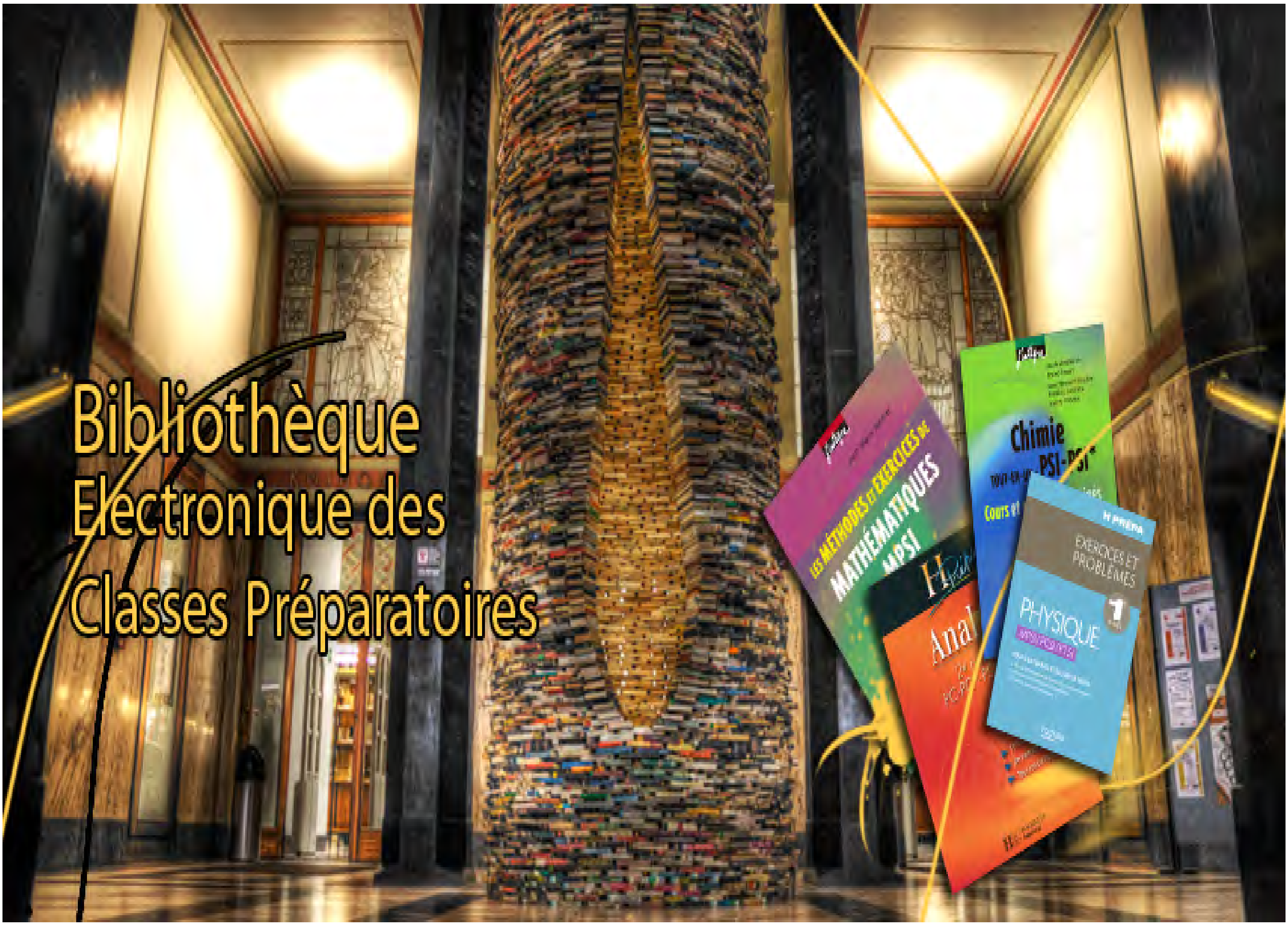

Bibliothèque
Electronique des
Classes Préparatoires
Chimie
PSI-PSI*
PHYSIQUE
EXERCICES ET PROBLÈMES
H PRÉPA
LES MÉTHODES ET EXERCICES DE
MATHÉMATIQUES
MPSI

Mathématiques

TOUT-EN-UN • 1re année

M th´m tiques

TOUT-EN-UN • 1re année

MPSI - PCSI

Sous la direction de

Claude Deschamps *et* **André Warusfel**

François Moulin
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm
*Professeur de Mathématiques Spéciales MP**
au lycee privé Sainte-Geneviève

Jean François Ruaud
Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm
Professeur de Mathématiques Spéciales MP
au lycée Saint-Louis

Anne Miquel
Ancienne élève de l'École polytechnique
Professeur de Mathématiques Supérieures MPSI
au lycée Louis-le-Grand

Jean-Claude Sifre
Ancien élève de l'École polytechnique
*Professeur de Mathématiques Spéciales PC**
au lycée Louis-le-Grand

2e édition
Nouveau tirage corrigé

DUNOD

Edmond Ramis ancien élève de l École Normale Supérieure de la rue d'Ulm,
a été professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Louis-le-Grand,
puis Doyen de l'Inspection générale de mathématiques.

Couverture : Bruno Loste

ISBN 978 2 10 007944 5

Préface

Ce nouveau cours de mathématiques supérieures et spéciales est le résultat d un triple pari :

- Les modifications substantielles apportées au système de classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques exigeaient qu'à côté du cours classique conçu et dirigé par EDMOND RAMIS vienne s'adjoindre une série adaptée aux donnes actuelles, profondément différente mais qui reste comparable quant à la qualité scientifique et pédagogique reconnue de ce modèle – ce défi n'étant pas le plus mince de ceux que nous avions à relever.

- L'état d'esprit nouveau résultant notamment de la contraction des horaires demandait que cette série réponde à deux exigences :

– couvrir tout le programme, mais rien que le programme ;

– fournir à l'étudiant un ouvrage de référence, clair et précis, complétant le cours du professeur plus irremplaçable que jamais.

- Faire tenir exposé et exercices (avec corrigés succincts) en un seul volume de format maniable pour chacune des deux annees.

Le succès remporté par les trois premiers tirages de ce volume ainsi que par les deux premiers tirages de l'ouvrage de seconde année montre que ce pari n était pas absurde. La qualité de l'équipe et son aptitude à méler limpidité et fluidité (autant que le sujet le permet) se retrouvent, croyons-nous, dans cette nouvelle édition, largement transformée pour satisfaire le plus exactement possible aux exigences de la refonte des programmes de MPSI et PCSI.

Certes, quelques entorses à ces principes sont visibles ci–et–là : des preuves très élémentaires des théorèmes (comme par exemple celui de d'Alembert–Gauss) figurent dans le cours de première année, et dépassent la norme ci–dessus. Nous avons pensé que leurs rôles culturels importants justifiaient ces accrocs à la règle fixée. Cela dit, elles n'impliquent en rien que nous suggérions leur étude en classe ; au contraire, leur présence dans un ouvrage de référence peut aider le professeur à l'étroit dans le carcan des horaires, qui se sentira moins coupable d'abandonner des démonstrations hautement instructives qu'il avait peut-être l'habitude d'offrir à ses étudiants.

Bien entendu, les parties figurant seulement au programme de la MPSI et les commentaires destinés aux étudiants de PCSI sont clairement distingués par des symboles dans la marge (MPSI et PCSI). Là encore, le fait que des élèves amenés à recevoir un cours moins étendu aient en leur possession, sous une forme commode, les compléments traités par leurs camarades de MPSI n'est pas une incitation à déborder des limites posées, mais seulement un élément sécurisant, intéressant pour ceux qui veulent consulter un peu au-delà du nécessaire, comme lorsqu'on se reporte à une encyclopédie pour enrichir sa culture personnelle.

Cet ouvrage est largement illustré d'exemples aidant à la bonne compréhension des concepts développés. Lorsque ces exemples font appel à des notions introduites plus loin, ils sont repérés par le symbole dans la marge et peuvent être laissés de côté lors d'une première lecture.

Au-delà du contenu de ce volume et dans l'état d'esprit que nous venons d'évoquer, la consultation des livres de la série-mère, ainsi que celle d'autres ouvrages français et étrangers, permettra s'il en est besoin de jouir d'un panorama plus large sur certains points ; cela dit, ce tome suffit évidemment totalement pour ce qui est du strict programme des classes de première année.

Qu'il nous soit permis de remercier ici JACK-MICHEL CORNIL et PHILIPPE TESTUD, qui retrouveront dans ces pages une partie de leurs idées intéressantes, et sans qui la rédaction aurait été plus difficile et pénible. Naturellement – et ce n'est pas une formule de style – tout lecteur qui repérerait, en dépit des relectures farouches de toute l'équipe (assistée notamment par MICHEL COLIN), telle ou telle erreur, ou qui proposerait telle ou telle simplification positive, sera le bienvenu. Nous le remercions par avance de nous aider à mieux gagner, pour le bien de tous, notre ambitieux challenge : aider les étudiants des classes préparatoires à maîtriser les mathématiques indispensables à la suite de leur carrière, et prouver que, comme un arbre ayant subi une taille plutôt sévère notre discipline incontournable peut et doit, encore aujourd'hui, apporter une contribution essentielle à la formation des scientifiques de demain.

Claude DESCHAMPS et Andre WARUSFEL

Table des matières

Chapitre 0

Vocabulaire et notations

Dans ce chapitre nous fixons certaines notations et définissons (ou rappelons la définition) des termes utilisés largement dans la suite de l'ouvrage. Plusieurs de ces notions ont déjà été introduites dans les classes antérieures.

Toutes ces notions sont reprises en détail dans la dernière partie du livre[1] (sauf les espaces vectoriels dont l'étude complète est faite page 777). En cas de besoin, il sera donc parfois utile de consulter leur définition exacte ainsi que leurs propriétés élémentaires.[2]

Il est inutile de faire l'étude complète de cette dernière partie avant de commencer la lecture des différents chapitres d'analyse ou d'algèbre. L'acquisition de ces notions se fera au fur et à mesure des exemples rencontrés lors de l'apprentissage du cours.

1. Ensembles usuels de nombres

1.1 Notations

Dans tout ce livre, nous supposons connus les ensembles de nombres suivants, leurs opérations usuelles $+$, $-$, $\times$ et $/$, ainsi que les propriétés élémentaires de ces dernières.

- $\mathbb{N}$, l'ensemble des *entiers naturels* : $0, 1, 2, \ldots$
- $\mathbb{Z}$, l ensemble des *entiers relatifs* : c'est l'ensemble des entiers naturels et de leurs opposés.

[1] On y trouvera en particulier les démonstrations des résultats énoncés ici.

[2] À cette fin, le lecteur est invité à consulter l'index en fin de volume.

- $\mathbb{Q}$, l'ensemble des *rationnels* : c'est l'ensemble des quotients p/q, où p et q sont deux entiers relatifs, q étant non nul.
- $\mathbb{R}$, l'ensemble des *réels* : il contient, outre les rationnels, des nombres *irrationnels* tels que $\sqrt{2}$, π...
- $\mathbb{C}$, l'ensemble des *complexes* : ses éléments sont de la forme $a+i\,b$, avec a et b deux réels et i un complexe tel que $i^2=-1$.
- Ces ensembles privés de 0 sont respectivement notés $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$.

1.2 Relations d'ordre

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni des relations de comparaison $\leqslant$, $\geqslant$, $<$ et $>$.

- $x \leqslant y$ se lit «x est inférieur (ou égal) à y » ou «x est plus petit que y».
- $x \geqslant y$ se lit «x est supérieur (ou égal) à y» ou «x est plus grand que y».
- $x < y$ se lit «x est strictement inférieur à y» ou «x est strictement plus petit que y».
- $x > y$ se lit «x est strictement supérieur à y» ou «x est strictement plus grand que y».
- Un réel x est positif (respectivement strictement positif) si $x \geqslant 0$ (respectivement $x > 0$).
- Un reel x est négatif (respectivement strictement négatif) si $x \leqslant 0$ (respectivement $x < 0$).
- $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}_+$ sont respectivement les ensembles des réels positifs et des rationnels positifs.
- $\mathbb{R}_-$ $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Z}_-$ sont respectivement les ensembles des réels négatifs des rationnels négatifs et des entiers négatifs.
- $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{Q}_+^*$ sont respectivement les ensembles des réels strictement positifs et des rationnels strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{Q}_-^*$, $\mathbb{Z}_-^*$ sont respectivement les ensembles des réels strictement négatifs des rationnels strictement négatifs et des entiers strictement négatifs.

La relation $\leqslant$ est compatible avec les opérations [3] de $\mathbb{R}$ c'est–à–dire :

- si $a \leqslant b$, alors pour tout x on a $a + x \leqslant b + x$,
- si $a \leqslant b$, alors pour tout $x \geqslant 0$ on a $a\,x \leqslant b\,x$.

Par conséquent, on a aussi :

- si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$,
- si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $a\,c \leqslant b\,d$.

[3] On dit plutôt compatible avec la structure de corps de $\mathbb{R}$.

1.3 Intervalles

Étant donnés deux réels a et b, on note :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \qquad]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} \qquad]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\} \qquad]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\} \qquad]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

Les ensembles ci–dessus ainsi que $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ sont appelés *intervalles* de $\mathbb{R}$.

Si a et b sont deux entiers relatifs, on note :

$$[\![a,b]\!] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

$$[\![a,+\infty[\![= \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant x\}$$

$$]\!]-\infty,a]\!] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant a\}$$

2. Vocabulaire relatif aux ensembles et aux applications

2.1 Propositions mathematiques

- Une *proposition* (ou une *assertion* ou une *relation*) est une phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité (vraie ou fausse). Par exemple l'énoncé du théorème de Pythagore est vrai alors que la proposition « π est un entier » est fausse.

- Souvent, une telle proposition dépend de certaines variables (on parle alors aussi de *prédicat*) ; sa valeur de vérité ne pourra donc être déterminée que lorsque l'on aura précisé ce que sont ces variables. Par exemple, la véracité de la proposition « le triangle (ABC) est rectangle en A » dépend des points A, B et C.

- On dira qu'une proposition P *entraîne* ou *implique* une proposition Q (ou que Q est une *conséquence* de P), et l'on écrira $P \Longrightarrow Q$, si Q est vraie dès que P est vraie. Par exemple, la proposition ci–dessus entraîne la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

- On dira que des propositions sont *équivalentes*, et l'on écrira $P \Longleftrightarrow Q$, si elles sont simultanément vraies. Par exemple, le théorème de Pythagore dit que les propositions « le triangle (ABC) est rectangle en A » et « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » sont équivalentes.

2.2 Ensembles

- L'*appartenance* d'un *élément* x à un *ensemble* E se note $x \in E$. L'*inclusion* d'un ensemble E dans un ensemble F se note $E \subset F$. On dit aussi que E est une *partie* de F. On a ainsi, par exemple, $E \subset E$.
- L'*ensemble des parties* de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Parmi ces parties, il y a en particulier E et l'*ensemble vide* noté $\varnothing$.
- Les opérations sur les parties sont l'*intersection* ($A \cap B$), la *réunion* ($A \cup B$), la *différence* ($A \setminus B$) et le *complémentaire* ($\complement_E A = E \setminus A$).
- On utilisera aussi les *quantificateurs* :
  - $\forall x \in E \dots$ pour signifier qu'une propriété est vraie pour tous les élements de E,
  - $\exists x \in E \dots$ pour signifier qu'une propriété est vraie pour au moins un élément de E.

  Par exemple, l'inclusion d'un ensemble E dans un ensemble F peut s'écrire :
  $$\forall x \in E\,,\ x \in F$$
  et dans le plan euclidien P, l'existence d'un vecteur orthogonal à un vecteur $\vec{u}$ s'écrit :
  $$\exists \vec{v} \in P\ :\ \vec{u}.\vec{v} = 0.$$
- Le *produit cartésien* de deux ensembles E et F se note $E \times F$. C'est l'ensemble des *couples* (a, b) tels que $a \in E$ et $b \in F$.

2.3 Applications

- On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des *applications* de E dans F (on dit aussi de E vers F).
- Le *graphe* d'une application $f\ :\ E \to F$ est :
  $$\big\{\big(x, f(x)\big) \in E \times F \ \big|\ x \in E\big\}$$
  C'est donc une partie de $E \times F$.

  L'*application identique* de E, notée Id_E, associe tout élément de E à lui–même.

  La *restriction* d'une application $f\ :\ E \to F$ à une partie A de E, notée $f_{|A}$, est l'application :
  $$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Lorsque g est une restriction de f on dit aussi que f est un *prolongement* de g.

- Si l'on a deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ on note $g \circ f : E \to G$ l'*application composée* définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

- Une application $f : E \to F$ est :
  - *injective* si tout élément de F possède au plus un antécédent par f c'est–à–dire si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution x dans E ;
  - *surjective* si tout élément de F possède au moins un antécédent par f, c'est–à–dire si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution x dans E ;
  - *bijective* si tout élément de F possède exactement un antécédent par f, c'est–à–dire si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède exactement une solution x dans E.

- Si $f : E \to F$ est bijective, son *application reciproque*, notée f^{-1}, est l'application qui associe à tout élément de F son unique antécédent dans E Elle vérifie $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.
  Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, leur composée $g \circ f$ est aussi bijective et l'on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

- Soit f une application de E dans F. On appelle :
  - *image directe* par f d'une partie A de E, l'ensemble :
  $$f(A) = \big\{f(x) \;\big|\; x \in A\big\},$$
  - *image réciproque* par f d'une partie B de F, l'ensemble :
  $$f^{-1}(B) = \big\{x \in E \;\big|\; f(x) \in B\big\}.$$

  Attention La notation $f^{-1}(B)$ ne suppose pas que f soit bijective.

- Une *famille d'éléments de E indexée* par un ensemble I est une application de I dans E. Si x est une telle famille, on note x_i à la place de $x(i)$ l'image de l'élément $i \in I$ par x. La famille est notée $(x_i)_{i \in I}$.
  L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par un ensemble I est noté E^I.

- En particulier, une famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ est appelée une *suite*
  L'ensemble des suites d'éléments de E est ainsi noté $E^{\mathbb{N}}$

3. Entiers, dénombrement

3.1 Entiers naturels, récurrence

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* possède les propriétés suivantes :
  - Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
  - Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

  L'ensemble $\mathbb{Z}$ des *entiers relatifs* possède les propriétés suivantes :
  - Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
  - Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.

  Pour démontrer une propriété $P(n)$ pour tout entier naturel n, on peut utiliser le principe de *récurrence* en montrant :
  - $P(0)$,
  - $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \big(P(n) \Longrightarrow P(n+1)\big)$.

  On utilise aussi une autre forme classique de récurrence qui consiste à montrer :
  - $P(0)$,
  - $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \big(P(0), P(1), \ldots, P(n)\big) \Longrightarrow P(n+1)$.

- Une suite peut être définie par récurrence à partir de son premier terme et d'une relation permettant de calculer u_{n+1} en fonction de u_n (*suite récurrente*).

- Une *suite arithmétique* est une suite vérifiant une relation du type $u_{n+1} = u_n + r$, où r est une constante. On a alors $u_n = u_0 + n\,r$.
  La somme des n premiers termes d une telle suite arithmétique est :
  $$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = n\,u_0 + \frac{n(n-1)}{2}\,r.$$

- Une *suite géométrique* est une suite vérifiant une relation du type $u_{n+1} = r\,u_n$, où r est une constante. On a alors $u_n = u_0\,r^n$.
  La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $r \neq 1$ est :
  $$\sum_{k=p}^{q} u_k = \frac{u_p - u_{q+1}}{1-r}.$$
  En particulier, la somme des n premiers termes est :
  $$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{u_0 - u_n}{1-r} = u_0\,\frac{1-r^n}{1-r}.$$

3.2 Ensembles finis, dénombrement

- Le *cardinal* d'un ensemble fini E, noté card E, est le nombre de ses éléments
- Si A et B sont deux ensembles finis *disjoints*, (c'est–à–dire tels que $A \cap B = \varnothing$), on a $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$.
- Si E et F sont deux ensembles finis, on a $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card} E \operatorname{card} F$.
- Soit E est un ensemble fini de cardinal n
  - Le nombre d'applications de E dans un ensemble fini F de cardinal p est p^n.
  - Le nombre de *permutations* de E, c'est–à–dire de bijections de E dans lui–même, est $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. On pose par convention $0! = 1$.
  - Le nombre de parties de E est $\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^n$.
  - Pour $0 \leqslant p \leqslant n$, le nombre de parties à p éléments de E est :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)}^{p \text{ termes}}}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Pour $p > n$, on pose par convention $\binom{n}{p} = 0$.

Remarque On utilise parfois aussi la notation C_n^p à la place de $\binom{n}{p}$.

On a les propriétés :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ pour } 0 \leqslant p \leqslant n \qquad \text{et} \qquad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

ainsi que la *relation de Pascal*, pour $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

4. Structures algébriques usuelles

Il s'agit de formaliser les propriétés classiques des ensembles usuels ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$...) munis de leurs opérations naturelles (somme, produit)

Nous donnons ici les termes que nous utiliserons tout le long de l'ouvrage, en renvoyant le lecteur à la dernière partie du livre et au chapitre 27 où il trouvera les définitions précises de ces notions.

La figure de la page ci-contre donne un récapitulatif de ces notions.

4.1 Lois de composition interne sur un ensemble E

- Les *lois de composition interne* considérées dans ce livre seront toujours *associatives*[4] : $\forall(x, y, z) \in E^3\,,\; x * (y * z) = (x * y) * z$.
  La plupart seront *commutatives* : $\forall(x, y) \in E^2\,,\; x * y = y * x$.
  Les exceptions les plus courantes sont la composition des applications et le produit matriciel.
- On dit qu'une loi $\times$ est *distributive* par rapport à une loi $+$ si pour tout $(x, y, z) \in E^3$:
  $$x \times (y + z) = x \times y + x \times z \quad \text{et} \quad (x + y) \times z = x \times z + y \times z.$$
- En général un ensemble E muni d'une loi $*$ possède un *élément neutre* e : $\forall x \in E\,,\; e * x = x * e = x$.
  Dans ce cas on dit qu'un élément x est *inversible* s il existe un élément y (*inverse* de x) tel que $x * y = y * x = e$.

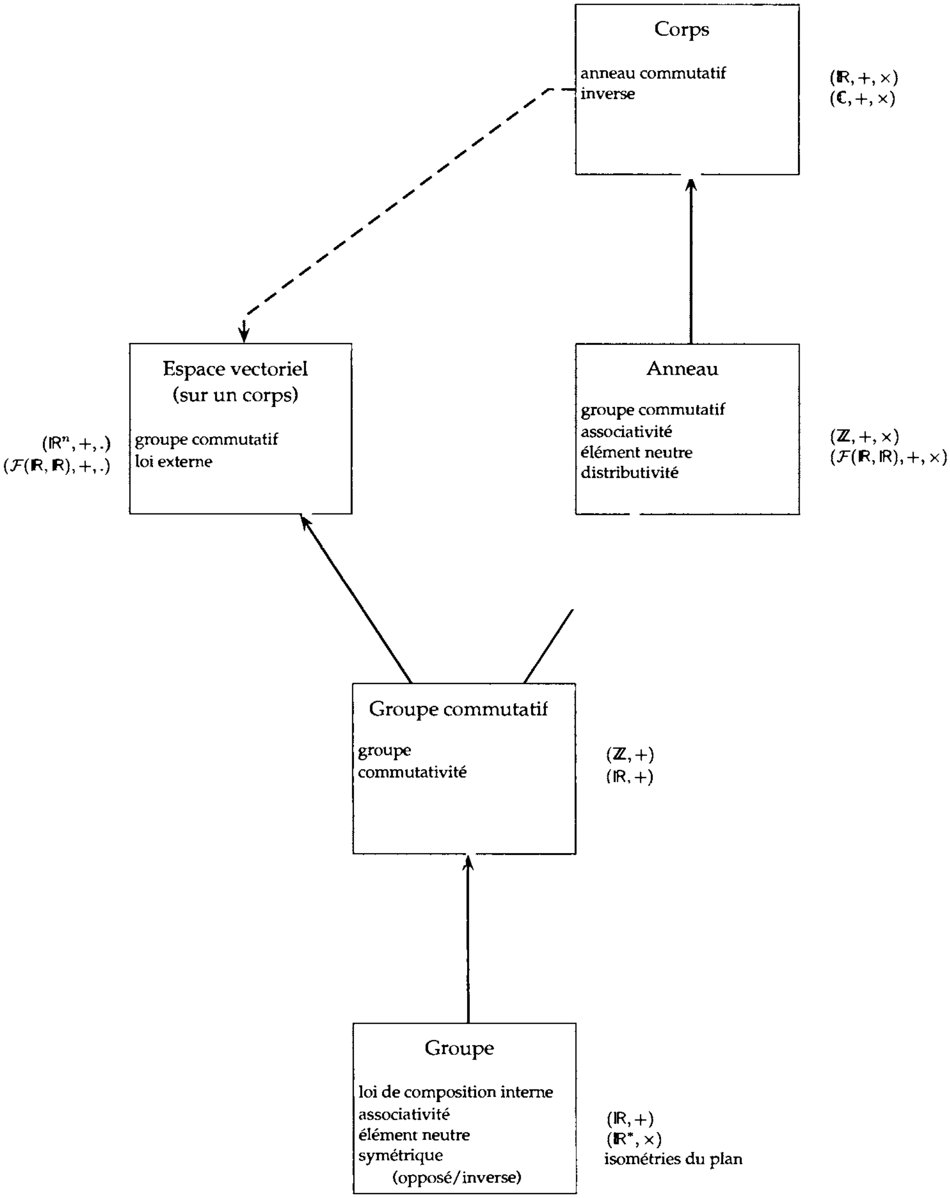
4.2 Groupes

Définition 1

> Un *groupe* est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, possédant un élément neutre et dans lequel tout élément admet un inverse.

- Les exemples classiques sont $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ (on parle dans ces cas d'*opposé* et non d'inverse), ainsi que $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- Les groupes ci–dessus sont *commutatifs*, mais ce n'est pas toujours le cas : par exemple, les isométries du plan forment un groupe non commutatif pour la composition des applications.
- Un *sous–groupe* est une partie d'un groupe qui contient l'élément neutre, et qui est stable par la loi et par passage à l'inverse.
  Il est classique de montrer qu'un ensemble muni d'une loi est un groupe en montrant que c'est un sous–groupe d'un groupe connu.

[4] sauf le produit vectoriel



Structures algébriques usuelles
(à côté de chaque structure, quelques exemples importants)

4.3 Anneaux et corps

Définition 2

Un *anneau* est un ensemble muni de deux lois associatives, en général appelées addition et multiplication et notées $+$ et $.$ telles que $(A,+)$ soit un groupe commutatif, que $(A,.)$ possède un élément neutre et que la multiplcation soit distributive par rapport à l'addition. Les éléments neutres pour les deux lois $+$ et $.$ se notent en général 0 et 1 et sont supposés distincts.

- Les exemples classiques sont $(\mathbb{Z},+,.)$, $(\mathbb{R},+,.)$, $(\mathbb{C},+,.)$. Ils sont commutatifs, c'est-à-dire que la multiplication est commutative, mais ce n'est pas toujours le cas (*cf.* anneau des matrices carrées).
- Le produit de deux éléments a et b d'un anneau est souvent noté ab à la place de $a \cdot b$.
- En plus des règles de calcul habituelles, on a les formules suivantes, valables lorsque l'anneau est commutatif :
  - $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a^n - b^n = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1})$,
  - $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\, a^p\, b^{n-p}$ (formule du *binôme de Newton*).
- Un *sous–anneau* d'un anneau $(A,+,.)$ est un sous–groupe de $(A,+)$ qui est stable par $.$ et qui contient 1.

  Comme pour les groupes, on montre souvent que l'on a affaire à un anneau en montrant que c'est le sous–anneau d'un anneau connu.
- Un *corps* est un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$ dont tous les éléments non nuls sont inversibles.

  Les exemples classiques de corps sont $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

> ***Remarque*** On prendra garde que l'implication $x\,y = 0 \Longrightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0)$ n'est pas vraie en général dans un anneau. Voir par exemple l anneau des matrices carrées ou l'anneau des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: on peut avoir $f\,g = 0$ sans que f ou g soit nulle, puisqu'il suffit, par exemple, que f soit nulle sur $\mathbb{R}_+$ et g nulle sur $\mathbb{R}_-$.
>
> En revanche on a bien l'implication $x\,y = 0 \Longrightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0)$ sur les ensembles de nombres usuels ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) puisque ce sont des parties du corps $\mathbb{C}$, et que dans un corps l'égalité $x\,y = 0$ avec $x \neq 0$ entraîne $y = x^{-1}\,(x\,y) = 0$.

4.4 Espaces vectoriels

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Définition 3

Un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ est un groupe commutatif $(E,+)$ muni d'une *loi externe* :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$$

vérifiant les quatre propriétés :

$$\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x \qquad (\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$$

$$1.x = x \qquad \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$$

- Les éléments de E sont appelés *vecteurs*, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.
- Les exemples classiques d'espaces vectoriels sont :
  - $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{K}^n$,
  - l'ensemble des vecteurs du plan (respectivement de l'espace),
  - l'ensemble $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ où X est un ensemble quelconque, et en particulier l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On note souvent λx à la place ce $\lambda{\cdot}x$ lorsque λ est un scalaire et x un vecteur.
- Une *combinaison linéaire* de deux vecteurs x et y est un vecteur de la forme $\lambda\,x + \mu\,y$, avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Plus généralement, une combinaison linéaire de n vecteurs x_1, x_2,..., x_n est un vecteur de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \qquad \text{où} \qquad (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n.$$

- Un *sous–espace vectoriel* d'un espace vectoriel E est une partie de E contenant 0 et qui est stable par combinaisons linéaires.

