Chapitre 11 : Séries entières

I Séries entières **582**
- 1 Rayon de convergence 582
- 2 Pratique de la détermination du rayon de convergence 586
- 3 Opérations algébriques sur les séries entières . . . 590
- 4 Continuité 592

II Séries entières de la variable réelle **593**
- 1 Séries dérivées 593
- 2 Primitive de la somme d'une série entière 593
- 3 Dérivation de la somme d'une série entière 594

III Développements en série entière **595**
- 1 Fonctions développables en série entière 595
- 2 L'exponentielle 599
- 3 Séries du binôme 603

IV Pratique du développement en série entière . . . **605**
- 1 Opérations algébriques et analytiques 605
- 2 Utilisation d'équations différentielles 607
- 3 Séries de Taylor 610
- 4 Développement en série entière et suites 611
- 5 Étude au bord du disque ouvert de convergence . . 612

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . **614**

Exercices **635**

Séries entières 11

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$.

I Séries entières

Les séries entières sont des séries de fonctions de la variable complexe. Il se trouve que beaucoup de fonctions usuelles sont, du moins au voisinage de 0, sommes de séries entières. Par ailleurs, les séries entières permettent de construire facilement des solutions de certains problèmes, tel par exemple la résolution d'équations différentielles.

1 Rayon de convergence

Relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

La relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}_+$ est étendue à $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x < +\infty.$$

La relation ainsi obtenue est encore une relation d'ordre total.
À l'instar des définitions concernant les parties de $\mathbb{R}$, on introduit pour toute partie $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ les notions suivantes.

- Un majorant de A est un élément $M \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que $x \leqslant M$ pour tout $x \in A$. On définit de même un minorant. L'élément $+\infty$ est un majorant de toute partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$.
- Un maximum de A est un élément $M \in A$ tel que $x \leqslant M$ pour tout $x \in A$. Puisque la relation d'ordre est totale, s'il existe un maximum, celui-ci est unique ; on le note $\max A$. De même, on définit un minimum.
- La borne supérieure de A est le plus petit des majorants. On définit de même la borne inférieure. Si la borne supérieure existe, elle est unique ; on la note $\sup A$.

Notation Soit $z_0 \in \mathbb{K}$ et $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

- On pose $D_O(z_0, r)$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| < r\}$.
  Si r est réel, cela correspond dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, au **disque ouvert** de centre z_0 et de rayon r. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $D_0(0, r) =]-r, r[$. Dans les deux cas, on a $D_O(z, +\infty) = \mathbb{K}$.
- On pose $D_F(z_0, r)$ est l'ensemble $\{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$. Si r est réel, dans le cas où $K = \mathbb{C}$, cela correspond au **disque fermé** de centre z_0 et de rayon r, et, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela correspond à $[-r, r]$. On a encore $D_F(0, +\infty) = \mathbb{K}$.

Proposition 1

Dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, toute partie non vide admet une borne supérieure.

Démonstration page 614

Séries entières

Définition 1

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.
La **série entière** associée à a est la série de fonctions $\sum u_n$, où :

$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a_n z^n. \end{array}$$

La **somme de la série entière** est la somme de la série $\sum u_n$, c'est-à-dire la fonction $z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Remarques

1. On note $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite a.
2. Si l'indexation commence à partir de n_0, on notera $\sum\limits_{n \geqslant n_0} a_n\, z^n$.
3. De manière analogue, on définit les **séries entières de la variable réelle**, comme étant les séries de fonctions $\sum u_n$, où $u_n : t \mapsto a_n t^n$ est une fonction de la variable réelle.
4. Séries entières lacunaires. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.
   On note $\sum a_n z^{2n}$ la série entière $\sum b_n z^n$ où la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2n} = a_n.$$
   Plus généralement, si $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers, on note $\sum a_n z^{\nu_n}$ la série entière $\sum c_n z^n$, où la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \begin{cases} a_k & \text{si } n = \nu_k, \text{ avec } k \in \mathbb{N}\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme d'Abel

Théorème 2 (Lemme d'Abel)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Principe de démonstration. Démontrer, dans le cas où la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que l'on a $a_n z^n = \mathrm{O}\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Démonstration page 614

Rayon de convergence

Lemme 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
L'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Démonstration page 614

Définition 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

1. La borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ de $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. Le **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ est $D_O(0, R)$.
3. L'**intervalle ouvert de convergence** de la série entière (de la variable réelle) $\sum a_n t^n$ est $]-R, R[$.

Exemple Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Le rayon de convergence de $\sum \alpha^n z^n$ est $r = \dfrac{1}{|\alpha|}\cdot$
En effet, la suite $(\alpha^n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $|\alpha z| \leqslant 1$.

Remarques

1. Le rayon de convergence d'une série entière est un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
2. Le disque ouvert de convergence est un ouvert éventuellement vide de $\mathbb{C}$. L'intervalle ouvert de convergence est un ouvert de $\mathbb{R}$.
3. Le disque ouvert de convergence est vide si $R = 0$. Le disque ouvert de convergence est $\mathbb{C}$ si $R = +\infty$.
4. Il vient de la définition que si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$. De même, si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors $R \leqslant |z|$.

5. On ne peut rien dire *a priori* sur le comportement de la suite $\left(|a_n|\, R^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque le rayon de convergence R est un réel strictement positif.
6. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum |a_n| z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ coïncident.
7. Invariance par décalage. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

   Le rayon de convergence de $\sum a_n z^{n+p}$ est alors R. En effet, si $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite :
   $$(a_n r^{n+p})_{n\in\mathbb{N}} = r^p\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
   est bornée.

   De même le rayon de convergence de $\sum a_{n+p} z^n$ est R. En effet, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant p}$ est bornée si, et seulement si, la suite :
   $$(a_n r^{n-p})_{n\geqslant p} = r^{-p}\,(a_n r^n)_{n\geqslant p}$$
   est bornée.

Proposition 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

1. Si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z| > R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration page 614

Proposition 5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la somme $f : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ vérifie :
$$D_O(0,R) \subset \mathcal{D} \subset D_F(0,R)$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 4. □

Exemples

1. Le rayon de convergence de $\sum z^n$ est 1. Puisqu'une série géométrique est convergente si, et seulement si, la raison est de module strictement inférieur à 1, le domaine de définition de la somme est $D_O(0,1)$.
2. Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ est 1. En effet, si $|z| \leqslant 1$, alors la suite $\left(\frac{|z^n|}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1 et si $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{|z^n|}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Par ailleurs, pour tout z vérifiant $|z| \leqslant 1$, par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ est absolument convergente.

   Par suite, le domaine de définition de la somme est $D_F(0,1)$.

3. Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$. En effet, pour tout complexe $z \neq 0$, on a :
$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ est convergente et donc $\frac{|z|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *a fortiori* la suite $\left(\frac{|z|^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque cela est vérifié pour tout complexe $z \neq 0$, on a $R = +\infty$ et la fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est définie sur $\mathbb{C}$.
4. Le rayon de convergence de $\sum n!\, z^n$ est 0. En effet, d'après l'étude précédente, pour tout complexe $z \neq 0$, on a $\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{|z|}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $n!|z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, la suite $(!n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est bornée pour aucun $z \neq 0$, ce qui implique que le rayon de convergence de $\sum n!z^n$ est nul. Par conséquent, le domaine de définition de la fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n$ est $\{0\}$.

2 Pratique de la détermination du rayon de convergence

Inégalités

Point méthode

Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière, on procède souvent par double inégalité.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Nous avons déjà remarqué que si la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors le rayon de convergence R vérifie l'inégalité $|z| \leqslant R$ (*cf.* page 584). Le point suivant en découle.

Point méthode (Minoration du rayon de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

On a $R \geqslant |z|$ si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
2. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
3. la série $\sum a_n z^n$ converge ;
4. la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

La contraposée du lemme d'Abel donne une méthode pour majorer le rayon de convergence.

Point méthode (Majoration du rayon de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

On a $R \leqslant |z|$ si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. la série $\sum |a_n z^n|$ diverge ;
2. la série $\sum a_n z^n$ diverge ;
3. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ;

p.614 **Exercice 1** Montrer que la série $\sum n\, z^n$ a pour rayon de convergence 1.

p.615 **Exercice 2** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$ (avec une convention à donner pour $R = +\infty$).

p.615 **Exercice 3** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Montrer que le rayon de convergence R' de $\sum a_{2n} z^n$ vérifie $R' \geqslant R^2$ (avec une convention à donner pour $R = +\infty$). Peut-on espérer mieux ?

p.615 **Exercice 4** Quel est le rayon de convergence de $\sum \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$?

Comparaison

Proposition 6 (Comparaison)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Si l'inégalité $|a_n| \leqslant |b_n|$ est vérifiée à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Puisque $|a_n r^n| \leqslant |b_n r^n|$ à partir d'un certain rang, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée. On a donc $R_b \leqslant R_a$. □

p.616 **Exercice 5** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Donner le rayon de convergence de $\sum d(n)\, z^n$.

Corollaire 7

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b respectivement.

1. Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
2. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration page 616

Exemple Le rayon de convergence de la série $\sum \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) z^n$ est 2.

En effet :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}.$$

D'autre part, la série géométrique $\sum \left(\frac{z}{2}\right)^n$ converge si, et seulement si, $|z| < 2$. Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{2^n} z^n$ est 2 et donc, par comparaison, le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2^n}\right) z^n$ est également 2.

Utilisation de la règle de d'Alembert

On peut parfois utiliser la règle de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Exemples

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes tous non nul. Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$. Supposons que :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Examinons plusieurs cas.

(a) Supposons $L \in]0, +\infty[$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L|z|.$$

- Si $|z| < \frac{1}{L}$, alors d'après la règle de d'Alembert la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Par suite $|z| \leqslant R$. Puisque cela est vrai pour tout z vérifiant $|z| < \frac{1}{L}$, on en déduit que $\frac{1}{L} \leqslant R$.
- Si $|z| > \frac{1}{L}$, alors, toujours d'après le règle de d'Alembert, la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente. Par suite $|z| \geqslant R$. Puisque cela est vrai pour tout z vérifiant $|z| > \frac{1}{L}$, on en déduit que $\frac{1}{L} \geqslant R$.

En conclusion $R = \frac{1}{L}$.

(b) Supposons $L = 0$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par conséquent $R = +\infty$.

(c) Supposons $L = +\infty$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par suite, la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Par conséquent $R \leqslant |z|$ pour tout z non nul et donc $R = 0$.

À titre d'illustration, calculons le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n}{3^n} z^n$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$\frac{\left|\frac{n+1}{3^{n+1}} z^{n+1}\right|}{\left|\frac{n}{3^n} z^n\right|} = \frac{(n+1)|z|}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|z|}{3}.$$

Le raisonnement mené plus haut donne que le rayon de convergence est $R = 3$.

2. Déterminons le rayon de convergence R de $\sum \alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}$, où α un réel strictement positif fixé. Rappelons que cette série correspond à la série entière $\sum b_n z^n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \begin{cases} \alpha^{1+\cdots+k} & \text{si } n = k^2, \text{ avec } k \in \mathbb{N}\,; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons, du fait qu'il y a une infinité d'indices pour lesquels b_n est nul, qu'il est illusoire de s'intéresser aux $\frac{|b_{n+1}z^{n+1}|}{|b_n z^n|}$.
En revanche, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{\left|\alpha^{1+\cdots+(n+1)} z^{(n+1)^2}\right|}{\left|\alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}\right|} = \alpha|z|\left(\alpha|z|^2\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha|z|^2 < 1\,; \\ \alpha\,|z| & \text{si } \alpha|z|^2 = 1\,; \\ +\infty & \text{si } \alpha|z|^2 > 1. \end{cases}$$

Par suite, si $\alpha|z|^2 < 1$, alors la série $\sum \alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}$ est absolument convergente et donc la série $\sum b_n z^n$ est absolument convergente. Par conséquent, $R \geqslant \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$.
De même si $\alpha|z|^2 > 1$ la série $\sum \alpha^{1+\cdots+n} z^{n^2}$ n'est pas absolument convergente et donc *a fortiori* la série $\sum b_n z^n$ n'est pas absolument convergente. Par conséquent, $R \leqslant \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$. On en conclut que $R = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$.

Point méthode

Soit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls.
Pour déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{\nu_n}$, on peut s'intéresser, pour $z \in \mathbb{C}^*$, à $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{\nu_{n+1}}|}{|a_n z^{\nu_n}|}$.
Si cette limite existe, la règle de d'Alembert donne des informations quant à la valeur du rayon de convergence.

p.616 **Exercice 6** Quel est le rayon de convergence de $\sum n!\, z^{n^2}$?

Convergence en un point de la frontière

Le comportement de la série entière sur la frontière de son disque ouvert de convergence peut être très variable, comme le montre les exemples et l'exercice suivants.

Exemple

1. Nous avons vu que le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est 1 et le domaine de définition de sa somme est $D_O(0,1)$ (*cf.* page 585). La série diverge donc en tout point de la frontière du disque ouvert de convergence.
2. Nous avons également vu page 585, que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ est 1 et le domaine de définition de la somme est $D_F(0,1)$. La série converge donc en tout point de la frontière du disque de convergence.

p.616 **Exercice 7** On pose $S_n(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, pour tout $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n(\theta)}{n} - 1.$$

2. On a $\left|S_n(\theta)\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$ (*cf.* par exemple page 509).

   Démontrer que la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ converge pour tout $z \neq 1$ tel que $|z| = 1$.

Remarque L'exercice précédent donne donc un exemple de série entière pour laquelle la convergence de la série a lieu en tout point sauf un de la frontière de son disque ouvert de convergence.

3 Opérations algébriques sur les séries entières

Somme

Proposition 8 (Somme)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n)\, z^n$ vérifie alors l'inégalité :

$$R \geqslant \min\{R_a, R_b\}.$$

De plus, si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min\{R_a, R_b\}$.

Démonstration page 616

p.617 **Exercice 8** Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \operatorname{ch}(n)\, z^n$.

Produit

Définition 3

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. La série entière $\sum c_n z^n$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

est le **produit de Cauchy** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Remarque Bien évidemment, on peut écrire le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sous la forme $\sum\Big(\sum\limits_{i+j=n} a_i b_j\Big) z^n$.

Proposition 9 (Produit)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a :

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\, z^i\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i\, z^i\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

En particulier, le rayon de convergence R du produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie l'inégalité :

$$R \geqslant \min\{R_a, R_b\}.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 617

Utiliser le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes.

Remarque Soit $\sum a_n^{(1)} z^n, \dots, \sum a_n^{(p)} z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1, \dots, R_p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$.
Posons $R = \min\{R_1, \dots, R_p\}$.
On démontre aisément par récurrence sur l'entier p que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, on a :

$$\prod_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i_1+\cdots+i_p=n} a_{i_1}^{(1)} \cdots a_{i_p}^{(p)}\right) z^n.$$

Attention

- On ne peut rien dire de plus sur R, même dans le cas où $R_a \neq R_b$.
- L'égalité $\left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i\, z^i\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} b_i\, z^i\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ n'a pas de sens si $|z| > \min\{R_a, R_b\}$!

p.617

Exercice 9 Donner deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence distincts, telles que le rayon de convergence du produit soit strictement supérieur au minimum des deux rayons.

p.618

Exercice 10 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.
Donner une minoration du rayon de convergence de la série entière $\sum S_n z^n$ et donner sa somme en fonction de f au voisinage de 0.

4 Continuité

Théorème 10

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $D_F(0, \rho)$, où $0 \leqslant \rho < R$.

Principe de démonstration. Utiliser le lemme d'Abel. Démonstration page 618

Attention La série $\sum a_n z^n$ ne converge pas normalement sur $D_O(0, R)$ en général ! La série géométrique $\sum z^n$ peut servir d'exemple.

Corollaire 11

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Alors la restriction de la somme au disque ouvert de convergence, c'est-à-dire l'application :

$$\begin{array}{ccc} D_O(0, R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$$

est continue.

Démonstration page 618

p.618

Exercice 11 Formule de Cauchy

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
On pose, pour tout $r \in]0, R[$, $M(r) = \max\limits_{|z|=r} \left| f(z) \right|$.

Démontrer que pour tout $0 < r < R$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int}\, \mathrm{d}t$$

En déduire que $|a_n| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n}$.

Proposition 12

Soit une $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul et de somme f.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f admet un développement limité à l'ordre p en 0, qui s'écrit :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + \mathrm{o}(z^p).$$

Démonstration page 619

II Séries entières de la variable réelle

1 Séries dérivées

Proposition 13 (Série dérivée)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. La série $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ est sa **série dérivée**. Elles ont même rayon de convergence.

