Exercices d'analyse

Collection Prépas scientifiques

Dirigée par Olivier Rodot

C. ANTONINI, Algèbre MP/MP*

N. BASBOIS et P. ABBRUGIATI, Algèbre MPSI/PCSI, 2e édition

G. COSTANTINI, Analyse MPSI/PCSI, 2e édition

K. DAO DUC et D. DELAUNAY, Probabilités

D. DELAUNAY, Exercices d'analyse MP/MP*

D. DELAUNAY, Exercices d'analyse MPSI

D. DELAUNAY, Exercices d'algèbre et de probabilités MP/MP*

D. DELAUNAY, Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI

O. RODOT, Analyse MP/MP*

Chez le même éditeur

T. RIBEYRE, Chimie PC/PC*

M.-A. SCHOTT, J. VALENTIN, G. MAGADUR, S. CLÈDE, A.-L. LEFEVRE, A. ALTMAYER-HENZIEN, Chimie PCSI/MPSI

MP/MP*

Exercices d'analyse

David Delaunay

- RÉSUMÉS DE COURS
- MÉTHODES
- 3 NIVEAUX D'EXERCICES :
  - apprentissage
  - entraînement
  - approfondissement
- CORRIGÉS DÉTAILLÉS PAS À PAS

de boeck SUPÉRIEUR

Rue du Bosquet, 7 B-1348 Louvain-la-Neuve

1ère édition, 2017
1er tirage, 2017

Imprimé aux Pays-Bas.

Dépôt légal:
Dépôt légal France : juin 2017
Dépôt légal Belgique : 2017/13647/090

ISBN : 978-2-8073-0628-8

La pratique d'exercices est essentielle à l'apprentissage du cours de mathématiques : il n'est pas de meilleure façon de mémoriser et de comprendre un théorème que d'en faire usage !

Cet ouvrage regroupe sur 11 chapitres 316 exercices portant sur le programme d'analyse en classe MP. Il vient compléter l'ouvrage d'*algèbre et probabilités* que l'on retrouvera dans la même collection.

Chaque chapitre commence par un rappel des principales définitions et des résultats essentiels du cours. Il se poursuit avec des exercices aux corrigés détaillés regroupés sur trois niveaux :

— *Les exercices d'apprentissage* servent à l'acquisition des concepts fondamentaux du cours. Ce sont souvent des sujets faciles où j'ai choisi volontairement de ne faire figurer que peu de technicité.
— *Les exercices d'entraînement* permettent de poursuivre l'acquisition du cours, trois niveaux d'étoiles servent à anticiper leur difficulté. Ces sujets ont été choisis pour leur intérêt, leur classicisme ou ont été inspirés par des questions rencontrées aux écrits et aux oraux des différents concours.
— *Les exercices d'approfondissement* sont les plus ambitieux, ils nécessitent souvent de passer par une phase de recherche ou entrent en résonance avec d'autres chapitres du programme. Ces sujets sont inspirés de questions rencontrées aux concours les plus ambitieux.

Les corrections des exercices sont accompagnées de *méthodes*. Celles-ci servent à souligner les idées récurrentes ou bien à mettre en exergue la démarche qui va être suivie pour résoudre la question posée. Le lecteur pourra prendre appui sur celles-ci pour amorcer une résolution ou pour reprendre la main lors de sa lecture d'une correction. Afin d'aider le lecteur dans son étude, il est fait référence aux théorèmes utilisés lors de leurs premiers usages. Les notes de bas de pages complètent les résolutions en présentant des démarches alternatives ou font le lien avec d'autres sujets présents dans l'ouvrage.

Je remercie vivement Olivier RODOT d'avoir initié ce projet, François PANTIGNY pour son expertise TeXnique et Sébastien MARCOTTE pour sa relecture attentive ainsi que les compléments apportés.

Je dédicace cet ouvrage à mon fils Pierre.

David DELAUNAY

CHAPITRE 1

Compléments sur les séries numériques

1.1 Convergence

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ désigne une suite de nombres réels ou complexes définie à partir d'un rang n_0 entier naturel.

1.1.1 Séries numériques

Définition

On appelle *série* de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ avec

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Cette série est notée $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant n_0}$, $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ ou simplement $\sum u_n$.

Le terme S_n est appelé *somme partielle de rang* n de cette série.

Sans perte de généralité, on suppose pour la suite $n_0 = 0$ (quitte à poser nuls les premiers termes de la suite u_n).

Définition

On dit que la série de terme général u_n *converge* lorsqu'il y a convergence de la suite (S_n) de ses sommes partielles. On peut alors introduire la *somme de la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Lorsqu'une série est à termes positifs, il y a croissance de la suite des sommes partielles. Soit celles-ci sont majorées et la série converge, soit elles ne sont pas majorées et les sommes partielles croissent vers l'infini. Il est alors possible de déterminer la nature de séries à termes positifs par argument de comparaison :

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n \text{ et } \sum v_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ et } v_n \geqslant 0 \Longrightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ ont même nature.}$$

On compare souvent aux séries de Riemann dont la nature est connue. Pour tout α réel :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

Définition

> Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on peut introduire son reste de rang n défini par
>
> $$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Ce reste tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

1.1.2 Convergence absolue

Définition

> On dit que la série de terme général u_n *converge absolument* lorsqu'il y a convergence de la série des valeurs absolues (ou modules) $\sum |u_n|$.

Théorème 1

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors celle-ci converge et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

La convergence absolue permet d'obtenir la nature de séries numériques en raisonnant par comparaison. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries numériques vérifiant :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n) \quad \text{et} \quad \sum v_n \text{ série à termes positifs convergente}$$

alors il y a convergence absolue (et donc convergence) de la série $\sum u_n$.

1.1.3 Critère de d'Alembert

Soit q un nombre complexe. Si $|q| < 1$, la série géométrique $\sum q^n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Sinon, elle *diverge grossièrement*[1].
En opérant une comparaison à une série géométrique, on obtient le critère suivant :

Théorème 2 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes non nuls à partir d'un certain rang. On suppose :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

a) si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
b) si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument.

Lorsque $\ell = 1$ (ce qui est malheureusement très fréquent), on ne peut rien conclure. On ne peut rien conclure non plus lorsque la limite définissant ℓ n'existe pas.

1.1.4 Critère des séries alternées

Définition

> Une suite réelle (u_n) est dite *alternée* lorsque
>
> $$\big(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n|\big) \quad \text{ou} \quad \big(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} |u_n|\big).$$
>
> Une série réelle $\sum u_n$ est dite *alternée* lorsque son terme général l'est.

Théorème 3 (Critère spécial des séries alternées)

Si $\sum u_n$ est une série réelle alternée telle que $|u_n|$ décroît vers 0 alors celle-ci converge. De plus, le reste R_n est du signe du premier terme qui l'exprime et est borné par celui-ci en valeur absolue :

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}| \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Le signe de la somme S de la série est alors celui de son premier terme u_0. Plus précisément, la somme est encadrée par les sommes partielles consécutives :

$$S_n \leqslant S \leqslant S_{n+1} \quad \text{ou} \quad S_{n+1} \leqslant S \leqslant S_n \text{ selon la parité de } n.$$

1.2 Étude asymptotique

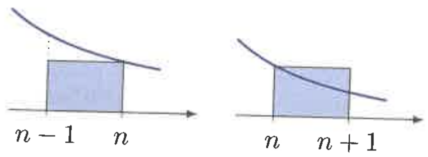
1.2.1 Comparaison série-intégrale

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et une fonction $f : [n_0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Lorsque la fonction f est monotone, il est possible d'encadrer $f(n)$ par les intégrales de f sur $[n-1\,;n]$ et $[n\,;n+1]$.

1. Il y a divergence grossière lorsque le terme général ne tend pas vers 0.

Par exemple, lorsque f est décroissante, on a

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$



(la minoration valant pour $n \geqslant n_0$, la majoration pour $n \geqslant n_0+1$ seulement).
En sommant ces encadrements, il est possible de proposer des encadrements pertinents de sommes partielles ou de restes associés à la série $\sum f(n)$. En particulier, on peut déterminer des équivalents simples des sommes partielles des séries de Riemann divergentes et des restes des séries de Riemann convergentes.

On peut aussi énoncer un résultat général :

Théorème 4

Si $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue par morceaux et décroissante, il y a convergence [1] de la série de terme général

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n).$$

1.2.2 Sommation des relations de comparaison

Théorème 5 (Comparaison des restes)

Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente.

a) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ alors la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

b) Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ alors la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

c) Si $u_n \sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

1. En particulier, on pourra dire au chapitre suivant que la série de terme général $f(n)$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Cet outil permet d'estimer rapidement l'ordre de grandeur d'un reste de série convergente et donc la rapidité de convergence de la série.

Théorème 6 (Comparaison des sommes partielles)

Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs divergente.

a) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

b) Si $u_n \sim v_n$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Cet outil permet aussi un calcul rapide d'un ordre de grandeur. On peut encore énoncer un résultat analogue pour une comparaison avec un $\mathrm{O}(.)$.

1.3 Familles sommables

1.3.1 Définition

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par un ensemble I fini ou infini.

Définition

On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque les sommes des $|a_i|$ limitées aux parties finies incluses dans I sont majorées :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall F \text{ finie} \subset I,\quad \sum_{i\in F} |a_i| \leqslant M.$$

On peut alors définir [1] la somme de la famille notée $\sum_{i\in I} a_i$.
Lorsque $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs non sommable, on écrit

$$\sum_{i\in I} a_i = +\infty.$$

Les familles finies sont assurément sommables.

Par construction, la somme d'une famille sommable ne dépend pas de « l'ordre » des éléments de la famille. Si σ est une permutation de I, la famille permutée $\left(a_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est

1. On commence par le cas où les a_i sont des réels positifs en définissant la somme comme la borne supérieure des sommes sur les parties finies. On étend aux familles de réels en raisonnant par les parties positives a_i^+ et négatives a_i^-. On étend aux familles complexes en raisonnant par les parties réelle et imaginaire.

sommable si, et seulement si, la famille initiale $(a_i)_{i\in I}$ l'est. De plus, si tel est le cas, ces deux familles ont la même somme :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_{\sigma(i)}.$$

Théorème 7

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de nombres réels ou complexes alors, pour tout scalaire λ, les familles $(\lambda a_i)_{i\in I}$ et $(a_i+b_i)_{i\in I}$ sont sommables et

$$\sum_{i\in I}\lambda a_i = \lambda\sum_{i\in I} a_i \quad\text{et}\quad \sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i.$$

1.3.2 Lien avec la convergence absolue

Lorsque l'ensemble d'indexation I est dénombrable [1], on peut énumérer ses éléments :

$$I = \{i_0, i_1, i_2, \dots\} = \{i_n \mid n\in\mathbb{N}\} \quad \text{avec des } i_n \text{ deux à deux distincts.}$$

On peut alors identifier [2] la famille $(a_i)_{i\in I}$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_n = a_{i_n}$.

Théorème 8

La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum a_n$ converge absolument. De plus, si tel est le cas

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

En conséquence, on ne modifie pas la somme d'une série absolument convergente lorsque l'on permute ses termes :

Théorème 9

Si $\sum a_n$ est une série absolument convergente et si σ désigne une permutation de $\mathbb{N}$, la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et [3]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

1. La notion d'ensemble dénombrable est présentée dans le section 8.1 du chapitre 8 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MP* dans la même collection.
2. L'écriture est commode mais quelque peu abusive : il serait plus adapté de poser $a'_n = a_{i_n}$.
3. En revanche, réorganiser les termes d'une série semi-convergente peut modifier sa somme. Plus précisément, pour tout réel S arbitrairement choisi, on peut organiser les termes d'une série semi-convergente donnée pour que sa somme soit égale à S !

1.3.3 Sommation par paquets

Théorème 10

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition [1] de I.
Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable alors les sous-familles $(a_i)_{i\in I_n}$ sont sommables et la série de leurs sommes converge avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Bigl(\sum_{i\in I_n} a_i\Bigr) = \sum_{i\in I} a_i.$$

De plus, lorsque la famille $(a_i)_{i\in I}$ est uniquement constituée de réels positifs, la réciproque est vraie : si les sous-familles $(a_i)_{i\in I_n}$ sont sommables et si la série de leurs sommes converge, la famille complète $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.

Ce résultat permet de caractériser qu'une famille est sommable et aussi d'organiser à l'envi le calcul de sa somme.

En utilisant une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée de parties vides au delà d'un certain rang, ce résultat permet des réorganisations finies : par exemple, la séparation des termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs d'une somme sur $\mathbb{N}$. En particulier, on peut réorganiser les termes de la somme d'une série absolument convergente.

1.3.4 Sommes doubles

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes doublement indexée.

Théorème 11

La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si,

1) la série $\sum_{m\geqslant 0} |a_{m,n}|$ converge pour tout $n\in\mathbb{N}$;
2) la série $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}|$ converge.

De plus, si tel est le cas,

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Bigl(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\Bigr) = \sum_{m=0}^{+\infty}\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\Bigr)$$

avec absolue convergence des séries engagées.

Sous réserve de sommabilité, l'outil qui précède permet de réaliser l'échange de deux sommes infinies.

1. Les I_n sont deux à deux disjoints et de réunion égale à I.

1.3.5 Produit de Cauchy

Définition

On appelle *produit de Cauchy* de deux séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ la série $\sum c_n$ de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Théorème 12

Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument alors la série produit de Cauchy $\sum c_n$ converge aussi absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Ce résultat permet de réaliser un produit de deux sommes infinies. Cependant, il ne peut être utilisé que lorsqu'il y a convergence absolue des deux séries numériques [1].

1.4 Exercices d'apprentissage

1.4.1 Convergence

Exercice 1

Déterminer la nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \binom{2n}{n}^{-1}$.

Solution

méthode

Bien que d'apparence commode, la règle de d'Alembert (Th. 2 p. 5) est assez peu utile pour obtenir la convergence d'une série numérique. On y préférera souvent les démarches par comparaison à une série de Riemann vues dans l'ouvrage d'analyse de première année. Dans le cas où le terme général de la série comporte un produit, la règle de d'Alembert peut cependant être efficace comme on le verra dans le chapitre 9 ou dans le sujet présent !

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ peut s'écrire comme un rapport de nombres factoriels :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad \text{donc} \quad u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

1. La formule du produit de Cauchy est encore valable si une des deux séries est absolument convergente mais ne l'est plus pour un produit de deux séries semi-convergentes (voir sujet 13 p. 24).

On en déduit

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(2n)!}{(2(n+1))!}\cdot\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}.$$

Cette limite est strictement inférieure à 1, la série converge absolument et donc converge.

Exercice 2

Déterminer la nature des séries

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2+3n\sin n}$.

Solution

Dans chacune des trois études, on note u_n le terme général de la série étudiée.

(a) La série est alternée car on peut écrire $u_n = (-1)^{n-1}|u_n|$. On est alors tenté de mettre en œuvre le critère des séries alternées (Th. 3 p. 5). On a déjà

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

mais cela ne suffit pas !

méthode

Une suite positive de limite nulle n'est pas nécessairement décroissante : il faut absolument vérifier l'hypothèse de décroissance de $|u_n|$!

La suite $(|u_n|)$ est décroissante par composition de fonctions monotones [1] :

$$n+1 \geqslant n \implies \sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$$
$$\implies \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, $\sum u_n$ est une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue : cette série converge.

(b) Encore une fois il s'agit d'une série alternée puisque $u_n = (-1)^n|u_n|$. On a immédiatement

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il faut encore constater la décroissance de la suite $(|u_n|)$. L'argument

« $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n}$ décroît »

1. La fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

n'est pas acceptable car une suite équivalente à une suite décroissante n'est pas nécessairement décroissante !

À nouveau, la décroissance s'obtient par composition de fonctions monotones :

$$n+1 \geqslant n \implies \sqrt{n+1}+n+1 \geqslant \sqrt{n}+n \implies \frac{1}{\sqrt{n+1}+n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}+n}.$$

Finalement, la série $\sum u_n$ est convergente.

(c) C'est une série alternée de limite nulle mais la décroissance de la valeur absolue est douteuse [1].

méthode

Un argument de convergence absolue par comparaison peut être plus immédiat qu'une mise en place du critère spécial des séries alternées.

On a

$$|u_n| = \frac{1}{|n^2+3n\sin n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente ($2>1$), on peut affirmer la convergence absolue (et donc la convergence) de $\sum u_n$.

Exercice 3

Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right).$$

Solution

Puisque le terme $(-1)^{n-1}/\sqrt{n}$ est de limite nulle, on peut affirmer [2] :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

L'équivalent obtenu est le terme général d'une série convergente [3] mais il n'est pas de signe constant !

méthode

La règle des équivalents permet d'obtenir la nature d'une série numérique seulement lorsque l'on compare à une série à termes de signe constant (ou si l'on raisonne par convergence absolue). Ici, le terme général est équivalent à un terme alterné et l'on ne peut rien dire. On étudie alors le terme qui suit l'équivalent dans le développement précédent.

1. Et même fausse !
2. En effet, on sait $\ln(1+u) \sim u$ quand u tend vers 0.
3. Voir sujet 2 p. 11.

En exploitant le développement limité $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ quand u tend vers 0, on obtient

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}_{u_n} + \underbrace{\frac{-1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{v_n}.$$

La série de terme général u_n converge par le critère spécial et la série de terme général v_n diverge car

$$-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n},\quad \frac{1}{2n} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{2n} \text{ diverge.}$$

Par somme d'une série convergente et d'une série divergente, la série étudiée diverge [1].

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a|<1$. Montrer l'identité

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n.$$

Solution

Par sommation géométrique de raison a (avec $|a|<1$ ce qui assure la convergence), on peut écrire

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{1-a} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right).$$

Il s'agit alors de développer ce produit.

méthode

Un produit de Cauchy permet de développer le produit de deux sommes associées à des séries absolument convergentes.

Puisqu'il y a convergence absolue de la série géométrique $\sum a^n$, on peut opérer un produit de Cauchy et écrire

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} (a^k \times a^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} a^n = (n+1)a^n.$$

On obtient ainsi l'identité [2] attendue.

1. Ce sujet donne un exemple dans lequel deux séries de termes équivalents sont de natures différentes !
2. Cette identité correspond à une dérivation terme à terme de la série géométrique.

1.4.2 Études asymptotiques

Exercice 5

Déterminer un équivalent simple quand n croît vers l'infini de :

(a) $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ (b) $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Solution

(a) **méthode**

> Lorsque la fonction f est monotone, on peut estimer les sommes partielles de la série $\sum f(n)$ en opérant une comparaison série-intégrale.

La croissance et la continuité de la fonction $\sqrt{\cdot}$ permet d'écrire l'encadrement qui suit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{k} \leqslant \int_{k}^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

En sommant ces encadrements, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k}^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

Dans les membres encadrants, les intégrales sommées sont contiguës et peuvent être raccordées par la relation de Chasles :

$$\int_{0}^{n} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \int_{1}^{n+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

En calculant les intégrales à l'aide de la primitive $t \mapsto \frac{2}{3}t^{3/2}$, on obtient

$$\frac{2}{3}n^{3/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \frac{2}{3}\left((n+1)^{3/2} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{3/2}$$

Les deux membres encadrants étant équivalents en l'infini, on peut conclure

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

(b) On étudie le reste d'une série de Riemann convergente.

méthode

> Lorsque la fonction f est monotone, on peut estimer le reste de la série convergente $\sum f(n)$ en opérant une comparaison série-intégrale.

La décroissance et la continuité de la fonction $t \mapsto 1/t^2$ permettent d'écrire l'encadrement pour $k \geqslant 2$:

$$\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Soit $N \geqslant n+1$. En sommant les encadrements précédents pour k allant de $n+1 \geqslant 2$ à N, on obtient

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

soit encore, après calcul des deux intégrales,

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini, on produit un encadrement du reste étudié

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Les deux membres encadrants étant équivalents, on peut conclure

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Exercice 6

Déterminer un équivalent simple quand n croît vers l'infini de :

(a) $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$ (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\sqrt{k}}$.

Solution

méthode

> On peut déterminer ces équivalents, en opérant une comparaison série-intégrale, mais les intégrales auxquelles on se ramène sont délicates à calculer. On peut simplifier le problème en opérant initialement une sommation de relation de comparaison (Th. 5 p. 6 et Th. 6 p. 7).

(a) On a l'équivalence

$$\frac{1}{k^2+k+1} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}.$$

La série de terme général $1/k^2$ est convergente et à termes positifs. Par sommation de relation de comparaison :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

où le dernier équivalent a été calculé dans le sujet ci-dessus.

(b) On a l'équivalence

$$\frac{1}{1+\sqrt{k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

La série de terme général $1/\sqrt{k}$ est divergente et à termes positifs. Par sommation de relation de comparaison :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Pour calculer cet équivalent, on peut opérer une comparaison série-intégrale, ou avec un peu d'astuce, se ramener à une série télescopique divergente en écrivant

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} 2\big(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\big).$$

En exploitant à nouveau une sommation de relation de comparaison :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sum_{k=1}^{n}\big(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\big) = 2\sqrt{n}.$$

1.4.3 Familles sommables

Exercice 7

Déterminer selon $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la somme

$$\sum_{m,n\geqslant 1} \frac{1}{(m+n)^\alpha}.$$

Solution

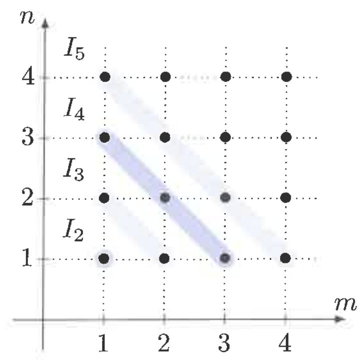
Les termes sommés étant positifs, la question posée est celle de la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in I}$ avec

$$a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha} \quad \text{et} \quad I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*.$$

méthode

Pour étudier la sommabilité d'une famille, on peut revenir à la définition de famille sommable (p. 7) en étudiant si les sommes finies des valeurs absolues sont majorées. On peut aussi, et c'est souvent très commode, raisonner par sommation par paquets (Th. 10 p. 9). Comme les termes sommés sont ici positifs, la famille est sommable si, et seulement si, une organisation par paquets du calcul conduit à une valeur finie.

Regroupons les termes par paquets selon la valeur de $m+n$. On peut décomposer le domaine d'indexation I en la réunion des ensembles deux à deux disjoints :



$$I_p = \left\{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid m+n=p\right\} \quad \text{avec} \quad p \geqslant 2.$$

Les sous-familles $(a_{m,n})_{(m,n)\in I_p}$ sont évidemment sommables car il s'agit de familles finies et il est aisé d'en calculer les sommes :

$$\sum_{(m,n)\in I_p} a_{m,n} = \sum_{(m,n)\in I_p} \frac{1}{p^\alpha} = \frac{p-1}{p^\alpha}.$$

car I_p est un ensemble fini à $p-1$ éléments : $(1,p-1),(2,p-2),\dots,(p-1,1)$.

La sommabilité de la famille complète $(a_{m,n})_{(m,n)\in I}$ est alors équivalente à la convergence de la série $\sum \frac{p-1}{p^\alpha}$. Or

$$\frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p^{\alpha-1}} \geqslant 0.$$

Par référence aux séries de Riemann, on peut conclure

$$\sum_{m,n\geqslant 1} \frac{1}{(m+n)^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 2.$$

1.5 Exercices d'entraînement

1.5.1 Convergence

Exercice 8 *

En fonction de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer la nature de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n-1}}.$$

Solution

L'équivalent :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

n'étant pas de signe constant, il ne permet pas de conclure[1].

méthode

On calcule un développement asymptotique à deux termes.

On a

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^{n-1}} &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}}\\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{1+u} \quad \text{avec} \quad u=\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{u_n}+\underbrace{\frac{1}{n^{2\alpha}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{v_n}.\end{aligned}$$

D'une part, la série de terme général u_n converge pour toute valeur de $\alpha>0$ car c'est une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue.

D'autre part,

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{n^{2\alpha}}\geqslant 0.$$

La série de terme général v_n a la nature de la série de Riemann $\sum 1/n^{2\alpha}$, c'est-à-dire convergente si, et seulement si, $\alpha>1/2$.

Par somme de séries, on peut conclure que la série étudiée converge si, et seulement si, α est strictement supérieur à $1/2$.

Exercice 9 **

Justifier l'existence et calculer la somme suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Solution

Posons u_n le terme général définissant la somme. La suite (u_n) est alternée car

$$u_n=(-1)^n\,|u_n| \quad \text{avec} \quad |u_n|=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

1. Tout au plus, on peut affirmer qu'il y a convergence absolue quand $\alpha>1$ ou qu'il y aurait divergence grossière si le sujet nous invitait à étudier le cas $\alpha<0$.

De plus, la suite $(|u_n|)$ tend vers 0 en décroissant car

$$\begin{aligned} n+1\geqslant n &\Longrightarrow \frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{n}\\ &\Longrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Par le critère spécial des séries alternées (Th. 3 p. 5), on peut affirmer que la série $\sum u_n$ converge.

méthode

Pour calculer la somme, nous allons séparer les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs afin de résoudre la puissance de (-1). On réalise cette opération sur les sommes partielles afin de ne pas écrire de séries divergentes. Enfin, on se limite aux sommes partielles de rangs pairs car en calculer la limite suffit à déterminer la somme voulue.

On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{p=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)-\sum_{p=0}^{N-1}\ln\left(1+\frac{1}{2p+1}\right)\\ &= \sum_{p=1}^{N}\ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right)+\sum_{p=0}^{N-1}\ln\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right).\end{aligned}$$

D'une part,

$$\sum_{p=1}^{N}\ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right)=\ln\left(\frac{3\times5\times\cdots\times(2N+1)}{2\times4\times\cdots\times2N}\right).$$

méthode

On sait exprimer[1] le produit d'entiers pairs et d'entiers impairs consécutifs à l'aide de nombres factoriels :

$$2\times4\times\cdots\times2n=2^n n! \quad \text{et} \quad 1\times3\times\cdots\times(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Ici, on obtient

$$\sum_{p=1}^{N}\ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right)=\ln\left(\frac{(2N+1)!}{2^{2N}(N!)^2}\right).$$

D'autre part, on obtient de façon semblable

$$\sum_{p=0}^{N-1}\ln\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)=\ln\left(\frac{1\times3\times\cdots\times(2N-1)}{2\times4\times\cdots\times2N}\right)=\ln\left(\frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2}\right).$$

1. Voir sujet 5 du chapitre 2 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI* dans la même collection.

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{(2N)!(2N+1)!}{2^{4N}(N!)^4}\right).$$

En utilisant, l'équivalent de Stirling, on obtient [1]

$$\frac{(2N)!(2N+1)!}{2^{4N}(N!)^4}=(2N+1)\frac{\left(\sqrt{4\pi N}\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}\right)^2}{2^{4N}\left(\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N\right)^4}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{2}{\pi}.$$

On peut conclure

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

Exercice 10 ** (Règle de Raabe-Duhamel)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

(a) On suppose qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n).

(b) On suppose qu'il existe $\alpha>1$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

À l'aide d'une comparaison à une série de Riemann, montrer la convergence de la série $\sum u_n$.

(c) On suppose maintenant qu'il existe $\alpha<1$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer la divergence de série $\sum u_n$.

(d) Application : Soit $a\in\mathbb{R}$. Étudier la convergence absolue de la série de terme général

$$u_n=\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}.$$

1. Par commodité pour la suite des calculs, il est pertinent d'écrire $(2N+1)!=(2N+1)(2N)!$.

Solution

(a) **méthode**

La comparaison introduite peut se comprendre comme la décroissance de la suite (u_n/v_n).

Notons N le rang à partir duquel la comparaison est vraie. Pour n entier au delà de N

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\leqslant\frac{u_n}{v_n}.$$

La suite (u_n/v_n) est alors décroissante à partir du rang N et est donc majorée. On peut introduire un réel M tel que $0<u_n\leqslant Mv_n$ pour tout naturel n et la suite (u_n) est donc dominée par la suite (v_n).

(b) Soit $1<\beta<\alpha$ et $v_n=1/n^\beta$. Par développement limité :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad\text{car}\quad\frac{1}{n}\to0$$

donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}-\frac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\alpha-\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\alpha-\beta}{n}.$$

méthode

Deux suites réelles équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.

Sachant $\alpha>\beta$, on peut affirmer qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est dominée par (v_n). Or $\sum v_n$ est une série à termes positifs convergente et donc $\sum u_n$ converge absolument.

(c) Considérons maintenant $w_n=1/n$ pour $n\geqslant1$. On a par développement limité

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puisque $\alpha<1$, on obtient cette fois-ci que la suite (w_n) est dominée par la suite (u_n). Sachant la divergence de la série de terme général $1/n$, on peut conclure à la divergence de la série $\sum u_n$.

(d) Si a est un entier naturel, les termes de la suite sont nuls à partir d'un certain rang et la série $\sum u_n$ converge.

Si a n'appartient pas à $\mathbb{N}$, les termes de la suite sont tous non nuls et pour n assez grand

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a-n}{n+1}\quad\text{et}\quad\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{n-a}{n+1}=1-\frac{a+1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec $\alpha = a + 1$.

On conclut que la série $\sum u_n$ converge absolument [1] si, et seulement si, $a \geqslant 0$.

Exercice 11 **

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et (S_n) la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

(a) Vérifier que la suite (S_n) est bornée.

(b) Justifier la relation suivante pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_N}{N}.$$

(c) En déduire la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}.$$

Solution

(a) **méthode**

> S_n s'interprète comme la partie imaginaire d'une série géométrique complexe.

Cas : $\theta \equiv 0 \;[2\pi]$. La suite (S_n) est nulle et donc bornée.

Cas : $\theta \not\equiv 0 \;[2\pi]$. Le terme S_n est la partie imaginaire de la somme géométrique suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1.$$

On en déduit que la suite (S_n) est bornée puisque

$$|S_n| \leqslant \left|\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| \leqslant \frac{1+\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\right|}{\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|} = \frac{2}{\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|}.$$

(b) Sachant $\sin(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, il s'agit de vérifier l'identité

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_N}{N}.$$

1. Elle converge aussi pour $a \in \left]-1\,;0\right[$ par application du critère spécial des séries alternées mais diverge pour les autres valeurs de a : voir sujet 21 du chapitre 11 de l'ouvrage *Exercices d'analyse MPSI* dans la même collection.

méthode

> On peut constater cette relation par récurrence ou directement en séparant la somme du premier membre en deux et en opérant un glissement d'indice [1].

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1}$$

On peut ensuite combiner les deux sommes quitte à isoler un terme de chacune

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_n}{n+1}\right) + \frac{S_N}{N} - \underbrace{S_0}_{=0} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_N}{N}.$$

(c) Par le calcul ci-dessus, la somme partielle de rang N de la série étudiée est somme du terme S_N/N qui est de limite nulle (car (S_n) est bornée) et d'un terme qui est somme partielle de la série

$$\sum \frac{S_n}{n(n+1)}.$$

Or, la suite (S_n) étant bornée, on a la domination

$$\frac{S_n}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{n^2} \geqslant 0 \text{ et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ convergente.}$$

Ainsi, cette série converge absolument.

Par opérations sur les suites convergentes, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n\theta)}{n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n}{n(n+1)}.$$

On peut alors conclure à la convergence de la série étudiée.

Exercice 12 **

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Justifier qu'il existe un réel $A > 0$ pour lequel

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}.$$

(b) Étudier la convergence de la série $\sum (-1)^n u_n$.

1. Cette méthode se nomme une *transformation d'Abel*.

Solution

(a) **méthode**

> Pour obtenir l'équivalent demandé, on se ramène à un problème de convergence en étudiant la suite de terme général $(n^\alpha u_n)$. On exploite ensuite le lien suite-série :
> $$(u_n) \quad \text{et} \quad \sum (u_{n+1}-u_n) \text{ ont même nature.}$$

Posons $v_n = n^\alpha u_n$ pour $n \geqslant 1$. Par calcul de développement limité [1]

$$\begin{aligned}\ln v_{n+1} - \ln v_n &= \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{\alpha}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \alpha\left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

La série télescopique $\sum(\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ est donc absolument convergente et par conséquent la suite $(\ln v_n)$ converge. En notant ℓ sa limite, on peut écrire

$$n^\alpha u_n = \mathrm{e}^{\ln v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^\ell.$$

Avec $A = \mathrm{e}^\ell > 0$, on obtient l'équivalent demandé.

(b) La série $\sum(-1)^n u_n$ n'est pas de signe constant, un équivalent ne suffit pas pour en déterminer la nature. Cependant, lorsque $\alpha \leqslant 0$, le terme $(-1)^n u_n$ ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement. Lorsque $\alpha > 0$, le quotient u_{n+1}/u_n est strictement inférieur à 1 à partir d'un certain rang N car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{n} < 0.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est alors décroissante de limite nulle et le critère spécial des séries alternées assure la convergence de $\sum(-1)^n u_n$.

Exercice 13 *

Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

(a) Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.

(b) Montrer la divergence de leur série produit de Cauchy [2].

1. On développe le second logarithme en écrivant $\ln(1+u) = u + \mathrm{O}(u^2)$ quand $u \to 0$.
2. Par cette étude, on voit que la convergence d'un produit de Cauchy n'est pas automatique. Par le théorème Th. 12 p. 10, on a vu que celle-ci est vraie lorsque l'on opère un produit de séries absolument convergentes.

Solution

(a) Les séries vérifient le critère spécial (Th. 3 p. 5) : elles sont alternées et leurs valeurs absolues décroissent vers 0.

(b) **méthode**

> Pour opérer le produit de Cauchy, on prend garde ici à ce que les suites ne sont définies qu'à partir du rang 1. On mène le calcul en supposant les termes initiaux nuls : $a_0 = b_0 = 0$.

La série produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ a pour terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

On obtient $c_0 = c_1 = 0$ et pour $n \geqslant 2$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

Or, pour k compris entre 1 et $n-1$, on a $\sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$ et $\sqrt{n-k} \leqslant \sqrt{n}$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}.$$

On en déduit

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Le terme c_n ne tend pas vers 0. La série produit de Cauchy $\sum c_n$ diverge grossièrement.

1.5.2 Études asymptotiques

Exercice 14 *

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier l'identité

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

(b) En déduire la valeur de la *somme harmonique alternée*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Solution

(a) **méthode**

> On sépare les termes d'indices pairs et impairs afin de résoudre la puissance de (-1). On peut aussi établir cette identité en raisonnant par récurrence.

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}.$$

On adjoint les termes d'indices pairs manquant dans la première somme et on les retranche pour maintenir l'égalité

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1}+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\right)-2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}.$$

Il ne reste plus qu'à simplifier :

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.$$

(b) La série étudiée converge car c'est une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue.

méthode

> Puisque la série converge, il suffit de calculer[1] la limite des sommes partielles de rangs pairs pour en calculer la somme.

La fonction inverse étant décroissante, on peut mettre en œuvre une comparaison série-intégrale[2]. Pour tout $k>1$:

$$\int_{k}^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En sommant, on obtient

$$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\leqslant\int_{n}^{2n}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On peut calculer les intégrales encadrantes et, puisqu'elles tendent vers $\ln 2$ quand n tend vers l'infini, on peut conclure

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2.$$

1. Une alternative possible est aussi d'écrire $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ et de faire apparaître une somme de Riemann : voir sujet 6 du chapitre 10 de l'ouvrage *Exercices d'analyse MPSI*.
2. Si l'on connaît le développement asymptotique $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$ (voir sujet 18 p. 29), on peut aussi réaliser le calcul $H_{2n}-H_n=\ln 2+\mathrm{o}(1)$.

Exercice 15 **

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right).$$

Montrer qu'il existe un réel $A>0$ tel que

$$P_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{A}{\sqrt{n}}.$$

Solution

méthode

> On étudie la convergence de la suite[1] (u_n) déterminée par $u_n=\ln(\sqrt{n}P_n)$.

La suite (u_n) a la nature de la série télescopique $\sum(u_n-u_{n-1})$. Or

$$u_n-u_{n-1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)+\ln\left(\frac{P_n}{P_{n-1}}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right).$$

Par le développement limité $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+\mathrm{o}(u^3)$ quand u tend vers 0, on obtient

$$u_n-u_{n-1}\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{(-1)^{n-1}}{3n^{3/2}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Après simplification

$$u_n-u_{n-1}\underset{n\to+\infty}{=}\underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}_{v_n}+\underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{3n^{3/2}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{w_n}.$$

La série de terme général v_n converge par application du critère spécial et la série de terme général w_n converge absolument par comparaison à une série de Riemann avec $\alpha=3/2>1$. Par somme de séries convergentes, on obtient la convergence de la série de terme général u_n-u_{n-1} donc la convergence de la suite (u_n). En posant ℓ la limite de celle-ci, on peut écrire

$$\sqrt{n}P_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{\ell}\neq 0\quad\text{donc}\quad P_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{A}{\sqrt{n}}\quad\text{avec}\quad A=\mathrm{e}^{\ell}>0.$$

Exercice 16 **

Former un développement asymptotique à deux termes de

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

1. On remarque $P_n>0$ car produit de facteurs tous strictement positifs.

Solution

Par une comparaison série-intégrale déjà vue dans le sujet 5 p. 14, on sait

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Il reste à déterminer un équivalent de la différence.

méthode

On exprime $1/n$ comme le reste d'une série télescopique.

On peut écrire

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

et alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}.$$

Or

$$\frac{1}{k^2(k-1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^3}$$

avec $\sum 1/k^3$ série à termes positifs convergente. Par sommation de relation de comparaison, on peut affirmer

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

La décroissance et la continuité sur $[1\,;+\infty[$ de la fonction $t \mapsto 1/t^3$ permet la comparaison série-intégrale, pour $N \geqslant n+1$,

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{dt}{t^3}$$

avec

$$\int_n^N \frac{dt}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_n^N = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2} \quad \text{et} \quad \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2}.$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini, il vient

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

et l'on peut affirmer par encadrement

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Finalement,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 17 * (Lemme de l'escalier)

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 1. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

Solution

méthode

La limite étant non nulle, c'est aussi un équivalent : on opère une sommation de relation de comparaison (Th. 6 p. 7).

Puisque $u_{n+1} - u_n \sim 1$ avec 1 terme général d'une série à termes positifs divergente, on a par sommation

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

Sachant que u_0 est un terme constant donc négligeable devant n, on obtient $u_n \sim n$.

Exercice 18 **

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(a) Montrer la convergence de la série $\sum\left(\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$.

On pose[1]

$$\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right).$$

(b) Établir $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec (ε_n) une suite de limite nulle.

(c) Justifier le développement asymptotique

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. γ est la constante d'Euler, $\gamma \simeq 0{,}577\,216$ à 10^{-6} près.

Solution

(a) Par développement limité

$$\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k}+\left(-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}.$$

Par équivalence à une série convergente à termes de signe constant, on peut affirmer que la série étudiée converge.

(b) **méthode**

> Lorsqu'une série converge, sa somme peut s'écrire comme l'addition d'une somme partielle et d'un reste qui est de limite nulle.

Pour $n \geqslant 2$, on peut écrire la décomposition

$$\gamma = 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)+R_n \quad \text{avec} \quad R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right).$$

Par télescopage

$$1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)=\underbrace{1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}_{=H_n}+\sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln k)=H_n-\ln n.$$

On en déduit l'écriture voulue

$$H_n=\ln n+\gamma-R_n=\ln n+\gamma+\varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n=-R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(c) Le terme ε_n s'exprime comme le reste d'une série convergente

$$\varepsilon_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}-\left(\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right).$$

En vertu des calculs qui ont précédé :

$$-\left(\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2}.$$

La série $\sum 1/k^2$ est une série à termes positifs convergente. Par sommation de relation de comparaison (Th. 5 p. 6), on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}-\left(\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2k^2}.$$

Enfin, à l'aide d'une comparaison série-intégrale[1] on conclut

$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Exercice 19 ***

Pour $x>0$, on pose

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

(a) Étudier la convergence de la série de terme général $u_n=(-1)^n f(n)$ avec $n \geqslant 1$.

(b) Montrer la convergence de la série de terme général

$$v_n=f(n)-\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad n\geqslant 2.$$

On sait qu'il existe une constante réelle γ telle que[2]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n+\gamma+\mathrm{o}(1).$$

(c) En étudiant la quantité

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k)-\sum_{k=1}^{2n} f(k)$$

exprimer en fonction de γ la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(n)$.

Solution

(a) La série de terme général $u_n=(-1)^n f(n)$ est alternée.

méthode

> La décroissance de $|u_n|$ n'étant pas immédiate, on étudie les variations de f.

Après étude du signe de la dérivée de f, on obtient le tableau des variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

1. Voir sujet 5 p. 14.
2. Voir sujet 18 p. 29.

La suite $(|u_n|)$ apparaît décroissante à partir du rang $3 = \lceil e \rceil$ et tend vers 0 : on peut appliquer le critère spécial et affirmer la convergence de la série $\sum u_n$.

(b) **méthode**

On peut encadrer v_n en encadrant $f(n)$ par des intégrales.

Par la décroissance de la fonction f sur l'intervalle $[e\,;+\infty[$, on peut affirmer l'encadrement qui suit pour tout $n \geqslant 4$

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leqslant f(n-1).$$

On en déduit

$$0 \leqslant v_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n) \leqslant f(n-1) - f(n).$$

La série télescopique $\sum\big(f(n-1) - f(n)\big)$ converge car elle a la nature de la suite $\big(f(n)\big)$. Par comparaison de séries à termes positifs, on peut alors affirmer la convergence[1] de la série de terme général v_n.

(c) D'une part, on peut simplifier les termes communs aux deux sommes et reconnaître une somme partielle de la série étudiée :

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{p=1}^{n} f(2p-1) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k).$$

D'autre part, si l'on note C la somme de la série de terme général v_n, on peut écrire

$$\sum_{k=2}^{n}\left(f(k) - \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt\right) = \sum_{k=2}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{=} C + o(1).$$

En ajoutant un terme initial nul à la somme et en calculant l'intégrale[2], on obtient le développement asymptotique

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1).$$

Aussi, en écrivant $\ln(2k) = \ln 2 + \ln k$, on obtient

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2 + \ln k}{2k} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}.$$

1. On vient de reproduire la démonstration du théorème de comparaison série-intégrale (Th. 4 p. 6).
2. On reconnaît une forme $u'u$ en $u(t) = \ln t$.

En combinant ces résultats et le développement asymptotique fourni dans l'énoncé, on obtient après simplification

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \gamma \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + o(1).$$

On peut alors conclure

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k) = \frac{1}{2}(2\gamma - \ln 2)\ln 2.$$

Exercice 20 **

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs convergente. On note R_n son reste de rang n et l'on suppose

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n^2.$$

Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

Solution

méthode

On peut exprimer le terme de la série comme différence de deux restes consécutifs.

Pour $n \geqslant 1$, on peut écrire $u_n = R_{n-1} - R_n$ et alors

$$R_{n-1} = R_n + u_n \underset{n\to+\infty}{=} R_n + R_n^2 + o\big(R_n^2\big).$$

Sachant R_n de limite nulle, R_n^2 est négligeable devant R_n et donc R_{n-1} équivaut à R_n.

méthode

En étudiant la limite de $1/R_n - 1/R_{n-1}$, on peut déterminer l'ordre de grandeur de R_n grâce au lemme de l'escalier[1].

En réduisant au même dénominateur

$$\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n-1}} = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n R_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{R_n^2}{R_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On reprend alors la démonstration du lemme de l'escalier : la série de terme général 1 est une série à termes positifs divergente. Par sommation de relation de comparaison (Th. 6 p. 7)

$$\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_0} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{R_k} - \frac{1}{R_{k-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

1. Voir sujet 17 p. 29.

Sachant R_0 constant donc négligeable devant n, on en déduit

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{puis} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 21 ***

Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente. Établir

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z_k}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution

méthode

On exprime le terme z_n à partir du reste R_n de la série convergente $\sum z_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire z_n comme différence de deux restes successifs

$$z_n = R_{n-1} - R_n \quad \text{avec} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k.$$

Pour $N > n+1$, on a par un glissement d'indice lors de la dernière égalité

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{z_k}{k} = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{R_{k-1}-R_k}{k} = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{R_{k-1}}{k} - \sum_{k=n+1}^{N} \frac{R_k}{k} = \sum_{k=n}^{N-1} \frac{R_k}{k+1} - \sum_{k=n+1}^{N} \frac{R_k}{k}.$$

En isolant un terme de chaque somme afin de pouvoir les réunir

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{z_k}{k} = \frac{R_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{N-1} \frac{R_k}{k(k+1)} - \frac{R_N}{N}.$$

La suite des restes (R_n) converge vers 0 et la série $\sum \frac{R_k}{k(k+1)}$ converge donc absolument car son terme général est négligeable devant $1/k^2$. En faisant tendre N vers l'infini, on obtient alors l'identité qui suit avec convergence des séries engagées

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z_k}{k} = \frac{R_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{k(k+1)}.$$

Le terme $R_n/(n+1)$ est négligeable devant $1/n$ car (R_n) est de limite nulle. Aussi, $R_k/k(k+1)$ est négligeable devant $1/k^2$ qui est terme général d'une série à termes positifs convergente et l'on obtient la comparaison de restes

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{k(k+1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)$$

avec [1]

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

On peut alors conclure

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z_k}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

1.5.3 Familles sommables

Exercice 22 *

Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$ et $u_n = q^{|n|}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
Montrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.

Solution

Par définition, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, la famille à termes positifs $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ l'est.

méthode

On peut montrer qu'une famille positive est sommable en réalisant un calcul par paquets conduisant à une valeur finie.

L'ensemble d'indexation $\mathbb{Z}$ est la réunion des trois ensembles disjoints

$$I_1 = \mathbb{N}^*, \quad I_0 = \{0\} \quad \text{et} \quad I_{-1} = -\mathbb{N}^*.$$

La sous-famille des $|q|^n$ indexée par I_1 est sommable car la série $\sum |q|^{|n|}$ converge (Th. 8 p. 8). Par le même argument, la sous-famille indexée par I_{-1} est sommable. Enfin, celle indexée par I_0 l'est aussi car il s'agit d'une famille finie [2]. Par le théorème de sommation par paquets (Th. 10 p. 9), la famille étudiée est sommable et

$$\begin{aligned}\sum_{q\in\mathbb{Z}} q^{|n|} &= \sum_{q\in I_1} q^{|n|} + \sum_{q\in I_0} q^{|n|} + \sum_{q\in I_{-1}} q^{|n|} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} q^n + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = 1 + 2\frac{q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}.\end{aligned}$$

Exercice 23 **

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature des séries de termes généraux

(a) $\dfrac{1}{n\sigma(n)}$ (b) $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$.

1. Voir sujet 5 p. 14.
2. Isoler le terme d'indice 0 n'est pas une nécessité mais entretient la symétrie des calculs.

Solution

(a) L'étude du cas particulier $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$ (c'est-à-dire $\sigma(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) laisse présumer que la série considérée est convergente.

méthode

On exploite l'inégalité $2ab \leqslant a^2 + b^2$ valable pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $n \geqslant 1$, on peut écrire la majoration

$$\frac{1}{n\sigma(n)} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sigma(n)^2}\right).$$

La série de terme général $1/n^2$ converge et, par permutation des termes d'une série absolument convergente (Th. 9 p. 8), la série de terme général $1/\sigma(n)^2$ converge aussi. Par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série étudiée est convergente.

(b) L'étude du cas particulier $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$ laisse présumer que la série diverge. Posons S_n la somme partielle de rang n de la série étudiée.

méthode

On montre que la différence $S_{2n} - S_n$ ne tend pas vers 0.

On peut minorer $S_{2n} - S_n$ en écrivant

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k).$$

méthode

Les valeurs $\sigma(n+1), \sigma(n+2), \dots, \sigma(2n)$ sont deux à deux distinctes et toutes dans $\mathbb{N}^*$. Elles sont dans leur ensemble supérieures aux valeurs $1, 2, \dots, n$.

On poursuit la minoration

$$S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{4n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{8n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{8}.$$

La différence $S_{2n} - S_n$ n'étant pas de limite nulle, la série étudiée diverge.

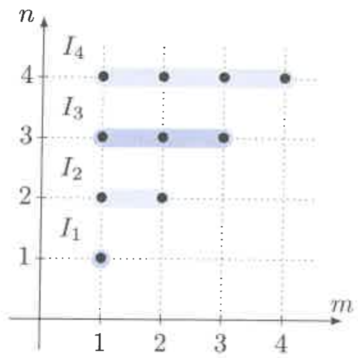
Exercice 24 **
Montrer l'identité

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solution

méthode

On organise le calcul du premier membre en échangeant les deux sommes par argument de sommabilité.



On considère la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in I}$ avec

$$I = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid n \geqslant m \geqslant 1\right\} \quad \text{et} \quad u_{m,n} = \frac{1}{n^3}.$$

Vérifions que cette famille est sommable en raisonnant par paquets. L'ensemble d'indexation I est la réunion des ensembles deux à deux disjoints I_n avec

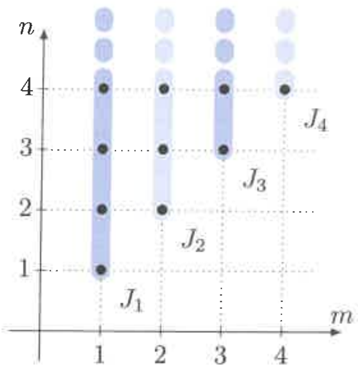
$$I_n = \left\{(m,n) \mid m \in [\![1\,;n]\!]\right\} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Les sous-familles $(u_{m,n})_{(m,n)\in I_n}$ sont sommables car ce sont des familles finies et l'on peut calculer leurs sommes

$$\sum_{(m,n)\in I_n} u_{m,n} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n^3} = n \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

La série de terme général $1/n^2$ étant convergente, on peut appliquer le théorème de sommation par paquets (Th. 10 p. 9) et affirmer que la famille complète $(u_{m,n})_{(m,n)\in I}$ est sommable avec

$$\sum_{(m,n)\in I} u_{m,n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in I_n} u_{m,n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$



L'ensemble d'indexation I peut aussi se voir comme la réunion des ensembles deux à deux disjoints J_m avec

$$J_m = \left\{(m,n) \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geqslant m\right\} \text{ pour } m \in \mathbb{N}^*.$$

Sachant la famille complète sommable, on peut affirmer par sommation par paquets que les sous-familles $(u_{m,n})_{(m,n)\in J_m}$ sont sommables, que la série de leurs sommes converge et que l'on a l'identité

$$\sum_{(m,n)\in I} u_{m,n} = \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in I_m} u_{m,n}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\right).$$

L'identité voulue est alors établie.

Exercice 25 **

Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$. Montrer l'identité

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^{2^p}}{1 - z^{2^{p+1}}}.$$

Solution

méthode

> Par sommation géométrique, on décompose le second membre afin d'y comprendre une sommation par paquets.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque $\left|z^{2^{p+1}}\right| < 1$, on peut écrire avec convergence des séries engagées

$$\frac{z^{2^p}}{1 - z^{2^{p+1}}} = z^{2^p} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(z^{2^{p+1}}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{(2k+1)2^p}.$$

Considérons alors la famille sommable[1] $(z^n)_{n\in I}$ avec $I = \mathbb{N}^*$. Tout naturel non nul n s'écrit de façon unique[2] $n = (2k+1)2^p$ avec $(p,k) \in \mathbb{N}^2$. L'ensemble d'indexation $\mathbb{N}^*$ est donc la réunion des ensembles deux à deux disjoints :

$$I_p = \left\{(2k+1)2^p \mid k \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Par le théorème de sommation par paquets, on obtient l'identité qui suit avec convergence des séries engagées

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} z^n = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n\in I_p} z^n\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^{(2k+1)2^p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^{2^p}}{1 - z^{2^{p+1}}}.$$

Enfin, on obtient l'identité demandée puisque

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} = z\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

1.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 26 **

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \sin\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n \pi\right).$$

1. Car la série géométrique de terme général z^n converge absolument.
2. Dans la décomposition en facteurs premiers de n, p est l'exposant de la puissance de 2 et $2k+1$ le produit des facteurs premiers impairs.

Solution

méthode

> Le contenu du sinus tend vers l'infini : on le ramène en 0 par trigonométrie et en introduisant $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

Par la formule du binôme de Newton

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\sqrt{3}^k \quad \text{et} \quad \left(2-\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}\sqrt{3}^k.$$

En sommant, les termes d'indices impairs se simplifient

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = \underbrace{2\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2p} 2^{n-2p}\, 3^p}_{k\in\mathbb{N}}.$$

On en déduit

$$u_n = \sin\left(2k\pi - \left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi\right) = -\sin\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi\right).$$

Puisque $\left|2-\sqrt{3}\right| < 1$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\left(2-\sqrt{3}\right)^n \pi.$$

C'est terme général d'une série absolument convergente.

Exercice 27 **

On étudie la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \left]0\,;\pi\right[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n.$$

(a) Déterminer la limite de la suite (u_n).

(b) Déterminer la limite de

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}.$$

(c) En déduire un équivalent de (u_n) quand n tend vers l'infini.

Solution

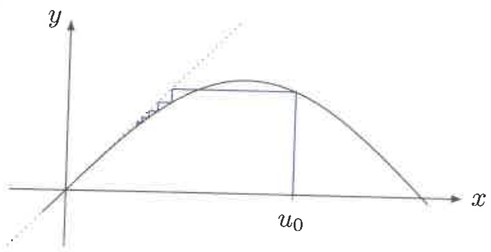
(a) Pour tout $x \in \left]0\,;\pi\right[$, on a $\sin x \in \left]0\,;1\right] \subset \left]0\,;\pi\right[$. La suite (u_n) est bien définie et tous ses termes sont éléments[1] de $\left]0\,;\pi\right[$. De plus, par l'inégalité classique $\sin x \leqslant x$ (valable pour tout $x \geqslant 0$), on obtient la décroissance de la suite (u_n) :

$$u_{n+1} = \sin u_n \leqslant u_n.$$

1. Et même de $\left]0\,;1\right]$ à partir du rang 1.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \in [0\,;+\infty[$. En passant la relation $u_{n+1} = \sin u_n$ à la limite, on obtient la condition $\ell = \sin \ell$ dont la seule solution est $\ell = 0$.

Finalement, la suite (u_n) tend vers 0 par valeurs strictement positives.



(b) Les termes u_n sont tous non nuls, on peut donc introduire la quantité étudiée. Par réduction au même dénominateur

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{(u_n - \sin u_n)(u_n + \sin u_n)}{u_n^2 \sin^2 u_n}.$$

Puisque la suite (u_n) est de limite nulle, on peut écrire le développement limité

$$\sin u_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n - \frac{1}{6}u_n^3 + \mathrm{o}(u_n^3).$$

On en déduit

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{6}u_n^3 \times 2u_n}{u_n^2 \times u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

(c) **méthode**

> Lorsqu'une suite (u_n) vérifie $u_{n+1} - u_n \to 1$, on peut établir[1] $u_n \sim n$. Ici, il suffit d'adapter cet argument.

La série de terme général $1/3$ est une série à termes positifs divergente. Par sommation de relation de comparaison

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3} = \frac{n}{3}.$$

Par télescopage, on peut exprimer la somme du premier membre et affirmer

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

Sachant $1/u_0^2$ constant donc négligeable devant n, on conclut

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \quad \text{car} \quad u_n > 0.$$

1. Voir sujet 17 p. 29.

Exercice 28 **

Pour $x \in\,]-1\,;1[$, établir l'identité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n.

Solution

Soit $x \in\,]-1\,;1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire par sommation géométrique de raison x^k avec $\left|x^k\right| < 1$

$$\frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{\ell=1}^{+\infty}(x^k)^\ell = \sum_{\ell=1}^{+\infty} x^{k\ell}.$$

Par suite, et sous réserve de convergence,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} x^{k\ell}\right).$$

Ceci invite à étudier la sommabilité de la famille $(x^{k\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$. Pour chaque $k \geqslant 1$, la série géométrique $\sum_{\ell\geqslant 1}\left|x^{k\ell}\right|$ converge et

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left|x^{k\ell}\right| = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left|x^k\right|^\ell = \frac{|x|^k}{1-|x|^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} |x|^k.$$

Il s'agit du terme général d'une série convergente. Par le Th. 11 p. 9 on peut affirmer que la famille $(x^{k\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} x^{k\ell} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} x^{k\ell}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}$$

avec convergence des séries engagées.

méthode

> On réorganise la somme selon les valeurs du produit $k\ell$.

L'ensemble d'indexation $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints

$$J_n = \left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid k\ell = n\right\} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

À l'aide d'une sommation par paquets, on peut écrire avec convergence de la série introduite

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} x^{k\ell} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,\ell)\in J_n} x^{k\ell}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Card}(J_n)x^n.$$

Le cardinal de J_n étant exactement le nombre de diviseurs positifs de n, on obtient la relation voulue

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}x^{k\ell}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n.$$

Exercice 29 ***

Soit $f\colon [1\,;+\infty[\,\to\mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ vérifiant[1], pour tout $x\geqslant 1$,

$$\int_1^x \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant M.$$

(a) Montrer

$$\sum f(n)\text{ converge}\iff\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)\text{ converge.}$$

(b) En admettant la convergence[2] de $\displaystyle\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$, étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n}.$$

Solution

(a) On remarque par la relation de Chasles

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right)=\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La convergence de la suite $\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ équivaut à celle de la série de terme général

$$u_n=\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

méthode

On établit la convergence de la série de terme général $u_n-f(n)$.

Posons $v_n=u_n-f(n)$. On a

$$|v_n|\leqslant\int_n^{n+1}\left|f(t)-f(n)\right|\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t\in[n\,;n+1]$,

$$\left|f(t)-f(n)\right|=\left|\int_n^t f'(u)\,\mathrm{d}u\right|\leqslant\int_n^t\left|f'(u)\right|\mathrm{d}u\leqslant\int_n^{n+1}\left|f'(u)\right|\mathrm{d}u$$

1. Au chapitre suivant, on dira simplement que f' est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
2. Celle-ci découle de la convergence de l'intégrale de Dirichlet (voir sujet 28 p. 84).

et donc

$$|v_n|\leqslant\int_n^{n+1}\left|f'(u)\right|\mathrm{d}u.$$

Pour tout $N\geqslant 1$, on a alors

$$\sum_{n=1}^N|v_n|\leqslant\int_1^{N+1}\left|f'(u)\right|\mathrm{d}u\leqslant M.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum|v_n|$ sont majorées ce qui donne l'absolue convergence, et donc la convergence, de la série de terme général v_n.

Puisque $u_n=v_n+f(n)$, la convergence de la série de terme général u_n équivaut à celle de la série de terme général $f(n)$.

(b) Introduisons la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par

$$f(t)=\frac{\sin(\sqrt{t})}{t}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$ avec pour $t\in[1\,;+\infty[$

$$f'(t)=\frac{\sqrt{t}\cos(\sqrt{t})-2\sin(\sqrt{t})}{2t^2}.$$

On vérifie l'hypothèse de l'énoncé, pour tout $x\geqslant 1$,

$$\int_1^x\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_1^x\frac{\sqrt{t}+2}{2t^2}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\right]_1^x\leqslant 2=M.$$

La convergence de la série étudiée équivaut alors à la convergence quand n croît vers l'infini du terme

$$\int_1^n\frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $u=\sqrt{t}$ qui est strictement croissant et de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_1^n\frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t=2\int_1^{\sqrt{n}}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

La convergence admise permet de conclure à la convergence de la série étudiée.

Exercice 30 ***

Montrer la divergence de la série

$$\sum\frac{\cos(\ln n)}{n}.$$

Solution

méthode

L'oscillation lente du terme en cosinus rapproche la série étudiée de la série de terme général $1/n$ dont la divergence peut être justifiée en constatant

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geqslant n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

On adapte au contexte cette démonstration.

Introduisons les sommes partielles de la série étudiée

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(\ln k)}{k}.$$

Pour les entiers k de l'intervalle $\left[e^{-\pi/4+2n\pi}\,;e^{\pi/4+2n\pi}\right]$, on a $\cos(\ln k)\geqslant 1/\sqrt{2}$ et donc

$$\frac{\cos(\ln k)}{k}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{e^{\pi/4+2n\pi}}.$$

Posons

$$a_n=\left\lfloor e^{-\pi/4+2n\pi}\right\rfloor\quad\text{et}\quad b_n=\left\lfloor e^{\pi/4+2n\pi}\right\rfloor.$$

On a

$$S_{b_n}-S_{a_n}=\sum_{k=a_n+1}^{b_n}\frac{\cos(\ln k)}{k}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{b_n-a_n}{e^{\pi/4+2n\pi}}.$$

Or

$$a_n\underset{n\to+\infty}{=}e^{-\pi/4+2n\pi}+O(1)\quad\text{et}\quad b_n\underset{n\to+\infty}{=}e^{\pi/4+2n\pi}+O(1)$$

donc

$$\frac{b_n-a_n}{e^{\pi/4+2n\pi}}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{e^{\pi/4+2n\pi}-e^{-\pi/4+2n\pi}+O(1)}{e^{\pi/4+2n\pi}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1-e^{-\pi/2}>0.$$

Ainsi, la suite $(S_{b_n}-S_{a_n})$ ne tend pas vers 0.

Cependant, les suites (a_n) et (b_n) tendent toutes deux vers $+\infty$, la série étudiée ne peut donc pas converger [1].

1. Il est aussi possible de retrouver cette conclusion en exploitant l'équivalence du sujet 29 p. 42.

CHAPITRE 2

Intégrales généralisées

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

La théorie de l'intégration présentée en première année permet de donner un sens à l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

pour toute fonction $f\colon I\to\mathbb{K}$ continue par morceaux sous réserve de choisir a et b dans l'intervalle de définition I. On veut attribuer un sens à cette intégrale lorsque a ou b sont des extrémités ouvertes, finies ou infinies, de l'intervalle I et ainsi pouvoir considérer par exemple les intégrales

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt\quad\text{et}\quad\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,dt$$

alors que la première porte sur un intervalle non borné et la seconde sur un intervalle ouvert en ses deux extrémités.

2.1 Intégrales généralisées

2.1.1 Intégration sur $[a\,;b[$

Soit a un réel et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tels que $a<b$.

Définition

On dit que l'intégrale d'une fonction $f\colon [a\,;b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux *converge*[1] si l'*intégrale partielle*

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{définie pour } x \in [a\,;b[$$

admet une limite finie quand $x \to b^-$. On pose alors

$$\int_{[a;b[} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque la fonction f est continue, on peut étudier la convergence de son intégrale sur l'intervalle $[a\,;b[$ en introduisant une primitive :

Théorème 1

Si $f\colon [a\,;b[\to \mathbb{K}$ est une fonction continue de primitive F, on a l'équivalence :

$$\int_{[a;b[} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff F(x) \text{ admet une limite finie quand } x \to b^-.$$

De plus, on a alors l'identité

$$\int_{[a;b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

L'existence d'une limite finie à une primitive en la borne impropre b assure l'existence de l'intégrale généralisée sur $[a\,;b[$ tout en permettant son calcul.

2.1.2 Opérations

Théorème 2 (Linéarité)

Soit $f, g\colon [a\,;b[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si les intégrales sur $[a\,;b[$ des fonctions f et g convergent, les intégrales de λf et $f+g$ convergent aussi avec

$$\int_{[a;b[} \lambda f = \lambda \int_{[a;b[} f \quad \text{et} \quad \int_{[a;b[} (f+g) = \int_{[a;b[} f + \int_{[a;b[} g.$$

En particulier, l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a\,;b[$ vers $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge constitue un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On dit aussi que l'extrémité b est une *borne impropre* lors de cette intégration et que l'intégrale étudiée est une *intégrale généralisée* en b.

Théorème 3 (Conjugaison)

Soit $f\colon [a\,;b[\to \mathbb{C}$ continue par morceaux.
Si l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ converge, celle de $\bar{f}$ converge aussi et

$$\int_{[a;b[} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_{[a;b[} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

En conséquence, l'intégrale d'une fonction complexe converge si, et seulement si, les intégrales de sa partie réelle et de sa partie imaginaire convergent.

Théorème 4 (Croissance)

Soit $f, g\colon [a\,;b[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux dont les intégrales sur $[a\,;b[$ convergent.

$$f \leqslant g \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive est positive.

Théorème 5 (Stricte positivité)

Soit $f\colon [a\,;b[\to \mathbb{R}$ continue dont l'intégrale sur $[a\,;b[$ converge.
Si la fonction f est positive et d'intégrale nulle sur $[a\,;b[$ alors la fonction f est nulle.

Soulignons que l'hypothèse de régularité de f est la continuité et non seulement la continuité par morceaux.

2.1.3 Intégration sur $]a\,;b]$ ou sur $]a\,;b[$

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition

On dit que l'intégrale d'une fonction $f\colon]a\,;b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux *converge* si l'*intégrale partielle*

$$I(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{définie pour } x \in]a\,;b]$$

admet une limite finie quand $x \to a^+$. On pose alors

$$\int_{]a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition

On dit que l'intégrale[1] d'une fonction $f\colon\,]a\,;b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux *converge* si, pour un réel c choisi arbitrairement dans $]a\,;b[$, les intégrales de f sur $]a\,;c]$ et $[c\,;b[$ convergent. On pose alors

$$\int_{]a;b[} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \int_{]a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c;b[} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ni la convergence, ni l'éventuelle valeur ne dépendent du choix de c dans $]a\,;b[$.

Les résultats précédemment énoncés pour les intégrales sur $[a\,;b[$ se transposent aux intégrales sur $]a\,;b]$ et sur $]a\,;b[$.

2.1.4 Intégration entre deux bornes

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Les intégrales de f sur $]a\,;b]$, $[a\,;b[$ et $]a\,;b[$ convergent[2] et sont toutes égales à l'intégrale de f sur $[a\,;b]$:

$$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a;b[} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En conséquence, la nature et la valeur d'une intégrale généralisée ne dépend pas de la nature ouverte ou fermée des extrémités de l'intervalle d'intégration.

Définition

Soit $f\colon I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux dont l'intégrale sur I converge. Si $a \leqslant b$ désignent les extrémités de I dans $\overline{\mathbb{R}}$, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 6 (Relation de Chasles)

Soit $f\colon I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Si l'intégrale de f sur I converge alors, pour tous a, b, c points de I ou extrémités éventuellement infinies de I, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de chacune des intégrales écrites.

2.1.5 Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. On dit que l'intégrale de f sur $]a\,;b[$ est *doublement généralisée*.
2. Si $f\colon [a\,;b[\to \mathbb{K}$ est continue et admet une limite finie en b, on peut prolonger cette fonction par continuité en b et assurer la convergence de son intégrale sur $[a\,;b[$: on dit alors que l'intégrale est *faussement généralisée* (ou *faussement impropre*) en b.

Théorème 7 (Intégrales de Riemann sur $[1\,;+\infty[$)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

Théorème 8 (Intégrales de Riemann sur $]0\,;1]$)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1.$$

En particulier, l'intégrale de $t \mapsto 1/t^\alpha$ sur $]0\,;+\infty[$ ne peut pas être définie.

2.2 Intégrabilité

Les résultats qui suivent sont présentés pour l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b[$. Ils peuvent aisément se transposer aux intégrales sur $]a\,;b]$ voire sur $]a\,;b[$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

2.2.1 Cas des fonctions positives

Théorème 9

Si $f\colon [a\,;b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux et positive, son intégrale sur $[a\,;b[$ converge si, et seulement si, ses intégrales partielles sont majorées :

$$\int_a^b f \text{ converge} \iff \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [a\,;b[,\quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M.$$

En revanche, si l'intégrale de f diverge,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty.$$

Théorème 10 (Comparaison de fonctions positives)

Si $f, g\colon [a\,;b[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues par morceaux telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ alors

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}.$$

Par contraposition, on a aussi

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \implies \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}.$$

Théorème 11 (Équivalence de fonctions positives)
Si $f, g\colon [a\,;b[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues par morceaux et positives[1] alors

$$f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t) \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ ont même nature.}$$

Dans le cadre des fonctions positives, ces outils de comparaison permettent de justifier la convergence d'une intégrale généralisée sans avoir besoin de calculer les intégrales partielles associées.

2.2.2 Fonctions intégrables

Définition
On dit qu'une fonction continue par morceaux $f\colon I \to \mathbb{K}$ est *intégrable*[2] lorsqu'il y a convergence de l'intégrale de[3] $|f|$ sur I.

Théorème 12
Si $f\colon I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur I alors son intégrale sur I converge et

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Lorsqu'une fonction est intégrable, on dit aussi que son intégrale est *absolument convergente.*
Les outils de comparaison qui suivent permettent de justifier par intégrabilité la convergence d'une intégrale généralisée sans pour autant calculer les intégrales partielles associées.

2.2.3 Intégrabilité par domination

Théorème 13 (Domination)
Si $f\colon I \to \mathbb{K}$ et $\varphi\colon I \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues par morceaux vérifiant

$$\forall t \in I, \quad |f(t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{et} \quad \varphi \text{ intégrable}$$

alors f est intégrable sur I.

1. En pratique, il suffit que l'une des deux fonctions soit positive car l'autre l'est alors nécessairement au voisinage de b.
2. On dit quelquefois qu'une fonction est *intégrable sur* un intervalle J pour insister sur le domaine de définition de la fonction ou pour affirmer que c'est sa restriction au départ de J qui est intégrable.
3. $|\cdot|$ désigne la valeur absolue ou le module selon le contexte.

2.2.4 Intégrabilité par comparaison asymptotique

Théorème 14 (Comparaison de fonctions intégrables)
Si $f, g\colon [a\,;b[\to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues par morceaux alors

$$f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathrm{O}\big(g(t)\big) \text{ et } g \text{ intégrable sur } [a\,;b[\implies f \text{ intégrable sur } [a\,;b[.$$

Cette implication est encore valable si $f(t) = \mathrm{o}\big(g(t)\big)$ et cette implication devient une équivalence lorsque $f(t) \sim g(t)$.

2.3 Calcul d'intégrales généralisées

2.3.1 Changement de variable généralisé

Soit I un intervalle d'extrémités $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ et J un intervalle d'extrémités $\alpha < \beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 15
Si $\varphi\colon I \to J$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante alors pour toute fonction $f\colon J \to \mathbb{K}$ continue par morceaux, on a équivalence entre :

(i) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)\,\mathrm{d}u$ converge ;

(ii) $\displaystyle\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus, si tel est le cas, on a l'identité

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Lorsque $\varphi\colon I \to J$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante, on a un résultat analogue où les bornes d'intégration sont échangées

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Enfin, on peut aussi affirmer qu'un changement de variable transpose une fonction intégrable en une fonction intégrable :

$$f \text{ est intégrable sur } J \iff f\circ\varphi \times \varphi' \text{ est intégrable sur } I.$$

2.3.2 Intégration par parties généralisée

Soit I un intervalle d'extrémités $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$. Si l'intervalle I est un segment $[a\,;b]$, la formule d'intégration par parties est déjà connue. Si l'intervalle I est de la forme $]a\,;b]$,

$[b\,;a[$ ou $]a\,;b[$, la réalisation d'une intégration par parties nécessite la vérification de la convergence d'une intégrale et de l'existence de limites finies au terme entre crochet[1] :

Théorème 16
Soit $u, v\colon I \to \mathbb{K}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Si le produit uv admet une limite finie en chaque extrémité ouverte de l'intervalle I, les intégrales

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

ont même nature et, en cas de convergence, on a l'identité

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, sous réserve que le produit uv possède des limites finies aux bornes ouvertes de l'intervalle, une intégration par parties transforme une intégrale convergente en une intégrale convergente.

2.4 Intégration des relations de comparaison

Soit a un réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

2.4.1 Cas de la divergence

Lorsque l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ diverge, on peut vouloir étudier l'ordre asymptotique des intégrales partielles

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 17 (Comparaison d'intégrales partielles)
Soit $f\colon [a\,;b[\to \mathbb{K}$ et $g\colon [a\,;b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux.
On suppose g positive et non intégrable sur $[a\,;b[$.
Si $f(t) \sim g(t)$ quand t tend vers b^-,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. On peut aussi établir que si les deux intégrales convergent, le terme entre crochet admet des limites finies.

Aussi, on peut affirmer :

$$f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathrm{o}\big(g(t)\big) \implies \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathrm{O}\big(g(t)\big) \implies \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{O}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Ces résultats peuvent encore s'énoncer pour l'étude des intégrales partielles associées à une intégration sur $]a\,;b]$.

2.4.2 Cas de la convergence

Lorsque l'intégrale sur $[a\,;b[$ de f converge, on peut introduire son *reste intégral*[1]

$$R(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ défini pour tout } x \in [a\,;b[.$$

On veut estimer l'ordre asymptotique de celui-ci.

Théorème 18 (Comparaison de restes d'intégrales)
Soit $f\colon [a\,;b[\to \mathbb{K}$ et $g\colon [a\,;b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux.
On suppose g positive et intégrable sur $[a\,;b[$.
Si $f(t) \sim g(t)$ quand t tend vers b^- alors f est intégrable sur $[a\,;b[$ et

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aussi, on peut affirmer :

$$f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathrm{o}\big(g(t)\big) \implies \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathrm{O}\big(g(t)\big) \implies \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Ces résultats peuvent encore s'énoncer pour l'étude des restes intégrales associés à une intégration sur $]a\,;b]$.

2.5 Exercices d'apprentissage

2.5.1 Natures d'intégrales généralisées

Déterminer la nature d'une intégrale généralisée consiste à savoir si celle-ci est ou non convergente. Ce problème peut être résolu conjointement au calcul de l'intégral ou préalablement, souvent par un argument de comparaison.

1. Si la fonction f est continue, ce reste intégral est la primitive de $-f$ de limite nulle en b.

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$ (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

Solution

méthode

> Pour étudier la nature d'une intégrale, on étudie généralement la fonction intégrée. Il est alors commode de commencer par dénommer celle-ci en précisant l'intervalle où elle peut être définie.

Dans chaque cas étudié ci-dessous, on note f la fonction définissant l'intégrale considérée.

(a) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$. Sachant $\sin u \sim u$ lorsque u tend vers 0, on a

$$f(t) = t\sin\underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)}_{\to 0} \underset{t\to+\infty}{\sim} t\times\frac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1.$$

La fonction f tend vers une limite non nulle en $+\infty$. Il existe alors un réel $A \geqslant 0$ tel que $f(t) \geqslant 1/2$ pour tout $t \geqslant A$ et donc

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^x \frac{\mathrm{d}t}{2} = \underbrace{\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{1}{2}(x-A)}_{\to+\infty} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

L'intégrale de f sur $[1\,;+\infty[$ est divergente[1].

(b) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Elle tend vers 0 en $+\infty$ mais ce n'est pas décisif !

méthode

> La condition $f(t)\to 0$ quand $t\to+\infty$ n'est pas[2] une condition suffisante[3] pour assurer l'existence d'une intégrale généralisée en $+\infty$. En revanche, par comparaison à une intégrale de Riemann en $+\infty$, on peut souvent déterminer la nature d'une intégrale.

1. Ou, plus simplement, f équivaut à la fonction positive $t\mapsto 1$ en $+\infty$ et l'intégrale de cette dernière diverge.
2. La fonction $t\mapsto 1/t$ tend vers 0 en $+\infty$ mais son intégrale sur $[1\,;+\infty[$ diverge.
3. Ce n'est pas non plus une condition nécessaire contrairement aux séries numériques ! Une lecture hâtive de la résolution précédente pourrait cependant laisser croire le contraire. En fait, il est possible qu'une intégrale généralisée en $+\infty$ converge sans que la fonction définissant l'intégrale possède de limite en $+\infty$ (voir sujet le sujet 27 p. 83 et le sujet 29 p. 85).

On a l'équivalence

$$f(t) = \frac{t+1}{t^4+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{t^4} = \frac{1}{t^3} \quad\text{avec}\quad \frac{1}{t^3}\geqslant 0 \text{ et } \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3} \text{ convergente.}$$

Par équivalence de fonctions positives (Th. 11 p. 50), on peut affirmer la convergence de l'intégrale de f, d'abord sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, puis sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ (la fonction y est même intégrable).

(c) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de limite nulle en $+\infty$ et

$$f(t) = \frac{t}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \quad\text{avec}\quad \frac{1}{t}\geqslant 0 \text{ et } \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ divergente.}$$

Par équivalence de fonctions positives, on peut assurer la divergence de l'intégrale de f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ et *a fortiori* sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

(d) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

méthode

> Ici, la fonction tend très vite vers 0 en $+\infty$. Bien que l'on ne puisse pas proposer d'équivalent du type « Riemann », on peut observer qu'elle est négligeable devant $t\mapsto 1/t^2$ qui est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

$$t^2 f(t) = t^2\mathrm{e}^{-t^2} \underset{X=t^2}{=} X\mathrm{e}^{-X} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad\text{car}\quad X = t^2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi, $f(t)$ est négligeable devant $1/t^2$ quand t tend vers $+\infty$. Or la fonction $t\mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ et donc, par théorème de comparaison (Th. 14 p. 51), on peut affirmer que f est intégrable sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, donc aussi sur $[0\,;+\infty[$, et son intégrale converge.

(e) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

méthode

> Lorsqu'il n'y a pas négligeabilité devant $t\mapsto 1/t^2$ en $+\infty$, il peut suffire d'adapter l'exposant et d'établir une négligeabilité devant $t\mapsto 1/t^\alpha$ pour $\alpha > 1$ bien choisi, par exemple $\alpha = 3/2$ ou $\alpha = 1{,}01$.

Pour $\alpha = 1{,}01 > 1$, on a

$$t^\alpha f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{1{,}01}\frac{\ln t}{t^2} = \frac{\ln t}{t^{0{,}99}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad\text{par croissances comparées.}$$

Ainsi, f est négligeable en $+\infty$ devant $t\mapsto 1/t^\alpha$ qui est intégrable au voisinage[1] de $+\infty$, elle est donc intégrable sur $[1\,;+\infty[$ et son intégrale converge.

1. Dire qu'une fonction est *intégrable au voisinage de* $+\infty$ est une façon concise de signifier que cette fonction est intégrable sur un intervalle $[A\,;+\infty[$ pour un réel A suffisamment grand.

(f) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ et tend vers 0 mais cette fois-ci cette convergence est un peu lente...

méthode

> On peut montrer que l'intégrale d'une fonction diverge en constatant que cette fonction est supérieure à une fonction positive dont l'intégrale diverge.

On a

$$tf(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t\frac{\ln t}{t} = \ln t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty.$$

Il existe donc $A \geqslant 1$ tel que $tf(t) \geqslant 1$ pour tout $t \geqslant A$ et alors

$$f(t) \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ divergente.}$$

Par comparaison de fonctions positives (Th. 10 p. 49), on peut affirmer la divergence de l'intégrale étudiée.

méthode

> Pour l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction f sur $[a\,;+\infty[$:
> — si f tend vers une limite non nulle en $+\infty$, son intégrale diverge ;
> — s'il existe $C \neq 0$ tel que $f(t) \sim \frac{C}{t^\alpha}$ quand $t \to +\infty$, l'intégrale converge[1] si, et seulement si, $\alpha > 1$;
> — s'il existe $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, la fonction est intégrable sur $[a\,;+\infty[$ et son intégrale converge ;
> — si $tf(t) \to \ell$ quand $t \to +\infty$ avec $\ell \neq 0$ (éventuellement ℓ infinie) alors l'intégrale diverge.

Ces critères ne sont pas exhaustifs mais suffisent à résoudre de nombreuses situations !

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\,\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t.$

Solution

Dans chaque cas étudié ci-dessous, on note f la fonction définissant l'intégrale considérée.

(a) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;1]$. À partir du développement limité connu de $\sqrt{1+t}$ quand t tend vers 0, on obtient

$$f(t) \underset{t\to0}{=} \frac{1+\frac{1}{2}t+\mathrm{o}(t)-1}{t} = \frac{1}{2}+\mathrm{o}(1) \xrightarrow[t\to0]{} \frac{1}{2}.$$

1. Auquel cas la fonction est même intégrable sur $[a\,;+\infty[$.

La fonction f admet donc une limite finie en 0^+. Il est alors possible de prolonger f par continuité en 0, on dit que l'intégrale est *faussement généralisée* : elle converge.

(b) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;1]$. Elle tend vers $+\infty$ en 0^+ mais ce n'est pas décisif[1].

méthode

> Par comparaison à une intégrale de Riemann sur $]0\,;1]$, on peut souvent déterminer la nature d'une intégrale.

À partir du développement limité connu de e^t quand t tend vers 0, on a l'équivalence

$$f(t) \underset{t\to0^+}{=} \frac{1}{1+t+\mathrm{o}(t)-1} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{t} \geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ divergente.}$$

Par équivalence de fonctions positives (Th. 11 p. 50), on peut assurer la divergence de l'intégrale de f sur $]0\,;1]$.

(c) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;1]$ et tend vers $+\infty$ en 0^+. Sachant $\ln(1+t) \sim t$ quand t tend vers 0, on a

$$f(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{t}{t^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \text{ convergente.}$$

Par équivalence de fonctions positives, on peut affirmer la convergence de l'intégrale de f sur $]0\,;1]$ (la fonction y est même intégrable).

(d) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;1]$ et tend vers $-\infty$ en 0^+.

méthode

> On ne peut pas proposer d'équivalent du type « Riemann », on peut cependant étudier si la fonction est négligeable devant $1/t^\alpha$ en 0^+ pour un réel α vérifiant $\alpha < 1$, par exemple $\alpha = 1/2$ ou $\alpha = 0{,}99$.

Par limite de référence, on sait

$$\sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t\to0^+]{} 0.$$

Ainsi, $\ln t$ est négligeable devant $1/\sqrt{t}$ quand $t \to 0^+$. Or la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ et donc, par théorème de comparaison (Th. 14 p. 51), on peut affirmer que la fonction f est intégrable sur $]0\,;1]$, son intégrale converge[2].

1. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ tend vers $+\infty$ en 0^+ et est cependant intégrable sur $]0\,;1]$.
2. On pouvait aussi calculer l'intégrale partielle sur $[x\,;1]$ en exploitant la primitive $t \mapsto t\ln t - t$. En constatant la convergence de l'intégrale partielle quand x tend vers 0^+, on obtient aussi la convergence de l'intégrale généralisée.

(e) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;1]$ et tend vers $-\infty$ en 0^+. On a l'équivalence

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{\ln t}{t}$$

et donc $tf(t) \to -\infty$ quand $t \to 0^+$. Il existe alors un réel $a \in\,]0\,;1]$ tel que $tf(t) \leqslant -1$ pour tout t dans l'intervalle $]0\,;a]$. On a donc

$$-f(t) \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ divergente.}$$

Par comparaison de fonctions positives (Th. 10 p. 49), on peut affirmer la divergence de l'intégrale étudiée.

méthode

Pour l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction f sur $]0\,;a]$:
- si f tend vers une limite finie en 0^+, l'intégrale est faussement généralisée, elle converge ;
- s'il existe $C \neq 0$ tel que $f(t) \sim \frac{C}{t^\alpha}$ quand $t \to 0^+$, l'intégrale converge[1] si, et seulement si, $\alpha < 1$;
- s'il existe $\alpha < 1$ tel que $t^\alpha f(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$, la fonction est intégrable et son intégrale converge ;
- si $tf(t) \to \ell$ quand $t \to 0^+$ avec $\ell \neq 0$ (éventuellement ℓ infinie) alors l'intégrale diverge.

Exercice 3

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t-1}\,dt$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$.

Solution

méthode

Les démarches étudiant la nature d'une intégrale généralisée en 0 se transposent en $a \in \mathbb{R}$ par simple translation de la variable.

Dans chaque cas étudié ci-dessous, on note f la fonction définissant l'intégrale considérée.

(a) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]1\,;\mathrm{e}]$.

méthode

Pour étudier l'ordre de grandeur de $f(t)$ quand t tend vers 1, on opère la translation $t = 1 + h$ pour laquelle h tend vers 0^+ lorsque t tend vers 1^+.

1. Auquel cas la fonction est même intégrable sur $]0\,;a]$.

On a[1]

$$f(t) \underset{t=1+h}{=} \frac{\ln(1+h)}{h} \underset{t\to 1^+}{=} \frac{h + \mathrm{o}(h)}{h} \xrightarrow[t\to 1^+]{} 1.$$

On peut prolonger f par continuité en 1, l'intégrale est faussement généralisée et donc converge.

(b) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]-1\,;0]$. En opérant la translation $t = -1+h$ ou en écrivant astucieusement $1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$, on obtient l'équivalence

$$f(t) \underset{t\to -1^+}{\sim} \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{1+t}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\sqrt{1+t}} \geqslant 0 \text{ et } \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}} \text{ convergente.}$$

Par équivalence de fonctions positives, l'intégrale de f sur $]-1\,;0]$ est convergente.

(c) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $[0\,;1[$. En opérant la translation $t = 1+h$ ou en écrivant $1 - t^2 = (1-t)(1+t)$, on obtient l'équivalence

$$f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1/2}{1-t} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{1-t} \geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t} \text{ divergente.}$$

Par équivalence de fonctions positives, l'intégrale de f sur $[0\,;1[$ est divergente.

2.5.2 Calculs d'intégrales

Exercice 4

Calculer

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}.$$

Solution

méthode

On peut justifier l'existence d'une intégrale généralisée tout en donnant sa valeur en calculant ses intégrales partielles puis en étudiant leur limite.

La fonction $t \mapsto 1/t(t+1)$ est définie et continue par morceaux sur $[1\,;+\infty[$. Seule la borne $+\infty$ est impropre. On calcule les intégrales partielles pour $x \geqslant 1$ en opérant une décomposition en éléments simples[2]

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} \quad \text{avec} \quad a = 1 \text{ et } b = -1.$$

1. La limite peut aussi être obtenue lorsque l'on connaît l'équivalent $\ln t \sim t - 1$ quand t tend vers 1 ou en considérant la limite d'un taux d'accroissement associé à la fonction logarithme entre 1 et t.
2. Cette décomposition se déduit aussi de l'écriture $1 = (t+1) - t$ du numérateur de la fraction.

On a alors

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t = \Big[\ln t - \ln(t+1)\Big]_1^x$$
$$= \ln x - \ln(x+1) + \ln 2 = \ln \underbrace{\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{\to 1} + \ln 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln 2.$$

On peut conclure que l'intégrale étudiée converge et vaut $\ln 2$.

Exercice 5

Calculer

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Solution

méthode

On peut justifier l'existence de l'intégrale généralisée d'une fonction continue tout en donnant sa valeur en déterminant une primitive et en étudiant l'existence de ses limites aux bornes de l'intervalle d'intégration.

La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{1-t^2}$ est définie et continue sur $]-1\,;1[$. La fonction arcsin en est une primitive et celle-ci admet des limites finies en ± 1. On en déduit l'égalité qui suit avec convergence de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \Big[\arcsin t\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Exercice 6

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Solution

La fonction $f\colon t \mapsto \ln(1 + 1/t^2)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$. Sachant $\ln(1+u) \sim u$ quand u tend vers 0, on a

$$f(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

La fonction f est donc intégrable sur $[1\,;+\infty[$. De plus

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{car} \quad \sqrt{t} f(t) = \sqrt{t}\ln(t^2+1) - 2\sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$

La fonction f est aussi intégrable sur $]0\,;1]$ et, finalement, l'intégrale étudiée converge.

Pour calculer celle-ci on réalise une intégration par parties en posant

$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right).$$

méthode

Sous réserve que le produit uv admette des limites finies aux bornes ouvertes de l'intervalle d'intégration, la formule d'intégration par parties transforme une intégrale convergente en une intégrale convergente (Th. 16 p. 52).

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et le produit uv admet des limites finies aux bornes 0 et $+\infty$ car, de façon analogue aux calculs ci-dessus,

$$u(t)v(t) = t\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad u(t)v(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$

On peut alors employer la formule d'intégration par parties sachant que l'intégrale introduite converge puisque l'intégrale de départ est convergente.

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \left[t\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi.$$

Exercice 7

Calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Solution

La fonction $f\colon t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$. On a

$$t^2 f(t) = \mathrm{e}^{2\ln t - \sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

et donc f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$. On calcule son intégrale par changement de variable.

méthode

Lorsque la fonction exprimant le changement de variable réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone, le changement de variable transforme une intégrale convergente en une intégrale convergente[1] (Th. 15 p. 51).

On réalise le changement de variable $x = \sqrt{t}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur lui-même. Quitte à considérer l'intégrale

1. Il transforme aussi une fonction intégrable en une fonction intégrable.

de départ comme portant sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et non sur $[0\,;+\infty[$, on peut réaliser ce changement de variable[1] à partir de l'intégrale convergente définissant I. On obtient

$$I=\int_0^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{car } \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x.$$

On poursuit en opérant une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$ données par

$$u(x)=-\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad v(x)=2x.$$

Le produit uv tend vers 0 en la borne $+\infty$ et donc

$$I=\underbrace{\Big[-2x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{+\infty}}_{=0}+\int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Big[-2\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{+\infty}=2.$$

2.5.3 Intégration des relations de comparaison

Exercice 8

Déterminer un équivalent simple de :

(a) $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$ quand $x\to 0^+$ (b) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$ quand $x\to+\infty$.

Solution

(a) **méthode**

> Lors de l'étude d'une intégrale partielle, on peut intégrer directement les équivalents sous réserve de comparer à une fonction positive non intégrable (Th. 17 p. 52). Plus généralement, on peut intégrer négligeabilités et dominations.

Par le développement limité $\mathrm{e}^t=1+t+o(t)$ quand t tend vers 0, on a l'équivalence

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\underset{t\to0^+}{\sim}\frac{1}{t} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{t}\geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ divergente.}$$

On peut donc affirmer

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}\underset{x\to0^+}{\sim}\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}=-\ln x.$$

(b) **méthode**

> Lors de l'étude d'un reste intégral, on peut intégrer directement les équivalents sous réserve de comparer à une fonction positive et intégrable (Th. 18 p. 53). Plus généralement, on peut intégrer négligeabilités et dominations.

1. On peut aussi considérer le changement de variable en sens inverse $t=x^2$ pour lequel il n'est plus nécessaire d'isoler 0.

On a l'équivalence

$$\frac{1}{t^3+1}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^3} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{t^3}\geqslant 0 \text{ et } \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3} \text{ convergente.}$$

Avec convergence des intégrales introduites, on peut affirmer

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}=\Big[-\frac{1}{2t^2}\Big]_x^{+\infty}=\frac{1}{2x^2}.$$

2.6 Exercices d'entraînement

2.6.1 Natures d'intégrales généralisées

Exercice 9 *

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\,\mathrm{d}t.$

Solution

Dans chaque cas, on note f la fonction définissant l'intégrale considérée.

méthode

> Chaque intégrale est ici doublement généralisée. On étudie les deux bornes séparément et il faut qu'il y ait convergence de l'intégrale en chacune pour affirmer la convergence de l'intégrale considérée.

(a) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;1[$. On a l'équivalence

$$f(t)\underset{t\to1^-}{\sim}\frac{1}{1-t} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{1-t}\geqslant 0 \text{ et } \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-t} \text{ divergente.}$$

Par équivalence de fonctions positives, l'intégrale étudiée est divergente[1].

(b) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On a

$$\sqrt{t}f(t)\underset{t\to0^+}{\sim}\sqrt{t}\ln t\xrightarrow[t\to0^+]{}0 \quad \text{et} \quad t^2f(t)\underset{t>1}{=}\mathrm{e}^{\ln(\ln t)+2\ln t-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

La fonction f est donc négligeable devant les fonctions intégrables $t\mapsto 1/\sqrt{t}$ et $t\mapsto 1/t^2$ respectivement aux voisinages de 0^+ et $+\infty$. La fonction f est donc intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et son intégrale converge.

1. Il est alors inutile d'étudier la nature de l'intégrale en 0 bien qu'un argument d'équivalence à $1/\sqrt{t}$ aurait donné la convergence.

(c) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On a

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{t}{t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1 \quad \text{et} \quad t^2 f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^3 \mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

D'une part, l'intégrale est faussement généralisée en 0^+. D'autre part, f est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$. La fonction f est donc intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et son intégrale converge.

(d) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On a

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{t}{t^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad t^{1,01} f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t^{0,49}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

La fonction f est donc intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et son intégrale converge.

(e) La fonction f est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On a

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{O}(1) \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

La fonction f est donc intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et son intégrale converge.

Exercice 10 *

Représenter dans un repère orthonormé du plan l'ensemble des points M de coordonnées (a,b) pour lesquels l'intégrale considérée converge :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a(t-1)^b}$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$.

Solution

(a) **méthode**

> La fonction étudiée est positive : l'existence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction définissant celle-ci.

La fonction $f\colon t \mapsto 1/t^a(t-1)^b$ est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$. L'intégrale est généralisée en 1 et en $+\infty$. On a

$$\frac{1}{t^a(t-1)^b} \underset{t\to 1^+}{\sim} \frac{1}{(t-1)^b} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t^a(t-1)^b} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{a+b}}.$$

Par équivalence aux intégrales de Riemann, la fonction f est intégrable sur $]1\,;+\infty[$ si, et seulement si, $b < 1$ et $a + b > 1$.

(b) **méthode**

> Les expressions t^a et t^b ne sont pas définies en $t = 0$ lorsque les exposants sont négatifs ou non entiers [1].

La fonction $f\colon t \mapsto t^a/(1+t^b)$ est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.

méthode

> Pour déterminer un équivalent de $1+t^b$ en 0^+ ou en $+\infty$, il faut discuter selon le signe de b.

On a

$$\frac{t^a}{1+t^b} \underset{t\to 0^+}{\sim} \begin{cases} t^a & \text{si } b>0 \\ t^a/2 & \text{si } b=0 \\ t^{a-b} & \text{si } b<0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{t^a}{1+t^b} \underset{t\to+\infty}{\sim} \begin{cases} t^{a-b} & \text{si } b>0 \\ t^a/2 & \text{si } b=0 \\ t^a & \text{si } b<0. \end{cases}$$

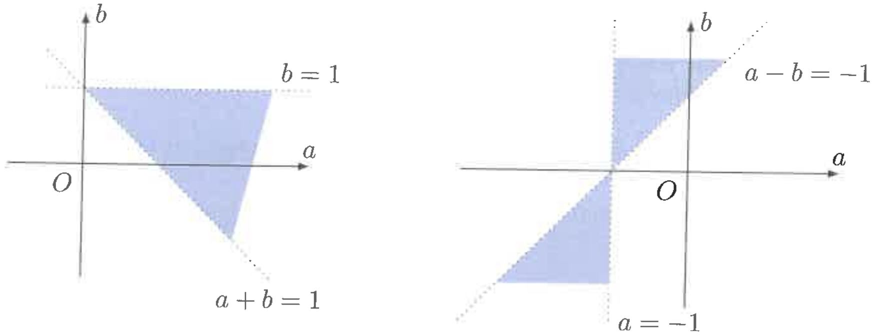
méthode

> Pour étudier l'intégrabilité de t^λ en 0^+ ou $+\infty$, il suffit de considérer $1/t^\alpha$ avec $\alpha = -\lambda$ et d'adapter les critères de Riemann.

$$\int_0^1 t^\lambda\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \lambda > -1,$$

$$\int_1^{+\infty} t^\lambda\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \lambda < -1.$$

Dans le cas où $b = 0$, la fonction f n'est pas intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Dans le cas où $b > 0$, la fonction est intégrable si, et seulement si, $a > -1$ et $a - b < -1$. Enfin, dans le cas où $b < 0$, la fonction est intégrable si, et seulement si, $a - b > -1$ et $a < -1$.



Les deux domaines du plan solutions du sujet.
Les bords pointillés signifient que la frontière est exclue.

1. Cependant, pour α réel strictement positif on pose $0^\alpha = 0$ ce qui correspond à un prolongement continu de la fonction $t \mapsto t^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln t}$ initialement définie sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 11 ** (Intégrales de Bertrand[1])

Soit α et β deux réels. On étudie la nature de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$

(a) On suppose $\alpha < 1$. Déterminer la nature de l'intégrale en étudiant la limite quand t croît vers $+\infty$ de

$$t \times \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$

(b) On suppose $\alpha > 1$. Montrer que l'intégrale étudiée converge.

(c) On suppose $\alpha = 1$. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la nature de

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t (\ln t)^\beta}.$$

Solution

Posons $f \colon t \mapsto 1/(t^\alpha (\ln t)^\beta)$ définie et continue sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

(a) **méthode**

> Pour résoudre cette limite, on écrit les puissances sous forme exponentielle.

$$t \times f(t) = \exp\big(\underbrace{(1-\alpha)}_{>0} \ln t - \beta \underbrace{\ln(\ln t)}_{=\mathrm{o}(\ln t)}\big) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty.$$

Il existe donc $A \geqslant \mathrm{e}$ tel que $f(t) \geqslant 1/t$ pour tout $t \geqslant A$. Par comparaison de fonctions positives, on peut conclure[2] que l'intégrale étudiée diverge.

(b) **méthode**

> Pour obtenir une comparaison assurant l'intégrabilité, on introduit un exposant intermédiaire à 1 et α.

Pour $\alpha > 1$, on peut introduire un réel $\lambda \in \,]1\,;\alpha[$. On a alors

$$t^\lambda f(t) = \exp\big(\underbrace{(\lambda-\alpha)}_{<0} \ln t + \beta \underbrace{\ln(\ln t)}_{=\mathrm{o}(\ln t)}\big) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

On en déduit que $f(t)$ est négligeable devant $1/t^\lambda$ quand $t \to +\infty$. Puisque l'on a choisi $\lambda > 1$, on peut conclure que f est intégrable sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ et donc l'intégrale étudiée converge.

1. Ce sujet est la transposition au cadre des intégrales du sujet 20 du chapitre 11 de l'ouvrage *Exercices d'analyse MPSI*.
2. On peut aussi conclure en employant l'argument $1/t = \mathrm{o}(f(t))$ quand t tend vers $+\infty$.

(c) La fonction $t \mapsto \ln t$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ vers $[1\,;+\infty[$. Le changement de variable $u = \ln t$ transforme l'intégrale étudiée en une intégrale de même nature (Th. 15 p. 51)

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}.$$

On reconnaît en second membre une intégrale de Riemann. On conclut que, lorsque $\alpha = 1$, l'intégrale étudiée converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Exercice 12 *

Étudier l'intégrabilité sur $]0\,;1]$ de

$$f \colon x \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

> Attention à bien interpréter la question posée : il s'agit d'étudier l'intégrabilité de f et non celle de $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$!

La fonction f est définie et continue[1] sur $]0\,;1]$. On a

$$\frac{\mathrm{e}^t}{t} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{t} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{t} \geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ divergente.}$$

Par intégration de relation de comparaison dans le cas de la divergence (Th. 17 p. 52), il vient

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x \to 0^+}{\sim} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x.$$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0\,;1]$ car négligeable devant $1/\sqrt{x}$ quand x tend vers 0^+. On en déduit que la fonction f est intégrable[2] sur $]0\,;1]$.

2.6.2 Calcul d'intégrales

Exercice 13 *

Soit $\alpha > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Calculer

$$C(\alpha,\omega) = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad S(\alpha,\omega) = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t.$$

1. La fonction f est la primitive s'annulant en 1 de la fonction continue $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. On peut aussi démontrer l'existence de l'intégrale de f tout en calculant celle-ci en opérant une intégration par parties dérivant f.

Solution

méthode

On peut raisonner par intégrations par parties mais il est plus efficace de faire une incursion dans le champ complexe en étudiant $C(\alpha,\omega)+\mathrm{i}S(\alpha,\omega)$.

On introduit la fonction complexe $f\colon [0\,;+\infty[\to\mathbb{C}$ déterminée par

$$f(t)=\big(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)\big)\mathrm{e}^{-\alpha t}=\mathrm{e}^{\lambda t}\quad\text{avec}\quad \lambda=-\alpha+\mathrm{i}\omega.$$

Pour $x\geqslant 0$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}\right]_0^x=\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}-1}{\lambda}.$$

On détermine la limite de ces intégrales partielles en exploitant

$$\mathrm{e}^{\lambda x}=\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}_{\text{bornée}}\ \underbrace{\mathrm{e}^{-\alpha x}}_{\to 0}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

On en déduit que l'intégrale de f sur $[0\,;+\infty[$ converge et vaut $-1/\lambda$. La partie réelle et la partie imaginaire de cette intégrale sont donc aussi convergentes ce qui assure l'existence des intégrales définissant $C(\alpha,\omega)$ et $S(\alpha,\omega)$. Au surplus,

$$C(\alpha,\omega)=\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha+\mathrm{i}\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\quad\text{et}\quad S(\alpha,\omega)=\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Exercice 14 *

Soit p et q deux réels tels que $p^2<q$. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2pt+q}.$$

Solution

Le trinôme définissant le dénominateur est de discriminant $\Delta=4(p^2-q)<0$: il ne possède pas de racines réelles. La fonction $t\mapsto 1/(t^2+2pt+q)$ est donc parfaitement définie et continue sur $\mathbb{R}$. Au surplus, cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$\frac{1}{t^2+2pt+q}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}\quad\text{et}\quad\frac{1}{t^2+2pt+q}\underset{t\to-\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}.$$

méthode

Pour calculer l'intégrale, on écrit le trinôme du dénominateur sous forme canonique.