  Une façon commode de montrer qu un ensemble a une structure d'espace vectoriel, est de montrer que c'est un sous–espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
- Si E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, une application $f\ :\ E\to F$ est une *application linéaire* si elle vérifie :

$$\forall (x,y)\in E^2\,,\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\,,\ f(\lambda\,x+\mu\,y) = \lambda\,f(x)+\mu\,f(y).$$

  On parle de *forme linéaire* si $F=\mathbb{K}$.

EXERCICES

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes :

a) $1 \leqslant x < y$.

b) $xy = 0$ (avec des propositions portant séparément sur x et/ou sur y)

c) $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

2. Écrire les implications ou équivalences correctes :

- $[\forall x \in E\ ,\ p(x) \text{ et } q(x)] \ldots\ldots [\forall x \in E\ ,\ p(x)] \text{ et } [\forall x \in E\ ,\ q(x)]$
- $[\exists x \in E\ :\ p(x) \text{ et } q(x)] \ldots\ldots [\exists x \in E\ :\ p(x)] \text{ et } [\exists x \in E\ :\ q(x)]$
- $[\forall x \in E\ ,\ p(x) \text{ ou } q(x)] \ldots\ldots [\forall x \in E\ ,\ p(x)] \text{ ou } [\forall x \in E\ ,\ q(x)]$
- $[\exists x \in E\ :\ p(x) \text{ ou } q(x)] \ldots\ldots [\exists x \in E\ :\ p(x)] \text{ ou } [\exists x \in E\ :\ q(x)]$

3. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il suffit qu'il soit strictement supérieur à 4.

b) Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il faut qu'il soit différent de 2.

c) Une condition suffisante pour qu'un réel soit supérieur ou égal à 2, est qu'il soit supérieur ou égal à 3.

d) Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.

e) Un condition nécéssaire et suffisante pour qu'un entier naturel soit strictement supérieur à 1 est qu'il soit supérieur ou égal à 2.

4. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

a) $\exists x \in \mathbb{Z}\ :\ \exists y \in \mathbb{N}\ :\ x \leqslant -y^2$

b) $\exists x \in \mathbb{Z}\ :\ \forall y \in \mathbb{N}\ :\ x \leqslant -y^2$

c) $\forall x \in \mathbb{Z}\ ,\ \exists y \in \mathbb{N}\ :\ x \leqslant -y^2$

d) $\forall x \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall y \in \mathbb{N}\ ,\ x \leqslant -y^2$

5. Écrire les négations des propositions suivantes :

a) $\forall x \in E\ ,\ \forall x' \in E\ ,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$

b) $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in]a, b[\ ,\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

c) $\forall a \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall b \in \mathbb{N}^*\ ,\ \exists q \in \mathbb{Z}\ ,\ \exists r \in \mathbb{Z}\ :\ a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < b$

6. L'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y) = (x, xy - y^3)$$

est-elle injective, surjective ?

7. Soient E,F,G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de E dans G. On considère h de E dans $F \times G$ définie par $h(x) = \big(f(x), g(x)\big)$. Montrer que si f ou g est injective alors h est injective. On suppose f et g surjectives h est-elle surjective ?

8. Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Montrer que :

a) si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

b) si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective

c) si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

d) si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

9 Montrer que pour tout entier n :

$$2^n > n.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une forme plus simple de l'expression :

$$1.1! + 2.2! + \cdots + n.n!.$$

11. Trouver toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ , \ f(m+n) = f(m) + f(n).$$

12. Trouver toutes les applications g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ , \ g(m+n) = g(n)g(m).$$

13. Trouver toutes les injections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ f(n) \leqslant n.$$

14. Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une suite finie d'ensembles finis.
Montrer par récurrence sur n que :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\,(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

15. Soient n et p deux entiers non nuls tels que $n \geqslant p$.
Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1,\ldots,p\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$?

16. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^3$ de l'équation :

$$x+y+z=n$$

où n est un entier naturel donné.

17. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^3$ du système :

$$\begin{cases} x+y+z=n \\ x \leqslant y+z \\ y \leqslant z+x \\ z \leqslant x+y \end{cases}$$

où n est un entier donné.

18. Soit E un ensemble fini à n éléments.
Trouver le cardinal des ensembles suivants :

a) $F = \{(A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid A \cup B = E\ ,\ A \cap B = \varnothing\}$

b) Si A est une partie fixée de E à p éléments.
$G_A = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid A \cup B = E\}$

c) $H = \{(A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid A \cup B = E\}$

19. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < n$.
Montrer que :

$$\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}.$$

20. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \leqslant p$ et $n \leqslant q$.
Montrer que :

$$\binom{p+q}{n} = \binom{p}{0}\binom{q}{n} + \binom{p}{1}\binom{q}{n-1} + \cdots + \binom{p}{j}\binom{q}{n-j} + \cdots + \binom{p}{n}\binom{q}{0}$$

En déduire une expression simple de :

$$\binom{p}{0}^2 + \binom{p}{1}^2 + \cdots + \binom{p}{p}^2$$

21. Soient $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$.
Etablir les relations suivantes :

$$2^p \binom{n}{p} = \binom{n}{0}\binom{n}{p} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} + \cdots + \binom{n}{p}\binom{n-p}{0}$$

$$0 = \binom{n}{0}\binom{n}{p} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} + \cdots + (-1)^p \binom{n}{p}\binom{n-p}{0}.$$

22. En calculant de deux manières le module de $(1+i)^n$ montrer que :

$$\left(1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots\right)^2 + \left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \cdots\right)^2 = 2^n$$

23. Soit E un ensemble fini de cardinal n et A une partie de E qui contient p éléments ($p \leqslant n$).

a) Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant un et un seul élément de A ?

b) Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant au moins un élément de A ?

24 Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $S_{p,n}$ le nombre de surjections d un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

a) On suppose $p < n$. Que vaut $S_{p,n}$?

b) Calculer $S_{n+1,n}$ et $S_{p,2}$.

c) Montrer que :

$$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ , \ n^p = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_{p,i}.$$

25. Soient n et p deux entiers non nuls.
$a_1, a_2, \cdots, a_p$ sont p entiers tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = n.$$

Calculer le nombre d'applications de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, p\}$ telles que pour tout i entre 1 et p, i ait exactement a_i antécédents

26. On donne n points dans le plan trois quelconques de ces points n'étant pas alignés. On joint ensuite ces points par des droites de toutes les manières possibles et l'on suppose que ces droites ne sont jamais parallèles et que trois droites ne peuvent être concourantes qu'aux points initiaux.
Calculer le nombre de points d'intersection ainsi obtenus (non compris les n points initiaux).

27. **a)** Calculer la somme des cardinaux de toutes les parties d'un ensemble E fini à n éléments.

b) Soit F une partie de E de cardinal k.
Trouver le nombre de couples (X, Y) de $\mathcal{P}(E)^2$ vérifiant $X \cap Y = F$.
En déduire $\displaystyle\sum_{(X,Y)\in(\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{Card}(X \cap Y)$.

28. Soit E un ensemble à np éléments ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$).
On note $P_{n,p}$ le nombre de partitions de E en n parties à p éléments.
Montrer que :

$$P_{n,p} = \frac{1}{n}\binom{np}{p} P_{n-1,p}.$$

En déduire $P_{n,p}$.

Première partie

Pour commencer…

Chapitre 1

Les nombres complexes

Dès le XVI^{e} siècle, des mathématiciens ont été amenés à utiliser des symboles purement formels du type $\sqrt{-a}$ lorsque a est un réel positif, par exemple pour représenter les solutions d'une équation du troisième degré. Jusqu'à la fin du XVIII^{e} siècle, ces nombres "impossibles" furent utilisés, sans qu'une définition précise en ait été donnée. Ce n'est qu'au début du XIX^{e} siècle que ces nombres furent définis.

1. Le corps des nombres complexes

1.1 Définition

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ dont les élements, appeles *nombres complexes*, s'écrivent de manière unique sous la forme $a + i\,b$, avec a et b réels[1] et i tel que $i^2 = -1$.

Cet ensemble est muni de deux lois $+$ et $\times$ qui lui confèrent une structure de corps.

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont données par :

$$(a+ib)+(c+i\,d) = (a+c)+i\,(b+d)$$

$$(a+ib)\times(c+i\,d) = a\,c+i\,(a\,d+b\,c)+i^2\,b\,d = (a\,c-b\,d)+i\,(a\,d+b\,c).$$

Lorsque $z = a + i\,b$ est non nul, c'est–à–dire lorsque les réels a et b ne sont pas tous les deux nuls l'inverse de z est donné par :

$$\frac{1}{a+i\,b} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}.$$

[1] Par convention tacite, une telle écriture sous–entend que a et b sont reels.

émonstratio e l'exis ence e $\mathbb{C}$. Vérifions que si l'on munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition et de la multiplication définies par :

$$(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$$

$$(a,b)\times(c,d)=(a\,c-b\,d,a\,d+b\,c)$$

on obtient un corps $\mathbb{C}$ répondant au problème.

- On montre par le calcul que ces lois sont commutatives, associatives, que la multiplication est distributive par rapport à l'addition
- L'élément $(0,0)$ est neutre pour l'addition et $(1,0)$ neutre pour la multilplication
- Tout élément (a,b) admet $(-a,-b)$ comme symétrique pour l'addition.
- Tout élément $(a,b)\neq(0,0)$ admet un symétrique pour la multiplication puisque :

$$(a,b)\times\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)=(1,0).$$

- On identifie l'élement $(x,0)$ de $\mathbb{R}^2$ avec le reel x de façon à avoir $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Cette identification est possible, car :

$$(x,0)+(y,0)=(x+y,0) \qquad \text{et} \qquad (x,0)\times(y,0)=(x\,y,0)$$

  ce qui montre que les opérations sur les réels x et y sont les mêmes qu'on les considère comme réels ou comme complexes

  Remarque Ce qui précède signifie que l'application φ :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ x & \longmapsto & (x,0)\end{array}$$

  est un morphisme injectif de corps C'est ce qui justifie l'identification de $x\in\mathbb{R}$ avec $\varphi(x)\in\mathbb{R}^2$.

- Posons $i=(0,1)$, on a $i^2=(-1,0)=-1$ On a alors, pour tout reel y :

$$(0,y)=(y,0)\,(0,1)=i\,y$$

  et donc, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+i\,y.$$

□

Définition 1

Si z est un complexe, il existe un unique couple de réels (x,y) tel que $z=x+i\,y$. Les réels x et y sont appelés respectivement *partie réelle* et *partie imaginaire* du complexe z et sont notés :

$$x=\mathrm{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad y=\mathrm{Im}(z)$$

ou :

$$x=\mathrm{Re}\,z \qquad \text{et} \qquad y=\mathrm{Im}\,z$$

Un nombre complexe de la forme $i\,y$ avec $y \in \mathbb{R}$ est appelé *imaginaire pur*. Tout complexe s'écrit donc de façon unique comme la somme d'un réel et d'un imaginaire pur.

Remarque La construction de $\mathbb{C}$ présentée dans la démonstration precédente est simple, mais la vérification des propriétés algébriques (associativité, commutativité distributivité) est fastidieuse. Nous verrons page 890, comme application du calcul matriciel, une autre construction de $\mathbb{C}$ plus efficace.

1.2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2

Soit $z = x + i\,y$ un nombre complexe, x et y étant des réels. On appelle *conjugué* de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par :

$$\overline{z} = x - i\,y.$$

Proposition 1

Si z est un complexe, on a :

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
- $\overline{(\overline{z})} = z$.
- z est réel si, et seulement si, $z = \overline{z}$.
- z est imaginaire pur si, et seulement si, $z = -\overline{z}$

Proposition 2

Le conjugué d'une somme (respectivement d'un produit, d'un quotient) est la somme (respectivement le produit, le quotient) des conjugués.

Démonstration

- Pour la somme et le produit, il suffit de remarquer que multiplier b et d par -1 conserve les parties réelles et multiplie par -1 les parties imaginaires des nombres complexes :

$$(a + i\,b) + (c + i\,d) = (a + c) + i\,(b + d)$$

$$(a + i\,b) \times (c + i\,d) = (a\,c - b\,d) + i\,(a\,d + b\,c).$$

- Pour le quotient, soit z_1 et z_2 deux complexes, avec $z_2 \neq 0$ On pose $u = z_1/z_2$. De l'égalite $z_1 = u\,z_2$, on tire d'après ce qui précède $\overline{z}_1 = \overline{u}\,\overline{z}_2$, soit $\overline{u} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$. □

1.3 Module d'un nombre complexe

Définition 3

Si z est un complexe, $z\overline{z}$ est un réel positif. On appelle *module* de z le réel noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Démonstratio Si $z = a + i\,b$, on a $z\overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$. Le module de z est donc

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

□

On a immédiatement :

Proposition 3

Pour tout complexe z, on a :

$$|z| = 0 \iff z = 0 \qquad |z| = |\overline{z}|$$

$$\mathrm{Re}(z) \leqslant \left|\mathrm{Re}(z)\right| \leqslant |z| \qquad \mathrm{Im}(z) \leqslant \left|\mathrm{Im}(z)\right| \leqslant |z|$$

La relation $z\overline{z} = |z|^2$ permet d'exprimer simplement l'inverse d'un nombre complexe non nul :

Proposition 4

Pour tout complexe z non nul, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad \text{et} \qquad |z| = 1 \iff \frac{1}{z} = \overline{z}.$$

Proposition 5

Pour tous complexes z_1 et z_2, on a :

$$|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{si} \quad z_2 \neq 0$$

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \qquad \big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|$$

Les deux dernières inégalités sont appelées *inégalités triangulaires*.

é onstration

- $|z_1\,z_2|^2 = z_1\,z_2\,\overline{z_1 z_2} = z_1\,\overline{z_1} \times z_2\,\overline{z_2} = \big(|z_1|\,|z_2|\big)^2$ ce qui donne le résultat puisque $|z_1\,z_2|$ et $|z_1|\,|z_2|$ sont des réels positifs.
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|^2 = \dfrac{z_1}{z_2} \times \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{z_1\,\overline{z_1}}{z_2\,\overline{z_2}} = \dfrac{|z_1|^2}{|z_2|^2}.$
- L'inégalite $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ est évidente si $z_2 = 0$ (c'est même une egalite). On peut donc supposer $z_2 \neq 0$.

  En posant $u = z_1/z_2$, l'inégalité est equivalente à $|1+u| \leqslant 1 + |u|$ Montrons donc cette dernière.

  On a :

$$\begin{aligned}(1+|u|)^2 - |1+u|^2 &= 1 + 2|u| + |u|^2 - (1+u)\,(1+\overline{u})\\ &= 1 + 2|u| + |u|^2 - \big(1 + |u|^2 + u + \overline{u})\big)\\ &= 2\big(|u| - \operatorname{Re} u)\big)\end{aligned}$$

  ce qui prouve le résultat puisque $\operatorname{Re} u \leqslant |\operatorname{Re} u| \leqslant |u|$.
- En utilisant $z_1 = z_1 - z_2 + z_2$, on obtient :

$$|z_1| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

  ce qui donne :

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

  En echangeant les rôles de z_1 et z_2, on obtient donc :

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 - z_1|$$

  d'où la double inégalité $-|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$, qui équivaut à :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

□

Remarque

- Avec les notations de la proposition précédente, pour $z_2 \neq 0$, si l'on a l'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ alors $|1+u| = 1 + |u|$ et donc $|u| = \operatorname{Re} u$. Comme $|u|^2 = (\operatorname{Re} u)^2 + (\operatorname{Im} u)^2$, on en déduit $\operatorname{Im} u = 0$ et donc $u = \operatorname{Re} u = |u| \in \mathbb{R}_+$.

  Ainsi $z_1 = \lambda\, z_2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- Réciproquement, si $z_1 = \lambda\, z_2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors :

$$|z_1 + z_2| = \big|(1+\lambda)\big|\,|z_2| = (1+\lambda)\,|z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

On a donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si, et seulement si, $z_2 = 0$ ou $z_1 = \lambda\, z_2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

1.4 Arguments d'un complexe non nul, forme trigonométrique

Groupe des nombres complexes de module 1

Notation On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. C est un sous–groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

émons rati Les propriétés du module montrent les résultats suivants :

- $1 \in \mathcal{U}$,
- $(z, z') \in \mathcal{U}^2 \Longrightarrow z\,z' \in \mathcal{U}$,
- $z \in \mathcal{U} \Longrightarrow \dfrac{1}{z} = \overline{z} \in \mathcal{U}$.

C'est donc un sous–groupe de $\mathbb{C}^*$

> ***Remarque*** On peut aussi montrer que $\mathcal{U}$ est un sous–groupe de $\mathbb{C}^*$ comme noyau du morphisme de groupes $z \mapsto |z|$ □

Notation $e^{i\theta}$

Les propriétés élémentaires des fonctions cosinus et sinus (dérivées, variations) sont supposées connues ainsi que les formules d'addition.

- Si $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. C'est un nombre complexe de module 1.
- Réciproquement, si $z \in \mathcal{U}$, alors $z = x + i\,y$ avec $x^2 + y^2 = 1$. Il existe donc au moins un réel θ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$, c'est–à–dire $z = e^{i\theta}$.

  ém nstratio Les variations de la fonction cosinus montrent qu'elle atteint tout réel de $[-1, 1]$. En particulier, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos\theta$. Alors :
  $$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2 = y^2$$
  ce qui prouve que y est égal à $\sin\theta$ ou à $-\sin\theta$ Comme $\cos\theta = \cos(-\theta)$, il suffit éventuellement de remplacer θ par $-\theta$ pour avoir le résultat annoncé. □

Remarques

- Si $\theta = 0$, alors $e^{i\theta} = 1$, ce qui prouve qu'en 0 cette notation coïncide avec la notation exponentielle déjà connue sur $\mathbb{R}$.
- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, le complexe $e^{i(-\theta)}$ est aussi noté $e^{-i\theta}$

Avec cette notation, on a immédiatement :

Proposition 6 (Formules d'Euler)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$:
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 7

On a, pour θ et φ réels :

- $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}\, e^{i\varphi}$,
- $e^{i\theta} = e^{i\varphi} \Longleftrightarrow \theta \equiv \varphi \quad [2\pi]$.

emonstration Soient θ et φ deux réels. On a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\varphi} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \\ &= e^{i(\theta+\varphi)}. \end{aligned}$$

D'autre part, l'égalité $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$ équivaut à $(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ c'est-à-dire à $\theta \equiv \varphi \quad [2\pi]$. □

Remarque La proposition précédente signifie que l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathcal{U}, \times)$ dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

Ce morphisme est surjectif puisque tout nombre complexe de module 1 s'écrit sous la forme $e^{i\theta}$.

On a en particulier :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi).}$$

Formule de Moivre

À partir de la proposition précédente, on obtient par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta},$$

formule valable aussi pour $n \in \mathbb{Z}$ par passage à l'inverse.

Cela s'écrit aussi :

Proposition 8 (Formule de Moivre)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Exemple Soit θ un réel appartenant à $]0, 2\pi[$. Simplifions la somme $S = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos k\theta$.

Comme $S = \text{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$, on calcule la quantité $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ qui est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Transformons le quotient obtenu :

$$\begin{aligned}
\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} &= \frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{-i(n+1)\frac{\theta}{2}} - e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\
&= e^{in\frac{\theta}{2}} \times \frac{-2i \sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} \\
&= e^{in\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

D'où l'expression simplifiée de la somme S :

$$S = \text{Re}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) = \frac{\cos n\frac{\theta}{2} \sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Remarque On peut aussi calculer S sans utiliser les complexes en écrivant :

$$\begin{aligned}
S \sin \frac{\theta}{2} &= \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta \sin \frac{\theta}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\sin \frac{2k+1}{2}\theta - \sin \frac{2k-1}{2}\theta\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2n+1}{2}\theta - \sin \frac{-\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne, pour $\theta \not\equiv 0 \quad [2\pi]$:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

On retrouve la formule précédente en utilisant :

$$\sin \frac{2n+1}{2}\theta + \sin \frac{\theta}{2} = 2 \sin(n+1)\frac{\theta}{2} \cos n\frac{\theta}{2}.$$

Arguments d'un nombre complexe non nul

Si z est un nombre complexe non nul, le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, ce qui donne :

$$z = r\,e^{i\theta} \qquad \text{avec} \qquad r = |z| > 0$$

Définition 4

Soit z un complexe non nul. Tout réel θ tel que $z = |z|\,e^{i\theta}$ est appelé *un argument* de z.

Proposition 9

Soit z un complexe non nul et θ_0 un argument de z. L'ensemble des arguments de z est :

$$\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z} = \left\{\theta_0 + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

émonstratio Le réel θ est un argument de z si, et seulement si, $|z|\,e^{i\theta} = |z|\,e^{i\theta_0}$ c'est-à-dire :

$$\cos\theta = \cos\theta_0 \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \sin\theta_0$$

ce qui équivaut encore à :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \;:\; \theta = \theta_0 + 2k\pi.$$

□

Notation Si z est un complexe non nul et si θ est un argument de z on note :

$$\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi].$$

Attention

Lorsqu'un complexe non nul z s'écrit sous *forme trigonométrique* :

$$z = a\,(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \text{avec} \qquad (a,\theta) \in \mathbb{R}^2,$$

on n'a pas nécessairement $a = |z|$, mais :

- si $a > 0$, alors $|z| = a$, et $\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi]$,
- si $a < 0$, alors $|z| = -a$, et $\arg(z) \equiv \theta + \pi \quad [2\pi]$.

Exemples

1. Soit θ un réel appartenant à $[0, 2\pi]$. Recherchons le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$.

$$z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

- Si $\theta \in [0, \pi[$, on a $|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) \equiv \frac{\theta}{2} \quad [2\pi]$.
- Si $\theta = \pi$, on a $z = 0$.
- Si $\theta \in]\pi, 2\pi]$, on a $|z| = -2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) \equiv \frac{\theta}{2} + \pi \quad [2\pi]$.

2. Transformation de $a\cos x + b\sin x$.
Soient a, b et x trois réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. En appelant r le module et θ un argument du complexe $a + i\,b$, on peut écrire :

$$a\,\cos x + b\,\sin x = r\,\cos\theta\,\cos x + r\,\sin\theta\,\sin x,$$

ce qui donne :

$$a\,\cos x + b\,\sin x = r\,\cos(x - \theta)$$

ou :

$$a\,\cos x + b\,\sin x = r\,\cos(x - \theta) = r\,\sin(x + \theta')$$

avec $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$.

3. On peut aussi écrire :

$$a\,\cos x + b\,\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\sin x\right)$$

et prendre :

- θ tel que $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta$
- ou θ' tel que $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta'$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta'$.

Remarque Tout nombre complexe z non nul admet un unique argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appelle *argument principal* de z et on le note $\operatorname{Arg} z$; c'est celui qui est rendu par la fonction `argument` de `MAPLE` :

```
> argument(3+4*I);
```

$$\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

```
> argument(exp(I*5*Pi/4));
```

$$-\frac{3}{4}\pi$$

Produit et quotient de deux complexes sous forme trigonométrique

Proposition 10

Soient z_1 et z_2 deux complexes non nuls de formes trigonométriques :

$$z_1 = r_1\, e^{i\theta_1} \qquad \text{et} \qquad z_2 = r_2\, e^{i\theta_2}.$$

On a les formes trigonométriques suivantes :

$$z_1\, z_2 = r_1\, r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \text{et} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Remarque Dans ces formes trigonométriques, il n'est pas nécessaire que les réels r_1 et r_2 soient positifs. Mais s'ils sont supposés strictement positifs, on en déduit des arguments du produit et du quotient :

Corollaire 11

Soient z_1 et z_2 deux complexes non nuls. On a :

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi].$$

Corollaire 12

Soit n un entier relatif et z un complexe non nul, on a :

$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \quad [2\pi].$$

1.5 Exponentielle complexe

Les propriétés de la fonction exponentielle réelle $x \mapsto e^x$ sont supposées connues.

Définition 5

Soit $z = x + i\,y$ un complexe (x et y étant réels). On appelle *exponentielle* de z le nombre complexe :

$$e^z = e^x\, e^{iy}.$$

Remarques

- La fonction $z \mapsto e^z$ prolonge la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ puisque si $y = 0$, on a $e^{iy} = 1$.
- De même, pour $\theta \in \mathbb{R}$, la notation $e^{i\theta}$ définie page 24 représente l exponentielle du complexe imaginaire pur $i\,\theta$.
- On retrouve ainsi l'égalité $e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$.

Proposition 13

Étant donné un nombre complexe z, le module de e^z est $e^{\mathrm{Re}(z)}$ et l'un de ses arguments est $\mathrm{Im}(z)$.

En particulier, on a $\forall z \in \mathbb{C}\,,\ e^z \neq 0$.

émonstratio Si $z = x + i\,y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $e^z = e^x\, e^{iy}$ avec $e^x > 0$ ce qui donne le résultat.
On a bien $e^z \neq 0$ puisque $|e^z| = e^x \in \mathbb{R}_+^*$. □

Proposition 14

- On a :
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2\,,\ e^{z+z'} = e^z\, e^{z'}.$$
- Pour $z \in \mathbb{C}$, l'inverse de e^z est e^{-z}.

émonstration

- Si $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$e^{z+z'} = e^{(x+x')+i(y+y')} = e^{x+x'}\, e^{i(y+y')} = e^x\, e^{x'}\, e^{iy}\, e^{iy'} = e^z\, e^{z'}$$
- Conséquence des égalités $e^z\, e^{-z} = e^{z-z} = 1$. □

Proposition 15

Tout nombre complexe a non nul est l'image par l'exponentielle complexe d'au moins un complexe z_0. Ses antécédents sont alors les $z_0 + 2ik\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

émonstration Pour tout complexe non nul $a = \rho\, e^{i\theta}$ (avec $\rho > 0$) résolvons l'équation $e^z = a$:

- Soit $z = x + i\,y$ tel que $e^z = a$.
  Le module de e^z est e^x, donc $x = \ln \rho$.
  L'égalité $e^z = a$ devient donc $e^{iy} = e^{i\theta}$, ce qui donne $y = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Donc $z = z_k = \ln \rho + i\theta + 2ik\pi$
- Réciproquement, les nombres complexes $z_k = \ln \rho + i\theta + 2ik\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ vérifient $e^{z_k} = a$. □

Remarques

- L'application exponentielle complexe :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$$

 est donc :
 – surjective d'après la proposition 15,
 – un morphisme de groupes de $(\mathbb{C},+)$ sur $(\mathbb{C}^*,.)$ d'après la proposition 14.
- Les antécédents d'un nombre complexe non nul z par la fonction exponentielle sont donc les nombres de la forme $\ln\rho + i\,\theta$ où ρ est le module et θ un argument de z.
- La fonction exponentielle n'est donc pas bijective, ce qui nous empêche de définir, comme sur $\mathbb{R}$, une fonction logarithme.
- Mais comme tout nombre complexe non nul admet un unique argument dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$, la fonction exponentielle est une bijection de $\left\{x+i\,y \;\middle|\; (x,y)\in\mathbb{R}\times\,]-\pi,\pi]\right\}$ sur $\mathbb{C}^*$
 C'est ainsi qu'est définie la fonction `ln` dans `MAPLE` : c'est la réciproque de cette bijection. Elle est telle que la partie imaginaire de `ln(z)` est égale à l'argument principal de z.

```
> ln(-1);
```

$$I\pi$$

```
> evalc(ln(3+4*I));
```

$$\ln(5) + I\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

```
> evalc(ln(exp(3+4*I)));
```

$$3 + I(4 - 2\pi)$$

Attention Pour z_1 et z_2 non nuls, la relation $\ln(z_1\,z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ est fausse, mais il existe un entier k tel que $\ln(z_1\,z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2i\,k\,\pi$.

2. Applications à la trigonométrie

Les nombres complexes sont très utiles pour de nombreux calculs de trigonométrie. Par exemple, les formules d'addition :

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

ne sont qu'une autre écriture des parties réelle et imaginaire de $e^{ia}\,e^{ib}$ (*cf.* page 25).

2.1 Linéarisation de $\cos^m \theta \sin^n \theta$

Étant donné m et n deux entiers naturels et θ un réel, linéariser $\cos^m \theta \sin^n \theta$ c'est l'exprimer comme combinaison linéaire de $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Cette opération est très utile en particulier pour en trouver une primitive ou ses dérivées successives.

Exemple Linéarisation de $\sin^6 \theta$.

