Chapitre 4 : Espaces vectoriels normés

Espaces vectoriels normés

4

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels réels ou complexes.

I Généralités

1 Définition

Définition 1

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on appelle **norme sur E** tout application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- **homogénéité :** $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$;
- **inégalité triangulaire :** $\forall(x, y) \in E^2 \quad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$;
- **séparation :** $\forall x \in E \quad (N(x) = 0) \Longrightarrow (x = 0)$.

Définition 2

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

Notations

- On note (E, N) l'espace vectoriel E muni de la norme N. Lorsqu'il n'y a pas risque d'ambiguïté quant à la norme utilisée, on peut ne pas la préciser et se contenter de noter E.
- Il est souvent d'usage de noter $\|\cdot\|$ la norme utilisée, et donc $\|x\|$ la norme d'un vecteur x.

Remarque Si N est une norme, alors la propriété d'homogénéité implique que $N(0) = 0$.

Exemples

1. L'application $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$ (où $|x|$ désigne la valeur absolue de x si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module de x si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
2. Les applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \max\big(|x|,|y|\big) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & |x|+|y| \end{array}$$

   sont des normes sur $\mathbb{K}^2$, appelées respectivement **norme infinie** et **norme un**, et notées $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.

p.220

Exercice 1 Soit E un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. Montrer que l'application :

$$x \mapsto \sqrt{(\,x \mid x\,)}$$

est une norme sur E.

Remarque Avec les notations de l'exercice 1, la norme définie par :

$$\|x\| = \sqrt{(\,x \mid x\,)}$$

est appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.

Exemples De l'exercice 1, on déduit que les espaces préhilbertiens réels suivants sont naturellement munis d'une structure d'espace vectoriel normé :

1. l'espace $\mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire :

$$\big(\,(x_1,y_1) \bigm| (x_2,y_2)\,\big) = x_1x_2 + y_1y_2,$$

   dont la norme associée est donnée par $\big\|(x,y)\big\| = \sqrt{x^2+y^2}$;
2. plus généralement, l'espace $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique :

$$\big(\,(x_1,\dots,x_n) \bigm| (y_1\dots,y_n)\,\big) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

   dont la norme associée est donnée par $\big\|(x_1,\dots,x_n)\big\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$;
3. l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a < b$) des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(\,f \mid g\,) = \displaystyle\int_a^b fg$, dont la norme associée est donnée par $\|f\| = \sqrt{\displaystyle\int_a^b f^2}$.

Terminologie Dans chacun des trois exemples précédents, la norme euclidienne considérée est appelée **norme deux** (*cf.* section I.6 page 196).

Dans toute la suite de ce chapitre, et sauf mention du contraire, $(E,\|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Vecteur unitaire

Définition 3

On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** si $\|x\| = 1$.

p.220

Exercice 2 On suppose dans cet exercice que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un unique vecteur unitaire colinéaire à x et de même sens que lui.

Terminologie Étant donné x un vecteur non nul de E, le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ est appelé **vecteur unitaire associé à $\boldsymbol{x}$**.

p.220

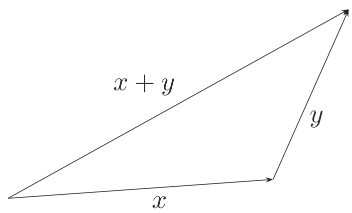
Exercice 3 Donner une condition nécessaire et suffisante sur E pour qu'il existe dans E des vecteurs unitaires.

2 Inégalités triangulaires

Nous avons défini l'inégalité triangulaire (propriété vérifiée par toute norme d'après la définition 1 de la page 188) de la manière suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Cette inégalité s'interprète en disant que dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.



De manière plus complète, nous regroupons sous le nom *inégalités triangulaires* les inégalités du résultat suivant :

Proposition 1 (Inégalités triangulaires)

Soit x et y des éléments de E. Alors on a :

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Principe de démonstration. Constater qu'il s'agit essentiellement de montrer que :

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Démonstration page 220

Terminologie L'inégalité $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x \pm y\|$ est parfois appelée *seconde inégalité triangulaire.*

p.221

Exercice 4 *Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire ?*

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la *norme un* définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big\|(x,y)\big\|_1 = |x| + |y|.$$

On considère les vecteurs $u_1 = (1,0)$ et $u_2 = (0,1)$.
Bien que les vecteurs u_1 et u_2 ne soient pas colinéaires, que donne l'inégalité triangulaire appliquée avec ces vecteurs ?

Attention

- Contrairement à l'intuition géométrique, et comme le montre l'exercice précédent, dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, on ne peut, *a priori*, rien en déduire.
- En revanche, si la norme considérée est *euclidienne*, c'est-à-dire si elle est associée à un produit scalaire, alors le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire est celui où les deux vecteurs sont positivement colinéaires.

p.221

Exercice 5 *Démonstration de l'affirmation précédente.*

Rappeler pourquoi si $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne, et si x et y sont deux vecteurs, alors on a $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si, et seulement si, x et y sont positivement colinéaires.

Inégalité triangulaire généralisée La propriété d'homogénéité de la norme combinée à l'inégalité triangulaire permet, par récurrence, de montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires, alors on a :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|x_k\|.$$

Dorénavant, nous utiliserons librement ce résultat.

3 Distance associée à une norme

Définition 4

On appelle **distance associée à la norme** $\|\cdot\|$ l'application :

$$\begin{array}{rccl} d \; : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \longmapsto & \|y - x\|. \end{array}$$

Remarques

- Avec les notations précédentes, on a $\forall x \in E \quad \|x\| = d(0,x)$.
  Autrement dit, la norme d'un vecteur x est sa distance au vecteur nul.

- Il est parfois plus naturel, lorsqu'on considère des distances entre des éléments de E, d'utiliser des notations *affines* plutôt que *vectorielles*, c'est-à-dire de voir les éléments de E comme des *points* plutôt que comme des *vecteurs*. Ainsi, avec les notations de la définition 4 de la page précédente, la distance entre deux points M et N est donnée par $d(M,N) = \|\overrightarrow{MN}\|$. L'exercice 6 utilise de telles notations.

p.221 **Exercice 6** Montrer que la distance d associée à la norme $\|\cdot\|$ vérifie les propriétés suivantes :

- **séparation :** $\forall (M,N) \in E^2 \quad d(M,N) = 0 \Longleftrightarrow M = N$;
- **symétrie :** $\forall (M,N) \in E^2 \quad d(M,N) = d(N,M)$;
- **inégalité triangulaire :** $\forall (M,N,P) \in E^3 \quad d(M,P) \leqslant d(M,N) + d(N,P)$;
- **invariance par translation :** $\forall (M,N,u) \in E^3 \quad d(M+u, N+u) = d(M,N)$.

Les propriétés de l'exercice ci-dessus seront désormais utilisées librement.

Formulation des inégalités triangulaires en terme de distance

Donnons la traduction en terme de distance de la proposition 1 de la page 190 :

Proposition 2

Si M, N et P désignent trois points de E, alors on a :

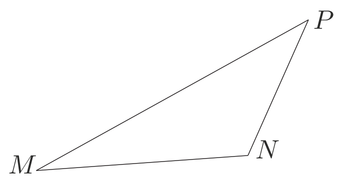
$$\left|d(M,N) - d(N,P)\right| \leqslant d(M,P) \leqslant d(M,N) + d(N,P).$$

De manière moins formelle, l'inégalité

$$d(M,P) \leqslant d(M,N) + d(N,P)$$

signifie que, dans un espace vectoriel normé, les propriétés « géométriquement intuitives » suivantes sont vraies :

- dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres ;
- *un* plus court chemin entre deux points est la ligne droite.



Attention Bien comprendre la raison du choix de l'article indéfini *un* dans la phrase « *un* plus court chemin entre deux points » : la ligne droite est *un* plus court chemin entre deux points, mais ce n'est pas nécessairement le seul (*cf.* exercice 4).

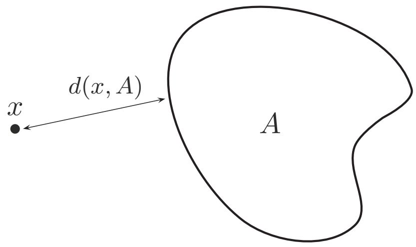
Dans la suite, et sauf mention du contraire, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et d désigne la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Distance à une partie

Définition 5

Étant donné une partie A non vide de E ainsi que x un élément de E, on appelle **distance de x à A**, et on note $d(x, A)$, la quantité :

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) \, ; \; a \in A\}.$$



Remarques Avec les notations de la définition précédente :

1. le caractère non vide de A implique que $\{d(x, a) \, ; \; a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$, ce qui assure d'une part l'existence de sa borne inférieure $d(x, A)$, et d'autre part que $d(x, A) \geqslant 0$;
2. par définition de la distance d, on a aussi :

$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\| \, ; \; a \in A\}.$$

Proposition 3

Soit A une partie non vide de E, et x et y deux éléments de E. On a :

$$\big|d(x, A) - d(y, A)\big| \leqslant d(x, y).$$

Principe de démonstration. Commencer par démontrer l'inégalité $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$, puis utiliser la symétrie en x et y. Démonstration page 222

264
Remarque Nous verrons qu'une autre formulation possible du résultat précédent est : l'application $\begin{array}{ccc} (E, \|\cdot\|) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne.

Attention

- Si x appartient à A, alors il est clair qu'on a $d(x, A) = 0$.
- En revanche, la réciproque est fausse. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, on a $d(0, \mathbb{R}_+^*) = 0$ et pourtant $0 \notin \mathbb{R}_+^*$. Cela prouve au passage qu'il n'existe pas toujours d'élément $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$.
- Lorsqu'un tel élément existe, on dit que la distance de x à A est **atteinte**.

p.222

Exercice 7 Dans $\mathbb{R}^2$, soit x le point $(-1, 1)$ et A la droite d'équation $y = 2x$. Pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, déterminer la distance de x à A.

Remarque L'exercice précédent, montre, comme on pouvait s'y attendre, que la distance d'un point à une partie dépend de la norme utilisée.

4 Boule ouverte, boule fermée

Définition 6

Soit a un élément de E et r un réel strictement positif.

- On appelle **boule ouverte de centre a et de rayon r**, et l'on note $B(a,r)$, la partie :
$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}.$$
- On appelle **boule fermée de centre a et de rayon r**, et l'on note $B_f(a,r)$, la partie :
$$B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) \leqslant r\}.$$
- On appelle **sphère de centre a et de rayon r**, et l'on note $S(a,r)$, la partie :
$$S(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) = r\}.$$

Remarque On constate facilement que $S(a,r) = B_f(a,r) \setminus B(a,r)$.

p.222

Exercice 8 Dessiner les boules unités de $\mathbb{R}^2$ pour les normes infinie, un et deux.

Remarque L'exercice précédente montre que les boules dépendent de la norme considérée sur E : une partie de E peut être une boule pour une norme et ne pas l'être pour une autre. L'exercice suivant met en évidence la dépendance de la forme des boules vis-à-vis de la norme utilisée.

Notation Lorsque l'on travaille dans un espace euclidien de dimension 2, il peut être plus intuitif de parler de *disque* plutôt que de *boule*. On utilise alors respectivement les notations $D(a,r)$ et $D_f(a,r)$ au lieu de $B(a,r)$ et $B_f(a,r)$.

Proposition 4

Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe de E.

Démonstration page 222

p.223

Exercice 9 Soit B une boule de centre a et de rayon $r > 0$, et x un élément de E. Exprimer, en fonction de a, r et x, la distance de x à B.

5 Partie bornée, application bornée

Partie bornée

Définition 7

Une partie A de E est dite **bornée** s'il existe un réel positif R tel que :

$$\forall a \in A \quad \|a\| \leqslant R.$$

Dire qu'une partie est bornée signifie donc qu'il existe une boule fermée centrée en l'origine qui la contient.

p.223

Exercice 10 Montrer que si une partie A est contenue dans une boule quelconque (non nécessairement centrée en l'origine et non nécessairement fermée), alors A est bornée.

p.224

Exercice 11 Montrer que si A est une partie non vide et bornée, alors l'ensemble :

$$\left\{d(x,y)\,;\ (x,y) \in A^2\right\}$$

possède une borne supérieure.

Remarque Si A est une partie bornée, alors la quantité

$$\sup\left\{d(x,y)\,;\ (x,y) \in A^2\right\},$$

dont l'exercice précédent justifie l'existence, est appelée **diamètre de A**.

p.224

Exercice 12 *Diamètre d'une boule*

Supposons que E ne soit pas l'espace nul. Déterminer, en fonction de son rayon r, le diamètre d'une boule B (ouverte ou fermée).

Application bornée, suite bornée

Définition 8

On dit qu'une application f d'un ensemble X dans E est **bornée** si $f(X)$ est une partie bornée de E, autrement dit s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in X \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

Remarques

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E n'étant rien d'autre qu'une application de $\mathbb{N}$ dans E, alors d'après la définition précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| \leqslant M.$$

- Il est facile de vérifier que l'ensemble des application bornées de X dans E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(X,E)$ des fonctions de X dans E.

Remarque Il est clair, d'après la définition, que la notion de partie bornée (et donc de fonction ou suite bornée), dépend de la norme utilisée. Nous verrons :

- qu'il est possible qu'une partie soit bornée pour une norme mais ne le soit pas pour une autre (*cf.* exemple 2, page 216) ;

218

- que, néanmoins, des normes équivalentes définissent les mêmes parties bornées (*cf.* proposition 27 de la page 218).

6 Exemples d'espaces vectoriels normés

L'espace $\mathbb{K}^n$

Si x désigne un vecteur de $\mathbb{K}^n$, alors on note $(x_1,\dots,x_n)$ ses composantes. L'espace $\mathbb{K}^n$ peut être muni de structures d'espaces vectoriels normés à l'aide de différentes normes, dont les trois normes classiques suivantes :

- la **norme infinie**, définie par :

$$\|x\|_\infty = \max\left(|x_1|,\dots,|x_n|\right)\ ;$$

- la **norme un**, définie par :

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|\ ;$$

- la **norme deux**, ou **norme euclidienne**, définie par :

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Proposition 5

Les trois applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_\infty \end{array}\ ,\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_2 \end{array}$$

sont des normes. Chacune d'entre elles munit donc $\mathbb{K}^n$ d'une structure d'espace vectoriel normé.

Démonstration page 224

Attention

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, alors on a $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$, mais si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, la présence des modules est indispensable pour que la définition de $\|x\|_2$ ait un sens.

Approfondissement : norme p Pour $p \geqslant 1$, il arrive parfois de munir $\mathbb{K}^n$ de la norme suivante, appelée **norme p**, définie ainsi :

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Pour plus de détails, voir l'exercice 4.7 de la page 242.

Généralisation à tout espace vectoriel muni d'une base

Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (u_i)_{i\in I}$, alors on dispose sur E des trois normes classiques suivantes, appelées respectivement **norme infinie**, **norme un** et **norme deux** dans la base $\mathcal{B}$:

$$\|x\|_\infty = \max\left\{|x_i| \,;\, i \in I\right\} \ ; \quad \|x\|_1 = \sum_{i\in I} |x_i| \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I} |x_i|^2}.$$

où, étant donné x un élément de E, la famille $(x_i)_{i\in I}$ désigne la famille des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque Les définitions ci-dessus des normes un, deux et infinie sont licites, car, par définition, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est composantes de x dans la base $\mathcal{B}$ est à *support fini* (c'est-à-dire ne comporte qu'un nombre fini des termes non nuls).

p.226

Exercice 13 En reprenant les notations ci-dessus, justifier que les applications :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_\infty \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|_2 \end{array}$$

sont bien des normes.

Espace des fonctions bornées

L'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées d'un ensemble X non vide à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans $\mathbb{K}$.

Définition 9

Pour $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, on appelle **norme infinie** de f, et on note $\mathcal{N}_\infty(f)$, la quantité :

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Cette définition exige quelques justifications qui sont l'objet de l'exercice suivant.

p.227

Exercice 14

1. Pour $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, justifier l'existence de $\mathcal{N}_\infty(f)$.
2. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(X, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_\infty(f) \end{array}$ est une norme.

La norme $\mathcal{N}_\infty$ munit donc l'espace $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ d'une structure d'espace vectoriel normé. Cela s'applique en particulier à l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{N},E)$ des suites bornées à valeurs dans E. Pour $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$, on a :

$$\mathcal{N}_\infty(u)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|.$$

Espace des fonctions continues sur un segment

Soit a et b deux réels tels que $a<b$. On note $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues du segment $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On sait que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$, et même de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$.
Outre la norme $\mathcal{N}_\infty$, on dispose sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ des deux normes classiques suivantes :

- la **norme un**, définie par $\mathcal{N}_1(f)=\displaystyle\int_a^b |f|$;

p.228 **Exercice 15** Montrer que l'application $\begin{array}{ccc}\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_1(f)\end{array}$ est une norme.

- la **norme deux**, définie par $\mathcal{N}_2(f)=\sqrt{\displaystyle\int_a^b |f|^2}$.

  * si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, alors la norme deux n'est rien d'autre que la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel défini par $(f\mid g)=\displaystyle\int_a^b fg$;
  * en revanche, le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ est un peu plus compliqué car l'argument précédent en s'applique plus.

p.228 **Exercice 16** Montrer que l'application $\begin{array}{ccc}\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_2(f)\end{array}$ est une norme.

p.228 **Exercice 17** Peut-on généraliser $\mathcal{N}_\infty$, $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ à l'espace $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ des fonction continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$?

Approfondissement : norme p Pour $p\geqslant 1$, on munit parfois l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ de la norme suivante, appelée **norme p**, définie ainsi :

$$\mathcal{N}_p(f)=\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}.$$

Pour plus de détail, voir l'exercice 4.8 de la page 243.

Espace des polynômes

Sur $\mathbb{K}[X]$, on dispose des normes suivantes :

- celles qui sont définies à partir de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients d'un polynôme $P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, dont on sait qu'elle est presque nulle (*i.e.* nulle à partir d'un certain rang) :

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}, \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \ ;$$

- celles définies à l'aide de la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$; dans ce qui suit, a et b désignent deux réels vérifiant $a < b$:

$$\mathcal{N}_1(P) = \int_a^b |P(t)|\mathrm{d}t, \quad \mathcal{N}_2(P) = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2 \mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\infty(P) = \max_{t\in[a,b]} |P(t)|.$$

  Dans ce cas, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire proviennent du fait que $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ définissent des normes sur $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. Pour la séparation, on utilise de plus le fait qu'un polynôme dont la fonction polynomiale associée est nulle sur $[a,b]$ admet une infinité de racines, donc est nul.

p.229 **Exercice 18** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_{n+1})$ une $(n+1)$-liste de scalaires deux à deux distincts. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$ par :

$$\|P\| = \max\big\{|P(a_1)|,\dots,|P(a_{n+1})|\big\}.$$

7 Obtention de nouveaux espaces vectoriels normés

Norme induite

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la norme $\|\cdot\|$ dont on dispose sur E induit naturellement une structure d'espace vectoriel normé sur F, par sa restriction à F :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|. \end{array}$$

Cettte restriction est appelée **norme induite** sur F par la norme $\|\cdot\|$.

Exemples

1. La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ est la norme induite par le module sur $\mathbb{C}$.
2. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Il est clair que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$, dont on a vu que la norme infinie le munissait d'une structure d'espace vectoriel normé. La norme induite associée :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_\infty(f) \end{array}$$

   constitue alors, en plus des normes un et deux, une autre norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Utilisation d'une application linéaire injective

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si l'on dispose d'une norme $\|\cdot\|$ sur E, et si u est une application linéaire injective de F dans E, alors l'application :

$$\begin{array}{rccl} N : & F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \|u(x)\| \end{array}$$

est une norme sur F. En effet :

- si $x \in F$ vérifie $N(x) = 0$, c'est-à-dire $\|u(x)\| = 0$, alors la propriété de séparation de $\|\cdot\|$ implique $u(x) = 0$, *i.e.*, comme u est injective, $x = 0$;
- pour $(x, \lambda) \in F \times \mathbb{K}$, on a :
$$N(\lambda\, x) = \|u(\lambda\, x)\| = \|\lambda\, u(x)\| = |\lambda|\, \|u(x)\| = |\lambda|\, N(x)\ ;$$
- pour $(x, y) \in F^2$, on a :
$$N(x+y) = \|u(x+y)\| = \|u(x)+u(y)\| \leqslant \|u(x)\| + \|u(y)\| = N(x)+N(y).$$

Exemples

1. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la norme induite sur F par celle de E n'est rien d'autre que l'application $\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|u(x)\| \end{array}$, où u est l'injection canonique de F dans E.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Notons $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.
Si $\omega : [a, b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue et à valeurs strictement positives, alors l'application :
$$\begin{array}{rccl} N : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b \omega(x)\, |f(x)|\, \mathrm{d}x \end{array}$$
est une norme sur E. En effet, on a :
$$\forall f \in E \quad N(f) = \mathcal{N}_1\big(u(f)\big),$$
où u est l'application linéaire injective suivante :
$$\begin{array}{rccl} u : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \omega\, f. \end{array}$$

p.229 **Exercice 19** Soit $E = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'espace des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} N : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{|u_n|}{2^n}\right) \end{array}$$

est une norme sur E.

Produit fini d'espaces vectoriels normés

Proposition 6

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ ainsi que p espaces vectoriels normés $(E_1, \varphi_1), \dots, (E_p, \varphi_p)$ sur $\mathbb{K}$. Alors l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \max\left(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_p(x_p)\right) \end{array}$$

est une norme, et munit donc l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ d'une structure d'espace vectoriel normé. Cette norme est appelée **norme produit**.

Démonstration page 229

Exemple La norme infinie sur $\mathbb{K}^n$ est la norme produit obtenue en considérant, sur $\mathbb{K}$, la norme $x \mapsto |x|$.

Remarque En plus de la norme produit présentée dans la proposition précédente, d'autres normes peuvent être construites sur un espace produit, comme le montre l'exercice suivant.

p.230

Exercice 20 *Norme un et norme deux dans un espace produit*

Avec les notations de la proposition 6, montrer que les applications N_1 et N_2 respectivement définies par :

$$\begin{array}{rcl} E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k)^2} \end{array}$$

sont des normes sur l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$.

II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

On rappelle qu'une suite a à valeurs dans un espace vectoriel normé E est une application de $\mathbb{N}$ dans E. Une telle suite est souvent notée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, voire plus simplement (a_n).
L'élément a_n, quant à lui, est appelé **terme général** de la suite a.

1 Suite convergente

Définition 10

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers ℓ de E si la suite réelle $\left(\|a_n - \ell\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers ℓ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|a_n - \ell\| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore, en terme de distance :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow d(a_n, \ell) \leqslant \varepsilon.$$

Notation Pour signifier qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, on écrit $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou plus simplement $a_n \to \ell$.

Proposition 7 (Unicité de la limite)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E ainsi que ℓ_1 et ℓ_2 appartenant à E. Si $a_n \to \ell_1$ et $a_n \to \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant à la fois vers ℓ_1 et ℓ_2.
L'inégalité triangulaire donne :

$$0 \leqslant \|\ell_2 - \ell_1\| \leqslant \underbrace{\|a_n - \ell_1\|}_{\to 0} + \underbrace{\|a_n - \ell_2\|}_{\to 0}.$$

En passant à la limite, on obtient $\|\ell_2 - \ell_1\| = 0$, c'est-à-dire $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition 11

- Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente** s'il existe un élément ℓ de E tel que $a_n \to \ell$. Cet élément ℓ est alors appelé **limite** de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On le note $\lim a_n$.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Notation Pour dire qu'une suite est convergente (respectivement divergente), on dit parfois simplement qu'elle converge (respectivement diverge).

Attention La convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé dépend par définition de la norme avec laquelle on travaille. Une suite peut en effet converger pour une norme et diverger pour une autre.
En cas d'ambiguïté, il est donc important de préciser la norme utilisée.

p.231

Exercice 21 Dans l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = x^n$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge, au sens de la norme un, vers la fonction nulle.
2. Montrons par l'absurde que la suite (f_n) n'est pas convergente au sens de la norme infinie : supposons que (f_n) converge, et notons f sa limite.
   (a) Déterminer, en fonction de $x \in [0,1]$, la valeur de $f(x)$.
   (b) Expliquer pourquoi on aboutit à une contradiction.

Remarque Nous verrons cependant que deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes (*cf.* proposition 28 de la page 218).

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Proposition 8 (Combinaison linéaire de deux suites convergentes)

Si deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2, et si λ et μ sont deux scalaires, alors la suite de terme général $\lambda a_n + \mu b_n$ converge vers $\lambda\ell_1 + \mu\ell_2$.

Démonstration. Cela découle de l'inégalité triangulaire et de l'homogénéité de la norme :

$$\begin{aligned}\big\|(\lambda a_n + \mu b_n) - (\lambda\ell_1 + \mu\ell_2)\big\| &= \big\|\lambda(a_n - \ell_1) + \mu(b_n - \ell_2)\big\| \\ &\leqslant |\lambda| \underbrace{\|a_n - \ell_1\|}_{\to 0} + |\mu| \underbrace{\|b_n - \ell_2\|}_{\to 0}.\end{aligned}$$ □

Remarques

- Par récurrence, on généralise le résultat précédent à une combinaison linéaire quelconque de suites : si l'on dispose de p suites, de termes généraux respectifs $a_n^{(1)},\dots,a_n^{(p)}$, convergeant respectivement vers $\ell_1,\dots,\ell_p$, et si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont des scalaires, alors la suite de terme général $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k a_n^{(k)}$ converge vers $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \ell_k$.
- La proposition 8 nous indique que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$ des suites à valeurs dans E.

Proposition 9

Si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite réelle de terme général $\|a_n\|$ converge vers $\|\ell\|$.

Démonstration. Cela découle de la seconde inégalité triangulaire :

$$0 \leqslant \big|\|a_n\| - \|\ell\|\big| \leqslant \underbrace{\|a_n - \ell\|}_{\to 0}.$$ □

Corollaire 10

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. D'après la proposition précédente, la suite *réelle* $(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente, donc bornée. D'où le résultat. □

2 Suite à valeurs dans un espace produit

Soit $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_p, \|\cdot\|_p)$ des espaces vectoriels normés. On rappelle (*cf.* proposition 6 de la page 201) que l'espace $E_1 \times \cdots \times E_p$ est muni d'une structure d'espace vectoriel normé grâce à la norme produit définie par :

$$\|(x_1, \ldots, x_p)\| = \max\left(\|x_1\|_1, \ldots, \|x_p\|_p\right).$$

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on considère $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E_k, et l'on s'intéresse à la convergence, au sens de la norme produit, de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ de terme général :

$$a_n = \left(a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(p)}\right).$$

La proposition suivante énonce que la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ revient à celle de chacune des suites $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 11

La suite de terme général $\left(a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(p)}\right)$ converge si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite de terme général $a_n^{(k)}$ converge.
De plus, en notant alors ℓ_k la limite de la suite $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'élément $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Démonstration.

- Supposons que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et notons ℓ_k sa limite. En notant alors $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$, alors la relation suivante, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\left\|a_n - \ell\right\| &= \max\left(\left\|a_n^{(1)} - \ell_1\right\|_1, \ldots, \left\|a_n^{(p)} - \ell_p\right\|_p\right)\\ &\leqslant \underbrace{\left\|a_n^{(1)} - \ell_1\right\|_1}_{\to 0} + \cdots + \underbrace{\left\|a_n^{(p)} - \ell_p\right\|_p}_{\to 0}\end{aligned}$$
prouve la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.
- Réciproquement, si la suite de terme général a_n converge vers un élément $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ de $E_1 \times \cdots \times E_p$, alors l'inégalité $\|a_n^{(k)} - \ell_k\|_k \leqslant \|a_n - \ell\|$, valable pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, assure la convergence de chaque suite $\left(a_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ_k. □

Exemple Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}^p$ converge au sens de la norme infinie si, et seulement si, chacune des suites composantes converge. L'étude de la convergence d'une telle suite revient donc à l'étude de p suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

3 Suite extraite, valeur d'adhérence

Comme dans le cas des suites réelles ou complexes, on appelle **suite extraite** ou **sous-suite** d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 12

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.

Démonstration. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers ℓ, et si $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en est une sous-suite, alors la suite réelle de terme général $\|a_{\varphi(n)}-\ell\|$ tend vers 0 car c'est une sous-suite de la suite réelle $\left(\|a_n-\ell\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0. □

Définition 12

On appelle **valeur d'adhérence** d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout élément de E qui est limite d'une sous-suite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque D'après la proposition 12, une suite convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence.

Point méthode

Pour montrer qu'une suite est divergente, on peut utiliser la contraposée de la remarque précédente : il suffit de montrer que la suite considérée possède au moins deux valeurs d'adhérence.

Exemple La suite réelle de terme général $(-1)^n$ est divergente, car elle possède 1 et -1 comme valeurs d'adhérence.

p.231 **Exercice 22** On considère la suite de terme général $a_n = n\big(1+(-1)^n\big)$.

1. Montrer que 0 est la seule valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Attention Comme le montre l'exercice précédent, ce n'est pas parce qu'une suite ne possède qu'une seule valeur d'adhérence qu'elle converge !
On verra néanmoins au théorème 1 de la page 291 un cas particulier important où le résultat est vrai.

Proposition 13 (Caractérisation des valeurs d'adhérence)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans E et x un élément de E. Alors x est valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \forall n_0\in\mathbb{N} \quad \exists n\geqslant n_0 \quad \|a_n-x\|\leqslant\varepsilon.$$

Démonstration page 231

p.232

Exercice 23 Montrer que tout élément du segment $[-1,1]$ est valeur d'adhérence de la suite a de terme général $a_n = \sin\sqrt{n}$.
Indication : pour $x \in [-1,1]$, *on a* $x = \sin\sqrt{t_k}$ *avec* $t_k = (2k\pi + \operatorname{Arcsin} x)^2$.

4 Relations de comparaison

On étend ici les notations o et O déjà vues en première année pour des suites à valeurs réelles ou complexes.

Définition 13

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans des espaces vectoriels normés.

1. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée** par $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n\| \leqslant C\,\|b_n\| \ ;$$
on note alors $a = \mathrm{O}(b)$ ou $a_n = \mathrm{O}(b_n)$.
2. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|a_n\| \leqslant \varepsilon\,\|b_n\| \ ;$$
on note alors $a = \mathrm{o}(b)$ ou $a_n = \mathrm{o}(b_n)$.

Grâce à ces définitions, on se ramène donc aux mêmes notions pour les suites réelles $(\|a_n\|)$ et $(\|b_n\|)$. On peut donc appliquer les propriétés des relations de comparaisons sur de telles suites.

III Topologie d'un espace vectoriel normé

1 Parties ouvertes

Définition 14

Soit U une partie de E. On dit que U est un **ouvert de E**, ou une **partie ouverte de** E, si l'une des deux assertions équivalentes suivantes est vraie :

(i) pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x,r) \subset U$;

(ii) pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule fermée $B_f(x,r) \subset U$.

L'équivalence entre les deux assertions de la définition ci-dessus est évidente :

- si $B(x,r) \subset U$, alors $B_f\Big(x, \dfrac{r}{2}\Big) \subset U$;
- si $B_f(x,r) \subset U$, alors $B(x,r) \subset U$.

Remarque Il est clair, d'après la définition, que E et $\varnothing$ sont des parties ouvertes de E.

Proposition 14

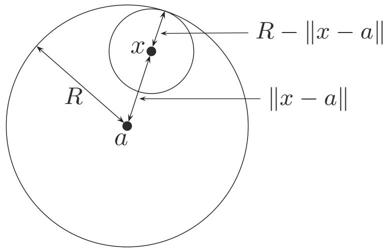
Toute boule ouverte est une partie ouverte de E.

Principe de démonstration.

Démonstration page 232

Pour x appartenant à une boule de centre a de rayon R, considérer la boule ouverte de centre x et de rayon :

$$R - \|x - a\|.$$



Remarque Le dessin fait lors de la démonstration précédente correspond à une norme euclidienne, mais nous a permis de trouver une démonstration valable pour toute norme. Cette représentation des boules n'induit en général pas de fausse intuition lors de considérations topologiques, c'est pourquoi on l'utilise couramment. [1]

p.232

Exercice 24 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. L'intervalle ouvert $]a, b[$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue) ?
2. L'intervalle ouvert $]a, b[$ est-il un ouvert de $\mathbb{C}$ (muni du module) ?

Remarque Plus généralement, tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme $]-\infty, b[$, $]a, b[$ ou $]a, +\infty[$, est un ouvert de $\mathbb{R}$, mais pas de $\mathbb{C}$.

Attention Comme l'illustre l'exercice précédent, le caractère ouvert ou non d'un ensemble n'est pas une notion intrinsèque à cet ensemble, mais dépend de l'espace dans lequel on le considère.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors une partie ouverte dans F n'est en général pas une partie ouverte de E.

Proposition 15

- La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert de E.
- L'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert de E.

Démonstration page 233

Remarque En particulier, une réunion quelconque de boules ouvertes est un ouvert de E. En fait, la réciproque de ceci est vraie (*cf.* exercice suivant).

1. Concrètement, le risque majeur de cette vision euclidienne concerne le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (*cf.* le « attention » de la page 191).

p.233 **Exercice 25** Montrer que toute partie ouverte de E peut s'écrire comme une réunion de boules ouvertes.

Attention Avant d'affirmer qu'une intersection d'ouverts est un ouvert, il faut bien vérifier le caractère *fini* de cette intersection. En effet, une intersection quelconque de parties ouvertes n'est en général pas ouverte, comme l'illustre l'exercice suivant.

p.233 **Exercice 26** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Montrer que, bien que chacun des U_n soit un ouvert de $\mathbb{R}$, leur intersection ne l'est pas.

2 Parties fermées

Définition 15

On dit qu'une partie de E est un **fermé de E**, ou une **partie fermée de E**, si son complémentaire est ouvert.

Remarque D'après la définition, il est clair que E et $\varnothing$ sont des parties fermées de E, puisque leurs complémentaires sont des ouverts de E.

p.233 **Exercice 27** Montrer que tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tout intervalle de la forme $]-\infty, b]$, $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$, est un fermé de $\mathbb{R}$.

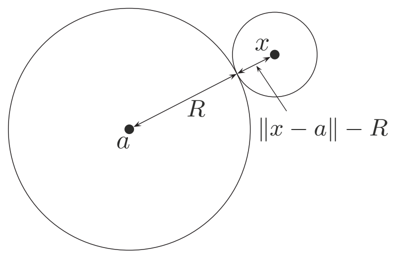
Attention Il ne faut pas croire, par jeu de mots, qu'une partie qui n'est pas ouverte est nécessairement fermée. En effet, dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$, il existe des parties ni ouvertes ni fermées.
C'est le cas, par exemple, de l'intervalle $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 16

Toute boule fermée est une partie fermée de E.

Principe de démonstration. Démonstration page 233

On montre que le complémentaire de toute boule fermée est un ouvert.
Pour x n'appartenant pas à la boule fermée de centre a et de rayon R, considérer, comme y incite le dessin, la boule ouverte centrée en x et de rayon $\|x - a\| - R$.



Exemples

1. Tout singleton est un fermé de E.
2. Tout segment de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En effet, si $a < b$, alors le segment $[a, b]$ n'est rien d'autre que la boule fermée de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\dfrac{b-a}{2}$.

Proposition 17

- L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.
- La réunion d'une famille finie de fermés est un fermé.

Démonstration. En considérant les complémentaires, ce résultat découle de la proposition 15 de la page 207. En effet, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés, alors on a :

$$E \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (E \setminus A_i) \quad \text{et} \quad E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (E \setminus A_i). \qquad \square$$

Attention Avant d'affirmer qu'une réunion de fermés est fermée, il faut bien vérifier le caractère *fini* de cette réunion. En effet, une réunion quelconque de fermés n'est en général pas fermée, comme l'illustre l'exercice suivant.

p.234

Exercice 28 On se place dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n = \left[\dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$.
Déterminer l'ensemble $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Cet ensemble A est-il fermé ?

Remarque Plus généralement, toute partie A peut-être obtenue comme une réunion de fermé : il suffit d'écrire $A = \bigcup_{a\in A} \{a\}$.

p.234

Exercice 29 Montrer, en l'obtenant comme une intersection de fermés, que toute sphère est une partie fermée.

p.234

Exercice 30 *Distance à un fermé*

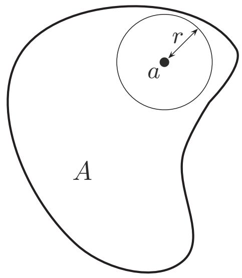
Soit F une partie fermée de E, et x un point de E n'appartenant pas à F.
Montrer que la distance de x à F est strictement positive.

3 Voisinage d'un point

Définition 16

Étant donné A une partie de E et $a \in E$, on dit que A est un **voisinage de a** s'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans A.

Remarque De manière évidente, pour que A soit un voisinage de a, il est nécessaire que a appartienne à A.



Dire que A est un voisinage de a signifie qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in E \quad \|x - a\| < r \Longrightarrow x \in A,$$

autrement dit, être suffisamment proche du point a assure d'être dans A.

Remarque On peut, sans en changer le sens, remplacer « boule ouverte » par « boule fermée » dans la définition 16.

p.234 **Exercice 31** Montrer qu'un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

p.234 **Exercice 32** Montrer qu'une partie A de E est un voisinage d'un point a si, et seulement s'il existe un ouvert contenant a et inclus dans A.

Opérations sur les voisinages

Proposition 18

Soit x un élément de E.

- Une intersection finie de voisinages de x est encore un voisinage de x.
- Si A est un voisinage de x, alors toute partie de E contenant A est également un voisinage de x.

Démonstration page 234

Remarque Le deuxième point de la proposition précédente permet d'affirmer qu'une réunion quelconque de voisinages de x en est encore un.

4 Point intérieur, intérieur d'une partie

Définition 17

- On dit qu'un point x est **intérieur** à une partie A de E si A est un voisinage de x, *i.e.* s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.
- L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur de A** ; on le note $\mathring{A}$ ou $\mathrm{Int}(A)$.

Remarques

1. On a vu que, pour que A soit un voisinage d'un point x, il est nécessaire que x appartienne à A. On en déduit que $\mathring{A} \subset A$.
2. Un ouvert étant un voisinage de chacun de ses points, il est clair qu'un ouvert est son propre intérieur.