On a $t^2+2pt+q=(t+p)^2+a^2$ avec $a=\sqrt{q-p^2}$. Par translation de la variable d'intégration, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2pt+q}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+p)^2+a^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2}.$$

méthode

On retient [1] la formule d'intégration (pour $a\neq 0$)

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right).$$

On peut alors achever le calcul :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2pt+q}=\frac{1}{a}\left[\arctan\left(\frac{u}{a}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{q-p^2}}.$$

Exercice 15 **

Dans ce sujet, on étudie

$$I=\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier l'existence de l'intégrale définissant I.

(b) Établir

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(c) En séparant cette dernière intégrale en deux, observer

$$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(d) Donner la valeur de I.

Solution

(a) La fonction $f\colon t\mapsto (t-1)/\ln t$ est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;1[$. On a

$$f(t)=\frac{t-1}{\ln t}\xrightarrow[t\to0^+]{}0\quad\text{et}\quad f(t)\underset{t=1+h}{=}\frac{h}{\ln(1+h)}\underset{t\to1}{\sim}\frac{h}{h}=1.$$

L'intégrale I est donc convergente car faussement généralisée en ses deux bornes.

(b) La fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{-x}$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante transformant l'intervalle $]0\,;+\infty[$ en $]0\,;1[$. On peut réaliser le changement de variable $t=\mathrm{e}^{-x}$ directement sur l'intégrale généralisée

$$\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Le théorème de changement de variable assure que l'intégrale obtenue est convergente.

1. Voir sujet 8 du chapitre 4 de l'ouvrage *Exercices d'analyse MPSI*.

(c) **méthode**

On souhaite séparer l'intégrale en deux par linéarité mais les deux intégrales qui seraient alors écrites sont divergentes en la borne 0 ! Pour contourner cette difficulté on exprime l'intégrale étudiée comme limite quand ε tend vers 0^+ d'intégrales allant de ε à $+\infty$.

Par convergence de l'intégrale, on peut écrire

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon \quad \text{avec} \quad I_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \, dx.$$

Par linéarité, on peut séparer en deux l'intégrale I_ε avec convergence en la borne $+\infty$ des intégrales introduites par négligeabilité devant $1/x^2$

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \, dx - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \, dx.$$

On applique ensuite le changement de variable $t = 2x$ à la deuxième intégrale

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \, dx - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$

Enfin, on renomme la variable d'intégration et l'on combine les intégrales par la relation de Chasles pour obtenir

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon \quad \text{avec} \quad I_\varepsilon = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} \, dx.$$

(d) **méthode**

On ne peut pas calculer l'intégrale I_ε mais, en encadrant la fonction intégrée, on peut comparer I_ε à des intégrales faciles à calculer et en déduire la limite.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant décroissante sur $[\varepsilon\,;2\varepsilon]$, on a pour tout x de $[\varepsilon\,;2\varepsilon]$

$$\frac{e^{-2\varepsilon}}{x} \leqslant \frac{e^{-x}}{x} \leqslant \frac{e^{-\varepsilon}}{x}.$$

En intégrant cet encadrement en bon ordre, il vient

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-2\varepsilon}}{x} \, dx \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} \, dx \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{x} \, dx$$

puis

$$e^{-2\varepsilon} \ln 2 \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} \, dx \leqslant e^{-\varepsilon} \ln 2.$$

Finalement, en passant cet encadrement à la limite, on conclut $I = \ln 2$.

Exercice 16 **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, dt \text{ converge et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Justifier l'existence et donner la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(t+1) - f(t)\big) \, dt.$$

Solution

méthode

On calcule les intégrales partielles et l'on étudie leur limite.

Pour $x \geqslant 0$, on a par linéarité

$$\int_0^x \big(f(t+1) - f(t)\big) \, dt = \int_0^x f(t+1) \, dt - \int_0^x f(t) \, dt$$

Par translation de la variable dans la première intégrale du second membre

$$\int_0^x \big(f(t+1) - f(t)\big) \, dt = \int_1^{x+1} f(t) \, dt - \int_0^x f(t) \, dt.$$

Par convergence de l'intégrale de f de 0 à $+\infty$, on peut affirmer

$$\int_0^x \big(f(t+1) - f(t)\big) \, dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_1^{+\infty} f(t) \, dt - \int_0^{+\infty} f(t) \, dt = -\int_0^1 f(t) \, dt.$$

Avec convergence de l'intégrale généralisée, on a ainsi obtenu

$$\int_0^{+\infty} \big(f(t+1) - f(t)\big) \, dt = -\int_0^1 f(t) \, dt.$$

Pour $x \leqslant 0$, on peut écrire par linéarité et utilisation de la relation de Chasles

$$\int_x^0 \big(f(t+1) - f(t)\big) \, dt = \int_{x+1}^1 f(t) \, dt - \int_x^0 f(t) \, dt = -\underbrace{\int_x^{x+1} f(t) \, dt}_{=I(x)} + \int_0^1 f(t) \, dt.$$

Étudions la limite du terme $I(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

méthode

Puisque la fonction f tend vers ℓ en $-\infty$, il est raisonnable d'estimer que $I(x)$ tend vers l'intégrale de ℓ sur un intervalle de longueur 1 : on établit le résultat en majorant la valeur absolue de la différence.

On a

$$\left|\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \ell\right| = \left|\int_x^{x+1} f(t) - \ell\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+1} \left|f(t) - \ell\right| \mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \leqslant A$. Pour tout $t \in [x\,;x+1]$ avec $x \leqslant A - 1$, on a alors $\left|f(t) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$. Par intégration en bon ordre

$$\left|\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \ell\right| \leqslant \int_x^{x+1} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

On en déduit

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell.$$

Avec convergence de l'intégrale généralisée, on peut affirmer

$$\int_{-\infty}^{0} \big(f(t+1) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \ell.$$

Finalement, on peut conclure après simplification

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(t+1) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t = -\ell.$$

2.6.3 Intégration par parties

Exercice 17 *

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$. Puisque $f_n(t)$ est négligeable devant $1/t^2$ quand $t \to +\infty$, la fonction f_n est intégrable sur $[0\,;+\infty[$. L'intégrale définissant I_n est donc convergente.

méthode

On forme une relation de récurrence sur les termes de la suite (I_n) par intégration par parties.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On réalise une intégration par parties avec les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ déterminées par

$$u(t) = -\mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad v(t) = t^n.$$

Le produit uv tend vers 0 en la borne $+\infty$ et l'on peut donc opérer une intégration par parties au départ de l'intégrale convergente I_n :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[-t^n\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{+\infty} nt^{n-1}\big(-\mathrm{e}^{-t}\big)\,\mathrm{d}t}_{=-nI_{n-1}} = nI_{n-1}.$$

Il suffit ensuite d'exploiter la relation de récurrence pour exprimer I_n en fonction de I_0

$$I_n = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n!I_0 \quad \text{avec} \quad I_0 = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1.$$

Finalement, on conclut [1] $I_n = n!$.

Exercice 18 *

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\int_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

Solution

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (x\ln x)^n$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1]$. Au surplus, cette fonction se prolonge par continuité [2] en 0 et l'intégrale étudiée a un sens.

méthode

On opère plusieurs intégrations par parties visant à faire disparaître par dérivation le facteur $\ln x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On réalise une première intégration par parties en posant

$$u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad v(x) = (\ln x)^n.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv tend vers 0 en la borne 0. Par théorème d'intégration par parties généralisée, on obtient l'identité qui suit avec convergence de l'intégrale introduite

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^n\right]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On opère une nouvelle intégration par parties avec cette fois-ci

$$u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad v(x) = (\ln x)^{n-1}$$

et l'on obtient

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = (-1)^2\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-2}\,\mathrm{d}x$$

1. Cette valeur pourra être retenue !
2. Par la valeur 1 quand $n = 0$ et par la valeur 0 quand $n > 0$.

En répétant les intégrations par parties jusqu'à disparition du facteur $\ln x$, on parvient à

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$
$$= (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Plus généralement, on peut obtenir de la même manière :

$$\int_0^1 x^p(\ln x)^q\,\mathrm{d}x = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}} \quad \text{pour} \quad p\in\,]-1\,;+\infty]\ \text{et}\ q\in\mathbb{N}.$$

Exercice 19 *

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ une fonction continue dont l'intégrale sur $[0\,;+\infty[$ est convergente. Montrer que pour tout réel $s>0$, il y a convergence de l'intégrale [1]

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

On réalise une intégration par parties en introduisant une primitive de f.

Introduisons F une primitive de la fonction continue f sur $[0\,;+\infty[$. Puisque l'on suppose la convergence de l'intégrale de f sur $[0\,;+\infty[$, cette primitive F admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

Soit s un réel strictement positif. On opère une intégration par parties avec

$$u(t) = F(t) \quad \text{et} \quad v(t) = \mathrm{e}^{-st}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv admet une limite finie en la borne $+\infty$ car

$$u(t)v(t) = \underbrace{F(t)}_{\to\ell}\underbrace{\mathrm{e}^{-st}}_{\to 0} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Par le théorème d'intégration par parties généralisée

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

autrement dit (sachant $s\neq 0$)

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} F(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

1. Cette intégrale définit *la transformée de Laplace* de f en s.

Or la convergence de cette dernière intégrale est immédiate par comparaison

$$t^2\times F(t)\mathrm{e}^{-st} = \underbrace{F(t)}_{\to\ell}\underbrace{t^2\mathrm{e}^{-st}}_{\to 0} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad F(t)\mathrm{e}^{-st} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Finalement, l'intégrale étudiée est convergente pour tout $s>0$.

Exercice 20 **

Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Solution

L'intégrale étudiée est généralisée en 0. Pour calculer cette intégrale on souhaite réaliser une intégration par parties en partant de

$$u'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{et} \quad v(x) = \ln x.$$

Cependant, le choix « naturel »

$$u(x) = -\frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad v(x) = \ln x$$

détermine un produit uv qui tend vers $+\infty$ en la borne 0 : cette intégration par parties ne peut pas être réalisée !

méthode

Lors de l'intégration par parties, la fonction u peut être choisie à l'addition d'une constante près. On choisit celle-ci de sorte que la fonction u s'annule en 0 afin que le crochet [1] puisse y admettre une limite finie.

On choisit

$$u(x) = -\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$u(x)v(x) = \frac{x\ln x}{x+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Par le théorème d'intégration par parties, les intégrales suivantes ont la même nature

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

1. On peut aussi réaliser l'intégration par parties initialement proposée sur l'intervalle $[\varepsilon\,;1]$ puis faire tendre ε vers 0^+ mais les calculs sont alors beaucoup plus fastidieux !

Or cette dernière est évidemment convergente car peut se comprendre comme l'intégrale sur un segment d'une fonction continue. On peut donc affirmer la convergence de l'intégrale initiale et exploiter la formule d'intégration par parties

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx = \left[\frac{x\ln x}{x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = 0 - \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = -\ln 2.$$

2.6.4 Changement de variable

Exercice 21 *

(a) En réalisant le changement de variable $x = t - 1/t$, calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt.$$

(b) En déduire les valeurs de

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+1}\,dt \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,dx.$$

Solution

(a) La fonction $f\colon t \mapsto (t^2+1)/(t^4+1)$ est définie, continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^4} = \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale étudiée est donc convergente.

La fonction $t \mapsto t - 1/t$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. On peut donc réaliser le changement de variable $x = t - 1/t$ sur l'intégrale généralisée définissant I, quitte à considérer que cette dernière porte sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et non $[0\,;+\infty[$.

méthode

Pour opérer la transformation de l'intégrale, on peut exprimer t en fonction de x mais les calculs sont plus simples en essayant d'exprimer $f(t)$ en fonction de $x = t - 1/t$.

Pour $t \in\ ]0\,;+\infty[$, observons

$$f(t) = \frac{t^2+1}{t^4+1} = \frac{t^2+1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2+\frac{1}{t^2}} = \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} \quad \text{et} \quad dx = \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

Avec convergence de l'intégrale introduite, on obtient donc

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2}.$$

Par la formule d'intégration présentée p. 69 avec $a = \sqrt{2}$, on peut achever le calcul

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) L'intégrale définissant J est bien convergente car la fonction intégrée est équivalente à $t \mapsto 1/t^4$ quand t croît vers $+\infty$. Par le changement de variable $u = 1/t$ associé à la fonction $t \mapsto 1/t$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0\,;+\infty[$ vers lui-même, on obtient

$$J = -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{\frac{1}{u^4}+1}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1}\,du.$$

On en déduit

$$2J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt = I.$$

On peut alors conclure[1]

$$J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

On calcule K par le changement de variable $t = \sqrt{\tan x}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{\tan x}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0\,;\pi/2[$ vers $]0\,;+\infty[$. Celle-ci transforme l'intégrale K en

$$\int_0^{+\infty} t\left(\frac{2t\,dt}{1+t^4}\right) = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt \quad \text{car} \quad x = \arctan(t^2).$$

Cette dernière intégrale étant convergente égale à J, l'intégrale définissant K existe et vaut $\pi/\sqrt{2}$.

Exercice 22 *

Pour a réel, on pose

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}.$$

(a) Pour quelles valeurs de a, l'intégrale $I(a)$ est-elle définie ?

(b) En procédant au changement de variable $u = 1/t$, montrer $I(a) = \pi/4$.

1. On aurait aussi pu obtenir directement la valeur de cette intégrale en réalisant une décomposition en éléments simples quelque peu fastidieuse.

Solution

(a) **méthode**

> Un argument de comparaison est ici plus efficace qu'une étude de l'ordre asymptotique de la fonction intégrée.

La fonction définissant l'intégrale est définie et continue par morceaux sur l'intervalle[1] $]0\,;+\infty[$ et l'on vérifie pour tout $t>0$

$$0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et l'on peut donc affirmer, par comparaison de fonctions positives, la convergence de l'intégrale définissant $I(a)$ pour tout a réel.

(b) La fonction $t \mapsto 1/t$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante transformant l'intervalle $]0\,;+\infty[$ en lui-même. Par le changement de variable $u=1/t$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u^2)(1+u^a)}\,\mathrm{d}u$$

avec convergence de l'intégrale introduite.

En sommant ces deux écritures de la même intégrale, il vient

$$2I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^a)}{(1+t^2)(1+t^a)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement,

$$I(a) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 23 ** (Intégrales d'Euler)

On pose

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que les intégrales I et J sont bien définies et égales.

(b) En étudiant $I+J$, déterminer la valeur commune de I et J.

1. On est obligé d'exclure $t=0$ *a priori* à cause du cas $a<0$. Cependant, lorsque a est positif, il est possible de prolonger la fonction par continuité en 0 et l'intégrale y est alors faussement généralisée.

Solution

(a) La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;\pi/2]$. On a

$$\sqrt{t}\ln(\sin t) = \underbrace{\sqrt{t}\ln t}_{\to 0} + \sqrt{t}\underbrace{\ln\Big(\frac{\sin t}{t}\Big)}_{\to 1} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$

La fonction f est donc intégrable sur $]0\,;\pi/2]$ et l'intégrale définissant I converge.

Par le changement de variable[1] $t=\pi/2-x$, l'intégrale I est transformée en J. Par le théorème de changement de variable, on peut alors affirmer que l'intégrale définissant J converge et $I=J$.

(b) **méthode**

> On exploite la formule de trigonométrie $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$.

Par linéarité

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) + \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\Big(\frac{1}{2}\sin(2t)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(2t)\big) - \ln 2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(2t)\big)\,\mathrm{d}t - \frac{\pi\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $u=2t$ puis la relation de Chasles

$$2\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(2t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u}_{=I} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u}_{=J}.$$

En effet, par le changement de variable $u=\pi/2+t$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(t+\pi/2)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = J.$$

Finalement,

$$2\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(2t)\big)\,\mathrm{d}t = I+J$$

et l'on peut conclure

$$I = J = -\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

1. Inutile de préciser que ce changement de variable est $\mathcal{C}^1$ bijectif, c'est évident !

Exercice 24 ***

Pour a réel strictement positif, on pose

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) \mathrm{d}x.$$

(a) Montrer l'existence de l'intégrale définissant $I(a)$.

(b) Justifier l'identité

$$I(a) = \int_0^{\sqrt{a}} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right)\left(1 + \frac{a}{x^2}\right) \mathrm{d}x.$$

(c) En déduire la valeur de $I(a)$ connaissant *l'intégrale de Gauss*[1]

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Solution

(a) Notons f la fonction définissant l'intégrale. Celle-ci est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$: l'intégrale est généralisée aux deux bornes 0 et $+\infty$. D'une part, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 car elle a une limite nulle. D'autre part, $f(x)$ est négligeable devant $1/x^2$ quand $x \to +\infty$ car

$$x^2 f(x) = \exp\Bigl(\underbrace{2\ln x - x^2 - \frac{a^2}{x^2}}_{\to -\infty}\Bigr) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

La fonction f est donc intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et l'intégrale définissant $I(a)$ converge.

(b) Par la relation de Chasles, on découpe l'intégrale définissant $I(a)$ en $\sqrt{a}$

$$I(a) = \int_0^{\sqrt{a}} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) \mathrm{d}x. \qquad (*)$$

méthode

> On opère un changement de variable transformant l'intégrale sur $[\sqrt{a}\,;+\infty[$ en une intégrale sur $]0\,;\sqrt{a}]$.

La fonction $x \mapsto a/x$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante transformant l'intervalle $[\sqrt{a}\,;+\infty[$ en l'intervalle $]0\,;\sqrt{a}]$. Par le changement de variable $u = a/x$

$$\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) \mathrm{d}x = \int_{\sqrt{a}}^{0} \exp\left(-\left(\frac{a^2}{u^2} + u^2\right)\right)\left(-\frac{a}{u^2}\right) \mathrm{d}u.$$

1. L'intégrale de Gauss est une intégrale fameuse que l'on rencontre dans la résolution de nombreux sujets. Son existence a été acquise dans le sujet 1 p. 54 et son calcul sera mené dans le sujet 22 p. 331.

En renommant la variable d'intégration

$$\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{a}} \exp\left(-\left(\frac{a^2}{x^2} + x^2\right)\right) \frac{a}{x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Enfin, on combine les deux intégrales de l'identité $(*)$ pour obtenir la relation voulue.

(c) On observe

$$x^2 + \frac{a^2}{x^2} = \left(x - \frac{a}{x}\right)^2 + 2a \quad \text{avec} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x - \frac{a}{x}\right) = 1 + \frac{a}{x^2}.$$

La fonction $x \mapsto x - a/x$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de l'intervalle $]0\,;\sqrt{a}]$ vers $]-\infty\,;0]$. Par le changement de variable $t = x - a/x$, il vient

$$I(a) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-t^2-2a}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-2a}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{\text{parité}}{=} \mathrm{e}^{-2a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2a}.$$

2.6.5 Intégrabilité et comportement asymptotique

Exercice 25 *

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f et f' soient intégrables sur $[0\,;+\infty[$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Solution

méthode

> On montre d'abord que f admet une limite en $+\infty$ en exprimant f à partir de sa dérivée.

Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut exprimer f à partir d'une intégrale de sa dérivée. Pour $x \geqslant 0$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f' est supposée intégrable et donc son intégrale sur $[0\,;+\infty[$ converge. Ceci permet d'écrire

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la fonction f admet une limite[1] en $+\infty$, de plus celle-ci est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et cette limite est nécessairement nulle[2].

1. Plus simplement, f admet une limite finie en $+\infty$ car est primitive de f' dont l'intégrale converge : on a ici reproduit la démonstration du Th. 1 p. 46.
2. Rappelons qu'une fonction intégrable sur $[0\,;+\infty[$ peut ne pas admettre de limite en $+\infty$ (voir sujet 27 p. 83) mais, en revanche, si elle admet une limite, celle-ci est nécessairement nulle.

Exercice 26 **

Soit $f\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante.

(a) On suppose que f est intégrable sur $]0\,;1]$. Déterminer la limite de $xf(x)$ quand x tend vers 0^+.

(b) On suppose que f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$. Déterminer la limite de $xf(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution

(a) **méthode**

> On exploite la décroissance de f pour encadrer $xf(x)$ par des intégrales bien choisies.

La fonction f est intégrable sur $]0\,;1]$, ceci permet d'introduire le reste intégral

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Au surplus, la fonction f est décroissante et l'on a donc $f(x) \leqslant f(t)$ pour tout t de $]0\,;x]$. En intégrant en bon ordre, on obtient

$$xf(x) = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

On peut aussi écrire $f(x) \geqslant f(t)$ pour tout t de $[x\,;2x]$ et donc

$$xf(x) = \int_x^{2x} f(x)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$

Par théorème d'encadrement, on conclut que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+.

(b) On adapte l'étude qui précède. Par la décroissance de f, on peut affirmer pour x assez grand

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant xf(x) \quad \text{et} \quad \frac{x}{2}f(x) \leqslant \int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient ainsi l'encadrement

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant xf(x) \leqslant 2\int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

où les membres encadrants tendent vers 0 car

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

À nouveau, on conclut que $xf(x)$ tend vers 0, cette fois-ci quand x tend vers l'infini.

Exercice 27 **

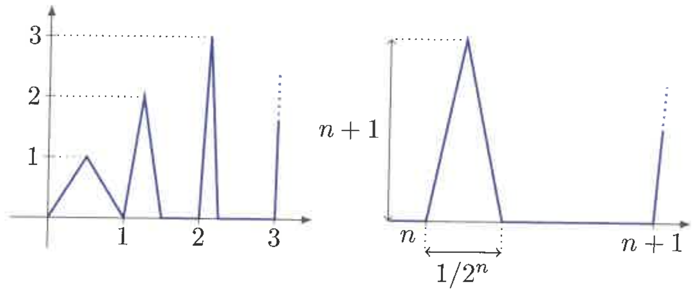
Déterminer une fonction $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, intégrable sur $[0\,;+\infty[$ mais non bornée.

Solution

méthode

> On définit une fonction f affine par morceaux avec des paliers nuls et des pointes triangulaires de sorte que l'intégrale de f sur $[n\,;n+1]$ soit le terme général d'une série convergente.

On considère la série de terme général $(n+1)/2^{n+1}$. Cette série est convergente car son terme général est négligeable[1] devant $1/n^2$. On définit ensuite une fonction f comme illustrée sur la figure ci-dessous de sorte qu'elle prenne la valeur $n+1$ sur l'intervalle $[n\,;n+1]$ et y soit d'intégrale $(n+1)/2^{n+1}$.



Par construction, la fonction f est continue, positive, non bornée et vérifie :

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{2^{k+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

Cependant, ceci ne suffit pas encore pour affirmer que l'intégrale de f converge : il faut[2] étudier la limite des intégrales de 0 à x pour un réel x de limite $+\infty$.

La fonction f étant positive, on peut affirmer

$$\int_0^{\lfloor x\rfloor} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\lfloor x\rfloor+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les membres encadrants ont la même limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ et l'on peut conclure que l'intégrale de f converge. Enfin, la fonction f étant positive, la convergence de son intégrale équivaut à son intégrabilité.

1. On peut aussi justifier cette convergence par la règle de d'Alembert (Th. 2 p. 5).
2. L'intégrale de la fonction sinus diverge sur $[0\,;+\infty[$ et pourtant les intégrales de celle-ci sur les segments $[0\,;2n\pi]$ sont nulles et tendent donc vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini !

2.6.6 Intégrales semi-convergentes

Exercice 28 ** (Intégrale de Dirichlet)
Dans ce sujet, on étudie la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t.$$

(a) Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $I_n = \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$.
La fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est-elle intégrable sur $]0\,;+\infty[$?

(b) Démontrer que l'intégrale définissant I converge tout en établissant l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Solution

(a) Commençons par observer que la fonction $f\colon t \mapsto \sin(t)/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$. Sachant $\sin t \sim t$ lorsque t tend vers 0, la fonction f tend vers 1 en 0^+ de sorte que l'intégrale I est faussement généralisée en 0. Par ce même argument on est assuré de l'existence des intégrales définissant I_n.

méthode

> On découpe l'intégrale I_n en les $k\pi$ avec k entier afin d'exploiter la périodicité de la fonction sinus et de calculer sa valeur absolue.

Pour $n \geqslant 1$, la relation de Chasles donne

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, \mathrm{d}t \right).$$

La fonction $t \mapsto |\sin t|$ est π-périodique. Ceci permet par translation de rapporter toutes les intégrales à l'intervalle $[0\,;\pi]$ sur lequel la fonction sinus est positive

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+(k-1)\pi}\, \mathrm{d}t \right).$$

Pour tout $t \in [0\,;\pi]$, on a l'inégalité $t+(k-1)\pi \leqslant k\pi$ et donc

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \Big[-\cos t \Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La divergence vers $+\infty$ des sommes partielles de la série harmonique étant connue, on peut conclure que la suite (I_n) tend vers l'infini. On en déduit que la fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ n'est pas intégrable sur l'intervalle sur $]0\,;+\infty[$.

(b) **méthode**

> Lorsqu'il n'y a pas intégrabilité, il est fréquent d'établir la convergence d'une intégrale par intégration par parties.

On opère une intégration par parties avec

$$u'(t) = \sin t \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{t}.$$

Pour intégrer $u'(t)$, on choisit parmi ses primitives celle qui s'annule en 0 afin que le crochet puisse posséder une limite finie en la borne 0 :

$$u(t) = 1 - \cos t.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv tend vers des limites finies aux deux bornes :

$$u(t)v(t) = \frac{1-\cos t}{t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t} = \frac{1}{2}t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad u(t)v(t) = \underbrace{(1-\cos t)}_{\text{bornée}} \times \frac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Par le théorème d'intégration par parties généralisée (Th. 16 p. 52), l'intégrale I a la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\, \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Or cette dernière est convergente par les arguments d'intégrabilité suivants :

$$\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

On peut donc affirmer que l'intégrale définissant I converge et la formule d'intégration par parties donne

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

La valeur de I n'est pas immédiate à calculer. On verra dans le sujet 23 p. 333 que I vaut $\pi/2$.

Exercice 29 ** (Intégrales de Fresnel)
Montrer la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, \mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

Ces intégrales ne sont que semi-convergentes : on démontre leur convergence par intégration par parties en écrivant $1 = 2t/2t$.

La fonction $f\colon t \mapsto \cos(t^2)$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$. Quitte à intégrer sur $]0\,;+\infty[$ afin d'écarter la borne 0, son intégrale peut s'écrire

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t\cos(t^2)}{2t}\,\mathrm{d}t.$$

On réalise alors une intégration par parties avec les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ déterminées par

$$u(t) = \sin(t^2) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{2t}.$$

Le produit uv tend vers des limites finies aux deux bornes

$$\frac{\sin(t^2)}{2t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad \underbrace{\sin(t^2)}_{\text{bornée}}\frac{1}{2t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Par le théorème d'intégration par parties généralisée :

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}.$$

Autrement dit

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}.$$

Or cette dernière convergence est facile à établir par les arguments d'intégrabilité suivants :

$$\frac{\sin(t^2)}{2t^2} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{t^2}{2t^2} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t^2)}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

On peut alors conclure à la convergence de la première intégrale

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

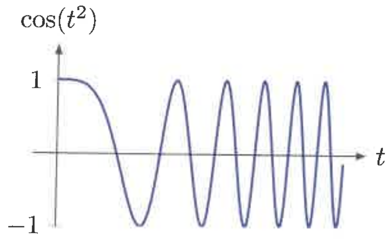
On établit de même la convergence de la seconde intégrale [1]

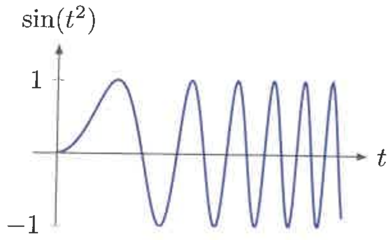
$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. On aurait aussi pu établir directement la convergence des deux intégrales en même temps en étudiant l'intégrale de $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}$ sur $[0\,;+\infty[$.

en choisissant, lors de l'intégration par parties, la primitive de $t \mapsto 2t\sin(t^2)$ qui s'annule en 0 afin que le produit uv possède une limite finie en la borne 0.

Ces intégrales se nomment les intégrales de Fresnel. On verra qu'elles sont toutes les deux égales à $\pi/\sqrt{8}$ dans le sujet 24 p. 337.





2.6.7 Intégration des relations de comparaison

Exercice 30 *

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

Solution

méthode

On fait apparaître l'ordre asymptotique par une intégration par parties.

Soit $x \geqslant \mathrm{e}$. Par intégration par parties avec les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\mathrm{e}\,;x]$ déterminées par

$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{\ln t}$$

on obtient

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_{\mathrm{e}}^{x} + \int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}.$$

Or

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln t}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\ln t} \geqslant 0 \text{ et } \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \text{ divergente.}$$

Par intégration de relation de comparaison (Th. 17 p. 52)

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right).$$

On en déduit

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{\ln x} - \mathrm{e} + \mathrm{o}\left(\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right)$$

et donc [1]

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{x}{\ln x}}_{\to+\infty} - \underbrace{\mathrm{e}}_{\text{constante}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

Exercice 31 **

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ du terme

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Solution

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car $t^2\mathrm{e}^{-t^2}$ est de limite nulle quand t croît vers l'infini. L'expression étudiée est donc le reste intégral d'une intégrale convergente.

méthode

On réalise une intégration par parties en faisant apparaître un facteur t devant e^{-t^2} afin de pouvoir intégrer ce terme.

On écrit pour $x > 0$

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} \times t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On opère l'intégration par parties déterminée par

$$u(t) = -\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2} \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{t}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv tend vers 0 en la borne $+\infty$. La formule d'intégration par parties donne alors

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(\mathrm{e}^{-t^2}\big) \quad \text{avec} \quad \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ convergente.}$$

Par intégration de relation de comparaison (Th. 18 p. 53)

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

1. En poursuivant les intégrations par parties on peut obtenir un développement asymptotique.

et l'on peut conclure [1]

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} + \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.$$

Exercice 32 **

(a) Justifier

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

(b) Établir qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

(c) Déterminer un équivalent de la fonction ε en $+\infty$.

Solution

(a) **méthode**

On détermine un équivalent que l'on sait intégrer de la fonction définissant l'intégrale.

On a

$$\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t} \quad \text{avec} \quad \frac{\ln t}{t} \geqslant 0 \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ divergente.}$$

Par intégration de relation de comparaison dans le cas de la divergence (Th. 17 p. 52)

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

(b) Soit $x \geqslant 1$. On a

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}(\ln x)^2 = \int_1^x \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

Or l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

est convergente car

$$\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \quad \text{avec} \quad t \mapsto \frac{1}{t^2} \text{ intégrable sur } [1\,;+\infty[.$$

1. En répétant les intégrations par parties, il est possible de former un développement asymptotique.

méthode

On décompose l'intégrale généralisée en la somme d'une intégrale partielle et du reste intégral associé, reste qui est de limite nulle.

Pour $x \geqslant 1$, on peut écrire

$$C = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{x} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

Il vient alors

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C + \varepsilon(x)$$

avec C une constante réelle[1] et ε la fonction de limite nulle en $+\infty$ déterminée par

$$\varepsilon(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

(c) On a

$$\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{t^2} \geqslant 0 \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \text{ convergente.}$$

Par intégration de relation de comparaison dans le cas de la convergence (Th. 18 p. 53), on peut conclure

$$\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{x}.$$

2.7 Exercices d'approfondissement

Exercice 33 ** (Inégalité de Hardy)

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Pour $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que g^2 est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que fg est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. On peut montrer que cette constante vaut $\pi^2/12$ à l'aide d'une intégration terme à terme après développement en série entière...

Solution

(a) Introduisons F la primitive de f s'annulant en 0.

$$g(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x)-F(0)}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} F'(0) = f(0).$$

La fonction g est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable au voisinage de 0.

méthode

On montre que g^2 est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ en observant que ses intégrales partielles sont majorées.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. On réalise une intégration par parties sur $]0\,;A]$ avec les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ déterminées par

$$u(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = F^2(x).$$

Le produit uv admet une limite finie en la borne 0 car

$$-\frac{1}{x}F^2(x) = -\underbrace{g(x)}_{\to f(0)}\underbrace{F(x)}_{\to 0} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0.$$

La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A \frac{1}{x^2}F^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}F^2(x)\right]_0^A + 2\int_0^A f(x)\frac{F(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^A f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{A}F^2(A) \leqslant 2\int_0^A f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz[1], on obtient alors

$$\left(\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(2\int_0^A f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^A f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Que le premier membre soit nul ou non, on peut affirmer

$$\left(\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant 4\left(\int_0^A f^2(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Les intégrales partielles de la fonction positive g^2 sont majorées, cette fonction est donc intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et l'inégalité proposée est vérifiée.

1. Pour $f,g : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continues, on sait $\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t$.

(b) La fonction fg est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ en vertu de la domination

$$|fg| \leqslant \frac{f^2+g^2}{2} \quad \text{avec} \quad f^2 \text{ et } g^2 \text{ donc } \frac{f^2+g^2}{2} \text{ intégrables sur }]0\,;+\infty[.$$

Par l'intégration par parties qui précède, on a

$$\frac{F^2(x)}{x} = 2\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x g^2(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \underbrace{2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t}_{=\ell}.$$

Si par l'absurde la limite ℓ est non nulle, il vient

$$g^2(x) = \frac{F^2(x)}{x}\cdot\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{x}$$

ce qui contredit l'intégrabilité de g^2. On en déduit $\ell = 0$ ce qui produit l'égalité demandée.

Exercice 34 ** (Inégalité de Kolmogorov)

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Établir

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2\right).$$

Solution

(a) **méthode**

Par intégration par parties, on peut lier les intégrabilités de f'^2 et de ff''.

Par intégration par parties avec les fonctions $\mathcal{C}^1$ données par $u(t) = f(t)$ et $v(t) = f'(t)$

$$\int_0^x \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t = \Big[f(t)f'(t)\Big]_0^x - \int_0^x f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Puisque les fonctions f et f'' sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$, la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$ en vertu de la comparaison

$$|ff''| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + f''^2).$$

L'intégrale partielle en second membre de l'égalité $(*)$ admet donc une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Aussi, la fonction f'^2 étant positive, l'intégrale partielle en premier membre est croissante et admet une limite (finie ou infinie) quand x tend vers l'infini. On en déduit que le produit $f(x)f'(x)$ admet une limite lorsque x croît vers l'infini. Or

$$\int_0^x f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}f(t)^2\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(f(x)^2 - f(0)^2\right).$$

Si la limite de $x\mapsto f(x)f'(x)$ en $+\infty$ n'est pas nulle, l'intégrale précédente diverge et donc $f(x)^2$ tend vers $+\infty$. Ceci est incompatible avec l'intégrabilité supposée de f^2. On en déduit que le produit $f(x)f'(x)$ tend nécessairement vers 0 quand x tend vers $+\infty$. L'identité $(*)$ donne alors à la limite

$$\int_0^{+\infty} \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t = -f(0)f'(0) - \int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de l'intégrale exprimant le premier membre.

L'étude sur $]-\infty\,;0]$ est identique et donne

$$\int_{-\infty}^0 \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t = f(0)f'(0) + \int_{-\infty}^0 f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit l'identité qui suit avec convergence de l'intégrale en premier membre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2 = -\int_{-\infty}^{+\infty} ff''.$$

Enfin, la fonction f'^2 étant positive, la convergence de l'intégrale signifie l'intégrabilité de la fonction.

(b) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions continues f et f''

$$\left(\int_{-A}^{A} ff''\right)^2 \leqslant \left(\int_{-A}^{A} f^2\right)\left(\int_{-A}^{A} f''^2\right).$$

On conclut en passant l'inégalité à la limite quand A croît vers l'infini

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ff''\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2\right).$$

Exercice 35 **

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour x réel non nul, on pose

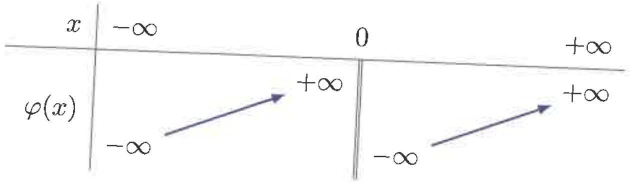
$$g(x) = f\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_{-\infty}^0 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Solution

Considérons l'application $\varphi\colon x \mapsto x - 1/x$. L'étude des variations de φ détermine le tableau suivant :



La fonction φ induit une bijection φ_+ de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et une bijection φ_- de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-\infty\,;0[$ vers $\mathbb{R}$. Après résolution de l'équation $\varphi(x) = y$ d'inconnue x, on obtient

$$\varphi_+^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2+4}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_-^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(y - \sqrt{y^2+4}\right).$$

méthode

> Un changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone transforme une fonction intégrable en une fonction intégrable peu importe le sens dans lequel on opère.

Sous réserve d'intégrabilité de l'un des membres, le changement de variable $y = \varphi_+(x)$ donne

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right) f(y)\,\mathrm{d}y. \qquad (*)$$

Or, la fonction exprimant l'intégrale en second membre est intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right)\right| \leqslant 1.$$

Le théorème de changement de variable assure alors que la fonction g est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et l'identité $(*)$ est valide.

Par le changement de variable $y = \varphi_-(x)$, on montre de même que g est intégrable sur $]-\infty\,;0[$ avec

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right) f(y)\,\mathrm{d}y. \qquad (**)$$

En sommant les identités $(*)$ et $(**)$, on obtient après simplification

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 36 **

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable sur $[0\,;+\infty[$. Montrer

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(\sqrt{x}\big).$$

Solution

méthode

> On montre que le rapport tend vers 0 en coupant l'intégrale en deux via la mise en place d'un « raisonnement en 2ε ».

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque l'intégrale de f^2 converge sur $[0\,;+\infty[$, le reste intégral associé tend vers 0 et il existe $A \in [0\,;+\infty[$ tel que

$$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2.$$

Par la relation de Chasles, on peut écrire pour x réel supérieur à A

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'une part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left|\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_A^x f(t)\times 1\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_A^x f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_A^x 1^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \varepsilon\sqrt{x}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\underbrace{\left|\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\right|}_{\text{constante}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et donc il existe $A' \in [0\,;+\infty[$ tel que pour tout $x \geqslant A'$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left|\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$

Finalement, pour $x \geqslant \max(A, A')$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Ainsi, l'intégrale de f de 0 à x est négligeable devant $\sqrt{x}$ lorsque x croît vers l'infini.

Exercice 37 ***

(a) Soit z un nombre complexe de partie imaginaire strictement positive. Étudier

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t-z}.$$

Soit $F\in\mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle sans pôles réels et intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $a\in\mathbb{C}$ un pôle de F. On pose

$$R_a=\lim_{x\to a}(x-a)F(x).$$

Calculer la somme des R_a pour a parcourant l'ensemble $\mathcal{P}$ des pôles de F.

(c) On note $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des pôles de F de parties imaginaires strictement positives. Établir

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,\mathrm{d}t=2\mathrm{i}\pi\sum_{a\in\mathcal{P}^+}R_a.$$

(d) Soit m et n deux entiers naturels avec $n>m$. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{2m}}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t.$$

Solution

(a) On écrit $z=a+\mathrm{i}b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}_+^*$. En multipliant par la quantité conjuguée

$$\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t-z}=\int_{-A}^{A}\frac{t-a+\mathrm{i}b}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-A}^{A}\frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_{-A}^{A}\frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t.$$

On peut exprimer des primitives pour les deux intégrales écrites et finir le calcul

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t-z}&=\left[\frac{1}{2}\ln\bigl((t-a)^2+b^2\bigr)\right]_{-A}^{A}+\mathrm{i}\left[\arctan\left(\frac{t-a}{b}\right)\right]_{-A}^{A}\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(A-a)^2+b^2}{(A+a)^2+b^2}\right)+\mathrm{i}\arctan\left(\frac{A-a}{b}\right)+\mathrm{i}\arctan\left(\frac{A+a}{b}\right)\xrightarrow[A\to+\infty]{}\mathrm{i}\pi.\end{aligned}$$

À la suite de ce calcul on pourrait croire à la convergence de l'intégrale de $t\mapsto 1/(t-z)$ sur $\mathbb{R}$ mais ceci serait incorrecte... En effet, pour pouvoir affirmer cette convergence, il faut étudier les deux bornes séparément et non conjointement comme c'est ici le cas[1].

(b) Puisque la fraction F est intégrable sur $\mathbb{R}$, la décomposition en éléments simples de la fraction F dans $\mathbb{C}(X)$ ne fait apparaître que des termes de la forme $c/(X-a)^k$

1. La limite obtenue ici ne vaut que pour un calcul sur un intervalle symétrique par rapport à 0, l'étude de l'intégrale de $-A$ à $2A$ produit une limite différente !

avec $c\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathcal{P}\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Lorsque $k=1$, on sait $c=R_a$. On a aussi

$$\lim_{t\to+\infty}tF(t)=\sum_{a\in\mathcal{P}}R_a.$$

La fraction F étant intégrable sur $\mathbb{R}$, cette limite est nécessairement nulle[1] et la somme des R_a est donc aussi nulle.

(c) Les termes en $1/(X-a)^k$ (avec $k\geqslant 2$) de la décomposition en éléments simples de F induisent des intégrales nulles sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^k}=\left[-\frac{1}{(k-1)(t-a)^{k-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0.$$

En simplifiant ces termes lors du calcul de l'intégrale de F, on, peut écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{a\in\mathcal{P}}\frac{R_a}{t-a}\right)\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}\sum_{a\in\mathcal{P}}\left(\int_{-A}^{A}\frac{R_a}{t-a}\,\mathrm{d}t\right).$$

Les parties polaires d'une fraction rationnelle réelle sont deux à deux conjuguées et donc $R_{\bar a}=\overline{R_a}$ ce qui permet d'écrire

$$\sum_{a\in\mathcal{P}}\left(\int_{-A}^{A}\frac{R_a}{t-a}\,\mathrm{d}t\right)=\sum_{a\in\mathcal{P}^+}\left(\int_{-A}^{A}\left(\frac{R_a}{t-a}+\frac{\overline{R_a}}{t-\bar a}\right)\mathrm{d}t\right)=2\sum_{a\in\mathcal{P}^+}\mathrm{Re}\left(\int_{-A}^{A}\frac{R_a}{t-a}\,\mathrm{d}t\right).$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,\mathrm{d}t=-2\pi\sum_{a\in\mathcal{P}^+}\mathrm{Im}(R_a).$$

Mais

$$\sum_{a\in\mathcal{P}^+}\mathrm{Re}(R_a)=\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathcal{P}^+}(R_a+\overline{R_a})=\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathcal{P}^+}(R_a+R_{\bar a})=\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathcal{P}}R_a=0$$

et donc, par ajout d'un zéro,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,\mathrm{d}t=2\mathrm{i}\pi\sum_{a\in\mathcal{P}^+}\bigl(\mathrm{Re}(R_a)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(R_a)\bigr)=2\mathrm{i}\pi\sum_{a\in\mathcal{P}^+}R_a.$$

(d) Puisque $n\geqslant m+1$, l'intégrabilité de la fonction rationnelle est aisément acquise. Les pôles de la fraction sont les racines de l'équation complexe $z^{2n}=-1$. Ce sont les pôles simples et non réels

$$z_k=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(2k+1)}{2n}\pi}\quad\text{avec}\quad k\in[\![0\,;2n-1]\!].$$

1. Si $xf(x)$ tend vers $\ell\neq 0$ quand $x\to+\infty$, on a $f(x)\sim\ell/x$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$.

Reste à calculer

$$R_{z_k} = \lim_{x \to z_k} (x - z_k) \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} = z_k^{2m} \lim_{x \to z_k} \frac{x - z_k}{1 + x^{2n}}.$$

Sachant $1 + z_k^{2n} = 0$, on peut écrire la factorisation géométrique :

$$1 + x^{2n} = x^{2n} - z_k^{2n} = (x - z_k) \underbrace{\sum_{j=0}^{2n-1} x^{2n-1-j} z_k^j}_{\xrightarrow[x \to z_k]{} 2n z_k^{2n-1}}.$$

On obtient alors

$$R_{z_k} = \frac{z_k^{2m}}{2n z_k^{2n-1}} = -\frac{z_k^{2m+1}}{2n} \quad \text{car} \quad z_k^{2n} = -1.$$

Les pôles de parties imaginaires positives étant obtenus pour $k \in [\![0\,; n-1]\!]$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} \, \mathrm{d}x = -2\mathrm{i}\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_k^{2m+1}}{2n} = -\frac{\mathrm{i}\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(2k+1)(2m+1)}{2n}\pi}$$

Après sommation géométrique et factorisation de l'exponentielle imaginaire d'angle moitié, on conclut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} \, \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{i}\pi}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2m+1}{2n}\pi} \times \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m+1)\pi}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2m+1}{n}\pi}} = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right)}.$$

CHAPITRE 3

Espaces normés

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3.1 Espaces normés

3.1.1 Normes

Définition

On appelle *norme* sur E toute application $N \colon E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0_E$ (*séparation*) ;
2) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ (*homogénéité*) ;
3) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*).

On dit alors que le couple (E, N) est un *espace normé*.

Les normes sont usuellement notées N, $\|\cdot\|$ ou $|\cdot|$. Elles servent à définir « la longueur selon certains critères » d'un vecteur et permettent d'étendre aux espaces vectoriels les notions usuelles d'analyse numérique en prenant la place des valeurs absolues.

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, on a

$$\|-x\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

Sur $\mathbb{K}^n$, on définit trois normes usuelles :

$$\|x\|_1 \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 \overset{\text{déf}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty \overset{\text{déf}}{=} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, analogues à celles définies sur $\mathbb{K}^n$, en considérant les coordonnées des vecteurs dans une base préalablement choisie.
Sur l'espace $\mathcal{C}([a\,;b],\mathbb{K})$ des fonctions continues de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ on définit trois normes usuelles :

$$\|f\|_1 \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 \overset{\text{déf}}{=} \left(\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty \overset{\text{déf}}{=} \sup_{t\in[a;b]} |f(t)|.$$

Enfin, si E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, la *norme euclidienne* associée à ce produit scalaire définit une norme

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

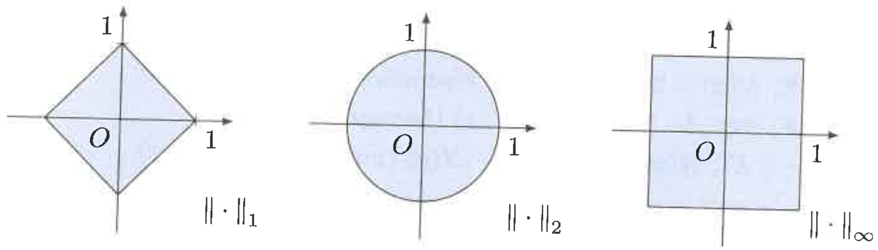
3.1.2 Boules

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace E.

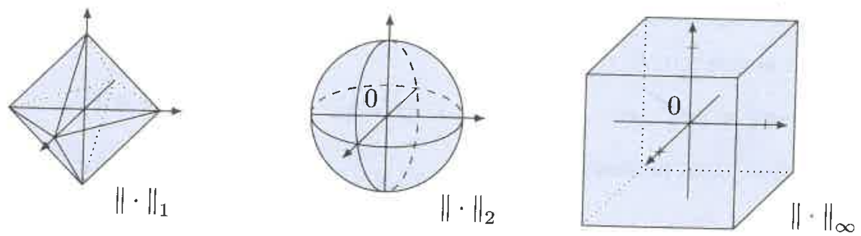
Définition

Soit $a \in E$ et $r > 0$. On définit :
- la *boule ouverte* de centre a et de rayon r : $B(a,r) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$;
- la *boule fermée* de centre a et de rayon r : $B_f(a,r) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\}$;
- la *sphère* de centre a et de rayon r : $S(a,r) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}$.

Les boules de centre 0_E et de rayon 1, sont appelées *boules unités*.



Les boules unités fermées pour les normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$.



Les boules unités fermées pour les normes usuelles sur $\mathbb{R}^3$.

3.1.3 « Bornitude »

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E.

Définition

On dit qu'une partie A de E est *bornée* s'il existe un réel M tel que $\|x\| \leqslant M$ pour tout x dans A.

Les boules sont des parties bornées et une partie est bornée si, et seulement si, elle est incluse dans une boule.

Définition

On dit qu'une fonction vectorielle[1] f définie sur une partie X quelconque et à valeurs dans l'espace normé E est *bornée* s'il existe un réel M vérifiant $\|f(x)\| \leqslant M$ pour tout x dans X.

Lorsque $X = \mathbb{N}$, la définition qui précède introduit la notion de suite bornée.

3.1.4 Convexité

Dans cette section, l'espace vectoriel E est supposé réel.

Définition

Si a et b sont deux éléments de l'espace E, on appelle *segment* d'extrémités a et b l'ensemble

$$[a\,;b] \overset{\text{déf}}{=} \{(1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0\,;1]\}.$$

Définition

On dit qu'une partie X de l'espace E est *convexe* si, dès lors qu'elle contient deux éléments a et b, elle contient aussi le segment d'extrémités a et b.

convexe non convexe

Théorème 1

Si X est une partie convexe de E, pour tous $a_1, \dots, a_n \in X$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels positifs vérifiant $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, on a

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \in X.$$

Les sous-espaces vectoriels et les sous-espaces affines sont des parties convexes. Si $\|\cdot\|$ désigne une norme sur E, les boules associées à cette norme sont aussi des parties convexes.

Théorème 2

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

1. On appelle *fonction vectorielle* toute fonction à valeurs dans un espace vectoriel.

3.1.5 Espaces normés produits

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des espaces respectivement normés par $N_1, \dots, N_p$, on définit une norme $\|\cdot\|$ sur le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_p$ en posant, pour tout $x = (x_1, \dots, x_p)$ élément de E,

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} N_k(x_k).$$

Définition

La norme $\|\cdot\|$ ainsi définie est appelée *norme produit* sur l'espace E. On dit aussi que $(E, \|\cdot\|)$ est l'*espace normé produit* des espaces normés $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$.

3.1.6 Comparaisons de normes

Soit N_1 et N_2 deux normes sur l'espace E.

Définition

On dit que la norme N_1 est *dominée* par la norme N_2 lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Définition

On dit que les normes N_1 et N_2 sont *équivalentes* lorsqu'elles se dominent mutuellement, c'est-à-dire s'il existe α et $\beta > 0$ vérifiant

$$\alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Théorème 3

Sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont deux à deux équivalentes.

Par exemple, les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes et, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2\,, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\,\|x\|_\infty\,.$$

3.2 Suites d'éléments d'un espace normé

On étudie les suites d'éléments de E que l'on appelle des *suites vectorielles*.

3.2.1 Convergence

Définition

On dit qu'une suite $u = (u_n)$ d'éléments de E *converge* vers $\ell \in E$ pour la norme $\|\cdot\|$ sur l'espace E lorsque $\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Cela signifie encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant N \implies \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Lorsqu'une suite u converge, il y a unicité du vecteur ℓ vers lequel celle-ci converge. Ce vecteur est alors appelé la *limite* de la suite et est noté $\lim u$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Le calcul sur les limites de suites est compatible avec les opérations d'addition et de produit extérieur sur l'espace E. Il est aussi compatible avec le passage à la norme

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies \|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|\,.$$

3.2.2 Effet d'un changement de norme

Soit N_1 et N_2 deux normes sur l'espace E.

Théorème 4

Si la norme N_1 est dominée par la norme N_2 alors toute suite convergeant pour N_2 converge vers la même limite pour N_1.

En particulier, deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes et celles-ci ont la même limite pour les deux normes.

3.2.3 Convergence et suites coordonnées

Si l'espace E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et si $e = (e_1, \dots, e_p)$ désigne une base de E, alors pour toute suite[1] $u = \big(u(n)\big)$ d'éléments de E, on peut écrire

$$u(n) = u_1(n)e_1 + \dots + u_p(n)e_p \quad \text{avec} \quad u_j(n) \in \mathbb{K}.$$

Définition

Les suites scalaires $u_j = \big(u_j(n)\big)$ ainsi introduites sont appelées *suites coordonnées* dans la base e de la suite de vecteurs u.

Théorème 5

Quelle que soit la norme choisie sur l'espace E, on a équivalence entre :

(i) la suite vectorielle u converge ;

(ii) les suites coordonnées $u_1, \dots, u_p$ convergent.

De plus, si tel est le cas,

$$\lim u = \big(\lim u_1\big)e_1 + \dots + \big(\lim u_p\big)e_p.$$

Une suite de matrices converge si, et seulement si, il y a convergence des suites des coefficients. On peut alors déterminer la limite d'un produit de suites de matrices et affirmer que, pour (A_n) et (B_n) deux suites d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ respectivement,

$$\big(A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A \text{ et } B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B\big) \implies A_nB_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} AB.$$

1. Afin de ne pas démultiplier les indices dans ce qui suit, on adopte une notation fonctionnelle des termes de la suite u.

Si l'espace E est un produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ d'espaces normés et s'il est muni de la norme produit, on peut aussi introduire les suites coordonnées d'une suite u d'éléments de E en écrivant

$$u(n) = \big(u_1(n), \ldots, u_p(n)\big).$$

On dispose alors d'un résultat similaire au précédent pour étudier la convergence de la suite u à l'aide de ses suites coordonnées.

3.2.4 Séries d'éléments d'un espace normé

Le vocabulaire des séries numériques se transpose au cadre des séries de vecteurs[1]. En particulier, si (u_n) désigne une suite d'éléments d'un espace normé E, on dit que la série $\sum u_n$ *converge* s'il y a convergence de la suite (S_n) de ses *sommes partielles*. Sa limite définit alors la *somme* de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

La notion d'absolue convergence présentée pour les séries numériques se transpose aux séries vectorielles en remplaçant la valeur absolue par la norme.

Définition

Une série $\sum u_n$ d'éléments de E est dite *absolument convergente* s'il y a convergence de la série à termes positifs $\sum \|u_n\|$.

Théorème 6

Lorsque l'espace E est de dimension finie, toute série $\sum u_n$ absolument convergente est convergente et

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

3.3 Topologie

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace E.
On adopte le vocabulaire affine en nommant indifféremment points ou vecteurs les éléments de E.

3.3.1 Voisinage

Définition

On appelle *voisinage* d'un point a de E toute partie X de E vérifiant

$$\exists \alpha > 0, \quad B(a,\alpha) \subset X.$$

1. On parle de *séries vectorielles*.

3.3.2 Intérieur d'une partie

Définition

On dit qu'un point a de E est *intérieur* à une partie X de E, si X en est voisinage. On appelle *intérieur* de X l'ensemble noté X° des points intérieurs à X.

L'intérieur d'une boule ouverte $B(a,r)$ est elle-même tandis que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de mêmes centre et rayon.
L'intérieur d'un intervalle réel non vide est l'intervalle ouvert de mêmes extrémités.

3.3.3 Adhérence d'une partie

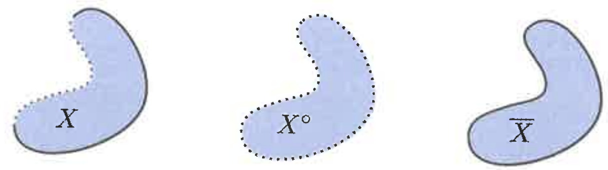
Définition

On dit qu'un point a de E est *adhérent* à une partie X de E si X intercepte tous les voisinages de a :

$$\forall \alpha > 0, \quad B(a,\alpha) \cap X \neq \emptyset.$$

On appelle *adhérence* de X l'ensemble noté $\overline{X}$ des points adhérents à X.

L'adhérence d'une boule fermée $B_f(a,r)$ est elle-même tandis que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de mêmes centre et rayon.
L'adhérence d'un intervalle réel non vide est l'intervalle fermé de mêmes extrémités.



En parallèle, une partie, son intérieur, son adhérence.

Par passage au complémentaire, on échange intérieur et adhérence :

$$\complement_E \overline{X} = \big(\complement_E X\big)^\circ \quad \text{et} \quad \complement_E (X^\circ) = \overline{\complement_E X}.$$

Théorème 7 (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Soit X une partie non vide de E et a un élément de E. On a équivalence entre :

(i) a est adhérent à X ;
(ii) $\exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}},\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Les points adhérents à X apparaissent alors comme les limites des suites convergentes d'éléments de X.

3.3.4 Frontière

Définition

On dit qu'un point a est *frontière* à une partie X de E s'il est adhérent à X sans être intérieur à X. On appelle *frontière* de X l'ensemble des points frontières de X :

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus X^\circ.$$

On remarque alors

$$\overline{X} = X \cup \operatorname{Fr}(X) \quad \text{et} \quad X^\circ = X \setminus \operatorname{Fr}(X).$$

3.3.5 Parties ouvertes

Définition

Une partie U de E est dite *ouverte* si elle est voisinage de chacun de ses points :

$$\forall a \in U,\ \exists \alpha > 0, \quad B(a, \alpha) \subset U.$$

On dit encore que U est un *ouvert* de E.

Une partie est ouverte si, et seulement si, son intérieur lui est égal. Cela revient encore à dire qu'elle ne contient aucun de ses points frontières.
$\emptyset$ et E sont des exemples de parties ouvertes de E.
Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont, comme leur nom l'indique, des parties ouvertes. Il en est de même des boules ouvertes d'un espace normé.

Théorème 8
Une réunion (finie ou infinie) de parties ouvertes est une partie ouverte.
Une intersection finie de parties ouvertes est une partie ouverte.

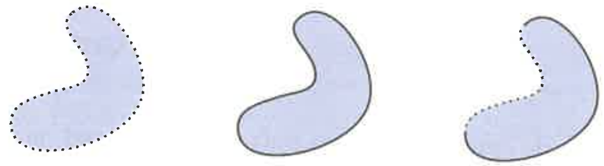
3.3.6 Parties fermées

Définition

Une partie F de E est dite *fermée* si son complémentaire est une partie ouverte. On dit encore que F est un *fermé* de E.

Une partie est fermée lorsque son adhérence lui est égale. Cela revient encore à dire qu'elle contient tous ses points frontières.
E et $\emptyset$ sont des exemples de parties fermées[1] de E.
Les intervalles fermées de $\mathbb{R}$ sont des parties fermées, les boules fermées sont aussi des parties fermées.

1. E et $\emptyset$ sont les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées. Soulignons qu'il existe de nombreuses parties ni ouvertes et ni fermées et qu'une partie qui n'est pas ouverte n'est pas nécessairement fermée.



ouvert fermé ni ouvert, ni fermé

Trois parties topologiquement différentes.

Théorème 9
Une intersection (finie ou infinie) de parties fermées est une partie fermée.
Une réunion finie de parties fermées est une partie fermée.

Théorème 10 (Caractérisation séquentielle des parties fermées)
Soit F une partie de E. On a équivalence entre :
(i) F est fermée ;
(ii) $\forall (x_n) \in F^{\mathbb{N}}, \quad (x_n) \text{ converge} \implies \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \in F.$

On dit qu'une partie est fermée lorsqu'elle *contient les limites de ses suites convergentes.*

3.4 Exercices d'apprentissage

Exercice 1
Sur l'espace E des polynômes réels, on pose

$$N(P) = \sup_{t \in [-1;1]} \left|P(t)\right|.$$

Vérifier que N définit une norme sur E.

Solution

méthode

On commence par vérifier que l'application N est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Pour $P \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)$ est continue sur le segment $[-1\,;1]$, elle est donc bornée ce qui permet d'introduire le réel

$$N(P) = \sup_{t \in [-1;1]} \left|P(t)\right| \in \mathbb{R}_+.$$

méthode

On vérifie ensuite les trois axiomes (homogénéité, séparation et inégalité triangulaire) définissant qu'une application est une norme.

Soit $P \in E$ tel que $N(P) = 0$. Pour tout $t \in [-1;1]$, on a $P(t) = 0$ car

$$0 \leqslant |P(t)| \leqslant N(P) = 0.$$

méthode

> L'objectif est de démontrer que le polynôme P est nul, non seulement qu'il s'annule sur $[-1;1]$! On exploite un argument relatif au nombre de racines du polynôme.

Le polynôme P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$. Vérifions $N(\lambda P) = |\lambda|\, N(P)$. Pour tout $t \in [-1;1]$, on a $|P(t)| \leqslant N(P)$ et donc

$$|\lambda P(t)| = |\lambda||P(t)| \leqslant |\lambda| N(P).$$

Une borne supérieure étant le plus petit des majorants, on peut affirmer

$$N(\lambda P) = \sup_{t\in[-1;1]} |\lambda P(t)| \leqslant |\lambda|\, N(P). \tag{$*$}$$

Si λ est nul, cette inégalité est une égalité. Si λ est non nul, en considérant le polynôme λP au lieu de P et le scalaire $1/\lambda$ au lieu de λ, on peut affirmer

$$N(P) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda P)$$

et donc

$$|\lambda|\, N(P) = N(\lambda P). \tag{$**$}$$

Les inégalités $(*)$ et $(**)$ se complètent pour donner[1] $N(\lambda P) = |\lambda|\, N(P)$.

Enfin, considérons $P, Q \in E$. Pour tout $t \in [-1;1]$, on a

$$|(P+Q)(t)| = |P(t) + Q(t)| \leqslant |P(t)| + |Q(t)| \leqslant N(P) + N(Q).$$

Une borne supérieure étant le plus petit des majorants, on conclut

$$N(P+Q) = \sup_{t\in[-1;1]} |(P+Q)(t)| \leqslant N(P) + N(Q).$$

Finalement, N définit bien une norme sur E.

> **Exercice 2**
>
> On considère $E = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$.
>
> (a) Pour $f \in E$, on pose $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Montrer que N définit une norme sur E.
>
> (b) Pour $f \in E$, on pose $N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On vérifie aisément que N' est aussi une norme sur E. Montrer que la norme N' est équivalente à N.
>
> (c) Les normes N et N' sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?

1. Plus rapidement, on peut observer que l'application N est définie à partir d'une restriction de l'application $\|\cdot\|_\infty$ que l'on sait être une norme.

Solution

(a) L'application N est bien définie sur E et valeurs dans $\mathbb{R}_+$. En effet, pour f dans E, la dérivée f' existe et est continue sur le segment $[0;1]$ ce qui permet d'introduire $\|f'\|_\infty$.

Soit une fonction $f \in E$ telle que $N(f) = 0$. Par nullité d'une somme de termes positifs, on a simultanément $f(0) = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$.

méthode

> On sait que l'application $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme : on peut employer les propriétés de séparation, d'homogénéité et d'inégalité triangulaire, sans détailler les démonstrations associées.

La dérivée f' est donc nulle. La fonction f est alors constante et, sachant $f(0) = 0$, on conclut que f est la fonction nulle.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in E$. On a

$$N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda||f(0)| + |\lambda|\|f'\|_\infty = |\lambda|\, N(f).$$

Enfin, pour $f, g \in E$,

$$\begin{aligned} N(f+g) &= |f(0) + g(0)| + \|f' + g'\|_\infty \\ &\leqslant |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g). \end{aligned}$$

(b) **méthode**

> On vérifie que deux normes sont équivalentes en constatant qu'elles se dominent mutuellement.

Pour $f \in E$, on a $|f(0)| \leqslant \|f\|_\infty$ et donc $N(f) \leqslant N'(f)$. Ainsi, la norme N est dominée par la norme N'.

méthode

> Pour vérifier que N' est dominée par N, il faut parvenir à majorer $\|f\|_\infty$ à l'aide de $|f(0)|$ et $\|f'\|_\infty$.

La fonction étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire pour tout $x \in [0;1]$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par inégalités triangulaires

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |f(0)| + \int_0^x \|f'\|_\infty\,\mathrm{d}t \\ &= |f(0)| + x\|f'\|_\infty \leqslant |f(0)| + \|f'\|_\infty = N(f). \end{aligned}$$

On en déduit $\|f\|_\infty \leqslant N(f)$ puis, sachant $\|f'\| \leqslant N(f)$, on a $N'(f) \leqslant 2N(f)$. Ainsi, la norme N' est aussi dominée par la norme N.

(c) **méthode**

Les normes N et N' étant équivalentes, il suffit de savoir comparer l'une d'elles à la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour répondre à la question.

La norme $\|\cdot\|_\infty$ est évidemment dominée par la norme N'. L'inverse est douteux car il n'est pas possible de borner une dérivée en sachant seulement borner la fonction.

méthode

On peut montrer qu'une norme N_1 n'est pas dominée par une norme N_2 en déterminant une suite (u_n) de vecteurs non nuls vérifiant

$$\frac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $f_n : x \mapsto x^n$ définie sur $[0;1]$. Les fonctions f_n sont éléments de E.

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |t^n| = 1 \quad \text{et} \quad N(f_n) = 0 + \sup_{t\in[0;1]} |nt^{n-1}| = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi, la norme N n'est pas dominée par $\|\cdot\|_\infty$ et ces normes ne sont pas équivalentes. *A fortiori*, N' n'est pas non plus équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 3 *

Soit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2, \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifiant $\|A\| < 1$.

(a) Étudier la convergence de la série matricielle $\sum A^n$.

(b) Justifier que la matrice $\mathrm{I}_p - A$ est inversible et exprimer la somme de la série précédente.

Solution

(a) **méthode**

Pour établir la convergence d'une série d'éléments d'un espace normé de dimension finie, on peut :

— calculer les sommes partielles (série télescopique) et étudier leur limite ;
— raisonner par convergence absolue en exploitant les outils de comparaison.

Par la propriété de sous-multiplicativité, on montre par récurrence $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$ pour tout naturel n. La série géométrique $\sum \|A\|^n$ converge car $\|A\| \in [0;1[$. Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série numérique $\sum \|A^n\|$. Ainsi, il y a convergence absolue de la série matricielle $\sum A^n$. L'espace normé $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, on peut affirmer (Th. 6 p. 104) la convergence de la série $\sum A^n$.

(b) **méthode**

On fait apparaître un télescopage, en multipliant par $\mathrm{I}_p - A$ les sommes partielles de la série $\sum A^n$.

Pour $N \in \mathbb{N}$

$$(\mathrm{I}_p - A)\sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{N}\left(A^n - A^{n+1}\right) = \mathrm{I}_p - A^{N+1}. \qquad (*)$$

Or la suite matricielle $\left(A^{N+1}\right)$ est de limite nulle puisque

$$\left\|A^{N+1} - \mathrm{O}_p\right\| = \left\|A^{N+1}\right\| \leqslant \|A\|^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad \|A\| \in [0;1[.$$

On en déduit par passage à la limite de $(*)$ (ce qui est possible car on sait la série matricielle convergente)

$$(\mathrm{I}_p - A)\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \mathrm{I}_p.$$

On peut alors affirmer que la matrice $\mathrm{I}_p - A$ est inversible [1] et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (\mathrm{I}_p - A)^{-1}.$$

Exercice 4

Montrer que

$$A = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in [0;+\infty[^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1\right\}$$

est une partie bornée et convexe de $\mathbb{R}^n$.

Solution

A est évidemment une partie de $\mathbb{R}^n$.

méthode

On montre qu'une partie A est bornée en exhibant une *borne* de celle-ci, c'est-à-dire un réel M tel que $\|x\| \leqslant M$ pour tout $x \in A$.

Il est nécessaire de choisir une norme sur $\mathbb{R}^n$. Puisque l'espace est de dimension finie, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (Th. 3 p. 102) et le choix de cette norme est sans incidence. Considérons la norme $\|\cdot\|_1$. Pour tout $x \in A$, on constate

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant 1 = M.$$

La partie A est donc bornée.

1. Bien que le produit matriciel ne soit pas commutatif, il suffit dans le cadre des matrices carrées de vérifier $AB = \mathrm{I}_p$ pour affirmer que A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

méthode

On vérifie qu'une partie est convexe en constatant qu'elle contient intégralement les segments dont les extrémités lui appartiennent.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$ deux éléments arbitrairement choisis dans A. Les éléments du segment $[a\,;b]$ sont les $(1-\lambda)a + \lambda b$ avec $\lambda \in [0\,;1]$. Soit $\lambda \in [0\,;1]$ et

$$x = (1-\lambda)a + \lambda b = \big(\underbrace{(1-\lambda)a_1 + \lambda b_1}_{=x_1}, \dots, \underbrace{(1-\lambda)a_n + \lambda b_n}_{=x_n}\big).$$

Les x_i sont tous positifs par produits et sommes de nombres positifs et

$$x_1 + \cdots + x_n = \underbrace{(1-\lambda)}_{\geqslant 0}\underbrace{(a_1 + \cdots + a_n)}_{\leqslant 1} + \underbrace{\lambda}_{\geqslant 0}\underbrace{(b_1 + \cdots + b_n)}_{\leqslant 1} \leqslant (1-\lambda) + \lambda = 1.$$

Ainsi, x est élément de A et l'on peut affirmer $[a\,;b] \subset A$. La partie A est convexe.

Exercice 5

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace normé E, son adhérence $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Solution

L'adhérence $\overline{F}$ est évidemment une partie de E et celle-ci contient F, elle est donc non vide. Il reste à vérifier que cette partie est stable par combinaison linéaire.

méthode

Un point est adhérent à une partie si, et seulement si, il est limite d'une suite convergente d'éléments de cette partie (Th. 7 p. 105).

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \overline{F}$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F vérifiant

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y.$$

Par opérations sur les limites, on peut affirmer

$$\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda x + \mu y.$$

Or $(\lambda x_n + \mu y_n)$ est une suite d'éléments du sous-espace vectoriel F. Sa limite $\lambda x + \mu y$ est donc élément de l'adhérence $\overline{F}$.

On peut conclure que $\overline{F}$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Montrer $\sup(A) \in \overline{A}$.

Solution

méthode

On détermine une suite d'éléments de A convergeant vers $\sup(A)$.

L'ensemble A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, on peut donc introduire le réel $M = \sup(A)$. Ce réel est le plus petit des majorants de A : c'est la propriété clé qui permet de construire une suite d'éléments de A convergeant vers M.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le réel $M - 1/n$ ne majore pas A car il est strictement inférieur à M. Il existe donc un élément $a_n \in A$ tel que

$$M - \frac{1}{n} < a_n \leqslant M.$$

En faisant varier n, ceci détermine une suite (a_n) d'éléments de A qui, par théorème d'encadrement, converge vers M. On en déduit que M est adhérent [1] à la partie A (Th. 7 p. 105).

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ décrit ci-dessous définit une partie fermée

$$\mathcal{H} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; xy = 1\big\}.$$

Solution

On vérifie couramment qu'une partie est fermée par la caractérisation séquentielle des parties fermées (Th. 10 p. 107).

méthode

On introduit une suite d'éléments de la partie, on suppose que celle-ci converge et l'on établit que sa limite appartient à la partie : la partie contient alors les limites de ses suites convergentes.

Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de $\mathcal{H}$ et u_∞ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = (x_n, y_n)$ ce qui introduit les suites coordonnées (x_n) et (y_n). On peut aussi écrire $u_\infty = (x_\infty, y_\infty)$ et affirmer (Th. 5 p. 103)

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_\infty \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_\infty.$$

Puisque chaque u_n est élément de $\mathcal{H}$, on a $x_n y_n = 1$ pour tout naturel n. En passant à la limite, on obtient $x_\infty y_\infty = 1$ et donc u_∞ est élément de $\mathcal{H}$. On peut alors conclure que $\mathcal{H}$ est une partie fermée [2] de $\mathbb{R}^2$.

1. On montre de même que la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée est adhérente à celle-ci.

2. Plus généralement, on démontre de la sorte que des parties de $\mathbb{R}^n$ définies par une condition « continue » s'exprimant en terme d'égalité ou d'inégalités larges est une partie fermée. À l'inverse une inégalité stricte définit généralement une partie ouverte.

3.5 Exercices d'entraînement

3.5.1 Normes

Exercice 8 *
Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels et $N: \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1 |x_1| + \cdots + a_n |x_n|.$$

À quelle(s) condition(s) sur les $a_1, \dots, a_n$, l'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

Solution

méthode

On raisonne par analyse-synthèse : lors de l'analyse on réunit les conditions que doivent vérifier les a_i pour que l'on puisse montrer que N est une norme lors de la synthèse.

Analyse : Supposons que N soit une norme sur $\mathbb{K}^n$. Introduisons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on a $a_i = N(e_i)$. Or une norme prend des valeurs strictement positives sur les vecteurs non nuls. On a donc $a_i > 0$ pour tout indice i.

Synthèse : Supposons les a_i tous strictement positifs. L'application N est alors bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $N(x) = 0$. On a

$$\underbrace{a_1 |x_1|}_{\geqslant 0} + \cdots + \underbrace{a_n |x_n|}_{\geqslant 0} = 0.$$

Par nullité d'une somme de termes positifs, on peut affirmer $a_i |x_i| = 0$ pour tout indice i compris entre 1 et n. Or $a_i \neq 0$ et donc $x_i = 0$. On peut alors conclure que le vecteur x est nul.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= N\big((\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\big) = a_1 |\lambda x_1| + \cdots + a_n |\lambda x_n| \\ &= |\lambda| \big(a_1 |x_1| + \cdots + a_n |x_n|\big) = |\lambda| N(x). \end{aligned}$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} N(x+y) &= N\big((x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\big) = a_1 |x_1 + y_1| + \cdots + a_n |x_n + y_n| \\ &\leqslant a_1 \big(|x_1| + |y_1|\big) + \cdots + a_n \big(|x_n| + |y_n|\big) = N(x) + N(y) \end{aligned}$$

car les a_i sont tous positifs.

On peut conclure que N définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 9 **
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que cette norme est *sous-multiplicative* ce qui signifie :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|.$$

Pour X colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose

$$N(X) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

(c) Vérifier

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad N(AX) \leqslant \|A\| \, N(X).$$

(d) En déduire

$$\|A\| = \sup_{N(X)=1} N(AX).$$

Solution

(a) L'application $\|\cdot\|$ est bien définie[1] de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| = 0$. Pour tout indice i compris entre 1 et n, on a

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leqslant \|A\| = 0$$

et donc

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0.$$

Par nullité d'une somme de quantités positives, on obtient $a_{i,j} = 0$ pour tous les indices i et j. Ainsi, la matrice A est nulle.

De plus, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\|\lambda A\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\underbrace{|\lambda|}_{\geqslant 0} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) = |\lambda| \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) = |\lambda| \, \|A\|$$

1. La borne supérieure porte ici sur un nombre fini non nul de quantités réelles, on aurait aussi pu exprimer un max à la place de celle-ci.

et

$$\|A+B\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\right) \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\left(|a_{i,j}|+|b_{i,j}|\right)$$

$$\leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right) + \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|\right) = \|A\|+\|B\|.$$

L'application $\|\cdot\|$ définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C = AB$.

méthode

> Le coefficient général du produit AB s'exprime par la formule
>
> $$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j}.$$

Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. On peut écrire avec des notations entendues

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\,|b_{k,j}|\right).$$

En échangeant les deux sommes

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Bigg(|a_{i,k}|\underbrace{\sum_{j=1}^{n}|b_{k,j}|}_{\leqslant\|B\|}\Bigg) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\right)\|B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

Cette majoration, valant pour tout indice i, on peut passer à la borne supérieure et affirmer $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

(c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

méthode

> Le coefficient général du produit AX s'exprime par la formule
>
> $$[AX]_i = \sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}[X]_j.$$

Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. Avec des notations entendues

$$\left|[AX]_i\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\underbrace{|x_j|}_{\leqslant N(X)} \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\,N(X) \leqslant \|A\|\,N(X).$$

Cette majoration, valant pour tout indice i, elle vaut en particulier pour celui déterminant la valeur de $N(AX)$ et donc $N(AX) \leqslant \|A\|\,N(X)$.

(d) Pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $N(X) = 1$, l'inégalité qui précède donne $N(AX) \leqslant \|A\|$. On en déduit la majoration qui suit avec existence de la borne supérieure

$$\sup_{N(X)=1} N(AX) \leqslant \|A\|. \tag{$*$}$$

méthode

> Pour obtenir l'inégalité inverse, on construit une colonne X dont les coefficients sont des 1 ou des -1 de sorte que la colonne AX voit apparaître $\|A\|$ parmi ses coefficients.

Notons i_0 l'indice pour lequel

$$N(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right) = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|.$$

Considérons ensuite la colonne X dont les coefficients x_j sont donnés par

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0,j} \geqslant 0 \\ -1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ces coefficients sont choisis de sorte que $|x_j| = 1$ et $a_{i_0,j}x_j = |a_{i_0,j}|$ pour tout indice j. La colonne X vérifie alors

$$N(X) = 1 \quad\text{et}\quad [AX]_{i_0} = \sum_{j=1}^{n}a_{i_0,j}x_j = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}| = \|A\|.$$

On a donc $N(AX) \geqslant \|A\|$ et l'on peut affirmer

$$\sup_{N(X)=1} N(AX) \geqslant \|A\|. \tag{$**$}$$

Les inégalités $(*)$ et $(**)$ se complètent pour produire l'égalité voulue.

Exercice 10 **

On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2 < +\infty.$$

Montrer que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé par l'application

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2\right)^{1/2}.$$

Solution

méthode

On vérifie que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est une partie non vide (il contient la suite nulle) de l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$, on a immédiatement $\lambda u \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$. Pour $u, v \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$, on a pour tout naturel n

$$\left|(u+v)_n\right|^2 \leqslant \left(|u_n|+|v_n|\right)^2 = |u_n|^2 + 2|u_n||v_n| + |v_n|^2.$$

méthode

On exploite l'inégalité $2ab \leqslant a^2+b^2$ valable pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On en déduit

$$\left|(u+v)_n\right|^2 \leqslant 2\left(|u_n|^2+|v_n|^2\right).$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer $u+v \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

Finalement, $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Vérifions maintenant que $\|\cdot\|_2$ définit une norme sur $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

L'application $\|\cdot\|_2 : \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ introduite est bien définie.

Soit une suite $u \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ telle que $\|u\|_2 = 0$. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 = 0.$$

Par nullité d'une somme de termes positifs, on obtient $|u_n|^2 = 0$ donc $u_n = 0$ pour tout naturel n. On peut alors affirmer que u est la suite nulle.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$. La propriété d'homogénéité s'obtient par les calculs qui suivent :

$$\|\lambda u\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda u_n|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda|^2|u_n|^2\right)^{1/2} = |\lambda|\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2\right)^{1/2} = |\lambda|\,\|u\|_2\,.$$

Soit $u, v \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$. Montrons $\|u+v\|_2 \leqslant \|u\|_2 + \|v\|_2$.

méthode

On étudie l'inégalité triangulaire au carré afin de simplifier les racines.

$$\|u+v\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n+v_n|^2 \leqslant \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2}_{=\|u\|_2^2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n||v_n| + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n|^2}_{=\|v\|_2^2}. \qquad (*)$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout naturel N

$$\sum_{n=0}^{N}|u_n||v_n| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N}|u_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{N}|v_n|^2\right)^{1/2}.$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n||v_n| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n|^2\right)^{1/2} = \|u\|_2\,\|v\|_2\,.$$

Ainsi, l'inéquation $(*)$ donne

$$\|u+v\|_2^2 \leqslant \|u\|_2^2 + 2\,\|u\|_2\,\|v\|_2 + \|v\|_2^2 = \left(\|u\|_2+\|v\|_2\right)^2$$

et l'on peut conclure [1]

$$\|u+v\|_2 \leqslant \|u\|_2 + \|v\|_2\,.$$

Exercice 11 **

Soit N_1 et N_2 deux normes sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(a) On suppose égales les boules unités fermées des normes N_1 et N_2. Montrer que ces deux normes sont égales.

(b) Même question avec les boules unités ouvertes.

Solution

(a) **méthode**

Par un facteur homothétique λ bien choisi, tout vecteur x non nul peut être transformé en un vecteur λx d'une boule unité.

Soit $x \in E$. Si x est le vecteur nul alors $N_1(x) = 0 = N_2(x)$. Si x est non nul, introduisons le vecteur $y = x/N_1(x)$. Ce vecteur est unitaire pour la norme N_1. Il appartient donc à la boule unité fermée de cette norme. Par l'hypothèse d'égalité des boules unités fermées, le vecteur y appartient aussi à la boule unité fermée pour la norme N_2. On en déduit $N_2(y) \leqslant 1$ et il en découle $N_2(x) \leqslant N_1(x)$.

Un raisonnement symétrique donne $N_1(x) \leqslant N_2(x)$ et l'on peut conclure à l'égalité des deux normes N_1 et N_2.

(b) **méthode**

On reprend la démarche précédente en se ramenant à un vecteur « proche » du bord de la boule unité ouverte.

Soit $x \in E$. Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, on introduit le vecteur

$$y = \frac{x}{N_1(x)+\varepsilon}$$

pour lequel

$$N_1(y) = \frac{1}{N_1(x)+\varepsilon}N_1(x) < 1.$$

1. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme introduite ici est la norme euclidienne associée au produit scalaire défini par $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$: voir sujet 8 du chapitre 6 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MP*.

Le vecteur y est élément de la boule unité ouverte pour la norme N_1. Celle-ci étant supposée égale à la boule unité ouverte pour la norme N_2, on obtient $N_2(y) < 1$ et l'on en tire $N_2(x) < N_1(x)+\varepsilon$. Cette inégalité valant pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de faire tendre ε vers 0 par valeurs supérieures pour obtenir $N_2(x) \leqslant N_1(x)$.

On conclut à l'égalité par un raisonnement symétrique.

Exercice 12 **

Soit E un espace vectoriel réel et $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant

$$\forall x \in E,\quad N(x) = 0 \implies x = 0_E$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\quad N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x).$$

Montrer que N définit une norme si, et seulement si, l'ensemble

$$B = \{x \in E \mid N(x) \leqslant 1\}$$

est une partie convexe de E.

Solution

La convexité des boules définies par une norme donnée étant connue, c'est essentiellement l'implication réciproque qu'il s'agit d'établir.

On suppose la partie B convexe. Pour établir que N définit une norme, il suffit de montrer l'inégalité triangulaire $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ pour tous x et y dans E.

Lorsque x ou y désigne le vecteur nul, c'est immédiat. Supposons désormais les vecteurs x et y non nuls.

méthode

> En divisant les vecteurs x et y par leurs normes, on se ramène à des vecteurs appartenant à B.

Introduisons les vecteurs unitaires $a = x/N(x)$ et $b = y/N(y)$. Les vecteurs a et b appartenant à B, le segment d'extrémités a et b est entièrement inclus dans B et donc, pour tout $t \in [0\,;1]$, on a

$$N\big((1-t)a + tb\big) \leqslant 1.$$

En choisissant $t = N(y)/\big(N(x) + N(y)\big) \in [0\,;1]$, on conclut

$$N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

3.5.2 Comparaisons de normes

Exercice 13 *

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E_n l'espace des polynômes réels de degrés inférieurs à n. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant

$$\forall P \in E_n,\quad \int_0^1 \big|P(t)\big|\,\mathrm{d}t \geqslant \lambda \sup_{t\in[0;1]} \big|P(t)\big|.$$

Solution

méthode

> En dimension finie, les normes sont toutes équivalentes (Th. 3 p. 102).

Introduisons N_1 et N_2 les fonctions définies sur E_n par

$$N_1(P) = \int_0^1 \big|P(t)\big|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t\in[0;1]} \big|P(t)\big|.$$

On vérifie aisément que ces deux applications définissent des normes sur E_n. Puisque l'espace E_n est de dimension finie, ces deux normes sont équivalentes et, en particulier, la norme N_2 est dominée par N_1 ce qui conduit à l'inégalité voulue [1].

Exercice 14 **

Soit $E = \mathcal{C}\big([0\,;1],\mathbb{R}\big)$ et E^+ le sous-ensemble de E constitué des fonctions positives qui ne s'annulent qu'au plus un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 \big|f(t)\big|\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ définit une norme sur E.

(b) Montrer que, si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+, les normes associées sont équivalentes.

On considère les fonctions φ_1 et φ_2 de E^+ déterminée par

$$\varphi_1(t) = t \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = t^2 \quad \text{pour tout } t \in [0\,;1].$$

(c) Les normes $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ et $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ sont-elles équivalentes ?

Solution

(a) L'application $\|\cdot\|_\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie puisque l'intégrale porte sur un segment et que la fonction intégrée y est continue.

Soit $f \in E$ telle que $\|f\|_\varphi = 0$. Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, la fonction $t \mapsto \big|f(t)\big|\varphi(t)$ est nulle. En dehors des valeurs où φ est nulle, la fonction f s'annule assurément.

méthode

> On exploite un argument de continuité pour montrer que f est aussi nulle en les points où φ s'annule.

La fonction φ ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Si x_0 est une valeur en laquelle φ s'annule, il existe un voisinage de celle-ci (voisinage excluant x_0) sur lequel φ ne s'annule

1. En revanche, si l'on se place sur $E = \mathbb{R}[X]$, un tel réel λ n'existe pas. On s'en convainc en considérant $P = X^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ arbitraire.

pas. La fonction f est alors nulle sur ce voisinage et, par continuité, f s'annule[1] aussi en x_0. Finalement, la fonction f est nulle partout.

Les propriétés $\|\lambda f\|_\varphi = |\lambda|\,\|f\|_\varphi$ et $\|f+g\|_\varphi \leqslant \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$ étant immédiates, on peut affirmer que $\|\cdot\|_\varphi$ définit une norme sur l'espace E.

(b) **méthode**

On justifie l'existence d'un réel M tel que $\varphi_2(t) \leqslant M\varphi_1(t)$ pour tout $t \in [0\,;1]$.

La fonction φ_1 ne s'annule pas, on peut donc introduire la fonction φ_2/φ_1. Celle-ci est continue sur le segment $[0\,;1]$ et donc bornée par un certain réel M en vertu du théorème des bornes atteintes. On a alors $\varphi_2(t) \leqslant M\varphi_1(t)$ pour tout $t \in [0\,;1]$. On en déduit la comparaison qui suit pour toute fonction f de E

$$\|f\|_{\varphi_2} = \int_0^1 |f(t)|\varphi_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^1 |f(t)|\varphi_1(t)\,\mathrm{d}t = M\,\|f\|_{\varphi_1}.$$

Ainsi, la norme $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ est dominée par $\|\cdot\|_{\varphi_1}$. Un argument symétrique produit la domination en sens inverse et l'on peut conclure que les deux normes sont équivalentes.

(c) On vérifie facilement $\|\cdot\|_{\varphi_2} \leqslant \|\cdot\|_{\varphi_1}$ car $t^2 \leqslant t$ pour tout $t \in [0\,;1]$. En revanche, la domination en sens inverse n'est pas vraie.

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction $f_n \in E$ déterminée par $f_n(t) = (1-t)^n$. On a[2]

$$\|f_n\|_{\varphi_1} = \int_0^1 t(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

et

$$\|f_n\|_{\varphi_2} = \int_0^1 t^2(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Le quotient $\|f_n\|_{\varphi_1} / \|f_n\|_{\varphi_2}$ étant de limite $+\infty$ quand n croît vers $+\infty$, la norme $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ n'est pas dominée par $\|\cdot\|_{\varphi_2}$.

3.5.3 Suites de vecteurs

Exercice 15 *

À quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ existe-t-il $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifiant

$$M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A\,?$$

1. Pour mener ce raisonnement, on a exploité que tout élément de $[0\,;1]$ est adhérent à l'ensemble des points où φ ne s'annule pas.
2. Un procédé efficace pour calculer ces deux intégrales consiste à poser une intégration par parties !

Solution

méthode

Par analyse-synthèse, on obtient la condition $A^2 = A$.

Analyse : Supposons que la suite (M^n) converge vers A. La suite extraite (M^{2n}) converge alors aussi vers A. En raisonnant par les coefficients[1], on peut affirmer que le produit $M^{2n} = M^n \times M^n$ tend vers A^2. Par unicité de la limite d'une suite, on obtient $A^2 = A$: la matrice A est représentative d'une projection vectorielle.

Synthèse : Si $A^2 = A$ alors A est la limite de la suite (A^n) car cette dernière est constante égale à A à partir du rang 1.

Exercice 16 **

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite (A_n^n) avec

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution

méthode

Une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

est homothétique à une matrice de rotation :

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \sqrt{x^2+y^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ bien choisi.}$$

On écrit $A_n = \rho_n R(\theta_n)$ avec

$$R(\theta_n) = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix},\quad \rho_n = \sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}} \quad \text{et} \quad \theta_n = \arctan\left(\frac{a}{n}\right).$$

Puisqu'il est facile de calculer les puissances d'une matrice de rotation, on obtient

$$A_n^n = \rho_n^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

D'une part,

$$\rho_n^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \exp\left(\frac{n}{2}\underbrace{\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)}_{\sim a^2/n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

1. Les coefficients déterminent les suites coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on emploie alors le Th. 5 p. 103.

D'autre part,

$$n\theta_n = \underbrace{n\arctan\left(\frac{a}{n}\right)}_{\sim a/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a.$$

On en déduit

$$A_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 ** (Théorème du point fixe)

Soit E un espace de dimension finie de norme $\|\cdot\|$ et f une application de E vers E. On suppose qu'il existe[1] $k \in [0\,;1[$ tel que

$$\forall (x,y)\in E^2,\quad \|f(y)-f(x)\| \leqslant k\|y-x\|.$$

(a) Montrer que f possède au plus un point fixe[2].

On choisit arbitrairement $a\in E$ et l'on considère la suite (x_n) définie par

$$x_0 = a \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n).$$

(b) Montrer la convergence la suite (x_n).

(c) En déduire que la fonction f admet un point fixe.

Solution

(a) Supposons x, y deux points fixes de f. On a

$$\|y-x\| = \|f(y)-f(x)\| \leqslant k\|y-x\|$$

et donc

$$\underbrace{(1-k)}_{>0}\underbrace{\|y-x\|}_{\geqslant 0} \leqslant 0.$$

Nécessairement $\|y-x\| = 0$ et donc $x = y$. La fonction f admet donc au plus un point fixe.

(b) **méthode**

> On étudie la série télescopique $\sum(x_{n+1}-x_n)$ associée à la suite (x_n).

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\|x_{n+1}-x_n\| = \|f(x_n)-f(x_{n-1})\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\|.$$

Par récurrence, il vient pour tout naturel n

$$\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant k^n\|x_1-x_0\|.$$

1. On dit que l'application f est *contractante*.
2. Un *point fixe* de f est une valeur x de E vérifiant $f(x) = x$.

Puisque $k\in[0\,;1[$, la série géométrique $\sum k^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum\|x_{n+1}-x_n\|$ converge. La série télescopique $\sum(x_{n+1}-x_n)$ est donc absolument convergente et donc convergente car l'espace E est de dimension finie (Th. 6 p. 104). Ainsi, la suite (x_n) est convergente.

(c) Introduisons la limite x_∞ de la suite (x_n). On a

$$\|x_{n+1}-f(x_\infty)\| = \|f(x_n)-f(x_\infty)\| \leqslant k\|x_n - x_\infty\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite (x_{n+1}) converge donc vers $f(x_\infty)$. Or, par extraction, cette suite converge aussi vers x_∞ et, par unicité de la limite, on obtient[1] $f(x_\infty) = x_\infty$. La valeur x_∞ détermine donc un point fixe de f.

3.5.4 Topologie

Exercice 18 *

Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

(a) En étudiant son complémentaire.

(b) En raisonnant par les suites.

Solution

(a) **méthode**

> Par définition, une partie est fermée si, et seulement si, son complémentaire est une partie ouverte.

Le complémentaire de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ peut être décrit comme une union :

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\,;k+1[.$$

Les intervalles $]k\,;k+1[$ étant des parties ouvertes, la réunion ci-dessus est une partie ouverte (Th. 8 p. 106) et donc $\mathbb{Z}$ est une partie fermée.

(b) **méthode**

> Une partie est fermée si, et seulement si, elle contient les limites de ses suites convergentes (Th. 10 p. 107).

Soit (u_n) une suite convergente d'entiers relatifs. Notons u_∞ sa limite. La différence $u_{n+1}-u_n$ est de limite nulle et, pour $\varepsilon = 1/2$, on peut affirmer qu'il existe un rang N tel que $|u_{n+1}-u_n| \leqslant 1/2$ pour tout naturel $n\geqslant N$. Les nombres u_{n+1} et u_n étant entiers, on a nécessairement $u_{n+1} = u_n$. La suite (u_n) est donc constante à partir du rang N et sa limite u_∞ est alors la valeur de cette constante. Ainsi, u_∞ est un entier et l'on peut conclure à nouveau que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée.

1. Cette égalité peut aussi être obtenue en passant à la limite la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ sachant f continue car lipschitzienne (Th. 3 p. 163).

Exercice 19 *

Déterminer la frontière de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Solution

méthode

La frontière d'une partie X est définie par $\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} \setminus X^\circ$.

L'adhérence de $\mathbb{Q}$ est l'intégralité de la droite réelle. En effet, il est connu que tout réel peut s'écrire comme limite d'une suite de nombres rationnels [1] et ainsi tout réel est point adhérent à la partie $\mathbb{Q}$ (Th. 7 p. 105).

En revanche, l'intérieur de $\mathbb{Q}$ est vide. En effet, si par l'absurde a désigne un réel intérieur à $\mathbb{Q}$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha\,;a+\alpha[\,\subset \mathbb{Q}$. Or ceci est absurde car il a été vu en première année que tout intervalle de longueur non nulle contient des nombres irrationnels.

On peut alors conclure

$$\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}.$$

Exercice 20 *

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace normé E.

On suppose que l'intérieur de F est non vide. Montrer qu'alors $F = E$.

Solution

Soit $x \in E$ arbitraire. On veut montrer que x est élément de F.

méthode

En exploitant un point intérieur à F, on exprime x par opérations à partir d'éléments de F.

Soit a un élément intérieur à F. Il existe un rayon $\alpha > 0$ tel que la boule $B(a,\alpha)$ est incluse dans F. Pour $\lambda > 0$ assez petit, le vecteur $b = a + \lambda(x-a)$ est élément de cette boule donc de F. On peut alors écrire

$$x = \underbrace{a}_{\in F} + \frac{1}{\lambda}\underbrace{(b-a)}_{\in F} \in F.$$

Ainsi, $E \subset F$ et donc $E = F$.

Exercice 21 **

Soit A et B deux parties d'un espace normé E.

(a) On suppose $A \subset B$. Établir $A^\circ \subset B^\circ$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) Comparer d'une part $(A\cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$ et d'autre part $(A\cup B)^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ$.

(c) Comparer d'une part $\overline{A\cup B}$ et $\overline{A}\cup\overline{B}$ et d'autre part $\overline{A\cap B}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}$.

1. Par exemple, le réel x est limite de la suite de terme général $u_n = \lfloor nx \rfloor / n \in \mathbb{Q}$: on dit que $\mathbb{Q}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.

Solution

(a) Si a est intérieur à A, il existe un rayon $\alpha > 0$ tel que la boule $B(a,\alpha)$ soit incluse dans A. Par transitivité, cette boule est aussi incluse dans B et donc a est intérieur à B. Ainsi, $A^\circ \subset B^\circ$.

Si a est adhérent à A, a est limite d'une suite convergente d'éléments de A. Celle-ci peut aussi se voir comme une suite convergente d'éléments de B et donc a est aussi adhérent à B. Ainsi, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) **méthode**

Comparer deux ensembles consiste à déterminer une inclusion entre ceux-ci, voire une égalité si celle-ci a lieu.

D'une part, $A\cap B \subset A$ et donc $(A\cap B)^\circ \subset A^\circ$. De même, $(A\cap B)^\circ \subset B^\circ$ et donc $(A\cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$.

Inversement, si a un élément de $A^\circ \cap B^\circ$ alors a est intérieur à A et à B. Il existe donc des rayons $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que les boules $B(a,\alpha)$ et $B(a,\beta)$ soient respectivement incluses dans A et dans B. En considérant le plus petit des deux rayons $\gamma = \min(\alpha,\beta) > 0$, la boule $B(a,\gamma)$ est incluse à la fois dans A et dans B donc dans $A\cap B$. Ainsi, a est intérieur à $A\cap B$ et l'on peut conclure par double inclusion à l'égalité

$$(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$$

D'autre part, $A \subset A\cup B$ et $B \subset A\cup B$ donc $A^\circ \subset (A\cup B)^\circ$ et $B^\circ \subset (A\cup B)^\circ$ puis

$$A^\circ \cup B^\circ \subset (A\cup B)^\circ.$$

Cependant, l'égalité peut ne pas être vraie. Un contre-exemple est obtenu sur la droite réelle en prenant $A =]0\,;1]$ et $B = [1\,;2[$:

$$A^\circ \cup B^\circ =]0\,;1[\,\cup\,]1\,;2[\quad \text{et} \quad (A\cup B)^\circ =]0\,;2[.$$

(c) **méthode**

Par passage au complémentaire, on échange intérieur et adhérence.

Par passage au complémentaire, on renverse aussi les inclusions et l'on échange union et intersection. Les deux propriétés précédentes deviennent alors

$$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A}\cap\overline{B} \supset \overline{A\cap B}.$$

Exercice 22 *

Soit N_1 et N_2 deux normes sur un même espace vectoriel E. On suppose que N_1 est dominée par N_2. Montrer que tout ouvert pour la norme N_1 est aussi un ouvert pour la norme N_2.

Solution

Par hypothèse, il existe un réel $k > 0$ tel que $N_1(x) \leqslant kN_2(x)$ pour tout x dans E.

méthode

‖ Une partie est ouverte lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points.

Soit Ω un ouvert de l'espace normé (E, N_1). Pour tout $a \in \Omega$, il existe un rayon $\alpha > 0$ tel que la boule $B_1(a,\alpha)$ de centre a et de rayon α pour la norme N_1 est incluse dans Ω. Pour $\beta = \alpha/k$, on a pour tout x de E

$$N_2(x-a) < \beta \implies N_1(x-a) < k\beta = \alpha.$$

En notant $B_2(a,\beta)$ la boule de centre a et de rayon β pour la norme N_2, on a alors les inclusions

$$B_2(a,\beta) \subset B_1(a,\alpha) \subset \Omega.$$

Ainsi, la partie Ω est voisinage de chacun de ses points pour la norme N_2, c'est un ouvert [1] de l'espace normé (E, N_2).

Exercice 23 **

Soit X une partie quelconque d'un espace normé E.

(a) Montrer que X° est la réunion des ouverts inclus dans X.

(b) En déduire que X° est le plus grand [2] ouvert inclus dans X.

(c) Établir que $\overline{X}$ est le plus petit fermé contenant X.

Solution

(a) Notons $\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des ouverts de E inclus dans X et considérons

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{O}(X)} V.$$

On veut établir que U se confond avec l'intérieur de X.

méthode

‖ On raisonne par double inclusion.

Soit a un élément de U. Le vecteur a appartient à l'une des parties ouvertes V réunies pour former U. Cette partie V étant ouverte, il existe un rayon $\alpha > 0$ tel que la boule $B(a,\alpha)$ est incluse dans V. La partie V étant de plus incluse dans X, la boule $B(a,\alpha)$ est aussi incluse dans X. On en déduit que a est intérieur à X et l'on obtient ainsi la première inclusion $U \subset X^\circ$.

1. On peut aussi employer un argument de continuité : l'application identité de (E, N_2) vers (E, N_1) est continue et l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert (Th. 7 p. 164). Lorsque deux normes sont équivalentes, elles définissent les mêmes ouverts : on peut montrer que la réciproque est vraie.

2. Au sens de l'inclusion.

Inversement, soit a un point intérieur à X. Il existe un rayon $\alpha > 0$ tel que la boule $B(a,\alpha)$ est incluse dans X. Or cette boule est une partie ouverte, elle figure donc parmi les éléments décrivant $\mathcal{O}(X)$, c'est-à-dire, parmi les ensembles réunis pour définir la partie U. En particulier, son centre est élément de U. Ainsi, on a montré l'inclusion réciproque $X^\circ \subset U$ et l'on peut conclure à l'égalité $X^\circ = U$.

(b) L'ensemble U est une réunion de parties toutes incluses dans X, il est donc inclus dans X. L'ensemble U est aussi une réunion d'ouverts, c'est donc une partie ouverte (Th. 8 p. 106). Ainsi, U est un ouvert inclus dans X. C'est aussi le plus grand des ouverts inclus dans X car si V est un ouvert inclus dans X, il est inclus dans U puisqu'il figure parmi les parties réunies pour définir U.