En utilisant les formules d'Euler, on obtient :

$$\sin^6 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^6$$

puis, en développant le second membre de cette égalité :

$$\sin^6 \theta = -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta} - 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} - 20 + 15e^{-2i\theta} - 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}\right)$$

On regroupe alors les termes en $e^{ik\theta}$ et en $e^{-ik\theta}$, de manière à faire apparaître $\cos k\theta$ ou $\sin k\theta$:

$$\begin{aligned}\sin^6 \theta &= -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta} + e^{-6i\theta} - 6(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) + 15(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 20\right)\\ &= -\frac{1}{32}\left(\cos 6\theta - 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta - 10\right).\end{aligned}$$

2.2 Expression de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Exemple Pour exprimer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, on commence par écrire la formule de Moivre :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$$

puis après avoir développé, par la formule du binôme, le premier membre de l'égalité précédente, on identifie les parties réelles et imaginaires des deux membres de l'égalité obtenue, ce qui donne :

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\sin^3\theta + \sin^5\theta.$$

Remarque En remplaçant $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$ dans l'expression précédente de $\cos 5\theta$, on obtient $\cos 5\theta$ comme un polynôme en $\cos\theta$:

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$, la méthode précédente peut s'appliquer pour exprimer $\cos n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme, on a :

$$e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta\,(i\sin\theta)^k. \tag{E}$$

- Les termes réels de cette somme correspondent aux valeurs paires de l'indice, de la forme $k = 2p$, l'entier p vérifiant $p \leqslant \frac{n}{2}$, c'est-à-dire $p \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière du réel x.
  En identifiant les parties réelles de l'égalité (E), on obtient :
  $$\cos n\theta = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}\theta\,\sin^{2p}\theta. \tag{C}$$
- Les termes imaginaires purs de cette somme correspondent aux valeurs impaires de l'indice, de la forme $k = 2p+1$ l'entier p vérifiant $2p+1 \leqslant n$, c'est-à-dire $p \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.
  En identifiant les parties imaginaires de l'égalité (E) on obtient :
  $$\sin n\theta = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \cos^{n-(2p+1)}\theta\,\sin^{2p+1}\theta. \tag{S}$$

Remarques

- Comme l'expression de $\cos n\theta$ donnée par (C) ne contient que des puissances paires de $\sin\theta$, on peut obtenir $\cos n\theta$ comme un polynôme en $\cos\theta$ en remplaçant $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$.
- De même, en mettant en facteur $\sin\theta$ dans le membre de droite de l'égalité (S), on voit que $\sin(n\theta)$ peut s'exprimer comme le produit de $\sin\theta$ par un polynôme en $\cos\theta$.

2.3 Expression de $\tan n\theta$ en fonction de $\tan\theta$

Exemple Pour obtenir l'expression de $\tan 5\theta$ en fonction de $\tan\theta$ lorsque ces expressions ont un sens, on part des formules :

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\tan 5\theta &= \frac{5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\sin^3\theta + \sin^5\theta}{\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta}\\ &= \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta}\end{aligned}$$

après division haut et bas par $\cos^5\theta$.

De même en partant des expressions de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ (*cf.* (C) et (S)) la methode précédente permet d'exprimer $\tan n\theta$ en fonction de $\tan\theta$

3. Résolution d'équations algébriques dans $\mathbb{C}$

3.1 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Racine carrée d'un complexe

Définition 6

On appelle *racine carrée* d'un nombre complexe a tout nombre complexe z tel que $z^2 = a$.

Proposition 16

Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

émonstration Soit z un complexe non nul de forme trigonométrique $z = r\,e^{i\theta}$ (avec $r > 0$) Le complexe Z, de forme trigonométrique $Z = \rho\,e^{i\varphi}$, est une racine carrée de z si, et seulement si, :

$$\rho^2\,e^{2i\varphi} = r\,e^{i\theta},$$

ce qui équivaut à :

$$\rho^2 = r \qquad \text{et} \qquad 2\varphi \equiv \theta \quad [2\pi].$$

Le nombre complexe z admet donc deux racines carrees opposees $\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} = -\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$. □

Exemples

1. Les deux racines carrées d'un réel strictement positif a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
2. Les deux racines carrées d'un réel strictement négatif a sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$
3. Le complexe 0 n'a que lui-même comme racine carrée.

Attention

- La notation $\sqrt{a}$ n'a de sens que pour $a \in \mathbb{R}_+$; c est–à–dire **la** racine carrée du réel positif a.
- Dans le cas général, on parle d'**une** racine carrée.

Méthode algébrique La recherche algébrique des racines carrées Z d'un complexe non réel z, entraîne les relations :

$$\operatorname{Re}(Z^2) = \operatorname{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad |Z|^2 = |z|$$

ce qui donne, si $Z = X + i\,Y$, avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$:

$$X^2 - Y^2 = \operatorname{Re} z \qquad \text{et} \qquad X^2 + Y^2 = |z|.$$

- Les dernières relations permettent de déterminer X^2 et Y^2.
- Comme $\operatorname{Im} z \neq 0$, les valeurs de X^2 et Y^2 sont non nulles et donnent donc quatre couples (X, Y) possibles, dont on extrait les deux couples solutions en utilisant que $X\,Y$ et $\operatorname{Im} z$ ont même signe puisque l'on a $2X\,Y = \operatorname{Im}(Z^2) = \operatorname{Im}(z)$.

Exemple La recherche des racines carrées du complexe $1 + i$ sous la forme algébrique $z = x + i\,y$ conduit au système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x\,y > 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont données par :

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2} \\ x\,y > 0 \end{cases}$$

Les racines carrées de $1 + i$ sont donc :

$$Z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}.$$

En combinant la méthode algébrique et la méthode trigonométrique on peut en déduire $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$: en effet, $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et les racines carrées de $1+i$ s'écrivent aussi $\pm 2^{1/4}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$; puisque $\cos\dfrac{\pi}{8}$ est positif Z_1 est égal à $2^{1/4}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$, ce qui donne :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2^{1/4}}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2^{1/4}}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

On en déduit $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ puisque :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{2}-1)^2.$$

Résolution d'une équation du second degré

Proposition 17

Étant donnés trois complexes a, b et c, avec $a \neq 0$, considérons l'équation :

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \qquad (E)$$

et $\Delta = b^2 - 1ac$ son *discriminant.*

- Si $\Delta \neq 0$, en appelant δ une racine carrée de Δ l'équation (E) admet deux racines distinctes :
$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

é onst ation Après avoir fait apparaître un début de carré, on peut mettre le trinôme $a\,z^2 + b\,z + c$ sous forme canonique :

$$\begin{aligned} a\,z^2 + b\,z + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}\,z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les complexes z tels que $z + \dfrac{b}{2a}$ soit l'une des racines carrées de $\dfrac{\Delta}{4a^2}$, ce qui donne le résultat □

Corollaire 18

Étant donnés trois réels a, b et c, avec $a \neq 0$, considérons l'équation :

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \qquad (E)$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son *discriminant*.

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double.
- Si $\Delta < 0$, l'équation (E) admet deux racines complexes distinctes conjuguées.

émonstratio Il suffit d'utiliser les résultats précédents et de remarquer que :

- si $\Delta \geqslant 0$, les racines sont $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta < 0$, les racines sont $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. □

Exemples

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour trouver les racines de l'équation en x :

$$x^2 + 4(t-1)\,x + 3t - 10t + 3 = 0$$

on calcule le discriminant :

$$\Delta = 4\big(4(t-1)^2 - 3t^2 + 10t - 3\big) = \big(2(t+1)\big)^2.$$

On a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{4(t-1) + 2(t+1)}{2} = 3t - 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4(t-1) - 2(t+1)}{2} = t - 3$$

(il n'y en a qu'une seule si $t = -1$).

Remarque Dans ce cas, il vaut mieux éviter d'utiliser les formules $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ qui introduiraient ici un terme $\pm 2|t+1|$ avec des valeurs absolues inutiles.

2. Pour determiner $t = \tan\frac{\pi}{12}$, on utilise $\tan\frac{\pi}{6} = 1/\sqrt{3}$. Ainsi :

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{soit} \qquad t^2 + 2t\sqrt{3} - 1 = 0$$

Cette équation admet des racines réelles $-\sqrt{3} \pm 2$. Comme $t \geqslant 0$, on en déduit $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

Remarque L'autre racine est la tangente de l'autre élément $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(2\theta) = 1/\sqrt{3}$, soit $\theta = \pi/12 - \pi/2 = -5\pi/12$

On en déduit donc $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

Proposition 19

Soient trois complexes a, b et c, avec $a \neq 0$.

Deux nombres complexes z_1 et z_2 (éventuellement égaux) vérifient les relations :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1\, z_2 = \frac{c}{a}$$

si, et seulement si, ce sont les deux racines de l'équation :

$$a\, z^2 + b\, z + c = 0.$$

émonstration

- Si z_1 et z_2 sont les deux racines de l'équation, on a immediatement $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1\, z_2 = \dfrac{c}{a}$ en utilisant la proposition 17 de la page 36.
- Réciproquement, si $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1\, z_2 = \dfrac{c}{a}$, alors :

$$a\,(z - z_1)\,(z - z_2) = a\, z^2 + b\, z + c$$

et donc les racines de l'équation $a\, z^2 + b\, z + c = 0$ sont z_1 et z_2 (c'est une racine double si $z_1 = z_2$). □

Exemples

1. Si z_1 et z_2 sont les deux racines de l'équation $z^2 - z + 4 = 0$, on n a pas besoin de les exprimer à l'aide de radicaux pour calculer $z_1^2 + z_2^2 - z_1\, z_2$. En effet :

$$z_1^2 + z_2^2 - z_1\, z_2 = (z_1 + z_2)^2 - 3z_1\, z_2 = -11.$$

2. Pour résoudre l'équation $z^2 - 2z\, \cos\theta + 1$ il est inutile de calculer de discriminant, puisque l'on connaît deux nombres complexes dont la somme est $2\cos\theta$ et le produit 1 : ce sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ (solutions évidentes).
3. De même, on voit que les deux racines de :

$$z^2 - (1 + a + a^2)\, z + a\,(1 + a^2) = 0$$

sont a et $1 + a^2$.

3.2 Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

Soit n un entier naturel non nul.

Définition 7

Si z est un complexe, on appelle *racine* $n^{\text{ème}}$ de z tout complexe Z tel que $Z^n = z$.

On appelle *racines* $n^{\text{èmes}}$ *de l'unité* les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1.

Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Proposition 20

Il existe exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ de l unité qui sont les complexes :

$$\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \xi_1^k \quad \text{avec} \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

émonstrati Soit $Z = \rho\, e^{i\varphi}$ un complexe, le réel ρ étant positif, et φ un réel.

$$\begin{aligned} Z^n = 1 &\Longleftrightarrow \rho^n\, e^{in\varphi} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \rho^n = 1 \quad \text{et} \quad n\varphi \equiv 0 \quad [2\pi] \\ &\Longleftrightarrow \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \,:\, n\varphi = 2k\pi \\ &\Longleftrightarrow \rho = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \,:\, \varphi = \frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

- À tout entier relatif k, associons le complexe $\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. D'après ce qui précède, l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de z est l'ensemble $\{\xi_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

  Soit k un entier relatif. On peut écrire $k = t + n\,q$, où t est un entier appartenant à $[\![0, n-1]\!]$ et q un entier relatif, ce qui donne :

  $$\xi_k = e^{i(\frac{2t\pi}{n} + 2q\pi)} = \xi_t.$$

  L'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de z est donc l'ensemble $\{\xi_t \mid t \in [\![0. n-1]\!]\}$.

- Pour terminer vérifions qu'il y a exactement n racines $n^{\text{èmes}}$, c'est-à-dire que les nombres complexes $\xi_{0,}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ sont distincts deux à deux.

  Soient k et l deux entiers de $[\![0, n-1]\!]$ tels que $\xi_k = \xi_l$, alors :

  $$\frac{2k\,\pi}{n} \equiv \frac{2l\,\pi}{n} \quad [2\pi],$$

  et il existe un entier relatif q tel que :

  $$\frac{2k\,\pi}{n} = \frac{2l\,\pi}{n} + 2q\,\pi,$$

  soit encore $k - l = n\,q$.

Comme k et l sont deux entiers de l'intervalle $[\![0\ n-1]\!]$, leur différence ne peut être multiple de n que si k et l sont égaux

□

Remarque Parmi les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, il y a évidemment $1 = \xi_0$.

Proposition 21

L ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, noté $\mathcal{U}_n$, est stable par produit et passage à l'inverse.

émonstration Le produit et l'inverse de racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont encore des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité puisque :

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} \qquad \text{et} \qquad (z_1\, z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

Comme de plus $1 \in \mathcal{U}_n$, on en déduit que $\mathcal{U}_n$ est un sous–groupe de $\mathbb{C}^*$ (ou de $\mathcal{U}$) □

Proposition 22

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- Si ξ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité différente de 1, on a :

$$1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = 0.$$

- La somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est égale à 0.

émonstration

Comme $\xi \neq 1$ on a $1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = \dfrac{1-\xi^n}{1-\xi}$ ce qui prouve le résultat puisque $\xi^n = 1$

Comme $n \geqslant 2$, on a $\xi_1 \neq 1$ et la somme S des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité s'écrit :

$$S = 1 + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n-1} = 1 + \xi_1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_1^{n-1} = 0.$$

□

Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

Proposition 23

Soit z un complexe non nul. Si u est une racine $n^{\text{ème}}$ de z alors l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de z est :

$$\{u\xi \mid \xi \in \mathcal{U}_n\}.$$

émonstration

$$\begin{aligned} Z^n = z &\iff Z^n = u^n \\ &\iff \left(\frac{Z}{u}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists \xi \in \mathcal{U}_n \ : \ \frac{Z}{u} = \xi \end{aligned}$$

d'où la propriété. □

Remarque Si $z = 0$, la description des racines $n^{\text{èmes}}$ de z donnée dans la proposition précédente est encore valable.

Corollaire 24

Étant donné un entier naturel $n \neq 0$ et un complexe $z \neq 0$ de module r et d argument θ le complexe z admet n racines $n^{\text{èmes}}$ qui sont les complexes :

$$Z_k = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{avec} \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

émonstration Il suffit d'appliquer la proposition précédente après avoir remarqué que $Z_0 = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de z. □

4. Applications à la géométrie

Voir le chapitre suivant.

EXERCICES

1. Montrer que :

$$|z - i| = |z + i|$$

si, et seulement si z est réel.

2. À quelle condition le produit de deux nombres complexes est-il réel (respectivement imaginaire pur) ?

3. Mettre sous forme algébrique puis trigonométrique le nombre complexe :

$$Z = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}.$$

Calculer Z^3.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations trigonometriques suivantes :

a) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$

b) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$

c) $a\cos(2x) = 4\sin x,\ a \in \mathbb{R}$

d) $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x + \sqrt{3} - 1 = 0$

e) $\sin x + (1 + \sqrt{2})\cos x - 1 = 0$

5. Linéariser $\cos^7 x$.

6. Calculer :

$$\frac{\sin 6x}{\sin x}$$

en fonction de $\cos x$.

7. Démontrer que si a, b et c sont trois réels tels que $a + b + c = \pi$, alors :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1.$$

8 Resoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a)

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin a \\ \cos x + \cos y = 1 + \cos a \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a + b \\ \sin x \sin y = a - b \end{cases}$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Calculer : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx$ et $S' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx.$

10. Résoudre les équations :

a) $z^2 = -7 + 24i$

b) $z^2 = -3 - 4i$

c) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

d) $z^2 + z + 1 = 0$

e) $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$

f) $16(z-1)^4 + (z+1)^4 = 0$

g) $z^2 - \bar{z} + 2 = 0$

11. Déterminer :

a) les racines cinquièmes de $-i$,

b) Les racines sixièmes de $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

12. Soient n et p deux entiers avec $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$.
Calculer la somme des puissances $p^{\text{èmes}}$ des racines d'ordre n de l'unité.

13. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = 0 \Longrightarrow |z| \leqslant 1.$$

14. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^4 - 4(\cos a \cos b)z^3 + 2(1 + \cos 2a + \cos 2b)z^2 - 4(\cos a \cos b)z + 1 = 0.$$

15. On considère l'équation dans $\mathbb{C}$: $X^3 + pX + q = 0$ $(*)$ où $(p\ q) \in \mathbb{R}^2$.

a) Soit x une racine de $(*)$, on pose :

$$\begin{cases} u + v = x \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Justifier l'existence du couple (u, v).

Montrer que u^3 et v^3 sont racines de l'équation $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

b) Réciproquement, soient X' et X'' les racines de $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27} = 0$. Montrer que l'on peut trouver une racine cubique u de X' et une racine cubique v de X'' telles que $uv = -\dfrac{p}{3}$.

En déduire les racines de $(*)$.

c) Discuter le nombre de racines reelles de $(*)$.

16. Soient a et b deux nombres complexes conjugues, on pose $a = \rho e^{i\theta}$. Calculer :

$$(a + b)(a^2 + b^2) \cdots (a^n + b^n).$$

17. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n + 1$ nombres réels et p l'application définie par :

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n.$$

Montrer que si $p(z) = 0$ alors $p(\bar{z}) = 0$.

18. On considère l'équation :

$$z^2 - (2 + i\alpha)z + i\alpha + 2 - \alpha = 0\ ,\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle les deux racines de l'équation sont complexes conjuguées. Calculer alors les solutions.

19. Décomposer le polynôme $z^6 - 2z^3 \cos\theta + 1$ en produit de trois trinômes du second degré à coefficients réels.

20. Quel est l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie :

$$z + \bar{z} = |z|\ ?$$

21. Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1 - z$ aient le même module.

22. On définit une suite de nombres complexes par la donnée de z_0, z_1 et la relation :

$$z_n - z_{n-1} = \alpha(z_{n-1} - z_{n-2}) \ , \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite soit périodique.

23. **a)** Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer l'égalité suivante appelée identité de la médiane :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

b) Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = zz'$. Montrer que :

$$|z| + |z'| = \left|u + \frac{z + z'}{2}\right| + \left|u - \frac{z + z'}{2}\right|$$

24. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les n nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tous non nuls pour que $|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| = |z_1 + z_2 + \cdots + z_n|$.

25. Soit a un nombre complexe avec $|a| = 1$.
On note $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines de l'équation $z^n = a$.
Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont $(1 + z_1)^n, \ldots, (1 + z_n)^n$ sont alignés.

26. Trouver les nombres complexes z tels que les points d'affixe z, z^2 et z^4 soient alignés.

27. Résoudre dans $\mathbb{C}$, le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xyz = 1 \\ |x| = |y| = |z|. \end{cases}$$

Chapitre 2

Géométrie plane

Conformément au programme, ce chapitre introduit de manière élémentaire la géométrie du plan. Cette présentation, qui exclut toute théorie générale des espaces vectoriels, permet de travailler dans un cadre théorique précis et de disposer de tous les résultats classiques de la géométrie plane. En première lecture le lecteur peut se contenter d'apprendre à utiliser les notions introduites dans ce chapitre (donc sans approfondir les démonstrations) quitte à revenir aux fondements de la théorie ultérieurement.

1. Définitions, Notations

Dans tout ce chapitre, on considère le plan euclidien usuel E muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- Tout vecteur $\vec{u}$ du plan s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$, où α et β sont des réels appelés *composantes* ou *coordonnées* de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
- Pour tout point du plan, il existe donc un unique couple (x, y) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$. Les réels x et y s'appellent les *coordonnees* de M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
- La *norme euclidienne* du vecteur $\vec{u} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.
- Un vecteur est dit *unitaire*, ou *normé*, s'il est de norme 1.
- La *distance* de deux points A et B de E, notée $d(A, B)$ ou plus simplement AB est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Si $\vec{u}_1 = \alpha_1 \vec{\imath} + \beta_1 \vec{\jmath}$ et $\vec{u}_2 = \alpha_2 \vec{\imath} + \beta_2 \vec{\jmath}$, le *produit scalaire* de $\vec{u}_1$ par $\vec{u}_2$ est :
$$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2.$$
On a immédiatement $\left\|\vec{u}\right\|^2 = \vec{u}.\vec{u}$.
- Deux vecteurs sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul ; ils forment une *base orthonormée* s'ils sont orthogonaux et unitaires.
Un *repère orthonormé* est un triplet $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où Ω est un point du plan et $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée.

   Remarque Les termes de "base" et de "repère" seront justifiés par la proposition 6 de la page 55.

- Si A est un point de E et $\vec{u}$ un vecteur, on note $A + \vec{u}$ l'unique point B de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
- Si $\lambda + \mu = 1$, le *barycentre* des points A et B affectés respectivement des coefficients λ et μ est noté $\lambda\,A + \mu\,B$. En particulier, le *milieu* du segment $[AB]$ est noté $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ ou $\frac{A+B}{2}\cdot$
- La *droite* passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ non nul est l'ensemble des points de la forme $A + \lambda\,\vec{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On la note parfois $(A, \vec{u})$ ou $A + \mathbb{R}\vec{u}$. On dit que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite.
Si A et B sont deux points distincts on note (AB) la droite $(A, \overrightarrow{AB})$.
- La *direction* de la droite $(A, \vec{u})$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\,\vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* (ou proportionnels) s'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$ ou un réel μ tel que $\vec{u} = \mu\,\vec{v}$.

   Remarques
   - Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, il est équivalent d'écrire $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$ ou $\vec{u} = \frac{1}{\lambda}\,\vec{v}$.
   - Dans le cas contraire, pour traduire la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on ne peut pas se contenter de l'une des égalités, car si $\vec{u} = 0$ et $\vec{v} \neq 0$, il existe λ tel que $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$ (évidemment $\lambda = 0$), mais on ne peut pas trouver de réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$.

- La direction d'une droite $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$, avec $\vec{u} \neq 0$, est donc l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.
Les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ sont les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u}$.

- Deux droites sont *parallèles* si elles ont même direction c'est-à-dire si elles admettent un vecteur directeur commun.
- Deux droites dont orthogonales si elles sont dirigées par des vecteurs orthogonaux.

Remarque Toutes ces notions ont déjà été vues dans les classes antérieures. Elles seront reprises en détail plus tard dans cet ouvrage, et en particulier dans le chapitre sur les espaces euclidiens.

Proposition 1

Etant donné un vecteur unitaire $\vec{u} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$, le vecteur $\vec{v} = -\beta\,\vec{\imath} + \alpha\,\vec{\jmath}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$, et les vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ sont les $\lambda\,\vec{v}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il y a donc deux bases orthonormées de premier vecteur $\vec{u}$: il s'agit de $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, -\vec{v})$.

ém nst a ion Il est immédiat que le vecteur $\vec{v}$ est normé et que $\lambda\,\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ pour tout réel λ.
Réciproquement, soit $\vec{w} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ On a donc $\alpha\,x + \beta\,y = 0$. Comme $\vec{u}$ est non nul, on peut supposer, par exemple, $\alpha \neq 0$. On a alors $x = -(\beta/\alpha)\,y$ ce qui donne $\vec{w} = (y/\alpha)\,\vec{v}$.
Le cas $\beta \neq 0$ est similaire. □

Corollaire 2

Un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires est nul.

2. Modes de repérage d'un point

2.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 1

Les *coordonnées* d'un point M de E dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$. On note alors $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right.$.

On peut ainsi identifier le plan E à $\mathbb{R}^2$ en associant au point $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right.$ le couple (x, y).

Règles de calcul Étant donnés des points $M_1 \left| \begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix} \right.$ et $M_2 \left| \begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix} \right.$:

- le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour composantes $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$,
- si λ_1 et λ_2 sont deux réels tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, le barycentre $G = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ des points M_1 et M_2 affectés respectivement des coefficients λ_1 et λ_2 a pour coordonnées $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$.

Ces deux résultats sont des conséquences des relations vectorielles :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OG} = \lambda_1 \overrightarrow{OM_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OM_2}.$$

Définition 2

Une équation $F(x,y) = 0$ est une *équation cartésienne* d'une partie $\mathcal{A}$ du plan si l'on a l'équivalence :

$$M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right. \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow F(x,y) = 0.$$

Remarque Sous les hypothèses de la définition précédente, $\lambda F(x,y) = 0$ est aussi une équation de $\mathcal{A}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

La réciproque est fausse, puisque $(a\,x + b\,y + c)^2 = 0$ et $a\,x + b\,y + c = 0$ sont deux équations non proportionnelles d'une même partie du plan.

En revanche, lorsque $(a,b) \neq (0,0)$, la proposition 22 de la page 70 montrera que $a\,x + b\,y + c = 0$ est l'équation d'une droite $\mathcal{D}$ et que les equations de $\mathcal{D}$ de cette forme (équation linéaire) sont $\lambda\,a\,x + \lambda\,b\,y + \lambda\,c = 0$ avec $\lambda \neq 0$.

Exemple Les *lignes de niveau* d'une fonction F, sont les ensembles d'équations $F(x,y) = \lambda$.

2.2 Affixes

Définitions

Définition 3

- On appelle *image* du nombre complexe $z = x + \imath\,y$ (avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$), le point de coordonnees (x,y) dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$.
- On appelle *affixe* d'un point $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right.$, le complexe $x + \imath\,y$.
- On appelle *affixe* d'un vecteur $\alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$ le complexe $\alpha + \imath\,\beta$.

On peut ainsi identifier le plan E à $\mathbb{C}$ en associant au point $M\left|\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right.$ son affixe $x + i\,y$.

Règles de calcul Soient A et B deux points d'affixes respectives a et b

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le complexe $b - a$.
- Si λ et μ sont deux réels de somme 1, l'affixe du barycentre de A et B affectes respectivement des coefficients λ et μ est $\lambda\, a + \mu\, b$

Distance et norme

Proposition 3

- La norme d'un vecteur d'affixe z est $|z|$.
- La distance de deux points d'affixes z_1 et z_2 est $|z_2 - z_1|$.

émonstration Le premier point est une conséquence de la relation $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ si $z = a + i\,b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Le deuxième s'en déduit. □

Exemples

1. L ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1 a pour image le cercle de centre O et de rayon 1.
2. Plus généralement, le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $|z - a| = r$, où a est l'affixe de A.
3. De même, les disques ouvert et fermé de centre a et de rayon r sont respectıvement caractérisés par $|z - a| < r$ et $|z - a| \leqslant r$.
4. Les inégalités triangulaires :
$$\big||z_2| - |z_1|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$
se traduisent géométriquement par le fait que dans un triangle, la longueur de chaque côté est comprise entre la somme et la différence des longueurs des deux autres côtés. De plus :
$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \Longleftrightarrow C \in [A, B].$$
En effet l'égalité est évidente si $C = A$ ou $C = B$. Sinon, soient a, b et c les affixes respectives des points A, B et C, on a $|b - a| = |b - c| + |c - a|$ si, et seulement si, il existe $k > 0$ tel que $(b - c) = k\,(c - a)$ (voir page 23) ce qui s'écrit encore $c - a = \dfrac{1}{k+1}\,(b - a)$ avec $\dfrac{1}{k+1} \in \,]\,0, 1\,[\,$.

2.3 Coordonnées polaires

Définitions

Si θ est un réel, on note :

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}.$$

Il est immédiat de voir que les vecteurs $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ sont orthogonaux et unitaires.

Définition 4

Le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est appelé *repère polaire*. Le point O est appelé *pôle* et la droite orientée $(O, \vec{\imath})$ l'*axe polaire.*

Remarque Dans ces conditions, à tout couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on peut faire correspondre le point M tel que $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta)$.

On dispose ainsi d une application de $\mathbb{R}^2$ dans le plan ; montrons sa surjectivité.

Proposition 4

Étant donné un point M de E, il existe un couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta) = r\,(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}).$$

Un tel couple est appelé un *système de coordonnées polaires* de M par rapport au repère $\mathcal{R}$.

émonstrati n

- Si $M = O$, tout couple de la forme $(0, \theta)$ convient
- Si $z \neq 0$ est l'affixe d'un point de plan différent de O, le module et un argument de z forment un système de coordonnées polaires de M puisque l'égalité $z = r\,\iota^{i\theta}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta)$. □

Propriétés

- Si $(r.\theta)$ est un couple de coordonnées polaires d'un point M d'affixe $z \neq 0$, l'égalité $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta)$ s'écrit $z = r\,e^{i\theta}$, ce qui donne :

$$|z| = r \qquad \text{et} \qquad \arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi]$$

ou :

$$|z| = -r \qquad \text{et} \qquad \arg(z) \equiv \theta + \pi \quad [2\pi].$$

- Si M est un point distinct du pôle dont (r_0, θ_0) est un système de coordonnées polaires, les systèmes de coordonnées polaires de M sont les couples (r, θ) vérifiant :
$$r = r_0 \qquad \text{et} \qquad \theta \equiv \theta_0 \quad [2\pi]$$
ou :
$$r = -r_0 \qquad \text{et} \qquad \theta \equiv \theta_0 + \pi \quad [2\pi].$$
Ce sont donc les couples $\big((-1)^n r_0, \theta_0 + n\,\pi\big)$, avec $n \in \mathbb{Z}$.
- Tout point du plan autre que le pôle possède donc un unique système de coordonnées polaires (r, θ) tel que :
$$r > 0 \qquad \text{et} \qquad -\pi < \theta \leqslant \pi.$$
- Si $r \geqslant 0$, alors $r = d(O, M)$ et le point M appartient à la demi–droite d'origine O et dirigée par $\vec{u}(\theta)$.
- Si $r \leqslant 0$, alors $r = -d(O, M)$ et le point M appartient à la demi–droite d'origine O et dirigée par $-\vec{u}(\theta)$.

Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes

En projetant sur chaque axe la relation $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta)$, on obtient :
$$x = r\,\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\,\sin\theta.$$

Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires

Première méthode : pour un point différent du pôle, on commence par déterminer r au signe près :
$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$
puis l'on définit θ modulo 2π par :
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}\cdot$$

Deuxième méthode : pour un point qui n'est pas sur Oy on commence par déterminer θ modulo π par :
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
puis l'on définit r par :
$$r = \frac{x}{\cos\theta}\cdot$$

Remarque Pour un point qui n'a pas de coordonnées de la forme $(x, 0)$ avec $x \leqslant 0$, on a une expression analytique de $r \geqslant 0$ et de la valeur de θ appartenant à $]-\pi\ \pi[$ (c'est l'argument principal du complexe $x + i\,y$) :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot$$

En effet, si $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r > 0$, alors :

$$x+\sqrt{x^2+y^2} = r\,(1+\cos\theta) = 2r\cos^2\frac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad y = 2r\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2}$$

ce qui donne :

$$\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

et prouve le résultat.

Définition 5

Une équation $F(r,\theta) = 0$ est une *équation polaire* d'une partie $\mathcal{A}$ du plan lorsqu'un point M appartient à $\mathcal{A}$ si, et seulement si, l un de ses couples de coordonnées polaires vérifie $F(r,\theta) = 0$.