Démonstration page 619

Corollaire 14

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 13 à la série $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$. □

Corollaire 15

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^p a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

2 Primitive de la somme d'une série entière

Primitivation terme à terme

Théorème 16 (Primitivation terme à terme)

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Soit enfin F une primitive de f sur $]-R, R[$. On a alors :

$$\forall t \in \,]-R, R[\quad F(t) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Démonstration page 619

Corollaire 17

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Démonstration page 620

Remarque On a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}.$$

3 Dérivation de la somme d'une série entière

Théorème 18 (Dérivation terme à terme)

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ et :

$$\forall t \in]-R,R[\quad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, t^{n-1}.$$

Démonstration page 620

Remarque Ainsi, la dérivée sur $]-R,R[$ de la somme d'une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R est la somme de la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} t^n$.

Exemple Le théorème 18 appliqué à la série entière $\sum t^n$ donne :

$$\forall t \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) t^n.$$

p.620

Exercice 12 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de somme f et de rayon de convergence $R > 0$, ainsi que $\varphi : I \to D_O(0,R)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, où I est un intervalle d'intérieur non vide.

Démontrer que la fonction $f \circ \varphi$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall t \in I \quad (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \varphi^{n-1}(t).$$

Corollaire 19

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

Alors la restriction de f à $]-R,R[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration page 620

Exemple Le théorème 19 appliqué à la série entière $\sum t^n$ donne, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in \left]-1,1\right[\quad \frac{p!}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+p)t^n.$$

Définition 4

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie au voisinage de 0. Sa **série de Taylor** est la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$.

III Développements en série entière

1 Fonctions développables en série entière

Définition 5

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un voisinage de 0, ainsi qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$.

- Soit $r > 0$. S'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ telle que :

$$\forall z \in D_O(0,r) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\, z^n,$$

  on dit que f est **développable en série entière sur $D_O(0,r)$**.
- On dit que f est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $D_O(0,r)$.

Définition 6

Soit $U \subset \mathbb{R}$ un voisinage de 0, ainsi qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$.

- Soit $r > 0$. S'il existe une série entière $\sum a_n t^n$ telle que :

$$\forall t \in \left]-r,r\right[\quad f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\, t^n,$$

  on dit que f est **développable en série entière sur $\left]-r,r\right[$**.
- On dit que f est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $\left]-r,r\right[$.

Remarques

- Bien noter que « développable en série entière » ne signifie pas que la fonction est globalement égale à la somme d'une série entière, mais simplement qu'elle coïncide avec la somme d'une série entière sur un voisinage de 0.

- Il est tout à fait possible que la somme de la série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R et la fonction f coïncident sur un intervalle $]-r, r[$, mais qu'elles ne coïncident pas sur $]-R, R[$, même lorsque f est définie sur $]-R, R[$.
  Par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto \min\{t^2, 1\}$ est développable en série entière, car $f(t) = t^2$ sur $]-1, 1[$, mais la relation $f(t) = t^2$ n'est pas vérifiée sur $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Toute fonction polynomiale est développable en série entière.
2. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. La fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ par $f(z) = \frac{1}{z-a}$ est développable en série entière. En effet, pour tout $z \in D_O\big(0, |a|\big)$, on a :
$$f(z) = -\frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}\cdot$$
3. Nous avons vu au corollaire 17 de la page 594 que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière.
   Il est clair que la relation $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$ n'est pas valable sur tout le domaine de définition de f, car la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$ diverge grossièrement pour $x > 1$. L'égalité :
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$$
   est vérifiée *a priori* simplement sur $]-1, 1[$.
4. De même, nous avons vu que la fonction Arctan est développable en série entière. L'égalité :
$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
   est valable *a priori* sur $]-1, 1[$.

Théorème 20 (Unicité du développement en série entière)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.
S'il existe un intervalle $J =]-r, r[$, avec $r > 0$ tel que :
$$\forall x \in J \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n,$$
alors les suites a et b ont égales.

Démonstration page 621

Remarque En particulier, si le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif et s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall t \in \left]-r, r\right[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0,$$

alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle.

Corollaire 21

Soit $U \subset \mathbb{K}$ un voisinage de 0 et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.
Il existe alors au plus une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\exists r > 0 \quad \forall z \in D_O(0, r) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Démonstration page 621

Remarque Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{K}$ est développable en série entière si, et seulement si, elle est égale à la somme de sa série de Taylor sur un intervalle $\left]-r, r\right[$, avec $r > 0$.

p.621

Exercice 13 Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de sommes f est g. Montrer que si fg est nulle sur un voisinage de 0, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Les théorèmes sur les opérations sur les séries entières donnent le point suivant.

Point méthode

Soit $U \subset \mathbb{K}$ un voisinage de 0 ainsi que $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : U \to \mathbb{C}$.

- Si f et g sont des fonctions développables en série entière sur $D_0(0, r)$, alors $f + g$, λf et fg sont développables en série entière sur $D_O(0, r)$.
- Si f et g sont des fonctions développables en série entière, alors $f + g$, λf et fg sont développables en série entière.
- Si U est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est développable en série entière sur $\left]-r, r\right[$, alors toutes les dérivées et les primitives de f sont développables en série entière sur $\left]-r, r\right[$

Remarque En particulier, l'ensemble des fonctions développables en série entière définies sur U est une algèbre.

p.622

Exercice 14 Que dire des coefficients du développement en série entière d'une fonction développable en série entière paire ? impaire ?

Un exemple : développement en série entière de $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$

La fonction $f : z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur $D_0(0,1)$. Par conséquent pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction f^{p+1} est développable en série entière sur $D_O(0,1)$. Fixons un entier naturel p.

Première méthode pour obtenir le développement en série entière de f^{p+1}. Notons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière de f^{p+1}. On a donc :

$$\forall z \in D_O(0,1) \qquad \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n.$$

Par ailleurs, nous avons vu par dérivation à la page 595 que :

$$\forall t \in]-1,1[\qquad \frac{p!}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)\cdots(n+1)\, t^n.$$

Il s'ensuit que les sommes des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ coïncident sur $]-1,1[$. Par unicité du développement en série entière (*cf.* le théorème 20 de la page 596), on a $a_n = \binom{n+p}{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite :

$$\forall z \in D_O(0,1) \qquad \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

Une seconde méthode pour obtenir le développement en série entière de f^{p+1}. Par produit de Cauchy (*cf.* remarque page 591), pour tout $z \in D_O(0,1)$, on a :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^{p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{p+1} \\ i_1+\cdots+i_{p+1}=n}} 1\cdots 1 \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,p} z^n,$$

où $c_{n,p}$ désigne le nombre de solutions entières de l'équation :

$$i_1 + \cdots + i_{p+1} = n.$$

Le nombre $c_{n,p}$ est le nombre de distributions de n boules dans $p+1$ urnes. Son calcul est l'objet d'un exercice classique de dénombrement et l'on a :

$$c_{n,p} = \binom{n+p}{p}.$$

p.622 **Exercice 15** Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^{*2}$ et $f : z \mapsto \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$.

Montrer que f est développable en série entière et donner son développement en série entière ainsi que le domaine de validité.

Exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ non développable en série entière

p.622 **Exercice 16** Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Démontrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que g n'est pas développable en série entière.

Remarque Dans le cas de l'exercice précédent, le fait que f ne soit pas développable en série entière provient de ce que f ne coïncide avec la somme de sa série de Taylor sur aucun intervalle $]-r, r[$, bien que la rayon de convergence de la série de Taylor soit $+\infty$. Dans d'autres cas, le problème peut provenir de ce que le rayon de convergence de la série de Taylor est nul (voir l'exercice 11.19 de la page 637).

2 L'exponentielle

Rappelons que la fonction réelle $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ a déjà été introduite comme bijection réciproque de la fonction $\ln$, elle même introduite comme l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 0 de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{t}$.
Par ailleurs vous avez rencontré à plusieurs reprises les fonctions trigonométriques et la notation $e^{i\theta}$. À chaque fois certaines propriétés des fonctions trigonométriques ont dû être admises. Cependant, toutes les propriétés usuelles peuvent être déduites d'un petit nombre d'entre elles, à savoir :

- il existe un réel $\pi > 0$ et deux fonctions $\cos$ et $\sin$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$;
- la fonction $\sin$ est impaire, la fonction $\cos$ est paire ;
- on a les relations $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$;
- le tableau de variations de la fonction $\sin$ est

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin'(x)$		$+$	0
$\sin$			1
	0	$\nearrow$	

Nous allons donner une nouvelle définition des fonctions trigonométriques et démontrer qu'elles vérifient les propriétés données ci-dessus.

Développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^x$

Lemme 22

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est infini.

Démonstration. Cela a été démontré en exemple à la page 585. □

Théorème 23

La fonction $x \mapsto e^x$ définie que $\mathbb{R}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Principe de démonstration. Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Démonstration page 623

Proposition 24

Les fonctions ch et sh sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate des définitions des fonctions ch et sh, ainsi que du théorème précédent. □

Exponentielle complexe

Le théorème 23 conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 7

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

Remarques

- Cette définition est légitime, car, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ est convergente d'après le théorème 23.
- Ainsi par définition, pour tout x réel, on a $e^x = \exp x$.
- La fonction exp est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
- On peut noter e^z le nombre complexe $\exp(z)$. Afin d'éviter des confusions, on se limite dans la suite de ce livre aux notations e^x et $e^{ix} = \exp(ix)$, lorsque x est réel.

Proposition 25

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\,\exp(z_2).$$

Démonstration page 623

Proposition 26

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout nombre complexe z :

$$\exp(z) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$$

$$|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$$

Démonstration page 624

Corollaire 27

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\exp(z)| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}.$$

Démonstration page 624

Fonctions trigonométriques

Définition 8

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions $\cos$ et $\sin$ par :

$$\cos x = \operatorname{Re}(\exp(ix)) \qquad \text{et} \qquad \sin x = \operatorname{Im}(\exp(ix)).$$

Remarque D'après le corollaire 27, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$$

Proposition 28

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a :

$$\exp(z) = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Démonstration page 624

Théorème 29

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

En particulier la fonction $\cos$ est paire et la fonction $\sin$ est impaire.

Démonstration page 624

p.624 **Exercice 17** Pour $x \in \mathbb{R}$ calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

Corollaire 30

Les fonctions cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

Démonstration page 625

p.625 **Exercice 18** Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors $t \mapsto \exp\big(\varphi(t)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $t \mapsto \varphi'(t)\, \exp\big(\varphi(t)\big)$.

Définition du nombre π

Lemme 31

On a $\cos 2 < 0$.

Principe de démonstration. Utiliser le théorème des séries alternées.

Démonstration page 625

Proposition 32

Le réel $\alpha = \min\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \cos x = 0\}$ est bien défini, strictement positif. On définit alors $\pi = 2\alpha$.

Démonstration page 625

Variations des fonctions trigonométriques

Étudions les variations de la fonction sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Cette fonction est dérivable et $\sin' = \cos$. Par définition de π, la fonction cos ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et puisque $\cos 0 = 1$, la fonction continue cos est à valeurs strictement positives sur cet intervalle.

Il s'ensuit que la fonction sin est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Puisque $\sin(0) = 0$, la fonction sin est à valeurs positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; de la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et de $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, on en déduit alors que $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin'(x)$		$+$	0
sin	0	$\nearrow$	1

Proposition 33

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i \qquad \text{et} \qquad \exp(2i\pi) = 1.$$

Démonstration. En effet, d'après l'étude précédente, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.
Par ailleurs, $\exp(2i\pi) = \exp\big(4\,\frac{i\pi}{4}\big) = i^4 = 1$. □

Corollaire 34

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp\Big(i(x+\frac{\pi}{2})\Big) = i\ \exp(x);$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

Remarque Il s'ensuit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, que l'on a :

$$\boxed{\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).}$$

Morphismes

Théorème 35

L'application $\varphi : t \mapsto \exp(ix)$ est un morphisme continu, surjectif du groupe $(\mathbb{R},+)$ sur le groupe $(\mathbb{U},\times)$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration page 625

Corollaire 36

Les fonctions sin et cos sont périodiques, de plus petite période 2π.

Théorème 37

L'application exp est un morphisme continu surjectif du groupe additif $(\mathbb{C},+)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*,\times)$, de noyau $i2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration page 626

Attention L'application exp de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ n'est pas injective. En effet le noyau du morphisme exp n'est pas $\{0\}$.

3 Séries du binôme

Coefficients binomiaux généralisés

On pose pour tout $(\alpha,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Cette notation n'est pas explicitement au programme, mais elle est assez fréquemment utilisée.

Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et cherchons à donner un développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Cette dernière est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. Ici les dérivées successives sont faciles à calculer et la série de Taylor associée à f est la série :

$$\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n.$$

Pour démonter que f est développable en série entière, il faut démontrer :

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pour les x dans un voisinage de 0. Pour cela, il est naturel de penser à l'inégalité de Taylor-Lagrange, et donc on doit s'intéresser au comportement lorsque n tend vers $+\infty$ de :

$$M_n(x) = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[-|x|,|x|]} \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\right|.$$

À partir de cette expression de $M_n(x)$, il n'y a pas de majoration simple qui vienne naturellement à l'esprit permettant de conclure que $M_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est pourquoi nous utiliserons une autre méthode pour donner le développement en série entière de f.

Proposition 38

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in\,]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Principe de démonstration. Le résultat correspond à la formule du binôme si α est un entier naturel. Dans les autres cas, la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ définie sur $]-1,1[$ est caractérisée par

$$\forall x \in\,]-1,1[\quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x) \qquad \text{et} \qquad f(0)=1.$$

Chercher une série entière dont la somme vérifie ces deux propriétés. Démonstration page 627

Remarques

- L'exercice 11.18 de la page 637 donne néanmoins une démonstration de ce résultat en utilisant uniquement le reste intégral de la formule de Taylor.
- On retrouve ainsi que si $t \in\,]-1,1[$ et $p \in \mathbb{N}$, alors :

$$\frac{1}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} t^n.$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\binom{-p-1}{n} = (-1)^n \frac{(p+1)\cdots(p+n)}{n!} = (-1)^n \binom{n+p}{n}.$$

Exemple Donnons le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\ &= (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n\, n!}\\ &= (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n\, n!} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}\\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!^2}\cdot\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la série du binôme :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\, x^n.$$

p.627 **Exercice 19** Donner le développement en série entière de la fonction Arcsin.

p.628 **Exercice 20** Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

IV Pratique du développement en série entière

Cette section, à vocation pratique, traite de méthodes usuelles.

1 Opérations algébriques et analytiques

Point méthode

Pour établir l'existence d'un développement en série entière d'une fonction f, on cherche d'abord à voir si l'on peut se ramener par des opérations algébriques ou analytiques (intégration, dérivation) à des fonctions ou des développements connus.

Opérations algébriques

p.628 **Exercice 21** Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}\cdot$

Cas des fractions rationnelles

Rappelons (*cf.* page 598) que pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < 1$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

On en déduit que si $a \in \mathbb{C}^*$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < |a|$:

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$$

et plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(a-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} \frac{z^n}{a^{n+p}}$$

Exemple Nous pouvons alors exprimer la somme de la série $\sum P(n) z^n$ où P est un polynôme de degré p de $\mathbb{C}[X]$.
Déterminons le rayon de convergence. Puisque $P(n) \sim \alpha n^p$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, et que le rayon de convergence de la série $\sum n^p z^n$ est 1, il vient que le rayon de convergence de $\sum P(n) z^n$ est 1.
Le polynôme P se décompose dans la base :

$$\left(1, (X+1), \frac{(X+2)(X+1)}{2!}, \ldots, \frac{(X+p)\ldots(X+2)(X+1)}{p!}\right)$$

de $\mathbb{C}_p[X]$ sous la forme :

$$P = \alpha_0 1 + \alpha_1 (X+1) + \alpha_2 \frac{(X+2)(X+1)}{2!} + \cdots + \alpha_p \frac{(X+p)\ldots(X+2)(X+1)}{p!}.$$

On a donc pour tout z avec $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) z^n = \frac{\alpha_0}{1-z} + \frac{\alpha_1}{(1-z)^2} + \cdots + \frac{\alpha_p}{(1-z)^{p+1}}.$$

Point méthode

Une fonction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle est développable en série entière sur $]-r, r[$, où r est le minimum des modules des pôles de la fonction. Pour le démontrer, on peut effectuer une décomposition en éléments simples.

Exemples

1. La fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$ est développable en série entière sur $D_0(0,1)$. En effet :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \quad f(z) = 1 - \frac{2}{z+1}$$

et donc :

$$\forall z \in D_O(0,1) \quad f(z) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2(-1)^{n+1} x^n$$

2. Pour $|z| < 1$, on a $F(z) = \dfrac{1-z^2}{1-2z\cos(\alpha)+z^2} = -1 + \dfrac{1}{1-ze^{-i\alpha}} + \dfrac{1}{1-ze^{i\alpha}}$ donc :

$$F(z) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\alpha} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\alpha} z^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\alpha) z^n.$$

Dérivation/intégration

p.628 **Exercice 22** Développement en série entière de $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.
Indication. On pourra donner le développement en série entière de f'.

p.629 **Exercice 23** Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+1)$.