(c) **méthode**

‖ On raisonne par passage au complémentaire en exploitant $\complement_E \overline{X} = \left(\complement_E X\right)^\circ$.

L'adhérence $\overline{X}$ est le complémentaire de l'intérieur du complémentaire de X. L'adhérence de X est donc le complémentaire de la réunion des ouverts inclus dans le complémentaire de X, autrement dit, l'intersection des fermés contenant X. Cette intersection étant un fermé (Th. 9 p. 107) contenant X, on peut affirmer que $\overline{X}$ est le plus petit fermé contenant X.

Exercice 24 **

Déterminer deux parties A et B de l'espace $\mathbb{R}^2$ telles que A et B soient fermées mais pas la partie

$$A + B = \left\{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\right\}.$$

Solution

méthode

‖ On définit une situation où il est possible que $(a_n + b_n)$ converge en dehors de $A + B$ avec (a_n) et (b_n) des suites d'éléments de A et B s'échappant à l'infini.

Considérons l'hyperbole et la droite

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\} \quad \text{et} \quad B = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

On a déjà vu que la partie A est fermée dans le sujet 7 p. 113. On vérifie aisément que la partie B est fermée en constatant qu'elle contient les limites de ses suites convergentes [1].

Considérons alors la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ donnée par

$$u_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) = a_n + b_n \quad \text{avec} \quad a_n = \left(\frac{1}{n}, n\right) \in A \text{ et } b_n = (0, -n) \in B.$$

La suite (u_n) est constituée d'éléments de la partie $A + B$ et converge vers $u_\infty = (0,0)$. Or ce dernier n'est pas élément de $A + B$ car aucun élément de cette partie ne peut avoir une première coordonnée nulle. La partie $A + B$ n'est donc pas fermée [2].

1. On peut aussi dire que B est le produit cartésien de deux parties fermées.

2. Pour construire cet exemple, on a choisi volontairement des parties A et B toutes deux non bornées :

3.5.5 Distance à une partie

Exercice 25 *

Soit A une partie non vide d'un espace normé E et x un vecteur de E.

(a) Justifier que l'on peut introduire

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x-a\| \in \mathbb{R}_+.$$

(b) Montrer l'équivalence

$$x \in \overline{A} \iff d(x,A) = 0.$$

Solution

(a) **méthode**

> On justifie l'existence d'une borne inférieure en vérifiant que celle-ci porte sur une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.

L'ensemble $\{\|x-a\| \mid a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, elle est non vide car A est non vide et elle est minorée par 0. On peut donc introduire la borne inférieure définissant $d(x,A)$ et celle-ci est bien un réel positif.

(b) Si x est adhérent à A, il existe une suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers x. On a alors pour tout naturel n

$$0 \leqslant d(x,A) \leqslant \|x-a_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par encadrement, on peut affirmer $d(x,A) = 0$.

Inversement, supposons $d(x,A) = 0$.

méthode

> Par la propriété qu'une borne inférieure est le plus grand des minorants, on construit une suite d'éléments de A convergeant vers x.

La borne inférieure de l'ensemble $\{\|x-a\| \mid a \in A\}$ étant nulle, on peut affirmer que pour tout naturel non nul n, le réel $1/n$ ne minore pas cet ensemble. Il existe donc un élément $a_n \in A$ vérifiant $\|x-a_n\| \leqslant 1/n$. En faisant varier n, ce qui précède détermine une suite (a_n) d'éléments de A de limite x. Ainsi, x est adhérent à la partie A.

on verra dans le sujet 1 p. 206 que si l'une des parties est compacte et l'autre fermée, la somme est une partie fermée.

Exercice 26 **

Soit A une partie fermée non vide d'un espace normé E. Pour tout $x \in E$, on introduit la distance de x à A définie par

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x-a\|.$$

Montrer que la partie A est convexe si, et seulement si, pour tous vecteurs x et y dans E et tout $\lambda \in [0\,;1]$, on a l'inégalité

$$d\big((1-\lambda)x + \lambda y, A\big) \leqslant (1-\lambda)d(x,A) + \lambda d(y,A).$$

Solution

Supposons la partie A convexe et considérons $x, y \in E$ et $\lambda \in [0\,;1]$. On étudie la distance[1] de $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ à A.

méthode

> On introduit des éléments a et b dans A proches de x et y puis on considère $c = (1-\lambda)a + \lambda b$.

Soit $\varepsilon > 0$. Une borne inférieure étant le plus petit des minorants, il existe des éléments a et b dans A tels que

$$\|x-a\| \leqslant d(x,A) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \|y-b\| \leqslant d(y,A) + \varepsilon.$$

Puisque la partie A est convexe, l'élément $c = (1-\lambda)a + \lambda b$ du segment $[a\,;b]$ appartient à A. De plus

$$\|z-c\| \leqslant (1-\lambda)\|x-a\| + \lambda\|y-b\|$$

et donc

$$d(z,A) \leqslant (1-\lambda)\big(d(x,A)+\varepsilon\big) + \lambda\big(d(y,A)+\varepsilon\big) = (1-\lambda)d(x,A) + \lambda d(y,A) + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0^+, on obtient l'inégalité voulue.

Inversement, supposons l'inégalité vraie pour tous x et $y \in E$ et tout $\lambda \in [0\,;1]$. Pour chaque $a, b \in A$, en prenant $x = a$ et $y = b$, on obtient

$$0 \leqslant d\big((1-\lambda)a + \lambda b, A\big) \leqslant (1-\lambda)\underbrace{d(a,A)}_{=0} + \lambda\underbrace{d(b,A)}_{=0} = 0.$$

Ainsi, $d\big((1-\lambda)a + \lambda b, A\big) = 0$ et donc[2] $(1-\lambda)a + \lambda b \in \overline{A}$.

Or la partie A est supposée fermée et donc $\overline{A} = A$. On peut alors conclure $[a\,;b] \subset A$. Finalement, la partie A est convexe.

1. Cette distance n'est pas forcément atteinte, même lorsque la partie est fermée (voir sujet 27 p. 132).
2. Voir sujet 25 p. 130.

Exercice 27 **

On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ normé par $\|\cdot\|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{ f \in E \;\middle|\; f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}.$$

(a) Montrer que A est une partie fermée.

(b) Vérifier que $\|f\|_\infty > 1$ pour tout $f \in A$.

(c) Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A.

Solution

(a) **méthode**

‖ On vérifie que la partie A est fermée par la caractérisation séquentielle.

Soit (f_n) une suite convergente d'éléments de A et $f \in E$ sa limite.
D'une part,

$$\left|f_n(0) - f(0)\right| \leqslant \left\|f_n - f\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0.$$

D'autre part,

$$\left|\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|f_n(t) - f(t)\right|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^1 \|f_n - f\|_\infty\,\mathrm{d}t = \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc[1]

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1$$

Ainsi, f est élément de A et la partie A est fermée car contient les limites de ses suites convergentes[2].

(b) Par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction f dans A vérifiant $\|f\|_\infty \leqslant 1$.
Par l'inégalité triangulaire intégrale

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \leqslant 1.$$

1. On vient de reproduire la démonstration du théorème d'interversion limite/intégrale par convergence uniforme (Th. 10 p. 233).
2. La convergence de la suite (f_n) vers la fonction f pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ correspond à la convergence uniforme d'une suite de fonctions : on aurait pu employer cet argument pour étudier la limite des $f_n(0)$ et des intégrales de f_n.

Par double inégalité, on peut affirmer

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

On a alors

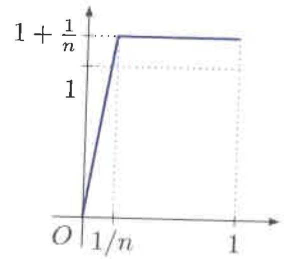
$$\int_0^1 \big(1 - f(t)\big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or, la fonction $t \mapsto 1 - f(t)$ est continue sur $[0;1]$ et positive, c'est donc la fonction nulle. On en déduit que la fonction f est constante égale à 1. C'est absurde car $f(0) = 0$.

(c) La distance d de la fonction nulle à la partie A est

$$d = \inf_{f\in A} \|f - 0\|_\infty = \inf_{f\in A} \|f\|_\infty \geqslant 1.$$

Considérons ensuite la suite des fonctions f_n définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par la figure ci-dessous



Les fonctions f_n sont continues, vérifient $f_n(0) = 0$ et, par calcul d'aires,

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{(2n-1)(n+1)}{2n^2} = \frac{2n^2+n-1}{2n^2} \geqslant 1.$$

Ainsi, les fonctions f_n sont éléments de A. Or

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad d \leqslant \|f_n\|_\infty.$$

On peut conclure[1] $d = 1$.

1. Ce sujet propose un exemple en dimension infinie où la distance d'un vecteur à une partie fermée n'est atteinte en aucun point de cette partie. En dimension finie la distance à une partie fermée est toujours atteinte (voir sujet 8 p. 211).

3.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 28 **

Sur l'espace $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$, on considère l'application N définie par

$$N(f) = \|3f + f'\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |3f(t) + f'(t)|.$$

(a) Montrer que N définit une norme sur E.

(b) Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant \alpha N(f)$ pour toute fonction f de E.

(c) Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

Solution

(a) L'application N est bien définie de E vers $\mathbb{R}_+$ car, pour toute fonction f de E, la fonction $3f + f'$ est continue donc bornée sur $[0;1]$.

Les propriétés $N(f+g) \leqslant N(f)+N(g)$ et $N(\lambda f) = |\lambda|\, N(f)$ découlent immédiatement des propriétés analogues de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit f une fonction de E telle que $N(f) = 0$. La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$ et vérifie la condition initiale $y(0) = 0$: le problème de Cauchy associé possède une unique solution [1] qui est la fonction nulle et donc f est nulle.

Finalement, N définit bien une norme sur E.

(b) **méthode**

‖ Pour contrôler $\|f\|_\infty$ en fonction de $N(f)$, on exprime f en fonction de $3f+f'$.

Pour tout $x \in [0;1]$, on peut écrire

$$\mathrm{e}^{3x} f(x) - f(0) = \Big[f(t)\mathrm{e}^{3t}\Big]_0^x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(t)\mathrm{e}^{3t}\big)\,\mathrm{d}t$$

et donc [2]

$$f(x) = \mathrm{e}^{-3x}\int_0^x \big(3f(t) + f'(t)\big)\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(3f(t) + f'(t)\big)\mathrm{e}^{3(t-x)}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit

$$|f(x)| \leqslant \int_0^x |3f(t) + f'(t)|\underbrace{\mathrm{e}^{3(t-x)}}_{\leqslant 1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x N(f)\,\mathrm{d}t \leqslant xN(f) \leqslant N(f).$$

Ainsi, $\|f\|_\infty \leqslant \alpha N(f)$ avec $\alpha = 1$.

1. On peut aussi résoudre l'équation différentielle : sa solution générale est $y(t) = \lambda\mathrm{e}^{-3t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Cette identité peut aussi être obtenue « naturellement » en résolvant par la méthode de variation de la constante l'équation différentielle $y' + 3y = g$ avec $g = f' + 3f$ puis en affirmant que la fonction f est solution de celle-ci.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction f_n de E déterminée par $f_n(x) = x^n$. On a

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad\text{et}\quad N(f) = \sup_{t\in[0;1]} |3t^n + nt^{n-1}| = n + 3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 29 **

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable vérifiant $\mathrm{Sp}(A) \subset\,]-1;1[$. Montrer que la suite géométrique (A^n) converge vers la matrice nulle.

(b) Même question avec trigonalisable au lieu de diagonalisable.

Solution

(a) Puisque la matrice A est diagonalisable, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de la matrice A (valeurs propres comptées avec multiplicité).

On a $A^n = PD^nP^{-1}$ avec D^n matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1^n, \dots, \lambda_p^n$. Lorsque n tend vers l'infini, ces coefficients tendent chacun vers 0 car les valeurs propres de la matrice A sont éléments de $]-1;1[$. La matrice D^n tend donc vers la matrice nulle et, par produit de limites, la matrice A^n tend aussi vers la matrice nulle.

(b) En reprenant la démarche précédente, on peut conclure dès que l'on a établi que, si T est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $]-1;1[$, la suite (T^n) converge vers la matrice nulle.

Considérons alors une matrice T triangulaire supérieure à coefficient diagonaux dans l'intervalle $]-1;1[$ et la matrice S dont les coefficients en sont les valeurs absolues

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,p} \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t_{p-1,p} \\ (0) & & & \lambda_p \end{pmatrix} \quad\text{et}\quad S = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & |t_{1,2}| & \cdots & |t_{1,p}| \\ & |\lambda_2| & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & |t_{p-1,p}| \\ (0) & & & |\lambda_p| \end{pmatrix}.$$

Par une récurrence facile, on montre que les valeurs absolues des coefficients de T^n sont inférieurs à ceux respectifs de S^n. Il suffit donc de montrer que la suite (S^n) converge vers la matrice nulle pour conclure.

En introduisant $\varepsilon > 0$, ajoutons à la matrice S une matrice diagonale Δ dont les coefficients diagonaux sont distincts et petits :

$$S + \Delta = S + \begin{pmatrix} \varepsilon & & (0) \\ & 2\varepsilon & \\ & & \ddots \\ (0) & & & p\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| + \varepsilon & |t_{1,2}| & \cdots & |t_{1,p}| \\ & |\lambda_2| + 2\varepsilon & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & |t_{p-1,p}| \\ (0) & & & |\lambda_p| + p\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Comme ci-dessus, on peut affirmer que les coefficients de S^n sont inférieurs à ceux de la matrice $(S+\Delta)^n$. Or en choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit[1], la diagonale de $S+\Delta$ est constituée de coefficients deux à deux distincts tous dans $[0\,;1[$. La matrice $S+\Delta$ est donc diagonalisable ce qui nous ramène à la situation résolue ci-dessus et permet de conclure.

Exercice 30 ***

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie $d \geqslant 1$ de l'espace $\mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ des fonctions réelles définies et continues sur $[0\,;1]$.

(a) Établir l'existence d'un tuple $(a_1,\dots,a_d) \in [0\,;1]^d$ tel que l'application

$$N\colon f \in E \mapsto \sum_{i=1}^{d} \lvert f(a_i)\rvert$$

soit une norme sur E.

(b) Soit (f_n) une suite de fonctions de E convergeant simplement vers une fonction $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$. Montrer que f est élément de E puis que la convergence est uniforme.

Solution

(a) Indépendamment du choix de $(a_1,\dots,a_d)$ dans $[0\,;1]^d$, l'application $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et vérifie :

$$N(\lambda f) = \lvert\lambda\rvert\, N(f) \quad \text{et} \quad N(f+g) \leqslant N(f) + N(g).$$

Le problème consiste alors à déterminer $(a_1,\dots,a_d)$ de sorte d'avoir l'implication de séparation

$$N(f) = 0 \implies f = 0.$$

méthode

On raisonne par récurrence sur la dimension $d \in \mathbb{N}^*$ de l'espace E.

Si $d=1$, l'espace E est une droite vectorielle : $E = \operatorname{Vect}(g)$ avec g une fonction non nulle. Un réel a_1 de l'intervalle $[0\,;1]$ tel que $g(a_1) \neq 0$ résout alors le problème.

Supposons maintenant la propriété vérifiée au rang $d \geqslant 1$ et considérons E un sous-espace vectoriel de dimension $d+1$ de l'espace $\mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$.

Il existe au moins une fonction g non nulle élément de E. Introduisons alors $a_{d+1} \in [0\,;1]$ tel que $g(a_{d+1}) \neq 0$ et considérons

$$H = \{f \in E \mid f(a_{d+1}) = 0\}.$$

On vérifie aisément que H est un sous-espace vectoriel de E et que les espaces H et $\operatorname{Vect}(g)$ sont supplémentaires[2] :

$$E = H \oplus \operatorname{Vect}(g).$$

1. On prend $\varepsilon > 0$ tel que $p\varepsilon$ soit strictement inférieur au plus petit écart entre deux $\lvert\lambda_i\rvert$ distincts et aussi strictement inférieur à chacune des valeurs $1-\lvert\lambda_i\rvert$.
2. Notamment, un fonction f de E s'écrit $f = h + \lambda.g$ avec $\lambda = f(a_{d+1})/g(a_{d+1})$ et $h \in H$.

L'espace H est alors de dimension d. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et introduire $(a_1,\dots,a_d) \in [0\,;1]^d$ tel que l'application

$$h \in H \mapsto \sum_{i=1}^{d} \lvert h(a_i)\rvert$$

soit une norme sur H. Considérons alors l'application $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sum_{i=1}^{d+1} \lvert f(a_i)\rvert$$

et montrons

$$N(f) = 0 \implies f = 0.$$

Soit f une fonction de E telle que $N(f) = 0$. On a

$$\lvert f(a_1)\rvert = \dots = \lvert f(a_d)\rvert = \lvert f(a_{d+1})\rvert = 0.$$

Puisque $E = H \oplus \operatorname{Vect}(g)$, on peut écrire

$$f = h + \lambda.g \quad \text{avec} \quad h \in H \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La propriété $\lvert f(a_{d+1})\rvert = 0$ entraîne $\lambda = 0$. Les égalités $\lvert f(a_1)\rvert = \dots = \lvert f(a_d)\rvert = 0$ entraînent alors $\lvert h(a_1)\rvert = \dots = \lvert h(a_d)\rvert = 0$ puis $h = 0$. On peut donc conclure que f est la fonction nulle. La récurrence est établie.

(b) On introduit la norme N définie à partir du tuple $(a_1,\dots,a_d)$ bien choisi comme ci-dessus.

méthode

On détermine une fonction $\tilde{f}$ dans E prenant les mêmes valeurs que la fonction f en les points $a_1,\dots,a_d$.

Considérons l'application d'échantillonage

$$\Phi\colon \begin{cases} E \to \mathbb{R}^d \\ g \mapsto \big(g(a_1),\dots,g(a_d)\big). \end{cases}$$

Cette application est clairement linéaire et opère entre deux espaces de même dimension finie d. Cette application est aussi injective car

$$\begin{aligned} \Phi(g) = 0 &\implies N(g) = 0 \\ &\implies g = 0. \end{aligned}$$

On peut donc affirmer que l'application Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, Φ est surjective et il existe une fonction $\tilde{f}$ dans E telle que

$$\Phi(\tilde{f}) = \big(f(a_1),\dots,f(a_d)\big).$$

La suite de fonctions (f_n) converge alors vers $\tilde{f}$ pour la norme N en vertu de l'hypothèse de convergence simple et du calcul qui suit :

$$N(f_n - \tilde{f}) = \sum_{i=1}^{d} \left|f_n(a_i) - \tilde{f}(a_i)\right| = \sum_{i=1}^{d} \left|f_n(a_i) - f(a_i)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Poursuivons en montrant que la suite de fonctions (f_n) converge en norme uniforme vers $\tilde{f}$.

méthode

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

L'espace $\mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ peut être normé par $\|\cdot\|_\infty$. Le sous-espace vectoriel E peut donc aussi être muni de cette norme. Or, cet espace est de dimension finie et la norme $\|\cdot\|_\infty$ y est donc équivalente à la norme N. La suite de fonctions (f_n) converge donc aussi vers $\tilde{f}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire converge uniformément vers $\tilde{f}$.

Enfin, la convergence uniforme entraînant la convergence simple et sachant qu'il y a unicité de la limite simple, on peut affirmer que la fonction $\tilde{f}$ n'est autre que f.

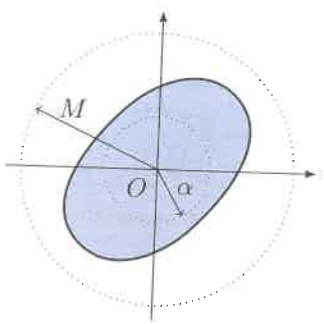
Exercice 31 ***

Soit B une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

À quelle(s) condition(s) sur B peut affirmer qu'il existe une norme sur E pour laquelle B est la boule unité fermée ?

Solution

Si B est la boule unité fermée d'une certaine norme sur E, la partie B est nécessairement convexe, fermée, bornée et 0_E en est un point intérieur. De plus, l'identité $N(-x) = N(x)$ oblige que B est symétrique par rapport à 0_E.



Un exemple de boule unité fermé possible dans $\mathbb{R}^2$.

Montrons que ces conditions sont suffisantes... Supposons la partie B convexe, fermée, bornée, symétrique par rapport à 0_E et que 0_E en est un point intérieur. Construisons une norme N sur E telle que B corresponde à la boule unité fermée pour N.

méthode

Pour $x \neq 0_E$, on détermine la valeur de $N(x)$ comme étant celle pour laquelle $x/N(x)$ se trouve à la frontière de B.

Pour nous exprimer lors de l'étude qui suit, introduisons $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur E. Puisque la partie B est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|x\| \leqslant M$ pour tout x appartenant à B. Aussi, puisque 0_E est intérieur à B, il existe $\alpha > 0$ tel que tout x de E vérifiant $\|x\| \leqslant \alpha$ est élément de B.

Soit x un vecteur de E. On veut définir la valeur $N(x)$. Si $x = 0_E$, on prend nécessairement $N(x) = 0$. Sinon, considérons

$$I_x = \{\mu \in \mathbb{R} \mid \mu.x \in B\}.$$

La partie I_x est une partie de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, et qui est un intervalle car B est convexe. Cet intervalle n'est ni vide, ni réduit à $\{0\}$ car il contient le réel strictement positif $\alpha/\|x\|$. L'intervalle I_x est aussi borné par $M/\|x\|$. Enfin, I_x est une partie fermée. En effet, si (μ_n) est une suite convergente d'éléments de I_x de limite μ_∞, on a $\mu_\infty \in I_x$ car

$$\underbrace{\mu_n x}_{\in B} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_\infty x \in B \quad \text{puisque } B \text{ est une partie fermée.}$$

On peut donc introduire un réel $m(x) > 0$ tel que $I_x = [-m(x)\,;m(x)]$.

Posons alors

$$N(x) = \frac{1}{m(x)}$$

et vérifions que l'application N de E vers $\mathbb{R}_+$ ainsi définie est bien une norme.

Par construction, on a $N(x) > 0$ pour tout $x \neq 0_E$ et donc

$$N(x) = 0 \implies x = 0_E.$$

L'égalité $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ est évidente si x est le vecteur nul ou si λ est le réel nul. Sinon, on remarque

$$\mu \in I_{\lambda x} \iff (\mu\lambda).x \in B \iff \mu\lambda \in I_x$$

et donc $I_{\lambda x}$ est l'intervalle d'extrémités $\pm m(x)/\lambda$. On en déduit $m(\lambda x) = m(x)/|\lambda|$ puis

$$N(\lambda x) = \frac{|\lambda|}{m(x)} = |\lambda|\, N(x).$$

Il reste à établir l'inégalité triangulaire. On prend pour cela appui sur la convexité de B et le résultat du sujet 12 p. 120. Il suffit alors de constater que B correspond à ce qui serait la boule unité fermée de la norme N. Or ceci est immédiat car, pour tout $x \in E$, on a

$$N(x) \leqslant 1 \iff m(x) \geqslant 1 \iff 1 \in I_x \iff x \in B.$$

CHAPITRE 4

Foncions convexes

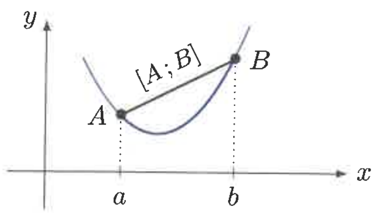
I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

4.1 Fonctions convexes, fonctions concaves

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *convexe* si elle vérifie :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0\,;1], \quad f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$



Sur la courbe représentative d'une fonction convexe f,
les arcs sont en dessous des cordes associées.

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *concave* si elle vérifie :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0\,;1], \quad f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \geqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Les résultats qui suivent, présentés pour les fonctions convexes, se transposent aux fonctions concaves par passage à l'opposé.

4.2 Caractérisation de la convexité

4.2.1 Épigraphe

Définition

On appelle *graphe* d'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } f(x) = y\}.$$

On appelle *épigraphe* d'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ l'ensemble

$$\Gamma^+(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } f(x) \leqslant y\}.$$

Théorème 1
Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

4.2.2 Inégalités des pentes

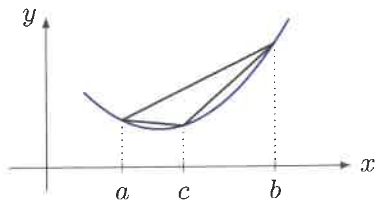
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et a, b deux éléments distincts de l'intervalle I. On pose

$$\tau(a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

la *pente* de la droite joignant les points d'abscisses a et b du graphe de f. C'est aussi le taux d'accroissement de f entre a et b.

Théorème 2 (Inégalité des pentes[1])
Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si,

$$\forall (a,b,c) \in I^3, \quad a < c < b \implies \tau(a,c) \leqslant \tau(a,b) \leqslant \tau(c,b).$$



Inégalité des pentes.

1. Aussi appelé *lemme des trois cordes*.

Théorème 3 (Croissance des pentes)
Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si,

$$\forall x_0 \in I, \quad x \mapsto \tau(x_0, x) \text{ est croissante sur } I \setminus \{x_0\}.$$

4.2.3 Fonctions convexes dérivables

Théorème 4
Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable est convexe si, et seulement si, sa dérivée est croissante.

En particulier, une fonction deux fois dérivable sur un intervalle est convexe si, et seulement si, sa dérivée seconde est positive.

4.3 Inégalités de convexité

4.3.1 Position relative d'une courbe et de ses tangentes

Théorème 5
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable convexe, son graphe est au-dessus de chacune de ses tangentes.

4.3.2 Inégalité de Jensen

Théorème 6 (Inégalité de Jensen)
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe alors, pour tous $a_1, \ldots, a_n$ choisis dans I et tous réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ de somme égale à 1, on a

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n) \leqslant \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \cdots + \lambda_n f(a_n).$$

En particulier,

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\big(f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)\big).$$

4.4 Exercices d'apprentissage

Exercice 1
Étudier la convexité de la fonction $f\colon x \mapsto x^2 e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Solution

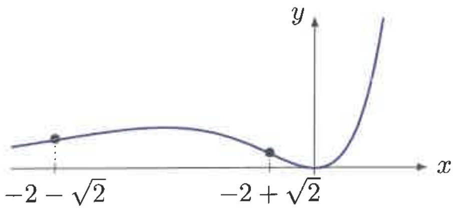
méthode

> L'étude du signe de la dérivée seconde permet de déterminer les intervalles où une fonction est convexe ou concave (Th. 4 p. 143).

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$ qui est du signe de x^2+4x+2.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f est donc convexe[1] sur les intervalles $]-\infty\,;-2-\sqrt{2}]$ et $[-2+\sqrt{2}\,;+\infty[$ et concave sur $[-2-\sqrt{2}\,;-2+\sqrt{2}]$. Sa représentation présente des *points d'inflexion* d'abscisses $-2-\sqrt{2}$ et $-2+\sqrt{2}$.



Représentation de $x \mapsto x^2\mathrm{e}^x$.

Exercice 2

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Solution

méthode

> Par l'absurde, on exploite le théorème d'inégalité des pentes (Th. 2 p. 142) pour montrer qu'une fonction convexe non constante tend vers $+\infty$ en l'une des extrémités de $\mathbb{R}$.

Supposons par l'absurde que la fonction f ne soit pas constante. Il existe des réels a et b avec $a<b$ tels que $f(a) \neq f(b)$.

Cas : $f(a) < f(b)$. Le théorème d'inégalité des pentes donne pour tout réel $x \geqslant b$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

et donc

$$f(x) \geqslant \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{>0}(x-a)+f(a) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

1. On ne dira pas que la fonction f est convexe sur la réunion $]-\infty\,;-2-\sqrt{2}] \cup [-2+\sqrt{2}\,;+\infty[$! La convexité n'a de sens que pour l'étude d'une fonction définie sur un intervalle car lorsque λ parcourt $[0\,;1]$, le réel $(1-\lambda)a+\lambda b$ parcourt l'intégralité du segment d'extrémités a et b.

Ceci contredit l'hypothèse affirmant que f est majorée.

Cas : $f(a) > f(b)$. On obtient de même une absurdité en considérant $x<a$ et faisant tendre x vers $-\infty$

$$f(x) \geqslant \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{<0}(x-a)+f(a) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty.$$

Exercice 3

Montrer par un argument de convexité :

(a) $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$ (b) $\forall x \in [0\,;\pi/2],\ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.

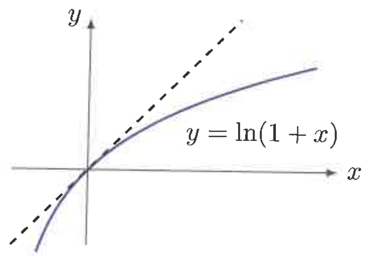
Solution

(a) **méthode**

> Par convexité, on positionne la courbe figurant $x \mapsto \ln(1+x)$ vis-à-vis de l'une de ses tangentes[1].

La fonction $f\colon x \mapsto \ln(1+x)$ est concave car deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 0.$$

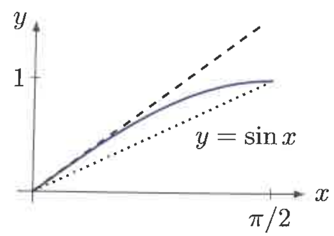


Sa courbe représentative est en dessous de chacune de ses tangentes (Th. 5 p. 143) notamment celle au point d'abscisse $x=0$ qui est d'équation $y=x$. On en déduit l'inégalité[2] $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$.

(b) **méthode**

> La courbe représentative d'une fonction concave est au-dessous de ses tangentes mais aussi au-dessus de ses cordes.

La fonction $x \mapsto \sin x$ est concave sur l'intervalle $[0\,;\pi/2]$ car de dérivée seconde $x \mapsto -\sin x$ négative sur cet intervalle. Sa tangente en l'origine a pour équation $y=x$ tandis que la corde joignant les points d'abscisses 0 et $\pi/2$ est soutenue par la droite d'équation $y = 2x/\pi$. On en déduit l'encadrement demandé.



1. On peut aussi obtenir cette comparaison en étudiant les variations de la fonction définie par la différence des membres.

2. On établit de la sorte de nombreuses autres comparaisons utiles parmi lesquelles $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ pour tout réel x ou $\arctan x \leqslant x$ pour x positif.

Exercice 4 (Inégalité arithmético-géométrique)
Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs. Montrer

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Solution

méthode
L'application de la fonction logarithme permet de reconnaître une inégalité de Jensen (Th. 6 p. 143).

Si l'un des a_i est nul, le membre de gauche est nul alors que le membre de droite est positif : l'inégalité est vérifiée. Supposons désormais tous les a_i strictement positifs. La fonction $t \mapsto \ln t$ étant strictement croissante, l'inégalité demandée équivaut à

$$\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n) \leqslant \frac{1}{n}\ln(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

On y reconnaît l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction logarithme qui est concave.
L'inégalité arithmético-géométrique est utile à l'obtention de multiples autres inégalités[1].

4.5 Exercices d'entraînement

4.5.1 Études de fonctions convexes

Exercice 5 *
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f admet un minimum local en $a \in I$ alors f admet un minimum global en a.

Solution
Puisque l'on suppose que la fonction admet un minimum local en a, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant f(a).$$

Il s'agit ici d'étendre[2] la comparaison $f(x) \geqslant f(a)$ à tout $x \in I$.

méthode
Par le théorème d'inégalité des pentes (Th. 2 p. 142), on compare la valeur de f en x à la valeur en a en prenant appui sur un point voisin de a.

Soit $x \in I$. Si $x > a$, on peut introduire y, suffisamment proche de a et strictement compris entre a et x, tel que $f(a) \leqslant f(y)$. Par le théorème d'inégalité des pentes, on

1. Voir le sujet 9 p. 149 et le sujet 10 p. 149.
2. Si l'on suppose la fonction f dérivable le résultat est immédiat car f' est croissante.

obtient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a}.$$

Or le taux d'accroissement en second membre est positif car $f(y) \geqslant f(a)$ et $y \geqslant a$. On en déduit la comparaison voulue $f(x) \geqslant f(a)$.
Le cas[1] $x < a$ se résout de façon analogue en introduisant y compris entre x et a et en prenant garde aux signes de $y - a$ et $x - a$.

Exercice 6 **
Soit f une fonction réelle définie sur $]0\,;+\infty[$. Montrer que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est convexe si, et seulement si, la fonction $x \mapsto f(1/x)$ l'est aussi.

Solution
Posons $g(x) = xf(x)$ et $h(x) = f(1/x)$ ce qui définit g et h au départ de $]0\,;+\infty[$.
Supposons la fonction g convexe. Soit $a, b \in\ ]0\,;+\infty[$ et $\lambda \in [0\,;1]$. Pour obtenir la convexité de h on souhaite majorer

$$h\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) = f\left(\frac{1}{(1-\lambda)a + \lambda b}\right) = \big((1-\lambda)a + \lambda b\big)g\left(\frac{1}{(1-\lambda)a + \lambda b}\right).$$

méthode
Le réel $1/\big((1-\lambda)a + \lambda b\big)$ est compris entre $1/a$ et $1/b$, on peut donc l'écrire sous la forme

$$\frac{1}{(1-\lambda)a + \lambda b} = (1-\mu)\frac{1}{a} + \mu\frac{1}{b} \quad \text{avec} \quad \mu \in [0\,;1].$$

La fonction g étant convexe, on obtient

$$\begin{aligned} h\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) &\leqslant \big((1-\lambda)a + \lambda b\big)\left((1-\mu)g\Big(\frac{1}{a}\Big) + \mu g\Big(\frac{1}{b}\Big)\right) \\ &= \big((1-\lambda)a + \lambda b\big)\left(\frac{1-\mu}{a}h(a) + \frac{\mu}{b}h(b)\right). \end{aligned}$$

En exprimant μ en fonction de λ, il vient

$$h\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)h(a) + \lambda h(b) \quad \text{car} \quad \mu = \frac{\lambda b}{(1-\lambda)a + \lambda b}.$$

La fonction h est donc convexe.
Inversement, supposons la fonction h convexe. Considérons la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Il se peut aussi que a soit une extrémité de I auquel cas seule l'une des deux études est utile.

La fonction $\tilde{g}$ déterminée par $\tilde{g}(x) = x\tilde{f}(x)$ se confond avec la fonction h et est donc convexe. Par l'étude au-dessus, on peut affirmer la convexité de la fonction $\tilde{h}$ définie par $\tilde{h}(x) = \tilde{f}(1/x)$. Or cette dernière n'est autre que la fonction g qui est ainsi convexe.

Exercice 7 **

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un intervalle I ouvert.
Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en tout point x de I avec[1]

$$f'_g(x) \leqslant f'_d(x).$$

En déduire que la fonction f est continue.

Solution

méthode

> On montre que les taux d'accroissement à droite et à gauche ont chacun une limite finie en observant qu'ils sont croissants et bornés.

Soit $x \in I$. Commençons par fixer z strictement supérieur à x. Pour tout $y < x$, le théorème d'inégalité des pentes donne

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = M.$$

Quand y croît vers x, le taux d'accroissement entre x et y est croissant (Th. 3 p. 143) et majoré par M. Il admet donc une limite finie et la fonction f est dérivable à gauche en x avec

$$f'_g(x) \leqslant M = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

Faisons maintenant varier z : quand z décroît vers x, le taux d'accroissement entre x et z décroît et est minoré par $f'_g(x)$. Il admet donc une limite finie et la fonction f est dérivable à droite en x avec

$$f'_g(x) \leqslant f'_d(x).$$

Enfin, la fonction f étant dérivable à droite et à gauche en x, elle y est continue à droite et à gauche donc continue.

4.5.2 Inégalités

Exercice 8 *

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0\,;1]$. Montrer

$$a^t b^{1-t} \leqslant ta + (1-t)b.$$

1. Ce résultat (qui n'est pas explicitement au programme) est souvent utilisé pour résoudre d'autres exercices comme par exemple le sujet 16 p. 157.

Solution

méthode

> Pour établir une inégalité de convexité, il faut savoir démasquer la fonction associée (souvent une fonction logarithme ou exponentielle) sans oublier de traiter les cas particuliers !

L'inégalité demandée est évidemment vérifiée[1] lorsque $a = 0$ ou $b = 0$.
Supposons désormais $a, b > 0$. En passant au logarithme (qui est une fonction strictement croissante), l'inégalité voulue est équivalente à la suivante :

$$t\ln a + (1-t)\ln b \leqslant \ln\bigl(ta + (1-t)b\bigr).$$

On y reconnaît la propriété de concavité de la fonction logarithme.

Exercice 9 *

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

Solution

méthode

> En divisant par n, le premier membre de l'inégalité s'apparente à une moyenne arithmétique : on applique l'inégalité arithmético-géométrique[2].

L'inégalité arithmético-géométrique permet d'écrire pour $a_1, \dots, a_n$ choisis dans $\mathbb{R}_+$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

En posant, $a_i = x_i/x_{i+1}$ pour tout indice i compris entre 1 et n (en convenant $x_{n+1} = x_1$), on obtient

$$1 = \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2} \times \frac{x_2}{x_3} \times \dots \times \frac{x_{n-1}}{x_n} \times \frac{x_n}{x_1}} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Ceci fournit l'inégalité voulue.

Exercice 10 **

Soit $x_1, x_2, \dots, x_p$ des réels positifs vérifiant $x_1 x_2 \dots x_p = 1$ et n un naturel. Montrer

$$\prod_{i=1}^{p}(n + x_i) \geqslant (n+1)^p.$$

1. La formule $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ n'est valable que pour $x > 0$ mais, lorsque $x = 0$ et $\alpha \geqslant 0$, on donne un sens à 0^α par prolongement par continuité : $0^0 = 1$ et $0^\alpha = 0$ pour $\alpha > 0$.
2. Voir sujet 4 p. 146.

Solution

méthode

On ramène le problème à 1 en divisant par $(n+1)^p$ et l'on exploite l'inégalité arithmético-géométrique.

Par l'inégalité arithmético-géométrique, on a pour chaque i compris entre 1 et p

$$\frac{n+x_i}{n+1} = \frac{1+\cdots+1+x_i}{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{1\times\cdots\times 1\times x_i} = \sqrt[n+1]{x_i}.$$

En multipliant ces inégalités n'engageant que des facteurs positifs

$$\frac{1}{(n+1)^p}\prod_{i=1}^{p}(n+x_i) = \prod_{i=1}^{p}\left(\frac{n+x_i}{n+1}\right) \geqslant \prod_{i=1}^{p}\sqrt[n+1]{x_i} = \sqrt[n+1]{x_1x_2\ldots x_p} = 1.$$

On en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 11 ** (Entropie et inégalité de Gibbs)
On dit que $p=(p_1,\ldots,p_n)$ est une distribution de probabilité de longueur n lorsque les p_i sont des réels strictement positifs de somme égale à 1. On introduit alors l'*entropie* de cette distribution définie par

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i.$$

(a) Soit p une distribution d'entropie de longueur n. Vérifier

$$0 \leqslant H(p) \leqslant \ln n.$$

(b) Soit q une autre distribution d'entropie de longueur n. Établir l'inégalité de Gibbs

$$H(p) \leqslant -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i.$$

Solution

(a) Les réels p_i sont tous inférieurs à 1 et donc

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \underbrace{\ln p_i}_{\leqslant 0} \geqslant 0.$$

méthode

On obtient la majoration par application de l'inégalité de Jensen à une fonction usuelle (Th. 6 p. 143).

La fonction ln étant concave sur $]0;+\infty[$, l'inégalité de Jensen permet d'écrire pour toute famille $(a_1,\ldots,a_n)$ de réels strictement positifs

$$\ln(p_1a_1+\cdots+p_na_n) \geqslant p_1\ln a_1+\cdots+p_n\ln a_n.$$

En appliquant cette inégalité avec $a_i = 1/p_i$, il vient directement

$$\ln n \geqslant p_1\ln\left(\frac{1}{p_1}\right)+\cdots+p_n\ln\left(\frac{1}{p_n}\right) = H(p).$$

(b) **méthode**

On ramène l'identité à 0 et l'on exploite l'inégalité $\ln(1+u)\leqslant u$.

Par différence de membres, on veut établir

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \leqslant 0.$$

Par l'inégalité de convexité $\ln(1+u)\leqslant u$, ou (cela revient au même) l'inégalité $\ln x\leqslant x-1$, on obtient directement la comparaison voulue

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\frac{q_i}{p_i}-1\right) = \sum_{i=1}^{n}(q_i-p_i) = 0.$$

Exercice 12 **

(a) Soit $x_1,\ldots,x_n$ des réels positifs. Établir

$$1+\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)^{1/n}.$$

(b) En déduire, pour tous réels positifs $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Solution

(a) Si l'un des x_k est nul, la propriété est immédiate. On suppose désormais les x_k strictement positifs.

méthode

La comparaison demandée ressemble à une application de l'inégalité de Jensen. Il faut démasquer la fonction associée !

L'inégalité de Jensen présente un terme $1/n$ en facteur d'une somme. Il est facile de faire apparaître une expression analogue en étudiant l'inégalité équivalente obtenue par passage au logarithme

$$\ln\left(1+\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+x_k).$$

Le second membre revêt une forme convenable mais pas encore le premier. Il faut à nouveau transformer un produit en faisant apparaître une somme : on pose $x_k = \mathrm{e}^{a_k}$. L'inégalité voulue s'exprime alors

$$\ln\left(1+\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\mathrm{e}^{a_k}\right).$$

Cette identité apparaît comme une application de l'inégalité de Jensen à la fonction $f\colon x \mapsto \ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est deux fois dérivable avec

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est convexe, il suffit donc de remonter l'étude qui précède pour obtenir l'inégalité demandée.

(b) **méthode**

Par factorisation, on ramène un des termes de la somme à 1 afin de pouvoir exploiter l'inégalité qui précède.

Si l'un des a_k est nul, la propriété est immédiate. Sinon, on peut opérer la factorisation ci-dessous

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}\left(1+\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}\right).$$

Par l'inégalité obtenue précédemment

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{b_k}{a_k}\right)\right)^{1/n}.$$

Enfin, on réorganise les facteurs du second membre pour former l'inégalité demandée

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Exercice 13 ** (Inégalité de Jensen intégrale)

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue [1] et $g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs dans I.

Montrer

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f\big(g(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

On exprime les intégrales comme limite de sommes de Riemann.

Puisque la fonction g est continue, on sait

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Par continuité de la fonction f

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Par l'inégalité de Jensen (Th. 6 p. 143)

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right). \qquad (*)$$

Le second membre se comprend comme une somme de Riemann associée à l'intégration de la fonction continue $f\circ g$ sur le segment $[a\,;b]$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b f\big(g(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient donc par passage à la limite de $(*)$

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f\big(g(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

1. Lorsqu'une fonction convexe est définie sur un intervalle ouvert, elle est assurément continue (voir le sujet 7 p. 148).

Exercice 14 ***

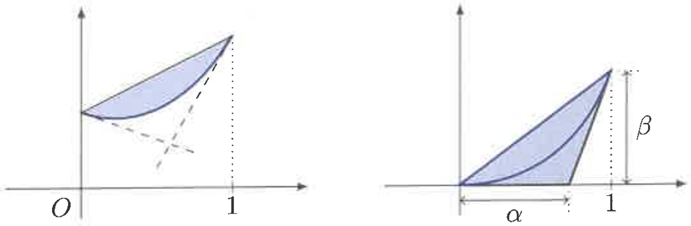
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Montrer[1]

$$0 \leqslant \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(1)-f'(0)}{8}.$$

Solution

La quantité $\big(f(0)+f(1)\big)/2$ correspond à l'aire du trapèze déterminé par la corde joignant les points d'abscisses 0 et 1 du graphe de f. La fonction f étant convexe, cette corde est au-dessus de la courbe ce qui démontre l'inégalité de gauche.

La fonction f étant dérivable, sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes, notamment au-dessus de ses tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. La différence entre l'aire du trapèze et l'aire sous la courbe est donc majorée par l'aire du triangle construit à partir de la corde et de ces deux tangentes.



À gauche, différence entre l'aire du trapèze et l'aire sous la courbe.
À droite, l'aire du triangle calculée dans le cadre simplifié.

L'aire de ce triangle n'est pas immédiate à calculer...

méthode

En modifiant la fonction, on transforme le problème en un problème équivalent plus simple à résoudre.

En considérant, la fonction $t \mapsto f(t) - f(0) - f'(0)t$, on vérifie par un petit calcul que l'on transpose le problème étudié en un problème équivalent où la fonction reste convexe mais vérifie aussi $f(0) = f'(0) = 0$. En adoptant les notations de la figure ci-dessus, l'aire du triangle s'exprime

$$\frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)f'(1) \leqslant \frac{1}{8}f'(1)$$

car α et β sont liés à $f'(1)$ par la relation $f'(1) = \beta/(1-\alpha)$ et car il est connu l'inégalité $\alpha(1-\alpha) \leqslant 1/4$. On obtient ainsi la majoration voulue de l'aire étudiée.

1. Ce résultat permet d'estimer la qualité de l'approximation de la valeur d'une intégrale d'une fonction convexe par l'aire d'un trapèze.

Exercice 15 ** (Inégalités de Hölder et de Minkowski)

On considère deux réels $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $1/p + 1/q = 1$.

(a) Montrer que pour tous réels a et b

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Soit x et y dans $\mathbb{K}^n$.

(b) Établir l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q.$$

(c) En écrivant

$$\big(|x_i| + |y_i|\big)^p = |x_i|\big(|x_i| + |y_i|\big)^{p-1} + |y_i|\big(|x_i| + |y_i|\big)^{p-1}.$$

Obtenir l'inégalité de Minkowski[1] :

$$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Solution

(a) L'inégalité est immédiate lorsque $a = 0$ ou $b = 0$. Pour a et b strictement positifs, on exploite la concavité de la fonction ln qui donne

$$\forall \lambda \in [0\,;1],\ \forall x, y > 0, \quad (1-\lambda)\ln x + \lambda \ln y \leqslant \ln\big((1-\lambda)x + \lambda y\big).$$

En appliquant cette inégalité à $x = a^p$ et $y = b^q$ avec $\lambda = 1/q$, il vient

$$\ln(ab) = \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right).$$

Enfin, on obtient l'inégalité voulue par croissance de la fonction exponentielle.

(b) **méthode**

On applique le résultat qui précède avec $a = |x_i| \,/\, \|x\|_p$ et $b = |y_i| \,/\, \|y\|_q$,

1. L'inégalité de Minkowski exprime que $\|\cdot\|_p$ satisfait l'inégalité triangulaire : c'est le seul point véritablement délicat lorsque l'on souhaite établir que $\|\cdot\|_p$ est une norme.

Si x ou y est l'élément nul de $\mathbb{K}^n$, l'inégalité de Hölder est immédiate. Supposons pour la suite x et y non nuls de sorte que $\|x\|_p$ et $\|y\|_q$ ne sont pas non plus nuls. Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. Par l'étude qui précède, il vient

$$\frac{|x_iy_i|}{\|x\|_p\,\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

On somme ces inégalités pour i allant de 1 à n

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_iy_i|}{\|x\|_p\,\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}\right) = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

En multipliant de part et d'autre par le réel positif $\|x\|_p\,\|y\|_q$, on obtient l'inégalité voulue.

(c) Par l'inégalité triangulaire, on a $|x_i+y_i| \leqslant |x_i|+|y_i|$ et donc

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^n \big(|x_i|+|y_i|\big)^p.$$

Par l'écriture suggérée, il vient

$$\sum_{i=1}^n \big(|x_i|+|y_i|\big)^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\,\big(|x_i|+|y_i|\big)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\,\big(|x_i|+|y_i|\big)^{p-1}.$$

Par l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n \big(|x_i|+|y_i|\big)^p \leqslant \|x\|_p\left(\sum_{i=1}^n \big(|x_i|+|y_i|\big)^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \|y\|_p\left(\sum_{i=1}^n \big(|x_i|+|y_i|\big)^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Sachant $(p-1)q = pq-q = p$, on poursuit

$$\sum_{i=1}^n \big(|x_i|+|y_i|\big)^p \leqslant \big(\|x\|_p+\|y\|_p\big)\left(\sum_{i=1}^n \big(|x_i|+|y_i|\big)^p\right)^{1/q}.$$

Que la quantité en premier membre soit nulle ou non, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n \big(|x_i|+|y_i|\big)^p\right)^{1/p} \leqslant \|x\|_p+\|y\|_p$$

car $1-1/q = 1/p$.

Finalement, on peut conclure

$$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p+\|y\|_p\,.$$

4.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 16 ***

Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) On suppose, pour tous réels x et y dans $\mathbb{R}$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que la fonction f est convexe.

(b) On suppose qu'il existe un réel M tel que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \big|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)\big| \leqslant My^2.$$

En considérant les fonctions $x\mapsto f(x)\pm Mx^2/2$, montrer que f est dérivable [1].

Solution

(a) Soit a et b fixés dans $\mathbb{R}$. On introduit l'ensemble

$$A = \big\{\lambda\in[0\,;1] \mid f\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big) \leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\big\}.$$

Nous allons montrer que celui-ci est égal au segment $[0\,;1]$ ce qui permettra de conclure que la fonction f est convexe.

méthode

On vérifie, pour tous λ et $\mu\in[0\,;1]$,

$$\lambda,\mu\in A \implies \frac{\lambda+\mu}{2}\in A.$$

Soit λ et μ dans A. On a

$$f\big(\underbrace{\lambda a+(1-\lambda)b}_{x}\big) \leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$
$$f\big(\underbrace{\mu a+(1-\mu)b}_{y}\big) \leqslant \mu f(a)+(1-\mu)f(b).$$

En exploitant l'hypothèse de travail, on obtient

$$f\left(\frac{\lambda+\mu}{2}a+\left(1-\frac{\lambda+\mu}{2}\right)b\right) \leqslant \frac{\lambda+\mu}{2}f(a)+\left(1-\frac{\lambda+\mu}{2}\right)f(b).$$

Ainsi, le réel $(\lambda+\mu)/2$ est élément de A.

1. On pourra exploiter librement le résultat du sujet 7 p. 148.

Sachant que 0 et 1 sont évidemment éléments de A, on obtient que $1/2$, puis que $1/4$ et $3/4$ sont aussi éléments de A... Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que les $k/2^n$ sont éléments de A pour tout entier k compris entre 0 et 2^n.

La propriété a déjà été affirmée dans le cas $n = 0$: $0, 1 \in A$.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$ et étudions celle-ci au rang suivant. Considérons un entier k compris entre 0 et 2^{n+1}. Si k est pair, on peut l'écrire $2p$ avec p entier compris entre 0 et 2^n. L'hypothèse de récurrence assure alors directement l'appartenance à A de $k/2^{n+1} = p/2^n$. Si k est impair, on peut l'écrire $2p+1$ avec p entier compris entre 0 et $2^n - 1$. On a alors grâce à l'hypothèse de récurrence et ce qui précède

$$\frac{k}{2^{n+1}} = \frac{2p+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{p}{2^n}}_{\in A} + \underbrace{\frac{p+1}{2^n}}_{\in A}\Big) \in A.$$

La récurrence est établie.

Considérons maintenant $\lambda \in [0\,;1]$ quelconque. Nous allons l'approcher par une suite d'éléments de A et, par passage à la limite, établir que λ est aussi élément[1] de A. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $k_n = \lfloor 2^n \lambda \rfloor$ et $\lambda_n = k_n/2^n$. Par encadrement de la partie entière définissant k_n, on montre que la suite (λ_n) converge vers λ. Or, pour tout naturel n, le réel λ_n appartient à A et donc

$$f\big(\lambda_n a + (1-\lambda_n)b\big) \leqslant \lambda_n f(a) + (1-\lambda_n)f(b).$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient par continuité de f

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Finalement, la fonction f est convexe.

(b) **méthode**

> On étudie la convexité des fonctions proposées afin d'affirmer que celles-ci sont dérivables à droite et à gauche en tout point.

Commençons par retraduire l'hypothèse de travail avec une écriture analogue à la précédente obtenue en remplaçant x et y par respectivement $(x+y)/2$ et $(x-y)/2$:

$$\left|f(x) + f(y) - 2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right| \leqslant \frac{M}{4}(x-y)^2.$$

Introduisons la fonction $g\colon x \mapsto f(x) + \frac{1}{2}Mx^2$. Pour x et y réels

$$\frac{g(x)+g(y)}{2} - g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)-2f\big(\frac{x+y}{2}\big)}{2} + \frac{M}{8}(x-y)^2 \geqslant 0.$$

1. On pourrait aussi utiliser un argument topologique : la partie A est fermée et contient la partie des $k/2^n$ qui est dense dans $[0\,;1]$.

Par ce qui précède, on peut affirmer que la fonction g est convexe. En exploitant le résultat du sujet 7 p. 148, la fonction g est dérivable à droite et à gauche en tout point x de $\mathbb{R}$ avec

$$g'_g(x) \leqslant g'_d(x).$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}Mx^2$ est dérivable et donc, par opérations, la fonction f est dérivable à droite et à gauche avec, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f'_g(x) \leqslant f'_d(x).$$

En procédant de la même façon, on établit que la fonction $h\colon x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}Mx^2$ est concave et l'on obtient cette fois-ci

$$f'_g(x) \geqslant f'_d(x).$$

Finalement, les nombres dérivés à droite et à gauche de f sont égaux en tout point : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 ***

Soit $f, g\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes et dérivables. On suppose

$$\forall x \in [0\,;1], \quad \max\big(f(x), g(x)\big) \geqslant 0.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in [0\,;1]$ tel que la fonction $h = (1-\lambda)f + \lambda g$ soit positive.

Solution

Commençons par observer que la fonction h est convexe puisque f et g le sont et les coefficients λ et $1-\lambda$ sont positifs.

Si la fonction f est positive, on choisit $h = f$ ce qui revient à prendre $\lambda = 0$. Si la fonction g est positive, on choisit $h = g$ en prenant $\lambda = 1$. Sinon, nous allons construire la fonction h telle que celle-ci admette un minimum de valeur positive.

méthode

> On détermine $c \in [0\,;1]$ tel que
> $$f(c) \geqslant 0, \quad g(c) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f'(c)g'(c) \leqslant 0.$$

Supposons avoir déterminé un tel élément c. Le réel 0 apparaît comme une valeur comprise entre $f'(c)$ et $g'(c)$. Il existe alors $\lambda \in [0\,;1]$ tel que $(1-\lambda)f'(c) + \lambda g'(c) = 0$. Pour cette valeur de λ, $h'(c)$ est nul et la fonction convexe h admet alors un minimum[1] en c. De plus $h(c)$ est positif car $f(c)$ et $g(c)$ le sont. La fonction h est donc positive.

Il reste à justifier l'existence d'un tel élément c...

La fonction f est continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y admet donc un minimum en un certain $a \in [0\,;1]$. On peut introduire de même $b \in [0\,;1]$ minimisant g. Les valeurs de f

1. Rappelons que la dérivée d'une fonction convexe est croissante et que là où celle-ci s'annule il y a nécessairement un minimum à la fonction.

et g en a et b sont strictement négatives car on a déjà résolu les cas où l'une ou l'autre de ces fonctions est positive.

Le cas $a = b$ est impossible car les deux fonctions prendraient une valeur négative en un même point ce qui contredit l'hypothèse $\max(f, g) \geqslant 0$.

On a donc $a \neq b$ et, quitte à échanger f et g, on peut supposer $a < b$. Selon que a est intérieur à l'intervalle $[0\,;1]$ ou égal à l'extrémité 0, on a $f'(a) = 0$ ou positif. Dans les deux cas, on peut écrire $f'(a) \geqslant 0$. De même, on peut affirmer $g'(b) \leqslant 0$. Les fonctions f et g étant convexes, leurs dérivées sont croissantes et l'on peut écrire le tableau de signe qui suit :

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$g'(x)$		$-$	

Pour tout élément x compris entre a et b, on a $f'(x)g'(x) \leqslant 0$. Il reste à trouver parmi ceux-ci un élément en lequel les valeurs prises par f et g sont positives.

Puisque la fonction $\max(f, g)$ est positive et que $g(b) < 0$, on a nécessairement $f(b) \geqslant 0$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f sur $[a\,;b]$, on peut introduire α dans $]a\,;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. La fonction f étant convexe, son graphe est en dessous de chacune de ses cordes et donc $f(x) < 0$ pour tout $x \in [a\,;\alpha[$. De même, on peut introduire $\beta \in [a\,;b[$ tel que $g(\beta) = 0$ et $g(x) < 0$ pour $x \in\,]\beta\,;b]$.

Si $\alpha > \beta$ alors les fonctions f et g sont strictement négatives sur $]\beta\,;\alpha[$ ce qui contredit l'hypothèse $\max(f, g) \geqslant 0$. Il reste $\alpha \leqslant \beta$ auquel cas n'importe quel c de $[\alpha\,;\beta]$ convient.

CHAPITRE 5

Fonctions vectorielles

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E et E' désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés par $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_{E'}$.

5.1 Limite et continuité

5.1.1 Limite

Soit X une partie de E et a un point adhérent à X.

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon X \to E'$ *tend* vers $\ell \in E'$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in X,\quad \|x - a\|_E \leqslant \alpha \implies \|f(x) - \ell\|_{E'} \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Lorsqu'une fonction f tend vers un vecteur ℓ en a, celui-ci est unique : on l'appelle la limite de f en a et celle-ci est notée $\lim\limits_a f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Théorème 1 (Caractérisation séquentielle de la limite)
Soit $f\colon X \subset E \to E'$ et $\ell \in E'$. On a équivalence entre :

(i) la fonction f tend vers ℓ en a ;

(ii) pour toute suite (x_n) d'éléments de X :

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$$

Le calcul sur les limites de fonctions est compatible avec les opérations d'addition et de produit extérieur sur l'espace E'. Il est aussi compatible avec l'opération de composition des fonctions.

Lorsqu'une fonction est au départ de X et à valeurs réelles, on peut définir la notion de limite en a égale à $\pm\infty$. Si la variable de la fonction est réelle, on peut parler de son éventuelle limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) lorsque le domaine de définition n'est pas majoré (resp. n'est pas minoré).

5.1.2 Limite et fonctions coordonnées

Si l'espace E' est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et si $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ désigne une base de E', alors, pour toute fonction $f\colon X \to E'$, on peut écrire pour tout $x \in X$

$$f(x) = f_1(x)e'_1 + \cdots + f_n(x)e'_n \quad \text{avec} \quad f_i(x) \in \mathbb{K}.$$

Définition

Les fonctions scalaires $f_i\colon X \to \mathbb{K}$ ainsi introduites sont appelées *fonctions coordonnées* dans la base e' de la fonction f.

Théorème 2

Quelle que soit la norme choisie sur E', on a équivalence entre :

(i) la fonction f admet en a une limite dans E' ;

(ii) les fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ admettent en a des limites dans $\mathbb{K}$.

De plus, si tel est le cas,

$$\lim_a f = \Big(\lim_a f_1\Big)e'_1 + \cdots + \Big(\lim_a f_n\Big)e'_n.$$

Si l'espace E' est un produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'espaces normés et s'il est muni de la norme produit, on peut aussi introduire les fonctions coordonnées d'une application f à valeurs dans E' en écrivant

$$f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big).$$

On dispose alors d'un résultat semblable au précédent pour étudier l'éventuelle limite de la fonction f à l'aide de ses fonctions coordonnées.

5.1.3 Continuité

Lorsqu'une fonction $f\colon X \subset E \to E'$ admet une limite en un point a où elle est définie, cette limite est nécessairement égale à sa valeur $f(a)$ au point.

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon X \subset E \to E'$ est *continue* en $a \in X$ si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

Lorsque la fonction f est à valeurs dans un espace E' de dimension finie, la continuité de f en a équivaut à la continuité de ses fonctions coordonnées dans une base de E'. Ce résultat vaut aussi lorsque E' est un espace normé produit.

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon X \subset E \to E'$ est *continue*[1] si f est continue en chaque point a de X.

Toute fonction obtenue par addition, produit extérieur ou composition de fonctions continues est continue. Le produit de deux fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{K}$ est continue. En raisonnant par les fonctions coordonnées dans une base, le produit de deux fonctions à valeurs dans une algèbre de dimension finie est continue.

5.1.4 Lipshitzianité

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon X \subset E \to E'$ est *lipschitzienne* s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,y) \in X^2, \quad \big\|f(y) - f(x)\big\|_{E'} \leqslant k\,\|y - x\|_E\,.$$

L'application $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne en vertu de l'inégalité

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \big|\|y\| - \|x\|\big| \leqslant \|y - x\|\,.$$

Théorème 3

Les applications lipschitziennes sont continues.

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces normés et si $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est muni de la norme produit, les *applications coordonnées*

$$\pi_i : \left\{ \begin{array}{l} E_1 \times \cdots \times E_n \to E_i \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \end{array} \right.$$

sont continues car lipschitziennes.

5.1.5 Continuité et linéarité

Théorème 4

Si $u\colon E \to E'$ est une application linéaire, on a équivalence entre :

(i) u est continue ;

(ii) $\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \ \big\|u(x)\big\|_{E'} \leqslant k\,\|x\|_E$;

(iii) u est lipschitzienne.

De ce résultat découle le suivant :

Théorème 5

Toute application linéaire au départ d'un espace de dimension finie est continue.

En particulier, on peut affirmer par linéarité la continuité des « fonctions atomiques » :

1. On dit quelquefois qu'une fonction est *continue sur* une partie X' pour insister sur le domaine de définition de la fonction ou pour affirmer que c'est sa restriction au départ de X' qui est continue.

— Pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, $(x_1,\dots,x_p) \mapsto x_j$ est continue sur $\mathbb{K}^p$;
— $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ sont continues sur $\mathbb{C}$;
— Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, $A \mapsto a_{i,j}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Bon nombre de fonctions pourront alors être affirmées continues « par opérations sur les fonctions continues ». En particulier, les fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^p$ sont continues par combinaison linéaire de produits de fonctions continues. Aussi, la fonction déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue par un argument analogue[1].

Théorème 6
Toute application multilinéaire au départ d'un produit d'espaces de dimensions finies est continue.

En particulier, le produit scalaire au départ d'un espace euclidien est continue.

5.2 Continuité et topologie

5.2.1 Topologie relative

Soit X une partie de E.

Définition
On appelle *ouvert relatif* à X (resp. *fermé relatif* à X) toute partie A de X qui peut s'écrire comme l'intersection d'un ouvert (resp. d'une fermé) de E avec X.

Le complémentaire dans X d'un ouvert relatif à X est un fermé relatif à X et inversement.

Théorème 7
Soit $f\colon X \subset E \to E'$. On a équivalence entre :
(i) f est continue ;
(ii) l'image réciproque de chaque ouvert de E' est un ouvert relatif à X ;
(iii) l'image réciproque de chaque fermé de E' est un fermé relatif à X.

En particulier, lorsque la fonction f est définie sur l'intégralité de E, ce théorème permet de montrer rapidement qu'une partie de E est ouverte (resp. fermée) en tant qu'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue. Par exemple, si $f\colon E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, les parties suivantes sont fermées

$$\{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\},\quad \{x \in E \mid f(x) \leqslant 0\} \quad \text{et} \quad \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

alors que les suivantes sont ouvertes

$$\{x \in E \mid f(x) > 0\},\quad \{x \in E \mid f(x) < 0\} \quad \text{et} \quad \{x \in E \mid f(x) \neq 0\}.$$

1. Voir sujet 4 p. 173.

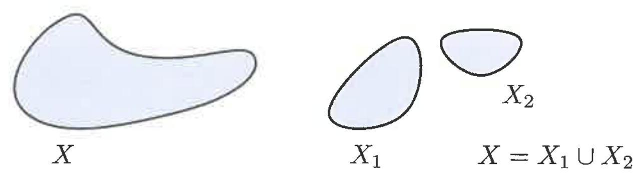
5.2.2 Connexité par arcs

Définition
On appelle *chemin* inscrit dans $X \subset E$ toute application $\gamma\colon [0\,;1] \to E$ continue vérifiant

$$\gamma(t) \in X \quad \text{pour tout } t \in [0\,;1].$$

Les éléments $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$ sont appelés *extrémités* du chemin.

Définition
Une partie X de E est dite *connexe par arcs* lorsque, pour tous a et $b \in X$, il existe un chemin inscrit dans X d'extrémités a et b.



À gauche, la partie X est connexe par arcs, à droite elle ne l'est pas.

Les parties convexes sont des parties connexes par arcs.

Théorème 8
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème 9
L'image directe d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

On peut alors généraliser le théorème des valeurs intermédiaires : toute fonction à valeurs réelles définie et continue sur un domaine X connexe par arcs prend toutes les valeurs comprises entre deux valeurs prises.

5.2.3 Densité

Définition
Une partie X de E est dite *dense* lorsque $\overline{X} = E$.

Sur la droite réelle, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est une partie dense. Il en est de même de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels.
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est une partie dense[1].

1. Voir sujet 16 p. 183.

Théorème 10
Si f et $g\colon E \to E'$ sont deux fonctions continues égales sur une partie X dense de E alors f et g sont égales sur E.

Ce résultat sera utile pour généraliser par continuité des égalités ayant lieu sur une partie dense.

5.3 Fonctions d'une variable réelle

Les espaces E, E', F considérés dans cette partie sont supposés de dimensions finies. On étudie ici des fonctions définies sur des intervalles I ou J de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à des points.

5.3.1 Dérivation

Définition
On dit que $f\colon I \to E$ est *dérivable* en $a \in I$ si le *taux d'accroissement*

$$\frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big)$$

admet une limite quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$). Cette limite est alors appelée *vecteur dérivé* de f en a, on la note $f'(a)$.

Une fonction dérivable en a est assurément continue en a.

Définition
Une fonction $f\colon I \to E$ est dite *dérivable*[1] si elle est dérivable en tout $a \in I$. On peut alors introduire sa *fonction dérivée*

$$f'\colon \begin{cases} I \to E \\ t \mapsto f'(t). \end{cases}$$

Si $e = (e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de l'espace d'arrivée E alors, toute fonction $f\colon I \to E$ est dérivable si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans la base e sont dérivables. De plus, on a alors $f'(t) = f_1'(t)e_1 + \cdots + f_n'(t)e_n$ pour tout $t \in I$.

5.3.2 Opérations

Théorème 11
Soit $f, g\colon I \to E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si f et g sont dérivables alors λf et $f+g$ le sont aussi avec

$$(\lambda f)' = \lambda f' \quad \text{et} \quad (f+g)' = f' + g'.$$

1. On dit quelquefois qu'une fonction est *dérivable sur* un intervalle I pour insister sur le domaine de définition de la fonction ou pour affirmer que c'est sa restriction au départ de I qui est continue.

Théorème 12
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ et $f\colon I \to E$ avec $\varphi(J) \subset I$. Si f et φ sont dérivables alors la fonction composée $f \circ \varphi$ l'est aussi et

$$(f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'\big(\varphi(t)\big) \quad \text{pour tout } t \in J.$$

Théorème 13
Soit $f\colon I \to E$ et $L\colon E \to E'$ linéaire. Si f est dérivable alors la fonction composée $L(f)\colon t \mapsto L\big(f(t)\big)$ est dérivable et

$$\big(L(f)\big)'(t) = L\big(f'(t)\big) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Théorème 14
Soit $f\colon I \to E$, $g\colon I \to E'$ et $B\colon E \times E' \to F$ bilinéaire. Si f et g sont dérivables alors la fonction composée $B(f,g)\colon t \mapsto B\big(f(t), g(t)\big)$ est dérivable et

$$B(f,g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

Ce dernier résultat sera en particulier utile lorsque l'application B est un produit extérieur, un produit scalaire ou le produit matriciel.

5.3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

Comme pour les fonctions à valeurs numériques, on peut définir, lorsqu'elles existent, les dérivées successives d'une fonction $f\colon I \to E$ et dire que celle-ci est de classe $\mathcal{C}^p$ si elle possède une dérivée d'ordre p et que cette dernière est continue. Le caractère $\mathcal{C}^p$ d'une fonction de I vers E peut être caractérisé par ses fonctions coordonnées dans une base de E.
Les résultats d'opérations qui précèdent s'étendent aux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ et l'on peut en particulier énoncer une formule de Leibniz :

Théorème 15 (Formule de Leibniz)
Soit $B\colon E \times E' \to F$ une application bilinéaire. Si $f\colon I \to E$ et $g\colon I \to E'$ sont de classe $\mathcal{C}^p$ alors la fonction $B(f,g)$ l'est aussi et

$$B(f,g)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B\big(f^{(p-k)}, g^{(k)}\big).$$

5.3.4 Intégration

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de l'espace E. Bien qu'introduites à partir de cette base, les notions qui suivent ne dépendent pas du choix de celle-ci.

Définition

Une fonction $f\colon I \to E$ est dite *continue par morceaux* lorsque ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ dans la base e le sont.

Pour tous a et b dans I, on définit alors l'intégrale de f de a à b par l'identité

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i.$$

Les propriétés de linéarité, de relation de Chasles ou de convergence des sommes de Riemann connues pour les intégrales de fonctions à valeurs numériques se généralisent aux intégrales des fonctions à valeurs vectorielles. On généralise aussi l'inégalité triangulaire :

Théorème 16

Si $f\colon I \to E$ est une fonction continue par morceaux alors, pour tous a et b dans I avec $a \leqslant b$,

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

5.3.5 Primitives

Définition

On appelle *primitive* de $f\colon I \to E$, s'il en existe, toute fonction $F\colon I \to E$ dérivable vérifiant $F' = f$.

Théorème 17 (Théorème fondamental de l'intégration)

Soit $f\colon I \to E$ et $a \in I$. Si f est continue alors f possède une unique primitive s'annulant en a, c'est la fonction

$$F\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si F est une primitive d'une fonction continue $f\colon I \to E$, on a pour chaque $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

5.3.6 Formules de Taylor

Théorème 18 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Si $f\colon I \to E$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors, pour tous a et x dans I,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 19 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Si $f\colon I \to E$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et si $f^{(n+1)}$ bornée alors, pour tous a et x dans I,

$$\left\|f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in I}\left\|f^{(n+1)}(t)\right\|.$$

En particulier, lorsque $f\colon I \to E$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée bornée, on obtient l'inégalité des accroissements finis

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \left\|f(b) - f(a)\right\| \leqslant |b-a| \sup_{t\in I}\left\|f'(t)\right\|.$$

Théorème 20 (Formule de Taylor-Young)

Si $f\colon I \to E$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ alors, pour tous a et x dans I,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{o((x-a)^n)} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0_E.$$

Cette dernière relation est appelée *développement limité* de f à l'ordre n en a.

5.4 Arcs paramétrés

5.4.1 Définition

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon I \to E$ de classe $\mathcal{C}^k$ définit un *arc paramétré* lorsque l'on étudie la courbe Γ constituée des valeurs prises par $f(t)$ quand t parcourt I :

$$\Gamma = \{f(t) \mid t \in I\}.$$

Par les coordonnées dans un repère orthonormé, on identifie le plan géométrique et l'espace $E = \mathbb{R}^2$. Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ définit alors un *arc du plan* et, en écrivant $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, cet arc est entièrement déterminé par les fonctions x et y.

Si A est un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) et $\vec{u}$ un vecteur non nul de coordonnées (a, b), l'arc du plan déterminé par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases}$$

avec t parcourant $\mathbb{R}$ définit un paramétrage de la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

Si Ω est un point du plan de coordonnées (a, b) et R un réel strictement positif, l'arc du plan déterminé par

$$\begin{cases} x(t) = a + R\cos t \\ y(t) = b + R\sin t \end{cases}$$

avec t parcourant $\mathbb{R}$ (ou l'intervalle $[0\,;2\pi]$) définit un paramétrage du cercle de centre Ω et de rayon R.

5.4.2 Tangente

Soit $f\colon I \to E$ une fonction définissant un arc de classe au moins $\mathcal{C}^1$.

Définition

> On dit qu'un paramètre $t_0 \in I$ est *régulier* si $f'(t_0) \neq 0_E$. En un tel paramètre, la droite passant par $f(t_0)$ et dirigée par $f'(t_0)$ est appelée *tangente* à l'arc en le point de paramètre t_0.

Si t_0 est un paramètre régulier d'un arc du plan, la tangente en t_0 est la droite d'équation

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

5.5 Exercices d'apprentissage

Exercice 1

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$.

Solution

Dans chacune des trois études, le point $(0,0)$ est adhérent au domaine de définition de la fonction f et l'étude de la limite correspond à la résolution d'une forme indéterminée du type « $0/0$ ».

(a) **méthode**

> Pour percevoir l'ordre asymptotique en $(0,0)$, on exprime x et y en coordonnées polaires.

Écrivons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ bien choisi en fonction de } (x,y).$$

On a

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = r^2\cos^2\theta\sin^2\theta.$$

Lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, la distance à l'origine $r = \sqrt{x^2+y^2}$ tend vers 0 tandis que l'expression $\cos^2\theta\sin^2\theta$ reste bornée. On en déduit que $f(x,y)$ tend vers 0.

(b) L'expression de $f(x,y)$ en coordonnées polaires donne après simplification

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

Comme θ peut avoir un comportement arbitraire quand (x,y) tend vers $(0,0)$, il est douteux que la fonction f admette une limite en $(0,0)$.

méthode

> On démontre l'absence de limite en déterminant deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^2$, chacune de limite $(0,0)$, mais dont les images par la fonction ne tendent pas vers la même limite.

D'une part,

$$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

D'autre part,

$$\left(0, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f\left(0, \frac{1}{n}\right) = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.$$

Les deux limites obtenues étant différentes, la conclusion du théorème de caractérisation séquentielle des limites (Th. 1 p. 161) est mise en échec et la fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$.

(c) Pour $x \neq y$, on obtient en coordonnées polaires

$$f(x,y) = \frac{xy}{x-y} = r\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}.$$

Le facteur r tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$ mais le facteur fonction de θ n'est pas borné et peut contrebalancer la nullité de la limite de r : il est douteux que f ait une limite en $(0,0)$.

D'une part,

$$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part,

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

La fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 2

Justifier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f\colon (x,y) \mapsto \ln(1+x^2+y^4)\mathrm{e}^{-xy}$.

Solution

méthode

On raisonne par opérations sur les fonctions continues[1].

La fonction $(x,y) \mapsto x$ est continue car linéaire au départ d'un espace de dimension finie (Th. 5 p. 163). De même, la fonction $(x,y) \mapsto y$ est continue. Par somme et produit de fonctions continues, on peut affirmer la continuité des fonctions $(x,y) \mapsto 1 + x^2 + y^4$ et $(x,y) \mapsto -xy$. Par composition avec les fonctions continues $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto \exp t$ puis, par produit, on peut conclure que f est continue.

En pratique, on ne détaille que rarement l'argumentation de la continuité comme cela vient d'être fait. On se contente d'écrire : « f est continue par opérations sur les fonctions continues ».

Exercice 3

Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

(a) Montrer que f est continue en la variable x pour chaque y de $\mathbb{R}$ et inversement.

(b) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Solution

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé.

Cas : $y \neq 0$. La fonction $x \mapsto f(x,y)$ s'exprime simplement $x \mapsto xy/(x^2+y^2)$. Celle-ci est continue car c'est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$.

Cas : $y = 0$. Les valeurs de la fonction $x \mapsto f(x,y)$ sont nulles, que x soit ou non égal à 0. Encore une fois, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est continue.

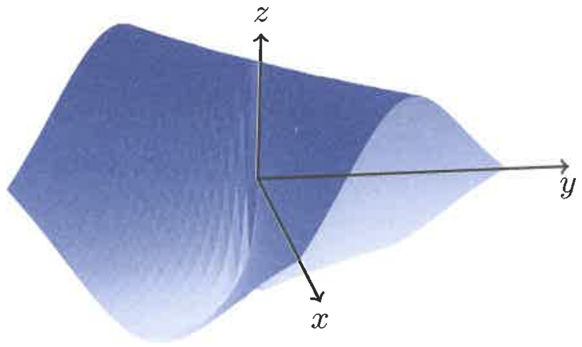
Par symétrie des variables, on obtient aussi que la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue quelle que soit la valeur de x.

(b) On a

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

La fonction f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

1. On n'utilisera pas l'argument fallacieux : « f est continue car continue en x et en y » (voir sujet suivant).



Allure de la fonction f :
la surface d'équation $z = f(x,y)$ est « pincée » à l'origine.

Ce sujet illustre que la continuité en chacune des variables[1] n'entraîne pas la continuité en le couple de variables.

Exercice 4

Montrer la continuité de l'application déterminant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A)$.

Solution

méthode

Le déterminant de A peut s'exprimer comme une fonction polynomiale en les coefficients de A.

En développant le calcul du déterminant de A selon une rangée, on établit par récurrence sur la taille de la matrice que le déterminant de A s'exprime comme une somme de produits[2] de coefficients de la matrice A.

Pour tout indice $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, l'application $A \mapsto a_{i,j}$ est continue car linéaire au départ d'un espace de dimension finie (Th. 5 p. 163). Par somme de produits de fonctions continues, on peut alors affirmer que l'application $A \mapsto \det(A)$ est continue[3].

1. On parle de *continuité partielle*.
2. On peut aussi faire référence à la formule $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}\right)$.
3. On peut aussi employer que le déterminant est une application multilinéaire en la famille des colonnes de la matrice : l'application qui à une matrice carrée A associe la famille de ses colonnes est continue car linéaire au départ d'un espace de dimension finie et on la compose avec l'application déterminant dans une base qui est continue car multilinéaire au départ d'un produit d'espaces de dimensions finies (Th. 6 p. 164).

Exercice 5

Sur l'espace $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$, on considère les normes

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|.$$

On considère aussi l'endomorphisme u de E qui envoie f sur la fonction $u(f)$ déterminée par

$$u(f)(t) = f(t) - f(0).$$

(a) Montrer que l'endomorphisme u est continu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Montrer que l'endomorphisme u n'est pas continu pour la norme $\|\cdot\|_1$.

(c) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Solution

(a) **méthode**

> Pour montrer qu'une application linéaire u de E vers E' est continue, il suffit de déterminer $k \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $\|u(x)\|_{E'} \leqslant k\|x\|_E$ pour tout $x \in E$ (Th. 4 p. 163).

Soit f une fonction de E. Pour tout $x \in [0;1]$

$$|f(x) - f(0)| \leqslant |f(x)| + |f(0)| \leqslant 2\,\|f\|_\infty$$

et donc

$$\|u(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x) - f(0)| \leqslant k\|f\|_\infty \quad \text{avec} \quad k = 2.$$

On en déduit que l'endomorphisme u est continu.

(b) **méthode**

> On montre qu'une application linéaire u de E vers E' n'est pas continue en déterminant une suite (x_n) de vecteurs non nuls de E pour laquelle
>
> $$\frac{\|u(x_n)\|_{E'}}{\|x_n\|_E} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons les fonctions f_n de E déterminées par $f_n(t) = (1-t)^n$. On a

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t \underset{u=1-t}{=} \int_0^1 u^n\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\|u(f_n)\|_1 = \int_0^1 \left(1 - (1-t)^n\right)\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Par conséquent, l'endomorphisme u n'est pas continu pour $\|\cdot\|_1$ puisque

$$\frac{\|u(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

(c) Les deux normes ne sont pas équivalentes, sinon la continuité de l'endomorphisme pour l'une des normes entraînerait la continuité pour l'autre norme.

Exercice 6

Justifier que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < x^3 + y^3\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Solution

méthode

> On pourrait démontrer que le complémentaire de U est une partie fermée par la caractérisation séquentielle des parties fermées mais on peut aussi rapidement percevoir U comme l'image réciproque d'un ouvert par une application continue (Th. 7 p. 164).

Par différence des deux membres, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2.$$

Cette fonction est continue car polynomiale et

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\} = f^{-1}(]0;+\infty[).$$

La partie U est donc l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, c'est donc un ouvert relatif au domaine de définition $\mathbb{R}^2$ de la fonction f, c'est-à-dire simplement un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7

Soit $t \mapsto f(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$ et déterminant un arc paramétré du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On suppose la fonction $t \mapsto \|f(t)\|$ constante. Montrer que, pour tout réel t, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

Solution

méthode

> La dérivée de la fonction $t \mapsto \|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t)\rangle$ est nulle.

Un produit scalaire étant une application bilinéaire, la formule de dérivation d'une application bilinéaire (Th. 14 p. 167) donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\langle f(t), f(t)\rangle\right) = \langle f'(t), f(t)\rangle + \langle f(t), f'(t)\rangle = 2\langle f'(t), f(t)\rangle.$$

Cependant, il s'agit de la dérivée d'une constante et donc $\langle f'(t), f(t)\rangle = 0$ pour tout réel t : les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

5.6 Exercices d'entraînement

5.6.1 Limite et continuité

Exercice 8 **

Soit A une partie non vide d'un espace normé E. Pour $x \in E$, on pose

$$d(x,A) = \inf\{\|x-a\| \mid a \in A\}.$$

Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est définie et continue sur E.

Solution

La partie $\{\|x-a\| \mid a \in A\}$ est incluse dans $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0, sa borne inférieure existe. Ainsi, l'application $x \mapsto d(x,A)$ est bien définie.

méthode

On montre que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est lipschitzienne.

Soit $x, y \in E$. Pour tout $a \in A$ arbitraire, l'inégalité triangulaire donne

$$d(y,A) \leqslant \|y-a\| \leqslant \|y-x\| + \|x-a\|.$$

En réorganisant les membres, il vient

$$d(y,A) - \|y-x\| \leqslant \|x-a\|.$$

Une borne inférieure est le plus grand des minorants. Ici, la quantité $d(y,A) - \|y-x\|$ est un minorant de l'ensemble des $\|x-a\|$ pour a parcourant A et donc

$$d(y,A) - \|y-x\| \leqslant d(x,A).$$

Ainsi, en réorganisant les membres,

$$d(y,A) - d(x,A) \leqslant \|y-x\|.$$

Par symétrie, on obtient aussi

$$d(x,A) - d(y,A) \leqslant \|x-y\| = \|y-x\|$$

et donc

$$\left|d(y,A) - d(x,A)\right| \leqslant \|y-x\|.$$

Finalement, la fonction $x \mapsto d(x,A)$ est lipschitzienne et donc continue.

Exercice 9 **

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } y \neq x \\ f'(x) & \text{si } y = x. \end{cases}$$

Montrer que la fonction F est continue.

Solution

Ici, affirmer que F est continue par « opérations sur les fonctions continues » n'est pas possible[1] car la fonction F est définie par une alternative. On revient alors à la définition de la continuité :

méthode

Vérifier que la fonction F est continue consiste à observer qu'elle est continue en tout point de son domaine de définition.

Étudions la continuité de f en $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Cas : $x_0 \neq y_0$. Au voisinage du point (x_0,y_0) on a $x \neq y$ et les valeurs de la fonction F s'expriment par

$$F(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Par conséquent, on obtient par opérations sur les limites

$$F(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} = F(x_0,y_0).$$

Ainsi, F est continue en (x_0,y_0) lorsque $x_0 \neq y_0$.

Cas : $x_0 = y_0$. Au voisinage du point (x_0,x_0) on peut avoir $x = y$ ou non.

méthode

On étudie la limite en (x_0,x_0) en conduisant deux études[2] : l'une lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0) avec la condition $x = y$, l'autre avec la condition $x \neq y$.

Introduisons la droite $\Delta = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et son complémentaire $X = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. Quand (x,y) tend vers (x_0,x_0) avec $(x,y) \in \Delta$, on a $F(x,y) = f(x)$ et donc simplement

$$F(x,y) = f'(x) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{avec } x=y}]{} f'(x_0) = F(x_0,x_0). \qquad (*)$$

Quand (x,y) tend vers (x_0,y_0) avec $(x,y) \in X$, les valeurs de F s'expriment par

$$F(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

méthode

On réécrit le taux d'accroissement par le théorème des accroissements finis.

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f entre x et y, on peut affirmer qu'il existe un réel $c_{x,y}$, fonction de x et y, tel que

$$F(x,y) = f'(c_{x,y}) \quad \text{et} \quad c_{x,y} \text{ est compris entre } x \text{ et } y.$$

1. On peut cependant exprimer astucieusement $F(x,y) = \int_0^1 f'(x+t(y-x))\,\mathrm{d}t$: la continuité de F se ramène alors à l'étude de la continuité d'une intégrale à paramètre !

2. Si a est adhérent à des parties X' et X'' de E, une fonction $f\colon X' \cup X'' \to E'$ admet une limite en a si, et seulement si, les restrictions $f|_{X'}$ et $f|_{X''}$ admettent une même limite en a.

Par encadrement, on a

$$c_{x,y} \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{avec } x\neq y}]{} x_0$$

puis, par composition de limites,

$$F(x,y) = f'(c_{x,y}) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{avec } x\neq y}]{} f'(x_0) = F(x_0,x_0). \qquad (**)$$

Pour conclure, fusionnons les deux affirmations $(*)$ et $(**)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par $(*)$, il existe $\alpha_\Delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \Delta, \quad \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leqslant \alpha_\Delta \implies \|F(x,y) - F(x_0,y_0)\| \leqslant \varepsilon.$$

Par $(**)$, il existe $\alpha_X > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in X, \quad \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leqslant \alpha_X \implies \|F(x,y) - F(x_0,y_0)\| \leqslant \varepsilon.$$

En considérant $\alpha = \min(\alpha_\Delta, \alpha_X) > 0$, une discussion selon l'appartenance de (x,y) à Δ ou à X donne

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leqslant \alpha \implies \|F(x,y) - F(x_0,y_0)\| \leqslant \varepsilon.$$

On peut conclure que F est continue en (x_0,y_0).

Exercice 10 *

Montrer la continuité de l'application qui à une matrice M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ associe son inverse.

Solution

méthode

On exprime M^{-1} en fonction de la comatrice de M.

L'identité

$${}^t\big(\mathrm{Com}(M)\big)M = \det(M)\mathrm{I}_n$$

donne, lorsque la matrice M est inversible, la formule

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\,{}^t\big(\mathrm{Com}(M)\big).$$

La fonction $M \mapsto \det(M)$ est continue[1] et ne s'annule pas. Les fonctions coefficients de la fonction $M \mapsto {}^t\big(\mathrm{Com}(M)\big)$ sont des cofacteurs de la matrice M, ce sont donc aussi des fonctions continues[2]. Par opérations sur les fonctions continues, on peut affirmer que la fonction $M \mapsto M^{-1}$ est continue.

1. Voir sujet 4 p. 173.
2. L'application qui à une matrice carrée supprime une rangée et une colonne préalablement choisies est linéaire en dimension finie donc continue. On la compose avec l'application déterminant, elle aussi continue, puis on multiplie par une puissance de (-1) pour obtenir une fonction cofacteur.

Exercice 11 **

Déterminer deux normes sur l'espace $E = \mathbb{R}[X]$, l'une pour laquelle l'endomorphisme de dérivation est continu, l'autre pour laquelle il ne l'est pas.

Solution

Notons D l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$.

Il est facile d'obtenir une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle l'endomorphisme de dérivation n'est pas continu, par exemple[1] la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|.$$

En effet, pour $P_n = X^n$, on a

$$\frac{\|\mathrm{D}(P_n)\|_\infty}{\|P_n\|_\infty} = \frac{\|nX^{n-1}\|_\infty}{\|X^n\|_\infty} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Il est beaucoup plus délicat de déterminer une norme pour laquelle l'endomorphisme de dérivation est continu...

méthode

On définit une norme dans l'expression de laquelle apparaît P'.

Un premier candidat serait $N(P) = \|P\|_\infty + \|P'\|_\infty$ mais cela ne suffit pas : il faut enchaîner les dérivations ! Considérons alors l'application N définie sur $\mathbb{R}[X]$ par[2]

$$N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \|P^{(k)}\|_\infty.$$

L'application N est bien définie car, pour chaque polynôme P, la somme est à termes nuls à partir d'un certain rang. De plus, l'application N définit bien une norme. En effet, les propriétés d'homogénéité et d'inégalité triangulaire sont immédiates tandis que la séparation s'obtient par

$$N(P) = 0 \implies \|P\|_\infty = 0$$
$$\implies P = 0.$$

Enfin, la dérivation est continue pour la norme N car, pour tout polynôme P,

$$N\big(\mathrm{D}(P)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \|P^{(k+1)}\|_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} \|P^{(k)}\|_\infty \leqslant N(P).$$

Notons que sur l'espace $E = \mathcal{C}^\infty([0;1],\mathbb{C})$, il n'existe pas de normes pour laquelle l'endomorphisme D de dérivation soit continue. En effet, si N est une norme et si e_n désigne la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{nt}$, on a

$$N\big(\mathrm{D}(e_n)\big) = N(ne_n) = |n|\,N(e_n) \quad \text{avec} \quad |n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

1. $\|\cdot\|_1$ définie par $\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$ convient aussi.
2. La norme N définie par $N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ est aussi solution.

5.6.2 Topologie et continuité

Exercice 12 *
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution

méthode
L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert relatif à l'ensemble de définition (Th. 7 p. 164).

L'application $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue [1] et

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{K}^*).$$

Or $\mathbb{K}^*$ est le complémentaire du fermé [2] $\{0\}$ et c'est donc une partie ouverte. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est donc un ouvert relatif à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire simplement un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 13 **
Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $f\colon E \to F$. Montrer qu'il y a équivalence entre les quatre assertions suivantes :
(i) f est continue ;
(ii) $\forall A \in \wp(E)$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
(iii) $\forall B \in \wp(F)$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$;
(iv) $\forall B \in \wp(F)$, $f^{-1}(B^\circ) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$.

Solution
On établit un chaînage d'implications.
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons l'application f continue et introduisons $A \subset E$.

méthode
Un élément est adhérent à une partie si, et seulement si, il est limite d'une suite d'éléments de cette partie.

Tout élément y de $f(\overline{A})$ est l'image par f de la limite x d'une suite convergente (x_n) d'éléments de A. Or f étant continue, la suite $\left(f(x_n)\right)$ tend vers $f(x) = y$ et donc y est limite d'une suite d'éléments de $f(A)$. Ainsi,

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons (ii) et introduisons $B \subset F$.

1. Voir sujet 4 p. 173.
2. Les singletons sont des parties fermées car contiennent évidemment les limites de leurs suites convergentes. Plus généralement, les parties finies sont elles aussi fermées.

méthode
Écrire $f(X) \subset Y$ équivaut à écrire $X \subset f^{-1}(Y)$.

Pour $A = f^{-1}(B)$, on a [1] $f(A) \subset B$ puis, par l'hypothèse (ii) et la croissance du passage à l'adhérence [2], on obtient

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B}.$$

On a donc $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{B})$, c'est-à-dire

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Supposons (iii) et introduisons $B \subset F$.

méthode
Par passage au complémentaire, on échange intérieur et adhérence.

On a la propriété

$$f^{-1}\left(\complement_F Y\right) = \complement_E f^{-1}(Y).$$

On en déduit

$$f^{-1}(B^\circ) = f^{-1}\left(\complement_F \overline{(\complement_F B)}\right) = \complement_E f^{-1}\left(\overline{\complement_F B}\right).$$

Par l'hypothèse (iii) et la décroissance du passage au complémentaire, on conclut

$$f^{-1}(B^\circ) \subset \complement_E\left(\overline{f^{-1}\left(\complement_F B\right)}\right) = \left(\complement_E f^{-1}\left(\complement_F B\right)\right)^\circ = \left(f^{-1}(B)\right)^\circ.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Supposons (iv) et étudions la continuité de f en $a \in E$. Soit $\varepsilon > 0$

méthode
La boule $B\big(f(a), \varepsilon\big)$ est ouverte donc égale à son intérieur.

Par l'hypothèse (iv)

$$f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big) = f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)^\circ\Big) \subset \Big(f^{-1}\big(B(f(a),\varepsilon)\big)\Big)^\circ.$$

Or a est élément de $f^{-1}\big(B(f(a),\varepsilon)\big)$ et donc a est élément de l'intérieur de cet ensemble [3]. Il existe alors un rayon $\alpha > 0$ tel que

$$B(a,\alpha) \subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big).$$

Ainsi, nous obtenons la propriété

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in E,\quad x \in B(a,\alpha) \Longrightarrow f(x) \in B\big(f(a),\varepsilon\big).$$

Ceci correspond à l'expression en terme d'appartenance à des boules de la continuité de la fonction f au point a.

Exercice 14 **
Montrer qu'une forme linéaire est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

1. Il peut ne pas y avoir égalité en général : si la partie B contient un élément qui n'est pas une valeur prise par f, celui-ci ne figurera pas dans $f(A)$.
2. Voir sujet 21 p. 126.
3. La partie $f^{-1}\big(B(f(a),\varepsilon)\big)$ est en fait ouverte puisque incluse dans son intérieur.

Solution

Soit φ une forme linéaire sur un espace normé E de dimension quelconque[1]. Si la forme linéaire φ est continue, son noyau est fermé car image réciproque d'un fermé par une application continue :

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\}) \quad \text{avec} \quad \{0\} \text{ fermé.}$$

Inversement, supposons la forme linéaire φ discontinue.

méthode

> Par discontinuité de φ, pour tout réel k, il existe un vecteur x de E vérifiant $|\varphi(x)| > k\,\|x\|$ (Th. 4 p. 163). On exploite cette propriété pour construire une suite d'éléments du noyau convergeant à l'extérieur du noyau.

En prenant $k = n \in \mathbb{N}$, on définit ainsi une suite (x_n) d'éléments de E vérifiant pour tout naturel n

$$|\varphi(x_n)| > n\,\|x_n\|.$$

Posons alors

$$y_n = \frac{1}{\varphi(x_n)}x_n.$$

Par construction $\varphi(y_n) = 1$ et $\|y_n\| \leqslant 1/n$ de sorte que la suite (y_n) converge vers le vecteur nul.

Considérons enfin la suite (z_n) déterminée par $z_n = y_0 - y_n$. On a

$$\varphi(z_n) = \varphi(y_0) - \varphi(y_n) = 0 \quad \text{et} \quad z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_0 \quad \text{avec} \quad \varphi(y_0) = 1.$$

Ainsi, (z_n) est une suite d'éléments du noyau $\operatorname{Ker}(\varphi)$ qui converge vers un vecteur n'appartenant pas à ce noyau. Celui-ci n'est donc pas une partie fermée.

> **Exercice 15 *****
> Montrer que l'ensemble Ω des polynômes réels de degré n scindés à racines simples est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution

méthode

> On montre que Ω est voisinage de chacun de ses points en exploitant qu'un polynôme de Ω change n fois de signe.

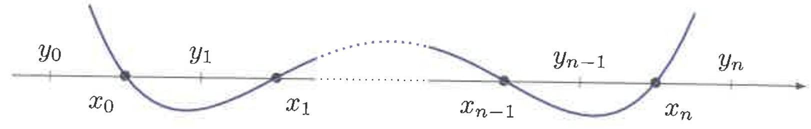
Soit $P \in \Omega$ et $x_1 < \cdots < x_n$ ses racines. En introduisant $\lambda \neq 0$ le coefficient dominant de P, on peut écrire P sous forme factorisée

$$P = \lambda(X - x_1)\dots(X - x_n).$$

Pour fixer les idées, supposons $\lambda > 0$ (la démonstration qui suit s'adapte facilement au cas $\lambda < 0$).

1. En dimension finie, la forme linéaire φ est automatiquement continue (Th. 5 p. 163).

Posons $y_1, \dots, y_{n-1}$ les milieux des segments $[x_1\,;x_2], \dots, [x_{n-1}\,;x_n]$. Introduisons aussi $y_0 \in \left]-\infty\,;x_1\right[$ et $y_n \in \left]x_n\,;+\infty\right[$ arbitraires. Les réels y_i ainsi construits forment une suite de valeurs strictement croissante telle que le polynôme P change de signe entre chaque. Plus précisément, $P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n$, $P(y_1)$ du signe de $(-1)^{n-1}$,..., $P(y_{n-1})$ du signe de (-1) et $P(y_n)$ du signe de $+1$.



Changements de signe de P dans le cas n pair

Considérons maintenant l'application

$$f_i : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ \quad Q \mapsto Q(y_i). \end{cases}$$

L'application f_i est continue car linéaire au départ d'un espace de dimension finie. Les ensembles[1] $f_i^{-1}(\pm\mathbb{R}_+^*)$ sont donc des parties ouvertes de $\mathbb{R}_n[X]$ en tant qu'images réciproques d'ouverts par une application continue. Considérons enfin l'intersection

$$U = f_0^{-1}\big((-1)^n\mathbb{R}_+^*\big) \cap f_1^{-1}\big((-1)^{n-1}\mathbb{R}_+^*\big) \cap \dots \cap f_n^{-1}(\mathbb{R}_+^*).$$

La partie U est ouverte et ses éléments sont des polynômes réels changeant de signe entre chaque $y_0, y_1 \dots, y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet n racines distinctes et est donc scindé à racines simples. Ainsi, l'ouvert U est inclus dans Ω. Or P figure parmi les éléments de U, il existe donc une boule centrée en P incluse dans U donc incluse dans Ω.

Au final, Ω est un ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.

5.6.3 Densité

> **Exercice 16 ***
> Soit n un naturel au moins égal à 2.
> (a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
> (b) Calculer $\det(\operatorname{Com}(A))$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

méthode

> On détermine des matrices inversibles voisines de A de la forme $A - \lambda I_n$ avec λ un réel « petit ».

1. Comprendre $f_i^{-1}(]0\,;+\infty[)$ dans le cas $(+)$ et $f_i^{-1}(]-\infty\,;0[)$ dans le cas $(-)$.

L'application $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ est une fonction polynomiale[1] non nulle, elle possède donc un nombre fini de racines. Il existe[2] alors un réel $m > 0$ tel que pour tout λ dans $]0\,;m[$, on ait $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ et donc $A - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K})$.

La suite des matrices $A - \frac{1}{p} I_n$ converge alors vers A tout en étant formée de matrices inversibles à partir d'un certain rang : la partie $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) **méthode**

> Lorsqu'une matrice est inversible, on sait lier comatrice et matrice inverse. On exploite cette propriété pour calculer le déterminant de la comatrice dans ce cas de figure avant de généraliser par continuité et densité.

Lorsque la matrice A est inversible, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t\big(\mathrm{Com}(A)\big).$$

En passant cette relation au déterminant (sachant $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$ lorsque M est de taille n), on obtient

$$\frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{(\det(A))^n} \det\Big({}^t\big(\mathrm{Com}(A)\big)\Big) = \frac{1}{(\det(A))^n} \det\big(\mathrm{Com}(A)\big).$$

On en déduit

$$\det\big(\mathrm{Com}(A)\big) = \big(\det(A)\big)^{n-1}.$$

Les applications $A \mapsto \det\big(\mathrm{Com}(A)\big)$ et $A \mapsto \big(\det(A)\big)^{n-1}$ sont continues et égales sur $GL_n(\mathbb{K})$ qui est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut donc affirmer (Th. 10 p. 166) qu'elles sont égales sur l'intégralité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 17 **

Montrer qu'un hyperplan d'un espace normé E est une partie dense ou fermée.

Solution

méthode

> Si a est un vecteur n'appartenant pas à un hyperplan H de E, on sait
>
> $$H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E.$$

Soit H un hyperplan de E qui ne soit pas une partie fermée. Il existe une suite (h_n) d'éléments de H convergeant vers un élément a n'appartenant pas à H :

$$H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E.$$

1. Cette fonction est à rapprocher du polynôme caractéristique de A défini par $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.
2. On peut prendre m égal à la plus petite racine strictement positive de $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ (c'est-à-dire la plus petite valeur propre strictement positive de A) s'il en existe ou une valeur arbitraire sinon.

Soit x un élément quelconque de E. On peut écrire

$$x = h + \lambda a \quad \text{avec} \quad h \in H \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Considérons alors la suite (x_n) de terme général

$$x_n = h + \lambda h_n.$$

Par opérations dans le sous-espace vectoriel H, les vecteurs x_n sont dans H et, par opérations sur les limites, la suite (x_n) converge vers x.

Finalement, tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de H, l'hyperplan H est une partie dense de E.

5.6.4 Connexité par arcs

Exercice 18 *

Soit A et B deux parties connexes par arcs d'un espace normé E.

(a) Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs dans l'espace normé produit $E \times E$.

(b) En déduire que $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ est connexe par arcs.

Solution

(a) **méthode**

> À partir de chemins joignant entre eux des points de A d'une part, et des points de B d'autre part, on construit un chemin joignant des points de $A \times B$.