Remarques

- Bien remarquer qu un point admet plusieurs couples de coordonnées polaires et que l'on demande seulement que l'un d'entre eux vérifie l'équation. C'est là une différence fondamentale d'avec les équations cartésiennes.
- Si $F(r,\theta) = 0$ est une équation polaire d'une partie $\mathcal{A}$, alors $\lambda\,F(r,\theta) = 0$ est aussi une équation polaire de $\mathcal{A}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

  Mais l'on peut trouver des équations non proportionnelles, comme par exemple $r = \cos\theta + 1$ et $r = \cos\theta - 1$ qui représentent la même courbe du plan (appelée *cardioïde*) puisque les points de coordonnées polaires (r,θ) et $(-r,\theta+\pi)$ sont confondus.

3. Produit scalaire

3.1 Propriétés du produit scalaire

L'expression du produit scalaire en fonction des composantes des vecteurs dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ donne immédiatement le résultat suivant :

Proposition 5

Le produit scalaire est *bilinéaire symétrique*, c'est-à-dire que l'on a, pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, et pour tous réels λ_1 et λ_2 :

$$\vec{u}.\left(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2\right) = \lambda_1 \vec{u}.\vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{u}.\vec{v}_2$$

$$\left(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2\right).\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1.\vec{v} + \lambda_2 \vec{u}_2.\vec{v}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}.$$

Remarques

- Ainsi si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, x_1, x_2, y_1 et y_2 quatre reels, on a :

$$\left(x_1 \vec{u} + y_1 \vec{v}\right).\left(x_2 \vec{u} + y_2 \vec{v}\right) = x_1 x_2 \left(\vec{u}.\vec{u}\right) + \left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right)\left(\vec{u}.\vec{v}\right) + y_1 y_2 \left(\vec{v}.\vec{v}\right).$$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement a et b pour affixes, leur produit scalaire est :

$$\vec{u}.\vec{v} = \mathrm{Re}(\bar{a}\, b).$$

Proposition 6

Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée, tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire sous la forme $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$. De plus, on a :

$$x = \vec{u}.\vec{w} \qquad \text{et} \qquad y = \vec{v}.\vec{w}.$$

Les scalaires x et y sont appelés *composantes* ou coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$.

Tout point M admet donc dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ un unique système de *coordonnées cartésiennes*, c'est-à-dire un unique couple (x, y) de réels vérifiant :

$$\overrightarrow{\Omega M} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}.$$

émonstration

Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan.

- Si $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, alors par bilinéarité du produit scalaire :

$$\vec{u}.\vec{w} = x\,\vec{u}.\vec{u} + y\,\vec{u}.\vec{v} = x$$

  et de même $\vec{v}.\vec{w} = y$. D'où l'unicité de (x, y).

- Le vecteur $\vec{w} - (\vec{u}.\vec{w})\,\vec{u} - (\vec{v}.\vec{w})\,\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ (donc colinéaire à $\vec{v}$) et orthogonal à $\vec{v}$. Il est donc nul, ce qui prouve :

$$\vec{w} = (\vec{u}.\vec{w})\,\vec{u} + (\vec{v}.\vec{w})\,\vec{v}.$$

□

Remarque Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée. Étant donnés deux vecteurs :

$$\vec{u}_1 = x_1 \vec{u} + y_1 \vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 = x_2 \vec{u} + y_2 \vec{v},$$

on a $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

L'expression du produit scalaire en fonction des composantes est donc la même dans toute base orthonormée.

Proposition 7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs du plan, on a :

$$|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2| \leqslant \|u_1\| \, \|u_2\| \, .$$

émonstratio Soient $z_1 = x_1 + i\, y_1$ et $z_2 = x_2 + i\, y_2$ les affixes des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. On a .

$$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 = \operatorname{Re}(\bar{z}_1\, z_2).$$

Donc $|\vec{u}_1.\vec{u}_2| \leqslant |\bar{z}_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2| = \|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|$. □

Définition 6

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs non nuls, il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que :

$$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|\,\cos\theta.$$

Ce réel est appelé *mesure de l'angle (non orienté)* des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

émo st ation Il suffit de prendre l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$ dont le cosinus vaut $\dfrac{\vec{u}_1.\vec{u}_2}{\|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|}$. □

Exemples

1. En particulier, deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si une mesure de leur angle est $\pi/2$.
2. Soient A, B et C trois points distincts deux à deux. Si l'on note θ une mesure de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on a :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,AC\,\cos\theta.$$
En effet, on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ce qui donne :
$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
et donc la formule annoncée.
3. En particulier, on retrouve le théorème de Pythagore : le triangle (ABC) est rectangle en A si, et seulement si, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Définition 7

Étant données deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement dirigées par des vecteurs normés $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. La *mesure de l'angle non orienté* des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est l'unique réel $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que :

$$|\vec{u}_1.\vec{u}_2| = \cos\theta.$$

Remarques

- Ce réel ne dépend pas des vecteurs directeurs normés choisis, car changer $\vec{u}_1$ en $-\vec{u}_1$ ou $\vec{u}_2$ en $-\vec{u}_2$ multiplie le produit scalaire par -1.
- Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont des vecteurs directeurs non supposés unitaires, on a :

$$|\vec{u}_1.\vec{u}_2| = \|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|\,\cos\theta.$$

3.2 Projection sur une droite

Définition 8

Soit $\mathcal{D}$ une droite orientée par un vecteur unitaire $\vec{u}$. Si A et B sont deux points de $\mathcal{D}$, on appelle *mesure algébrique* $\overline{AB}$ l'unique réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\,\vec{u}$.

Remarque Si l'on oriente $\mathcal{D}$ par $-\vec{u}$ à la place de $\vec{u}$ la mesure algébrique est multipliée par -1

Proposition 8

Soit $\mathcal{D}$ une droite. Pour tout point A du plan il existe un unique point A' de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AA'} \perp \mathcal{D}$.

- Ce point est appelé *projeté* (ou *projection*) *orthogonal(e)* de A sur $\mathcal{D}$.
- C'est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de A.
- La distance $d(A, A')$ est appelée *distance de A à $\mathcal{D}$* et se note $d(A, \mathcal{D})$.

émonst atio Soit Ω un point de $\mathcal{D}$. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur normé de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ est tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\Omega A} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} \qquad \text{avec} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Un point M de $\mathcal{D}$ étant caractérisé par un réel x tel que $\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{AM} = (x-\lambda)\,\vec{u} - \mu\,\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ si, et seulement si, $x = \lambda$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de A'.
De plus :

$$d(A,M)^2 = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = (x-\lambda)^2 + \mu^2$$

est minimal lorsque $x = \lambda$, c'est-à-dire lorsque $M = A'$ □

Proposition 9

Soit $\mathcal{D}$ une droite orientée par un vecteur unitaire $\vec{u}$. Si A et B sont deux points de E, les points A' et B' projetés orthogonaux respectivement de A et B sur $\mathcal{D}$ sont tels que $\overline{A'B'} = \overrightarrow{AB}.\vec{u}$.

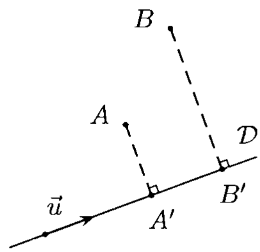
émonstrat on

Par la relation de Chasles, on a :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'}$ avec $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'} \perp \vec{u}$.

Donc :

$$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = \vec{u}.\overrightarrow{A'B'} = \overline{A'B'}.$$



□

4. Déterminant et angles orientés

4.1 Orientations du plan

Soit $\vec{u} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$ un vecteur unitaire. D'après la proposition 1 de la page 49, il y a exactement deux vecteurs $\vec{v}$ tels que $(\vec{u},\vec{v})$ soit une base orthonormée : il s'agit de $\vec{v} = -\beta\,\vec{\imath} + \alpha\,\vec{\jmath}$ et de son opposé.

Définition 9

Dans le plan E orienté par la base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on dit qu'une base orthonormée $(\vec{u},\vec{v})$ est *directe* si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de la forme :

$$\vec{u} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -\beta\,\vec{\imath} + \alpha\,\vec{\jmath} \qquad \text{avec } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur normé, on appelle *vecteur normé directement orthogonal à* $\vec{u}$ l'unique vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u},\vec{v})$ soit une base orthonormée directe.

Remarques

- Une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$ est *indirecte* si l'on a :

$$\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \beta\vec{\imath} - \alpha\vec{\jmath} \qquad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

- Si $\vec{u}$ est non nul, on dit que $\vec{v} \neq 0$ est *directement orthogonal* à $\vec{u}$ si $(\vec{u}/\|\vec{u}\|, \vec{v}/\|\vec{v}\|)$ est une base orthonormee directe.

On a immédiatement d'après la définition precédente :

Proposition 10

Si $\vec{u}$ est un vecteur normé d affixe z, le vecteur normé directement orthogonal à $\vec{u}$ a pour affixe $i\,z$.

4.2 Angle orienté

Définition 10

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires. En notant $\vec{u}'$ le vecteur normé directement orthogonal à $\vec{u}$ on appelle *mesure de l'angle orienté des vecteurs* $(\vec{u}, \vec{v})$ tout réel θ tel que $\vec{v} = (\cos\theta)\,\vec{u} + (\sin\theta)\,\vec{u}'$.

On note alors $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \theta \quad [2\pi]$.

Remarques

- Si $\vec{v} = x\,\vec{u} + y\,\vec{u}'$, alors $x^2 + y^2 = 1$ et le nombre complexe $z = x + i\,y$ est de module 1. Les réels θ vérifiant la propriété de la définition précédente sont donc les arguments de z.
- Cela justifie l'existence et l'unicité modulo 2π de la mesure de l angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires, on a $\vec{u}.\vec{v} = \cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Définition 11

On appelle *mesure de l'angle orienté* des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ toute mesure θ de l'angle orienté des vecteurs unitaires $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ et $\vec{v}/\|\vec{v}\|$

On note alors encore $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \theta \quad [2\pi]$.

On a donc $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos\theta$.

Ainsi, si l'on choisit $\theta \in [-\pi, \pi]$, on a $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos|\theta|$.

La mesure de l angle non orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donc $|\theta|$

Proposition 11

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} \equiv 0 \quad [\pi]$.

émonstratio Quitte à diviser $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par leur norme, on peut les supposer normés Ils sont alors proportionnels si, et seulement si, $\vec{u} = \pm\vec{v}$, c'est-à-dire si, et seulement si $\cos\theta = \pm 1$, où θ est une mesure de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ D'où le résultat. □

Remarque En particulier, l'inégalité $|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ est une égalité si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul et $\vec{v}$ un vecteur directement orthogonal à $\vec{u}$, alors :

$$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \qquad \text{et} \qquad \widehat{(\vec{u},-\vec{v})} \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

Proposition 12

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2 une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u_1},\vec{u_2})}$ est $\theta_2 - \theta_1$ où θ_1 et θ_2 sont respectivement des arguments de z_1 et z_2.

Démonstratio On peut supposer $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ normés, c'est-à-dire $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$. On a alors :

$$z_2 = e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1}\, e^{i(\theta_2-\theta_1)} = \cos(\theta_2-\theta_1)\, e^{i\theta_1} + \sin(\theta_2-\theta_1)\, i\, e^{i\theta_1}$$

avec $i\,e^{i\theta_1}$ l'affixe du vecteur normé directement orthogonal à $\vec{u}_1$
D'où le résultat. □

4.3 Déterminant de deux vecteurs

Définition 12

On appelle *déterminant* des vecteurs non nuls $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ le réel $\|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|\sin\theta$ où θ est une mesure de l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. On le note $\mathrm{Det}(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$.

Si $\vec{u}_1 = 0$ ou $\vec{u}_2 = 0$, on pose $\mathrm{Det}(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = 0$.

Si $\vec{u}_1 \neq 0$, le réel $\mathrm{Det}(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ est donc la mesure algébrique de la projection de $\vec{u}_2$ sur la droite orientée par le vecteur normé directement orthogonal à $\vec{u}_1$.

Proposition 13

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

ém nstration

- Si l'un des deux est nul, ils sont colineaires et leur determinant est nul
- Sinon, en notant θ une mesure de l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le déterminant est nul si, et seulement si, $\sin\theta = 0$ c'est-à-dire si $\theta \equiv 0 \quad [\pi]$, soit enfin s'ils sont colinéaires d'après la proposition 11 de la page ci-contre. □

Corollaire 14

Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\mathrm{Det}\big(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\big) = 0$.

Exemples

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteur orthogonaux on a $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v}) = \pm\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.
2. Plus précisément, si le vecteur $\vec{v}$ est directement orthogonal à $\vec{u}$, on a $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.
3. En particulier, si $(\vec{u},\vec{v})$ est une base orthonormée directe :
$$\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Det}(\vec{v},\vec{u}) = -1.$$

4.4 Propriétés

Proposition 15

Si les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ont respectivement z_1 et z_2 pour affixes on a :
$$\mathrm{Det}(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = \mathrm{Im}(\bar{z}_1\, z_2).$$

émonstra io C'est évident si $\vec{u}_1 = 0$ ou $\vec{u}_2 = 0$.

Sinon, notons $z_1 = r_1\, e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2\, e^{i\theta_2}$ avec $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$.

Une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u_1},\vec{u_2})}$ est donc $\theta_2 - \theta_1$ et donc :
$$\mathrm{Det}(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = r_1\, r_2\, \sin(\theta_2-\theta_1) = \mathrm{Im}(r_1\, e^{-i\theta_1}\, r_2\, e^{i\theta_2}) = \mathrm{Im}(\bar{z}_1\, z_2).$$
□

Corollaire 16

Si $\vec{u}_1 = x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath}$ et $\vec{u}_2 = x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath}$, alors :
$$\mathrm{Det}(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Notation On note $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$.

Remarques

- On a de façon évidente :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

  Les vecteurs $\vec{u}_1 \left|\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right.$ et $\vec{u}_2 \left|\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right.$ sont donc colinéaires si, et seulement si les vecteurs $\vec{u} \left|\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right.$ et $\vec{v} \left|\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right.$ sont colinéaires.

- La colinéarité des vecteurs $\vec{u}_1|_{y_1}^{x_1}$ et $\vec{u}_2|_{y_2}^{x_2}$ est équivalente à la proportionalité des couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2). On a donc :

$$(x_1, y_1) \text{ et } (x_2, y_2) \text{ proportionnels} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Proposition 17

Le déterminant est *bilinéaire antisymétrique*, c'est–à–dire que l'on a, pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, et pour tous réels λ_1 et λ_2 :

$$\operatorname{Det}\big(\vec{u}, \lambda_1\, \vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\big) = \lambda_1 \operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}_2)$$

$$\operatorname{Det}\big(\lambda_1\, \vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2, \vec{v}\big) = \lambda_1 \operatorname{Det}(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 \operatorname{Det}(\vec{u}_2. \vec{v})$$

$$\operatorname{Det}(\vec{u}. \vec{v}) = -\operatorname{Det}(\vec{v}. \vec{u}).$$

Remarques

- Ainsi, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, x_1, x_2, y_1 et y_2 quatre réels, on a :

$$\begin{aligned} &\operatorname{Det}(x_1\, \vec{u} + y_1\, \vec{v}, x_2\, \vec{u} + y_2\, \vec{v}) \\ &\qquad = x_1x_2 \operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{u}) + (x_1y_2 - x_2y_1) \operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}) + y_1y_2 \operatorname{Det}(\vec{v}, \vec{v}) \\ &\qquad = (x_1y_2 - x_2y_1) \operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}). \end{aligned}$$

- En particulier, si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe, on a :

$$\operatorname{Det}(x_1\, \vec{u} + y_1\, \vec{v}, x_2\, \vec{u} + y_2\, \vec{v}) = x_1\, y_2 - x_2\, y_1.$$

  L'expression du déterminant en fonction des composantes est donc la même dans toute base orthonormée directe.

- Les résultats de ce chapitre seront donc conservés si l'on remplace la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par n'importe quelle base orthonormée directe.

  En particulier si $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct on peut associer à tout point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ son *affixe dans le repère* $\mathcal{R}$, c'est–à–dire le complexe $z = x + i\,y$.

Exemple Dans n'importe quelle base orthonormée directe, si un vecteur $\vec{u}$ a pour composantes (α, β), alors le vecteur dont les composantes sont $(-\beta\ \alpha)$ est directement orthogonal à $\vec{u}$.

En particulier si $\vec{u}$ est normé, c est le vecteur normé directement orthogonal à $\vec{u}$.

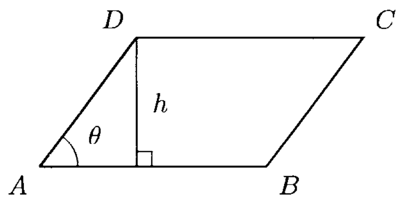
Proposition 18

Si θ est une mesure de l'angle orienté des vecteurs normés $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\cos\theta = \vec{u}.\vec{v} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \mathrm{Det}(\vec{u}.\vec{v}).$$

En particulier les mesures des angles de $(\vec{u}, \vec{v})$ et de $(\vec{v}, \vec{u})$ sont opposées.

Remarques



- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
$$(\vec{u}.\vec{v})^2 + \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2. \qquad (*)$$
- On retrouve que si u et v sont orthogonaux, alors $|\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.
- L'aire d'un parallélogramme $(ABCD)$ est $|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$ puisqu'il admet pour base $\|\overrightarrow{AB}\|$ et pour hauteur $h = \|\overrightarrow{AD}\|\,|\sin\theta|$, où θ est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$.
- En écrivant la relation $(*)$ dans une base orthonormée directe du plan, on obtient la relation dite de Lagrange, mais remontant en fait à l'Antiquité :
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a\,d - b\,c)^2 + (a\,c + b\,d)^2.$$
Cette formule permet de prouver, par exemple, que si deux entiers sont sommes de deux carrés, il en est de même de leur produit.

4.5 Application à la résolution d'un système

Étant donné un *système linéaire* de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = e \\ c\,x + d\,y = f \end{cases} \qquad (S)$$

on appelle *déterminant du système* le réel $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c.$

Proposition 19

Si son déterminant est non nul, le système (S) admet une unique solution donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

émonstration

- Si le système (S) possède deux solutions (x_1, y_1) et (x_2, y_2), le couple $(x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ vérifie le système ·

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = 0 \\ c\,x + d\,y = 0 \end{cases}$$

ce qui prouve que, dans le plan, les vecteurs (a, b) et (c, d) sont orthogonaux à (x, y). Comme ces deux vecteurs sont non colinéaires puisque leur déterminant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$ est non nul, on en déduit d'après le corollaire 2 de la page 49 que $(x. y) = (0. 0)$, soit $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

- Pour l'existence, il suffit de vérifier que le couple donné convient. □

Remarques

- Dans le cas où le déterminant est nul, il y a une infinité de solution ou aucune (voir page 72).
- Ces formules de résolution d'un système linéaire seront généralisées page 947.
- Cette méthode de résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues est très utile dans la pratique et doit être privilégiée par rapport à toute autre méthode lorsque les coefficients du système dépendent d'un ou de plusieurs paramètres, car la discussion se fait uniquement sur la nullité du déterminant.

Exemple Le système :

$$\begin{cases} x\,\cos\theta - y\,\sin\theta = a \\ x\,\sin\theta + y\,\cos\theta = b \end{cases}$$

admet toujours une unique solution puisque son déterminant vaut 1.

Sa résolution ne nécessite la division ni par $\cos\theta$ ni par $\sin\theta$ (ce qui entraînerait une discussion inutile) et donne directement :

$$x = a\,\cos\theta + b\,\sin\theta \qquad \text{et} \qquad y = -a\,\sin\theta + b\,\cos\theta$$

4.6 Exemple d'utilisation des complexes

Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ des vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2.

Des relations :

$$\|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|\,\cos\theta = \mathrm{Re}(\bar{z}_1\,z_2) \qquad \text{et} \qquad \|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|\,\sin\theta = \mathrm{Im}(\bar{z}_1\,z_2)$$

on déduit qu'une mesure de l'angle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est égale à un argument de $\bar{z}_1\,z_2$ c'est–à–dire à un argument de z_2/z_1.

En particulier :

- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si, et seulement si, $\dfrac{z_2}{z_1}$ est réel,
- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux si et seulement si, $\dfrac{z_2}{z_1}$ est imaginaire pur.

Proposition 20 (Relation de Chasles)

Si $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont trois vecteurs non nuls on a :

$$\widehat{(\vec{u_1}, \vec{u_2})} + \widehat{(\vec{u_2}, \vec{u_3})} \equiv \widehat{(\vec{u_1}, \vec{u_3})} \quad [2\pi].$$

ém nstrati n En effet, si z_1, z_2 et z_3 sont les affixes respectives de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$, les mesures des trois angles de la relation annoncee sont respectivement des arguments des nombres z_2/z_1, z_3/z_2 et z_3/z_1.

Le résultat est donc une conséquence de la relation $(z_2/z_1)\,(z_3/z_2) = (z_3/z_1)$ et des propriétés des arguments. □

Exemple Si A B et C sont trois points distincts du plan, on a :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} \equiv \pi \quad [2\pi].$$

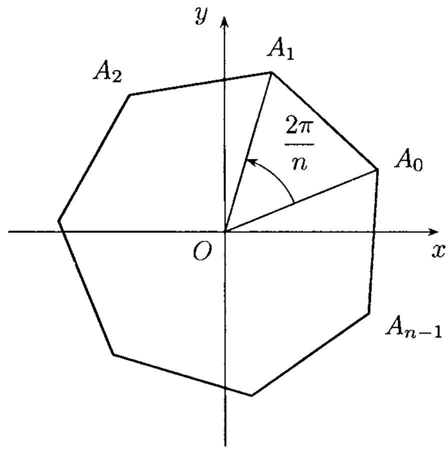
Autrement dit, la somme des angles d'un triangle est égale à π modulo 2π.

En effet comme $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})}$, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} &\equiv \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} \\ &\equiv \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})} \equiv \pi \quad [2\pi].\end{aligned}$$

Méthode L'intérêt de l'utilisation des complexes en géométrie plane est de pouvoir utiliser les propriétés de corps de $\mathbb{C}$, et en particulier le produit et le quotient comme le montre la démonstration de la proposition précédente. On effectue ainsi un seul calcul, là où les coordonnées (polaires ou cartésiennes) en nécessiteraient deux.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si z est un complexe non nul, les images des racines $n^{\text{èmes}}$ de z sont les sommets d un polygone regulier dont l isobarycentre est l'origine.



En effet, si Z_0 est une des racines $n^{\text{èmes}}$ de z, les racines $n^{\text{èmes}}$ de z sont :

$$Z_k = Z_0\, e^{2ik\pi/n} \quad \text{avec} \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

En notant A_0, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ leurs images respectives et $\xi = e^{2i\pi/n}$, et en posant $Z_n = Z_0$ et $A_n = A_0$, les relations $Z_{k+1} = \xi\, Z_k$ prouvent :

$$Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_{n-1} = Z_0\,(1 + \xi + \cdots + \xi^{n-1}) = 0.$$

Donc O est l'isobarycentre du polygone.

De plus :

$$(\widehat{\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}}}) \equiv \frac{2\pi}{n} \quad [2\pi]$$

et comme les Z_k ont tous le même module, on en déduit que $(A_0, A_1, \ldots. A_{n-1})$ est un polygone régulier.

Réciproquement, si A_0, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier centré en O, leurs affixes respectives Z_0, $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ ont même module, et les relations $(\widehat{\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}}}) \equiv \dfrac{2\pi}{n} \quad [2\pi]$ prouvent que $Z_{k+1} = \xi\, Z_k$.

Les complexes Z_0, $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ vérifient donc $Z_k^n = Z_0^n$, et comme ils sont distincts deux à deux, on en déduit que ce sont les racines $n^{\text{èmes}}$ du complexe $z = Z_0^n$.

4.7 Angles de droites

Définition 13

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites dirigées respectivement par des vecteurs non nuls $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

On appelle *mesure de l'angle orienté des droites* $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ tout réel θ tel que $(\widehat{\vec{u_1},\vec{u_2}}) \equiv \theta \quad [\pi]$.

On note alors $(\widehat{\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2}) \equiv \theta \quad [\pi]$.

Remarques

- Cette mesure est bien indépendante des vecteurs directeurs choisis sur $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, puisque $(\widehat{-\vec{u}_1,\vec{u}_2}) \equiv (\widehat{\vec{u}_1,-\vec{u}_2}) \equiv (\widehat{\vec{u_1},\vec{u_2}}) \quad [\pi]$.
- On a toujours la relation de Chasles :

$$(\widehat{\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2}) + (\widehat{\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_3}) \equiv (\widehat{\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_3}) \quad [\pi].$$

5. Repères cartésiens

5.1 Définition

Définition 14

Un *repère cartésien* du plan est un triplet $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$, où Ω est un point du plan et $(\vec{u},\vec{v})$ deux vecteurs non proportionnels.

Remarque Les repères orthonormés sont un cas particulier de repère puisque deux vecteurs orthogonaux non nuls sont non colinéaires.

Proposition 21

Soit $\mathcal{R} = (\Omega,\vec{u},\vec{v})$ un repère cartésien. Pour tout point M du plan il existe un unique couple (x,y) de réels tels que :

$$\overrightarrow{\Omega M} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}. \qquad (*)$$

Les réels x et y s'appellent *coordonnées cartésiennes* du point M dans le repère $\mathcal{R}$.

emonstratio Si on a $\vec{u} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$, $\vec{v} = \gamma\,\vec{\imath} + \delta\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\Omega M} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}$, la relation $(*)$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} \alpha\, x + \gamma\, y = a \\ \beta\, x + \delta\, y = b \end{cases}$$

qui admet une unique solution puisque son déterminant est non nul par non colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ □

Remarques Soit $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ un repère cartésien.

- Tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \qquad \text{avec} \qquad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2.$$

  Les réels (α_1, α_2) s'appellent *composantes* (ou *coordonnées*) de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

- La proportionnalité de deux vecteurs :

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2$$

  est donc équivalente à la proportionnalité de leurs composantes (α_1, α_2) et (β_1, β_2)

  On a ainsi :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

  ce qui généralise à une base quelconque le résultat de la proposition 13 de la page 60

Méthode En géométrie plane, on peut distinguer deux sortes de problèmes :

- les problèmes de *géométrie affine* qui ne concernent que des propriétés d'alignement, de parallélisme, de barycentre, de milieu...

  En géométrie affine, l'utilisation des coordonnées cartésiennes dans un repère quelconque est fréquemment utilisée. Par exemple, pour résoudre un problème lié à un triangle (ABC), il est classique d'utiliser le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (voir l'exercice 3).

- les problèmes de *géométrie euclidienne* qui utilisent en plus les notions de produit scalaire, d'angles, d'orthogonalité, de norme ou de distance.

  En géométrie euclidienne l'expression du produit scalaire de la distance... n'est simple qu'en fonction des coordonnées dans un repère orthonorme. Il sera donc judicieux de n'utiliser que ce type de repère.

5.2 Changement de repère

Si l'on prend un repère orthonormé direct $\mathcal{R}' = \big(\Omega, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\big)$, avec $\Omega \left| \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right.$, les formules donnant les coordonnées (x, y) d'un point M dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en fonction des coordonnees (x', y') de ce même point dans $\mathcal{R}'$ sont :

$$\begin{cases} x = a + x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = b + x' \sin\theta + y' \cos\theta. \end{cases}$$

Si l'on veut déterminer (x', y') en fonction de (x, y), il faut résoudre ce système en (x', y'). Or son déterminant est égal à 1 ce qui donne :

$$\begin{cases} x' = (x - a) \cos\theta + (y - b) \sin\theta \\ y' = (a - x) \sin\theta + (y - b) \cos\theta. \end{cases}$$

Plus généralement, pour trouver les coordonnées d'un point dans un repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{u})$ quelconque, avec $\Omega \left| \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right.$, $\vec{u} \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right.$ et $\vec{v} \left| \begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \end{smallmatrix} \right.$ il suffit de résoudre le système lineaire :

$$\begin{cases} x = a + \alpha\, x' + \gamma\, y' \\ y = b + \beta\, x' + \delta\, y' \end{cases} \qquad (*)$$

dont le déterminant est non nul puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

> ***Remarque*** Si l'on dispose d'une équation cartésienne $F(x, y) = 0$ d'une partie A du plan dans le repère $\mathcal{R}$, on obtient facilement une équation dans un autre repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ sans avoir à résoudre de système, puisqu'il suffit de remplacer x et y dans l'équation à l'aide des relations $(*)$.

6. Droites

6.1 Représentations analytiques

Représentation paramétrique

La droite passant par le point $M_0 \left| \begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix} \right.$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u} \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right.$ est paramétrée par :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\, \alpha \\ y = y_0 + \lambda\, \beta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

puisque cette relation traduit l égalité vectorielle $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\, \vec{u}$.

Remarque Dire qu'il s'agit d'une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ signifie que tout élément de $\mathcal{D}$ est de la forme $M_0 + \lambda\vec{u}$ autrement dit que $\lambda \mapsto M_0 + \lambda\vec{u}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{D}$.

Ici, on a même une bijection puisque tout élément de la droite s'écrit de manière unique sous cette forme.

Équations cartésiennes d'une droite

Proposition 22

- Toute droite $\mathcal{D}$ du plan a au moins une équation cartésienne du type :

$$a\,x + b\,y + c = 0 \qquad \text{avec} \qquad (a, b) \neq (0.0).$$

- Deux telles équations représentent deux droites confondues si et seulement si, elles sont proportionnelles.
- Réciproquement toute équation :

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{avec} \qquad (a, b) \neq (0, 0)$$

représente une droite dirigée par le vecteur de composantes $(-b, a)$ et donc orthogonale au vecteur de composantes (a, b).