3. La proposition 18 de la page précédente donne les résultats suivants :
   - si x est intérieur à un nombre fini de parties de E, alors x est intérieur à leur intersection ;
   - si A et B sont deux parties vérifiant $A \subset B$, alors on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

Attention La réciproque du dernier point évoqué est fausse : on peut trouver deux parties A et B vérifiant $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ sans pour autant avoir $A \subset B$.
On peut même trouver deux ensembles qui ne sont pas égaux mais qui ont même intérieur. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, si $A = [0,1]$ et $B = [0,1[$, alors on a $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} =]0,1[$, et pourtant $A \neq B$.

Proposition 19

L'intérieur d'une partie A est le plus grand ouvert qui soit inclus dans A.

Démonstration page 235

p.235 **Exercice 33** Montrer que l'intérieur d'une partie A est la réunion de tous les ouverts inclus dans A.

p.235 **Exercice 34** Montrer qu'une partie A est ouverte si, et seulement si, $\overset{\circ}{A} = A$.

5 Point adhérent, adhérence d'une partie

Définition 18

- On dit qu'un point x est **adhérent** à une partie A de E si pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.
- L'ensemble des points adhérents à A est appelé **adhérence** de A ; on le note $\overline{A}$ ou $\text{Adh}(A)$.

Remarque

1. Il est clair que si $x \in A$, alors x est adhérent à A, puisque toute boule ouverte centrée en x contient x et donc rencontre A (c'est-à-dire a une intersection non vide avec lui). On a donc $A \subset \text{Adh}(A)$.
2. Dire qu'un point x n'appartient pas à l'adhérence de A signifie qu'on peut trouver $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \varnothing$ (ou encore $B(x,r) \subset E \setminus A$), ce qui signifie que x appartient à l'intérieur de $E \setminus A$. On a donc la relation :
$$E \setminus (\text{Adh}\, A) = \text{Int}(E \setminus A),$$
ce qui mène également aux deux relations suivantes :
$$\text{Adh}\, A = E \setminus \text{Int}(E \setminus A) \qquad \text{et} \qquad \text{Int} A = E \setminus \text{Adh}(E \setminus A).$$

3. Comme l'intérieur d'une partie est toujours un ouvert, la relation ci-dessus nous assure que l'adhérence d'une partie est toujours un fermé.

p.235

Exercice 35 Soit A une partie non vide de E et $x \in E$. Montrer que :

$$x \in \text{Adh}(A) \iff d(x, A) = 0.$$

Proposition 20

L'adhérence d'une partie A est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration page 235

p.235

Exercice 36 Montrer que l'adhérence d'une partie A est l'intersection de tous les fermés contenant A.

p.236

Exercice 37 Montrer qu'une partie A est un fermé si, et seulement si, $A = \overline{A}$.

Caractérisation séquentielle des points adhérents

Le résultat suivant donne une caractérisation très importante des points adhérents à une partie A.

Proposition 21 (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Un point x est adhérent à une partie A si, et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Démonstration page 236

Ce résultat peut aussi s'énoncé ainsi : l'adhérence d'une partie A est l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans A.

p.236

Exercice 38 Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est aussi un sous-espace vectoriel.

p.236

Exercice 39 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note A_p l'ensemble $\{u_n\,;\ n \geqslant p\}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}.$$

Remarque L'exercice précédent assure que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé, car il s'écrit comme une intersection de fermés.

Caractérisation séquentielle des parties fermées

Une partie étant un fermé si, et seulement si, elle est égale à sa propre adhérence (*cf.* exercice 37), on déduit de la caractérisation séquentielle des points adhérents le résultat suivant :

Proposition 22 (Caractérisation séquentielle des parties fermées)

Une partie A est un fermé si, et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartient à A.

Démonstration.

- Supposons que A soit une partie fermée. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de A. Notons $\ell = \lim u_n$, et montrons que $\ell \in A$.
  D'après la caractérisation séquentielle des points adhérents, on a $\ell \in \overline{A}$. Or, A étant une partie fermée, on a $\overline{A} = A$, et donc $\ell \in A$.
- Réciproquement, supposons que la limite de toute suite convergente d'éléments de A appartienne à A, et montrons que A est fermée. Pour cela, montrons que $A = \overline{A}$, ce qui revient à montrer que $\overline{A} \subset A$ (l'autre inclusion étant évidente).
  Soit $x \in \overline{A}$. Pour montrer que $x \in A$, il suffit de prouver l'existence d'une suite à valeurs dans A qui converge vers x. Cela est immédiat par caractérisation séquentielle des points adhérents. □

6 Densité

Définition 19

Soit A une partie de E. Une partie D de A est dite **dense** dans A si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) l'adhérence de D contient A ;

(ii) pour tout $a \in A$ et pour tout $r > 0$, il existe $x \in D$ tel que $\|x-a\| \leqslant r$;

(iii) pour tout $a \in A$, il existe une suite d'éléments de D qui converge vers a.

Remarque Dans la définition précédente, les propriétés (ii) et (iii) ne sont que des reformulations de la propriété $A \subset \overline{D}$.

Exemples

1. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. L'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ au sens de la norme infinie. C'est une reformulation du théorème d'approximation par des fonctions en escalier vu en première année.
4. Nous verrons (*cf.* le théorème 28 de la page 519) que l'ensemble des fonctions polynomiales est également dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ au sens de la norme $\mathcal{N}_\infty$.

7 Frontière

Définition 20

Soit A une partie de E. On appelle **frontière de A**, et on note $\mathrm{Fr}(A)$, l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Dire qu'un point x appartient à la frontière de A signifie donc que $x \in \overline{A}$ et $x \notin \overset{\circ}{A}$, c'est-à-dire que pour tout $r > 0$ on a :

$$B(x,r) \cap A \neq \varnothing \quad \text{et} \quad B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \varnothing.$$

Exemple Si B désigne une boule de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$, alors $\mathrm{Fr}(B)$ est la sphère de mêmes centre et rayon.

p.236

Exercice 40 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Quelle est la frontière d'un intervalle dont les bornes sont a et b ?

p.237

Exercice 41 Soit A une partie de E. Montrer que :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}.$$

Remarque Du résultat de l'exercice précédent il résulte que :

- la frontière de A est une partie fermée (car elle est l'intersection de deux parties fermées) ;
- A et $E \setminus A$ ont même frontière.

Proposition 23

Pour toute partie A de E, les trois parties :

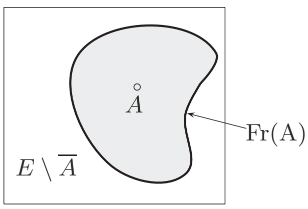
$$\overset{\circ}{A}, \quad \mathrm{Fr}(A) \quad \text{et} \quad E \setminus \overline{A}$$

forment une partition de E, c'est-à-dire qu'elles sont deux à deux disjointes et que leur réunion est E.

Démonstration.

Sachant que $\overset{\circ}{A} \subset \overline{A}$, la relation $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ assure que $\overset{\circ}{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ forment une partition de $\overline{A}$.

Les trois ensembles $\overset{\circ}{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ et $E \setminus \overline{A}$ forment donc une partition de E.



□

8 Ouvert relatif, fermé relatif, voisinage relatif

Définition 21

Soit A une partie de E.

- Une partie U de A est un **ouvert relatif** de A s'il existe un ouvert $\widetilde{U}$ de E tel que $U = \widetilde{U} \cap A$.
- Une partie F de A est un **fermé relatif** de A s'il existe un fermé $\widetilde{F}$ de E tel que $F = \widetilde{F} \cap A$.
- Soit a un point de A. Une partie V de A est un **voisinage relatif** de A du point a s'il existe un voisinage $\widetilde{V}$ de a dans E tel que $V = \widetilde{V} \cap A$.

On constate facilement que si A est égal à E, alors ces notions coïncident avec les notions déjà vues d'ouvert, fermé et voisinage. En revanche, ce n'est pas le cas si A est quelconque, comme l'illustrent les exercices suivants.

p.237 **Exercice 42** On travaille dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'intervalle $[0,1[$, bien qu'il ne soit pas ouvert dans $\mathbb{R}$, est un ouvert relatif de $[0,1]$.

p.237 **Exercice 43** On se place dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'intervalle $]0,1]$, bien qu'il ne soit pas fermé dans $\mathbb{R}$, est un fermé relatif de $]0,2]$.

p.237 **Exercice 44** Montrer que toute partie A de E est à la fois un ouvert relatif de A et un fermé relatif de A.

p.237 **Exercice 45** On travaille dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'intervalle $[0,2]$, bien qu'il ne soit pas un voisinage du point 1, en est un voisinage relatif de $\mathbb{R}$.

p.237 **Exercice 46** Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Soit G une partie de A. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) G est un ouvert relatif de A ;

(ii) pour tout $x \in G$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A \subset G$.

p.238 **Exercice 47** *Caractérisation séquentielle des fermés relatifs*

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Soit G une partie de A. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) G est un fermé relatif de A ;

(ii) pour tout suite (x_n) d'éléments de G convergeant vers un élément $\ell \in A$, alors on a $\ell \in G$.

IV Comparaison de normes

Il est fréquent de rencontrer plusieurs normes sur un même espace vectoriel. Une question apparaît alors : si une propriété (comme la convergence d'une suite ou le caractère borné, ouvert ou fermé d'une partie) est vraie pour une norme, l'est-elle également pour les autres ?

La réponse est négative dans le cas général, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemples

1. Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie ainsi :
$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = x^n.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\mathcal{N}_\infty(f_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_1(f_n) = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\cdot$$
Il en résulte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la fonction nulle pour la norme un, mais pas pour la norme infinie.
2. En reprenant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ précédente, et en notant $g_n = (n+1)f_n$, on constate que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée pour la norme un (tous ses éléments sont unitaires), mais pas pour la norme infinie.

Cependant, nous allons voir ici que sous des conditions supplémentaires, certaines propriétés sont conservées lors du passage d'une norme à une autre.

1 Domination de normes

Définition 22

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est **dominée** par N_2 s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$, ou encore :
$$\forall x \in E \quad N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x).$$

Terminologie Pour signifier que N_1 est dominée par N_2, on dit aussi que N_2 est **plus fine** que N_1.

Remarque La propriété $N_1 \leqslant \alpha N_2$ s'interprète ainsi : la boule unité pour la norme N_2 est incluse dans la boule de centre 0 et de rayon α pour la norme N_1.

Le résultat suivant assure que pour étudier le caractère dominé de la norme N_1 par la norme N_2, on peut se contenter de considérer des éléments $x \in E$ tels que $N_2(x) = 1$.

Proposition 24

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. La norme N_1 est dominée par la norme N_2 si, et seulement s'il existe un réel α strictement positif tel que :

$$\forall x \in E \quad N_2(x) = 1 \Longrightarrow N_1(x) \leqslant \alpha.$$

Démonstration page 238

p.238 **Exercice 48** La relation de domination des normes est-elle une relation d'ordre ?

p.239 **Exercice 49** Dans l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ (avec $a < b$), montrer que les normes un et deux sont toutes les deux dominées par la norme infinie.

Proposition 25

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E telles que N_1 soit dominée par N_2.

Si une partie de E est bornée pour la norme N_2, alors elle l'est également pour la norme N_1.

Démonstration page 239

Remarque Avec les notations de la proposition précédente, si une application f à valeurs dans E (et donc en particulier une suite d'éléments de E) est bornée pour la norme N_2, alors elle l'est également pour la norme N_1.

Proposition 26

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E telles que N_1 soit dominée par N_2.

Si une suite converge vers un élément ℓ de E pour la norme N_2, alors elle converge également vers ℓ pour la norme N_1.

Démonstration page 239

Remarque Étant donné deux normes N_1 et N_2, pour montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2, il suffit, d'après la proposition précédente, d'exhiber une suite qui converge pour la norme N_2 mais pas pour la norme N_1.

Point méthode

Dans la pratique, pour montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2 on cherche souvent une suite qui, au choix, tend vers 0 pour N_2 mais pas pour N_1, ou bien est bornée pour N_2 mais qui ne l'est pas pour N_1.

p.239 **Exercice 50** On travaille dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = x^n$, montrer que la norme infinie n'est pas dominée par la norme un.

2 Normes équivalentes

Définition 23

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que :

$$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$

p.239

Exercice 51 Montrer que deux normes sont équivalentes si, et seulement si, chacune est dominée par l'autre

p.240

Exercice 52

Montrer que l'équivalence des normes est une relation d'équivalence.

p.240

Exercice 53 *Équivalence des normes un, deux et infini dans* $\mathbb{K}^n$

Montrer que pour pour $x \in \mathbb{K}^n$ on a :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty.$$

Que peut-on en déduire ?

Beaucoup de propriétés sont conservées lorsqu'on passe d'une norme à une autre qui lui est équivalente.

Donnons trois résultats, dont les deux premiers sont des conséquences immédiates de l'exercice 51 et des propositions 25 et 26.

Proposition 27 (Conservation du caractère borné d'une partie)

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E. Une partie est bornée pour la norme N_1 si, et seulement si, elle l'est pour la norme N_2.

Remarque Ce résultat s'applique en particulier aux applications bornées et aux suites bornées.

Proposition 28 (Conservation du caractère convergent d'une suite)

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E. Une suite converge vers un élément ℓ de E pour la norme N_1 si, et seulement si, elle converge vers ℓ pour la norme N_2.

Proposition 29 (Conservation des ouverts et des fermés)

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E, et A une partie de E. Alors :

- la partie A est ouverte pour N_1 si, et seulement si, elle l'est pour N_2 ;
- la partie A est fermée pour N_1 si, et seulement si, elle l'est pour N_2.

Démonstration page 240

Point méthode

Les résultats précédents nous assurent que, pour étudier la convergence d'une suite ou encore le caractère borné, ouvert ou fermé d'une partie (et donc, par extension, tout résultat reposant sur ces notions), et si l'on dispose de plusieurs normes équivalentes, alors on pourra choisir celle que l'on préfère. En particulier, dans $\mathbb{K}^n$, on se demandera régulièrement laquelle des trois normes classiques est la plus adaptée à la situation.

Comparaison de normes

Comparer deux normes est le fait de déterminer si l'une des deux est dominée par l'autre, ou si les deux sont équivalentes.

p.240 **Exercice 54** Soit a, b et c trois réels vérifiant $a < b < c$. Dans $\mathbb{R}[X]$, comparer les deux normes N_1 et N_2 définies par :

$$N_1(P) = \int_a^b |P(t)|\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \int_a^c |P(t)|\mathrm{d}t$$

Indication : on pourra considérer $P_n = (n+1)\left(\frac{X-a}{c-a}\right)^n$.

Équivalence des normes en dimension finie

299 **Remarque** Il sera vu (*cf.* le théorème 15 de la page 299) que dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1
Pour alléger l'écriture, notons $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ (même si cette notation est abusive car nous n'avons pas encore démontré qu'il s'agit d'une norme).

- L'homogénéité et la séparation sont faciles à vérifier :
  - en effet, si $x \in E$ vérifie $\|x\| = 0$, alors on a $(x \mid x) = 0$, ce qui, comme un produit scalaire est *défini positif*, entraîne que x est nul ;
  - pour $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, le bilinéarité du produit scalaire donne :
$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \mid x)} = |\lambda| \sqrt{(x \mid x)} = |\lambda| \times \|x\|.$$
- Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in E^2$. On a :
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y \mid x+y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y) && \text{(bilinéarité et symétrie)} \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| && \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \end{aligned}$$
  On obtient donc l'inégalité $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ souhaitée.

Exercice 2 Par homogénéité de la norme, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$. Ainsi, le vecteur λx est unitaire si, et seulement si, $|\lambda| \times \|x\| = 1$, c'est-à-dire $\lambda = \pm \dfrac{1}{\|x\|}\cdot$

Il existe donc deux vecteurs unitaires colinéaires à x qui sont $\dfrac{x}{\|x\|}$ de même sens que x et $-\dfrac{x}{\|x\|}$ qui lui est de sens opposé à x.

Exercice 3 D'après la remarque précédente, il existe des vecteurs unitaires dans E dès que E contient au moins un vecteur non nul, c'est-à-dire dès que E n'est pas l'espace nul. En revanche, si E est l'espace nul, alors E ne contient pas de vecteur unitaire puisqu'alors le seul vecteur qu'il contient est de norme nulle.

Proposition 1

- Commençons par montrer que :
$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \tag{1}$$
  ce qui se reformule ainsi :
$$\|x\| \leqslant \|x+y\| + \|y\| \qquad \text{et} \qquad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$
  Ces deux inégalités résultent de l'inégalité triangulaire de la définition 1 de la page 188 appliquée d'abord aux vecteurs $x+y$ et $-y$ et ensuite aux vecteurs x et y.
- L'encadrement (1) étant valable pour tous x et y, on peut échanger leurs rôles :
$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y+x\| \leqslant \|y\| + \|x\|. \tag{2}$$
  Les encadrements (1) et (2) donnent alors :
$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{3}$$

- Il reste, pour conclure, à montrer que :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Ceci résulte de l'encadrement (3) appliqué aux vecteurs x et $-y$.

Exercice 4 On a $u_1 + u_2 = (1, 1)$, donc $\|u_1 + u_2\|_1 = 2$. Comme $\|u_1\|_1 = \|u_2\|_1 = 1$, les vecteurs u_1 et u_2 vérifient le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, bien qu'il ne soient pas colinéaires.

Exercice 5 Notons $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire considéré. Soit x et y deux vecteurs.

- D'une part, en écrivant $\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y)$ et grâce aux propriétés du produit scalaire (bilinéarité et symétrie), on obtient $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$.
- D'autre part, on a $\big(\|x\| + \|y\|\big)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\|$.

On obtient :

$$\begin{aligned} \|x + y\| = \|x\| + \|y\| &\iff (x \mid y) = \|x\| \times \|y\| \\ &\iff (x \mid y)^2 = \|x\|^2 \times \|y\|^2 \quad \text{et} \quad (x \mid y) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat souhaité car deux vecteurs vérifient le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz si, et seulement s'il sont colinéaires, et leur produit scalaire est alors positif si, et seulement s'il sont de même sens.

Exercice 6

- **Séparation.** C'est évident, car pour $(M, N) \in E^2$, on a $d(M, N) = 0$ si, et seulement si, $\|\overrightarrow{MN}\| = 0$, ce qui, par propriété de séparation de la norme, revient à dire que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $M = N$.
- **Symétrie.** C'est une conséquence de l'homogénéité de la norme.
  En effet, pour $(M, N) \in E^2$, on a :

$$d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\| = \|-\overrightarrow{NM}\| = \|\overrightarrow{NM}\| = d(N, M).$$

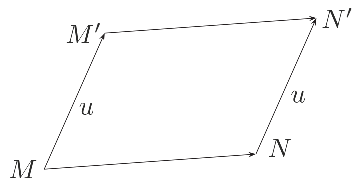
- **Inégalité triangulaire.** Pour $(M, N, P) \in E^3$, on a :

$$\begin{aligned} d(M, P) = \|\overrightarrow{MP}\| &= \|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}\| \\ &\leqslant \|\overrightarrow{MN}\| + \|\overrightarrow{NP}\| \qquad \text{(inégalité triangulaire sur } \|\cdot\|) \\ &= d(M, N) + d(N, P). \end{aligned}$$

- **Invariance par translation.**
  Pour $(M, N, u) \in E^3$, si l'on note :

$$M' = M + u \quad \text{et} \quad N' = N + u,$$

alors les vecteur $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont égaux.



Proposition 3 Soit $a \in A$. On a, par définition de $d(x,A)$ et par inégalité triangulaire :

$$d(x,A) \leqslant d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,a).$$

Il en résulte que $d(x,A) - d(x,y) \leqslant d(y,a)$. Cette inégalité étant vraie pour tout $a \in A$, on en déduit que $d(x,A) - d(x,y)$ minore l'ensemble $\{d(y,a)\,;\ a \in A\}$, et donc que :

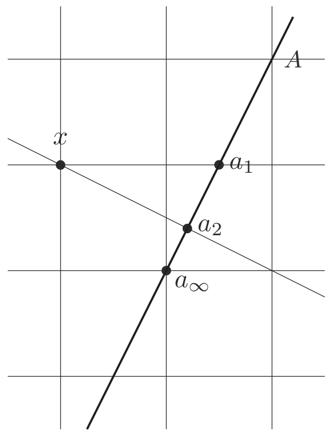
$$d(x,A) - d(x,y) \leqslant d(y,A).$$

Cela donne $d(x,A) - d(y,A) \leqslant d(x,y)$. Un argument de symétrie du problème en x et y permet alors d'obtenir le résultat souhaité.

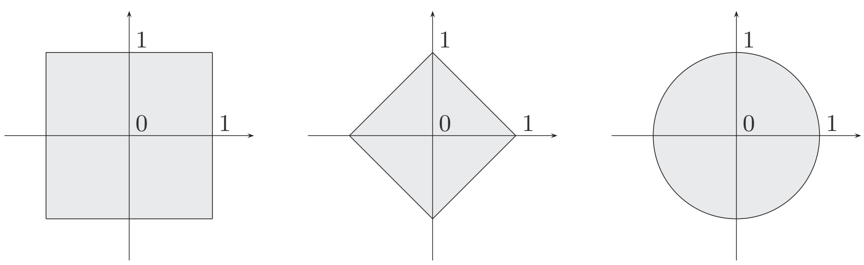
Exercice 7

Dans chaque cas, on obtient que la distance de x à A est atteinte en un unique point :

- le point $a_\infty = (0,0)$ est le point de A le plus proche de x au sens de la norme infinie, et :
$$d_\infty(x,A) = \|x - a_\infty\|_\infty = 1\ ;$$
- le point $a_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ est le point de A le plus proche de x au sens de la norme deux (c'est le projeté orthogonal du point x sur la droite A), et :
$$d_2(x,A) = \|x - a_2\|_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5}\ ;$$
- le point $a_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ est le point de A le plus proche de x au sens de la norme un, et :
$$d_1(x,A) = \|x - a_1\|_1 = \frac{3}{2}.$$



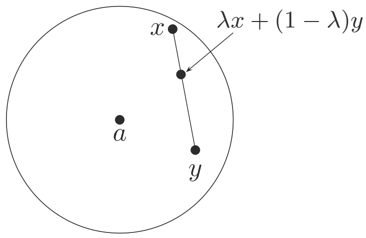
Exercice 8



pour la norme infinie pour la norme un pour la norme deux

Proposition 4

Soit B une boule (ouverte ou fermée). Donnons-nous x en y deux éléments de B et $\lambda \in [0,1]$, et montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$. Pour cela, il suffit de montrer qu'en notant a le centre de B, on a :



$\left\|\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)-a\right\| \leqslant \max\big(\|x-a\|, \|y-a\|\big).$

Cela s'obtient en écrivant :

$$\begin{aligned}
\left\|\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) - a\right\| &= \left\|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)\right\| \\
&\leqslant \left\|\lambda(x-a)\right\| + \left\|(1_\lambda)(y-a)\right\| && \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \lambda\|x-a\| + (1-\lambda)\|y-a\| && \text{(homogénéité)} \\
&\leqslant \max\big(\|x-a\|, \|y-a\|\big).
\end{aligned}$$

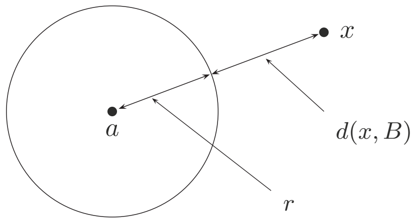
Exercice 9

Il est clair que si $x \in B$, alors $d(x,B) = 0$.

Supposons que $x \notin B$ et montrons que :

$$d(x,B) = d(x,a) - r.$$

Si l'on note A l'ensemble $\{d(x,y)\,;\ y \in B\}$, cela revient à montrer que $\inf A = d(x,a) - r$.



- La seconde inégalité triangulaire donne :

$$\forall y \in B \quad d(x,a) - d(a,y) \leqslant d(x,y).$$

Comme $\forall y \in B \quad d(y,a) \leqslant r$, on obtient :

$$\forall y \in B \quad d(x,a) - r \leqslant d(x,y).$$

Donc $d(x,a) - r$ est un minorant de A.

- Notons $u = \dfrac{x-a}{\|x-a\|}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $y_n = a + \Big(r - \dfrac{1}{n}\Big)u$.

Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

  - $*$ d'une part, $d(a,y_n) = r - \dfrac{1}{n} < r$, donc $y_n \in B$;
  - $*$ d'autre part :

$$d(x,y_n) = \left\|x - a - \Big(r - \frac{1}{n}\Big)u\right\| = \left\|\Big(d(x,a) - r + \frac{1}{n}\Big)u\right\|$$

et donc, puisque u est unitaire :

$$d(x,y_n) = d(x,a) - r + \frac{1}{n} \to d(x,a) - r.$$

Par caractérisation de la borne supérieure, cela montre que $\sup A = d(x,a) - r$.

Exercice 10 Soit A une partie contenue dans une boule B de centre a et de rayon r. Que le boule B soit fermée ou ouverte, on a toujours $B \subset B_f(a,r)$, et donc $A \subset B_f(a,r)$. Alors, par l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in A \quad \|x\| \leqslant \|a\| + \|x-a\| \leqslant \|a\| + r,$$

donc A est bornée.

Exercice 11 Notons Γ l'ensemble $\big\{d(x,y)\,;\;(x,y) \in A^2\big\}$.

- Le caractère non vide de A assure que Γ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- Montrons que Γ est majorée.
  Soit $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall a \in A \quad \|a\| \leqslant R$ (un tel R existe car A est bornée).
  Alors Γ est majorée par $2R$, car on a :
  $$\forall (x,y) \in A^2 \quad d(x,y) = \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2R.$$

Donc Γ possède une borne supérieure car c'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.

Exercice 12 Notons a le centre de B, et Γ l'ensemble $\{d(x,y)\,;\;(x,y) \in B^2\}$.

- L'inégalité triangulaire assure que l'ensemble Γ est majoré par $2r$. En effet, si x et y deux éléments de B, alors on a :
  $$d(x,y) \leqslant d(x,a) + d(y,a) \leqslant r + r = 2r.$$
- D'autre part, soit u est un vecteur unitaire de E (un tel vecteur existe car E n'est pas l'espace nul). Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, les éléments :
  $$x_n = a + r(1-2^{-n})u \quad \text{et} \quad y_n = a - r(1-2^{-n})u$$
  appartiennent à B et vérifient :
  $$d(x_n,y_n) = 2r(1-2^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2r.$$

Cela montre, par caractérisation de la borne supérieure, que $\sup(\Gamma) = 2r$, c'est-à-dire que B a pour diamètre $2r$.

Proposition 5

- **Norme infinie.**
  - $*$ *Séparation.* Si $x \in \mathbb{K}^n$ vérifie $\|x\|_\infty = 0$, alors on a $\max\limits_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k| = 0$, et donc :
    $$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad x_k = 0,$$
    c'est-à-dire que x est le vecteur nul.
  - $*$ *Homogénéité.* Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
    $$\begin{aligned}\|\lambda x\|_\infty &= \max\big\{|\lambda\, x_k|\,;\;k \in [\![1,n]\!]\big\}\\ &= \max\big\{|\lambda|\;|x_k|\,;\;k \in [\![1,n]\!]\big\}\\ &= |\lambda|\;\max\big\{|x_k|\,;\;k \in [\![1,n]\!]\big\} = |\lambda|\;\|x\|_\infty.\end{aligned}$$
  - $*$ *Inégalité triangulaire.* Pour $(x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on a :
    $$\|x+y\|_\infty = \max\big\{|x_k+y_k|\,;\;k \in [\![1,n]\!]\big\}.$$
    Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a :
    $$|x_k+y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$
    il en résulte que $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ majore l'ensemble $\{|x_k+y_k|\,;\;k \in [\![1,n]\!]\}$, et donc que $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

- **Norme un.**
  - $*$ *Séparation.* Si $x \in \mathbb{K}^n$ vérifie $\|x\|_1 = 0$, alors on a $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| = 0$, et donc :
  $$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad x_k = 0,$$
  c'est-à-dire que x est le vecteur nul.
  - $*$ *Homogénéité.* Pour $x \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
  $$\|\lambda\, x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda\, x_k| = \sum_{k=1}^{n} \big(|\lambda|\ |x_k|\big) = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda|\ \|x\|_1.$$
  - $*$ *Inégalité triangulaire.* Pour $(x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, on a :
  $$\|x+y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(|x_k| + |y_k|\big) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$
- **Norme deux.**
  - $*$ *Cas* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\|_2 = \sqrt{\varphi(x,x)}$, où φ est l'application :
  $$\begin{array}{rccl} \varphi : & (\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\, y_k. \end{array}$$
  L'application φ est un produit scalaire, donc l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est une norme car c'est la euclidienne associée au produit scalaire φ.
  - $*$ *Cas* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. L'argument précédent ne s'applique pas.
    - $\star$ *Séparation.* Si $x \in \mathbb{C}^n$ vérifie $\|x\|_2 = 0$, alors on a $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0$, et donc :
    $$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad x_k = 0.$$
    - $\star$ *Homogénéité.* Pour $x \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :
    $$\|\lambda\, x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda\, x_k|^2} = |\lambda|\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = |\lambda|\ \|x\|_2.$$
    - $\star$ *Inégalité triangulaire.* Soit $(x,y) \in (\mathbb{C}^n)^2$.
    Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ suivants :
    $$\tilde{x} = (|x_1|, \ldots, |x_n|) \qquad \text{et} \qquad \tilde{y} = (|y_1|, \ldots, |y_n|).$$
    On a :
    $$\|x+y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \big(|x_k| + |y_k|\big)^2} = \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_2.$$
    En appliquant avec $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ l'inégalité triangulaire déjà obtenue pour la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$, il vient :
    $$\|x+y\|_2 \leqslant \|\tilde{x}\|_2 + \|\tilde{y}\|_2.$$
    En constatant alors que $\|x\|_2 = \|\tilde{x}\|_2$ et $\|y\|_2 = \|\tilde{y}\|_2$, on obtient le résultat :
    $$\|x+y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Exercice 13

- **Norme infinie.**
  - *Séparation.* Si $x \in E$ vérifie $\|x\|_\infty = 0$, alors il est clair que $\forall i \in I \quad x_i = 0$, c'est-à-dire que x est nul.
  - *Homogénéité.* Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\begin{aligned}\|\lambda\, x\|_\infty &= \max\{|\lambda\, x_i|\,;\ i \in I\}\\ &= \max\{|\lambda|\ |x_i|\,;\ i \in I\}\\ &= |\lambda|\ \max\{|x_i|\,;\ i \in I\} = |\lambda|\ \|x\|_\infty.\end{aligned}$$
  - *Inégalité triangulaire.* Pour $(x,y) \in E^2$, on a $\|x+y\|_\infty = \max\{|x_i+y_i|\,;\ i \in I\}$. Comme pour tout $i \in I$ on a :
$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$
il en résulte que $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ majore l'ensemble $\{|x_i + y_i|\,;\ i \in I\}$, et donc que $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.
- **Norme un.**
  - *Séparation.* Si $x \in E$ vérifie $\|x\|_1 = 0$, alors il est clair que $\forall i \in I \quad x_i = 0$, c'est-à-dire que x est nul.
  - *Homogénéité.* Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\|\lambda\, x\|_1 = \sum_{i\in I} |\lambda\, x_i| = \sum_{i\in I} \big(|\lambda|\ |x_i|\big) = |\lambda| \sum_{i\in I} |x_i| = |\lambda|\ \|x\|_1.$$
  - *Inégalité triangulaire.* Pour $(x,y) \in E^2$, on a :
$$\|x+y\|_1 = \sum_{i\in I} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i\in I} \big(|x_i| + |y_i|\big) = \sum_{i\in I} |x_i| + \sum_{i\in I} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$
- **Norme deux.**
  - *Séparation.* Si $x \in E$ vérifie $\|x\|_2 = 0$, alors $\sum\limits_{x\in I} |x_i|^2 = 0$, et donc :
$$\forall i \in I \quad x_i = 0$$
c'est-à-dire $x = 0$.
  - *Homogénéité.* Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\|\lambda\, x\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I} |\lambda\, x_i|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i\in I} |x_i|^2} = |\lambda|\ \|x\|_2.$$
  - *Inégalité triangulaire.*
    - ⋆ *Résultat préliminaire.* Dans l'espace $\mathbb{R}^{(I)}$ des familles presque nulles de réels indexées par I, l'application :
$$(a,b) \mapsto \sum_{i\in I} a_i b_i$$
est un produit scalaire. Sa norme euclidienne associée est donnée par :
$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I} a_i^2}.$$

L'inégalité triangulaire associée à cette norme donne :

$$\sqrt{\sum_{i\in I}(a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i\in I} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i\in I} b_i^2} \qquad (\star)$$

pour toutes familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ appartenant à $\mathbb{R}^{(I)}$.

$\star$ Soit $(x,y)\in E^2$. On a :

$$\|x+y\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I}|x_i+y_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i\in I}\big(|x_i|+|y_i|\big)^2}.$$

Les familles $(|x_i|)_{i\in I}$ et $(|y_i|)_{i\in I}$ appartenant à $\mathbb{R}^{(I)}$, on peut appliquer l'inégalité $(\star)$, ce qui donne le résultat souhaité :

$$\|x+y\|_2 \leqslant \sqrt{\sum_{i\in I}|x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i\in I}|y_i|^2} = \|x\|_2+\|y\|_2.$$

Exercice 14

1. Le fait que X soit non vide et que f soit bornée assure que la partie :
$$\big\{\big|f(x)\big|\,;\ x\in X\big\}$$
possède une borne supérieure, comme toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

2. • **Séparation.** Si f vérifie $\mathcal{N}_\infty(f)=0$, alors on a $\big|f(x)\big|=0$ pour tout $x\in X$, c'est-à-dire que f est la fonction nulle.

   • **Homogénéité.** Soit $f\in\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.
   Montrons que $\mathcal{N}_\infty(\lambda f)=|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$, ce qui revient à montrer qu'en notant A l'ensemble $\big\{\big|\lambda\, f(x)\big|\,;\ x\in X\big\}$, alors on a $\sup(A)=|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.

   $*$ Tout d'abord, A est majoré par $|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.
   En effet, si a appartient à A, alors on peut trouver $x\in X$ tel que $a=\big|\lambda\, f(x)\big|$. On a alors $a=|\lambda|\,\big|f(x)\big|$, et donc $a\leqslant|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.

   $*$ Il suffit alors pour conclure de montrer qu'on peut trouver une suite à valeurs dans A tendant vers $|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f)$.
   Comme $\mathcal{N}_\infty(f)=\sup\big\{\big|f(x)\big|\,;\ x\in X\big\}$, par caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver une suite (x_n) à valeurs dans X telle que
   $$\big|f(x_n)\big|\to\mathcal{N}_\infty(f).$$
   En notant alors $a_n=\big|\lambda\, f(x_n)\big|$, on a :
   $$a_n=|\lambda|\,\big|f(x_n)\big|\to|\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f).$$

   • **Inégalité triangulaire.** Soit $(f,g)\in\big(\mathcal{B}(X,\mathbb{K})\big)^2$. Montrons que :
   $$\mathcal{N}_\infty(f+g)\leqslant\mathcal{N}_\infty(f)+\mathcal{N}_\infty(g).$$
   En notant A l'ensemble $\big\{\big|f(x)+g(x)\big|\,;\ x\in X\big\}$, cela revient à montrer que A est majoré par $\mathcal{N}_\infty(f)+\mathcal{N}_\infty(g)$. C'est évident, car pour tout $x\in X$, on a :
   $$\big|f(x)+g(x)\big|\leqslant\underbrace{\big|f(x)\big|}_{\leqslant\mathcal{N}_\infty(f)}+\underbrace{\big|g(x)\big|}_{\leqslant\mathcal{N}_\infty(g)}.$$

Exercice 15

- **Séparation.** Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ vérifie $\mathcal{N}_1(f) = 0$, alors $|f|$ est la fonction nulle car continue, positive et d'intégrale nulle (l'intervalle d'intégration étant d'intérieur non vide), et donc f est nulle.
- **Homogénéité.** Pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\mathcal{N}_1(\lambda f) = \int_a^b |\lambda f| = \int_a^b \big(|\lambda|\,|f|\big) = |\lambda| \int_a^b |f| = |\lambda|\,\mathcal{N}_1(f).$$

- **Inégalité triangulaire.** Pour $(f,g) \in \big(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})\big)^2$, on a :

$$\mathcal{N}_1(f+g) = \int_a^b |f+g| \leqslant \int_a^b \big(|f|+|g|\big) = \int_a^b |f| + \int_a^b |g| = \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_1(g).$$

Exercice 16

- **Séparation.** Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ vérifie $\mathcal{N}_2(f) = 0$, alors $|f|^2$ est la fonction nulle, en tant que fonction continue, positive et d'intégrale nulle (l'intervalle d'intégration étant d'intérieur non vide), et donc f est la fonction nulle.
- **Homogénéité.** Pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big(\mathcal{N}_2(\lambda f)\big)^2 = \int_a^b |\lambda f|^2 = \int_a^b \big(|\lambda|^2\,|f|^2\big) = |\lambda|^2 \int_a^b |f|^2 = |\lambda|^2\,\mathcal{N}_2(f)^2,$$

  d'où, comme les quantités précédentes sont positives, $\mathcal{N}_2(\lambda f) = |\lambda|\,\mathcal{N}_2(f)$.
- **Inégalité triangulaire.** Soit f et g deux éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.
  L'inégalité triangulaire donne $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, et donc :

$$\mathcal{N}_2(f+g) = \sqrt{\int_a^b |f+g|^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b (|f|+|g|)^2} = \mathcal{N}_2\big(|f|+|g|\big). \qquad (1)$$

  Mais alors, comme l'application $f \mapsto \mathcal{N}_2(f)$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, nous pouvons appliquer l'inégalité triangulaire associée avec les fonctions $|f|$ et $|g|$:

$$\mathcal{N}_2\big(|f|+|g|\big) \leqslant \mathcal{N}_2(|f|) + \mathcal{N}_2(|g|). \qquad (2)$$

  Comme on a $\mathcal{N}_2(|f|) = \mathcal{N}_2(f)$ et $\mathcal{N}_2(|g|) = \mathcal{N}_2(g)$, les relations (1) et (2) permettent de conclure.

Exercice 17

- Pour $\mathcal{N}_\infty$, la réponse est positive puisque $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$.
- En revanche, pour $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, la réponse est négative car les applications :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_1(f) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \mathcal{N}_2(f) \end{array}$$

  ne vérifient par la propriété de séparation. En effet, toute fonction f qui est nulle sauf en un nombre fini de points vérifie $\mathcal{N}_1(f) = \mathcal{N}_2(f) = 0$.
  Remarque. On peut cependant montrer que ces deux applications vérifient la propriété d'homogénéité ainsi que l'inégalité triangulaire.

