. Notons B la boule centrée en 0 et de rayon M. Puisque B est compacte et que g est continue à valeurs réelles, $g_{|B}$ est minorée et atteint son minimum en x_0. Le point x_0 est un minimum de g sur $\mathbb{R}^n$, car il l'est sur B et si $x \notin B$, on a :

$$g(x) \geqslant g(0) \geqslant g(x_0).$$

La fonction g admet bien un minimum.

2. Avec les notations de la question précédente, puisque g est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ et admet un minimum en x_0, on a :

$$0 = \nabla g(x_0) = \nabla f(x_0) - v.$$

Puisque cela est vrai pour tout $v \in \mathbb{R}^p$, la fonction ∇f est surjective.

18.11 Il s'agit de démontrer que si a est un point critique de f, alors f admet un minimum en ce point.

Soit $b \in U$. La fonction $\varphi : t \mapsto f\big((1-t)a+tb\big)$ est elle même, par hypothèse, convexe sur l'intervalle $[0,1]$. Elle est de plus dérivable, avec

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi'(t) = \big(\nabla f\big((1-t)a+tb\big) \mid b-a\big).$$

En particulier, $\varphi'(0) = (\nabla f(a) \mid b-a) = 0$. Puisque φ est convexe et dérivable, φ' est croissante et donc $\varphi' \geqslant 0$.

Par conséquent, φ est croissante et $f(b) = \varphi(1) \geqslant \varphi(0) = f(a)$. Cela était vrai pour tout $b \in U$, il s'ensuit que f admet un minimum en a.

18.12 • La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale sur l'ouvert IR^n. Les extrema, s'ils existent, sont donc des points critiques.

• Pour tout $(X,H) \in (\mathrm{IR}^n)^2$ et $s \in \mathrm{IR}$ on a :

$$f(X+sH) = f(X) + s\left({}^tXAH + {}^tHAX + {}^tUH\right) + s^2\,{}^tHAH.$$

Compte tenu du fait que la matrice A est symétrique et que ${}^tXAH$ est une matrice carrée d'ordre 1, donc égale à sa transposée, on a :

$$f(X+sH) = f(X) + 2s\,{}^tH\,(AX+U) + s^2\,{}^tHAH. \qquad (1)$$

Il s'ensuit que :

$$\mathrm{d}f(X)\cdot H = \mathrm{D}_H f(X) = 2\,{}^tH\,(AX+U)$$

et donc que $\nabla f(X) = AX + {}^tU$

• La matrice A est inversible. En effet, si $X \in \operatorname{Ker} A$, alors ${}^tXAX = 0$ et donc $X = 0$ d'après la définition d'une matrice symétrique définie positive. Par suite $X_0 = -A^{-1}U$ est l'unique point critique de f. Par ailleurs, la relation (1) donne pour tout $H \in \mathrm{IR}^n$:

$$f(X_0+H) = f(X_0) + {}^tHAH.$$

Par hypothèse, on a pour tout $H \in \mathrm{IR}^n$ l'inégalité ${}^tHAH \geqslant 0$. Par conséquent, pour tout $H \in \mathrm{IR}^n$ on a $f(X_0+H) \geqslant f(X_0)$ et f admet un minimum en X_0.

18.13 La fonction f est évidemment continue sur $U = \mathrm{IR}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Munissons IR^2 de la norme $\|(x,y)\| = |x| + |y|$.

Comme $\sin u = \mathrm{O}(u)$ lorsque u tend vers 0, et $xy = \mathrm{O}(\|(x,y)\|^2)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, $f(x,y) = \mathrm{O}\big(\|(x,y)\|\big)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, ce qui prouve que f est continue en $(0,0)$. Pour l'existence et la continuité des dérivées partielles il suffit, par symétrie, d'étudier $\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot$

Dans chacun des quadrants *ouverts* délimités par les axes, on a $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{\varepsilon x + \eta y}$, où les signes ε et η sont constants sur le quadrant. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ces quadrants, de dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\cos(xy)}{\varepsilon x + \eta y} - \frac{\varepsilon\sin(xy)}{(\varepsilon x + \eta y)^2}\cdot$$

En un point $(0,y_0)$ tel que $y_0 \neq 0$, la fonction est nulle, et, pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x,y_0) - f(0,y_0)}{x} = \frac{\sin(xy_0)}{x(|x| + |y_0|)},$$

qui tend vers $\dfrac{y_0}{|y_0|}$ lorsque x tend vers 0. Donc f admet une dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \frac{y_0}{|y_0|}\cdot$$

L'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ écrite plus haut pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ est donc également valable pour $x = 0$ et $y \neq 0$. De même, pour $y = 0$ et $x \neq 0$, on a $f(x,0) = 0$, ce qui prouve l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,0) = 0$. L'expression de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\cos(xy)}{|x|+|y|} - \frac{\sin\big(|x|y\big)}{\big(|x|+|y|\big)^2}$$

est donc valable sur U, ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est continue sur U.