émonstr tion Soit $A\left|\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right.$ un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}\left|\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right.$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

- Un point $M\left|\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right.$ est sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\operatorname{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

  La droite admet donc pour équation :

$$\beta\,(x - x_0) - \alpha\,(y - y_0) = 0 \tag{$*$}$$

  avec $(\beta, -\alpha) \neq (0, 0)$.

- Soit $a\,x + b\,y + c = 0$ une équation de $\mathcal{D}$ Si $B\left|\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right.$ est un point de $\mathcal{D}$ distinct de A on a :

$$a\,(x_1 - x_0) + b\,(y_1 - y_0) = 0.$$

  Le vecteur de composantes (a, b) est donc orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ donc à $\mathcal{D}$ ce qui prouve l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b) = \lambda\,(-\beta, \alpha)$.

  L'équation $a\,x + b\,y + c = 0$, qui s'écrit aussi $a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0$ est donc proportionnelle à l'équation $(*)$.

► On peut trouver un point $A\left|\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right.$ vérifiant l'équation : par exemple si $a \neq 0$, on prend $y_0 = 0$ et $x_0 = -c/a$.

L'équation est équivalente à $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ soit à $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = 0$ où $\vec{u}\left|\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right.$ ou bien à $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$ ou $\vec{v}\left|\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right.$.

Elle représente donc la droite $(A, \vec{u})$ qui est bien orthogonale à $\vec{v}$

□

Exemples

1. Si b est non nul, l'équation ci–dessus peut aussi s'écrire $y = mx + p$, mais ce type d'équation ne permet de representer que les droites non parallèles à Oy

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par deux points distincts $M_1\left|\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right.$ et $M_2\left|\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right.$. Un point M appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires, c'est–à–dire :
$$\begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x_1 \\ y_1 - y & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Si a et b sont deux réels non nuls, la droite passant par les points $A\left|\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right.$ et $B\left|\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right.$ a pour équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

   En effet, cette dernière est l'équation d'une droite et elle passe évidemment par A et B.

Attention L'appartenance d'un vecteur $\vec{U}\left|\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right.$ à la direction de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ s'écrit :
$$a\alpha + b\beta = 0$$
et non $a\alpha + b\beta + c = 0$ puisque, avec les notations de la démonstration précédente, la condition s'écrit $\mathrm{Det}(\vec{U}, \vec{u}) = 0$.

Les vecteurs de la direction de $\mathcal{D}$ sont donc ceux dont les composantes vérifient l'équation homogène (ou équation sans second membre) associée à l équation de $\mathcal{D}$.

Proposition 23

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites d'équations respectives $a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0$ et $a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0$.

1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si, et seulement si, (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont proportionnels, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

   Elles sont alors disjointes ou confondues.

2. Sinon, elles possèdent un unique point d'intersection.

émonstration

- Les vecteurs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont normaux respectivement à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, et ils sont colinéaires si, et seulement si, les droites sont parallèles.
  Si de plus elles ont un point commun A, alors elles sont égales à la droite passant par A et dirigée par $(-b_1, a_1)$
- Si les droites ne sont pas parallèles, la détermination de leur intersection se ramène à la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues dont le déterminant est non nul, et qui admet donc une unique solution d'après la proposition 19 de la page 64. □

Exemple Deux droites orthogonales à un même vecteur $\vec{u} \,\big|\, {}^{a}_{b}$ non nul sont parallèles puisqu'elles admettent des équations du type $ax + by + c_1 = 0$ et $ax + by + c_2 = 0$.

Remarques

- Si le repère $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel on travaille n'est plus orthonorme :
  - les droites ont toujours une équation du type :
  $$ax + by + c = 0 \qquad \text{avec} \qquad (a, b) \neq (0, 0)$$
  puisque la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ de composantes respectives $(x - x_0, y - y_0)$ et (α, β) s'écrit toujours $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$;
  - une telle droite est dirigée par le vecteur de composantes $(-b, a)$;
  - mais le vecteur de composantes (a, b) n'est plus nécessairement normal à la droite.
- Deux droites d'équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sont alors :
  - parallèles si, et seulement si, $(-b_1, a_1)$ et $(-b_2, a_2)$ sont proportionnels, c'est-à-dire si, et seulement si, (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont proportionnels ;
  - égales si, et seulement si, (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont proportionnels.

Équations polaires d'une droite

Proposition 24

Une droite passant par le pôle a au moins une équation polaire du type :

$$\theta = \theta_0 \qquad \text{avec} \qquad \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, une telle équation est l'équation d'une droite passant par le pôle.

émonstration

- Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par O et dirigée par un vecteur $\vec{u}(\theta_0)$. Un point M appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{OM} = t\,\vec{u}(\theta_0)$ c'est-à-dire si, et seulement si, (t, θ_0) est un système de coordonnées polaires de M
- Pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$, l'équation $\theta = \theta_0$ est donc une équation de la droite passant par O et dirigée par $\vec{u}(\theta_0)$. □

Proposition 25

Une droite ne passant pas par le pôle a une equation polaire de la forme :

$$r = \frac{1}{\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta} \qquad \text{avec} \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Réciproquement une telle équation est l'équation d'une droite ne passant pas par le pôle.

émonst ati n

- Une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par O a une equation cartesienne du type :

$$a\,x + b\,y = c \qquad \text{avec} \qquad (a, b) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad c \neq 0$$

Un point de coordonnées polaires (r, θ) appartient donc à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $r\,(a\cos\theta + b\sin\theta) = c$, ce qui donne le resultat avec $\alpha = \frac{a}{c}$ et $\beta = \frac{b}{c}$.

- Réciproquement, l'équation $r = \dfrac{1}{\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta}$ est une équation polaire de la droite d'équation cartésienne $\alpha\,x + \beta\,y = 1$ □

6.2 Orthogonalité

Droites orthogonales à un vecteur

- Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, A un point et k un reel, l ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k \qquad (*)$$

est une droite orthogonale à $\vec{u}$.

En effet, quitte à diviser $\vec{u}$ et k par $\|\vec{u}\|$ on peut supposer $\vec{u}$ normé et l'équation $(*)$ est alors équivalente à :

$$\vec{u}.\overrightarrow{AM} = \vec{u}.(k\,\vec{u})$$

soit :

$$\vec{u}.(\overrightarrow{AM} - k\,\vec{u}) = 0$$

ce qui prouve que l'ensemble des points M vérifiant $(*)$ est la droite passant par le point $A + k\,\vec{u}$ et orthogonale à $\vec{u}$.

- Réciproquement, si $\mathcal{D}$ est une droite orthogonale à $\vec{u} \neq 0$, et si B est un point de $\mathcal{D}$, l'ensemble des points vérifiant :

$$\vec{u}.\overrightarrow{AM} = \vec{u}.\overrightarrow{AB}$$

est une droite orthogonale à $\vec{u}$ donc parallèle à $\mathcal{D}$. Comme elle contient évidemment le point B, elle est égale à $\mathcal{D}$.

On peut résumer les résultats précédents en disant que les lignes de niveau de la fonction $M \mapsto \vec{u}.\overrightarrow{AM}$ sont les droites orthogonales à $\vec{u}$.

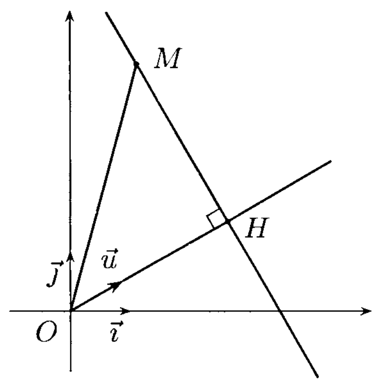
Équation normale d'une droite

D'après ce qui précède, si (a, b) sont les composantes d'un vecteur $\vec{u}$ non nul les droites orthogonales à $\vec{u}$ sont les droites d'équations :

$$a\,x + b\,y + c = 0 \qquad \text{avec} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Plus précisément, la droite orthogonale au vecteur $\vec{u}\left|\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right.$ et passant par le point $M_0\left|\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right.$ a pour équation :

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0.$$



Lorsque $\vec{u}$ est normé, ses composantes sont de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$. Si l'on note H le projeté orthogonal de O sur une droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\vec{u}$, un système de coordonnees polaires de H est donc de la forme (p, θ), avec $p \in \mathbb{R}$. On a alors $\overrightarrow{OH} = p\,\vec{u}$ et donc $\vec{u}.\overrightarrow{OH} = p$. Le réel p est alors la mesure algébrique de $\overrightarrow{OH}$ sur la droite $(O, \vec{u})$.

L'équation de $\mathcal{D}$ qui est $\vec{u}.\overrightarrow{OM} = \vec{u}.\overrightarrow{OH}$ s'écrit alors sous la forme :

$$x\,\cos\theta + y\,\sin\theta = p$$

appelée *équation normale* de $\mathcal{D}$.

Remarque Si une droite a pour équation normale :

$$x \cos\theta_0 + y \sin\theta_0 = p,$$

elle admet pour équation polaire :

$$r = \frac{p}{\cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0} = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Droites orthogonales

Les droites d'équations :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

sont orthogonales si, et seulement si, leurs vecteurs normaux sont orthogonaux c'est–à–dire si, et seulement si, on a :

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.$$

En effet, le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs $\vec{u}_1 \left| \begin{smallmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{smallmatrix} \right.$ et $\vec{u}_2 \left| \begin{smallmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{smallmatrix} \right.$ est :

$$(-b_1)(-b_2) + a_1 a_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

6.3 Médiatrice

Proposition 26

Soient A et B deux points distincts de E. L'ensemble des points à égale distance de A et B, est la droite passant par le milieu du segment $[AB]$ et orthogonale à $\overrightarrow{AB}$. On l'appelle *médiatrice* du segment $[AB]$.

émonstratio En posant $I = \dfrac{A+B}{2}$ on a :

$$\|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MA}\|^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}.$$

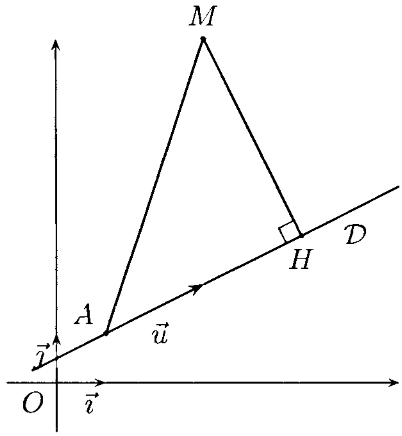
Donc $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\| \iff \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB}$, ce qui prouve le résultat □

6.4 Distance d'un point à une droite

Droite définie par un point et un vecteur

Lorsque $\mathcal{D}$ est définie par un point $A \left| \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right.$ et un vecteur $\vec{u} \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right.$, on peut calculer la distance du point $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right.$ à la droite $\mathcal{D}$ à l'aide du déterminant $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$.

En effet si l'on note H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, on sait que $d(M,\mathcal{D}) = \|\overrightarrow{HM}\|$ et, par bilinéarité du déterminant :



$\operatorname{Det}(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = \operatorname{Det}(\overrightarrow{AH},\vec{u}) + \operatorname{Det}(\overrightarrow{HM},\vec{u})$

ce qui donne :

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = \operatorname{Det}(\overrightarrow{HM},\vec{u})$$

puisque les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Comme de plus les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, on a l'égalité :

$$\left|\operatorname{Det}(\overrightarrow{HM},\vec{u})\right| = \|\overrightarrow{HM}\|\,\|\vec{u}\|$$

ce qui donne :

$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{\left|\operatorname{Det}(\overrightarrow{AM},\vec{u})\right|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\beta\,(x-a)-\alpha\,(y-b)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.}$$

On peut retrouver ce résultat en calculant de deux façons l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$.

Droite définie par une equation

Proposition 27

La distance d'un point $M\left|\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right.$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $u\,x + v\,y + h = 0$, est :

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{|u\,x+v\,y+h|}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

émonstration En reprenant les notations ci-dessus, toute équation de $\mathcal{D}$ est proportionnelle à $\beta\,(x-a) - \alpha\,(y-b) = 0$, et la quantité $\dfrac{|\beta\,(x-a)-\alpha\,(y-b)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ est invariante par multiplication de (α,β) par un reel non nul. D où le résultat. $\square$

7. Cercles

7.1 Généralités

Définition 15

On appelle *cercle* de centre Ω et de rayon $R > 0$ l'ensemble :

$$\Big\{M \in \mathcal{P} \mid \|\overrightarrow{\Omega M}\| = R\Big\}.$$

Remarques

- Si M est un point d un cercle $\mathcal{C}$ centré en Ω, son symétrique M' par rapport à Ω est aussi sur $\mathcal{C}$ et le segment $[MM']$ est appelé un *diamètre* de $\mathcal{C}$.
- Pour tout couple de points (M, M') du cercle, on a :

$$d(M, M') \leqslant d(M, \Omega) + d(\Omega, M') = 2R$$

avec égalité si, et seulement si, $[MM']$ est un *diamètre*, comme le montre le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (voir page 51).
- Le centre et le rayon d'un cercle sont donc uniques : le rayon R est la moitié de la distance maximale entre deux points du cercle (*diamètre* du cercle) et le centre est le milieu de $[MM']$ où M et M' sont deux points tels que $d(M, M') = 2R$ (points *diamétralement opposés*).

Proposition 28

Par trois points A, B, C non alignés passe un cercle et un seul, appelé cercle circonscrit au triangle (ABC).

émonstratio Soient A, B et C trois points non alignés. Le problème revient à montrer qu'il existe un unique point à égale distance de A, B et C, c'est-à-dire un point se trouvant sur les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$.

Or, comme les points A, B et C ne sont pas alignés, ces deux médiatrices ne sont pas parallèles et donc se coupent en un unique point. □

Équation cartésienne dans un repère orthonormé

- Comme $\Omega M = R \Longleftrightarrow \Omega M^2 = R^2$, le cercle de rayon R ayant pour centre le point $\Omega \big|{}^a_b$ admet pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

ou encore :

$$x^2 + y^2 - 2a\,x - 2b\,y + c = 0$$

avec $c = a^2 + b^2 - R^2$.

- Réciproquement, l'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, qui s'écrit encore $(x-a)^2 + (y-b)^2 + c - a^2 - b^2 = 0$, admet des solutions si, et seulement si, $a^2 + b^2 - c \geqslant 0$. L'ensemble des points vérifiant l'équation est alors :
  - réduit au point de coordonnées (a, b) si $c = a^2 + b^2$,
  - le cercle ayant pour centre le point de coordonnées (a, b) et pour rayon $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$ si $c < a^2 + b^2$. Ce cercle admet donc une unique équation de ce type, appelée *équation normale* du cercle.

Remarques Si $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon R et si M est un point du plan, on appelle *puissance* de M par rapport à $\mathcal{C}$ la quantité $d(O, M)^2 - R^2$.

- Le cercle $\mathcal{C}$ est donc l'ensemble des points dont la puissance par rapport à $\mathcal{C}$ est nulle.
- On appelle intérieur du cercle $\mathcal{C}$, l'ensemble des points M tels que $d(O, M) < R$, c'est-à-dire l'ensemble des points de puissance strictement négative.
- Si, dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ admet pour équation :

$$x^2 + y^2 - 2a\,x - 2b\,y + c = 0,$$

la puissance d'un point $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right.$ est $x^2 + y^2 - 2a\,x - 2b\,y + c$.

Équation polaire

En remplaçant (x, y) par $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ dans l'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0,$$

on obtient une équation polaire d'un cercle de centre $\Omega \left| \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right.$:

$$r^2 - 2r\,(a\cos\theta + b\sin\theta) + c = 0$$

En particulier :

- si $\Omega = O$, cette équation devient $r^2 = R^2$ où R est le rayon
- si le cercle passe par O, cette équation équivaut à :

$$r = 2a\cos\theta + 2b\sin\theta \qquad \text{ou} \qquad r = 0 \tag{$*$}$$

La première de ces relations peut encore s'écrire :

$$r = 2R\,\cos(\theta - \theta_0)$$

où (R, θ_0) est un système de coordonnées polaires de Ω

Comme le point O vérifie cette équation (pour $\theta = \theta_0 + \pi/2$) la condition $(*)$ se resume à :

$$r = 2a\,\cos\theta + 2b\,\sin\theta \qquad \text{c'est-à-dire à} \qquad r = 2R\,\cos(\theta - \theta_0).$$

Le rayon du cercle est alors $|R|$.

Réciproquement une équation $r = 2a\cos\theta + 2b\sin\theta$ est l'équation du cercle centré en $\Omega\,\big|\,{a \atop b}$ et passant par l'origine.

Paramétrages

- Paramétrage trigonométrique du cercle de rayon R ayant pour centre le point de coordonnées (a, b) :

$$\begin{cases} x = a + R\,\cos\theta \\ y = b + R\,\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \,]-\pi, \pi]\,.$$

- Paramétrage rationnel : pour $\theta \in \,]-\pi, \pi[$, en exprimant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$, on obtient un paramétrage du cercle privé du point de coordonnées $(a - R, b)$:

$$\begin{cases} x = a + R\,\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\[2ex] y = b + R\,\dfrac{2t}{1 + t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

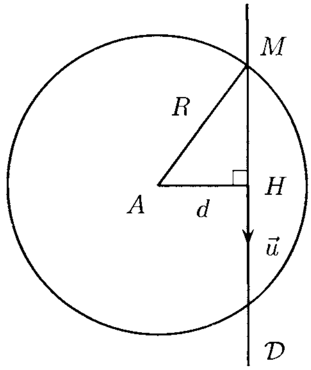
7.2 Droites et cercles

Proposition 29

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre A de rayon $R > 0$ et $\mathcal{D}$ une droite.

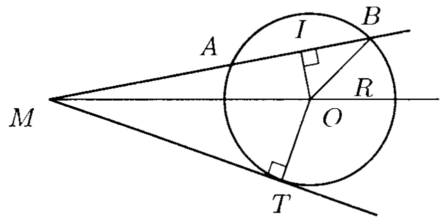
1. Si $d(A, \mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \varnothing$.
2. Si $d(A, \mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ ont deux points d'intersection distincts.
3. Si $d(A, \mathcal{D}) = R$ alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{M\}$ et $\mathcal{D}$ est dite *tangente* à $\mathcal{C}$ au point M.

Démonstration Rechercher les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ revient à déterminer les points de $\mathcal{D}$ dont la distance à A vaut R



1. Si $d(A,\mathcal{D}) > R$, alors il n'y a évidemment aucun point d'intersection.
2. Si $d = d(A,\mathcal{D}) < R$, alors en appelant H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, on a pour $M \in \mathcal{D}$:
$$d(A,M)^2 = d(A,H)^2 + d(H,M)^2$$
ce qui prouve que les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont les points $M \in \mathcal{D}$ tels que $d(H,M)^2 = R^2 - d^2$, c'est-à-dire les deux points $H \pm \sqrt{R^2 - d^2}\,\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur unitaire de $\mathcal{D}$.
3. Si $d(A,\mathcal{D}) = R$, alors il n'y a qu'un seul point M de $\mathcal{D}$ tel que $d(A,M) = R$: c'est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. La droite $\mathcal{D}$ est alors orthogonale à (AM) □

Exemple Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et M un point du plan. Posons $d = d(O,M)$, et $p = d^2 - R^2$ la puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$.



- Si $\mathcal{D}$ est une droite passant par M et tangente à $\mathcal{C}$ en un point T on a $p = \|\overrightarrow{MT}\|^2$ d'après le théorème de Pythagore.
- Si $\mathcal{D}$ est une droite passant par M et coupant $\mathcal{C}$ en deux points A et B, on a $p = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ car en notant I le milieu de $[AB]$ le point O est à égale distance de A et B, donc se situe sur la médiatrice de $[AB]$. Par conséquent $\overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{AB}$. Alors :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \|\overrightarrow{IB}\|^2 \\ &= \left(\|\overrightarrow{MO}\|^2 - \|\overrightarrow{OI}\|^2\right) - \left(\|\overrightarrow{OB}\|^2 - \|\overrightarrow{OI}\|^2\right) \\ &= d^2 - R^2.\end{aligned}$$

7.3 Intersection de cercles

Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ non concentriques d équations respectives :
$$x^2 + y^2 - 2a_1\,x - 2b_1\,y + c_1 = 0$$
et :
$$x^2 + y^2 - 2a_2\,x - 2b_2\,y + c_2 = 0,$$

la résolution du problème d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ mène au système équivalent :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2a_1\,x-2b_1\,y+c_1=0 \\ 2(a_2-a_1)\,x+2(b_2-b_1)\,y+c_1-c_2=0. \end{cases}$$

Les deux cercles n'étant pas concentriques, on a $(a_2-a_1, b_2-b_1)\neq(0,0)$ et la seconde équation est l'équation d'une droite $\mathcal{D}$. Donc :

$$\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2=\mathcal{C}_1\cap\mathcal{D}=\mathcal{C}_2\cap\mathcal{D}.$$

Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont donc 0, 1 ou 2 points d'intersection.

Remarque

- La droite $\mathcal{D}$ appelée *axe radical* des deux cercles, contient donc les points communs à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, ce qui prouve que si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont deux points d intersection distincts A et B, alors $\mathcal{D}$ est la droite (AB).
- Comme de plus $\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2=\mathcal{C}_1\cap\mathcal{D}=\mathcal{C}_2\cap\mathcal{D}$, si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont un unique point d'intersection, alors $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On dit alors que les deux cercles sont *tangents*.

Le nombre de points d'intersection des deux cercles dépend de la distance de leurs centres à la droite $\mathcal{D}$. Plus précisément :

Proposition 30

Deux cercles de rayons R et r ont une intersection non vide si, et seulement si, on a :

$$|R-r|\leqslant d\leqslant R+r$$

où d est la distance entre les deux centres

émonstrat°o Prenons un repère orthonormé $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ d'origine le centre d'un des deux cercles et tel que le centre de l'autre soit sur la demi-droite $(\Omega,\vec{u})$.
Les deux cercles ont alors pour équations :

$$x^2+y^2=R^2 \qquad \text{et} \qquad (x-d)^2+y^2=r^2.$$

La droite $\mathcal{D}$ mise en évidence ci-dessus a donc pour équation $2dx-d^2=R^2-r^2$ et la distance de O à $\mathcal{D}$ est $\left|\dfrac{R^2-r^2+d^2}{2d}\right|$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux cercles soient non disjoints est donc :

$$-2dR\leqslant R^2-r^2+d^2\leqslant 2dR$$

c'est-à-dire :

$$(R-d)^2\leqslant r^2 \qquad \text{et} \qquad (R+d)^2\geqslant r^2$$

ou encore :

$$d\geqslant r-R,\ \ d\geqslant R-r,\ \ d\leqslant R+r. \qquad \square$$

7.4 Cercles et angles

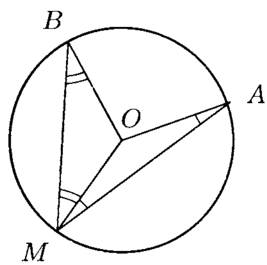
Proposition 31

Si A, B et M sont trois points d un cercle de centre O tels que $M \neq A$ et $M \neq B$, alors :

$$\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} \equiv 2\widehat{(MA, MB)} \quad [2\pi].$$

émonstratio (Les égalités d'angles qui suivent sont toutes à comprendre modulo 2π)
D'après la relation de Chasles, on a :

$$\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})} + \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})},$$



et comme le triangle (AOM) est isocèle en O :

$$\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})} = \pi - 2\,\widehat{(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA})}$$

et de même :

$$\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})} = \pi - 2\,\widehat{(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO})}.$$

D'où :

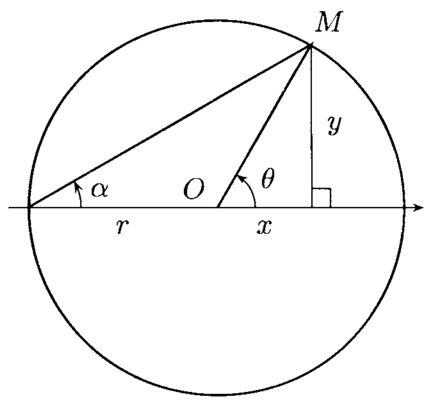
$$\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = 2\,\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}.$$

□

Exemple On peut ainsi retrouver géométriquement la formule :

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

donnant l'angle polaire d'un point M dont les coordonnées (x, y) ne sont pas de la forme $(x, 0)$ avec $x \leqslant 0$. En effet, d'après la proposition précédente, on a $\theta = 2\alpha$ avec $\tan\alpha = \dfrac{y}{x + r}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Corollaire 32

Quatre points distincts A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, $\widehat{(CA, CB)} \equiv \widehat{(DA, DB)} \quad [\pi]$.

emonst a ion

- Si les points A, B, C et D sont alignés, on a :
$$(\widehat{CA.CB}) \equiv (\widehat{DA.DB}) \equiv 0 \quad [\pi].$$
- Si les points A, B, C et D sont cocycliques, alors d'après la proposition précédente :
$$2(\widehat{CA,CB}) \equiv 2(\widehat{DA,DB}) \quad [2\pi]$$
et donc .
$$(\widehat{CA,CB}) \equiv (\widehat{DA,DB}) \quad [\pi].$$
- Réciproquement, supposons :
$$(\widehat{CA,CB}) \equiv (\widehat{DA,DB}) \quad [\pi].$$
  - Si A, B et C sont alignés, alors $(\widehat{DA,DB}) \equiv (\widehat{CA,CB}) \equiv 0 \quad [\pi]$, ce qui prouve que A, B et D sont alignés.
  - Sinon, soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par A, B et C et $\mathcal{C}'$ le cercle passant par A, B et D.
    Une droite non tangente à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, non parallèle à (AB) et passant par A recoupe $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement en E et F.
    Par cocyclicité de $(ABEC)$ et $(ABFD)$ on a :
$$(\widehat{EA,EB}) \equiv (\widehat{CA,CB}) \equiv (\widehat{DA,DB}) \equiv (\widehat{FA,FB}) \quad [\pi].$$
    Comme $(EA) = (FA)$, on en déduit $(EB) \mathbin{//} (FB)$ c'est-à-dire $(EB) = (FB)$. Les points E et F sont ainsi sur les droites non parallèles (AE) et (BE), ce qui prouve $E = F$. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont donc 3 points distincts en commun, ce qui prouve qu'ils sont égaux.
    Donc $D \in \mathcal{C}$ et les points A, B, C et D sont cocycliques.

□

Exemples

1. Quatre points distincts sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, le *birapport* $\dfrac{d-b}{d-a} \div \dfrac{c-b}{c-a}$ de leurs affixes a, b, c et d est réel.
   En effet, si M est un point d'affixe x, distinct de A et B, un argument de $\frac{x-b}{x-a}$ est une mesure de l'angle $(\widehat{AM.BM})$.
2. Si z est un complexe non reel, le cercle passant par les points d'affixes z, 1 et -1 passe aussi par le point d'affixe $1/z$ puisque le birapport les complexes 1, -1, z et $1/z$ vaut -1.

7.5 Exemples de lignes de niveau

On suppose que A et B sont deux points distincts.

Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$

Soit I le milieu de $[AB]$. On a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\ \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \|\overrightarrow{IB}\|^2$$

et donc :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \iff \|\overrightarrow{IM}\|^2 = k + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2$$

Donc, si $k > -\frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2$, l'ensemble cherché est un cercle centre en $\dfrac{A+B}{2}$, sinon il est vide (si $k < -\frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2$), ou réduit à $\dfrac{A+B}{2}$ (si $k = -\frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2$).

En particulier, si $k = 0$, il s'agit du cercle de diamètre $[AB]$.

> ***Methode*** Pour trouver une équation du cercle passant par trois points non alignés A, B et C, on peut commencer par trouver le cercle de diamètre $[AB]$ dont une équation est $P_1(M) = 0$ où $P_1(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.
>
> L'équation $P_2(M) = 0$ de la droite (AB) est une équation linéaire, ce qui implique que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $P_1(M) + \lambda P_2(M) = 0$ est l'équation d'un cercle, et celui–ci contient évidemment A et B.
>
> Il suffit d'ajuster la constante λ pour que ce cercle passe aussi par C, ce qui est possible puisque, le point C n'appartenant pas à la droite (AB), on a $P_2(C) \neq 0$.
>
> *Exemple* Si $A\left|{}^0_0\right.$, $B\left|{}^3_0\right.$ et $C\left|{}^1_1\right.$, on a $P_1(M) = x(x-3) + y^2$ et $P_2(M) = y$, ce qui donne finalement une équation du cercle passant par A, B et C :
>
> $$x^2 + y^2 - 3x + y = 0$$
>
> dont le centre a pour coordonnées $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ et dont le rayon vaut $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Ensemble des points M tels que $\dfrac{\|\overrightarrow{MA}\|}{\|\overrightarrow{MB}\|} = k$, avec $k \geqslant 0$

L'équation est équivalente à :

$$\|\overrightarrow{MA}\|^2 - k^2\|\overrightarrow{MB}\|^2 = 0$$

puisque B n'appartient pas à l'ensemble.

- Si $k = 1$ c'est la médiatrice du segment $[AB]$.
- Sinon, il contient les deux points M tel que $\overrightarrow{MA} = \pm k\,\overrightarrow{MB}$, c'est-à-dire les barycentres de A et B affectés des coefficients 1 et $\pm k$. Or, on a :

$$\|\overrightarrow{MA}\|^2 - k^2\|\overrightarrow{MB}\|^2 = (1-k^2)(x^2+y^2) + \alpha\,x + \beta\,y + \gamma$$

et il s'agit donc d'un cercle.