Exercice 18

- **Séparation.** Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ vérifie $\|P\| = 0$, alors il possède $n+1$ racines distinctes : $a_1, \ldots, a_{n+1}$, et donc est le polynôme nul.
- **Homogénéité.** Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}\|\lambda P\| &= \max\big\{|\lambda P(a_1)|, \ldots, |\lambda P(a_{n+1})|\big\}\\ &= |\lambda| \max\big\{|P(a_1)|, \ldots, |P(a_{n+1})|\big\} = |\lambda|\, \|P\|.\end{aligned}$$

- **Inégalité triangulaire.** Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$. On a :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad |P(a_k) + Q(a_k)| \leqslant |P(a_k)| + |Q(a_k)|,$$

  donc :

$$\|P + Q\| \leqslant \max_{k \in [\![1,n+1]\!]} \big(|P(a_k)| + |Q(a_k)|\big)$$

  et donc *a fortiori* :

$$\|P + Q\| \leqslant \max_{k \in [\![1,n+1]\!]} |P(a_k)| + \max_{k \in [\![1,n+1]\!]} |Q(a_k)| = \|P\| + \|Q\|$$

Exercice 19 Pour tout $u \in E$, on a $N(u) = \mathcal{N}_\infty\big(\varphi(u)\big)$, où φ est l'application :

$$\begin{array}{rccl}\varphi : & E & \longrightarrow & E\\ & u & \longmapsto & \left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}\end{array}$$

dont on montre aisément qu'elle est linéaire et injective.

Proposition 6 Notons E l'espace $E_1 \times \cdots \times E_p$.

- **Séparation.** Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ vérifie $\varphi(x) = 0$, alors, par définition de φ, on a :

$$\varphi_1(x_1) = \cdots = \varphi_p(x_p) = 0,$$

  ce qui, par propriété de séparation des normes φ_k, entraîne que $x_1 = \cdots = x_p = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.
- **Homogénéité.** Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\varphi(\lambda x) = \varphi\big((\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p)\big) = \max\big(\varphi_1(\lambda x_1), \ldots, \varphi_p(\lambda x_p)\big)$$

  L'homogénéité de chacune des normes $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ donne alors :

$$\varphi(\lambda x) = \max\big(\lambda \varphi_1(x_1), \ldots, \lambda \varphi_p(x_p)\big) = |\lambda|\, \varphi(x).$$

- **Inégalité triangulaire.** Soit $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$ dans E. On a :

$$\varphi(x + y) = \varphi\big((x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)\big) = \max\big(\varphi_1(x_1 + y_1), \ldots, \varphi_p(x_p + y_p)\big).$$

  Soit $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $\varphi(x + y) = \varphi_k(x_k + y_k)$. L'inégalité triangulaire appliquée avec la norme φ_k donne alors le résultat :

$$\varphi(x + y) \leqslant \underbrace{\varphi_k(x_k)}_{\leqslant \varphi(x)} + \underbrace{\varphi_k(y_k)}_{\leqslant \varphi(y)}.$$

Exercice 20 Dans ce qui suit, $x=(x_1,\dots,x_p)$ et $y=(y_1,\dots,y_p)$ sont deux éléments de l'espace produit, et λ est un scalaire.

- Montrons que N_1 est une norme.

  Séparation. Si $N_1(x)=0$, alors $\sum\limits_{k=1}^{p}\big\|x_k\big\|_k=0$, donc $\forall k\in[\![1,p]\!]\quad \varphi_k(x_k)=0$, puis, par propriété de séparation des normes $\varphi_1,\dots,\varphi_p$:
  $$\forall k\in[\![1,p]\!]\quad x_k=0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x=0.$$
  Homogénéité. On a :
  $$N_1(\lambda\,x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\lambda\,x_k)=\sum_{k=1}^{p}\big(|\lambda|\,\varphi_k(x_k)\big)=|\lambda|\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(x_k)=|\lambda|\,N_1(x).$$
  Inégalité triangulaire. On a :
  $$\begin{aligned}N_1(x+y)=\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(x_k+y_k)&\leqslant\sum_{k=1}^{p}\big(\varphi_k(x_k)+\varphi_k(y_k)\big)\\&=\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(x_k)+\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(y_k)=N_1(x)+N_1(y).\end{aligned}$$

- Montrons que N_2 est une norme.

  Séparation. Si $N_2(x)=0$, alors $\sum\limits_{k=1}^{p}\varphi_k(x_k)^2=0$, donc $\forall k\in[\![1,p]\!]\quad \varphi_k(x_k)=0$, puis, par propriété de séparation des normes $\varphi_1,\dots,\varphi_p$:
  $$\forall k\in[\![1,p]\!]\quad x_k=0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x=0.$$
  Homogénéité. On a
  $$N_2(\lambda\,x)^2=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\lambda\,x_k)^2=\sum_{k=1}^{p}|\lambda|^2\,\varphi_k(x_k)^2=|\lambda|^2\,N_2(x)^2,$$
  ce qui, les quantités précédentes étant positives, donne $N_2(\lambda\,x)=|\lambda\,|N_2(x)$.

  Inégalité triangulaire. Notons $\mathcal{N}_2$ la norme deux sur $\mathbb{R}^p$, et considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ suivants :
  $$X=\big(\varphi_1(x_1),\dots,\varphi_p(x_p)\big) \qquad \text{et} \qquad Y=\big(\varphi_1(y_1),\dots,\varphi_p(y_p)\big).$$
  Alors, l'inégalité triangulaire avec les normes $\|\cdot\|_k$ et la norme $\mathcal{N}_2$ donne :
  $$\begin{aligned}N_2(x+y)&=\left(\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(x_k+y_k)^2\right)^{1/2}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{p}\big(\varphi_k(x_k)+\varphi_k(y_k)\big)^2\right)^{1/2} && \text{(inégalité triangulaire des normes } \varphi_k)\\&=\mathcal{N}_2(X+Y)\\&\leqslant\mathcal{N}_2(X)+\mathcal{N}_2(Y) && \text{(inégalité triangulaire de la norme } \mathcal{N}_2)\\&=N_2(x)+N_2(y).\end{aligned}$$

Exercice 21

1. Il suffit d'écrire $\mathcal{N}_1(f_n) = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$.

2. (a) La convergence de (f_n) vers f au sens de la norme infinie implique la convergence simple, c'est-à-dire :
$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \to f(x).$$
Il vient alors que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$

   (b) On aboutit à une contradiction, car la fonction f obtenue n'est pas continue.

Exercice 22

1. • On voit facilement que 0 est valeur d'adhérence, car c'est la limite de la sous-suite $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   • Montrons qu'il n'y a pas d'autres valeurs d'adhérence.
   Pour cela, considérons x un réel non nul et $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et montrons que $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x.
   * Si φ prend une infinité de valeurs paires, alors $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ possède 0 comme valeur d'adhérence.
   * Sinon, alors φ prend une infinité de valeurs impaires, et alors $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite tendant vers $+\infty$.

   Dans les deux cas, la sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x.

2. Il est clair que la suite diverge, car la sous-suite $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Proposition 13

• Supposons que x soit valeur d'adhérence de la suite (a_n). Soit alors $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que la suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ converge vers x.
Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $\|a_n - x\| \leqslant \varepsilon$.
Comme $a_{\varphi(n)} \to x$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \geqslant n_1 \Longrightarrow \left\|a_{\varphi(p)} - x\right\| \leqslant \varepsilon.$$
Comme $\varphi \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on peut trouver $p \geqslant n_1$ tel que $\varphi(p) \geqslant n_0$. En posant alors $n = \varphi(p)$, on a $n \geqslant n_0$ et $\|a_n - x\| \leqslant \varepsilon$.

• Supposons que :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant n_0 \quad \|a_n - x\| \leqslant \varepsilon, \tag{$\star$}$$
et montrons qu'il existe une sous-suite de (a_n) qui tend vers x.
Pour cela, construisons une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \left\|a_{\varphi(p)} - x\right\| \leqslant \frac{1}{2^p}.$$

   * Tout d'abord, la propriété $(\star)$ assure qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|a_n - x\| \leqslant \dfrac{1}{2^0}$.
   Posons $\varphi(0)$ égal à une telle valeur de n.

* Pour $p \in \mathbb{N}$, supposons construits $\varphi(0), \ldots, \varphi(p-1)$. La propriété $(\star)$ assure qu'il existe $n \geqslant \varphi(p-1)+1$ tel que $\|a_n - x\| \leqslant \dfrac{1}{2^p}$. Il suffit alors de poser $\varphi(p)$ égal à une telle valeur de n.

La suite $\left(a_{\varphi(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est alors une sous-suite de $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge alors vers x.

Exercice 23 Soit $x \in [-1,1]$. Montrons que x est valeur d'adhérence de la suite a à l'aide de la proposition 13. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe un entier $n \geqslant n_0$ tel que $\|a_n - x\| \leqslant \varepsilon$.
Notons f la fonction $t \mapsto \sin\sqrt{t}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall t > 0 \quad f'(t) = \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}.$$

Comme $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut considérer $R > 0$ tel que $\forall t \geqslant R \quad |f'(t)| \leqslant \varepsilon$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, le réel $t_k = (2k\pi + \operatorname{Arcsin} x)^2$ vérifie $f(t_k) = x$. Fixons une valeur de k telle que $t_k \geqslant \max(n_0, R)$, et notons $n = \lceil t_k \rceil$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur l'intervalle $[t_k, n]$ assure alors que :

$$|a_n - x| = |f(n) - f(t_k)| \leqslant \varepsilon(n - t_k) \leqslant \varepsilon.$$

Comme $n \geqslant t_k \geqslant n_0$, cela montre le résultat souhaité.

Proposition 14

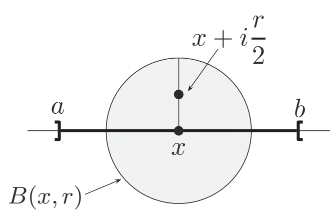
Soit B une boule ouverte. Notons a son centre et R son rayon.
Pour $x \in B$, on a $\|x-a\| < R$, et il est clair, d'après l'inégalité triangulaire, que la boule ouverte de centre x et de rayon $R - \|x-a\|$ est contenue dans B.
En effet, si u vérifie $\|u-x\| < R - \|x-a\|$, alors on a :

$$\|u-a\| \leqslant \|u-x\| + \|x-a\| < R - \|x-a\| + \|x-a\| = R.$$

Donc B est une partie ouverte.

Exercice 24

1. L'intervalle $]a,b[$ est un ouvert de R, car c'est la boule de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\dfrac{b-a}{2}$.
2. L'intervalle ouvert $]a,b[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$. En effet, pour $x \in \,]a,b[$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre x de rayon $r > 0$ n'est pas incluse dans $]a,b[$. Par exemple, le nombre complexe $x + i\dfrac{r}{2}$ appartient à cette boule mais pas à l'intervalle $]a,b[$.



Proposition 15

- Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts, et U leur réunion. Pour $x \in U$, on peut trouver $i \in I$ tel que x appartienne à U_i. Comme U_i est ouvert, il existe une boule ouverte centrée en x et de rayon strictement positif qui soit contenue dans U_i, et donc dans U. Il en résulte que U est un ouvert.
- Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille finie d'ouverts, et U leur intersection.
  Soit $x \in U$. Pour tout $i \in I$, l'ensemble U_i est un ouvert, donc on peut trouver $r_i > 0$ tel que la boule ouverte de centre x et de rayon r_i soit contenue dans U_i.
  Puisque I est fini, le nombre réel :
  $$r = \min_{i\in I} r_i$$
  existe et est strictement positif. La boule ouverte centrée en x et de rayon r est alors contenue dans chacun des U_i, et donc dans leur intersection U.
  Donc U est un ouvert.

Exercice 25 Soit U une partie ouverte de E. Pour tout $x \in U$, toute boule centrée en x et de rayon suffisamment petit est incluse dans U. En notant, par exemple :
$$n_x = \min\Big\{n \in \mathbb{N}^* \mid B\Big(x, \frac{1}{n}\Big) \subset U\Big\},$$
et en notant $r_x = \dfrac{1}{n_x}$, alors on a $B(x, r_x) \subset U$. Il est alors clair que :
$$U = \bigcup_{x\in U} B(x, r_x).$$

Exercice 26 Notons $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$. On a $A = \{0\}$, car :

- il est clair que 0 appartient à chacun des ensembles U_n, et donc à leur intersection ;
- si $x \neq 0$, alors, pour $n \geqslant \dfrac{1}{|x|}$, on a $x \notin U_n$, et donc $x \notin A$.

Il est clair que A n'est pas ouvert, car pour $r > 0$, la boule ouverte centrée en 0 et de rayon r (c'est-à-dire l'intervalle $]-r, r[$) n'est pas incluse dans A.

Exercice 27 Il suffit de constater que les complémentaires des intervalles $]-\infty, b]$, $[a, b]$ et $[a, +\infty[$ sont respectivement $]b, +\infty[$, $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ et $]-\infty, a[$, qui sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Proposition 16 Soit B une boule fermée. Notons a son centre et R son rayon.
Pour $x \in E \setminus B$, on a $\|x - a\| > R$, et il est clair que la boule ouverte centrée en x et de rayon $\|x - a\| - R$ est incluse dans $E \setminus B$.
En effet, si u vérifie $\|u - x\| < \|x - a\| - R$, alors on a :
$$\begin{aligned} \|u - a\| &\geqslant \|x - a\| - \|u - x\| && \text{(seconde inégalité triangulaire)} \\ &> \|x - a\| - \big(\|x - a\| - R\big) = R, \end{aligned}$$
et donc $u \in E \setminus B$.

Cela montre que $E \setminus B$ est une partie ouverte, et donc que B est une partie fermée.

Exercice 28

On a $A =]0,1[$. En effet :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $F_n \subset]0,1[$, et donc $A \subset]0,1[$;
- si $x \in]0,1[$, alors on a $x \in F_n$ dès que $n \geqslant \dfrac{1}{\min(|x|, |x-1|)}$, et donc $x \in A$.

L'ensemble A n'est pas fermé car son complémentaire, $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, n'est pas ouvert (pour le montrer, on peut considérer des boules centrées en 0).

Exercice 29 Soit S une sphère. Notons a son centre et r son rayon. Par définition, on a $S = B_f(a,r) \setminus B(a,r)$, c'est-à-dire $S = B_f(a,r) \cap \big(E \setminus B(a,r)\big)$.
La partie S est donc une partie fermée, comme intersection deux parties fermées.

Exercice 30 Comme F est un fermé de E, son complémentaire $E \setminus F$ est un ouvert de E. Comme $x \in E \setminus F$, on en déduit l'existence de $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset E \setminus F$. On a donc :

$$\forall y \in F \quad d(x,y) \geqslant r,$$

et donc nécessairement $d(x,F) \geqslant r$.

Exercice 31 Cette propriété découle immédiatement des définitions d'un ouvert et d'un voisinage. En effet, si U est un ouvert et $a \in U$, alors le fait que U soit ouvert assure qu'il existe $r > 0$ tel que la boule $B(a,r)$ soit incluse dans U, et donc que U est un voisinage de a.

Exercice 32

- Un sens est trivial. En effet, si A est un voisinage de a, alors il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a,r)$ (qui est une partie ouverte) soit incluse dans A.
- Pour l'autre sens : si U désigne un ouvert inclus dans A et contenant un élément a, alors, comme U est ouvert, on peut trouver une boule ouverte centrée en a et de rayon strictement positif qui soit incluse dans U et donc dans A.

Proposition 18

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des voisinages de x, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on peut trouver $r_k > 0$ tel que $B(x, r_k) \subset A_k$.

  Il est alors clair qu'en notant $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$, on a $r > 0$ et $B(x,r) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

  Cela montre que $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ est un voisinage de x.
- Le deuxième point est évident, car si A est un voisinage de x, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. Si $\widetilde{A}$ est une partie contenant A, alors on a $B(x,r) \subset \widetilde{A}$, ce qui montre que $\widetilde{A}$ est un voisinage de x.

Proposition 19

Remarque
La relation d'ordre utilisée ici sur les parties de E est évidemment la relation d'inclusion.

On sait déjà que $\overset{\circ}{A} \subset A$. Il suffit donc de montrer que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert, et que tout ouvert inclus dans A l'est aussi dans $\overset{\circ}{A}$.

- Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. On peut trouver $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. On a alors $\overset{\circ}{B(x,r)} \subset \overset{\circ}{A}$. Or, $B(x,r)$ étant ouvert, il est son propre intérieur. Il en résulte que $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$. Cela montre que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.
- Soit U un ouvert inclus dans A. On a alors $\overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{A}$. Or, U étant ouvert, on a $\overset{\circ}{U} = U$. Cela montre que $U \subset \overset{\circ}{A}$, et donne le résultat souhaité.

Exercice 33 C'est immédiat d'après la proposition 19. En effet, la réunion de tous les ouverts inclus dans A est un ouvert (d'après la proposition 15 de la page 207), il est inclus dans A, et il contient de manière évidente tout ouvert inclus dans A.

Exercice 34 Les deux sens sont évidents. On a déjà dit qu'un ouvert était égal à son propre intérieur. Réciproquement, comme, d'après la proposition 19, l'intérieur d'une partie est toujours un ouvert, une partie égale à son intérieur est nécessairement ouverte.

Exercice 35

- Supposons $d(x,A) = 0$. Alors, pour tout $r > 0$, il existe $a \in A$ vérifiant $d(x,a) < r$, et donc $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. On en déduit $x \in \mathrm{Adh}(A)$.
- Réciproquement, supposons $x \in \mathrm{Adh}(A)$. Pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$, ce qui assure l'existence de $a \in A$ vérifiant $d(x,a) < r$. On a donc $d(x,A) < r$. Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, on a bien $d(x,A) = 0$.

Proposition 20 D'après les remarques faites précédemment, on sait déjà que l'adhérence de A est un fermé contenant A. Il reste à démontrer que c'est le plus petit, c'est-à-dire que tout fermé contenant A contient aussi son adhérence.
Soit F un fermé contenant A. Alors $E \setminus F$ est un ouvert inclus dans $E \setminus A$, ce qui entraîne $E\setminus F \subset \mathrm{Int}(E\setminus A)$ puisque $\mathrm{Int}(E\setminus A)$ est le plus grand ouvert inclus dans $E\setminus A$. En prenant le complémentaire de chacun des ensembles, on obtient :

$$\underbrace{E \setminus \big(\mathrm{Int}(E \setminus A)\big)}_{=\mathrm{Adh}(A)} \subset F,$$

ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 36 C'est une conséquence de la proposition 20 de la page 212. En effet, l'intersection de tous les fermés contenant A est un fermé, il contient A, et il est contenu dans tout fermé qui contient A.

Exercice 37 Comme l'adhérence d'un ensemble est toujours un fermé, il est clair que si $A = \overline{A}$, alors A est un fermé.

Réciproquement, si A est un fermé, alors A est évidemment le plus petit fermé qui contient A, et donc $A = \overline{A}$.

Proposition 21

- Soit x un point adhérent à A. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $B(x, 2^{-n}) \cap A$ est non vide, ce qui nous permet d'y choisir un élément a_n. On construit ainsi une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.
- Réciproquement, supposons que x soit limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, et montrons que x est adhérent à A. Soit $r > 0$. Montrons que $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. Comme $a_n \to x$, on peut trouver un entier n_0 tel que $\|a_{n_0} - x\| < r$. Alors, a_{n_0} appartient à la fois à A et à $B(x,r)$, ce qui prouve que $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

Exercice 38 Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- Tout d'abord, $\overline{F}$ est non vide car il contient F et donc le vecteur nul.
- Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \overline{F}^2$; montrons que $\lambda x + y \in \overline{F}$. Comme x et y appartiennent à $\overline{F}$, il existe des suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F convergeant vers x et y respectivement. La suite $(\lambda x_n + y_n)$ est une suite d'éléments de F convergeant vers $\lambda x + y$; cela prouve, par caractérisation séquentielle, que $\lambda x + y \in \overline{F}$.

Exercice 39

- Soit a une valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrons que a est adhérent à chacunes des parties A_p. Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme a est valeur d'adhérence de (u_n), on peut considérer une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers a.
  De plus, pour tout $n \geqslant p$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant p$, et donc $u_{\varphi(n)} \in A_p$.
  La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant p}$ est donc une suite à valeurs dans A_p qui tend vers a, ce qui montre que a est adhérent à A_p.
- Réciproquement, donnons-nous $a \in \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$ et montrons que a est valeur d'adhérence de la suite (u_n). Pour cela, utilisons la caractérisation de la proposition 13 de la page 205 : soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$; montrons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $\|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$.
  Comme $a \in \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$, on a $a \in \overline{A_{n_0}}$. Il existe donc $b \in A_{n_0}$ tel que $\|b - a\| \leqslant \varepsilon$, ce qui, par définition de A_{n_0}, revient à dire qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $\|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$. D'où le résultat.

Exercice 40 Si I désigne un intervalle d'extrémités a et b, alors on a :

$$\operatorname{Int}(I) =]a,b[\qquad \text{et} \qquad \operatorname{Adh}(I) = [a,b].$$

Il en résulte que la frontière de I est l'ensemble $[a,b] \setminus]a,b[$, c'est-à-dire $\{a,b\}$.

Exercice 41
Nous savons (*cf.* remarque de la page 211) que :

$$\forall B \in \mathcal{P}(E) \quad \overline{B} = E \setminus \mathrm{Int}(E \setminus B).$$

En utilisant cette relation avec $B = E \setminus A$, on obtient :

$$\overline{(E \setminus A)} = E \setminus \mathrm{Int}(A).$$

Comme par définition on a $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \big(E \setminus \mathrm{Int}(A)\big)$, on obtient bien :

$$\overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)} = \mathrm{Fr}(A).$$

Exercice 42 L'intervalle $[0,1[$ est un ouvert relatif de $[0,1]$ car on peut écrire :

$$[0,1[\, = \,]-1,1[\, \cap [0,1].$$

Exercice 43 Il suffit d'écrire $]0,1] = [-1,1] \cap\,]0,2]$.

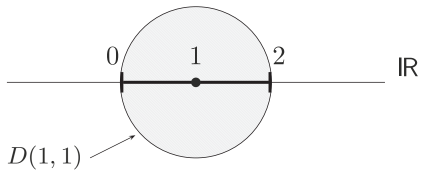
Exercice 44 L'écriture $A = E \cap A$ donne le résultat, car E est à la fois un ouvert et un fermé de E.

Exercice 45

Il suffit d'écrire :

$$[0,2] = D_f(1,1) \cap \mathbb{R},$$

où $D_f(1,1)$ désigne le disque fermé de centre 1 et de rayon 1.



Exercice 46

- $(i) \Rightarrow (ii)$**.** Supposons que G soit un ouvert relatif. Alors il existe un ouvert U de E tel que $G = U \cap A$. Alors, pour tout $x \in G$, on a $x \in U$ et donc, puisque U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$.
  On a alors $B(x,r) \cap A \subset U \cap A = G$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$**.** Supposons (ii). Inspirons-nous de la méthode utilisée pour résoudre l'exercice 25 de la page 208. Pour tout $x \in G$, notons

$$n_x = \min\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid \left(B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A\right) \subset G\right\} \qquad \text{et} \qquad r_x = \frac{1}{n_x}\cdot$$

On constate alors que :

$$\forall x \in G \quad \big(B(x, r_x) \cap A\big) \subset G.$$

puis que :

$$G = U \cap A \quad \text{avec} \quad U = \bigcup_{x \in G} B(x, r_x).$$

Exercice 47

- $(i) \Rightarrow (ii)$**.** Supposons que G soit un fermé relatif de A. Alors, il existe un fermé F de E tel que $G = A \cap F$. Si (x_n) est une suite d'éléments de G qui converge vers $\ell \in A$, alors, comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in F$ le caractère fermé de F assure que $\ell \in F$. Par suite, on a $\ell \in A \cap F = G$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$**.** Supposons (ii) et montrons que $G = A \cap \operatorname{Adh}(G)$. Comme $\operatorname{Adh}(G)$ est un fermé de E, cela prouvera (i).
  - L'inclusion $G \subset A \cap \operatorname{Adh}(G)$ est immédiate, puisque $G \subset A$ et $G \subset \operatorname{Adh}(G)$.
  - Pour prouver l'autre inclusion, donnons-nous $\ell \in A \cap \operatorname{Adh}(G)$, et montrons que $\ell \in G$. Comme $\ell \in \operatorname{Adh}(G)$, il existe une suite $(x_n) \in G^{\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ. Comme $\ell \in A$, la propriété (i) nous assure que $\ell \in G$.

Proposition 24 Un des sens découle directement de la définition 22 de la page 216. Montrons l'autre : supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in E \quad N_2(x) = 1 \Longrightarrow N_1(x) \leqslant \alpha, \tag{$\star$}$$

et montrons que N_1 est dominée par N_2. Plus précisément, montrons que :

$$\forall y \in E \quad N_1(y) \leqslant \alpha N_2(y).$$

Soit $y \in E$. Si y est nul, alors l'inégalité $N_1(y) \leqslant \alpha N_2(y)$ évidente. Si y est non nul, alors $N_2(y) \neq 0$, et la propriété $(\star)$ appliquée à $\dfrac{y}{N_2(y)}$ donne :

$$N_1\left(\frac{y}{N_2(y)}\right) \leqslant \alpha,$$

ce qui, par homogénéité de N_1, donne le résultat.

Exercice 48

- **Antisymétrie.**
  - Si E est l'espace nul, alors il existe une unique norme sur E : l'application nulle (et dans ce cas la relation de domination est une relation d'ordre).
  - En revanche, si E n'est pas l'espace nul et que l'on dispose d'au moins une norme N sur E, alors en considérant l'application $\widetilde{N} \;:\; x \mapsto 2N(x)$, on constate que N et $\widetilde{N}$ sont deux normes distinctes et dominées l'une par l'autre. L'antisymétrie est alors mise en défaut.

L'exercice est résolu. Constatons tout de même que les propriétés de réflexivité et transitivité sont quant à elles vérifiées :

- **Refléxivité.** Il est clair que toute norme est dominée par elle-même (prendre $\alpha = 1$ dans la définition).
- **Transitivité.** Si N_1 est dominée par N_2 et si N_2 est dominée par N_3, alors on peut trouver des constantes $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ telles que :

  $$\forall x \in E \quad \big(N_1(x) \leqslant \alpha_1 N_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leqslant \alpha_2 N_3(x)\big).$$

  La norme N_1 est alors dominée par la norme N_3, car on a :

  $$\forall x \in E \quad N_1(x) \leqslant \alpha_1 \alpha_2 N_3(x).$$

Exercice 49 Soit f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
On a, par positivité de l'intégrale :

$$\mathcal{N}_1(f) = \int_a^b |f| \leqslant \int_a^b \mathcal{N}_\infty(f) = (b-a)\mathcal{N}_\infty(f),$$

ce qui montre que la norme un est dominée par la norme infinie.
De même, on a :

$$\mathcal{N}_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f|^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b \mathcal{N}_\infty(f)^2} = \sqrt{(b-a)\mathcal{N}_\infty(f)^2} = \sqrt{b-a}\,\mathcal{N}_\infty(f),$$

ce qui montre que la norme deux est dominée par le norme infinie.

Proposition 25 Soit $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$ et A une partie bornée pour la norme N_2.
Comme A est bornée pour la norme N_2, on peut considérer M un réel positif vérifiant :

$$\forall a \in A \quad N_2(a) \leqslant M.$$

Alors, la relation suivante, valable pour tout $a \in A$:

$$N_1(a) \leqslant \alpha N_2(a) \leqslant \alpha M,$$

montre que A est également bornée pour la norme N_1.

Proposition 26 Soit $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers ℓ pour la norme N_2, alors l'encadrement :

$$0 \leqslant N_1(a_n - \ell) \leqslant \alpha \underbrace{N_2(a_n - \ell)}_{\to 0}$$

montre qu'il en est de même pour la norme N_1.

Exercice 50
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathcal{N}_\infty(f_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_1(f_n) = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\cdot$$

Il en résulte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la fonction nulle pour la norme un mais pas pour la norme infinie.
La norme infinie n'est donc pas dominée par la norme un.

Exercice 51 Soit N_1 et N_2 deux normes.

- Si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors on peut trouver deux réels α et β strictement positifs tels que :

  $$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x),$$

  On a alors :
  * $\forall x \in E \quad N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$, ce qui montre que N_2 est dominée par N_1 ;
  * $\forall x \in E \quad N_1(x) \leqslant \dfrac{1}{\alpha} N_2(x)$, ce qui montre que N_1 est dominée par N_2.

- Réciproquement, si chacune des normes est dominée par l'autre, alors on peut trouver α_1 et α_2 deux réels strictement positifs tels que :
$$\forall x \in E \quad \big(N_1(x) \leqslant \alpha_1 N_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leqslant \alpha_2 N_1(x)\big).$$
Pour tout $x \in E$, on a alors $\dfrac{1}{\alpha_1} N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \alpha_2 N_1(x)$, ce qui montre que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Exercice 52 • La réflexivité est évidente (prendre $\alpha = \beta = 1$ dans la définition 23 de la page 218).

- La symétrie résulte de l'exercice 51 : la propriété « chacune est dominée par l'autre » est manifestement symétrique.
- La transitivité résulte également de l'exercice 51 ainsi que du caractère transitif de la relation de domination (*cf.* exercice 48) : si N_1 et équivalente à N_2 et si N_2 est équivalente à N_3, alors :
  - ∗ N_1 est dominée par N_2, qui est dominée par N_3, donc N_1 est dominée par N_3 ;
  - ∗ N_3 est dominée par N_2, qui est dominée par N_1, donc N_3 est dominée par N_1.

  Par suite, N_1 et N_3 sont équivalentes.

Exercice 53 Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

- On a $\max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$. Cela donne $\|x\|_\infty^2 \leqslant \|x\|_2^2$, et donc $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$.
- On a $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|\Big)^2$. Cela donne $\|x\|_2^2 \leqslant \|x\|_1^2$, et donc $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$.
- Enfin, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(\max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|\Big)$, c'est-à-dire $\|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$.

Le résultat obtenu nous donne directement l'équivalence des trois normes considérées.

Proposition 29 Soit α et β deux réels strictement positifs tels que :
$$\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1. \qquad (\star)$$

- Supposons A ouvert pour une des deux normes, par exemple N_1, et montrons que A est l'également pour N_2.
Soit $a \in A$. Comme A est ouvert pour N_1, il existe $r > 0$ tel que :
$$\forall x \in E \quad N_1(x - a) < r \Longrightarrow x \in A.$$
Mais alors, d'après la relation $(\star)$, si $x \in E$ vérifie $N_2(x - a) < \alpha r$, alors on a $N_1(x - a) < r$ et donc $x \in A$. Autrement dit, la boule ouverte centrée en a et de rayon αr au sens de la norme N_2 est incluse dans A. Donc A est ouvert pour N_2.
- Le deuxième point s'obtient à partir du premier, par passage aux complémentaires : la partie A est fermée si, et seulement si, son complémentaire est ouvert, ce qui, d'après le premier point, ne dépend pas de la norme choisie.

Exercice 54 Tout d'abord, il facile de voir que N_1 et N_2 sont bien des normes sur $\mathbb{R}[X]$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidentes, quant à la propriété de séparation, il suffit, par exemple pour N_1, de constater que si $P \in \mathbb{R}[X]$

vérifie $N_1(P) = 0$, alors, la fonction $t \mapsto |P(t)|$ étant continue, positive et d'intégrale nulle, on a :

$$\forall t \in [a,b] \quad P(t) = 0,$$

ce qui assure que P est le polynôme nul (car admettant une infinité de racines).

- Il est clair, comme $[a,b] \subset [a,c]$, que $N_1 \leqslant N_2$, et donc N_1 est dominée par N_2.
- Montrons que N_2 n'est pas dominée par N_1. Pour cela, considérons la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_n = (n+1)\left(\dfrac{X-a}{c-a}\right)^n$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

  $$N_1(P_n) = (n+1)\int_a^b \left(\frac{t-a}{c-a}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{n+1}}{(c-a)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  et

  $$N_2(P_n) = (n+1)\int_a^c \left(\frac{t-a}{c-a}\right)^n \mathrm{d}t = c-a > 0.$$

  Il en résulte que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers le polynôme nul pour la norme N_1 mais pas pour la norme N_2 : cela justifie que N_2 n'est pas dominée par N_1.

S'entraîner et approfondir

4.1 Montrer que l'application $N\ :\ P \mapsto \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|P(t)-P'(t)\right|$ est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

4.2 Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que si F est un ouvert de E, alors $F=E$.

4.3 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On munit $E\times F$ de la norme produit.
Soit A et B deux parties de E et F respectivement.

1. Montrer que $\operatorname{Int}(A\times B)=\operatorname{Int}(A)\times\operatorname{Int}(B)$.
En déduire que le produit cartésien de deux ouverts est un ouvert.
2. Montrer que $\operatorname{Adh}(A\times B)=\operatorname{Adh}(A)\times\operatorname{Adh}(B)$.
En déduire que le produit cartésien de deux fermés est un fermé.
3. Montrer que $\operatorname{Fr}(A\times B)=\big(\operatorname{Adh}(A)\times\operatorname{Fr}(B)\big)\cup\big(\operatorname{Fr}(A)\times\operatorname{Adh}(B)\big)$.

4.4 Montrer que l'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe sont convexes.

4.5 Soit n un entier au moins égal à 2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour laquelle deux matrices semblables quelconques aient même norme ?

4.6 On se place dans l'espace des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme infinie. Notons $a=(a_n)$ la suite constante égale à 1 et $\mathcal{C}_0$ le sous-espace vectoriel des suites tendant vers 0. Déterminer la distance de a à $\mathcal{C}_0$.

4.7 *Norme p sur $\mathbb{K}^n$*
Soit n et p deux entiers valant au moins 1 On considère l'application :

$$\begin{array}{rrcl} \|\cdot\|_p\ : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \|x\|_p=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \end{array}$$

Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Indication : pour l'inégalité triangulaire, on pourra utiliser la convexité de la fonction $u\mapsto u^p$.

⋆ **4.8** *Norme p sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$*

Soit a et b deux réels vérifiant $a<b$, et $p\geqslant 1$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{N}_p : & \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \left(\displaystyle\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}. \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $p\geqslant 1$, $\mathcal{N}_p$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

   Indication : pour l'inégalité triangulaire, on pourra utiliser la convexité de la fonction $x\mapsto x^p$.

2. Pour $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, montrer que $\mathcal{N}_p(f)\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\mathcal{N}_\infty(f)$.

3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si f est seulement supposée continue par morceaux ?

⋆ **4.9** On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall P=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\in\mathbb{R}[X]\quad \|P\|_\infty=\max_{k\in\mathbb{N}}|a_k|.$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des polynômes unitaires est un fermé.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes unitaires et scindés dans $\mathbb{R}[X]$ est un fermé.

⋆ **4.10** Soit E un espace vectoriel normé.

1. Quelles sont les parties de E dont la frontière est vide ?
2. Quelles sont les parties de E qui sont à la fois des ouverts et des fermés de E ?

4.11 Soit $E=\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On note F le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions s'annulant en 0 et en 1.

Déterminer l'intérieur et l'adhérence de F pour les normes un et infinie :

$$\mathcal{N}_\infty(f)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|\qquad\text{et}\qquad \mathcal{N}_1(f)=\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t.$$

⋆ **4.12** Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé E est soit un fermé de E, soit dense dans E.

4.13 *(Polytechnique 2015)*

On pose :

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathrm{IR}) \;\middle|\; f(0) = f'(0) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que $f \mapsto \mathcal{N}_\infty(f'' + 2f' + f)_\infty$ est une norme sur E, que l'on notera N.
2. Montrer que N domine $\mathcal{N}_\infty$, et préciser la plus petite constante $a > 0$ telle que $\mathcal{N}_\infty \leqslant aN$.
3. Les normes N et $\mathcal{N}_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Solution des exercices

4.1 • Comme la fonction $t \mapsto P(t) - P'(t)$ est continue, elle est bornée sur le segment $[0,1]$; l'application N est donc bien définie.

• Notons $\mathcal{N}_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$.

* **Homogénéité.** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On a, par homogénéité de $\mathcal{N}_\infty$:

$$N(\lambda P) = \mathcal{N}_\infty(\lambda P - \lambda P') = \mathcal{N}_\infty\big(\lambda(P - P')\big) = \lambda\, \mathcal{N}_\infty(P - P') = \lambda N(P).$$

* **Inégalité triangulaire.** Pour $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a, via l'inégalité triangulaire de $\mathcal{N}_\infty$:

$$\begin{aligned} N(P+Q) &= \mathcal{N}_\infty\big((P+Q) - (P'+Q')\big) \\ &= \mathcal{N}_\infty\big((P-P') + (Q-Q')\big) \\ &\leqslant \mathcal{N}_\infty(P-P') + \mathcal{N}_\infty(Q-Q') = N(P) + N(Q). \end{aligned}$$

* **Séparation.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $N(P) = 0$. La fonction $t \mapsto P(t) - P'(t)$ est alors nulle sur $[0,1]$, et donc le polynôme $P - P'$, admettant une infinité de racines, est le polynôme nul. On a donc $P = P'$, ce qui prouve que P est le polynôme nul (pour le justifier proprement, dire par exemple que P et P', étant égaux, ont même degré).

Cela prouve que N est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

Remarque Pour cet exercice, on aurait aussi pu remarquer que $N = \mathcal{N}_\infty \circ u$ avec :

• $\mathcal{N}_\infty$ la norme infinie sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$;

• $u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ l'application qui à $P \in \mathbb{K}[X]$ associe la fonction

$$u(P) \;:\; \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & P(t) - P'(t) \end{array}$$

Comme u est une application linéaire injective (à justifier), cela permet d'affirmer que N est une norme.

4.2 Supposons que F soit un ouvert de E. Étant donné que $0 \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel) et que F est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset F$. Soit x est un vecteur non nul de E. Alors le vecteur $u = \dfrac{r}{2\|x\|}x$ appartient à $B(0,r)$ et donc à F. Comme F est un sous-espace vectoriel et que $x = \dfrac{2\|x\|}{r}u$, on a $x \in F$. D'où $F = E$.