Remarque On pourrait être tenté d'utiliser le développement en série entière de la fonction Arctan. Cela conduit à une impasse, puisque le développement en série entière est valable uniquement sur $]-1,1[$ et il permet simplement d'écrire :

$$\forall x \in \,]-2,0[\quad \operatorname{Arctan}(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1},$$

ce qui en aucun cas ne peut donner un développement en série entière au voisinage de 0.

2 Utilisation d'équations différentielles

Équations différentielles

Une méthode de détermination de développement en série entière est celle de l'équation différentielle. Elle consiste à trouver une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux vérifiée par la fonction, et à la résoudre formellement avec une série entière.
Deux situations peuvent se présenter.

- On veut montrer que f est développable en série entière : on cherche une série entière de rayon de convergence strictement positif satisfaisant à la même équation différentielle et l'on utilise un résultat d'unicité des solutions d'une telle équation différentielle.
- On sait que f est développable en série entière : on cherche une relation de récurrence entre les coefficients de ce développement (unicité du développement en série entière) pour déterminer ces derniers.

Un premier exemple

Illustrons cette méthode avec la fonction $\varphi : t \mapsto \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons qu'il n'est pas évident *a priori* que φ soit développable en série entière.

- L'application φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ et l'on vérifie facilement qu'elle est solution de l'équation différentielle du second ordre :
$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0. \tag{E}$$
L'application φ est donc l'unique solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy défini par l'équation (E) et la condition $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

- Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n t^n$ sur un intervalle $]-R,R[$ avec $R>0$. Alors f' (respectivement f'') est la somme de la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}t^n$ (respectivement $\sum (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$) sur $]-R,R[$. Ainsi, toujours pour $t \in]-R,R[$, on a :
$$\begin{aligned}(1-t^2)f''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\big((n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n\big)t^n\\ tf'(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n\\ \alpha^2 f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^2 a_n t^n.\end{aligned}$$
On en déduit que la fonction $t \mapsto (1-t^2)f''(t) - tf'(t) + \alpha^2 f(t)$ est la somme de la série entière :
$$\sum\big((n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n + \alpha^2)a_n\big)t^n.$$
sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, f est solution de (E) si, et seulement si, :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2 - \alpha^2)a_n$$
Comme on veut $f(0)=1$ et $f'(0)=1$, on doit prendre $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. La relation de récurrence ci-dessus définit alors une unique suite (a_n) : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et :
$$a_{2p} = \frac{(-4)^p}{(2p!)}\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - (p-1)^2\right)\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - (p-2)^2\right)\cdots\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

- ∗ Dans le cas où α est un nombre entier pair, les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang et la somme de la série obtenue est polynomiale.
  ∗ Dans le cas contraire, la règle de d'Alembert montre que la série entière $\sum a_{2n}t^{2n}$ a un rayon de convergence égal à 1.

Dans les deux cas, la fonction somme définie par cette série sur $]-1,1[$ est solution du problème de Cauchy cité ci-dessus et est donc égale à la fonction φ.

Remarque Dans le cas où α est un nombre entier pair, la fonction φ est polynomiale, ce qui s'explique par le fait que $\cos(\alpha\theta)$ est un polynôme pair en $\cos\theta$, donc un polynôme en $\sin\theta$.

Un second exemple

Illustrons la méthode avec la fonction $f : t \mapsto \operatorname{Arcsin}^2 t$.

- Puisque la fonction Arcsin est développable en série entière sur $]-1,1[$, par produit, il en est de même de f. Par ailleurs, la fonction f est paire. Il existe donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $t \in\,]-1,1[$, on ait :

$$\forall t \in\,]-1,1[\quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n}.$$

- Le calcul usuel de dérivées donne, pour tout $t \in\,]-1,1[$, les relations :

$$\sqrt{1-t^2}f'(t) = 2\operatorname{Arcsin}(t) \quad \text{et} \quad (1-t^2)f''(t) - tf'(t) = 2 \qquad (*)$$

- Pour tout $t \in\,]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}(1-t^2)f''(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_{2n}t^{2n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(2n-1)a_{2n}t^{2n}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\big((2n+1)(2n+2)a_{n+1} - 2n(2n-1)a_n\big)t^n\\ tf'(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2na_nt^{2n}.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t \in\,]-1,1[$:

$$(1-t^2)f''(t) - tf'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\big((2n+1)(2n+2)a_{n+1} - 4\,n^2\,a_n\big)t^{2n}.$$

Par unicité du développement en série entière, il vient de la relation $(*)$:

$$2a_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2n+1)(2n+2)a_{n+1} = 4\,n^2\,a_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient alors $a_n = \frac{2^{2n-1}\,(n-1)!^2}{(2n)!}\cdot$

Puisque $f(0) = 0$, on a $a_0 = 0$ et par conséquent :

$$\forall t \in\,]-1,1[\quad \operatorname{Arcsin}^2 t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}\,(n-1)!^2}{(2n)!}\,t^{2n}.$$

Utilisation de relations fonctionnelles

À défaut d'obtenir une équation différentielle, il arrive que l'on puisse obtenir un développement en série entière de f en caractérisant la fonction par une relation fonctionnelle.

p.630

Exercice 24 On pose la fonction de la variable réelle $f : x \mapsto \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1 - x^{2^k}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $]-1, 1[$ et exprimer $f(x)$ à l'aide de $f(x^2)$.
3. Démontrer que f est développable en série entière.

3 Séries de Taylor

Point méthode

On n'utilise que très rarement les séries de Taylor pour obtenir un développement en série entière. Cependant :

- lorsque les dérivées successives sont très faciles à calculer, ce qui n'est pas courant, on peut chercher à démontrer que la somme de la série de Taylor de f coïncide avec f sur un voisinage de 0 ;
- en outre, les séries de Taylor peuvent donner des informations pour résoudre des questions de nature théorique.

p.631

Exercice 25

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle de la forme $I =]-a, a[$.
Démontrer que s'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière en 0 sur $]-R, R[$, où $R = \min\{a, \rho\}$.

p.632

Exercice 26 **Théorème de Bernstein**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur voisinage de 0 telle que f et toutes ses dérivées soient positives sur ce voisinage. Montrer que f est développable en série entière.
Indication. On pourra utiliser l'exercice précédent.

p.632

Exercice 27 Soit $\lambda \in]0, 1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda x)$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout x en fonction de f, λ et n.
2. Déterminer f, en vérifiant que f est nécessairement développable en série entière.

4 Développement en série entière et suites

Point méthode

Pour donner le terme général d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il arrive que l'on introduise la série entière $\sum a_n z^n$ de somme f. Si le rayon de convergence est non nul, on peut chercher à calculer $f(z)$, puis avec les techniques usuelles de développement en série entière, on cherche à développer la fonction f.

Exemple Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant la relation :

$$a_0 = a_2 = 1,\ a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+3} = a_{n+1} + a_n. \tag{$*$}$$

- Supposons que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ soit non nul. Alors, pour tout $z \in D_O(0,R)$ on a :

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+3}z^{n+3} = z^2 a_{n+1}z^{n+1} + z^3 a_n z^n,$$

  et en sommant, il vient :

  $$\forall z \in D_O(0,R) \quad \sum_{n=3}^{+\infty} a_n z^n = z^2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n + z^3 f(z),$$

  c'est-à-dire :

  $$\forall z \in D_O(0,R) \quad f(z) - 1 - z^2 = z^2\big(f(z)-1\big) + z^3 f(z,)$$

  soit encore :

  $$\forall z \in D_O(0,R) \quad \big(1 - z^2 - z^3\big) f(z) = 1.$$

  La somme f de la série entière serait donc la fonction rationnelle $z \mapsto \dfrac{1}{1-z^2-z^3}$ sur $D_0(0,R)$.

- Réciproquement, si $g : z \mapsto \dfrac{1}{1-z^2-z^3}$ est développable en série entière, alors, en notant $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ sur un voisinage $D_O(0,r)$ de 0, on a

  $$\forall z \in D_O(0,r) \quad (1 - z^2 - z^3)g(z) = 1.$$

  Ainsi, toujours pour tout $z \in D_O(0,r)$ on a :

  $$\begin{aligned}
  &(1 - z^2 - z^3)g(z) = 1\\
  &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^{n+3} = 1\\
  &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n - \sum_{n=2}^{+\infty} b_{n-2} z^n - \sum_{n=3}^{+\infty} b_{n-3} z^n = 1\\
  &\iff b_0 + b_1 z + (b_2 - b_0)z^2 + \sum_{n=3}^{+\infty}(b_n - b_{n-2} - b_{n-3})z^n = 1.
  \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on a :

$$b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 - b_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 3 \quad b_n - b_{n-2} - b_{n-3} = 0.$$

Par conséquent, les suites a et b coïncident.

- La fonction g est développable en série entière en tant que fonction rationnelle n'ayant pas de pôle nul. Notons z_1, z_2 et z_3 les racines de $P = X^3 + X^2 - 1$. Elles sont distinctes, car $P' = X(3X+2)$ et que ni 0, ni $-2/3$ ne sont racines de P. Il s'ensuit que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$:

$$g(z) = \frac{1}{1 - z^2 - z^3} = \frac{1}{z_1(3z_1+2)}\,\frac{1}{z_1 - z} + \frac{1}{z_2(3z_2+2)}\,\frac{1}{z_2 - z} + \frac{1}{z_3(3z_3+2)}\,\frac{1}{z_3 - z}.$$

En notant $r = \min\bigl\{|z_1|, |z_2|, |z_3|\bigr\}$, on a pour tout $z \in D_O(0,r)$:

$$g(z) = \frac{1}{z_1(3z_1+2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z_1^{n+1}} + \frac{1}{z_2(3z_2+2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z_2^{n+1}} + \frac{1}{z_3(3z_3+2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z_3^{n+1}}.$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{3z_1+2}\,\frac{1}{z_1^{n+2}} + \frac{1}{3z_2+2}\,\frac{1}{z_2^{n+2}} + \frac{1}{3z_3+2}\,\frac{1}{z_3^{n+2}}.$$

5 Étude au bord du disque ouvert de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et de somme f. On peut supposer $R = 1$, le cas général s'y ramenant en posant $z = Rt$.
On s'intéresse ici au comportement de f en un point z tel que $|z| = 1$ et tel que $f(z)$ soit défini.
Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n$ de fonctions continues $u_n : z \mapsto a_n z^n$ converge normalement sur $D_F(0,1)$. Dans ces conditions la fonction f est continue sur $D_F(0,1)$.
Qu'en est-il si la série $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente ?
Nous savons que la somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément est une fonction continue. Cela conduit au point suivant.

Point méthode

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et de somme f. Si la série converge uniformément sur $[0,1]$, alors $f(1)$ est définie et :

$$f(1) = \lim_{t \to 1^-} f(t)$$

Remarque On adaptera lorsque l'on s'intéresse à la valeur en un point de convergence sur la frontière du disque ouvert de convergence.

Attention Il est possible que $\lim_{t\to 1^-} f(t)$ soit définie et que la série $\sum a_n$ diverge. Par exemple, la série $\sum(-1)^n$ est grossièrement divergente, alors que, pour $t \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

p.633 **Exercice 28** Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Nous l'avons déjà signalé : si la série numérique $\sum a_n$ est absolument convergente, alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D_O(0,1)$ et sa somme est continue sur $D_O(0,1)$. L'exercice suivant donne un résultat plus fin.

p.634 **Exercice 29** Soit $\sum a_n$ une série numérique convergente. On note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, pour $n \in \mathbb{N}$, et f est la somme de la série entière $\sum a_n z^n$.

1. Justifier que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.
   Démontrer que pour tout $z \in D_0(0,1)$:
   $$f(1) - f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$
2. Démontrer que la restriction $f_{|[0,1]}$ est continue en 1.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1 Soit A une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

- Si $+\infty \in A$, alors il est clair que $+\infty$ est le seul majorant de A et $\sup A = +\infty$.
- Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}_+$, alors A, n'a pas de majorant réel. Ainsi $+\infty$ est le seul majorant de A et $\sup A = +\infty$.
- Si $A \subset \mathbb{R}_+$ est majorée dans $\mathbb{R}_+$, alors A a une borne supérieure α dans $\mathbb{R}_+$:
$$\alpha = \min\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \forall y \in A \quad y \leqslant x\}.$$
Puisque :
$$\{x \in \overline{\mathbb{R}}_+ \mid \forall y \in A \quad y \leqslant x\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in A \quad y \leqslant x\} \cup \{+\infty\},$$
l'élément α est la borne supérieure de A dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Théorème 2 Notons $r = |z_0|$. Si $r = 0$, le résultat est immédiat, car l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < r$ est vide. Dans la suite, $r > 0$.
Supposons que la suite $\left(|a_n|r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et posons M un majorant de cette suite. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\left|a_n z^n\right| = \left|a_n r^n \frac{z^n}{r^n}\right| \leqslant M\left|\frac{z}{r}\right|^n = \mathrm{O}\left(\left|\frac{z}{r}\right|^n\right).$$
Par suite, si $|z| < r$, alors la série géométrique $\sum\left|\frac{z}{r}\right|^n$ est convergente. Le théorème de comparaison sur les séries numériques donne alors que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Lemme 3 Notons $I = \left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$. Cet ensemble est non vide, car il contient évidemment 0.

Par définition, pour tout $r \in I$, la suite $\left(|a_n|\, r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi, pour tout réel r' vérifiant $0 \leqslant r' \leqslant r$, on a $|a_n|\, r'^n \leqslant |a_n|\, r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $r' \in I$. Il s'ensuit que I est un intervalle.

Proposition 4 Notons I l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Puisque $R = \sup I$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, si $r < R$, alors il existe $\rho \in I$ tel que $r < \rho$.

1. Si $|z| < R$, alors il existe un réel $\rho \in I$ tel que $|z| < \rho$. La suite $(a_n\, \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, et d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $|z| > R$, alors $|z| \notin I$, car R est un majorant de I. Par suite, si $|z| > R$, alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Exercice 1 Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum n\, z^n$.

Par croissances comparées, pour tout $r \in [0,1[$, on a $nr^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent $R \geqslant r$. Cela étant vrai pour tout $r < 1$, on en déduit $R \geqslant 1$.

Puisque la série $\sum n$ diverge grossièrement, on a $R \leqslant 1$. Par suite $R = 1$.

Exercice 2 Notons R' le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{2n}$.

- Supposons le rayon de convergence R fini.
  Pour tout $r < R'$, la suite $\left(a_n (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n r^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et donc $r^2 \leqslant R$.
  Il s'ensuit que R' est fini et $R' \leqslant \sqrt{R}$.
  Pour tout $r < \sqrt{R}$, la suite $\left(a_n r^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car $r^2 < R$.
  Ainsi $R' \geqslant r$, cela pour tout $r < \sqrt{R}$, et donc $R' \geqslant \sqrt{R}$.
  Il s'ensuit que $R' = \sqrt{R}$.
- Dans le cas où $R = +\infty$, alors la suite $\left(a_n r^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $r > 0$ et donc $R' = +\infty$.

Exercice 3 Soit $r \geqslant 0$ tel que $r < R$. La suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite extraite $(a_{2n} r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque la suite $\left(a_{2n} (r^2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $r^2 \leqslant R'$.

- Si R est fini, puisque $r^2 \leqslant R'$ pour tout $r \leqslant R$, on obtient $R^2 \leqslant R'$. Si $R = +\infty$, alors $R' \geqslant r^2$ pour tout $r \geqslant 0$ et donc $R' = +\infty$. En convenant $(+\infty)^2 = +\infty$, on a toujours $R^2 \leqslant R'$.
- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 2^{2^n}.$$
  Pour tout $r > 0$, on a :
  $$\ln\left(2^{2^n} r^{2n+1}\right) = (2n+1)\ln r + 2^n \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
  Par conséquent, la suite $\left(2^{2^n} r^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, ce qui implique que $R = 0$. Cependant $R' = +\infty$. Ainsi l'inégalité $R^2 \leqslant R'$ peut être stricte.

Exercice 4

Notons $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $r > 0$ et $n \geqslant 2$, on a :
$$\ln(a_n r^n) = n^2 \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) + n \ln r = \left((-1)^n + \ln r\right) n + \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1).$$
Distinguons deux cas.