Soit $(a,b) \in A \times B$ et $(a',b') \in A \times B$. Par la connexité par arcs de A et B, il existe des chemins $\gamma_A : [0\,;1] \to E$ et $\gamma_B : [0\,;1] \to E$ inscrits respectivement dans A et B vérifiant

$$\gamma_A(0) = a,\ \gamma_A(1) = a' \quad \text{et} \quad \gamma_B(0) = b,\ \gamma_B(1) = b'.$$

Considérons alors l'application

$$\gamma : \begin{cases} [0\,;1] \to E \times E \\ \quad t \mapsto \big(\gamma_A(t), \gamma_B(t)\big). \end{cases}$$

La fonction γ est continue car ses fonctions coordonnées le sont. Elle prend ses valeurs dans $A \times B$ et vérifie :

$$\gamma(0) = (a,b) \quad \text{et} \quad \gamma(1) = (a',b').$$

La fonction γ détermine donc un chemin inscrit dans $A \times B$ joignant (a,b) à (a',b'). La partie $A \times B$ est connexe par arcs.

(b) **méthode**

> L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs (Th. 9 p. 165).

Considérons l'application somme

$$\sigma\colon \begin{cases} E \times E \to E \\ (x, y) \mapsto x + y. \end{cases}$$

Cette application est continue car somme des deux fonctions continues

$$\pi_1\colon \begin{cases} E \times E \to E \\ (x, y) \mapsto x \end{cases} \quad \text{et} \quad \pi_2\colon \begin{cases} E \times E \to E \\ (x, y) \mapsto y. \end{cases}$$

La partie $A + B$ est l'image du connexe par arcs $A \times B$ par l'application continue σ, la partie $A + B$ est donc connexe par arcs.

Exercice 19 *

Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_n$ formé des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Solution

méthode

On montre que toute matrice diagonalisable peut être continûment reliée à la matrice nulle[1] par des matrices diagonalisables.

Soit $A \in \mathcal{D}_n$. On peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. Pour chaque $t \in [0\,;1]$, la matrice $D(t) = tD$ est diagonale et donc $A(t) = PD(t)P^{-1}$ est une matrice diagonalisable. Considérons alors l'application

$$\gamma\colon \begin{cases} [0\,;1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \mapsto A(t) = PD(t)P^{-1} = tA. \end{cases}$$

L'application γ est continue, prend ses valeurs dans $\mathcal{D}_n$ et vérifie :

$$\gamma(0) = \mathrm{O}_n \quad \text{et} \quad \gamma(1) = A.$$

Les matrices O_n et A peuvent être continûment reliées par un chemin inscrit $\mathcal{D}_n$. On peut alors affirmer, quitte à transiter par O_n, que n'importe quelles matrices diagonalisables peuvent être continûment reliées par un chemin inscrit dans $\mathcal{D}_n$. La partie $\mathcal{D}_n$ est connexe par arcs[2].

Exercice 20 **

(a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

(b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

1. Ou à la matrice I_n.
2. En fait $\mathcal{D}_n$ est une partie étoilée. On dit qu'une partie A est *étoilée* lorsqu'il existe un élément a dans A, tel que pour tout x dans A, le segment $[a\,;x]$ est entièrement inclus dans A. Les parties étoilées sont connexes par arcs.

Solution

(a) **méthode**

On peut montrer qu'une partie n'est pas connexe par arcs en observant que son image par une application continue ne l'est pas (Th. 9 p. 165).

L'application $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue et l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par celle-ci est $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs[1]. On en déduit que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas non plus connexe par arcs.

(b) **méthode**

On montre que toute matrice inversible peut être continûment reliée à la matrice identité par des matrices inversibles.

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Comme toute matrice complexe, la matrice A est trigonalisable. On peut donc écrire $A = PBP^{-1}$ avec P une matrice inversible et B une matrice triangulaire supérieure. Puisque les matrices A et B sont semblables, la matrice B est inversible et ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Commençons par définir un chemin joignant I_n à B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On note $b_{i,j}$ le coefficient général de la matrice B et l'on écrit ses coefficients diagonaux sous forme trigonométrique

$$b_{i,i} = r_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i} \quad \text{avec} \quad r_i = |b_{i,i}| > 0 \text{ et } \theta_i \in \mathbb{R}.$$

On pose ensuite, pour $t \in [0\,;1]$,

$$m_{i,j}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ tb_{i,j} & \text{si } i < j \\ r_i^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta_i} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

L'application $t \mapsto M(t) = \big(m_{i,j}(t)\big)$ est continue, prend la valeur I_n en $t = 0$, la valeur B en $t = 1$, et toutes ses valeurs prises sont des matrices inversibles car triangulaires supérieures à coefficients diagonaux non nuls.

L'application $\gamma\colon t \mapsto PM(t)P^{-1}$ définit alors un chemin continu, joignant I_n à A, et inscrit dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On peut conclure que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

5.6.5 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 21 *

Soit $M\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant, pour tout réel s,

$$^{t}M(s)M(s) = \mathrm{I}_n.$$

Montrer que la matrice $M'(s)$ n'est inversible pour aucune valeur de $s \in \mathbb{R}$.

1. Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles et $\mathbb{R}^*$ n'en est pas un.

Solution

Par dérivation d'un produit (Th. 14 p. 167), on a pour tout réel s

$$\left({}^tM(s)\right)'M(s) + {}^tM(s)M'(s) = \mathrm{O}_n.$$

Par dérivation d'une composition avec une application linéaire (Th. 13 p. 167) on a aussi

$$\left({}^tM(s)\right)' = {}^t\left(M'(s)\right).$$

On en déduit la relation

$${}^t\left(M'(s)\right)M(s) = -\,{}^tM(s)M'(s).$$

méthode

‖ On exploite cette relation pour établir $\det\left(M'(s)\right) = 0$.

Par les identités $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ on obtient

$$\det\left(M'(s)\right)\det\left(M(s)\right) = (-1)^{2n+1}\det\left(M(s)\right)\det\left(M'(s)\right).$$

Sachant $\det\left(M(s)\right) \neq 0$ (car $M(s)$ est inversible d'inverse ${}^tM(s)$, c'est une matrice orthogonale de déterminant ± 1) on conclut $\det\left(M'(s)\right) = 0$.

Finalement, la matrice $M'(s)$ n'est pas inversible.

Exercice 22 **

Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' sont bornées. On pose

$$M_0 = \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad M_2 = \|f''\|_\infty\,.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir que pour tout $h > 0$

$$\left\|f'(x)\right\| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

(b) En déduire que f' est bornée et

$$\|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}.$$

(c) En améliorant l'étude qui précède, montrer

$$\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$$

Solution

(a) **méthode**

‖ On utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et de dérivée seconde bornée. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre x et $x+h$, on obtient

$$\left\|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right\| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2.$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} h\left\|f'(x)\right\| &= \left\|f(x+h) - f(x) - \left(f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right)\right\| \\ &\leqslant \|f(x+h)\| + \|f(x)\| + \frac{h^2}{2}M_2 \leqslant 2M_0 + \frac{h^2}{2}M_2. \end{aligned}$$

En divisant par $h > 0$, on conclut

$$\left\|f'(x)\right\| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

(b) L'inégalité ci-dessus est optimale lorsque l'on choisit la valeur de h minimisant la fonction exprimant le second membre. Le calcul de ce minimum conduit à traiter séparément les cas $M_0 = 0$ et $M_2 = 0$.

Si $M_0 = 0$, la fonction f est nulle, sa dérivée est nulle donc bornée et l'inégalité voulue est vraie.

Si $M_2 = 0$, la fonction f est affine et bornée sur $\mathbb{R}$ dont constante. Sa dérivée est alors nulle et l'inégalité voulue est encore vraie

Enfin, si $M_0M_2 \neq 0$, la fonction $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ atteint un minimum en $h = 2\sqrt{M_0/M_2}$ et sa valeur est $2\sqrt{M_0M_2}$. On en déduit

$$\|f'\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left\|f'(x)\right\| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}.$$

(c) Si $M_0 = 0$ ou $M_2 = 0$, on conclut comme au-dessus. On suppose désormais M_0 et M_2 strictement positifs.

méthode

‖ On utilise deux inégalités de Taylor-Lagrange symétriques.

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ d'une part, et entre x et $x-h$ d'autre part, on obtient

$$\underbrace{\left\|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right\|}_{=I(x,h)} \leqslant \frac{h^2}{2}M_2 \quad \text{et} \quad \underbrace{\left\|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right\|}_{=J(x,h)} \leqslant \frac{h^2}{2}M_2.$$

Par ces deux inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} 2h\left\|f'(x)\right\| &= \left\|f(x+h) - f(x-h) - I(x,h) + J(x,h)\right\| \\ &\leqslant \left\|f(x+h)\right\| + \left\|f(x-h)\right\| + \left\|I(x,h)\right\| + \left\|J(x,h)\right\| \leqslant 2M_0 + h^2M_2. \end{aligned}$$

En prenant $h = \sqrt{2M_0/M_2}$ réel non nul, on conclut

$$\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$$

5.6.6 Arcs paramétrés

Dans les études qui suivent, on suppose le plan géométrique muni d'un repère orthonormé.

Exercice 23 ** (Une ellipse)

Soit a et b deux réels strictement positifs avec $a > b$

(a) Montrer que le système

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

définit pour t parcourant $\mathbb{R}$ un paramétrage de la courbe d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(b) Exploiter ce paramétrage pour donner l'allure de cette courbe.

On pose $c > 0$ tel que $a^2 = b^2 + c^2$ et l'on introduit les deux points F et F' de l'axe des abscisses situés à la distance c de l'origine.

(c) Vérifier que la courbe étudiée est exactement celle constituée des points M satisfaisant

$$MF + MF' = 2a.$$

Solution

(a) **méthode**

> On vérifie que les points de l'arc paramétré figurent sur la courbe et inversement.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, si $M(t)$ est le point de paramètre t, ses coordonnées $x = a\cos t$ et $y = b\sin t$ vérifient l'équation définissant la courbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Ainsi, les points du paramétrage figurent sur la courbe.

Inversement, soit M un point de coordonnées (x, y) figurant sur la courbe. Posons $\alpha = x/a$ et $\beta = y/b$. On a $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ et il existe donc un réel t tel que

$$\alpha = \cos t \quad \text{et} \quad \beta = \sin t.$$

Le point M correspond alors au point $M(t)$ du paramétrage.

(b) Posons $x(t) = a\cos t$ et $y(t) = b\sin t$ avec $t \in \mathbb{R}$. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'arc paramétré étudié est lui aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.

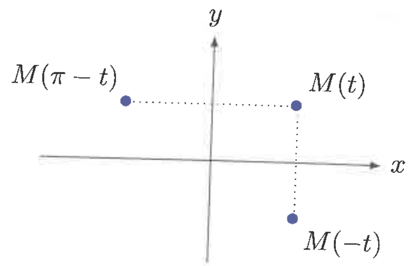
méthode

> Par périodicité, puis symétrie, on réduit l'intervalle où évolue le paramètre t.

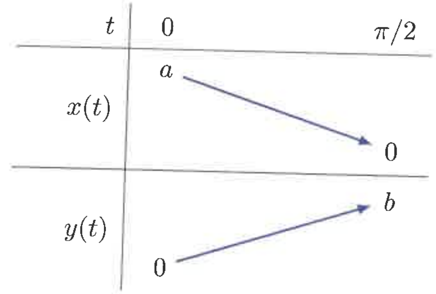
Les fonctions x et y sont 2π-périodiques. Les points $M(t)$ et $M(t+2\pi)$ sont confondus et l'on peut limiter l'étude à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

La fonction x est paire et la fonction y est impaire. Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;\pi]$, la courbe obtenue sera complétée par symétrie.

Enfin, on a $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. Les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;\pi/2]$, la courbe obtenue sera complétée par symétrie.



Sur $[0\,;\pi/2]$ les variations des fonctions x et y sont résumées dans le tableau ci-dessous :



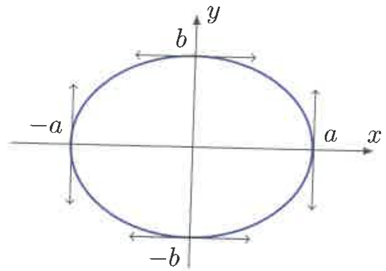
méthode

> On précise les tangentes aux points de paramètres $t = 0$ et $t = \pi/2$.

En $t = 0$, on a $x'(0) = 0$ et $y'(0) = b > 0$. Le point de paramètre 0 est régulier et la tangente y est verticale.

En $t = \pi/2$, on a $x'(\pi/2) = -a < 0$ et $y'(\pi/2) = 0$. Le point de paramètre $\pi/2$ est régulier et la tangente y est horizontale.

On dispose alors de suffisamment d'informations géométriques pour donner l'allure de la courbe ci-contre[1].



(c) Quitte à échanger F et F' considérons F de coordonnées $(c, 0)$ et F' de coordonnées $(-c, 0)$.

Soit M un point de la courbe de coordonnées $(a\cos t, b\sin t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. On a

$$MF^2 = (a\cos t - c)^2 + (b\sin t)^2 = a^2\cos^2 t - 2ac\cos t + c^2 + b^2\sin^2 t.$$

En écrivant $b^2\sin^2 t = a^2\sin^2 t - c^2\sin^2 t$, on obtient

$$MF^2 = a^2 - 2ac\cos t + c^2\cos^2 t = (a - c\cos t)^2.$$

1. L'ellipse est une trajectoire possible d'un mobile soumis à une force centrale tel un satellite.

De même, on a

$$MF'^2 = (a + c\cos t)^2.$$

Enfin, puisque $a > c$,

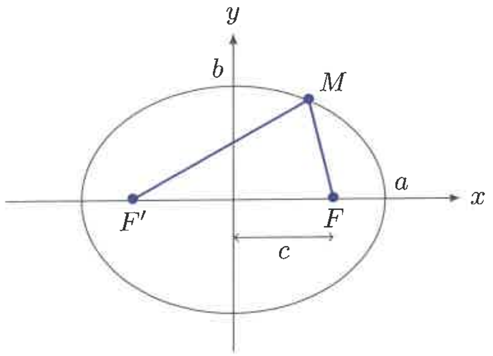
$$MF + MF' = \underbrace{|a - c\cos t|}_{>0} + \underbrace{|a + c\cos t|}_{>0} = 2a.$$

Inversement, soit M un point de coordonnées (x, y) tel que $MF + MF' = 2a$. On peut déterminer $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = a\cos t$. En s'inspirant des calculs qui précèdent, on écrit

$$MF^2 = (a - c\cos t)^2 + y^2 - b^2\sin^2 t \quad \text{et} \quad MF'^2 = (a + c\cos t)^2 + y^2 - b^2\sin^2 t.$$

Si $y^2 > b^2\sin^2 t$ alors $MF > a - c\cos t$ et $MF' > a + c\cos t$ donc $MF + MF' > 2a$. À l'inverse, si $y^2 < b^2\sin^2 t$, on obtient $MF + MF' < 2a$.

On a donc nécessairement $y^2 = b^2\sin^2 t$ et, quitte à considérer $-t$ au lieu de t, on a simultanément $x = a\cos t$ et $y = b\sin t$. Ainsi, M est un point de la courbe étudiée.



Une corde tendue de longueur $2a$ fixée aux extrémités F et F' permet de tracer l'ellipse.

Exercice 24 ** (Tractrice)

(a) Figurer la courbe définie par le paramétrage

$$\begin{cases} x = t - \operatorname{th} t \\ y = 1/\operatorname{ch} t. \end{cases}$$

(b) On note A le point d'intersection de l'axe (Ox) avec la tangente au point M de paramètre t de la courbe ci-dessus. Calculer la distance AM.

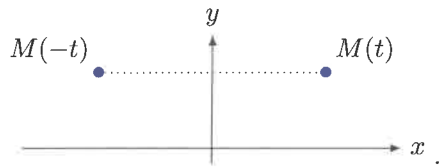
Solution

(a) Posons $x(t) = t - \operatorname{th} t$ et $y(t) = 1/\operatorname{ch} t$ avec $t \in \mathbb{R}$. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'arc paramétré étudié est lui aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.

méthode

On réduit le domaine d'étude par symétrie.

La fonction x est impaire tandis que la fonction y est paire. Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la courbe obtenue sera complétée par symétrie.



Pour $t \in [0\,;+\infty[$, on a

$$x'(t) = \operatorname{th}^2 t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y'(t) = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \leqslant 0.$$

Sur $[0\,;+\infty[$, les variations des fonctions x et y sont résumées dans le tableau ci-dessous

t	0	$+\infty$
$x(t)$	0 $\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	1 $\searrow$	0

En $t = 0$, on a $x'(0) = y'(0) = 0$. Le point de paramètre 0 n'est pas régulier.

méthode

Pour déterminer la tangente en un point de paramètre t_0 non régulier, on étudie la position limite de la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ quand t tend vers t_0. On peut par exemple étudier la limite de sa pente :

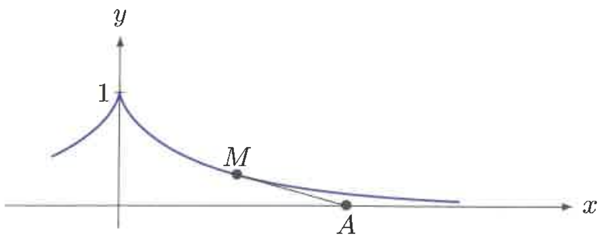
$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}.$$

On a

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{1/\operatorname{ch} t - 1}{t - \operatorname{th} t} = \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{\frac{1}{3}t^3} = \frac{-3}{2t} \to -\infty.$$

La tangente en le point de paramètre $t = 0$ est donc verticale.

Enfin, quand t tend vers $+\infty$, $x(t)$ tend vers $+\infty$ et $y(t)$ vers 0 par valeur supérieure, la courbe se rapproche donc par le dessus de l'axe des abscisses (droite asymptote). On dispose alors de suffisamment d'informations géométriques pour donner l'allure de la courbe :



(b) Pour $t \neq 0$, on a $\big(x'(t), y'(t)\big) \neq (0,0)$ et le point de paramètre t est régulier. La tangente en ce point a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - x(t) & x'(t) \\ y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Après quelques calculs, on obtient l'équation suivante (qui est aussi valable lorsque $t = 0$)

$$x + \operatorname{sh}(t) y = t.$$

Le point A a pour coordonnées $(t, 0)$ et la distance de A au point M est déterminée par

$$AM^2 = \big(x(t) - t\big)^2 + y(t)^2 = \operatorname{th}^2 t + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{\operatorname{sh}^2 t + 1}{\operatorname{ch}^2 t} = 1.$$

La longueur AM est donc constante égale à une unité[1].

5.7 Exercices d'approfondissement

Exercice 25 *

Soit u un endomorphisme d'un espace normé E de dimension finie. On suppose que pour tout vecteur x de E

$$\big\|u(x)\big\| \leqslant \big\|x\big\|.$$

Montrer que les espaces $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E)$ sont supplémentaires.

1. La tractrice est la courbe parcourue par un objet tenu par un fil lorsque l'on tire à vitesse constante sur l'autre extrémité du fil dans une direction donnée.

Solution

méthode

On montre que les espaces sont en somme directe avant de conclure par un argument de dimension.

Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E)$. Par l'appartenance au noyau, on sait $u(x) = x$. Par l'appartenance à l'image, on peut écrire $x = u(a) - a$ pour un certain vecteur a de E.

Puisque le vecteur x est invariant par u, on a $u^k(x) = x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc[1]

$$u^{k+1}(a) - u^k(a) = x.$$

En sommant ces relations pour k allant de 0 jusqu'à $n-1$, on obtient après télescopage

$$\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\big(u^{k+1}(a) - u^k(a)\big)}_{=x} = u^n(a) - a = nx.$$

On a alors

$$\|x\| = \frac{1}{n}\big\|u^n(a) - a\big\| \leqslant \frac{1}{n}\Big(\big\|u^n(a)\big\| + \big\|a\big\|\Big) \leqslant \frac{2}{n}\,\|a\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car l'hypothèse du sujet donne $\big\|u^n(a)\big\| \leqslant \big\|u^{n-1}(a)\big\| \leqslant \cdots \leqslant \big\|a\big\|$.

Ainsi, $x = 0_E$ et donc

$$\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) = \{0_E\}.$$

De plus, la formule du rang donne

$$\dim \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E) = \dim E$$

et l'on peut conclure que les deux espaces $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id}_E)$ sont supplémentaires.

Exercice 26 ** (Théorème de Darboux)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $U = \big\{(x,y) \in I^2 \;\big|\; x < y\big\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

On note $\tau : U \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\tau(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

(b) Justifier $\tau(U) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(U)}$.

(c) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle[2] de $\mathbb{R}$.

1. Les exposants sont à comprendre au sens de la composition des applications.
2. En conséquence, bien qu'une fonction dérivée ne soit pas forcément une fonction continue, elle satisfait l'affirmation du théorème des valeurs intermédiaires.

Solution

(a) **méthode**

On vérifie que la partie U est convexe.

Soit $a = (x_a, y_a)$ et $b = (x_b, y_b)$ deux éléments de U. Pour tout $t \in]0;1[$, on a

$$(1-t)a + tb = \big(\underbrace{(1-t)x_a + tx_b}_{=x_c}, \underbrace{(1-t)y_a + ty_b}_{=y_c}\big)$$

avec x_c et y_c éléments de I et, sachant $x_a < y_a$ et $x_b < y_b$, on vérifie $x_c < y_c$ car les facteurs t et $1-t$ sont tous deux strictement positifs. On en déduit que le segment d'extrémités a et b est inclus dans U. La partie U est convexe et donc connexe par arcs.

(b) **méthode**

Par le théorème des accroissements finis, un taux d'accroissement est un nombre dérivé.

Soit $(x, y) \in U$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f entre x et y, on peut affirmer l'existence d'un réel c strictement compris entre x et y tel que

$$\tau(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \in f'(I).$$

Ainsi, on a la première inclusion : $\tau(U) \subset f'(I)$.

De plus, tout nombre dérivé est limite d'un taux d'accroissement et est donc adhérent à l'ensemble des valeurs prises par l'application taux d'accroissement. Cette affirmation fournit la seconde inclusion.

(c) **méthode**

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses intervalles.

Puisque l'application τ est continue sur le connexe par arcs U, son image $\tau(U)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle. L'encadrement

$$\tau(U) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(U)}$$

assure alors que $f'(I)$ est cet intervalle de $\mathbb{R}$ auquel on a éventuellement adjoint ses extrémités[1].

1. Cette démonstration du théorème de Darboux pourra être comparée à celle vue dans le sujet 19 du chapitre 8 de l'ouvrage *Exercices d'analyse MPSI*.

Exercice 27 ** (Norme triple)

On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace des endomorphismes continus d'un espace normé E non réduit à 0_E. Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on définit la *norme triple* de u par

$$|||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

(a) Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$. Vérifier que la borne supérieure définissant $|||u|||$ existe et que, pour tout vecteur x de E,

$$\|u(x)\| \leqslant |||u|||\,\|x\|.$$

(b) Montrer que $|||\cdot|||$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ et que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$,

$$|||u \circ v||| \leqslant |||u|||\,|||v|||.$$

(c) Application : Soit u et v deux endomorphismes continus de E tels qu'il existe λ dans $\mathbb{K}$ pour lequel

$$u \circ v - v \circ u = \lambda \mathrm{Id}_E.$$

Calculer $u^n \circ v - v \circ u^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que u et v commutent.

Solution

(a) La borne supérieure définissant $|||u|||$ existe car celle-ci porte sur une partie de $\mathbb{R}$, non vide (car E n'est pas réduit à l'espace nul) et majorée (car la continuité de l'endomorphisme u assure l'existence d'un réel k tel que $\|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$ pour tout vecteur x).

De plus, une borne supérieure étant un majorant, on peut affirmer, pour tout x vecteur de $E \setminus \{0_E\}$,

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||u|||.$$

On en déduit $\|u(x)\| \leqslant |||u|||\,\|x\|$ et cette inégalité est évidemment aussi vraie[1] si le vecteur x est nul.

(b) Par ce qui précède, on sait déjà que l'application $|||\cdot|||$ est bien définie de $\mathcal{L}_c(E)$ vers $\mathbb{R}_+$.

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|||u||| = 0$. Pour tout x dans E, on a $\|u(x)\| \leqslant |||u|||\,\|x\| = 0$ et donc $u(x) = 0_E$. Ainsi, l'endomorphisme u est nul.

Au surplus, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$,

$$|||\lambda u||| = \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \Big(\underbrace{|\lambda|}_{\geqslant 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}\Big) = |\lambda| \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = |\lambda|\,|||u|||$$

1. $|||u|||$ est le plus petit réel k vérifiant $\|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$ pour tout $x \in E$.

et

$$\begin{aligned}|||u+v||| &\leqslant \sup_{x\in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|u(x)\|+\|v(x)\|}{\|x\|}\\ &\leqslant \sup_{x\in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x\in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|v(x)\|}{\|x\|} = |||u|||+|||v|||.\end{aligned}$$

L'application $|||\cdot|||$ définit bien une norme sur l'espace $\mathcal{L}_c(E)$. Enfin, pour tout $x\in E$,

$$\|(u\circ v)(x)\| = \|u(v(x))\| \leqslant |||u|||\,\|v(x)\| \leqslant |||u|||\,|||v|||\,\|x\|$$

et donc

$$|||u\circ v||| = \sup_{x\in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|(u\circ v)(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||u|||\,|||v|||.$$

(c) **méthode**

Par récurrence, on vérifie l'identité

$$u^n\circ v - v\circ u^n = n\lambda u^{n-1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*. \tag{$*$}$$

L'initialisation est vérifiée par hypothèse pour $n=1$ et l'hérédité s'obtient par

$$u^{n+1}\circ v - v\circ u^{n+1} = u\circ \underbrace{\left(u^n\circ v - v\circ u^n\right)}_{=n\lambda u^{n-1}} + \underbrace{\left(u\circ v - v\circ u\right)}_{=\lambda \mathrm{Id}_E}\circ u^n.$$

En considérant la norme triple de l'identité $(*)$, on peut écrire

$$n\,|\lambda|\,|||u^{n-1}||| = |||u^n\circ v - v\circ u^n||| \leqslant |||u^{n-1}|||\left(|||u\circ v||| + |||v\circ u|||\right).$$

Si les $|||u^{n-1}|||$ sont tous non nuls, on simplifie

$$n\,|\lambda| \leqslant \underbrace{|||u\circ v||| + |||v\circ u|||}_{\text{constante}}$$

et nécessairement λ est nul car sinon le premier membre tend vers $+\infty$ avec n.

Sinon, considérons le plus petit $n\geqslant 1$ tel que $|||u^n|||=0$. On a u^n nul et u^{n-1} non nul, ce qui, injecté dans l'identité $(*)$ donne à nouveau[1] $\lambda=0$.

On peut alors conclure que u et v commutent.

Exercice 28 **

Soit (A_k) une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant vers $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que les matrices A_k sont toutes de même rang p. Montrer $\operatorname{rg}(A)\leqslant p$.

Que dire de la nature topologique de l'ensemble $\mathcal{R}_p(\mathbb{K})$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rangs inférieurs à p ?

1. Si l'espace E est de dimension finie, un calcul de trace donne plus immédiatement $\lambda=0$.

Solution

méthode

Le rang d'une matrice est l'ordre maximal des déterminants non nuls extraits de celle-ci.

Notons r le rang de la matrice limite A. Celle-ci possède un déterminant extrait non nul de taille r. Le déterminant extrait correspondant des matrices A_k converge vers le précédent et sont donc non nuls à partir d'un certain rang. Or les matrices A_k étant de rang p, l'ordre d'un déterminant non nul extrait de celles-ci est nécessairement inférieur à p. On conclut $r\leqslant p$.

L'ensemble $\mathcal{R}_p(\mathbb{K})$ est une partie fermée car possède les limites de ses suites convergentes.

Exercice 29 ***

Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution

Commençons par montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ce qui suffit à déterminer son adhérence.

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ arbitraire. La matrice A est trigonalisable et l'on peut donc écrire $A=PTP^{-1}$ avec P inversible et T triangulaire supérieure.

méthode

En modifiant un peu la diagonale de T, on peut se ramener à une matrice proche de T à valeurs propres deux à deux distinctes donc diagonalisable.

Pour $p\in\mathbb{N}^*$, considérons les matrices

$$D_p = \begin{pmatrix} 1/p & & & (0)\\ & 2/p & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & n/p\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad A_p = P(T+D_p)P^{-1}.$$

Les valeurs propres de A_p sont les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire supérieure $T+D_p$. Lorsque deux coefficients diagonaux de T sont égaux, les coefficients correspondants de $T+D_p$ ne le sont pas. Lorsque deux coefficients diagonaux de T sont différents, les coefficients correspondants de $T+D_p$ le sont aussi sous réserve de choisir p assez grand. Finalement, on peut affirmer qu'à partir d'un certain rang les matrices A_p sont diagonalisables. Enfin, la suite (A_p) convergeant vers A, on peut conclure que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Étudions maintenant l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

méthode

On montre que l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est constitué des matrices possédant n valeurs propres distinctes.

Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{Card}(\operatorname{Sp}(A)) < n$.

On peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale de coefficients diagonaux les valeurs propres de A :

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

La matrice A possédant moins de n valeurs propres, les scalaires λ_i ne sont pas deux à deux distincts. Quitte à permuter ceux-ci, supposons $\lambda_1 = \lambda_2$ et notons λ cette valeur commune. Considérons ensuite les matrices

$$T_p = D + \begin{pmatrix} 0 & 1/p & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_p = PD_pP^{-1} \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*.$$

La matrice T_p n'est pas diagonalisable car $\dim E_\lambda(T_p) < m_\lambda(D_p)$. La matrice semblable A_p n'est donc pas plus diagonalisable. Cependant, la suite (A_p) converge vers A. On peut conclure que la matrice A n'est pas intérieure à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{Card}(\operatorname{Sp}(A)) = n$.

Supposons par l'absurde que la matrice A n'est pas intérieure à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Il existe alors une suite (A_p) de matrices non diagonalisables convergeant vers A. Puisque ces matrices A_p ne sont pas diagonalisables, leurs valeurs propres ne peuvent être deux à deux distinctes. Notons λ_p une valeur propre au moins double de A_p.

méthode

On extrait de (λ_p) une suite convergeant vers une valeur propre double de A.

La suite (A_p) convergeant vers A, les coefficients du polynôme caractéristique χ_{A_p} convergent[1] vers les coefficients respectifs de χ_A. En particulier, ils sont bornés. On en déduit que la suite de racines (λ_p) est bornée[2].

Le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'extraire une suite $(\lambda_{\varphi(k)})$ convergeant vers une certaine limite λ. Les $\lambda_{\varphi(k)}$ étant racines au moins doubles de $\chi_{A_{\varphi(k)}}$, on a

$$\chi_{A_{\varphi(k)}}(\lambda_{\varphi(k)}) = \chi'_{A_{\varphi(k)}}(\lambda_{\varphi(k)}) = 0$$

ce qui donne à la limite

$$\chi_A(\lambda) = \chi'_A(\lambda) = 0.$$

C'est absurde car les valeurs propres de A sont supposées simples.

On peut alors conclure que la matrice A est intérieure à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

1. L'application $M \mapsto \chi_M$ est continue comme cela est détaillé dans le sujet qui suit.
2. En effet, si ξ est racine du polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, on peut borner cette racine par les coefficients de P : $|\xi| \leqslant \max(1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|)$ voir sujet 18 du chapitre 5 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*. On peut aussi employer la norme introduite dans le sujet 9 p. 115 et vérifier $|\lambda_p| \leqslant \|A_p\|$ pour affirmer que la suite (λ_p) est bornée.

Exercice 30 ***

(a) Montrer que l'application qui à une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe son polynôme caractéristique χ_M est continue.

On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Montrer l'égalité $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(c) Montrer l'égalité $\chi_A(A) = \mathrm{O}_n$ (Théorème de Cayley-Hamilton).

Solution

(a) Le polynôme caractéristique de $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est le polynôme unitaire de degré n défini par l'identité

$$\chi_M(x) = \det(x\mathrm{I}_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (x\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i}) \right).$$

En développant ce calcul, on observe que les coefficients du polynôme χ_M sont des sommes de produits de coefficients de la matrice M. Les coefficients de χ_M sont donc des fonctions continues de la matrice M et l'application qui à M associe le polynôme χ_M de $\mathbb{C}_n[X]$ est continue[1].

(b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si A est inversible, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I}_n - AB) = \det(A)\det(\lambda A^{-1} - B).$$

En échangeant les deux déterminants par commutation du produit de deux scalaires

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda A^{-1} - B)\det(A) = \det(\lambda\mathrm{I}_n - BA) = \chi_{BA}(\lambda).$$

On en déduit que les deux polynômes χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux[2].

Réalisons l'extension de cette égalité par densité. L'application qui à une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe le produit AB est continue car linéaire au départ d'un espace de dimension finie. Par composition avec l'application $M \mapsto \chi_M$, on obtient la continuité de l'application $A \mapsto \chi_{AB}$. De même, on justifie la continuité de $A \mapsto \chi_{BA}$. Ces deux applications continues étant égales sur la partie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dense, elles sont égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. L'application opère entre deux espaces de dimensions finies. Les normes y étant équivalentes, il n'est pas nécessaire de préciser les normes utilisées.
2. Un argument plus rapide est aussi possible : les matrices AB et BA sont semblables car AB s'écrit $A(BA)A^{-1}$, elles ont donc le même polynôme caractéristique.

(c) Si la matrice A est diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$ et alors

$$\chi_A(A) = \begin{pmatrix} \chi_A(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \chi_A(\lambda_n) \end{pmatrix} = \mathrm{O}_n.$$

Si la matrice A est diagonalisable, on écrit $A = PDP^{-1}$ avec P inversible, D diagonale et alors

$$\chi_A(A) = \chi_A\big(PDP^{-1}\big) = P\chi_A(D)P^{-1} = P\chi_D(D)P^{-1} = \mathrm{O}_n$$

car les matrices A et D ont le même polynôme caractéristique puisqu'elles sont semblables.

Réalisons maintenant l'extension de cette égalité par densité. L'application d'évaluation

$$E\colon \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ (P, M) \mapsto P(M) \end{cases}$$

est continue par opérations sur les fonctions continues. En effet, cette application se déduit notamment des applications linéaires qui à un polynôme associe l'un de ses coefficients et des applications qui à une matrice associe l'une de ses puissances.

Par composition avec E, on peut affirmer que l'application qui à une matrice A associe $\chi_A(A)$ est continue [1]. Cette application continue étant nulle sur la partie dense $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, elle est nulle sur l'intégralité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On peut aussi dire que les coefficients de $\chi_A(A)$ sont des sommes de produits de coefficients de A.

CHAPITRE 6

Compacité

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$.
Les notions qui suivent sont inchangées lorsque l'on passe d'une norme à une norme équivalente.

6.1 Partie compacte

6.1.1 Valeurs d'adhérences d'une suite

Définition

On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) d'une suite $u = (u_n)$ d'éléments E toute suite $v = (v_k)$ pour laquelle il existe une fonction $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant $v_k = u_{\varphi(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, on peut extraire d'une suite (u_n) une suite dont les éléments sont exactement ceux dont les indices figurent dans A. Ainsi, le choix d'une infinité d'indices suffit à définir une suite extraite.

Définition

On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite $u = (u_n)$ d'éléments de E toute limite d'une suite convergente extraite de u.

Les valeurs d'adhérence d'une suite sont les valeurs au voisinage desquelles s'accumule une infinité de termes de la suite.

Théorème 1
Si une suite (u_n) converge, toute suite extraite de (u_n) converge vers la même limite. En conséquence, une suite convergente possède une unique valeur d'adhérence : sa limite.

Une suite possédant au moins deux valeurs d'adhérence (ou n'en possédant aucune) est divergente.

6.1.2 Partie compacte

Définition
Une partie K de E est dite *compacte* si toute suite d'éléments de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K. On dit encore que K est un *compact* de E.

Dans une partie compacte K, on ne peut répartir les éléments d'une suite sans qu'il y ait accumulation au voisinage d'un point de K.

Théorème 2
Toute partie compacte est fermée et bornée.

Aussi, un partie fermée incluse dans un compact est compacte.

Théorème 3
Si $K_1, \dots, K_p$ sont des parties compactes d'espaces normés $E_1, \dots, E_p$ alors le produit cartésien $K = K_1 \times \dots \times K_p$ est une partie compacte de l'espace normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$.

6.1.3 Compacité en dimension finie

Théorème 4
En dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Par exemple, en dimension finie, les boules fermées sont compactes. Ce résultat n'est plus vrai en dimension infinie (voir sujet 18 p. 220).
On peut alors proposer une extension du Théorème de Bolzano-Weierstrass vu en première année :

Théorème 5 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
En dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

6.1.4 Applications

Les deux résultats qui suivent sont des conséquences de la théorie de la compacité.

Théorème 6
Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé est une partie fermée.

Théorème 7
Si (u_n) est une suite d'éléments d'une partie compacte K, on a équivalence entre
(i) la suite (u_n) converge ;
(ii) la suite (u_n) admet une unique valeur d'adhérence.

En dimension finie, une suite bornée qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence converge vers celle-ci.

6.2 Continuité et compacité

6.2.1 Image continue d'un compact

Théorème 8
L'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

En conséquence, une fonction définie et continue sur un compact y est bornée.

Théorème 9 (Théorème des bornes atteintes)
Toute fonction à valeurs réelles définie et continue sur un compact non vide admet un minimum et un maximum : on dit qu'elle est bornée et qu'elle atteint ses bornes.

Ce résultat est souvent utilisé pour établir rapidement qu'un « inf » est un « min » ou qu'un « sup » est un « max ».

6.2.2 Uniforme continuité

Définition
Une application $f\colon X \subset E \to E'$ est dite *uniformément continue*[1] si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x,y) \in X^2, \quad \|y - x\|_E \leqslant \alpha \implies \|f(y) - f(x)\|_{E'} \leqslant \varepsilon.$$

Toute fonction uniformément continue est continue.
Les fonctions lipschitziennes sont des fonctions uniformément continues.

1. On peut aussi dire qu'une fonction est *uniformément continue sur* une partie X' pour insister sur le domaine de définition de la fonction ou pour affirmer que c'est sa restriction au départ de X' qui est uniformément continue.

Théorème 10 (Théorème de Heine)
Toute fonction définie et continue sur un compact y est uniformément continue.

6.3 Exercices d'apprentissage

Exercice 1
Soit F une partie fermée et K une partie compacte d'un espace normé E.
Établir que

$$F+K=\{x+y \mid x\in F \text{ et } y\in K\}$$

est une partie fermée.

Solution

méthode
On montre que la partie est fermée en observant qu'elle contient les limites de ses suites convergentes.

Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de $F+K$ et u sa limite. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on peut écrire $u_n=x_n+y_n$ avec $x_n\in F$ et $y_n\in K$. On souhaite établir que la limite u s'écrit aussi de cette forme. Cependant, la convergence de la suite (u_n) n'oblige pas celles des suites (x_n) et (y_n) !

méthode
Lorsque l'on souhaite qu'une suite converge mais que cette convergence peut ne pas être vraie, un argument de compacité est utile pour extraire de la suite étudiée une sous-suite convergente.

La suite (y_n) étant une suite d'éléments du compact K, on peut en extraire une suite convergente $(y_{\varphi(k)})$ de limite y élément de K. Par différence, la suite $(x_{\varphi(k)})$ est alors convergente avec

$$x_{\varphi(k)}=u_{\varphi(k)}-y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} u-y.$$

Or, la suite $(x_{\varphi(k)})$ est une suite du fermé F, sa limite $x=u-y$ est donc élément de F.

Finalement, on est parvenu à écrire $u=x+y$ avec x dans F et y dans K. On peut donc affirmer que la partie $F+K$ est fermée.

Exercice 2
Soit E un espace normé de dimension finie. Montrer que la sphère unité

$$S=\{x\in E \mid \|x\|=1\}$$

est une partie compacte.

Solution

méthode
En dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées (Th. 4 p. 204).

La partie S est évidemment bornée. Elle aussi fermée. En effet, soit (x_n) une suite convergente d'éléments de S et x sa limite. Pour tout naturel n, on a $\|x_n\|=1$. Par continuité de la norme, on peut passer à la limite pour obtenir $\|x\|=1$. Ainsi, S contient les limites de ses suites convergentes, c'est une partie fermée [1].

Finalement, S est une partie fermée et bornée en dimension finie donc compacte.

Exercice 3
Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E et $x\in E$. On définit la distance du vecteur x à la partie K par

$$d(x,K)=\inf_{y\in K}\|y-x\|.$$

Montrer qu'il existe $y_0\in K$ tel que

$$d(x,K)=\|y_0-x\|.$$

Solution

méthode
Il s'agit d'établir qu'une borne inférieure est un minimum : on exploite le théorème des bornes atteintes (Th. 9 p. 205).

L'application à valeurs réelles $f\colon y\mapsto\|y-x\|$ est définie et continue sur le compact non vide K. Par le théorème des bornes atteintes, cette fonction admet un minimum en un certain y_0 élément de K. On a alors

$$f(y_0)=\min_{y\in K}f(y)=\inf_{y\in K}f(y).$$

Autrement dit, $\|y_0-x\|=d(x,K)$.

Exercice 4
Soit $u=(u_n)$ une suite réelle bornée telle que

$$u_n+\frac{1}{2}u_{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Montrer que la suite u converge.

1. On peut aussi observer que S est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue norme.

Solution

méthode

On montre que 0 est l'unique valeur d'adhérence de la suite u (Th. 7 p. 205).

La suite u étant bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass (Th. 5 p. 204) assure l'existence d'au moins une valeur d'adhérence. Montrons que celle-ci ne peut qu'être 0.

Soit a une valeur d'adhérence de la suite u et $(u_{\varphi(k)})$ une suite extraite convergeant vers celle-ci. On peut écrire

$$u_{2\varphi(k)} = 2\underbrace{\left(u_{\varphi(k)} + \frac{1}{2}u_{2\varphi(k)}\right)}_{\to 0} - 2u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} -2a.$$

On en déduit que $-2a$ est aussi valeur d'adhérence de u. En répétant ce raisonnement, on obtient successivement $4a, -8a, \ldots$ valeurs d'adhérence de u. Or la suite u est bornée, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est aussi borné et nécessairement $a = 0$.

Finalement, u est une suite bornée d'un espace de dimension finie possédant une unique valeur d'adhérence, elle converge donc vers celle-ci.

6.4 Exercices d'entraînement

6.4.1 Partie compacte

Exercice 5 *

Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = \mathrm{I}_n\right\}$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution

méthode

On vérifie que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée (Th. 4 p. 204) d'un espace de dimension finie.

La partie $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est incluse dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie[1] n^2.

La partie $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est fermée car contient les limites de ses suites convergentes[2]. En effet, soit (A_p) une suite convergente d'éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et A sa limite. Pour tout naturel p, on a ${}^tA_pA_p = \mathrm{I}_n$ ce qui donne à la limite, ${}^tAA = \mathrm{I}_n$ et donc $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Pour établir que la partie $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée, il convient de choisir[3] une norme sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prenons, la norme euclidienne[4] associée au produit scalaire canonique :

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}.$$

1. Attention à ne pas dire que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie : il ne s'agit pas d'un espace vectoriel !
2. C'est aussi l'image réciproque du fermé $\{\mathrm{I}_n\}$ par l'application continue $A \mapsto {}^tAA$.
3. Ce choix n'importe pas car toutes les normes sont équivalentes sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. Cependant, ce choix est pratique pour pouvoir exprimer que la partie est bornée.
4. On peut aussi choisir la norme infinie sur les coefficients de la matrice et exploiter que les coefficients d'une matrice orthogonale sont tous compris entre -1 et 1.

Pour toute matrice $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n)} = \sqrt{n}.$$

La partie $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est donc bornée et l'on peut conclure qu'elle est compacte.

Exercice 6 *

Soit K une partie compacte d'un espace normé E de dimension finie et $r > 0$. Montrer la compacité de la partie

$$K_r = \bigcup_{x\in K} B_f(x, r).$$

Solution

Puisque l'espace E est dimension finie, il nous suffit de montrer que la partie K_r est fermée et bornée.

La partie K est compacte et donc bornée. On peut introduire un réel M tel que $\|x\| \leqslant M$ pour tout élément x de K. On a alors $\|y\| \leqslant M + r$ pour tout élément y de K_r. En effet, si y est un élément de K_r, il existe x dans K tel que y appartienne à la boule fermée $B_f(x, r)$ et donc

$$\|y\| = \|x + y - x\| \leqslant \|x\| + \|y - x\| \leqslant M + r.$$

Ainsi, la partie K_r est bornée. Reste à montrer que c'est aussi une partie fermée.

Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de K_r et y sa limite. Pour tout naturel n, il existe x_n dans K tel que $y_n \in B_f(x_n, r)$.

méthode

On souhaite que la suite (x_n) converge mais cela peut ne pas être vrai : on raisonne avec une extraction convergente.

Puisque la partie K est compacte, on peut extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\varphi(k)})$ convergeant vers un élément x de K. Par extraction d'une suite convergente, la suite $(y_{\varphi(k)})$ converge encore vers y. Or, pour tout naturel k, $y_{\varphi(k)}$ est élément de $B_f(x_{\varphi(k)}, r)$ et donc

$$\left\|y_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k)}\right\| \leqslant r.$$

À la limite, on obtient

$$\|y - x\| \leqslant r$$

et donc y est élément de $B_f(x, r)$ donc de K_r.

Finalement, la partie K_r est fermée car contient les limites de ses suites convergentes et l'on peut conclure qu'il s'agit d'une partie compacte.

6.4.2 Valeur d'adhérence

Exercice 7 *

On munit l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ des normes données par les relations

$$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)| \quad \text{et} \quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$$

et l'on considère la suite des monômes $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Vérifier que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et qu'elle converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_1$.

(b) La suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède-t-elle une valeur d'adhérence pour $\|\cdot\|_\infty$?

Solution

(a) La suite (X^n) est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$ car

$$\|X^n\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |t^n| = 1.$$

La suite (X^n) converge vers le polynôme nul pour $\|\cdot\|_1$ car

$$\|X^n - 0\|_1 = \int_0^1 |t^n|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(b) **méthode**

Si une norme N_1 est dominée par une norme N_2, une valeur d'adhérence pour N_2 est aussi une valeur d'adhérence pour N_1.

Pour tout polynôme P, on a

$$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|P\|_\infty\,\mathrm{d}t = \|P\|_\infty$$

et donc la norme $\|\cdot\|_1$ est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Si P est une valeur d'adhérence de la suite (X^n) pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, il existe une suite extraite $(X^{\varphi(k)})$ convergeant vers P pour $\|\cdot\|_\infty$. La norme $\|\cdot\|_1$ étant dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$, la suite extraite $(X^{\varphi(k)})$ converge aussi vers P pour $\|\cdot\|_1$. Or la suite (X^n) converge vers le polynôme nul pour $\|\cdot\|_1$, ses suites extraites convergent donc aussi vers le polynôme nul (Th. 1 p. 204). Par unicité de la limite, on conclut $P = 0$.

Or aucune suite extraite de (X^n) ne peut converger vers le polynôme nul pour $\|\cdot\|_\infty$ car $\|X^n\|_\infty = 1$ pour tout naturel n. On conclut que la suite (X^n) ne possède pas[1] de valeur d'adhérence pour $\|\cdot\|_\infty$.

1. Ce sujet illustre qu'en dimension infinie une suite bornée peut ne pas avoir de valeur d'adhérence.

Exercice 8 *

Soit A une partie fermée non vide d'un espace normé E de dimension finie. On étudie la distance d'un vecteur x à la partie A :

$$d(x, A) = \inf_{a\in A} \|x - a\|.$$

Montrer qu'il existe $\overline{a} \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - \overline{a}\|$.

Solution

méthode

On construit une suite (a_n) d'éléments de A telle que $\|x - a_n\|$ tend[1] vers $d(x, A)$.

Soit n un naturel non nul. Une borne inférieure étant le plus grand des minorants, le réel $d(x, A) + 1/n$ ne minore pas l'ensemble des $\|x - a\|$ pour a parcourant A. Il existe donc un élément a_n dans A tel que

$$d(x, A) \leqslant \|x - a_n\| < d(x, A) + \frac{1}{n}.$$

En faisant varier n, ceci détermine une suite (a_n) d'éléments de A telle que

$$\|x - a_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x, A).$$

méthode

On souhaiterait que la suite (a_n) converge mais cela peut ne pas être vrai : on raisonne par une extraction convergente.

La suite (a_n) est bornée car

$$\|a_n\| \leqslant \|x - a_n\| + \|x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x, A) + \|x\|.$$

De plus, l'espace E est de dimension finie. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (Th. 5 p. 204), on peut extraire de (a_n) une suite convergente $(a_{\varphi(k)})$. Notons $\overline{a}$ sa limite. D'une part, $\overline{a}$ appartient à A car $\overline{a}$ est limite d'une suite d'éléments du fermé A. D'autre part, par extraction d'une suite convergente,

$$\|x - \overline{a}\| = \lim_{k\to+\infty} \|x - a_{\varphi(k)}\| = d(x, A).$$

Finalement, $\overline{a}$ est un élément de A réalisant[2] la distance de x à A.

1. L'enjeu est d'établir qu'un inf est un min : on peut aussi utiliser le théorème de bornes atteintes mais il faut alors se positionner sur un compact non vide, par exemple $A \cap B_f(x, r)$ avec $r = d(x, A) + 1$.

2. En dimension finie, la distance à une partie fermée est atteinte. Ce résultat n'est plus vrai en dimension infinie (voir sujet 27 p. 132).

Exercice 9 **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la suite (A^p) soit bornée. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k.$$

(a) Montrer que la suite (B_p) admet au moins une valeur d'adhérence B.

(b) Montrer que cette valeur d'adhérence B vérifie $B(\mathrm{I}_n - A) = \mathrm{O}_n$.

(c) En déduire que B correspond à la projection sur $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n)$.

(d) Conclure que la suite (B_p) converge vers B.

Solution

(a) **méthode**

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (Th. 5 p. 204), toute suite bornée d'un espace de dimension finie possède une valeur d'adhérence.

La suite (A^p) étant bornée, on peut introduire un réel M vérifiant $\|A^p\| \leqslant M$ pour tout naturel p. On a alors

$$\|B_p\| \leqslant \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\|A^k\| \leqslant \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} M = M.$$

La suite (B_p) est une suite bornée d'un espace de dimension finie, elle admet donc une valeur d'adhérence.

(b) Par télescopage

$$B_p(\mathrm{I}_n - A) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}(A^k - A^{k+1}) = \frac{1}{p}(\mathrm{I}_n - A^p)$$

et donc

$$\|B_p(\mathrm{I}_n - A)\| \leqslant \frac{1}{p}(\|\mathrm{I}_n\| + \|A^p\|) \leqslant \frac{1}{p}\underbrace{(\|\mathrm{I}_n\| + M)}_{\text{constante}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, on obtient

$$B_p(\mathrm{I}_n - A) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{O}_n.$$

Considérons une suite extraite de $(B_{\varphi(k)})$ convergeant vers la valeur d'adhérence B. D'une part, on a par extraction d'une suite convergente

$$B_{\varphi(k)}(\mathrm{I}_n - A) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{O}_n.$$

D'autre part, on a par produit de limites

$$B_{\varphi(k)}(\mathrm{I}_n - A) \xrightarrow[k\to+\infty]{} B(\mathrm{I}_n - A).$$

Par unicité de la limite, on obtient $B(\mathrm{I}_n - A) = \mathrm{O}_n$.

(c) **méthode**

On vérifie que B est une projection en calculant B^2.

Ce qui précède donne $B = BA$. Par une récurrence immédiate, $B = BA^k$ pour tout naturel k et l'on en déduit $BB_p = B$. En reprenant la suite extraite $(B_{\varphi(k)})$ convergeant vers B, la relation $BB_{\varphi(k)} = B$ donne à la limite $B^2 = B$. Ainsi, B est la matrice d'une projection.

méthode

Une projection projette sur son image parallèlement à son noyau.

Pour $X \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n)$, on a $AX = X$ puis $A^kX = X$ pour tout naturel k. On en déduit $B_pX = X$. En transitant par la suite extraite $B_{\varphi(k)}$, on obtient à la limite $BX = X$. Ainsi, on dispose de l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Im}(B).$$

Pour $Y \in \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n)$, on peut écrire $Y = (A - \mathrm{I}_n)X$ et alors $BY = B(A - \mathrm{I}_n)X = 0$ car $BA = B$. Ainsi, on a aussi l'inclusion

$$\mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}(B).$$

Par la formule du rang, on sait

$$\underbrace{\dim\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n)}_{\leqslant \dim\mathrm{Im}(B)} + \underbrace{\dim\mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n)}_{\leqslant \dim\mathrm{Ker}(B)} = n = \dim\mathrm{Im}(B) + \dim\mathrm{Ker}(B).$$

On a donc l'égalité des dimensions permettant d'affirmer

$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Im}(B) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}(B).$$

On peut alors conclure que B est la projection affirmée [1].

(d) **méthode**

En dimension finie, une suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence converge vers celle-ci (Th. 7 p. 205).

Par l'étude qui précède, on a obtenu que la suite bornée (B_p) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence à savoir la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n)$. Cette suite évoluant dans un espace de dimension finie, on peut affirmer qu'elle converge vers cette valeur d'adhérence.

1. En substance, ce qui précède établit aussi la supplémentarité des espaces $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n)$.

Exercice 10 ** (Théorème des fermés emboîtés)
Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vides et bornés d'un espace normé E de dimension finie. On suppose que la suite $\big(\delta(F_n)\big)$ tend vers 0 en notant $\delta(F_n)$ le *diamètre* de F_n défini par

$$\delta(F_n) = \sup_{(x,y)\in F_n^2} \|y - x\|\,.$$

Montrer que l'intersection de tous les F_n est un singleton.

Solution
Commençons par établir que l'intersection des F_n comporte au plus un élément.

Soit x et y deux éléments de l'intersection des F_n. Pour tout naturel n, on a l'inégalité $\|y - x\| \leqslant \delta(F_n)$ car x et y sont éléments du fermé F_n. En passant à la limite, on obtient $\|y - x\| \leqslant 0$ et donc $x = y$. Ainsi, l'intersection des F_n comporte au plus un élément.

méthode

> On détermine un élément de l'intersection des F_n en considérant une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) avec x_n choisi arbitrairement dans F_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut introduire un élément x_n choisi dans F_n car, par hypothèse, les fermés F_n sont tous non vides. En faisant varier n, ceci détermine une suite (x_n).

Les fermés F_n étant emboîtés dans le sens où ceux-ci constituent une suite décroissante pour l'inclusion, la suite (x_n) est en particulier une suite d'éléments de la partie bornée F_0. La suite (x_n) apparaît donc comme une suite bornée d'un espace de dimension finie, on peut en extraire une suite convergente $\big(x_{\varphi(k)}\big)$ (Th. 5 p. 204). Notons x la limite de la suite $\big(x_{\varphi(k)}\big)$ et montrons que x est élément de l'intersection des F_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un rang k_0 à partir duquel $\varphi(k) \geqslant n$ et alors

$$x_{\varphi(k)} \in F_{\varphi(k)} \subset F_n.$$

La sous-suite $\big(x_{\varphi(k)}\big)_{k\geqslant k_0}$ apparaît alors comme une suite convergente d'éléments du fermé F_n, sa limite x appartient donc à F_n.

Finalement, l'intersection des F_n n'est pas vide, c'est donc un singleton.

Exercice 11 ***
Soit u une suite d'éléments d'un espace normé E. On note $\mathrm{Adh}(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

(a) Établir

$$\mathrm{Adh}(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p \mid p \geqslant n\}}.$$

(b) En déduire que $\mathrm{Adh}(u)$ est une partie fermée de E.

Solution

(a) Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite u. Il existe une suite extraite $\big(u_{\varphi(k)}\big)$ convergeant vers ℓ. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un rang k_0 à partir duquel $\varphi(k) \geqslant n$. La sous-suite $\big(u_{\varphi(k)}\big)_{k\geqslant k_0}$ est alors une suite d'éléments de $\{u_p \mid p \geqslant n\}$ et sa limite ℓ appartient à l'adhérence de cet ensemble. Ainsi,

$$\mathrm{Adh}(u) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p \mid p \geqslant n\}}.$$

Inversement, considérons un élément ℓ de l'intersection précédente.

méthode

> On construit une suite extraite de u de limite ℓ en choisissant des éléments de plus en plus proche de ℓ parmi les termes d'indices supérieurs à ceux déjà choisis.

Puisque ℓ appartient à l'adhérence de $\{u_p \mid p \geqslant 0\}$, on peut déterminer un rang n_0 tel que $\|u_{n_0} - \ell\| \leqslant 1$.

Puisque ℓ appartient aussi à l'adhérence de $\{u_p \mid p \geqslant n_0 + 1\}$, on peut déterminer un rang n_1 tel que $\|u_{n_1} - \ell\| \leqslant 1/2$.

De proche en proche, on construit une suite (n_k) strictement croissante : lorsque n_{k-1} est connu, on détermine $n_k > n_{k-1}$ de sorte que $\|u_{n_k} - \ell\| \leqslant 1/2^k$ ce qui est possible car ℓ appartient à l'adhérence de $\{u_p \mid p > n_{k-1}\}$.

La suite (u_{n_k}) ainsi construite est une suite extraite de u de limite ℓ. Ainsi, ℓ est bien une valeur d'adhérence de la suite u ce qui fournit l'inclusion réciproque

$$\mathrm{Adh}(u) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p \mid p \geqslant n\}}.$$

(b) La partie $\mathrm{Adh}(u)$ est fermée car c'est une intersection de parties fermées.

6.4.3 Continuité et compacité

Exercice 12 *
Soit A et B des parties compactes de E. Montrer que l'ensemble

$$A + B = \{x + y \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$$

est une partie compacte de E.

Solution

méthode

$A + B$ peut se voir comme l'image continue d'un compact (Th. 8 p. 205).

Considérons l'application somme

$$\sigma: \begin{cases} E \times E \to E \\ (x,y) \mapsto x+y. \end{cases}$$

Cette application est continue[1] et $A+B = \sigma(A \times B)$. Or $A \times B$ est une partie compacte car produit cartésien de deux parties compactes (Th. 3 p. 204) et donc $A + B$ est une partie compacte en tant qu'image continue d'un compact.

Exercice 13 *

Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé E. Montrer l'existence de deux éléments $a, b \in K$ extrémaux dans le sens où

$$\delta(K) = \sup_{(x,y)\in K^2} \|y - x\| = \|b - a\|.$$

Solution

méthode

Il s'agit d'établir qu'une borne supérieure est un max : on fait appel au théorème des bornes atteintes (Th. 9 p. 205).

La fonction à laquelle appliquer le théorème des bornes atteintes est celle permettant de décrire la borne supérieure, à savoir la fonction f définie sur $K \times K$ par $f(x,y) = \|y - x\|$. Cette fonction est continue et est définie sur une partie compacte non vide (Th. 3 p. 204). Elle admet donc un maximum atteint en un certain couple $(a,b) \in K \times K$. Ce couple résout le problème posé.

Exercice 14 ** (Théorème du graphe fermé)

Soit E et F deux espaces normés de dimensions finies et $f : X \subset E \to F$ une application bornée telle que son graphe

$$\Gamma_f = \big\{(x,y) \in X \times F \,\big|\, y = f(x)\big\}$$

est une partie fermée de $E \times F$. Montrer que f est continue.

Solution

méthode

On montre la continuité de f par la caractérisation séquentielle.

Soit a un élément du domaine de définition X de f et $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers a. Étudions la convergence de sa suite image $(y_n) = \big(f(x_n)\big)$.

1. L'application σ est la somme des applications coordonnées $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ (voir sujet 18 p. 185).

méthode

On montre la convergence de la suite (y_n) en constatant qu'elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.

Soit b une valeur d'adhérence de (y_n) et $\big(y_{\varphi(k)}\big)$ une suite extraite convergeant vers b. Par extraction, la suite $\big(x_{\varphi(k)}\big)$ converge vers a et la suite $\big(x_{\varphi(k)}, y_{\varphi(k)}\big)$ converge vers le couple (a,b). Or il s'agit d'une suite d'éléments du graphe Γ_f qui est supposé fermé. On en déduit $(a,b) \in \Gamma_f$ et donc $b = f(a)$.

Ainsi, la suite (y_n) possède au plus une valeur d'adhérence. De plus, cette suite est bornée dans un espace de dimension finie, elle admet donc au moins une valeur d'adhérence et, finalement, converge vers celle-ci car unique (Th. 7 p. 205).

Finalement, pour toute suite (x_n) d'éléments de X convergeant vers a, la suite image $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(a)$. La caractérisation séquentielle de la continuité assure alors que f est continue en a.

Exercice 15 **

Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé E et f une application de K vers K vérifiant

$$\forall (x,y) \in K^2, \quad x \neq y \implies \big\|f(x) - f(y)\big\| < \|x - y\|.$$

(a) Montrer que la fonction f possède un unique point fixe c.

(b) Soit (x_n) une suite déterminée par

$$x_0 \in K \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n).$$

Montrer que la suite (x_n) converge vers le point fixe c.

Solution

(a) Supposons par l'absurde que f possède deux points fixes distincts $x \neq y$. L'hypothèse d'étude donne alors

$$\big\|f(x) - f(y)\big\| < \|x - y\|$$

ce qui est absurde car $f(x) = x$ et $f(y) = y$. L'application f possède au plus un point fixe. Il reste à établir qu'il en existe un.

méthode

On détermine le point fixe de f en cherchant le vecteur qui est le plus proche de son image.

Considérons la fonction $d : x \mapsto \big\|f(x) - x\big\|$ définie sur K. Cette fonction est continue sur le compact non vide K, elle admet donc un minimum en un certain c élément de K.

Si $f(c) \neq c$, l'hypothèse d'étude donne

$$d\big(f(c)\big) = \big\|f\big(f(c)\big) - f(c)\big\| < \big\|f(c) - c\big\| = d(c).$$

Ceci est impossible car contredit la minimalité de la fonction d en c. On en déduit que $f(c) = c$ ce qui détermine un point fixe de f.

(b) **méthode**

On étudie la convergence de la suite de terme général $\|x_n - c\|$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $d_n = \|x_n - c\|$. La suite (d_n) est décroissante car

$$d_{n+1} = \|x_{n+1} - c\| = \big\|f(x_n) - f(c)\big\| \leqslant \|x_n - c\| = d_n.$$

La suite (d_n) est aussi minorée par 0 et donc convergente. Posons d sa limite et montrons que celle-ci est nulle.

La suite (x_n) évolue dans le compact K, on peut donc en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(k)})$. Notons $a \in K$ la limite de cette suite extraite. Par extraction d'une suite convergente, la suite $(d_{\varphi(k)}) = (\|x_{\varphi(k)} - a\|)$ converge vers d et donc $d = \|a - c\|$.

Or, par continuité de f, la suite $(x_{\varphi(k)+1}) = (f(x_{\varphi(k)}))$ converge vers $f(a)$. On a donc aussi $d = \big\|f(a) - c\big\|$.

Ainsi, on a obtenu

$$\big\|f(a) - f(c)\big\| = \big\|f(a) - c\big\| = d = \|a - c\|\,.$$

Il est alors impossible que a soit différent de c et l'on en déduit $d = \|a - c\| = 0$.

Finalement, la suite (x_n) converge vers c.

Exercice 16 ***

Soit E un espace normé et f une application vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \big\|f(x) - f(y)\big\| = \|x - y\|\,.$$

Soit K une partie compacte de E telle que $f(K) \subset K$.

(a) Pour $x \in K$, on considère la suite récurrente (x_n) donnée par

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n).$$

Montrer que x est valeur d'adhérence de la suite (x_n).

(b) En déduire que $f(K) = K$.

Solution

(a) **méthode**

Puisque f est une isométrie, on a pour tous n et p naturels

$$\big\|f^{n+p}(x) - f^p(x)\big\| = \big\|f^n(x) - x\big\|.$$

Il suffit alors de trouver des termes x_{n+p} et x_p proches les uns des autres pour obtenir des termes x_n proches de x.

Par une récurrente immédiate, on vérifie que la suite (x_n) est une suite d'éléments du compact K. Elle admet donc une valeur d'adhérence $\overline{x}$ dans K.

Soit $\varepsilon > 0$. En considérant une suite extraite de (x_n) convergeant vers $\overline{x}$, on peut affirmer qu'il existe une infinité d'indices p, donc au moins un, vérifiant

$$\|x_p - \overline{x}\| \leqslant \varepsilon/2.$$

Un tel indice étant fixé, on peut encore déterminer une infinité d'entiers q supérieurs à p tels que l'on ait aussi

$$\|x_q - \overline{x}\| \leqslant \varepsilon/2$$

et donc

$$\|x_p - x_q\| \leqslant \|x_p - \overline{x}\| + \|\overline{x} - x_q\| \leqslant \varepsilon.$$

En considérant $n = q - p$, on a obtenu une infinité de rangs n tels que

$$\|x_n - x\| = \|x_{q-p} - x\| = \|x_p - x_q\| \leqslant \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0^+ (en prenant par exemple $\varepsilon = 1/k$) et en choisissant des rangs successifs supérieurs à ceux déjà choisis, on peut extraire de la suite (x_n) une suite convergeant vers x.

(b) **méthode**

On montre que tout x de K est adhérent à $f(K)$.

Soit $x \in K$. Le vecteur x est valeur d'adhérence de la suite $(f^n(x))$ d'éléments de $f(K)$ à partir du rang 1. Le vecteur x peut donc se voir comme limite d'une suite d'éléments de $f(K)$. Or l'application f est continue car lipschitzienne et la partie $f(K)$ est compacte en tant qu'image continue d'un compact. La partie $f(K)$ est donc fermée et contient les limites de ses suites convergentes. Ainsi, x est élément de $f(K)$ et l'on vient d'établir $K \subset f(K)$. L'inclusion réciproque figurant parmi les hypothèses, on peut conclure à l'égalité.

6.5 Exercices d'approfondissement

Exercice 17 * (Propriété de Borel-Lebesgue)

Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties ouvertes d'un espace normé E et K une partie compacte de E. On suppose

$$K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n.$$

Montrer qu'il existe[1] un rang n tel que

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_k.$$

1. Plus généralement, de tout recouvrement d'un compact par des parties ouvertes on peut extraire un recouvrement fini. Cette propriété, dite de Borel-Lebesgue, apparaît comme la définition des parties compactes dans le cadre (hors-programme) des espaces topologiques séparés.

Solution

méthode

Si la propriété voulue est fausse, on peut déterminer une suite (x_n) d'éléments de K avec x_n choisi en dehors de $\Omega_0 \cup \ldots \cup \Omega_n$.

Par l'absurde supposons que pour tout naturel n, la partie K n'est pas incluse dans la réunion des Ω_k avec $k \leqslant n$. Il existe alors un élément x_n dans K qui n'est pas dans cette union. En faisant varier n, ceci détermine une suite (x_n) telle que, pour tout rang n, x_n est élément de K sans être élément de l'union des Ω_k pour k allant de 0 à n.

Cette suite admet un valeur d'adhérence x dans le compact K. Puisque la partie K est incluse dans la réunion de tous les Ω_n, il existe un naturel k tel que x appartient à Ω_k.

Or Ω_k est une partie ouverte et il existe donc un rayon $\alpha > 0$ telle que la boule $B(x, \alpha)$ soit incluse dans Ω_k. Le vecteur x étant une valeur d'adhérence de la suite (x_n), il existe une infinité de termes de cette suite dans la boule $B(x, \alpha)$ donc dans Ω_k. Parmi ceux-ci figurent des termes x_n d'indices $n \geqslant k$. C'est absurde puisqu'un tel x_n est choisi en dehors de Ω_k.

Exercice 18 ** (Théorème de Riesz)

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé E.

(a) Montrer que, pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ vérifiant

$$d(a, F) = \|a - x\|.$$

(b) On suppose $F \neq E$. Montrer qu'il existe $a \in E$ vérifiant

$$d(a, F) = 1 \quad \text{et} \quad \|a\| = 1.$$

On suppose le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension infinie.

(c) Montrer qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|a_n\| = 1 \quad \text{et} \quad d\big(a_{n+1}, \operatorname{Vect}(a_0, \ldots, a_n)\big) = 1.$$

(d) Conclure que la boule unité de E n'est pas compacte.

Solution

(a) **méthode**

On extrait une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) d'éléments de F construite telle que $\|a - x_n\|$ tend vers $d(a, F)$.

La distance $d(a, F)$ est la borne inférieure des $\|a - x\|$ pour x parcourant F. Pour n entier naturel non nul, le réel $d(a, F) + 1/n$ ne minore pas cet ensemble, il existe donc un élément x_n dans F tel que

$$d(a, F) \leqslant \|a - x_n\| < d(a, F) + \frac{1}{n}.$$

En faisant varier n, ceci détermine une suite (x_n) d'éléments de F telle $\|a - x_n\|$ tend vers $d(a, F)$.

La suite (x_n) est bornée car

$$\|x_n\| \leqslant \|a - x_n\| + \|a\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} d(a, F) + \|a\|.$$

La suite (x_n) est aussi une suite d'éléments de l'espace F de dimension finie, elle possède donc une valeur d'adhérence x dans[1] F. Si $\big(x_{\varphi(k)}\big)$ désigne une suite extraite de (x_n) convergeant vers x, on peut conclure

$$\|a - x\| = \lim_{k \to +\infty} \big\|a - x_{\varphi(k)}\big\| = d(a, F).$$

(b) **méthode**

On part d'un vecteur de E qui n'est pas dans F et du vecteur qui atteint sa distance dans F. Par translation, on obtient un vecteur qui atteint sa distance à F en 0_E puis, par dilatation, on construit ce vecteur unitaire.

Soit $a \in E$ et $y \in F$. Puisque F est un sous-espace vectoriel, on a par translation

$$d(a, F) = \inf_{x \in F} \|a - x\| = \inf_{x \in F} \big\|a - \underbrace{(x + y)}_{\text{parcourt } F}\big\| = \inf_{x \in F} \big\|(a - y) - x\big\| = d(a - y, F).$$

Aussi, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$, on a par dilatation

$$d(\lambda a, F) = \inf_{x \in F} \|\lambda a - x\| = \inf_{x \in F} \big\|\lambda a - \underbrace{\lambda x}_{\text{parcourt } F}\big\| = \inf_{x \in F} |\lambda| \, \|a - x\| = |\lambda| \, d(a, F)$$

pour tout a de E et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$.

Soit a un élément de E qui n'est pas dans F. Par ce qui précède, on peut introduire un vecteur $y \in F$ tel que la distance de a à F soit atteinte en y. Cette distance $\|a - y\|$ est non nulle car $a \notin F$ et $y \in F$. Ceci permet d'introduire le vecteur unitaire

$$b = \frac{a - y}{\|a - y\|}.$$

Par les remarques qui précèdent

$$d(b, F) = \frac{1}{\|a - y\|} d(a - y, F) = \frac{1}{\|a - y\|} d(a, F) = 1.$$

Le vecteur b résout la question posée.

(c) On construit la suite (a_n) en partant d'un vecteur unitaire a_0 arbitraire. Puis, une fois les vecteurs $a_0, \ldots, a_n$ déterminés, on choisit a_{n+1} tel que

$$\|a_{n+1}\| = 1 \quad \text{et} \quad d(a_{n+1}, F) = 1$$

1. Rappelons que les sous-espaces vectoriels de dimensions finies sont des parties fermées (Th. 6 p. 205).

avec F le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les vecteurs $a_0, \dots, a_n$. Ceci est possible car le sous-espace vectoriel F est de dimension finie donc distinct de l'espace E qui est supposé de dimension infinie.

(d) La suite (a_n) ainsi construite est une suite d'éléments de la boule unité fermée vérifiant pour chaque entier n et m avec $n > m$

$$\|a_n - a_m\| \geqslant d\big(a_n, \underbrace{\mathrm{Vect}(a_0, \dots, a_{n-1})}_{a_m \text{ en est élément}}\big) = 1.$$

On ne peut extraire d'une telle suite une sous-suite convergente car, à partir d'un certain rang, les termes d'une suite extraite convergente sont aussi proches les uns des autres que l'on peut le vouloir.

On en déduit que la boule unité fermée de l'espace de dimension infinie E n'est pas compacte.

Exercice 19 **

Soit $u = (u_n)$ une suite réelle vérifiant

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

Solution

méthode

On vérifie qu'une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle en montrant que celle-ci est convexe, c'est-à-dire en vérifiant

$$\forall (a,b) \in X^2, \quad a < b \implies [a\,;b] \subset X.$$

Soit $a < b$ deux valeurs d'adhérence distinctes de la suite u s'il en existe. Soit $c \in]a\,;b[$. Pour montrer que c est une valeur d'adhérence de u, il suffit de vérifier la propriété

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, \quad |u_n - c| \leqslant \varepsilon.$$

En effet, cette propriété permet de construire une suite extraite convergeant[1] vers c.

méthode

À partir d'un certain rang, les sauts de u_n à u_{n+1} sont plus petits que ε. Pour passer des termes de la suite u qui sont au voisinage de valeur d'adhérence a à ceux au voisinage de b, il faut passer au voisinage de c.

Soit $\varepsilon > 0$. Sachant que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0, il existe un rang N au delà duquel $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$. Puisque a est une valeur d'adhérence de u avec $a < c$, il existe

1. Pour cela, on fait tendre ε vers 0 en prenant par exemple $\varepsilon = 2^{-k}$ puis, à chaque rang k, on choisit un terme de la suite u proche de c à ε près parmi ceux d'indices supérieurs à ceux déjà choisis.

un rang p supérieur à N tel que $u_p < c$. Puisque b est aussi une valeur d'adhérence de u avec $b > c$, il existe un rang $q > p$ tel que $u_q > c$. Considérons alors le plus petit entier $n > p$ tel que $u_n > c$. On a simultanément

$$u_n > c, \quad u_{n-1} \leqslant c \quad \text{et} \quad |u_n - u_{n-1}| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que u_n est élément de l'intervalle $]c\,;c+\varepsilon]$ ce qui suffit à résoudre la question posée.

Exercice 20 ***

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u = (u_n)$ une suite déterminée par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que la suite u possède une unique valeur d'adhérence a. Montrer que la suite u converge vers celle-ci.

Solution

Par l'absurde, supposons que la suite u ne converge pas vers a. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une infinité de termes de la suite u vérifiant $|u_n - a| > \varepsilon$. Parallèlement, il existe aussi une infinité de termes de la suite vérifiant $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$ puisque a est valeur d'adhérence de la suite u.

méthode

On construit une nouvelle valeur d'adhérence à la suite u en considérant les indices n pour lesquels

$$|u_{n-1} - a| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - a| > \varepsilon.$$

Soit N un entier arbitrairement grand. Il existe un naturel p supérieur à N, tel que $|u_p - a| \leqslant \varepsilon$. Il existe aussi des entiers n, supérieurs à p, tels que $|u_n - a| > \varepsilon$. Considérons alors le plus petit des entiers n supérieurs à p vérifiant $|u_n - a| > \varepsilon$. Pour cet entier, on obtient un rang n, supérieur à N, tel que l'on ait simultanément

$$|u_{n-1} - a| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - a| > \varepsilon.$$

Puisque ce qui précède vaut pour tout naturel N, on peut affirmer qu'il existe une infinité d'indices n tels que

$$|u_{n-1} - a| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - a| > \varepsilon.$$

Introduisons alors la suite extraite $(u_{\varphi(k)})$ constituée de ces entiers. Cette suite est formée d'éléments de l'ensemble

$$K = f\big([a - \varepsilon\,; a + \varepsilon]\big).$$

Or cet ensemble est compact car image continue d'un compact. La suite $(u_{\varphi(k)})$ possède donc une valeur d'adhérence b dans K. Cependant, les termes de cette suite sont aussi tous éloignés de a d'au moins ε. La valeur d'adhérence b est donc distincte de a. C'est absurde car la suite u est supposée ne posséder qu'une seule valeur d'adhérence.

Exercice 21 * (Projection sur un convexe fermé)**

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$

(a) Soit x, a et b trois vecteurs de E tels que $a \neq b$ et $\|x-a\| = \|x-b\|$. Montrer

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x-a\|.$$

Soit C un convexe fermé non vide de E.

(b) Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in C$ tel que

$$\|x-a\| = \inf_{y \in C} \|x-y\|.$$

On pose $P(x) = a$ ce qui définit une application $P\colon E \to C$ appelée *projection sur le convexe* C.

(c) Soit $a \in C$ tel que $\langle x-a, y-a\rangle \leqslant 0$ pour tout $y \in C$. Montrer $a = P(x)$.

(d) Inversement, on suppose qu'il existe un vecteur $y \in C$ tel que

$$\langle x - P(x), y - P(x)\rangle > 0.$$

En considérant les vecteurs de la forme $ty + (1-t)P(x)$ avec $t \in [0\,;1]$, obtenir une contradiction.

Ce qui précède permet d'affirmer que $P(x)$ est l'unique vecteur $a \in C$ vérifiant

$$\langle x-a, y-a\rangle \leqslant 0 \quad \text{pour tout } y \in C.$$

(e) Établir que pour tous vecteurs x et y de E,

$$\langle x-y, P(x)-P(y)\rangle \geqslant \|P(x)-P(y)\|^2.$$

En déduire que l'application P est continue.

Solution

(a) Par identité remarquable

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{x-a}{2} + \frac{x-b}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\|x-a\|^2 + \frac{1}{2}\langle x-a, x-b\rangle + \frac{1}{4}\|x-b\|^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle x-a, x-b\rangle \leqslant \left|\langle x-a, x-b\rangle\right| \leqslant \|x-a\|\,\|x-b\| = \|x-a\|^2. \qquad (*)$$

On en déduit

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| \leqslant \|x-a\|. \qquad (**)$$

méthode

Il y a égalité dans un enchaînement d'inégalités si, et seulement si, chacune est une égalité.

Il y a égalité dans $(*)$ si, et seulement si, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et que le produit scalaire des deux vecteurs est positif. Ceci signifie que les vecteurs $x-a$ et $x-b$ sont colinéaires par un scalaire positif (autrement dit, ils ont même direction et même sens). Or ces vecteurs sont aussi de même norme, ils sont donc égaux. Ceci est exclu puisque $a \neq b$. On peut donc affirmer que l'inégalité $(**)$ est stricte.

(b) On a déjà vu dans le sujet 8 p. 211 que la distance à une partie fermée en dimension finie est atteinte. Il reste à établir l'unicité de l'élément en lequel cette distance est atteinte.

Supposons par l'absurde la distance atteinte en $a, b \in C$ avec $a \neq b$. Par l'étude qui précède on peut affirmer

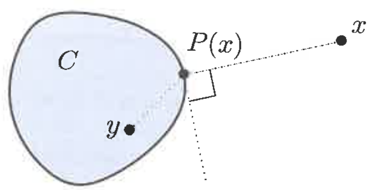
$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x-a\| = d(x, C).$$

Or $(a+b)/2$ est élément de C car C est une partie convexe. C'est absurde.

(c) Pour tout y de C

$$\|x-y\|^2 = \left\|(x-a)+(a-y)\right\|^2 = \|x-a\|^2 + 2\underbrace{\langle x-a, a-y\rangle}_{\geqslant 0} + \|a-y\|^2 \geqslant \|x-a\|^2.$$

La distance de x à C est donc réalisée en a, autrement dit, $a = P(x)$.



Projection sur un convexe compact.

(d) Pour $t \in [0\,;1]$, le vecteur $z = ty + (1-t)P(x)$ est élément du segment $[y\,; P(x)]$ donc du convexe C. Or

$$\|x-z\|^2 = \left\|x - P(x) - t\big(y - P(x)\big)\right\|^2 = \|x-P(x)\|^2 - \underbrace{\Big(2t\langle x-P(x), y-P(x)\rangle - t^2\|y-P(x)\|^2\Big)}_{\underset{t\to 0^+}{\sim}\, 2t\langle x-P(x), y-P(x)\rangle > 0}.$$

Pour $t > 0$ suffisamment petit, on a $\|x-z\| < \|x-P(x)\|$ et le vecteur z contredit la définition de $P(x)$.

(e) **méthode**

On fait intervenir artificiellement $P(x)-P(y)$ dans le premier terme du produit scalaire puis on développe.

$$\begin{aligned}\langle x-y, P(x)-P(y)\rangle &= \langle (x-P(x)) + (P(x)-P(y)) + (P(y)-y), P(x)-P(y)\rangle \\ &= \langle x-P(x), P(x)-P(y)\rangle + \|P(x)-P(y)\|^2 + \langle P(y)-y, P(x)-P(y)\rangle\end{aligned}$$

$P(x)$ est la projection de x sur le convexe C et $P(y)$ est élément de C donc

$$\langle x-P(x), P(x)-P(y)\rangle = -\langle x-P(x), P(y)-P(x)\rangle \geqslant 0$$

Mutatis mutandis[1]

$$\langle P(y)-y, P(x)-P(y)\rangle \geqslant 0$$

On en déduit

$$\|P(x)-P(y)\|^2 \leqslant \langle x-y, P(x)-P(y)\rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a aussi

$$\langle x-y, P(x)-P(y)\rangle \leqslant \|x-y\|\|P(x)-P(y)\|.$$

Que la quantité $\|P(x)-P(y)\|$ soit nulle ou non, on peut affirmer par simplification la propriété de lipschitzianité

$$\|P(x)-P(y)\| \leqslant \|x-y\|.$$

L'application P est donc continue.

Exercice 22 ***

Soit u un endomorphisme d'un espace normé réel E et C un compact convexe non vide de E stable par u. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u^i.$$

(a) Montrer $u_n(C) \subset C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Soit x un élément de $u_n(C)$. Proposer un majorant de $\|x-u(x)\|$.

(c) Montrer que

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} u_p(C) \neq \emptyset.$$

(d) Conclure que u possède un point fixe dans C.

1. Locution latine signifiant « En modifiant ce qui doit être changé ».

Solution

(a) Par composition, C est stable par chacun des u^i. Puisque C est convexe et que $u_n(x)$ est une combinaison convexe[1] des vecteurs $x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)$, on peut affirmer que C est stable par u_n.

(b) Soit $x \in u_n(C)$. Il existe $a \in C$ tel que

$$x = u_n(a) = \frac{1}{n}\bigl(a + u(a) + \cdots + u^{n-1}(a)\bigr).$$

Par linéarité et après simplification

$$\begin{aligned}x - u(x) &= \frac{1}{n}\bigl(a+u(a)+\cdots+u^{n-1}(a)\bigr) - \frac{1}{n}u\bigl(a+u(a)+\cdots+u^{n-1}(a)\bigr) \\ &= \frac{1}{n}\bigl(a+u(a)+\cdots+u^{n-1}(a)\bigr) - \frac{1}{n}\bigl(u(a)+\cdots+u^{n}(a)\bigr) \\ &= \frac{1}{n}\bigl(a-u^n(a)\bigr)\end{aligned}$$

et donc

$$\|x-u(x)\| \leqslant \frac{\|a\|+\|u^n(a)\|}{n} \leqslant \frac{2M}{n} \qquad (*)$$

avec M réel bornant le compact C.

(c) Soit p un naturel non nul. Puisque u_p est linéaire et continue, on peut affirmer que $u_p(C)$ est un compact convexe non vide. De plus, $u_p(C)$ est stable par u car u_p et u commutent. On en déduit comme au-dessus que pour tout naturel n non nul,

$$u_n\bigl(u_p(C)\bigr) \subset u_p(C). \qquad (**)$$

méthode

On considère la suite (x_n) définie à partir de x_0 choisi arbitrairement dans C et de la relation de récurrence $x_n = u_n(x_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie alors que x_n est élément de chaque $u_p(C)$ pour $p \leqslant n$.

Puisque C est stable par u_n, les x_n sont tous éléments de C et $x_n = u_n(x_{n-1})$ est élément de $u_n(C)$ pour tout $n \geqslant 1$. De plus, pour tout $p \in [\![1\,;n]\!]$, on a $x_n \in u_p(C)$ car $x_p \in u_p(C)$ et la propriété $(**)$ donne successivement

$$x_{p+1} = u_{p+1}(x_p) \in u_p(C), x_{p+2} \in u_p(C), \dots$$

La suite (x_n) évoluant dans le compact C, elle admet donc une valeur d'adhérence x. Or $(x_n)_{n\geqslant p}$ est une suite d'éléments de $u_p(C)$. Le vecteur x est alors limite d'une suite d'éléments du fermé $u_p(C)$, c'est un élément de $u_p(C)$. Ceci valant pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on peut conclure que l'intersection des $u_p(C)$ est non vide puisqu'elle contient x.

1. Une *combinaison convexe* est un barycentre à coefficients positifs. Les parties convexes sont stables par combinaisons convexes (Th. 1 p. 101).

(d) Soit x un élément de l'intersection précédente. L'élément x appartient à chaque partie $u_n(C)$ et, par $(*)$, on a

$$\|x - u(x)\| \leqslant \frac{2M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit $u(x) = x$.

CHAPITRE 7

Suites et séries de fonctions

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les fonctions étudiées ici sont définies sur une partie X non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E et à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie F. Les espaces E et F peuvent être normés[1]. Afin de faciliter la lecture, les normes sur E et F seront simplement notées $|\cdot|$.

En pratique, les fonctions étudiées sont souvent des fonctions d'une variable réelle évoluant dans un intervalle réel X et à valeurs dans $F = \mathbb{K}$.

7.1 Suites de fonctions

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Définition

> On appelle *suite de fonctions* de X vers F toute suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ constituée de fonctions au départ de X et à valeurs dans F.

Dans ce qui suit, (u_n) désigne une suite de fonctions de X vers F. Celle-ci est supposée définie à partir du rang $n_0 = 0$, quitte à définir de façon arbitraire les premières fonctions la constituant.

1. En dimension finie toutes les normes sont équivalentes, le choix de ces normes sera sans incidence sur l'étude.

7.1.1 Convergence simple

Définition

On dit que la suite de fonctions (u_n) *converge simplement* vers une fonction u définie sur X lorsque

$$\forall x \in X, \quad u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x).$$

Autrement dit

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 1

Il y a unicité de la fonction vers laquelle une suite de fonctions peut converger simplement.

Définition

Si (u_n) converge simplement vers une fonction u sur X, on dit que la fonction u est la *limite simple* de la suite (u_n) et l'on note

$$u = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

7.1.2 Convergence uniforme

Définition

On dit que la suite de fonctions (u_n) *converge uniformément* vers une fonction u définie sur X lorsque[1]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies \forall x \in X, |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On dit alors que u est *limite uniforme* de la suite (u_n).

Théorème 2

Si (u_n) converge uniformément vers une fonction u alors (u_n) converge aussi simplement vers cette fonction u.

Lorsqu'elle existe, une limite uniforme est unique et correspond à la limite simple.

On dit parfois qu'une suite de fonctions (u_n) *converge simplement sur* une partie X' (resp. *converge uniformément sur* X') pour insister sur le domaine de définition des fonctions qui la composent. On utilise aussi ce vocabulaire pour affirmer que c'est la suite des restrictions de ces fonctions au départ de X' qui converge simplement (resp. uniformément).

1. La différence entre les expressions quantifiées de la convergence simple et de la convergence uniforme se situe au niveau des positions relatives de « $\exists N \in \mathbb{N}$ » et « $\forall x \in X$ ». Pour la convergence uniforme, on veut une valeur de N qui convienne pour chaque valeur de x (on dit que N est *uniforme en* x) ce qui est notoirement exigeant.

7.1.3 Conditions de convergence uniforme

Théorème 3

Si (u_n) est une suite de fonctions définies sur X et si u est une fonction définie sur X, on a équivalence entre :

(i) (u_n) converge uniformément vers u ;
(ii) (u_n) converge simplement vers u et

$$\sup_{x\in X} |u_n(x) - u(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Dans le cadre pratique des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles, la borne supérieure peut souvent être calculée à partir d'un tableau des variations. On peut aussi se contenter de l'estimer en exploitant une majoration uniforme :

Théorème 4

Si (u_n) est une suite de fonctions définies sur X, u une fonction définie sur X et s'il existe une suite réelle (α_n) vérifiant à partir d'un certain rang

$$\forall x \in X, \quad |u_n(x) - u(x)| \leqslant \alpha_n \quad \text{avec} \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

alors la suite (u_n) converge uniformément vers u.

On dit que la suite (α_n) réalise une *majoration uniforme* de $|u_n - u|$.

7.1.4 Convergence en norme uniforme

L'espace $\mathcal{B}(X, F)$ des fonctions bornées de X vers F est normé par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Théorème 5

Si (u_n) est une suite de fonctions bornées définies sur X et u une fonction bornée définie sur X, on a équivalence entre :

(i) (u_n) converge uniformément vers u ;
(ii) $\|u_n - u\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Ainsi, la convergence uniforme peut se comprendre comme une convergence dans un espace normé[1].

1. Cette affirmation n'est pas vraie pour la convergence simple !

7.1.5 Approximations uniformes

Théorème 6 (Approximation uniforme par des fonctions en escalier)
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\varphi\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ vérifiant $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire

$$|f(t)-\varphi(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in [a\,;b].$$

En faisant tendre ε vers 0 avec un indice n, le résultat ci-dessus permet d'affirmer que toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier [1].

Théorème 7 (Théorème de Weierstrass [2])
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $\varphi\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ vérifiant $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire

$$|f(t)-\varphi(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in [a\,;b].$$

Ainsi, toute fonction continue sur un segment peut s'exprimer comme limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales [3].

7.2 Analyse de la limite d'une suite de fonctions

(u_n) désigne une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans F et u une fonction, elle aussi définie de X vers F.

7.2.1 Continuité par converge uniforme

Théorème 8
Si la suite de fonctions (u_n) vérifie :
1) chaque fonction u_n est continue,
2) (u_n) converge uniformément vers u sur X

alors la fonction u est continue.

Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir la continuité d'une limite par convergence uniforme sur l'intégralité du domaine de définition, il est fréquent de tenter d'établir la convergence uniforme sur des domaines « suffisamment généraux » pour inclure des voisinages de tout point de X. En particulier, on raisonne fréquemment par convergence uniforme sur tout segment lorsque X désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. L'espace des fonctions en escalier de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ constitue une partie dense de l'espace des fonctions continues par morceaux de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ normé par la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
2. On trouvera une démonstration de ce théorème dans le sujet 27 du chapitre 13 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.
3. L'espace des fonctions polynomiales de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ est une partie dense de l'espace des fonctions continues de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ normé par $\|\cdot\|_\infty$.

Lorsqu'une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction qui n'est pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme. Cet argument est fréquemment utilisé pour justifier l'absence de convergence uniforme !

7.2.2 Théorème de la double limite

Théorème 9
Si a est un point adhérent à X et si la suite de fonctions (u_n) vérifie :
1) chaque u_n admet une limite finie ℓ_n en a,
2) (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a

alors la suite (ℓ_n) admet une limite finie ℓ et la fonction u tend vers ℓ en a.
Autrement dit :

$$\lim_{x\to a}\Bigl(\lim_{n\to+\infty} u_n(x)\Bigr) = \lim_{n\to+\infty}\Bigl(\lim_{x\to a} u_n(x)\Bigr).$$

Ce résultat peut être adapté à l'étude d'une limite en $a = \pm\infty$ d'une fonction définie sur un intervalle réel non borné.
Ce théorème est aussi utilisé pour justifier l'absence de convergence uniforme en constatant que son application entraîne la convergence d'une suite (ℓ_n) notoirement divergente.

7.2.3 Intégration sur un segment

Ici, le domaine de définition X est un segment réel $[a\,;b]$ (avec $a \leqslant b$).

Théorème 10
Si la suite de fonctions (u_n) vérifie :
1) chaque u_n est continue sur $[a\,;b]$,
2) (u_n) converge uniformément vers u sur $[a\,;b]$

alors la fonction u est continue et la suite des intégrales $\int_a^b u_n(t)\,dt$ converge vers l'intégrale de u sur $[a\,;b]$.
Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty}\Bigl(\int_a^b u_n(t)\,dt\Bigr) = \int_a^b \Bigl(\lim_{n\to+\infty} u_n(t)\Bigr)\,dt.$$

L'échange des symboles limite et intégrale n'est pas automatique. On peut s'en convaincre en observant

$$\lim_{n\to+\infty}\Bigl(\int_0^1 n^2t^{n-1}(1-t)\,dt\Bigr) = 1 \quad \text{alors que} \quad \int_0^1 \Bigl(\lim_{n\to+\infty} n^2t^{n-1}(1-t)\Bigr)\,dt = 0.$$

Il s'agit ici d'un contexte où l'hypothèse de convergence uniforme n'est pas vérifiée.

7.2.4 Dérivation

Ici, le domaine de définition X est un intervalle réel I d'intérieur non vide.

Théorème 11
Si la suite de fonctions (u_n) vérifie :
1) chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
2) la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers u sur I,
3) la suite de fonctions (u_n') converge uniformément sur tout segment $[a\,;b]$ de I

alors la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et, pour tout $t \in I$,

$$u'(t) = \lim_{n\to+\infty} u_n'(t).$$

Autrement dit :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} u_n'.$$

On peut généraliser à un ordre de dérivation supérieur :

Théorème 12
Si la suite de fonctions (u_n) vérifie :
1) chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,
2) les suites de fonctions $(u_n),\ldots,(u_n^{(p-1)})$ convergent simplement sur I,
3) la suite de fonctions $(u_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment $[a\,;b]$ de I

alors la fonction u limite simple de (u_n) est de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I et, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$ et tout $t \in I$,

$$u^{(k)}(t) = \lim_{n\to+\infty} u_n^{(k)}(t).$$

7.3 Séries de fonctions

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Définition
Étant donnée une suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définies sur X, on appelle *série de fonctions* de terme général u_n, la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ avec

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Cette série de fonctions est notée $\left(\sum u_n\right)_{n\geqslant n_0}$, $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$.
La fonction S_n est appelée *somme partielle* de rang n de la série $\sum u_n$.

Les séries de fonctions sont, par définition, des suites de fonctions « particulières ». Dans ce qui suit, on suppose $n_0 = 0$ quitte à poser nulles les premières fonctions de la suite (u_n).

7.3.1 Convergence simple

Définition
On dit qu'une série $\sum u_n$ de fonctions définies sur X *converge simplement* si la suite (S_n) de ses sommes partielles converge simplement vers une certaine fonction S. Cette fonction S est appelée *somme* de la série de fonctions et l'on note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Théorème 13
Si $\sum u_n$ est une série de fonctions définies sur X, on a équivalence entre :
(i) la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement ;
(ii) pour tout $x \in X$, la série $\sum u_n(x)$ d'éléments de F converge.

De plus, si tel est le cas, on a pour tout x de X

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

L'étude de la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ fournit le domaine de définition de sa fonction somme.

7.3.2 Reste d'une série de fonctions

Définition
Lorsqu'une série $\sum u_n$ de fonctions définies sur X converge simplement, on peut introduire la fonction *reste* de rang n définie sur X par

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

Si S désigne la somme d'une série de fonctions $\sum u_n$ convergeant simplement, S_n la somme partielle de rang n et R_n son reste de rang n, on peut écrire

$$S = S_n + R_n.$$

La suite (R_n) des restes converge simplement vers la fonction nulle.

7.3.3 Convergence uniforme

Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ de fonctions définies sur X *converge uniformément* lorsque la suite (S_n) de ses sommes partielles converge uniformément.

Théorème 14

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions définies sur X, on a équivalence entre :

(i) la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément ;

(ii) la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et la suite (R_n) des restes converge uniformément vers la fonction nulle.

Pour étudier la convergence uniforme de (R_n) vers la fonction nulle, on peut :

— étudier si

$$\|R_n\|_\infty = \sup_{x\in X}|R_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

— déterminer une suite (α_n) telle que

$$\forall x \in X, \quad |R_n(x)| \leqslant \alpha_n \quad \text{avec} \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

7.3.4 Convergence normale

Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ de fonctions définies sur X *converge normalement* lorsque :

a) les fonctions u_n sont toutes bornées ;

b) la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ est convergente.

avec

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in X}|u_n(x)|.$$

Théorème 15

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, celle-ci converge uniformément et la convergence est absolue en tout point.

Pour étudier la convergence normale d'une série de fonctions $\sum u_n$, on peut :

— calculer[1] $\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in X}|u_n(x)|$ et étudier la convergence de la série associée ;

— déterminer (α_n) telle que

$$\forall x \in X, \quad |u_n(x)| \leqslant \alpha_n \quad \text{et} \quad \sum \alpha_n \text{ converge.}$$

Lorsque la variable est réelle, on peut aussi parler de convergence normale sur tout segment. Soulignons alors que si les fonctions sont continues, elles sont assurément bornées sur les segments $[a\,;b]$ ce qui permet d'introduire leur norme infinie.

1. Si u_n est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, $\|u_n\|_\infty$ peut se lire sur un tableau donnant les variations de la fonction.

7.4 Analyse de la somme d'une série de fonctions

7.4.1 Continuité

Théorème 16

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions définies sur X vérifiant :

1) chaque u_n est continue,

2) $\sum u_n$ converge uniformément sur X

alors la somme de la série de fonctions $\sum u_n$ est continue.

Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir la continuité d'une somme par convergence uniforme sur l'intégralité du domaine de définition, il est fréquent de tenter d'établir la convergence uniforme seulement sur des domaines « suffisamment généraux » pour inclure des voisinages de tout point de X. En particulier, on peut raisonner par convergence uniforme sur tout segment lorsque X désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

7.4.2 Limite et comportement asymptotique

Théorème 17

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions convergeant simplement sur X et a un point adhérent à X vérifiant :

1) chaque u_n admet une limite finie ℓ_n en a,

2) $\sum u_n$ converge uniformément sur un voisinage de a

alors la série $\sum \ell_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Autrement dit :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} u_n(x)\right).$$

Lorsque le domaine X désigne un intervalle non borné de $\mathbb{R}$, le résultat qui précède peut être adapté à l'étude de la limite en $a = \pm\infty$.

Ce théorème peut aussi être utilisé pour justifier l'absence de convergence uniforme en constatant que son application entraîne la convergence d'une série $\sum \ell_n$ notoirement divergente.

En plus de l'outil ci-dessus, limites et/ou comportements asymptotiques peuvent être obtenus par comparaison, notamment par comparaison série-intégrale.

7.4.3 Intégration sur un segment

Ici, le domaine de définition X est un segment réel $[a\,;b]$ (avec $a \leqslant b$).

Théorème 18

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions définies sur $[a\,;b]$ vérifiant :

1) chaque u_n est continue sur $[a\,;b]$,
2) $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a\,;b]$

alors la somme de la série de fonctions $\sum u_n$ est continue et la série $\sum \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge vers l'intégrale de celle-ci sur $[a\,;b]$.

Autrement dit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Cet outil permet d'échanger les symboles $\sum$ et $\int$, on parle *d'intégration terme à terme*. Ceci permet de calculer des intégrales en les ramenant à des sommes connues ou, à l'inverse, de calculer des sommes en les ramenant à des intégrales connues.

7.4.4 Dérivation

Ici, le domaine de définition X est un intervalle réel I d'intérieur non vide.

Théorème 19

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions définies sur I vérifiant :

1) chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
2) la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I,
3) la série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment $[a\,;b]$ de I

alors la somme de la série de fonctions $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et, pour tout $t \in I$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(t).$$

Si les fonctions sont à valeurs réelles, on peut étudier une monotonie en étudiant le signe d'une dérivée. Cependant, lorsque les fonctions sommées présentent la même monotonie, on peut s'affranchir d'une telle étude : si les fonctions u_n sont croissantes sur I, on a pour tous s et t de I

$$s \leqslant t \implies u_n(s) \leqslant u_n(t)$$

et l'on obtient en sommant

$$s \leqslant t \implies \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(s) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t).$$

Théorème 20

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions définies sur I vérifiant :

1) chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,
2) les séries de fonctions $\sum u_n, \dots, \sum u_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I,
3) la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment $[a\,;b]$ de I

alors la somme de la série de fonctions $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I et, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$ et tout $t \in I$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(t).$$

Par ce dernier outil, il est possible d'établir que des fonctions sommes sont indéfiniment dérivables.

7.5 Exercices d'apprentissage

7.5.1 Suites de fonctions

Lors de l'étude d'une suite de fonctions (u_n), il importe de savoir distinguer :

— la fonction u_n ;
— la valeur $u_n(x)$ (pour un certain $x \in X$) ;
— la suite de fonctions (u_n) ;
— la suite des valeurs $\big(u_n(x)\big)$.

Exercice 1

On considère la suite de fonctions (u_n) avec

$$u_n(t) = nt(1-t)^n \quad \text{pour tout } t \in [0\,;1].$$

(a) Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

(b) Y a-t-il convergence uniforme sur $[0\,;1]$?

(c) Justifier que la suite de fonctions converge uniformément sur tout segment $[a\,;1]$ avec $a \in \,]0\,;1]$ arbitraire.

(d) Y a-t-il convergence uniforme sur $]0\,;1]$?