4.3 On note indifféremment $\|\cdot\|$ les normes de E, F et $E \times F$. Rappelons que, par définition de la norme produit, on a :

$$\forall (x,y) \in E \times F \quad \big\|(x,y)\big\| = \max\big(\|x\|, \|y\|\big).$$

1. • **Inclusion** $\operatorname{Int}(A \times B) \subset \operatorname{Int}(A) \times \operatorname{Int}(B)$.
   Soit $(a,b) \in \operatorname{Int}(A \times B)$. Montrons que $a \in \operatorname{Int}(A)$ et $b \in \operatorname{Int}(B)$.
   Comme $(a,b) \in \operatorname{Int}(A \times B)$, on peut trouver $r > 0$ tel que :
   $$\forall (x,y) \in E \times F \quad \big\|(x,y) - (a,b)\big\| < r \Longrightarrow (x,y) \in A \times B.$$
   Par définition de la norme produit, cela s'écrit :
   $$\forall (x,y) \in E \times F \quad \big(\|x-a\| < r \quad \text{et} \quad \|y-b\| < r\big) \Longrightarrow (x,y) \in A \times B,$$
   d'où l'on déduit que :
   $$\big(\forall x \in E \quad \|x-a\| < r \Longrightarrow x \in A\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall y \in F \quad \|y-b\| < r \Longrightarrow y \in B\big),$$
   ce qui prouve que $a \in \operatorname{Int}(A)$ et $b \in \operatorname{Int}(B)$.
   • **Inclusion** $\operatorname{Int}(A) \times \operatorname{Int}(B) \subset \operatorname{Int}(A \times B)$.
   Soit $(a,b) \in \operatorname{Int}(A) \times \operatorname{Int}(B)$. Comme $a \in \operatorname{Int}(A)$ et $b \in \operatorname{Int}(B)$, on peut trouver $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que :
   $$\big(\forall x \in E \quad \|x-a\| < r_1 \Longrightarrow x \in A\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall y \in F \quad \|y-b\| < r_2 \Longrightarrow y \in B\big).$$
   En posant $r = \min(r_1, r_2)$, on a alors, par définition de la norme produit :
   $$\forall (x,y) \in E \times F \quad \big\|(x,y) - (a,b)\big\| < r \Longrightarrow (x,y) \in A \times B,$$
   ce qui prouve que $(a,b) \in \operatorname{Int}(A \times B)$. D'où l'inclusion.

   Il résulte de l'égalité $\operatorname{Int}(A \times B) = \operatorname{Int}(A) \times \operatorname{Int}(B)$ que si A et B sont ouverts, alors $\operatorname{Int}(A \times B) = A \times B$, ce qui signifie que $A \times B$ est ouvert.
2. • Soit $(x,y) \in \operatorname{Adh}(A \times B)$. Il existe alors une suite $\big((a_n, b_n)\big)$ d'éléments de $A \times B$ qui converge vers (x,y). Mais alors, par définition de la norme produit, on a $a_n \to x$ et $b_n \to y$, ce qui prouve que $x \in \operatorname{Adh}(A)$ et $y \in \operatorname{Adh}(B)$ (car les suites (a_n) et (b_n) sont à valeurs respectivement dans A et B).
   • Réciproquement, soit $(x,y) \in \operatorname{Adh}(A) \times \operatorname{Adh}(B)$. Alors on peut considérer (a_n) et (b_n) des suites d'éléments de A et B convergeant respectivement vers x et y. Mais alors, par définition de la norme produit, la suite $\big(a_n, b_n)\big)$, à valeurs dans $A \times B$, converge vers (x,y). On a donc $(x,y) \in \operatorname{Adh}(A \times B)$.

   Il en résulte que si A et B sont des fermés, alors :
   $$\operatorname{Adh}(A \times B) = \operatorname{Adh}(A) \times \operatorname{Adh}(B) = A \times B,$$
   et donc $A \times B$ est un fermé.
3. Par définition, on a :
   $$\operatorname{Fr}(A \times B) = \operatorname{Adh}(A \times B) \setminus \operatorname{Int}(A \times B).$$
   En utilisant les deux premières questions, il vient :
   $$\begin{aligned}\operatorname{Fr}(A \times B) &= \big(\operatorname{Adh}(A) \times \operatorname{Adh}(B)\big) \setminus \big(\operatorname{Int}(A) \times \operatorname{Int}(B)\big)\\ &= \Big(\big(\operatorname{Adh}(A) \setminus \operatorname{Int}(A)\big) \times \operatorname{Adh}(B)\Big) \cup \Big(\operatorname{Adh}(A) \times \big(\operatorname{Adh}(B) \setminus \operatorname{Int}(B)\big)\Big)\\ &= \big(\operatorname{Fr}(A) \times \operatorname{Adh}(B)\big) \cup \big(\operatorname{Adh}(A) \times \operatorname{Fr}(B)\big)\end{aligned}$$

4.4 Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

- Montrons que $\mathrm{Adh}(C)$ est convexe. Soit $(x,y,\lambda) \in \mathrm{Adh}(C)^2 \times [0,1]$; montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{Adh}(C)$.
  Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on peut trouver deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de C convergeant vers x et y respectivement. Par convexité de C, on a :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in C.$$
  Comme de plus $\lambda u_n + (1-\lambda)y_n \to \lambda x + (1-\lambda)y$, on a bien $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{Adh}(C)$.
- Montrons que $\mathrm{Int}(C)$ est convexe. Soit $(x,y,\lambda) \in \mathrm{Int}(C)^2 \times [0,1]$; montrons que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{Int}(C)$. Puisque x et y appartiennent à l'intérieur de C, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que :
  $$B(x,r_1) \subset C \quad \text{et} \quad B(y,r_2) \subset C.$$
  Posons $r = \min(r_1, r_2)$; on a alors :
  $$B(x,r) \subset C \quad \text{et} \quad B(y,r) \subset C.$$
  Montrons alors qu'on a $B(z,r) \subset C$, ce qui prouvera que $z \in \mathrm{Int}(C)$. Soit $u \in E$ vérifiant $\|u\| < r$; montrons que $z + u \in C$.
  En notant $\tilde{x} = x + u$ et $\tilde{y} = y + u$, on a :
  $$z + u = \lambda \tilde{x} + (1-\lambda)\tilde{y}.$$
  Comme $B(x,r) \subset C$ et $B(y,r) \subset C$, on a $\tilde{x} \in C$ et $\tilde{y} \in C$. Puis, comme C est convexe, on a $z + u \in C$. D'où le résultat.

4.5
- **Commençons par le cas $n = 2$.**
  Supposons qu'une telle norme $\|\cdot\|$ existe.
  Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices A et $2A$ sont semblables car si u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à A, et si (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{K}^2$, alors la matrice de u dans la base $(e_1, 2e_2)$ est $2A$.
  Par suite, on a $\|A\| = \|2A\|$. Par propriété d'homogénéité, on a alors $\|A\| = 2\|A\|$, et donc $\|A\| = 0$. Comme $A \neq 0$, cela contredit la propriété de séparation.
- **Cas général.** Ce qui précède s'étend pour $n \geqslant 2$ quelconque en considérant la matrice $A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & (0) \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{(0)} & (0) \end{array}\right)$, dont on montre qu'elle est semblable à $2A$.

  En effet, si u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, et si l'on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors la matrice de u dans la base $(e_1, 2e_2, e_3, \ldots, e_n)$ est $2A$.

4.6
- La suite nulle appartient à $\mathcal{C}_0$, et est à une distance 1 de la suite (a_n).
  On a donc $d(a, \mathcal{C}_0) \leqslant 1$.

- D'autre part, si $u = (u_n)$ est une suite tendant vers 0, alors on a :
$$|a_n - u_n| = |1 - u_n| \to 1,$$
et donc $\|a - u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - u_n| \geqslant 1$. Cela prouve que $d(a, \mathcal{C}_0) \geqslant 1$.

Par double inégalité, on a donc $d(a, \mathcal{C}_0) = 1$.

4.7 Les propriétés d'homogénéité et de séparation sont faciles à vérifier.
Montrons l'inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in \mathbb{K}^n$. Montrons que :
$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$
Si l'un des deux vecteurs est le vecteurs nul, alors c'est évident. Supposons donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$; on a alors $\|x\|_p > 0$ et $\|y\|_p > 0$.
Notons $\lambda = \|x\|_p$ et $\mu = \|y\|_p$ et posons :
$$\widetilde{x} = \frac{x}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{y} = \frac{y}{\mu}\cdot$$
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a, par inégalité triangulaire et croissance de $u \mapsto u^p$ sur $\mathbb{R}_+$;
$$\begin{aligned}
\bigl|x_k + y_k\bigr|^p &\leqslant \bigl(|x_k| + |y_k|\bigr)^p \\
&= \bigl(\lambda\,\widetilde{x}_k + \mu\,\widetilde{y}_k\bigr)^p \\
&= (\lambda + \mu)^p \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,\widetilde{x}_k + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,\widetilde{y}_k\right)^p.
\end{aligned}$$
Par convexité de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u^p \end{array}$, on a alors :
$$\bigl|x_k + y_k\bigr|^p \leqslant (\lambda + \mu)^p \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}|\widetilde{x}_k|^p + \frac{\mu}{\lambda + \mu}|\widetilde{y}_k|^p\right). \qquad (\star)$$
Comme $\|\widetilde{x}\|_p = \|\widetilde{y}\|_p = 1$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} |\widetilde{x}_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |\widetilde{y}_k|^p = 1.$$
En sommant la relation $(\star)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient donc :
$$\sum_{k=1}^{n} \bigl|x_k + y_k\bigr|^p \leqslant (\lambda + \mu)^p,$$
c'est-à-dire :
$$\bigl(\|x + y\|_p\bigr)^p \leqslant \bigl(\|x\|_p + \|y\|_p\bigr)^p.$$
Par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ cela donne le résultat souhaité.

Remarque L'inégalité triangulaire associé à la norme p :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$
est appelée **inégalité de Minkowski**.

4.8 1. Les propriétés d'homogénéité et de séparation sont faciles à vérifier.
Montrons l'inégalité triangulaire. Soit $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})^2$. Montrons que :

$$\mathcal{N}_p(f+g) \leqslant \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

Si l'une des deux fonctions est la fonction nulle, alors c'est évident. Supposons donc $f \neq 0$ et $g \neq 0$; on a alors $\mathcal{N}_p(f) > 0$ et $\mathcal{N}_p(g) > 0$.
Notons $\lambda = \mathcal{N}_p(f)$ et $\mu = \mathcal{N}_p(g)$ et posons :

$$f_0 = \frac{f}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad g_0 = \frac{g}{\mu}\cdot$$

Pour $x \in [a,b]$, on a, par inégalité triangulaire et croissance sur $\mathbb{R}_+$ de $u \mapsto u^p$:

$$\begin{aligned} \left|f(x)+g(x)\right|^p &\leqslant \big(|f(x)|+|g(x)|\big)^p \\ &= \big(\lambda\,|f_0(x)| + \mu\,|g_0(x)|\big)^p \\ &= (\lambda+\mu)^p \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left|f_0(x)\right| + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left|g_0(x)\right|\right)^p \end{aligned}$$

Par convexité de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^p \end{array}$, on a alors :

$$\left|f(x)+g(x)\right|^p \leqslant (\lambda+\mu)^p \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left|f_0(x)\right|^p + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left|g_0(x)\right|^p\right) \tag{$\star$}$$

Par définition des fonctions f_0 et g_0, on voit que $\displaystyle\int_a^b |f_0|^p = \int_a^b |g_0|^p = 1$.
En intégrant l'inégalité $(\star)$ entre a et b, on obtient donc :

$$\int_a^b \left|f(x)+g(x)\right|^p \leqslant (\lambda+\mu)^p,$$

autrement dit :

$$\big(\mathcal{N}_p(f+g)\big)^p \leqslant \big(\mathcal{N}_p(f)+\mathcal{N}_p(g)\big)^p,$$

ce qui, par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ donne le résultat.

2. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Pour montrer que $\mathcal{N}_p(f) \to \mathcal{N}_\infty(t)$, fixons $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \geqslant p_0 \quad \mathcal{N}_\infty(f) - \varepsilon \leqslant \mathcal{N}_p(f) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) + \varepsilon. \tag{1}$$

Si $\mathcal{N}_\infty(f) = 0$, alors $f = 0$ et $\mathcal{N}_p(f) = 0$. Sinon, alors $\mathcal{N}_\infty(f) > 0$, et ce n'est alors pas une restriction de supposer $\varepsilon < 2\mathcal{N}_\infty(f)$, ce que nous faisons.

- On a tout d'abord :

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x)|^p \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)^p,$$

puis on obtient la majoration suivante :

$$\mathcal{N}_p(f) \leqslant (b-a)^{1/p}\mathcal{N}_\infty(f). \tag{2}$$

- De plus, comme f est continue sur le segment $[a,b]$, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $|f(x_0)| = \mathcal{N}_\infty(f)$. Par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b] \cap \left]x_0-\eta, x_0+\eta\right[\quad |f(x)| \geqslant \mathcal{N}_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Notons I l'intervalle $[a,b] \cap]x_0-\eta, x_0+\eta[$. En minorant $|f|$ par la fonction en escalier valant $\mathcal{N}_\infty(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ sur I et 0 ailleurs, on obtient, en notant ℓ la longueur de I :

$$\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t \geqslant \ell \Big(\mathcal{N}_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2}\Big)^p$$

puis :

$$\mathcal{N}_p(f) \geqslant \ell^{1/p}\Big(\mathcal{N}_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2}\Big). \tag{3}$$

- Les inégalités (2) et (3) donnent l'encadrement suivant :

$$\ell^{1/p}\Big(\mathcal{N}_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2}\Big) \leqslant \mathcal{N}_p(f) \leqslant (b-a)^{1/p}\mathcal{N}_\infty(f).$$

  * Comme $\ell > 0$, on a $\ell^{1/p} \to 1$, et donc $\ell^{1/p}\Big(\mathcal{N}_\infty(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}\Big) \to \mathcal{N}_\infty(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$ Il existe donc $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p \geqslant p_1 \Longrightarrow \ell^{1/p}\Big(\mathcal{N}_\infty(f) - \frac{\varepsilon}{2}\Big) \geqslant \mathcal{N}_\infty(f) - \varepsilon.$$

  * Comme $b-a > 0$, on a $(b-a)^{1/p} \to 1$, et donc $(b-a)^{1/p}\mathcal{N}_\infty(f) \to \mathcal{N}_\infty(f)$. Il existe donc $p_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p \geqslant p_2 \Longrightarrow (b-a)^{1/p}\mathcal{N}_\infty(f) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) + \varepsilon.$$

  * En notant alors $p_0 = \max(p_1,p_2)$, la propriété (1) est vérifiée. D'où le résultat.

3. Le résultat ne subsiste pas si f est seulement supposée continue par morceaux. N'importe quelle fonction nulle sauf en un nombre fini de points fait office de contre-exemple, par exemple f définie par :

$$f(a) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]a,b] \quad f(x) = 0.$$

Remarque L'inégalité triangulaire associé à la norme p :

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}$$

est appelée **inégalité de Minkowski**.

4.9 1. Utilisons la caractérisation séquentielle des fermés. Soit (P_n) une suite de polynômes unitaires convergeant vers P. Montrons que P est unitaire.

- Tout d'abord, comme les P_n sont unitaires, et par définition de $\|\cdot\|_\infty$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|P_n\|_\infty \geqslant 1,$$

et donc, puisque $\|P_n\| \to \|P\|$, on a $\|P\|_\infty \geqslant 1$. En particulier, P est non nul.
- Notons r le degré de P et c le coefficient dominant de P. Comme $P_n \to P$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big\|P_n - P\big\|_\infty \leqslant \frac{\min(|c|,1)}{2}.$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a donc nécessairement $\deg(P_n) = r$ car :

$*$ si $\deg(P_n) < r$, alors le coefficient devant le terme de degré r de $P_n - P$ vaut c, et alors $\|P_n - P\|_\infty \geqslant |c| > \dfrac{\min(|c|, 1)}{2}\cdot$

$*$ si $\deg(P_n) > r$, alors le polynôme $P_n - P$ est unitaire, et par conséquent $\|P_n - P\|_\infty = 1 > \dfrac{\min(|c|, 1)}{2}\cdot$

- Pour $n \geqslant n_0$, comme P_n est de degré r et unitaire, on a alors :

$$\|P_n - P\|_\infty \geqslant |1 - c|.$$

Comme $\|P_n - P\|_\infty \to 0$, on a nécessairement $c = 1$.

2. Procédons par caractérisation séquentielle. Soit (P_n) une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ convergeant vers $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que $P \in \mathcal{S}$. D'après la question précédente, on sait déjà que P est unitaire. Il s'agit donc de montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire que P ne possède pas de racine complexe non réelle. Donnons-nous donc $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et prouvons que $P(z) \neq 0$.

- Tout d'abord, il a été vu à la question précédente que si l'on note $r = \deg P$, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad \deg P_n = r$.
- Ensuite, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme unitaire et scindé de degré r, alors, en notant $z_1, \ldots, z_r$ ses racines réelles, on a :

$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - z_k) \quad \text{et donc} \quad |P(z)| = \prod_{k=1}^{r} |z - z_k|.$$

Comme pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ on a

$$|z - z_k| = \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_k)^2} \geqslant |\operatorname{Im} z|,$$

on obtient :

$$|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^r.$$

Cette inégalité s'applique en particulier aux polynômes P_n pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |P_n(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^r. \qquad (\star)$$

- Il suffit alors de montrer que $P_n(z) \to P(z)$. En effet, comme $|\operatorname{Im} z|^r > 0$, un passage à la limite dans la relation $(\star)$ donnera que $|P(z)| > 0$, *i.e.* $P(z) \neq 0$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $\deg P_n = r$ et donc on peut écrire :

$$P_n = \sum_{k=0}^{r} a_k^{(n)} X^k \qquad \text{et} \qquad P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k.$$

Ainsi, on a :

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{r} a_k^{(n)} z^k \qquad \text{et} \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{r} a_k z^k.$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$, la convergence $P_n \to P$ donne la convergence de chacune des suites de coefficients : $\forall k \in [\![0, r]\!] \quad a_k^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_k$. La convergence $P_n(z) \to P(z)$ résulte alors simplement d'opérations sur les limites.

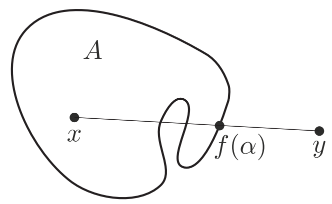
4.10 1. Il est clair que E et $\varnothing$ ont une frontière vide. Montrons que ce sont les seules. Soit A une partie vérifiant $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$.

Montrons que la frontière de A est non vide, *i.e.* $\overline{A} \cap \overline{E \setminus A} \neq \varnothing$.

Comme $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$, on peut prendre $x \in A$ et $y \in E \setminus A$.

Considérons alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & E \\ & \lambda & \longmapsto & (1-\lambda)\,x + \lambda\,y. \end{array}$$



L'ensemble $\Gamma = \big\{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda) \in A\big\}$ et non vide (car contient 0) et majoré (par 1) ; notons α sa borne supérieure. Prouvons alors que $f(\alpha) \in \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$, ce qui terminera le raisonnement.

- Par définition de la borne supérieure, on peut trouver une suite (λ_n) d'éléments de Γ qui converge vers α. Par opérations sur les limites, on a $f(\lambda_n) \to f(\alpha)$. Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\lambda_n) \in A$, on obtient $f(\alpha) \in \overline{A}$.
- $*$ Si $\alpha = 1$, alors $f(\alpha) = y \in E \setminus A \subset \overline{E \setminus A}$.

  $*$ Si $\alpha \in [0,1[$, alors on peut considérer (λ_n) une suite à valeurs dans $]\alpha, 1]$ tendant vers α. On alors $f(\lambda_n) \to f(\alpha)$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\lambda_n) \in E \setminus A$.

  Il en résulte que $f(\alpha) \in \overline{E \setminus A}$.

2. On sait que les parties E et $\varnothing$ sont à la fois des ouverts et des fermés de E. Montrons que ce sont les seules. Soit A une partie qui soit à la fois un ouvert et un fermé de E.
   - Comme A est un fermé, on a $\overline{A} = A$.
   - Comme A est un ouvert, $E \setminus A$ est un fermé et donc $\overline{E \setminus A} = E \setminus A$.

   On a alors :
$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = A \cap (E \setminus A) = \varnothing.$$
   D'après la question précédente, on a $A = E$ ou $A = \varnothing$.

4.11
- **Intérieur au sens de la norme infinie.** Montrons que, pour la norme infinie, l'intérieur de F est vide. Pour cela, donnons-nous $f \in F$ et $\varepsilon > 0$, et montrons que $B(f, \varepsilon) \not\subset F$. C'est évident car, tout simplement, la fonction $g = f + \dfrac{\varepsilon}{2}$ vérifie $\mathcal{N}_\infty(f-g) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $g \notin F$.
- **Intérieur au sens de la norme un.** Puisque la norme $\mathcal{N}_1$ et dominée par la norme $\mathcal{N}_\infty$, si l'intérieur de F est vide au sens de $\mathcal{N}_\infty$, il l'est également au sens de $\mathcal{N}_1$.
- **Adhérence au sens de la norme infinie.** Montrons qu'au sens de la norme infinie, F est un fermé, et donc égal à son adhérence. Par caractérisation séquentielle : soit $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $f \in E$; montrons que $f \in F$. La convergence uniforme de la suite (f_n) vers f (*i.e.* au sens de la norme $\mathcal{N}_\infty$) entraîne la convergence simple, c'est-à-dire :
$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \to f(x).$$

En particulier, on a $f_n(0) \to f(0)$ et $f_n(1) \to f(1)$.
Cela assure que $f(0) = f(1) = 0$, *i.e.* $f \in F$.

267

Remarque Pour montrer que F est un fermé au sens de la norme infinie, on peut aussi utiliser la proposition 15 de la page 267 en remarquant que F est l'image réciproque de $\{(0,0)\}$ par l'application continue $f \mapsto \big(f(0), f(1)\big)$.

- **Adhérence au sens de la norme un.** Montrons qu'au sens de la norme un, F est dense dans E, *i.e.* $\mathrm{Adh}(F) = E$. Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons f_n l'unique fonction égale à f sur $\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, nulle en 0 et en 1, et affine sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $\left[1 - \frac{1}{n}, 1\right]$. On a alors :
$$f_n \in F \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_1(f_n - f) \leqslant \frac{2}{n}\mathcal{N}_\infty(f).$$
La suite (f_n) est donc une suite d'éléments de F qui converge vers f (au sens de la norme $\mathcal{N}_1$). D'où le résultat.

4.12 Soit H un hyperplan de E. Supposons que H n'est pas fermé et montrons que H est dense dans E, autrement dit que $\overline{H} = E$.

- Tout d'abord, comme H est un sous-espace vectoriel, $\overline{H}$ l'est également (*cf.* exercice 38 de la page 212).
- Comme H n'est pas fermé, l'inclusion $H \subset \overline{H}$ est stricte. Cela prouve que $H = E$ car, comme H est un hyperplan de E, le seul sous-espace vectoriel qui contienne strictement H est l'espace E lui-même. Justifions-le. Considérons $a \in \overline{H} \setminus H$. Comme $a \notin H$ et que H est un hyperplan de E, les sous-espaces H et $\mathrm{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans E. Comme de plus on a $H \subset \overline{H}$ et $a \in \overline{H}$, on obtient :
$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(a) \subset \overline{H}.$$
L'inclusion $\overline{H} \subset E$ étant évidemment vraie, cela prouve que $\overline{H} = E$.

4.13 1. Il est clair que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.On a $N = \mathcal{N}_\infty \circ \varphi$ où φ est l'application linéaire :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' + 2f' + f \end{array}$$
Pour prouver que N est une norme, il suffit de prouver que φ est injective (*cf.* page 200). C'est évident car le noyau de φ est l'ensemble des solutions du problème de Cauchy :
$$f'' + 2f' + f = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = f'(0) = 0$$
dont on sait que l'unique solution est la fonction nulle.

2. Remarquons que, pour tout $f \in \mathcal{C}^2\big([0,1], \mathbb{R}\big)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big(e^x f(x)\big) = e^x \left(f''(x) + 2f'(x) + f(x)\right).$$

   - Soit $f \in E$. Pour $x \in [0,1]$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre 1, à la fonction $x \mapsto f(x)e^x$, entre les points 0 et x, donne :

   $$f(x)\, e^x = \int_0^x (x-t)\left(f''(t) + 2f'(t) + f(t)\right) e^t\, \mathrm{d}t,$$

   et donc :

   $$f(x) = e^{-x} \int_0^x (x-t)\left(f''(t) + 2f'(t) + f(t)\right) e^t\, \mathrm{d}t.$$

   Comme :

   $$\forall t \in [0,x] \quad \left|f''(t) + 2f'(t) + f(t)\right| \leqslant N(f),$$

   on obtient :

   $$|f(x)| \leqslant e^{-x} N(f) \int_0^x (x-t)e^t \mathrm{d}t$$

   ce qui donne, après une intégration par parties :

   $$|f(x)| \leqslant g(x)\, N(f) \qquad \text{avec} \qquad g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

   On a :

   $$\forall x \in [0,1] \quad g'(x) = x\, e^{-x}$$

   donc g est croissante sur $[0,1]$ et atteint ainsi son maximum en 1, maximum qui vaut $a = 1 - 2e^{-2}$.
   On a donc $\mathcal{N}_\infty \leqslant a\, N$.
   - On obtient, après calculs, que l'unique solution du problème de Cauchy :

   $$y'' + 2y' + y = 1 \qquad \text{et} \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

   est la fonction g introduite précédemment. Cette fonction appartient à E et l'on a :

   $$\mathcal{N}_\infty(g) = g(1) = a = a\, N(g).$$

   Cela prouve que la constante a obtenue est optimale.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = x^2 \sin(2\pi n x)$. La fonction f_n est deux fois dérivable et l'on a :

$$f_n'(x) = 2x \sin(2\pi n x) + 2\pi n x^2 \cos(2\pi n x)$$

et

$$f_n''(x) = 2\sin(2\pi n x) + 8\pi n x \cos(2\pi n x) - 4\pi^2 n^2 x^2 \sin(2\pi n x).$$

On a $f_n(0) = f_n'(0) = 0$, donc $f_n \in E$. On a $\mathcal{N}_\infty(f_n) \leqslant 1$ et pourtant :

$$f_n''(1) + 2f_n'(1) + f_n(1) = 12\pi n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Cela prouve que N n'est pas dominée par $\mathcal{N}_\infty$.

Chapitre 5 : Étude locale d'une application, continuité

Étude locale d'une application, continuité

5

Dans tout le chapitre :

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- en l'absence de précision supplémentaire, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et A désigne une partie de E ;
- les normes sur E et F sont toutes deux notées $\|\cdot\|$.

I Limite d'une application

1 Définitions, généralités

Définition 1

Soit $f : A \to F$ une application, ainsi que a un point adhérent à A et $\ell \in F$.
On dit que f **tend vers ℓ en a** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Notation Pour signifier que f tend vers ℓ en a, on note :

$$f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque La définition précédente peut s'écrire :

- en terme de distance :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad d(x,a) \leqslant \eta \Longrightarrow d(f(x),\ell) \leqslant \varepsilon.$$

- en terme de boules :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in B_f(a,\eta) \cap A \quad f(x) \in B_f(\ell,\varepsilon),$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad f\big(B_f(a,\eta) \cap A\big) \subset B_f(\ell,\varepsilon).$$

Attention Ne pas confondre les notations dans ce qui précède : la notation B_f est utilisée pour désigner une boule fermée et n'a aucun lien avec le nom f de l'application considérée.

Dans ce qui suit, afin d'alléger les énoncés, nous convenons qu'en l'absence de précision supplémentaire :

- f désigne une application de A dans F
- a un point adhérent à A
- ℓ un élément de F.

Lemme 1

Si $f : A \to F$ tend vers ℓ en a, alors ℓ est adhérent à $f(A)$.

Démonstration page 271

Remarque Si a appartient à A et si f admet une limite en a, alors celle-ci vaut nécessairement $f(a)$. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 2

On dit que f est continue en $a \in A$ si f admet une limite en a.

Caractérisation séquentielle de la limite

La proposition suivante va nous permettre d'utiliser les résultats déjà obtenus sur les suites au chapitre précédent pour établir rapidement de nombreuses propriétés sur les limites d'applications.

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la limite)

L'application f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers a, on a $f(u_n) \to \ell$.

Démonstration page 271

p.271 **Exercice 1** *Stabilité par restriction*

Supposons que $f : A \to F$ admette une limite ℓ en a. Si B est une partie de A telle que a soit adhérent à B, montrer que la restriction $f_{|B}$ de f à B tend également vers ℓ en a.

Corollaire 3 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

L'application f est continue en $a \in A$ si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers a, on a $f(u_n) \to f(a)$.

Unicité de la limite

Proposition 4 (Unicité de la limite)

Si deux éléments ℓ_1 et ℓ_2 de F vérifient $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Supposons que ℓ_1 et ℓ_2 soient tels que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui tend vers a (une telle suite existe car a est adhérent à A). D'après la proposition 2, on a alors $f(u_n) \to \ell_1$ et $f(u_n) \to \ell_2$. Par unicité de la limite d'une suite, il en résulte que $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition 3

On dit que f admet une limite en a s'il existe $\ell \in F$ tel que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Cet unique élément ℓ s'appelle alors la **limite de f en a** et se note $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

2 Cas d'une application à valeurs réelles : limites infinies

Pour une application à valeurs réelles, on introduit la notion de limites infinies.

Définition 4

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application, et a un point adhérent à A.

- On dit que f **tend vers $+\infty$ en a** si :
$$\forall R \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant R.$$
- On dit que f **tend vers $-\infty$ en a** si :
$$\forall R \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant R.$$

Notation On note $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ pour signifier que f tend vers $+\infty$ en a. On dit également que f admet $+\infty$ comme limite en a, et l'on note $\lim\limits_{a} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
Même principe pour $-\infty$.

p.271 **Exercice 2** Montrer que la caractérisation séquentielle de la limite (proposition 2 de la page précédente), donnée dans le cas où $\ell \in F$, s'étend naturellement aux cas $\ell = \pm\infty$.

3 Limites en l'infini

Limite lorsque $\|x\| \to +\infty$

Définition 5

Soit $f : A \to F$ une application. Supposons que A ne soit pas bornée.
On dit que tend vers ℓ lorsque $\|x\| \to +\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad \|x\| \geqslant M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Cas de la variable réelle : limites en $-\infty$ et $+\infty$

Pour une application définie sur une partie de $\mathbb{R}$, on introduit la notion de limite en $-\infty$ et $+\infty$.

Pour une partie A de $\mathbb{R}$, on étend la définition 18 de la page 211 de point adhérent de la manière suivante : on dit qu'un élément $x \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à A s'il existe une suite d'élément de A qui tend vers x.
Ainsi, on dit que $-\infty$ (respectivement $+\infty$) est adhérent à A s'il existe une suite d'éléments de A tendant vers $-\infty$ (respectivement $+\infty$).

On constate rapidement que :

- $-\infty$ est adhérent à A si, et seulement si, A n'est pas minorée ;
- $+\infty$ est adhérent à A si, et seulement si, A n'est pas majorée.

Définition 6

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f : A \to F$ une application et $\ell \in F$.

- Si $-\infty$ est adhérent à A, alors on dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ si :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \leqslant M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$
- Si $+\infty$ est adhérent à A, alors on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \geqslant M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple Dans le cas d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, qui est une application de $\mathbb{N}$ dans E, la définition précédente permet d'envisager la convergence de la suite en $+\infty$. On constate que cette définition est alors la même que celle déjà vue de la convergence d'une suite (définition 10 de la page 201).

Proposition 5 (Caractérisation séquentielle dans le cas $a = \pm\infty$)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f : A \to F$ une application, et $\ell \in F$.

- Si A est non minorée, alors f tend vers ℓ en $-\infty$ si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers $-\infty$, on a $f(u_n) \to \ell$.
- Si A est non majorée, alors f tend vers ℓ en $+\infty$ si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A tendant vers $+\infty$, on a $f(u_n) \to \ell$.

Démonstration page 272

Dans toute la suite du chapitre, en l'absence de précision supplémentaire, a désigne un point adhérent à A en l'un des sens suivants :

- **1^er^ sens :** a est un élément de E appartenant à $\mathrm{Adh}(A)$;
- **2^er^ sens :** A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et $a = +\infty$;
- **3^er^ sens :** A est une partie non minorée de $\mathbb{R}$ et $a = -\infty$;

4 Application à valeurs dans un espace produit

Dans la proposition suivante, on considère p espaces vectoriels normés $E_1, \ldots, E_p$, et l'on munit l'espace $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme produit.

Proposition 6

Si l'application f est à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_p$, et si $f_1, \ldots, f_p$ désignent les applications composantes de f, alors f tend vers

$$\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$$

en a si, et seulement si, chacune des applications f_k tend vers ℓ_k en a.

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite et le résultat sur la convergence d'une suite à valeurs dans un espace produit. Démonstration page 272

5 Prolongement par continuité

Définition 7

Si f possède une limite $\ell \in F$ en un point $a \in \overline{A} \setminus A$, alors l'application :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f} : & A \cup \{a\} & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

est continue en a, et s'appelle **prolongement de f par continuité en a**.

Remarque L'unicité de la limite entraîne que l'application $\tilde{f}$ de la définition précédente est l'*unique* prolongement de f à $A \cup \{a\}$ qui soit continu en a.

p.273

Exercice 3 *Approfondissement*

Soit X une partie de A dense dans A, et $f : X \to F$ une application continue en tout point de X. On suppose que f admet une limite finie en tout point de $A \setminus X$. Montrer que f admet un prolongement $\tilde{f} : A \to F$ continu en tout point de A.

6 Relation de comparaison

On étend ici les notations o et O déjà vues en première année pour des fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles ou complexes.

Définition 8

Soit $f : A \to F$ et $\varphi : A \to F$ deux applications. On dit que f est **dominée** par φ au voisinage de a s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :

- *Cas* $a \in \mathrm{Adh}(A)$: il existe $r > 0$ tel que :
$$\forall x \in A \cap B(a,r) \quad \|f(x)\| \leqslant C\,\|\varphi(x)\| \ ;$$
- *Cas* $a = +\infty$: il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in A \quad x \geqslant r \Longrightarrow \|f(x)\| \leqslant C\,\|\varphi(x)\| \ ;$$
- *Cas* $a = -\infty$: il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in A \quad x \leqslant r \Longrightarrow \|f(x)\| \leqslant C\,\|\varphi(x)\|.$$

On note alors $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$.

Définition 9

Soit $f : A \to F$ et $\varphi : A \to F$ deux applications. On dit que f est **négligeable** devant φ au voisinage de a si pour tout $\varepsilon > 0$:

- *Cas* $a \in \mathrm{Adh}(A)$: il existe $r > 0$ tel que :
$$\forall x \in A \cap B(a,r) \quad \|f(x)\| \leqslant \varepsilon\,\|\varphi(x)\| \ ;$$
- *Cas* $a = +\infty$: il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in A \quad x \geqslant r \Longrightarrow \|f(x)\| \leqslant \varepsilon\,\|\varphi(x)\| \ ;$$
- *Cas* $a = -\infty$: il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in A \quad x \leqslant r \Longrightarrow \|f(x)\| \leqslant \varepsilon\,\|\varphi(x)\|.$$

On note alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$.

Remarque D'après la définition précédente :

- il est équivalent de dire $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$ et $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\|\varphi\|)$;
- il est équivalent de dire $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ et $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\|\varphi\|)$.

C'est pourquoi dans la pratique, dans une relation de domination ou de négligeabilité, on se limite souvent à une fonction φ à valeurs réelles positives.

II Opérations sur les limites

Proposition 7 (Limite d'une combinaison linéaire)

Soit f_1 et f_2 deux applications de A dans F ainsi que λ_1 et λ_2 deux scalaires. Si l'on a $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1 \in F$ et $f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2 \in F$, alors :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle de la limite, et par opérations sur les suites convergentes. Démonstration page 274

Proposition 8 (Produit par une fonction à valeurs scalaires)

Si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in F$ et si φ est une fonction de A dans $\mathbb{K}$ tendant en a vers $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\varphi \times f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \varphi(x)f(x) \end{array}$ tend en a vers $\lambda\,\ell$.

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle de la limite, et par opérations sur les suites convergentes (produit d'une suite convergente par une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$).

Démonstration page 274

Proposition 9 (Inverse)

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ une fonction ne s'annulant pas.

Si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors on a $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration page 274

Remarque Dans la proposition 9, si la fonction f s'annule sur A, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ n'est pas définie sur A tout entier. En revanche, si $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors il existe un voisinage V de a tel que la restriction de f à $V \cap A$ ne s'annule pas. C'est à cette restriction que le résultat s'applique.

Quotient d'applications à valeurs scalaires Il résulte des deux résultats précédents que si $f_1 : A \to \mathbb{K}$ et $f_2 : A \to \mathbb{K}$ sont deux applications vérifiant $f_1 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2 \neq 0$, et si f_2 ne s'annule pas, alors :

$$\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\longrightarrow} \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Proposition 10 (Limite d'une fonction composée)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, ainsi que $A \subset E$ et $B \subset F$.
Soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$ deux applications, avec $f(A) \subset B$.

- Si $f \xrightarrow[a]{} b$, alors b est adhérent à B.
- Si de plus on a $g \xrightarrow[b]{} \ell$, alors $g \circ f \xrightarrow[a]{} \ell$.

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle. Démonstration page 274

Conséquence en terme de continuité ponctuelle

Les résultat précédents sur les limites donnent immédiatement des résultats analogues sur les applications continues en un point :

- toute combinaison linéaire d'applications continues en a est également continue en a ;
- tout produit d'une fonction continue en a par une fonction scalaire continue en a est également continue en a ;
- si f est continue en a avec $f(a) \neq 0$ et si f ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en a ;
- si f et g sont continues en a avec $g(a) \neq 0$ et si de plus g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a ;
- si $f : A \to B$ est continue en a et $g : B \to G$ continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

III Continuité globale

1 Applications continues

Définition 10

On dit qu'une application est **continue** si elle est continue en tout point de son domaine de définition.

Remarque La continuité de f s'écrit ainsi :

$$\forall a \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon.$$

p.274 **Exercice 4** Soit $f : A \to F$ une application continue. Montrer que si $B \subset A$, alors la restriction $f_{|B}$ est continue.