- Si $\ln r > -1$, on a $\ln\left(a_{2n} r^{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (1 + \ln r)\, 2n$. Par conséquent :
  $$\ln(a_{2n} r^{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
  On en conclut que la suite $(a_{2n} r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et $R \leqslant r$. Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $r > \frac{1}{e}$, on en déduit que $R \leqslant 1/e$
- De même, si $\ln r < -1$, alors $(-1)^n + \ln r \leqslant 1 + \ln r < 0$. Par suite :
  $$\ln(a_n r^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$
  En d'autres termes, $a_n r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, par conséquent, $R \geqslant r$. On en déduit que $R \geqslant r$, cela pour tout $r < 1/e$. Ainsi $R \geqslant 1/e$.

Par suite $R = \dfrac{1}{e}\cdot$

Exercice 5 Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum d(n)z^n$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement $1 \leqslant d(n) \leqslant n$. Le rayon de convergence de la série $\sum z^n$ est 1, donc $R \leqslant 1$. De plus, nous avons vu en exercice que le rayon de convergence de la série $\sum nz^n$ est 1 (*cf.* page 587). Ainsi $R \geqslant 1$. En conclusion, $R = 1$.

Corollaire 7

1. Il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et un rang N à partir duquel $|a_n| \leqslant M|b_n|$. La série $\sum Mb_nz^n$ ayant pour rayon de convergence R_b, la proposition précédente conduit à $R_a \geqslant R_b$.
2. Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ et $b_n = \mathrm{O}(a_n)$, donc d'après la proposition précédente, on a $R_a \geqslant R_b$ et $R_a \leqslant R_b$.

Exercice 6 Soit $r > 0$. Il est clair que

$$\frac{(n+1)!\, r^{(n+1)^2}}{n!\, r^{n^2}} = (n+1)r^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1\,; \\ +\infty & \text{si } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Ainsi, $R = 1$.

Exercice 7

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(S_k(\theta) - S_{k-1}(\theta)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} S_k(\theta) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} S_{k-1}(\theta)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} S_k(\theta) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} S_k(\theta) = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n(\theta)}{n} - 1.$$

2. Fixons $\theta \in]0, 2\pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après l'inégalité donnée :

$$\left| S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

La série télescopique $\sum\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ est convergente, du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum\left(S_k(\theta)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right)$ est absolument convergente. Par ailleurs, $\frac{S_n(\theta)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car la suite $(S_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée d'après l'inégalité donnée. On en déduit, à l'aide de l'expression de la question 1, que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie. La conclusion s'ensuit.

Proposition 8

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Les deux séries numériques $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ convergent absolument, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$ converge absolument, ce qui implique $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nz^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_nz^n$.

- Dans le cas où $R_a \neq R_b$, on peut supposer, par exemple, $R_a < R_b$.
  Pour z tel que $R_a < |z| < R_b$, la suite $\big((a_n + b_n)z^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, comme somme de la suite bornée $(b_n z_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $|z| < R_b$) et de la suite non bornée $(a_n z_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $|z| > R_a$).
  Cela implique $R \leqslant R_a$ et donc $R = R_a$, car $R \geqslant \min\{R_a, R_b\} = R_a$.

Exercice 8

- Le rayon de convergence de la série entière $\sum e^n z^n$ est $R_1 = 1/e$, car, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum (ez)^n$ converge si, et seulement si, $|ez| < 1$. De plus :
$$\forall z \in D_O\big(0, 1/e\big) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^n = \frac{1}{1 - ze}\cdot$$
- De même, Le rayon de convergence de la série entière $\sum e^{-n} z^n$ est $R_2 = e$ et :
$$\forall z \in D_O\big(0, e\big) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} z^n = \frac{1}{1 - z/e}\cdot$$
- On a :
$$\sum \operatorname{ch}(n)\, z^n = \sum \left(\frac{e^n}{2} + \frac{e^{-n}}{2}\right) z^n.$$
  Puisque $R_1 < R_2$, d'après la proposition 8 de la page 590, le rayon de convergence de cette dernière série entière est $R = 1/e$ et, pour tout $z \in D_O(0, 1/e)$, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}(n)\, z^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - z/e} + \frac{1}{1 - ez}\right) = \frac{1 - \operatorname{ch}(1)\, z}{1 - 2\operatorname{ch}(1)\, z + z^2}\cdot$$

Proposition 9 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergeant absolument, la série numérique produit $\sum c_n z^n$ converge absolument, et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$
Cela assure de plus que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Exercice 9 Nous savons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1 :
$$(1 - z)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1.$$
La série entière $\sum z^n$ a un rayon de convergence R_1 égal à 1. On a par ailleurs, en posant $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $a_n = 0$ pour $n \geqslant 2$:
$$1 - z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Le rayon de convergence R_2 de cette dernière série entière est $+\infty$. De plus, la série produit $\sum c_n z^n$ est donnée par :

$$c_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p = 1 - 1 = 0.$$

Le rayon de convergence R de la série produit de ces deux dernières séries entières est donc $+\infty$. On a donc $R > \min\{R_1, R_2\}$ et $R_1 \neq R_2$.

Exercice 10 La série entière définie par $\sum (a_0 + \cdots + a_n)\, z^n$ a un rayon de convergence $R' \geqslant \min\{1, R\}$. En effet cette série entière est le produit de Cauchy des séries $\sum z^n$ et $\sum a_n z^n$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min\{1, R\}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_0 + \cdots + a_n)\, z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) = \frac{f(z)}{1-z}\cdot$$

Théorème 10 Soit ρ un réel vérifiant $0 \leqslant \rho < R$. Pour tout entier n et $z \in D_F(0,\rho)$, on a $|a_n z^n| \leqslant |a_n|\rho^n$ et, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum |a_n|\rho^n$ converge. La convergence normale sur $D_F(0,\rho)$ de la série $\sum a_n z^n$ s'en trouve établie.

Corollaire 11 Pour tout entier naturel n, la fonction $u_n : z \mapsto a_n z^n$ est continue. Le théorème 10 de la page 592 montre que la série $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de tout point de $D_O(0,R)$. La continuité de la somme sur $D_0(0,R)$ en découle.

Exercice 11 Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et de somme f.

Soit $0 < r < R$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme la série $\sum a_k z^k$ converge normalement sur $D_F(0,r)$, la série de fonctions $\sum u_k$, où $u_k : \theta \mapsto \big(a_k (re^{i\theta})^k\big) e^{-in\theta}$ converge normalement, et donc uniformément, sur le segment $[0, 2\pi]$ vers la fonction $\theta \mapsto f(re^{i\theta})e^{-in\theta}$. D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions convergeant uniformément sur un segment, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} a_k (re^{i\theta})^k e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Ce qui donne, en remarquant, pour $q \in \mathbb{Z}^*$, l'égalité $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{iq\theta}\, d\theta = 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = a_n r^n.$$

Puisque f est continue sur le disque ouvert $D_O(0,1)$, elle est continue sur le cercle de centre 0 et de rayon r, qui est une partie compacte de $\mathbb{C}$. Ainsi $M(r)$ est définie et :

$$|a_n|\, r^n = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(r\, e^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(r\, e^{i\theta}\right) \right| \mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r)\, \mathrm{d}\theta = M(r).$$

La conclusion est alors immédiate.

Proposition 12 Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

La fonction f est définie sur le disque $D = D_O(0,R)$. La fonction $g_p : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n+p+1} z^n$ est également définie sur D (*cf.* page 585). Par ailleurs en tant que somme d'une série entière, la fonction g_p est continue sur D. Donc au voisinage de 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + z^{p+1} g_p(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + z^{p+1} \mathrm{O}(1) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n + \mathrm{o}(z^p).$$

Proposition 13 Notons R et R' respectivement les rayons de convergence de la série et de sa série dérivée.

- Nous avons remarqué que les rayons de convergence des séries entières $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum n a_n z^n$ coïncident (*cf.* page 585).
- Puisque $n|a_n| \geqslant |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le rayon de convergence R' de la série entière $\sum n a_n z^n$ vérifie $R' \leqslant R$.
- Si $R = 0$, l'inégalité précédente donne $R' = 0$.
  Supposons $R > 0$. Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R$. Choisissons un réel $r < \rho < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
  $$|n\, a_n r^n| = |a_n \rho^n| \left| n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right|.$$
  Par croissances comparées, on a :
  $$\left| n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
  ce qui implique, lorsque n tend vers $+\infty$, que l'on a :
  $$|n a_n r^n| = \mathrm{o}\left(a_n \rho^n\right).$$
  Puisque $\rho < R$, la suite $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $(n a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également. Il s'ensuit que $R' \geqslant r$, puis que $R' \geqslant R$. On a bien l'égalité des deux rayons.

Théorème 16 Notons $u_n : t \mapsto a_n t^n$, qui sont des fonctions de la variable réelle. D'après le théorème 10 de la page 592, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur tout disque fermé inclus dans $D_0(0,R)$, *a fortiori* la série $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-R,R[$.
Puisque les fonctions u_n sont continues ; le théorème de primitivation terme à terme (*cf.* le théorème 22 de la page 512) permet de conclure.

Corollaire 17

- Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k.$$
D'après le théorème 16 de la page 593, on a pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\cdot$$
- Pour tout $x \in]-1,1[$ on a :
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}.$$
D'après le théorème 16 de la page 593, on a pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot$$

Théorème 18 Les fonctions $u_n : t \mapsto a_n t^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
Puisque la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]-R,R[$ et la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-R,R[$, car il s'agit de la somme d'une série entière de la variable réelle, il vient que la fonction $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 12 Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $u_n : t \mapsto a_n \varphi^n(t)$. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I. Pour conclure, montrons que la série $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment.

Soit un segment $[a,b] \subset I$. Par compacité et continuité, la fonction $t \mapsto |\varphi(t)|$ atteint son maximum sur $[a,b]$, dont la valeur est notée r. Puisque φ est à valeurs dans $D_O(0,R)$, il vient que $r < R$. Toujours par compacité et continuité, la fonction $|\varphi'|$ est majorée par une constante M sur $[a,b]$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :
$$\forall t \in [a,b] \quad |u_n'(t)| \leqslant M\, n\, |a_n| r^{n-1}.$$
Puisque $r < R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} M\, n\, |a_n| r^{n-1}$ converge et donc la série $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a,b]$. Le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions permet alors de conclure.

Corollaire 19

- En appliquant le théorème 18 de la page 594, on démontre facilement par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-R,R[$ et :
$$\forall t \in]-R,R[\quad f^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k\, t^{k-n}.$$
- En particulier, puisque $0 \in]-R,R[$:
$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n.$$

Théorème 20 Notons R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ et R' le rayon de convergence de la série $\sum b_n z^n$. Puisque par hypothèse la série $\sum a_n x^n$ converge pour $x \in]-r, r[$, on a $R \geqslant r > 0$. De même $R' \geqslant r > 0$.

Posons

$$f: \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc}]-R', R'[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n. \end{array}$$

Puisque f et g coïncident sur $J =]-r, r[$ et qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, les dérivées successives de f et g coïncident sur J. En particulier $f^{(n)}(0) = n!a_n$ et $g^{(n)}(0) = n!b_n$ sont égaux, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La conclusion suit.

Remarque Nous aurions pu utiliser la proposition 12 de la page 593 et le principe d'unicité d'un développement limité pour établir le résultat.

Corollaire 21 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\exists r_1 > 0 \quad \forall z \in D_O(0, r_1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Fixons r_1. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\exists r_2 > 0 \quad \forall z \in D_O(0, r_2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Fixons r_2 et posons $r = \min\{r_1, r_2\}$. Il est immédiat que $r > 0$ et l'on a :

$$\forall t \in]-r, r[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n.$$

Le théorème précédent permet de conclure.

Remarque L'exercice 11 de la page 592 fournit une autre démonstration de l'unicité du développement en série entière pour les fonctions de la variable complexe.

Exercice 13 Il suffit de montrer que si $a \neq 0$, alors $b = 0$ (et donc $g = 0$).

Supposons $a \neq 0$ et posons p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$. Puisque fg est nulle sur un *voisinage* de 0, par unicité du développement en série entière, on a $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ pour tout entier naturel.

Montrons par récurrence « forte » que $b_n = 0$, pour tout entier $n = 0$.

- On a $c_p = a_p b_0 = 0$, donc $b_0 = 0$.
- Si $b_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors :

$$c_{n+p} = \sum_{k=p}^{n+p} a_k b_{n+p-k} = a_p b_n.$$

Par conséquent, $b_n = 0$, ce qui assure le résultat.

Remarque Ainsi, l'algèbre des fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ est intègre.

Exercice 14 Supposons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$, avec $r > 0$.

- Si f est impaire, alors, pour tout $x \in]-r, r[$:
$$f(x) + f(-x) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(1 + (-1)^n\big) a_n x^n.$$
Ainsi, par unicité du développement en série entière, $\big(1+(-1)^n\big)a_n = 0$ pour tout entier n, et donc $a_n = 0$ pour tout entier n pair.
- De même, si f est paire, alors $a_n = 0$ pour tout entier n impair.

Exercice 15

- Supposons $a \neq b$. On a alors :
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \quad f(z) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$
et donc, puisque a et b sont non nuls, pour tout $z \in D_O\big(0, \min\{|a|, |b|\}\big)$, on a :
$$f(z) = \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}}\right) z^n,$$
ce qui donne le développement en série entière de f.
- Supposons que $a = b$. Alors, pour tout $z \in D(0, |a|)$, d'après la proposition 9 de la page 591, on a :
$$f(z) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{(1-\frac{z}{a})^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}} z^n,$$
ce qui donne le développement en série entière de f.

Exercice 16 Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Démontrons par récurrence :
$$\mathcal{H}_n : \text{« il existe } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } f^{(n)}(x) = P_n\left(\tfrac{1}{x}\right) f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^* \text{ ».}$$
Pour $n = 0$, le polynôme $P_0 = 1$ convient.
Supposons $\mathcal{H}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Alors, en dérivant $f^{(n)}$, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, que :
$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) f(x).$$
Il s'ensuit que le polynôme $P_{n+1} = 2X^3 P_n - X^2 P_n'$ convient.
2. - Notons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :
$$P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1} = 2X^3 P_n - X^2 P_n'.$$
On vient de voir que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme P_n est élément de $\mathbb{R}_d[X]$ pour un certain entier d. Il s'ensuit que l'on a au voisinage de 0 :
$$P_n\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{d+1}}\right),$$

et donc :
$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = \mathrm{O}\left(\frac{\exp(-1/x^2)}{x^{d+1}}\right).$$
Il s'ensuit, par croissances comparées, que l'on a :
$$f^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

- Soit p un entier naturel. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^p$ et que $f^{(k)}$ admet une limite finie en 0 pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, la fonction f a un unique prolongement de classe $\mathcal{C}^p$, qui coïncide avec le prolongement par continuité, que l'on note g. Par conséquent la fonction g est de classe $\mathcal{C}^p$ et $g^{(p)}(0) = 0$, cela pour tout entier p. La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- La série de Taylor de g est nulle. Cependant, la fonction g ne s'annule qu'en 0 (car $g(x) = \exp(-1/x^2) > 0$ lorsque $x \neq 0$). Ainsi, g ne coïncide sur aucun intervalle $]-r,r[$ avec la somme de sa série de Taylor ; la fonction g n'est pas développable en série entière.

Théorème 23 Le résultat est immédiat lorsque $x = 0$.

Soit un réel $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Puisque la dérivée n-ième de $f : t \mapsto e^t$ est f, et puisque la fonction f est positive et croissante, on a $\sup\limits_{t\in[-|x|,|x|]} \left|f^{(n)}(t)\right| = e^{|x|}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f sur l'intervalle $\big[-|x|,|x|\big]$ donne :
$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{|x|}.$$
Puisque le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est infini, la série $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ converge et :
$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{|x|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
La conclusion en découle.

Proposition 25 Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Les deux séries $\sum \dfrac{z_1^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{z_2^n}{n!}$ convergent absolument respectivement vers $\exp(z_1)$ et $\exp(z_2)$, donc leur produit de Cauchy $\sum \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z_1^k}{k!}\dfrac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right)$ converge absolument vers $\exp(z_1)\exp(z_2)$. Or :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n\\ &= \exp(z_1+z_2).\end{aligned}$$
Ainsi $\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1+z_2)$.

Proposition 26

- $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$.
- $\overline{\exp(z)} = \overline{\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}} = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z})$.
- $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\,\overline{\exp(z)} = \exp(z)\,\exp(\overline{z}) = e^{z+\overline{z}} = e^{2\,\mathrm{Re}(z)}$. Donc :

$$|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Corollaire 27

$$|\exp(z)| = 1 \iff e^{\mathrm{Re}(z)} = 1 \iff \mathrm{Re}(z) = 0.$$

Proposition 28 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. D'après la proposition 25 de la page 601 :

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = \exp(a) \times \exp(ib) = e^a \times \exp(ib) = e^a\left(\cos b + i \sin b\right).$$

Théorème 29 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par définition :

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{\exp(ix) + \overline{\exp(ix)}}{2} \\
&= \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n x^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n(1 + (-1)^n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.
\end{aligned}$$

L'expression de $\sin x$ s'obtient de la même manière.