Enfin, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ bien que ses deux dérivées partielles existent (elle sont évidemment nulles puisque les fonctions partielles sont nulles). En effet,

$$f(x,x) = \frac{\sin(x^2)}{2|x|} \sim \frac{|x|}{2}$$

et donc $x \mapsto f(x,x)$ n'est pas dérivable en 0.

18.14 • Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $x \mapsto f(x,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc $x \mapsto |x|^{2(\alpha-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Cela impose $2\alpha - 2 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 3/2$.

• Si $\alpha > 3/2$, alors la fonction $\varphi : x \mapsto |x|^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x) = \varepsilon(x)\alpha|x|^{\alpha-1}$, où $\varepsilon(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $\varepsilon(x) = -1$ sinon. Il s'ensuit, du fait que $f(x,y) = \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x^2+y^2}$, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi(y)\,\frac{\varphi'(x)(x^2+y^2) - 2x\varphi(x)}{(x^2+y^2)^2}$$

En posant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r^{2\alpha-3}|\sin\theta|^\alpha\big(\alpha\varepsilon(x)|\cos\theta|^{\alpha-1} - 2|\cos\theta|^\alpha\cos\theta\big)$$

et donc $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant r^{2\alpha-3}(\alpha+2)$.

Il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto f(x,0)$ est nulle, donc, par définition, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en 0. Par symétrie, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en 0. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, $\alpha > 3/2$.

18.15 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ une fonction α-homogène et $t > 0$. Considérons $h : x \mapsto f(tx)$. Pour tout $x \in C$ et $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = t\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$.

Si de plus f est α-homogène, on a $h(x) = t^\alpha f(x)$ et : $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Par conséquent :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

2. • Supposons que f soit α-homogène.
Soit $x \in C$. En dérivant par rapport à t la relation $f(tx) = t^\alpha f(x)$, il vient :
$$\forall t > 0 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \alpha t^{\alpha-1} f(x).$$
En particulier, pour $t = 1$, on obtient :
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x).$$
• Supposons que f vérifie la relation d'Euler. Soit $x \in C$ et posons $g : t \mapsto f(tx)$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, du fait que C est un cône et par composition. Ainsi :
$$\forall t > 0 \quad g'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).$$
D'après la relation d'Euler, $tg'(t) = \alpha g(t)$ pour tout $t > 0$. L'intégration de l'équation différentielle $ty' - \alpha y = 0$ est immédiate :
$$\forall t > 0 \quad f(tx) = g(t) = t^\alpha g(1) = t^\alpha f(x).$$
Par suite, la fonction f est α-homogène.

18.16 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x \neq y$, on a :
$$f(x, y) = e^x \frac{e^{y-x} - 1}{y - x} = e^x \, \varphi(y - x),$$
où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0\,; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
La fonction φ est la somme sur $\mathbb{R}$ de la série entière $\sum \frac{t^n}{(n+1)!}$, et donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, les fonctions $(x, y) \mapsto e^x$ et $(x, y) \mapsto \varphi(y - x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\widetilde{f}(x, y) = e^x \varphi(y - x)$$
définit un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ de f à $\mathbb{R}^2$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x \neq y$, on a :
$$f(x, y) = 2 \cos\left(\frac{y + x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}{y - x} = \cos\left(\frac{y + x}{2}\right) \psi\left(\frac{y - x}{2}\right),$$
où ψ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0\,; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction ψ est la somme sur $\mathbb{R}$ de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, t^{2n}$, et donc ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, les fonctions $(x,y) \mapsto \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)$ et $(x,y) \mapsto \psi\left(\frac{y-x}{2}\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\widetilde{f}(x,y) = \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\psi\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

définit un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ de f à $\mathbb{R}^2$.

18.17 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire :

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t = (y-x)\int_0^1 f'\big(x+\tau(y-x)\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

Lorsque $x = y$:

$$\int_0^1 f'\big(x+\tau(y-x)\big)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}\tau = f'(x) = F(x,x).$$

Donc, la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$G(x,y) = \int_0^1 f'\big(x+\tau(y-x)\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

est un prolongement de F.