Solution

(a) **méthode**

Lors de l'étude d'une convergence simple, on fixe le paramètre correspondant à la variable de la fonction (ici t) puis on étudie la convergence de la suite des valeurs $\big(u_n(t)\big)$. Il est alors fréquent d'avoir à discuter selon les valeurs du paramètre t.

Soit $t \in [0\,;1]$ fixé.

Cas : $t = 0$ ou $t = 1$. La suite des valeurs $\big(u_n(t)\big)$ est constante égale à 0. Elle converge donc vers 0.

Cas : $t \in]0\,;1[$. L'obtention de la limite de la suite $\big(u_n(t)\big)$ nécessite de résoudre une forme indéterminée :

$$u_n(t) = \underbrace{n}_{\to+\infty} \times \underbrace{t}_{\text{constante}} \times \underbrace{(1-t)^n}_{\to 0}.$$

méthode

> Cette forme indéterminée se résout par un argument de « croissances comparées » ou simplement en passant en écriture exponentielle.

$$u_n(t) = t \times \mathrm{e}^{\ln n + n\ln(1-t)} \underset{n\to+\infty}{=} t \times \mathrm{e}^{n\ln(1-t)+o(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $n\ln(1-t)$ est de limite $-\infty$ puisque $\ln(1-t) < 0$.

Finalement, la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction nulle.

(b) **méthode**

> Pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions (u_n) vers sa limite simple u_∞, on détermine la borne supérieure de $|u_n - u_\infty|$. Lorsque cela est possible, on peut dresser le tableau des variations de la fonction $u_n - u_\infty$ (ou de la fonction $|u_n - u_\infty|$) et y lire cette borne supérieure.

Étudions les variations de la fonction $u_n - 0 = u_n$. Celle-ci est dérivable et pour tout t de $[0\,;1]$

$$u_n'(t) = n(1-t)^n - n^2t(1-t)^{n-1} = \underbrace{n(1-t)^{n-1}}_{\geqslant 0}\big(1-(n+1)t\big).$$

Cette dérivée est du signe du facteur $1-(n+1)t$.

t	0		$1/(n+1)$		1
$u_n'(t)$		$+$	0	$-$	
$u_n(t)$	0	$\nearrow$	$u_n\left(\frac{1}{n+1}\right)$	$\searrow$	0

méthode

> Lorsque l'on étudie les variations de $u_n - u_\infty$, il importe de dresser un tableau des variations complet. Parfois la borne supérieure de $|u_n - u_\infty|$ peut être déterminée par une valeur basse du tableau (lorsque celle-ci est négative) !

Sur ce tableau, on lit

$$\sup_{t\in[0;1]} \big|u_n(t) - 0\big| = u_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Il reste à déterminer la limite de cette quantité quand n tend vers l'infini. Le premier facteur $n/(n+1)$ est de limite 1 mais le second nécessite la résolution d'une forme indéterminée du type « $1^{+\infty}$ ».

méthode

> Lorsque l'on étudie la limite d'un terme $a_n^{b_n}$, une écriture exponentielle est souvent commode.

On écrit pour $n \geqslant 1$

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})}.$$

Par développement limité

$$\ln\Big(1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n+1}$$

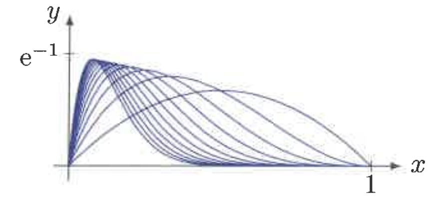
et donc

$$n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.$$

Finalement, on obtient par composition de limites

$$\sup_{t\in[0;1]} \big|u_n(t)\big| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} \neq 0.$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle sur l'intégralité du segment $[0\,;1]$.



Les premiers éléments de la suite de fonctions (u_n).

(c) Soit $a \in]0\,;1]$. Il s'agit ici de lire sur le tableau des variations précédent la borne supérieure sur l'intervalle $[a\,;1]$. Cela nécessite de savoir positionner a vis-à-vis du nombre $1/(n+1)$ dans la première ligne du tableau.

méthode

> On étudie une limite quand n tend vers l'infini. Puisque $1/(n+1)$ est de limite nulle, on peut affirmer qu'à partir d'un certain rang $1/(n+1) \leqslant a$ et l'on peut alors n'étudier que la portion correspondante du tableau des variations.

À partir d'un certain rang, le tableau des variations à considérer se réduit au suivant :

t	a		1
$u_n'(t)$		$-$	
$u_n(t)$	$u_n(a)$	$\searrow$	0

On en déduit

$$\sup_{t\in[a;1]} \left|u_n(t) - 0\right| = u_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car on sait que $\big(u_n(a)\big)$ est de limite nulle par la convergence simple étudiée initialement.

Finalement, la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur l'intervalle $[a\,;1]$, et ce pour toute valeur de a dans $]0\,;1]$.

(d) **méthode**

> La convergence uniforme sur les intervalles $[a\,;1]$ pour tout $a \in\,]0\,;1]$ ne permet pas d'affirmer la convergence uniforme sur $]0\,;1]$: on ne doit pas généraliser la convergence uniforme !

Par argument de continuité, les bornes supérieures de la fonction $|u_n|$ sur $[0\,;1]$ et sur $]0\,;1]$ sont identiques. Il n'y a donc pas plus convergence uniforme sur $]0\,;1]$ qu'il n'y a convergence uniforme sur $[0\,;1]$!

Exercice 2

On considère la suite de fonctions (u_n) avec

$$u_n(t) = n\sin(t)\mathrm{e}^{-nt} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+.$$

(a) Étudier sa convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$ arbitraire.

(c) Y a-t-il convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$?

Solution

(a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé.

Cas : $t = 0$. La suite $\big(u_n(t)\big)$ est constante égale à 0 et donc de limite nulle.

Cas : $t > 0$. L'étude de la limite de la suite $\big(u_n(t)\big)$ conduit à résoudre une forme indéterminée :

$$u_n(t) = \underbrace{n}_{\to+\infty} \times \underbrace{\sin(t)}_{\text{constante}} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-nt}}_{t\to 0}.$$

Un argument de « croissances comparées » ou une écriture exponentielle permet de résoudre cette forme indéterminée

$$u_n(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{\ln n - nt} \underset{n\to+\infty}{=} \sin(t)\exp\big(\underbrace{-nt + \mathrm{o}(n)}_{\to-\infty}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut conclure que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

(b) **méthode**

> Pour établir une convergence uniforme de (u_n) vers u_∞ un calcul exact de $\sup|u_n - u_\infty|$ n'est pas toujours nécessaire : on peut se contenter d'estimer cette valeur par une majoration (Th. 4 p. 231). Ceci peut être redoutablement efficace !

Soit $a > 0$. Pour tout $t \in [a\,;+\infty[$, on a $\mathrm{e}^{-nt} \leqslant \mathrm{e}^{-na}$ et donc

$$\left|u_n(t) - 0\right| = n\underbrace{|\sin t|}_{\leqslant 1}\mathrm{e}^{-nt} \leqslant n\mathrm{e}^{-na} = \alpha_n.$$

Cette majoration uniforme donne

$$\sup_{t\in[a;+\infty[} \left|u_n(t) - 0\right| \leqslant \alpha_n.$$

La suite (α_n) étant de limite nulle (la forme indéterminée se résout comme au-dessus), on peut conclure que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a\,;+\infty[$.

(c) **méthode**

> Pour établir une non-convergence uniforme, il n'est pas nécessaire de calculer de façon exacte la borne supérieure de $|u_n - u_\infty|$: on peut se contenter d'estimer celle-ci par une minoration basée sur des valeurs « bien choisies » de la variable.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut minorer $\sup|u_n|$ en prenant appui sur la valeur de la fonction en $1/n$:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left|u_n(t)\right| \geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sim 1/n}\mathrm{e}^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}.$$

La suite des bornes supérieures ne peut donc pas tendre vers 0 : il n'y a pas convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur $\mathbb{R}_+$.

7.5.2 Séries de fonctions

Lors de l'étude d'une série de fonctions $\sum u_n$, il importe de savoir distinguer :
- la fonction u_n ;
- la suite de fonctions (u_n) ;
- la série de fonctions $\sum u_n$;
- la série de valeurs $\sum u_n(x)$.

En particulier, on prendra garde à ne pas confondre la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) avec celle de la série de fonctions $\sum u_n$!

Exercice 3

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, de la série $\sum u_n$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$u_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n^2+1}.$$

Solution

méthode

Pour étudier la convergence simple d'une série de fonctions, on fixe le paramètre correspondant à la variable (ici t) puis on étudie la convergence de la série des valeurs $\sum u_n(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. On a

$$|u_n(t)| \leqslant \frac{1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{=\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison à une série de Riemann, on peut affirmer que la série numérique $\sum u_n(t)$ converge absolument. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

méthode

Pour étudier la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum u_n$, il est très fréquent de raisonner par convergence normale (Th. 15 p. 236) : on calcule de façon exacte $\|u_n\|_\infty = \sup|u_n|$ (par exemple en dressant un tableau des variations) ou on se contente d'une estimation en exploitant une comparaison.

Par l'inégalité qui précède, on peut affirmer que les fonctions u_n sont bornées et

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}|u_n(t)| \leqslant \frac{1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

La série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ étant convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc converge uniformément.

Exercice 4

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, de la série $\sum u_n$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n+t}.$$

Solution

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. La série numérique $\sum u_n(t)$ est alternée car

$$u_n(t) = (-1)^n|u_n(t)| \quad \text{avec} \quad |u_n(t)| = \frac{1}{n+t}.$$

De plus, la suite $(|u_n(t)|)$ décroît vers 0 et donc la série numérique $\sum u_n(t)$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

méthode

Pour étudier la convergence uniforme d'une série de fonctions lorsqu'il n'y a pas convergence absolue de la série des valeurs, on ne peut pas raisonner par convergence normale [1].

On revient à la définition : on étudie si la suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle.

méthode

Lorsque le critère spécial des séries alternées s'applique, le reste peut être borné par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime (Th. 3 p. 5).

On peut introduire le reste de rang n de la série de fonctions

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+t}.$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on peut borner le reste par

$$|R_n(t)| \leqslant |u_{n+1}(t)| = \frac{1}{n+1+t} \leqslant \frac{1}{n+1} = \alpha_n.$$

Le majorant α_n étant uniforme (il ne dépend pas de t) et de limite nulle, on a la convergence uniforme de la suite (R_n) et donc la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.

méthode

La convergence uniforme d'une série de fonctions s'obtient généralement :
- par convergence normale lorsqu'il y a convergence absolue ;
- par majoration uniforme du reste lorsque le critère spécial des séries alternées s'applique.

1. La convergence normale implique la convergence absolue en tout point.

Exercice 5

Soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

(a) Quel est le domaine de définition de S ?

(b) Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.

(c) Vérifier que la fonction S est décroissante.

(d) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

(e) Déterminer un équivalent simple de S en 0^+.

Solution

méthode

Étudier une fonction définie par une somme infinie revient à étudier la somme d'une série de fonctions. Il est alors commode de dénommer les fonctions sommées.

Introduisons les fonctions sommées :

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction S apparaît comme la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

(a) **méthode**

Déterminer le domaine de définition d'une somme infinie revient à rechercher le domaine où la série de fonctions associée converge simplement.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Cas : $x \leqslant 0$. La suite $(f_n(x))$ ne tend pas vers 0, la série $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.

Cas : $x > 0$. On a $f_n(x) = \mathrm{o}(1/n^2)$ quand n tend vers l'infini car

$$n^2 f_n(x) = \mathrm{e}^{2\ln n - x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}+\mathrm{o}(\sqrt{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La série $\sum f_n(x)$ converge alors absolument.

Finalement, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction S est définie sur cet intervalle.

(b) **méthode**

Pour obtenir la continuité d'une fonction définie par une somme infinie, la continuité des fonctions sommées ne suffit pas ! Un argument de convergence uniforme peut en revanche permettre de conclure (Th. 16 p. 237).

Étudions la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$. Les fonctions f_n sont décroissantes (pour $n \geqslant 1$) et l'on obtient le tableau des variations ci-dessous

x	0		$+\infty$
$f_n(x)$	1	$\searrow$	0

Les fonctions f_n sont bornées mais $\|f_n\|_\infty = \sup |f_n| = 1$ n'est pas terme général d'une série convergente : il n'y a pas convergence normale sur $]0\,;+\infty[$.

méthode

Lorsqu'il n'est pas aisé d'obtenir la convergence uniforme sur tout le domaine de définition, on peut pour une étude de continuité se contenter d'obtenir la convergence uniforme sur des domaines « suffisamment généraux ». Par exemple, on peut étudier la convergence uniforme sur tout segment.

Introduisons un réel $a > 0$ et menons une étude sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$ qui isole l'extrémité 0 visiblement problématique. Par le tableau des variations de la fonction f_n

$$\forall x \in [a\,;+\infty[, \quad |f_n(x)| \leqslant f_n(a) = \alpha_n.$$

Puisque la série de terme général α_n converge (comme cela a été vu lors de l'étude de convergence simple), la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[a\,;+\infty[$.

Les fonctions f_n étant toutes continues, la fonction S est continue sur $[a\,;+\infty[$. Or ceci vaut pour toute valeur $a > 0$, la fonction S est donc continue[1] sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

(c) **méthode**

Pour obtenir une monotonie, on peut mettre en place le théorème de dérivation (Th. 19 p. 238) puis étudier le signe de la dérivée. Lorsque les fonctions sommées présentent toutes la même monotonie, on peut aussi simplement « sommer ces monotonies ».

Les fonctions f_n sont toutes décroissantes. Pour tous x et $y \in]0\,;+\infty[$

$$x \leqslant y \implies f_n(y) \leqslant f_n(x).$$

En sommant, on obtient pour tout naturel N

$$x \leqslant y \implies \sum_{n=0}^{N} f_n(y) \leqslant \sum_{n=0}^{N} f_n(x).$$

1. La continuité est une notion *locale* : être continue sur un intervalle signifie être continue en chaque point de celui-ci. Ici, tout point x_0 de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ peut être inclus dans un intervalle $[a\,;+\infty[$ sur lequel on sait la fonction continue.

En passant à la limite quand N tend vers l'infini, on conclut

$$x \leqslant y \implies S(y) \leqslant S(x).$$

Ainsi, la fonction S est décroissante.

(d) **méthode**

> Pour étudier la limite d'une fonction définie par une somme infinie, on peut tenter d'échanger les symboles somme et limite. Cet échange est possible sous réserve de convergence uniforme au voisinage du point où l'on étudie la limite (Th. 17 p. 237).

Chaque fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en $+\infty$ avec

$$\ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Puisqu'il y a convergence uniforme sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer la convergence de la série $\sum \ell_n$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Bigl(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\Bigr)$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

(e) **méthode**

> On peut souvent obtenir l'ordre asymptotique d'une somme infinie en encadrant celle-ci à l'aide d'une comparaison série-intégrale. Il importe alors de ne pas confondre le paramètre correspondant à la variable de la somme (ici x qui sera initialement fixé) avec celui correspondant à la variable d'intégration (ici n dans la somme, devenu t dans l'intégrale).

Soit $x \in\,]0\,;+\infty[$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ étant décroissante et continue, on peut affirmer l'encadrement

$$\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

(la minoration valant pour $n \geqslant 0$ et la majoration pour $n \geqslant 1$ seulement). En sommant

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{N}\left(\int_{n-1}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right).$$

En raccordant les intégrales par la relation de Chasles, puis en faisant tendre N vers l'infini, on parvient à l'encadrement

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale peut être transformée par le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif et strictement croissant $s = x\sqrt{t}$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty} s\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s.$$

Par intégration par parties avec $u(s) = -\mathrm{e}^{-s}$ et $v(s) = s$, le produit uv admet une limite nulle en $+\infty$ et

$$\int_0^{+\infty} s\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = \Bigl[-s\mathrm{e}^{-s}\Bigr]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = 1.$$

Finalement, on obtient l'encadrement

$$\frac{2}{x^2} \leqslant S(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

On peut conclure

$$S(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

Exercice 6

Calculer

$$\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)\mathrm{d}x.$$

Solution

Pour calculer l'intégrale étudiée (et en justifier l'existence) nous allons échanger les symboles somme et intégrale.

méthode

> Une intégration terme à terme n'est pas automatique ! Elle est néanmoins possible par un argument de convergence uniforme (Th. 18 p. 238). Attention cependant, ce résultat ne peut pas être employé pour une intégrale généralisée [1].

Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

1. Pour une intégration terme à terme portant sur un intégrale généralisée, on peut employer le Th. 2 p. 296.

Soit $x \in [0\,;1]$. On a

$$\left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{2}{n^2-1} = \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série de terme général α_n converge et l'on peut affirmer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment d'intégration $[0\,;1]$. Au surplus, les fonctions u_n sont continues et l'on peut donc écrire l'égalité

$$\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^1\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)\mathrm{d}x$$

avec existence de l'intégrale (en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment) et convergence de la série exprimant le second membre.

On poursuit le calcul sachant

$$\int_0^1\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)\mathrm{d}x = \Big[-\ln(n-x)-\ln(n+x)\Big]_0^1 = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

En transitant par les sommes partielles, on peut calculer la somme par télescopage

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\int_0^1\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)\mathrm{d}x &= \sum_{n=2}^{N}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-\sum_{n=2}^{N}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\ &= \ln N - \ln(N+1)+\ln 2\\ &= \ln\left(\frac{N}{N+1}\right)+\ln 2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln 2.\end{aligned}$$

Finalement, on conclut

$$\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)\mathrm{d}x = \ln 2.$$

7.6 Exercices d'entraînement

7.6.1 Suites de fonctions

Exercice 7 *

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$u_n(t) = \begin{cases}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t\in[0\,;n[\\ 0 & \text{si } t\in[n\,;+\infty[.\end{cases}$$

Solution

Soit $t \in [0\,;+\infty[$ fixé. On étudie la limite de la suite des valeurs $\big(u_n(t)\big)$.

méthode

La valeur de $u_n(t)$ est déterminée par une alternative. Il importe donc de résoudre celle-ci pour connaître l'expression du terme dont on étudie la limite...

Puisque t est fixé et n tend vers l'infini, on peut affirmer qu'à partir d'un certain rang, l'entier n est strictement supérieur à t et donc

$$u_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

Pour déterminer la limite de ce terme, on résout la forme indéterminée « $1^{+\infty}$ » en adoptant une écriture exponentielle

$$u_n(t) = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{t}{n})}.$$

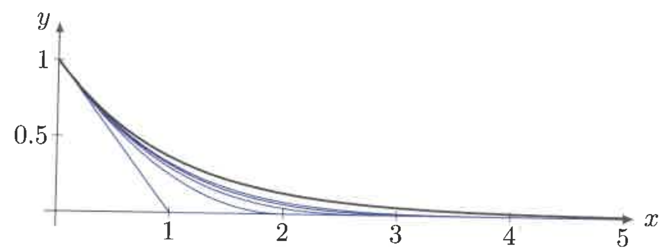
Par développement limité

$$n\times\ln\Big(1-\underbrace{\frac{t}{n}}_{\to 0}\Big) \underset{n\to+\infty}{=} n\times\left(-\frac{t}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -t.$$

Par composition de limites

$$u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t}.$$

Finalement, la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sur $[0\,;+\infty[$.



Exercice 8 *

Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$.

(a) Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout naturel $n \geqslant N$,

$$\left|P_n(x)-P_N(x)\right| \leqslant 1 \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Qu'en déduire quant aux fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geqslant N$?

(b) Conclure que f est une fonction polynomiale.

Solution

(a) **méthode**

Par l'inégalité triangulaire $\|P_n - P_N\|_\infty \leqslant \|P_n - f\|_\infty + \|f - P_N\|_\infty$.

Par définition de la convergence uniforme, on peut écrire [1]

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant N \implies \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = 1/2$, ce qui précède permet d'introduire $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout naturel n supérieur à N et tout réel x

$$|P_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

On a alors

$$|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_N(x)| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Sachant que seules les fonctions polynomiales constantes sont bornées sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que la fonction polynôme $P_n - P_N$ est constante.

(b) Notons λ_n la valeur de la fonction constante $P_n - P_N$. On a

$$\lambda_n = P_n(0) - P_N(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) - P_N(0).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut alors écrire

$$P_n(x) = P_N(x) + \lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P_N(x) + f(0) - P_N(0).$$

Par unicité de la limite simple (Th. 1 p. 230), on obtient

$$f(x) = P_N(x) + f(0) - P_N(0).$$

Ainsi, la fonction f est polynomiale.

Exercice 9 *

Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est elle-même une fonction uniformément continue.

1. Il faut être très attentif aux positions relatives du « $\forall x \in \mathbb{R}$ » et du « $\exists N \in \mathbb{N}$ » dans cette phrase : elle est essentielle à l'expression d'une convergence uniforme.

Solution

Soit (f_n) une suite de fonctions uniformément continues de I vers $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers $f\colon I \to \mathbb{R}$.

méthode

En approchant uniformément f par la fonction f_n on peut transporter l'uniforme continuité de f_n sur f.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout x dans I

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons un rang n supérieur à N. La fonction f_n étant uniformément continue, il existe α strictement positif vérifiant, pour chaque x et y dans I,

$$|x - y| \leqslant \alpha \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Or on peut écrire

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)|\\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|\end{aligned}$$

et donc

$$|x - y| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Ainsi, la fonction f est uniformément continue.

Exercice 10 **

Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n f(x).$$

Former une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0\,;1]$.

Solution

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;1[\\ f(1) & \text{si } x = 1.\end{cases}$$

méthode

Si une suite de fonctions continues converge uniformément, sa limite est continue !

Puisque les fonctions f_n sont continues, pour qu'il y ait convergence uniforme, il est nécessaire que la fonction limite soit continue et donc que $f(1) = 0$.

Inversement, supposons $f(1) = 0$ et vérifions que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

méthode

> On démontre la convergence uniforme en revenant à la définition par les ε : la continuité de f en 1 permet de borner f_n par ε sur un intervalle $[a\,;1]$. Sur l'intervalle $[0\,;a]$ restant, il suffit d'exploiter $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en 1, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0\,;1]$

$$|x-1| \leqslant \alpha \implies |f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Quitte à réduire la valeur de α, on peut choisir $\alpha \leqslant 1$ et poser $a = 1-\alpha \in [0\,;1[$. D'une part, pour $x \in [a\,;1]$,

$$|f_n(x)| = x^n|f(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, pour $x \in [0\,;a]$,

$$|f_n(x)| = x^n|f(x)| \leqslant a^n M$$

avec M la borne supérieure de $|f|$ sur $[0\,;1]$ (que l'on peut introduire car toute fonction continue sur un segment y est bornée). Puisque la suite géométrique (a^n) est de limite nulle, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $a^n M \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.

Finalement, pour tout $n \geqslant N$, on a $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ et ceci vaut pour tout $x \in [0\,;1]$. On peut donc affirmer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 11 ** (Théorème de Dini)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur un segment $[a\,;b]$ convergeant simplement vers la fonction nulle. On suppose que cette suite est décroissante dans le sens où, pour tout $x \in [a\,;b]$, la suite $(f_n(x))$ est décroissante. On désire établir que la convergence de la suite (f_n) est uniforme et l'on introduit

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[a;b]} |f_n(x)|.$$

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a\,;b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.

(b) Justifier la convergence de la suite de terme général $\|f_n\|_\infty$.

(c) En observant que $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$ pour tout $p \leqslant n$, montrer

$$\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Solution

(a) **méthode**

> Toute fonction réelle continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Soit $x \in [a\,;b]$. La suite réelle $(f_n(x))$ est décroissante et de limite nulle, ses termes sont donc tous positifs. On en déduit que les fonctions f_n sont positives. De plus, elle sont continues sur le segment $[a\,;b]$ et le théorème des bornes atteintes assure que chacune admet un maximum. Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a\,;b]$ tel que

$$f_n(x_n) = \max_{x\in[a;b]} f_n(x) = \sup_{x\in[a;b]} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty.$$

(b) **méthode**

> On peut établir qu'une suite converge en montrant qu'elle est monotone et bornée.

Par l'hypothèse de décroissance de la suite de fonctions, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_{n+1}\|_\infty = f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_n(x_{n+1}) \leqslant \|f_n\|_\infty.$$

La suite réelle de terme général $\|f_n\|_\infty$ est donc décroissante, elle aussi minorée par 0, elle est alors convergente.

(c) Encore par l'hypothèse de décroissance de la suite de fonctions, on a effectivement

$$\forall n \geqslant p, \quad f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n).$$

méthode

> On souhaite passer cette inégalité à la limite quand n tend vers l'infini mais on ignore si la suite (x_n) converge. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on extrait une sous-suite convergente.

La suite réelle (x_n) étant bornée, on peut en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(k)})$. Notons ℓ sa limite qui est assurément élément du segment $[a\,;b]$.

Pour k assez grand

$$f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) \leqslant f_p(x_{\varphi(k)}).$$

À la limite et par continuité de f_p, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_{\varphi(k)}\|_\infty \leqslant \lim_{k\to+\infty} f_p(x_{\varphi(k)}) = f_p(\ell).$$

Une suite extraite d'une suite convergente ayant la limite de la suite dont elle est issue, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{k\to+\infty} \|f_{\varphi(k)}\|_\infty \leqslant f_p(\ell).$$

Cette dernière relation vaut pour tout $p \in \mathbb{N}$. On peut passer à la limite quand p tend vers l'infini et obtenir par la convergence simple de (f_n)

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty \leqslant \lim_{p\to+\infty} f_p(\ell) = 0.$$

Finalement, on peut conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0.$$

Exercice 12 **

Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Solution

Par linéarité, on peut affirmer pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\int_0^1 P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

méthode

> Par le théorème de Weierstrass (Th. 7 p. 232), on exprime f comme limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $[0\,;1]$. On peut alors écrire

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\big(f(t)-P_n(t)\big)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^1 f(t)P_n(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} = \int_0^1 f(t)\big(f(t)-P_n(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Par l'inégalité triangulaire intégrale

$$\left|\int_0^1 f(t)\big(f(t)-P_n(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \underbrace{|f(t)|}_{\leqslant\|f\|_\infty}\,\underbrace{|f(t)-P_n(t)|}_{\leqslant\|f-P_n\|_\infty}\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty\,\underbrace{\|f-P_n\|_\infty}_{\to 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction f^2 étant continue, positive et d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle et l'on peut conclure que f est aussi la fonction nulle.

Exercice 13 **

Soit $\gamma \in [0\,;1[$. On définit (u_n) suite de fonctions de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$u_0(x) = 1 \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) En déduire la convergence de la suite $\big(u_n(x)\big)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

(c) Établir que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers une fonction u non nulle vérifiant sur $\mathbb{R}_+$

$$u'(x) = u(\gamma x).$$

Solution

Avant étude, on peut constater que la suite de fonctions est bien définie en vérifiant par récurrence que chaque fonction est continue ce qui permet d'introduire l'intégrale définissant la fonction au rang suivant.

(a) **méthode**

> On obtient l'encadrement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ et $x \in \mathbb{R}_+$

$$u_0(x) = 1 \quad\text{et}\quad u_1(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{d}t = 1 + x.$$

On vérifie bien

$$0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) = x \leqslant \frac{x^1}{1!}.$$

Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x \big(u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse de récurrence, on a pour tout $t \in [0\,;x]$,

$$0 \leqslant u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t) \leqslant \frac{(\gamma t)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \quad\text{car}\quad \gamma\in[0\,;1[.$$

En intégrant en bon ordre

$$0 \leqslant u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\right]_0^x = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

La récurrence est établie.

(b) **méthode**

> Le lien suite-série permet d'établir la convergence d'une suite en constatant la convergence de la série télescopique associée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, il y a alors convergence de la série

$$\sum \big(u_{n+1}(x) - u_n(x)\big).$$

Or cette série télescopique a même nature que la suite associée $\big(u_n(x)\big)$. Cette dernière s'avère donc convergente.

(c) Par ce qui précède, on peut affirmer que la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction u. Vérifions que cette convergence est en fait uniforme sur tous les segments $[0\,;a]$ pour $a \in \mathbb{R}_+$.

Pour tout $x \in [0\,;a]$, on peut écrire par télescopage

$$\big|u(x) - u_n(x)\big| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \big(u_k(x) - u_{k-1}(x)\big)\right|$$

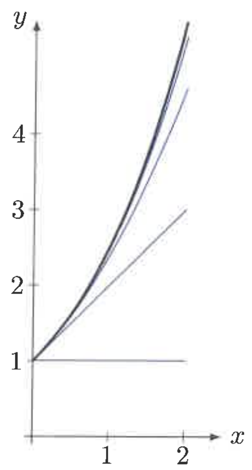
et donc

$$\big|u(x) - u_n(x)\big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \big|u_k(x) - u_{k-1}(x)\big|$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = \alpha_n.$$

La suite (α_n) ne dépend pas de x et est de limite nulle car correspond au reste d'une série convergente : on peut conclure que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment $[0\,;a]$.

Les fonctions u_n étant chacune continue et la convergence uniforme ayant lieu sur tout segment, la fonction u est continue. Au surplus, par convergence uniforme sur les segments $[0\,;\gamma x]$, on a aussi pour x dans $\mathbb{R}_+$

$$\int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t.$$



En passant la relation $u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t$ à la limite, on obtient alors

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction u est donc une fonction non nulle (car $u(0) = 1$) et est une primitive de la fonction continue $t \mapsto u(\gamma t)$. Elle est donc dérivable avec

$$u'(x) = u(\gamma x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 14 **

Soit f la fonction définie de l'intervalle $[0\,;1]$ vers lui-même par la relation

$$f(x) = 2x(1-x)$$

et f_n la fonction itérée d'ordre n de f :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ facteurs}}.$$

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0\,;1]$.

(b) Sur quels segments inclus dans $[0\,;1]$ peut-on affirmer qu'il y a convergence uniforme ?

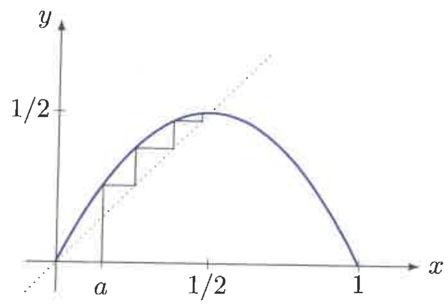
Solution

(a) **méthode**

> Pour $x \in [0\,;1]$ fixé, la suite $\big(f_n(x)\big)$ est une suite récurrente de fonction itératrice f.

On peut facilement dresser le tableau des variations de la fonction f et anticiper le comportement des termes de la suite.

x	0		$1/2$		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



Comme l'affirme l'énoncé, la fonction f est bien à valeurs dans l'intervalle $[0\,;1]$ (et même dans $[0\,;1/2]$). On peut donc bien considérer la fonction itérée d'ordre n de f.

Soit $a \in [0\,;1]$ fixé. Étudions le comportement de la suite des valeurs $\big(f_n(a)\big)$. Sachant la symétrie $f(x) = f(1-x)$, les suites définies à partir des réels a et $1-a$ sont identiques au delà du rang 1. On peut donc se limiter au cas où $a \in [0\,;1/2]$.

Si l'on pose $u_n = f_n(a)$, on peut comprendre (u_n) comme la suite récurrente déterminée par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Puisque la fonction f est à valeurs dans $[0\,;1/2]$, on peut affirmer que les termes de la suite (u_n) appartiennent tous à l'intervalle $[0\,;1/2]$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = u_n(1 - 2u_n) \geqslant 0.$$

La suite (u_n) est alors croissante. Elle est aussi majorée (par $1/2$) et c'est donc une suite convergente.

Si $a = 0$, cette suite est en fait constante égale à 0.

Si $a \in \,]0\,;1/2]$, cette suite croît vers une limite $\ell > 0$. En passant à la limite la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

on obtient $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire

$$2\ell(1-\ell) = \ell$$

et donc $\ell = 1/2$ car $\ell \neq 0$.

On synthétise les résultats qui précèdent en affirmant que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction f déterminée par

$$f\colon x \mapsto \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in \,]0\,;1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

(b) Les fonctions f_n sont toutes continues sur $[0\,;1]$ car ce sont des fonctions polynomiales. La fonction limite simple f n'est pas continue en 0 ni en 1 : il ne peut donc y avoir convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur un segment contenant l'une au l'autre de ces extrémités (Th. 8 p. 232).

méthode

On montre la croissance des fonctions f_n sur $[0\,;1/2]$.

La croissance de f sur l'intervalle stable $[0\,;1/2]$ entraîne, par composition, la croissance de f_n sur ce même intervalle. Ceci permet d'établir

$$\forall a \in \,]0\,;1/2],\ \forall x \in [a\,;1/2],\quad f_n(x) \geqslant f_n(a).$$

On a donc, pour tout $a \in \,]0\,;1/2]$,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[a;1/2]} \left|f_n(x) - f(x)\right| &= \sup_{x\in[a;1/2]} \big(f(x) - f_n(x)\big) \\ &= f(a) - f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[a\,;1/2]$.

Par l'argument de symétrie $f(x) = f(1-x)$, on peut étendre la convergence uniforme à l'intervalle $[a\,;1-a]$.

Finalement, on conclut que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment $[a\,;b]$, sous réserve que $a > 0$ et $b < 1$.

Exercice 15 ***

On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $]1\,;+\infty[$ par

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x^k}\right).$$

(a) Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $]1\,;+\infty[$.
On pourra librement employer l'inégalité[1] $1 + x \leqslant e^x$ *valable pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
On peut alors introduire sa fonction limite u définie par

$$u(x) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{x^k}\right) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x^k}\right) \quad \text{pour tout } x > 1.$$

(b) Étudier la monotonie de la fonction u.

(c) Soit $a > 1$ arbitraire. Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$.

(d) En déduire que la fonction u est continue.

(e) Déterminer la limite de la fonction u en $+\infty$.

(f) Justifier que la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas uniforme au voisinage de 1.

(g) Déterminer la limite de la fonction u en 1^+.

Solution

(a) Soit $x \in \,]1\,;+\infty[$ fixé.

méthode

On vérifie que la suite $\big(u_n(x)\big)$ est croissante et majorée[2].

Les termes de la suite réelle $\big(u_n(x)\big)$ sont des produits de facteurs strictement positifs, ils sont donc eux-mêmes strictement positifs. Au surplus, pour $n \geqslant 1$

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x^{n+1}}\right)}_{\geqslant 1} \geqslant u_n(x).$$

La suite réelle $\big(u_n(x)\big)$ est donc croissante. Elle est aussi majorée car l'inégalité proposée dans le sujet permet d'écrire

$$u_n(x) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{1/x^k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^k}\right).$$

1. Cette inégalité peut être simplement obtenue en étudiant les variations de la fonction différence ou en employant un argument de convexité.
2. On peut aussi introduire $\ln\big(u_n(x)\big)$ et étudier la convergence d'une série de fonctions.

Par sommation géométrique de raison $1/x$ différente de 1, on peut poursuivre la majoration

$$u_n(x) \leqslant \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1-\frac{1}{x^n}}{1-\frac{1}{x}}\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Finalement, la suite réelle $(u_n(x))$ est croissante et majorée, elle est donc convergente. On peut alors affirmer la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $]1\,;+\infty[$.

(b) **méthode**

> Il n'est pas toujours nécessaire d'étudier le signe d'une dérivée pour obtenir une monotonie ! Ici, on se contente de constater que les fonctions u_n sont toutes décroissantes avant de passer à la limite.

Pour $x \leqslant y$ dans $]1\,;+\infty[$, on a pour tout $k \geqslant 1$

$$1+\frac{1}{y^k} \leqslant 1+\frac{1}{x^k}.$$

Par produit de facteurs positifs, on obtient pour $n \geqslant 1$

$$u_n(y) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{y^k}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x^k}\right) = u_n(x).$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on conclut $u(y) \leqslant u(x)$.
On vient ainsi d'établir la décroissance de la fonction u.

(c) Soit $x \in [a\,;+\infty[$. Pour $m > n$, on peut écrire la factorisation

$$0 \leqslant u_m(x) - u_n(x) = u_n(x)\left(\prod_{k=n+1}^{m}\left(1+\frac{1}{x^k}\right) - 1\right).$$

Puisque $x \geqslant a$, en exploitant les mêmes comparaisons qu'au-dessus (et en constatant la positivité des facteurs), on obtient

$$0 \leqslant u_m(x) - u_n(x) \leqslant u_n(a)\left(\prod_{k=n+1}^{m}\left(1+\frac{1}{a^k}\right) - 1\right) = u_m(a) - u_n(a).$$

En passant à la limite quand m tend vers l'infini, il vient

$$0 \leqslant u(x) - u_n(x) \leqslant u(a) - u_n(a).$$

On en déduit

$$\sup_{t\in[a;+\infty[}\left|u(t)-u_n(t)\right| \leqslant u(a) - u_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, il y a convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction u sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ (avec $a > 1$ arbitraire).

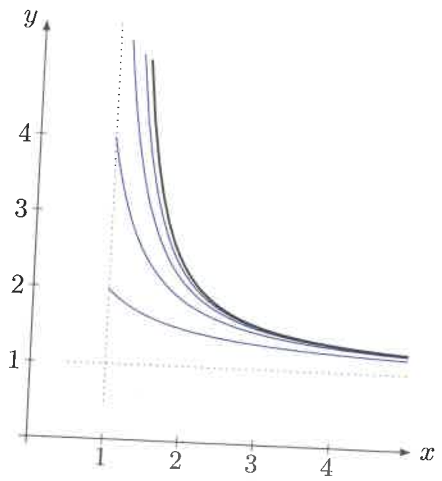
(d) Les fonctions u_n sont continues par produit de fonctions qui le sont. Par convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$, on peut affirmer que la fonction limite u est aussi continue sur $[a\,;+\infty[$ (Th. 8 p. 232). Or ceci vaut pour tout $a > 1$ et donc la fonction u est continue sur $]1\,;+\infty[$.

(e) Par produit fini de limites, on a

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x^k}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 = \ell_n.$$

Puisque la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur $[2\,;+\infty[$, on peut exploiter le théorème de la double limite (Th. 9 p. 233). Par celui-ci, on affirme que la suite (ℓ_n) converge (ce qui est évident) et [1]

$$u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lim_{n\to+\infty} \ell_n = 1.$$



Les premières fonctions de la suite (u_n).

(f) **méthode**

> On montre que s'il y a convergence uniforme l'application du théorème de la double limite conduit à une absurdité.

Par produit de limites, on a aussi

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x^k}\right) \xrightarrow[x\to1^+]{} 2^n = \ell'_n.$$

1. On peut aussi résoudre cette limite par l'encadrement $1 \leqslant u_n(x) \leqslant \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

Par l'absurde, s'il y a convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur un voisinage de 1, on peut encore employer le théorème de la double limite. Or, la conclusion de celui-ci affirme la convergence de la suite $(\ell'_n) = (2^n)$. C'est absurde car cette dernière diverge vers $+\infty$!

On peut donc conclure que la suite de fonctions (u_n) ne converge pas uniformément sur les voisinages de 1.

(g) **méthode**

> Ce qui précède laisse suggérer que la limite de u en 1^+ est $+\infty$.

La fonction u est décroissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$. Par le théorème de la limite monotone, soit cette fonction est majorée et alors elle admet une limite finie en 1^+, soit elle ne l'est pas, et alors elle tend vers $+\infty$ en 1^+.

Par l'absurde, supposons la fonction u majorée par un certain réel M. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\forall x \in\,]1\,;+\infty[,\quad u_n(x) \leqslant u(x) \leqslant M.$$

En passant à la limite quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, on obtient $2^n \leqslant M$. Ceci doit valoir pour tout n supérieur à 1 ce qui est absurde. On peut conclure que la fonction u tend vers $+\infty$ en 1^+.

7.6.2 Convergences de séries de fonctions d'une variable réelle

Exercice 16 *

On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Étudier sa convergence simple, sa convergence normale et sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Même question sur $[a\,;+\infty[$ (avec $a > 0$).

Solution

(a) Commençons par étudier la convergence simple.

Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ est terme général d'une série convergente.

Pour $x \neq 0$,

$$n^2 f_n(x) = x^2 e^{3\ln n - x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} x^2 e^{-x\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La série de terme général $f_n(x)$ est donc absolument convergente car $f_n(x) = o(1/n^2)$ quand n tend vers l'infini.

Finalement, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.

Pour étudier la convergence normale, déterminons $\|f_n\|_\infty$ en dressant un tableau des variations. La fonction f_n est dérivable et sa dérivée est du signe de $2 - \sqrt{n}x$

x	0		$2/\sqrt{n}$		$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

Sur ce tableau, nous lisons

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2}.$$

La série $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge, il n'y a donc pas convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

méthode

> Le problème de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ demeure : la convergence normale implique la convergence uniforme mais la réciproque n'est pas vraie !

Étudions le reste R_n de la série définie pour x dans $[0\,;+\infty[$ par

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

Les termes sommés étant positifs $R_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$ et donc

$$\sup_{x\in[0;+\infty[} \left|R_n(x)\right| \geqslant f_{n+1}\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{4}{e^2}.$$

La suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge donc pas uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Soit $a > 0$. Il y a évidemment convergence simple de la série sur $[a\,;+\infty[$ car il y a déjà convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.

Pour n assez grand de sorte que $2/\sqrt{n} \leqslant a$, le tableau des variations de f_n donne

$$\forall x \in [a\,;+\infty[,\quad \left|f_n(x)\right| \leqslant f_n(a) = \alpha_n.$$

La série de terme général α_n étant convergente (comme cela a été vu lors de l'étude de la convergence simple), il y a convergence normale (et donc uniforme) sur $[a\,;+\infty[$.

Exercice 17 **

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions u_n définies sur $[0\,;1]$ par

$$u_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x).$$

(a) Pour quels réels α la suite (u_n) converge-t-elle uniformément sur $[0\,;1]$?

(b) Pour quels réels α la série $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;1]$?

Solution

(a) La limite uniforme d'une suite de fonctions est sa limite simple (Th. 2 p. 230). On commence donc par étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n).

Soit $x \in [0\,;1]$. Si $x=0$ ou si $x=1$, la suite $\big(u_n(x)\big)$ est nulle et tend vers 0. Si x est élément de $]0\,;1[$, on peut écrire

$$u_n(x) = (1-x)\mathrm{e}^{\alpha \ln n + n \ln x} \underset{n\to+\infty}{=} (1-x)\exp\big(\mathrm{o}(n) + n\underbrace{\ln x}_{<0}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction nulle.

méthode

> Pour trouver une condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme portant sur le réel α, on calcule de façon exacte la borne supérieure de $|u_n - 0|$ sur $[0\,;1]$.

La fonction u_n est dérivable sur $[0\,;1]$ avec

$$u_n'(x) = n^\alpha x^{n-1}\big(n-(n+1)x\big).$$

Le signe de $u_n'(x)$ est celui de $n-(n+1)x$ et l'on peut dresser le tableau des variations de u_n

x	0		$n/(n+1)$		1
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$u_n(x)$	0	$\nearrow$	$u_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0

On en déduit

$$\sup_{t\in[0;1]} \big|u_n(x) - 0\big| = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Or

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}}$$

car par développement limité

$$n\ln\Big(1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}\Big) \underset{n\to+\infty}{=} n\times\left(-\frac{1}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.$$

Ainsi, on obtient

$$\sup_{x\in[0;1]}\big|u_n(x) - 0\big| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{\mathrm{e}}$$

et l'on peut conclure qu'il y a convergence uniforme de la suite (u_n) sur $[0\,;1]$ si, et seulement si, $\alpha<1$.

(b) Par l'étude qui précède, on a aussi

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]}\big|u_n(x)\big| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Par cet équivalent de Riemann, on peut affirmer qu'il y a convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ si, et seulement si, $1-\alpha>1$ soit $\alpha<0$.

méthode

> La convergence normale n'est qu'une condition suffisante de convergence uniforme (Th. 15 p. 236). Lorsqu'il n'y a pas convergence normale, on étudie s'il y a convergence uniforme en considérant le reste de la série.

Pour $\alpha<0$, il y a convergence normale donc uniforme. Soit $\alpha \geqslant 0$ et $x\in[0\,;1]$. La série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente. En effet, c'est la série nulle lorsque $x=0$ ou 1 et celle-ci vérifie la règle de d'Alembert (Th. 2 p. 5) lorsque $x\in\,]0\,;1[$:

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x<1.$$

On peut donc introduire son reste de rang n défini sur $[0\,;1]$ par

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^\alpha x^k(1-x).$$

Sachant $\alpha\geqslant 0$, on a $k^\alpha \geqslant 1$ pour tout $k\geqslant n+1$ et donc

$$R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x).$$

Lorsque $x\in[0\,;1[$, on obtient par sommation géométrique

$$R_n(x) \geqslant \frac{x^{n+1}}{1-x}\times(1-x) = x^{n+1}$$

et donc

$$\sup_{x\in[0;1]}\big|R_n(x)\big| \geqslant \sup_{x\in[0;1[} x^{n+1} = 1.$$

Ainsi, il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ lorsque $\alpha\geqslant 0$.

7.6.3 Études de fonctions sommes

Exercice 18 *

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}.$$

(a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Donner un équivalent simple de S en $+\infty$.

Solution

On introduit les fonctions sommées :

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction S apparaît comme la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

(a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x,

$$\left|u_n(x)\right| = \frac{1}{n^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n^2} = \alpha_n.$$

La série de terme général α_n étant convergente, cette majoration uniforme assure que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. De plus, les fonctions sommées étant continues, la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (Th. 16 p. 237).

(b) **méthode**

On estime la fonction S par une comparaison série-intégrale.

Pour $x \in \,]0\,;+\infty[$, la fonction $t \mapsto 1/(t^2+x^2)$ est décroissante et continue sur $[0\,;+\infty[$. On a donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n^2+x^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$$

(avec existence des intégrales car $1/(t^2+x^2) \sim 1/t^2$ quand $t \to +\infty$).

Les intégrales peuvent être directement calculées [1]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \frac{1}{x}\left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

1. On exploite la formule $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)$.

On en déduit l'équivalence :

$$S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

Exercice 19 *

Pour $x \in [0\,;+\infty[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

(a) Montrer que la fonction S est bien définie sur $[0\,;+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Préciser son sens de variation.

Solution

(a) On introduit les fonctions sommées :

$$u_n(x) = (-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad \text{avec} \quad x \in [0\,;+\infty[\text{ et } n \geqslant 1.$$

La fonction S apparaît comme la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

Soit $x \in [0\,;+\infty[$. La série numérique $\sum u_n(x)$ est alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n(x) = (-1)^{n-1}\left|u_n(x)\right| \quad \text{avec} \quad \left|u_n(x)\right| = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

La suite $\left(\left|u_n(x)\right|\right)_{n\geqslant 1}$ décroît vers 0 et donc la série $\sum u_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées. On en déduit que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ et la fonction S est bien définie.

méthode

Pour montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$, on réunit les hypothèses du théorème de dérivation (Th. 19 p. 238).

Les fonctions u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout réel positif x

$$u_n'(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}.$$

Encore une fois, le critère spécial des séries alternées s'applique à la justification de la convergence de la série numérique $\sum u_n'(x)$. On peut alors borner son reste par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Puisque ce majorant uniforme est de limite nulle, on peut affirmer que la série de fonctions $\sum u'_n$ converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$. On peut alors conclure que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ (Th. 19 p. 238) avec pour tout $x \geqslant 0$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}.$$

(b) **méthode**

> Le signe d'une somme convergeant par le critère spécial est celui de son premier terme.

Pour tout $x \geqslant 0$, le premier terme exprimant $S'(x)$ est $1/(1+x) \geqslant 0$ et donc $S'(x) \geqslant 0$. La fonction S est croissante.

Exercice 20 **

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}.$$

(a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Étudier la limite ℓ de S en $+\infty$.

(c) Déterminer un équivalent simple de $S(x) - \ell$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution

On introduit les fonctions sommées :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx+1} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction S apparaît comme la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La série numérique $\sum u_n(x)$ est alternée car

$$u_n(x) = (-1)^n \left|u_n(x)\right| \quad \text{avec} \quad \left|u_n(x)\right| = \frac{1}{nx+1}.$$

De plus, la suite $\left(\left|u_n(x)\right|\right)$ décroît vers 0 et donc la série $\sum u_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction S est bien définie.

Les fonctions u_n sont toutes continues. Pour obtenir la continuité de S, un argument de convergence uniforme suffit (Th. 16 p. 237). Le critère spécial des séries alternées permet de borner le reste $R_n(x)$ de la série par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{(n+1)x+1}.$$

méthode

> À ce stade, il paraît difficile d'obtenir une convergence uniforme sur l'intégralité de $\mathbb{R}_+^*$. Cependant, cela n'est pas nécessaire pour conclure la continuité : obtenir une convergence uniforme sur des domaines « suffisamment généraux » suffit.

Soit $a > 0$ une valeur arbitraire. Pour tout réel $x \geqslant a$

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)a+1} = \alpha_n.$$

Par ce majorant uniforme α_n de limite nulle, on peut affirmer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$. On en déduit que la fonction S est continue sur cet intervalle et, puisque ceci vaut pour tout $a > 0$, la fonction S est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

(b) **méthode**

> La somme d'une série convergeant par le critère spécial peut être encadrée par ses sommes partielles consécutives.

Soit $x > 0$. En considérant, les sommes partielles de rangs 1 et 2, on obtient l'encadrement

$$1 - \frac{1}{x+1} \leqslant S(x) \leqslant 1.$$

Par encadrement, on conclut que S tend vers $\ell = 1$ en $+\infty$.

(c) Puisque la valeur 1 correspond au premier terme de la somme, on peut simplifier [1]

$$S(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}.$$

méthode

> Lorsque x tend vers l'infini, le terme $1/(nx+1)$ est « assez voisin » de $1/nx$: on peut exploiter cette idée pour rapprocher la somme étudiée d'une somme connue.

On concrétise cette intuition par le calcul :

$$S(x) - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nx(nx+1)}.$$

On peut alors majorer (avec convergence des séries introduites)

$$\left|S(x) - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nx(nx+1)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2}.$$

1. Cette somme peut encore être encadrée par ses sommes partielles consécutives mais cet encadrement est trop large pour permettre de trouver un équivalent en $+\infty$...

Connaissant la valeur de la somme harmonique alternée[1],

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

on peut écrire

$$S(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{\ln 2}{x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{x}.$$

Exercice 21 **

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_n(x) = \arctan(n+x) - \arctan n.$$

(a) Étudier l'existence et la continuité de la fonction S définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

(b) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

(c) La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément au voisinage de $+\infty$?

Solution

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

méthode

> Pour étudier la convergence de la série numérique $\sum u_n(x)$, la difficulté réside dans l'estimation de l'ordre de grandeur de la quantité $u_n(x)$. Une solution consiste à employer l'inégalité des accroissements finis[2].

Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction arctan entre n et $n+x$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n(x) &\leqslant (n+x-n) \times \sup_{[n;n+x]} \left|(\arctan)'\right| \\ &= x \times \sup_{t\in[n;n+x]} \left|\frac{1}{1+t^2}\right| \\ &= \frac{x}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}. \end{aligned}$$

Par cet équivalent, on peut affirmer la convergence de la série $\sum u_n(x)$. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et la fonction S est donc bien définie.

1. Voir sujet 14 p. 25.
2. On peut aussi calculer un développement limité en employant l'égalité $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ (pour $x > 0$) afin de ramener en 0 les variables des fonctions arctan comme cela est fait par la suite.

De plus, les fonctions u_n sont continues et il suffit alors d'établir la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+$ pour pouvoir affirmer la continuité de la fonction S (Th. 16 p. 237). Soit $a \in \mathbb{R}_+$ une valeur arbitraire. Pour tout $x \in [0\,;a]$

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{a}{1+n^2} = \alpha_n.$$

La série de terme général α_n étant convergente, il y a convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions $\sum u_n$ sur tout segment $[0\,;a]$ de $\mathbb{R}_+$. La fonction S est donc continue sur $[0\,;a]$ et, puisque ceci vaut pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on peut affirmer que la fonction S est continue en tout point de $\mathbb{R}_+$.

(b) Avec l'écriture en cours, il est délicat d'anticiper la limite de S en $+\infty$.

méthode

> On ramène la variable en 0 en exploitant l'identité
>
> $$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$, on peut écrire

$$u_n(x) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+x}\right).$$

méthode

> Les fonctions u_n tendent vers $\arctan(1/n)$ en $+\infty$ et la série de ces limites est une série à termes positifs divergente : on peut alors avoir l'intuition que la fonction S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Les fonctions u_n sont toutes croissantes, la fonction somme S est donc aussi croissante. Le théorème de la limite monotone assure alors l'existence d'une limite, éventuellement infinie, à la fonction S en $+\infty$, limite qui est sa borne supérieure.

Par l'absurde, supposons cette limite finie et notons la ℓ. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$S(x) \leqslant \sup_{\mathbb{R}_+} S = \ell.$$

Les termes sommés étant tous positifs, on peut écrire pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = S(x) \leqslant \ell.$$

En passant à la limite quand x tend vers l'infini

$$\sum_{n=1}^{N} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \ell.$$

Or la série numérique $\sum \arctan(1/n)$ est une série à termes positifs divergente puisque

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Ses sommes partielles tendent donc vers l'infini et ne sont pas majorées, c'est absurde !

On peut conclure que la fonction S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

(c) Il ne peut y avoir convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ au voisinage de $+\infty$. En effet, si par l'absurde, cette convergence uniforme est vraie, on peut appliquer le théorème de la double limite (Th. 17 p. 237) et conclure à la convergence de la série des limites $\sum \arctan(1/n)$!

Exercice 22 **

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{2+e^{i\theta}}\, d\theta.$$

Solution

méthode

On exprime la fonction intégrée à l'aide d'une somme géométrique avant d'opérer une intégration terme à terme.

Pour tout $\theta \in [0\,;2\pi]$, on peut écrire par sommation géométrique[1] de raison $-e^{i\theta}/2$

$$\frac{1}{2+e^{i\theta}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{i\theta}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{ik\theta}}{2^{k+1}} \quad\text{car}\quad \left|-\frac{e^{i\theta}}{2}\right| < 1.$$

On a alors

$$I_n = \int_0^{2\pi}\Bigg(\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{(-1)^k\frac{e^{i(n+k)\theta}}{2^{k+1}}}_{u_k(\theta)}\Bigg)\,d\theta.$$

Les fonctions u_k sont continues et la série des fonctions u_k converge normalement sur le segment $[0\,;2\pi]$ car

$$\sup_{\theta\in[0;2\pi]}|u_k(\theta)| = \frac{1}{2^{k+1}} \quad\text{et}\quad \sum \frac{1}{2^{k+1}} \text{ converge.}$$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme par convergence uniforme (Th. 18 p. 238)

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\int_0^{2\pi} e^{i(n+k)\theta}\,d\theta\right).$$

1. On exprime la somme en l'indice k et non en l'indice n afin de ne pas télescoper les notations.

Or, pour p entier,

$$\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,d\theta = \left[\frac{e^{ip\theta}}{ip}\right]_0^{2\pi} = 0 \text{ si } p\neq 0 \quad\text{et}\quad \int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi \text{ si } p = 0.$$

En discutant selon que 0 figure ou non parmi les $n+k$ quand k parcourt $\mathbb{N}$, on conclut

$$I_n = \begin{cases}(-1)^n 2^n\pi & \text{si } n\leqslant 0\\ 0 & \text{si } n > 0.\end{cases}$$

Exercice 23 ** (La fonction ζ de Riemann)

On pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

(a) Montrer que la fonction ζ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$.

(b) Préciser la monotonie et la convexité de la fonction ζ.

(c) Déterminer la limite de la fonction ζ en $+\infty$.

(d) Déterminer un équivalent de la fonction ζ en 1^+.

(e) Établir la convexité de la fonction $x\mapsto \ln\zeta(x)$.

Solution

On introduit les fonctions sommées :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \quad\text{avec}\quad x>1 \text{ et } n\in\mathbb{N}^*.$$

La fonction ζ est la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

(a) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]1\,;+\infty[$ par référence aux séries de Riemann. La fonction ζ est donc bien définie sur $]1\,;+\infty[$. Pour justifier que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on réunit les hypothèses du théorème de dérivation (Th. 20 p. 239).

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$ et

$$f_n'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x\ln n}\right) = -\ln(n)e^{-x\ln n} = -\frac{\ln n}{n^x}.$$

Plus généralement, pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$f_n^{(p)}(x) = (-1)^p\frac{(\ln n)^p}{n^x}.$$

Soit $a>1$ une valeur arbitraire. Pour tout $x\in[a\,;+\infty[$ et tout $p\in\mathbb{N}$

$$\left|f_n^{(p)}(x)\right| = \frac{(\ln n)^p}{n^x} \leqslant \frac{(\ln n)^p}{n^a} = \alpha_n.$$

méthode

On montre la convergence de la série de terme général $\frac{(\ln n)^p}{n^a}$ par comparaison à une série de Riemann d'exposant légèrement inférieur à a.

Soit $\rho \in \left]1\,;a\right[$ (un tel ρ existe car $a > 1$). On a

$$n^\rho \alpha_n = \exp\bigl(p\ln(\ln n) + (\rho - a)\ln n\bigr) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\bigl(o(\ln n) + \underbrace{(\rho - a)}_{<0}\ln n\bigr) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui permet d'affirmer $\alpha_n = o\bigl(1/n^\rho\bigr)$ avec $\rho > 1$. La série de terme général α_n est donc absolument convergente. Ainsi, pour tout ordre de dérivation p, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge normalement, et donc uniformément, sur l'intervalle $\left[a\,;+\infty\right[$. On peut alors affirmer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]1\,;+\infty\right[$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x > 1$

$$\zeta^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^x}.$$

(b) La fonction ζ est décroissante sur $\left]1\,;+\infty\right[$ car pour tout $x > 1$

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\ln n}{n^x}}_{\geqslant 0} \leqslant 0.$$

Aussi, la fonction ζ est convexe sur $\left]1\,;+\infty\right[$ car pour tout $x > 1$

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geqslant 0.$$

(c) **méthode**

On met en œuvre le théorème de la double limite (Th. 17 p. 237).

Les fonctions f_n admettent chacune une limite ℓ_n en $+\infty$ avec

$$\ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\left[2\,;+\infty\right[$ et donc, par le théorème de la double limite, on peut affirmer la convergence (par ailleurs évidente) de la série $\sum \ell_n$ et

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

(d) **méthode**

On peut proposer un encadrement de la fonction ζ en opérant une comparaison série-intégrale.

Pour $x > 1$, la fonction $t \mapsto 1/t^x$ est décroissante et continue sur $\left]0\,;+\infty\right[$. On peut alors écrire

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

(la minoration valant pour $n \geqslant 1$ et la majoration pour $n \geqslant 2$ seulement). En sommant ces encadrements, tout en isolant le terme d'indice 1 lors de la majoration, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

Puisque

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_1^{+\infty} t^{-x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-x} t^{1-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1} \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

et l'on peut conclure

$$\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

(e) Le signe de la dérivée seconde de la fonction $x \mapsto \ln\zeta(x)$ est celui de

$$\zeta(x)\zeta''(x) - \zeta'(x)^2.$$

méthode

On exploite l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En écrivant

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n^{x/2}} \cdot \frac{\ln n}{n^{x/2}}\right)$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n^x}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(\ln n)^2}{n^x}\right).$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini, on obtient

$$\zeta'(x)^2 \leqslant \zeta(x)\zeta''(x).$$

La fonction $x \mapsto \ln\zeta(x)$ est donc convexe sur $\left]1\,;+\infty\right[$.

Exercice 24 * (La fonction η de Dirichlet)**

On pose

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

(a) Montrer que la fonction η est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

(b) Déterminer la limite de la fonction η en 0 par valeurs supérieures.

Solution

On introduit les fonctions sommées :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \quad \text{avec} \quad x \in \left]0\,;+\infty\right[\text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction η apparaît comme la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

(a) Pour $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, la série numérique $\sum u_n(x)$ est alternée et de terme général décroissant vers 0 en valeur absolue. Par le critère spécial, on peut affirmer la convergence simple de la série $\sum u_n$. La fonction η est donc bien définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

Les fonctions u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$u_n'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{e}^{x\ln n}}\right) = \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}.$$

Étudions la convergence uniforme de la série des dérivées $\sum u_n'$.

Pour $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, la série $\sum u_n'(x)$ est alternée car

$$u_n'(x) = (-1)^n \left|u_n'(x)\right| \quad \text{avec} \quad \left|u_n'(x)\right| = \frac{\ln n}{n^x}.$$

La valeur absolue de $u_n'(x)$ tend bien vers 0 mais il faut en établir la décroissance pour pourvoir exploiter le critère spécial. À cette fin, on étudie les variations de la fonction

$$\varphi\colon t \mapsto \frac{\ln t}{t^x} \text{ définie sur } \left]0\,;+\infty\right[.$$

La fonction φ est dérivable et sa dérivée est du signe de $1 - x\ln t$ ce qui permet d'obtenir le tableau suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{1/x}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}x}$	$\searrow$	0

La fonction φ n'est décroissante que sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{1/x}\,;+\infty\right[$.

méthode

> Le critère spécial séries alternées ne peut être appliqué à la série $\sum u_n'(x)$ qu'à partir du rang
>
> $$N_x = \left\lfloor \mathrm{e}^{1/x} \right\rfloor + 1.$$
>
> Cela suffit pour justifier la convergence simple de la série, mais pour établir la convergence uniforme il faut déterminer un rang indépendant de x à partir duquel le critère spécial s'applique.

Soit $a > 0$ une valeur arbitraire. Pour tout $x \in \left[a\,;+\infty\right[$, on constate $N_x \leqslant N_a$. Le critère spécial s'applique donc assurément à la série $\sum u_n(x)$ au delà du rang N_a ce qui permet de borner son reste

$$\forall n \geqslant N_a, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}'(x)\right| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = \alpha_n.$$

Ce majorant uniforme α_n étant de limite nulle, on peut affirmer la convergence uniforme de la série des dérivées $\sum u_n'$ sur $\left[a\,;+\infty\right[$ pour toute valeur $a > 0$. On peut alors conclure que la fonction η est de classe[1] $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

(b) **méthode**

> On combine les termes d'indices impairs avec les termes d'indices pairs qui les suivent[2].

Pour $x > 0$

$$\eta(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2p-1)^x} - \frac{1}{(2p)^x}\right).$$

Considérons alors la fonction $f\colon \left[1\,;+\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{1}{(2t-1)^x} - \frac{1}{(2t)^x}.$$

Par dérivation, on vérifie que la fonction f est décroissante et donc

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(la minoration valant pour $n \geqslant 1$ et la majoration pour $n \geqslant 2$ seulement). En sommant ces encadrements tout en isolant le terme d'indice 1 lors de la majoration, on obtient

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \eta(x) \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(1-x)}\left[(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x}\right]_1^{+\infty}$$

avec

$$(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x} = -(2t)^{1-x}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2t}\right)^{1-x}\right)$$

$$\underset{t\to+\infty}{\sim} (x-1)(2t)^{-x} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

1. On peut adapter le raisonnement précédent et établir que la fonction η est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de définition.

2. Il suffit de raisonner avec les sommes partielles avant de passer à la limite pour justifier la transformation. En l'absence d'absolue convergence, il n'est pas possible de réorganiser les termes en argumentant une sommation par paquets.

et donc

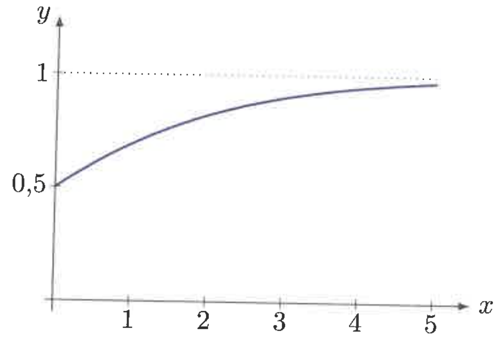
$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(1-x)}\left(2^{1-x}-1\right).$$

Puisque

$$\frac{1}{2(1-x)}\left(2^{1-x}-1\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(1) = 1 - \frac{1}{2^x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

il vient par théorème d'encadrement

$$\eta(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}.$$



7.6.4 Séries de fonctions d'une variable vectorielle

Exercice 25 *

Étudier la définition et la continuité de la fonction S déterminée par

$$S(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(ny)\mathrm{e}^{-nx} \quad \text{sur } X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}.$$

Solution

On introduit les fonctions sommées :

$$u_n(x,y) = \cos(ny)\mathrm{e}^{-nx} \quad \text{avec} \quad (x,y) \in X \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction S apparaît comme la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

Pour $(x,y) \in X$, on a $u_n(x,y) = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ quand n tend vers $+\infty$ car

$$n^2 u_n(x,y) = \underbrace{\cos(ny)}_{\text{bornée}} \exp\underbrace{\left(2\ln n - xn\right)}_{\to -\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La série numérique $\sum u_n(x,y)$ est donc absolument convergente et la fonction S est bien définie.

Les fonctions u_n sont toutes continues et un argument de convergence uniforme suffit pour affirmer la continuité de la fonction S (Th. 16 p. 237).

méthode

Il est inutilement ambitieux d'étudier la convergence uniforme sur l'intégralité du domaine de définition[1]. La convergence uniforme sur des domaines suffisamment généraux permet de conclure.

Soit $a > 0$ une valeur arbitraire et X_a le domaine défini par

$$X_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant a\right\}.$$

Pour $(x,y) \in X_a$, on a

$$\left|u_n(x,y)\right| = \left|\cos(ny)\right|\mathrm{e}^{-nx} \leqslant \mathrm{e}^{-na} = \alpha_n.$$

Or la série de terme général α_n est convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ converge donc normalement sur X_a. On peut alors affirmer que la fonction S est continue sur X_a. Puisque ceci vaut pour tout $a > 0$, on peut conclure que la fonction S est continue en chaque point de X.

Exercice 26 **

(a) Pour quel $z \in \mathbb{C}$ peut-on définir

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-z)}?$$

(b) Établir que la fonction f est continue sur le domaine correspondant.

Solution

On introduit les fonctions sommées :

$$u_n(z) = \frac{1}{n(n-z)} \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction f apparaît comme la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

(a) Pour que les termes sommés possèdent tous un sens, il faut $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$. Inversement, si $z \in \Omega$, la série de terme général $u_n(z)$ converge absolument car

$$\frac{1}{n(n-z)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Finalement, la fonction f est définie sur Ω.

1. Elle n'y est d'ailleurs pas vraie.

(b) Les fonctions u_n sont toutes continues.

méthode

Un argument de convergence uniforme sur des domaines suffisamment généraux suffit pour conclure.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ une valeur arbitraire et le domaine

$$\Omega_a = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^* \mid \operatorname{Re}(z) \leqslant a\right\}.$$

Pour tout $z \in \Omega_a$

$$\left|u_n(z)\right| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{|n-z|}.$$

Soit $N \geqslant a$. Pour tout $n > N$,

$$|n-z| = \sqrt{\left(n - \operatorname{Re}(z)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}(z)\right)^2} \geqslant \left|n - \operatorname{Re}(z)\right| \geqslant n - a$$

et donc

$$\left|u_n(z)\right| \leqslant \frac{1}{n(n-a)} = \alpha_n.$$

Ce majorant uniforme, valable pour $n \geqslant N$, est terme général d'une série convergente. La série de fonctions $(\sum u_n)_{n \geqslant N}$ converge normalement[1], et donc uniformément, sur Ω_a. En adjoignant les premières fonctions écartées, il y a aussi convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur Ω_a. On peut alors affirmer que la fonction f est continue sur Ω_a. Ceci valant pour toute valeur $a \geqslant 0$, on peut conclure que f est continue en tout point de Ω.

Exercice 27 ***

On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant[2]

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\| \quad \text{pour tous } A \text{ et } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et $I = \left]-\alpha\,;\alpha\right[$ avec $\alpha = 1/\|A\|$. Pour $t \in I$, on pose

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k.$$

(a) Montrer que f est bien définie sur I et que $f(t) = (\mathrm{I}_n - tA)^{-1}$.

(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que $f'(t) = Af(t)^2$.

1. En revanche, il n'y a pas convergence normale de $\sum u_n$ sur Ω_a, les premières fonctions de la somme pouvant ne pas être bornées.

2. De telles normes existent : voir le sujet 9 p. 115 ou le sujet 10 du chapitre 6 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MP*.

Solution

Introduisons les fonctions sommées :

$$u_k(t) = t^k A^k \quad \text{avec} \quad t \in I \text{ et } k \in \mathbb{N}.$$

La fonction f apparaît comme la somme de la série de fonctions $\sum u_k$.

(a) Soit $t \in I$. La série de terme général $u_k(t)$ converge absolument car on peut proposer la comparaison géométrique :

$$\left\|t^k A^k\right\| = |t|^k \left\|A^k\right\| \leqslant |t|^k \|A\|^k = \left(|t| \, \|A\|\right)^k \quad \text{avec} \quad |t| \, \|A\| < 1.$$

La fonction f est donc bien définie sur l'intervalle I.

méthode

En transitant par les sommes partielles, on calcule $(\mathrm{I}_n - tA)f(t)$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on peut écrire par télescopage

$$(\mathrm{I}_n - tA) \sum_{k=0}^{N} t^k A^k = \sum_{k=0}^{N} \left(t^k A^k - t^{k+1} A^{k+1}\right) = \mathrm{I}_n - t^{N+1} A^{N+1}.$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini, on obtient

$$(\mathrm{I}_n - tA) f(t) = \mathrm{I}_n.$$

On en déduit que la matrice $\mathrm{I}_n - tA$ est inversible et que $f(t)$ est son inverse.

(b) Les fonctions u_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u_0' = 0$ et, pour $k \geqslant 1$ et $t \in I$,

$$u_k'(t) = k t^{k-1} A^k.$$

Soit $r \in [0\,;\alpha[$. Pour $t \in [-r\,;r]$ et $k \geqslant 1$

$$\left\|k t^{k-1} A^k\right\| = k |t|^{k-1} \left\|A^k\right\| \leqslant k r^{k-1} \|A\|^k = \alpha_n.$$

La série de terme général α_n est convergente[1], car si l'on introduit $\rho \in \left]r\,;\alpha\right[$

$$\alpha_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\rho^k \|A\|^k\right) = \mathrm{o}\Big(\left(\rho \|A\|\right)^k\Big) \quad \text{avec} \quad \rho \|A\| \in [0\,;1[.$$

La série des fonctions dérivées $\sum u_k'$ converge normalement, et donc uniformément, sur le segment $[-r\,;r]$. Ceci permet d'affirmer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (Th. 19 p. 238) avec

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k t^{k-1} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) t^k A^{k+1}.$$

1. On peut aussi appliquer la règle de d'Alembert quand $r \|A\| \neq 0$.

Il reste à vérifier l'identité proposée.

méthode

On simplifie $(\mathrm{I}_n - tA)f'(t)$ en raisonnant par les sommes partielles.

Pour $N \in \mathbb{N}$,

$$(\mathrm{I}_n - tA)\sum_{k=0}^{N}(k+1)t^kA^{k+1} = \sum_{k=0}^{N}(k+1)t^kA^{k+1} - \sum_{k=0}^{N}(k+1)t^{k+1}A^{k+2}.$$

On réalise un glissement d'indice dans la seconde somme puis on combine les deux sommes en isolant un terme

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_n - tA)\sum_{k=0}^{N}(k+1)t^kA^{k+1} &= \sum_{k=0}^{N}(k+1)t^kA^{k+1} - \sum_{k=1}^{N+1}kt^kA^{k+1}\\ &= A\sum_{k=0}^{N}t^kA^k - (N+1)t^{N+1}A^{N+2}.\end{aligned}$$

Cependant,

$$\left\|(N+1)t^{N+1}A^{N+2}\right\| \leqslant (N+1)\left\|A\right\|\left(|t|\left\|A\right\|\right)^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad |t|\left\|A\right\| < 1$$

et donc, par passage à la limite quand N tend vers l'infini, on obtient

$$(\mathrm{I}_n - tA)f'(t) = A\sum_{k=0}^{+\infty}t^kA^k = Af(t) \quad \text{puis} \quad f'(t) = A\big(f(t)\big)^2$$

car $f(t)$ est l'inverse de $\mathrm{I}_n - tA$ et commute avec A.

7.7 Exercices d'approfondissement

Exercice 28 ** (Lemme de Lebesgue)

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Montrer

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Solution

méthode

On résout le cas où f est une fonction en escalier avant de généraliser aux fonctions continues par morceaux par approximation uniforme (Th. 6 p. 232).

Cas : La fonction f est constante égale à λ. Un calcul immédiat suffit pour conclure

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}\right]_a^b = \frac{\lambda}{\mathrm{i}n}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nb} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}na}\right)}_{\text{bornée}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cas : La fonction f est en escalier. On peut introduire $a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ avec $a_0 = a$ et $a_p = b$ tels que f soit constante sur chaque intervalle $]a_{k-1}\,;a_k[$. Il suffit alors de découper l'intégrale par la relation de Chasles pour conclure

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p}\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\int_{]a_{k-1};a_k[}\underbrace{f(t)}_{\text{constante}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cas général : La fonction f est continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ définie sur $[a\,;b]$ telle que $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On peut écrire par linéarité

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(f(t)-\varphi(t)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t + \int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

D'une part, l'inégalité triangulaire intégrale donne

$$\left|\int_a^b \big(f(t)-\varphi(t)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)-\varphi(t)\right|\underbrace{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right|}_{=1}\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}t = (b-a)\varepsilon.$$

D'autre part, l'étude qui précède fournit

$$\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et il existe donc un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout naturel $n \geqslant N$,

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$

On peut alors conclure que, pour tout $n \geqslant N$

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a+1)\varepsilon.$$

On obtient ainsi que l'intégrale étudiée est de limite nulle [1].

1. On pourra comparer cette résolution générale à celle particulière déjà vue dans le sujet 20 du chapitre 10 de l'ouvrage *Exercices d'analyse MPSI*.

Exercice 29 **

(a) Montrer qu'il existe une unique fonction $f\colon]0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$ et vérifiant

$$f(x)+f(x+1)=\frac{1}{x^2}\quad\text{pour tout } x>0.$$

(b) Montrer que f est continue et intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

(c) Calculer

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

(a) **méthode**

Par analyse-synthèse, on exprime une fonction solution en projetant la variable à l'infini.

Analyse : supposons $f\colon]0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction solution. Pour $x>0$, on a

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-f(x+1)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+f(x+2).$$

Par une récurrence immédiate, on obtient pour $n\in\mathbb{N}$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}+(-1)^{n+1}f(x+n+1).$$

Sachant que f est de limite nulle en $+\infty$, on peut conclure

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}.$$

Synthèse : considérons la fonction f donnée par l'expression ci-dessus. La série converge par application du critère spécial des séries alternées et cette fonction est donc bien définie. De plus, on peut encadrer sa somme par des sommes partielles consécutives et affirmer

$$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

Ceci assure que f est de limite nulle en l'infini.

Enfin, pour tout $x>0$, on isole dans le calcul qui suit le terme initial de la première somme et l'on opère un glissement d'indice dans la seconde

$$\begin{aligned}f(x)+f(x+1)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n+1)^2}\\&=\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(x+n)^2}=\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

La fonction introduite est donc bien solution du problème posé.

(b) Par application du critère spécial, on peut borner le reste de la série définissant f et affirmer, pour tout $x>0$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right|\leqslant\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n+1)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}=\alpha_n.$$

La suite (α_n) étant de limite nulle, il y a convergence uniforme de la série de fonctions. Les fonctions sommées étant toutes continues, on peut alors affirmer la continuité de f sur $]0\,;+\infty[$. De plus, la fonction est intégrable en vertu de l'encadrement déjà écrit

$$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x^2}.$$

(c) **méthode**

On ne peut pas utiliser de théorèmes d'intégration terme à terme pour ce calcul car l'intégrale est généralisée : on raisonne par les sommes partielles.

Soit $N\in\mathbb{N}$. On peut écrire avec convergence des intégrales écrites

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(t+n)^2}\right)\mathrm{d}t&=\sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+n)^2}\right)\\&=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\left[-\frac{1}{t+n}\right]_1^{+\infty}\\&=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\left|\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(t+n)^2}\right)\mathrm{d}t\right|&=\left|\int_1^{+\infty}\left(f(t)-\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(t+n)^2}\right)\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\int_1^{+\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(t+n)^2}\right)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_1^{+\infty}\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(t+n)^2}\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et par application du critère spécial

$$\left|\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(t+n)^2}\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+N+1)^2}=\frac{1}{(N+2)}.$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini, on obtient

$$\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$$

Exercice 30 **

Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

Solution

méthode

> Le terme significatif de la somme est le dernier, on réordonne celle-ci pour qu'il devienne le premier.

$$u_n \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=0}^{n} \left(\frac{n-\ell}{n}\right)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \left(1-\frac{\ell}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{k}{n}\right)^n.$$

méthode

> Le terme u_n peut se comprendre comme la valeur en n de la somme d'une série de fonctions à laquelle on applique le théorème de la double limite (Th. 17 p. 237).

On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

avec $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_k(n) = \begin{cases} (1-\frac{k}{n})^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. À partir d'un certain rang

$$f_k(n) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{k}{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-k}.$$

Les fonctions f_k admettent donc chacune une limite finie en $+\infty$.

Au surplus, par l'inégalité[1] $\ln(1+u) \leqslant u$ valable pour tout $u > -1$, on a pour tout n supérieur à k

$$f_k(n) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)\right) \leqslant \exp\left(n \times \frac{-k}{n}\right) = \mathrm{e}^{-k}.$$

Cette majoration valant aussi pour $n > k$, on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_k(n)| \leqslant \mathrm{e}^{-k} = \alpha_k.$$

1. Voir sujet 3 p. 145.

Puisque la série géométrique des α_k est convergente, la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement et donc uniformément. Les hypothèses du théorème de la double limite étant réunies, on peut conclure

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} = \frac{1}{1-1/\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

Exercice 31 * (Un développement eulerien)**

(a) Étudier la continuité de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

(b) Étudier la périodicité de la fonction f.

(c) Soit un réel $c > 2$ et h une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x réel,

$$h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = c\,h(x).$$

Montrer que la fonction h est nulle.

(d) En déduire que pour tout x réel non entier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

Solution

(a) Introduisons les fonctions sommées

$$f_n(x) = \frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

Soit $a > 0$. Pour $x \in [-a\,;a]$, on a pour tout $n > a$

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{2}{(n-a)^2} = \alpha_n.$$

La série de terme général α_n étant convergente, la série des fonctions f_n (limitée aux termes pour lesquels $n > a$) converge normalement sur $[-a\,;a]$. Les fonctions sommées étant continues, on obtient la continuité de la fonction f sur $[-a\,;a]\setminus\mathbb{Z}$. Or ceci vaut pour tout $a > 0$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. En revenant aux sommes partielles

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(x-n)^2}.$$

En opérant un glissement d'indice

$$f(x+1) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(x+1-n)^2} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-(N+1)}^{N-1} \frac{1}{(x-n)^2}.$$

Cette dernière somme partielle diffère de celle initiale par deux termes

$$\sum_{n=-(N+1)}^{N-1} \frac{1}{(x-n)^2} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+N+1)^2} - \frac{1}{(x-N)^2}.$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini, on conclut $f(x+1) = f(x)$. La fonction f est 1-périodique.

(c) **méthode**

> L'équation fonctionnelle est incompatible avec la réalisation d'un maximum, sauf si celui-ci est nul.

Soit $\alpha \geqslant 1$. Introduisons

$$M_\alpha = \sup_{[-\alpha;\alpha]} |h|$$

(ce qui est possible car h est continue donc bornée sur $[-\alpha;\alpha]$).

Pour tout $x \in [-\alpha;\alpha]$, les réels $x/2$ et $(x+1)/2$ appartiennent aussi à $[-\alpha;\alpha]$. La relation

$$h(x) = \frac{1}{c}\left(h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

donne

$$|h(x)| \leqslant \frac{2}{c}M_\alpha.$$

On en déduit

$$M_\alpha \leqslant \frac{2}{c}M_\alpha$$

puis $M_\alpha = 0$ car $c > 2$. Ainsi, la fonction h est nulle sur le segment $[-\alpha;\alpha]$. Enfin, ceci valant pour tout $\alpha \geqslant 1$, on peut conclure que h est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

(d) Introduisons la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ par

$$g(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

La fonction $h = f - g$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, 1-périodique et continue.

On peut décomposer la somme définissant la fonction f et écrire

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{f}(x) \quad \text{avec} \quad \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right).$$

La fonction $\tilde{f}$ est définie et continue en 0 en vertu de l'étude initiale.

Par calcul de développement limité

$$g(x) \underset{x\to0}{=} \frac{\pi^2}{\left(\pi x - \frac{1}{6}(\pi x)^3 + o(x^3)\right)^2} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1).$$

On peut donc aussi écrire

$$g(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{g}(x)$$

avec $\tilde{g}$ fonction continue en 0.

La fonction $h = f - g$ se prolonge donc par continuité en 0. Par périodicité, la fonction h se prolonge en une fonction continue sur l'intégralité de $\mathbb{R}$.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on remarque

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4f(x).$$

En effet, cette relation s'obtient en passant à la limite l'identité

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\left(\frac{x}{2}-n\right)^2} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}-n\right)^2} = 4\sum_{n=-(2N+1)}^{2N} \frac{1}{(x-n)^2}.$$

Aussi, par calcul trigonométrique,

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4g(x)$$

car

$$\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a\cos^2 a} = \frac{4}{\sin^2(2a)}.$$

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

$$h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4h(x).$$

Par continuité et densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, cette identité est encore vraie pour $x \in \mathbb{Z}$.

Finalement, en vertu de l'étude qui précède, on peut conclure que la fonction h est nulle et donc $f = g$.

Exercice 32 ***

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles convexes définies sur un intervalle ouvert non vide I. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I. Montrer que la convergence est en fait uniforme sur tout segment inclus dans I.

Solution

Notons f la limite simple de la suite (f_n). Les fonctions f_n sont convexes donc

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0\,;1],\quad f_n\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda) f_n(a) + \lambda f_n(b).$$

En passant cette relation à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0\,;1],\quad f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b).$$

La fonction f est donc convexe.

Soit $[a\,;b]$ un segment inclus dans I. Par l'absurde, supposons la convergence de (f_n) non uniforme sur ce segment. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une infinité de rang n pour lesquels

$$\sup_{x \in [a;b]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \geqslant \varepsilon.$$

Quitte à supprimer certaines fonctions à l'intérieur de la suite (f_n), on peut supposer que la propriété ci-dessus est vraie pour tout rang n ce qui simplifie la présentation de ce qui suit. On peut alors introduire une suite (x_n) d'éléments de $[a\,;b]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (x_n) une suite convergente et, quitte à supprimer comme au-dessus un certain nombre de fonctions dans la suite (f_n), on peut supposer que la suite (x_n) converge. Notons x_∞ sa limite.

Par convergence simple, la suite $\big(f_n(x_\infty)\big)$ converge vers $f(x_\infty)$. Pour n assez grand, on a donc

$$\big|f_n(x_\infty) - f(x_\infty)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

et l'on en déduit la minoration

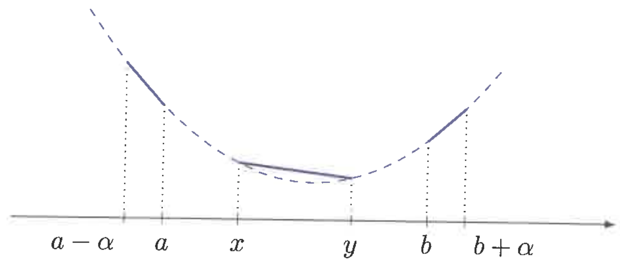
$$\begin{aligned}
&\big|f_n(x_n) - f_n(x_\infty) + f(x_\infty) - f(x_n)\big| \\
&\qquad \geqslant \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| - \big|f_n(x_\infty) - f(x_\infty)\big| \\
&\qquad \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

méthode

> On observe qu'une fonction convexe sur l'intervalle ouvert I est lipschitzienne sur tout $[a\,;b]$ inclus dans I.

Soit $[a\,;b]$ un segment inclus dans l'intervalle ouvert I, on peut introduire $\alpha > 0$ tel que $[a-\alpha\,;b+\alpha] \subset I$. Par croissance des pentes, on a pour toute fonction convexe g définie sur I et pour tous x et y dans $[a\,;b]$ avec $x \leqslant y$

$$\frac{g(a) - g(a-\alpha)}{\alpha} \leqslant \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \leqslant \frac{g(b+\alpha) - g(b)}{\alpha}.$$



Ainsi, pour chaque x et y dans $[a\,;b]$,

$$\big|g(y) - g(x)\big| \leqslant M(g)\,|y - x|$$

avec

$$M(g) = \max\left(-\frac{g(a) - g(a-\alpha)}{\alpha}, \frac{g(b+\alpha) - g(b)}{\alpha}\right).$$

En appliquant cette propriété aux fonctions convexes f_n et f, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\big|f_n(x_n) - f_n(x_\infty) + f(x_\infty) - f(x_n)\big| \\
&\qquad \leqslant \big|f_n(x_n) - f_n(x_\infty)\big| + \big|f(x_\infty) - f(x_n)\big| \\
&\qquad \leqslant \big(\underbrace{M(f_n)}_{\to M(f)} + M(f)\big)\,|x_n - x_\infty| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Ceci contredit la minoration précédente : on a obtenu une absurdité.

CHAPITRE 8

Intégrales à paramètre

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

8.1 Suites et séries d'intégrales

8.1.1 Convergence dominée

Lorsque l'on étudie la limite d'une suite d'intégrales, et si cela à un sens, il est raisonnable[1] d'espérer que celle-ci soit l'intégrale de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée[2])
Si (u_n) est une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ et u une fonction de I vers $\mathbb{K}$ vérifiant :
1) la suite (u_n) converge simplement vers u sur I,
2) les fonctions u_n et u sont continues par morceaux sur I,
3) il existe $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I, \quad |u_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors les fonctions u_n et la fonction u sont intégrables sur I et

$$\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I u(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Raisonnable mais pas automatique ! On peut vérifier par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = 1$ alors que $\int_0^{+\infty} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^{-nt}\right)\mathrm{d}t = 0$.

La troisième hypothèse se nomme l'*hypothèse de domination*, elle consiste en la détermination d'une fonction φ s'exprimant indépendamment de n, intégrable sur I et bornant les fonctions u_n.

8.1.2 Intégration terme à terme

Lorsque l'on étudie l'intégrale d'une somme infinie, et si cela a un sens, on peut espérer[3] que celle-ci soit simplement la somme des intégrales :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

Théorème 2

Si $\sum u_n$ est une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ vérifiant :

1) la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I,
2) les fonctions u_n et la fonction somme sont continues par morceaux sur I,
3) les fonctions u_n sont intégrables sur I,
4) il y a convergence de la série numérique $\sum \int_I |u_n|$

alors la somme de la série de fonctions est intégrable sur I, la série des intégrales des fonctions u_n converge absolument et[4]

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

8.2 Fonctions définies par une intégrale

On étudie dans cette partie les fonctions de la forme

$$F : x \in X \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

avec X une partie d'un espace de dimension finie.

2. Si l'intégration porte sur un segment, le théorème de convergence uniforme (Th. 10 p. 233) permet aussi l'échange des symboles limites et intégrales. Le théorème de convergence dominée permet cet échange, même lorsque l'intégrale est généralisée.
3. Ceci n'est pour autant pas automatique : voir sujet 10 p. 314.
4. Si l'intégration porte sur un segment, le théorème de convergence uniforme (Th. 18 p. 238) permet l'échange des symboles sommes et intégrales. Le théorème en cours permet cet échange que l'intégration porte sur un segment ou non.

8.2.1 Continuité

Théorème 3

Si $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ définie de $X \times I$ vers $\mathbb{K}$ vérifie :

1) $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X pour tout $t \in I$,
2) $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I pour tout $x \in X$,
3) il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in X \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur X.

La troisième hypothèse se nomme l'*hypothèse de domination*. Elle consiste en la détermination d'une fonction intégrable s'exprimant indépendamment de x et bornant $f(x,t)$.

En pratique, il n'est pas toujours possible de parvenir à produire une domination valable pour tout $x \in X$. La continuité étant une notion locale, obtenir des dominations sur des domaines « suffisamment généraux » (par exemple sur tout segment inclus dans X lorsque celui-ci est un intervalle) s'avère suffisant.

8.2.2 Convergence par domination

On étudie la fonction F au voisinage d'un point a adhérent à X (a peut aussi être une extrémité infinie de X si ce dernier est un intervalle).

Théorème 4

Si $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ définie de $X \times I$ vers $\mathbb{K}$ et $\ell : t \mapsto \ell(t)$ de I vers $\mathbb{K}$ vérifient :

1) $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$ pour tout $t \in I$,
2) $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I pour tout $x \in X$,
3) il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in X \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors

$$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans cet énoncé, la troisième hypothèse qui est l'hypothèse de domination, peut être remplacée par une hypothèse de domination valable seulement sur un voisinage de a.

8.2.3 Dérivation

Désormais, X désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon (x,t) \mapsto f(x,t)$ définie sur $X \times I$ admet une *dérivée partielle* en la variable x si la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est une fonction dérivable pour chaque valeur de t dans I.

On définit alors cette dérivée partielle en posant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x,t)\big).$$

Cette dérivée partielle se calcule en considérant la variable t comme un paramètre constant.

Théorème 5

Soit $f\colon (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction de $X \times I$ vers $\mathbb{K}$ vérifiant :

1) $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I pour tout $x \in X$.

Si f admet une dérivée partielle en la variable x vérifiant :

2) $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur X pour tout $t \in I$,

3) $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I pour tout $x \in X$,

4) il existe $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in X \times I, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

alors la fonction $F\colon x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X et, pour tout $x \in X$,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

En pratique, il n'est pas toujours possible d'obtenir l'hypothèse de domination sur l'intégralité de l'intervalle X. Il est alors très fréquent d'employer ce théorème en raisonnant plutôt sur tout segment $[a\,;b]$ inclus dans X. Cela permet d'obtenir que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a\,;b]$ inclus dans X, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur X.

8.2.4 Dérivation à l'ordre n

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon (x,t) \mapsto f(x,t)$ définie sur $X \times I$ admet une *dérivée partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}$* en la variable x si $x \mapsto f(x,t)$ est une fonction n fois dérivable pour chaque valeur de t dans I.

On pose alors

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(f(x,t)\big).$$

Théorème 6

Soit $f\colon (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction de $X \times I$ vers $\mathbb{K}$.

On suppose que f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n-1$ en la variable x vérifiant :

1) $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I pour tout $x \in X$ et tout $j \in [\![0\,;n-1]\!]$.

Si f admet aussi une dérivée partielle à l'ordre n en la variable x vérifiant :

2) $x \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue sur X pour tout $t \in I$,

3) $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur I pour tout $x \in X$,

4) il existe $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in X \times I, \qquad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

alors la fonction F est classe $\mathcal{C}^n$ sur X et, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$ et tout $x \in X$,

$$F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

L'hypothèse de domination porte uniquement sur la dérivée partielle ultime, les dérivées partielles intermédiaires devant « seulement » être intégrables. Encore une fois, il sera fréquent d'exploiter ce résultat en raisonnant, non pas directement sur l'intervalle X, mais plutôt sur un segment $[a\,;b]$ arbitraire inclus dans X.

8.3 Exercices d'apprentissage

8.3.1 Convergence dominée

Lorsque l'on étudie une limite d'une suite d'intégrales, on peut échanger les symboles limite et intégral :

— par convergence uniforme (Th. 10 p. 233) lors d'une intégration sur un segment ;

— par convergence dominée (Th. 1 p. 295) pour les intégrales généralisées ou non.

Exercice 1

Étudier les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2\sin(t/n)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t.$

Solution

(a) **méthode**

> On commence par dénommer la suite de fonctions définissant les intégrales et l'on étudie sa convergence simple.

Soit $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u_n(t) = \frac{1 + 2\sin(t/n)}{1+t^2} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$u_n(t) = \frac{1}{1+t^2}\Bigl(1 + 2\underbrace{\sin\Bigl(\frac{t}{n}\Bigr)}_{\to 0}\Bigr) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1+t^2}.$$

méthode

> Puisque les fonctions u_n admettent une limite quand n croît vers l'infini, on peut espérer que la limite de l'intégrale corresponde à l'intégrale de la limite.

Appliquons le théorème de convergence dominée. Par ce qui précède, on peut déjà affirmer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction u_∞ déterminée par

$$u_\infty(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Les fonctions u_n et la fonction u_∞ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. Il reste à obtenir l'hypothèse de domination.

méthode

> Vérifier l'hypothèse de domination consiste à déterminer une fonction φ intégrable et s'exprimant indépendamment de n et majorant la fonction $|u_n|$.

Pour tout t réel et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\bigl|u_n(t)\bigr| = \frac{\bigl|1 + 2\sin(t/n)\bigr|}{1+t^2} \leqslant \frac{1 + 2\bigl|\sin(t/n)\bigr|}{1+t^2} \leqslant \frac{3}{1+t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de n et est intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$\varphi(t) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \frac{3}{t^2} \quad \text{avec} \quad 2 > 1$$

Par convergence dominée, on peut affirmer que les fonctions u_n et la fonction u_∞ sont intégrables et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2\sin(t/n)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Bigl[\arctan t\Bigr]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \Bigl(-\frac{\pi}{2}\Bigr) = \pi.$$

(b) Soit $u_n : [0\,;\pi/2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u_n(t) = \sin^n t \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par étude de la limite d'une suite géométrique, on a pour tout $t \in [0\,;\pi/2[$

$$u_n(t) = \bigl(\sin t\bigr)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad \bigl|\sin t\bigr| < 1$$

et pour $t = \pi/2$

$$u_n(t) = 1^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction u_∞ définie sur $[0\,;\pi/2]$ par

$$u_\infty(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0\,;\pi/2[\\ 1 & \text{si } t = \pi/2. \end{cases}$$

Les fonctions u_n et la fonction u_∞ sont continues par morceaux. Reste à vérifier l'hypothèse de domination.

méthode

> Lorsque l'intégrale porte sur un segment $[a\,;b]$, il suffit de vérifier que les fonctions u_n sont uniformément bornées pour vérifier l'hypothèse de domination. En effet, les fonctions constantes sont intégrables sur les intervalles bornés.

Pour tout naturel n et tout $t \in [0\,;\pi/2]$,

$$\bigl|\sin^n t\bigr| \leqslant 1 = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de n et est intégrable. Le théorème de convergence dominée s'applique[1] et l'on peut affirmer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} u_\infty(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[0;\pi/2[} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 2

Montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} n\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Les fonctions u_n sont continues mais la limite simple ne l'est pas : la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0\,;\pi/2]$. Le théorème d'échange des symboles limite et intégral par convergence uniforme ne peut pas s'appliquer à cette étude.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $u_n : x \mapsto ne^{-x^n}$ est définie, continue par morceaux sur $[1\,;+\infty[$ et intégrable car négligeable devant $x \mapsto 1/x^2$ quand x tend vers $+\infty$. On peut donc introduire l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} ne^{-x^n}\,dx.$$

La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]1\,;+\infty[$: une application directe du théorème de convergence dominée ne pourra pas produire la limite voulue[1].

méthode

Lorsqu'une application directe du théorème de convergence dominée n'est pas possible, on peut envisager une transformation de l'écriture de l'intégrale : changement de variable, intégration par parties, découpage de l'intégrale,...

La présence du facteur n et du terme x^n dans l'exponentielle invite au changement de variable $t = x^n$. La fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[1\,;+\infty[$ vers lui-même. Le changement de variable $t = x^n$ est donc possible et transforme l'intégrale généralisée convergente en une autre intégrale, elle aussi convergente (Th. 15 p. 51) :

$$\int_1^{+\infty} ne^{-x^n}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{\frac{1}{n}}\,dt \quad \text{car } dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

Introduisons alors les fonctions $u_n : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$u_n(t) = \frac{e^{-t}}{t} t^{\frac{1}{n}} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit $t \in [1\,;+\infty[$ fixé. On a

$$t^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln t\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction $u_\infty : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$u_\infty(t) = \frac{e^{-t}}{t}.$$

Les fonctions u_n et u_∞ sont continues par morceaux sur $[1\,;+\infty[$ et, pour tout $t \in [1\,;+\infty[$ et tout $n \geqslant 1$,

$$|u_n(t)| \leqslant e^{-t} = \varphi(t) \quad \text{car } t^{\frac{1}{n}-1} = \exp\left(\underbrace{\left(\frac{1}{n}-1\right)\ln t}_{\leqslant 0}\right) \leqslant 1.$$

1. En fait, on ne pourra pas obtenir l'hypothèse de domination.

La fonction φ s'exprime indépendamment de n et est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ car négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ quand t tend vers $+\infty$. Par convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} ne^{-x^n}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

8.3.2 Intégration terme à terme

Exercice 3

Montrer[1]

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solution

méthode

Pour montrer qu'une intégrale est égale à une somme, on peut décomposer en somme la fonction définissant l'intégrale et opérer une intégration terme à terme.

Pour $t \in [0\,;1[$, on peut écrire par sommation géométrique de raison t

$$\frac{1}{t-1} = -\frac{1}{1-t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

Pour $t \in]0\,;1[$, on a alors

$$\frac{\ln t}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \quad \text{avec} \quad u_n(t) = -t^n \ln t.$$

méthode

On peut justifier une intégration terme à terme par convergence uniforme (Th. 18 p. 238) lorsque l'intégration porte sur un segment[2] ou par application du Th. 2 p. 296, quel que soit le type d'intervalle sur lequel porte l'intégration.

Par les calculs qui précèdent, on peut assurer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0\,;1[$ et sa somme est la fonction $t \mapsto \ln(t)/(t-1)$ que l'on a décomposée. Les fonctions u_n et la fonction somme sont continues par morceaux sur $]0\,;1[$. Les fonctions u_n sont intégrables sur $]0\,;1[$ car

$$u_n(t) \underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad u_n(t) \xrightarrow[t\to1^-]{} 0.$$

1. Connaissant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, cette étude détermine la valeur (non triviale) de l'intégrale.
2. Voir par exemple le sujet 6 p. 249.

Il reste à vérifier l'hypothèse de « convergence de la série des intégrales des valeurs absolues ».

Par une intégration par parties généralisée justifiée par l'existence de limites finies au terme contenu dans le crochet, on a

$$\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, on a bien la convergence de la série des intégrales des valeurs absolues. On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et affirmer l'identité

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

avec intégrabilité de la fonction déterminant l'intégrale dans le premier membre et absolue convergence de la série exprimant le second membre. Cette identité donne ainsi [1]

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

et l'on conclut à l'égalité voulue par un glissement d'indice.

Exercice 4

Montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

et en déduire la valeur de la somme.

Solution

On décompose la fonction exprimant l'intégrale en somme géométrique. Pour $t \in [0\,;1[$, on peut écrire avec convergence de la série introduite

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-t^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}.$$

méthode

On souhaite opérer une intégration terme à terme mais la série exprimée dans le premier membre de l'identité voulue n'est pas absolument convergente : on ne peut pas appliquer le théorème Th. 2 p. 296. On raisonne alors par les sommes partielles.

1. On justifie ici, certes un peu tardivement, l'existence de l'intégrale étudiée !

Soit $N \in \mathbb{N}$. Puisque la somme est finie, on peut échanger les symboles somme et intégrale par linéarité

$$\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Ainsi, et sous réserve de convergence, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

méthode

Il s'agit ensuite d'étudier la limite en second membre : on peut raisonner par convergence dominée (Th. 1 p. 295).

On pose

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{2n} = \frac{1-(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2}.$$

La suite de fonctions (S_N) converge simplement vers la fonction $S\colon t \mapsto 1/(1+t^2)$ sur $[0\,;1[$, les fonctions S_N et la fonction S sont continues par morceaux et, pour tout t de $[0\,;1[$ et tout N naturel, on a

$$|S_N(t)| \leqslant \frac{1+|t|^{2N+2}}{1+t^2} \leqslant \frac{2}{1+t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de N et est intégrable sur $[0\,;1[$ car on peut la prolonger par continuité en 1. Par convergence dominée

$$\int_0^1 S_N(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'identité $(*)$ donne alors [1] l'identité qui suit avec convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit [2]

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

1. Plus généralement, on montre manière identique l'identité $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ valable pour tous a et b réels strictement positifs.

2. Lorsque l'on connaît le développement en série entière de la fonction arctan, on peut aussi résoudre ce sujet en faisant tendre la variable vers 1^-.