Exercice 17

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{x^n}{(2n)!} = \frac{\sqrt{x}^{\,2n}}{(2n)!}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \mathrm{ch}\left(\sqrt{x}\right).$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{x^n}{(2n)!} = \frac{(-(-x))^n}{(2n)!} = (-1)^n \frac{\sqrt{-x}^{\,2n}}{(2n)!}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{-x}\right).$$

Corollaire 30 La fonction $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur IR, comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Par dérivation terme à terme, pour tout $x \in$ IR :

$$\cos'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2n)x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = -\sin(x).$$

La démonstration est analogue pour la fonction $\sin$.

Exercice 18 Il s'agit d'un cas particulier de l'exercice 12 de la page 594.

Lemme 31 Vérifions que la suite $\left(\frac{2^{2n}}{(2n)!}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Pour cela, il suffit de remarquer que pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{2^{2n}}{(2n)!}} = \frac{4}{(2n+1)(2n+2)} < 1.$$

D'après le théorème des séries alternées :

$$\cos 2 = -1 + R_1 \qquad \text{où} \qquad R_1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}\cdot$$

Toujours d'après le théorème des séries alternées :

$$|R_1| = \left|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}\cdot$$

Il s'ensuit que $\cos 2 \leqslant -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$.

Proposition 32 Notons $E = \{x \in \text{IR}_+ \mid \cos x = 0\}$.

- Montrons que E est non vide. La fonction $\cos$ est continue. De plus $\cos(0) = 1$ et $\cos 2 < 0$. D'après le théorème de valeurs intermédiaires, la fonction réelle continue sur l'intervalle $[0, 2]$ s'annule et donc E est non vide.
- L'ensemble E est une partie non vide, minorée de IR : ainsi E admet une borne inférieure α.
  Par ailleurs, puisque la fonction $\cos$ est continue sur IR, on en déduit que :
  $$E = \cos^{-1}\big(\{0\}\big) \cap \text{IR}_+$$
  est un fermé de IR, en tant qu'intersection de deux fermés. Par conséquent, α est un minimum de E et, puisque $\cos 0 = 1$, on a $\alpha > 0$.

Théorème 35

- D'après le corollaire 27 de la page 601, φ est à valeurs dans $\mathbb{U}$.
- D'après la proposition 25 de la page 601, φ est un morphisme et φ est continue par continuité de la fonction $\exp$.
- La fonction φ est 2π-périodique, car pour tout $t \in$ IR, on a :
  $$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)\exp(2i\pi) = \varphi(t).$$

- Montrons que la restriction φ_1 de φ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définit une bijection sur :
$$\mathbb{U}_1 = \{z \in \mathbb{U} \mid \operatorname{Re}(z) \geqslant 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) \geqslant 0\}.$$
En effet, l'étude des variations de $\sin$ montre que la restriction de $\sin$ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définit une bijection sur $[0,1]$. Cela garantit l'injectivité de φ_1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Soit $z = a + ib \in \mathbb{U}_1$. Puisque $\sin$ définit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$, il existe donc $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin c = b$. On a : $a = \sqrt{1-b^2}$ et puisque la fonction $\cos$ est à valeurs positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donne :
$$\cos c = \sqrt{1 - \sin^2 c} = \sqrt{1-b^2} = a.$$
La surjectivité de φ_1 est ainsi assurée.
- À l'aide de la relation $\varphi\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = i\varphi(t)$, on démontre que φ_k, restriction de φ à $\left[(k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}\right]$, définit une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{U}_k = (i)^{k-1}\mathbb{U}_1$. Il est facile de vérifier que $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3 \cup \mathbb{U}_4$. Il s'ensuit que φ est surjective. À l'aide du fait que $1 \notin \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3$, on a que si $t \in [0, 2\pi[$, la relation $\varphi(t) = 1$ est équivalente à $t = 0$.
- Puisque la fonction φ est 2π-périodique et $\varphi(0) = 1$, il vient que $2\pi\mathbb{Z} \subset \operatorname{Ker}\varphi$.
Le point précédent montre que $\operatorname{Ker}\varphi \cap [0, 2\pi[= \{0\}$. Ainsi, pour tout $t \in \operatorname{Ker}\varphi$, en notant $n = \lfloor t/2\pi \rfloor$, on a :
$$1 = \varphi(t) = \varphi(t - 2\pi n) = \varphi\left(t - 2\pi\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor\right),$$
et puisque l'on a :
$$0 \leqslant t - 2\pi\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor < 2\pi,$$
il vient que :
$$t = 2\pi\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor.$$
On en conclut que $\operatorname{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 37

- D'après la proposition 26 de la page 601, la fonction $\exp$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.
- D'après la proposition 25 de la page 601, l'application $\exp$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}, \times)$.
- Montrons que la fonction $\exp$ est surjective sur $\mathbb{C}^*$. D'après le théorème 35 de la page 603, pour tout nombre complexe z' de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z' = \exp(i\theta)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = |z|\, z'$, où $z' = \frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z' = \exp(i\theta)$, et donc :
$$z = |z| \exp(i\theta) = \exp\big(\ln|z| + i\theta\big).$$
On a ainsi démontré la surjectivité.

- Soit $z = a + ib \in \operatorname{Ker}\exp$, c'est-à-dire tel que $e^a \exp(ib) = 1$.
  Puisque $\left|e^a \exp(ib)\right| = e^a$, cela impose $a = 0$ et $\exp(i\theta) = 1$. D'après le théorème 35 de la page 603, on a donc $b \in 2\pi\mathbb{Z}$. Par suite, $\operatorname{Ker}\exp \subset i2\pi\mathbb{Z}$. Il est clair, toujours d'après le théorème 35 de la page 603, que $i2\pi\mathbb{Z} \subset \operatorname{Ker}\exp$. Cela achève la démonstration.

Proposition 38 Nous traitons le cas $\alpha \notin \mathbb{N}$.

La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ définie sur $]-1,1[$ vérifie :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad (*)$$

Par unicité des solutions d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire résolue du premier ordre à coefficients continus, la fonction f est caractérisée par $(*)$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et g la somme de la série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R. Pour tout $x \in \left]-R,R\right[$:

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x) - \alpha g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n\, x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+1)\, a_{n+1} + (n-\alpha) a_n\big) x^n.\end{aligned}$$

Par conséquent g vérifie $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$ et $g(0) = 1$ sur un voisinage de 0 si, et seulement si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$ et $a_0 = 1$;
- le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est non nul.

La relation de récurrence définit une unique suite. Puisque $\alpha \notin \mathbb{N}$, cette suite est à valeurs non nulles et, via la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1. La fonction g vérifie donc $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$ sur $]-1,1[$ et $g(0) = 1$. Par conséquent $f = g$. Par récurrence, on obtient facilement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

La conclusion s'ensuit.

Exercice 19 L'exemple précédent donne que Arcsin' est développable en série entière sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\, x^{2n}.$$

Il s'ensuit, d'après le théorème 16 de la page 593 que la fonction Arcsin est développable en série entière et, du fait que $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$:

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n+1)}\, x^{2n+1}.$$

Exercice 20 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{n} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\ &= (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2^n\, n!}\\ &= (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n(2n-1)\,n!}\times\frac{2\times 4\times\cdots\times 2n}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la série du binôme :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^n.$$

Exercice 21 Proposons deux méthodes. Remarquons que f est définie sur $\left[-1,1\right[$.

- Première méthode. Notons que $f(x) = (x+1)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in \left]-1,1\right[$. On sait que :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^{2n}.$$

  Il s'ensuit par produit que f est développable en série entière sur $\left]-1,1\right[$, avec :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = a_{2n+1} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

- Deuxième méthode. Les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ sont développables en série entière sur $\left]-1,1\right[$. Il s'ensuit par produit que f l'est également. Par ailleurs, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{1+x}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\,x^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\right)x^n.\end{aligned}$$

Les deux calculs sont bien évidemment justes, bien que les deux expressions soient très différentes.

Exercice 22

- Développons f' en série entière. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x+1}{(x-j)(x-j^2)} = \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^{n+1}} + \frac{1}{(j^2)^{n+1}} \right) x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} 2\,\mathrm{Re}(j^{n+1}) x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right) x^n. \end{aligned}$$

- Puisque f' est développable en série entière sur $]-1,1[$, la fonction f l'est également et, du fait que $f(0)=0$, on a :

$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) \frac{x^n}{n}\cdot$$

Remarque On peut proposer une autre méthode.
En remarquant que $1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, il vient pour $x \in]-1,1[$ que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) \\ &= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n}, \end{aligned}$$

où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \begin{cases} -2 & \text{si } n \equiv 0 \mod 3 \\ \ \ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 23 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{(x+1+i)(x+1-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x+1-i} - \frac{1}{x+1+i}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+1-i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\frac{xe^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - 1} \right).$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, on a :

$$\frac{1}{x-\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-i(n+1)\frac{3\pi}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} x^n,$$

et donc :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}}\, x^n.$$

Ainsi, la fonction f' est développable en série entière sur $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$. Par primitivation des développements en série entière, sachant que $f(0) = \frac{\pi}{4}$, on en déduit :

$$\forall x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\quad f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{x^n}{n}\cdot$$

La fonction f est bien développable en série entière sur $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$.

Remarque La suite $\left(\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est 8-périodique non nulle. Par conséquent la série $\sum \frac{\sin\left((n+1)\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n+1}{2}}} x^n$ a pour rayon de convergence $\sqrt{2}$. On en déduit que f' (et *a fortiori* f) n'est développable en série entière sur aucun intervalle ouvert I contenant strictement $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

Exercice 24

1. Il est clair que f est définie en 1 et -1.

   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Si $|x| > 1$, alors $\left|x^{2^n} - 1\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc :

   $$\ln\left(\left|x^{2^n} - 1\right|\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

   Il s'ensuit que la série $\sum \ln\left(\left|x^{2^n} - 1\right|\right)$ diverge grossièrement. Par suite :

   $$\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2^k} - 1\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   et $f(x)$ n'est pas définie.

   Si $|x| < 1$, alors $x^{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln\left(1 - x^{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x^{2^n}$. Puisque $x^{2^n} \leqslant |x|^n$ et puisque la série géométrique $\sum |x|^n$ est convergente, par comparaison des séries à terme général positif, les séries $\sum x^{2^n}$ et $\sum \ln\left(1 - x^{2^n}\right)$ convergent. Ainsi la suite $\left(\ln\left(\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1 - x^{2^k}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et, par continuité de la fonction $\exp$, la quantité $f(x)$ est définie.

2. Il est immédiat que $f(x) = (1-x)f(x^2)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Montrons que la fonction $g = \ln\circ f$ est continue. Pour cela, démontrons que la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n : x \mapsto \ln\left(1 - x^{2^n}\right)$, converge uniformément sur tout segment de $]-1, 1[$.

Soit $a \in]0,1[$. Par croissance de la fonction ln on a :

$$\forall x \in [-a,a] \quad \ln\left(1-a^{2^n}\right) \leqslant \ln\left(1-x^{2^n}\right) \leqslant 0$$

La convergence de la série $\ln\left(1-a^{2^n}\right)$ garantit la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-a,a]$. Par conséquent, la fonction g est continue sur $]-1,1[$, car les u_n sont des fonctions continues. Par continuité de la fonction exponentielle, il en est de même de f.

3. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme g. On a :

$$\forall x \in]-R,R[\quad (1-x)g(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

Si $R>0$, par unicité du développement en série entière, la fonction g vérifiera :

$$g(0)=1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-R,R[\quad g(x) = (1-x)g(x^2)$$

si, et seulement si :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \begin{cases} a_{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ -a_{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{$*$}$$

La relation $(*)$ définit bien une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est facile de vérifier par récurrence qu'elle est à valeurs dans $\{-1,1\}$. Pour cette suite, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ vaut 1. La somme g est une fonction continue sur $]-1,1[$ et vérifie :

$$g(0)=1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1,1[\quad g(x) = (1-x)g(x^2) \tag{$**$}$$

On déduit de $(**)$ que pour tout entier n :

$$\forall x \in]-1,1[\quad g(x) = g\left(x^{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n} \left(1-x^{2^k}\right).$$

D'autres part, la fonction g étant continue en 0, on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$g\left(x^{2^{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0) = 1.$$

Par conséquent, toujours pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$g(x) = g\left(x^{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n} \left(1-x^{2^k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1-x^{2^k}\right) = f(x).$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1-x^{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

ce qui démontre que f est développable en série entière.

Exercice 25 Il suffit d'écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left|R_n(t)\right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in[-|t|,|t|]} \left|f^{n+1}(x)\right| \leqslant M \frac{|t|^{n+1}}{\rho^{n+1}}.$$

Exercice 26 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 telle que f et toutes ses dérivées soient positives sur ce voisinage. Montrons que f est développable en série entière en 0. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, 2\alpha] \subset I$ et soit $x \in [-\alpha, \alpha]$. La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(x+\alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) + \alpha^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(x+\alpha u)\, du.$$

Tous les termes du second membre étant positifs, on a :

$$0 \leqslant \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) \leqslant f(x+\alpha) \leqslant f(2\alpha),$$

la dernière inégalité provenant de la croissance de f. L'exercice précédent s'applique alors et montre le résultat annoncé.

Exercice 27

1. Démontrons par récurrence l'assertion $\mathcal{H}_n$: « la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ et $f^{(n)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ».
   - Puisque f est par définition dérivable, f est continue. De plus la formule $f^{(n)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est évidemment vérifiée lorsque $n = 0$.
   - Supposons $\mathcal{H}_n$ vérifiée pour un entier naturel n. Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n x)$ et, puisque f est dérivable, cette dernière relation donne que $f^{(n)}$ dérivable. De plus, toujours pour $x \in \mathbb{R}$:

     $$f^{(n+1)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda^n f'(\lambda^n x) = \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f\left(\lambda^{n+1} x\right).$$

     Cette expression montre que $f^{(n+1)}$ est continue et donc que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   Cela démontre le résultat par récurrence.
2. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral, pour démontrer que f est nécessairement la somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.

   Commençons par remarquer que $f^{(k)}(0) = f(0)\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Soit a un réel strictement positif. Notons $M_a = \max\limits_{x \in [-a,a]} \bigl|f(x)\bigr|$, qui est bien définie puisque f est continue.

   Pour tout $x \in [-a, a]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} x^n &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f(\lambda^{n+1} t)\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} x^{n+1} \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f(\lambda^{n+1} x u)\,\mathrm{d}u}_{R_n(x)} \end{aligned}$$

Puisque $\lambda \in]0,1[$, pour tout $x \in [-a,a]$ et $u \in [0,1]$, on a $\left|\lambda^{n+1}xu\right| \leqslant a$ et donc :

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &\leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,|x|^{n+1}\,\lambda^{\frac{n(n+1)}{2}}\left|f(\lambda^{n+1}xu)\right|\mathrm{d}u\\ &\leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,a^{n+1}\,\lambda^{\frac{n(n+1)}{2}}M_a\,\mathrm{d}u\\ &\leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\,a^{n+1}M_a\,\mathrm{d}u \leqslant M_a\,\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

De la convergence de la série $\sum \frac{a^n}{n!}$, il vient que $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que la fonction f est égale à la somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$.

Il est par ailleurs facile de vérifier que $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\,x^n$ est une solution du problème.

Exercice 28

- Notons $u_n: \begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n.\end{array}$

  Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $\big((-1)^n u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative. De plus, la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle, pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi, d'après le théorème des séries alternées, pour tout $(x,n) \in [0,1]\times\mathbb{N}^*$:

  $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

  La convergence uniforme de la série $\sum u_n$ est ainsi établie. Puisque les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$, la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ est continue sur $]0,1[$. Par ailleurs $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in [0,1[$. Par conséquent :

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

- Notons $v_n: \begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}\end{array}.$

  Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $\big((-1)^v u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. De plus, la suite $(|v_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle, pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi, d'après le théorème des séries alternées, pour tout $(x,n) \in [0,1]\times\mathbb{N}^*$:

  $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,x^{2k+1}\right| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

La convergence uniforme de la série $\sum v_n$ est ainsi établie. Puisque les fonctions v_n sont continues sur $[0,1]$, la fonction $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ est continue sur $]0,1[$. Par ailleurs $g(x) = \text{Arctan}(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = g(1) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4}\cdot$$

Exercice 29

1. • Puisque la série $\sum a_n$ est convergente, la rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est supérieur à 1.
   • Soit $z \in D_O(0,1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(1 - z^k) &= \sum_{k=1}^{n} (R_{k-1} - R_k)(1 - z^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k(1 - z^{k+1}) - \sum_{k=1}^{n} R_k(1 - z^k) \\ &= (1 - z) \sum_{k=0}^{n-1} R_k z^k - (1 - z^n) R_n. \end{aligned}$$

   Puisque $R_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|z| < 1$, on a $(1 - z^n)R_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc :

$$S_n = (1 - z) \sum_{k=0}^{n-1} R_k z^k - (1 - z^n) R_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (1 - z) \sum_{k=0}^{+\infty} R_k z^k.$$

   Par ailleurs :

$$S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x) - f(1).$$

   La conclusion suit.