- La continuité de G résulte alors du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, le paramètre étant ici le couple (x,y). En effet, si K est un compact de $\mathbb{R}^2$, la fonction continue f' est bornée sur le compact de I image de $K^2 \times [0,1]$ par l'application continue $(x,y,\tau) \mapsto x+\tau(y-x)$. Une telle borne définit une fonction (constante) intégrable sur $[0,1]$.
- Démontrons que $\frac{\partial G}{\partial x}$ est définie. Pour cela fixons $y \in \mathbb{R}$.
  * Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\tau \mapsto f'\big(x+\tau(y-x)\big)$ est continue, donc intégrable sur le segment $[0,1]$.
  * Pour tout $\tau \in [0,1]$, l'application $x \mapsto f'\big(x+\tau(y-x)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f'}{\partial x}\big(x+\tau(y-x)\big) = (1-\tau)\,f''\big(x+\tau(y-x)\big).$$

  * Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\tau \mapsto \frac{\partial f'}{\partial x}\big(x+\tau(y-x)\big)$ est continue.
    Soit $a > 0$. La fonction $|f''|$ est majoré par une constante M sur $[y-a, y+a]$.
    Il s'ensuit que :

$$\forall x \in [-a,a] \quad \forall \tau \in [0,1] \quad \Big|(1-\tau)f''\big(x+\tau(y-x)\big)\Big| \leqslant (1-\tau)\,M \leqslant M.$$

    La fonction constante M étant intégrable sur le segment $[0,1]$, nous avons une condition de domination sur tout segment.

En conclusion, le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre nous donne l'existence de $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \int_0^1 (1-\tau)\, f''\big(x + \tau(y-x)\big)\, \mathrm{d}\tau.$$

Par symétrie, $\frac{\partial G}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x}(y,x)$.

- De la même manière que nous avons démontré la continuité de G, on démontre la continuité de $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial G}{\partial y}$. Par suite G est de classe $\mathcal{C}^1$.

18.18 1. Soit $(x,y,z) \in X^3$. Alors :

$$g(x,y,z) = g(x,z,y) = -g(z,x,y) = -g(z,y,x) = g(y,z,x) = g(y,x,z) = -g(x,y,z).$$

Par conséquent $g(x,y,z) = 0$ et donc $g = 0$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $Jf(x)$ est une matrice orthogonale. Par conséquent :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\, \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = \delta_{i,j}. \qquad (1)$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, en considérant la ℓ-ième dérivée partielle de la relation (1), on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\forall (i,j,\ell) \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell \partial x_i}(x)\, \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell \partial x_j}(x)\, \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) \right) = 0. \qquad (2)$$

Fixons temporairement x et posons :

$$\forall (i,j,\ell) \in [\![1,n]\!]^3 \quad g(i,j,\ell) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell \partial x_j}(x)\, \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\cdot$$

D'après le théorème de Schwarz, g est symétrique par rapport aux deux dernières variables. La relation (2) donne que g est antisymétrique par rapport aux deux premières variables. Ainsi, d'après le lemme des tresses, $g = 0$.

La nullité de g se traduit par :

$$\forall (j,\ell) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}}_{{}^t\left(Jf(x)\right)} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_\ell \partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_\ell \partial x_j}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $Jf(x)$ est orthogonale, ${}^t\big(Jf(x)\big)$ est inversible et donc, pour $(j,\ell) \in [\![1,n]\!]$ fixé, tous les $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell \partial x_j}(x)$ sont nulles. On en déduit que, pour tous $(i,j,\ell) \in [\![1,n]\!]$, la fonction $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell \partial x_j}$ est nulle. Par caractérisation des fonctions constantes, pour tout $(k,j) \in [\![1,n]\!]$, les fonctions $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ est constantes. En conclusion Jf est constante.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et introduisons $\varphi : t \mapsto f(tx)$. Nous savons par composition que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que :

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx),$$

et donc

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(tx) = 0.$$

Par conséquent, d'après la formule de Taylor reste intégral à l'ordre 1,

$$f(x) - f(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t = \varphi'(0) = \mathrm{d}f(0)\cdot x.$$

Par conséquent : $f(x) = f(0) + Jf(0)x$. En conclusion, la fonction f est la composée d'une translation et d'une isomérie vectorielle.

18.19 1. Si U est $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite verticale définie par les équations $x = 0$ et $y \geqslant 0$, on définit f sur U par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ y^2 & \text{si } y \geqslant 0 \text{ et } x > 0, \\ -y^2 & \text{si } y \geqslant 0 \text{ et } \ x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$. Pour montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, on remarque qu'au voisinage d'un point $(x_0, 0)$, avec $x_0 > 0$, on a $f(x,y) = \varphi(y)$, où :

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Lorsque $x_0 < 0$, on a $f(x,y) = -\varphi(y)$ au voisinage de $(x_0, 0)$.