8.3.3 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 5

On étudie la fonction déterminée par

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad x\geqslant 0.$$

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Solution

(a) **méthode**

> Pour étudier une fonction définie par une intégrale, on commence par dénommer la fonction de deux variables exprimant l'intégrale.

Introduisons $u\colon \mathbb{R}_+\times[0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^3}.$$

méthode

> Par le théorème de continuité par domination (Th. 3 p. 297), on peut établir simultanément que la fonction f est définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $t\in[0\,;+\infty[$, la fonction[1] $x\mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction $t\mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle d'intégration $[0\,;+\infty[$.

Enfin, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et tout $t\in[0\,;+\infty[$, on peut écrire

$$\left|u(x,t)\right|\leqslant\frac{1}{1+t^3}=\varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment du paramètre x et est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car équivalente à $t\mapsto 1/t^3$ en $+\infty$

Toutes les hypothèses du théorème de continuité par domination sont réunies et l'on peut donc affirmer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) **méthode**

> En encadrant la fonction intégrée, on peut estimer une intégrale et en déduire le comportement asymptotique.

1. Cette fonction pourra être exprimée $u(.,t)$ le point servant à spécifier la position de la variable. En aucun cas on écrira « $u(x,t)$ est continue » car il y aurait alors ambiguïté sur la variable en laquelle on s'exprime !

Pour $x>0$, on peut écrire

$$0\leqslant u(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^3}\leqslant\mathrm{e}^{-xt}.$$

En intégrant en bon ordre cet encadrement, on obtient

$$0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{x}.$$

Les deux membres encadrants sont de limite nulle en $+\infty$, on peut donc affirmer que f est de limite nulle en $+\infty$.

méthode

> On peut aussi résoudre cette limite en mettant en œuvre le théorème d'obtention de convergence par domination (Th. 4 p. 297).

Pour chaque $t\in[0\,;+\infty[$, on a

$$u(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^3}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t>0\\ 1 & \text{si } t=0.\end{cases}$$

La fonction ℓ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et l'on a déjà affirmé que les fonctions $u(x,.)$ sont continues par morceaux et la domination

$$\left|u(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)=\frac{1}{1+t^3}\quad\text{avec}\quad\varphi\text{ intégrable.}$$

On peut donc conclure à nouveau

$$f(x)=\int_0^{+\infty}u(x,t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}\int_0^{+\infty}\ell(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Exercice 6

On étudie la fonction f déterminée par

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\quad\text{avec}\quad x\geqslant 0.$$

(a) Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

(c) Calculer $f'(x)$ en employant l'identité qui suit valable pour tout $x>0$ et tout t de $[0\,;+\infty[$

$$\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}=\frac{x+t}{(1+x^2)(1+t^2)}-\frac{x}{(1+x^2)(1+xt)}.$$

Solution

(a) Soit $u\colon \mathbb{R}_+ \times [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x,t) = \frac{\ln(1+xt)}{(1+t^2)}.$$

Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est continue et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur[1] l'intervalle d'intégration $[0\,;+\infty[$. Il reste à obtenir l'hypothèse de domination.

Pour tout $t > 0$, on remarque

$$u(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Il est donc impossible de déterminer $\varphi(t)$ majorant $u(x,t)$ indépendamment de x !

méthode

> La continuité est une notion locale : en obtenant la continuité d'une fonction sur tout segment de son intervalle de définition, on peut généraliser celle-ci à l'intervalle entier.

Soit $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in [a\,;b]$ et tout $t \in [0\,;+\infty[$

$$\left|u(x,t)\right| = \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \leqslant \frac{\ln(1+bt)}{1+t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment[2] de x et est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car

$$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \quad \text{puisque } t^{3/2}\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+bt)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur tout segment de $\mathbb{R}_+$ donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) **méthode**

> Le théorème de dérivation par domination (Th. 5 p. 298) permet de dériver une fonction définie par une intégrale.

Pour chaque $t \in [0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction u admet donc une dérivée partielle en la variable x

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\right) = \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}.$$

1. Désormais, de façon concise mais peut-être abusive, on dira simplement que la fonction u est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t.
2. En limitant la variable x à évoluer dans un segment, on est assuré par le théorème des bornes atteintes que la fonction continue $x \mapsto u(x,t)$ est bornée.

Cette dérivée partielle est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. Il reste à obtenir l'hypothèse de domination.

Pour tout $x > 0$ et tout t de $[0\,;+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \underbrace{\frac{1}{1+xt}}_{\leqslant 1}\,\frac{t}{1+t^2} \leqslant \frac{t}{1+t^2}.$$

Malheureusement cette fonction de domination n'est pas intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car seulement équivalente à la fonction inverse en $+\infty$. De plus, on ne peut pas proposer une meilleure inégalité car celle-ci devient une égalité quand x tend vers 0^+.

méthode

> La classe d'une fonction est une notion locale : en obtenant le caractère $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de l'intervalle de définition d'une fonction, on peut généraliser celui-ci à l'intervalle entier.

Soit $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a\,;b]$ et tout $t \in [0\,;+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t}{(1+at)(1+t^2)} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable[1] sur $[0\,;+\infty[$ car

$$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{at^2}.$$

Par domination, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ et, puisque ceci vaut pour tout segment $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, on peut conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Au surplus, on peut écrire

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

(c) Par l'écriture proposée

$$\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{x+t}{(1+x^2)(1+t^2)} - \frac{x}{(1+x^2)(1+xt)}$$

(qui est une décomposition en éléments simples réelles en la variable t) on peut mener le

1. En réalisant la domination sur le segment $[a\,;b]$, il a été possible de maintenir l'intégrabilité en conservant une « empreinte » de la variable x à travers la borne a.

calcul de $f'(x)$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{(1+x^2)(1+t^2)} + \frac{t}{(1+x^2)(1+t^2)} - \frac{x}{(1+x^2)(1+xt)}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{x}{1+x^2}\left[\arctan t\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2(1+x^2)}\left[\left(\ln(1+t^2) - 2\ln(1+xt)\right)\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{\pi x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2(1+x^2)}\left[\ln\left(\frac{1+t^2}{(1+xt)^2}\right)\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{\pi x}{2(1+x^2)} - \frac{\ln x}{1+x^2}.\end{aligned}$$

8.4 Exercices d'entraînement

8.4.1 Convergence dominée

Exercice 7 *

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Justifier l'existence de l'intégrale définissant J_n.

(b) Calculer $J_n - J_{n+1}$.

(c) En déduire l'identité

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Solution

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction f_n définie sur $]0\,;1[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}.$$

La fonction f_n est continue par morceaux et prolongeable par continuité en 0 et 1 car

$$f_n(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x^{2n+1}\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

et

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{x+1}\cdot\frac{\ln x}{x-1} \underset{x=1+h}{=} \frac{(1+h)^{2n+1}}{2+h}\cdot\frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}.$$

La fonction f_n est donc intégrable sur $]0\,;1[$ et l'intégrale définissant J_n est bien convergente.

(b) Avec convergence des intégrales introduites, on peut écrire par linéarité

$$J_n - J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}-x^{2n+3}}{x^2-1}\ln x\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^{2n+1}\ln x\,\mathrm{d}x.$$

On poursuit le calcul par intégration par parties avec

$$u(x) = -\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \quad\text{et}\quad v(x) = \ln x.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv tend vers 0 aux deux bornes. Par le théorème d'intégration par parties généralisée, on obtient

$$-\int_0^1 x^{2n+1}\ln x\,\mathrm{d}x = \underbrace{-\left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\ln x\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{2n+2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}.$$

(c) Il s'agit ici de calculer J_0.

méthode

> Par une somme télescopique, on peut relier J_0 à J_n.

Pour tout naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}(J_{k+1}-J_k) = J_n - J_0.$$

On en déduit

$$J_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(J_k - J_{k+1}) + J_n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2} + J_n.$$

Par glissement d'indice, on obtient la relation

$$J_0 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + J_n. \qquad (*)$$

méthode

> Il suffit ensuite de déterminer la limite de la suite (J_n) : on applique le théorème de convergence dominée (Th. 1 p. 295).

Pour $x \in\,]0\,;1[$, on a

$$f_n(x) = \underbrace{x^{2n+1}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{\ln x}{x^2-1}}_{\text{constante}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle. Ces fonctions sont continues par morceaux et, pour tout naturel n et tout $x \in]0\,;1[$,

$$\left|f_n(x)\right| = \underbrace{x^{2n}}_{\leqslant 1}\left|f_0(x)\right| \leqslant \left|f_0(x)\right| = \varphi(x).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de n et est intégrable comme on l'a vu ci-dessus. Par convergence dominée, on peut alors affirmer

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

On peut alors passer la relation $(*)$ à la limite et conclure [1]

$$J_0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 8 *

Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

Considérons la suite des fonctions $u_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ déterminée par $u_n(t) = f(t^n)$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux et, par continuité de f en 0, on a pour tout t de $[0\,;1]$,

$$u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_\infty(t) = \begin{cases} f(0) & \text{si } t \in [0\,;1[\\ f(1) & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Les fonction u_n sont continues par morceaux sur $[0\,;1]$ et la fonction u_∞ aussi car c'est une fonction en escalier.

méthode

> On peut soupçonner que l'intégrale de u_n tend vers l'intégrale de la fonction u_∞. Pour l'établir, il suffit d'obtenir une domination [2].

La fonction f étant continue sur un segment, le théorème des bornes atteintes permet d'introduire un réel M vérifiant $\left|f(x)\right| \leqslant M$ pour tout $x \in [0\,;1]$. On a alors, pour t dans $[0\,;1]$

$$\left|u_n(t)\right| = \left|f(t^n)\right| \leqslant M = \varphi(t).$$

1. Cette identité peut aussi être obtenue directement en opérant une intégration terme à terme après avoir exprimé la fonction intégrée en décomposant $1/(1-x^2)$ en une somme géométrique de raison x^2.
2. Un raisonnement par les ε exprimant la continuité de f en 0 est aussi possible mais plus technique à mettre en œuvre.

La fonction φ s'exprime indépendamment [1] de n et est intégrable sur $[0\,;1]$. Par convergence dominée (Th. 1 p. 295), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u_\infty(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$

Exercice 9 **

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

> Une application directe du théorème de convergence dominée n'est pas possible car la limite de $nf(nt)$ quand n tend vers l'infini n'est pas connue [2]. Cependant, l'expression étudiée invite à réaliser un changement de variable !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le changement de variable affine $u = nt$, on obtient

$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{f(u)}{1+u/n}\,\mathrm{d}u.$$

méthode

> S'il est désormais facile d'étudier la limite du contenu de l'intégrale, cette nouvelle intégrale s'exprime sur un intervalle dépendant de n. On résout ce problème en considérant une intégrale sur $[0\,;+\infty[$ d'une fonction prolongée par 0.

On introduit les fonctions f_n définies sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f_n(u) = \begin{cases} \dfrac{f(u)}{1+u/n} & \text{si } u \in [0\,;n] \\ 0 & \text{si } u \in]n\,;+\infty[\end{cases}$$

de sorte que

$$\int_0^n \frac{f(u)}{1+u/n}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u.$$

Soit $u \in [0\,;+\infty[$. Pour n assez grand, on a $n \geqslant u$ et donc

$$f_n(u) = \frac{f(u)}{1+u/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(u).$$

1. On aurait aussi pu affirmer que les fonctions u_n sont chacune continues, donc bornées, et introduire M réel tel que $|u_n| \leqslant M$. Cependant, le réel M introduit lors de ce raisonnement dépend *a priori* de n et ne peut donc définir une fonction de domination convenable !
2. Il se peut même qu'elle n'existe pas et l'hypothèse de domination ne pourra de toute façon pas être obtenue à cause de la présence du facteur n.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f. Ces fonctions sont continues par morceaux et, pour tout u dans $[0\,;+\infty[$, qu'il soit inférieur à n ou non, on a

$$\left|f_n(u)\right| \leqslant \left|f(u)\right| = \varphi(u).$$

Par l'hypothèse d'intégrabilité de f, la fonction φ est intégrable et l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

8.4.2 Intégration terme à terme

Exercice 10 *

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in\,]0\,;+\infty[$, on pose $u_n(t) = \mathrm{e}^{-nt} - 2\mathrm{e}^{-2nt}$.

Montrer que les deux expressions suivantes existent mais que leurs valeurs diffèrent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$. Elle est aussi intégrable sur cet intervalle car

$$u_n(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -1 \quad \text{et} \quad t^2u_n(t) = \underbrace{t^2\mathrm{e}^{-nt}}_{\to 0} - 2\underbrace{t^2\mathrm{e}^{-nt}}_{\to 0} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

De plus, on peut calculer l'intégrale de u_n par l'introduction d'une primitive

$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nt} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-2nt}\right]_0^{+\infty} = 0.$$

On a donc immédiatement l'existence de la première des deux quantités proposées et celle-ci est nulle. Étudions la seconde.

Pour $t \in\,]0\,;+\infty[$, la suite $\left(u_n(t)\right)_{n\geqslant 1}$ est la somme de deux termes géométriques de raisons e^{-t} et e^{-2t} appartenant à $]0\,;1[$. La série des $u_n(t)$ est donc convergente et l'on peut en calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2nt}.$$

Par glissement d'indice puis sommation géométrique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n+1)t} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2(n+1)t} = \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt} - 2\mathrm{e}^{-2t}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2nt}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{2\mathrm{e}^{-2t}}{1-\mathrm{e}^{-2t}} = \frac{1}{\mathrm{e}^t-1} - \frac{2}{\mathrm{e}^{2t}-1}.$$

Enfin, après réduction au même dénominateur et simplification,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = \frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^{2t}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}.$$

La fonction correspondante est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$. Elle est intégrable sur cet intervalle car on peut la prolonger par continuité en 0 et qu'elle est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$. Ceci justifie l'existence de la deuxième quantité proposée. Cependant, sa valeur[1] n'est pas nulle car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 11 *

Établir l'identité

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}.$$

Solution

méthode

On réalise une intégration terme à terme après avoir décomposé la fonction intégrée à l'aide d'une somme exponentielle.

Par convergence de la série exponentielle, on peut écrire pour tout $x \in\,]0\,;1]$

$$\frac{1}{x^x} = \mathrm{e}^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}.$$

Sous réserve d'existence de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \int_{]0;1]}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

avec les fonctions f_n définies sur $]0\,;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}.$$

Par les calculs initiaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ et sa somme est la fonction intégrée. Les fonctions f_n et la fonction somme sont continues par morceaux. Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,;1]$ car prolongeables par continuité en 0. Il reste à vérifier l'hypothèse « de convergence de la série des intégrales des valeurs absolues ». Pour $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1\left|f_n(x)\right|\mathrm{d}x = \int_0^1 \underbrace{f_n(x)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(-1)^nx^n(\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Par le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$, on montre que cette intégrale vaut $\ln 2$ (voir sujet 4 p. 59).

Par intégration par parties successives [1], on obtient

$$\int_0^1 \left|f_n(x)\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Ce terme est négligeable devant $1/n^2$ quand n tend vers l'infini et est donc le terme général d'une série convergente. On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme (Th. 2 p. 296) et affirmer l'identité qui suit avec convergence de l'intégrale et de la série introduite

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Un glissement d'indice suffit alors à obtenir l'identité attendue.

Exercice 12 **

Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Solution

méthode

On réalise une intégration terme à terme après avoir décomposé la fonction intégrée grâce à une somme géométrique.

Pour $t > 0$, on a

$$\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sin t \times \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}.$$

Pour décomposer en somme le second facteur, on exploite l'identité géométrique

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n.$$

Cependant, cette identité n'est valable que pour un nombre q vérifiant $|q| < 1$.

méthode

En factorisant le dénominateur par le plus grand des deux termes de la différence, on peut se ramener à une écriture $1/(1-q)$ avec $|q| < 1$.

En factorisant le dénominateur par e^t

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^t} \cdot \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} \underset{|\mathrm{e}^{-t}|<1}{=} \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}.$$

1. Voir sujet 18 p. 73.

Finalement, pour tout $t > 0$, on peut écrire avec convergence de la série introduite

$$\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}.$$

Pour opérer l'intégration terme à terme, introduisons les fonctions f_n définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f_n(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{-nt} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Par les calculs qui précèdent, la série des fonctions f_n converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et sa somme est la fonction intégrée de notre étude. Les fonctions f_n et la fonction somme sont continues par morceaux. Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeables par continuité [1] en 0 et négligeables devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$. Pour pouvoir exploiter le théorème d'intégration terme à terme, il reste à vérifier la convergence de la série de terme général

$$\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left|\sin t\right| \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

méthode

Cette intégrale est délicate à calculer à cause de la valeur absolue du sinus qui, pour être résolue, nécessite de découper l'intégrale en les $k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$. On peut cependant se contenter de la majorer en exploitant l'inégalité [2] classique $|\sin t| \leqslant |t|$ valable pour tout t réel.

Par l'inégalité proposée, on écrit

$$\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

Par une intégration par parties où le terme du crochet admet une limite finie en $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \left[-t\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\left[-\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

Ceci est le terme général d'une série convergente et donc, par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer qu'il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues des fonctions f_n. Par théorème d'intégration terme à termes, on peut alors écrire l'identité qui suit avec convergence de l'intégrale et de la série introduite

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t\right).$$

1. La borne 0 est faussement généralisée et l'intégrale de f_n peut être considérée sur $[0\,;+\infty[$.
2. L'inégalité $|\sin t| \leqslant 1$ n'est en revanche pas décisive car donne $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}$ et la série des $1/n$ diverge.

Les intégrales en second membre se calculent rapidement en transitant par les nombres complexes[1]

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-n+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{n-\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{n^2+1}.$$

Finalement, on obtient l'identité voulue

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Exercice 13 **

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \quad \text{avec} \quad n \geqslant 1.$$

Solution

Introduisons les fonctions f_n définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(t) = 1/(1+t^3)^n$. Ces fonctions sont continues par morceaux et intégrables sur $[0\,;+\infty[$ car $f_n(t)$ équivaut quand t tend vers $+\infty$ à $1/t^{3n}$ avec $3n > 1$. Les intégrales définissant u_n sont donc bien définies pour tout $n \geqslant 1$.

Par sommation géométrique, la série des fonctions f_n converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ vers la fonction S donnée par

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{1+t^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+t^3}} = \frac{1}{t^3}.$$

méthode

La fonction somme S n'est pas intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Or, si le théorème d'intégration terme à terme s'applique, celui-ci affirme l'intégrabilité de la fonction S : l'une de ses hypothèses n'est donc pas vérifiée !

Les fonctions f_n et la fonction S sont continues par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,;+\infty[$. La seule hypothèse du théorème d'intégration terme à terme à ne pas être vérifiée est donc celle de « la convergence de la série des intégrales des valeurs absolues ». Ainsi, il y a divergence[2] de la série

$$\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum u_n.$$

1. Ces calculs sont détaillés dans le sujet 13 p. 67.
2. On peut approfondir l'étude de la suite (u_n) : par une intégration par parties, on peut déterminer une relation de récurrence et par exploitation du lien suite-série montrer que $\sqrt[3]{n}u_n$ tend vers une limite ℓ strictement positive. Ceci permet de retrouver la divergence la série étudiée.

8.4.3 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 14 **

(a) Montrer la continuité de l'application définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Préciser ses limites en 0^+ et $+\infty$.

Solution

(a) **méthode**

L'intégrale définissant $g(x)$ dépend de la variable à la fois au niveau de l'intégrale et au niveau d'une borne d'intégration : on transforme l'écriture de l'intégrale pour que la variable n'apparaisse plus qu'à l'un ou l'autre des deux niveaux, mais pas les deux.

Soit $x > 0$. Par le changement de variable $t = xs$, on obtient la nouvelle écriture

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\sin(xs)}{1+s}\,\mathrm{d}s.$$

Introduisons alors la fonction $f\colon]0\,;+\infty[\times [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,s) = \frac{\sin(xs)}{1+s}.$$

La fonction f est continue en la variable x, continue par morceaux en la variable s et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et tout $s \in [0\,;1]$, on a

$$|f(x,s)| = \frac{|\sin(xs)|}{1+s} \leqslant 1 = \varphi(s) \quad \text{avec} \quad \varphi \text{ intégrable.}$$

Par domination, on peut conclure que la fonction g est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) **méthode**

La limite en 0^+ de g peut s'obtenir par encadrement[1] de $g(x)$.

Pour $x \in]0\,;\pi]$, l'inégalité triangulaire intégrale donne

$$|g(x)| \leqslant \int_0^1 \frac{|\sin(xs)|}{1+s}\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 \sin(xs)\,\mathrm{d}s.$$

1. On peut aussi utiliser le théorème de convergence par domination (Th. 4 p. 297).

On peut poursuivre en calculant exactement l'intégrale ou en se contentant de majorer celle-ci. Pour $0 < x \leqslant \pi/2$, la croissance du sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi/2]$ donne

$$\int_0^1 \sin(xs)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}s = \sin x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Ainsi, on peut conclure que la fonction g tend vers 0 en 0^+.

méthode

> Pour obtenir la limite en $+\infty$ de g, on fait apparaître l'ordre asymptotique de $g(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

L'intégration par parties déterminée par les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ suivantes

$$u(s) = -\frac{\cos(xs)}{x} \quad \text{et} \quad v(s) = \frac{1}{1+s}$$

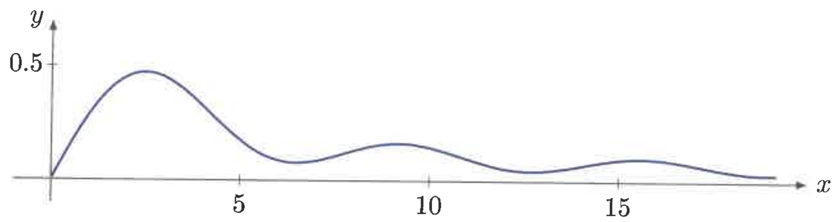
donne

$$g(x) = \left[-\frac{\cos(xs)}{x(1+s)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(xs)}{x(1+s)^2}\,\mathrm{d}s.$$

Le terme entre crochet tend vers 0 quand x croît vers l'infini et le terme défini par l'intégrale aussi car

$$\left|\int_0^1 \frac{\cos(xs)}{x(1+s)^2}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{|\cos(xs)|}{(1+s)^2}\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 \mathrm{d}s = \frac{1}{x}.$$

Finalement, la fonction g tend aussi vers 0 en $+\infty$.



Exercice 15 ***

(a) Pour quels x de $\mathbb{R}$ l'intégrale qui suit existe-t-elle ?

$$\int_0^{\pi/2} \sin^x t\,\mathrm{d}t.$$

On pose $f(x)$ la valeur de l'intégrale ci-dessus lorsque celle-ci est définie.

(b) Montrer que la fonction f est continue et décroissante sur son intervalle de définition.

(c) Calculer $(x+1)f(x)f(x+1)$ pour tout $x > -1$.

Solution

(a) Soit $u\colon \mathbb{R}\times\,]0\,;\pi/2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u(x,t) = \sin^x t.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;\pi/2]$ et

$$u(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}} \quad \text{car} \quad \sin t \underset{t\to 0}{\sim} t.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;\pi/2]$ si, et seulement si, $x > -1$.

méthode

> La fonction intégrée étant positive, l'existence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction intégrée.

On peut donc affirmer que l'intégrale définissant $f(x)$ existe si, et seulement si, $x > -1$.

(b) La fonction u est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. Soit $[a\,;b] \subset\,]0\,;+\infty[$. Pour tout $x \in [a\,;b]$ et tout $t \in\,]0\,;\pi/2]$

$$|u(x,t)| = |\sin t|^x \leqslant |\sin t|^a = \varphi(t) \quad \text{car} \quad |\sin t| \leqslant 1.$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de la variable x et est intégrable sur $]0\,;\pi/2]$. Par domination, on peut affirmer que la fonction f est continue sur tout segment inclus dans $]0\,;+\infty[$ et donc continue sur $]0\,;+\infty[$.

méthode

> Pour obtenir la monotonie de f, on peut montrer par domination que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis étudier le signe de sa dérivée. Ici, on peut plus simplement obtenir la monotonie par composition d'inégalités.

Soit $x \leqslant y$ dans $]0\,;+\infty[$. Pour tout $t \in\,]0\,;\pi/2]$, on a

$$\sin^y t \leqslant \sin^x t \quad \text{car} \quad \sin t \in\,]0\,;1].$$

Par intégration en bon ordre, on obtient

$$f(y) = \int_0^{\pi/2} \sin^y t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^x t\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Ainsi, la fonction f est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$.

(c) Notons φ la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par

$$\varphi(x) = (x+1)f(x)f(x+1).$$

méthode

On commence par établir que la fonction φ est 1-périodique en obtenant une relation entre $f(x)$ et $f(x+2)$ par intégration par parties.

Soit $x > -1$. Réalisons une intégration par parties avec

$$u(t) = -\cos t \quad \text{et} \quad v(t) = \sin^{x+1} t.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv tend vers 0 en la borne 0. On peut donc écrire

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{x+2} t \,\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[-\cos t \sin^{x+1} t\Big]_0^{\pi/2}}_{=0} + (x+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^x t \,\mathrm{d}t.$$

En écrivant $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, l'identité ci-dessus donne

$$f(x+2) = (x+1)\big(f(x) - f(x+2)\big)$$

puis

$$(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x).$$

Enfin, en multipliant par $f(x+1)$, on obtient $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. La fonction φ est donc périodique de période 1.

méthode

On montre que la fonction φ est constante. On exploite pour cela la décroissance de f et l'on projette le calcul de $\varphi(x)$ à l'infini en considérant $\varphi(x+n)$ avec n naturel croissant vers l'infini.

Soit $x \in [0\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Par la décroissance et la positivité de f, on a l'encadrement

$$f(n+1)f(n+2) \leqslant f(x+n)f(x+n+1) \leqslant f(n)f(n+1).$$

En multipliant cette inégalité par le facteur positif $(x+n+1)$, on obtient

$$\underbrace{(x+n+1)f(n+1)f(n+2)}_{=\frac{x+n+1}{n+2}\varphi(n+1)} \leqslant \varphi(x+n) \leqslant \underbrace{(x+n+1)f(n)f(n+1)}_{=\frac{x+n+1}{n+1}\varphi(n)}.$$

Par périodicité de la fonction φ, on parvient à l'encadrement

$$\frac{x+n+1}{n+2}\varphi(0) \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{x+n+1}{n+1}\varphi(0).$$

On conclut alors $\varphi(x) = \varphi(0)$ en passant à la limite quand n tend vers l'infini.

Finalement, la fonction φ est 1-périodique et constante égale à $\varphi(0)$ sur $[0\,;1]$, elle est donc constante sur $]-1\,;+\infty[$. Un calcul direct d'intégrales détermine la valeur de cette constante

$$\varphi(0) = 1 \times f(0) \times f(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 16 *

Étudier la définition et la continuité de la fonction F définie par

$$F(z) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+z}\,\mathrm{d}t$$

avec $z \in \Omega = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \mathrm{Re}(z) > 0\big\}$.

Solution

Introduisons la fonction $f\colon \Omega \times]0\,;1] \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z,t) = \frac{\ln t}{t+z}.$$

La fonction f est continue en la variable z et continue par morceaux en la variable t.

méthode

Il n'est pas possible d'obtenir l'hypothèse de domination sur l'intégralité de Ω : on se contente d'obtenir celle-ci sur des domaines « suffisamment généraux ».

Soit $a > 0$ arbitraire et $\Omega_a = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \mathrm{Re}(z) \geqslant a\big\}$. Pour tout $z \in \Omega_a$ et tout $t \in]0\,;1]$, on a

$$\big|f(z,t)\big| = \frac{|\ln t|}{|t+z|} = \frac{|\ln t|}{\sqrt{\big(t+\mathrm{Re}(z)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2}} \leqslant \frac{|\ln t|}{\big|t+\mathrm{Re}(z)\big|} \leqslant \frac{|\ln t|}{a} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de z et est intégrable sur $]0\,;1]$ car négligeable devant $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ en 0. Par domination, on peut affirmer que la fonction F est définie et continue sur Ω_a. Ceci valant pour tout $a > 0$, on peut conclure que F est définie et continue en tout point de Ω.

8.4.4 Calculs de fonctions définies par une intégrale

Exercice 17 * (Transformée de Fourier d'une fonction gaussienne)

Pour x réel, exprimer simplement

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t \quad \text{sachant} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Solution

méthode

On commence par justifier la bonne définition de la fonction F.

Introduisons $f\colon \mathbb{R} \times]-\infty\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}.$$

Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$t^2 f(x,t) = \underbrace{t^2 e^{-t^2}}_{\to 0} \underbrace{e^{-itx}}_{\text{bornée}} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0.$$

La fonction F est donc bien définie sur la droite réelle.

méthode

Un calcul direct n'étant pas possible, on dérive la fonction F afin d'obtenir une relation « intéressante ».

Pour tout $t \in\,]-\infty\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable. La fonction f admet donc une dérivée partielle en la variable x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -ite^{-t^2}e^{-itx}.$$

Cette dérivée partielle est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. De plus, pour tout réel x et tout réel t

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |t|\,e^{-t^2}\underbrace{\left|e^{-itx}\right|}_{=1} = |t|\,e^{-t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur $\mathbb{R}$ car négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ quand t tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Par domination (Th. 5 p. 298), on peut conclure que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-t^2}e^{-itx}\,dt.$$

méthode

L'expression intégrale de $F'(x)$ fait apparaître un facteur t devant e^{-t^2} qui permet d'intégrer celui-ci : on transforme l'écriture de $F'(x)$ par intégration par parties.

On réalise l'intégration par parties généralisée déterminée par

$$u(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2} \quad \text{et} \quad v(t) = e^{-itx}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv tend vers 0 en les deux bornes $+\infty$ et $-\infty$. On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties généralisée et écrire

$$F'(x) = \underbrace{\left[\frac{i}{2}e^{-t^2}e^{-itx}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-t^2}e^{itx}\,dt = -\frac{1}{2}xF(x).$$

On en déduit que la fonction F est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + \frac{1}{2}xy = 0.$$

La solution générale de cette équation différentielle s'exprime $y(x) = \lambda e^{-x^2/4}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc un réel λ tel que pour tout réel x

$$F(x) = \lambda e^{-x^2/4}.$$

En prenant $x = 0$, on peut déterminer la valeur de λ

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{\text{parité}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Finalement [1], pour tout réel x,

$$F(x) = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4}.$$

Exercice 18 **

Pour un réel $x > -1$, on pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\,dt.$$

(a) Montrer que la fonction f est bien définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

(b) Justifier que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(x)$.

(c) En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Solution

(a) Introduisons la fonction $u\colon\,]-1\,;+\infty[\, \times\,]0\,;1[\, \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x,t) = \frac{t-1}{\ln t}t^x.$$

Pour chaque $x > -1$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle $]0\,;1[$. En effet,

$$\frac{t-1}{\ln t}t^x = \underbrace{(t-1)}_{\to -1}\underbrace{\frac{1}{\ln t}}_{\to 0}t^x \underset{t\to 0^+}{=} o(t^x) = o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right) \quad \text{avec} \quad -x < 1$$

et

$$\frac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t=1+h}{=} \frac{h}{\ln(1+h)}(1+h)^x \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{h}{h}1^x \xrightarrow[t\to 1^-]{} 1.$$

La fonction f est donc bien définie sur $]-1\,;+\infty[$.

1. L'expression obtenue est réelle : ceci était prévisible car la partie imaginaire de f est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

(b) Pour tout $t \in]0;1[$, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est dérivable. La fonction u admet donc une dérivée partielle en la variable x

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{t-1}{\ln t}\mathrm{e}^{x\ln t}\right) = (t-1)\mathrm{e}^{x\ln t} = (t-1)t^x.$$

Cette dérivée partielle est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. De plus, si $[a;b]$ désigne un segment arbitraire inclus dans $]-1;+\infty[$, on a pour tout $x \in [a;b]$ et tout $t \in]0;1[$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = (1-t)t^x \leqslant t^x \leqslant t^a = \frac{1}{t^{-a}} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable car $-a < 1$. Par domination, on peut affirmer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a;b]$ inclus dans $]-1;+\infty[$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x+2}t^{x+2} - \frac{1}{x+1}t^{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

(c) Par intégration, il existe une constante C réelle telle que, pour tout $x > -1$,

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C.$$

méthode

Pour déterminer la valeur de C, on étudie[1] la limite de f en $+\infty$.

La fonction $t \mapsto (t-1)/\ln t$ est continue sur $]0;1[$, tend vers 0 en 0 et vers 1 en 1 : on peut la prolonger en une fonction continue sur le segment $[0;1]$. Par le théorème des bornes atteintes, on peut introduire le réel[2]

$$M = \sup_{t\in]0;1[} \frac{t-1}{\ln t}.$$

On a alors pour tout $x > -1$

$$0 \leqslant f(x) = \int_0^1 \underbrace{\frac{t-1}{\ln t}}_{0\leqslant\,.\,\leqslant M} t^x\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 Mt^x\,\mathrm{d}t = \frac{M}{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Par théorème d'encadrement, on peut affirmer que la fonction f est de limite nulle en $+\infty$ et donc $C = 0$.

Finalement, pour tout $x > -1$,

$$F(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

1. Aucune valeur de f n'est évidente à calculer.
2. Une étude des variations de la fonction définissant la borne supérieure donne $M = 1$.

Exercice 19 **

Pour x réel, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

(c) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par F sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

(d) En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$ sachant $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution

(a) Introduisons la fonction $f\colon \mathbb{R}\times]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right).$$

La fonction f est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0;+\infty[$, on a

$$|f(x,t)| = \mathrm{e}^{-t^2}\underbrace{\mathrm{e}^{-x^2/t^2}}_{\leqslant 1} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur $]0;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$. Par domination, on peut affirmer que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $t \in]0;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable. La fonction f admet donc une dérivée partielle en la variable x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2}\exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right).$$

Cette dérivée partielle est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. De plus, si $[a;b]$ désigne un segment arbitraire inclus dans $]0;+\infty[$, on a pour tout $x \in [a;b]$ et tout $t \in]0;+\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b}{t^2}\exp\left(-\frac{a^2}{t^2}\right) = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur $]0;+\infty[$ car de limite nulle[1] en 0^+ et dominée par $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$. Par domination sur tout segment, on peut

1. En posant $X = 1/t^2$, on voit une forme $2bX\exp(-a^2X)$ avec X de limite $+\infty$.

affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$F'(x) = -2x\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\exp\left(-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t.$$

(c) Soit $x > 0$.

méthode

On exprime $F'(x)$ en fonction de $F(x)$ par un changement de variable.

Par le changement de variable $u = x/t$, on obtient

$$F'(x) = -2\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{x^2}{u^2}+u^2\right)\right)\mathrm{d}u = -2F(x).$$

La fonction F est donc solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

(d) La solution générale de l'équation différentielle linéaire ci-dessus s'exprime

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il existe donc un réel λ pour lequel $F(x) = \lambda\mathrm{e}^{-2x}$ pour tout $x > 0$. En passant à la limite quand $x \to 0^+$, on obtient par continuité de F en 0

$$\lambda = F(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Sachant de plus que la fonction F est paire, on peut conclure[1] pour tout réel x

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2|x|}.$$

8.4.5 Transformations intégrales

Exercice 20 * (Transformation de Fourier)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux intégrable. On appelle *transformée de Fourier* de f l'application $\mathcal{F}(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose l'application $t \mapsto t^n f(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(c) Établir que la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

1. On trouvera dans le sujet 24 p. 80 une autre façon d'opérer ce calcul.

Solution

(a) Introduisons $u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $u(x,t) = f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}$ de sorte que, sous réserve d'existence,

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction u est continue en x, continue par morceaux en t et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|u(x,t)\right| = \left|f(t)\right| = \varphi(t).$$

La fonction φ étant intégrable, on peut affirmer par domination que $\mathcal{F}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$.

méthode

On compare t^k et t^n pour $|t| \geqslant 1$.

Si $t \geqslant 1$, on a $t^k \leqslant t^n$ donc $\left|t^k f(t)\right| = t^k\left|f(t)\right| \leqslant t^n\left|f(t)\right|$. Par domination, la fonction $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ donc sur $[0\,;+\infty[$.

Si $t \leqslant -1$, on écrit $|t|^k \leqslant |t|^n$ donc $\left|t^k f(t)\right| \leqslant |t|^n\left|f(t)\right|$ et l'on conclut de la même manière que f est intégrable sur $]-\infty\,;0]$.

(c) On réunit les hypothèses du théorème de dérivation à l'ordre n (Th. 6 p. 299). Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, la fonction u admet une dérivée partielle à l'ordre k en la variable x

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t) = (-\mathrm{i})^k t^k f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}.$$

Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, cette dérivée partielle est continue par morceaux en la variable t et intégrable car

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| = \left|t^k\right|\left|f(t)\right|.$$

De plus, la dérivée partielle d'ordre n est continue en la variable x, continue par morceaux en la variable t et l'on a la domination

$$\left|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)\right| = \left|t^n\right|\left|f(t)\right| = \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi \text{ intégrable.}$$

On peut alors affirmer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ avec, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$,

$$\mathcal{F}(f)^{(k)}(x) = (-\mathrm{i})^k\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 21 * (Transformation de Laplace)
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée. On appelle *transformée de Laplace* de f l'application $L(f)$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que la fonction $L(f)$ est bien définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Déterminer la limite de $xL(f)(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

(c) On suppose que la fonction f admet une limite finie λ en $+\infty$. Déterminer la limite de $xL(f)(x)$ quand x tend vers 0^+.

Solution

(a) Introduisons la fonction $u\colon]0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[\to \mathbb{C}$ définie par $u(x,t) = f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ de sorte que, sous réserve d'existence,

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction u est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. Soit $[a\,;b]$ un segment inclus dans $]0\,;+\infty[$. Pour tout $x \in [a\,;b]$ et tout $t \in [0\,;+\infty[$

$$\left|u(x,t)\right| = \left|f(t)\right|\mathrm{e}^{-xt} \leqslant M\mathrm{e}^{-at} = \varphi(t) \quad \text{avec} \quad M = \sup_{[0;+\infty[} |f|\,.$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$ puisque $a > 0$. Par domination sur tout segment, on peut affirmer que $L(f)$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) **méthode**

> Le facteur x devant l'intégrale et le terme xt de l'exponentielle invitent à réaliser un changement de variable.

Par le changement de variable $s = xt$, on a

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{s}{x}\right)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s.$$

On étudie la limite de cette intégrale en réunissant les hypothèses du théorème de convergence par domination (Th. 4 p. 297).

Introduisons la fonction $v\colon]0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[\to \mathbb{C}$ définie par

$$v(x,s) = f\left(\frac{s}{x}\right)\mathrm{e}^{-s}.$$

Soit $s \in [0\,;+\infty[$ fixé. Par continuité de f en 0, on a

$$v(x,s) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0)\mathrm{e}^{-s} = \ell(s).$$

Les fonctions $s \mapsto v(x,s)$ et la fonction $s \mapsto \ell(s)$ sont continues par morceaux et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et tout $s \in [0\,;+\infty[$, on a

$$\left|v(x,s)\right| \leqslant M\mathrm{e}^{-s} = \varphi(s) \quad \text{avec} \quad \varphi \text{ intégrable.}$$

Par domination, on peut conclure

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} v(x,s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \ell(s)\,\mathrm{d}s = \Big[-f(0)\mathrm{e}^{-s}\Big]_0^{+\infty} = f(0).$$

(c) L'étude est en tout point identique à la précédente avec cette fois-ci pour fonction limite

$$s \mapsto \begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-s} & \text{si } s > 0 \\ f(0) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

On conclut

$$L(f)(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \lambda.$$

8.4.6 Applications au calcul d'intégrales

Exercice 22 ** (Calcul de l'intégrale de Gauss)
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ par une intégrale.

(b) Calculer $f(0)$ et étudier la limite de f en $+\infty$.

On note g l'application définie sur $[0\,;+\infty[$ par la relation $g(x) = f(x^2)$.

(c) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

(d) Conclure

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Solution

(a) Introduisons la fonction $u\colon [0\,;+\infty[\times [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}.$$

Pour chaque $x \in [0\,;+\infty[$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux donc intégrable sur le segment $[0\,;1]$ et la fonction f est bien définie sur $[0\,;+\infty[$.

Pour chaque $t \in [0\,;1]$, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est dérivable. La fonction u admet donc une dérivée partielle en la variable x

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -e^{-x(1+t^2)}.$$

Cette dérivée partielle est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. De plus, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ et tout $t \in [0\,;1]$, on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \exp\Big(\underbrace{-x(1+t^2)}_{\leqslant 0}\Big) \leqslant 1 = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur le segment $[0\,;1]$. Par domination, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,dt.$$

(b) Par un calcul direct

$$f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

méthode

> Par encadrement [1], on peut obtenir la limite de f en $+\infty$.

Pour $x \geqslant 0$ on a

$$0 \leqslant f(x) = \int_0^1 e^{-x}\underbrace{\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}}_{\leqslant 1}\,dt \leqslant \int_0^1 e^{-x}\,dt = e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

(c) **méthode**

> On vérifie par dérivation la constance de l'expression définissant le premier membre.

Par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$ avec

$$g'(x) = 2xf'(x^2) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt.$$

1. On peut aussi obtenir cette limite par domination mais c'est un peu plus long.

Par dérivation d'une primitive et d'une forme u^2 en $2u'u$, on a aussi

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2\right) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

On en déduit

$$\frac{d}{dx}\left(g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2\right) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Cette dérivée est nulle car le changement de variable $t = xu$ fournit l'identité

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x\int_0^1 e^{-x^2u^2}\,du.$$

Ainsi, l'expression en premier membre de l'identité voulue est constante et son évaluation en 0 détermine la valeur de cette constante : $\pi/4$.

(d) Pour $x \geqslant 0$, l'intégrale en premier membre étant positive, on peut écrire

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x^2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Avec convergence de l'intégrale écrite, on conclut

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 23 * (Calcul de l'intégrale de Dirichlet)**

On considère les fonctions F et G d'une variable réelle définies par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,dt.$$

(a) Montrer que les fonctions F et G sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que les fonctions F et G sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elles sont toutes les deux solutions de l'équation différentielle linéaire

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

(c) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Solution

(a) Pour étudier la fonction F, on introduit la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \times [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}.$$

La fonction f est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in [0\,;+\infty[$, on a

$$\bigl|f(x,t)\bigr| = \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car

$$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Par domination, on peut affirmer que la fonction [1] F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

L'étude de la fonction G est plus délicate, ne serait-ce que pour en justifier la bonne définition [2].

méthode

> Par intégration par parties, on exprime $g(x)$ à l'aide de l'intégrale d'une fonction intégrable.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On opère une intégration par parties généralisée [3] avec les fonctions

$$u(t) = 1-\cos t \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{x+t}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv admet une limite finie en chacune des bornes [4] 0 et $+\infty$. Sous réserve de convergence de l'une des deux intégrales, on dispose de l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos t}{x+t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Introduisons alors la fonction $g\colon [0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,t) = \frac{1-\cos t}{(x+t)^2}.$$

La fonction g est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. De plus, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ et tout $t \in]0\,;+\infty[$, on a

$$\bigl|g(x,t)\bigr| = \frac{1-\cos t}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2} = \varphi(t).$$

1. La fonction F est une transformée de Laplace, voir sujet 21 p. 330.
2. L'intégrale définissant $g(x)$ n'est en fait que semi-convergente.
3. Pour cette intégration par parties, on choisit la primitive u de sorte qu'elle s'annule en 0 ce qui simplifie significativement l'étude.
4. La borne 0 n'est en fait impropre que lorsque $x = 0$.

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$\varphi(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} \xrightarrow[t\to0^+]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par domination, on peut conclure que l'intégrale en second membre de la relation $(*)$ converge et détermine une fonction continue de la variable x. On en déduit que la fonction G est elle aussi définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Commençons par l'étude de F en introduisant à nouveau la fonction f de la résolution précédente.

Pour chaque $t \in [0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est deux fois dérivable. La fonction f admet donc des dérivées partielles en la variable x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{t}{1+t^2}\mathrm{e}^{-xt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-xt}.$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur $[0\,;+\infty[$. En effet, pour la première, cela a déjà été vu ci-dessus, et pour la seconde, il suffit de constater qu'elle est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ quand t croît vers l'infini.

Aussi, la seconde dérivée partielle est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. De plus, si $[a\,;b]$ désigne un segment arbitraire inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $x \in [a\,;b]$ et tout $t \in]0\,;+\infty[$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \underbrace{\frac{t^2}{1+t^2}}_{\leqslant 1}\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ quand t tend vers $+\infty$. Par domination sur tout segment, on peut affirmer que la fonction F est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, on a par un calcul direct

$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Pour l'étude de la fonction G, nous allons plutôt transformer son écriture en commençant par réaliser le changement de variable $u = x+t$

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

En développant le sinus, on obtient par linéarité

$$G(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$$

où les deux intégrales introduites convergent[1] pour $x > 0$.

Les termes intégrales sont, au signe près, des primitives des fonctions intégrées. Ces dernières étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$, la fonction G y est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \cos x \times \frac{\sin x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u + \sin x \times \frac{\cos x}{x} \\ &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G''(x) &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u + \sin x \times \frac{\sin x}{x} + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u + \cos x \times \frac{\cos x}{x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{x} - G(x) = \frac{1}{x} - G(x). \end{aligned}$$

La fonction G est donc bien solution de l'équation différentielle proposée[2].

(c) **méthode**

> On vérifie que les fonctions F et G sont de limites nulles en $+\infty$ et que leur différence est solution d'une équation différentielle simple à résoudre.

D'une part, la fonction F tend vers 0 en $+\infty$ car

$$\left|F(x)\right| = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{\leqslant 1} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part, la fonction G tend aussi vers 0 en $+\infty$ car

$$G(x) = \underbrace{\cos x}_{\text{bornée}} \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\sin x}_{\text{bornée}} \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}.$$

Par différence, la fonction $F - G$ tend vers 0 en $+\infty$. Or cette fonction est solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $y'' + y = 0$ dont la solution générale s'exprime

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

1. On peut l'établir par des intégrations par parties analogues à celles qui précèdent.
2. À l'inverse, la méthode de la variation des constantes (voir Th. 11 p. 414) permet de trouver l'expression de G à partir de l'équation différentielle.

On en déduit que la fonction $F - G$ est nulle, d'abord sur $]0\,;+\infty[$ puis sur $[0\,;+\infty[$ par continuité. En particulier,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = G(0) = F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 24 ** (Intégrales de Fresnel)

On donne[1]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pour x un réel, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+\mathrm{i})x^2}}{t^2+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

(b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $F'(x)$ pour $x > 0$.

(c) En déduire la convergence ainsi que les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Solution

(a) On introduit la fonction $f\colon \mathbb{R} \times [0\,;+\infty[\to \mathbb{C}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+\mathrm{i})x^2}}{t^2+\mathrm{i}}.$$

La fonction f est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0\,;+\infty[$, on a

$$\left|f(x,t)\right| = \frac{\mathrm{e}^{-t^2x^2}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\right|}{\left|t^2+\mathrm{i}\right|} = \frac{\mathrm{e}^{-t^2x^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car

$$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Par domination, on peut conclure que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Aussi, pour $x > 0$,

$$\left|F(x)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{-(t^2+\mathrm{i})x^2}}{t^2+\mathrm{i}}\right|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t^4+1}}}_{\leqslant 1} \mathrm{e}^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Ces intégrales sont calculées dans le sujet 21 p. 76 et le sujet 22 p. 331.

Par le changement de variable $u = tx$, on obtient

$$|F(x)| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

La fonction F est donc de limite nulle en $+\infty$.

(b) Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. La fonction f admet donc une dérivée partielle en la variable x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-(t^2+\mathrm{i})x^2}.$$

Celle-ci est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. De plus, si $[a\,;b]$ désigne un segment arbitraire de $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $x \in [a\,;b]$ et tout $t \in [0\,;+\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2x\mathrm{e}^{-t^2x^2} \leqslant 2b\mathrm{e}^{-a^2t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car elle est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$ puisque $a > 0$. Par domination sur tout segment, on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -2x\mathrm{e}^{-(t^2+\mathrm{i})x^2}\,\mathrm{d}t = -2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $u = tx$, on peut finir d'exprimer $F'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

$$F'(x) = -2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}.$$

(c) **méthode**

> L'intégrale de F' sur $]0\,;+\infty[$ converge car F admet des limites finies en 0^+ et $+\infty$.

On obtient

$$\int_0^{+\infty} F'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^{+\infty} = \lim_{+\infty} F - \lim_{0} F = -F(0).$$

Ainsi, on obtient l'identité qui suit avec convergence de l'intégrale en premier membre

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t.$$

En multipliant par la quantité conjuguée

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{t^2-\mathrm{i}}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales introduites. L'énoncé donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

méthode

> À l'aide d'un changement de variable, on relie les intégrales
> $$\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = 1/t$ donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

On peut alors conclure

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

En considérant la partie réelle et la partie imaginaire, il vient

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

avec convergence des intégrales écrites.

8.4.7 La fonction Γ d'Euler

Exercice 25 **

(a) Pour quels x réels peut-on introduire l'intégrale suivante ?

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(b) Montrer que la fonction Γ est continue sur son intervalle de définition.

(c) Vérifier $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

(d) Exprimer simplement $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution

(a) **méthode**

> L'exposant de t pouvant être négatif, l'intégrale est généralisée en ses deux bornes.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\gamma_x : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Pour toute valeur de x, elle est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ car

$$t^2\gamma_x(t) = t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = \exp\bigl(-t + \underbrace{(x+1)\ln t}_{=o(t)}\bigr) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Aussi, par référence à une intégrale de Riemann,

$$\gamma_x(t) = t^{x-1}\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{\to 1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \text{ est intégrable sur }]0\,;1] \iff 1-x<1.$$

On en déduit que la fonction γ_x est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $x>0$.

méthode

> La fonction γ_x étant positive, l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale.

La fonction Γ est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Introduisons $g\colon \mathbb{R}_+^* \times]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction g est continue en la variable x et continue par morceaux en la variable t. Soit $[a\,;b]$ un segment arbitraire inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a\,;b]$ et tout $t \in]0\,;+\infty[$, on veut dominer

$$\bigl|g(x,t)\bigr| = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

méthode

> Pour majorer $t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}$, on discute selon le signe de $\ln t$, c'est-à-dire selon la position relative de t vis-à-vis de 1.

Si $t \geqslant 1$ alors $\ln t \geqslant 0$ et $t^{x-1} \leqslant t^{b-1}$. En revanche, si $t \leqslant 1$, $\ln t \leqslant 0$ et $t^{x-1} \leqslant t^{a-1}$. Dans les deux cas, on peut affirmer $t^{x-1} \leqslant t^{a-1} + t^{b-1}$ et donc

$$\bigl|g(x,t)\bigr| = \bigl(t^{a-1} + t^{b-1}\bigr)\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t).$$

La fonction φ s'exprime indépendamment de x et est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car c'est la somme de deux fonctions intégrables, l'une définissant $\Gamma(a)$, l'autre $\Gamma(b)$. Par domination sur tout segment, on peut conclure que la fonction Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) **méthode**

> La relation peut être obtenue par une intégration par parties généralisée ou, assez directement, en calculant l'intégrale exprimant la différence des deux membres[1].

1. Cela revient en fait à redémontrer la formule d'intégration par parties.

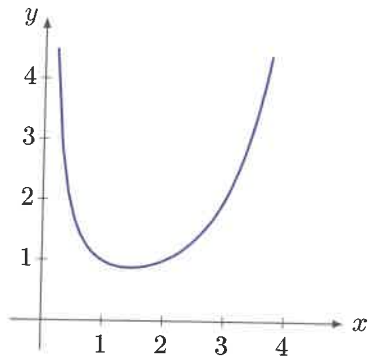
Pour tout $x>0$, on a

$$x\Gamma(x) - \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \bigl(xt^{x-1} - t^x\bigr)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Bigl[t^x\mathrm{e}^{-t}\Bigr]_0^{+\infty} = 0$$

ce qui donne la relation voulue.

(d) Soit $n \geqslant 1$. La relation précédente permet d'exprimer $\Gamma(n)$ en fonction de $\Gamma(n-1)$, puis de $\Gamma(n-2)$, et ainsi de suite jusqu'à $\Gamma(1)$ que l'on sait calculer directement.

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1)\\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots\\ &= (n-1)(n-2)\times\cdots\times 1\times\Gamma(1)\end{aligned}$$



avec

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Bigl[-\mathrm{e}^{-t}\Bigr]_0^{+\infty} = 1.$$

On peut conclure

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Exercice 26 ** (Formule d'Euler-Gauss)

On reprend la fonction Γ étudiée dans le sujet précédent. Soit x un réel strictement positif.

(a) Justifier

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\Bigl(1-\frac{t}{n}\Bigr)^n\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire la *formule d'Euler-Gauss*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Solution

(a) **méthode**

> On étudie la limite des intégrales d'une suite de fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ en prolongeant par 0 la fonction intégrée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, introduisons la fonction $u_n\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\Bigl(1-\dfrac{t}{n}\Bigr)^n & \text{si } t \in]0\,;n]\\ 0 & \text{si } t \in]n\,;+\infty[\end{cases}$$

de sorte que, sous réserve d'existence,

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous allons appliquer le théorème de convergence dominée à l'étude de cette suite d'intégrales. Soit $t \in]0\,;+\infty[$ fixé. Pour $n > t$, on a

$$u_n(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1}\exp\underbrace{\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)}_{\to -t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \gamma(t).$$

Les fonctions u_n et la fonction γ sont continues par morceaux. Pour $t \in]0\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ avec $t < n$, l'inégalité classique $\ln(1+u) \leqslant u$ valable pour tout $u > -1$, donne

$$|u_n(t)| = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1}\exp\left(n\underbrace{\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}_{\leqslant -t/n}\right) \leqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \gamma(t).$$

Cette inégalité est aussi valable si $t \geqslant n$ car $u_n(t)$ est alors nul. La fonction γ étant intégrable[1], on peut affirmer par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty}\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

(b) On résout cette question en vérifiant

$$\underbrace{\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t}_{=I_n(x)} = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Réalisons l'intégration par parties généralisée déterminée par

$$u(t) = \frac{t^x}{x} \quad \text{et} \quad v(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le produit uv tend vers 0 en la borne 0. Le théorème d'intégration par parties permet alors d'affirmer

$$I_n(x) = \underbrace{\left[\frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n}_{=0} + \frac{1}{x}\cdot\frac{n}{n}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

1. Voir sujet 25 p. 339.

En répétant des intégrations par parties analogues, on obtient

$$I_n(x) = \frac{1}{x(x+1)}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}\int_0^n t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\mathrm{d}t = \cdots$$
$$= \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\cdot\frac{n!}{n^n}\int_0^n t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_0^n t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x+n}t^{x+n}\right]_0^n = \frac{n^{x+n}}{x+n}$$

et, finalement, on a bien

$$I_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

8.5 Exercices d'approfondissement

Exercice 27 **

Soit (a_n) une suite croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$. Justifier l'égalité

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-a_n x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Solution

Commençons par justifier que la fonction

$$S\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-a_n x}$$

est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$. Introduisons $f_n\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = (-1)^n\mathrm{e}^{-a_n x} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $x > 0$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées :

$$f_n(x) = (-1)^n|f_n(x)| \quad \text{et} \quad |f_n(x)| \text{ décroît vers } 0.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur $]0\,;+\infty[$ et l'on peut introduire la fonction somme S définie sur $]0\,;+\infty[$. De plus, le critère spécial des séries alternées permet de borner le reste de la série par le premier terme qui l'exprime

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-a_k x}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-a_{n+1}x}.$$

Ainsi, pour $\alpha > 0$ arbitraire, on peut écrire pour tout $x \in [\alpha\,;+\infty[$

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-a_{n+1}\alpha}.$$

Ce majorant uniforme étant de limite nulle, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ avec $\alpha > 0$. Les fonctions f_n étant continues, on peut conclure que la fonction somme S est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

Il s'agit maintenant d'opérer une intégration terme à terme.

méthode

> Il est douteux que la série des intégrales converge absolument : on ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme du cours. On réalise alors l'intégration terme à terme en revenant aux sommes partielles.

On introduit les sommes partielles S_n définies sur $]0\,;+\infty[$ par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{e}^{-a_k x}.$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement vers S elle-même continue par morceaux. En vertu du critère spécial des séries alternées, on a pour tout $x > 0$

$$0 \leqslant S_n(x) \leqslant S_0(x) = \mathrm{e}^{-a_0 x} = \varphi(x).$$

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car $a_0 > 0$. Par convergence dominée, on peut affirmer

$$\int_0^{+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

avec convergence des intégrales écrites. Or par linéarité

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^{+\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-a_k x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[-\frac{1}{a_k}\mathrm{e}^{-a_k x}\right]_0^{+\infty} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a_k}.\end{aligned}$$

La propriété $(*)$ se relit alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n} = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\right)\mathrm{d}x$$

avec convergence de la série écrite.

Exercice 28 ** (Une fonction de Bessel)

Soit

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

(a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.

(c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

(d) Exploiter l'équation différentielle précédente pour calculer les coefficients de ce développement.

Solution

(a) Soit $u\colon \mathbb{R}\times[0\,;\pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u(x,\theta) = \cos(x\sin\theta).$$

Pour chaque $\theta \in [0\,;\pi]$, la fonction $x \mapsto u(x,\theta)$ est deux fois dérivable, la fonction u admet donc des dérivées partielles en la variable x

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\theta) = -\sin\theta\sin(x\sin\theta) \quad\text{et}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\theta) = -\sin^2\theta\cos(x\sin\theta).$$

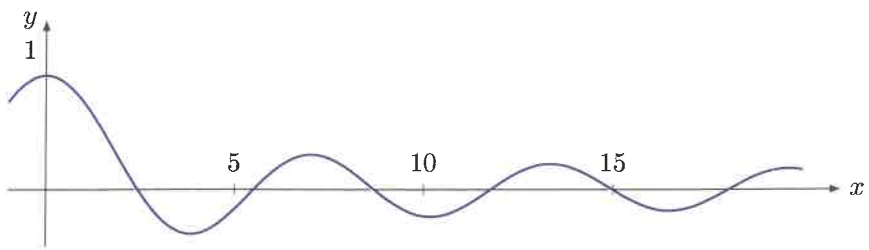
La fonction u et les deux dérivées partielles ci-dessus sont continues en x et continues par morceaux en θ.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $\theta \mapsto u(x,\theta)$ et $\theta \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,\theta)$ sont intégrables sur le segment $[0\,;\pi]$ car continues par morceaux. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in [0\,;\pi]$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\theta)\right| \leqslant 1 = \varphi(\theta) \quad\text{avec}\quad \varphi \text{ intégrable sur } [0\,;\pi].$$

Par domination, on peut affirmer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$f'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad\text{et}\quad f''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$



(b) Soit $x > 0$. On remarque

$$f''(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\cos^2\theta - 1\right)\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

et donc

$$x\big(f''(x) + f(x)\big) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta \times x\cos\theta\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

On réalise alors une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ données par

$$u(\theta) = \sin(x\sin\theta) \quad \text{et} \quad v(\theta) = \cos\theta.$$

On obtient

$$x\big(f''(x) + f(x)\big) = \frac{1}{\pi}\underbrace{\Big[\sin(x\sin\theta)\cos\theta\Big]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -f'(x).$$

On en déduit que f est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

(c) Par le développement en série entière de la fonction cosinus, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sin\theta)^{2n}x^{2n}}_{=u_n(\theta)}\right)\mathrm{d}\theta.$$

Les fonctions u_n sont continues et la série des fonctions u_n converge normalement sur le segment $[0\,;\pi]$. En effet, pour tout $\theta \in [0\,;\pi]$ on a

$$\big|u_n(\theta)\big| = \frac{1}{(2n)!}\big|\sin\theta\big|^{2n}\big|x\big|^{2n} \leqslant \frac{1}{(2n)!}\big|x\big|^{2n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \text{ converge.}$$

On peut donc intégrer terme à terme et affirmer que la fonction f est développable en série entière[1] sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!\pi}\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2n}\,\mathrm{d}\theta.$$

(d) Il est possible de calculer directement l'intégrale définissant a_n (c'est une intégrale de Wallis[2]), mais le sujet suggère de calculer a_n en exploitant l'équation différentielle.

méthode

On injecte le développement en série entière de f dans l'équation différentielle afin de former une relation de récurrence[3] sur les coefficients a_n.

1. La parité de f permettait d'anticiper la forme du développement.
2. Voir sujet 19 du chapitre 4 de l'ouvrage *Exercices d'analyse MPSI*.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par dérivation de série entière

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)a_{n+1}x^{2n+1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(2n+1)a_{n+1}x^{2n}.$$

L'équation $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$ donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\big((2n+2)^2a_{n+1} + a_n\big)x^{2n+1} = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient pour tout naturel n

$$(2n+2)^2a_{n+1} + a_n = 0.$$

Sachant $a_0 = f(0) = 1$, on conclut

$$a_n = \frac{-1}{2n}a_{n-1} = \frac{+1}{(2n)(2n-2)}a_{n-2} = \cdots = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Exercice 29 **

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. On suppose qu'il existe un réel positif M vérifiant

$$\forall x > 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{itx}-1}{x}\right|\big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant M.$$

(a) Montrer que la fonction $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{itx}-1}{t}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

(a) On observe

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{itx}-1}{x} = it.$$

méthode

On étudie le passage à la limite de l'intégrale quand x tend vers 0^+.

Introduisons $u\colon\,]0\,;+\infty[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$u(x,t) = \left|\frac{\mathrm{e}^{itx}-1}{x}\right|\big|f(t)\big|.$$

3. On pourrait aussi dériver l'équation différentielle afin de calculer $f^{(n)}(0)$ et d'en déduire les coefficients du développement en série entière de f.

La fonction u est continue par morceaux en la variable t et, pour tout t réel,

$$u(x,t) \xrightarrow[x\to 0^+]{} |t|\left|f(t)\right| = \ell(t).$$

La fonction ℓ est continue par morceaux. Il reste à établir une hypothèse de domination pour pouvoir passer à la limite.

La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}$ étant de dérivée bornée par 1, on dispose par l'inégalité des accroissements finis de la propriété de lipschitzianité

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\right| \leqslant |v-u| \quad \text{pour tout } (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

En particulier, on obtient pour tout t réel et tout $x>0$

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1}{x}\right| \leqslant \frac{|tx|}{|x|} = |t|$$

et donc

$$\left|u(x,t)\right| \leqslant |t|\left|f(t)\right| = \varphi(t).$$

Cependant, on ignore si la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et c'est d'ailleurs la question posée !

méthode

On réalise le passage à la limite en limitant l'intégration à un segment.

Soit $[a\,;b]$ un segment arbitraire de $\mathbb{R}$. La fonction φ est intégrable sur $[a\,;b]$ et donc, par domination, on peut affirmer

$$\int_a^b |t|\left|f(t)\right| \mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \int_a^b \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1}{x}\right|\left|f(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Or, par extension du domaine d'intégration d'une fonction positive, on a

$$\int_a^b \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1}{x}\right|\left|f(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1}{x}\right|\left|f(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant M.$$

Par passage à la limite dans des inégalités larges, il vient

$$\int_a^b |t|\left|f(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant M.$$

On peut alors conclure : les intégrales partielles de la fonction positive $t\mapsto |t|\left|f(t)\right|$ sont majorées, cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) On met à nouveau en place le théorème de passage à la limite en considérant cette fois-ci

$$v(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1}{x} f(t) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \mathrm{i}tf(t)$$

et la domination

$$\left|v(x,t)\right| \leqslant |t|\left|f(t)\right| = \varphi(t)$$

avec φ une fonction dont on vient de démontrer l'intégrabilité. On peut alors conclure

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1}{t} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 30 ***

On introduit la constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

En utilisant une suite de fonctions judicieuse, exprimer à l'aide du réel γ l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

Solution

Commençons par justifier l'existence de l'intégrale définissant I. La fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$\underbrace{\sqrt{t}\ln t}_{\to 0}\,\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad t^2\mathrm{e}^{-t}\ln t = \exp\big(-t + \underbrace{2\ln t + \ln(\ln t)}_{=o(t)}\big) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

méthode

Nous allons exprimer I comme limite d'une suite d'intégrales en écrivant

$$\mathrm{e}^{-t} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, introduisons les fonctions $f_n\colon]0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ définies par

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \ln t & \text{si } t\in\,]0\,;n] \\ 0 & \text{si } t\in\,]n\,;+\infty[. \end{cases}$$

Par convergence dominée, montrons

$$I = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $t\in\,]0\,;+\infty[$. Pour n assez grand, on a $n>t$ et

$$f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t = \exp\Bigg(\underbrace{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}_{\to -t}\Bigg)\ln t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t}\ln t = f(t).$$

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction f sur $]0\,;+\infty[$. Les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux. Reste à obtenir l'hypothèse de domination.

En exploitant l'inégalité $\ln(1+u) \leqslant u$, on a pour tout $t \in]0\,;n[$

$$\left|f_n(t)\right| = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n |\ln t| = \exp\Big(\underbrace{n\ln\Big(1-\frac{t}{n}\Big)}_{\leqslant -t}\Big)\,|\ln t| = \mathrm{e}^{-t}\,|\ln t| = \varphi(t).$$

Cette inégalité est aussi vraie lorsque $t \geqslant n$ et la fonction φ ainsi introduite est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Par convergence dominée, on peut affirmer

$$I = \lim_{n\to+\infty} I_n \quad \text{avec} \quad I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t.$$

Il reste à calculer I_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le changement de variable $t = nu$, on a

$$\begin{aligned}
I_n &= n\int_0^1 (1-u)^n \ln(nu)\,\mathrm{d}u\\
&= n\ln n\int_0^1 (1-u)^n\,\mathrm{d}u + n\int_0^1 (1-u)^n \ln u\,\mathrm{d}u\\
&= n\ln n\left[-\frac{1}{n+1}(1-u)^{n+1}\right]_0^1 + n\underbrace{\int_0^1 (1-u)^n \ln u\,\mathrm{d}u}_{=J_n}\\
&= \frac{n}{n+1}\ln n + nJ_n.
\end{aligned}$$

On calcule J_n en réalisant une intégration par parties généralisée où l'on intègre $(1-u)^n$ en choisissant parmi ses primitives celle qui s'annule en 0

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^1 (1-u)^n \ln u\,\mathrm{d}u\\
&= \underbrace{\left[\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln u\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}-1}{u}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Enfin, par le changement de variable $v = 1-u$ et l'écriture d'une somme géométrique, il vient

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{v^{n+1}-1}{v-1}\,\mathrm{d}v = -\int_0^1 \sum_{k=0}^n v^k\,\mathrm{d}v$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{k+1}v^{k+1}\right]_0^1 = -\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}.$$

En combinant tous ces résultats, on obtient

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln n - \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\gamma.$$

Finalement [1],

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = -\gamma.$$

Exercice 31 * (Formule de Stirling)**

On donne [2]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

(a) Calculer

$$\int_{-n}^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(c) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{n} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(d) Retrouver ainsi la formule de Stirling.

Solution

(a) **méthode**

‖ On réalise la translation de variable $t = u - n$.

Sous réserve d'existence, le changement de variable proposé donne

$$\int_{-n}^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n^{-n}\mathrm{e}^n \int_0^{+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

L'intégrale dans le second membre étant convergente, le théorème de changement de variable assure l'existence de l'intégrale initiale et l'on peut en donner la valeur

$$\int_{-n}^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n^{-n}\mathrm{e}^n n!$$

1. Il existe d'autres expressions intégrales de la constante γ mais celle-ci est particulièrement élégante !
2. La première intégrale se déduit de l'intégrale de Gauss calculée dans le sujet 18 p. 325 par parité et le changement de variable $u = t/\sqrt{2}$. La seconde intégrale s'obtient par intégrations par parties successives comme détaillé dans le sujet 17 p. 72.

(b) Par le changement de variable $u = t/n$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_1^{+\infty}(1+u)^n\mathrm{e}^{-nu}\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_1^{+\infty}\left((1+u)\mathrm{e}^{-u}\right)^n\mathrm{d}u.$$

méthode

> Pour majorer par une intégrale que l'on sait calculer, on fait apparaître la dérivée
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left((1+u)\mathrm{e}^{-u}\right) = -u\mathrm{e}^{-u}.$$

Pour $u \geqslant 1$, on a $(1+u)\mathrm{e}^{-u} \leqslant 2u\mathrm{e}^{-u}$ et donc

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \sqrt{n}\int_1^{+\infty}\left((1+u)\mathrm{e}^{-u}\right)^n\mathrm{d}u\\ &\leqslant \sqrt{n}\int_1^{+\infty}2u\mathrm{e}^{-u}\left((1+u)\mathrm{e}^{-u}\right)^{n-1}\mathrm{d}u\\ &= 2\sqrt{n}\left[-\frac{1}{n}\left((1+u)\mathrm{e}^{-u}\right)^n\right]_1^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{n}}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Par encadrement, la limite étudiée est nulle.

(c) **méthode**

> Le changement de variable $s = t/\sqrt{n}$, transforme l'intégrale de façon à faire apparaître une suite de fonctions dont la convergence simple est « intéressante ».

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}s}\,\mathrm{d}s.$$

Nous allons appliquer le théorème de convergence dominée à l'étude de cette suite d'intégrales. Introduisons les fonctions $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ avec

$$f_n(s) = \begin{cases}\left(1+\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)^n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}s} & \text{si } |s|\leqslant\sqrt{n}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour chaque $s\in\mathbb{R}$, on a pour n assez grand, $|s|\leqslant\sqrt{n}$ et donc

$$f_n(s) = \left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}s} = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n}s\right).$$

Or, on sait $\ln(1+u) = u-\frac{1}{2}u^2+\mathrm{o}(u^2)$ quand u tend vers 0 et donc

$$n\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n}s \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}-\frac{s^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\sqrt{n}s \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{s^2}{2}.$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par $f(s) = \mathrm{e}^{-s^2/2}$.

Les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. Il reste à établir l'hypothèse de domination. Pour $s\in[-\sqrt{n}\,;\sqrt{n}]$

$$f_n(s) = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n}s\right).$$

Malheureusement, l'inégalité classique $\ln(1+u)\leqslant u$ est insuffisante pour produire une fonction de domination intégrable : il faut approfondir celle-ci !

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour tout $u>-1$

$$\ln(1+u) = u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\int_0^u\frac{(u-t)^3}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t \leqslant u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3$$

car le terme intégral est positif que u soit positif ou négatif.

Pour tout s tel que $|s|\leqslant\sqrt{n}$, on a alors

$$n\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n}s\leqslant -\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{s^3}{\sqrt{n}}\leqslant -\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{3}s^2 = -\frac{1}{6}s^2.$$

Ainsi, pour tout $s\in[-\sqrt{n}\,;\sqrt{n}]$, on peut écrire

$$\left|f_n(s)\right| = f_n(s)\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}s^2}$$

et cette inégalité est évidemment aussi vraie pour s tel que $|s|>\sqrt{n}$.

La fonction de domination $\varphi\colon s\mapsto \mathrm{e}^{-s^2/6}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty}f(s)\,\mathrm{d}s$$

autrement dit

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{2\pi}.$$

(d) Par les résultats qui précèdent, l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{n}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

donne

$$n^{-n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^n n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2\pi}$$

et l'on retrouve la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

CHAPITRE 9

Séries entières

9.1 Convergence des séries entières

9.1.1 Séries entières

Définition

On appelle *série entière* définie par une suite de coefficients complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$u_n\colon z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n.$$

Par abus, cette série de fonctions est simplement notée $\sum a_n z^n$.

Définition

L'ensemble $\mathcal{D}$ des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série numérique $\sum a_n z^n$ converge est appelé *domaine de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$. Sur ce domaine on définit la fonction *somme de la série entière* $S\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ par

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Par exemple, la série entière géométrique $\sum z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Aussi, la série entière exponentielle $\sum \frac{1}{n!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et, par définition de l'exponentielle complexe, on a l'identité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = \mathrm{e}^z.$$

Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes nuls à partir d'un certain rang, la série entière $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et sa somme est une fonction polynomiale.

9.1.2 Rayon de convergence

Théorème 1 (Lemme d'Abel)

Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. Pour tout complexe z

$$|z| < r \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument.}$$

Définition

On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$, le nombre

$$R \overset{\text{déf}}{=} \sup\left\{\rho \geqslant 0 \,\middle|\, (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\right\} \in \mathbb{R}_+$$

si cet ensemble est majoré et $R = +\infty$ sinon.

9.1.3 Convergence simple

Théorème 2

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, on a pour tout complexe z

$$|z| < R \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

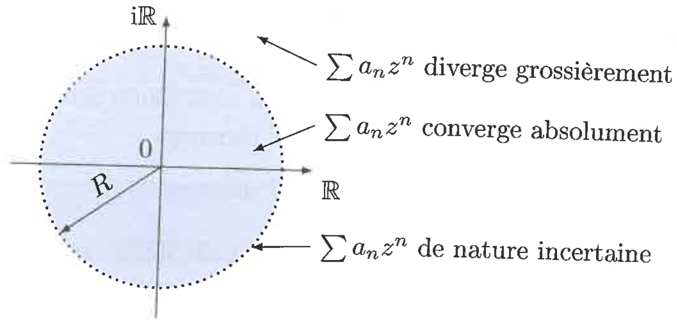
$$|z| > R \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement.}$$

Si $\mathcal{D}$ est le domaine de convergence d'une série entière de rayon de convergence R :
- si $R = 0$ alors $\mathcal{D} = \{0\}$;
- si $R = +\infty$ alors $\mathcal{D} = \mathbb{C}$;
- si $R \in \left]0\,;+\infty\right[$ alors

$$D(0,R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D(0,R)}$$

avec $D(0,R) = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < R\right\}$.

Sur le cercle de centre 0 et de rayon R, les natures de la série $\sum a_n z^n$ peuvent être diverses.



Définition

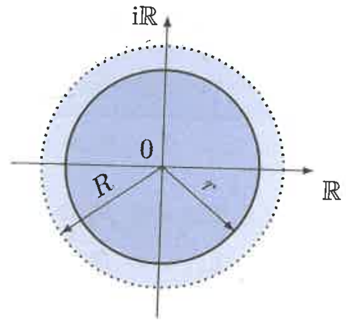
Le disque $D(0,R) = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < R\right\}$ est appelé *disque ouvert de convergence* de la série entière.

Sur ce disque, la série entière converge assurément. Elle peut aussi converger en certains points du cercle limite.

9.1.4 Convergence normale

Théorème 3

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement (et donc uniformément) sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$.
En conséquence, sa fonction somme est continue sur le disque ouvert $D(0,R)$.



Lieu de convergence normale d'une série entière
de rayon de convergence $R > 0$.

La convergence normale d'une série entière peut être fausse sur le disque ouvert $D(0,R)$. C'est le cas pour la série entière géométrique $\sum z^n$: $R = 1$ et $\sup_{z\in D(0,R)} |z^n| = 1$.

En revanche, si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge absolument, on peut affirmer la convergence normale de la série entière sur le disque fermé $\overline{D(0,R)}$.

9.1.5 Calcul du rayon de convergence

Si R est le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$

$$|z| < R \implies \sum a_n z^n \text{ converge}$$
$$|z| > R \implies \sum a_n z^n \text{ diverge.}$$

Le rayon de convergence d'une série entière apparaît alors comme étant la *valeur charnière* en laquelle la série bascule de la convergence à la divergence.

Dans les situations pratiques, on détermine souvent le rayon de convergence d'une série entière par la règle de d'Alembert rappelée ci-dessous :

Théorème 4

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes non nuls à partir d'un certain rang. On suppose

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument.
Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

9.1.6 Comparaisons des rayons de convergence

Théorème 5

Si R_a et R_b sont les rayons de convergence de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$,

$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(b_n) \implies R_a \geqslant R_b.$$

En conséquence, on a aussi :

$$|a_n| \leqslant |b_n| \implies R_a \geqslant R_b,$$
$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(b_n) \implies R_a \geqslant R_b,$$
$$|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n| \implies R_a = R_b.$$

En particulier, on a $R_a \geqslant 1$ lorsque la suite (a_n) est bornée.

Le résultat qui suit est aussi utile :

Théorème 6

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

9.1.7 Opérations sur les séries entières

Définition

On appelle *produit* d'une série entière $\sum a_n z^n$ par un complexe λ, la série entière $\sum \lambda a_n z^n$.

Théorème 7

Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ alors, pour tout complexe z tel que $|z| < R$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ est alors exactement égal à R, sauf si λ est nul où il vaut $+\infty$.

Définition

On appelle *somme* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Théorème 8

Si R_a et R_b sont les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ alors, pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

En particulier, le rayon de convergence R de la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie [1]

$$R \geqslant \min(R_a, R_b).$$

Définition

On appelle *produit* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 9

Si R_a et R_b sont les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ alors, pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

1. Il y a assurément égalité lorsque $R_a \neq R_b$.

En particulier, le rayon de convergence R de la série entière produit $\sum c_n z^n$ vérifie :

$$R \geqslant \min(R_a, R_b).$$

9.1.8 Intégration et dérivation « formelles »

Définition

On appelle *série entière dérivée* d'une série entière $\sum a_n z^n$ la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Définition

On appelle *série entière primitive* de la série entière $\sum a_n z^n$ la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n.$$

Il s'agit ici d'opérations « formelles ».

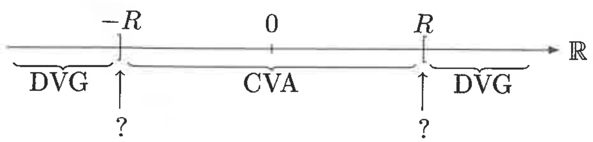
Théorème 10
Série entière dérivée et série entière primitive ont le même rayon de convergence que la série entière dont elles sont issues.

9.2 Série entière d'une variable réelle

9.2.1 Particularisation

Théorème 11
Si $\sum a_n x^n$ est une série entière d'une variable réelle x et de rayon de convergence R strictement positif alors :
- pour tout $x \in\,]-R\,;R[$, $\sum a_n x^n$ converge absolument ;
- pour tout $|x| > R$, $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

On ne peut rien affirmer *a priori* sur la convergence de la série entière en R ou en $-R$.



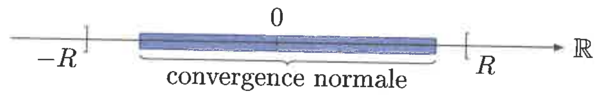
Définition

L'ensemble I des réels x pour lesquels la série entière converge vérifie :

$$]-R\,;R[\, \subset I \subset [-R\,;R].$$

On l'appelle *intervalle de convergence* de la série entière étudiée.

Théorème 12
Une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert $]-R\,;R[$.



En conséquence, la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est assurément continue sur l'intervalle ouvert $]-R\,;R[$.

Lorsque la somme d'une série entière est définie en R ou en $-R$, on ne peut rien dire *a priori* sur sa continuité en ces points[1]. Pour obtenir cette continuité, on pourra établir la convergence uniforme de la série de fonctions sur un voisinage de ces points.

9.2.2 Intégration

Théorème 13
Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, la fonction F définie par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{pour tout } x \in\,]-R\,;R[$$

est la primitive s'annulant en 0 de la fonction f définie sur $]-R\,;R[$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Autrement dit : « la série entière primitive est la primitive s'annulant en 0 de la série entière ».

1. Il existe cependant un résultat général hors-programme assurant qu'une série entière réelle est continue en tout point où elle est définie.

9.2.3 Dérivation

Théorème 14
Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors sa somme S est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$ et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \text{pour tout } x \in]-R\,;R[.$$

Autrement dit : « la série entière dérivée est la dérivée de la série entière ».
Plus généralement, les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme :

$$\begin{aligned} S^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) a_{n+p} x^n. \end{aligned}$$

En $x = R$ ou $x = -R$, la série entière peut être définie sans pour autant y être dérivable.

9.2.4 Expression des coefficients d'une série entière

Théorème 15
Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S alors,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que lorsque les sommes de deux séries entières sont égales sur un voisinage de 0, celles-ci sont définies par les mêmes coefficients :

Théorème 16
Si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières dont les sommes sont égales sur un voisinage de 0 alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une série entière dont la somme est une fonction paire (resp. impaire) ne comporte alors que des puissances paires (resp. impaires) de la variable.

9.3 Développements en série entière

Dans cette section, I désigne un intervalle réel qui est voisinage de 0. On peut alors introduire $r \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ vérifiant $]-r\,;r[\subset I$.

9.3.1 Fonctions développables en série entière

Définition
On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{C}$ est *développable en série entière* sur $]-r\,;r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{pour tout } x \in]-r\,;r[.$$

La série entière $\sum a_n x^n$ introduite converge nécessairement sur $]-r\,;r[$ et est donc de rayon de convergence R au moins égal à r.

Définition
On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{C}$ est *développable en série entière en* 0 s'il existe $r > 0$ tel que $]-r\,;r[\subset I$ et que f est développable en série entière sur $]-r\,;r[$.

Un grand nombre de fonctions peuvent être affirmées développables en série entière en raisonnant simplement par opérations sur les séries entières.
Si $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ sont développables en série entière sur $]-r\,;r[$, les fonctions $f+g$ et fg le sont aussi et leurs développements s'obtiennent par les opérations associées sur les séries entières. De même, on peut calculer le développement en série entière de la conjuguée de f ou de ses parties réelle et imaginaire. On peut aussi, par dérivation et intégration de séries entières, affirmer que les primitives et les dérivées successives d'une fonction développable en série entière sont développables en série entière.

Les développements en série entière usuels sont regroupés p. 497.

9.3.2 Série de Taylor

Définition
On appelle *série de Taylor* (en 0) d'une fonction $f\colon I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Théorème 17
Si une fonction $f\colon I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière sur $]-r\,;r[$ avec

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{pour tout } x \in]-r\,;r[$$

alors la suite (a_n) des coefficients est unique.
Plus précisément, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$ et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La série entière associée à la fonction f est alors sa série de Taylor [1].

Une fonction qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$ ne peut pas être développable en série entière. Cependant, il ne suffit pas à une fonction d'être de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour être développable en série entière [2] !

9.3.3 Développement du binôme $(1+x)^\alpha$

Théorème 18

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1\,;1[$ et

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad \text{pour tout } x \in\,]-1\,;1[.$$

Le rayon de convergence de la série entière exprimant le second membre est égal à 1 sauf si $\alpha \in \mathbb{N}$ où il vaut alors $+\infty$. Dans ce dernier cas, la formule proposée se comprend comme une particularisation de la formule du binôme de Newton et elle est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

9.4 Exercices d'apprentissage

9.4.1 Calcul de rayons de convergence

Exercice 1

Déterminer les rayons de convergence des séries entières qui suivent :

(a) $\sum \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2+1} z^n$ (b) $\sum \binom{2n}{n} z^{2n}$ (c) $\sum z^{n^2}$.

Solution

méthode

Pour ces trois études, on peut calculer le rayon de convergence par application de la règle de d'Alembert (Th. 4 p. 358). On prendra soin à chaque fois de considérer $z \neq 0$ afin de ne pas diviser par zéro !

(a) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, notons $u_n(z)$ le terme général de la série étudiée. Celui n'est pas nul et

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{(n+1)(n+2)/2}}{(n+1)^2+1}z^{n+1}}{\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^2+1}z^n}\right| = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|.$$

1. La fonction f admet un développement limité en 0 à tout ordre qui se déduit par troncature de son développement en série entière.
2. Voir sujet 21 p. 389.

Si $|z| < 1$, la série $\sum u_n(z)$ converge absolument. Si $|z| > 1$, la série $\sum u_n(z)$ diverge grossièrement. La valeur charnière [1] déterminant le rayon de convergence est donc $R = 1$.

(b) **méthode**

La règle de d'Alembert peut aussi être mise en œuvre pour ce que l'on appelle des *séries entières lacunaires* (certaines puissances de la variables y sont absentes). C'est le cas des deux suivantes.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, notons $u_n(z)$ le terme général de la série étudiée. Celui n'est pas nul et

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}z^{2n+2}}{\binom{2n}{n}z^{2n}}\right|.$$

Sachant

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad \text{et} \quad \binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}$$

on obtient

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{2(2n+1)}{n+1}\left|z^2\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4\left|z\right|^2.$$

Si $|z| < 1/2$, la limite précédente est strictement inférieure à 1 et la série converge absolument. Si $|z| > 1/2$, la série entière diverge grossièrement. On conclut $R = 1/2$.

(c) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, mettons encore en œuvre la règle de d'Alembert

$$\left|\frac{z^{(n+1)^2}}{z^{n^2}}\right| = \left|\frac{z^{n^2+2n+1}}{z^{n^2}}\right| = |z|^{2n+1}.$$

Si $|z| < 1$, la suite géométrique $\left(z^{2n+1}\right)$ est de limite nulle et il y a donc convergence absolue de la série $\sum z^{n^2}$. Si en revanche $|z| > 1$, il y a divergence grossière de la série. On conclut [2] $R = 1$.

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \sin(n) z^n$.

Solution

Dans ce sujet, on ne peut mettre en œuvre la règle de d'Alembert car le terme

$$\left|\frac{\sin(n+1)z^{n+1}}{\sin(n)z^n}\right|$$

ne possède pas de limite quand n tend vers l'infini !

1. Si la suite de coefficients non nuls (a_n) vérifie $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in [0\,;+\infty[\cup \{+\infty\}$ alors la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $R = 1/\ell$ en adoptant les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.
2. On peut aussi résoudre efficacement cette étude en revenant à la définition du rayon de convergence $R = \sup\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}$.

méthode

Lorsque la règle de d'Alembert ne s'applique pas, on détermine un rayon de convergence en raisonnant par double inégalité.

Pour tout naturel n, on a $|\sin n| \leqslant 1$. Or la série entière $\sum 1 \times z^n$ est de rayon de convergence égal à 1. On en déduit (Th. 5 p. 358) que le rayon de convergence R cherché vérifie[1] $R \geqslant 1$.

Pour $z = 1$, la série numérique $\sum \sin(n) z^n = \sum \sin n$ diverge grossièrement[2]. Puisque la série entière diverge en $z = 1$, son rayon de convergence ne peut être strictement supérieur à 1 (Th. 2 p. 356) et donc $R \leqslant 1$.

Les deux inégalités se complètent pour conclure $R = 1$.

méthode

Plus généralement, ce raisonnement peut être repris[3] dès que (a_n) est une suite bornée qui ne tend pas vers 0.

9.4.2 Séries entières d'une variable réelle

Exercice 3

Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

(b) Préciser l'intervalle de définition de f.

(c) Établir la continuité de f sur son domaine de définition.

(d) Déterminer la limite de f en 1.

Solution

(a) Pour $x \neq 0$, posons $u_n = x^n/\sqrt{n} \neq 0$. On a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série numérique $\sum u_n$ converge absolument. Si $|x| > 1$, elle diverge grossièrement. On en déduit que le rayon de convergence R vaut 1.

(b) La fonction f est définie sur un intervalle contenant $]-1\,;1[$ et inclus dans $[-1\,;1]$ (Th. 11 p. 360). En $x = 1$, la série définissant $f(x)$ diverge car il s'agit d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = 1/2 \leqslant 1$. En $x = -1$, la série définissant $f(x)$ converge en vertu du critère spécial :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ décroît vers } 0.$$

On conclut que l'intervalle de définition de f est $[-1\,;1[$.

(c) On peut affirmer la continuité de f sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$ (Th. 12 p. 361). Reste à étudier la continuité en -1.

méthode

Il ne figure pas dans le cours de théorème assurant la continuité d'une fonction somme de série entière aux points correspondant au rayon de convergence, et ce même si celle-ci converge en ce point ! Pour obtenir la continuité, on revient à la théorie des séries de fonctions et l'on raisonne par convergence uniforme.

Posons $u_n(x) = x^n/\sqrt{n}$ pour $x \in [-1\,;0]$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[-1\,;0]$ en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $(u_n(x))$ est alternée car on a pris garde de choisir x négatif ce qui permet d'écrire

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n |x|^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n |u_n(x)|.$$

Au surplus

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} |x|^n$$

décroît vers 0 par produit de deux suites décroissantes de limites nulles (si $x \neq -1$) ou par produit d'une suite décroissante de limite nulle et d'une suite constante (si $x = -1$).

Par application du critère spécial, on peut borner le reste R_n de la série par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime. Pour tout réel $x \in [-1\,;0]$, on a

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Puisque le majorant est uniforme (il ne dépend pas de x) et de limite nulle, on peut affirmer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-1\,;0]$. Les fonctions sommées étant toutes continues, on peut conclure que la fonction somme f est continue sur $[-1\,;0]$ (Th. 16 p. 237), puis, finalement, sur $[-1\,;1[$.

(d) **méthode**

Pour obtenir la limite, voire un équivalent, d'une série entière en un point où celle-ci n'est pas définie, il est fréquent de comparer à des séries entières de sommes connues.

1. On obtient la même conclusion en affirmant que la série entière $\sum \sin(n) z^n$ est la partie imaginaire de $\sum e^{in} z^n$ qui est de rayon de convergence 1.
2. Il y a divergence grossière lorsque le terme général d'une série ne tend pas vers 0.
3. Si (a_n) est la suite des décimales de $\sqrt{3}$, on peut affirmer que la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence 1.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\sqrt{n} \leqslant n$ et donc, pour tout $x \in [0;1[$,

$$f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty.$$

Par théorème de comparaison, on peut conclure que f tend vers $+\infty$ en 1^-.

9.4.3 Développements en série entière

Exercice 4

Soit $f\colon [-1;1] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1;1], \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant MK^n n!$$

avec $M \in \mathbb{R}_+$ et $K > 0$. Montrer que la fonction f est développable en série entière en 0.

Solution

méthode

> Lorsqu'une fonction f est développable en série entière en 0, celle-ci est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et la série entière qui lui correspond est sa série de Taylor. Pour vérifier que la série de Taylor d'une fonction indéfiniment dérivable converge vers la fonction sur un voisinage de 0, on utilise généralement l'égalité de Taylor avec reste intégral ou l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Sachant la fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et de dérivée $(n+1)$-ième bornée, on peut exploiter l'inégalité de Taylor-Lagrange et écrire, pour tout réel x dans $[-1;1]$,

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{\sup_{x\in[-1;1]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leqslant M\big(K|x|\big)^{n+1}.$$

Posons alors $r = \min\{1, 1/K\} > 0$. Pour $|x| < r$, la suite géométrique $\big((K|x|)^n\big)$ converge vers 0 et donc

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut alors écrire (avec convergence de la série sous-jacente)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Ceci signifie que la fonction f est égale à la somme d'une série entière sur $]-r;r[$: elle y est développable en série entière.

Exercice 5 (Identité binomiale)

Soit $p \in \mathbb{N}$. Établir

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n \quad \text{pour tout } x \in]-1;1[.$$

Solution

méthode

> Pour développer une expression comportant une puissance constante, il est fréquent de prendre appui sur le développement connu de $(1+u)^\alpha$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on connaît le développement en série entière (Th. 18 p. 364)

$$(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n \quad \text{pour tout } u \in]-1;1[.$$

Soit $x \in]-1;1[$. On considère $u = -x$ et $\alpha = -(p+1)$ pour écrire

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-x)^n$$

avec, pour tout naturel n,

$$a_n = \frac{\big(-(p+1)\big)\big(-(p+2)\big)\dots\big(-(p+n)\big)}{n!}.$$

Il y a exactement n facteurs au numérateur. En regroupant les signes $(-)$ de chacun, on obtient

$$a_n = (-1)^n \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n!}.$$

Enfin, un produit d'entiers consécutifs peut s'exprimer comme un rapport de nombres factoriels et

$$a_n = (-1)^n \frac{(n+p)!}{n!p!} = (-1)^n \binom{n+p}{p}.$$

Finalement [1],

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n.$$

Exercice 6

Former le développement en série entière de la fonction arcsin sur $]-1;1[$.

1. Ce calcul peut aussi être mené en opérant la dérivation à l'ordre p de l'identité géométrique donnant le développement de $1/(1-x)$. Cette identité sera souvent reprise en calcul de probabilités.

Solution

méthode

Pour développer une fonction en série entière, on raisonne souvent par opérations sur les fonctions qui le sont. Lorsque la dérivée d'une fonction est remarquable, il est fréquent de développer celle-ci avant d'intégrer ce développement, sans oublier la constante d'intégration !

La fonction arcsin est dérivable sur $]-1\,;1[$ de dérivée

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On connaît le développement de $(1+u)^\alpha$ pour $u \in]-1\,;1[$. On emploie celui-ci avec $\alpha = -1/2$ et $u = -x^2$ pour x dans $]-1\,;1[$. On a

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}.$$

On regroupe les (-1) et les divisions par 2 de chacun des n facteurs du numérateur

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^n}\cdot\frac{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}{n!}.$$

Enfin, on exprime le produit des nombres impairs à l'aide d'un rapport de nombres factoriels [1]

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Ainsi, on obtient par substitution

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.$$

Le rayon de convergence R de la série entière exprimant le second membre est exactement égal à 1. En effet, l'égalité qui précède assure la convergence pour tout $x \in]-1\,;1[$ et donc $R \geqslant 1$. De plus, il est impossible que R soit strictement supérieur à 1 car le premier membre ne peut pas être prolongé par continuité en 1.

Finalement, en intégrant (Th. 13 p. 361) avec la constante d'intégration $\arcsin(0) = 0$, il vient

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}} \quad \text{pour tout } x \in]-1\,;1[.$$

Par intégration, la série entière [2] exprimant le second membre est encore de rayon de convergence égal à 1.

1. Voir méthode p. 19.
2. Cette série entière ne comporte que des puissances impaires de la variable ce qui est attendu puisque la fonction arcsin est impaire.

Exercice 7

Former les développements en série entière en 0 des fonctions rationnelles qui suivent :

(a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x-1)^2}$ (b) $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

Solution

(a) **méthode**

Pour calculer le développement en série entière d'une fonction rationnelle, il est usuel d'opérer une décomposition en éléments simples de celle-ci.

Ici, la fonction rationnelle f est de partie entière nulle et son dénominateur est déjà factorisé dans $\mathbb{R}[X]$. Sa décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} \quad \text{avec} \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

On a

$$a = \frac{1}{(x-1)^2}\bigg|_{x=-2} = \frac{1}{9} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{x+2}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{3}.$$

En multipliant par x et en étudiant la limite en $+\infty$, on trouve $c = -1/9$.

En exploitant des sommes géométriques, on peut écrire pour $x \in]-2\,;2[$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

et pour $x \in]-1\,;1[$

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$

Par dérivation de séries entières, on a aussi pour $x \in]-1\,;1[$

$$\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

En combinant ces résultats, on conclut

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3n+4}{9} + \frac{(-1)^n}{18.2^n}\right)x^n \quad \text{pour tout } x \in]-1\,;1[.$$

Par addition, le rayon de convergence de la série entière exprimant le second membre est au moins égal [1] à 1.

1. Il est en fait exactement égal à 1 car la fonction f présente une limite infinie en 1.

(b) Pour ce calcul, on pourrait aussi opérer une décomposition en éléments simples qui serait

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1/\mathrm{i}\sqrt{3}}{(x-j)} - \frac{1/\mathrm{i}\sqrt{3}}{(x-j^2)} \quad \text{avec} \quad j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}.$$

On peut cependant être beaucoup plus efficace avec un peu d'astuce...

méthode

On écrit

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^3}.$$

Par sommation géométrique de raison $q = x^3$, il vient pour $x \in \left]-1\,;1\right[$

$$\frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^{3n} - x^{3n+1}\right).$$

Finalement, on obtient le développement en série entière

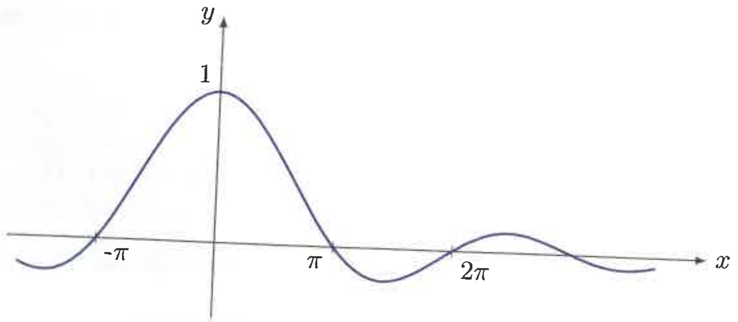
$$\frac{1}{1+x+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0 \ [3] \\ -1 & \text{si } k \equiv 1 \ [3] \\ 0 & \text{si } k \equiv 2 \ [3]. \end{cases}$$

Exercice 8

Justifier que la fonction *sinus cardinal* (notée sinc) définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer les valeurs de ses dérivées successives en 0.



Solution

méthode

On peut établir qu'une fonction définie par un raccord est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en constatant qu'elle est développable en série entière !

Le développement en série entière de la fonction sin permet d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Lorsque x est non nul, on a

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

La valeur d'une série entière en 0 étant égale à son coefficient constant (ici 1), on peut affirmer que pour tout x réel

$$\operatorname{sinc} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

La fonction sinus cardinal est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et par conséquent de classe $\mathcal{C}^\infty$ (Th. 17 p. 363). De plus, son développement en série entière correspondant à son développement de Taylor, on peut affirmer pour tout naturel n

$$\frac{(\operatorname{sinc})^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \frac{(\operatorname{sinc})^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = 0.$$

Ainsi,

$$(\operatorname{sinc})^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad (\operatorname{sinc})^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Exercice 9

Déterminer le rayon de convergence et la somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n.$$

Solution

Posons $u_n(x) = x^n/(2n)!$ le terme général de la série étudiée. Pour $x \neq 0$

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{(2n)!}{(2n+1)!} x\right| = \frac{|x|}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que la série numérique $\sum u_n(x)$ converge pour tout réel x et donc le rayon de convergence cherché vaut $+\infty$.

méthode

Pour calculer la somme d'une série entière, on se focalise essentiellement sur ses coefficients en essayant de les reconnaître parmi ceux des développements de référence, quitte à opérer quelques transformations.

Ici, le coefficient $1/(2n)!$ figure dans les développements des fonctions cosinus et cosinus hyperbolique. L'enjeu est alors d'adapter la puissance de x.

Cas : $x \in [0\,;+\infty[$. On peut écrire $x = t^2$ avec $t = \sqrt{x}$ et l'on a alors

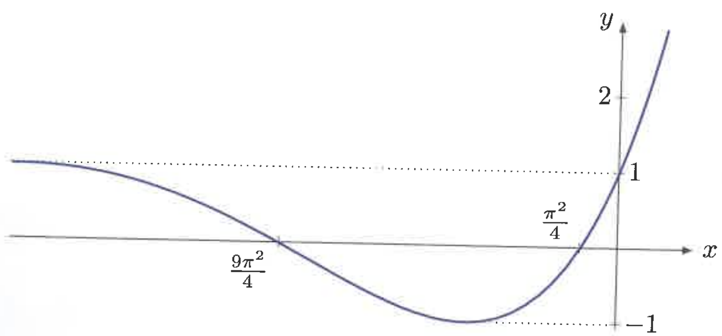
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} = \operatorname{ch} t = \operatorname{ch}\big(\sqrt{x}\big).$$

Cas : $x \in\,]-\infty\,;0]$. On peut écrire $x = -t^2$ avec $t = \sqrt{-x}$ et l'on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} = \cos t = \cos\big(\sqrt{-x}\big).$$

Finalement [1],

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n = \begin{cases} \operatorname{ch}\big(\sqrt{x}\big) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos\big(\sqrt{-x}\big) & \text{sinon.} \end{cases}$$



Exercice 10

Établir l'identité

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

1. La fonction exprimée dans le second membre s'avère de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme d'une série entière (Th. 17 p. 363) : cette propriété n'avait rien d'évident *a priori* !

Solution

méthode

Pour établir qu'une intégrale est une somme, il est fréquent de décomposer en série entière la fonction intégrée avant d'intégrer terme à terme, soit par convergence uniforme (Th. 18 p. 238), soit par la convergence de la série des intégrales des valeurs absolues (Th. 2 p. 296).

À partir du développement en série entière connu de la fonction arctan, on peut écrire pour tout $x \in\,]0\,;1[$

$$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}.$$

On opère alors une intégration terme à terme en introduisant la série des fonctions u_n avec

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \quad \text{pour} \quad x \in\,]0\,;1[.$$

La série des fonctions u_n converge simplement sur $]0\,;1[$ en vertu du développement en série entière qui précède. Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la fonction somme l'est aussi car par les calculs initiaux :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{\arctan x}{x} \quad \text{pour tout } x \in\,]0\,;1[.$$

Les fonctions u_n sont intégrables sur $]0\,;1[$ car se prolongent par continuité en 0 et en 1. Enfin, la série $\sum \int_0^1 |u_n|$ converge car

$$\int_0^1 |u_n| = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}.$$

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme (Th. 2 p. 296) étant réunies, on peut affirmer l'intégrabilité de la fonction somme sur $]0\,;1[$, l'absolue convergence de la série introduite en second membre et l'identité [1]

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}\,\mathrm{d}x\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Notons qu'il est aussi possible dans ce sujet de justifier l'intégration terme à terme en constatant la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0\,;1]$ par application du critère spécial des séries alternées.