2 Application lipschitzienne

Définition 11

- Soit $k \geqslant 0$. On dit que l'application f est **k-lipschitzienne** ou **lipschitzienne de rapport k** si :
$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,\|x - y\|.$$
- Dire f est **lipschitzienne** signifie qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Remarques

1. Si f est k-lipschitzienne, alors f est k'-lipschitzienne pour tout $k' \geqslant k$.
2. L'ensemble des applications lipschitziennes de A dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,E)$: en effet, la fonction nulle est lipschitzienne, et si f_1 et f_2 sont lipschitziennes de rapports respectifs k_1 et k_2 et si λ_1 et λ_2 sont deux scalaires, alors l'application $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est lipschitzienne de rapport $|\lambda_1|\,k_1 + |\lambda_2|\,k_2$.
3. La composée d'une application k_1-lipschitzienne et d'une application k_2-lipschitzienne est une application $k_1\,k_2$-lipschitzienne.

Proposition 11

Toute application lipschitzienne est continue.

Démonstration page 274

Point méthode

Pour montrer qu'une application est continue, on commence souvent par regarder si elle est lipschitzienne car, si c'est le cas, c'est en général la manière la plus rapide de justifier la continuité.

Exemples Les applications suivantes sont 1-lipschitziennes, donc continues :

1. l'application *norme* : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$
2. pour A une partie de E, l'application *distance à A* : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}$
3. l'application *distance* : $\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$

   (E^2 étant muni de la norme produit)
4. pour $k \in [\![1,n]\!]$, l'application *k-ième composante* :
$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & E_k \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & x_k \end{array}$$
   où $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un espace produit muni de la norme produit.

p.274

Exercice 5 Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Montrer que u est k-lipschitzienne si, et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant k\|x\|.$$

p.275

Exercice 6 Montrer que si l'on dispose de deux normes équivalentes sur E et de deux normes équivalentes sur F, alors la notion d'application lipschitzienne ne dépend pas des normes choisies.

3 Opérations sur les applications continues

Les résultats suivants sont les versions globales des propositions 7 à 10.

Proposition 12 (Combinaison linéaire, produit, composée)

- Une combinaison linéaire de deux applications continues est continue.
- Le produit d'une application continue avec une application continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continue.
- La composée de deux applications continues est continue.

Remarque L'ensemble des applications continues de A dans F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,F)$. On le note $\mathcal{C}(A,F)$.

Exemples

1. On munit E^2 de la norme produit. L'application $f : \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$ est continue, comme sommes des applications *composantes* de E^2 dans E : $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ (continues car lipschitziennes).
2. On munit $\mathbb{K} \times E$ de la norme produit. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha\, x \end{array}$ est continue, comme produit des applications *composantes* (continues car lipschitziennes) $(\alpha,x) \mapsto \alpha$ de $\mathbb{K} \times E$ dans $\mathbb{K}$ et $(\alpha,x) \mapsto x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

Remarque Dans les deux exemples précédents, si l'on ne veut pas utiliser le caractère lipschitzien, alors on peut utiliser la caractérisation séquentielle et se ramener aux résultats déjà connus sur les suites. Dans le cas du premier exemple, si (x,y) est un élément de E^2, et si $(u_n,v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E^2 qui tend vers (x,y), alors on a $u_n \to x$ et $v_n \to y$, et donc, par somme de deux suites convergentes, on a :

$$f(u_n,v_n) = u_n + v_n \to x + y = f(x,y).$$

p.275

Exercice 7

Justifier que si f est continue, alors l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ est continue.

Proposition 13 (Inverse)

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ une application continue ne s'annulant pas.
L 'application *inverse* de f :

$$\frac{1}{f} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array}$$

est continue.

Démonstration. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est continue, comme composée des deux applications continues f et $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \dfrac{1}{\lambda} \end{array}\cdot$ □

Conséquence Si $f : A \to \mathbb{K}$ et $g : A \to \mathbb{K}$ sont deux applications continues à valeurs scalaires, et si de plus g ne s'annule pas, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue, comme produit des deux applications continues f et $\dfrac{1}{g}\cdot$

4 Continuité et densité

Proposition 14

Si $f : A \to F$ et $g : A \to F$ sont deux applications continues coïncidant sur une partie dense dans A, alors elles sont égales.

Principe de démonstration. Si D est une partie dense dans A, alors tout élément de D est limite d'une suite d'éléments de A. Démonstration page 275

p.275

Exercice 8 On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Montrer qu'une application continue $f : E \to F$ est linéaire si, et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

5 Images réciproques d'ouverts et de fermés par une application continue

Proposition 15

Soit $f : A \to F$ une application continue.

1. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A.
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A.

Démonstration page 276

p.277 **Exercice 9** *Réciproque du résultat précédent*

Soit $f : A \to F$ une application.

1. Montrer que si l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A, alors f est continue.
2. Montrer que si l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A, alors f est continue.

La proposition 15 s'utilise principalement dans la situation où f est définie sur E tout entier. Dans ce cas, les notions d'ouvert et fermé relatifs coïncident avec les notions d'ouvert et fermé de E, ce qui donne le résultat suivant.

Corollaire 16

Étant donné $f : E \to F$ une application continue.

1. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé.
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert.

Remarque Ce résultat peut être utilisé pour montrer qu'une partie est un ouvert ou un fermé. Par exemple, si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors :

- les ensembles $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$ sont des ouverts ;
- les ensembles $\{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = 1\}$ sont des fermés.

Exemples

1. Une manière élégante de justifier que le demi-plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ consiste à le voir comme l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ par l'application continue $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x. \end{array}$
2. L'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application continue $M \mapsto \det(M)$.

p.277

Exercice 10 Soit A et B deux fermés disjoints de E. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d(x,A) - d(x,B). \end{array}$$

1. Montrer que $\forall x \in A \quad \varphi(x) < 0$ et que $\forall x \in B \quad \varphi(x) > 0$.
2. En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V vérifiant $A \subset U$ et $B \subset V$.

6 Continuité uniforme

La définition suivante généralise la notion de continuité uniforme déjà vue pour les fonctions d'une variable réelle.

Définition 12

On dit que l'application f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x,y) \in A^2 \quad \|x-y\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 17

Si f est uniformément continue, alors f est continue.

Démonstration. Supposons f uniformément continue. Pour $a \in A$ fixé, la définition de l'uniforme continuité de f, dans laquelle on fixe à a la variable quantifiée y, donne :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que f est continue au point a.
Ceci étant valable pour tout $a \in A$, f est continue. □

Proposition 18

Si f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue.

Démonstration. Supposons que f soit k-lipschitzienne, avec $k > 0$. Alors, pour $\varepsilon > 0$, le réel $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ est tel que pour tout $(x,y) \in A^2$ vérifiant $\|x-y\| \leqslant \eta$, on a :

$$\big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant k\,\|x-y\| \leqslant k \times \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon. \qquad \square$$

Attention Les réciproques des résultats des deux exercices précédents sont fausses ! Par exemple :

- $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ est continue, mais pas uniformément continue ;
- $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est uniformément continue, mais pas lipschitzienne.

p.277 **Exercice 11** *Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité*

1. Montrer que f est uniformément continue si, et seulement si, pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que $\|a_n - b_n\| \to 0$, on a $\big\|f(a_n) - f(b_n)\big\| \to 0$.
2. En déduire que la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas uniformément continue.

IV Continuité des applications linéaires

Proposition 19

Une application *linéaire* $u : E \to F$ est continue si, et seulement s'il existe $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\,\|x\|.$$

Démonstration page 278

Remarque Une application linéaire est donc continue si, et seulement si, elle est lipschitzienne (*cf.* exercice 5 de la page 265).

p.278 **Exercice 12** Montrer qu'une application linéaire $u : E \to F$ est continue si, et seulement s'il existe $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = 1 \Longrightarrow \big\|u(x)\big\| \leqslant k.$$

Remarque D'après l'exercice précédent, pour prouver qu'une application linéaire est continue, il suffit de prouver qu'elle est bornée sur la sphère unité.

Exemples

1. On munit $\mathbb{K}^n$ de la norme infinie. Considérons l'application linéaire :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & (x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+x_2+\dots+x_n). \end{array}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $\big\|u(x)\big\|_\infty \leqslant n\,\|x\|_\infty$, donc u est continue.

2. Munissons $\mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{K})$ de la norme infinie. L'application linéaire :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t \end{array}$$

   est continue puisque, pour $f \in \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{K})$, l'inégalité de la moyenne donne :

$$\big|\varphi(f)\big| \leqslant \left(\int_0^\pi |\sin t|\,\mathrm{d}t\right) \times \mathcal{N}_\infty(f) = 2\mathcal{N}_\infty(f).$$

Remarque Les résultats déjà vus sur les applications continues donnent que :

- l'ensemble des applications linéaires continues est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$; il est noté $\mathcal{L}_c(E,F)$;
- la composée de deux applications linéaires continues est continue.

301

Nous verrons dans le chapitre suivant que toute application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie est continue. L'exercice suivant montre que ce n'est *a priori* pas vrai sans l'hypothèse « dimension finie ».

p.278

Exercice 13 Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ muni de la norme un $\mathcal{N}_1$, considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & f(1). \end{array}$$

En considérant les fonctions $f_n : t \mapsto t^n$, montrer que φ n'est pas continue.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Lemme 1 Supposons que f tende vers ℓ en a et montrons que ℓ est adhérent à $f(A)$. Il s'agit, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, de montrer que $f(A) \cap B_f(\ell, \varepsilon) \neq \varnothing$.

Comme $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit donc de trouver au moins un élément $x \in A$ tel que $\|x - a\| \leqslant \eta$. Un tel x existe car a est adhérent à A.

Proposition 2

- Supposons que f tende vers ℓ en a. Soit (u_n) une suite tendant vers a. Montrons que $f(u_n) \to \ell$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big\|f(u_n) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon. \tag{$\star$}$$
Comme $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon.$$
La convergence de la suite (u_n) vers a assure alors l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_n - a\| \leqslant \eta.$$
Ce rang n_0 vérifie la propriété ($\star$).
- Montrons l'autre implication par la contraposée : supposons que f ne tende pas vers ℓ en a, et construisons une suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers ℓ. Le fait que f ne tende pas vers ℓ en a s'écrit :
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - \ell\| > \varepsilon.$$
Cela nous assure de pouvoir trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément $u_n \in A$ vérifiant :
$$\|u_n - a\| \leqslant 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad \|f(u_n) - \ell\| \geqslant \varepsilon.$$
On construit ainsi une suite (u_n) d'éléments de A qui tend vers a et telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers ℓ.

Exercice 1 C'est immédiat par caractérisation séquentielle. En effet, si (u_n) est une suite d'éléments de B tendant vers a, alors en voyant (u_n) comme une suite à valeurs dans A, et comme $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, on a $f(u_n) \to \ell$, et donc $f_{|B}(u_n) \to \ell$.

Exercice 2 Soit $f : A \to \mathbb{R}$, et a adhérent à A. Contentons-nous de traiter le cas $+\infty$, le cas $-\infty$ s'en déduisant en considérant $-f$.

- Supposons que $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$, et montrons que pour toute suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a, on a $f(u_n) \to +\infty$. Soit (u_n) une telle suite.
Donnons-nous $M > 0$ et montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow f(u_n) \geqslant M.$$

Comme $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$, on peut considérer $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$$

Comme $u_n \to a$, on peut considérer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_n - a\| \leqslant \eta.$$

Il est alors clair que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $f(u_n) \geqslant M$.

- Réciproquement, supposons que f ne tende pas vers $+\infty$ en a. Cela signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad f(x) < M.$$

Pour un tel M, on peut donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, trouver un élément $u_n \in A$ vérifiant $\|u_n - a\| \leqslant 2^{-n}$ et $f(u_n) < M$. On construit ainsi une suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a et telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ soit majorée par M et donc ne tende pas vers $+\infty$.

Proposition 5 Traitons le cas « A non majorée » ; l'autre cas se traite de manière analogue. Supposons que A ne soit pas majorée.

- Supposons que $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et montrons que pour toute suite (u_n) d'éléments de A tendant vers $+\infty$, on a $f(u_n) \to \ell$. Soit (u_n) une telle suite.
Donnons-nous $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big\|f(u_n) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on peut considérer $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in A \quad x \geqslant M \Longrightarrow \big\|f(x) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $u_n \to +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant M.$$

Il est alors clair que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\big\|f(u_n) - \ell\big\| \leqslant \varepsilon$.

- Réciproquement, supposons que f ne tend pas vers ℓ en $+\infty$.
Cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in A \quad x \geqslant M \quad \text{et} \quad \|f(x) - \ell\| > \varepsilon.$$

Pour un tel ε, on peut donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, trouver un élément $u_n \in A$ vérifiant $u_n \geqslant n$ et $\big\|f(u_n) - \ell\big\| > \varepsilon$. On construit ainsi une suite (u_n) d'éléments de A tendant vers $+\infty$ et telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne tende pas vers ℓ.

Proposition 6

- Supposons que f tende en a vers $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$.
Soit (u_n) une suite à valeurs dans A tendant vers a. La suite $\big(f(u_n)\big)$, à valeurs dans l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$, converge alors vers ℓ.
D'après la proposition 11 de la page 204, il en résulte que les suites $\big(f_1(u_n)\big), \ldots, \big(f_p(u_n)\big)$ tendent vers $\ell_1, \ldots, \ell_p$ respectivement. Par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que les applications $f_1, \ldots, f_p$ tendent respectivement vers $\ell_1, \ldots, \ell_p$ en a.

- Réciproquement, supposons que $f_1, \dots, f_p$ tendent en a vers $\ell_1, \dots, \ell_p$ respectivement. Montrons que pour toute suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a, on a $f(u_n) \to \ell$. Soit (u_n) une telle suite. Alors, les suites
$$\big(f_1(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \big(f_p(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$
tendent respectivement vers $\ell_1, \dots, \ell_p$, ce qui entraîne (proposition 11 de la page 204) que la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ.
D'où le résultat, par caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 3 Par hypothèse, f possède une limite finie en tout point de $A \setminus X$. Comme de plus f est continue sur X, f possède en tout $x \in X$ une limite finie égale à $f(x)$. L'application :
$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{x} f \end{array}$$
est donc un prolongement de f à A.
Montrons, par caractérisation séquentielle, que $\tilde{f}$ est continue en tout point de A. Soit (x_n) une suite d'éléments de A tendant vers x. Montrons que $\tilde{f}(x_n) \to \tilde{f}(x)$.

- Tout d'abord, justifions l'existence d'une suite (y_n) d'éléments de X vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|y_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \big\|\tilde{f}(y_n) - \tilde{f}(x_n)\big\| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme X est dense dans A, on peut considérer une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tendant vers x_n. Comme $\tilde{f}(x_n) = \lim\limits_{x_n} f$, on a $f(z_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x_n)$, et donc, comme f et $\tilde{f}$ coïncident sur X, on a $\tilde{f}(z_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x_n)$. Les limites
$$z_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x_n \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}(z_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x_n)$$
assurent alors l'existence d'un rang p_0 tel que :
$$p \geqslant p_0 \Longrightarrow \|z_p - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \big\|\tilde{f}(z_p) - \tilde{f}(x_n)\big\| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
Il suffit alors de choisir un $p \geqslant p_0$ (par exemple p_0) et de fixer $y_n = z_p$.
- $*$ Comme $x_n \to x$, la propriété
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|y_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$
assure que la suite (y_n) tend également vers x. Par définition de $\tilde{f}$, on a donc $f(y_n) \to \tilde{f}(x)$.
  - $*$ De plus, comme (y_n) est à valeurs dans X et que f et $\tilde{f}$ coïncident sur X, les suites $\big(f(y_n)\big)$ et $\big(\tilde{f}(y_n)\big)$ sont égales. On a donc $\tilde{f}(y_n) \to \tilde{f}(x)$.
  - $*$ Enfin, la propriété
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big\|\tilde{f}(y_n) - \tilde{f}(x_n)\big\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$
assure que la suite $\big(\tilde{f}(x_n)\big)$ converge également vers $\tilde{f}(x)$, ce qui est le résultat souhaité.

Proposition 7 Supposons que $f_1 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A tendant vers a. Alors on a $f_1(u_n) \to \ell_1$ et $f_2(u_n) \to \ell_2$. Donc, par opérations sur les suites convergentes, la suite de terme général $\lambda_1 f(u_n)+\lambda_2 f_2(u_n)$ tend vers $\lambda_1 \ell_1+\lambda_2 \ell_2$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{\longrightarrow} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

Proposition 8 Supposons que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ et $\varphi \underset{a}{\longrightarrow} \lambda$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A tendant vers a. Alors on a $f(u_n) \to \ell$ et $\varphi(u_n) \to \lambda$. Donc, par produit d'une suite convergentes avec une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{K}$, la suite de terme général $\varphi(u_n)f(u_n)$ tend vers $\lambda\,\ell$. Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc :

$$\varphi \times f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda\,\ell.$$

Proposition 9 Soit (u_n) une suite d'éléments de A tendant vers a.
On a alors $f(u_n) \to \ell$ et donc, comme $\ell \neq 0$, on a $\dfrac{1}{f(u_n)} \to \dfrac{1}{\ell}\cdot$
Par caractérisation séquentielle de la limite, cela prouve que $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}\cdot$

Proposition 10 Soit (u_n) une suite d'éléments de A qui tend vers a. Alors, comme $f \underset{a}{\longrightarrow} b$, la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers b. Au passage, cela montre que b est un point adhérent à $f(A)$, et donc à B. Puis, comme $g \underset{b}{\longrightarrow} \ell$, la suite de terme général $g\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ.
Par caractérisation séquentielle de la limite, on a donc :

$$g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda\,\ell.$$

Exercice 4 Pour tout $b \in B$, comme f est continue, donc en particulier continue en b, on a $f \underset{b}{\longrightarrow} f(b)$. Par stabilité de la limite par restriction (*cf.* exercice 1 de la page 257), on a donc également $f_{|B} \underset{b}{\longrightarrow} f(b) = f_{|B}(b)$. Par suite, $f_{|B}$ est continue en b.

Proposition 11 Soit $f : A \to F$ une application k-lipschitzienne ; d'après la première remarque ci-dessus on peut supposer $k > 0$. Montrons que f est continue. Pour cela, fixons $a \in A$ et $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x)-f(a)\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Comme f est k-lipschitzienne, il est clair que $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ convient.

Exercice 5

- Il est clair que si u est k-lipschitzienne, alors pour tout $x \in E$ on a
$$\big\|u(x)-u(0)\big\| \leqslant k\|x-0\|,$$
c'est-à-dire $\big\|u(x)\big\| \leqslant k\|x\|$.

- Réciproquement, supposons que : $\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant k\|x\|$.
  Pour x et y dans E, on a :
$$\begin{aligned} \|u(x) - u(y)\| &= \|u(x-y)\| && \text{(linéarité de } u\text{)} \\ &\leqslant k\|x-y\| && \text{(par hypothèse sur } u\text{)} \end{aligned}$$
  ce qui montre que u est k-lipschitzienne.

Exercice 6 Soit φ_1 et φ_2 deux normes équivalentes sur E, et ψ_1 et ψ_2 deux normes équivalentes sur F. Supposons que $f : A \subset E \to F$ soit lipschitzienne pour les normes φ_1 et ψ_1, et montrons que c'est également le cas pour les normes φ_2 et ψ_2.

Soit $k \geqslant 0$ tel que $\forall (x,y) \in A^2 \quad \psi_1\big(f(x) - f(y)\big) \leqslant k\,\varphi_1(x-y)$.
Soit α_1, α_2, β_1 et β_2 des réels strictement positifs vérifiant :
$$\alpha_1\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \alpha_2\varphi_1 \qquad \text{et} \qquad \beta_1\psi_1 \leqslant \psi_2 \leqslant \beta_2\psi_1.$$
Pour $(x,y) \in A^2$, on a :
$$\begin{aligned} \psi_2\big(f(x) - f(y)\big) \leqslant \beta_2\,\psi_1\big(f(x) - f(y)\big) &\leqslant \beta_2\,k\,\varphi_1(x-y) \\ &\leqslant \beta_2\,k\,\frac{1}{\alpha_1}\,\varphi_2(x-y), \end{aligned}$$
ce qui montre que f est lipschitzienne pour les normes φ_2 et ψ_2, de rapport $\dfrac{k\,\beta_2}{\alpha_1}\cdot$

Exercice 7 Il suffit de constater que l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ est la composée des deux applications continues f et $y \mapsto \|y\|$.

Proposition 14 Soit D une partie dense dans A.
Supposons que f et g coïncident sur D, c'est-à-dire vérifient :
$$\forall x \in D \quad f(x) = g(x),$$
et montrons que f et g sont égales, c'est-à-dire :
$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x).$$
Soit $x \in A$. Par densité de D dans A, on peut considérer une suite (u_n) d'éléments de A qui tend vers x. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = g(u_n).$$
Or, par continuité de f et g sur A et donc au point x, on a :
$$f(u_n) \to f(x) \qquad \text{et} \qquad g(u_n) \to g(x).$$
Par unicité de la limite d'une suite, on a donc $f(x) = g(x)$.

Exercice 8 Un sens étant évident, il suffit de montrer l'autre.
Supposons que $f : E \to F$ soit continue et vérifie :
$$\forall (x,y) \in E \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{$\star$}$$
et montrons que f est linéaire. Comme f vérifie $(\star)$, il suffit de montrer que :
$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Fixons $x \in E$ et montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

- Tout d'abord, on remarque $f(0) = 0$, car $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$.
  On remarque également que f vérifie $\forall y \in E \quad f(-y) = -f(y)$, car :
  $$f(y) + f(-y) = f(y - y) = f(0) = 0.$$
- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx) = nf(x)$.
- Le résultat précédent s'étend :
  * d'abord pour $p \in \mathbb{Z}$, en notant $n = -p$ et en écrivant :
  $$f(px) = -f(nx) = -\big(nf(x)\big) = pf(x)\ ;$$
  * ensuite pour $q \in \mathbb{Q}$, en notant $q = \dfrac{a}{b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et en écrivant :
  $$bf(qx) = f(bqx) = f(ax) = af(x).$$

  À ce stade, on a donc :
  $$\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(qx) = qf(x).$$
- Un argument de continuité permet alors d'étendre le résultat précédent à $\mathbb{R}$ tout entier. Pour cela, il suffit de constater que les applications :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & f(\lambda x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}$$
  sont continues et coïncident sur $\mathbb{Q}$; comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, elles coïncident donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Proposition 15

1. Supposons f continue. Soit Y un fermé de F. Montrons que $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif de A, c'est-à-dire peut s'écrire comme l'intersection de A avec un fermé de E. Montrons qu'en notant X l'adhérence de $f^{-1}(Y)$, on a $f^{-1}(Y) = A \cap X$.
   - L'inclusion $f^{-1}(Y) \subset A \cap X$ est évidente, car les deux inclusions $f^{-1}(Y) \subset A$ et $f^{-1}(Y) \subset X$ le sont.
   - Montrons l'autre inclusion. Soit $x \in A \cap X$. Comme $x \in X$ et par définition de X, il existe une suite (u_n) d'éléments de $f^{-1}(Y)$ qui tend vers x. Par définition de $f^{-1}(Y)$, on peut alors considérer une suite (b_n) d'éléments de Y vérifiant :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = b_n.$$
   Comme $u_n \to x$, et par continuité de f au point x, on a alors $b_n \to f(x)$. Comme Y est un fermé, il en résulte que $f(x) \in Y$, et donc $x \in f^{-1}(Y)$.
2. Soit U un ouvert de F. Montrons que $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A.
   Soit Y le complémentaire de U dans F. D'après le premier point déjà démontré, l'image réciproque par de Y par f est un fermé relatif de A, c'est-à-dire qu'il existe un fermé X de E tel que :
   $$f^{-1}(Y) = A \cap X.$$
   On a alors :
   $$f^{-1}(U) = f^{-1}(F \setminus Y) = A \setminus f^{-1}(Y) = A \setminus (A \cap X) = A \cap (E \setminus X).$$
   Comme $E \setminus X$ est un ouvert, cela montre le résultat souhaité.

Exercice 9

1. Supposons que l'image par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A, et montrons que f est continue en tout point de A.
   Pour cela, donnons-nous $a \in A$ et $\varepsilon > 0$, et montrons qu'il existe $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - f(a)\big\| \leqslant \varepsilon. \qquad (\star)$$
   Soit $\varepsilon > 0$. La boule $B\big(f(a), \varepsilon\big)$ est un ouvert de F, donc son image réciproque par f est un ouvert relatif de A, donc s'écrit sous la forme $A \cap U$, avec U un ouvert de E. Comme U est ouvert et que $a \in U$, on peut considérer $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset U$. Il est alors clair que η vérifie la propriété $(\star)$.
2. Il a été vu dans la démonstration du second point de la proposition 15 de la page 267 que si l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A, alors l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A. On est alors ramené au premier point déjà démontré.

Exercice 10

1. Pour $x \in A$, on a $d(x, A) = 0$, et, comme $x \notin B$ et que B est fermé, on a $d(x, B) > 0$ (*cf.* exercice 30 de la page 209), et donc $\varphi(x) < 0$. De même, pour $x \in B$, on a $\varphi(x) > 0$.
2. D'après la première question, on a $A \subset \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $B \subset \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$. De plus, par opérations sur les applications continues, la fonction φ est continue sur E. Il en résulte que $U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $V = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ sont des ouverts.
   Ils sont disjoints et contiennent respectivement A et B.

Exercice 11

1. • Supposons f uniformément continue. Soit (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de A telles que $\|a_n - b_n\| \to 0$. Montrons que $\big\|f(a_n) - f(b_n)\big\| \to 0$ en revenant à la définition de la convergence vers 0 d'une suite : fixons $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe un rang n_0 tel que :
   $$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big\|f(a_n) - f(b_n)\big\| \leqslant \varepsilon.$$
   Comme f est uniformément continue, on peut considérer $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant \varepsilon.$$
   Comme $\|a_n - b_n\| \to 0$, on peut considérer un rang n_0 tel que :
   $$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|a_n - b_n\| \leqslant \eta.$$
   Cela fournit le résultat, car, pour $n \geqslant n_0$, il est clair que $\big\|f(a_n) - f(b_n)\big\| \leqslant \varepsilon$.
   • Réciproquement, supposons que f ne soit pas uniformément continue. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
   $$\forall \eta > 0 \quad \exists (x, y) \in A^2 \quad \big(\|x - y\| < \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon\big).$$
   En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut considérer $(a_n, b_n) \in A^2$ vérifiant :
   $$\|a_n - b_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \big\|f(a_n) - f(b_n)\big\| > \varepsilon.$$
   On peut ainsi construire deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de A vérifiant $\|a_n - b_n\| \to 0$ avec $\big\|f(a_n) - f(b_n)\big\|$ ne tendant pas vers 0.

2. En posant $a_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $b_n = n$, on a $|a_n - b_n| \to 0$ et :
$$\left|a_n^2 - b_n^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0,$$
ce qui prouve que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.

Proposition 19

- Supposons qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que :
$$\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\,\|x\|.$$
Alors, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a, par linéarité de u :
$$\big\|u(x) - u(y)\big\| = \big\|u(x-y)\big\| \leqslant k\|x-y\|.$$
Cela prouve que u est k-lipschitzienne donc continue.
- Réciproquement, supposons u continue. En particulier, u est continue en 0, donc il existe $\eta > 0$ vérifiant :
$$\forall x \in E \quad \|x\| \leqslant \eta \Longrightarrow \big\|u(x)\big\| \leqslant 1.$$
Pour tout vecteur $x \in E$ non nul, on a alors $u\left(\dfrac{\eta}{\|x\|}\,x\right) \leqslant 1$ puis par linéarité de u :
$$\big\|u(x)\big\| \leqslant k\,\|x\| \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{\eta}\cdot$$
Cette inégalité étant aussi vérifiée pour $x = 0$, cela prouve le résultat.

Exercice 12

- Si u est continue, alors, d'après la proposition 19 de la page 269, il existe $k \geqslant 0$ telle que :
$$\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant k\,\|x\|.$$
On a alors immédiatement :
$$\forall x \in E \quad \|x\| = 1 \Longrightarrow \big\|u(x)\big\| \leqslant k.$$
- Réciproquement, supposons qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que :
$$\forall x \in E \quad \|x\| = 1 \Longrightarrow \big\|u(x)\big\| \leqslant k.$$
Alors, pour tout vecteur x non nul, on a $u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \leqslant k$, ce qui, par linéarité de u, donne :
$$\big\|u(x)\big\| \leqslant k\,\|x\|.$$
Cette dernière inégalité étant aussi vérifiée pour $x = 0$, cela prouve, grâce à la proposition 19 de la page 269, que u est continue.

Exercice 13 Il est clair que l'application φ est linéaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\varphi(f_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_1(f_n) = \frac{1}{n+1}\cdot$$
S'il existait une constante $k \geqslant 0$ telle que $\forall f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K}) \quad \big|\varphi(f)\big| \leqslant k\,\mathcal{N}_1(f)$, alors on aurait : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leqslant \dfrac{k}{n+1}$, ce qui est faux. Donc φ n'est pas continue.

S'entraîner et approfondir

5.1 On se place dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{K}$. Les applications suivantes :

$$\varphi_1 : f \mapsto f(1) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : f \mapsto \int_0^1 f$$

sont-elles continues pour la norme $\mathcal{N}_\infty$? pour la norme $\mathcal{N}_1$?

5.2 Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $f : A \to F$ une application continue, où A est une partie de E. Montrer que l'image par f d'une partie dense dans A est dense dans $f(A)$.

5.3 *Séparation de fermés disjoints*
Soit E un espace vectoriel normé. On considère A et B deux fermés de E.

1. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to [0,1]$ vérifiant :

$$\forall x \in A \quad f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in B \quad f(x) = 1.$$

Indication : définir f à l'aide des applications $x \mapsto d(x,A)$ et $x \mapsto d(x,B)$.

2. En déduire qu'il existe deux ouverts U et V de E vérifiant :

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing.$$

5.4 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. Montrer que u est continue si, et seulement si, la partie $A = \{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\}$ est un fermé de E.

⋆ **5.5** Soit φ une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. Montrer que φ est continue si, et seulement si, son noyau est un fermé de E.

5.6 *Norme subordonnée*
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{LC}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F, dont on a vu que c'était un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

Pour $u \in \mathcal{LC}(E,F)$, on définit :

$$\|u\| = \sup\big\{\|u(x)\|\,;\ x \in B_f(0,1)\big\}.$$

1. Justifier que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{LC}(E,F) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & \|u\| \end{array}$ est bien définie et que c'est une norme sur $\mathcal{LC}(E,F)$.

Cette norme est appelée **norme subordonnée** aux normes de E et F.

2. Montrer que $\|u\|$ est le plus petit élément de l'ensemble des réels $k \geqslant 0$ vérifiant $\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant k\|x\|$.
3. Soit $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ et $v \in \mathcal{LC}(F,G)$. Montrer que :
$$\|v \circ u\| \leqslant \|u\| \times \|v\|.$$
4. Donner un exemple où l'inégalité précédente est stricte.

⋆ **5.7** On note ℓ^1 l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ converge absolument. On munit ℓ^1 de la norme :
$$\|x\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $e^{(n)}$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice n qui vaut 1. Montrer que :
$$F = \operatorname{Vect}\left(e^{(n)}\,;\; n \in \mathbb{N}\right)$$
est dense dans ℓ^1.
2. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que l'application :
$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & \ell^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n \end{array}$$
est une forme linéaire continue sur ℓ^1.
3. Réciproquement, montrer que toute forme linéaire continue sur ℓ^1 est de la forme φ_a avec a une suite réelle bornée.

⋆ **5.8** Soit $n \geqslant 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme infinie. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on note u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Montrer que u est continu et exprimer, en fonction des coefficients de A, la constante k minimale vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \big\|u(x)\big\|_\infty \leqslant k\,\|x\|_\infty.$$

5.9 Munissons $\mathbb{R}^2$ d'une de ses normes usuelles.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note f_x et f_y les applications partielles :
$$\begin{array}{rccl} f_x : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccl} f_y : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t,y) \end{array}$$

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si f est continue en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors ses applications partielles f_x et f_y sont continues respectivement en y et en x.

L'objectif de la suite de l'exercice est de montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

2. Vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les applications partielles f_x et f_y sont continues.
3. Montrer que, pourtant, l'application f n'est pas continue.

5.10 *Une limite dans chaque direction, mais pas de limite*
Munissons $\mathbb{R}^2$ d'une de ses normes usuelles. Notons Δ la première bissectrice, *i.e.* :

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

et considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \quad f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right\}$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} f_\theta : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & r & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

   possède une limite en 0.
2. Montrer que, pourtant, f ne possède pas de limite en $(0,0)$.

Solution des exercices

5.1 Les applications φ_1 et φ_2 sont linéaires. On peut donc utiliser la caractérisation de la continuité des applications linéaires (*cf.* la proposition 19 de la page 269).

- **Pour la norme $\mathcal{N}_\infty$.** Les applications φ_1 et φ_2 considérées sont continues car, pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$:
$$\left|\varphi_1(f)\right| = \left|f(1)\right| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) \qquad \text{et} \qquad \left|\varphi_2(f)\right| = \left|\int_0^1 f\right| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f).$$
- **Pour la norme $\mathcal{N}_1$.**
  * L'application φ_2 est continue car, pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$, on a :
$$\left|\varphi_2(f)\right| = \left|\int_0^1 f\right| \leqslant \mathcal{N}_1(f).$$
  * En revanche, en posant $f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ x & \longmapsto & (n+1)x^n \end{array}$ on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_1(f_n) = 1 \quad \text{et} \quad \left|\varphi_1(f_n)\right| = n+1.$$
  Cela prouve que φ_1 n'est pas continue.

5.2 Soit D une partie dense dans A. Montrer par caractérisation séquentielle que $f(D)$ est dense dans $f(A)$. Soit $y \in f(A)$. Considérons $a \in A$, un antécédent de y par f. Comme D est dense dans A, il existe une suite (u_n) d'éléments de D convergeant vers a. Comme f est continue et par composition de limites, on a alors
$$f(u_n) \to f(a) = y.$$
Comme $\bigl(f(u_n)\bigr)$ est une suite d'éléments de $f(D)$, cela prouve la densité de $f(D)$ dans $f(A)$.

5.3 1. Puisque A et B sont des fermés, on sait, d'après l'exercice 30 de la page 209, que :
$$\forall x \in E \setminus A \quad d(x,A) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in E \setminus B \quad d(x,B) > 0.$$
Comme A et B sont disjoints, il en résulte que :
$$\forall x \in E \quad d(x,A) + d(x,B) > 0.$$
On peut alors considérer l'application $f : E \mapsto \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in E \quad f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$
Cette application est continue (comme quotient d'application continues) et vérifie :
$$\forall x \in A \quad f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in B \quad f(x) = 1.$$

2. Reprenons l'application précédente et posons :
$$U = f^{-1}\Big(\Big]-\infty, \frac{1}{2}\Big[\Big) \qquad \text{et} \qquad V = f^{-1}\Big(\Big]\frac{1}{2}, +\infty\Big[\Big).$$
Les ensembles U et V ainsi définis sont disjoints, contiennent respectivement A et B, et sont des ouverts de E (comme images réciproques d'ouverts de $\mathbb{R}$ par l'application continue f).

5.4 • Si u est continue, alors A est un fermé de E, comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|u(x)\|. \end{array}$

• Réciproquement, supposons que u ne soit pas continue. Alors, u n'est pas bornée sur la boule $B_f(0,1)$ (*cf.* exercice 12 de la page 269). Cela signifie qu'on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $B_f(0,1)$ telle que $\|u(x_n)\| \to +\infty$.

En posant alors (pour n assez grand de telle sorte que $u(x_n) \neq 0$) :
$$y_n = \frac{x_n}{\|u(x_n)\|},$$
on obtient une suite (y_n) d'éléments de A tendant vers 0. Comme $0 \notin A$, cela prouve que A n'est pas un fermé de E.

5.5 Si φ est l'application nulle, alors elle est continue et son noyau est un fermé (car c'est l'espace E lui-même). Supposons désormais φ non nulle.

• On a $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}\big(\{0\}\big)$ donc, si φ est continue, alors son noyau est un fermé en tant qu'image réciproque par φ du fermé $\{0\}$.

• Réciproquement, supposons que φ ne soit pas continue. Cela signifie que φ n'est pas bornée sur la boule unité $B_f(0,1)$ de E (*cf.* exercice 12 de la page 269).

Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $B_f(0,1)$ telle que $\big\|\varphi(x_n)\big\| \to +\infty$.

Comme $\big\|\varphi(x_n)\big\| \to +\infty$, on peut considérer un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \varphi(x_n) \notin \operatorname{Ker}\varphi.$$
Pour $n \geqslant n_0$, posons alors $y_n = x_{n_0} - \dfrac{\varphi(x_{n_0})}{\varphi(x_n)} x_n$.

On constate alors que la suite $(y_n)_{n\geqslant n_0}$ est à valeurs dans $\operatorname{Ker}\varphi$ et converge vers $x_{n_0} \notin \operatorname{Ker}\varphi$. Cela prouve que $\operatorname{Ker}\varphi$ n'est pas un fermé de E.

5.6 1. • Pour $u \in \mathcal{LC}(E,F)$, la continuité de u assure que u est bornée sur $B_f(0,1)$; cela justifie la définition de $\|u\|$ (comme borne supérieure d'une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$).

• **Séparation.** Si $\|u\| = 0$, alors on a :
$$\forall x \in B_f(0,1) \quad u(x) = 0,$$
ce qui, par linéarité de u, entraîne que u est nulle.