La fonction f convient donc.

On observera que U est un ouvert étoilé par rapport à $(-1,0)$ et donc que cette condition n'est pas suffisante pour avoir le résultat attendu.

2. Une condition suffisante est que l'intersection de U avec chaque droite Δ_{y_0} d'équation $y = y_0$ soit « un intervalle », c'est-à-dire de la forme $]a(y_0), b(y_0)[\times \{y_0\}$ ($a(y_0)$ ou $b(y_0)$ éventuellement infini). En effet, dans ce cas, l'application partielle $x \mapsto f(x, y_0)$ de $]a(y_0), b(y_0)[$ dans $\mathbb{R}$ a une dérivée nulle, et est donc constante, cette constante sera noté $h(y_0)$.

En particulier, si l'on fait tourner d'un angle droit l'ouvert U de la première question, une fonction f sur U telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ ne dépend que de y.

C'est le cas aussi lorsque U est convexe.

18.20 C'est une équation aux dérivées partielles linéaire. Donc, pour résoudre (E), il suffit de trouver une solution particulière et de résoudre l'équation homogène associée :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0 \qquad (E_0)$$

(l'ensemble des solutions est un sous–espace affine de l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).

- Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser l'exercice 18.15 de la page 1172 en remarquant que la fonction φ définie par $\varphi(x,y)=x^2+y^2$ est homogène de degré 2.
  Cela étant dit, il est assez naturel aussi de chercher une solution polynomiale, et l'on trouve facilement que la fonction $\varphi/2$ est une solution de (E). Elle est de plus de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Le problème consiste maintenant à résoudre l'équation homogène (E_0).

- Résolution de (E_0) sur U.

  On peut utiliser un changement de variable polaire $(r,\theta)\mapsto(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$ défini sur $V=\mathbb{R}_+^*\times\,]-\pi,\pi[$. En posant $f(x,y)=g(r,\theta)$, l'équation (E_0) devient $\frac{\partial g}{\partial r}=0$. Comme l'ouvert V est convexe, on en déduit (*cf.* l'exercice 18.19 de la page 1173) que g ne dépend que de θ.

  Par conséquent, les solutions sont les fonctions :

$$(x,y)\mapsto\varphi(\theta)=\varphi\left(2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

  où $\varphi(\theta)=g(1,\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$.

- Résolution de (E_0) sur $\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$.

  Soit f une solution. La restriction de f à U est donc de la forme précédente. Donc il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ telle que :

$$\forall (x,y)\in U\quad f(x,y)=\varphi(\theta).$$

  Par continuité de f aux points de la forme $(x,0)$, avec $x<0$, on doit avoir :

$$\lim_{-\pi}\varphi=\lim_{\pi}\varphi.$$

  La fonction φ se prolonge en une fonction continue sur $[-\pi,\pi]$.

  En notant $f(x,y)=g(r,\theta)$ pour $(r,\theta)\in V=\mathbb{R}_+^*\times\,]-\pi,\pi[$, on a d'après la règle de la chaîne :

$$\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial r} &=\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &=-r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y},\end{cases}$$

  et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\cos\theta & \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\\ -r\sin\theta & \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\end{vmatrix},$$

et donc, puisque $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos\theta}{r}\,\varphi'(\theta).$$

Ainsi :

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta, \sin\theta) \underset{\theta\to\pi^-}{\longrightarrow} -\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0),$$

et

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta, \sin\theta) \underset{\theta\to-\pi^+}{\longrightarrow} -\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0).$$

Par conséquent, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$ avec $\varphi'(\pi) = \varphi'(-\pi)$.

Réciproquement, toute fonction définie par $f(x,y) = \varphi(\theta)$ avec φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$ vérifiant $\varphi'(\pi) = \varphi'(-\pi)$ convient.

- Résolution de (E_0) sur $\mathbb{R}^2$.

  De même, une solution vérifie la condition précédente en dehors de l'origine. Par continuité en $O = (0,0)$ le long de toute demi-droite d'extrémité O, on en déduit :

  $$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \varphi(\theta) = f(0,0).$$

  Donc f est constante. Réciproquement, les fonctions constantes sont évidemment des solutions.

18.21 Nous allons chercher les constantes α, β, γ, δ telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, et telles que le changement de variable $u = \alpha x + \beta y$, $v = \gamma x + \delta y$ transforme l'équation aux dérivées partielles en une équation de la forme $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$ lorsque $f(x,y) = g(u,v)$.