1. On ne sait pas mieux exprimer cette valeur : celle-ci se nomme la *constante de Catalan* et vaut approximativement 0,915 965.

9.5 Exercices d'entraînement

9.5.1 Rayon de convergence

Exercice 11 *

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On considère sa partie paire et sa partie impaire

$$\sum a_{2p} z^{2p} \quad \text{et} \quad \sum a_{2p+1} z^{2p+1}$$

de rayons de convergence R' et R''. Montrer

$$R = \min(R', R'').$$

Solution

Les parties paires et impaires de la série entière $\sum a_n z^n$ se comprennent comme les séries entières $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ avec

$$\begin{cases} b_{2n} = a_{2n} \\ b_{2n+1} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c_{2n} = 0 \\ c_{2n+1} = a_{2n+1}. \end{cases}$$

méthode

On compare les rayons de convergence, d'une part, en exprimant a_n en fonction de b_n et c_n, d'autre part, en comparant b_n et c_n à a_n.

Puisque $a_n = b_n + c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum a_n z^n$ est la somme des séries entières $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$. On en déduit $R \geqslant \min(R', R'')$ (Th. 8 p. 359).

Aussi, puisque $|b_n| \leqslant |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $R' \geqslant R$ (Th. 5 p. 358). Par un argument similaire, on a aussi $R'' \geqslant R$ et donc $\min(R', R'') \geqslant R$.

On peut alors conclure à l'égalité $R = \min(R', R'')$.

9.5.2 Séries entières d'une variable réelle

Exercice 12 *

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n.$$

(b) Calculer sa somme.

Solution

(a) **méthode**

La règle de d'Alembert ne s'applique pas à l'obtention du rayon de convergence : on raisonne par double inégalité.

D'une part, la suite $\left(n^{(-1)^n}\right)$ ne tend pas vers 0, la série numérique $\sum n^{(-1)^n} x^n$ diverge donc grossièrement pour $x = 1$ et le rayon de convergence R cherché vérifie $R \leqslant 1$ (Th. 2 p. 356).

D'autre part, on a $\left|n^{(-1)^n}\right| \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on sait que le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ vaut celui de la série géométrique $\sum x^n$ (Th. 6 p. 358) à savoir 1. Par comparaison (Th. 5 p. 358), on obtient $R \geqslant 1$ et l'on peut conclure[1] $R = 1$.

(b) Puisque la série entière diverge grossièrement en $x = 1$ et en $x = -1$, l'intervalle de définition de la somme est $]-1\,;1[$.

méthode

Pour calculer cette somme, on sépare les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs afin de pouvoir résoudre la puissance de (-1).

Pour $x \in\,]-1\,;1[$, l'absolue convergence de la série permet de sommer par paquets et de séparer la somme en deux selon la parité de n :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} 2p x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} x^{2p+1}.$$

D'une part, par dérivation de série entière (Th. 14 p. 362), on a pour tout $x \in\,]-1\,;1[$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} 2p x^{2p} = x \sum_{p=1}^{+\infty} 2p x^{2p-1} = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p}\right)$$
$$= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

D'autre part, par intégration de séries entières (Th. 13 p. 361), on a pour tout $x \in\,]-1\,;1[$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} x^{2p+1} = \int_0^x \left(\sum_{p=0}^{+\infty} t^{2p}\right) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \int_0^x \frac{1/2}{1+t} + \frac{1/2}{1-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(1+t) - \ln(1-t)\Big]_0^x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On peut conclure

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1. On peut aussi déterminer R en exploitant l'encadrement $1/n \leqslant n^{(-1)^n} \leqslant n$ sachant que les séries entières de coefficients $1/n$ et n sont de rayon 1. On peut aussi revenir à la définition du rayon de convergence comme borne supérieure.

Exercice 13 *

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et de somme S. On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0\,;1[$.

(a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.

(b) Montrer que la fonction S est définie et continue sur $[-1\,;1]$.

Solution

(a) **méthode**

> On peut montrer la convergence d'une série à termes positifs en constatant que ses sommes partielles sont majorées.

Puisque la fonction S est majorée sur $[0\,;1[$, on peut introduire $M \geqslant 0$ tel que $S(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [0\,;1[$. Comme les coefficients de la suite (a_n) sont positifs, on a, pour tout naturel N et tout $x \in [0\,;1[$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_n x^n}_{\geqslant 0} = S(x) \leqslant M.$$

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant M.$$

Les sommes partielles de la série $\sum a_n$ sont majorées, or c'est une série à termes positifs, elle est donc convergente.

(b) Introduisons les fonctions u_n définies sur $[-1\,;1]$ par $u_n(x) = a_n x^n$. Les fonctions u_n sont continues et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement car

$$\sup_{x\in[-1;1]} \left|u_n(x)\right| = \sup_{x\in[-1;1]} a_n\left|x^n\right| = a_n$$

est terme général d'une série convergente. On en déduit (Th. 16 p. 237) que la fonction somme S est définie et continue sur $[-1\,;1]$.

Exercice 14 **

Soit $f(x)$ la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence 1.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

(b) Pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

Solution

(a) **méthode**

> Les coefficients des deux séries entières définissant les fonctions f et g sont liés par la relation $a_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Notons R le rayon de convergence de la série entière définissant g. Pour $x \in [0\,;R[$, la série $\sum S_n x^n$ est absolument convergente (Th. 2 p. 356). Par opérations sur les séries numériques, la série de terme général

$$a_n x^n = S_n x^n - x \times S_{n-1} x^{n-1}$$

est aussi absolument convergente. Or la série entière $\sum a_n x^n$ est supposée de rayon de convergence égal à 1 et donc $x \leqslant 1$.

On vient d'établir

$$x \in [0\,;R[\implies x \leqslant 1.$$

On peut donc affirmer $R \leqslant 1$.

Pour $x \in [0\,;1[$, on a $x^n \leqslant x^k$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$ et donc

$$\left|S_n x^n\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|\left|x^n\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|\left|x^k\right|.$$

Or la série $\sum a_k x^k$ est absolument convergente et donc la suite $\left(S_n x^n\right)$ est bornée. Par définition du rayon de convergence d'une série entière, on obtient $x \leqslant R$.

On vient d'établir

$$x \in [0\,;1[\implies x \leqslant R$$

on peut donc affirmer $1 \leqslant R$ et conclure $R = 1$.

(b) On peut écrire

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k \times 1)$$

et ainsi comprendre la série entière $\sum S_n x^n$ comme le produit [1] des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum x^n$. On en déduit (Th. 9 p. 359)

$$g(x) = f(x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{f(x)}{1-x} \quad \text{pour tout } x \in \left]-1\,;1\right[.$$

Exercice 15 **

Déterminer un équivalent quand $x \to 1^-$ de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

1. On retrouve alors que le rayon de convergence R est au moins égal à 1.

Solution

méthode

Pour cerner l'ordre de grandeur d'une somme, on cherche à rapprocher celle-ci d'une somme connue.

On a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Les séries entières $\sum \frac{1}{n}x^n$ et $\sum x^n$ ont le même rayon de convergence (Th. 6 p. 358) à savoir 1. Par équivalence des coefficients, la série entière $\sum \ln(1+\frac{1}{n})x^n$ est aussi de rayon de convergence 1 et la fonction donnée par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$$

est bien définie au voisinage de 1^-.

En approfondissant par un développement limité l'équivalent précédent, on peut écrire

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + a_n \quad \text{avec} \quad a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Pour $x \in]-1\,;1[$, on peut décomposer $S(x)$ en deux sommes absolument convergentes

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) \quad \text{avec} \quad S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n \text{ et } S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

D'une part, on reconnaît $S_1(x) = -\ln(1-x)$. D'autre part, la série $\sum a_n$ étant absolument convergente, la somme $S_2(x)$ est bornée

$$|S_2(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,|x|^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

On peut alors écrire

$$S(x) = \underbrace{-\ln(1-x)}_{\to+\infty} + \underbrace{S_2(x)}_{\text{bornée}} \underset{x\to1^-}{=} = -\ln(1-x) + o\big(\ln(1-x)\big)$$

et donc

$$S(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

9.5.3 Développements en série entière

Exercice 16 *

(a) Former le développement en série entière sur $]-1\,;1[$ de

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$

(b) En déduire une expression de

$$a_n = \text{Card}\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \mid j+2k = n\}.$$

Solution

(a) On décompose la fraction rationnelle en éléments simples. Sa partie entière est nulle et son dénominateur se factorise dans $\mathbb{R}[X]$

$$(1-X)(1-X^2) = (X-1)^2(X+1).$$

La décomposition en éléments simples est alors de la forme

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \quad \text{avec} \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

On a

$$a = \left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=1} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c = \left.\frac{1}{(x-1)^2}\right|_{x=-1} = \frac{1}{4}.$$

En multipliant par x puis en étudiant la limite en $+\infty$, on obtient $b = -1/4$. Ainsi,

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x}.$$

Pour $x \in]-1\,;1[$, on a par sommation géométrique

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Par dérivation du dernier développement, on a aussi

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

Finalement, on parvient au développement sur $]-1\,;1[$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3+(-1)^n}{4}x^n.$$

Par convergence, la série entière exprimant le second membre a un rayon de convergence au moins égal à 1 et, en fait, exactement égal à 1 car le premier membre est de limite $+\infty$ en 1^-.

(b) Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$.

méthode

> On peut calculer le développement en série entière en opérant un produit de sommes géométriques.

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}\right).$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, le coefficient de x^n s'obtient à partir des termes x^j et x^{2k} pour lesquels $j+2k=n$. On peut ainsi exprimer

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière sur $\left]-1\,;1\right[$ (Th. 17 p. 363), on obtient pour tout naturel n

$$a_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4}.$$

Un calcul direct de a_n est aussi facile. Il y a $1+\lfloor n/2 \rfloor$ valeurs de k possibles (les nombres pairs entre 0 et n) et, pour chacune, une seule valeur de j convenable telle que $j+2k=n$. On a ainsi

$$a_n = 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Cette nouvelle expression correspond à la précédente.

Exercice 17 *

En introduisant la série entière $\sum a_n x^n$, déterminer le terme général de la suite récurrente (a_n) définie par

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{(n+1)!}.$$

Solution

méthode

> On introduit la série entière $\sum a_n x^n$ que l'on montre être de rayon de convergence $R > 0$. On exploite la relation de récurrence pour calculer sa somme sur $\left]-R\,;R\right[$. En décomposant la fonction somme en série entière, on obtient l'expression des a_n par un argument d'unicité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{|a_n|}{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \leqslant |a_n| + 1.$$

Par une récurrence rapide, on obtient $|a_n| \leqslant n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à 1. Notons S sa somme. Pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Par la relation de récurrence vérifiée par (a_n), on obtient

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n + \frac{(-1)^n}{n!}\right)x^n.$$

On peut séparer par linéarité la somme car les deux sommes introduites convergent

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n = S(x) + \mathrm{e}^{-x}.$$

La fonction S apparaît comme une solution sur $\left]-R\,;R\right[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant $y' = y + \mathrm{e}^{-x}$. Après résolution, la solution générale de celle-ci s'exprime

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La condition $a_0 = 1$ donne $S(0) = 1$ ce qui détermine la valeur de λ et donc

$$S(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

On décompose ensuite en série entière les deux termes exponentiels

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3-(-1)^n}{2n!}x^n \quad \text{pour tout } x \in \left]-R\,;R\right[.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière[1], on conclut

$$a_n = \frac{3-(-1)^n}{2n!}.$$

1. On en déduit *a posteriori* $R = +\infty$.

Exercice 18 **

On considère la fonction $f\colon]-1\,;1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(a) Justifier l'existence d'une suite de coefficients réels (a_n) (que l'on ne cherchera pas à calculer pour le moment) telle que

$$\forall x \in\,]-1\,;1[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}.$$

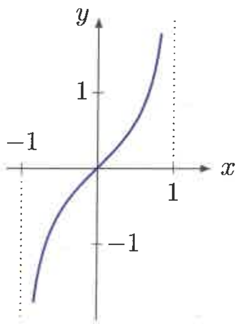
(b) Calculer les coefficients de cette suite en introduisant une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par la fonction f.

Solution

(a) **méthode**

On peut montrer que f est développable en série entière sur $]-1\,;1[$ par arguments d'opérations.

Puisque la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1\,;1[$ (Th. 18 p. 364), il suffit de prendre $\alpha = -1/2$ et $u = -x^2$ pour pouvoir affirmer que la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ est développable en série entière sur $]-1\,;1[$. Aussi, $x \mapsto \arcsin x$ est développable en série entière sur $]-1\,;1[$ car primitive[1] de la fonction précédente (Th. 13 p. 361). Par produit de fonctions développables en série entière sur $]-1\,;1[$, on peut affirmer que la fonction f est aussi développable en série entière sur cet intervalle. Au surplus, la fonction f est impaire et ce développement ne comporte donc que des puissances impaires de la variable. On peut alors écrire, pour tout $x \in\,]-1\,;1[$,



$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \quad \text{avec} \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

(b) Par dérivation d'un produit, on obtient pour tout $x \in\,]-1\,;1[$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{x}{1-x^2} f(x) + \frac{1}{1-x^2}.$$

1. Les calculs correspondants sont détaillés dans le sujet 6 p. 369.

On en déduit que f est solution sur $]-1\,;1[$ de l'équation différentielle linéaire

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

méthode

Une équation différentielle à coefficients polynomiaux permet souvent de former une relation de récurrence sur les coefficients d'un développement en série entière.

Soit $x \in\,]-1\,;1[$. Par dérivation de série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \quad \text{et} \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}.$$

L'équation différentielle donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1.$$

On combine entre elles les deux dernières sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)a_n x^{2n+2} = 1.$$

On opère un glissement d'indice sur la deuxième somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_{n-1} x^{2n} = 1.$$

Enfin, on combine les deux sommes en une seule en isolant le terme initial de la première somme

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big((2n+1)a_n - 2n a_{n-1}\big)x^{2n} = 1.$$

Cette identité peut se comprendre comme l'égalité de deux séries entières où le second membre est associé à une série entière dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient constant qui est égal à 1.

méthode

L'unicité des coefficients des développements en série entière (Th. 17 p. 363) permet d'identifier ceux-ci.

On a donc

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (2n+1)a_n - 2n a_{n-1} = 0.$$

En exploitant la relation de récurrence, on écrit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n}{(2n+1)} a_{n-1} = \frac{2n}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n-2)}{(2n-1)} a_{n-1} = \cdots \\ &= \frac{(2n)(2n-2) \times \cdots \times 2}{(2n+1)(2n-1) \times \cdots \times 3} a_0. \end{aligned}$$

Enfin, en exprimant, le produit des entiers pairs et des entiers impairs à l'aide de nombres factoriels [1]

$$(2n)(2n-2) \times \cdots \times 2 = 2^n n! \quad \text{et} \quad (2n+1)(2n-1) \times \cdots \times 3 = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

on conclut

$$a_n = \frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 19 **

(a) Développer en série entière sur $]-1\,;1[$ la fonction arcsin.

(b) Vérifier que le développement de la fonction arcsin est en fait valable sur $[-1\,;1]$.

(c) En calculant de deux façons

$$\int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Solution

(a) Le développement en série entière de la fonction arcsin à déjà été traité dans le sujet 6 p. 369. Pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;1[$, on a

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n+1}.$$

(b) **méthode**

> Pour prolonger l'identité, on utilise un argument de continuité. On étudie pour cela la convergence normale de la série de fonctions sur $[-1\,;1]$.

1. Voir méthode p. 19.

Par la formule de Stirling

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\sqrt{2\pi \times 2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2^{2n} 2\pi n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

La série de terme général a_n est donc absolument convergente.

Considérons alors la série des fonctions u_n déterminées par $u_n(x) = a_n x^n$ avec x dans le segment $[-1\,;1]$. Ces fonctions sont continues et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-1\,;1]$ car $\sup\limits_{x\in[-1;1]} \left|u_n(x)\right| = a_n$. On en déduit que la fonction S donnée par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est définie et continue sur $[-1\,;1]$ (Th. 16 p. 237). Par les calculs qui précèdent, cette fonction se confond avec la fonction arcsin sur l'intervalle $]-1\,;1[$. Or ces deux fonctions sont continues, et donc, par passage à la limite, sont aussi égales en 1 et -1.

(c) **méthode**

> Un premier calcul est facile en simplifiant $\arcsin(\sin t)$. Un second est possible en opérant une intégration terme à terme.

D'une part, on peut réaliser un calcul direct

$$\int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.$$

D'autre part, on peut exprimer cette intégrale en opérant une intégration terme à terme (Th. 18 p. 238). On introduit les fonctions $v_n(t) = a_n \sin^{2n+1} t$ pour $t \in [0\,;\pi/2]$. Celles-ci sont continues et la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement car

$$\sup_{t\in[0;\pi/2]} \left|v_n(t)\right| = a_n.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} v_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

On reconnaît les intégrales de Wallis [1] :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,\mathrm{d}t = \frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n+1)!}.$$

1. Pour calculer celles-ci, on forme une relation de récurrence par intégration par parties : voir sujet 19 du chapitre 4 de l'ouvrage *Exercices d'analyse MPSI*.

Après simplifications, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On en déduit [1]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 20 **

Pour $\alpha \in \left]0\,;\pi\right[$, former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$f\colon x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Solution

méthode

On ne dispose dans le cours de résultats relatifs à la composition de fonctions développables en série entière [2]. Ici, on simplifie le problème en opérant par dérivation-intégration.

La fonction f est définie et dérivable sur $\left]-\infty\,;1\right[$. Sa dérivée est une fonction rationnelle qui s'exprime

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(1-x)^2+(1+x)^2\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

En écrivant la tangente comme quotient des fonctions sinus et cosinus, on obtient

$$f'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(1-x)^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+(1+x)^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Par les formules

$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a \quad \text{et} \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

on simplifie l'expression

$$f'(x) = \frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

1. Il est alors possible d'en déduire la valeur $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$: voir sujet 5 du chapitre 11 de l'ouvrage *Exercices d'analyse MPSI*.
2. On peut cependant établir que si f et g sont des fonctions développables en série entière et si $g(0)=0$ alors la composée $f\circ g$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Le trinôme du dénominateur est de discriminant $\Delta = -\sin^2\alpha$ et de racines distinctes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$: il se factorise $(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})$. Par décomposition en éléments simples d'une fraction réelle

$$f'(x) = \frac{a}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} + \frac{b}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} \quad\text{avec}\quad a = \left.\frac{\sin\alpha}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\right|_{x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \text{ et } b = \bar{a} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}.$$

Par sommation géométrique de raison $q = x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, on obtient pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$

$$\frac{1}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = -\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\cdot\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}x\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\alpha}x^n.$$

méthode

Il est inutile de reproduire le calcul pour le deuxième terme : il suffit de conjuguer le résultat précédent !

$$\frac{1}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} = \overline{\left(\frac{1}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right)} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}x^n.$$

En combinant les calculs qui précèdent, on écrit pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\alpha}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sin\big((n+1)\alpha\big)x^n.$$

Enfin, en intégrant ce développement en série entière sur $\left]-1\,;1\right[$ avec la constante d'intégration $f(0) = \alpha/2$, on peut conclure [1]

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n}x^n \quad\text{avec}\quad x \in \left]-1\,;1\right[.$$

Exercice 21 ** (Une fonction plate en 0)

Soit $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$.

(a) Justifier que l'on peut prolonger f par continuité en 0.

On note encore f le prolongement obtenu. Cette fonction est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles $\left]-\infty\,;0\right[$ et $\left]0\,;+\infty\right[$.

(b) Observer que, pour tout naturel n, il existe un polynôme réel P_n, tel que

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2} \quad\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*.$$

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Observer que f n'est pas développable en série entière [2] en 0.

1. Il est aussi possible de donner un sens à cette identité en $x=-1$ voire en $x=1$ ce qui permet de calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n} = \frac{\pi-\alpha}{2}$ pour $\alpha \in \left]0\,;\pi\right[$.
2. La fonction f est un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ non développable en série entière.

Solution

(a) Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures ou inférieures, $-1/x^2$ tend vers $-\infty$ et donc $f(x)$ tend vers 0 par composition de limites. On peut alors prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

(b) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

La propriété voulue est immédiate pour $n = 0$ en prenant le polynôme constant $P_0 = 1$.

Supposons la propriété vérifiée à un rang $n \geqslant 0$. Puisque $f^{(n+1)}$ est la dérivée de $f^{(n)}$, on obtient par dérivation d'un produit et de fonctions composées

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

Le polynôme $P_{n+1} = -X^2P_n' + 2X^3P_n \in \mathbb{R}[X]$ permet alors d'écrire

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

La récurrence est établie.

(c) **méthode**

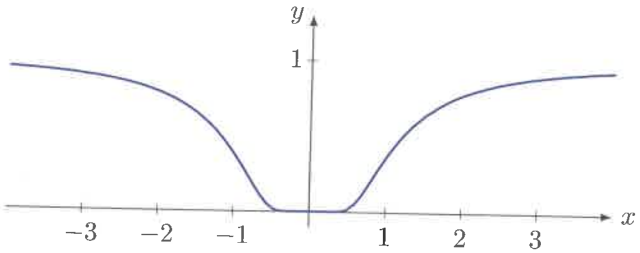
‖ On raisonne par « limite de la dérivée ».

Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, $X = 1/x$ tend vers $+\infty$ et par croissances comparées

$$f^{(n)}(x) = P_n(X)\mathrm{e}^{-X^2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

On obtient la même limite en 0 par valeurs inférieures.

Par application répétée du théorème du prolongement $\mathcal{C}^n$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses nombres dérivés successifs en 0 sont nuls.



(d) Par l'absurde, si f est développable en série entière en 0, il existe $r > 0$ tel que f est égale à la somme de sa série de Taylor sur $]-r\,;r[$ (Th. 17 p. 363) :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 \quad \text{pour tout } x \in\ ]-r\,;r[.$$

C'est absurde car $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} > 0$ pour x non nul !

Exercice 22 **

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Former le développement en série entière de f sur $\mathbb{R}$ en opérant à un produit de développements en série entière.

(b) Calculer de nouveau ce développement en introduisant une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f.

(c) En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Solution

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on sait par la série exponentielle

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}.$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$. On a donc par intégration de série entière

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}t^{2n}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{1}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument et donc, par produit de Cauchy [1],

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}c_n \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k.$$

En reprenant les expressions définissant a_n et b_n, on obtient

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{n-k}x^{2(n-k)}}{(n-k)!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{n-k}}{2k+1}\cdot\frac{1}{(n-k)!k!}\right)x^{2n+1}.$$

Ainsi, on peut écrire pour tout x réel le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}d_nx^{2n+1} \quad \text{avec} \quad d_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{n-k}}{2k+1}\cdot\frac{1}{(n-k)!k!}\right).$$

1. Il est ici plus commode d'effectuer un produit de Cauchy de séries numériques plutôt qu'un produit de séries entières.

(b) La fonction f est le produit d'une fonction dérivable par une fonction qui exprime une primitive. Elle est donc dérivable avec pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x^2} \times \mathrm{e}^{x^2} = -2xf(x) + 1.$$

La fonction f apparaît solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

méthode

> Plutôt que de démontrer à nouveau que f est développable en série entière exploitons le résultat précédent pour affirmer que ce développement existe et qu'il s'exprime avec des puissances impaires de la variable.

On peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{2n+1} \quad \text{avec} \quad d_n \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit alors d'exploiter l'équation différentielle pour exprimer différemment les coefficients d_n.

Par dérivation de développement série entière [1]

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) d_n x^{2n}.$$

En injectant ces expressions dans l'équation différentielle, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) d_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2d_n x^{2n+2} = 1.$$

On opère un décalage d'indice sur la deuxième somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) d_n x^{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2d_{n-1} x^{2n} = 1.$$

On isole le terme initial de la première somme afin de pouvoir combiner les deux sommes en une seule

$$d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((2n+1)d_n + 2d_{n-1}\big) x^{2n} = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière on peut affirmer

$$d_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (2n+1)d_n + 2d_{n-1} = 0.$$

1. Lors de cette dérivation, il ne faut pas faire disparaître le premier terme de la somme : le premier terme de la somme disparaît lors d'une dérivation uniquement lorsqu'il est constant !

On en déduit

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{(-2)}{2n+1} d_{n-1} = \frac{(-2)}{2n+1} \cdot \frac{(-2)}{2n-1} d_{n-2} \\ &= \frac{(-2)}{2n+1} \times \frac{(-2)}{2n-1} \times \cdots \times \frac{(-2)}{3} d_0. \end{aligned}$$

En exprimant, les produits des entiers impairs à l'aide de nombres factoriels [1], on conclut

$$d_n = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}.$$

(c) L'identification [2] des deux expressions de d_n donne

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)} \cdot \frac{1}{(n-k)!k!} \right) = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}.$$

On peut réorganiser en

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} \right) = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n}{(2n+1)} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

En reconnaissant les coefficients binomiaux apparaissant dans les deux membres, on obtient la relation voulue

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Exercice 23 ***

Soit (a_n) une suite réelle bornée.

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum \frac{a_n}{n!} x^n.$$

On note S la fonction somme de cette série entière.

(b) On suppose que la suite (a_n) converge vers un réel ℓ. Étudier

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} S(x).$$

1. Voir méthode p. 19.
2. Cette identification est possible par unicité des coefficients d'un développement en série entière sur un intervalle $]-r\,;r[$ avec $r > 0$.

Solution

(a) La suite (a_n) n'est pas suffisamment concrète pour que la règle de d'Alembert soit utile. On raisonne par comparaison. La suite (a_n) étant bornée, on peut écrire

$$\frac{a_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n!}\right).$$

La série exponentielle étant de rayon de convergence $+\infty$, par comparaison de rayons de convergence (Th. 5 p. 358), on conclut $R = +\infty$.

(b) **méthode**

> L'étude du cas particulier $(a_n) = (1)$ permet d'avoir l'intuition que la limite attendue vaut ℓ. On étudie alors la différence « en rapprochant ce qui se ressemble ».

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{-x}S(x) - \ell = \mathrm{e}^{-x}\big(S(x) - \ell\mathrm{e}^{x}\big) = \mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n-\ell}{n!}x^n\right).$$

méthode

> Pour résoudre cette limite, on raisonne en 2ε en découpant la somme afin de traduire la convergence de a_n vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Pour $x \geqslant 0$, on peut séparer la somme en deux

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{-x}S(x) - \ell\right| &\leqslant \mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{|a_n-\ell|}{n!}x^n + \sum_{n=N}^{+\infty}\frac{|a_n-\ell|}{n!}x^n\right)\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{|a_n-\ell|}{n!}x^n + \sum_{n=N}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{n!}x^n\right).\end{aligned}$$

D'une part,

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{n!}x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{n!}x^n \leqslant \varepsilon\mathrm{e}^{x}.$$

D'autre part, un polynôme est négligeable devant l'exponentielle en l'infini

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{|a_n-\ell|}{n!}x^n \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(\mathrm{e}^{x}\big).$$

Pour x assez grand, on peut alors écrire

$$\left|\mathrm{e}^{-x}S(x) - \ell\right| \leqslant \mathrm{e}^{-x}\big(\varepsilon\mathrm{e}^{x} + \varepsilon\mathrm{e}^{x}\big) = 2\varepsilon.$$

Ainsi,

$$\mathrm{e}^{-x}S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

Exercice 24 * (Fonctions absolument monotones)**

Soit $a > 0$ et $f :]-a\,;a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-a\,;a[,\quad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

(a) Soit $x \in]-a\,;a[$ et un réel r vérifiant $|x| < r < a$. Montrer

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \left|\frac{x}{r}\right|^{n+1} f(r).$$

(b) En déduire que f est développable en série entière sur $]-a\,;a[$.

(c) Montrer que $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$.

Solution

(a) **méthode**

> Le premier membre peut être exprimé par la formule de Taylor avec reste intégral.

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on peut écrire

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

méthode

> Le changement de variable affine $t = xu$ permet d'exprimer le reste intégral par une intégrale sur l'intervalle fixe $[0\,;1]$.

On obtient

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u.$$

Puisque $x \leqslant |x| \leqslant r$, on a $xu \leqslant ru$ pour tout $u \in [0\,;1]$ puis

$$0 \leqslant f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(ru)$$

car la fonction $f^{(n+1)}$ est croissante puisque de dérivée $f^{(n+2)} \geqslant 0$.

Par intégration en bon ordre de cette inégalité, on obtient

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru)\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| &\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n\left|f^{(n+1)}(xu)\right|\mathrm{d}u\\ &\leqslant \left|\frac{x}{r}\right|^{n+1}\times\frac{r^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru)\,\mathrm{d}u\\ &\leqslant \left|\frac{x}{r}\right|^{n+1}\underbrace{\left(f(r)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}r^k\right)}_{\geqslant 0}\leqslant\left|\frac{x}{r}\right|^{n+1}f(r)\end{aligned}$$

(b) Puisque $|x/r|<1$, le terme géométrique $|x/r|^{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et la majoration précédente donne

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Ainsi, la fonction f est développable en série entière sur $]-a\,;a[$ car y est égale à la somme de sa série de Taylor.

(c) **méthode**

> On commence par vérifier que la fonction tan vérifie « un peu » les hypothèses en cours.

Pour $x\in\,]-\pi/2\,;\pi/2[$, posons $f(x)=\tan x$. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, montrons

$$f^{(n)}(x)=P_n(\tan x)$$

avec P_n un polynôme réel à coefficients positifs.

Pour $n=0$, la propriété est immédiate avec $P_n=X$.

Supposons la propriété vraie au rang $n\geqslant 0$. Par dérivation de fonctions composées

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(P_n(\tan x)\big)=\big(1+\tan^2 x\big)P_n'(\tan x).$$

Le polynôme $P_{n+1}=(1+X^2)P_n'$ est alors solution car convenable et à coefficients positifs.

La récurrence est établie.

On en déduit alors que $f^{(n)}(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in[0\,;\pi/2[$ car $f^{(n)}(x)$ apparaît comme la valeur sur un réel positif d'un polynôme à coefficients positifs.

méthode

> L'étude qui précède peut être reprise sur l'intervalle $[0\,;\pi/2[$. On généralisera à $]-\pi/2\,;\pi/2[$ par un argument de parité.

En reprenant l'étude qui précède, on obtient

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\quad\text{pour tout } x\in[0\,;\pi/2[$$

avec, par convergence, un rayon R au moins[1] égal à $\pi/2$ pour la série entière exprimant le second membre.

Par imparité de la fonction f, on a $f^{(2p)}(0)=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ et l'on peut simplifier la relation précédente

$$f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{f^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}\quad\text{pour tout } x\in[0\,;\pi/2[.$$

Les deux membres de cette identité correspondent à des fonctions impaires, l'identité[2] est donc encore valable pour tout $x\in\,]-\pi/2\,;\pi/2[$.

9.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 25 **

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et la fonction $f\colon x\mapsto\cos(2\alpha\arcsin x)$ définie sur $[-1\,;1]$.

(a) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.

(b) En déduire le développement en série entière de f sur $]-1\,;1[$.

Solution

(a) Par composition, la fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$. Par dérivation de fonctions composées, on a pour tout $x\in\,]-1\,;1[$

$$f'(x)=-2\alpha\frac{\sin(2\alpha\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\quad\text{et}$$

$$f''(x)=-(2\alpha)^2\frac{\cos(2\alpha\arcsin x)}{1-x^2}-2\alpha\times\frac{(-1)}{2}\cdot\frac{-2x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\sin(2\alpha\arcsin x).$$

On constate alors que f est solution sur $]-1\,;1[$ de l'équation différentielle linéaire

$$(1-x^2)y''-xy'+(2\alpha)^2y=0.$$

(b) La fonction f vérifie aussi les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

1. Le rayon R est en fait exactement égal à $\pi/2$. En effet, si par l'absurde $R>\pi/2$, il est possible de prolonger la fonction tangente par continuité en $\pi/2$!

2. Dans le sujet 27 p. 402 on détermine la suite des coefficients de ce développement en série entière.

méthode

Le théorème de Cauchy (Th. 6 p. 412) assure que l'équation différentielle étudiée possède une unique solution sur $]-1\,;1[$ vérifiant les conditions initiales données. Pour déterminer le développement en série entière de f, nous allons, par analyse-synthèse, rechercher les fonctions sommes de séries entières[1] vérifiant l'équation différentielle et les conditions initiales.

Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. On suppose que S est solution sur $]-R\,;R[$ de l'équation différentielle proposée et vérifie les conditions initiales $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

Pour tout $x \in\,]-R\,;R[$, on sait

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et}$$
$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

En injectant ces expressions dans la relation

$$(1-x^2)S''(x) - xS'(x) + (2\alpha)^2 S(x) = 0$$

de sorte que les sommes s'expriment toutes en fonction de x^n, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + (2\alpha)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

En adjoignant des termes nuls, on peut faire commencer toutes les sommes du rang 0 et les combiner en une seule

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2} - \big(n^2 - (2\alpha)^2\big)a_n\Big)x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un développement série entière, la relation ci-dessus est vraie sur $]-1\,;1[$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - \big(n^2 - (2\alpha)^2\big)a_n = 0.$$

Au surplus, les conditions initiales $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$ déterminent les valeurs $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. On en déduit $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et

$$a_{2p} = \frac{(2p-2)^2 - (2\alpha)^2}{2p(2p-1)} \times \frac{(2p-4)^2-(2\alpha)^2}{(2p-2)(2p-3)} \times \cdots \times \frac{0-(2\alpha)^2}{2\times 1}a_0$$
$$= \frac{1}{(2p)!}\prod_{k=0}^{p-1}\big((2k)^2 - (2\alpha)^2\big) = \frac{2^{2p}}{(2p)!}\prod_{k=0}^{p-1}\big((k-\alpha)(k+\alpha)\big).$$

1. La fonction f étant paire, on pourrait se limiter aux séries entières $\sum a_n x^{2n}$ afin d'alléger un peu les calculs.

Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients proposés ci-dessus.

Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{Z}$, la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang et la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R = +\infty$.

Dans le cas où $\alpha \notin \mathbb{Z}$, pour $x \neq 0$ et $u_p(x) = a_{2p}x^{2p}$, on constate $u_p(x) \neq 0$ et

$$\left|\frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = \left|\frac{a_{2p+2}}{a_{2p}}\right||x|^2 = \left|\frac{(2p)^2-(2\alpha)^2}{(2p+2)(2p+1)}\right||x|^2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} |x|^2.$$

La série entière $\sum a_n x^n$ est alors de rayon de convergence $R = 1$.

Dans les deux cas, le rayon de convergence est au moins égal à 1 et les calculs de l'analyse peuvent être repris sur l'intervalle $]-1\,;1[$ pour affirmer que la fonction somme de cette série entière est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0.$$

Au surplus, elle vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Par unicité des solutions à un tel problème de Cauchy, on peut conclure que f est égale à la somme de cette série entière sur $]-1\,;1[$:

$$\cos(2\alpha \arcsin x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^{2p}}{(2p)!}\prod_{k=0}^{p-1}\Big((k-\alpha)(k+\alpha)\Big)x^{2p} \quad \text{pour tout } x \in\,]-1\,;1[$$

Exercice 26 **

On considère la suite récurrente (a_n) définie par

$$a_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(1+a_n).$$

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

(b) Étudier la convergence et la continuité de $\sum a_n x^n$ en $x = -R$.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}.$$

(d) En déduire

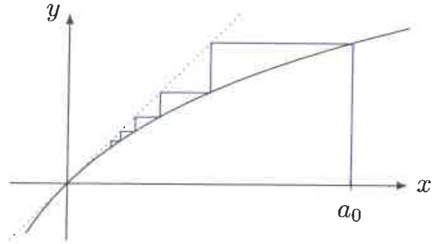
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

(e) Donner un équivalent en R^- de la somme de la série entière.

Solution

(a) Commençons par une brève étude de la suite (a_n). On sait $\ln(1+x) > 0$ pour tout $x > 0$. La suite (a_n) est donc bien définie et ses termes sont strictement positifs. De plus, on connaît l'inégalité classique $\ln(1+x) \leqslant x$ (valable pour tout $x > -1$) et l'on en déduit la décroissance de la suite (a_n) :

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \leqslant a_n.$$



La suite (a_n) étant décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$. En passant à la limite dans la relation $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$, on obtient l'équation $\ell = \ln(1+\ell)$ dont $\ell = 0$ est la seule solution. Finalement, la suite (a_n) tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Déterminons maintenant le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$. Pour x un réel non nul

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n}|x| = \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}|x|.$$

Sachant (a_n) de limite nulle, on a $\ln(1+a_n) \sim a_n$ quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{a_n}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

Le rayon de convergence cherché est donc $R = 1$.

(b) Pour $x = -1$, la série numérique $\sum(-1)^n a_n$ converge car c'est une série alternée (puisque $a_n > 0$) dont la valeur absolue décroît vers 0.

Pour étudier la continuité en -1, on introduit les fonctions u_n données par

$$u_n(x) = a_n x^n \quad \text{pour tout } x \in [-1\,;0].$$

Pour chaque $x \in [-1\,;0]$, la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. On peut donc borner son reste $R_n(x)$ par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant a_{n+1}|x^{n+1}| \leqslant a_{n+1}.$$

Ce majorant uniforme étant de limite nulle, il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur l'intervalle $[-1\,;0]$. Les fonctions sommées étant toutes continues, on peut affirmer que la somme de la série entière est continue en -1.

(c) **méthode**

> On détermine un équivalent de a_n en reproduisant la démonstration du lemme de l'escalier [1] appliqué à la suite des $1/a_n$.

1. Voir sujet 17 p. 29.

La suite (a_n) étant de limite nulle, on peut écrire le développement limité

$$\ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{=} a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2).$$

En réduisant au même dénominateur

$$u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n a_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)}{a_n(a_n + o(a_n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

(d) La série de terme général $1/2$ est une série à termes positifs divergente. Par sommation de relation de comparaison (Th. 6 p. 7)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Par télescopage, on peut exprimer la somme du premier membre et affirmer

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}.$$

Enfin, sachant a_0 constant, on conclut

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

(e) **méthode**

> On décompose la somme de la série entière en écrivant
>
> $$a_n = \frac{2}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Soit $x \in [0\,;1[$. Avec les convergences absolues des séries engagées, on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}x^n.$$

D'une part,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}x^n = -2\ln(1-x).$$

D'autre part, si l'on introduit $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout n supérieur à N et alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}x^n\right| &\leqslant \sum_{n=1}^{N-1}\frac{|\varepsilon_n|}{n}x^n + \sum_{n=N}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{n}x^n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N-1}\frac{|\varepsilon_n|}{n}x^n + \varepsilon|\ln(1-x)|.\end{aligned}$$

Le premier terme de la somme majorante possède une limite finie quand x tend vers 1^- alors que $\ln(1-x)$ y est de limite infinie. Il existe donc un voisinage de 1^- sur lequel

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{|\varepsilon_n|}{n} x^n \leqslant \varepsilon \left|\ln(1-x)\right|$$

puis

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n\right| \leqslant 2\varepsilon \left|\ln(1-x)\right|.$$

Cette étude permet d'affirmer la comparaison asymptotique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n \underset{x\to1^-}{=} \mathrm{o}\big(\ln(1-x)\big)$$

et l'on peut conclure

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to1^-}{=} -2\ln(1-x) + \mathrm{o}\big(\ln(1-x)\big) \underset{x\to1^-}{\sim} -2\ln(1-x).$$

Exercice 27 ** (Développement en série entière de la fonction tangente)

Soit (a_n) la suite réelle déterminée par $a_0 = 1$ et la condition

$$a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \tag{$*$}$$

(a) Calculer a_1, a_2, a_3.

(b) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est au moins égal à 1.

(c) Établir que pour tout $|z| < R$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{\mathrm{e}^z + 1}.$$

(d) En déduire l'expression du développement en série entière de la fonction tan sur l'intervalle $]-R/2\,;R/2[$ en fonction des termes de la suite (a_n).

Solution

(a) La condition $(*)$ peut être résolue en

$$a_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}. \tag{$**$}$$

On peut alors calculer successivement les premières valeurs de la suite à partir de $a_0 = 1$. On obtient $a_1 = -1/2$, $a_2 = 0$ et $a_3 = 1/24$.

(b) **méthode**

‖ On montre que la suite (a_n) est bornée.

Par récurrence forte, vérifions $|a_n| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, la propriété est bien vérifiée.

Supposons la propriété vérifiée jusqu'au rang $n \geqslant 0$. En appliquant l'inégalité triangulaire à la relation $(**)$ on obtient

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n-k}|}{k!} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}}_{=\mathrm{e}-1} = \frac{\mathrm{e}-1}{2} \leqslant 1.$$

La récurrence est établie.

En revenant à la définition du rayon de convergence comme borne supérieure, on peut affirmer $R \geqslant 1$.

(c) **méthode**

‖ On simplifie le produit de la série entière par $(1 + \mathrm{e}^z)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$.

$$(1+\mathrm{e}^z)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right).$$

Par produit de séries entières

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{e}^z)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) z^n \\ &= 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left(a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right)}_{=0} z^n = 2.\end{aligned}$$

Le produit étant non nul, on peut affirmer $1 + \mathrm{e}^z \neq 0$ et écrire, pour tout complexe z tel que $|z| < R$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{\mathrm{e}^z + 1} \quad \text{avec} \quad R \leqslant \pi.$$

(d) Pour $x \in \left]-R/2\,;R/2\right[\subset \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, on a $|2\mathrm{i}x| < R$ et

$$\begin{aligned}\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1)}\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1}\right) = -\frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(2\mathrm{i})^n x^n.\end{aligned}$$

Puisque la fonction tan est impaire, les coefficients des puissances paires de x sont nécessairement nuls : $a_{2p} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On peut donc simplifier les termes correspondants de la somme et écrire [1]

$$\tan x = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p+1}2^{2p+1}a_{2p+1}x^{2p+1}.$$

Exercice 28 ***

Une *involution* sur un ensemble E est une application $f\colon E \to E$ vérifiant $f\circ f = \mathrm{Id}_E$. Pour $n \geqslant 1$, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1\,;n]\!]$. On convient : $I_0 = 1$.

(a) Montrer $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

(b) Montrer la convergence pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$ de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{I_n}{n!}x^n.$$

On note $S(x)$ sa somme.

(c) Montrer, pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, que $S'(x) = (1+x)S(x)$.

(d) En déduire une expression de $S(x)$, puis les relations, pour tout p naturel,

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p}\frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2p}{2k} \quad\text{et}\quad I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p}\frac{(2k)!}{2^k k!}\binom{2p+1}{2k}.$$

Solution

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

méthode

On dénombre les involutions de $[\![1\,;n]\!]$ en discutant selon que la valeur n est ou non invariante.

Une involution sur $[\![1\,;n]\!]$ fixant l'élément n est entièrement déterminée par sa restriction à $[\![1\,;n-1]\!]$ qui est aussi une involution. Il y en a exactement I_{n-1}.

Une involution sur $[\![1\,;n]\!]$ ne fixant pas l'élément n l'échange avec un autre élément a de $[\![1\,;n-1]\!]$. Il y a $n-1$ valeurs possibles pour le choix de cet élément a. L'involution alors obtenue envoyant n sur a et a sur n est entièrement déterminée par sa restriction sur $[\![1\,;n]\!]\setminus\{a,n\}$ qui est aussi une involution. Il y a au total $(n-1)I_{n-2}$ involutions de $[\![1\,;n]\!]$ ne fixant pas n.

1. Il est aussi possible de poursuivre l'étude afin d'établir $R = \pi$.

Au final, on obtient

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}. \qquad (*)$$

(b) Une involution est en particulier une bijection. Il y a exactement $n!$ bijections de l'ensemble $[\![1\,;n]\!]$ vers lui-même. On a donc $0 \leqslant I_n \leqslant n!$ ce qui permet d'écrire $I_n/n! = \mathrm{O}(1)$ quand n tend vers l'infini. La série entière $\sum 1\times z^n$ étant de rayon de convergence 1, le rayon de convergence de la série entière introduite est supérieur à 1 et celle-ci converge au moins sur $\left]-1\,;1\right[$.

(c) Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$.

D'une part, par dérivation de série entière

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n+1}}{n!}x^n \quad\text{car}\quad I_1 = 1.$$

D'autre part, en opérant un glissement d'indice,

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n.$$

On isole le terme initial de la première somme et l'on combine les deux sommes

$$(1+x)S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n + nI_{n-1}}{n!}x^n.$$

En vertu de la relation de récurrence $(*)$

$$(1+x)S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n+1}}{n!}x^n$$

et l'on peut conclure $(1+x)S(x) = S'(x)$.

(d) Sachant $S(0) = I_0 = 1$, la résolution de cette équation différentielle linéaire sur l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$ donne

$$S(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{e}^x.$$

En décomposant en série entière les exponentielles

$$S(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right).$$

Lorsque l'on développe par produit de Cauchy ce produit de séries absolument convergentes, le coefficient de x^{2p} est obtenu à partir des coefficients de x^{2k} de la première somme et du coefficient de x^{2p-2k} de la seconde. Ainsi,

$$\frac{I_{2p}}{(2p)!} = \sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{1}{(2p-2k)!} \right)$$

et l'on obtient

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{2p}{2k}.$$

On vérifie de même en étudiant le coefficient de x^{2p+1}

$$I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{2p+1}{2k}.$$

Exercice 29 **

Établir que la fonction

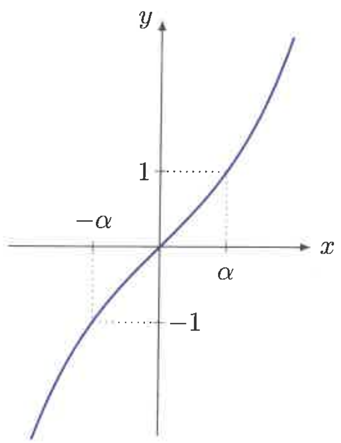
$$x \mapsto \frac{1}{1 - \operatorname{sh} x}$$

est développable en série entière en 0.

Solution

La fonction sh réalise une bijection impaire strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Il existe donc un unique réel α vérifiant [1] $\operatorname{sh} \alpha = 1$, celui-ci est strictement positif et l'on a la propriété

$$\forall x \in \left]-\alpha\,;\alpha\right[, \quad -1 < \operatorname{sh} x < 1.$$



Introduisons la fonction f définie sur $\left]-\infty\,;\alpha\right[$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sh} x}.$$

Pour $x \in \left]-\alpha\,;\alpha\right[$, on a $|\operatorname{sh} x| < 1$ et l'on peut donc écrire par sommation géométrique

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sh} x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}^n x.$$

méthode

On développe en série entière les termes $\operatorname{sh}^n x$ puis on échange les sommes écrites.

1. Il est possible de résoudre l'équation $\operatorname{sh} \alpha = 1$ qui s'écrit encore $e^{2\alpha} - 2e^{\alpha} - 1 = 0$. On obtient $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$.

Par produit de fonctions développables en série entière, la fonction $x \mapsto \operatorname{sh}^n x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. De plus, le développement de $\operatorname{sh} x$ s'exprimant avec des coefficients positifs, il en est de même du développement de $\operatorname{sh}^n x$. Enfin, le développement de $\operatorname{sh} x$ s'amorçant par un x, celui de $\operatorname{sh}^n x$ commence par x^n. Il existe donc une suite de réels positifs $(a_{n,k})_{k \geqslant n}$ telle que, pour tout réel x,

$$\operatorname{sh}^n x = \sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k.$$

On peut alors écrire, avec convergence des séries engagées,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k \right).$$

Considérons alors $x \in \left]-\alpha\,;\alpha\right[$. La famille $\left(a_{n,k} x^k\right)_{n,k}$ est sommable car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \left| a_{n,k} x^k \right| \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} \, |x|^k \right) = \frac{1}{1 - \operatorname{sh}|x|} < +\infty.$$

À l'aide d'une sommation par paquets, il est possible de réorganiser la somme pour écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} a_{n,k} \right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

Ainsi, la fonction f apparaît comme la somme d'une série entière sur $\left]-\alpha\,;\alpha\right[$. Le rayon de convergence de cette série entière est au moins égal à α et même exactement égal à α car la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers α par valeurs inférieures.

Exercice 30 ***

Soit une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ continue sur le disque fermé

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \leqslant 1 \right\}.$$

On suppose que la restriction de f au départ du disque ouvert

$$D^\circ = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$$

est la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers f sur le disque fermé D.

Solution

méthode

La série entière converge uniformément sur tout compact [1] inclus dans D° : on peut approcher uniformément la fonction par des polynômes sur ces compacts. Par uniforme continuité, on étend l'approximation au domaine D.

Introduisons $\varepsilon > 0$. Le disque fermé D est une partie compacte de $\mathbb{C}$, la fonction f y est continue et donc uniformément continue. Ainsi, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (z,z') \in D^2, \quad |z - z'| \leqslant \alpha \implies \left|f(z) - f(z')\right| \leqslant \varepsilon.$$

Considérons alors $r = 1 - \alpha$ et la fonction g_r définie sur D par $g_r(z) = f(rz)$. Pour tout z appartenant à D, on a $|z - rz| = \alpha |z| \leqslant \alpha$ et donc $\left|f(z) - g_r(z)\right| \leqslant \varepsilon$.

Puisque la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément vers f sur tout disque fermé inclus dans D°, cette convergence uniforme a notamment lieu sur $D_r = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\right\}$. Il existe donc un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout $z \in D_r$

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \leqslant \varepsilon.$$

Par substitution, il vient pour tout $z \in D$ et tout $n \geqslant N$

$$\left|g_r(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k r^k z^k\right| \leqslant \varepsilon.$$

En considérant en particulier le polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ déterminé par

$$P = \sum_{k=0}^{N} a_k r^k X^k$$

on vérifie pour tout $z \in D$

$$\left|f(z) - P(z)\right| \leqslant \left|f(z) - g_r(z)\right| + \left|g_r(z) - P(z)\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

En faisant varier ε avec un rang n (par exemple $\varepsilon = 1/n$), ce qui précède permet de déterminer une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur D.

1. Un tel compact peut être inclus dans un disque fermé lui-même inclus dans D°. On sait la convergence normale d'une série entière sur ce type de disques.

CHAPITRE 10

Équations différentielles

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un naturel non nul.

10.1 Systèmes différentiels

Soit

$$A\colon \begin{cases} I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t \mapsto A(t) = \left(a_{i,j}(t)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \end{cases} \quad \text{et} \quad B\colon \begin{cases} I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto B(t) = \left(b_i(t)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \end{cases}$$

des fonctions continues définies sur I et à valeurs matricielles.

Définition

On appelle solution du *système différentiel de taille n* symbolisé par l'équation

$$(\Sigma)\colon X' = A(t)X + B(t)$$

toute fonction $X\colon I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable et vérifiant

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

En identifiant la fonction inconnue $t \mapsto X(t)$ avec la fonction $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, le système différentiel (Σ) est usuellement visualisé sous la forme suivante :

$$(\Sigma):\begin{cases} x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \cdots + a_{2,n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t). \end{cases}$$

Définition

Lorsque la fonction $t \mapsto A(t)$ est constante (ou ce qui revient au même, lorsque toutes les fonctions $t \mapsto a_{i,j}(t)$ sont constantes), on dit que le système différentiel est un *système différentiel à coefficients constants.* Il s'écrit alors

$$(\Sigma)\colon X' = AX + B(t).$$

La pratique se limite essentiellement aux systèmes différentiels à coefficients constants de tailles $n = 2$ et $n = 3$.

10.1.1 Problème et théorème de Cauchy

Définition

Résoudre un *problème de Cauchy* associé au système différentiel (Σ) consiste à chercher, parmi ses solutions, celles vérifiant une *condition initiale*

$$X(t_0) = X_0$$

pour $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ préalablement choisis.

Théorème 1

Soit $A\colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B\colon I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux fonctions continues.
Pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Soulignons que ce résultat n'est applicable que si les fonctions A et B sont continues sur un intervalle.

10.1.2 Description de l'ensemble des solutions

Définition

Le système différentiel

$$(\Sigma_h)\colon X' = A(t)X$$

est appelé *système différentiel homogène* associé au système différentiel (Σ).

Théorème 2

L'ensemble des solutions du système différentiel homogène (Σ_h) de taille n est un sous-espace vectoriel de dimension n de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
De plus, si t_0 désigne un élément de I, l'application qui à une solution X associe la valeur $X(t_0)$ réalise un isomorphisme entre l'espace des solutions et l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de l'espace des solutions de (Σ_h), la solution générale X_h du système homogène s'exprime

$$X_h(t) = \lambda_1 X_1(t) + \cdots + \lambda_n X_n(t) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Théorème 3

Si X_p désigne une solution particulière du système différentiel (Σ), la solution générale de ce système est de la forme

$$X(t) = X_p(t) + X_h(t)$$

avec X_h solution générale du système différentiel homogène (Σ_h).

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de l'espace des solutions du système homogène, la solution générale de l'équation complète s'écrit

$$X(t) = X_p(t) + \lambda_1 X_1(t) + \cdots + \lambda_n X_n(t) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

10.1.3 Méthode de la variation des constantes

Théorème 4

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ désigne une base de l'espace des solutions du système homogène (Σ_h), on peut trouver une solution particulière du système différentiel (Σ) de la forme

$$X_p(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)X_n(t)$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des fonctions numériques dérivables définies sur I.

Plus précisément, la recherche d'une solution particulière de cette forme conduit à un problème de *quadrature*, c'est-à-dire de détermination de primitives.

10.2 Équations différentielles linéaires scalaires

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ et b des fonctions définies et continues de I vers $\mathbb{K}$.

Définition

On appelle solution de l'*équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n* symbolisée par l'équation

$$(E) \colon x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

toute fonction $x \colon I \to \mathbb{K}$ dérivable n fois et vérifiant

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

En pratique, on se limite aux cas $n = 1$ et $n = 2$ ce qui correspond aux équations (exprimées en la fonction inconnue y) de la forme

$$y' + a(t)y = b(t) \quad \text{et} \quad y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t).$$

Définition

Lorsque les fonctions $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont constantes, on parle d'*équation différentielle à coefficients constants.*

10.2.1 Problème et théorème de Cauchy

Définition

Résoudre un *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle (E) consiste à chercher, parmi ses solutions, celles vérifiant les conditions initiales

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ \dots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

pour $t_0 \in I$ et $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ préalablement choisis.

Théorème 5

Soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \colon I \to \mathbb{K}$ et $b \colon I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
Pour tout $t_0 \in I$ et tout $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \end{cases}$$

En particulier, dans le cas $n = 2$, on obtient :

Théorème 6

Soit $a, b \colon I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues.
Pour tout $t_0 \in I$ et tout $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y_0'. \end{cases}$$

Pour exploiter ces résultats, il est essentiel que les fonctions paramètres soient définies et continues sur un intervalle.

10.2.2 Description de l'ensemble des solutions

Définition

L'équation différentielle

$$(E_h) \colon x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

est appelée *équation homogène associée* à l'équation (E).

Théorème 7

L'ensemble des solutions d'une équation homogène d'ordre n est un sous-espace vectoriel de dimension n de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de I vers $\mathbb{K}$.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de l'espace des solutions de (E_h), la solution générale x_h de l'équation homogène s'exprime

$$x_h(t) = \lambda_1 x_1(t) + \cdots + \lambda_n x_n(t) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Théorème 8

Si x_p est une solution particulière de l'équation (E), la solution générale de cette équation est de la forme

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

avec x_h la solution générale de l'équation (E_h).

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de l'espace des solutions de l'équation homogène, la solution générale de l'équation complète s'écrit

$$x(t) = x_p(t) + \lambda_1 x_1(t) + \cdots + \lambda_n x_n(t) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

10.2.3 Cas des équations d'ordre 2

On étudie l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante exprimée en la fonction inconnue y :

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

avec a, b, c des fonctions définies et continues sur I.
On introduit l'équation homogène associée

$$(E_h) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0.$$

Théorème 9

Si φ et ψ sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène, la solution générale de (E_h) s'exprime

$$y(t) = \lambda\varphi(t) + \mu\psi(t) \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

De plus, si y_p est une solution particulière de l'équation complète, la solution générale de (E) s'écrit

$$y(t) = y_p(t) + \lambda\varphi(t) + \mu\psi(t) \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

Il est fréquent de rechercher[1] les solutions de l'équation homogène (E_h) parmi les fonctions développables en série entière.

Définition

On appelle *wronskien* d'un couple (φ, ψ) de solutions de l'équation homogène (E_h) la fonction $w\colon I \to \mathbb{K}$ définie par

$$w(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Théorème 10

Le wronskien d'un couple (φ, ψ) de solutions de l'équation (E_h) vérifie

$$w'(t) + a(t)w(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Si la famille (φ, ψ) est une base de l'espace des solutions de (E_h), son wronskien ne s'annule pas. Sinon, ce wronskien est la fonction nulle.

Théorème 11 (Méthode de la variation des constantes)

Si φ et ψ sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène (E_h), on peut déterminer une solution particulière y_p de l'équation complète (E) de la forme

$$y_p(t) = \lambda(t)\varphi(t) + \mu(t)\psi(t)$$

avec λ et μ deux fonctions dérivables de I vers $\mathbb{K}$ solutions du système[2] :

$$\begin{cases} \lambda'(t)\varphi(t) + \mu'(t)\psi(t) = 0 \\ \lambda'(t)\varphi'(t) + \mu'(t)\psi'(t) = c(t). \end{cases}$$

1. Sans pour autant être certain d'en trouver...
2. Ce système est de Cramer et détermine $(\lambda'(t), \mu'(t))$ de façon unique.

10.3 Équations différentielles linéaires vectorielles

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit deux fonctions :

$$a\colon \begin{cases} I \to \mathcal{L}(E) \\ t \mapsto a(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad b\colon \begin{cases} I \to E \\ t \mapsto b(t). \end{cases}$$

10.3.1 Présentation

Définition

On appelle solution d'une *équation différentielle vectorielle linéaire* symbolisée par l'équation

$$(E)\colon x' = a(t)(x) + b(t)$$

toute fonction $x\colon I \to E$ dérivable et vérifiant

$$x'(t) = a(t)\big(x(t)\big) + b(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Lorsque l'on introduit une base de l'espace E, l'équation (E) se transpose en le système différentiel $(\Sigma)\colon X' = A(t)X + B(t)$ avec $A(t)$ matrice figurant l'endomorphisme $a(t)$ et $B(t)$ colonne figurant le vecteur $b(t)$.

Définition

Lorsque la fonction $t \mapsto a(t)$ est constante, on parle d'*équation différentielle à coefficient constant.* Celle-ci s'exprime

$$(E)\colon x' = a(x) + b(t) \quad \text{avec} \quad a \text{ endomorphisme de } E.$$

10.3.2 Problème et théorème de Cauchy

Définition

Résoudre un *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle (E) consiste à chercher, parmi ses solutions, celles vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$ pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$ préalablement choisis.

Théorème 12

Soit $a\colon I \to \mathcal{L}(E)$ et $b\colon I \to E$ deux fonctions continues.
Pour tout $t_0 \in I$ et tout $x_0 \in E$, il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

10.3.3 Description de l'ensemble des solutions

Définition

L'équation différentielle $(E_h)\colon x' = a(t)(x)$ est appelée *équation homogène* associée à l'équation (E).

Théorème 13

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de dimension n de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I vers E.

De plus, si t_0 désigne un élément de I, l'application qui à une solution x associe la valeur $x(t_0)$ est un isomorphisme de l'espace des solutions vers E.

Théorème 14

Si x_p désigne une solution particulière de l'équation (E), la solution générale de cette équation est

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

avec x_h solution générale de l'équation homogène (E_h).

10.3.4 Exponentielle d'endomorphisme, exponentielle de matrice

Si a est un endomorphisme de E, la série $\sum \frac{1}{n!}a^n$ converge absolument dans l'espace de dimension finie $\mathcal{L}(E)$.

Définition

On appelle *exponentielle d'un endomorphisme* a de l'espace E l'endomorphisme de E déterminé par la somme :

$$\exp(a) = \mathrm{e}^a \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}a^n.$$

Théorème 15

L'application exponentielle est une application continue de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même.

De plus, pour tous a et $b \in \mathcal{L}(E)$,

$$a \circ b = b \circ a \implies \exp(a+b) = \exp(a) \circ \exp(b).$$

De même, pour A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit l'*exponentielle de la matrice* A la matrice déterminée par la somme

$$\exp(A) = \mathrm{e}^A \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n.$$

L'application $A \mapsto \mathrm{e}^A$ est continue et vérifie, pour tous A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$AB = BA \implies \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

10.3.5 Résolution de l'équation homogène à coefficient constant

Soit a endomorphisme de E. On étudie l'équation différentielle homogène à coefficient constant

$$(E_h)\colon x' = a(x)$$

d'inconnue $x\colon \mathbb{R} \to E$ fonction dérivable.

Théorème 16

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout vecteur x_0 de E, l'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est la fonction $x\colon \mathbb{R} \to E$ déterminée par $x(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)a}(x_0)$.

On peut aussi exprimer ce résultat matriciellement : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la solution au système différentiel $X' = AX$ vérifiant $X(t_0) = X_0$ s'exprime :

$$X(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}X_0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

10.4 Exercices d'apprentissage

Dans les sujets qui suivent, les solutions cherchées sont à valeurs réelles.

10.4.1 Système différentiel

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel

$$(\Sigma)\colon \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = 3x - y. \end{cases}$$

Solution

méthode

On commence par reconnaître le type du système étudié et on l'exprime sous forme matricielle. On peut alors anticiper la description de l'ensemble des solutions.

Le système (Σ) est un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions est un plan vectoriel.

méthode

On réduit la matrice A afin de déterminer un changement d'inconnue simplifiant le système étudié en découplant ses équations.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A = X^2 - 3X + 2$, ses valeurs propres sont 1 et 2 et les sous-espaces propres associés sont

$$E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \quad E_2(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable et l'on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \\ &\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\iff Y' = DY \end{aligned}$$

en introduisant[1] une nouvelle inconnue $Y = P^{-1}X$.

En notant y_1 et y_2 les coefficients de la colonne Y, le nouveau système est immédiat à résoudre car ses équations sont découplées

$$\begin{aligned} Y' = DY &\iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \\ &\iff Y = \begin{pmatrix}\lambda_1 e^t\\ \lambda_2 e^{2t}\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

On peut ensuite exprimer l'inconnue initiale X sachant la relation $X = PY$

$$X' = AX \iff X(t) = \lambda_1 \begin{pmatrix}2e^t\\3e^t\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, la solution générale du système sur $\mathbb{R}$ est

$$\begin{cases} x(t) = 2\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \\ y(t) = 3\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel

$$(\Sigma): \begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 3x - y + 2e^t. \end{cases}$$

1. La matrice P^{-1} ne dépend pas de la variable et donc $(P^{-1}Y)' = P^{-1}Y'$ par dérivation d'un produit matriciel. Le calcul explicite de P^{-1} n'est pas nécessaire lors de cette étude.

Solution

Le système (Σ) est un système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix}4 & -2\\3 & -1\end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix}e^t\\2e^t\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}.$$

méthode

On commence par résoudre l'équation homogène associée puis on détermine une solution particulière avant d'exprimer la solution générale.

L'équation homogène associée $X' = AX$ a été résolue ci-dessus et cela a donné la solution générale

$$X_h(t) = \lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t) \quad \text{avec} \quad X_1(t) = \begin{pmatrix}2e^t\\3e^t\end{pmatrix} \text{ et } X_2(t) = \begin{pmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix}.$$

méthode

Pour trouver une solution particulière, on met en œuvre la méthode de variation des constantes (Th. 4 p. 411).

On cherche une solution particulière X de la forme

$$X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t) \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ fonctions dérivables.}$$

Après quelques calculs

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) + B(t) &\iff \begin{cases} 2\lambda_1'(t)e^t + \lambda_2'(t)e^{2t} = e^t \\ 3\lambda_1'(t)e^t + \lambda_2'(t)e^{2t} = 2e^t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1'(t) = 1 \\ \lambda_2'(t) = -e^{-t}. \end{cases} \end{aligned}$$

Les fonctions λ_1 et λ_2 données par $\lambda_1(t) = t$ et $\lambda_2(t) = e^{-t}$ conviennent[1] et déterminent la solution particulière

$$X(t) = \begin{pmatrix}(2t+1)e^t\\(3t+1)e^t\end{pmatrix}.$$

On peut alors exprimer la solution générale du système (Σ) sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x(t) = (2t+1)e^t + 2\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \\ y(t) = (3t+1)e^t + 3\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Puisque l'objectif se limite à déterminer *une* solution particulière, on choisit les primitives λ_1 et λ_2 parmi celles possibles.

10.4.2 Équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2

Exercice 3
Résoudre sur $I =]0\,;+\infty[$ l'équation

$$(E)\colon t^2y'' + ty' - y = 0$$

en commençant par chercher des fonctions solutions de la forme $y(t) = t^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution

méthode
On commence par reconnaître le type de l'équation différentielle étudiée. On peut alors anticiper la description de l'ensemble des solutions.

L'équation (E) est de la forme $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$ avec a, b, c des fonctions définies et continues sur I. La fonction a ne s'annulant pas sur I, l'équation (E) est équivalente à une équation de la forme[1]

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

avec p et q des fonctions définies et continues sur I. Ainsi, l'équation (E) est équivalente à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 : ses solutions forment un plan vectoriel.

méthode
Il ne s'agit pas d'une équation différentielle à coefficients constants. Introduire une équation caractéristique est hors de contexte ! Pour résoudre cette équation, on recherche deux solutions linéairement indépendantes.

Pour $y\colon t \mapsto t^\alpha$, la fonction y est deux fois dérivable sur I et

$$t^2y''(t) + ty'(t) - y(t) = \alpha(\alpha-1)t^\alpha + \alpha t^\alpha - t^\alpha = (\alpha^2 - 1)t^\alpha.$$

Pour $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$, on obtient $\varphi(t) = t$ et $\psi(t) = 1/t$ solutions de (E). Celles-ci sont linéairement indépendantes et constituent une base du plan vectoriel des solutions.
La solution générale de (E) sur I est donc

$$y(t) = \lambda t + \frac{\mu}{t} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 4
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E)\colon (t^2 + 2t + 2)y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$$

en recherchant des fonctions polynômes solutions.

1. On dit que l'équation est *résolue en* y''.

Solution
L'équation (E) est de la forme $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$ avec a, b et c des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$. La fonction a ne s'annule pas car $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1$. L'équation (E) est donc équivalente à une équation différentielle linéaire scalaire homogène du second ordre : l'ensemble de ses solutions est un plan vectoriel.

méthode
On détermine les fonctions polynômes solutions en raisonnant par coefficients inconnus. On commence par déterminer les degrés possibles.

Soit $y(t) = a_nt^n + \cdots + a_1t + a_0$ une fonction polynôme de degré n ($a_n \neq 0$). En ne s'intéressant qu'au calcul du coefficient de t^n, on a pour tout t réel

$$\begin{aligned}(t^2 + 2t + 2)y''(t) - 2(t+1)y'(t) + 2y(t) &= \big(n(n-1) - 2n + 2\big)a_nt^n + \cdots \\ &= \big(n^2 - 3n + 2\big)a_nt^n + \cdots\end{aligned}$$

Pour que la fonction y puisse être solution, il est nécessaire que le coefficient de t^n dans le calcul précédent soit nul. On en déduit $n = 1$ ou 2 : les fonctions polynômes solutions sont à rechercher parmi celles de degrés inférieurs à 2.
On cherche alors y de la forme $y(t) = at^2 + bt + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à déterminer. Après quelques calculs :

$$(t^2 + 2t + 2)y''(t) - 2(t+1)y'(t) + 2y(t) = 4a - 2b + 2c.$$

On en déduit que la fonction y est solution si, et seulement si, $c = b - 2a$. Ceci signifie que la fonction y s'exprime

$$y(t) = a\big(t^2 - 2\big) + b(t+1) \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On obtient ainsi un plan vectoriel de solutions. Il ne peut alors y en avoir d'autres et ce qui précède exprime toutes les solutions de (E).

Exercice 5
Résoudre sur $I =]-1\,;1[$ l'équation

$$(E)\colon (1 - t^2)y'' - 4ty' - 2y = 0$$

en recherchant des fonctions développables en série entière solutions.

Solution
L'équation (E) est de la forme $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$ avec a, b, c des fonctions définies et continues sur I, la fonction a ne s'annulant pas. L'équation (E) est donc équivalente à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 : l'ensemble de ses solutions est un plan vectoriel.

méthode
Pour déterminer des solutions développables en série entière, on introduit une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On étudie ensuite à quelles conditions sur ses coefficients sa somme est solution de l'équation.

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. La fonction S est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$ avec, pour tout $t \in\,]-R\,;R[$,

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$
$$S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}t^n$$
$$S''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n.$$

On injecte ces expressions dans l'équation (E) en choisissant celles conduisant directement à une même puissance de t

$$\begin{aligned}(1-t^2)&S''(t) - 4tS'(t) - 2S(t)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - t^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 4t\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.\end{aligned}$$

En adjoignant des termes nuls, on peut étendre ces sommes à un domaine d'indexation commun et les combiner en une seule

$$\begin{aligned}(1-t^2)&S''(t) - 4tS'(t) - 2S(t)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\big((n+2)(n+1)(a_{n+2}-a_n)\big)t^n.\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière (Th. 16 p. 362), on obtient que S est solution sur $]-R\,;R[$ de l'équation (E) si, et seulement si, pour tout naturel n,

$$(n+2)(n+1)(a_{n+2}-a_n) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_{n+2} = a_n.$$

La série entière $\sum a_n x^n$ est alors déterminée par les conditions :

$$a_{2p} = a_0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = a_1 \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

méthode

> Inversement, pour pouvoir affirmer qu'une telle série entière définit une solution, il suffit de vérifier que son rayon de convergence est strictement positif. En effet, les calculs qui précèdent, menés par équivalences, ne sont valables que si $R > 0$.

Le rayon de convergence R de la série entière précédente est au moins égale à 1 car ses coefficients constituent une suite bornée [1]. Par les calculs qui précèdent, la fonction S est donc solution sur $]-1\,;1[$ de l'équation (E). Il reste à exprimer celle-ci.

Pour $t \in\,]-1\,;1[$, on peut par convergence absolue et sommation par paquets séparer la somme en deux

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}t^{2p+1} = a_0\sum_{p=0}^{+\infty} t^{2p} + a_1\sum_{p=0}^{+\infty} t^{2p+1} = \frac{a_0 + a_1 t}{1-t^2}.$$

On obtient ainsi un plan vectoriel de solutions et il ne peut alors y en avoir d'autres. La solution générale de (E) sur $]-1\,;1[$ s'exprime

$$y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{1-t^2} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 6

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E)\colon y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}.$$

Solution

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ de racine double 1. La solution générale de l'équation homogène s'exprime

$$y_h(t) = (\lambda + \mu t)\mathrm{e}^t \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Il reste à déterminer une solution particulière. Lorsque le second membre est de la forme $\mathrm{e}^{\alpha t}$, $\cos(\alpha t)$ ou $\sin(\alpha t)$, il a été vu en première année des techniques efficaces pour calculer une solution particulière. Ici, le second membre n'est pas de cette forme.

méthode

> On met en place la méthode de variations des constantes (Th. 11 p. 414).

Les fonctions φ et ψ données par $\varphi(t) = \mathrm{e}^t$ et $\psi(t) = t\mathrm{e}^t$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène. On obtient une solution particulière y_p de l'équation (E) de la forme

$$y_p(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^t + \mu(t)t\mathrm{e}^t$$

en prenant λ et μ des fonctions dérivables vérifiant pour tout t réel le système

$$\begin{cases}\lambda'(t)\mathrm{e}^t + \mu'(t)t\mathrm{e}^t &= 0\\ \lambda'(t)\mathrm{e}^t + \mu'(t)(t+1)\mathrm{e}^t &= \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}.\end{cases}$$

1. Le rayon de convergence est exactement 1 si a_0 ou a_1 est non nul et $+\infty$ sinon car il s'agit alors de la série entière nulle.

Après résolution, on parvient à

$$\lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \mu'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Les fonctions suivantes conviennent [1]

$$\lambda\colon t \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) \quad \text{et} \quad \mu\colon t \mapsto \arctan t.$$

On obtient alors la solution particulière

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{e}^t + t\arctan(t)\mathrm{e}^t$$

et l'on peut exprimer la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{e}^t + t\arctan(t)\mathrm{e}^t + (\lambda+\mu t)\mathrm{e}^t \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

10.5 Exercices d'entraînement

Dans les sujets qui suivent, les solutions cherchées sont à valeurs réelles.

10.5.1 Système différentiel

Exercice 7 *

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel

$$(\Sigma)\colon \begin{cases} x'' = 3x + y \\ y'' = 2x + 2y. \end{cases}$$

Solution

méthode

On adapte au contexte la démarche de résolution des systèmes différentiels d'équation $X' = AX$.

Le système (Σ) s'exprime matriciellement sous la forme $X'' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A = X^2 - 5X + 4$, ses valeurs propres sont 1 et 4 et les sous-espaces propres associés sont

$$E_1(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. L'objectif est de déterminer *une* solution particulière et non toutes les solutions : pour cette raison, on se contente de trouver une solution convenable.

La matrice A est diagonalisable et l'on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'équation $X'' = AX$ est alors équivalente à l'équation $Y'' = DY$ avec $Y = P^{-1}X$. En notant y_1 et y_2 les coefficients de la colonne Y

$$\begin{aligned} Y'' = DY &\iff \begin{cases} y_1'' = y_1 \\ y_2'' = 4y_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1\mathrm{e}^t + \mu_1\mathrm{e}^{-t} \\ y_2(t) = \lambda_2\mathrm{e}^{2t} + \mu_2\mathrm{e}^{-2t} \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

On exprime ensuite la solution générale X par la relation $X = PY$

$$\begin{cases} x(t) = \lambda_1\mathrm{e}^t + \mu_1\mathrm{e}^{-t} + \lambda_2\mathrm{e}^{2t} + \mu_2\mathrm{e}^{-2t} \\ y(t) = -2\lambda_1\mathrm{e}^t - 2\mu_1\mathrm{e}^{-t} + \lambda_2\mathrm{e}^{2t} + \mu_2\mathrm{e}^{-2t} \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^4.$$

L'ensemble des solutions est ici un espace vectoriel de dimension $2\times 2 = 4$.

Exercice 8 **

On munit l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la matrice A est antisymétrique ;

(ii) chaque solution X du système différentiel $X' = AX$ est de norme constante.

Solution

méthode

La norme euclidienne d'une colonne X vérifie $\|X\|^2 = {}^tXX$. Il suffit de dériver cette expression pour en étudier la constance.

Soit X une solution du système différentiel $X' = AX$. Par dérivation d'un produit matriciel

$$\left({}^tXX\right)' = \left({}^tX\right)'X + {}^tXX'.$$

La transposition étant une application linéaire, on a $\left({}^tX\right)' = {}^t\left(X'\right)$ et donc

$$\left({}^tXX\right)' = {}^t\left(X'\right)X + {}^tXX' = {}^t(AX)X + {}^tXAX = {}^tX\left({}^tA + A\right)X.$$

Ainsi, $\left({}^tXX\right)' = 0$ lorsque la matrice A est antisymétrique. La fonction X est alors de norme constante.

Inversement, supposons chaque solution du système différentiel de norme constante. Pour $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une solution au problème de Cauchy constitué de l'équation $X' = AX$ et de la condition initiale $X(0) = X_0$ (Th. 1 p. 410). Pour cette solution la nullité de la dérivée de ${}^tXX$ en $t = 0$ donne

$${}^tX_0\left({}^tA + A\right)X_0 = 0.$$

méthode

La matrice $M = {}^tA + A$ est symétrique réelle, il suffit de constater la nullité de ses valeurs propres pour affirmer que cette matrice est nulle.

Soit λ une valeur propre de M et $X_0 \neq 0$ un vecteur propre associé.

$$ {}^tX_0 M X_0 = {}^tX_0(\lambda X_0) = \lambda\, {}^tX_0 X_0 = \lambda \|X_0\|^2 = 0. $$

On en déduit $\lambda = 0$ car $\|X_0\| \neq 0$. Ainsi, 0 est la seule valeur propre de la matrice M. Or M est symétrique réelle et donc diagonalisable semblable à la matrice nulle. On peut conclure $M = {}^tA + A = O_n$: la matrice A est antisymétrique.

10.5.2 Étude qualitative

Exercice 9 **

Soit p et $q\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On étudie l'équation différentielle définie sur $[0\,;1]$

$$ (E)\colon y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. $$

Montrer que si une solution de l'équation (E) possède une infinité de racines, celle-ci est la fonction nulle.

Solution

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2.
Soit y une solution de l'équation (E) possédant une infinité de racines.

méthode

Pour montrer que y est la fonction nulle, on montre qu'il existe $a \in [0\,;1]$ vérifiant $y(a) = y'(a) = 0$. En effet, la fonction y et la fonction nulle seront alors solutions d'un même problème de Cauchy : l'unicité de la solution à un tel problème (Th. 6 p. 412) permettra de conclure.

La fonction y admettant une infinité de racines, il est possible de former une suite (x_n) constituée de racines deux à deux distinctes de la fonction y. Puisque la suite (x_n) est une suite d'éléments du compact $[0\,;1]$, on peut en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(k)})$ de limite $a \in [0\,;1]$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $y(x_{\varphi(k)}) = 0$ et l'on obtient à la limite $y(a) = 0$ par continuité de y. De plus, en appliquant le théorème de Rolle[1] entre les deux racines distinctes $x_{\varphi(k)}$ et $x_{\varphi(k+1)}$, on peut introduire une valeur intermédiaire c_k vérifiant $y'(c_k) = 0$. Par encadrement, la suite (c_k) tend vers a et par continuité de y' on obtient aussi $y'(a) = 0$.

Finalement, la fonction y est solution du problème de Cauchy :

$$ \begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(a) = 0 \text{ et } y'(a) = 0. \end{cases} $$

1. On peut aussi montrer que $y'(a)$ est nul en observant que ce nombre est la limite du taux de variation entre a et $x_{\varphi(k)}$. La démarche en cours a l'avantage de pouvoir être généralisée à des équations d'ordres supérieurs.

Or la fonction nulle est aussi solution de ce problème de Cauchy et celui-ci possède une solution unique : on peut identifier y et la fonction nulle.

Exercice 10 **

On étudie l'équation différentielle

$$ (E)\colon y'' + e^{-x}y = 0. $$

Soit f une solution bornée de (E) sur $[0\,;+\infty[$.

(a) Montrer que la dérivée f' admet une limite finie en $+\infty$.

(b) Quelle est la valeur de sa limite ?

(c) Soit g une autre solution bornée de (E) sur $[0\,;+\infty[$. En étudiant le wronskien de f et de g, établir que les fonctions f et g sont liées. Que peut-on en conclure ?

Solution

(a) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre : ses solutions constituent un plan vectoriel.

méthode

À l'aide d'une intégrale, on peut exprimer f' à partir de f'' et donc de f.

La fonction f' est de classe $\mathcal{C}^1$ ce qui permet d'écrire, pour $x \in [0\,;+\infty[$,

$$ f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,dt = f'(0) - \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt. $$

Si la fonction f est bornée, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$. On a alors

$$ f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f'(0) - \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt = \ell \in \mathbb{R}. $$

(b) **méthode**

Si $\ell \neq 0$, on montre par comparaison que la fonction f tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$.

Montrons que la limite ℓ est nulle en raisonnant par l'absurde.

Si $\ell > 0$, il existe $A \in [0\,;+\infty[$ assez grand tel que $f'(x) \geqslant \ell/2$ pour tout $x \geqslant A$. Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$ \begin{aligned} f(x) &= f(A) + \int_A^x f'(t)\,dt \\ &\geqslant f(A) + \int_A^x \frac{\ell}{2}\,dt = f(A) + \frac{\ell}{2}(x - A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty. \end{aligned} $$

Ceci contredit l'hypothèse que la fonction f est bornée.

De même, si $\ell < 0$ on obtient une absurdité, soit en adaptant le raisonnement, soit en considérant $-f$.

Finalement, si f est une solution bornée, sa dérivée f' tend vers 0 en $+\infty$.

(c) **méthode**

> Lorsque f et g sont solutions de l'équation $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, leur wronskien w est solution de l'équation $w' + a(t)w = 0$ (Th. 10 p. 414).

Posons $w = f'g - fg'$ le wronskien de f et g. Celui-ci est constant car, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} w'(t) &= f''(t)g(t) + f'(t)g'(t) - f'(t)g'(t) - f(t)g''(t) \\ &= -\mathrm{e}^{-t}f(t)g(t) + \mathrm{e}^{-t}f(t)g(t) = 0. \end{aligned}$$

Puisque les fonctions f et g sont supposées bornées, l'étude qui précède assure que leurs dérivées sont de limites nulles en $+\infty$. La fonction w est alors aussi de limite nulle en $+\infty$. On en déduit que la fonction w est constante égale à 0 et donc que les fonctions f et g sont liées.

Sachant que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est un plan vectoriel, cette étude permet d'assurer l'existence de solutions non bornées à cette équation.

Exercice 11 ***

On considère l'équation différentielle

$$(E_h)\colon y'' - q(x)y = 0$$

avec $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive.

(a) Soit y une solution de (E_h) sur $\mathbb{R}$. Étudier la convexité de y^2. En déduire que si $y(0) = y(1) = 0$ alors la fonction y est nulle sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit y_1 et y_2 deux solutions de (E_h) telles que

$$\big(y_1(0), y_1'(0)\big) = (0,1) \quad \text{et} \quad \big(y_2(1), y_2'(1)\big) = (0,1).$$

Démontrer que les fonctions y_1 et y_2 constituent une base de l'espace des solutions de (E_h).

(c) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que l'équation différentielle

$$(E)\colon y'' - q(x)y = f(x)$$

admet une unique solution[1] y vérifiant $y(0) = y(1) = 0$.

1. Ce problème n'est pas un problème de Cauchy mais un problème de *conditions aux limites* : l'existence et l'unicité d'une solution n'est pas garantie !

Solution

(a) La fonction $z = y^2$ est deux fois dérivable avec pour tout x réel

$$z''(x) = 2y''(x)y(x) + 2\big(y'(x)\big)^2 = 2q(x)\big(y(x)\big)^2 + 2\big(y'(x)\big)^2 \geqslant 0.$$

La fonction z est donc convexe.

Si $y(0) = y(1) = 0$, la fonction z s'annule en 0 et en 1. La fonction z est donc négative sur $[0\,;1]$ car, pour une fonction convexe, l'arc figure en dessous de la corde. Or la fonction z est aussi positive, elle est donc nulle sur $[0\,;1]$ et la fonction y aussi. Il reste à montrer que la fonction y est nulle sur $\mathbb{R}$.

méthode

> Pour montrer que la fonction y est nulle sur l'intégralité de $\mathbb{R}$, on l'identifie à la fonction nulle en constatant que ces deux fonctions sont solutions d'un même problème de Cauchy.

Puisque la fonction y est constante sur $[0\,;1]$, on a $y'(0) = 0$. La fonction y se voit alors solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy constitué par l'équation (E_h) et les conditions initiales

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0.$$

La fonction nulle est aussi solution sur $\mathbb{R}$ de ce problème de Cauchy. Par unicité de la solution à un problème de Cauchy (Th. 6 p. 412), la fonction y est égale à la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

(b) **méthode**

> Il suffit d'établir que les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes car on sait que l'ensemble des solutions de l'équation (E_h) est un plan vectoriel.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$. On a pour tout x réel

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $\lambda_2 y_2(0) = 0$. Or la fonction y_2 n'est pas la fonction nulle car $y_2'(1) \neq 0$. Par l'étude qui précède, on sait alors $\big(y_2(0), y_2(1)\big) \neq (0,0)$ et puisque $y_2(1)$ est nul, on a nécessairement $y_2(0) \neq 0$. On en déduit $\lambda_2 = 0$. Un raisonnement analogue donne $\lambda_1 = 0$ en exploitant $y_1(1) \neq 0$.

Finalement, la famille (y_1, y_2) est libre et constituée de deux éléments du plan des solutions, c'est donc une base de l'espace des solutions.

(c) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Soit y_p une solution particulière de celle-ci. La solution générale de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$y(x) = y_p(x) + \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette solution vérifie $y(0) = y(1) = 0$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} y_p(0) + \lambda_2 y_2(0) = 0 \\ y_p(1) + \lambda_1 y_1(1) = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations déterminent complètement λ_1 et λ_2 puisque $y_1(1)$ et $y_2(0)$ sont non nuls. Il existe donc une unique solution à l'équation (E) vérifiant les conditions imposées.

10.5.3 Résolution par changement de fonction inconnue

Exercice 12 *

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E)\colon\ (1+\mathrm{e}^x)y''+2\mathrm{e}^x y'+(2\mathrm{e}^x+1)y=\mathrm{e}^x$$

en posant $z(x)=(1+\mathrm{e}^x)y(x)$.

Solution

méthode

> Pour résoudre cette équation par changement de fonction inconnue, on introduit une fonction y deux fois dérivable et la fonction z qui lui est liée. En exprimant les dérivées de z en fonction de celles de y (ou l'inverse), on retranscrit l'équation étudiée de la fonction inconnue y en une équation équivalente de la fonction inconnue z. Cette dernière est en principe plus simple à résoudre.

Soit $y\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$z(x)=(1+\mathrm{e}^x)y(x)\quad\text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

La fonction z est deux fois dérivable et, pour tout x réel,

$$\begin{aligned} z'(x)&=(1+\mathrm{e}^x)y'(x)+\mathrm{e}^x y(x)\\ z''(x)&=(1+\mathrm{e}^x)y''(x)+2\mathrm{e}^x y'(x)+\mathrm{e}^x y(x).\end{aligned}$$

On remarque l'identité

$$(1+\mathrm{e}^x)y''(x)+2\mathrm{e}^x y'(x)+(2\mathrm{e}^x+1)y(x)=z''(x)+z(x).$$

La fonction y est donc solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation

$$(E')\colon\ z''+z=\mathrm{e}^x.$$

L'équation (E') est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2+1=0$ de racines $\pm\mathrm{i}$. Sa solution générale homogène est

$$z_h(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x\quad\text{avec}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

méthode

> Pour une équation à coefficients constants, on peut déterminer une solution particulière pour un second membre s'écrivant $A\mathrm{e}^{\alpha x}$ de la forme $y_p(x)=C\mathrm{e}^{\alpha x}$, $Cx\mathrm{e}^{\alpha x}$ ou $Cx^2\mathrm{e}^{\alpha x}$ selon que α n'est pas racine, est racine simple ou est racine double de l'équation caractéristique.

Ici, $\alpha=1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut trouver une solution particulière de la forme $z_p(x)=C\mathrm{e}^x$. Après des calculs évidents, on obtient $C=1/2$.

La solution générale de l'équation (E') sur $\mathbb{R}$ est alors

$$z(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\lambda\cos x+\mu\sin x\quad\text{avec}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

et la solution générale de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{2(1+\mathrm{e}^x)}+\frac{\lambda\cos x+\mu\sin x}{1+\mathrm{e}^x}\quad\text{avec}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Exercice 13 **

Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E)\colon\ x^2y''(x)+xy'(x)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)y(x)=0$$

en posant $y(x)=x^\alpha z(x)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ bien choisi.

Solution

Soit $y\colon\ ]0\,;+\infty[\ \to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z\colon\ ]0\,;+\infty[\ \to\mathbb{R}$ la fonction déterminée par

$$z(x)=x^{-\alpha}y(x)\quad\text{pour tout } x>0.$$

La fonction z est deux fois dérivable.

méthode

> On exprime les dérivées de y en fonction de celles de z afin de directement substituer dans l'équation (E).

Pour tout $x>0$

$$\begin{aligned} y(x)&=x^\alpha z(x)\\ y'(x)&=x^\alpha z'(x)+\alpha x^{\alpha-1}z(x)\\ y''(x)&=x^\alpha z''(x)+2\alpha x^{\alpha-1}z'(x)+\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z(x).\end{aligned}$$

En injectant ces expressions dans le premier membre de l'équation (E), on obtient

$$x^2y''(x)+xy'(x)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)y(x)=$$
$$x^{\alpha+2}z''(x)+(2\alpha+1)x^{\alpha+1}z'(x)+\left(\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)x^\alpha-x^{\alpha+2}\right)z(x).$$

Pour $\alpha=-1/2$, cette expression se simplifie

$$x^2y''(x)+xy'(x)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)y(x)=x^{3/2}\big(z''(x)-z(x)\big).$$

Ainsi, la fonction y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si, z est solution de l'équation $z'' - z = 0$. Cette dernière est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ de racines ± 1. Sa solution générale[1] est $z(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On peut alors conclure que la solution générale de (E) sur $]0\,;+\infty[$ s'exprime

$$y(x) = \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 14 **

On étudie sur $]0\,;1[$ l'équation

$$(E)\colon x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0.$$

(a) Rechercher une solution non nulle φ développable en série entière.

(b) Résoudre l'équation par le changement de fonction inconnue $y(x) = \varphi(x)z(x)$.

Solution

(a) Soit S la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Après des calculs analogues à ceux vus dans le sujet 5 p. 421, on a pour tout $x \in\,]-R\,;R[$

$$x(1-x)S''(x) + (1-3x)S'(x) - S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2(a_{n+1} - a_n)x^n.$$

En choisissant une suite (a_n) constante, on détermine une solution de l'équation différentielle. Plus précisément, si l'on choisit la suite constante égale à 1, la série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence 1 et sa somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

est solution sur $]-1\,;1[$ (donc *a fortiori* sur $]0\,;1[$) de l'équation (E).

(b) Soit $y\colon]0\,;1[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z\colon]0\,;1[\to \mathbb{R}$ la fonction déterminée par

$$z(x) = (1-x)y(x).$$

La fonction z est deux fois dérivable avec

$$z'(x) = (1-x)y'(x) - y(x)$$
$$z''(x) = (1-x)y''(x) - 2y'(x).$$

On constate alors

$$x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0 \iff xz''(x) + z'(x) = 0.$$

1. Ou, et c'est équivalent, $z(x) = \alpha \operatorname{ch} x + \beta \operatorname{sh} x$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

méthode

L'équation différentielle obtenue en l'inconnue z apparaît comme une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 en la fonction inconnue z'.

Après résolution, la solution générale de l'équation en la fonction inconnue z' est

$$z'(x) = \frac{\lambda}{x} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En intégrant, on obtient la solution de l'équation différentielle en l'inconnue z

$$z(x) = \lambda \ln x + \mu \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement[1], la solution générale sur $]0\,;1[$ de l'équation (E) est

$$y(x) = \frac{\lambda \ln x + \mu}{1-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

10.5.4 Résolution par changement de variable

Exercice 15 *

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$(E)\colon x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

en posant $x = e^t$.

Solution

méthode

Résoudre une équation différentielle en la fonction inconnue y de la variable x par un changement de variable déterminé par une relation $x = \phi(t)$ consiste en l'introduction d'une nouvelle fonction inconnue z s'exprimant en la nouvelle variable t et liée à la fonction initiale par la relation « $y(x) = z(t)$ »[2].

Commençons par étudier le changement de variable. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

$$x = e^t \iff t = \ln x.$$

L'application $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $\phi(t) = e^t$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^2$: on dit que ϕ est la *fonction de changement de variable*[3].

1. La démarche suivie dans ce sujet est un cas particulier de la *méthode de Lagrange* : si φ est une solution qui ne s'annule pas de l'équation homogène associée à $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$, le changement de fonction inconnue $y(x) = \varphi(x)z(x)$ conduit à une équation linéaire d'ordre 1 en l'inconnue z'.

2. Le physicien écrira plutôt $y(x) = y(t)$, l'appellation de la variable lui suffisant à distinguer la fonction manipulée. Cette notation est cependant dangereuse en mathématique et incompatible avec des dérivations exprimées par des « primes » : elle ici déconseillée.

3. La fonction de changement de variable exprime la variable initiale en fonction de la nouvelle variable.

Soit $y\colon x \mapsto y(x)$ une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons $z\colon t \mapsto z(t)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$\text{« } z(t) = y(x) \text{ »} \quad \text{c'est-à-dire} \quad z(t) = y(\mathrm{e}^t).$$

Par composition, la fonction $z = y \circ \phi$ est deux fois dérivable. Exprimons les dérivées de y en fonction des dérivées de z afin de substituer leurs expressions dans l'équation. En inversant le changement de variable, on peut écrire $y(x) = z(\ln x)$ pour tout $x > 0$ et alors [1]

$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x)$$
$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x).$$

On en déduit la transformation d'équation qui suit

$$\begin{aligned} &\forall x > 0, \quad x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0 \\ \iff &\forall x > 0, \quad z''(\ln x) + 2z'(\ln x) + z(\ln x) = 0 \\ \iff &\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la résolution de l'équation (E) se rapporte à celle de l'équation

$$(E')\colon z'' + 2z' + z = 0.$$

L'équation (E') est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double -1. La solution générale de cette équation est

$$z(t) = (\lambda + \mu t)\mathrm{e}^{-t} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

La solution générale [2] de l'équation (E) sur $]0\,;+\infty[$ est alors

$$y(x) = \frac{\lambda + \mu \ln x}{x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 16 **

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(x^2+1)^2 y'' + 2x(x^2+1)y' + 4y = 0$$

en procédant au changement de variable $t = \arctan x$.

1. Lors du calcul de y'', on prend garde à ne pas oublier de dériver un produit en plus de la composition.

2. Plus généralement, on appelle *équation d'Euler* les équations de la forme $x^2y''+axy'(x)+by(x) = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Par le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$, il est possible de les résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ en les transformant en équations à coefficients constants. On peut aussi les résoudre sur $\mathbb{R}_-^*$ par le changement de variable $x = -\mathrm{e}^t$.

Solution

méthode

> Le changement de variable exprime la nouvelle variable en fonction de la variable initiale. Il faut renverser celui-ci en prenant appui sur une bijection réciproque.

En choisissant t dans l'intervalle $I =]-\pi/2\,;\pi/2[$, on a l'équivalence

$$t = \arctan x \iff x = \tan t.$$

La fonction de changement de variable est alors l'application $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(t) = \tan t$. Il s'agit d'une bijection de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $y\colon x \mapsto y(x)$ une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $z\colon t \mapsto z(t)$ la fonction définie sur I par

$$\text{« } z(t) = y(x) \text{ »} \quad \text{c'est-à-dire} \quad z(t) = y(\tan t).$$

Par composition, la fonction $z = y \circ \phi$ est deux fois dérivable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = z(\arctan x)$$
$$y'(x) = \frac{z'(\arctan x)}{1+x^2}$$
$$y''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} z'(\arctan x) + \frac{1}{(1+x^2)^2} z''(\arctan x).$$

On peut alors transposer l'équation différentielle étudiée

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2+1)^2 y''(x) + 2x(x^2+1)y'(x) + 4y(x) = 0 \\ \iff &\forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(\arctan x) + 4z(\arctan x) = 0 \\ \iff &\forall t \in I, \quad z''(t) + 4z(t) = 0. \end{aligned}$$

L'équation différentielle $z'' + 4z = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ de racines $\pm 2\mathrm{i}$. La solution générale de l'équation en z ainsi obtenue est

$$z(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

méthode

> On sait
>
> $$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
>
> On en déduit
>
> $$\cos(2\arctan x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \sin(2\arctan x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

La solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$ s'exprime alors (en remplaçant 2μ par μ ce dernier parcourant encore $\mathbb{R}$)

$$y(x) = \frac{\lambda(1-x^2) + \mu x}{1+x^2} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

10.5.5 Méthode de la variation des constantes

Exercice 17 *

Résoudre sur des intervalles à préciser l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Solution

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur les intervalles $I_k =]-\pi/2 + k\pi\,;\pi/2 + k\pi[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). Son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ de racines $\pm\mathrm{i}$. La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = \lambda_k \cos x + \mu_k \sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^2.$$

Par la méthode de variation des constantes (Th. 11 p. 414), on détermine une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x \quad \text{avec} \quad x \in I_k$$

en prenant λ et μ deux fonctions dérivables solutions du système

$$\begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 & (1) \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} & (2). \end{cases}$$

Ce système possède une solution unique car la matrice $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ est inversible.

méthode

Ce système peut être résolu en opérant des combinaisons d'équations visant à isoler respectivement $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$.

Les combinaisons $\cos x \times (1) - \sin x \times (2)$ et $\sin x \times (1) + \cos x \times (2)$ donnent respectivement

$$\lambda'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \mu'(x) = 1.$$

Les fonctions λ et μ définies sur I_k par

$$\lambda(x) = \ln|\cos x| \quad \text{et} \quad \mu(x) = x$$

conviennent et déterminent la solution particulière

$$y_p(x) = \ln|\cos x| \cos x + x \sin x.$$

Finalement, la solution générale de l'équation étudiée sur les I_k est :

$$y(x) = \ln|\cos x| \cos x + x \sin x + \lambda_k \cos x + \mu_k \sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 18 **

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Exprimer à l'aide d'une intégrale la solution de l'équation différentielle

$$(E)\colon y'' + y = f(x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.

Solution

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 : on est assuré de l'existence et de l'unicité d'une solution au problème de Cauchy posé (Th. 6 p. 412). Comme dans le sujet 17 p. 436, la solution générale homogène est

$$y_h(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

et l'on obtient une solution particulière y_p sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$y_p(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x \qquad (*)$$

avec λ et μ fonctions dérivables solutions du système

$$\begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x = 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x = f(x). \end{cases}$$

Après résolution [1], on parvient à

$$\lambda'(x) = -f(x)\sin x \quad \text{et} \quad \mu'(x) = f(x)\cos x.$$

méthode

Par le théorème fondamental de l'intégration, on peut exprimer une primitive F d'une fonction continue f définie sur un intervalle I à l'aide d'une intégrale :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad a \text{ choisi dans } I.$$

Les fonctions λ et μ déterminées par

$$\lambda(x) = \int_0^x -f(t)\sin t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mu(x) = \int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$$

1. voir méthode du sujet précédent.

conviennent et définissent la solution particulière

$$y_p(x) = \int_0^x f(t)(\sin x \cos t - \sin t \cos x)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

La solution générale de l'équation (E) est alors

$$y(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t + \lambda\cos x + \mu \sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

La condition initiale $y(0) = 0$ donne immédiatement $\lambda = 0$. Pour étudier, la condition $y'(0) = 0$, on reprend l'écriture $(*)$ afin de pouvoir calculer $y_p'(0)$.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \lambda'(x)\cos x - \lambda(x)\sin x + \mu'(x)\sin x + \mu(x)\cos x \\ &= -\lambda(x)\sin x + \mu(x)\cos x. \end{aligned}$$

On obtient ainsi $y_p'(0) = 0$ et la condition $y'(0) = 0$ équivaut alors à $\mu = 0$. On peut conclure que la solution cherchée est donnée par

$$y(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

10.5.6 Résolution avec raccord

Exercice 19

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : ty' - y = t^2.$$

Solution

méthode

L'équation différentielle étudiée est de la forme $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ avec a, b, c des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$. Cependant, le facteur de y' s'annule en $t = 0$ ce qui empêche de résoudre directement l'équation sur $\mathbb{R}$: on commence par résoudre celle-ci sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$ avant de réaliser un raccord des solutions.

Sur I, l'équation (E) équivaut à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' - \frac{1}{t}y = t.$$

La solution générale de l'équation homogène s'exprime

$$y_h(t) = \lambda \mathrm{e}^{\ln|t|} = \lambda\,|t| \quad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Sur I, la valeur absolue de t est constamment égale à t ou à $-t$. Quitte à considérer $-\lambda$ à la place de λ lorsque $I = \mathbb{R}_-^*$, on peut décrire la solution homogène sous la forme plus simple

$$y_h(t) = \lambda t \quad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Par application de la méthode de la variation de la constante (ou par un peu d'intuition) on obtient la solution particulière $y_p(t) = t^2$. La solution générale de l'équation (E) sur I est

$$y(t) = t^2 + \lambda t \quad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

méthode

Pour déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, on considère une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ solution de l'équation sur chacun des deux intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On étudie ensuite à quelles conditions on peut prolonger cette fonction en 0 pour définir une solution sur $\mathbb{R}$.