2. En posant $g(x) = f(1) - f(x)$ pour $x \in [0,1]$, la fonction g est la somme de la série de fonctions u_n, où $u_n : x \mapsto R_n x^n (1 - x)$. Pour démontrer que f est continue en 1, il suffit de démontrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément, car les fonctions u_n sont continues.
   Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $R_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe n_0 tel que $|R_n| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Pour tout $n \geqslant n_0$ et $x \in [0,1[$, du fait que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1 - x) = x^{n+1}$, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k (1 - x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |R_k| x^k (1 - x) \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1 - x) = \varepsilon\, x^{n+1} \leqslant \varepsilon.$$

   Cette dernière inégalité est encore vérifiée lorsque $x = 1$. La série $\sum u_n$ converge bien uniformément et la conclusion est alors immédiate.

S'entraîner et approfondir

11.1 Trouver les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ pour :

1. a_n est la somme des carrés des diviseurs de n ;
2. $a_n = 1$ si n est premier, $a_n = 0$ sinon.
3. a_n est le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 + y^2 \leqslant n^2$;
4. $a_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{n}$;
5. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

11.2 Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Comparer à R les rayons de convergence des séries entières :

1. $\sum n^\alpha a_n z^n$ (α réel quelconque);
2. $\sum a_n^2 z^n$;
3. $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$;
4. $\sum a_n z^{n^2}$.

11.3 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières réelles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^{n+1} n\, x^{2n+1}$;
2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$;
3. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

11.4 Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{z^{p_n}}{p_n}$, où p_n est le n-ième nombre premier.

⋆ **11.5** *(Polytechnique 2015)*

Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{\sin(\pi n \sqrt{2})}$.

On montrera que $\displaystyle\frac{1}{(2\sqrt{2}+1)\, q^2} \leqslant \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q}$ *pour tout* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$.

11.6 Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum 2^{(-1)^n n} z^n$ sur le disque ouvert de convergence.

11.7 Rayon de convergence et somme de la série entière de la variable réelle $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

11.8 1. Calculer, pour tout $x \in]-1,1[$, la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$.

2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

⋆ **11.9** Soit $f : D_F(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction continue, développable en série entière sur $D_O(0,1)$. On note $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in D_O(0,1)$.

1. Démontrer que pour tout $r \in [0,1[$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}|a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t$$
On utilisera l'exercice 11 de la page 592.

2. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 \mathrm{d}t$.

11.10 *(Centrale 2015)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note π_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On notera que $\pi_0 = 1$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $\pi_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\pi_k$.
2. Démontrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{\pi_n}{n!} x^n$ est strictement positif. On note f la somme de cette série sur $]-R,R[$.
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f. En déduire f, puis une expression des π_n.

11.11 Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$, où $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t$.

11.12 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^3}{3^n}$ converge et calculer sa somme.

11.13 On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ est non nul et donner une équation différentielle du premier ordre avec second membre vérifiée par f.
2. Résoudre l'équation différentielle sur $]0,4[$.
3. En déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

11.14 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum a_n z^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k\, k!\ .$$

11.15 Développement en série entière de $f(x) = (\operatorname{Arctan} x)^2$. On donnera les coefficients en fonction de $S_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1}\cdot$

11.16 Développer en série entière $f(x) = \ln\sqrt{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

11.17 Développer en série entière $f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

11.18 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Retrouver le développement en série entière :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$$

à l'aide de la formule de Taylor reste intégral. Pour cela on pourra majorer le reste $R_n(x)$ à l'aide de l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^n \mathrm{d}u$.

11.19 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(n^2 x\right)}{2^n}\cdot$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f n'est pas développable en série entière.

11.20 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à $\mathbb{R}$, la fonction $f_z : h \mapsto f(z+h)$ est développable en série entière.

⋆ **11.21** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière, telle que $f(0) = 0$. Démontrer que $g : x \mapsto \frac{1}{1-f(x)}$ est développable en série entière.

⋆ **11.22** On pose pour tout $z \in D_0(0,1)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n!}$.

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Calculer $\lim_{t\to 1^-} \left|f\left(te^{2i\pi\frac{p}{q}}\right)\right|$.
2. Démontrer que f n'admet aucun prolongement continue en un point de la frontière du disque de convergence.

⋆ **11.23** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série $\sum na_n$ soit absolument convergente. On pose $\mathcal{D}$ le disque fermé de centre 0 et de rayon 1, ainsi que f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathcal{D}$.
2. On suppose de plus que $|a_1| \geqslant \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n|a_n|$ et $a_1 \neq 0$. Démontrer que f est injective.

11.24 Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec x réel.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Montrer que $f(x) = \mathrm{o}\left(1/(1-x)\right)$ au voisinage de 1.
2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $f(z) \underset{1}{\sim} \dfrac{\alpha}{1-x}\cdot$

11.25 Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On note f et g respectivement les sommes des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. On suppose enfin que le rayon de convergence de la série $\sum b_n x^n$ vaut 1, que $a_n \underset{}{\sim} b_n$ et que la série numérique $\sum b_n$ diverge.

1. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$?
2. Démontrer que $f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} g(x)$.

11.26 Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence par $c_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

et la série entière $\sum c_n x^n$.

1. On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence R strictement positif et l'on note $f(x)$ sa somme. Montrer, qu'au voisinage de 0, la fonction $f(x)$ vérifie $xf(x)^2 = f(x) - 1$ et est égale à la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right).$$

2. Montrer que la fonction $g(x)$ se développe en série entière au voisinage de 0. En déduire $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ pour tout n.

Solution des exercices

11.1 1. Notons R le rayon de convergence.

- Puisque 1 divise tout les entiers, pour tout n, on a $a_n \geqslant 1$. Par comparaison, on a $R \leqslant 1$.
- L'entier $n \geqslant 1$ a au plus n diviseurs, le carré d'un diviseur est inférieur à n^2, donc la somme des carrés des diviseurs de n est $\mathrm{O}(n^3)$. Puisque le rayon de convergence de $\sum x^n$ vaut 1, le rayon de convergence de la série $\sum n^3 x^n$ vaut également 1 (*cf.* le corollaire 15 de la page 593). Par comparaison, on obtient $R \geqslant 1$ et donc $R = 1$.

2. Notons R le rayon de convergence.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant 1$. Par suite, $R \geqslant 1$.
- Puisque l'ensemble des nombres premiers est infini, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Par conséquent, on a $R \leqslant 1$ et donc $R = 1$.

3. Notons R le rayon de convergence.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $0^2 + 0^2 \leqslant n$, on a $a_n \geqslant 1$. Il s'ensuit par comparaison que $R \leqslant 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $x^2 + y^2 \leqslant n^2$, alors $(x,y) \in [\![-n,n]\!]^2$. Par conséquent, $a_n \leqslant (2n+1)^2 = \mathrm{O}\left(n^2\right)$. D'après le corollaire 15 de la page 593, il vient que $R \geqslant 1$. Par suite $R = 1$.

4. Notons R le rayon de convergence.

- Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est celui de $\sum \mathrm{ch}(n)\, z^n$ (*cf.* le corollaire 15 de la page 593).
- Puisque $\mathrm{ch}(n) \sim \frac{e^n}{2}$, le rayon de convergence de la série $\sum e^n z^n$, qui vaut $1/e$ (série géométrique), est égal à R (*cf.* le corollaire 7 de la page 587).
  Donc $R = 1/e$.

5. Notons R le rayon de convergence.

- La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives. À l'aide du développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, on a :
$$\ln a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1).$$
  Il s'ensuit que :
$$a_n \sim e^{-1/2}\, e^{\sqrt{n}}$$
  et R est le rayon de convergence celui de la série $\sum e^{\sqrt{n}}\, x^n$ (*cf.* le corollaire 7 de la page 587).
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :
$$\frac{|e^{\sqrt{n+1}} z^{n+1}|}{|e^{\sqrt{n}} z^n|} = |z|\, e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = |z|\, e^{1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$
  En utilisant la règle de d'Alembert, il vient que $R = 1$.

11.2 Notons $R(\sum a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Notons aussi $I(\sum a_n z^n)$ l'ensemble des réels positifs tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

1. D'après le corollaire 15 de la page 593, pour tout *entier* relatif, $\sum n^\alpha a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. Par encadrement de n^α entre n^β et $n^{\beta+1}$, β partie entière de α, c'est aussi le rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n z^n$.
2. Dans ce cas :
$$r \in I(\textstyle\sum a_n^2 z^n) \iff (|a_n|^2 r^n) \text{ bornée} \iff (|a_n| r^{n/2}) \text{ bornée}$$
$$\iff r^{1/2} \in I(\textstyle\sum a_n z^n).$$
Donc $R(\sum a_n^2 z^n) = R^2$.
3. Comme $|a_n e^{\sqrt{n}}| \geqslant |a_n|$, le rayon de convergence R' de $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ est inférieur ou égal à R. D'autre part, soit $r > 0$ tel que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :
$$\forall r' \in [0, r[\quad a_n e^{\sqrt{n}} r'^n = a_n r^n e^{\sqrt{n}} \cdot \frac{r'^n}{r^n},$$
et comme $e^{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{r'^n}{r^n}$ tend vers 0, la suite $a_n e^{\sqrt{n}} r'^n$ tend vers 0. Donc $R' = R$.
4. Pour la dernière série, montrons d'abord que si R est fini non nul, alors :
$$R' = R\Big(\sum a_n z^{n^2}\Big) = 1.$$
En effet, dans ce cas, soit $r > R$. Pour tout $\rho > 1$, $a_n \rho^{n^2} = a_n r^n \cdot \dfrac{\rho^{n^2}}{r^n}$ qui n'est pas borné, car $\dfrac{\rho^{n^2}}{r^n}$ tend vers l'infini si n tend vers l'infini, et $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Donc $\rho \geqslant R'$.

   De même, si $r < R$, $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et, pour tout $\rho < 1$, $\dfrac{\rho^{n^2}}{r^n}$ tend vers 0, donc $(a_n \rho^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et $\rho \leqslant R'$. Finalement, $R' = 1$.
   Le raisonnement précédent montre que si $R = +\infty$, R' est élément de $[1, +\infty[$, mais tout peut arriver :

   - si $a_n = 1/\lambda^{n^2}$, $\lambda > 1$, alors $R' = \lambda$;
   - si $a_n = 1/n!$, alors $R' = 1$;
   - si $a_n = 1/(n^2)!$, alors $R' = +\infty$.

   De même, si $R = 0$, R' peut être tout réel de $\big[0, 1\big]$ (on prendra les inverses des valeurs de a_n ci-dessus).

11.3 1. Le rayon de convergence est 1, car $\sum z^{2n+1}$ admet 1 pour rayon de convergence, et la multiplication par $(-1)^n n$ du coefficient ne change pas ce rayon. Pour $|x| < 1$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n\, x^{2n+1} = x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n\, x^{2(n-1)} = x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n\, t^{n-1}$$

avec $t = x^2$. Mais :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n\, t^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} t^n\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{(1+t)^2},$$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n\, x^{2n+1} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\cdot$$

Lorsque $x = \pm 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0, et il n'y a pas lieu de calculer la somme.

2. Le rayon de convergence est 1 car le coefficient de x^n est équivalent à $1/n^2$ lorsque n tend vers l'infini. Pour $|x| < 1$, et $x \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) x^n = -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)\cdot$$

3. Puisque le coefficients a_n est $\mathrm{o}(n)$, le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1. Comme pour $x = 1$ le terme général n'est pas borné, le rayon vaut 1. La série des termes pairs $\sum (2n)\, x^{2n}$ est de rayon de convergence 1 et de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2n(x^2)^n = 2(x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n(x^2)^{n-1} = \frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\cdot$$

Celle des termes impairs $\sum \dfrac{1}{(2n+1)}\, x^{2n+1}$ est de rayon de convergence 1. Par ailleurs, pour $x \in]-1,1[$, on a :

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

La somme de la série proposée est donc

$$\frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

4. Notons $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ le n-ième nombre harmonique. Le quotient h_{n+1}/h_n, égal à $1 + \dfrac{1}{(n+1)h_n}$, tend vers 1. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est égal à 1.

On remarque alors que le produit de Cauchy des séries entières classiques $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n x^n$. On en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} h_n\, x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\cdot$$

11.4 Cette série entière est aussi $\sum a_m z^m$, où $a_m = \begin{cases} \dfrac{1}{p_n} & \text{si } m = p_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour $r \in \mathbb{R}_+$, $a_m r^m = r^{p_n}/p_n$ si $m = p_n$, 0 sinon. Donc la suite $(a_m r^m)$ est bornée si, et seulement si, la suite (r^{p_n}/p_n) l'est, c'est-à-dire pour $r \leqslant 1$.

Le rayon demandé est 1.

11.5 Rappelons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Il s'ensuit que $\sin(\pi n\sqrt{2}) \neq 0$ pour tout entier n.

La série entière $\sum \dfrac{x^n}{\sin(\pi n\sqrt{2})}$ est bien définie et notons R son rayon de convergence.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{1}{\left|\sin(\pi n\sqrt{2})\right|} \geqslant 1.$$
Par comparaison, puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est 1, on en déduit que $R \leqslant 1$.
- Remarquons que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a :
$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \left|\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right| = \left|2 - \frac{p^2}{q^2}\right| = \frac{|2\,q^2 - p^2|}{q^2}. \qquad (\star)$$
Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, $2q^2 - p^2$ n'est pas nul, et puisqu'il s'agit d'un entier :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad 1 \leqslant \left|2q^2 - p^2\right|.$$
On en déduit, à l'aide de l'égalité $(\star)$, que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$, on a :
$$\frac{1}{q^2} \leqslant \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \left|\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right| \leqslant (2\sqrt{2}+1) \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right|,$$
et donc, en posant $\mu = 2\sqrt{2} + 1$, on obtient l'inégalité :
$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1] \quad \frac{1}{\mu\, q^2} \leqslant \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right|, \qquad (\star\star)$$
- Remarquons que pour tout $\frac{p}{q} \notin [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$, on a :
$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{\mu q^2},$$
car $\mu \geqslant 1$. Il s'ensuit que l'inégalité $(\star\star)$ est vérifiée pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $p_n = \lfloor n\sqrt{2} + 1/2 \rfloor$. L'entier p_n est l'entier le plus proche de $n\sqrt{2}$: $\left|p_n - n\sqrt{2}\right| \leqslant 1/2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par π-périodicité de la fonction $|\sin|$, on a :
$$\left|\sin(\pi n\sqrt{2})\right| = \left|\sin\big(\pi(n\sqrt{2} - p_n)\big)\right|.$$
De l'inégalité $(\star\star)$ et de la définition de p_n il vient :
$$\frac{1}{\mu\, n} \leqslant |n\sqrt{2} - p_n| \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (\star\star\star)$$

Par positivité et concavité de la fonction sin sur $[0, \pi/2]$, on a classiquement :

$$\forall x \in [0, \pi/2] \quad 0 \leqslant \frac{2}{\pi}\, x \ \leqslant \sin(x),$$

et par imparité de la fonction sin, nous obtenons la minoration :

$$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \frac{2}{\pi}\,|x| \ \leqslant \big|\sin(x)\big|.$$

On en déduit alors, à l'aide de l'inégalité $(\star\star\star)$:

$$\frac{2}{\mu n} \leqslant 2\big|n\sqrt{2} - p_n\big| \leqslant \Big|\sin\big(\pi(n\sqrt{2} - p_n)\big)\Big|.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{\sin(\pi n\sqrt{2})} = \mathrm{O}(n)$.

Puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ est 1, on déduit que $R \geqslant 1$. Par suite, $R = 1$.

11.6 La série entière $\sum 2^{(-1)^n n} z^n$ est la somme des séries entières :

$$\sum 2^{2n} z^{2n} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{2^{2n+1}}\, z^{2n+1}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\frac{\left|2^{2n+2} z^{2n+2}\right|}{\left|2^{2n} z^{2n}\right|} = 4|z|^2,$$

donc, d'après le règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^{2n} z^{2n}$ est $\frac{1}{2}$. Par ailleurs :

$$\frac{\left|\dfrac{1}{2^{2n+3}}\, z^{2n+3}\right|}{\left|\dfrac{1}{2^{2n+1}}\, z^{2n+1}\right|} = \frac{|z^2|}{4}$$

et donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{2^{2n+1}}\, z^{2n+1}$ est 2.

Puisque les deux rayons sont distincts, le rayon de convergence de la série $\sum 2^{(-1)^n n} z^n$ est $\frac{1}{2}$.