- **Homogénéité.** Pour $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$$\begin{aligned}\|\lambda u\| &= \sup\big\{\|(\lambda u)(x)\|\,;\ x \in B_f(0,1)\big\}\\ &= \sup\big\{|\lambda|\ \|u(x)\|\,;\ x \in B_f(0,1)\big\}\\ &= |\lambda|\ \sup\big\{\|u(x)\|\,;\ x \in B_f(0,1)\big\} = |\lambda|\ \|u\|.\end{aligned}$$
- **Inégalité triangulaire.** Soit $(u,v) \in \mathcal{LC}(E,F)^2$. Par inégalité triangulaire sur la norme de F, on a :
$$\forall x \in B_f(0,1) \quad \|u(x)+v(x)\| \leqslant \|u(x)\| + \|v(x)\|,$$
et donc :
$$\|u+v\| = \sup_{x\in B_f(0,1)} \big\{\|u(x)+v(x)\|\big\} \leqslant \sup_{x\in B_f(0,1)} \big\{\|u(x)\| + \|v(x)\|\big\}$$
Cela donne le résultat souhaité car on a d'autre part :
$$\begin{aligned}\sup_{x\in B_f(0,1)} \big\{\|u(x)\| + \|v(x)\|\big\} &\leqslant \sup_{x\in B_f(0,1)} \big\{\|u(x)\|\big\} + \sup_{x\in B_f(0,1)} \big\{\|v(x)\|\big\}\\ &= \|u\| + \|v\|.\end{aligned}$$

2. • Tout d'abord, montrons que l'on a :
$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant \|u\| \times \|x\|. \qquad (\star)$$
Soit $x \in E$.
 ∗ Si $x = 0$, alors l'inégalité ci-dessus est trivialement vérifiée.
 ∗ Si $x \neq 0$, alors, comme $\dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire et par définition de $\|u\|$, on a :
$$u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leqslant \|u\|.$$
En multipliant par $\|x\|$ et par linéarité de u, on obtient $(\star)$.
 ∗ Considérons maintenant k vérifiant :
$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|,$$
et montrons que $k \geqslant \|u\|$. La propriété vérifiée par k donne *a fortiori* :
$$\forall x \in B_f(0,1) \quad \|u(x)\| \leqslant k.$$
Le réel k majore donc l'ensemble $\big\{\|u(x)\|\,;\ x \in B_f(0,1)\big\}$ dont la borne supérieure est $\|u\|$. Donc $k \geqslant \|u\|$.
3. Le résultat de la question 2 appliquée à $v \circ u$ nous dit qu'il suffit de montrer que le réel $\|u\| \times \|v\|$ vérifie :
$$\forall x \in E \quad \|v \circ u(x)\| \leqslant \big(\|u\| \times \|v\|\big)\,\|x\|.$$
Soit $x \in E$. D'après la question 2 (appliquée successivement à v et u), on a :
$$\begin{aligned}\|v \circ u(x)\| = \big\|v\big(u(x)\big)\big\| &\leqslant \|v\| \times \big\|u(x)\big\|\\ &\leqslant \|v\| \times \|u\| \times \|x\|,\end{aligned}$$
d'où le résultat.
4. Si l'on prend u nilpotent d'indice 2 et $v = u$, alors on a :
$$\|v \circ u\| = 0 \quad \text{bien que} \quad \|v\| \times \|u\| \neq 0.$$

5.7 1. Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1$. Pour $N\in\mathbb{N}$, notons $u^{(N)}=\sum\limits_{n=0}^{N}x_n e^{(n)}$.

On a, pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\left\|x-u^{(N)}\right\|=\left\|x-\sum_{n=0}^{N}x_n e_n\right\|=\sum_{n=N+1}^{+\infty}|x_n|$$

Comme la série $\sum|x_n|$ converge, on en déduit que $\left\|x-u^{(N)}\right\|\to 0$. L'élément x est donc limite de la suite $\left(u^{(N)}\right)$ d'éléments de F.

Cela prouve que F est dense dans ℓ^1.

2. Comme a est une suite bornée, on peut considérer $M\geqslant 0$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad |a_n|\leqslant M.$$

Soit $x\in\ell^1$. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad |a_n x_n|\leqslant M|x_n|.$$

Comme la série $\sum|x_n|$ converge, l'inégalité précédente assure, par comparaison, que la série $\sum|a_n x_n|$ converge également ; l'application φ_a est donc bien définie. On a de plus :

$$\left|\varphi_a(x)\right|=\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x_n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n x_n|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}M|x_n|=M\|x\|.$$

D'où la continuité de φ_a (*cf.* la proposition 19 de la page 269).

3. Soit φ une forme linéaire continue sur ℓ^1. Soit $x\in\ell^1$. Reprenons les notations $e^{(n)}$ introduites à la question 1. On a, d'après la réponse à cette même question :

$$u^{(N)}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}x\quad\text{avec}\quad u^{(N)}=\sum_{n=0}^{N}x_n e^{(n)}.$$

Comme φ est continue, on a donc :

$$\varphi\big(u^{(N)}\big)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\varphi(x).\tag{1}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $a_n=\varphi(e_n)$. On a, par linéarité de φ :

$$\varphi\big(u^{(N)}\big)=\sum_{n=0}^{N}a_n x_n.$$

Comme les suites $e^{(n)}$ sont toutes de norme 1 et que φ est continue, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, par comparaison, la convergence absolue de la série $\sum x_n$ donne la convergence absolue de la série $\sum a_n x_n$ et donc sa convergence. On a ainsi :

$$\varphi\big(u^{(N)}\big)=\sum_{n=0}^{N}a_n x_n\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x_n=\varphi_a(x).\tag{2}$$

D'après (1) et (2) et par unicité de la limite, on obtient $\varphi(x)=\varphi_a(x)$.

Cela étant vrai pour tout $x\in\ell^1$, on a $\varphi=\varphi_a$.

5.8 Notons $a_{i,j}$ les coefficients de A.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a, par définition de la norme infinie :
$$\big\|u(x)\big\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right|.$$
Par inégalité triangulaire puis en majorant $|x_j|$ par $\|x\|_\infty$, on a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:
$$\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right) \times \|x\|_\infty.$$
On a donc :
$$\big\|u(x)\big\|_\infty \leqslant k\,\|x\|_\infty, \quad \text{avec} \quad k = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$
Cela prouve que u est continue (*cf.* la proposition 19 de la page 269).
- Montrons maintenant que la constante k obtenue précédemment est optimale. Pour cela, montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :
$$\big\|u(x)\big\|_\infty = k\,\|x\|_\infty.$$
Par définition de k, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que :
$$k = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|.$$
En considérant alors le vecteur x dont les composantes valent ± 1, les signes étant choisis de telle sorte que la j-ème composante de x soit de même signe que $a_{i_0,j}$, on constate que la i_0-ème composante du vecteur $u(x)$ vaut k, ce qui assure que :
$$\big\|u(x)\big\|_\infty \geqslant k.$$
Puisque $\|x\|_\infty = 1$, on obtient $\big\|u(x)\big\|_\infty \geqslant k\|x\|_\infty$.
L'inégalité $\big\|u(x)\big\|_\infty \leqslant k\|x\|_\infty$ étant vérifiée d'après la première partie du raisonnement, on obtient :
$$\big\|u(x)\big\|_\infty = k\|x\|_\infty.$$

5.9 1.
- Constatons que :
$$f_x = f\circ\varphi_1 \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x,t). \end{array}$$
La continuité de φ_1 est évidente (par exemple, au sens de chacune des normes usuelles de $\mathbb{R}^2$, φ_1 est 1-lipschitzienne). Par continuité de φ_1 en y et de f en $\varphi_1(y) = (x,y)$, l'application f_x est continue en y.
- Pour justifier la continuité de f_y en x, on procède de même en constatant que :
$$f_y = f\circ\varphi_2 \quad \text{avec} \quad \varphi_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t,y). \end{array}$$

2. Les cas de f_x et f_y se traitent de la même manière. Intéressons-nous à f_x.
   - Pour $x \in \mathbb{R}^*$, la continuité de f_x s'obtient par opérations sur les fonctions continues, puisque :
     $$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_x(t) = \frac{xt}{x^2+t^2}.$$
   - Pour la continuité de f_0, constatons que :
     $$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f_0(t) = \frac{0 \times t}{0^2 + yt^2} = 0 = f(0,0) = f_0(0).$$

     L'application f_0 est donc l'application nulle ; par suite, elle est continue.
3. Montrons que f n'est pas continue au point $(0,0)$.
   Remarquons que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f(t,t) = \frac{t \times t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}.$$
   En notant g la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (t,t) \end{array}$, on constate que la fonction $f \circ g$ n'est pas continue puisqu'elle vaut $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^*$, et 0 en 0.

   Comme g est continue, il en résulte que f ne peut pas l'être. Plus précisément, comme la fonction $f \circ g$ n'est pas continue 0, la fonction f n'est pas continue au point $g(0)$, *i.e.* au point $(0,0)$.

5.10 1. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right\}$. Pour $r \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$f_\theta(r) = \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{r}{\cos\theta - \sin\theta}.$$
Il en résulte que la fonction f_θ tend vers 0 en 0.

2.
   - De la question précédente, il résulte que si f admet une limite en $(0,0)$, celle-ci vaut nécessairement 0.
   - D'autre part, on constate qu'en posant $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \\ t & \longmapsto & (t+t^2, t) \end{array}$, on a :
     $$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad (f \circ g)(t) = \frac{(t+t^2)^2 + t^2}{(t+t^2) - t} = 2 + 2t + t^2.$$
     La fonction $f \circ g$ tend donc vers 2 en 0. Comme g tend vers $(0,0)$ en 0, il s'ensuit que si f admet une limite en $(0,0)$, alors celle-ci vaut nécessairement 2.

   Des deux points précédents on déduit que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Chapitre 6 : Compacité, connexité par arcs, dimension finie

Compacité, connexité par arcs, dimension finie

6

Ce chapitre présente les notions de compacité et de connexité par arcs. En particulier, il propose des généralisations des deux résultats suivants vus en première année :

- le théorème affirmant que l'image d'un segment par une application continue est un segment (généralisé via la notion de compacité) ;
- le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé via la notion de connexité par arcs).

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

I Compacité

1 Définition

Définition 1

Une partie A de E est dite **compacte** si toute suite d'éléments de A possède au moins une valeur d'adhérence dans A.

Terminologie On dit aussi que A est un **compact** de E.

En d'autres termes, une partie A est compacte si toute suite d'éléments de A possède une sous-suite convergente dont la limite appartient à A.

Remarque La définition d'une partie compacte s'appuie sur la convergence de suites. Elle dépend donc de la norme utilisée. Cependant, deux normes équivalentes définissent les mêmes parties compactes (ainsi, si E est dimension finie, il n'est pas nécessaire de préciser la norme utilisée).

Attention Pour montrer qu'une partie est compacte, il ne suffit pas de montrer que toute suite possède une sous-suite convergente, il faut aussi montrer que la limite de cette sous-suite appartient à A.

Exemples

1. L'ensemble vide est compact. En effet, comme il n'existe aucune suite à valeurs dans cet ensemble, une telle suite possède toutes les propriétés que l'on veut, en particulier celle d'admettre une valeur d'adhérence appartenant à l'ensemble vide.
2. Tout singleton est compact. Plus généralement, tout partie finie est compacte.
3. Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact : c'est ce qu'affirme le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites à valeurs réelles.
4. Plus généralement, toute partie fermée bornée de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ est compacte. En effet, si A est une partie bornée et si (a_n) est une suite d'éléments de A, alors le théorème de Bolzano-Weierstrass assure que l'on peut extraite de (a_n) une sous-suite convergente. Si de plus A est un fermé, alors la limite de cette sous-suite appartient nécessairement dans A.

p.306 **Exercice 1** Soit F un sous-espace vectoriel de E, et A une partie de F. Montrer que A est un compact de E si, et seulement si, A est un compact de F.

Remarque L'exercice précédent met en évidence le caractère intrinsèque de la notion de compact : le caractère compact d'une partie ne dépend que de la norme utilisée, et non de l'espace vectoriel normé E dans lequel on se place.
Sur ce point, la notion de compact diffère de la notion d'ouvert et de fermé. Par exemple :

- étant donnés deux réels a et b vérifiant $a < b$, l'intervalle ouvert $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors que ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$ (*cf.* exercice 24 de la page 207) ;
- l'exercice 18 de la page 301 fournit un exemple de sous-espace vectoriel de E qui n'est pas un fermé de E (et qui est pourtant évidemment un fermé de lui-même !)

Théorème 1

Une suite à valeurs dans une partie compacte est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Principe de démonstration. Pour le sens non trivial : si une suite possède une unique valeur d'adhérence a mais ne converge pas, alors on peut en extraire une sous-suite ne possédant pas a comme valeur d'adhérence, et donc qui en possède une autre... Démonstration page 306

Proposition 2

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Principe de démonstration. Par l'absurde... Démonstration page 306

Attention La réciproque de la proposition 2 est vraie si E est de dimension finie (*cf.* le théorème 19 de la page 301), mais fausse dans le cas général, comme le montre l'exercice 2.

Remarque Dans l'énoncé de la proposition 2, il faudrait en toute rigueur préciser « fermée *dans* E », puisque la notion de fermé dépend a priori de l'espace vectoriel dans lequel on travaille. Cependant, puisque la notion de compact, elle, n'en dépend pas, la conclusion est valable quel que soit l'espace vectoriel : ainsi, une partie compacte est un fermé de n'importe quel espace vectoriel qui la contient.

Point méthode

Si une suite (u_n) est telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \neq p \Longrightarrow \|u_n - u_p\| \geqslant \alpha,$$

alors (u_n) ne possède aucune sous-suite convergente. Ainsi, pour montrer qu'une partie A n'est pas compacte, il suffit d'exhiber une suite d'éléments de A vérifiant la propriété ci-dessus (*cf.* exercice 2).

p.306 **Exercice 2** *Une partie fermée et bornée mais non compacte*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\left\|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k\right\|_\infty = \max\limits_{k \in [\![0,n]\!]} |a_k|$.

Notons $A = B_f(0,1)$ la boule unité fermée de E. Justifier que A, bien qu'étant une partie fermée et bornée, n'est pas compacte.

Proposition 3

Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.

Principe de démonstration. Rappelons qu'un fermé (relatif) de A est de la forme $A \cap F$ avec F un fermé de E. Démonstration page 307

Proposition 4

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Si A et B sont respectivement des parties compactes de E et F, alors $A \times B$ est une partie compacte de l'espace produit $E \times F$ (muni de la norme produit).

Principe de démonstration. Étant donné une suite à valeurs dans $A \times B$, on procède à deux extractions successives. Démonstration page 307

Une récurrence permet de généraliser le résultat précédent à un nombre fini quelconque de parties compactes :

Corollaire 5

Soit $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels normés. Si $A_1, \dots, A_p$ sont des parties compactes de $E_1, \dots, E_p$ respectivement, alors le produit $A_1 \times \cdots \times A_p$ est une partie compacte de l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ (muni de la norme produit).

Exemple Si $\left(u_n^{(1)}\right), \dots, \left(u_n^{(p)}\right)$ sont p suites respectivement à valeurs dans des compacts $A_1, \dots, A_n$, alors le résultat précédent appliqué à la suite (v_n) de terme général

$$v_n = \left(u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(p)}\right)$$

assure l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $\left(v_{\varphi(n)}\right)$ converge, c'est-à-dire telle que les suites $\left(u_{\varphi(n)}^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \left(u_{\varphi(n)}^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

p.307

Exercice 3 *Parties compactes de $\mathbb{K}^n$ muni la norme infinie*

Montrer qu'une partie de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte si, et seulement si, c'est une partie fermée bornée.

Remarque Comme toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes, le résultat de l'exercice précédent est valable quelle que soit la norme considérée (on obtient ainsi un cas particulier du théorème 19 de la page 301).

p.307

Exercice 4 *Application de l'exercice précédent*

Montrer que l'ensemble suivant est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$:

$$K = \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \;\middle|\; \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\right\}$$

2 Applications continues sur une partie compacte

Proposition 6 (Image d'un compact par une application continue)

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Démonstration page 307

Exemple : enveloppe convexe d'une famille finie

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie d'éléments de E. L'enveloppe convexe de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est, par définition, l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de $x_1, \dots, x_n$, *i.e.* les combinaisons linéaires $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ à coefficients positifs de somme 1 (*cf.* exercice 3.1 de la page 176).

Autrement dit, l'enveloppe convexe de $(x_1, \ldots, x_n)$ est l'image du sous-ensemble :

$$K = \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \;\middle|\; \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\right\}$$

par l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n. \end{array}$$

Étant donné que K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ d'après l'exercice 4 de la page précédente) et que l'application f est continue, on en déduit que l'enveloppe convexe de $(x_1, \ldots, x_n)$ est une partie compacte de E.

p.308

Exercice 5 Soit A une partie compacte de E, et $f : A \to F$ une application continue et injective. Notons $B = f(A)$ et considérons l'application $g : B \to E$ qui à un élément de B associe son unique antécédent par f.

1. Montrer que pour toute partie X de E, on a $g^{-1}(X) = f(X \cap A)$.
2. En déduire que g est continue.

Cas des fonctions à valeurs réelles

Corollaire 7 (Théorème des bornes atteintes)

Soit A une partie compacte non vide. Alors, toute application continue de A dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration page 308

Exemples

1. Soit A une partie compacte non vide de E, et $f : A \to F$ une application continue. Alors l'application $\|f\|$ est bornée et atteint ses bornes.
2. *Distance à un compact*
   Soit A une partie compacte non vide de E, et $x_0 \in E$. L'application $x \mapsto d(x_0, x)$ est continue, donc sa restriction à A est bornée et atteint ses bornes ; en particulier cette restriction est minorée et atteint sa borne inférieure. Cela assure l'existence de $a \in A$ tel que la distance de x_0 à A soit atteinte en a, *i.e.* :
   $$d(x_0, a) = \inf_{x \in A} d(x_0, x) = d(x_0, A).$$
3. *Distance entre deux compacts*
   Soit A et B deux compacts non vides de E. L'application :
   $$\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$
   est continue. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, cela assure l'existence d'un couple $(a, b) \in A \times B$ *réalisant la distance entre A et B*, c'est-à-dire tel que :
   $$d(a, b) = \inf_{(x,y) \in A \times B} d(x, y) = d(A, B).$$

p.308

Exercice 6 Soit A un compact non vide. Montrer l'existence de $(a_1, a_2) \in A^2$ tel que le diamètre de A, noté $\delta(A)$, soit la distance de a_1 à a_2, c'est-à-dire tel que :

$$d(a_1, a_2) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x, y) = \delta(A).$$

p.308

Exercice 7 Considérons la fonction $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{e^{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}. \end{array}$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $R > 0$ tel que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0, R) \quad \bigl|f(x, y)\bigr| > a.$$
2. En utilisant alors le corollaire 7 de la page précédente, justifier que g possède un minimum global.

Uniforme continuité de toute application continue sur un compact

Théorème 8 (Théorème de Heine)
Toute application continue sur un compact est uniformément continue.

Démonstration page 309

II Connexité par arcs

1 Chemins

Définition 2
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé, ainsi que $x \in A$ et $y \in A$.

- Un **chemin joignant x à y dans A** est une application continue p, définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans A et telle que $p(a) = x$ et $p(b) = y$.
- Si un tel chemin existe, on dit que les points x et y sont **reliés par un chemin dans A**.

Exemple Si A est une partie convexe, alors deux points quelconques x et y de A sont reliés dans A par le chemin $\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & (1-t)\,x + t\,y. \end{array}$

p.309

Exercice 8 *Changement de paramétrage*

Soit x et y deux points d'une partie A. Supposons qu'il existe un chemin $p: [a, b] \to A$ reliant x à y. Montrer que pour tout segment $[c, d]$ avec $c < d$, il existe un chemin $\widetilde{p}: [c, d] \to A$ reliant x à y.

Remarques Il résulte de l'exercice précédent que, lorsque deux points sont reliés par un chemin, on peut considérer un chemin défini sur n'importe quelle segment non réduit à un point. Il est assez courant de considérer un chemin défini sur le segment $[0,1]$.

2 Composantes connexes par arcs

Proposition 9

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé. La relation « x et y sont reliés par un chemin dans A » est une relation d'équivalence sur A.

Ses classes d'équivalences sont appelées les **composantes connexes par arcs de A**.

Démonstration page 309

Remarques

1. Par transitivité, pour montrer que deux points x et y de A sont reliés par un chemin dans A, il suffit de trouver une suite finie $(u_0,\dots,u_n)$ de points de A avec $u_0 = x$, $u_n = y$ et telle que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, u_k et u_{k+1} sont reliés par un chemin dans A.
2. Toute partie est la réunion de ses composantes connexes par arcs.
3. Les composantes connexes par arcs d'une partie sont deux à deux disjointes.

p.310

Exercice 9

Montrer que les composantes connexes par arcs d'un ouvert sont des ouverts.

Définition 3

On dit que A est **connexe par arcs** s'il n'a qu'une seule composante connexe par arcs, ou, de manière équivalente, si deux éléments quelconques de A sont reliés par un chemin dans A.

Exemples

1. Toute composante connexe par arcs est connexe par arcs.
2. Toute partie convexe est connexe par arcs.
3. Tout sous-espace affine d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.
4. Tout espace vectoriel normé est connexe par arcs.

p.310

Exercice 10 Soit $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est-il connexe par arcs ? Quelles sont ses composantes connexes par arcs ?

p.310 **Exercice 11** Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ est connexe par arcs.

Remarque En particulier, l'ensemble $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

p.310 **Exercice 12** Soit E un espace vectoriel normé de dimension au moins 2.

1. Montrer que $E \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.
2. En déduire que pour tout $a \in E$, l'ensemble $E \setminus \{a\}$ est connexe par arcs.

Attention En général, la réunion ou l'intersection de parties connexes par arcs ne sont pas connexes par arcs.

p.311 **Exercice 13** Soit A_1 et A_2 deux connexes par arcs d'intersection non vide. Montrer que $A_1 \cup A_2$ est connexe par arcs.

Définition 4

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé.

- Étant donné $a \in A$, on dit que est **étoilée par rapport à a** si :
$$\forall x \in A \quad [a, x] \subset A.$$
- On dit que A est **étoilée** s'il existe $a \in A$ tel que A soit étoilée par rapport à a.

p.311 **Exercice 14** Montrer que toute partie étoilée est connexe par arcs.

Remarque La réciproque du résultat de l'exercice précédent est fausse ; par exemple, dans $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est connexe par arcs mais n'est pas étoilé.

3 Parties connexes par arcs de IR

Proposition 10

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Principe de démonstration. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont ses parties convexes. Il reste donc à montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs si, et seulement si, elle est convexe.

Démonstration page 311

p.311 **Exercice 15** Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux.

4 Image continue d'un connexe par arcs

Proposition 11

L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Démonstration page 312

Exemple Si E est un espace vectoriel normé réel de dimension (éventuellement infinie) au moins 2, la sphère unité de E est connexe par arcs.
C'est en effet l'image de $E \setminus \{0\}$ (qui est connexe par arcs, d'après l'exercice 12 de la page précédente) par l'application continue :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \setminus \{0\} & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|}. \end{array}$$

Corollaire 12

Si f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors l'image par f de toute partie connexe par arcs est un intervalle.

Démonstration. C'est immédiat d'après la proposition 11 puisque les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. □

Remarque Ce résultat est une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires vu en première année disant que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

p.312 **Exercice 16** Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.

p.312 **Exercice 17** Soit A une partie connexe par arcs de E.

1. Soit B une partie de A. Montrer que si B est à la fois un ouvert relatif à A et un fermé relatif à A, alors on a $B = \varnothing$ ou $B = A$.
2. Montrer que A ne peut pas s'écrire comme la réunion de deux ouverts relatifs non vides et disjoints.

III Espaces vectoriels normés de dimension finie

1 Équivalence des normes

Nous allons d'abord démontrer l'équivalence des normes dans $\mathbb{K}^p$, puis la généraliser à tout espace de dimension finie.

Énonçons tout d'abord le lemme suivant, qui a déjà été démontré précédemment (*cf.* exercice 3 de la page 293).

Lemme 13

Dans $\mathbb{K}^p$ muni de la norme infinie, toute partie fermée bornée est compacte.

Théorème 14

Toutes les normes de $\mathbb{K}^p$ sont équivalentes.

Principe de démonstration. Par transitivité, il suffit de montrer que toutes les normes sur $\mathbb{K}^p$ sont équivalentes à la norme infinie. Démonstration (non exigible) page 313

Théorème 15

Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration page 314

Remarque Le fait que dans un espace de dimension finie toutes les normes soient équivalentes entraîne que beaucoup de notions sont indépendantes de la norme choisie :

- caractère ouvert, fermé, borné d'une partie ;
- intérieur, adhérence, frontière d'une partie ;
- limites de suites, limites de fonctions, continuité ;
- parties compactes, connexes par arcs.

Pour évoquer ces notions, il n'est pas nécessaire de préciser la norme choisie. Ainsi, la phrase « Soit E un espace de dimension finie et A une partie bornée de E » a un sens : le caractère borné de A ne dépend pas de la norme dont E est muni.

2 Utilisation des coordonnées dans une base

Le résultat suivant indique que, dans un espace de dimension finie, la convergence d'une suite est équivalente à celle de ses suites coordonnées dans une base.

Proposition 16

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$. Soit (a_n) une suite à valeurs dans E. Notons $(a_n^{(1)}), \dots, (a_n^{(p)})$ les suites « coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ », c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \sum_{k=1}^{p} a_n^{(k)}\, e_k.$$

Étant donné $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \ell_k\, e_k$ appartenant à E, il est équivalent de dire :

(i) la suite (a_n) converge vers ℓ ;

(ii) pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite $(a_n^{(k)})$ converge vers ℓ_k.

Principe de démonstration. Démonstration page 314

Utiliser la norme infinie dans la base $\mathcal{B}$.

De la même façon, si f est une application à valeurs dans un espace de dimension finie, alors l'étude de la limite de f en un point, ou encore l'étude de la continuité de f, se ramène à celle de ses applications coordonnées dans une base.

Proposition 17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, ainsi que A une partie de E. Soit $f : A \to E$ une application à valeurs dans E (A étant une partie quelconque d'un espace vectoriel normé). Notons $(f_1, \dots, f_p)$ les applications « coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$ », c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x \in A \quad f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\, e_k.$$

Pour $a \in A$ et $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \ell_k\, e_k$ appartenant à E, il est équivalent de dire :

(i) l'application f admet ℓ comme limite en a ;

(ii) pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, l'application f_k tend vers ℓ_k en a.

Principe de démonstration. Démonstration page 314

Utiliser la norme infinie dans la base $\mathcal{B}$.

3 Parties compactes en dimension finie

Théorème 18 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence, *i.e.* admet au moins une sous suite convergente.

Principe de démonstration. Démonstration page 314

Travailler avec la norme infinie dans une base et utiliser les suites coordonnées.

Théorème 19

Les parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie sont ses parties fermées bornées.

Principe de démonstration. Démonstration page 315

Un sens a déjà été prouvé. Pour l'autre, utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Proposition 20

Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est un fermé.

Principe de démonstration. Par caractérisation séquentielle. Démonstration page 315

L'exercice suivant donne l'exemple d'un sous-espace vectoriel non fermé, ce qui justifie l'importance de l'hypothèse « F est de dimension finie » dans la proposition 20.

p.315 **Exercice 18** *Un sous-espace vectoriel non fermé*

Soit E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme infinie $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Montrer que l'ensemble F des suites presque nulles (*i.e.* nulles à partir d'un certain rang) est un sous-espace vectoriel de E qui n'est pas un fermé de E.

4 Continuité des applications linéaires, polynomiales et multilinéaires

Applications linéaires

Théorème 21

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

Principe de démonstration. Utiliser la caractérisation de la continuité d'une application linéaire donnée par la proposition 19 de la page 269. Démonstration page 315

Exemple Si E est de dimension finie, alors toute forme linéaire est continue ; en particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la forme linéaire « i-ème coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ » est continue :

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k & \longmapsto & x_i. \end{array}$$

Fonctions polynomiales

On appelle fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ toute application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ s'écrivant comme une combinaison linéaire d'applications qui sont elles-mêmes des produits de fonctions coordonnées. Plus précisément :

Définition 5

Une application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est dite **polynomiale** s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_{k_1,\ldots,k_n})_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ telle que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Terminologie Avec les notations ci-dessus, si $f \neq 0$, le **degré** de f est :

$$\max\left\{k_1 + \cdots + k_n \mid \lambda_{k_1,\ldots,k_n} \neq 0\right\}.$$

Par convention, le degré de l'application nulle vaut $-\infty$.

Exemple L'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & xy - x^3 z^4 + 4xyz^2 \end{array}$ est polynomiale de degré 7.

La notion de fonction polynomiale se généralise à n'importe quel espace de dimension finie :

Définition 6

Supposons E de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Une application $f : E \to \mathbb{K}$ est dite **polynomiale** s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_{k_1,\ldots,k_n})_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ telle que :

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E \qquad f(x) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Remarques

1. Reprenons les notations de la définition précédente. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons π_i la forme linéaire k-ième coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire :

$$\pi_i \ : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k & \longmapsto & x_i. \end{array}$$

Alors, l'application f s'exprime à l'aide des formes linéaires $\pi_1, \ldots, \pi_n$:

$$f = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\ldots,k_n} \pi_1^{k_1} \cdots \pi_n^{k_n}. \qquad (\star)$$

2. La définition précédente ne dépend pas de la base choisie. En effet, si $\widetilde{\mathcal{B}}$ désigne une autre base de E, et si $\widetilde{\pi_1}, \ldots, \widetilde{\pi_n}$ désignent les formes linéaires coordonnées dans cette base, alors on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \pi_k \in \operatorname{Vect}\left(\widetilde{\pi_1}, \ldots, \widetilde{\pi_n}\right).$$

   Donc, si f vérifie une relation de la forme $(\star)$, en écrivant chaque π_k comme combinaison linéaire de $\widetilde{\pi_1}, \ldots, \widetilde{\pi_n}$, on peut montrer que f vérifie encore une relation de la forme $(\star)$ vis-à-vis des $\widetilde{\pi_k}$ (évidement, avec a priori d'autres valeurs pour les $\lambda_{k_1,\ldots,k_n}$).

3. Une application $f : E \to \mathbb{K}$ est polynomiale si, et seulement si, on peut l'écrire sous la forme :

$$f = g \circ \varphi,$$

   avec $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ polynomiale et $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$ l'application qui à un vecteur de E associe la n-liste de ses composantes dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Toute fonction polynomiale s'obtient donc, par produits et combinaisons linéaires, à partir des formes linéaires coordonnées. Comme celles-ci sont continues (comme toute application linéaire en dimension finie), on obtient le résultat suivant :

Proposition 22

Toute application polynomiale est continue.

Corollaire 23

L'application $\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$ continue.

Démonstration page 316

p.316

Exercice 19

1. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \operatorname{Com} A \end{array}$ est continue.
2. En déduire que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$ est continue.

p.316

Exercice 20 Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Remarque Sur la connexité par arcs et les ensembles $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, on pourra regarder les exercices 6.19 et 6.18.

Applications multilinéaires

Théorème 24

Soit $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels normés. Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie, alors toute application p-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F est continue.

Principe de démonstration. Si $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est p-linéaire, alors f s'exprime à l'aide des applications coordonnées dans une base. Démonstration page 317

Exemple Si E est de dimension finie, et si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & (u_1, \dots, u_n) \\ \mathbb{K} & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \end{array}$$

est continue.

p.317

Exercice 21

1. Justifier la continuité de l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA\,A. \end{array}$$

2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 25

Soit $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels normés. Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie et si f est une application p-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F, alors il existe une constante positive C vérifiant :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad \|f(x_1, \dots, x_p)\| \leqslant C \|x_1\| \times \cdots \times \|x_p\|.$$

Principe de démonstration. Se ramener à étudier f sur la boule unité de $E_1 \times \cdots \times E_p$ muni de la norme produit. Démonstration page 318

Remarque Dans le corollaire 25, les normes choisies sur $E_1, \dots, E_p$ ont peu d'importance puisque $E_1, \dots, E_p$ sont supposés de dimension finie. En revanche, il est à noter que, bien que F ne soit pas supposé de dimension finie, le résultat est vrai quelle que soit la norme choisie.

p.318

Exercice 22 *Norme sous-multiplicative*

Soit $(E,+,\cdot,\times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie. En considérant l'application qui à un couple de deux éléments de E associe leur produit :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x \times y, \end{array}$$

montrer qu'il existe une norme N sur E qui soit sous-multiplicative, c'est-à-dire vérifiant :

$$N(x \times y) \leqslant N(x)\, N(y).$$

Remarque Le résultat de cet exercice assure, en particulier, l'existence d'une norme sous-multiplicative sur les $\mathbb{K}$-algèbres de dimension finie suivantes :

$$\mathbb{K}_n[X], \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathcal{L}(\mathbb{K}^n).$$

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 C'est évident d'après la définition 1 de la page 290 : le fait que toute suite d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A ne dépend pas du fait que l'on considère A comme une partie de E ou de F.

Théorème 1

- Un sens est évident : si (a_n) est une suite convergente, alors elle possède sa limite comme unique valeur d'adhérence.
- Montrons l'autre sens. Soit (a_n) une suite d'éléments de A possédant une unique valeur d'adhérence α ; montrons que (a_n) converge vers α.
  Par l'absurde : supposons que (a_n) ne converge pas vers α.
  Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
  $$\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant n_0 \quad \|a_n - \alpha\| > \varepsilon.$$
  Cela permet de construire une sous-suite $(b_n) = \big(a_{\varphi(n)}\big)$ vérifiant :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|b_n - \alpha\| > \varepsilon. \tag{$\star$}$$
  La suite (b_n) étant à valeurs dans le compact A, elle possède au moins une valeur d'adhérence β. La propriété $(\star)$ assure que $\beta \neq \alpha$. Comme β est valeur d'adhérence d'une sous-suite de (a_n), β est également valeur d'adhérence de (a_n). La suite (a_n) possède donc au moins deux valeurs d'adhérence, ce qui contredit l'hypothèse initiale. D'où le résultat.

Proposition 2

- Supposons que A ne soit pas une partie fermée. Alors on peut trouver une suite (a_n) d'éléments de A qui converge mais dont la limite n'appartient pas à A. L'unique valeur d'adhérence d'une suite convergente étant sa limite, la suite (a_n) ne possède pas de valeur d'adhérence dans A. Donc A n'est pas compacte.
- Supposons que A ne soit pas bornée. Alors on a :
  $$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \|a\| > M.$$
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un élément a_n de A vérifiant $\|a_n\| > n$. On construit ainsi une suite (a_n) d'éléments de A vérifiant :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n\| > n.$$
  Il est clair qu'une telle suite n'admet aucune sous-suite convergente : si $\big(a_{\varphi(n)}\big)$ est une sous-suite de (a_n), alors on a :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_{\varphi(n)}\| \geqslant \varphi(n) \geqslant n,$$
  La sous-suite $\big(a_{\varphi(n)}\big)$ n'est donc pas bornée, elle est donc divergente.

Exercice 2

- Tout d'abord, A est une boule fermée, donc A est une partie fermée et bornée.
- Considérons la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tous les éléments de la suite sont de norme 1, donc appartiennent à A. En revanche, pour tout $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_1 \neq n_2$, on a $\left\|X^{n_1} - X^{n_2}\right\| = 1$. Il est donc impossible d'extraire de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente. Donc A n'est pas compacte.

Proposition 3 Soit A une partie compacte, et B une partie fermée de A. On peut trouver F un fermé de E tel que $B = A \cap F$. Si (b_n) est une suite d'éléments de B, alors, étant donné que $B \subset A$ et que A est compacte, on peut extraire de (b_n) une sous-suite convergeant vers un élément de A. Comme (b_n) est une suite à valeurs dans F que F est un fermé, la limite de (b_n) appartient aussi à F. Comme $B = F \cap A$, la limite de (b_n) appartient finalement à B, ce qui prouve que B est compacte.

Proposition 4 Soit $\big((x_n, y_n)\big)$ une suite d'éléments de $A \times B$.

- Comme A est compacte, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $\big(x_{\varphi_1(n)}\big)$ convergeant vers un élément a de A.
- Puis, comme B est compacte, on peut extraire de $\big(y_{\varphi_1(n)}\big)$ une sous-suite $\big(y_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}\big)$ convergeant vers un élément b de B.
- Comme $\big(x_{\varphi_1(n)}\big)$ converge vers a, il en est de même pour sa sous-suite $\big(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}\big)$. La suite de terme général $\big(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}, y_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}\big)$ est alors une sous-suite de $\big((x_n, y_n)\big)$ qui converge vers l'élément (a, b) de $A \times B$.

Cela montre que $A \times B$ est une partie compacte.

Exercice 3

- Un des sens est donné par la proposition 2 de la page 291 : pour qu'une partie soit compacte, il est nécessaire qu'elle soit fermée et bornée.
- Réciproquement, soit A est une partie fermée et bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
  Alors, en considérant M un réel vérifiant :
  $$\forall a \in A \quad \|a\|_\infty \leqslant M,$$
  et en notant $D_f(0, M) = \{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leqslant M\}$, on a $A \subset D_f(0, M)^n$. Comme $D_f(0, M)$ est un compact (en tant que partie fermée et bornée de $\mathbb{K}$), on en déduit que le produit $D_f(0, M)^n$ est un compact de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
  Alors, en tant que partie fermée d'une partie compacte, A est compacte.

Exercice 4 Travaillons avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

- L'ensemble K est borné car :
  $$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K \quad \big\|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i| \leqslant 1.$$
- D'autre, part K est un fermé relatif de $(\mathbb{R}_+)^n$ car il s'écrit $\varphi^{-1}(\{1\})$ où φ est l'application continue :
  $$\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+)^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & \lambda_1 + \cdots + \lambda_n. \end{array}$$
  Comme $(\mathbb{R}_+)^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, il en résulte que K est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Donc, d'après l'exercice précédent, K est une partie compacte de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 6 Soit X une partie de E, $f : X \to F$ une application continue et A une partie compacte incluse dans X. Montrons que $f(A)$ est une partie compacte de F. Soit (b_n) une suite d'éléments de $f(A)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $a_n \in A$

tel que $f(a_n) = b_n$. Puisque A est compact, on peut extraire de (a_n) une sous-suite convergente $\big(a_{\varphi(n)}\big)$. Notons α la limite de $\big(a_{\varphi(n)}\big)$; alors, par continuité de f, on a $f\big(a_{\varphi(n)}\big) \to f(\alpha)$, c'est-à-dire $b_{\varphi(n)} \to f(\alpha)$. La suite (b_n) possède donc une valeur d'adhérence dans $f(A)$. Cela montre que $f(A)$ est compacte.

Exercice 5

1. Soit $X \subset E$. Montrer que $g^{-1}(X) = f(X \cap A)$ par double inclusion :
   - Soit $y \in g^{-1}(X)$. On a alors $g(y) \in X$. Par définition de g, on a aussi $g(y) \in A$, et donc $g(y) \in X \cap A$. Puis, comme $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f, on a $f\big(g(y)\big) = y$. Comme $g(y) \in X \cap A$, on a donc bien $y \in f(X \cap A)$.
   - Soit $y \in f(X \cap A)$. L'unique antécédent de y par f se situe alors dans $X \cap A$, donc dans X. On a donc $g(y) \in X$, c'est-à-dire $y \in g^{-1}(X)$.
2. Soit X une partie fermée de E. Montrons que $g^{-1}(X)$ est un fermé relatif de B. En tant que fermé relatif de A, l'intersection $X \cap A$ est compacte (*cf.* la proposition 3 de la page 292). Comme f est continue, la proposition 6 de la page 293 assure alors que $f(X \cap A)$ est une partie compacte de F, donc un fermé de F, donc un fermé de B. L'égalité obtenue à la question précédente :
$$g^{-1}(X) = f(X \cap A).$$
   donne alors que $g^{-1}(X)$ est un fermé relatif de B. D'où la continuité de g.