Soit $y\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Il existe deux[1] constantes réelles λ et λ' telles que

$$y(t) = \begin{cases} t^2 + \lambda t & \text{si } t > 0 \\ t^2 + \lambda' t & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Étudions s'il est possible de prolonger y par continuité en 0.

Lorsque t tend vers 0^+, $y(t) = t^2 + \lambda t$ tend vers 0.

Lorsque t tend vers 0^-, $y(t) = t^2 + \lambda' t$ tend aussi vers 0.

On peut prolonger y par continuité en 0 en posant $y(0) = 0$ et cela est possible sans conditions sur λ et λ'.

Étudions la dérivabilité en 0 de ce prolongement.

Lorsque t tend vers 0^+, $y'(t) = 2t + \lambda$ tend vers λ. Par application du théorème de la limite de la dérivée, la fonction y est dérivable à droite en 0 avec $y_d'(0) = \lambda$.

Lorsque t tend vers 0^-, $y'(t) = 2t + \lambda'$ tend vers λ'. La fonction y est aussi dérivable à gauche en 0 avec $y_g'(0) = \lambda'$.

Pour que la fonction y soit dérivable en 0, il est nécessaire que $\lambda = \lambda'$.

Inversement, si cette condition est vérifiée, la fonction y s'exprime

$$y(t) = t^2 + \lambda t \quad \text{pour tout } t\in\mathbb{R}.$$

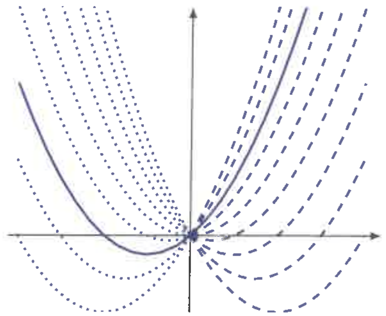
La fonction y est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation étudiée sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ et aussi en 0.

Finalement, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est $y(t) = t^2 + \lambda t$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

méthode

Souvent le raccord des solutions conduit à l'égalité des constantes exprimant la solution de part et d'autre du point d'annulation de a. Cela n'a cependant rien d'automatique : il existe des équations différentielles conduisant à des conclusions différentes[2].

1. Les constantes sur les deux intervalles ne sont pas *a priori* égales.



En trait discontinu figurent les deux familles de solutions accompagnées d'une solution obtenue par raccord.

Exercice 20

Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation

$$(E)\colon t\ln(t)y' + y = 0.$$

Solution

méthode

Dans l'équation (E), le facteur de y' s'annule pour $t = 1$: on résout d'abord l'équation sur les intervalles $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$ avant d'opérer un raccord des solutions obtenues.

Sur l'intervalle $I =]0\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$

$$(E) \iff y' = -\frac{1}{t\ln t}y.$$

Sachant

$$\int -\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = -\ln|\ln t|$$

la solution générale de (E) sur I s'exprime

$$y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\ln|\ln t|} = \frac{\lambda}{|\ln t|} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sur I, l'expression $\ln t$ est de signe constant et celui-ci peut être intégré au facteur λ. On peut donc exprimer plus simplement la solution générale de (E) sur I

$$y(t) = \frac{\lambda}{\ln t} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Reste à déterminer les solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$.

2. Par exemple, l'équation différentielle $ty' = 2y$ propose une solution générale s'exprimant $y(t) = \lambda t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et $y(t) = \lambda' t^2$ sur $\mathbb{R}_-^*$ avec λ et λ' quelconques : l'ensemble des solutions est alors un plan vectoriel et non une droite.

Soit $y\colon]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction solution de l'équation (E) sur chacun des deux intervalles $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$. Il existe deux constantes réelles λ et λ' telles que

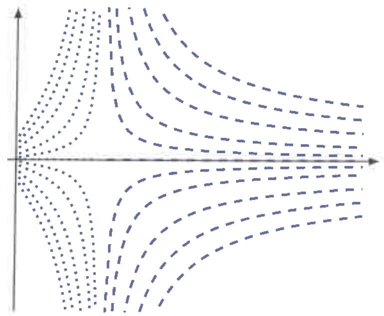
$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\ln t} & \text{si } t \in]1\,;+\infty[\\[2mm] \dfrac{\lambda'}{\ln t} & \text{si } t \in]0\,;1[. \end{cases}$$

Étudions s'il est possible de prolonger y par continuité en 1.

On a

$$y(t) = \frac{\lambda}{\ln t} \xrightarrow[t\to 1^+]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{\lambda}{\ln t} \xrightarrow[t\to 1^-]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \lambda' \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda' = 0. \end{cases}$$

La fonction y peut être prolongée par continuité en 1 si, et seulement si, $\lambda = \lambda' = 0$. La fonction y est alors simplement la fonction nulle sur $]0\,;+\infty[$. Inversement, cette fonction est évidemment solution de (E) et l'on peut conclure que c'est la seule solution de (E) sur $]0\,;+\infty[$.



Les deux familles de solutions.

Exercice 21 **

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E)\colon (t-1)y'' - ty' + y = 0$$

en commençant par rechercher deux solutions « apparentes ».

Solution

méthode

Il est rapide de vérifier si les fonctions définies par $\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, t, t^2$ (voire $1/t$) sont solutions de l'équation (E) : ce sont de bons candidats à essayer !

Les fonctions φ et ψ définies par $\varphi(t) = t$ et $\psi(t) = \mathrm{e}^t$ sont solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ et celles-ci sont linéairement indépendantes.

méthode

On ne peut pas conclure immédiatement à la description de l'ensemble des solutions de l'équation (E) car le facteur de y'' s'annule en $t = 1$. L'équation (E) n'est équivalente à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 résolue que sur les intervalles $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$: on résout d'abord l'équation sur ces intervalles puis on réalise un raccord des solutions.

Sur $I =]-\infty\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$, l'ensemble des solutions de (E) est un plan vectoriel dont les fonctions φ et ψ constituent une base. La solution générale de (E) sur I est

$$y(t) = \lambda t + \mu e^t \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit y une fonction solution de (E) sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$. Il existe des constantes réelles λ, λ', μ et μ' telles que

$$y(t) = \begin{cases} \lambda t + \mu e^t & \text{si } t \in]-\infty\,;1[\\ \lambda' t + \mu' e^t & \text{si } t \in]1\,;+\infty[. \end{cases}$$

Étudions s'il est possible de prolonger y par continuité en 1. On a

$$y(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} \lambda + \mu e \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t\to 1^+]{} \lambda' + \mu' e.$$

On peut prolonger y par continuité en 1 si, et seulement si,

$$\lambda + \mu e = \lambda' + \mu' e.$$

Supposons cette condition remplie.

Étudions si ce prolongement est deux fois dérivable en 1. On a

$$y'(t) = \begin{cases} \lambda + \mu e^t & \text{si } t \in]-\infty\,;1[\\ \lambda' + \mu' e^t & \text{si } t \in]1\,;+\infty[\end{cases}$$

et donc

$$y'(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} \lambda + \mu e \quad \text{et} \quad y'(t) \xrightarrow[t\to 1^+]{} \lambda' + \mu' e.$$

La fonction y est dérivable à droite et à gauche en 1 avec

$$y'_g(1) = \lambda + \mu e \quad \text{et} \quad y'_d(1) = \lambda' + \mu' e.$$

Compte tenu de la condition de continuité, ces deux nombres sont égaux et la fonction y est dérivable en 1. Aussi

$$y''(t) = \begin{cases} \mu e^t & \text{si } t \in]-\infty\,;1[\\ \mu' e^t & \text{si } t \in]1\,;+\infty[\end{cases}$$

et

$$y''(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} \mu e \quad \text{et} \quad y''(t) \xrightarrow[t\to 1^+]{} \mu' e.$$

Pour que la fonction y soit deux fois dérivable en 1, il faut $\mu = \mu'$ et alors la condition de continuité donne $\lambda = \lambda'$.

Inversement, si ces conditions sont vérifiées, la fonction y s'exprime

$$y(t) = \lambda t + \mu e^t \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

et celle-ci est effectivement solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y(t) = \lambda t + \mu e^t \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

10.5.7 Exponentielles d'endomorphismes, de matrices

Exercice 22 *

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer l'exponentielle de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution

méthode

Le calcul de l'exponentielle d'une matrice passe souvent par le calcul des puissances de cette matrice. On peut pour cela réduire la matrice ou, et c'est souvent très efficace, exploiter un polynôme annulateur.

On peut écrire $A = \alpha J$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On observe $J^2 = -\mathrm{I}_2$ ce qui permet un calcul facile des puissances de J selon la parité de l'exposant. On en déduit

$$A^{2p} = (-1)^p \alpha^{2p} \mathrm{I}_2 \quad \text{et} \quad A^{2p+1} = (-1)^p \alpha^{2p+1} J \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

On peut alors exprimer l'exponentielle de A en séparant la somme en deux selon la parité de l'indice (ceci est possible car il y a absolue convergence) :

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} A^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} A^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \alpha^{2p} \mathrm{I}_2 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \alpha^{2p+1} J = \cos(\alpha)\mathrm{I}_2 + \sin(\alpha) J. \end{aligned}$$

Finalement, $\exp(A)$ est la matrice de rotation[1] d'angle α

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

1. Plus généralement, on montre que l'exponentielle d'une matrice antisymétrique est une matrice orthogonale, voir sujet 29 du chapitre 7 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MP*.

Exercice 23 *
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Établir $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$.

Solution

méthode
La propriété est facile à obtenir pour une matrice triangulaire et les matrices complexes sont toutes trigonalisables.

Il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On peut alors calculer les puissances de A et affirmer

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} PT^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} T^k\right)P^{-1}.$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini, on obtient que la matrice $\exp(A)$ est semblable à la matrice $\exp(T)$:

$$\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}.$$

Or, on peut calculer les coefficients diagonaux des puissances de T et constater

$$\exp(T) = \lim_{N\to+\infty} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\lambda_1^k & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Enfin, par similitude

$$\det(\mathrm{e}^A) = \det(\mathrm{e}^T) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(T)} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}.$$

Exercice 24 *
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{e}^A \in \mathbb{R}[A]$.

Solution

Notons pour commencer que e^A n'est pas immédiatement un polynôme en A puisque cette matrice est définie par une somme infinie.

méthode
On observe que $\mathbb{R}[A]$ est une partie fermée.

L'ensemble $\mathbb{R}[A]$ des polynômes en A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or tous les sous-espaces vectoriels de dimensions finies sont topologiquement fermés (Th. 6 p. 205). La matrice e^A est limite d'une suite de polynômes en A :

$$\mathrm{e}^A = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k \in \mathbb{R}[A].$$

La matrice e^A est donc élément de $\mathbb{R}[A]$ car une partie fermée contient les limites de ses suites convergentes.

Exercice 25 **
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice annulant un polynôme réel de degré 2 :

$$A^2 + pA + q\mathrm{I}_n = \mathrm{O}_n \quad \text{avec} \quad (p,q) \in \mathbb{R}^2.$$

Justifier que chaque solution de l'équation $X' = AX$ prend ses valeurs dans un plan vectoriel.

Solution

méthode
On exprime la solution générale de l'équation avec une exponentielle.

Soit X une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $X' = AX$. En posant $X_0 = X(0)$, on peut exprimer cette solution (Th. 16 p. 417) : $X(t) = \mathrm{e}^{tA}X_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Nous allons montrer que la matrice e^{tA} est combinaison linéaire des matrices I_n et A. Par hypothèse A^2 est combinaison linéaire des matrices I_n et A. En multipliant par A, on obtient que A^3 est combinaison linéaire des matrices A et A^2 donc aussi des matrices I_n et A. En raisonnant par récurrence, on montre[1]

$$A^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, A) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Par combinaison linéaire, les sommes partielles de la série définissant e^{tA} sont éléments de l'espace $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, A)$. Or cet espace est de dimension finie et donc topologiquement fermé : il contient les limites de ses suites convergentes. En particulier, e^{tA} est élément de $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, A)$. On peut ainsi écrire

$$\mathrm{e}^{tA} = \lambda(t)\mathrm{I}_n + \mu(t)A \quad \text{avec} \quad \lambda(t), \mu(t) \in \mathbb{R}.$$

1. Plus généralement, on sait que si le polynôme minimal de A est de degré m, les polynômes en A peuvent s'exprimer en réalisant une division euclidienne comme combinaison linéaire des matrices $\mathrm{I}_n, A, \dots, A^{m-1}$.

On a alors
$$X(t) = \mathrm{e}^{tA}X_0 = \lambda(t)X_0 + \mu(t)AX_0 \in \mathrm{Vect}(X_0, AX_0).$$
La solution X prend effectivement ses valeurs dans un plan[1].

10.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 26 *
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients non diagonaux sont positifs et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une colonne dont tous les coefficients sont aussi positifs.
Montrer que la solution sur $[0\,;+\infty[$ du problème de Cauchy
$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$
est une colonne dont tous les coefficients sont positifs.

La solution générale du problème de Cauchy posé est
$$X(t) = \exp(tA)X_0.$$
On souhaiterait justifier que la matrice $\exp(tA)$ est à coefficients positifs mais on est quelque peu embarrassé par les coefficients diagonaux de la matrice A dont on ignore le signe...

méthode

Lorsque A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, on sait $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Sachant que les matrices A et $\lambda \mathrm{I}_n$ (pour λ un réel) commutent, on peut écrire pour tout t réel
$$\exp\big(t(A+\lambda\mathrm{I}_n)\big) = \exp(t\lambda\mathrm{I}_n)\exp(tA) = \mathrm{e}^{t\lambda}\exp(tA) \quad \text{car} \quad \exp(t\lambda\mathrm{I}_n) = \mathrm{e}^{t\lambda}\mathrm{I}_n.$$
On en déduit
$$\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t\lambda}\exp\big(t(A+\lambda\mathrm{I}_n)\big).$$
On choisit alors $\lambda \in \mathbb{R}_+$ assez grand pour que tous les coefficients de la matrice $A+\lambda\mathrm{I}_n$ soient positifs. Les puissances de cette matrice sont alors à coefficients positifs et, par somme et limite de matrices à coefficients positifs, l'exponentielle de la matrice $t(A+\lambda\mathrm{I}_n)$ est à coefficients positifs pour tout $t \geqslant 0$. On en déduit que les coefficients de la matrice $\exp(tA)$ sont positifs pour tout $t \geqslant 0$. Enfin, la colonne X_0 étant à coefficients positifs, les valeurs prises sur $\mathbb{R}_+$ par la fonction X sont des colonnes à coefficients positifs.

1. Selon que la famille (X_0, AX_0) est libre ou liée, l'espace $\mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$ est un plan ou seulement inclus dans un plan.

Exercice 27 *
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f + f'' \geqslant 0$. Montrer
$$f(x+\pi) + f(x) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Solution

méthode

Par résolution d'une équation différentielle, on exprime f en fonction de $f+f''$.

Posons $g = f + f''$. La fonction f est évidemment solution de l'équation différentielle
$$(E)\colon y'' + y = g.$$
La solution générale de cette équation[1] sur $\mathbb{R}$ s'exprime
$$y(x) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t + \lambda\cos x + \mu\sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$
La fonction f est donc de cette forme. Après simplifications, on a pour tout réel x
$$\begin{aligned} f(x+\pi) + f(x) &= \int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x+\pi-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{x+\pi} g(t)\sin(t-x)\,\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
En appliquant la relation de Chasles
$$f(x+\pi) + f(x) = \int_x^{x+\pi} g(t)\sin(t-x)\,\mathrm{d}t.$$
Pour tout $t \in [x\,;x+\pi]$, on a $\sin(t-x) \geqslant 0$. Puisque par hypothèse la fonction g est aussi positive, on obtient l'inégalité voulue par intégration bien ordonnée d'une fonction positive.

Exercice 28 **
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer qu'il existe une unique solution bornée à l'équation différentielle
$$(E)\colon y'' - \alpha^2 y + f(x) = 0.$$

1. Voir sujet 18 p. 437.

Solution

L'équation (E) est une équation différentielle à coefficients constants. Les réels α et $-\alpha$ sont les solutions de son équation caractéristique. Sa solution générale homogène est

$$y(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{-\alpha x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Par la méthode de la variation des constantes, on détermine une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = \lambda(x)e^{\alpha x} + \mu(x)e^{-\alpha x}$ avec λ et μ des fonctions dérivables solutions du système

$$\begin{cases} \lambda'(x)e^{\alpha x} + \mu'(x)e^{-\alpha x} = 0 \\ \alpha\lambda'(x)e^{\alpha x} - \alpha\mu'(x)e^{-\alpha x} = -f(x). \end{cases}$$

Après résolution, on parvient à

$$\lambda'(x) = -\frac{1}{2\alpha} f(x)e^{-\alpha x} \quad \text{et} \quad \mu'(x) = \frac{1}{2\alpha} f(x)e^{\alpha x}.$$

méthode

> On obtient des fonctions λ et μ convenables par des primitives exprimées par des intégrales. Pour faciliter l'étude à venir, on choisit d'exprimer ces primitives par des restes d'intégrales convergentes.

La fonction f étant bornée, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$. Par le même argument, la fonction $t \mapsto f(t)e^{\alpha t}$ est intégrable sur $]-\infty\,;0]$. On peut alors introduire les primitives convenables données par

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\alpha}\int_x^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}\,dt \quad \text{et} \quad \mu(x) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^x f(t)e^{\alpha t}\,dt.$$

On obtient alors la solution particulière définie sur $\mathbb{R}$

$$y_p(x) = \frac{e^{\alpha x}}{2\alpha}\int_x^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}\,dt + \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha}\int_{-\infty}^x f(t)e^{\alpha t}\,dt = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\alpha|x-t|}\,dt.$$

Cette solution particulière est bornée. En effet, si l'on introduit M la borne supérieure de $|f|$, on a

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\alpha|x-t|}\,dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} Me^{-\alpha|x-t|}\,dt = M\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|u|}\,du.$$

Puisque la solution homogène y_h n'est bornée sur $\mathbb{R}$ que lorsque $\lambda = \mu = 0$, on peut conclure que la fonction y_p est l'unique solution bornée de (E).

Exercice 29 * (Inégalité de Liapounov)**

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et g une solution non identiquement nulle de

$$(E)\colon y'' + f(x)y = 0.$$

(a) Montrer que les zéros[1] de g sont isolés[2].

Dans la suite, x_1 et x_2 sont deux zéros consécutifs de g vérifiant $x_1 < x_2$.

(b) Montrer, pour $x \in [x_1\,;x_2]$, l'identité

$$(x_2 - x)\int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t)\,dt + (x - x_1)\int_x^{x_2}(x_2 - t)f(t)g(t)\,dt = (x_2 - x_1)g(x).$$

(c) En déduire une minoration de

$$\int_{x_1}^{x_2} \left|f(t)\right|dt.$$

Solution

(a) **méthode**

> Un zéro de g qui n'est pas isolé est un point en lequel g et g' s'annulent.

Soit a un zéro de la fonction g. Si, par l'absurde, ce zéro n'est pas isolé, il existe une suite (x_n) de zéros de g distincts de a et convergeant vers a. Puisque $g(x_n) = 0$, on a

$$g'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{n \to +\infty} \frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a} = 0.$$

La fonction g est donc solution de l'équation (E) vérifiant les conditions initiales $g(a) = 0$ et $g'(a) = 0$. Or la fonction nulle est aussi solution de ce problème de Cauchy et, par unicité de la solution à un tel problème, on peut conclure que g est la fonction nulle. Ceci est exclu.

(b) Introduisons la fonction φ définie sur $[x_1\,;x_2]$ par

$$\varphi(x) = (x_2 - x)\int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t)\,dt + (x - x_1)\int_x^{x_2}(x_2 - t)f(t)g(t)\,dt.$$

La fonction φ est dérivable et, après simplification, on a pour $x \in [x_1\,;x_2]$

$$\varphi'(x) = -\int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t)\,dt + \int_x^{x_2}(x_2 - t)f(t)g(t)\,dt.$$

1. On parle de *zéros* d'une fonction pour signifier une valeur d'annulation.
2. On dit qu'un zéro d'une fonction est *isolé* lorsqu'il existe un voisinage de celui-ci dans lequel il est le seul zéro de la fonction.

La fonction φ est donc dérivable une deuxième fois et

$$\varphi''(x) = -(x - x_1)f(x)g(x) - (x_2 - x)f(x)g(x) = (x_1 - x_2)f(x)g(x).$$

Puisque g est solution de l'équation (E), on obtient

$$\varphi''(x) = (x_2 - x_1)g''(x).$$

En intégrant, on peut alors écrire sur $[x_1\,;x_2]$

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)g(x) + \alpha x + \beta \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Enfin, les fonctions φ et g s'annulent toutes deux en x_1 et x_2 et donc $\alpha = \beta = 0$. On peut conclure

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)g(x) \quad \text{pour tout } x \in [x_1\,;x_2].$$

(c) **méthode**

On emploie l'identité qui précède en $x = c$ maximisant $x \mapsto |g(x)|$.

La fonction g est continue sur le segment $[x_1\,;x_2]$, elle y est donc bornée et il existe c appartenant à $]x_1\,;x_2[$ tel que, pour tout $x \in [x_1\,;x_2]$,

$$|g(x)| \leqslant |g(c)| = M.$$

La relation précédente en $x = c$ donne

$$\begin{aligned}M(x_2 - x_1) &\leqslant (x_2 - c)\left|\int_{x_1}^{c} (t - x_1)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| + (c - x_1)\left|\int_{c}^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant (x_2 - c)\int_{x_1}^{c} \underbrace{(t - x_1)}_{\leqslant c - x_1}|f(t)|M\,\mathrm{d}t + (c - x_1)\int_{c}^{x_2} \underbrace{(x_2 - t)}_{\leqslant x_2 - c}|f(t)|M\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant (x_2 - c)(c - x_1)M\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Sachant $M > 0$ et l'inégalité

$$(x_2 - c)(c - x_1) \leqslant \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$$

on obtient

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{x_2 - x_1}.$$

Exercice 30 ***

On étudie l'équation différentielle

$$(E)\colon xy'' + y' + y = 0.$$

(a) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

Soit f une solution de l'équation (E).

(b) Montrer que $xf'^2(x) + f^2(x)$ possède une limite quand x tend vers $+\infty$.

(c) En déduire que la fonction f est bornée au voisinage de $+\infty$ et que sa dérivée y est de limite nulle.

(d) Justifier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} -f'^2(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(e) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Solution

(a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. La fonction S est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$ et

$$\begin{aligned}xS''(x) + S'(x) + S(x) &= x\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\big((n+1)^2a_{n+1} + a_n\big)x^n.\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution de l'équation (E) sur $]-R\,;R[$ si, et seulement si,

$$a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)^2}a_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La résolution de cette relation de récurrence conduit à

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}a_0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La série entière associée étant de rayon de convergence $R = +\infty$, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions sont exactement les fonctions

$$x \mapsto a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}x^n \quad \text{avec} \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

Elles constituent un sous-espace vectoriel de dimension 1 de l'espace des solutions.

(b) Posons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$\varphi(x) = xf'^2(x) + f^2(x).$$

méthode

On montre que la fonction φ est monotone et bornée.

La fonction φ est dérivable et puisque f est solution de l'équation différentielle (E), on a pour tout x réel

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2xf'(x)f''(x) + f'^2(x) + 2f'(x)f(x)\\ &= 2f'(x)\big(xf''(x) + f'(x) + f(x)\big) - f'^2(x) = -f'^2(x).\end{aligned}$$

La fonction φ est donc décroissante. De plus, elle est clairement positive sur $\mathbb{R}_+$, elle admet donc une limite finie en $+\infty$.

(c) Puisque la fonction φ possède une limite finie en $+\infty$, elle est bornée au voisinage de $+\infty$. Or pour $x > 0$

$$\left|f(x)\right| \leqslant \sqrt{\varphi(x)} \quad \text{et} \quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{x}} \quad \text{car} \quad \varphi(x) = \underbrace{xf'^2(x)}_{\geqslant 0} + \underbrace{f^2(x)}_{\geqslant 0}.$$

La fonction f est donc bornée au voisinage de $+\infty$ et la fonction f' tend vers 0 en $+\infty$.

(d) La fonction $x \mapsto -f'^2(x)$ est de primitive φ qui admet une limite finie en $+\infty$: son intégrale sur $[1\,;+\infty[$ converge.

Pour obtenir la convergence de la deuxième intégrale, on montre une intégrabilité en exploitant l'inégalité $2ab \leqslant a^2 + b^2$,

$$\left|\frac{f'(x)f(x)}{x}\right| = \frac{\left|\sqrt{x}f'(x)\right|\left|f(x)\right|}{x^{3/2}} \leqslant \frac{\left(\sqrt{x}f'(x)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2}{2x^{3/2}} = \frac{\varphi(x)}{2x^{3/2}}.$$

La fonction φ étant bornée au voisinage de $+\infty$, cette domination assure l'intégrabilité sur $[1\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto f'(x)f(x)/x$.

méthode

On montre la convergence de la troisième intégrale en constatant la convergence de la somme des trois.

$$\begin{aligned}-f'^2(x) + \frac{f'(x)f(x)}{x} + \frac{f^2(x)}{x} &= -f'^2(x) + \frac{f'(x)+f(x)}{x}f(x)\\ &= -f'^2(x) - f''(x)f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(-f'(x)f(x)\big).\end{aligned}$$

La fonction primitive $x \mapsto -f'(x)f(x)$ admet une limite nulle en $+\infty$ car f y est bornée et f' de limite nulle. On a donc la convergence de la somme des trois intégrales ce qui produit la convergence de la troisième intégrale.

(e) Posons ℓ la limite de la fonction φ en $+\infty$ (nécessairement positive).

Par l'absurde, supposons cette limite non nulle. On peut écrire

$$\frac{xf'^2(x) + f^2(x)}{x} = \frac{\varphi(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{x}.$$

Par comparaison de fonctions positives, on obtient la divergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{xf'^2(x) + f^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Or cette intégrale est la somme de deux intégrales convergentes : c'est absurde !

On en déduit que la fonction φ est de limite nulle en $+\infty$ puis que f est aussi de limite nulle en $+\infty$ car on a déjà vu $\left|f(x)\right| \leqslant \sqrt{\varphi(x)}$.

Exercice 31 ***

On étudie l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$

$$(E)\colon\ y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit x_0 un réel. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toutes les solutions non nulles de l'équation (E) s'annulent au plus $n-1$ fois dans l'intervalle $[x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha]$.

Solution

La difficulté de ce sujet réside dans l'uniformité voulue de α : on souhaite déterminer une valeur de α qui soit convenable pour toutes les fonctions solutions non nulles de (E).

méthode

Par l'absurde, on construit une suite convergente de fonctions contre-exemples dont la limite provoque une contradiction.

Par l'absurde, supposons qu'un tel α n'existe pas. En prenant $\alpha = 1/p > 0$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on peut introduire une fonction y_p non nulle, solution de l'équation (E) et s'annulant au moins n fois dans l'intervalle $I_p = [x_0 - 1/p\,; x_0 + 1/p]$.

Notons $\mathcal{S}$ l'espace des solutions de l'équation (E). C'est un espace de dimension finie égale à n que l'on peut normer, par exemple, par la norme[1] N définie par

$$N(y) = \left\|y\right\|_\infty + \left\|y'\right\|_\infty + \cdots + \left\|y^{(n-1)}\right\|_\infty \quad \text{avec} \quad \left\|f\right\|_\infty = \sup_{t\in I_1}\left|f(t)\right|.$$

Quitte à considérer la fonction $y_p/N(y_p)$ au lieu de y_p, on peut supposer les fonctions y_p toutes de norme 1. La suite des fonctions (y_p) est alors une suite bornée de l'espace de dimension finie $\mathcal{S}$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente $\left(y_{\varphi(p)}\right)$. La limite de celle-ci est une fonction y_∞, non nulle car de

1. Cette norme a pour intérêt de traduire (sur le segment $I_1 = [x_0-1\,; x_0+1]$) la convergence uniforme d'une suite de fonctions ainsi que la convergence des suites des fonctions dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$.

norme 1 et solution de (E). De plus, par construction, la suite de fonctions $\left(y_{\varphi(p)}\right)$ converge uniformément vers y_∞ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ vers les dérivées respectives de y_∞.

Par les annulations des fonctions $\left(y_{\varphi(p)}\right)$, on peut introduire une suite $\left(x_{\varphi(p)}\right)$ convergeant vers x_0 avec $y_{\varphi(p)}\left(x_{\varphi(p)}\right) = 0$. Par convergence uniforme, on obtient à la limite $y_\infty(x_0) = 0$.

Par application du théorème de Rolle, la fonction $y'_{\varphi(p)}$ s'annule au moins $n-2$ fois sur l'intervalle $I_{\varphi(p)}$. On peut reprendre le raisonnement au-dessus et affirmer $y'_\infty(x_0) = 0$.

Plus généralement, pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, la fonction $y^{(k)}_{\varphi(p)}$ s'annule au moins $n-k$ fois sur l'intervalle $I_{\varphi(p)}$ ce qui permet d'obtenir $y^{(k)}_\infty(x_0) = 0$.

La fonction y_∞ est alors solution du problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et des conditions initiales

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Or la fonction nulle est la seule solution de ce problème de Cauchy. C'est absurde car y_∞ n'est pas la fonction nulle.

CHAPITRE 11

Calcul différentiel

E, E', E'' et F désignent des espaces vectoriels réels de dimensions finies. Ces espaces peuvent être normés et le choix des normes est sans incidence sur la suite de l'étude.

11.1 Fonctions de p variables réelles

L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celles de ses coordonnées, on privilégie l'étude des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les propos tenus ici peuvent cependant être généralisés aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, voire à valeurs dans un espace de dimension finie E'.

On considère une fonction f de p variables réelles définie sur une partie ouverte [1] U de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs réelles [2]

$$f : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) \mapsto f(x_1, \ldots, x_p). \end{cases}$$

11.1.1 Dérivées partielles et applications partielles

Soit j un entier compris entre 1 et p.

1. Tout point de U est centre d'une boule incluse dans U : ceci assure que la fonction f est définie dans toutes les directions au voisinage d'un point où elle est définie.
2. On devrait écrire $f\left((x_1, \ldots, x_p)\right)$ au lieu de $f(x_1, \ldots, x_p)$, on commet ici un abus de notation.

Définition

On appelle *j-ème application partielle* de f en un point $a = (a_1, \dots, a_p)$ de U l'application d'une variable réelle

$$f_j : x_j \mapsto f(a_1, \dots, x_j, \dots, a_n).$$

Lorsque cette application est dérivable en $x_j = a_j$, on introduit la *j-ème dérivée partielle de f en a*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = f_j'(a_j) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(a_1, \dots, a_j + t, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_j, \dots, a_p)\big).$$

Ainsi, et sous réserve d'existence, les dérivées partielles sont les dérivées des applications partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\big(f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)\big).$$

Cette dernière écriture signifie que, pour calculer une dérivée partielle, on dérive l'expression $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ en considérant toutes les variables fixées, sauf x_j en laquelle on dérive.

Lorsque f est une fonction de deux variables réelles notées x et y, ses dérivées partielles sont notées

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Sous réserve d'existence, celles-ci sont définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x, y)\big) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t}\big(f(x + t, y) - f(x, y)\big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big(f(x, y)\big) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t}\big(f(x, y + t) - f(x, y)\big).$$

11.1.2 Opérations sur les dérivées partielles

Puisqu'une dérivée partielle est une dérivée d'une application partielle, les formules de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une puissance,... se transposent aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial (f + g)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial (fg)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad \text{etc..}$$

11.1.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition

On dit que la fonction $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est de *classe* $\mathcal{C}^1$ si ses dérivées partielles existent et sont continues.

Théorème 1

Si $f, g : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions λf, $f + g$ et fg sont de classe $\mathcal{C}^1$. Si de plus la fonction g ne s'annule pas, le quotient f/g détermine aussi une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

11.1.4 Règle de la chaîne

Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $x : V \to \mathbb{R}^p$ une application de fonctions coordonnées $x_1, \dots, x_p$ à valeurs dans l'ouvert U de définition de f :

$$x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big) \in U \quad \text{pour tout } t = (t_1, \dots, t_n) \in V.$$

Théorème 2

Si les fonctions $x_1, \dots, x_p$ et la fonction f sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ alors la fonction composée

$$g : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout i compris entre 1 et n, sa dérivée partielle d'indice i se calcule par la formule

$$\frac{\partial g}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial x_1}{\partial t_i}(t) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t)) + \cdots + \frac{\partial x_p}{\partial t_i}(t) \frac{\partial f}{\partial x_p}(x(t)).$$

On retiendra l'écriture symbolique et concise appelée *règle de la chaîne* :

$$\frac{\partial g}{\partial t_i} = \frac{\partial x_1}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial x_p}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_p}.$$

11.1.5 Dérivées partielles d'ordres supérieurs

k désigne un entier naturel.

Définition

On convient de dire que f est la *dérivée partielle d'ordre* 0 de f.

Lorsqu'elles existent, les dérivées partielles de f sont appelées *dérivées partielles d'ordre* 1 *de* f.

Par récurrence, et sous réserve d'existence, on appelle *dérivées partielles d'ordre* $k+1$ de f les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre k de f.

Lorsqu'elle existe, la dérivée partielle d'ordre k de f obtenue en dérivant successivement en les variables $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ dans cet ordre est notée :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}.$$

En particulier, lorsque f est une fonction de deux variables réelles x et y, on peut introduire quatre dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Définition

On dit que la fonction $f\colon U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est de *classe* $\mathcal{C}^k$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.

Théorème 3 (Théorème de Schwarz)

Si $f\colon U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors, pour tous les indices i et j compris entre 1 et p, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Plus généralement, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$, l'ordre de dérivation n'importe pas dans le calcul d'une dérivée partielle d'ordre k.

11.2 Fonctions d'une variable vectorielle

On étudie plus généralement les fonctions définies au départ d'un ouvert U d'un espace réel E de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et à valeurs dans un espace réel E' de dimension finie.
On considère une telle fonction $f\colon U \subset E \to E'$.

11.2.1 Dérivées partielles

Définition

On dit que f est *dérivable en a selon un vecteur $h \in E$* lorsque le taux d'accroissement

$$\frac{1}{t}\big(f(a+th) - f(a)\big)$$

admet une limite finie quand t tend vers 0 (avec $t \neq 0$). Cette limite est appelée *dérivée de f en a selon le vecteur h* et est notée $\mathrm{D}_h f(a)$.

Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

Définition

Lorsqu'elle existe, on appelle *j-ème dérivée partielle de f en a dans la base e* la dérivée de f en a selon le vecteur e_j. Celle-ci est notée $\partial_j f(a)$.

Lorsqu'une base de E est fixée, il est usuel d'identifier la fonction f avec la fonction de p variables réelles :

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1 e_1 + \dots + x_p e_p).$$

Les dérivées partielles de f dans la base e correspondent alors exactement aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}.$$

11.2.2 Différentielle en un point

Définition

On dit que la fonction f admet un *développement limité à l'ordre* 1 en un point $a \in U$ lorsqu'il existe une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(E, E')$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_{E'}.$$

L'application linéaire ℓ est alors unique, on l'appelle la *différentielle de f en a* et on la note $\mathrm{d}f(a)$.

Le terme $\|h\|\,\varepsilon(h)$ du développement limité est indifféremment noté $\mathrm{o}(h)$ ou $\mathrm{o}(\|h\|)$. La valeur de la différentielle de f en a le long d'un vecteur h est notée[1] $\mathrm{d}f(a) \cdot h$ plutôt que $\mathrm{d}f(a)(h)$. Un développement limité à l'ordre 1 s'exprime alors

$$f(a+h) \underset{h \to 0_E}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(h).$$

Une fonction différentiable en a est nécessairement continue en ce point.
Les notions de différentielle et de dérivées partielles sont liées par le résultat suivant :

Théorème 4

Si f est différentiable en a alors f est dérivable en a selon tout vecteur h de E et

$$\mathrm{D}_h f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot h.$$

En particulier, f admet des dérivées partielles en a dans toute base $(e_1, \dots, e_p)$ de E et, pour tout j compris entre 1 et p,

$$\partial_j f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot e_j.$$

De plus, si $h = h_1 e_1 + \dots + h_p e_p$ désigne un vecteur quelconque de E :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = h_1 \partial_1 f(a) + \dots + h_p \partial_p f(a).$$

Ainsi, la différentielle d'une fonction permet de calculer ses dérivées partielles et inversement, les dérivées partielles permettent de calculer sa différentielle. En particulier, lorsque f est différentiable en a, son développement limité à l'ordre 1 s'exprime

$$f(a+h) \underset{h \to 0_E}{=} f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a) + \mathrm{o}(h).$$

1. C'est la *notation d'opérateur*.

11.2.3 Fonctions différentiables et opérations

Définition

On dit que la fonction f est *différentiable* lorsqu'elle est différentiable en tout point a de son ouvert U de définition. On peut alors introduire sa *différentielle* :

$$\mathrm{d}f\colon \begin{cases} U \mapsto \mathcal{L}(E,E') \\ a \mapsto \mathrm{d}f(a). \end{cases}$$

Les fonctions constantes sont différentiables et leur différentielle est nulle en tout point. Toute application linéaire f de E vers E' est différentiable et $\mathrm{d}f(a) = f$ pour tout $a \in E$. C'est notamment le cas des applications suivantes :

— $(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \mapsto x_j$ pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$;
— $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{Im}(z)$;
— $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \mapsto a_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$.

Lorsque f est une fonction d'une variable réelle, la différentiabilité équivaut à la dérivabilité. Différentielle et dérivée sont alors liées par la formule :

$$f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1 \quad \text{pour tout } a \in U.$$

Théorème 5

Si $f,g\colon U \to E'$ sont différentiables alors la fonction λf, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et la fonction $f+g$ sont différentiables avec, pour tout $a \in U$,

$$\mathrm{d}(\lambda f)(a) = \lambda\,\mathrm{d}f(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a).$$

L'ensemble des fonctions différentiables de U vers E' est un espace vectoriel réel.

Théorème 6

Si $f\colon U \to E'$ et $g\colon U \to E''$ sont différentiables alors, pour toute application bilinéaire $B\colon E'\times E'' \to F$, l'application $B(f,g)$ est différentiable avec, pour tout $a \in U$,

$$\mathrm{d}\big(B(f,g)\big)(a) = B\big(\mathrm{d}f(a), g(a)\big) + B\big(f(a), \mathrm{d}g(a)\big).$$

En particulier, le produit de deux fonctions réelles différentiables est une fonction différentiable.

Théorème 7

Si $f\colon U \subset E \to E'$ et $g\colon U' \subset E' \to E''$ sont des applications différentiables avec $f(U) \subset U'$ alors la fonction composée $g \circ f$ est différentiable avec, pour tout $a \in U$,

$$\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \Big(\mathrm{d}g\big(f(a)\big)\Big) \circ \mathrm{d}f(a).$$

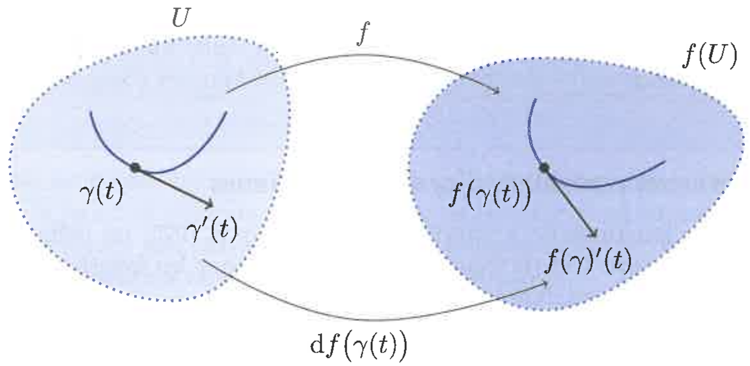
En composant une fonction f à valeurs réelles avec une fonction dérivable, on obtient les formules de calcul différentiel

$$\mathrm{d}(f^\alpha) = \alpha f^{\alpha-1}\,\mathrm{d}f, \quad \mathrm{d}(\mathrm{e}^f) = \mathrm{e}^f\,\mathrm{d}f, \quad \mathrm{d}(\ln f) = \frac{\mathrm{d}f}{f}, \quad \mathrm{d}\Big(\frac{1}{f}\Big) = -\frac{\mathrm{d}f}{f^2}, \text{ etc.}$$

Considérons $\gamma\colon t \mapsto \gamma(t)$ un paramétrage d'un arc régulier inscrit dans U et f une fonction définie sur U transformant cet arc en l'arc composé $f\circ\gamma$. Si γ est dérivable et si f est différentiable, on obtient pour tout paramètre t

$$(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t).$$

Dans cette relation, le vecteur $\gamma'(t)$ dirige la tangente à l'arc au point $\gamma(t)$ tandis que le vecteur image $\mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)$ dirige, lorsqu'il n'est pas nul, la tangente à l'arc transformé. La différentielle d'une fonction f en point a opère donc sur la tangente des arcs réguliers passant par a : la différentielle de f en a est parfois aussi appelée l'*application linéaire tangente* à f en a.



11.2.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition

On dit que la fonction f est de *classe*[1] $\mathcal{C}^1$ sur U si elle est différentiable et si sa différentielle $\mathrm{d}f$ est continue sur U.

Les applications constantes et les applications linéaires de E vers E' sont de classe $\mathcal{C}^1$, notamment celles listées p. 460.

Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont continues car différentiables.

Théorème 8

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, ses dérivées partielles dans une base de E existent en tout point de U et sont continues sur U.

Les résultats d'opérations relatifs aux fonctions différentiables vus ci-dessus se transposent aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ peut être calculée à partir de sa différentielle par la formule suivante :

1. Le théorème qui suit assure que cette définition est compatible avec celle vue au-dessus pour les fonctions de p variables réelles.

Théorème 9
Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U vers E' et si $\gamma\colon [0\,;1] \to E$ est un arc de classe $\mathcal{C}^1$ inscrit dans U allant de a à b,

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque l'ouvert U est convexe, on peut simplifier cette formule en paramétrant le segment $[a\,;b]$ avec $\gamma(t) = a + t(b-a)$:

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(a + t(b-a)\big) \cdot (b-a)\,\mathrm{d}t.$$

Si la différentielle d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est nulle sur un ouvert convexe, la fonction f est constante. Ce résultat est encore vrai si l'ouvert U est seulement connexe par arcs.

11.2.5 Dérivées partielles d'ordres supérieurs

Comme pour les fonctions de p variables réelles (voir p. 457) on définit la notion de dérivée partielle d'ordre k et de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ pour les fonctions au départ d'un ouvert U de E et à valeurs dans E'.
Les applications constantes et les applications linéaires E vers E' sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, notamment celles listées p. 460.
On peut aussi énoncer un théorème de Schwarz affirmant que le calcul des dérivées partielles d'ordre k d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ est indépendant de l'ordre de dérivation.

11.3 Fonctions numériques

On étudie ici exclusivement des fonctions à valeurs réelles.

11.3.1 Extremums

X désigne une partie quelconque de E.

Définition
On dit qu'une fonction réelle f définie sur X admet un *minimum* (global) en un point a de X si

$$f(x) \geqslant f(a) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On dit que la fonction admet un *minimum local* en a s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$f(x) \geqslant f(a) \quad \text{pour tout } x \in X \cap B(a, \alpha).$$

Mutatis mutandis, on définit les notions de maximums locaux et globaux.
Lorsque X est une partie compacte et la fonction f continue, l'existence d'extremums est garantie par le théorème des bornes atteintes (Th. 9 p. 205).

11.3.2 Point critique

Définition
On dit qu'une fonction différentiable $f\colon U \to \mathbb{R}$ présente un *point critique* en $a \in U$ si sa différentielle y est nulle.

Théorème 10
Un point a de U est un point critique d'une fonction différentiable $f\colon U \to \mathbb{R}$ si, et seulement si, ses dérivées partielles s'y annulent simultanément.

Pour déterminer les points critiques, il suffit donc de résoudre un système traduisant l'annulation conjointe des dérivées partielles.

Théorème 11
Si une fonction différentiable $f\colon U \to \mathbb{R}$ présente un extremum en un point a de l'ouvert U, celui-ci est point critique de f.

En déterminant les points critiques de f, on détermine les points susceptibles d'être des extremums de la fonction. Notons cependant que ce résultat n'est exploitable que pour les fonctions définies sur une partie ouverte : les extremums situés sur le bord du domaine de définition d'une fonction ne peuvent être découverts ainsi.

11.3.3 Vecteur gradient

On suppose l'espace E euclidien de produit scalaire noté $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. On considère $f\colon U \to \mathbb{R}$ différentiable en un point a de U. La différentielle de f en a apparaît comme une forme linéaire sur E. Par le théorème de représentation des formes linéaires [1], il existe un unique vecteur de E, noté $\nabla f(a)$, vérifiant

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h\rangle \quad \text{pour tout } h \in E.$$

Définition
Le vecteur $\nabla f(a)$ est appelé *gradient* de f en a.

Théorème 12
Si $(e_1, \dots, e_p)$ désigne une base orthonormale de E et si $\partial_1 f, \dots, \partial_p f$ désignent les dérivées partielles de f relatives à cette base, on a

$$\nabla f(a) = \partial_1 f(a) e_1 + \cdots + \partial_p f(a) e_p.$$

En particulier, si f est une fonction de p variables réelles et si $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne usuelle

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right).$$

1. Voir Th 1 du chapitre 6 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MP*.

Théorème 13
Le développement limité à l'ordre 1 de f en a s'exprime

$$f(a+h) \underset{h\to 0_E}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + o(h).$$

La direction et le sens du vecteur gradient indique la direction au point a dans laquelle la progression de la fonction f est la plus forte. À l'inverse, le vecteur gradient est normal aux lignes de niveau de la fonction f.

11.4 Exercices d'apprentissage

Exercice 1 (Contre-exemple de Peano)
Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $(x,y)\neq(0,0)$ on pose

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

(a) Par quelle valeur peut-on prolonger f par continuité en $(0,0)$?
On note encore f la fonction définie par ce prolongement.
(b) Calculer les dérivées partielles de f en $(x,y)\neq(0,0)$.
(c) Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$.
(d) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
(e) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Solution

(a) **méthode**

> Pour prolonger f par continuité en le point $(0,0)$, il suffit d'étudier si la fonction f admet une limite finie en ce point.

L'étude de la limite de f en $(0,0)$ conduit à la résolution d'une forme indéterminée du type « $0/0$ ».

méthode

> Pour résoudre l'indétermination, on exprime x et y en coordonnées polaires.

Posons $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ avec [1]

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad\text{et}\quad \theta\in\mathbb{R} \text{ bien choisi en fonction de } (x,y)$$

1. Le réel r correspond à la norme euclidienne de (x,y).

il vient

$$f(x,y) = \frac{r^4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = r^2\cos\theta\sin\theta\underbrace{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}_{\cos(2\theta)}.$$

Lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, la distance à l'origine r tend vers 0 et l'expression en $\cos\theta$ et $\sin\theta$ est bornée. Par produit, la fonction f tend vers 0 en $(0,0)$. On peut prolonger f par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0)=0$.

(b) **méthode**

> Lorsqu'il a été convenu de noter x et y les variables d'une fonction f, il est usuel de noter ses dérivées partielles
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x} \quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les dérivées partielles sont les dérivées des deux applications partielles $x\mapsto f(x,y)$ et $y\mapsto f(x,y)$.

méthode

> Pour calculer une dérivée partielle, on dérive l'expression en la variable étudiée en considérant toutes les autres variables comme des paramètres fixés.

Par opérations sur les fonctions dérivables, on peut assurer l'existence des dérivées partielles qui suivent tout en calculant [1] celles-ci :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\left(\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right)}_{y \text{ fixé}} = \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\underbrace{\left(\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right)}_{x \text{ fixé}} = \frac{x(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

(c) **méthode**

> En $(0,0)$, les dérivées partielles peuvent être calculées en revenant à la définition d'un nombre dérivé : la limite d'un taux d'accroissement.

Sous réserve d'existence, les dérivées partielles de f en $(0,0)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{t}\big(f(t,0)-f(0,0)\big) \quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{t}\big(f(0,t)-f(0,0)\big).$$

Dans les deux cas, le taux d'accroissement considéré est constamment nul et donc de limite nulle. La fonction f admet donc des dérivées partielles en $(0,0)$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

1. Comme $f(y,x)=-f(x,y)$ on peut aussi économiser quelques calculs...

(d) **méthode**

Généralement, on argumente qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ par opérations sur les fonctions qui le sont. Ici, le point $(0,0)$ échappe à cet argument car la fonction f y a été défini par un prolongement : on étudie alors existence et continuité des dérivées partielles en ce point.

Par opérations, f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Au voisinage de $(0,0)$, les dérivées partielles de f existent, il reste à étudier leur continuité en $(0,0)$.

En passant en coordonnées polaires, on obtient lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r \times (\text{expression bornée fonction de } \theta) \to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

La première dérivée partielle de f est donc continue en $(0,0)$. On vérifie de même la continuité de la deuxième dérivée partielle de f.

(e) **méthode**

Le caractère $\mathcal{C}^2$ de f est ici douteux : on vérifie que celui-ci n'a pas lieu en constatant que le théorème de Schwarz (Th. 3 p. 458) ne peut s'appliquer.

On calcule les dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$ en x et y dans un ordre et dans l'autre.

D'une part,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 1.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1.$$

Ces deux dérivées partielles n'étant pas égales, la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ exprimée en le couple de variables (x,y). Soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(u,v) = f\big(uv, u^2+v^2\big).$$

(a) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f.

(b) Exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de g en fonction des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de f.

Solution

(a) Par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$.

méthode

Les dérivées partielles de f et de g sont notées

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial g}{\partial u} \quad\text{et}\quad \frac{\partial g}{\partial v}.$$

On exprime les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f en appliquant la règle de la chaîne (Th. 2 p. 457).

En posant $x(u,v) = uv$ et $y(u,v) = u^2+v^2$, la règle de la chaîne donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)\\ &= v\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)\\ &= u\frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2).\end{aligned}$$

(b) Les dérivées partielles d'ordre 2 de g se calculent selon le même procédé et en exploitant le théorème de Schwarz pour regrouper les dérivées partielles égales. On prend garde à la présence d'un produit de fonctions lors de la dérivation.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) &= v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv,u^2+v^2) + 4uv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(uv,u^2+v^2)\\ &\quad + 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(uv,u^2+v^2) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2)\\ \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) &= uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv,u^2+v^2) + 2\big(u^2+v^2\big)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(uv,u^2+v^2)\\ &\quad + 4uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(uv,u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial x}(uv,u^2+v^2)\\ \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) &= u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(uv,u^2+v^2) + 4uv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(uv,u^2+v^2)\\ &\quad + 4v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(uv,u^2+v^2) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(uv,u^2+v^2).\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ tels que $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. Exprimer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \text{ en fonction de } \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta).$$

Solution

méthode

Puisque $g(r,\theta)$ s'exprime en fonction de f, il est possible d'exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f. En renversant le système ainsi obtenu, on peut exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Sachant $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$, on peut affirmer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition de fonctions qui le sont. On peut calculer ses dérivées partielles par application de la règle de la chaîne. On obtient

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)=\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Ainsi, on forme le système

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & (1)\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & (2).\end{cases}$$

En exploitant par combinaison d'équations l'identité $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, on peut isoler et exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g :

$$\cos\theta\times(1)-\frac{1}{r}\sin\theta\times(2) \quad\text{donne}\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\sin\theta\times(1)+\frac{1}{r}\cos\theta\times(2) \quad\text{donne}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Exercice 4

Trouver les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de

(a) $f(x,y)=x^2+xy+y^2+2x-2y$ (b) $f(x,y)=x^2+4xy+y^2-2x-4y$.

Solution

(a) **méthode**

Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert présente un extremum en un point, celui-ci est point critique de la fonction (Th. 11 p. 463) : on commence par déterminer ceux-ci.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Un point (x,y) est point critique de f si, et seulement si, il annule simultanément les dérivées partielles de f (Th. 10 p. 463).

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x+y+2=0\\ x+2y-2=0.\end{cases}$$

Après résolution, on obtient un seul point critique $(-2,2)$.

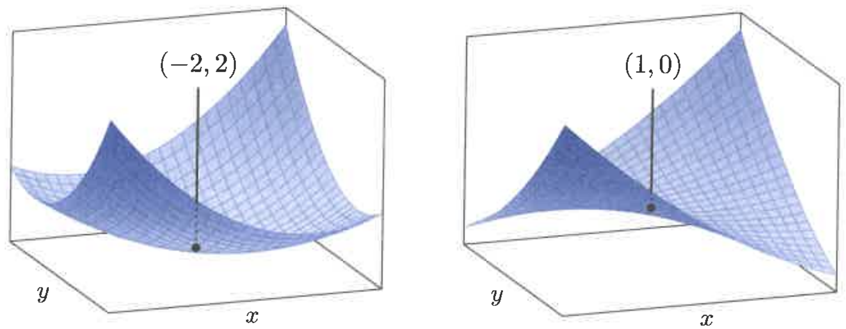
méthode

Pour étudier si f présente un extremum (global ou local) en un point critique (x_0,y_0), on étudie le signe de $f(x,y)-f(x_0,y_0)$. Il pourra être utile de translater la variable pour ramener le problème en $(0,0)$.

En posant $x=-2+u$ et $y=2+v$, on obtient [1]

$$f(x,y)-f(-2,2)=u^2+uv+v^2=\left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{3}{4}v^2\geqslant 0.$$

La fonction f admet un minimum global en $(-2,2)$ (et n'admet pas de maximums).



Les surfaces représentatives des deux fonctions étudiées.

(b) De la même manière, on obtient $(1,0)$ seul point critique. En posant $x=1+u$ et $y=v$

$$f(x,y)-f(1,0)=u^2+4uv+v^2=(u+2v)^2-3v^2.$$

Cette expression ne semble pas de signe constant...

1. Lors de cette translation, les termes en u et v disparaissent car $(0,0)$ est point critique de l'expression en la variable (u,v).

méthode

> Pour montrer l'absence d'extremum local à une fonction f en un point critique (x_0, y_0), on peut déterminer deux suites convergeant vers ce point et pour lesquelles les signes de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ sont strictement différents. On peut déterminer ces suites en essayant de mettre en avant l'un ou l'autre des carrés de l'expression précédente.

D'une part,

$$\left(1+\frac{1}{n},0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1,0) \quad \text{et} \quad f\left(1+\frac{1}{n},0\right) - f(1,0) \underset{v=0}{=} \frac{1}{n^2} > 0.$$

D'autre part,

$$\left(1-\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1,0) \quad \text{et} \quad f\left(1-\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) - f(1,0) \underset{u+2v=0}{=} -\frac{3}{n^2} < 0.$$

On peut conclure que f n'a pas d'extremum local en $(1,0)$ et donc pas d'extremums du tout.

Exercice 5

Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + xyf(x,y) = 0.$$

Solution

méthode

> Lorsqu'une équation aux dérivées partielles ne fait apparaître des dérivées partielles qu'en la même variable, il est possible de la résoudre en l'interprétant comme une équation différentielle en une application partielle.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction solution de l'équation proposée.

Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. La première dérivée partielle de f est la dérivée de l'application partielle $z\colon x \mapsto f(x,y)$. Celle-ci est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$z'(x) + xyz(x) = 0.$$

La résolution de cette équation différentielle (où y est considéré comme un paramètre) conduit à la solution générale

$$z(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2 y} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Puisque le paramètre λ a été déterminé pour y préalablement fixé, il est susceptible de dépendre de λ et détermine donc une fonction $y \mapsto \lambda(y)$.

En résumé, si f est solution de l'équation aux dérivées partielles, il existe une fonction $\lambda\colon y \mapsto \lambda(y)$ telle que

$$f(x,y) = \lambda(y)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2 y} \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Au surplus, cette fonction λ est de classe $\mathcal{C}^1$ car on peut l'exprimer à partir de f qui est de classe $\mathcal{C}^1$ en écrivant $\lambda(y) = f(0,y)$.

La réciproque est immédiate : les fonctions proposées sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles étudiée.

Au final, on dit que l'on a résolu l'équation aux dérivées partielles en opérant *une intégration en la variable x*. Celle-ci nous était possible car il ne figurait pas de dérivées partielles en y dans l'équation.

Exercice 6

Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

On pourra réaliser le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y. \end{cases}$$

Solution

méthode

> Lorsqu'une équation aux dérivées partielles fait intervenir des dérivées partielles relatives à différentes variables, un changement de variables peut permettre de ramener le problème à un problème analogue au précédent. On commence par étudier la fonction réalisant le changement de variables proposé.

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a l'équivalence

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3u - v \\ y = v - 2u. \end{cases}$$

Par conséquent, l'application $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(u,v) = (3u - v, v - 2u)$ réalise une bijection. Cette application est de plus de classe $\mathcal{C}^1$: on dit que ϕ est *la fonction de changement de variables*[1].

méthode

> Par le changement de variables, on introduit une nouvelle fonction g de sorte que « $g(u,v) = f(x,y)$ ». Précisément, la fonction g est définie par $g = f \circ \phi$. On transpose ensuite l'équation aux dérivées partielles étudiée en une équation équivalente en la fonction inconnue g.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g = f \circ \phi$. Par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$.

1. La fonction de changement de variables exprime les variables initiales en fonction des nouvelles variables.

Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a $g(u,v) = f(3u-v, v-2u)$. Par application de la règle de la chaîne, on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= 3\frac{\partial f}{\partial x}(3u-v,v-2u) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(3u-v,v-2u)\\ &= \left(3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\Bigg|_{(x,y)=(3u-v,v-2u)}\end{aligned}$$

L'application ϕ étant bijective :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}^2 &\iff \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\\ &\iff \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 3u - v.\end{aligned}$$

Cette dernière équation se résout par intégration en la variable u ce qui détermine la solution générale

$$g(u,v) = \frac{3}{2}u^2 - uv + \lambda(v)$$

avec λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$. On peut ensuite transposer cette résolution en la fonction inconnue initiale f et exprimer la solution générale[1] de (E)

$$f(x,y) = -\frac{x^2+4xy+3y^2}{2} + \lambda(2x+3y)$$

avec λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

11.5 Exercices d'entraînement

11.5.1 Fonctions de deux variables réelles

Exercice 7 *

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$f(x,y) = f(y,x) \quad \text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Quelle relation relie les dérivées partielles de f ?

1. On aurait aussi pu remarquer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{6}x^2$ est solution particulière. En exploitant celle-ci, à l'instar de la résolution des équations différentielles linéaires, on peut résoudre l'équation aux dérivées partielles étudiée en introduisant une équation homogène. La fonction $x \mapsto \frac{1}{6}x^2$ figure bien parmi les fonctions ici proposées, on l'obtient lorsque $\lambda(t) = \frac{1}{6}t^2$.

Solution

méthode

On dérive la relation proposée en la variable x.

D'une part, les dérivées partielles sont les dérivées des applications partielles :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x,y)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

D'autre part, en dérivant une composition de fonctions selon la règle de la chaîne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(y,x)\big) = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x).$$

On peut alors conclure[1]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \quad \text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Exercice 8 ** (Fonctions homogènes)

Soit $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est homogène de degré $\alpha\in\mathbb{R}$ lorsque

$$\forall t>0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

(a) On suppose f homogène de degré α. Montrer

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y) \quad \text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(b) Établir la réciproque.

Solution

(a) **méthode**

On dérive la relation définissant l'homogénéité en la variable t.

D'une part,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^\alpha \underbrace{f(x,y)}_{\text{constante}}\big) = \alpha t^{\alpha-1}f(x,y).$$

D'autre part, par application de la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(tx,ty)\big) &= \frac{\partial(tx)}{\partial t}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + \frac{\partial(ty)}{\partial t}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\\ &= x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty).\end{aligned}$$

En identifiant les relations puis en évaluant en $t=1$, on obtient l'identité voulue.

1. On obtient la même identité si l'on dérive la relation initiale en la variable y.

(b) **méthode**

Pour établir l'identité, on montre que la fonction différence des deux membres est une fonction constante de la variable t.

Supposons que la fonction f vérifie l'équation proposée. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ fixé et introduisons la fonction $\varphi\colon \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ déterminée par

$$\varphi(t)=f(tx,ty)-t^\alpha f(x,y)\quad\text{pour tout } t>0.$$

La fonction φ est dérivable et, par des calculs analogues à ceux menés ci-dessus,

$$\varphi'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)-\alpha t^{\alpha-1}f(x,y).$$

On a alors

$$t\varphi'(t)=tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)-\alpha t^\alpha f(x,y).$$

Par l'équation vérifiée par les dérivées partielles de f considérée au point (tx,ty) plutôt qu'au point (x,y), on obtient

$$t\varphi'(t)=\alpha f(tx,ty)-\alpha t^\alpha f(x,y)=\alpha\varphi(t).$$

La fonction φ est donc solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'=\alpha y$. Après résolution et sachant $\varphi(1)=0$, on peut affirmer que la fonction φ est nulle.

Finalement, la fonction f est homogène de degré α.

Exercice 9 **

Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de la variable complexe z de rayon de convergence R strictement positif. Sur le disque ouvert

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<R\}$$

on définit une fonction f par

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x+\mathrm{i}y)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\quad\text{avec}\quad z=x+\mathrm{i}y.$$

Montrer que f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0\quad\text{pour tout } (x,y)\in D.$$

Solution

Pour calculer la première dérivée partielle de f, on fixe $y\in\left]-R;R\right[$ et l'on étudie l'application partielle $x\mapsto f(x,y)$. Celle-ci est la somme de la série des fonctions u_n avec

$$u_n(x)=a_n(x+\mathrm{i}y)^n\quad\text{pour}\quad x\in\left]-r;r\right[\text{ et } r=\sqrt{R^2-y^2}.$$

C'est une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ convergeant simplement. Étudions la convergence uniforme de la série des dérivées :

$$u_n'(x)=na_n(x+\mathrm{i}y)^{n-1}\quad\text{pour}\quad n\geqslant 1.$$

Soit $\alpha\in[0;r[$. Pour tout $x\in[-\alpha;\alpha]$, on a

$$|u_n'(x)|=n\,|a_n|\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n-1}\leqslant n\,|a_n|\,\rho^{n-1}\quad\text{avec}\quad \rho=\sqrt{\alpha^2+y^2}<R.$$

Puisque la série entière dérivée $\sum na_nz^{n-1}$ est de rayon de convergence R (Th. 6 p. 358), la série numérique $\sum n\,|a_n|\,\rho^{n-1}$ converge et il y a donc convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n'$ sur tout segment de l'intervalle $\left]-r;r\right[$. On peut alors affirmer que l'application partielle $x\mapsto f(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x,y)\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(x+\mathrm{i}y)^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nz^{n-1}.$$

Par une étude très semblable, on a aussi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big(f(x,y)\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^{n-1}=\mathrm{i}\sum_{n=1}^{+\infty}na_nz^{n-1}.$$

Les dérivées partielles premières de f apparaissent comme étant elles aussi des sommes de séries entières de rayon de convergence $R>0$. On peut donc affirmer qu'elles aussi admettent des dérivées partielles et constater [1]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nz^{n-2}+\mathrm{i}^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nz^{n-2}=0.$$

11.5.2 Différentielle

Exercice 10 *

Soit $f\colon\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M)=M^3$.

Justifier que f est différentiable et calculer sa différentielle en tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution

méthode

La fonction est différentiable par opérations sur les fonctions différentiables.

L'application identité $M\mapsto M$ est différentiable car linéaire. Le produit matriciel définit une application bilinéaire et, par composition (Th. 7 p. 460), la fonction $M\mapsto M^2$

1. On dit qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f^2}{\partial y^2}=0$ qu'elle est *harmonique*.

est différentiable. À nouveau par composition avec un produit, la fonction $M \mapsto M^3$ est différentiable [1].

méthode

> On peut calculer la différentielle de f en raisonnant par opérations sur les fonctions différentiables ou, et c'est ici plus commode, par l'obtention d'un développement limité à l'ordre 1.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$f(M+H) = \underbrace{M^3}_{f(M)} + \underbrace{M^2H + MHM + HM^2}_{\ell(H)} + MH^2 + HMH + MH^2 + H^3. \qquad (*)$$

D'une part, l'application ℓ est linéaire. D'autre part, en introduisant une norme sous-multiplicative [2] sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\|MH^2 + HMH + MH^2 + H^3\| &\leqslant 3\|M\|\,\|H\|^2 + \|H\|^3\\ &= \underbrace{\left(3\|M\|\,\|H\| + \|H\|^2\right)}_{\to 0}\|H\| \underset{H\to O_n}{=} o(H).\end{aligned}$$

La relation $(*)$ exprime donc le développement limité à l'ordre 1 de f en M. L'application linéaire ℓ est donc la différentielle de f en M. On retrouve à nouveau que la fonction f est différentiable et l'on peut exprimer sa différentielle :

$$\mathrm{d}f(M) : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H \mapsto M^2H + MHM + HM^2. \end{cases}$$

Exercice 11 **

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $(\cdot\,|\,\cdot)$ et u un endomorphisme symétrique de E.

(a) Montrer que l'application $f : x \mapsto \big(u(x)\,|\,x\big)$ de E vers $\mathbb{R}$ est différentiable et calculer sa différentielle en tout point de E.

(b) Montrer que l'application

$$F : x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \frac{\big(u(x)\,|\,x\big)}{(x\,|\,x)}$$

est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et que sa différentielle vérifie, pour tout $a \in E \setminus \{0_E\}$,

$$\mathrm{d}F(a) = 0 \iff a \text{ est vecteur propre de } u.$$

1. On peut aussi affirmer que f est différentiable car les coefficients de M^3 sont des polynômes en les coefficients de M.

2. Une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une norme $\|\cdot\|$ vérifiant $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ pour tous A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De telles normes existent : voir sujet 9 p. 115.

Solution

(a) Soit $a \in E$. Pour tout $h \in E$, on obtient par développement d'un produit scalaire

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \big(u(a+h)\,|\,a+h\big) = \big(u(a)+u(h)\,|\,a+h\big)\\ &= \big(u(a)\,|\,a\big) + \big(u(a)\,|\,h\big) + \big(u(h)\,|\,a\big) + \big(u(h)\,|\,h\big).\end{aligned}$$

Sachant l'endomorphisme u symétrique, on a $\big(u(h)\,|\,a\big) = \big(h\,|\,u(a)\big)$ puis

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{2\big(u(a)\,|\,h\big)}_{=\ell(h)} + \big(u(h)\,|\,h\big). \qquad (*)$$

D'une part, l'application ℓ est linéaire. D'autre part, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et continuité de l'endomorphisme u

$$\left|\big(u(h)\,|\,h\big)\right| \leqslant \underbrace{\|u(h)\|}_{\to 0}\|h\| \underset{h\to 0_E}{=} o(h).$$

La relation $(*)$ constitue alors le développement limité à l'ordre 1 de f en a. L'application linéaire ℓ est donc la différentielle de f en a :

$$\mathrm{d}f(a) : h \mapsto 2\big(u(a)\,|\,h\big).$$

(b) **méthode**

> Pour des fonctions différentiables convenables, on dispose des formules
>
> $$\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g, \quad \mathrm{d}(fg) = f\,\mathrm{d}g + g\,\mathrm{d}f, \quad \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g}{g^2}, \ldots$$

La fonction F est différentiable sur $E\setminus\{0\}$ en tant que rapport défini de deux fonctions différentiables. Par différentiation du quotient f/g avec $f(x) = \big(u(x)\,|\,x\big)$ et $g(x) = (x\,|\,x)$, on obtient

$$\mathrm{d}F(a) = \frac{g(a)\,\mathrm{d}f(a) - f(a)\,\mathrm{d}g(a)}{\big(g(a)\big)^2}.$$

Ainsi, pour $h \in E$,

$$\mathrm{d}F(a)\cdot h = 2\,\frac{\|a\|^2\big(u(a)\,|\,h\big) - \big(u(a)\,|\,a\big)(a\,|\,h)}{\|a\|^4} = 2\big(v(a)\,|\,h\big)$$

avec

$$v(a) = \frac{1}{\|a\|^2}u(a) - \frac{\big(u(a)\,|\,a\big)}{\|a\|^4}a.$$

Si la différentielle de F en a est nulle, le vecteur $v(a)$ est nul et donc $u(a)$ est colinéaire à a : a est un vecteur propre de u.

Inversement, si a est un vecteur propre de u, on peut écrire $u(a) = \lambda a$ avec λ la valeur propre associée. Un calcul direct permet alors de vérifier que le vecteur $v(a)$ est nul et donc la différentielle de F en a aussi.

Exercice 12 **

On étudie l'application $f\colon M \mapsto M^{-1}$ définie sur l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(a) En exploitant l'identité $(\mathrm{I}_n + H)(\mathrm{I}_n - H) = \mathrm{I}_n - H^2$, établir que l'application f est différentiable en I_n.

(b) En déduire que f est différentiable en toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et exprimer sa différentielle.

Solution

(a) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour H assez proche de O_n, la matrice $\mathrm{I}_n + H$ est inversible (car I_n est élément de l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) et l'identité $(\mathrm{I}_n + H)(\mathrm{I}_n - H) = \mathrm{I}_n - H^2$ donne

$$(\mathrm{I}_n - H) = (\mathrm{I}_n + H)^{-1}(I_n - H^2) = (\mathrm{I}_n + H)^{-1} - (\mathrm{I}_n + H)^{-1}H^2.$$

En réorganisant les membres, on obtient

$$f(\mathrm{I}_n + H) = (\mathrm{I}_n + H)^{-1} = \underbrace{\mathrm{I}_n}_{f(\mathrm{I}_n)} + \underbrace{(-H)}_{\ell(H)} + (\mathrm{I}_n + H)^{-1}H^2. \qquad (*)$$

D'une part, l'application ℓ est linéaire. D'autre part, on a

$$(\mathrm{I}_n + H)^{-1}H^2 = \underbrace{(\mathrm{I}_n + H)^{-1}H}_{\to \mathrm{O}_n} \times H \underset{H \to \mathrm{O}_n}{=} \mathrm{o}(H).$$

La relation $(*)$ exprime[1] donc un développement limité à l'ordre 1 de f en I_n. L'application f est alors différentiable en I_n et

$$\mathrm{d}f(I_n)\colon H \mapsto -H.$$

(b) Étudions la différentiabilité de f en $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

méthode

On exploite le calcul précédent en ramenant l'étude de M à I_n.

Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + H$ soit inversible, on a

$$(M + H)^{-1} = \Big(M\big(\mathrm{I}_n + M^{-1}H\big)\Big)^{-1} = \big(\mathrm{I}_n + M^{-1}H\big)^{-1}M^{-1}.$$

En exploitant le développement limité de f en I_n, on poursuit

$$(M + H)^{-1} \underset{H \to \mathrm{O}_n}{=} \big(\mathrm{I}_n - M^{-1}H + \mathrm{o}(H)\big)M^{-1} = \underbrace{M^{-1}}_{f(M)} - \underbrace{M^{-1}HM^{-1}}_{\text{linéaire en } H} + \mathrm{o}(H).$$

La fonction f est donc différentiable en M avec

$$\mathrm{d}(f)(M)\colon H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}.$$

1. Cette relation est liée à l'égalité $(I + H)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n H^n = \mathrm{I}_n - H + \mathrm{o}(H)$ au voisinage de O_n.

Exercice 13 ***

Soit $\Delta\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\Delta(A) = \det(A)$.

(a) Justifier que l'application Δ est différentiable.

On convient de noter $a_{i,j}$ (avec $1 \leqslant i, j \leqslant n$) les coefficients génériques d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) En exploitant un développement selon une rangée, exprimer en fonction des cofacteurs de A, les dérivées partielles

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{i,j}}(A).$$

(c) En déduire la différentielle de l'application Δ.

Solution

(a) Par la formule du déterminant, on peut écrire

$$\Delta(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\right).$$

Chaque fonction $A \mapsto a_{i,j}$ est différentiable car linéaire. Par somme de produits de fonctions différentiables, on peut affirmer que la fonction Δ est aussi différentiable.

(b) En notant $A_{i,j}$ les cofacteurs de la matrice A, le développement du déterminant selon la i-ème ligne donne

$$\Delta(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{i,k}.$$

Aucun des cofacteurs $A_{i,k}$ de cette somme ne dépend du coefficient $a_{i,j}$ car ces cofacteurs sont tous calculés à partir d'un déterminant dont on a retiré la ligne d'indice i. L'expression précédente s'apparente donc à une écriture

$$\Delta(A) = \alpha a_{i,j} + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = A_{i,j} \text{ et } \beta = \sum_{k \neq j} a_{i,k}A_{i,k} \text{ constantes.}$$

On en déduit

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{i,j}}(A) = A_{i,j}.$$

(c) **méthode**

On peut exprimer la différentielle d'une fonction à partir de ses dérivées partielles dans une base (Th. 4 p. 459).

Les dérivées partielles précédentes correspondent aux dérivées partielles de l'application Δ dans la base $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (en effet, les coefficients $a_{i,j}$ sont les coordonnées de la matrice A dans cette base). On a donc l'identité

$$\mathrm{d}\Delta(A)\cdot E_{i,j} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{i,j}}(A) = A_{i,j}.$$

Pour $H = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire par linéarité de la différentielle

$$\mathrm{d}\Delta(A)\cdot H = \mathrm{d}\Delta(A)\cdot \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j}E_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j}\,\mathrm{d}\Delta(A)\cdot E_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j}A_{i,j}.$$

En introduisant la comatrice de A, il vient

$$\mathrm{d}\Delta(A)\cdot H = \sum_{j=1}^{n}\Big[{}^t\big(\mathrm{Com}(A)\big)H\Big]_{j,j} = \mathrm{tr}\Big({}^t\big(\mathrm{Com}(A)\big)H\Big).$$

Notons que si l'on introduit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la comatrice de A détermine le gradient de l'application déterminant en A.

11.5.3 Recherche d'extremums

Exercice 14 *
Déterminer les extremums locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1.$$

Solution
La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

Déterminons les points critiques de f :

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

La fonction f admet donc deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.
Étude en $(0,0)$: on détermine le signe de

$$g(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Le signe de g n'est pas constant au voisinage de $(0,0)$ car

$$\left(\frac{1}{n},0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0) \quad \text{et} \quad g\left(\frac{1}{n},0\right) = \frac{1}{n^3} > 0$$

et

$$\left(-\frac{1}{n},0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0) \quad \text{et} \quad g\left(-\frac{1}{n},0\right) = -\frac{1}{n^3} < 0.$$

Il n'y a pas d'extremum local en $(0,0)$.
Étude en $(1,1)$: on étudie le signe de

$$g(x,y) = f(x,y) - f(1,1) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

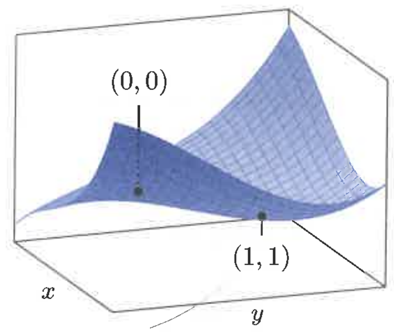
méthode
Par la translation $x = 1 + u$ et $y = 1 + v$, on rapporte le problème en $(0,0)$.

$$\begin{aligned} g(x,y) = g(1+u,1+v) &= 3u^2 + 3v^2 - 3uv + u^3 + v^3 \\ &= \frac{3}{2}\underbrace{(u-v)^2}_{\geqslant 0} + \frac{3}{2}u^2 + u^3 + \frac{3}{2}v^2 + v^3. \end{aligned}$$

Pour (u,v) voisin de $(0,0)$ (c'est-à-dire (x,y) voisin de $(1,1)$)

$$\frac{3}{2}u^2 + u^3 = u^2\underbrace{\left(\frac{3}{2} + u\right)}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}v^2 + v^3 = v^2\underbrace{\left(\frac{3}{2} + v\right)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

et donc $g(x,y) \geqslant 0$. La fonction f admet un minimum local en $(1,1)$ de valeur -2.
Cependant, $f(t,0) = t^3$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers $-\infty$ et la fonction f n'est donc pas minorée. Le minimum en $(1,1)$ n'est que local. Enfin, la fonction f n'a pas d'autres points critiques, il n'y a pas de maximums.



Les points critiques de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$.

Exercice 15 **
Calculer

$$\inf_{x,y>0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy\right).$$

Solution

Introduisons la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy.$$

méthode

> Plutôt que de réaliser une étude d'extremums de la fonction, il est plus efficace de raisonner « par tranches » en exploitant
>
> $$\inf_{x,y>0} f(x,y) = \inf_{x>0}\Big(\inf_{y>0} f(x,y)\Big).$$

Soit $x > 0$ fixé. L'étude des variations de l'application partielle $f_x\colon y \mapsto f(x,y)$ conduit au tableau ci-dessous

y	0		$1/\sqrt{x}$		$+\infty$
$f_x'(y)$		$-$	0	$+$	
$f_x(y)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Sur ce tableau, on lit

$$\inf_{y>0} f(x,y) = f\left(x, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} = g(x).$$

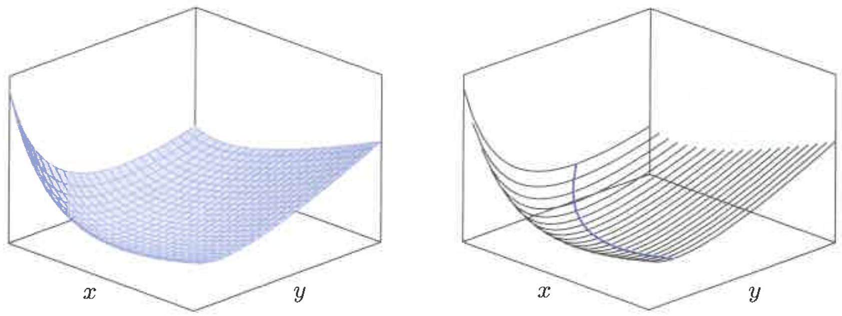
L'étude des variations de la fonction g ainsi définie donne le tableau

y	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors conclure

$$\inf_{x,y>0} f(x,y) = \inf_{x>0} g(x) = g(1) = 3.$$

Ce minimum pour la fonction f est atteint en $(1,1)$.



À gauche, la surface représentative de f. À droite, le découpage par tranche accompagné de la courbe des minimums sur chaque tranche.

Exercice 16 **

Soit $f\colon (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$ définie sur

$$T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geqslant 0 \text{ et } x+y \leqslant 1\big\}.$$

(a) Justifier que f est continue et présente un maximum à l'intérieur de T.

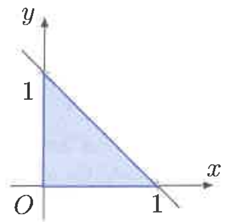
(b) Déterminer sa valeur.

Solution

(a) La fonction f est polynomiale donc continue.

méthode

> Les fonctions réelles définies et continues sur une partie compacte non vide admettent un minimum et un maximum (Th. 9 p. 205).



La partie T est fermée car c'est l'intersection des trois demi-plans fermés définis par les inéquations larges $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 1$. La partie T est aussi bornée car ses éléments (x,y) vérifient $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$. La partie T est donc compacte car fermée et bornée en dimension finie. La fonction f est définie et continue sur le compact T elle admet donc un maximum en un certain point $(x_0, y_0) \in T$.

De plus, la fonction f est nulle sur le bord de T et strictement positive dans son intérieur. Le maximum de f est donc atteint en un point intérieur à T.

(b) **méthode**

> Si une fonction différentiable atteint un extremum en un point intérieur à son domaine de définition, celui-ci est point critique de cette fonction.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de T et a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-2x-y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-x-2y).$$

Les points critiques de f à l'intérieur de T sont ceux vérifiant

$$\begin{cases} y(1-2x-y)=0 \\ x(1-x-2y)=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x>0, y>0, x+y<1.$$

Après résolution, on obtient un seul point critique : $(1/3, 1/3)$. Le maximum de la fonction f est nécessairement atteint en ce point [1] et donc

$$\max_{(x,y)\in T} f(x,y) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}.$$

Exercice 17 **

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au départ de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\| \geqslant 1 \implies \mathrm{d}f(x)\cdot x \geqslant 0.$$

Montrer que f admet un minimum absolu [2].

Solution

Notons B la boule unité fermée pour la norme en cours. La fonction f est différentiable donc continue sur B : elle y admet un minimum en un certain élément a. L'enjeu est alors d'établir que ce minimum sur B est aussi un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

méthode

On peut exprimer une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par une intégrale (Th. 9 p. 462) de sa différentielle. Il est alors possible de calculer $f(x)$ à partir d'un point du bord de B.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\|x\| \leqslant 1$ alors $f(x) \geqslant f(a)$ par définition de a. Si $\|x\| > 1$, introduisons $x_0 = \lambda x$ avec $\lambda = 1/\|x\|$. L'élément x_0 est de norme 1, il appartient donc au bord de B et vérifie ainsi $f(x_0) \geqslant f(a)$. Au surplus, en considérant le paramétrage $\gamma\colon t \mapsto tx_0$ pour t allant de 1 à $\|x\|$, on peut écrire

$$f(x) - f(x_0) = \int_1^{\|x\|} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f(\gamma(t))\Big)\,\mathrm{d}t = \int_1^{\|x\|} \underbrace{\mathrm{d}f(tx_0)\cdot x_0}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

En effet, $\mathrm{d}f(tx_0)\cdot x_0$ est du signe de $\mathrm{d}f(tx_0)\cdot tx_0$ et ce dernier est positif puisque tx_0 est de norme supérieure à 1. On obtient ainsi $f(x) \geqslant f(x_0)$ donc $f(x) \geqslant f(a)$.

Finalement, a est un minimum absolu de la fonction f.

1. En revanche, la fonction f atteint son minimum de valeur nulle en tout point du bord de T.
2. Un *minimum absolu* est un minimum global.

11.5.4 Résolution d'équations aux dérivées partielles

Exercice 18 *

Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$(E)\colon \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y).$$

On opérera le changement de variables défini par le système

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y. \end{cases}$$

Solution

méthode

On étudie le changement de variables avant d'introduire une nouvelle fonction des nouvelles variables correspondant à la fonction initiale.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Introduisons la fonction de changement de variables $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

La fonction ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(u,v) = \text{« } f(x,y) \text{ »} = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Par composition, la fonction $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on peut calculer ses dérivées partielles par la règle de la chaîne. En particulier, on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\Big|_{(x,y)=\phi(u,v)}.$$

Par conséquent, la fonction f est solution de l'équation (E) si, et seulement si, g est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(E')\colon 2\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = g(u,v).$$

Cette équation, se comprend comme l'équation différentielle $2y' = y$ en l'application partielle $u \mapsto g(u,v)$ ce qui permet de la résoudre. La solution générale de l'équation (E') est alors

$$g(u,v) = \lambda(v)\mathrm{e}^{u/2} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

En revenant aux variables initiales, on en déduit la solution générale de l'équation (E)

$$f(x,y) = \mu(x-y)\mathrm{e}^{(x+y)/2} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

où la fonction μ est déterminée par $\mu(t) = \lambda(t/2)$ pour tout réel t.

Exercice 19 ** (Équation des ondes)

Soit $c > 0$. En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$(E)\colon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t).$$

Solution

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ t = \frac{1}{2c}(u-v). \end{cases}$$

Introduisons la fonction de changement de variables $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right).$$

La fonction ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(u,v) = « f(x,y) » = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right).$$

méthode

L'une des dérivées partielles d'ordre 2 de g est liée à l'équation (E), reste à découvrir laquelle !

Par composition, la fonction $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) + \frac{1}{2c} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$$

et, après simplification de deux termes de dérivées partielles en x et t par le théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) - \frac{1}{4c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right).$$

Ainsi, f est solution de l'équation (E) si, et seulement si, g est solution de l'équation [1]

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0.$$

En intégrant successivement en u et v on obtient la solution générale

$$g(u,v) = \lambda(u) + \mu(v) \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

On en déduit la solution générale de (E)

$$f(x,t) = \lambda(x+ct) + \mu(x-ct) \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Exercice 20 **

En passant en coordonnées polaires, résoudre sur $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles

$$(E)\colon x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xy.$$

Solution

méthode

Le passage aux coordonnées polaires consiste à réaliser le changement de variables déterminé par

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

avec r et θ variant dans des intervalles à préciser selon le domaine où évolue le couple (x,y).

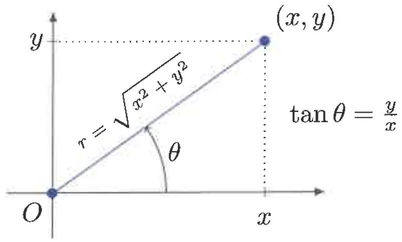
Introduisons la fonction de changement de variables $\phi\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par

$$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Celle-ci ne réalise pas une bijection. Cependant, nous limitons le couple (x,y) à évoluer dans $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. En restreignant le domaine où évolue θ à l'intervalle $I =]-\pi/2\,;\pi/2[$, on peut inverser ce changement de variable.

Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times I$ et $(x,y) \in \Omega$:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases}$$



La fonction ϕ induit alors une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^* \times I$ vers Ω.

1. On peut aussi former « naturellement » cette équation en exprimant les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $g\colon \mathbb{R}_+^* \times I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(r,\theta) = \text{« } f(x,y) \text{ »} = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Par composition, la fonction $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On peut calculer ses dérivées partielles par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \left(\cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\cos\theta\sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)\Bigg|_{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}$$

La fonction f est alors solution sur Ω de l'équation (E) si, et seulement si, g est solution sur $\mathbb{R}_+^* \times I$ de l'équation

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = r^2 \cos\theta \sin\theta \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos\theta\sin\theta.$$

En intégrant deux fois en la variable r, la solution générale de cette équation s'exprime

$$g(r,\theta) = \frac{1}{2}r^2\cos\theta\sin\theta + \lambda(\theta) + \mu(\theta)r \quad \text{avec} \quad \lambda,\mu \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R}).$$

On peut alors exprimer la solution générale de l'équation (E)

$$f(x,y) = \frac{1}{2}xy + \lambda\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) + \mu\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{avec} \quad \lambda,\mu \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R}).$$

On peut cependant simplifier notablement cette expression car les fonctions λ et μ parcourent l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. En considérant les fonctions composées $\tilde{\lambda} = \lambda \circ \arctan$ et $\tilde{\mu} = \mu \circ \arctan$, on peut proposer la description équivalente suivante

$$f(x,y) = \frac{1}{2}xy + \tilde{\lambda}\left(\frac{y}{x}\right) + \tilde{\mu}\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{avec} \quad \tilde{\lambda},\tilde{\mu} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Aussi, en écrivant

$$\sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

on parvient à la description :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}xy + \tilde{\lambda}\left(\frac{y}{x}\right) + \tilde{\tilde{\mu}}\left(\frac{y}{x}\right)x \quad \text{avec} \quad \tilde{\lambda},\tilde{\tilde{\mu}} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Exercice 21 **

Résoudre sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$(E)\colon y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Solution

méthode

Lorsqu'aucun changement de variables n'est précisé, c'est sans doute qu'il faut passer en coordonnées polaires.

La fonction ϕ de changement de variables est

$$\phi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \Omega \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{cases}$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^1$, surjective, mais non bijective. On peut seulement exprimer r en fonction de (x,y) :

$$r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

méthode

On ne peut pas exprimer θ de façon général car il n'est pas unique. Même en restreignant l'intervalle où évolue θ, il n'existe pas de détermination continue [1] de θ valable pour (x,y) parcourant tout $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(r,\theta) = \text{« } f(x,y) \text{ »} = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Par composition, la fonction $g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En calculant ses dérivées partielles par la règle de la chaîne, on constate

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \left(-y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\Bigg|_{(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)}$$

L'application ϕ étant surjective, la fonction f est solution de l'équation (E) sur Ω si, et seulement si, g est solution sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de l'équation aux dérivées partielles

$$(E')\colon \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0.$$

En intégrant en la variable θ, la solution générale de l'équation (E') s'exprime

$$g(r,\theta) = \lambda(r) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}).$$

Puisque cette solution s'exprime uniquement en fonction de r et non de θ, on peut revenir aux variables initiales et exprimer la solution générale de l'équation (E)

$$f(x,y) = \lambda\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}).$$

La fonction λ de cette description parcourant l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on peut, en considérant la fonction composée $\mu = \lambda \circ \sqrt{\cdot}$, proposer une description plus simple de la solution générale de (E)

$$f(x,y) = \mu\big(x^2+y^2\big) \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}).$$

1. Cependant, si on limite (x,y) dans $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$, on peut proposer $\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ lorsque l'on choisit $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$: voir sujet 28 du chapitre 2 de l'ouvrage *Exercices d'analyse MPSI*.

11.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 22 *

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

(a) Montrer que

$$\langle f(x), x\rangle > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ non nul.}$$

(b) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle.$$

Calculer le vecteur gradient de g en tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrer que g admet un unique point critique.

(d) Montrer que g admet un minimum global.

Solution

(a) **méthode**

> On calcule $\langle f(x), x\rangle$ en introduisant une base orthonormale de vecteurs propres de f.

Par le théorème spectral, on peut introduire une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ de vecteurs propres de f car l'endomorphisme f est symétrique. Tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ peut alors s'écrire

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \quad \text{avec} \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

En notant λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i, on a

$$f(x) = \lambda_1x_1e_1 + \cdots + \lambda_nx_ne_n.$$

La base $(e_1,\dots,e_n)$ étant orthonormale, on peut calculer le produit scalaire des vecteurs $f(x)$ et x à l'aide des écritures précédentes pour obtenir

$$\langle f(x), x\rangle = \lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_nx_n^2.$$

Sachant les valeurs propres λ_i strictement positives, le produit scalaire ci-dessus est strictement positif dès que le vecteur x est non nul.

(b) Par opérations, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc introduire son gradient en tout point.

méthode

> Le vecteur gradient se lit sur un développement limité à l'ordre 1 (Th. 13 p. 464).

Pour $h \in \mathbb{R}^n$, on obtient par développement de produit scalaire

$$\begin{aligned} g(x+h) &= \frac{1}{2}\langle f(x+h), x+h\rangle - \langle u, x+h\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle + \frac{1}{2}\langle f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), x\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle - \langle u, x\rangle - \langle u, h\rangle. \end{aligned}$$

En réorganisant les termes et en exploitant la symétrie de l'endomorphisme f

$$g(x+h) = g(x) + \langle f(x), h\rangle - \langle u, h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\langle f(h), h\rangle\right| \leqslant \underbrace{\left\|f(h)\right\|}_{\to 0}\left\|h\right\| \underset{h\to 0}{=} \mathrm{o}(h).$$

On a donc le développement limité à l'ordre 1

$$g(x+h) \underset{h\to 0}{=} g(x) + \langle f(x) - u, h\rangle + \mathrm{o}(h).$$

Sur ce développement limité, on lit le vecteur gradient [1]

$$\nabla g(x) = f(x) - u.$$

(c) **méthode**

> Un point critique est un point où le vecteur gradient s'annule.

L'endomorphisme f est bijectif car 0 n'en est pas valeur propre. On obtient donc

$$\nabla g(x) = 0 \iff x = f^{-1}(u).$$

La fonction g admet alors un unique point critique, à savoir $a = f^{-1}(u)$.

(d) Pour $h \in \mathbb{R}^n$, on obtient par développement et sachant $f(a) = u$

$$\begin{aligned} g(a+h) &= \frac{1}{2}\langle f(a+h), a+h\rangle - \langle u, a+h\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle f(a), a\rangle + \langle f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle - \langle u, a\rangle - \langle u, h\rangle \\ &= g(a) + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle \geqslant g(a). \end{aligned}$$

La fonction g admet donc un minimum global en a.

1. Ce vecteur gradient pouvait aussi être calculé à partir des dérivées partielles de g dans une base orthonormale (Th. 12 p. 463) : la base de vecteurs propres introduite à la question précédente est alors commode pour mener ce calcul.

Exercice 23 ** (Fonctions harmoniques)
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(a) Établir l'existence d'une application de $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

(b) Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

Montrer que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer φ.

Solution

(a) **méthode**

> Par analyse-synthèse, on détermine une fonction g solution exprimée à partir d'intégrales en les dérivées partielles de f.

Analyse : Soit g une fonction solution. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \big(g(x,y) - g(0,y)\big) + \big(g(0,y) - g(0,0)\big) + g(0,0) \\ &= \int_0^x \frac{\partial g}{\partial x}(s,y)\,\mathrm{d}s + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial y}(0,t)\,\mathrm{d}t + g(0,0) \\ &= -\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(s,y)\,\mathrm{d}s + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(0,t)\,\mathrm{d}t + g(0,0). \end{aligned}$$

Ceci détermine g à une constante additive près.

Synthèse : Choisissons arbitrairement la valeur $g(0,0) = 0$ et considérons la fonction g définie par

$$g(x,y) = -\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(s,y)\,\mathrm{d}s + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(0,t)\,\mathrm{d}t.$$

Vérifions que celle-ci est solution.

D'une part,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\left(-\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(s,y)\,\mathrm{d}s\right)}_{\text{primitive en } x} = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\left(\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(0,t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\text{indépendant de } x} = 0.$$

La fonction g admet donc une première dérivée partielle telle que voulue.

D'autre part, par dérivation d'une intégrale à paramètre, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(s,y)\,\mathrm{d}s\right) = -\int_0^x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s,y)\,\mathrm{d}s.$$

En effet, cette dérivation est possible car la fonction définissant l'intégrale admet une dérivée en y continue sur[1] $[0\,;x]\times\mathbb{R}$: ceci permet de justifier qu'il y a, sur tout segment $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$, domination par une constante (évidemment intégrable entre 0 et x).

Grâce à l'hypothèse vérifiée par f, on peut calculer cette intégrale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(s,y)\,\mathrm{d}s\right) = \int_0^x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,y)\,\mathrm{d}s = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s,y)\right]_{s=0}^{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,y).$$

On a aussi par dérivation d'une primitive

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(0,t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(s,y)\,\mathrm{d}s + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(0,t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

La fonction g admet donc aussi une deuxième dérivée partielle telle que voulue. Enfin, ses dérivées partielles étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$.

(b) Posons $h\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définissant l'intégrale

$$h(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et admet donc une dérivée partielle

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Cette dérivée partielle est continue sur $\mathbb{R}\times[0\,;2\pi]$ ce qui permet à nouveau d'assurer qu'il y a, sur tout segment $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$, domination par une constante (évidemment intégrable sur $[0\,;2\pi]$). La fonction φ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[g(r\cos\theta, r\sin\theta)\Big]_{\theta=0}^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

La fonction φ est donc constante égale à $\varphi(0) = 2\pi f(0,0)$.

1. Éventuellement, lire $[x\,;0]$ lorsque x est négatif.

Exercice 24 **

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'en tout point la matrice[1] de la différentielle de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est antisymétrique.

Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = Ax + b.$$

Solution

méthode

On montre que la différentielle de f est constante avant de calculer f par intégration.

Notons $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f et $\partial_1, \ldots, \partial_n$ les opérateurs[2] de dérivation partielle dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

L'antisymétrie de la matrice de la différentielle de f signifie

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, \quad \partial_i(f_j) = -\partial_j(f_i).$$

Exploitons cette propriété pour établir que les dérivées partielles de f sont constantes. Soit $i, j, k \in [\![1\,;n]\!]$. Par antisymétrie

$$\partial_k(\partial_j f_i) = -\partial_k(\partial_i f_j).$$

On poursuit par le théorème de Schwarz

$$\partial_k(\partial_j f_i) = -\partial_i(\partial_k f_j).$$

On exploite alternativement antisymétrie et théorème de Schwarz :

$$\partial_k(\partial_j f_i) = \partial_i(\partial_j f_k) = \partial_j(\partial_i f_k) = -\partial_j(\partial_k f_i) = -\partial_k(\partial_j f_i).$$

Ainsi, les dérivées partielles $\partial_j f_i$ sont constantes car de dérivées partielles identiquement nulles sur le convexe $\mathbb{R}^n$. Posons $a_{i,j}$ la valeur de cette constante et A la matrice antisymétrique constituée des coefficients $a_{i,j}$. La matrice A est la matrice figurant la différentielle de f en tout point.

Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a pour tout x de $\mathbb{R}^n$

$$f(x) - f(0) = \Big[f(tx)\Big]_{t=0}^{1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(tx)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f(tx)\cdot x\,\mathrm{d}t$$

avec $\mathrm{d}f(tx)\cdot x = Ax$ constant. Ainsi, en posant $b = f(0) \in \mathbb{R}^n$, on obtient l'écriture

$$f(x) = Ax + b.$$

1. Cette matrice est la *matrice jacobienne* de l'application différentiable f.
2. $\partial_i f$ est une notation commune pour désigner la dérivée partielle d'indice i de f.

Exercice 25 ***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$f(M) = \Big(\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \ldots, \mathrm{tr}(M^n)\Big).$$

(a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Comparer le rang de $\mathrm{d}f(M)$ et le degré du polynôme minimal de M.

(c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution

(a) Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, l'application $M \mapsto M^k$ est différentiable par produit de fonctions qui le sont. La trace étant linéaire, l'application composée $M \mapsto \mathrm{tr}(M^k)$ est aussi différentiable. Enfin, ses différentes fonctions coordonnées dans la base de $\mathbb{R}^n$ étant différentiables, l'application f est aussi différentiable.

Calculons la différentielle de f en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de limite la matrice nulle, on peut affirmer par développement

$$(M+H)^k \underset{H \to O_n}{=} M^k + M^{k-1}H + M^{k-2}HM + \cdots + HM^{k-1} + \mathrm{o}(H)$$

(le terme $\mathrm{o}(H)$ regroupe tous les termes contenant au moins deux facteurs H).

Par linéarité de la trace et l'identité $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, on obtient[1]

$$\mathrm{tr}\big((M+H)^k\big) \underset{H \to O_n}{=} \mathrm{tr}(M^k) + k\,\mathrm{tr}\big(M^{k-1}H\big) + \mathrm{o}(H).$$

Ceci permet de déterminer la différentielle de chacune des fonctions coordonnées de f puis, finalement, la différentielle de f en M :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{d}f(M)\cdot H = \Big(\mathrm{tr}(H), 2\,\mathrm{tr}(MH), \ldots, n\,\mathrm{tr}\big(M^{n-1}H\big)\Big).$$

(b) **méthode**

On détermine le noyau de $\mathrm{d}f(M)$ que l'on exprime comme l'orthogonal d'un espace de dimension connue.

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\mathrm{d}f(M)\cdot H = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \forall k \in [\![0\,;n-1]\!], \quad \mathrm{tr}\big(M^{k-1}H\big) = 0.$$

En introduisant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\big({}^t\!AB\big)$$

1. Les coefficients d'une matrice $\mathrm{o}(H)$ sont chacun $\mathrm{o}(H)$ et donc la trace aussi.

on peut réinterpréter l'appartenance au noyau :

$$H \in \operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(M)) \iff H \in \operatorname{Vect}\left(\mathrm{I}_n, {}^tM, \dots, {}^t(M^{n-1})\right)^{\perp}.$$

L'espace vectoriel engendré par les matrices $\mathrm{I}_n, {}^tM, \dots, {}^t(M^{n-1})$ se confond avec l'espace des polynômes en la matrice ${}^tM$. Cet espace a la dimension du degré du polynôme minimal de ${}^tM$ et ce dernier se confond avec le polynôme minimal de M. On en déduit

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(M)) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \deg(\pi_M).$$

Par application de la formule de rang, on conclut

$$\operatorname{rg}(\mathrm{d}f(M)) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(M)) = \deg(\pi_M).$$

(c) Soit une matrice $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n. Nous allons vérifier qu'il existe une boule centrée en M_0 dans laquelle les matrices ont leurs polynômes minimaux tous de degré n.

Par l'étude qui précède, la différentielle de f en M_0 est de rang n (autrement dit surjective). Si l'on introduit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on peut assurer l'existence de matrices $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$(e_1, \dots, e_n) = \left(\mathrm{d}f(M_0) \cdot H_1, \dots, \mathrm{d}f(M_0) \cdot H_n\right).$$

Considérons ensuite l'application qui à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe le déterminant dans la base canonique de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\mathrm{d}f(M) \cdot H_1, \dots, \mathrm{d}f(M) \cdot H_n\right).$$

Cette application est continue et prend la valeur 1 en M_0. Il existe alors un voisinage de M_0 sur lequel cette application ne s'annule pas. En les matrices de ce voisinage, la différentielle de f est surjective et donc leurs polynômes minimaux sont de degré n.

Formulaire

Développements en séries entières

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{sur }]-1\,;1[\qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad \text{sur }]-1\,;1[$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{sur }]-1\,;1[\qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{sur }]-1\,;1[$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{sur }]-1\,;1[$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \text{sur }]-1\,;1[$$

Dans ce dernier développement, on remarquera que le premier terme comporte un produit vide, il est égal à 1.

Table des matières