Remarques

- Lorsque $k \neq 1$, les deux points d'intersection de ce cercle avec la droite (AB) sont les barycentres G_1 et G_2 de A et B affectés des coefficients $(1,k)$ et $(1,-k)$. Comme ce cercle est symétrique par rapport à (AB), le segment $[G_1G_2]$ en est un diamètre.
- Lorsque $1-k^2 \neq 0$, l'équation $\|\overrightarrow{MA}\|^2 - k^2\|\overrightarrow{MB}\|^2 = 0$ est donc l'équation d'un cercle. Plus généralement, si A_1, A_2,... A_n sont des points du plan et α_1, α_2,... α_n des réels de somme non nulle, en notant G le barycentre des points A_i affectés des coefficients α_i, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\|\overrightarrow{MA_i}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}\|^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\,\|\overrightarrow{MG}\|^2 + \overrightarrow{MG}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\|\overrightarrow{GA_i}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{MG}\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\|\overrightarrow{GA_i}\|^2\end{aligned}$$

  ce qui prouve que l ensemble des points M tels que :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\|\overrightarrow{MA_i}\|^2 = k$$

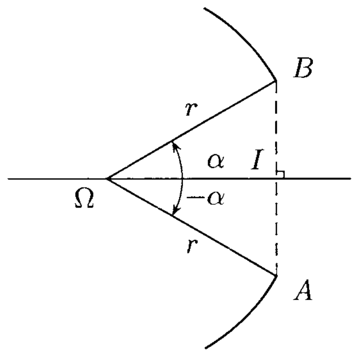
  est soit vide, soit réduit à G, soit un cercle centré en G.

Ensemble des points M tels que $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} \equiv \alpha \quad [2\pi]$

- Si $\alpha \equiv 0 \quad [\pi]$, il s'agit d'une partie de la droite (AB) :
  - si $\alpha \equiv 0 \quad [2\pi]$, c'est la droite (AB) privée du segment $[AB]$
  - si $\alpha \equiv \pi \quad [2\pi]$, il s'agit des points de la droite situés strictement entre A et B.

- Sinon, c'est un arc de cercle d'extrémités A et B (privé des points A et B).

En effet, on peut se placer dans un repère orthonormé direct $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel les affixes de A et B sont respectivement de la forme $a = r\,e^{-i\alpha}$ et $b = \bar{a} = r\,e^{i\alpha}$: il suffit de prendre pour Ω, le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que $\overline{\Omega I} = 2AB \operatorname{cotan} \alpha$, avec $I = \dfrac{A+B}{2}$, et $\vec{u}$ porté par cette médiatrice.



Le point M satisfait à la relation si, et seulement si, son affixe z vérifie $e^{-i\alpha}\,\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui s'écrit aussi :

$$e^{-i\alpha}\,(z-\bar{a})\,(\bar{z}-\bar{a}) \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{qui équivaut à} \quad a\,(z-\bar{a})\,(\bar{z}-\bar{a}) \in \mathbb{R}_+^*$$

Or :

$$\begin{aligned} a\,(z-\bar{a})\,(\bar{z}-\bar{a}) &= a\left(z\bar{z} - \bar{a}\,(z+\bar{z}) + a^2\right) \\ &= a\,(z\bar{z} - a\bar{a}) + aa\left(a + a - (z+\bar{z})\right). \end{aligned}$$

Pour que cette quantité soit dans $\mathbb{R}_+^*$, il faut :

- d'une part $z\bar{z} - a\bar{a} = 0$, puisque $a \notin \mathbb{R}$ et $a\bar{a}\left(a + \bar{a} - (z+\bar{z})\right) \in \mathbb{R}$,
- d'autre part $2\operatorname{Re} a > 2\operatorname{Re} z$.

Réciproquement, les complexes z tels que $|z| = |a|$ et $\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} a$ sont tels que $a\,(z-\bar{a})\,(\bar{z}-\bar{a}) \in \mathbb{R}_+^*$.

L ensemble cherché est donc l'intersection du cercle $\mathcal{C}$, centré en Ω et de rayon $r = |a|$, avec le demi–plan situé à gauche de (AB) sur la figure précédente.

Remarques

- Changer α en $\alpha + \pi$ revient à changer $\mathbb{R}_+^*$ en $\mathbb{R}_-^*$ et conduit donc à l'autre arc AB du même cercle.
- L'ensemble des points vérifiant $(\widehat{MA, MB}) \equiv \alpha \quad [\pi]$ est donc un cercle passant par A et B, privé de A et B. On retrouve ainsi, de façon plus précise le résultat du corollaire 32 de la page 82.

- On retrouve également le résultat de la proposition 31 de la page 82 puisque :

$$(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) \equiv 2\alpha \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \quad [2\pi].$$

- Lorsque $M = B$ on ne peut pas parler d'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$, mais on peut montrer aussi que l'angle que fait la droite (AB) avec la tangente au cercle en B (position limite de la droite (MB) lorsque M tend vers B) a pour mesure α modulo π.

8. Transformations remarquables du plan

Si f est une transformation du plan, on peut lui associer une bijection g de $\mathbb{C}$ dans lui–même telle que pour tous points M et M' d'affixes respectives z et z' on ait :

$$M' = f(M) \iff z' = g(z).$$

On dit alors que f est *représentée dans le plan complexe* par l'application g.

8.1 Translations, homothéties

Définition 16

- Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, la *translation* de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans lui–même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
- Si Ω est un point du plan et λ un réel non nul, l'*homothétie* de centre Ω et de rapport λ est l'application du plan dans lui–même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\,\overrightarrow{\Omega M}$

Propriétés

- Si A' et B' sont les images de A et B par une translation, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.
  En particulier, une translation conserve les distances (c'est une *isométrie*).
- Si A' et B' sont les images de A et B par une homothétie de rapport λ alors $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$.
  En particulier, une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$.
- Les translations et les homothéties transforment donc toute droite $\mathcal{D}$ en une droite parallèle à $\mathcal{D}$. On dit qu'elles conservent les directions

Plus précisément, si $\mathcal{D}$ est la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$:

- l'image de $\mathcal{D}$ par la translation de vecteur $\vec{v}$ est la droite passant par $A+\vec{v}$ et dirigée par $\vec{u}$,
- l'image de $\mathcal{D}$ par une homothétie h de rapport λ est la droite passant par $h(A)$ et dirigée par $\vec{u}$.

Proposition 33

1. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application $M \mapsto M+\vec{u}$.
   Elle est donc représentée dans le plan complexe par $z \mapsto z+b$ où b est l'affixe de $\vec{u}$.
2. L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application :
   $$M \mapsto \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M}.$$
   Elle est donc représentée dans le plan complexe par $z \mapsto z_0+\lambda\,(z-z_0)$, où z_0 est l'affixe de Ω.

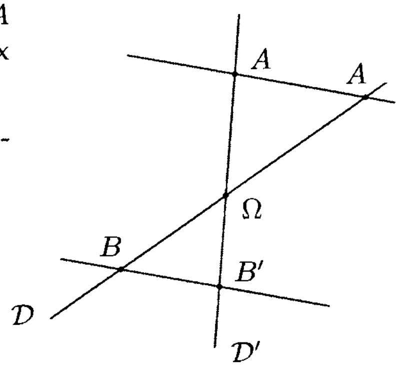
émonstratio Les relations $M' = M+\vec{u}$ et $M' = \Omega+\lambda\overrightarrow{\Omega M}$ sont respectivement équivalentes à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$ □

Théorème 34 (Théorème de Thalès)

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites secantes en un point Ω. On considère deux points A et B de $\mathcal{D}$ différents de Ω ainsi que deux points A' et B' de $\mathcal{D}'$ différents de Ω

Les droites (AA') et (BB') sont parallèles si, et seulement si :
$$\frac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega A}} = \frac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega A'}}.$$

On a alors aussi :
$$\frac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega A}} = \frac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega A'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}.$$



émonstratio On remarque qu'aucune des droites (AA') et (BB') n'est parallèle à $\mathcal{D}$ ou à $\mathcal{D}'$. En effet, si par exemple (AA') était parallèle à $\mathcal{D}$ elle lui serait égale puisqu'elles contiennent toutes deux le point A Ainsi, A' serait sur $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{D}'$, soit en Ω ce qui est exclu

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda = \dfrac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega A}}$, de sorte que $h(A) = B$

L'image par h de la droite (AA') est une droite parallèle à (AA'). De plus, $h(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ et $h(\mathcal{D}') = \mathcal{D}'$.

- Si $\dfrac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega A'}} = \lambda$, alors $\overrightarrow{\Omega B'} = \lambda \overrightarrow{\Omega A'}$ et donc $h(A') = B'$. On en déduit donc que la droite (BB') est l'image de (AA') par h donc est parallèle à (AA').
- Si (AA') est parallèle à (BB'), l image de A' par h se trouve sur $\mathcal{D}'$ et sur une droite parallèle à (AA') et passant par B', c'est-à-dire sur (BB') Comme (BB') et $\mathcal{D}'$ se coupent en un unique point B', on en déduit $h(A') = B'$ et donc $\overrightarrow{\Omega B'} = \lambda \overrightarrow{\Omega A'}$. Ainsi :
$$\frac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega A}} = \frac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega A'}}.$$

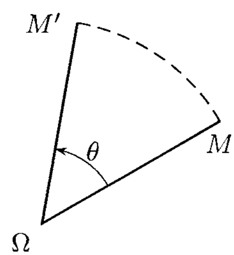
De plus, sous ces conditions, on a $h(A) = B$ et $h(A') = B'$, donc $\overrightarrow{BB'} = \lambda \overrightarrow{AA'}$, ce qui donne la dernière relation □

8.2 Rotations

Définition 17

La *rotation* de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans lui-même qui transforme Ω en Ω et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point M' tel que :

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \theta \quad [2\pi].$$



Remarque Si l'on prend un repère orthonormé direct centré en Ω, c'est l'application qui à tout point d affixe z associe le point d'affixe $z\,e^{i\theta}$ ce qui prouve l'existence et l'unicité de M'.

Proposition 35

Soient Ω un point du plan, d'affixe z_0, et θ un réel. La rotation r de centre Ω et d'angle θ est représentée dans le plan complexe par $z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$.

Démonstration Soit M d'affixe z et $r(M) = M'$ d'affixe z'. Par définition de la rotation r, on a :

$$\Omega M' = \Omega M \qquad \text{et} \qquad (\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}}) \equiv \theta \quad [2\pi]$$

ce qui se traduit, sur les affixes $z' - z_0$ et $z - z_0$ des vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$, par :

$$z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0).$$

□

8.3 Similitudes directes

Définition 18

On appelle *similitude directe* du plan toute transformation représentée dans le plan complexe par $z \mapsto a\,z + b$, avec $(a.b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Proposition 36

Une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances.

émonstratio Soit f la similitude représentée par $z \mapsto a\,z + b$.
Considérons des points A_1, A_2, A_3 et A_4 tels que $A_1 \neq A_2$ et $A_3 \neq A_4$. Notons z_1, z_2, z_3 et z_4 leurs affixes respectives ainsi que z'_1, z'_2, z'_3 et z'_4 les affixes de leurs images. On a :

$$z'_2 - z'_1 = a\,(z_2 - z_1) \qquad \text{et} \qquad z'_4 - z'_3 = a\,(z_4 - z_3)$$

ce qui donne :

$$\arg\left(\frac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) \quad [2\pi] \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1}\right| = \left|\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right|$$

et prouve le résultat. □

Proposition 37

Étant donnés $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, soit f la similitude du plan représentée par $z \mapsto a\,z + b$.

- Si $a = 1$, l'application f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, l'application f admet un unique point invariant I appelé *centre de la similitude.*
  Si α est un argument de a, l'application f s'écrit $f = h \circ r = r \circ h$, avec r la rotation de centre Ω et d'angle α et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.
  Le réel $|a|$ est appelé *rapport de la similitude* et α une *mesure de l'angle de la similitude.*
  En particulier :
  - si $a \in \mathbb{R}^*$, l'application f est l'homothétie de centre Ω et de rapport a ;
  - si $|a| = 1$ l'application f est la rotation de centre Ω et d angle α.

émonstratio

1. Lorsque $a = 1$, c'est un des résultats de la proposition 33 de la page 88.
2. Supposons $a \neq 1$
   Un point M d'affixe z est invariant par f si, et seulement si, z est solution de l'équation $z = az + b$, équation qui a pour solution unique $\dfrac{b}{1-a}$ car a est différent de 1
   L'unique point invariant par f est donc le point Ω d'affixe $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$.
   De plus, pour tout point M d'affixe z, l'affixe z' du point $f(M)$ vérifie :
   $$z' - z_0 = az + b - (a\,z_0 + b) = a\,(z - z_0).$$
   Soient r la rotation de centre Ω et d'angle α et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.
   Vérifions que $f = h \circ r$
   Soit M un point d'affixe z ; soient z_1 l'affixe de $r(M)$ et z_2 l'affixe de $h\big(r(M)\big)$ On a, d'après les propositions 35 de la page 89 et 33 de la page 88, les relations :
   $$z_1 - z_0 = e^{i\alpha}(z - z_0) \quad \text{et} \quad z_2 - z_0 = |a|\,(z_1 - z_0)$$
   ce qui donne :
   $$z_2 - z_0 = |a|\,e^{i\alpha}(z - z_0) = a(z - z_0).$$
   Le complexe z_2 est donc l'affixe du point $f(M)$, ce qui montre l'égalité $f = h \circ r$.
   On montre de même l'égalité $f = r \circ h$. □

Corollaire 38

Soit f la similitude directe de centre I (d'affixe z_0) de rapport k et d'angle α. Pour tout point M d'affixe z le point $f(M)$ est d'affixe z' définie par :
$$z' - z_0 = ke^{i\alpha}(z - z_0).$$

Proposition 39

Étant donnés deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ de longueurs non nulles, il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

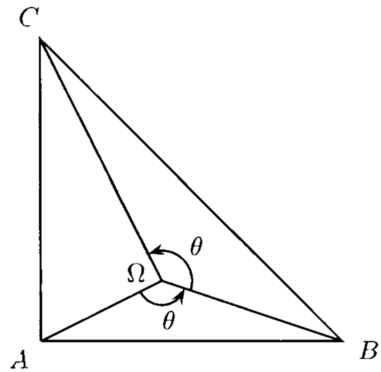
émonstration En notant a, b, a' et b' les affixes respectives des points A, B, A' et B', le résultat revient à montrer l'existence et l'unicité d'un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que :
$$\begin{cases} \alpha\, a + \beta = a' \\ \alpha\, b + \beta = b'. \end{cases}$$
Ce système a une unique solution puisque $a \neq b$, et celle-ci est telle que $\alpha \neq 0$ puisque $a' \neq b'$. □

Remarques Lorsque la similitude de la proposition précédente n'est pas une translation ($\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$) :

- le rapport de similitude est $\dfrac{d(A', B')}{d(A, B)}$
- une mesure de l'angle de similitude est $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$,
- on peut trouver son centre en cherchant son unique point fixe.

Exemple Soit (ABC) un triangle tel que C soit l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$ (c'est un triangle isocèle rectangle en A). Cherchons un point Ω tel que :

$$(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}}) \quad [2\pi]$$



On remarque que le centre de la similitude directe f transformant A en B et B en C convient puisqu'une similitude directe conserve les angles. Déterminons–le.

On peut prendre un repère orthonormé direct centré en A et dont le premier vecteur est $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$; dans ce repère les points A et B ont pour affixes respectivement 0 et $b \in \mathbb{R}_+$. Le point C a ib pour affixe.

La similitude f est alors représentée par $z \mapsto b + (i-1)z$ dont l'unique point fixe est :

$$\omega = \frac{b}{2-i} = \frac{2b+ib}{5}.$$

Le point Ω est donc :

$$\Omega = \frac{2A+2B+C}{5}.$$

8.4 Symétries

Proposition 40

La symétrie par rapport à un point A est l'application définie par $M \mapsto 2A-M$, où $2A-M$ représente le barycentre de $(A, 2)$ et $(M, -1)$.

Démonstratio Si a, z et z' sont les affixes respectives de A, de M et de son symétrique on a $a = (z+z')/2$, soit $z' = 2a - z$. □

Proposition 41

L'application $z \mapsto \bar{z}$ représente la symétrie du plan par rapport à la droite $(O, \vec{\imath})$.

em nstration Si M et M' sont les deux points d affixes z et $\bar{z}$, on a $\dfrac{M+M'}{2} \in (O, \vec{\imath})$ et $\overrightarrow{MM'}$ colinéaire à $\vec{\jmath}$.

Donc M' est le symétrique de M par rapport à $(O. \vec{\imath})$. □

Remarque On verra à l'exercice 21 que plus généralement les symétries axiales sont représentées par les applications $z \mapsto a\,\bar{z} + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $|a| = 1$ et $a\,\bar{b} + b = 0$.

8.5 Inversions

Soit Ω un point du plan $\mathcal{P}$.

Définition 19

Si k est un réel non nul, on appelle *inversion* de centre Ω (ou de pôle Ω) et de rapport k l'application de $\mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ dans lui–même qui, à tout point $M \neq \Omega$, associe le point M' de la droite (ΩM) tel que $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M'} = k$.

emonstration L'existence et l'unicité de M' sont assurées par le fait que si M admet (r, θ) pour système de coordonnées polaires dans un repère de pôle Ω, l'unique point M' vérifiant $\overrightarrow{\Omega M}\ \overrightarrow{\Omega M'} = k$ est celui qui admet $(k/r, \theta)$ pour système de coordonnées polaires □

Proposition 42

Dans un repère centré en Ω l'inversion de centre Ω et de rapport k est représentée par l'application $z \mapsto k/\bar{z}$ de $\mathbb{C}^*$ dans lui–même.

Remarque En coordonnées cartésiennes, cette inversion est donc représentée par :

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{k\,x}{x^2 + y^2}, \frac{k\,y}{x^2 + y^2}\right).$$

Proposition 43

Une inversion est une application involutive.

C est donc une bijection de $\mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ dans lui–même.

émonst atio Par symétrie de la définition, si M' est l'image de M, alors M est aussi l'image de M'. □

Remarques

- L'inversion de centre Ω et de rapport k est la composée de l'inversion de centre Ω et de rapport 1 par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
- Dans toute la suite, nous supposerons $k = 1$ et $\Omega = O$. L'inversion est donc l'application représentée dans le plan complexe par $z \mapsto 1/\bar{z}$.

Notations

- Nous noterons $\mathcal{P}'$ le plan privé du pôle O.
- La distance de deux points A et B sera notée AB.

Proposition 44

Soient deux points A et B de $\mathcal{P}'$. Leurs images A' et B' par l'inversion de pôle O et de rapport 1 vérifient :

$$A'B' = \frac{AB}{OA.OB}.$$

emonstratio Si a et b sont les affixes de A et B, on a :

$$|b' - a'| = \left|\frac{1}{\bar{b}} - \frac{1}{\bar{a}}\right| = \frac{|a-b|}{|a|\,|b|}.$$

□

Proposition 45

Soit f l'inversion de pôle O et de rapport 1.

1. Une droite passant par O (et privée de O) est invariante par f.
2. L'image d'une droite ne passant par par O est un cercle passant par O (privé de O).
3. L'image d'un cercle passant par O (privé de O) est une droite ne passant par par O.
4. L'image d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O.

e nstration

1. Par définition si $\mathcal{D}$ est une droite passant par O et si $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \{O\}$, on a $f(\mathcal{D}') \subset \mathcal{D}'$ En appliquant f, on obtient $\mathcal{D}' \subset f(\mathcal{D}')$, d'où l'égalité.
2. Soit $ax + by + c = 0$ une équation d'une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par O ; on a donc $(a,b) \neq (0,0)$ et $c \neq 0$.
   - Si un point $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right.$ appartient à $\mathcal{D}$, son image $M' \left| \begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix} \right.$ (c'est-à-dire son antécédent puisque f est involutive) est telle que :
   $$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$
   Les coordonnées de M' vérifient donc :
   $$a\,x' + b\,y' + c\left(x'^2 + y'^2\right) = 0 \qquad \text{soit} \qquad x'^2 + y'^2 + \frac{a}{c}\,x' + \frac{b}{c}\,y' = 0$$
   qui est l'équation d'un cercle $\mathcal{C}$ passant par O, ce qui donne $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$
   - Réciproquement, si $M' \left| \begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix} \right.$ appartient à $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{0\}$, son antécédent $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right.$ par f est tel que $a\,x + b\,y + c = 0$.

   On a donc $f(\mathcal{D}) = \mathcal{C}'$.
3. Conséquence du résultat précédent puisque f est involutive.
4. Même raisonnement que précédemment.
   L'image du cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$, avec $c \neq 0$ est le cercle $\mathcal{C}'$ d'équation :
   $$1 + a\,x + b\,y + c\,(x^2 + y^2) = 0.$$

   Remarque Un point de coordonnées (x, y) appartient à $\mathcal{C}'$ si, et seulement si, le point de coordonnées $(c\,x, c\,y)$ appartient à $\mathcal{C}$. On en déduit que $\mathcal{C}'$ est aussi l'image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport $1/c$.

   Ainsi, lorsque $c = 1$, le cercle $\mathcal{C}$ est globalement invariant par l'inversion (mais pas invariant point par point). □

Remarques

- L'application représentée dans le plan complexe par $z \mapsto 1/z$ possède la même propriété que l'inversion concernant les droites et les cercles, puisqu'elle est la composée d'une inversion et de la symétrie par rapport à Ox.
- Contrairement aux transformations étudiées précédemment (translations, rotations, homothéties, similitudes, symétries), les inversions ne conservent pas l'alignement Ce ne sont donc pas des transformations affines (voir page 803).

L'inversion est ainsi très utilisée en géométrie pour transformer un problème de cocyclicité en un problème d'alignement et réciproquement.

Exemple : théorème de Ptolémée. Quatre point distincts A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, parmi les trois quantités $AB.CD$, $AC.BD$ et $AD.BC$, l'une est la somme des deux autres.

Démonstratio Par une inversion de centre A, transformons les points B, C et D en B', C' et D'. Comme :

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC \iff \frac{BD}{AB.AD} = \frac{CD}{AC.AD} + \frac{BC}{AB.AC}$$

et que, d'après la proposition 44 de la page 94, on a $B'D' = \dfrac{BD}{AB.AD}$ et de même pour les deux autres, on en déduit :

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC \iff B'D' = C'D' + B'C'.$$

Le résultat s'ensuit, puisque A, B, C et D sont cocycliques si, et seulement si, B', C' et D' sont alignés, c'est-à-dire si, et seulement si, parmi les trois quantités $C'D'$, $B'D'$ et $B'C'$, l'une est la somme des deux autres. □

Plus precisément, les sommets d'un quadrilatère convexe $(ABCD)$ sont cocycliques si, et seulement si, le produit des diagonales est la somme des produit deux à deux des côtés opposés :

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC.$$

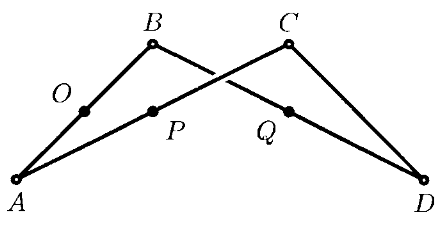
Remarque D'après ce qui précède, on a toujours :

$$AC.BD \leqslant AB.CD + AD.BC$$

(inégalité triangulaire sur les points B', C' et D').

Application L *inverseur de Hart* est un système articulé permettant de construire l'inverse d'un point donné. Il permet notamment de transformer un mouvement rectiligne (ou du moins une partie d un tel mouvement) en mouvement circulaire et inversement, problème mécanique qui résista longtemps aux efforts des ingénieurs à partir d une solution approchée inventee par James Watt pour la construction de machines à vapeur.

Le système est constitué de quatre tiges rigides articulées aux points A, B, C et D, avec $AB = CD$ et $AC = BD$ selon le schéma ci-contre. Le quadrilatère $(ABCD)$ est donc un trapèze isocèle (le polygone croisé $ABDC$ porte le nom de *contre-parallélogramme*).



Le point O, milieu de $[AB]$ étant fixe, les points P et Q milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$ sont inverses l'un de l'autre dans une inversion de centre O et de rapport $\frac{1}{4}\left(AC^2 - AB^2\right)$.

En effet, les quatre points A, B, C et D sont cocycliques puisque, par symétrie, les angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}})$ sont égaux.

Le quadrilatère étant convexe, le théorème de Ptolémée nous donne l'égalité :

$$AD.BC = AC.BD - AB.CD = AC^2 - AB^2.$$

Or par le théorème de Thalès, on a :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

ce qui donne :

$$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\left(AC^2 - AB^2\right)$$

Le lecteur trouvera à l'exercice 22 un autre système articulé (l'*inverseur de Peaucelier*) permettant de même de réaliser une inversion.

Remarques

- On peut retrouver la formule $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC^2 - AB^2$ en introduisant le point $E = D + \overrightarrow{AB}$ et en calculant la puissance de B par rapport au cercle de centre D et passant par C et E.
- Les points P et Q restent images l'un de l'autre par une inversion de centre O si l'on suppose que O, P et Q divisent $[AB]$, $[AC]$ et DB dans un rapport k non nécessairement égal à $\frac{1}{2}$.

EXERCICES

1. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles. Deux points M et M' décrivent respectivement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ de telle sorte que la tangente à $\mathcal{C}$ en M et la tangente à $\mathcal{C}'$ en M' soient orthogonales.
Trouver le lieu du milieu du segment $[MM']$.

2. Soient A, B,C d'affixes respectives a, b c.

a) On suppose $b \neq c$. Déterminer l'affixe du projeté orthogonal de A sur la droite (BC), puis la distance de A à la droite (BC).

b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b et c pour que les trois points soient alignés.

c) On suppose $a \neq b$. Donner une équation de la droite (AB), c'est à dire une condition nécéssaire et suffisante pour que le point M d'affixe z appartienne à la droite (AB). Que devient cette équation si $|a| = |b| = 1$?

d) Montrer que l'équation générale d'une droite s'écrit $p\bar{z} + \bar{p}z = h$ où $p \in \mathbb{C}^*$ et $h \in \mathbb{R}$.
Donner l'équation de la droite orthogonale à la droite (BC) passant par A.

e) Determiner l'affixe de l'orthocentre du triangle ABC.

f) On suppose $|a| = |b| = |c| = 1$. Montrer que l affixe de l'orthocentre du triangle ABC est $a + b + c$.

3. Dans un triangle ABC, on considère I, le milieu de B et C. Une droite variable passant par I coupe les droites (AB) et (AC) respectivement en D et E. Quel est le lieu des points d'intersection des droites (BE) et (CD) ?

4 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les trois droites d'équations respectives :

$$ax + by + c = 0, \quad ax + by = \sqrt{3}(bx - ay) \quad \text{et} \quad ax + by = -\sqrt{3}(bx - ay)$$

Montrer que ces trois droites sont les trois côtés d'un triangle équilatéral.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Im} z > 0$.
Montrer que :

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{t - z}{t - i} \right| = \frac{2 \operatorname{Im} z}{|z + i| + |z - i|}.$$

6. Dans le plan euclidien, muni d'un repère orthonormé on note $f(R)$ le nombre de points dont les coordonnées sont entières et qui sont dans le disque de centre l'origine et de rayon $R \geqslant \sqrt{2}$.
Montrer que :

$$\pi(R-\sqrt{2})^2 \leqslant f(R) \leqslant \pi(R+\sqrt{2})^2.$$

7. Soient a, b et c, trois réels vérifiant :

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\begin{cases} \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0 \\ \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0 \end{cases}$$

8 Soit ABC un triangle équilatéral et M un point du cercle circonscrit au triangle appartenant à l'arc BC ne contenant pas A. Montrer que $MA = MB + MC$.

9 Théorèmes de Ménélaüs : soient (ABC) un triangle du plan affine, ainsi que A', B' et C' trois points situés respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB) et distincts des sommets de (ABC).

Montrer que A'. B' et C' sont alignés si, et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

10. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan E On note I le milieu de B et de C J le milieu de C et de A et K le milieu de A et de B.
Soient Ω un point de E et h l'homothétie de rapport 2 et de centre Ω. On note $A' = h(I)$, $B' = h(J)$ et $C' = h(K)$.
Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

11. Soit (ABC) un triangle du plan (trois points non alignés). On dit que (α, β, γ) est un système de coordonnées barycentriques de M dans (A, B, C) si $\alpha+\beta+\gamma$ est non nul et si M est le barycentre de A, B et C affectés des coefficients α, β et γ.

a) Montrer que tout point M possède un et un seul système de coordonnées barycentriques (α, β, γ) vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

b) Montrer que deux triplets (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont des systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point si, et seulement si, ils sont proportionnels.

c) Montrer que $\left(\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right),\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right),\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\right)$ est un système de coordonnées barycentriques de M.

12. Soient (ABC) un triangle du plan affine et P, Q et R les points de coordonnées barycentriques $(0,1,-\alpha)$, $(-\beta,0,1)$, $(1,-\gamma,0)$ dans (A,B,C).

a) Montrer que les points P, Q et R sont alignes si, et seulement si, les points P', Q' et R' de coordonnées barycentriques $(0,-\alpha,1)$, $(1,0,-\beta)$ et $(-\gamma,1,0)$ dans (A,B,C) sont alignés. La droite $(P'Q'R')$ est alors appelée la droite isotomique de la droite (PQR).

b) Montrer que les points P, Q et R sont alignés si, et seulement si les milieux des segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ sont alignés. Cette droite d'alignement est appelée la droite de Newton de la droite (PQR) par rapport à (ABC).

c) Si P, Q et R sont alignés, déterminer le rapport entre le centre de gravité G de (ABC), la droite isotomique et la droite de Newton de (PQR)

(cet exercice utilise les exercices 9 et 11)

13. Soient (ABC) et (PQR) deux triangles. On suppose qu'il existe D tel que les droites (AD), (BD) et (CD) soient respectivement parallèles aux côtés (QR), (RP) et (PQ). Montrer qu'il existe S tels que (PS), (QS) et (RS) sont respectivement parallèles aux côtés (BC), (AC) et (AB).