Pour tout quadruplet $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ tel que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, l'application $g \mapsto f$, où $f(x,y) = g(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, est bijective de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ dans lui-même. De plus :

$$\begin{aligned} a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} &= a\left(\alpha\frac{\partial g}{\partial u} + \gamma\frac{\partial g}{\partial v}\right) + b\left(\beta\frac{\partial g}{\partial u} + \delta\frac{\partial g}{\partial v}\right) \\ &= (a\alpha + b\beta)\frac{\partial g}{\partial u} + (a\gamma + b\delta)\frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

formule dans laquelle les dérivées partielles de f sont calculées en (x,y) et celles de g en $(u,v) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$.

Choisissons $\gamma = b$ et $\delta = -a$, de sorte que $a\gamma + b\delta = 0$ et $a\alpha + b\beta \neq 0$. Les nombres α et β étant choisis de sorte que $\alpha\delta - \beta\gamma$ soit non nul : par exemple, $\alpha = a$ et $\beta = b$, mais nous verrons que les valeurs numériques de α et β n'interviennent pas dans le résultat, et importent donc peu.

La relation $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad a\dfrac{\partial f}{\partial x} + b\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ est équivalente à la relation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial u}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = 0.$$

Comme l'application $(x,y) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ est bijective, cela équivaut à :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0.$$

Ainsi, f vérifie l'équation si, et seulement si, g dépend seulement de v, c'est-à-dire si, et seulement s'il existe une fonction h d'une seule variable et de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(u,v) = h(v)$.

Les fonctions f solutions sont alors les fonctions $f(x,y) = h(bx - ay)$, où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'une seule variable.

18.22 Soit α, β, γ, δ tels que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, l'application :

$$(x,y) \mapsto (u,v) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Soit g la fonction définie par $g(u,v) = f(x,y)$:

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2)D_{11}$$
$$+ (2a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\beta\delta)D_{12} + (a\gamma^2 + b\gamma\delta + c\delta^2)D_{22},$$

où $\quad D_{11} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y), \qquad D_{12} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y),$

et $\quad D_{22} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$

Notant λ et μ les deux racines réelles distinctes de l'équation $at^2 + bt + c = 0$ (qui existent puisque le discriminant $b^2 - 4ac$ est supposé strictement positif), on peut poser $\alpha = \lambda$, $\beta = 1$, $\gamma = \mu$ et $\delta = 1$, de sorte que :

$$a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

$$a\gamma^2 + b\gamma\delta + c\delta^2 = a\mu^2 + b\mu + c = 0,$$

$$2a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\beta\delta = \frac{4ac - b^2}{a} \neq 0.$$

Ainsi, f vérifie l'équation aux dérivées partielles (E) si, et seulement si, g vérifie :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0. \qquad (E')$$

Cette dernière équation aux dérivées partielles admet pour solutions les fonctions de la forme $g(u,v) = h(u) + l(v)$ où h et l sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'une seule variable. En effet, si g est solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (E'), alors elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et $g_2 = \dfrac{\partial g}{\partial v}$ vérifie $\dfrac{\partial g_2}{\partial u} = 0$, donc g_2 est de la forme $g_2(u,v) = \varphi(v)$, où φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $g(u,v) = g(u,0) + \displaystyle\int_0^v \varphi(t)\,dt = h(u) + l(v)$. Enfin on voit facilement que $(u,v) \mapsto h(u) + l(v)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si h et l sont de classe $\mathcal{C}^2$. La réciproque est immédiate.

Les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de (E) sont donc les fonctions f de la forme :

$$f(x,y) = h(\lambda x + y) + l(\mu x + y),$$

où h et l sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'une seule variable.

18.23 Le laplacien de g est :

$$\Delta g = \frac{1}{\operatorname{ch}^4 y}\left(f''\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)\operatorname{ch}^2 y - f''\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)\cos^2 x - 2f'\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)\cos x \operatorname{ch} y\right)$$

qui s'annule pour tout couple (x,y) si, et seulement si, f vérifie l'équation différentielle (obtenue en divisant le numérateur ci-dessus par $\operatorname{ch}^2 y$) :

$$f''(t) - t^2 f''(t) - 2tf'(t) = (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0.$$

On reconnaît la dérivée de $(1-t^2)f'(t)$, donc $f'(t) = \dfrac{\lambda}{1-t^2}$, avec λ constante. Les fonctions f solutions sont les fonctions de la forme :

$$f(t) = \frac{\lambda}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + \mu,$$

où λ et μ sont des constantes.