Corollaire 7 Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue, où A est une partie compacte. D'après la proposition 6 de la page 293, l'image de A par f est un compact, donc :

- $f(A)$ est bornée, ce qui assure que f est bornée ;
- $f(A)$ est fermée, ce qui assure que les bornes de f sont atteintes.

Exercice 6 Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} A^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y). \end{array}$ La fonction f est continue et définie sur une partie compacte (comme A est compacte, A^2 l'est aussi). Elle est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle admet un maximum, ce qui justifie l'existence d'un couple $(x,y) \in A^2$ tel que $\delta(A) = d(x,y)$.

Exercice 7

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On remarque que $g(x,y) = \varphi\big(\big\|(x,y)\big\|_2\big)$ avec $\varphi : r \mapsto \dfrac{e^{r^2}}{1+r^2}\cdot$
   Par croissances comparées, on a $\varphi(r) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   On en déduit qu'il existe $R > 0$ tel que :
$$r > R \Longrightarrow \big|\varphi(r)\big| > a,$$
   et donc :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0,R) \quad \big|g(x,y)\big| > a.$$

2. D'après la question précédente (pour $a = g(0,0)$), il existe $R > 0$ tel que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0,R) \quad \big|g(x,y)\big| > g(0,0). \qquad (\star)$$
Comme g est continue et que le disque fermé $D_f(0,R)$ est compact, le corollaire 7 de la page 294 assure que la restriction de g à $D_f(0,R)$ est bornée et atteint ses bornes ; notons m son minimum.
Comme $(0,0) \in D_f(0,R)$, on a $m \leqslant g(0,0)$, et donc $(\star)$ donne :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0,R) \quad \big|g(x,y)\big| > m.$$
Il en résulte que m est le minimum global de la fonction g.

Théorème 8 Soit A une partie compacte de E et $f : A \to F$ une application continue. Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue. En niant la définition de l'uniforme continuité, on obtient l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que :
$$\forall \eta > 0 \quad \exists (x,y) \in A^2 \quad \|x-y\| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon.$$
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple $(x_n, y_n) \in A^2$ vérifiant :
$$\|x_n - y_n\| \leqslant 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon. \qquad (\star)$$
On construit ainsi deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A. Par compacité de A, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément α de A. L'inégalité suivante, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\big\|y_{\varphi(n)} - \alpha\big\| \leqslant \underbrace{\big\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\big\|}_{\leqslant 2^{-\varphi(n)} \to 0} + \underbrace{\big\|x_{\varphi(n)} - \alpha\big\|}_{\to 0}$$
montre alors que la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge également vers α.
Par continuité de f, on a alors $f(x_{\varphi(n)}) \to f(\alpha)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \to f(\alpha)$. Il en résulte que $\big\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\big\| \to 0$, ce qui est une contradiction car la propriété $(\star)$ impose que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\big\| > \varepsilon.$$

Exercice 8 Il suffit de considérer l'application $\widetilde{p} : [c,d] \to A$ définie par :
$$\widetilde{p}(t) = p\Big(a + \frac{t-c}{d-c}\,(b-a)\Big).$$

Proposition 9

- **Réflexivité.** Soit $x \in A$. La fonction constante $\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & x \end{array}$ est un chemin reliant x à lui-même.
- **Symétrie.** Si $p : [a,b] \to A$ est un chemin reliant deux points x à y de A, alors
$$\widetilde{p} : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & p(a+b-t) \end{array}$$
est un chemin reliant y à x.
- **Transitivité.** Soit x, y et z trois points de A tels que :
  - il existe un chemin p_1 reliant x à y dans A ;
  - il existe un chemin p_2 reliant y à z dans A.

Quitte à changer de paramétrage (*cf.* exercice 8 de la page 295), on peut supposer que p_1 et p_2 sont définis respectivement sur $[0,1]$ et $[1,2]$.
Considérons l'application $p : [0,2] \to A$ définie par :

$$p(t) = \begin{cases} p_1(t) & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ p_2(t) & \text{si} \quad t \in]1,2] \end{cases}$$

Cette application p est continue en 1 car $p_1(1) = p_2(1) = y$. Elle constitue donc un chemin reliant x à z dans A.

Exercice 9 Soit A une partie ouverte d'un espace vectoriel normé, et C une composante connexe par arcs de A. Soit $x \in C$. Montrons qu'il existe $r > 0$ tel que la boule $B(x,r)$ soit incluse dans C.
Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. Soit alors $y \in B(x,r)$. Le segment $[x,y]$, étant inclus dans $B(x,r)$, l'est aussi dans A. Par suite x et y sont reliés par un chemin dans A, donc appartiennent à la même composante connexe. On a donc $y \in C$.
Cela montre que $B(x,r) \subset C$, et prouve le résultat souhaité.

Exercice 10 L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ n'est pas connexe par arcs.
En effet, pour $x > a$ et $y < a$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que toute application continue $p : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ vérifiant $p(\alpha) = x$ et $p(\beta) = y$ prend au moins une fois la valeur a (et ne peut donc pas être à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{a\}$).

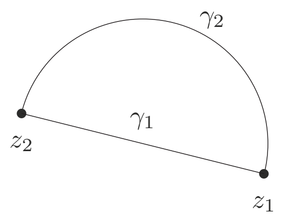
En revanche, les deux ensembles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont connexes par arcs car convexes. Comme ils sont disjoints et que leur réunion vaut $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, ce sont les deux composantes connexes par arcs de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Exercice 11 Soit z_1 et z_2 sont deux éléments de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.
Considérons les deux chemins suivants :

$$\begin{array}{rccl} \gamma_1 : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & t & \longmapsto & (1-t)z_1 + tz_2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \gamma_2 : & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \theta & \longmapsto & \dfrac{z_1+z_2}{2} + \dfrac{z_1-z_2}{2} e^{i\theta}. \end{array}$$



Le chemin γ_1 a pour image le segment reliant z_1 à z_2, et le chemin γ_2 a pour image le demi-cercle de diamètre $[z_1 z_2]$.

Comme les seuls points communs à γ_1 et γ_2 sont z_1 et z_2, il est clair qu'au moins un de ces deux chemins ne passe pas par a, et permet donc relier z_1 à z_2 dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Cela prouve la connexité par arcs de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Exercice 12

1. Soit x et y appartenant à $E \setminus \{0\}$. Montrons que x et y sont reliés par un chemin dans $E \setminus \{0\}$.
   - Si la famille (x,y) est libre, alors on a :

$$\forall \lambda \in [0,1] \quad (1-\lambda)x + \lambda y \neq 0,$$

et alors l'application $\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & E \setminus \{0\} \\ \lambda & \longmapsto & (1-\lambda)x + \lambda y \end{array}$ est un chemin reliant x à y.

- Sinon, alors prenons $z \in E \setminus \mathrm{Vect}(x,y)$ (un tel z existe car E est de dimension au moins 2). Alors, les familles (x,z) et (y,z) sont libres. D'après le premier point, x et z d'une part, et y et z d'autre part, sont reliés par un chemin dans $E \setminus \{0\}$. On conclut par transitivité.

2. Soit $a \in E$ ainsi que x et y deux points de $E \setminus \{a\}$. Comme $x-a$ et $y-a$ appartiennent à $E \setminus \{0\}$, la première question assure l'existence d'un chemin :
$$\varphi : [0,1] \to E \setminus \{0\}$$
reliant x à y. Alors, l'application $\psi : t \mapsto \varphi(t) + a$ est un chemin reliant x à y dans $E \setminus \{a\}$.

Exercice 13 Soit $(x,y) \in (A_1 \cup A_2)^2$. Montrons que x et y sont reliés par un chemin dans $A_1 \cup A_2$.

- Si x et y appartiennent tous les deux à A_1, c'est évident car A_1 est connexe par arcs. De même, si x et y appartiennent tous les deux à A_2, c'est évident.
- Supposons l'un des deux points dans A_1 et l'autre dans A_2. Par symétrie en x et y, on peut supposer $x \in A_1$ et $y \in A_2$. Comme A_1 et A_2 sont d'intersection non vide, il existe $z \in A_1 \cap A_2$.
  * Comme A_1 est connexe par arcs, x et z sont reliés par un chemin dans A_1, donc dans $A_1 \cup A_2$.
  * Comme A_2 est connexe par arcs, z et y sont reliés par un chemin dans A_2, donc dans $A_1 \cup A_2$.

  Donc, par transitivité, on peut affirmer que x et y sont reliés par un chemin dans $A_1 \cup A_2$.

Exercice 14 Soit A une partie étoilée. Il existe donc $a \in A$ tel que A soit étoilée par rapport à a. Si x et y sont deux points de A, alors :

- comme $[a,x] \subset A$, a et x sont reliés par un chemin dans A ;
- comme $[a,y] \subset A$, a et y sont reliés par un chemin dans A.

Donc, par transitivité, x et y sont reliés par un chemin dans A.

Proposition 10

- Un intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe donc connexe par arcs.
- Réciproquement soit I un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Si x et y sont deux points de I, alors il existe un chemin joignant x et y dans I, et par le théorème des valeurs intermédiaires, ce chemin prend toutes les valeurs entre x et y. Cela assure que toutes les valeurs comprises entre x et y appartiennent à I, et donc que I est un intervalle.

Exercice 15 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Les composantes connexes par arcs de U :

- d'une part, sont connexes par arcs, donc sont des intervalles (d'après la proposition 10 de la page 297) ;
- d'autre part, sont des ouverts de $\mathbb{R}$ (car U est ouvert, et d'après l'exercice 9 de la page 296).

On en déduit que U s'écrit comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$U = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I,$$

où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des composantes connexes par arcs de U.

Il reste à démontrer que cette réunion est dénombrable, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ est dénombrable. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert contient au moins un rationnel. L'application qui à un rationnel de U associe l'unique composante connexe par arcs de U à laquelle il appartient constitue donc une application surjective de $U \cap \mathbb{Q}$ vers $\mathcal{C}$. Comme $U \cap \mathbb{Q}$ est dénombrable, cela assure que $\mathcal{C}$ est dénombrable.

Proposition 11 Soit A une partie connexe par arcs, F un espace vectoriel normé, ainsi que $f : A \to F$ une application continue. Montrons que $f(A)$ est connexe par arcs. Soit $(y_1, y_2) \in \big(f(A)\big)^2$. On peut considérer $(x_1, x_2) \in A^2$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Comme A est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [a, b] \to A$ reliant x_1 à x_2.
Alors, l'application $f \circ \gamma$:

- est continue, comme composée de deux applications continues ;
- est à valeurs dans $f(A)$;
- vérifie $(f \circ \gamma)(a) = f(x_1) = y_1$ et $(f \circ \gamma)(b) = f(x_2) = y_2$;

c'est donc un chemin reliant y_1 à y_2 dans $f(A)$. Donc $f(A)$ est connexe par arcs.

Exercice 16 Supposons que $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ soit une bijection continue. Alors, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{C} \setminus \{\varphi^{-1}(0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & z & \longmapsto & \varphi(z) \end{array}$$

est également bijective et continue. Or, l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{\varphi^{-1}(0)\}$ est connexe par arcs (*cf.* exercice 11 de la page 297) alors que $\mathbb{R}^*$ ne l'est pas. Ceci est en contradiction avec la proposition 11 de la page 298 ; cela prouve le résultat.

Exercice 17

1. Considérons la restriction à A de la fonction indicatrice de B :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

- Tout d'abord, montrons que la fonction φ est continue. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$.
  - ∗ Si $0 \in U$ et $1 \in U$, alors $\varphi^{-1}(U) = A$; c'est un ouvert relatif de A.
  - ∗ Si $0 \in U$ et $1 \notin U$, alors $\varphi^{-1}(U) = B$; c'est un ouvert relatif de A par hypothèse sur B.
  - ∗ Si $0 \notin U$ et $1 \in U$, alors $\varphi^{-1}(U) = A \setminus B$; c'est un ouvert relatif de A car par hypothèse B est un fermé de A.
  - ∗ Si $0 \notin U$ et $1 \notin U$, alors $\varphi^{-1}(U) = \varnothing$; c'est un ouvert relatif de A.

  Dans tous les cas, $\varphi^{-1}(U)$ est donc un ouvert relatif de A. Cela prouve que φ est continue.

- Comme φ est continue et que A est connexe par arcs, le corollaire 12 de la page 298 nous assure que $\varphi(A)$ est un intervalle. Comme $\varphi(A) \subset \{0,1\}$, il en résulte que :
  - ou bien φ est constante égale à 0, c'est-à-dire $B = \varnothing$;
  - ou bien φ est constante égale à 1, c'est-à-dire $B = A$.

2. Par l'absurde : supposons qu'il existe U_1 et U_2 deux ouverts relatifs de A, disjoints, non vides et tels que $U_1 \cup U_2 = A$.
Montrons que U_1 est un fermé relatif de A. Comme U_2 est un ouvert relatif de A, on peut trouver O un ouvert de E tel que $U_2 = A \cap O$. On a alors :
$$\begin{aligned} U_1 &= A \cap (E \setminus U_2) \\ &= A \cap \big(E \setminus (A \cap O)\big) \\ &= A \cap \big((E \setminus A) \cup (E \setminus O)\big) \\ &= \big(\underbrace{A \cap (E \setminus A)}_{=\varnothing}\big) \cup \big(A \cap (E \setminus O)\big) = A \cap (E \setminus O). \end{aligned}$$
Comme O est un ouvert de E, $E \setminus O$ est un fermé de E. Par suite, U_1 est fermé relatif de A.
Ainsi, U_1 est à la fois un ouvert relatif de A et un fermé relatif de A.
Comme $U_1 \neq \varnothing$ et $U_1 \neq A$ (car $U_2 \neq \varnothing$), cela est en contradiction avec le résultat de la première question.

Théorème 14 Soit N une norme sur $\mathbb{K}^p$.

- Tout d'abord, pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on a, en notant $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$:
$$N(x) = N\left(\sum_{k=1}^{p} x_k e_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k|\, N(e_k) \leqslant M\,\|x\|_\infty, \quad \text{avec} \quad M = \sum_{k=1}^{p} N(e_k).$$
Cela montre que N est dominée par la norme infinie.
- D'autre part, la seconde inégalité triangulaire donne, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{K}^p)^2$:
$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x-y) \leqslant M\,\|x-y\|_\infty.$$
Il en résulte que l'application N est M-lipschitzienne, donc continue.
La sphère unité fermée $S_\infty(0,1)$ de $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ étant fermée et bornée, elle est compacte (*cf.* lemme 13). La restriction de N à $S_\infty(0,1)$ est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne inférieure m en un point x_m de $S_\infty(0,1)$. Puisque x_m est non nul, la propriété de séparation de N assure que $m > 0$.
Pour tout vecteur non nul x, on a $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S_\infty(0,1)$, et donc :
$$m \leqslant N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \frac{N(x)}{\|x\|_\infty},$$
ce qui donne
$$\|x\|_\infty \leqslant \frac{1}{m} N(x).$$
Cela prouve que la norme infinie et dominée par N, et termine la preuve.

Théorème 15 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension p. On sait que E est isomorphe à $\mathbb{K}^p$. On peut donc considérer $u : \mathbb{K}^p \to E$ un isomorphisme.

Étant donné N_1 et N_2 deux normes sur E, et comme u est une application linéaire injective, les applications $N_1 \circ u$ et $N_2 \circ u$ sont des normes sur $\mathbb{K}^p$ (*cf.* page 200). D'après le théorème 14 de la page 299, ces deux normes sont équivalentes, donc il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{K}^p \quad a\, N_1\big(u(x)\big) \leqslant N_2\big(u(x)\big) \leqslant bN_1\big(u(x)\big),$$

ce qui donne :

$$\forall y \in \operatorname{Im} u \quad a\, N_1(y) \leqslant N_2(y) \leqslant b\, N_1(y).$$

Comme u est un isomorphisme, on a $\operatorname{Im} u = E$. On a donc $a\, N_1 \leqslant N_2 \leqslant b\, N_1$, ce qui prouve que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Proposition 16 Comme E est de dimension finie, on peut le munir de la norme que l'on souhaite. Munissons E de la « norme infinie dans la base $\mathcal{B}$ », c'est-à-dire la norme N_∞ définie par :

$$N_\infty(x) = \max_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k|,$$

où $(x_1, \ldots, x_p)$ désignent les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Il est alors clair qu'au sens de la norme N_∞, la convergence vers ℓ de la suite (a_n) revient à la convergence de chacune des suites $\big(a_n^{(k)}\big)$ vers ℓ_k, puisque l'on a :

$$N_\infty(a_n - \ell) = \max_{k \in [\![1,p]\!]} \big|a_n^{(k)} - \ell_k\big|.$$

Proposition 17 Comme E est de dimension finie, on peut le munir de la norme que l'on souhaite. Munissons E de la « norme infinie dans la base $\mathcal{B}$ » :

$$N_\infty(x) = \max_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k|,$$

où $(x_1, \ldots, x_p)$ désignent les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

L'équivalence souhaitée résulte alors de la relation suivante :

$$\forall x \in A \quad N_\infty\big(f(x) - \ell\big) = \max_{k \in [\![1,p]\!]} \big|f_k(x) - \ell_k\big|.$$

Théorème 18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Munissons E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, ainsi que de la norme infinie dans la base $\mathcal{B}$:

$$N_\infty(x) = \max_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k| \quad \text{où} \quad x = \sum_{k=1}^{p} x_k\, e_k.$$

Soit (u_n) est une suite bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n^{(1)}, \ldots, u_n^{(p)}$ les coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que $u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} u_n^{(k)}\, e_k$.

Soit $R \geqslant 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad N_\infty(u_n) \leqslant R$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in [\![1,p]\!] \quad \big|u_n^{(k)}\big| \leqslant R.$$

Il en résulte que la suite de terme général $\big(u_n^{(1)}, \ldots, u_n^{(p)}\big)$ est à valeurs dans le compact $[-R, R]^p$, et donc admet une sous-suite convergente ; il en est donc de même pour la suite (u_n) (*cf.* la proposition 16 de la page 300).

Théorème 19 Il a déjà été dit qu'une partie compacte était nécessairement fermée et bornée (*cf.* la proposition 2 de la page 291).
Réciproquement, soit A une partie fermée et bornée d'un espace de dimension finie. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite à valeurs dans A admet au moins une valeur d'adhérence qui, puisque A est fermée, appartient nécessairement à A. Donc A est compacte.

Proposition 20 Soit E un espace vectoriel normée et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Soit (u_n) une suite convergente à valeurs dans F. Notons ℓ la limite de (u_n), et montrons que $\ell \in F$.

Comme la suite (u_n) converge, elle est bornée. Comme (u_n) est une suite bornée à valeurs dans F et que F est de dimension finie, la suite (u_n) possède au moins une valeur d'adhérence dans F. Comme la seule valeur d'adhérence d'une suite convergente est sa limite, on en déduit que $\ell \in F$.

Exercice 18 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E ne pose pas de difficultés (F est non vide et stable par combinaisons linéaires).

Pour montrer que F n'est pas un fermé de E, exhibons une suite d'éléments de F qui converge vers un élément de $E \setminus F$.

Notons u la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ puis, pour $p \in \mathbb{N}$, notons $u^{(p)}$ la suite de terme général :

$$u_n^{(p)} = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leqslant p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cet exemple prouve le résultat souhaité, car :

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\left\|u^{(p)} - u\right\|_\infty = \dfrac{1}{p+2} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u^{(p)} \to u$;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(p)}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, donc appartient à F ;
- la suite u n'appartient pas à F, car elle possède une infinité de termes non nuls.

Théorème 21 Supposons E de dimension finie. Munissons E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et travaillons avec la norme infinie associée à cette base :

$$N_\infty(x) = \max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k| \quad \text{avec} \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Pour montrer que u est continue, il suffit, d'après la proposition 19 de la page 269, de montrer qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :

$$\forall x \in E \quad N_\infty\big(u(x)\big) \leqslant C \times N_\infty(x).$$

Pour $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ appartenant à E, on a, par linéarité de u :

$$u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k)$$

puis, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}N_\infty\big(u(x)\big) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|\, N_\infty\big(u(e_k)\big)\\ &\leqslant C \times N_\infty(x), \quad \text{avec} \quad C = \sum_{k=1}^{n} N_\infty\big(u(e_k)\big).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Corollaire 23 L'application $\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$ est polynomiale car $\det(M)$ apparaît comme une expression polynomiale des coefficients de M, c'est-à-dire des composantes de M dans la base canonique. Donc, d'après la proposition 22 de la page 303, elle est continue.

Exercice 19

1. Prouvons que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \operatorname{Com} A \end{array}$ est polynomiale, ce qui assurera sa continuité. Travaillons dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de $\operatorname{Com} A$ vaut :

   $$(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

   où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j : il s'agit donc d'une expression polynomiale en les coefficients de A. Cela prouve le résultat souhaité.
2. Pour $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t(\operatorname{com} A).$$

   - L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$ est continue et ne s'annule pas.
   - D'autre part, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^t(\operatorname{Com} A) \end{array}$ est continue comme composée des deux applications continues $A \mapsto \operatorname{Com} A$ et $M \mapsto {}^tM$.

   Donc, par quotient d'applications continues, l'application :

   $$\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

   est continue.

Exercice 20 L'application $\det : \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est surjective et continue. Si $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, alors $\mathbb{R}^*$ le serait aussi, ce qui n'est pas le cas.

Théorème 24 Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ une application p-linéaire.

Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, notons $n_k = \dim E_k$ ainsi que $\mathcal{B}_k = (e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)})$ une base de E_k. En notant alors $g_{k,i}$ l'élément de $E_1 \times \cdots \times E_p$:

$$g_{k,i} = \big(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-ième place}}}{e_i^{(k)}}, 0, \ldots, 0\big),$$

la famille $\mathcal{B} = \big(g_{k,i}\big)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n_k}}$ est une base de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Soit $u = (u_1, \ldots, u_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$. En écrivant chaque u_k dans la base $\mathcal{B}_k$:

$$u_k = \sum_{i=1}^{n_k} x_i^{(k)} e_i^{(k)},$$

il vient, par p-linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(u) &= f\bigg(\sum_{i_1=1}^{n_1} x_{i_1}^{(1)} e_{i_1}^{(1)}, \ldots, \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_p}^{(p)} e_{i_p}^{(p)}\bigg) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_p}^{(p)} f\big(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_{i_p}^{(p)}\big). \end{aligned}$$

Si pour $k \in [\![1,p]\!]$ et $i \in [\![1,n_k]\!]$, on note $\pi_{k,i}$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} \pi_{k,i} : & E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & u_k = \sum\limits_{i=1}^{n_k} x_i^{(k)} e_i^{(k)} & \longmapsto & x_i^{(k)} \end{array}$$

alors f s'écrit à l'aide des $\pi_{k,i}$:

$$f = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} f\big(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_{i_p}^{(p)}\big)\, \pi_{1,i_1} \cdots \pi_{p,i_p}.$$

Comme les $\pi_{k,i}$ sont des formes linéaires sur l'espace de dimension finie $E_1 \times \cdots \times E_p$, elles sont continues. L'expression obtenue pour f assure alors, par opérations sur les applications continues, que f est continue.

Remarques

1. En fait, les formes linéaires $\pi_{k,i}$ considérées ici ne sont rien d'autre que les formes linéaires coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $E_1 \times \cdots \times E_p$.
2. L'expression obtenue pour f lors du calcul précédent permet de montrer que, dans le cas où F est de dimension finie, si l'on en considère une base, alors les applications composantes de f sont des fonctions polynomiales.

Exercice 21

1. On a $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ avec :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (M,N) & \longmapsto & M\,N \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ & A & \longmapsto & ({}^tA, A). \end{array}$$

- L'application φ_1 est bilinéaire donc, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ_1 est continue.

- L'application φ_2 est linéaire donc, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ_2 est continue.

Donc, comme composée d'applications continues, φ est continue.

2. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il suffit de montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Tout d'abord, une matrice A est orthogonales si, et seulement si, ${}^tA\,A = I_n$. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ apparaît donc comme l'image réciproque de $\{I_n\}$ par l'application continue φ et donc est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - D'autre part, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par exemple au sens de la norme infinie, puisque chaque coefficient d'une matrice orthogonale est inférieur à 1 en valeur absolue.

Corollaire 25 Supposons $E_1, \ldots, E_p$ de dimension finie et munissons $E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme :

$$\big\|(x_1, \ldots, x_p)\big\| = \max\big(\|x_1\|, \ldots, \|x_p\|\big).$$

Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ une application p-linéaire. D'après le théorème 24 de la page 304, l'application f est continue. Elle est donc bornée sur toute partie compacte, et en particulier sur la sphère unité $S(0,1)$ de $E_1 \times \cdots \times E_p$. Il existe donc $C \geqslant 0$ vérifiant :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in S(0,1) \quad \big\|f(x_1, \ldots, x_p)\big\| \leqslant C.$$

Mais alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, comme :

$$\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_p}{\|x_p\|}\right) \in S(0,1),$$

on a :

$$\left\|f\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_p}{\|x_p\|}\right)\right\| \leqslant C,$$

puis, par p-linéarité de f :

$$\big\|f(x_1, \ldots, x_p)\big\| \leqslant C\|x_1\| \times \cdots \times \|x_p\|.$$

Exercice 22 Notons $\|\cdot\|$ une norme sur E. L'application φ est clairement bilinéaire. Comme E est de dimension finie, elle est continue et le corollaire 25 de la page 304 nous assure l'existence d'une constante $C \geqslant 0$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big\|x \times y\big\| \leqslant C\,\|x\| \times \|y\|.$$

En considérant alors l'application $N : x \mapsto C\|x\|$, il est clair que N est une norme sur E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad N(x \times y) \leqslant N(x)\,N(y).$$

Remarque Le résultat de cet exercice assure, en particulier, l'existence d'une norme sous-multiplicative sur les $\mathbb{K}$-algèbres de dimension finie suivantes :

$$\mathbb{K}_n[X], \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathcal{L}(\mathbb{K}^n).$$

S'entraîner et approfondir

6.1 Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{U}$ vers $[0,1]$, où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

6.2 Soit X une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus X$ est connexe par arcs.

On pourra se contenter de raisonner géométriquement.

6.3 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés ainsi que A et B deux parties respectivement de E et F. On munit $E \times F$ de la norme produit. Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs si, et seulement si, A et B le sont.

6.4 Soit E un espace vectoriel normé, et F un fermé dont la frontière $\mathrm{Fr}(F)$ est connexe par arcs. Montrer que F est connexe par arcs.

6.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et H un hyperplan de E.

1. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $E \setminus H$ est connexe par arcs.
   On pourra utiliser la connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$.

6.6 *Théorème des compacts emboîtés*

On se place dans un espace vectoriel normé E. Pour tout compact K, on note $\delta(K)$ le diamètre de K défini par (*cf.* exercice 6 de la page 295) :

$$\delta(K) = \max_{(x,y)\in K^2} d(x,y).$$

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts emboîtés, non vides et dont le diamètre tend vers 0, *i.e.* :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (K_n \neq \varnothing \quad \text{et} \quad K_{n+1} \subset K_n) \qquad \text{et} \qquad \delta(K_n) \to 0.$$

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{x\}$.

★ **6.7** *Théorème de Riesz*

On souhaite démontrer le théorème de Riesz. Celui-ci affirme qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermée est compacte.

1. Justifier le sens « facile » du théorème.
2. Réciproquement, supposons que E soit un espace vectoriel normé de dimension infinie, et montrons que sa boule unité fermée $B_f(0,1)$ n'est pas compacte.
   (a) Soit F un sous-espace de E de dimension finie et $x \in E \setminus F$.
      i. Justifier l'existence de $y \in F$ tel que $d(x,F) = \|x-y\|$.
      ii. En déduire qu'il existe un vecteur unitaire u vérifiant :
      $$d(u,F) = 1.$$
   (b) Conclure alors en construisant une suite d'éléments de $B_f(0,1)$ ne possédant pas de valeur d'adhérence.

⋆ **6.8** *Compact/fermé versus fermé/fermé*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace normé de dimension finie. Étant donné A et B deux parties non vides de E, on note :

$$A+B=\big\{a+b\,;\ (a,b)\in A\times B\big\},$$

et on appelle distance de A à B la quantité :

$$d(A,B)=\inf_{(a,b)\in A\times B} d(a,b).$$

1. On suppose dans cette question que A est un compact et B est un fermé.
   (a) Montrer que $A+B$ est un fermé de E.
   (b) Montrer que la distance de A à B est atteinte, *i.e.* :

$$\exists (a_0,b_0)\in A\times B \quad d(A,B)=d(a_0,b_0).$$

2. Montrer que, sous la seule hypothèse que A et B sont des fermés, alors :
   - $A+B$ n'est pas nécessairement un fermé ;
   - la distance de A à B n'est pas nécessairement atteinte.

   On pourra expliciter deux parties A et B pertinentes, par exemple dans $\mathbb{R}^2$.

6.9 Soit K un compact non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et $f : K \to K$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y)\in K^2 \quad x\neq y \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|. \qquad (\star)$$

1. Montrer que f possède un unique point fixe.
   Indication : on pourra introduire la fonction $\varphi : x\mapsto \|f(x)-x\|$.
2. Soit $x\in K$. Montrer que la suite récurrente (x_n) définie par :

$$x_0=x \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N} \quad x_{n+1}=f(x_n)$$

   converge vers l'unique point fixe de f.

6.10 Soit C un compact convexe non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E et f un endomorphisme continu de E laissant stable C.
Le but est de montrer que f possède au moins un point fixe.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$

   Prouver que f_n est un endomorphisme continu de E laissant stable C.
2. Montrer qu'il existe une constante M telle que :

$$\forall y\in f_n(C) \quad \big\|f(y)-y\big\|\leqslant \frac{2M}{n}\cdot$$

3. Prouver alors que f possède au moins un point fixe.

⋆ **6.11** *Procédé diagonal*
On note ℓ^1 l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes telles que la série $\sum u_n$ converge absolument. On munit ℓ^1 de la norme :

$$\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Soit A l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}. \qquad (\star)$$

1. Justifier que A est une partie de ℓ^1.
2. Soit $\ell = (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et $\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^{(p)}$ est donc un élément de A ; son n-ième terme est noté $u_n^{(p)}$. Montrer que $u^{(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Montrer que A est compact.

⋆ **6.12** *Théorème de Baire*
On se place dans un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'un intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
On pourra utiliser le théorème des compacts emboîtés (exercice 6.6).

⋆ **6.13** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices de rang au plus r est un fermé.

⋆ **6.14** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

⋆ **6.15** Soit $n \in \mathbb{N}$ valant au moins 2.
1. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$$

qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est continue.
2. Montrer qu'en revanche l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Pi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & A & \longmapsto & \pi_A \end{array}$$

qui à une matrice associe son polynôme minimal n'est pas continue.

⋆ **6.16** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables est dense.
   Indication : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable.
2. Justifier que ce résultat est faux si l'on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⋆ **6.17** *Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables.

1. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que :
$$d\big(\lambda, \mathrm{sp}(A_p)\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. Montrer que l'intérieur de $\mathcal{D}$ est l'ensemble des matrices possédant n valeurs propres distinctes.

⋆ **6.18** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit T une matrice triangulaire inversible. Montrer que T peut être reliée à I_n par un chemin continu à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

⋆ **6.19** *Composantes connexes par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but est de démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs :
$$\mathcal{C}_+ = \det{}^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_- = \det{}^{-1}(\mathbb{R}_-^*).$$
Notons $\mathcal{C}_0$ la composante connexe par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant I_n.

1. (a) *On note $E_{i,j}$ l'élément d'indice (i,j) de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
   Soit T une matrice de transvection, *i.e.* une matrice de la forme :
$$T = I_n + \lambda E_{i,j} \quad \text{avec} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   Montrer que $T \in \mathcal{C}_0$.
   (b) Soit D une matrice de dilatation de déterminant positif, *i.e.* une matrice de la forme :
$$D = I_n + (\mu - 1)E_{i,i} \quad \text{avec} \quad i \in [\![1,n]\!] \quad \text{et} \quad \mu > 1.$$
   Montrer que $D \in \mathcal{C}_0$.
   (c) En déduire que tout élément $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ peut être relié, par un chemin continue à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, à une matrice diagonale dont la diagonale est constituée de ± 1.
2. Montrer que si A et B sont semblables et si B appartient à $\mathcal{C}_0$, alors A également.

3. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $p+2q=n$. On note :

$$J_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{2q} \end{pmatrix}$$

Montrer que $J_{p,q} \in \mathcal{C}_0$.
Indication : utiliser les matrices de rotation de taille 2.

4. Déduire des trois questions précédentes que si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\det A > 0$, alors $A \in \mathcal{C}_0$.
5. Conclure.

6.20 *(Polytechnique 2015)*

On note T_n l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et D_n l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que T_n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis que c'est l'adhérence de D_n.

6.21 *(Centrale 2015)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P(M) = 0\}$.

Le but de l'exercice est d'étudier les points isolés de E_P, c'est-à-dire les $M \in E_p$ pour lesquels il existe un voisinage V de M tel que $E_p \cap V = \{M\}$.

1. Déterminer E_P et ses points isolés lorsque $n=1$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que :

$$\forall H \in V_0 \quad I_n + H \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

3. Soit M un point isolé de E_P. Montrer qu'il existe un voisinage V_1 de 0 tel que :

$$\forall H \in V_1 \quad (I_n+H)^{-1} M \, (I_n+H) = M.$$

Montrer que M commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Conclure.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une suite $(M_k)_{k \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ distincts deux à deux telle que :

$$M_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda I_n \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (M_k - \lambda I_n)^2 = 0$$

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λI_n est un point isolé de E_P si, et seulement si, λ est une racine simple de P.

Solution des exercices

6.1 Supposons qu'une telle bijection $\varphi : \mathbb{U} \to [0,1]$ existe.

Alors, en notant $a = \varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, on constate que

$$\varphi\big(\mathbb{U} \setminus \{a\}\big) = [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Ceci contredit la continuité de φ puisque l'ensemble $\mathbb{U} \setminus \{a\}$ est connexe par arcs alors que $[0,1] \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ ne l'est pas.

Remarque La connexité par arcs de $\mathbb{U} \setminus \{a\}$ s'obtient ainsi : si l'on considère deux points de $\mathbb{U} \setminus \{a\}$, ils peuvent s'écrivent sous la forme $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ avec $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_1 + 2\pi$. Alors, les deux chemins :

$$\begin{array}{rcl} [\theta_1, \theta_2] & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} [\theta_2, \theta_1 + 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

n'ayant en commun que les points $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$, l'un des deux ne contient pas a.

6.2 Soit A_1 et A_2 deux points de $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Montrons que l'on peut relier A_1 et A_2 par un chemin continu ne rencontrant pas X.
Raisonnons géométriquement.

- Il y a une infinité non dénombrable de droites passant par le point A_1. Ces droites ne se rencontrant qu'au point A_1, et comme $A_1 \notin X$, il est possible d'en sélectionner une qui ne rencontre pas X ; soit $\mathcal{D}_1$ une telle droite.
- De même, parmi l'infinité non dénombrable de droites passant par le point A_2, il est possible d'en sélectionner une qui ne rencontre pas X et qui ne soit pas parallèle à $\mathcal{D}_1$; soit $\mathcal{D}_2$ une telle droite.

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'étant pas parallèles, elles se croisent en un point B ; en parcourant alors de manière continue les segments $[A_1B]$ puis $[BA_2]$, on passe de A_1 à A_2 sans rencontrer X.

6.3
- Supposons $A \times B$ connexe par arcs. Alors A et B sont connexes par arcs, comme images respectives de $A \times B$ par les applications continues :

$$\begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & y. \end{array}$$

- Réciproquement, supposons A et B connexes par arcs.
  Soit (a_1, b_1) et (a_2, b_2) deux éléments de $A \times B$.
  Comme A et B sont connexes par arcs, il existe deux chemins $\gamma_1 : [0,1] \to A$ et $\gamma_2 : [0,1] \to B$ reliant respectivement a_1 à a_2 et b_1 à b_2. L'application :

$$t \mapsto \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$$

  est alors un chemin reliant (a_1, b_1) à (a_2, b_2) dans $A \times B$.

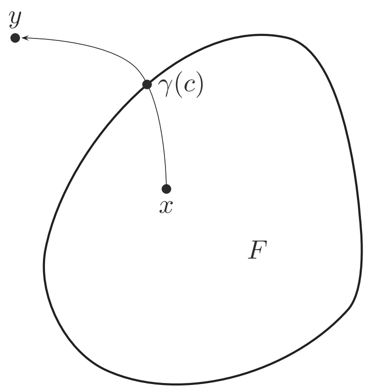
6.4 Le cas $F = E$ étant évident, nous supposons $F \neq E$.

Intéressons-nous aux composantes connexes par arcs de F. Comme $\mathrm{Fr}(F) \subset F$ est connexe par arcs, tous les points de $\mathrm{Fr}(F)$ appartiennent à la même composante connexe par arcs de F. Par transitivité, il nous suffit donc de montrer que tous les autres points de F, c'est-à-dire ceux de $\mathrm{Int}(F)$, appartiennent à la même composante connexe par arcs que ceux de $\mathrm{Fr}(F)$. Concrètement, montrons que tout point de $\mathrm{Int}(F)$ est relié, par un chemin à valeurs dans F, à un point de $\mathrm{Fr}(F)$.

Soit $x \in \mathrm{Int}(F)$ et $y \in E \setminus F$. Soit $\gamma : [0,1] \to E$ une application continue vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ (une telle application existe car l'espace E est connexe par arcs). Posons :

$$c = \inf\left\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \notin F\right\}.$$

Le réel c est bien défini car l'ensemble $\left\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \notin F\right\}$ est non vide (car il contient 1) et minoré.