14. Soit (ABC) un triangle du plan euclidien orienté On note A la mesure de l'angle (non orienté) des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et a la longueur BC ainsi que B et C, et b et c les quantités analogues pour les autres sommets.

a) Montrer que les déterminants $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$, $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ et $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ sont égaux. On dit que (ABC) est orienté positivement s'ils sont positifs, négativement sinon.

b) Montrer que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est égale à A lorsque (ABC) est orienté positivement, $-A$ sinon. Montrer dans tous les cas :

$$A+B+C=\pi.$$

c) On note p, R, r et S respectivement le demi-périmètre $\frac{1}{2}(a+b+c)$ le rayon du cercle circonscrit, le rayon du cercle inscrit et l'aire de (ABC) Montrer les formules suivantes :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

et :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)} = rp$$

15. Soit (ABC) un triangle du plan euclidien. Montrer que l'aire S de ABC vérifie :

$$S \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}p^2,$$

$$S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(abc\right)^{2/3}$$

et :

$$S \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2,$$

les égalités n'ayant lieu que lorsque (ABC) est équilatéral.

(Cet exercice utilise l'exercice 14 et la notion de fonction convexe)

16. Soit (ABC) un triangle du plan euclidien.

a) Représenter le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit O le centre du cercle inscrit I et l'orthocentre H de ABC comme barycentres de (A, B, C).

b) En déduire $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

(cet exercice utilise les exercices 11 et 14)

17. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$.

a) Montrer que les centres des triangles équilatéraux inscrits dans $\mathcal{H}$ appartiennent à $\mathcal{H}$.

b) Montrer que pour tout point M de l'hyperbole, l'intersection de $\mathcal{H}$ et du cercle $\mathcal{C}_M$ de centre M passant par le point M' symétrique de M par rapport à O est composée de M' et de trois autres points formant un triangle équilatéral de centre de gravité M.

c) Donner finalement le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans $\mathcal{H}$.

18 Soit ABC un triangle du plan euclidien. Montrer que ABC est equilateral si et seulement si, les affixes a, b et c de ses sommets vérifient :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

19. Soit (ABC) un triangle positivement orienté du plan euclidien $\mathcal{P}$ ne possédant pas d angle de mesure principale strictement supérieure à $\frac{2\pi}{3}$. Le but de cet exercice est de montrer que l'application :

$$f(M) = d(M,A) + d(M,B) + d(M,C)$$

de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R}_+$ atteint son minimum en un unique point et de déterminer ce point.

a) On construit le triangle équilatéral (BCA') extérieur à (ABC), le cercle $\mathcal{C}_A$ circonscrit à (BCA'). Montrer que la droite (AA') recoupe $\mathcal{C}_A$ en un point F différent de A' situé entre A' et A et que les points A', B, F et C sont disposés dans cet ordre sur $\mathcal{C}_A$.

b) Montrer que l'on a $MB + MC \geqslant MA'$, l'égalité n'ayant lieu que lorsque M appartient à l'arc de $\mathcal{C}_A$ compris entre B et C et ne contenant pas A'.

c) Montrer que l on a $f(M) > A'A$ pour tout $M \neq F$ et qu'ainsi f atteint son minimum en F et seulement en ce point.

d) On construit comme ci-dessus les triangles équilatéraux (CAB') et (ABC') ainsi que leurs cercles circonscrits $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$. Montrer que F, appelé point de Fermat de (ABC), est le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC') et qu'il appartient aux cercles $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$.

20 Soit (ABC) un triangle positivement orienté du plan euclidien $\mathcal{P}$ dont l'angle A est de mesure principale strictement supérieure à $\frac{2\pi}{3}$. Le but de cet exercice est de montrer que l'application :

$$f(M) = d(M,A) + d(M,B) + d(M,C)$$

de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R}_+$ atteint son minimum en A et uniquement en ce point.

a) On construit le triangle isocèle BCA' extérieur à ABC dont l'angle $\left(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B}\right)$ est de mesure principale $\pi - A$. Montrer que BC est strictement inférieur à BA'.

b) Montrer que l'on a $MB + MC \geqslant \frac{BC}{BA'} MA'$, l'égalité n'ayant lieu que lorsque M appartient à l arc du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ à ABC compris entre B et C et contenant A.

c) Montrer que l'on a $f(M) > AB + AC$ pour tout $M \neq A$ et qu'ainsi f atteint son minimum en A.

21. On considère la transformation du plan représentée par $f(z) = a\,\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que c'est la composée d'une similitude directe et d'une symétrie axiale (on dit que c'est une *similitude indirecte*).

b) Montrer que si f représente une symétrie axiale, on a $|a| = 1$ et $a\,\overline{b} + b = 0$. Trouver alors, en fonction de b, un point de l'axe de symétrie.

c) Réciproquement, si $a = e^{i\theta}$ et $a\,\overline{b} + b = 0$, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, le complexe $u = e^{-i\theta/2}\big(f(z) + z - b\big)$ est réel et $v = e^{-i\theta/2}\big(f(z) - z\big)$ est imaginaire pur. En déduire que f représente une symétrie orthogonale par rapport à une droite que l'on précisera.

d) Montrer que si $|a| = 1$, on a $f = s \circ t = t \circ s$ où s représente une symétrie d'axe $\mathcal{D}$ et t une translation de vecteur dans la direction de $\mathcal{D}$.
Vérifier l'unicité du couple (s, t).

22. Un losange $(APBQ)$ de longueur de côté constante a se déforme de façon à ce que les points A et B restent sur un cercle fixe de centre O et de rayon $r \neq a$. Montrer que Q est l'image de P dans une inversion fixe que l'on déterminera.

Chapitre 3

Géométrie dans l'espace

Conformément au programme, ce chapitre introduit de manière élémentaire la géométrie de l'espace. Cette présentation, qui exclut toute théorie générale des espaces vectoriels, permet de travailler dans un cadre théorique précis et de disposer de tous les résultats classiques de la géométrie dans l'espace. En première lecture, le lecteur peut se contenter d'apprendre à utiliser les notions introduites dans ce chapitre (donc sans approfondir les démonstrations), quitte à revenir aux fondements de la théorie ultérieurement.

1. Définitions, Notations

Dans tout ce chapitre, on considère l'espace euclidien usuel E muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

- Tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$, où α, β et γ sont des réels appelés *composantes* ou *coordonnées* de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
- Pour tout point de l'espace, il existe donc un unique triplet (x, y, z) de reels tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$. Les réels x, y et z s'appellent les *coordonnees* de M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
- La *norme (euclidienne)* du vecteur $\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

- Un vecteur est dit *unitaire*, ou *normé*, s'il est de norme 1.
- La *distance* de deux points A et B de E, notee $d(A, B)$ ou plus simplement AB est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Si $\vec{u}_1 = \alpha_1 \vec{\imath} + \beta_1 \vec{\jmath} + \gamma_1 \vec{k}$ et $\vec{u}_2 = \alpha_2 \vec{\imath} + \beta_2 \vec{\jmath} + \gamma_1 \vec{k}$, le *produit scalaire* de $\vec{u}_1$ par $\vec{u}_2$ est :

$$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2 + \gamma_1\,\gamma_2.$$

  On a immédiatement $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u}$.

- Le produit scalaire est *bilinéaire symétrique*, c'est–à–dire que l'on a pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, et pour tous réels λ_1 et λ_2 :

$$\vec{u}.\left(\lambda_1\,\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\right) = \lambda_1\,\vec{u}.\vec{v}_1 + \lambda_2\,\vec{u}.\vec{v}_2$$
$$\left(\lambda_1\,\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2\right).\vec{v} = \lambda_1\,\vec{u}_1.\vec{v} + \lambda_2\,\vec{u}_2.\vec{v}$$
$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}.$$

- Deux vecteurs sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul.

- On appelle *base orthonormée,* une famille de trois vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux.

  Un *repère orthonormé* est un quadruplet $(\Omega, \vec{u}.\,\vec{v}, \vec{w})$ où Ω est un point de l'espace et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée

> **Remarque** Les termes de "base" et de "repère" seront justifiés par la proposition 5 de la page 114 et la remarque qui la suit.

- Si A est un point de E et $\vec{u}$ un vecteur, on note $A + \vec{u}$ l'unique point B de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

- La *droite* passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ non nul est l'ensemble des points de la forme $A + \lambda\,\vec{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On la note parfois $(A, \vec{u})$ ou $A + \mathbb{R}\,\vec{u}$.

  Si A et B sont deux points distincts, on note (AB) la droite $(A, \overrightarrow{AB})$.

- La *direction* de la droite $(A, \vec{u})$ est l ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\,\vec{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colineaires* (ou proportionnels) s'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$ ou un réel μ tel que $\vec{u} = \mu\,\vec{v}$.

> **Remarque** Comme dans le plan, on ne peut pas se contenter de l'une de ces deux relations pour traduire la colinéarité de deux vecteurs sauf si l'on sait qu'ils sont tous les deux non nuls.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, le *plan* passant par un point A et dirige par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points de la forme $A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On le note parfois $(A, \vec{u}, \vec{v})$ ou $A + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$.
- La *direction* du plan $(A. \vec{u}. \vec{v})$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$, avec $(\lambda. \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque Toutes ces notions ont déjà été vues dans les classes antérieures. Elles seront reprises en détail plus tard dans cet ouvrage, et en particulier dans le chapitre sur les espaces euclidiens.

2. Modes de représentation d'un point

2.1 Coordonnées cartésiennes

Tout point M de E peut être représenté par ses *coordonnées cartésiennes* (x, y, z) dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$. On note alors $M\left|\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right.$.

On peut ainsi identifier l'espace E à $\mathbb{R}^3$ en associant au point $M\left|\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right.$ le triplet $(x\ y, z)$ de ses coordonnées dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

De même, on note $\vec{u}\left|\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}\right.$ pour signifier que (α, β, γ) sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

2.2 Coordonnées cylindriques

Si θ est un réel, on note :

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}.$$

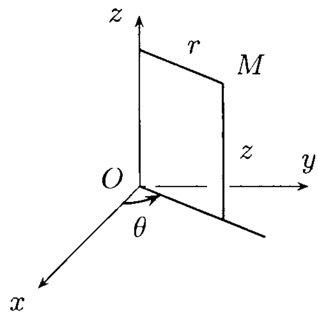
Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$. Si $P\left|\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}\right.$ est son projeté orthogonal sur le plan (Oxy) muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et si l on prend un système de coordonnées polaires $(r. \theta)$ de P, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + z\,\vec{k} = r\,\vec{u}(\theta) + z\,\vec{k}.$$

Définition 1

Étant donné un point M de E, on appelle *système de coordonnées cylindriques* de M par rapport au repère $\mathcal{R}$, tout triplet $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta) + z\,\vec{k}.$$



2.3 Coordonnees sphériques

Soit M un point de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z). On a $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}(\varphi) + z\,\vec{k}$ et donc $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Il existe donc un réel θ tel que $z = r\,\cos\theta$ et $\rho = r\,\sin\theta$.

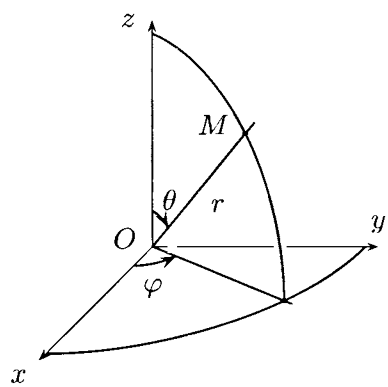
Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de M vérifient alors :

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\varphi = r\,\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\,\sin\varphi = r\,\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\,\cos\theta \end{cases}$$

Définition 2

Étant donné un point M de E, on appelle *système de coordonnées sphériques* de M par rapport au repère $\mathcal{R}$ tout triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ tel que $r \geqslant 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et :

$$\begin{cases} x = r\,\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\,\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\,\cos\theta \end{cases}$$



Si (r, θ, φ) est un système de coordonnées sphériques d'un point M :

- le réel positif r est appelé *rayon*,
- le réel φ est appelé *longitude*,
- le réel θ est appelé *colatitude*.

Remarques

- On utilise parfois la *latitude* $\frac{\pi}{2} - \theta$ à la place de la colatitude (en particulier pour la manipulation des coordonnées terrestres)
- Dans le plan $(O, \vec{k}, \vec{u}(\varphi))$, le point M admet (r, θ) comme couple de coordonnées polaires.
- Un couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal de M sur Oxy est $(r \sin\theta, \varphi)$.

3. Orthogonalité et produit vectoriel

3.1 Vecteurs orthogonaux à deux vecteurs non colinéaires

Lemme

Deux vecteurs :

$$\vec{u}_1 = x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath} + z_1\,\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 = x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath} + z_2\,\vec{k}$$

sont colinéaires si, et seulement si, l'on a :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

émonstration

- Si les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires, alors il existe un réel λ tel que $\vec{u}_2 = \lambda\,\vec{u}_1$ ou $\vec{u}_2 = \lambda\,\vec{u}_1$. On voit alors que les trois déterminants sont nuls.
- Réciproquement, supposons :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

  - Si l'un des vecteurs est nul, ils sont évidemment colineaires.
  - Sinon, on peut supposer, par exemple, $x_1 \neq 0$.

    Le nullité du premier déterminant, implique que les vecteurs (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $\mathbb{R}^2$ sont colinéaires. Comme $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x_2, y_2) = \lambda\,(x_1, y_1)$.

    De la même façon, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $(x_2, z_2) = \mu\,(x_1, z_1)$

    On a donc $\lambda\,x_1 = x_2 = \mu\,x_1$, et comme $x_1 \neq 0$, on en déduit $\lambda = \mu$. Par conséquent $(x_2, y_2, z_2) = \lambda\,(x_1, y_1, z_1)$ ce qui prouve que les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires.

$\square$

Proposition 1

Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs non colinéaires.

- Il existe un vecteur non nul $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
- Les vecteurs orthogonaux à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont les vecteurs $\lambda\,\vec{w}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Les vecteurs orthogonaux à $\vec{w}$ sont les combinaisons linéaires de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

émonstration Posons .

$$\vec{u}_1 = x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath} + z_1\,\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 = x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath} + z_2\,\vec{k}.$$

Ils sont non colinéaires, donc d'après le lemme on peut supposer par exemple, que $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ est non nul.

Un vecteur $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ si, et seulement si, l'on a :

$$\begin{cases} x\,x_1 + y\,y_1 + z\,z_1 = 0 \\ x\,x_2 + y\,y_2 + z\,z_2 = 0. \end{cases}$$

Ce système en (x, y) admet D pour déterminant, donc admet pour tout z une solution unique

- Calcul préliminaire. Soit z_0 un réel arbitrairement fixé. Le triplet (x, y, z_0) est solution du système si, et seulement si, l'on a ·

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z_0\,z_1 & y_1 \\ -z_0\,z_2 & y_2 \end{vmatrix}}{D} = -z_0\,\frac{\begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix}}{D} = z_0\,\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -z_0\,z_1 \\ x_2 & -z_0\,z_2 \end{vmatrix}}{D} = -z_0\,\frac{\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}}{D} = -z_0\,\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}.$$

En prenant $z_0 = D$, on a donc une solution non nulle ; il s'agit du vecteur $\vec{w}$ dont les composantes dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont :

$$\alpha = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \qquad \beta = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \qquad \gamma = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

- Tous les vecteurs $\lambda\,\vec{w}$ sont alors évidemment solutions.
  Réciproquement, si (x, y, z) est solution, le calcul preliminaire montre que $(x, y, z) = \dfrac{z}{D}(\alpha, \beta, \gamma)$.
- Par bilinéarité, tous les vecteurs $\lambda_1\,\vec{u}_1 + \lambda_2\,\vec{u}_2$ sont orthogonaux à $\vec{w}$

Réciproquement, soit $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ un vecteur orthogonal à $\vec{w}$ On cherche des réels λ_1 et λ_2 tels que $\vec{u} = \lambda_1\,\vec{u}_1 + \lambda_2\,\vec{u}_2$, c'est-à-dire satisfaisant au système :

$$\begin{cases} \lambda_1\,x_1 + \lambda_2\,x_2 = x \\ \lambda_1\,y_1 + \lambda_2\,y_2 = y \\ \lambda_1\,z_1 + \lambda_2\,z_2 = z. \end{cases} \qquad (*)$$

Comme $\gamma = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ est non nul, il existe un unique couple (λ_1, λ_2) vérifiant les deux premières équations D autre part, les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}$ sont tous trois orthogonaux à $\vec{w}$, donc on a :

$$\alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,z = \alpha\,x_1 + \beta\,y_1 + \gamma\,z_1 = \alpha\,x_2 + \beta\,y_2 + \gamma\,z_2 = 0.$$

En ajoutant les deux premières équations du système (*) respectivement multipliées par $-\alpha$ et $-\beta$, on obtient alors :

$$\gamma\,(\lambda_1\,z_1 + \lambda_2\,z_2) = \gamma\,z$$

ce qui prouve que la dernière équation est aussi vérifiée puisque $\gamma \neq 0$ □

Remarque Lorsque $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires le vecteur $\vec{w}$ défini ci–dessus est nul, donc encore orthogonal à ces deux vecteurs.

Définition 3

Soient :

$$\vec{u}_1 = x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath} + z_1\,\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 = x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath} + z_2\,\vec{k}$$

deux vecteurs de l'espace.

On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ le vecteur dont les composantes dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont :

$$\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

On le note $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.

- Il est nul si et seulement si, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires.
- Il est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
- Lorsque $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont non colinéaires, c'est, à un réel multiplicatif près l'unique vecteur orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.

Remarque Les composantes du produit vectoriel peuvent encore s'écrire :

$$\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Elles se déduisent ainsi les unes des autres par permutation circulaire des lettres x, y et z, ce qui est un moyen mnémotechnique commode pour les retrouver.

Exemple Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est non nul et orthogonal à $\vec{u}$, donc non colinéaire à $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}' = \vec{w} \wedge \vec{u}$ est alors non nul orthogonal à $\vec{w}$, donc dans le plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. De plus il est orthogonal à $\vec{u}$. En normant $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ on obtient donc une base orthonormée du plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque D'après l'exemple ci–dessus, on dispose dans tout plan de l'espace d'une base orthonormée pour le produit scalaire obtenu par restriction du produit scalaire de l'espace.

On peut donc appliquer à ce plan tous les résultats vus dans le chapitre précédent.

On sait en particulier que la direction d'un plan est l'ensemble des vecteurs $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, où $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs non colinéaires arbitraires de cette direction.

3.2 Propriétés du produit vectoriel

Les propriétés de bilinéarité et d'antisymétrie du determinant 2×2 donnent immédiatement :

Proposition 2

Le produit vectoriel est *bilinéaire antisymétrique*, c'est–à–dire que l'on a pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, et pour tous réels λ_1 et λ_2 :

$$\vec{u} \wedge (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{u} \wedge \vec{v}_2$$

$$(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 \wedge \vec{v} + \lambda_2 \vec{u}_2 \wedge \vec{v}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}.$$

Proposition 3

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs de l'espace, on a :

$$\left\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\right\|^2 + \left(\vec{u}_1 . \vec{u}_2\right)^2 = \left\|\vec{u}_1\right\|^2 \left\|\vec{u}_2\right\|^2.$$

émonstrat'on Notons (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les composantes respectives des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. La quantité $\left\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\right\|^2 + \left(\vec{u}_1 . \vec{u}_2\right)^2$ est égale à :

$$(x_1\, y_2 - x_2\, y_1)^2 + (x_1\, z_2 - x_2\, z_1)^2 + (y_1\, z_2 - y_2\, z_1)^2 + (x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2)^2.$$

Lorsque l'on développe ces carrés, les doubles produits s'éliminent. Il reste donc la somme des carrés qui vaut :

$$\begin{aligned} x_1^2\, y_2^2 + x_2^2\, y_1^2 + x_1^2\, z_2^2 + x_2^2\, z_1^2 + y_1^2\, z_2^2 + y_2^2\, z_1^2 + x_1^2\, x_2^2 + y_1^2\, y_2^2 + z_1^2\, z_2^2 \\ = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\,(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\ = \left\|\vec{u}_1\right\|^2 \left\|\vec{u}_2\right\|^2. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4

- Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux, on a :

$$\left\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\right\| = \left\|\vec{u}_1\right\| \left\|\vec{u}_2\right\|.$$

- Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux et normés, alors $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$ est une base orthonormée.

Remarque Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée, alors $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{w} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ puisque $\vec{w}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de norme 1 (proposition 1 de la page 110).

3.3 Bases orthonormées

Lemme

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée. Tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est nul.

'm nst atio Soit $\vec{x}$ orthogonal à $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- Comme $\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il est proportionnel à $\vec{w} = \pm(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- Comme il est orthogonal à $\vec{w}$, il est donc nul.

□

Proposition 5

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée. Tout vecteur $\vec{x}$ de l'espace s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{x} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w}.$$

Les réels α, β et γ sont les *composantes* (ou *coordonnées*) de $\vec{x}$ dans la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

On a de plus :

$$\alpha = \vec{u}.\vec{x}\,,\ \beta = \vec{v}.\vec{x}\,,\ \gamma = \vec{w}.\vec{x}.$$

émonstration

Unicité. Si $\vec{x} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w}$, en calculant les produits scalaires de $\vec{x}$ avec chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on obtient :

$$\alpha = \vec{u}.\vec{x}\,,\ \beta = \vec{v}.\vec{x}\,,\ \gamma = \vec{w}.\vec{x}.$$

Existence. Posons .

$$\vec{y} = (\vec{u}.\vec{x})\,\vec{u} + (\vec{v}.\vec{x})\,\vec{v} + (\vec{w}.\vec{x})\,\vec{w}.$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\vec{u}.\vec{y} = \vec{u}.\vec{x}\,,\ \vec{v}.\vec{y} = \vec{v}.\vec{x}\,,\ \vec{w}.\vec{y} = \vec{w}.\vec{x}$$

et donc le vecteur $\vec{x} - \vec{y}$ est orthogonal à $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$; par suite, il est nul □

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée. On a :

$$\vec{u}.\vec{u} = \vec{v}.\vec{v} = \vec{w}.\vec{w} = 1 \quad \text{et} \quad \vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = \vec{v}.\vec{w} = 0.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on en déduit que si :

$$\vec{u}_1 = x_1\,\vec{u} + y_1\,\vec{v} + z_1\,\vec{w} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 = x_2\,\vec{u} + y_2\,\vec{v} + z_2\,\vec{w}$$

alors $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2$.

L'expression du produit scalaire en fonction des composantes des vecteurs est donc la même dans toute base orthonormee.

Remarque Tout point admet donc dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un unique système de coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire un unique triplet (x, y, z) de réels vérifiant :

$$\overrightarrow{\Omega M} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v} + z\,\vec{w}.$$

Proposition 6

Si $\vec{w}$ est un vecteur normé, il existe au moins une base orthonormée de la forme $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

ém nstration Prenons n'importe quel vecteur $\vec{x}$ non colinéaire à $\vec{w}$ Le vecteur $\vec{w} \wedge \vec{x}$ est alors non nul En le normant, on obtient un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{w}$. En posant $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u}$, on obtient une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. □

Remarque Tout vecteur $\vec{w}$ peut donc s'écrire sous la forme $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

En effet, si $\vec{w}$ est nul, il suffit de prendre $\vec{u} = \vec{v} = 0$, et sinon on prend $\vec{u}$ et $\lambda \vec{v}$ avec $\lambda = \|\vec{w}\|$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ tels que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}/\lambda)$ soit une base orthonormée.

3.4 Orientation

Remarque Soient :

$$\vec{u}_1 = x_1 \vec{\imath} + y_1 \vec{\jmath} + z_1 \vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 = x_2 \vec{\imath} + y_2 \vec{\jmath} + z_2 \vec{k}.$$

On sait que le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ a pour composantes :

$$(y_1 z_2 - y_2 z_1 \, , \; z_1 x_2 - z_2 x_1 \, , \; x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, -\vec{k})$, les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ont pour composantes respectivement $(x'_1 . y'_1, z'_1)$ et (x'_2, y'_2, z'_2), avec $x'_i = x_i$, $y'_i = y_i$ et $z'_i = -z_i$.

Le vecteur dont les composantes dans cette base orthonormée sont :

$$(y'_1 z'_2 - y'_2 z'_1 \, , \; x'_1 z'_2 - x'_2 z'_1 \, , \; x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1)$$

est donc égal à $-\vec{w}$.

L'expression du produit vectoriel en fonction de ses composantes dans une base orthonormée dépend donc de cette base. En revanche, on va voir qu'elle est indépendante du choix de la base orthonormée **directe**.

Définition 4

Une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est *directe* si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Dans le cas contraire c'est–à–dire si $\vec{w} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$, on dit qu'elle est *indirecte*.

Lemme

Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base orthonormée directe, alors $(\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_1)$ et $(\vec{u}_3, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ sont des bases orthonormées directes. On a donc :

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \qquad \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 = \vec{u}_2.$$

émonstration

- Il est évident qu'il s'agit de bases orthonormées.
- Vérifions que $(\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_1)$ est directe, c'est-à-dire que l'on a $\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = \vec{u}_1$ (on sait qu'il est égal à $\pm\vec{u}_1$). En notant (x_i, y_i, z_i) les composantes dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de chacun des vecteurs $\vec{u}_i$, on a :

$$x_3 = y_1\, z_2 - y_2\, z_1\,, \quad y_3 = z_1\, x_2 - z_2\, x_1 \quad \text{et} \quad z_3 = x_1\, y_2 - x_2\, y_1.$$

Comme $\vec{u}_1 \neq 0$, on peut supposer, par exemple $z_1 \neq 0$. La troisième composante du vecteur $\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$ est alors :

$$\begin{aligned} x_2\,(z_1\, x_2 - z_2\, x_1) - y_2\,(y_1\, z_2 - y_2\, z_1) & \\ &= z_1\,(x_2^2 + y_2^2) - z_2\,(x_1\, x_2 + y_1\, y_2) \\ &= z_1\,(1 - z_2^2) - z_2\,(x_1\, x_2 + y_1\, y_2) \quad \text{car } \|\vec{u}_2\| = 1 \\ &= z_1 - z_2\,(x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2) \\ &= z_1 \quad \text{car } \vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0. \end{aligned}$$

Comme les deux vecteurs $\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$ et $\vec{u}_1$ sont colinéaires et comme z_1 est non nul, on en déduit qu'ils sont égaux.

- En appliquant ce que l'on vient de montrer à la base orthonormée directe $(\vec{u}_2. \vec{u}_3, \vec{u}_1)$, on en déduit que $(\vec{u}_3, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est aussi directe. □

Proposition 7

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}. \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée directe. Si :

$$\vec{u}_1 = x_1\, \vec{u} + y_1\, \vec{v} + z_1\, \vec{w} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}_2 = x_2\, \vec{u} + y_2\, \vec{v} + z_2\, \vec{w}$$

sont deux vecteurs de l'espace, les composantes de $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ sont :

$$\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

L expression du produit vectoriel en fonction des composantes est donc la même dans toute base orthonormée directe

émonstrati n On utilise la bilinéarité du produit vectoriel et les relations :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$
$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$$
$$\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{v} = -\vec{u} \wedge \vec{w}$$
$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{w} = 0.$$

□

Exemple

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs, on a la formule du double produit vectoriel :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u}.\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v}.\vec{w})\,\vec{u}.$$

Pour la demontrer, on se place dans une base orthonormée directe dans laquelle les composantes des trois vecteurs sont de la forme :

$$\vec{u}\left|\begin{array}{l} a \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{v}\left|\begin{array}{l} b \\ c \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{w}\left|\begin{array}{l} d \\ e \\ f \end{array}\right.$$

(on prend un premier vecteur $\vec{u}_1$ colinéaire à $\vec{u}$, le troisième $\vec{u}_3$ colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et enfin $\vec{u}_2 = \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1$).

On a alors :

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} &= \big(a\,\vec{u}_1 \wedge (b\,\vec{u}_1 + c\,\vec{u}_2)\big) \wedge \vec{w} \\
&= a\,c\,\vec{u}_3 \wedge (d\,\vec{u}_1 + e\,\vec{u}_2 + f\,\vec{u}_3) \\
&= a\,c\,d\,\vec{u}_2 - a\,c\,e\,\vec{u}_1 \\
&= a\,d\,\vec{v} - (a\,c\,e + a\,d\,b)\,\vec{u}_1 \\
&= a\,d\,\vec{v} - (c\,e + d\,b)\,\vec{u} \\
&= (\vec{u}.\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v}.\vec{w})\,\vec{u}.
\end{aligned}$$

3.5 Interprétations géométriques du produit vectoriel

D'après la proposition 3 de la page 112, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|.$$

On peut donc poser :

Définition 5

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace, on appelle *mesure de l'angle* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos\theta.$$

Remarques

- C'est donc aussi la mesure de l'angle non orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans tout plan les contenant.
- Le notion d'angle orienté n'a pas de sens dans l'espace, car tout plan de l es-pace admet deux orientations, et aucune ne peut être privilégiée ("on peut regarder le plan de chacun des deux côtés").