Pour tout $z \in D_O\left(0, \frac{1}{2}\right)$ on a :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n n} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n} z^{2n} + \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\, z^{2n} && \text{(les deux séries convergent)} \\
&= \frac{1}{1 - 4z^2} + \frac{z}{2}\, \frac{1}{1 - \frac{z^2}{4}} \\
&= \frac{4 + 2z - z^2 - 8z^3}{(1 - 4z^2)(4 - z^2)}.
\end{aligned}$$

11.7 • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{|x|^n}{n(n+1)}} = |x| \frac{n}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$ est 1. Notons f sa somme.

• Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Puisque le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n}$ est 1, on a, dans le cas où $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

D'après le développement en série entière des fonctions usuelles, on a, toujours pour $x \neq 0$:

$$f(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(\ln(1-x) + x\right),$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x).$$

11.8 1. • Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum (-1)^n x^{3n}$ est une série géométrique, qui converge si, et seulement si, $|x| < 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n x^{3n}$ et de la série « primitive » $\sum \frac{(-1)}{3n+1} x^{3n+1}$ valent ainsi 1.

• Pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3},$$

et par théorème :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3},$$

car la somme de la série en nulle en 0.

• Décomposons en éléments simples $F = \dfrac{1}{X^3+1}$.

Les racines de X^3+1 sont -1, $-j$ et $-j^2$. Par conséquent :

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{X+1} + \frac{1}{3j^2}\frac{1}{X+j} + \frac{1}{3j}\frac{1}{X+j^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{X+1} + \frac{1}{3}\frac{-X+2}{X^2-X+1}.$$

On peut remarquer que :
$$\frac{X-2}{X^2-X+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2X-1}{X^2-X+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{(X-1/2)^2+3/4}.$$
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\int_0^x \frac{t-2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\,\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x$$
et donc, pour $x \in \,]-1,1[$, on obtient l'expression :
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} = \frac{1}{3}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}\right)$$

2. Notons $u_n(x) = (-1)^n\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$ pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times [0,1]$.

   Pour $x \in [0,1]$, la suite $\big((-1)^n u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \big|u_{n+1}(x)\big| \leqslant \frac{|x|^{3n+4}}{3n+4} \leqslant \frac{1}{3n+4}.$$
   On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Il vient alors, les fonctions u_n étant continues, que la somme $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{3k+1}}{3k+1}$ est continue sur $[0,1]$. Par conséquent :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{3k+1} &= f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)\\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{3}\left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$
   et donc
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{3k+1} = \frac{1}{3}\left(\ln 2 + \sqrt{3}\,\frac{\pi}{3}\right).$$

11.9 1. Fixons $r \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :
$$\forall t \in [0,2\pi] \quad u_n(t) = f(re^{it})\overline{a_n}r^n e^{-nit}.$$
Puisque la fonction f est continue sur le compact $D_F(0,1)$, elle est bornée. Il s'ensuit que :
$$\forall t \in [0,2\pi] \quad \big|u_n(t)\big| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) r^n |a_n|.$$
Du fait que $r < 1$, la série numérique $\sum |a_n| r^n$ est convergente et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement. On en déduit, du fait que les fonctions u_n sont continues, l'égalité :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'une part, d'après l'exercice 11 de la page 592, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{a_n}\, r^n\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = r^n\,\overline{a_n}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t = 2\pi|a_n|^2 r^{2n}.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(re^{it})\,\overline{a_n}\,(re^{-it})^n\\ &= f(re^{it})\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{a_n}\,(\overline{re^{it}})^n\right)\\ &= f(re^{it})\overline{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(re^{it})^n} = \left|f(re^{it})\right|^2.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}|a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\mathrm{d}t.$$

2. • Montrons que $g : r \mapsto \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0,1]$.

   On a en effet :

   * pour tout $r \in [0,1]$ l'application $t \mapsto \left|f(re^{it})\right|^2$ est continue sur $[0,2\pi]$ par continuité de f ;
   * pour tout $t \in [0,2\pi]$, l'application $r \mapsto \left|f(re^{it})\right|^2$ est continue ;
   * pour tout $(t,r) \in 0,2\pi \times [0,1]$ on a :

   $$\left|f(re^{it})\right|^2 \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^2$$

   et la fonction constante $\mathcal{N}_\infty(f)^2$ est intégrable sur le segment $[0,2\pi]$.

   Par théorème, la fonction g est définie et continue sur $[0,1]$.

   • Montrons que $h : r \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} r^{2n}|a_n|^2$ est définie et continue sur $[0,1]$. Nous savons que h est définie sur $[0,1[$. Par ailleurs, d'après la question précédente :

   $$\forall r \in [0,1[\quad h(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it}\right|^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{N}_\infty(f)^2\,\mathrm{d}t = \mathcal{N}_\infty(f)^2.$$

   En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, du fait qu'il s'agit d'une série à terme général positif, on a l'inégalité :

   $$\forall r \in [0,1[\quad \sum_{n=0}^{p} r^{2n}|a_n|^2 \leqslant h(r) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^2.$$

   En faisant tendre r vers 1 à p fixé dans cette dernière inégalité, il vient :

   $$\forall r \in [0,1[\quad \sum_{n=0}^{p}|a_n|^2 \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^2.$$

Il s'ensuit que la série numérique à terme général positif $\sum |a_n|^2$ est convergente, puisque la suite des sommes partielles est majorée. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$, où $u_n(r) = |a_n|^2 r^{2n}$. On en conclut aisément que h est continue sur $[0,1]$.

Les fonctions g et h sont continues sur $[0,1]$ et coïncident sur $[0,1[$. Elles sont donc égales. En particulier :

$$g(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = h(1)$$

11.10 1. Rappelons qu'une partition $\mathcal{A}$ d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes et dont l'union est égale à E.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons Π_n l'ensemble des partitions de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$. On peut remarquer que $\Pi_0 = \{\varnothing\}$.

Remarquons que le nombre de partitions d'un ensemble E fini ne dépend pas explicitement de E, mais seulement de son cardinal $|E|$.

Soit n un entier naturel. Pour $\mathcal{A} \in \Pi_{n+1}$, notons $C_{\mathcal{A}}$ l'élément de $\mathcal{A}$ contenant n. En regroupant les partitions telles que $C_{\mathcal{A}}$ soit un ensemble donné et en remarquant que, par définition, $n \in C_{\mathcal{A}}$, on obtient :

$$\Pi_{n+1} = \bigcup_{X \subset [\![0,n-1]\!]} \left\{\mathcal{A} \in \Pi_{n+1} \;\middle|\; C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\}\right\}. \qquad (*)$$

Il est clair que les partitions de $[\![0,n]\!]$ telle que $C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\}$ sont les partitions de $[\![0, n-1]\!] \setminus X$ auxquelles on adjoint la partie $X \cup \{n\}$. Il s'ensuit, pour $X \subset [\![0, n-1]\!]$:

$$\left|\left\{\mathcal{A} \in \Pi_{n+1} \;\middle|\; C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\}\right\}\right| = \pi_{n-|X|}.$$

Par suite, les ensembles dans l'union $(*)$ étant deux à deux disjoints :

$$\pi_{n+1} = \sum_{X \subset [\![0,n-1]\!]} \pi_{n-|X|} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X \subset [\![0,n-1]\!] \\ |X|=k}} \pi_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_{n-k}.$$

En conclusion, par symétrie des coefficients binomiaux, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_k. \qquad (**)$$

2. Notons $b_n = \dfrac{\pi_n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et démontrons par récurrence (forte) que $0 \leqslant b_n \leqslant 1$.

L'assertion est vraie si $n = 0$.

Supposons l'assertion vraie pour tout $k \leqslant n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En divisant par $(n+1)!$ la relation $(**)$, il vient que :

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}\, b_i. \qquad (***)$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$0 \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}\, b_i \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} 1 = 1,$$

et donc $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$. Cela démontre l'assertion pour $n+1$ et donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par comparaison, puisque $|b_n| \leqslant 1$ et que le rayon de convergence de la série $\sum x^n$ vaut 1, il vient que $R \geqslant 1$. Par conséquent, $R > 0$.

3. • Soit $x \in \,]-R, R[$. En multipliant la relation $(***)$ par $(n+1)x^n$ et en sommant, il vient :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)b_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n-i)!}\,b_i\right)x^n.$$
Cela est légitime, car le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est égal à celui de la série entière $\sum (n+1)b_{n+1}x^n$. Par ailleurs, d'après les résultats relatifs au produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a :
$$\forall x \in \,]-R, R[\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n-i)!}\,b_i\right)x^n = f(x)\exp(x).$$
Par conséquent, pour tout $x \in \,]-R, R[$:
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n-i)!}\,b_i\right)x^n = f(x)\exp(x).$$
Sachant que $f(0) = 1$, cette dernière relation donne, en intégrant l'équation différentielle résolue, linéaire du premier ordre, homogène vérifiée par f, la relation :
$$\forall x \in \,]-R, R[\quad f(x) = \exp\big(\exp(x) - 1\big).$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$ et notons $u_{n,k}(x) = \dfrac{k^n x^n}{k!\,n!}$ pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.
Si $x \geqslant 0$, on a :
$$\exp\big(\exp(x)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\exp(x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\exp(kx)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k^n x^n}{n!}\right). \qquad (\star)$$
La famille $\big(u_{n,k}(x)\big)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ étant alors à valeurs positives, on en déduit qu'elle est sommable.
Dans le cas général, puisque $\big|u_{n,k}(x)\big| = u_{n,k}\big(|x|\big)$, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, la famille $\big(u_{n,k}(x)\big)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Par conséquent, on peut intervertir l'ordre de sommation dans l'expression $(\star)$. Ainsi :
$$\exp\big(\exp(x)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k^n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}\right). \qquad (\star\star)$$

• Par unicité du développement en série entière, puisque $f(x) = \frac{1}{e}\exp\big(\exp(x)\big)$ pour $x \in \mathbb{R}$, il vient de $(\star\star)$ l'expression suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

11.11 Première méthode

- Commençons par minorer le rayon de convergence. Il est immédiat que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \mathrm{O}(1)$$
Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$ est supérieur à 1.
- Soit $x \in \left]-1,1\right[$ et posons, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u_n : t \mapsto x^n \sin^{2n}(t)$ définies sur $[0,\pi/2]$. On a :
  * les fonctions u_n sont continues ;
  * Pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times [0,\pi/2]$:
  $$\left|u_n(t)\right| \leqslant |x^n|,$$
  et, du fait que $|x| < 1$ et donc que la série numérique $\sum |x^n|$ est convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[0,\pi/2]$.

  Par conséquent, on peut intégrer terme à terme, c'est-à-dire :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Pour $t \in [0,\pi/2]$, la série numérique $\sum x^n \sin^{2n}(t)$ est une suite géométrique convergente et donc :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$
En posant le changement de variable $u = \tan t$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, on obtient :
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x(1-\cos^2(t))}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)(1 - x(1 - \frac{1}{1+u^2}))}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2(1-x)}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$
Ensuite, en posant $u = \dfrac{v}{\sqrt{1-x}}$, on obtient :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2(1-x)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot$$
- Montrons que le rayon de convergence R de la série $\sum I_n x^n$ vaut 1. Si $R > 1$, alors la somme est continue sur $\left]-R,R\right[$, en particulier elle est continue en 1, or l'expression obtenue de la somme donne que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. Par conséquent, $R \leqslant 1$ et donc $R = 1$.

Deuxième méthode

- Calculons I_n. On reconnaît une intégrale de Wallis. Rappelons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u(t) = \sin^{2n-1}(t)$ et $v(t) = -\cos t$, une intégration par parties donne la relation :
$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$
Sachant que $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :
$$I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$
- Le développement en série entière de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ donne, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, que le rayon de convergence de la série $\sum (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^n$ est 1 et que sa somme vaut $f(x)$ sur $]-1,1[$. Par conséquent :
$$\forall x \in \,]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

11.12 Puisque $\dfrac{n^3}{(n+1)^3}$ tend vers 1, d'après la règle de d'Alembert le rayon de convergence de la série entière $\sum n^3 x^n$ est égal à 1. Sa somme f est donc définie sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$. La série proposée, évaluée de la série entière précédente en $\dfrac{1}{3} \in \,]-1,1[$, converge donc et sa somme égale à $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Puisque la série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence 1 et de somme $\dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$, on a sur $]-1,1[$, par dérivation et multiplication par x, les expressions :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2},$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$
et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}.$$
La somme de la série proposée est alors $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{33}{8}\cdot$

11.13 1. • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}}}{\frac{|x|^n}{\binom{2n}{n}}} = \frac{(n+1)}{2(2n+1)}\,|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|}{4}.$$
D'après la règle de d'Alembert, il vient que le rayon de convergence de la série $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ est 4.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$2(2n+1)a_{n+1} = (n+1)a_n,$$

soit

$$4(n+1)a_{n+1} - 2a_{n+1} = na_n + a_n. \tag{$*$}$$

En multipliant la relation $(*)$ par x^n, avec $|x| < 4$ et en sommant, il vient :

$$4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,$$

et donc pour tout x vérifiant $0 < |x| < 4$:

$$4f'(x) - 2\frac{f(x)-1}{x} = xf'(x) + f(x),$$

soit :

$$x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) = -2. \tag{$\star$}$$

Cette relation est encore vérifiée pour $x = 0$.

2. Posons $I =]0,4[$. Pour tout $x \in I$, on a :

$$\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}\frac{1}{4-x}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène :

$$x(4-x)y' - (x+2)y = 0$$

est :

$$\mathcal{S}_0 = \Big\{x \mapsto a\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}\ ;\ a \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Par ailleurs, la méthode de la variation de la constante assure qu'il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telle que $y : x \mapsto \alpha(x)\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}$ soit une solution de l'équation $(\star)$. La fonction α est caractérisée par :

$$\forall x \in I \quad \alpha'(x)\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}} = \frac{-2}{x(4-x)},$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in I \quad \alpha'(x) = \frac{-2}{x^{3/2}}\,\sqrt{4-x}.$$

Une intégration par parties donne, pour $x \in I$:

$$\begin{aligned}\alpha(x) - \alpha(2) &= 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4 + 2\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(4-t)}}\\ &= 4\sqrt{\frac{4-x}{x}} + 2\,\mathrm{Arcsin}\Big(\frac{x}{2}-1\Big) + C^{\mathrm{te}}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de $(\star)$ sur I est :

$$\mathcal{S} = \Big\{x \mapsto \frac{4}{4-x} + \Big(2\,\mathrm{Arcsin}\Big(\frac{x}{2}-1\Big) + a\Big)\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}\ ;\ a \in \mathbb{R}\Big\}.$$

3. Par conséquent, il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in I \quad f(x) = \frac{4}{4-x} + \Big(2\operatorname{Arcsin}\Big(\frac{x}{2}-1\Big) + a\Big)\,\frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}\cdot$$
La fonction f, qui est la somme d'une série entière sur $]-4,4[$, étant dérivable en 0, on en déduit que :
$$a = 2\operatorname{Arcsin}(1) = \pi.$$
Il s'ensuit que :
$$f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{4}{3} + \left(-2\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\right)\frac{1}{3^{3/2}} = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\cdot$$

11.14 On remarque que :
$$a_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(k+1-1)\cdot k! = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\big((k+1)!-k!\big) = n+1-\frac{1}{n!}\cdot$$
Le rayon de convergence est donc 1 et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n - e^z = \frac{1}{(1-z)^2} - e^z.$$

11.15 On sait que $\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sur $]-1,1[$. Donc, sur $]-1,1[$, on a :
$$f'(x) = 2\,\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{1+x^2} = 2\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\Big).$$
Ces deux série entières ont même rayon de convergence égal à 1, et le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières s'applique, entraînant que, pour $x \in]-1,1[$, on a $f'(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$, avec :
$$c_n = \sum_{p+q=n} \frac{(-1)^p}{2p+1}(-1)^q = (-1)^n S_n, \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2p+1}\cdot$$
Par suite, par intégration de développement en série entière :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n S_n}{n+1}\,x^{2n+2}.$$
Comme $1 \leqslant S_n \leqslant n+1$, le rayon de convergence de cette série est 1.

11.16 Pour $\alpha \equiv 0 \mod 2\pi$, $f(x) = \ln|1-x| = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $]-1,1[$, avec un rayon de convergence égal à 1.

De même, si $\alpha \equiv \pi \mod 2\pi$, $f(x) = \ln|1+x| = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $]-1,1[$, avec un rayon de convergence égal à 1.