Si l'on montre que $\gamma(c) \in \mathrm{Fr}(F)$, alors c'est terminé car alors la restriction de γ à l'intervalle $[0, t_0]$ constituera un chemin de F reliant x à un point de $\mathrm{Fr}(F)$. Montrer que $\gamma(c) \in \mathrm{Fr}(F)$ revient à montrer que :

$$\gamma(c) \in \mathrm{Adh}(F) \cap \mathrm{Adh}(E \setminus F).$$

- Tout d'abord, par définition de c comme borne inférieure, on peut trouver une suite (t_n) à valeurs dans $[c, 1]$ tendant vers c et telle que

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \gamma(t_n) \notin F.$$

  Comme γ est continue, on a $\gamma(t_n) \to \gamma(c)$, ce qui montre que $\gamma(c) \in \mathrm{Adh}(E \setminus F)$.
- Étant donné que $\gamma(c) \in \mathrm{Adh}(E \setminus F)$ et que $x = \gamma(0) \in \mathrm{Int}(F)$, on est assuré que $c > 0$. Soit (t_n) une suite à valeurs de $[0, c[$ tendant vers c. Alors la suite $\big(\gamma(t_n)\big)$ est à valeurs dans F et, par continuité de γ, tend vers $\gamma(c)$. On a donc $\gamma(c) \in \mathrm{Adh}(F)$.

D'où le résultat.

6.5 1. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Comme H est un hyperplan, il existe une forme linéaire non nulle f dont H est le noyau. On a alors, par surjectivité de f :

$$f(E \setminus H) = \mathbb{R}^*.$$

Comme f est continue (car c'est une application linéaire et que E est de dimension finie) et que $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, cela prouve que $E \setminus H$ ne l'est pas non plus.

2. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit u un vecteur de E n'appartenant pas à H. Les sous-espaces H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont alors supplémentaires dans E. Soit x et y deux vecteurs appartenant à $E \setminus H$. Ces vecteurs s'écrivent :

$$x = x_1 + \alpha\, u \quad \text{et} \quad y = y_1 + \beta\, u \quad \text{avec} \quad (x_1, y_1) \in H^2 \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2.$$

- Comme H est un sous-espace vectoriel, il est connexe par arcs. Il existe donc un chemin $\gamma_1 : [0,1] \to H$ reliant x_1 à y_1.
- Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs (*cf.* exercice 11 de la page 297), il existe un chemin $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ reliant α à β.

L'application :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & E \setminus H \\ & t & \longmapsto & \gamma_1(t) + \gamma_2(t)\, u \end{array}$$

est alors un chemin reliant x à y.

6.6 Comme les K_n sont tous non vides, on peut considérer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in K_n.$$

- Comme le compact K_0 contient tous les autres, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en particulier une suite à valeurs dans K_0. Par compacité de K_0, on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$; notons x la limite de cette sous-suite.

  Soit $p \in \mathbb{N}$. Le caractère emboîté de la suite (K_n) assure que la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est à valeurs dans K_p ; il en est donc *a fortiori* de même pour la suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\geqslant p}$; le caractère fermé de K_p assure alors que $x \in K_p$.
  On a donc $\forall p \in \mathbb{N} \quad x \in K_p$, c'est-à-dire $\{x\} \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
- Pour l'autre inclusion, considérons $\widetilde{x} \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$; on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (x \in K_n \quad \text{et} \quad \widetilde{x} \in K_n),$$

  ce qui implique

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x, \widetilde{x}) \leqslant \delta(K_n).$$

  Comme $\delta(K_n) \to 0$, on a nécessairement $\widetilde{x} = x$.

6.7 1. Il est clair que si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors sa boule unité fermée est compacte, comme toute partie fermée et bornée (*cf.* le théorème 19 de la page 301).

2. (a) **Remarque** L'existence de $x \in E \setminus F$ vient du fait que, comme F est de dimension finie et que E ne l'est pas, F est nécessairement un sous-espace strict de E.

   i. Comme F est un sous-espace vectoriel, on a $0 \in F$, et donc :

   $$d(x,F) \leqslant d(x,0) = \|x\|.$$

   D'autre part, par inégalité triangulaire, on a, pour tout $y \in E$:

   $$d(x,y) \geqslant d(y,0) - d(x,0),$$

   et donc :

   $$\|y\| > 2\|x\| \Longrightarrow d(x,y) > \|x\|.$$

   Des deux points précédent il résulte que :

   $$d(x,F) = d(x,K) \quad \text{avec} \quad K = F \cap B_f(0, 2\|x\|).$$

   La partie K est une partie fermée et bornée de F. Comme F est de dimension finie, K est un compact. Par suite, la distance de x à K est atteinte (*cf.* exemple de la page 294). Il existe donc $y \in K$ tel que $d(x,K) = \|x-y\|$, ce qui prouve le résultat puisque $K \subset F$ et $d(x,K) = d(x,F)$.

   ii. Comme $x \notin F$, on a $y \neq x$. Posons $u = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$. On constate que :

   - le vecteur u est unitaire donc $d(u,F) \leqslant \|u\| = 1$;
   - pour tout $z \in F$, on a :

     $$\|u - z\| = \frac{1}{\|x-y\|} \times \big\|x - \big(y + \|x-y\|z\big)\big\|$$

     Comme $y + \|x-y\|z \in F$, on a :

     $$\big\|x - \big(y + \|x-y\|z\big)\big\| \geqslant d(x,F) = \|x-y\|,$$

     et donc $\|u - z\| \geqslant 1$; on a donc $d(u,F) \geqslant 1$.

   On a donc $d(u,F) = 1$.

   (b) Construisons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $B_f(0,1)$ vérifiant :

   $$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \neq p \Longrightarrow d(u_n, u_p) \geqslant 1. \qquad (\star)$$

   Cela donnera le résultat car une telle suite ne peut pas posséder de valeur d'adhérence. Construisons-la terme à terme.

   - Fixons u_0 à un élément unitaire quelconque de E.
   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $u_0, \ldots, u_{n-1}$ sont déjà construits. L'espace

     $$F_n = \operatorname{Vect}(u_0, \ldots, u_{n-1})$$

     étant de dimension finie, la question 2(a)ii assure que l'on peut choisir u_n un vecteur unitaire tel que $d(u_n, F_n) = 1$. Cet élément u_n vérifie alors :

     $$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad d(u_n, u_k) \geqslant 1.$$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite vérifie la propriété $(\star)$.

6.8 1. (a) Soit (u_n) une suite à valeurs dans $A+B$. Supposons (u_n) convergente et montrons que sa limite ℓ appartient à $A+B$.
Puisque (u_n) est à valeurs dans $A+B$, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = a_n + b_n \quad \text{avec} \quad (a_n, b_n) \in A \times B.$$

La suite (a_n) étant à valeurs dans le compact A, on peut en extraire une sous-suite convergente $\big(a_{\varphi(n)}\big)$. Alors, la sous-suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)$ converge également, en tant que sous-suite d'une suite convergente. La relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{\varphi(n)} = u_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$$

prouve alors que la suite $\big(b_{\varphi(n)}\big)$ converge elle aussi. Alors :

- puisque A est compact donc fermé, en notant $\ell_1 = \lim a_{\varphi(n)}$, on a $\ell_1 \in A$;
- puisque B est fermé, en notant $\ell_2 = \lim b_{\varphi(n)}$, on a $\ell_2 \in B$;
- puisque $\ell = \lim u_n$, on a aussi $\ell = \lim u_{\varphi(n)}$.

En passant à la limite dans la relation $u_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}$, on obtient alors $\ell = \ell_1 + \ell_2$, ce qui prouve que $\ell \in A+B$.

Remarque On constate que l'hypothèse « E de dimension finie » n'a pas été utilisée dans le raisonnement précédent. Le résultat reste donc vrai sans cette hypothèse.

(b) Fixons $\alpha \in A$ et $\beta \in B$. On a alors $d(A,B) \leqslant d(\alpha,\beta)$.
Comme A est compact, c'est une partie bornée, donc il existe M tel que :

$$A \subset B_f(\alpha, M).$$

Par inégalité triangulaire, on obtient que pour tout $y \in B \backslash B_f\big(\alpha, M + d(\alpha,\beta)\big)$:

$$\forall x \in A \quad d(x,y) \geqslant \underbrace{d(y,\alpha)}_{>M+d(\alpha,\beta)} - \underbrace{d(\alpha,x)}_{\leqslant M} > d(\alpha,\beta) \geqslant d(A,B).$$

On en déduit qu'en notant $\widetilde{B} = B \cap B_f\big(\alpha, M + d(\alpha,\beta)\big)$, on a :

$$d(A,B) = d(A,\widetilde{B}).$$

Comme $\widetilde{B}$ est fermé (car intersection de deux fermés) et borné, il est compact (car E est dimension finie). Puisque A et $\widetilde{B}$ sont compacts, il en est de même pour $A \times \widetilde{B}$. Il en résulte que l'application continue :

$$\begin{array}{ccc} A \times \widetilde{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$$

est bornée et atteint ses bornes, donc en particulier possède un minimum. Cela prouve l'existence d'un couple $(a_0, b_0) \in A \times \widetilde{B}$ tel que :

$$d(a_0, b_0) = d(A, \widetilde{B}).$$

Comme $\widetilde{B} \subset B$, ce couple (a_0, b_0) appartient à $A \times B$. D'où le résultat.

2. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$, et posons :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

Les parties A et B sont fermées car sont respectivement les images réciproques du fermé $\{0\}$ par les applications continues :

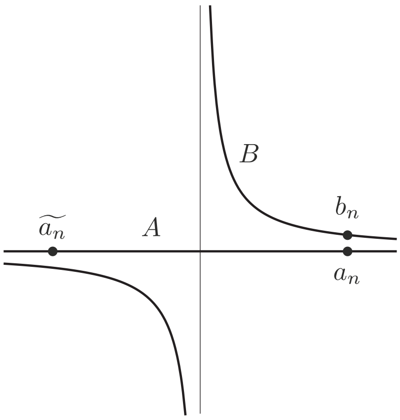
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy-1 \end{array}$$

Les parties A et B s'écrivent également :

$$A = \big\{(a,0)\,;\ a \in \mathbb{R}\big\}$$

et

$$B = \left\{\left(b, \frac{1}{b}\right)\,;\ b \in \mathbb{R}^*\right\}.$$



On constate que A et B sont disjoints et que $(0,0) \notin A+B$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$a_n = (n,0) \in A\ ;$$

$$\widetilde{a_n} = (-n,0) \in A\ ;$$

$$b_n = \left(n, \frac{1}{n}\right) \in B.$$

- Comme $b_n - a_n \to 0$, on a $d(A,B) = 0$. Comme A et B sont disjoints, cela prouve que la distance de A à B n'est pas atteinte.
- De plus, la suite de terme général $\widetilde{a_n} + b_n$ tend vers 0. Comme $(0,0) \notin A+B$, cela prouve que $A+B$ n'est pas fermé.

6.9 1. • **Existence.** Soit $\varphi : K \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \|f(x) - x\|$. Étant donné que φ est continue et que K est compact, φ admet un minimum. Notons α un point de K en lequel ce minimum est atteint. Si $f(\alpha) \neq \alpha$, alors, d'après la propriété $(\star)$ vérifiée par f :

$$\varphi\big(f(\alpha)\big) = \big\|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\big\| < \big\|f(\alpha) - \alpha\big\| = \varphi(\alpha),$$

ce qui est absurde. On a donc $f(\alpha) = \alpha$, *i.e.* α est un point fixe de f.

• **Unicité.** Si l'on suppose que α et β sont deux points fixes distincts, alors, d'après la propriété $(\star)$ vérifiée par f :

$$\|\beta - \alpha\| = \big\|f(\beta) - f(\alpha)\big\| < \|\beta - \alpha\|,$$

ce qui est absurde.

2. Notons $d_n = \|x_n - \alpha\|$, où α est le point fixe de f. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$d_{n+1} = \|x_{n+1} - \alpha\| = \|f(x_n) - f(\alpha)\| \leqslant \|x_n - \alpha\| = d_n.$$

La suite (d_n), étant décroissante et minorée par 0, converge vers une limite $a \geqslant 0$. Soit $\big(x_{\varphi(n)}\big)$ une sous-suite convergente de (x_n). En notant $\ell = \lim x_{\varphi(n)}$, on a :

$$d_{\varphi(n)} = \big\|x_{\varphi(n)} - \alpha\big\| \to \|\ell - \alpha\|.$$

Puisque d'autre part $d_{\varphi(n)} \to a$, on a, par unicité de la limite :

$$a = \|\ell - \alpha\|. \tag{1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)+1}$. Donc, par continuité de f, la suite $\big(f(x_{\varphi(n)+1})\big)$ tend vers $f(\ell)$. On a alors :

$$d_{\varphi(n)+1} = \big\|x_{\varphi(n)+1} - \alpha\big\| \to \|f(\ell) - \alpha\| = \|f(\ell) - f(\alpha)\|.$$

Puisque d'autre part $d_{\varphi(n)+1} \to a$, on a par unicité de la limite :

$$a = \|f(\ell) - f(\alpha)\|. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent $\big\|f(\ell)-f(\alpha)\big\| = \|\ell-\alpha\|$. La propriété $(\star)$ vérifiée par f donne alors nécessairement $\ell = \alpha$.

On a ainsi obtenu que toute sous-suite convergente de (x_n) converge vers α. Comme K est compact, cela assure que la suite (x_n) converge vers α.

6.10 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque f_n est un polynôme en f, c'est un endomorphisme continu de E. Soit $x \in C$. Comme f laisse stable C, il en est de même pour ses itérés, et donc :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad f^k(x) \in C.$$

Ainsi, puisque C est convexe, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$ appartient à C.

2. Comme C est compact, il est borné donc inclus dans une boule $B_f(0, M)$.

Soit $y \in f_n(C)$. On a, en notant x un antécédent de y par f_n :

$$f(y) - y = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(x) - \sum_{k=0}^{n} f^k(x)\right) = \frac{1}{n}\big(f^n(x) - x\big).$$

Comme x et $f^n(x)$ sont dans C, et par définition de M, on a $\big\|f^n(x)-x\big\| \leqslant 2M$, et donc :

$$\big\|f(y) - y\big\| \leqslant \frac{2M}{n}\cdot$$

3. Comme C est non vide, les ensembles $f_n(C)$ sont tous non vides. On peut donc considérer $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \in f_n(C).$$

Comme C est stable par chaque f_n, la suite (x_n) est à valeurs dans C.

Comme C est compact, on peut en extraire une sous-suite convergente $\big(x_{\varphi(n)}\big)$.

D'après la question 2, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \big\|f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\big\| \leqslant \frac{2M}{\varphi(n)} \to 0.$$

Notons $\ell = \lim x_{\varphi(n)}$. Comme f est continue, on a $f\big(x_{\varphi(n)}\big) \to f(\ell)$, puis :

$$\big\|f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\big\| \to \|f(\ell) - \ell\|.$$

Il en résulte que $\|f(\ell) - \ell\| = 0$, *i.e.* $f(\ell) = \ell$.

6.11 1. Tout d'abord, puisque la série $\sum 2^{-n}$ converge et par théorème de comparaison, la condition $(\star)$ d'appartenance à A assure que A est une partie de ℓ^1.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left\|u^{(p)} - \ell\right\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right|. \qquad (\star\star)$$

- Un sens est évident : si $u^{(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Réciproquement, supposons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et montrons que $\left\|u^{(p)} - \ell\right\| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  À n fixé, le terme $\left|u_n^{(p)} - \ell_n\right|$ apparaissant dans la somme de la relation $(\star\star)$:
  * tend vers 0 quand $p \to +\infty$;
  * est majoré par $\dfrac{2}{2^n}$, terme général d'une série convergente.

  Cela nous permet d'obtenir le résultat souhaité en procédant ainsi : fixons $\varepsilon > 0$, puis $n_0 \in \mathbb{N}$ un rang vérifiant :

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{2}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

  et enfin $p_0 \in \mathbb{N}$ un rang vérifiant :

$$p \geqslant p_0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{n_0} \left|u_n^{(p)} - \ell_n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

  On constate alors que pour tout $p \geqslant p_0$, on a :

$$\left\|u^{(p)} - \ell\right\| \leqslant \varepsilon.$$

  Cela prouve le résultat attendu.

3. Pour montrer que A est compact, donnons-nous $\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A et montrons qu'il est possible d'en extraire une sous-suite convergeant vers un élément de A.

   Pour extraire de $\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente, nous allons procéder par extractions successives ; cette démarche s'appelle « procédé diagonal ».

   Tout d'abord, on constate que la condition $(\star)$ d'appartenance à A entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(u_n^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, car majorée en module par $\dfrac{1}{2^n}\cdot$

- La suite $(u_0^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il est possible d'en extraire une sous-suite convergente $\left(u_0^{(\varphi_0(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

- La suite $\left(u_1^{(\varphi_0(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(u_1^{(\varphi_0\circ\varphi_1(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$. On constate alors que la suite $\left(u_0^{(\varphi_0\circ\varphi_1(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est également convergente, comme sous-suite de la suite convergente $\left(u_0^{(\varphi_0(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$.
- On poursuit ainsi de suite : pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on dispose ainsi d'une fonction extractrice φ_n telle que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, la suite $\left(u_n^{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
- Considérons alors la fonction ψ définie par :

$$\forall p\in\mathbb{N}\quad \psi(p)=\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(p).$$

  On constate que :
  * la fonction ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$;
  * pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite $\left(u_n^{(\psi(p))}\right)_{p\geqslant n}$ est une sous-suite de la suite convergente $\left(u_n^{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$; donc la suite $\left(u_n^{(\psi(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- Soit alors ℓ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \ell_n=\lim_{p\to+\infty}u_n^{(\psi(p))}.$$

  Prouvons que $u^{(\psi(p))}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$, ce qui donnera le résultat souhaité. On a :
  * pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\left|u_n^{(\psi(p))}-\ell_n\right|\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$;
  * pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a $\forall n\in\mathbb{N}\quad \left|u_n^{(\psi(p))}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$, ce qui donne, en passant à la limite, $|\ell_n|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$, et assure que $\ell\in A$.

  Le résultat de la question 2 appliqué à la suite $\left(u^{(\psi(p))}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ permet alors de conclure.

6.12 *Dans la suite, si B désigne une boule, nous notons $\delta(B)$ son diamètre.*

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses. Montrons que leur intersection :

$$A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$$

est dense. Une partie est dense si, et seulement si, elle rencontre tout ouvert non vide. Considérons donc une partie ouverte O et montrons que :

$$A\cap O\neq\varnothing.$$

Construisons dans un premier temps une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boules ouvertes emboîtées vérifiant :

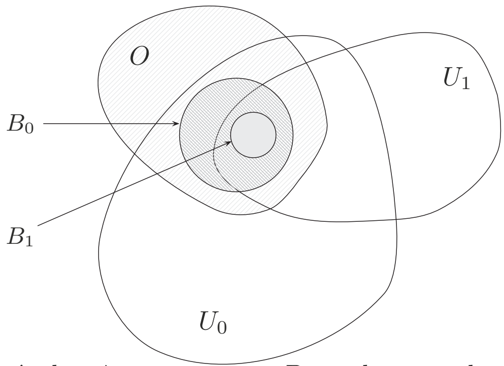
$$B_0\subset O\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N}\quad B_n\subset U_n.\tag{$\star$}$$

- **Construction de B_0.** Comme U_0 est dense, l'ensemble $U_0\cap O$ est non vide ; comme c'est un ouvert (car intersection de deux ouverts), il est d'intérieur non vide, *i.e.* contient au moins une boule ouverte B_0.

- **Construction de B_n.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $B_0, \ldots, B_{n-1}$ construites. Comme U_n est dense et B_{n-1} ouverte, l'ensemble $U_n \cap B_{n-1}$ est non vide, donc, étant ouvert, il contient au moins une boule ouverte B_n. Lors du choix de B_n, on peut sans difficulté imposer $\delta(B_n) \leqslant \dfrac{\delta(B_{n-1})}{2}\cdot$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est bien une suite de boules ouvertes emboîtées vérifiant la condition $(\star)$.

Le dessin ci-contre illustre la construction des deux premières boules B_0 et B_1 (bien-sûr, il n'est pas réaliste car ne retranscrit pas le caractère dense des ouverts U_0 et U_1.)



En notant alors F_n la boule fermée de même centre que B_n et de rayon deux fois plus petit, on obtient une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boules fermées emboîtées dont le rayon tend vers 0. Toute boule fermée étant compacte en dimension finie, on peut appliquer le théorème des compacts emboîtés (*cf.* exercice 6.6 de la page 319). Il existe donc $x \in E$ tel que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}\cdot$$

Cet élément x appartient alors :

- à chacun des ouverts U_n puisque $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \subset B_n \subset U_n$;
- à O puisque $F_0 \subset B_0 \subset O$.

Cela prouve que $A \cap O \neq \varnothing$.

6.13 Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que les matrices A_p sont toutes de rang au plus r et montrons qu'il en est de même pour A.

Pour cela, montrons qu'aucune sous-matrice carrée de A de taille $r+1$ n'est inversible. Sélectionnons $r+1$ indices de lignes et $r+1$ indices de colonnes ; notons respectivement $\widetilde{A}$ et $\widetilde{A_p}$ les sous-matrices de A et A_p associées. En travaillant avec la norme infinie, il est évident que la suite de matrices $(\widetilde{A_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\widetilde{A}$ dans $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{K})$.

Puisque les matrices A_p sont de rang au plus r, aucune des matrices $\widetilde{A_p}$ n'est inversible. On a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \det(\widetilde{A_p}) = 0.$$

En passant à la limite et par continuité du déterminant, on obtient $\det(\widetilde{A}) = 0$, ce qui donne le résultat.

6.14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons qu'il existe une suite (A_p) de matrices inversibles qui converge vers A.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \det(xI_n + A) \end{array}$ est polynomiale de degré n (c'est la fonction polynomiale associée au polynôme caractéristique de $-A$) ; elle s'annule donc en un nombre fini de points. Pour $p \in \mathbb{N}$, notons :

$$A_p = 2^{-p} I_n + A.$$

Les matrices A_p sont inversibles car de déterminant non nul, sauf éventuellement un nombre fini d'entre elles. On peut donc trouver un rang $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice A_p soit inversible.

La suite $(A_p)_{p \geqslant p_0}$ est alors une suite de matrices inversibles qui convergeant vers A.

6.15 1. L'espace $\mathbb{K}_n[X]$ étant de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes ; donnons-nous $n+1$ scalaires deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_{n+1}$ et munissons $\mathbb{K}_n[X]$ de la norme (la justification du fait c'est une norme est laissée au lecteur) :

$$\|P\| = \max\left\{|P(x_1)|, \ldots, |P(x_{n+1})|\right\}.$$

Alors, une suite $(P_p)_{p \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$ converge vers $P \in \mathbb{K}_n[X]$ si, et seulement si, :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad P_p(x_k) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} P(x_k).$$

Montrons la continuité de Ψ par caractérisation séquentielle.

Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (A_p) une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendant vers A, montrons que $\Psi(A_p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \Psi(A)$.

Compte tenu de la remarque précédente, il suffit de montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad \Psi(A_p)(x_k) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \Psi(A)(x_k),$$

ou encore :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad \det(x_k I_n - A_p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \det(x_k I_n - A). \qquad (\star)$$

Comme $A_p \to A$, on a :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad x_k I_n - A_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} x_k I_n - A.$$

La propriété $(\star)$ est alors une conséquence de la continuité du déterminant.

2. Pour prouver que l'application Π n'est pas continue, exhibons un exemple.
Pour $p \in \mathbb{N}$, posons :

$$A_p = \begin{pmatrix} 2^{-p} & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors :
- la suite (A_p) converge vers la matrice nulle dont le polynôme minimal est X ;
- pourtant, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\pi_{A_p} = X(X - 2^{-p}) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} X^2$.

6.16 1. Montrons que toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la limite d'une suite (A_p) de matrices diagonalisables. C'est évident si A est diagonalisable ; supposons donc que A ne l'est pas. Toute matrice étant trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut écrire $A = P^{-1}\,T\,P$ avec P inversible et T triangulaire supérieure.

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les termes diagonaux de T, ie :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont donc les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons T_p la matrice triangulaire supérieure obtenue à partir de T en modifiant uniquement sa diagonale de la manière suivante :

$$T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{p} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{n}{p} \end{pmatrix}$$

Justifions que, pour p assez grand, la matrice T_p possède la propriété que ses termes diagonaux sont deux à deux distincts :

- si les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous égaux, alors c'est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$;
- sinon, alors en δ l'écart minimal entre deux valeurs propres distinctes de A, *i.e.* :

$$\delta = \min_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ \lambda_i \neq \lambda_j}} |\lambda_i - \lambda_j|,$$

  alors la propriété est vérifiée dès que $\dfrac{n}{p} < \delta$.

Ainsi, pour p assez grand, la matrice $A_p = P^{-1}\,T_p\,P$ est diagonalisable.

Enfin, puisque $T_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} T$ et que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}\,M\,P \end{array}$ est continue car linéaire, on a $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrons que la matrice diagonale par blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & (0) \\ \hline (0) & I_{n-2} \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut pas être obtenue comme limite d'une suite de matrices diagonalisables. Cela est du au fait que i est valeur propre de A. Raisonnons par l'absurde : supposons que (A_p) soit une suite de matrices diagonalisables tendant vers A.

Notons χ et χ_p les polynômes caractéristiques de A et A_p respectivement.

En se plaçant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad zI_n - A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} zI_n - A.$$

Donc, par continuité du déterminant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \chi_p(z) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi(z).$$

En appliquant cela pour $z = i$, et puisque i est valeur propre de A, obtient :

$$\chi_p(i) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{$\star$}$$

Or, pour $p \in \mathbb{N}$, puisque la matrice A_p est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, *i.e.* de la forme :

$$\chi_p = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ ;$$

on a alors $\chi_p(i) = \prod\limits_{k=1}^{n}(i - \lambda_k)$, et en particulier :

$$\left|\chi_p(i)\right|^2 = \prod_{k=1}^{n}\left|i - \lambda_k\right|^2 = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k^2 + 1) \geqslant 1. \tag{$\star\star$}$$

Les propriétés $(\star)$ et $(\star\star)$ sont contradictoires.

6.17 1. Puisque $A_p \to A$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad xI_n - A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} xI_n - A,$$

et donc, par continuité du déterminant :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_{A_p}(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_A(x).$$

En particulier, pour $x = \lambda$, cela donne :

$$\chi_{A_p}(\lambda) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{$\star$}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A_p, comptées avec multiplicités. On a alors :

$$\chi_{A_p} = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) \quad \text{et donc} \quad \chi_{A_p}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k).$$

En passant au module, on obtient :

$$\left|\chi_{A_p}(\lambda)\right| = \prod_{k=1}^{n}|\lambda - \lambda_k| \geqslant d\big(\lambda, \operatorname{sp}(A_p)\big)^n.$$

La limite $(\star)$ assure alors que $d\big(\lambda, \operatorname{sp}(A_p)\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possédant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrons que $A \in \operatorname{Int}(\mathcal{D})$. Pour cela, considérons $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendant vers A et montrons que pour p assez grand, A_p est diagonalisable.
Puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distinctes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les boules $B(\lambda_1, \varepsilon), \ldots, B(\lambda_n, \varepsilon)$ soient deux à deux disjointes ($\mathbb{K}$ étant naturellement muni de la valeur absolue ou du module).

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, le résultat de la question 1 nous dit que :

$$d\big(\lambda_k, \mathrm{sp}(A_p)\big) \to 0$$

ce qui assure l'existence d'un rang $r_k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \geqslant r_k \Longrightarrow B(\lambda_k, \varepsilon) \cap \mathrm{sp}(A_p) \neq \varnothing.$$

Posons $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$ et prenons $p \geqslant r$. Il existe au moins une valeur propre de A_p dans chacune des n boules $B(\lambda_1, \varepsilon), \dots, B(\lambda_n, \varepsilon)$. Comme ces boules sont deux à deux disjointes, cela nous fournit n valeurs propres deux à deux distinctes pour A_p. La matrice A_p est alors diagonalisable.

- Considérons maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dont les valeurs propres ne sont pas deux à deux distinctes, et montrons que $A \notin \mathrm{Int}(\mathcal{D})$ en prouvant que A est la limite d'une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrice non diagonalisables.
L'hypothèse faite sur A assure l'existence d'une valeur propre λ d'ordre de multiplicité au moins 2. La matrice A peut alors s'écrire :

$$A = P^{-1}\,D\,P \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & & & & (0) \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Posons alors, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$D_p = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-p} & & & (0) \\ 0 & \lambda & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_p = P^{-1}\,D_p\,P.$$

Les matrices D_p ne sont pas diagonalisables, donc les matrices A_p non plus. De plus, on a $D_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} D$ et donc $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

6.18 1. Notons $t_{i,j}$ les coefficients de T.

- Comme T est triangulaire inversible, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs (*cf.* exercice 11 de la page 297), on peut considérer, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, un chemin continu $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ reliant 1 à $t_{k,k}$.
- Pour $x \in [0,1]$, notons $M(x)$ la matrice suivante :

$$M(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1(x) & x\,t_{1,2} & \cdots & x\,t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x\,t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_n(x) \end{pmatrix}$$

  * Pour tout $x \in [0,1]$, la matrice $M(x)$ est inversible car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls.

* On a $M(0) = I_n$ et $M(1) = T$.
* Enfin, l'application $x \mapsto M(x)$ est continue, puisque chacune des ses applications composantes sont continues.

L'application

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & M(x) \end{array}$$

est donc un chemin continu reliant I_n à T dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Montrons que tout élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ peut être relié à I_n par un chemin continu à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Toute matrice étant trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut considérer P inversible et T triangulaire supérieure telles que :
$$A = P^{-1}\,T\,P.$$
D'après la question précédente, il existe $M : [0,1] \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ reliant I_n à T. Il est alors facile de constater que l'application
$$x \mapsto P^{-1}\,M(x)\,P$$
est un chemin continu reliant I_n à A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

6.19 1. (a) Il suffit de poser, pour tout $t \in [0,1]$: $\gamma(t) = I_n + \lambda\, t\, E_{i,j}$, car alors :
- pour tout $t \in [0,1]$, la matrice $\gamma(t)$ est inversible, car triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls;
- l'application $t \mapsto \gamma(t)$ est continue;
- on a $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = T$.

(b) Il suffit cette fois de poser, pour tout $t \in [0,1]$:
$$\gamma(t) = I_n + t(\mu - 1)E_{i,i}.$$

(c) Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Grâce à l'algorithme du pivot on peut, en opérant sur les lignes :
- via des transvections, transformer A en une matrice diagonale inversible;
- puis, grâce à des dilatations de déterminant positif, transformer A en une matrice diagonale $\widetilde{A}$ dont la diagonale est constituée de ± 1.

En notant $M_1, \ldots, M_N$ les matrices d'opérations élémentaires associées à ces transformations, on a :
$$\widetilde{A} = M_N \cdots M_1 A.$$
Les questions précédentes nous permettent alors de considérer des chemins continus $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, définis sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, reliant I_n à $M_1, \ldots, M_N$ respectivement. L'application continue définie sur $[0,1]$:
$$t \mapsto \gamma_N(t) \cdots \gamma_1(t) A$$
permet alors de relier A et $\widetilde{A}$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Supposons A et B semblables. On peut alors écrire :
$$A = P^{-1}\,B\,P \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$
Si γ est un chemin reliant B à I_n dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors l'application
$$t \mapsto P^{-1}\,\gamma(t)\,P$$
est continue, à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, et relie A à I_n.

3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, notons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On constate alors que l'application définie sur $[0, \pi]$:
$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} I_p & & & (0) \\ & R_\theta & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R_\theta \end{pmatrix} \text{(avec } q \text{ blocs } R_\theta\text{)}$$
est continue, à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, et relie I_n à $J_{p,q}$.
4. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\det A > 0$. D'après la question 1c, A est reliée dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale avec une diagonale constituée de ± 1 ; notons $\widetilde{A}$ une telle matrice et γ un chemin associé.
L'application $t \mapsto \det\big(\gamma(t)\big)$ est alors continue et ne s'annule pas, donc est de signe constant. On en déduit que $\det A$ et $\det \widetilde{A}$ sont de même signe, et donc $\det \widetilde{A} > 0$.
Il en résulte que la diagonale de $\widetilde{A}$ est constitué par un nombre pair de -1, donc que $\widetilde{A}$ est semblable à une matrice de la forme $J_{p,q}$.
Les questions 2 et 3 assurent alors que $\widetilde{A} \in \mathcal{C}_0$, puis, par transitivité, que $A \in \mathcal{C}_0$.
5.
   - Il résulte de la question précédente que l'ensemble $\mathcal{C}_+$ est connexe par arcs.
   - En notant alors A la matrice diagonale $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, on constate que $\mathcal{C}_-$ est l'image de $\mathcal{C}_+$ par l'application continue :
$$M \mapsto A\,M.$$
La connexité par arcs de $\mathcal{C}_+$ donne alors celle de $\mathcal{C}_-$.
   - Puisque $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_-$, cet ensemble apparaît comme la réunion de deux parties connexes par arcs. Comme il n'est lui-même pas connexe par arcs (*cf.* exercice 20 de la page 303), on en déduit le résultat souhaité : $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs : $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$.

6.20 • Procédons par caractérisation séquentielle. Soit (A_p) une suite d'éléments de T_n convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $A \in T_n$.
Pour cela, montrons que $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Comme $A_p \to A$, on a, d'après la première question de l'exercice 6.17 :
$$d\big(\lambda, \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A_p)\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1}$$
Or, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A_p est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A_p) \subset \mathbb{R}$.
On a donc $d(\lambda, \mathbb{R}) \leqslant d\big(\lambda, \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A_p)\big)$, puis, d'après la limite (1), on a $d(\lambda, \mathbb{R}) = 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{C}$, on en déduit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$.
D'où le résultat.

- Prouvons désormais que $T_n = \mathrm{Adh}(D_n)$. Puisque T_n est un fermé contenant D_n, on a $\mathrm{Adh}(D_n) \subset T_n$. Il reste à prouver l'autre inclusion.
  Soit $A \in T_n$. Montrons que $A \in \mathrm{Adh}(D_n)$ en prouvant que A est limite d'une suite (A_p) à valeurs dans D_n.
  Cela se fait par la même méthode que celle utilisée à la première question de l'exercice 6.16. Comme A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire :
  $$A = P^{-1}\,T\,P \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
  Les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont donc les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
  Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons T_p la matrice triangulaire supérieure obtenue à partir de T en modifiant uniquement sa diagonale de la manière suivante :
  $$T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{p} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{n}{p} \end{pmatrix}$$
  On justifie alors que, pour p assez grand, les coefficients diagonaux de la matrice T_p sont deux à deux distincts (*cf.* corrigé de l'exercice 6.16).
  On obtient alors, en posant $A_p = P^{-1}\,T_p\,P$:
  $$\big(\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A_p \in D_n\big) \qquad \text{et} \qquad A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A.$$

6.21 1. Supposons $n = 1$. Identifions $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$. L'ensemble E_P est l'ensemble des racines du polynôme P, c'est donc un ensemble fini. Par suite, tous ses points sont isolés. En effet, si l'on note :
$$\delta = \min\{|x-y|\,;\ (x,y) \in (E_P)^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y\},$$
alors, pour tout $a \in E_P$, on a $E_P \cap B(a,\delta) = \{a\}$.

2. L'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, apparaissant comme l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application continue $\det$, est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, comme $I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(I_n, r) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
En notant alors $V_0 = B(0,r)$, V_0 est un voisinage de 0 vérifiant :
$$\forall H \in V_0 \quad I_n + H \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

3. • Considérons l'application :
$$\begin{array}{rccl} \varphi\ : & V_0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & H & \longmapsto & (I_n+H)^{-1}\,M\,(I_n+H). \end{array}$$
Par opérations sur les fonctions continues, l'application φ est continue (la continuité de l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$ a été obtenue à l'exercice 19 de la page 303).

Comme M est un point isolé de E_P, on peut considérer un voisinage V de M tel que $E_P \cap V = \{M\}$.
Par continuité de φ en 0, et comme $\varphi(0) = M$, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall H \in B(0,r) \cap V_0 \quad \varphi(H) \in V.$$

En notant $V_1 = B(0,r) \cap V_0$ (qui est un voisinage de 0 car intersection de deux voisinages de 0), et comme $E_P \cap V = \{M\}$, on obtient :

$$\forall H \in V_1 \quad \varphi(H) = M,$$

autrement dit, par définition de φ :

$$\forall H \in V_1 \quad (I_n + H)^{-1} M (I_n + H) = M.$$

- En multipliant à gauche par $I_n + H$ et en développant, la relation obtenue précédemment donne :

$$\forall H \in V_1 \quad MH = HM.$$

  Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $\alpha > 0$ assez petit, on a $\alpha A \in V_1$. On a alors $\alpha MA = \varepsilon AM$, et donc $MA = AM$.
  Par suite, M commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il en résulte que M est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Il suffit de poser $M_k = \lambda I_n + \dfrac{1}{k} N$ où N est la matrice dont le seul coefficient non nul est celui d'indice $(1,n)$ qui vaut 1.
5. Notons $M = \lambda I_n$.
   - On a $P(M) = P(\lambda I_n) = P(\lambda) I_n$. Donc, pour que M appartienne à E_P, il est nécessaire que λ soit racine de P.
   - Si λ est racine de P d'ordre au moins 2, alors on peut écrire :

$$P = (X - \lambda)^2 Q \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{R}[X].$$

     Une suite $(M_k)_{k \geqslant 1}$ telle qu'exhibée à la question précédente constitue alors une suite d'éléments deux à deux distincts, tendant vers M, et à valeurs dans E_p car vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(M_k) = (M_k - \lambda I_n)^2 Q(M_k) = 0.$$

     Cela contredit le fait que M soit un point isolé de E_P.
   - Pour finir, supposons que λ soit racine simple de P et montrons que M est un point isolé de E_P. Comme λ est racine simple de P, on peut écrire :

$$P = (X - \lambda)\, Q \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{R}[X] \text{ dont } \lambda \text{ n'est pas racine.}$$

     Alors $Q(M) = Q(\lambda)\, I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ donc, par continuité de $N \mapsto Q(N)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de M tel que $Q(N) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout $N \in \mathcal{V}$. On a donc pour tout $N \in \mathcal{V} \cap E_P$:

$$0 = P(N) = (N - \lambda I_n)\, Q(N)$$

     ce qui donne $N = \lambda\, I_n$ par inversibilité de $Q(N)$.
     Donc $E_P \cap \mathcal{V} = \{\lambda\, I_n\}$ ce qui prouve que $\lambda\, I_n$ est isolé.