Si α n'est congru ni à 0 ni à π modulo 2π, f est définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$, avec, pour tout x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x-\cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \frac{1}{2(x-e^{i\alpha})} + \frac{1}{2(x-e^{-i\alpha})} \\ &= \frac{e^{-i\alpha}}{2(xe^{-i\alpha}-1)} + \frac{e^{i\alpha}}{2(xe^{i\alpha}-1)} = -\operatorname{Re}\Big(\frac{e^{i\alpha}}{1-xe^{i\alpha}}\Big) \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = -\operatorname{Re}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{i(n+1)\alpha}\Big) = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n+1)\alpha.$$

On sait que le rayon de convergence de ce développement de fraction rationnelle est le plus petit module de pôle, donc est 1, et c'est celui du développement en série entière de f :

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos(n+1)\alpha = -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m} \cos m\alpha.$$

Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ on retrouve les développements précédents.

11.17 On vérifie immédiatement que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que $f(0) = 0$ et que :

$$f'(x) = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}e^{-x^2} = 2xf(x) + 1.$$

Si, sur un intervalle $]-R,R[$, cette équation différentielle admet une solution développable en série entière $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) - 2x\varphi(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} m a_m x^{m-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1}\big)x^n = 1. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, compte tenu de $\varphi(0) = 0$, on a :

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1$$

$$\forall n \geqslant 1 \quad (n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0$$

Cela définit une unique série entière, telle que $a_{2k} = 0$ pour tout k, $a_1 = 1$, et, pour $k \geqslant 1$, $a_{2k+1} = \dfrac{2}{2k+1} a_{2k-1}$, soit $a_{2k+1} = \dfrac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}$.

La règle de d'Alembert entraîne que le rayon de convergence est $+\infty$. Donc, pour tout x réel, la somme de la série entière :

$$x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} x^{2k+1}$$

vérifie l'équation différentielle avec la condition initiale ci-dessus. D'après le théorème de Cauchy sur les équations différentielles linéaires, il n'y a qu'une solution, donc :

$$f(x) = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} x^{2k+1}$$

sur tout $\mathbb{R}$.

11.18 Soit $x \in \,]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \, \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(1+t)^{n+1-\alpha}} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En posant le changement de variable $t = xu$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient l'expression :

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^n (1+xu)^{\alpha-1} \, \mathrm{d}u.$$

Notons $M(x) = \sup\limits_{u \in [0,1]} (1+ux)^{\alpha-1}$, qui est bien définie par un argument de continuité et de compacité. On déduit alors de l'égalité précédente, en passant au module, l'inégalité :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!} |x|^{n+1} M(x) I_n(x),$$

où :

$$I_n(x) = \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^n \mathrm{d}u.$$

Or, pour tout $u \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1-u}{1+xu} \leqslant 1.$$

Par conséquent :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}M(x).$$

De plus, si $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1)|}{(n+1)!}|x|^{n+2}}{\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1}\,|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

Par suite, la règle de d'Alembert assure que la série $\sum \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}$ converge pour $|x|<1$. Cela implique :

$$\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite, $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

11.19 1. Posons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n : x \mapsto \frac{\cos\left(n^2x\right)}{2^n}\cdot$$

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{n^{2k}}{2^n}\,\cos\left(n^2x + k\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Les fonctions $u_n^{(k)}$ sont donc bornées sur $\mathbb{R}$ et par croissances comparées :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_\infty\big(u_n^{(k)}\big) = \frac{n^{2k}}{2^n} = \mathrm{O}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\cdot$$

Par conséquent, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Par théorème, puisque les séries $\sum u_n^{(k)}$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$ et que la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{2p}}{2^n}\,\cos\left(n^2x + p\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Par suite la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Pour démontrer que f n'est pas développable en série entière, il suffit de montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est nulle.
Il vient de la question précédente que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad f^{(2p)}(0) = (-1)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{4p}}{2^n} \qquad \text{et} \qquad f^{(2p+1)}(0) = 0.$$

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\left|f^{(2p)}(0)\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{4p}}{2^n} \geqslant \frac{p^{4p}}{2^p}\cdot$$

En notant $b_p = \frac{p^{4p}}{(2p)!\,2^p}$, déterminons le rayon de convergence de la série $\sum b_p x^{2p}$. Pour tout $r > 0$, on a :

$$\frac{|b_{p+1}|\, r^{2p+2}}{b_p r^{2p}} = \frac{(p+1)^3}{2(2p+1)} \left(\frac{p+1}{p}\right)^{4p} \frac{r^2}{2} \geqslant \frac{(p+1)^3}{2(2p+1)} \frac{r^2}{2} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il vient par la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de la série $\sum b_p x^{2p}$ est nul. Par comparaison, le rayon de convergence de la série $\sum \frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} x^{2p}$ est nul. Par suite la fonction f n'est pas développable en série entière.

11.20 Soit $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à R. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < R - |z|$ (en convenant que $+\infty - |z| = +\infty$), on a $|z| + |h| < R$. Par conséquent, d'après le lemme d'Abel la série $\sum |a_n|\big(|z| + |h|\big)^n$ est convergente.
D'après le formule du binôme, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k}|h|^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} |a_n|\, |z|^{n-k}|h|^k\right), \qquad (*)$$

la dernière égalité étant une conséquence du fait que $\binom{n}{k}$ est nul lorsque $k > n$. Puisque la somme de gauche dans la relation $(*)$ est finie, on en déduit que la suite double $\left(|a_n|\, \binom{n}{k} |z|^{n-k}|h|^k\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
Par conséquent, la suite double $\left(a_n\, \binom{n}{k} z^{n-k}\, h^k\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Par suite :

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n\, z^{n-k} h^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n\, z^{n-k}\right) h^k.$$

On a ainsi démontré que $f_z : h \mapsto f(z+h)$ est développable en série entière.

11.21 Nous allons exploiter le fait qu'au voisinage de 0, on a $g(x) = \dfrac{1}{1 - f(x)} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} f^p(x)$.

- Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'au voisinage de 0 on ait $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$. On peut remarquer que $a_0 = f(0) = 0$.
- Notons $h : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n$. Puisque les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum |a_n| x^n$ ont même rayon de convergence, la fonction h est définie au voisinage de 0. Par continuité de h, puisque $|a_0| = 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in [-r, r]$, on ait $\big|h(x)\big| \leqslant 1/2$. Par ailleurs, pour $x \in [-r, r]$, on a, d'après l'inégalité triangulaire $\big|f(x)\big| \leqslant h\big(|x|\big) \leqslant 1/2$. Par conséquent :

$$\forall x \in [-r, r] \quad g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} f^p(x)$$

Fixons un tel r.

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par produit de Cauchy, les fonctions f^p et h^p sont développables en série entière sur $[-r, r]$. Notons :

$$\forall [-r, r] \quad f^p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(p)} x^n \qquad \text{et} \qquad h^p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^{(p)} x^n.$$

Démontrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n^{(p)}| \leqslant b_n^{(p)}.$$

Le résultat est immédiat si $p = 1$.
Si le résultat est vrai pour un certain $p \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|a_n^{(p+1)}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}^{(p)}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|\, |a_{n-k}^{(p)}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|\, b_{n-k}^{(p)} = b_n^{(p+1)}.$$

Le résultat s'en trouve démontré.

- Soit $x \in [-r, r]$. Puisque $|h(x)| \leqslant 1/2$, on a :

$$\frac{1}{1 - h(|x|)} = \sum_{p=0}^{+\infty} h^p\big(|x|\big) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^{(p)} |x|^n\right).$$

Puisque dans l'équation précédente le terme de gauche est fini, on déduit que la famille de réels positifs $\big(b_n^{(p)}|x|^n\big)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Du fait que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad \left|a_n^{(p)} x^n\right| \leqslant b_n^{(p)} |x|^n,$$

on déduit que la famille $\big(a_n^{(p)} x^n\big)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_n^{(p)}\right) x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(p)} x^n\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} f^p(x) = g(x).$$

Nous avons ainsi démontré que la fonction g est développable en série entière.

11.22 1. Pour tout $n \geqslant q$, on a : $\left(te^{2i\pi\frac{p}{q}}\right)^{n!} = t^{n!} e^{2i\pi\frac{n!\,p}{q}} = t^{n!}$, car $\frac{n!\,p}{q} \in \mathbb{N}$. Par conséquent, au voisinage de 1^- :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{q-1} \left(te^{2i\pi\frac{p}{q}}\right)^{n!} + \sum_{n=q}^{+\infty} t^{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n!} + \mathrm{O}(1).$$

La fonction $g : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{n!}$ est définie sur $[0, 1[$ car, sur cet intervalle, on a $0 \leqslant t^{n!} \leqslant t^n$. La fonction g est évidemment croissante. D'après le théorème de la limite monotone, g a une limite L dans $\overline{\mathbb{R}}$. Par ailleurs, par croissance et positivité du terme général :

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0, 1[\quad \sum_{k=0}^{n} t^{k!} \leqslant f(t) \leqslant L.$$

En faisant tendre t vers 1 dans cette inégalité, à n fixé, on obtient l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n+1 \leqslant L.$$

Par conséquent, $L = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{t \to 1^-} \left| f\left(te^{2i\pi \frac{p}{q}}\right) \right| = +\infty$.

2. Soit $z_0 = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$, et supposons que f ait un prolongement continue $\widetilde{f}$ sur $\mathcal{D} = D_O(0,1) \cup \{e^{i\theta}\}$. En particulier, $\widetilde{f}$ est bornée au voisinage de z_0. Soit $r > 0$ tel que $\widetilde{f}$ soit bornée sur $\mathcal{D} \cap D_O(z_0, r)$.
   - Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et par continuité de la fonction $t \mapsto e^{it}$, il existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $\left| e^{i2\pi \frac{p}{q}} - e^{i\theta} \right| < \frac{r}{2}$. Fixons un tel $\frac{p}{q}$.
   - Pour tout $t \in \left[1 - \frac{r}{2}, 1\right[$, on a :

$$\begin{aligned} \left| te^{i2\pi \frac{p}{q}} - e^{i\theta} \right| &= \left| (t-1)e^{i2\pi \frac{p}{q}} + \left(e^{i2\pi \frac{p}{q}} - e^{i\theta} \right) \right| \\ &\leqslant |t-1| + \left| e^{i2\pi \frac{p}{q}} - e^{i\theta} \right| < r. \end{aligned}$$

   Ainsi, $te^{i2\pi \frac{p}{q}} \in \mathcal{D} \cap D_O(z_0, r)$ pour $|t-1| < r/2$, mais $\lim\limits_{t \to 1^-} \left| f\left(te^{2i\pi \frac{p}{q}}\right) \right| = +\infty$, contredisant le fait que $\widetilde{f}$ soit bornée sur $\mathcal{D} \cap D_O(z_0, r)$. Par suite, f n'admet aucun prolongement continue en un point de la frontière du disque ouvert de convergence.

11.23 1. Pour tout $z \in \mathcal{D}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| \leqslant n|a_n|.$$

Ainsi, puisque la série $\sum n a_n$ est absolument convergente, par comparaison, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. La fonction f est bien définie sur $\mathcal{D}$.

2. Soit $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}^2$, avec $z_1 \neq z_2$, tel que $f(z_1) = f(z_2)$. On a donc :

$$0 = f(z_1) - f(z_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z_1^n - z_2^n). \qquad (*)$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2) \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-k-1} \right)$$

et puisque $z_1 \neq z_2$, la relation $(*)$ donne :

$$0 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-k-1} \right).$$

Par conséquent :

$$|a_1| = \left|\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-k-1}\right)\right| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \left|\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-k-1}\right|$$
$$\leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{n-1} |z_1|^k |z_2|^{n-k-1}\right) \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n. \qquad (**)$$

Démontrons que cette dernière inégalité est stricte. Supposons avoir l'égalité dans l'inégalité $(**)$. Puisque $a_1 \neq 0$, il existe $p \geqslant 2$ tel que $a_p \neq 0$. Pour un tel entier p, on aura :

$$\left|\sum_{k=0}^{p-1} z_1^k z_2^{p-k-1}\right| = \sum_{k=0}^{p-1} |z_1|^k |z_2|^{p-k-1} = p.$$

Puisque $|z_1| \leqslant 1$ et $|z_2| \leqslant 1$, la seconde inégalité donne : $|z_1| = |z_2| = 1$. La première inégalité donne que les $z_1^k z_2^{p-k-1}$ sont $\mathbb{R}_+$-colinéaires. Puisqu'ils sont non nuls, il existe donc un réel positif t tel que :

$$z_1^{p-1} z_2 = t z_1^p,$$

c'est-à-dire tel que $z_2 = t z_1$. Puisque t est positif et que z_1 et z_2 sont de module 1, il vient que $t = 1$, *i.e.* $z_1 = z_2$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ainsi :

$$|a_1| < \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| n,$$

ce qui là encore est contradictoire. Par suite il n'existe pas de $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}^2$ vérifiant $z_1 \neq z_2$ et $f(z_1) = f(z_2)$. La fonction f est injective.

11.24 1. Puisque la suite a est convergente, elle est bornée et donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $|a_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant n_0$. Fixons un tel n_0. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1[$, on a :

$$\left|(1-x)f(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-x) x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (1-x) x^n$$
$$\leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \varepsilon (1-x) x^n$$
$$= (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + x^{n_0} \varepsilon \leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \varepsilon. \qquad (*)$$

Par ailleurs, on a :

$$(1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0,$$

par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\eta, 1[$ on ait :

$$0 \leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n \leqslant \varepsilon. \qquad (**)$$

Fixons un tel η. Alors, pour tout $x \in [1-\eta, 1[$, en combinant les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$0 \leqslant \big|(1-x) f(x)\big| \leqslant 2\varepsilon.$$

Ainsi, par définition, $(1-x)f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$. En d'autres termes, on a au voisinage de 1^- :

$$f(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot$$

2. En appliquant la question précédente à la suite $(a_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$, qui tend vers 0, il vient qu'au voisinage de 1^- :

$$f(x) - \frac{\alpha}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - \alpha)\, x^n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

c'est-à-dire $f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \dfrac{\alpha}{1-x}\cdot$

11.25 1. Remarquons que puisque la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs positives, la restriction de g à $[0,1[$ est croissante. Il s'ensuit que g a une limite ℓ en 1, finie ou infinie. Par ailleurs, toujours du fait que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs positives, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$:

$$\sum_{n=0}^{N} b_k x^k \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} b_k x^k = g(x).$$

En faisant tendre x vers 1 dans cette inégalité, il vient que :

$$\sum_{n=0}^{N} b_k \leqslant \ell.$$

Comme la série à terme positif $\sum b_n$ est divergente, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} b_k \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par suite, $\ell = +\infty$.

2. Fixons un $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que $|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon\, b_n$, pour tout $n \geqslant n_0$. Fixons un tel n_0.

Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}\bigl|f(x)-g(x)\bigr| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n-b_n)x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n-b_n|\,x^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n|\,x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty}\varepsilon\, b_n\, x^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n|\,x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon\, b_n\, x^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n| + \varepsilon\, g(x). \qquad (*)\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $g(x) \underset{x\to+1^-}{\longrightarrow} +\infty$, on a au voisinage de 1 :

$$\sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n| = \mathrm{o}\bigl(g(x)\bigr).$$

Par conséquent, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in[1-\eta,1[$ on ait :

$$\sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n-b_n| \leqslant \varepsilon\, g(x). \qquad (**)$$

Ainsi, pour tout $x\in[1-\eta,1[$, en combinant les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\bigl|f(x)-g(x)\bigr| \leqslant 2\varepsilon g(x),$$

c'est-à-dire, par définition, $f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} g(x)$.

11.26 1. On suppose que la série $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence $R>0$ et de somme $f(x)$ sur $]-R,R[$. Pour tout x vérifiant $|x|<R$, on a par produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}xf(x)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}c_kc_{n-k}\right)x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}c_{n+1}x^{n+1} \\ &= f(x)-1.\end{aligned}$$

On en déduit $4x^2f(x)^2-4xf(x)+4x=0$ et :

$$\bigl(2xf(x)-1\bigr)^2 = 1-4x.$$

Puisque $2xf(x)-1$ est par continuité strictement négatif au voisinage de 0, il existe α de $]0,R[$ tel que, pour tout $x\in\,]-\alpha,\alpha[$, on ait $2xf(x)-1=-\sqrt{1-4x}$ et donc :

$$f(x) = \frac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right),$$

(on considère en 0 les prolongements par continuité).

2. En utilisant le développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$ de rayon de convergence $1/4$, on voit que la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right)$$

se développe sur $]-1/4, 1/4[$ en :

$$g(x) = \frac{-1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1/2)\cdots(1/2-n+1)}{n!}(-1)^n(4x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$$

avec $d_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

On a $d_0 = 1$. Comme $g(x)$ vérifie $xg(x)^2 = g(x)-1$, il vient :

$$\forall x \in \left]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right[\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}\right)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1}x^{n+1}$$

et, par unicité des coefficients $d_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$ pour tout n. On en déduit par récurrence $c_n = d_n$ pour tout n.