Proposition 8

Si θ est la mesure de l'angle des vecteurs non nuls $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, on a :

$$\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\| = \|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|\,\sin\theta.$$

emonstratio D'après la proposition 3 de la page 112, on a :

$$\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|^2 = \|\vec{u}_1\|^2\,\|\vec{u}_2\|^2\,\sin^2\theta$$

et le résultat s'ensuit puisque, le réel θ étant dans l'intervalle $[0, \pi]$, on a $\sin\theta \geqslant 0$ □

Remarque Plus précisément, si l'on oriente un plan $\mathcal{P}$ contenant $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ dans sa direction par une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$ et si l'on prend $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ de telle sorte que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe, alors :

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \mathrm{Det}_{\mathcal{P}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\,\vec{w}$$

où $\mathrm{Det}_{\mathcal{P}}$ représente le déterminant dans le plan orienté $\mathcal{P}$.

En effet, si $\vec{u}_1 = x_1\,\vec{u} + y_1\,\vec{v}$ et $\vec{u}_2 = x_2\,\vec{u} + y_2\,\vec{v}$, on a :

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)\,\vec{w} = \mathrm{Det}_{\mathcal{P}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\,\vec{w}.$$

Exemples

1. L'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à la norme de leur produit vectoriel.
2. L'aire d'un triangle (ABC) est donc :

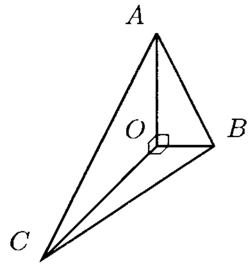
$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\|.$$

On peut d'ailleurs remarquer les égalités :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$$

évidentes d'après la relation de Chasles.

3. Soit $(OABC)$ un trièdre rectangle, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient orthogonaux deux à deux. Le carré de l'aire du triangle (ABC) est égal à la somme des carrés des aires des trois autres triangles (OAB), (OBC) et (OCA) (résultat trouvé par Descartes en 1619).



En effet :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \wedge \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) \\ &= \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$

Comme ces trois derniers vecteurs sont respectivement colinéaires à $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ (par orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$), le théorème de Pythagore donne :

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|^2 + \|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\|^2 + \|\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}\|^2$$

ce qui prouve la relation.

3.6 Produit mixte, déterminant

Définition 6

Le *produit mixte* ou *déterminant* des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace est :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$$

Proposition 9

- Le produit mixte est *trilinéaire*, c'est-à-dire que $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est linéaire par rapport à chacun des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
- Il est *antisymetrique*, c'est-à-dire qu'il est multiplié par -1 lorsque l'on échange deux vecteurs.

émonst ation

- La trilinéarité est une conséquence de la bilinéarité du produit vectoriel et du produit scalaire.
- La relation $\mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ provient de l'antisymétrie du produit vectoriel.

- On remarque que $\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{v})=0$ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puisque $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{v}$. Or, par trilinéarité :

$$\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v}+\vec{w},\vec{v}+\vec{w})=\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{v})+\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{w},\vec{v})+\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{w},\vec{w})$$

ce qui donne :

$$0=\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{w},\vec{v}).$$

- On a enfin :

$$\operatorname{Det}(\vec{w},\vec{v},\vec{u})=-\operatorname{Det}(\vec{w},\vec{u},\vec{v})=\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{w},\vec{v})=-\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}).$$

□

Exemple En prenant toutes les permutations des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on obtient, en posant $D=\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$:

$$\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\operatorname{Det}(\vec{v},\vec{w},\vec{u})=\operatorname{Det}(\vec{w},\vec{u},\vec{v})=D$$

$$\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{w},\vec{v})=\operatorname{Det}(\vec{w},\vec{v},\vec{u})=\operatorname{Det}(\vec{v},\vec{u},\vec{w})=-D.$$

Proposition 10

Étant donnés trois vecteurs dont les composantes dans une base orthonormée directe sont :

$$\vec{u}_1\left|\begin{smallmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{smallmatrix}\right.\quad\text{et}\quad\vec{u}_2\left|\begin{smallmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{smallmatrix}\right.\quad\text{et}\quad\vec{u}_3\left|\begin{smallmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{smallmatrix}\right.$$

le déterminant de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ est :

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=\;& x_1\,y_2\,z_3+x_2\,y_3\,z_1+x_3\,y_1\,z_2\\ &-x_1\,y_3\,z_2-x_3\,y_2\,z_1-x_2\,y_1\,z_3.\end{aligned}$$

On le note :

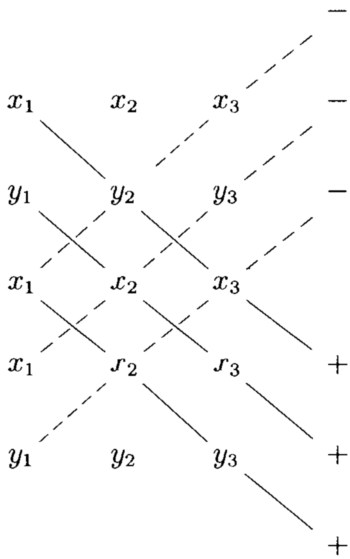
$$\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}.$$

Dém nstrati On utilise la définition :

$$\operatorname{Det}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=x_3\begin{vmatrix}y_1&y_2\\z_1&z_2\end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix}x_1&x_2\\z_1&z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}$$

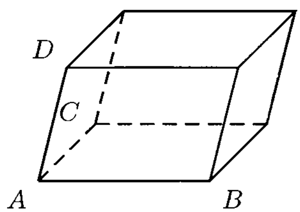
ce qui donne le résultat en développant. □

Cette formule peut se retrouver à l'aide de la *méthode* dite *de Sarrus* : on recopie les deux premières lignes du tableau formé des coordonnées des trois vecteurs sous la troisième et l'on effectue les produits en diagonale, chacun étant affecté du signe $+$ ou $-$ selon le schéma :



Exemple

Le volume d'un parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est $|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$.



En effet, si P est un plan contenant A, B et C, l'aire $\mathcal{B}$ de la base du parallélépipède portée par P vérifie $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \mathcal{B}\vec{w}$ où $\vec{w}$ est un vecteur unitaire normal à P. La hauteur étant $h = |\overrightarrow{AD}.\vec{w}|$ on en déduit :

$$|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \mathcal{B}\,|\vec{w}.\overrightarrow{AD}| = \mathcal{B}\,h.$$

3.7 Coplanéarité

Définition 7

Trois vecteurs sont *coplanaires* si l'un d'entre eux est combinaison linéaire des deux autres.

Remarque Si deux vecteurs parmi les trois sont colinéaires alors évidemment les trois sont coplanaires.

Les caractérisations qui suivent sont souvent plus intéressantes, car elles sont plus symétriques.

Proposition 11

Étant donnés trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, il est équivalent de dire :

(i) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

(ii) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dans la direction d'un même plan,

(iii) il existe un vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Démonstration Si deux des trois vecteurs sont colinéaires (voire même les trois), alors les quatre conditions sont évidemment vérifiées Supposons donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux à deux non colinéaires.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors les trois vecteurs sont dans la direction du plan $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Un vecteur $\vec{n}$ non nul normal à un tel plan est orthogonal aux trois vecteurs.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux à un vecteur non nul $\vec{n}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est colinéaire à $\vec{n}$. Donc $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (qui est non nul puisque l'on a supposé $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires), c'est-à-dire combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'après la proposition 1 de la page 110. □

Proposition 12

Trois vecteurs sont coplanaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

émonstratio Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

- S'ils sont colineaires, ils sont coplanaires et leur determinant est evidemment nul
- Sinon par exemple $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colineaires.

  Le déterminant $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$ est nul si, et seulement si, $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u} \wedge \vec{v}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'après la proposition 1 de la page 110. D'où le résultat. □

Remarque Grâce à l'expression du déterminant donnée par la proposition 10 de la page 120, on peut vérifier que l'on a :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Les vecteurs $\vec{u}_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$, $\vec{u}_2 \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}_3 \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix}$ sont donc coplanaires si et seulement si, les vecteurs $\vec{u} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$, $\vec{v} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}$ et $\vec{w} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix}$ sont coplanaires.

4. Droites et plans

4.1 Représentations parametriques

Représentations paramétriques d'une droite

La droite passant par le point $M_0 \left| \begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix} \right.$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u} \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix} \right.$ est paramétrée par :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\,\alpha \\ y = y_0 + \lambda\,\beta \\ z = z_0 + \lambda\,\gamma \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Représentations paramétriques d'un plan

Le plan passant par le point $M_0 \left| \begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix} \right.$ et dirige par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}_1 \left| \begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{smallmatrix} \right.$ et $\vec{u}_2 \left| \begin{smallmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{smallmatrix} \right.$ est paramétré par :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1\,\alpha_1 + \lambda_2\,\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda_1\,\beta_1 + \lambda_2\,\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda_1\,\gamma_1 + \lambda_2\,\gamma_2 \end{cases} \qquad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

(avec donc $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ non proportionnels).

Cependant, cette représentation est assez lourde car elle nécessite deux paramètres et que les conditions d'égalité ou de parallélisme se voient mal sous cette forme.

4.2 Équations cartésiennes

Équations cartésiennes d'un plan

Proposition 13

Le plan passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admet pour équation :

$$\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}) = 0.$$

émonstration Un point M appartient au plan si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}) = 0$. □

Définition 8

Si $\mathcal{P}$ est un plan, un vecteur *normal* à $\mathcal{P}$ est un vecteur $\vec{w}$ orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathcal{P}$. On dit alors aussi que $\mathcal{P}$ est *orthogonal* à $\vec{w}$.

Corollaire 14

Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé.

- Tout plan $\mathcal{P}$ admet dans $\mathcal{R}$ une équation du type :

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \qquad \text{avec} \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

  Le vecteur de composantes (a, b, c) est alors un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

- Réciproquement, toute équation du type précédent est l'équation d'un plan orthogonal au vecteur de composantes (a, b, c).

Démonstration

- Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A \left| \begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix} \right.$ et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$

  L'équation $\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}) = 0$ s'écrit $\vec{w}.\overrightarrow{AM} = 0$ soit :

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$$

  où (a, b, c) sont les composantes du vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ qui est orthogonal à $\mathcal{P}$

- Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, il existe un triplet (x_0, y_0, z_0) solution de l'équation

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \qquad (*)$$

  (par exemple, si $a \neq 0$, il suffit de prendre $y_0 = z_0 = 0$ et $x_0 = -d/a$).

  L'équation $(*)$ s'écrit alors :

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0.$$

  En prenant $A \left| \begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix} \right.$ et $\vec{w} \left| \begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix} \right.$, un point $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right.$ verifie $(*)$ si, et seulement si, $\vec{w}.\overrightarrow{AM} = 0$.

  L'ensemble des points vérifiant l'équation est donc le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ (dont l'existence est assurée par la remarque qui suit la proposition 6 de la page 115). □

Attention L'appartenance d'un vecteur $\vec{U} \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix} \right.$ à la direction du plan d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ s'écrit :

$$a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma = 0$$

et non $a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0$ puisque, avec les notations de la démonstration précédente, la condition s'écrit $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{U}) = 0$.

Les vecteurs de la direction de $\mathcal{P}$ sont donc ceux dont les composantes vérifient l'équation homogène (ou équation sans second membre) associée à l'équation de $\mathcal{P}$.

Définition 9

Deux plans sont *parallèles* s'ils ont même direction, c'est–à–dire s'ils admettent un vecteur normal non nul commun.

Proposition 15

Deux plans d'équations :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

sont parallèles si, et seulement si, les triplets (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont proportionnels.

Ils sont égaux si, et seulement si, leurs équations sont proportionnelles.

emonstration

- Ils sont parallèles si, et seulement si, ils admettent des vecteurs normaux colinéaires
- S'ils sont égaux, ils sont parallèles et donc il existe λ tel que $(a_2, b_2, c_2) = \lambda\,(a_1, b_1, c_1)$. Ils admettent de plus un point en commun, ce qui implique $d_2 = \lambda\, d_1$.
  Les deux équations sont donc proportionnelles.
  La réciproque est évidente. □

Définition 10

Les plans d'équations :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

sont dits *perpendiculaires* si des vecteurs normaux à ces plans sont orthogonaux, c'est–à–dire :

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

Équations cartésiennes d'une droite

Proposition 16

L'intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ non parallèles est une droite dirigée par le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls normaux respectivement à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

émonstratio Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ des plans non parallèles d'équations :

$$a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0.$$

avec (a_1, b_1, c_1) et $(a_2, b_2. c_2)$ non proportionnels.

- Puisque (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont non proportionnels, on peut supposer, par exemple $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.
- Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Comme le système :
$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y = -c_1\,z_0 - d_1 \\ a_2\,x + b_2\,y = -c_2\,z_0 - d_2 \end{cases}$$
possède une solution (x, y), on a donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \varnothing$.
- Si $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont des vecteurs normaux à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et $A \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, un point M est dans $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{w}_1$ et à $\vec{w}_2$, c'est-à-dire colinéaire à $\vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2$.
On a donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (A, \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2)$. □

Corollaire 17

Étant donnés des réels a_1, b_1, c_1, d_1 a_2, b_2, c_2 et d_2 tels que (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) soient non proportionnels, l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé vérifient :

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0 \end{cases}$$

est une droite.

Réciproquement, toute droite admet au moins un système d'équations de ce type.

émonstratio Le premier point est une conséquence de la proposition précédente. Pour le deuxième, soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point A et dirigée par un vecteur unitaire $\vec{u}$ En complétant $\vec{u}$ en une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}. \vec{w})$, l'intersection des plans passant par A et normaux à $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est une droite dirigée par $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}$. Comme elle contient évidemment A il s'agit de $\mathcal{D}$. □

Remarques

- Cette représentation des droites est assez lourde parce qu'elle nécessite deux équations et que les conditions d égalité ou de parallélisme se voient mal sous cette forme.

- Comme pour les plans les vecteurs de la direction de la droite d'équations :

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0 \end{cases}$$

sont ceux dont les composantes (α, β, γ) vérifient le système homogène associé :

$$\begin{cases} a_1\,\alpha + b_1\,\beta + c_1\,\gamma = 0 \\ a_2\,\alpha + b_2\,\beta + c_2\,\gamma = 0. \end{cases}$$

Proposition 18

Soient a_1, b_1, c_1, d_1 a_2, b_2, c_2 et d_2 tels que (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) soient non proportionnels. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équations :

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0. \end{cases}$$

- Si $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, l'ensemble d'équation :

  $(\lambda_1\,a_1 + \lambda_2\,a_2)\,x + (\lambda_1\,b_1 + \lambda_2\,b_2)\,y + (\lambda_1\,c_1 + \lambda_2\,c_2)\,z + (\lambda_1\,d_1 + \lambda_2\,d_2) = 0$

  est un plan contenant la droite $\mathcal{D}$.
- Tout plan contenant $\mathcal{D}$ a au moins une équation de ce type

Démonstration

- Il s'agit bien d'un plan puisque, (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) étant non proportionnels, on ne peut avoir :

  $$\lambda_1\,a_1 + \lambda_2\,a_2 = \lambda_1\,b_1 + \lambda_2\,b_2 = \lambda_1\,c_1 + \lambda_2\,c_2 = 0$$

  que si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

  Ce plan contient évidemment $\mathcal{D}$, puisque tout point de $\mathcal{D}$ vérifie les deux équations donc toutes leurs combinaisons linéaires.
- Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ un plan contenant $\mathcal{D}$. Notons $\vec{w}_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{vmatrix}$ et $\vec{w}_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{vmatrix}$ des vecteurs normaux aux deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :

  $$a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0$$

  et dont $\mathcal{D}$ est l'intersection.

  Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ étant $\vec{u} = \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2$, on en déduit que les vecteurs normaux à $\mathcal{P}$ sont orthogonaux à $\vec{u}$ donc combinaisons linéaires de $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$.

  Une équation de $\mathcal{P}$ est donc de la forme :

  $$(\lambda_1\,a_1 + \lambda_2\,a_2)\,x + (\lambda_1\,b_1 + \lambda_2\,b_2)\,y + (\lambda_1\,c_1 + \lambda_2\,c_2)\,z + d = 0$$

  avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. En écrivant qu'un point de $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}$, on obtient $d = \lambda_1\,d_1 + \lambda_2\,d_2$. □

Exemple Ce résultat est très utile pour trouver le plan contenant une droite $\mathcal{D}$ et un point A n'appartenant pas à $\mathcal{D}$.

Lorsque $\mathcal{D}$ est donnée par deux équations $P_1(M) = P_2(M) = 0$, le plan cherché admet pour équation $P_2(A)\, P_1(M) - P_1(A)\, P_2(M) = 0$ puisque ce dernier est l'équation d'un plan, qui vérifie évidemment les conditions demandees.

Méthode Lorsqu'une droite $\mathcal{D}$ est donnee par un système de deux equations $P_1(M) = 0$ et $P_2(M) = 0$, on peut remplacer l'une de celle–ci par exemple la première, par une combinaison linéaire $P_1(M) + \lambda\, P_2(M) = 0$ et obtenir ainsi un autre système d'équations de $\mathcal{D}$.

Voir par exemple une illustration de cette méthode à la page 133.

4.3 Intersection d'une droite et d'un plan

Définition 11

Une droite $\mathcal{D}$ est *parallèle* à $\mathcal{P}$ si tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$.

Proposition 19

Une droite $\mathcal{D}$ parallèle à un plan $\mathcal{P}$ est contenue dans $\mathcal{P}$ ou disjointe de $\mathcal{P}$.

émonstratio Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ contient un point A, alors tout point $A + \lambda\,\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{P}$ puisque $\vec{u}$ est dans la direction de $\mathcal{P}$.
Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont non disjoints, on a donc $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ □

Proposition 20

Une droite non parallèle à un plan $\mathcal{P}$ coupe ce dernier en un unique point.

émons ration Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$, ainsi que $\mathcal{P}$ le plan passant par un point B et orthogonal à un vecteur $\vec{w}$ Un point M appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{BM}.\vec{w} = 0$.
Soit $M = A + \lambda\,\vec{u}$ un point quelconque de $\mathcal{D}$. On a alors :

$$M \in \mathcal{P} \iff (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}).\vec{w} = 0 \iff \lambda\,\vec{u}.\vec{w} = \overrightarrow{AB}.\vec{w}.$$

Comme $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$, on a $\vec{u}.\vec{w} \neq 0$, et il existe donc un unique réel λ vérifiant cette dernière relation.
D'où l'existence et l'unicite d'un point M appartenant à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{P}$. □

Exemples

1. Le système :

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2 \\ a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z = d_3 \end{cases}$$

admet une solution et une seule lorsque son déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

est non nul.

En effet, il peut être interprété comme l intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ d'équations respectives :

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z = d_3.$$

Si l'on note $\vec{u}_i$ les vecteurs de composantes (a_i, b_i, c_i), la droite $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ admet $\vec{u}_3$ comme vecteur normal.

Or $D = \mathrm{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ (voir la remarque de la page 122) et donc :

$$(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2).\vec{u}_3 = D \neq 0$$

ce qui prouve que la droite $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$ et admet ainsi un unique point en commun avec $\mathcal{P}$.

2 Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires, tout vecteur $\vec{\omega}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

En effet, en notant $\vec{u}\left|\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right.$, $\vec{v}\left|\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right.$, $\vec{w}\left|\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right.$ et $\vec{\omega}\left|\begin{smallmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{smallmatrix}\right.$, cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2 \\ a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z = d_3 \end{cases}$$

Or le déterminant de ce système est aussi le déterminant des trois vecteurs non coplanaires $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Il est donc non nul. Le système admet donc une unique solution, c'est–à–dire qu'il existe un unique triplet $(x,\ y,\ z)$ tel que $\vec{\omega} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

3. Un *repère cartésien* est un quadruplet $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où Ω est un point et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires. Tout point M de l'espace admet donc, dans un tel repère cartésien, un unique système de *coordonnées cartésiennes*, c'est–à–dire un unique triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Remarque de même qu'en géométrie plane, on pourra utiliser les coordonnées cartésiennes dans un repère quelconque lorsque le problème posé ne comporte que des propriétés affines (alignement, parallélisme, coplanéarité, milieu...).

En revanche l'utilisation d'un repère orthonormé s'impose dès qu'il s'agit de géométrie euclidienne, c'est-à-dire que l'on parle de produit scalaire, de distance, d'angles...

4.4 Projections orthogonales, distance à une droite ou à un plan

Proposition 21

Soit $\mathcal{X}$ une droite ou un plan. Pour tout point A de l'espace il existe un unique point A' de $\mathcal{X}$ tel que $\overrightarrow{AA'} \perp \mathcal{X}$.

Ce point est appelé *projeté (ou projection) orthogonal(e)* de A sur $\mathcal{X}$.

C'est le point de $\mathcal{X}$ le plus proche de A. La distance $d(A, A')$ est appelée *distance de A à $\mathcal{X}$*.

émonstration Si $\mathcal{X}$ est une droite $\mathcal{D}$, on choisit un plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ Si c'est un plan $\mathcal{P}$, on choisit une droite $\mathcal{D}$ normale à $\mathcal{P}$.

Prenons alors une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ telle que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base de $\mathcal{P}$ et $\vec{w}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Soit Ω le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{P}$ Si A est un point de l'espace, notons (x, y, z) ses coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

- Un point $A' = \Omega + \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$ de $\mathcal{P}$ est tel que $\overrightarrow{AA'}$ soit orthogonal à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'}.\vec{u} = \overrightarrow{AA'}.\vec{v} = 0$. C'est donc le cas si, et seulement si, $\alpha = x$ et $\beta = y$. D'où l'existence et l'unicité de la projection sur $\mathcal{P}$
- Un point $A' = \Omega + \gamma\,\vec{w}$ de $\mathcal{D}$ est tel que $\overrightarrow{AA'}$ soit orthogonal à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'}.\vec{w} = 0$. C'est donc le cas si, et seulement si, $\gamma = z$. D'où l'existence et l'unicité de la projection sur $\mathcal{D}$.

Enfin, si M est un point quelconque de $\mathcal{X}$, on a :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{A'M}$$

Donc :

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AA'}\|^2 + \|\overrightarrow{A'M}\|^2 \geqslant \|\overrightarrow{AA'}\|^2$$

ce qui prouve que A' est le point de $\mathcal{X}$ le plus proche de A □

Remarque Pour $\vec{u}_1 \neq 0$, on peut voir l'application $\vec{u} \mapsto \vec{u}_1 \wedge \vec{u}$ comme la composée de :

- la projection de $\vec{u}$ sur le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\vec{u}_1$,
- une rotation dans $\mathcal{P}$ d'angle droit,
- une homothétie de rapport $\|\vec{u}_1\|$.

Plan défini par un point et deux vecteurs

Soit $\mathcal{P}$ un plan défini par un point A et deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Si l'on note H le projeté orthogonal d'un point $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right.$ sur $\mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{HM} = \lambda\, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ et :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$$

ce qui donne :

$$\overrightarrow{AM}.(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = \overrightarrow{HM}.(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = \lambda \left\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\right\|^2.$$

Comme $d(M,\mathcal{P}) = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| = |\lambda| \left\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\right\|$, on en déduit :

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2).\overrightarrow{AM}\right|}{\left\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\right\|} = \frac{\left|\mathrm{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{AM})\right|}{\left\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\right\|}.}$$

Plan défini par une équation

La distance d'un point $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right.$ au plan $\mathcal{P}$ dont l'équation cartésienne dans un repère orthonormé est $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ vaut :

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = \frac{|a\,x + b\,y + c\,z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

émonstration En reprenant les notations ci–dessus, si $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix} \right.$ et $A \left| \begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix} \right.$

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|\alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0) + \gamma\,(z - z_0)\right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Comme toute équation de $\mathcal{P}$ est proportionnelle à $\alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0) + \gamma\,(z - z_0) = 0$, et que la quantité :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|\alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0) + \gamma\,(z - z_0)\right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

est invariante par multiplication de (α, β, γ) par un reel non nul, on en déduit le résultat □

Définition 12

On appelle *équation normale d'un plan $\mathcal{P}$* toute équation dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ du type :

$$a\,x + b\,y + c\,z = p \qquad \text{avec} \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Le vecteur de composantes (a, b, c) est alors un vecteur unitaire normal au plan $\mathcal{P}$.

Remarques

- Une telle équation est unique au signe près puisqu'il n'y a que deux vecteurs unitaires normaux à $\mathcal{P}$.
- Le réel $|p|$ est la distance du centre du repère $\mathcal{R}$ au plan $\mathcal{P}$.

Droite définie par un point et un vecteur

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$. Si l'on note H le projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ d'un point M de E, on a :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}.$$

Comme $\vec{u}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux, on a :

$$\left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| \left\|\vec{u}\right\| = d(M, \mathcal{D}) \left\|\vec{u}\right\|$$

ce qui donne :

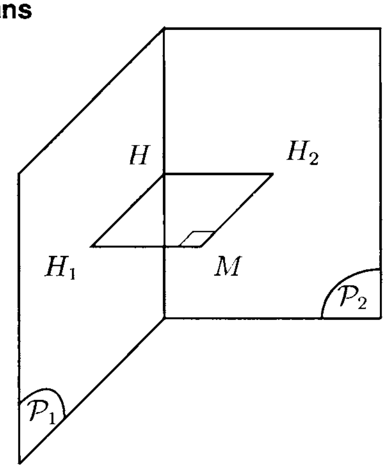
$$\boxed{d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}.}$$

Droite définie comme intersection de deux plans

Soit $\mathcal{D}$ une droite définie comme intersection de deux plans non parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :

$$P_1(M) = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0$$

$$P_2(M) = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0.$$



- Si les deux plans sont perpendiculaires, c'est-à-dire si :

  $$a_1\,a_2 + b_1\,b_2 + c_1\,c_2 = 0.$$

  en désignant par H_1 et H_2 les projections orthogonales d'un point M respectivement sur $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et par H la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned} d(M,\mathcal{D}) &= \|\overrightarrow{MH}\| \\ &= \sqrt{\|\overrightarrow{MH_1}\|^2 + \|\overrightarrow{MH_2}\|^2} \\ &= \sqrt{d(M,\mathcal{P}_1)^2 + d(M,\mathcal{P}_2)^2}. \end{aligned}$$

- Dans le cas général, on garde l'un des deux plans, par exemple $\mathcal{P}_1$, et l'on remplace l'autre par le plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$, ce qui permet de se ramener au cas précédent.

  L'équation de $\mathcal{P}$ peut s'écrire, d'après la proposition 18 de la page 127, comme une combinaison linéaire $\mu P_2(M) + \lambda P_1(M) = 0$ des équations de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

  On doit avoir $\mu \neq 0$ puisque ce plan est distinct de $\mathcal{P}_1$, et donc on peut choisir $\mu = 1$. Il suffit d'ajuster λ pour que ce plan soit orthogonal à $\mathcal{P}_1$, ce qui conduit à l'équation :

$$a_1\,a_2 + b_1\,b_2 + c_1\,c_2 + \lambda\,(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = 0$$

  qui admet toujours une solution puisque $(a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$.

4.5 Perpendiculaire commune

Attention Contrairement à ce qui se passe en géométrie plane deux droites non parallèles de l'espace peuvent être disjointes.

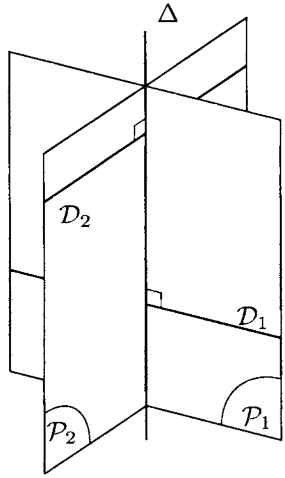
Définition 13

- Deux droites sont *orthogonales* si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- Elles sont *perpendiculaires* si elles sont orthogonales et secantes.

Proposition 22

Étant données deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ non parallèles, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Cette droite est appelée *perpendiculaire commune* à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.



Démons ration Posons $\mathcal{D}_1 = (A_1, \vec{u}_1)$ et $\mathcal{D}_2 = (A_2, \vec{u}_2)$.

- Une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est dirigée par $\vec{w} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ et contient un point de $\mathcal{D}_1$. Elle doit donc être contenue dans le plan $\mathcal{P}_1 = (A_1, \vec{u}_1, \vec{w})$.

  De même, elle doit donc être contenue dans le plan $\mathcal{P}_2 = (A_2, \vec{u}_2, \vec{w})$.

  Si ces deux plans étaient parallèles, un vecteur non nul normal à chacun d'eux serait orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ donc colinéaire à $\vec{w}$. Comme il serait aussi orthogonal à $\vec{w}$, il serait nul, ce qui est exclu

  Donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite, d'où l'unicité de Δ
- Réciproquement, l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est une droite Δ qui est dirigée par $\vec{w}$, puisque si A appartient à Δ, alors $A + \vec{w}$ appartient à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$.

  Elle est donc orthogonale à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Comme Δ et $\mathcal{D}_1$ sont deux droites orthogonales du plan $\mathcal{P}_1$, elles se coupent en un point. De même pour $\mathcal{D}_2$ □

Proposition 23

Soit Δ la perpendiculaire commune à deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ non parallèles

Si l'on désigne par H_1 et H_2 les intersections de Δ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, on a pour tout M_1 de $\mathcal{D}_1$ et M_2 de $\mathcal{D}_2$:

$$d(H_1, H_2) \leqslant d(M_1, M_2)$$

avec égalité si, et seulement si, $M_1 = H_1$ et $M_2 = H_2$.

La distance $d(H_1, H_2)$ s'appelle la *distance* de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_2$ et se note $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

Démonstration On a l'égalité :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1H_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2M_2}.$$

Comme $\overrightarrow{M_1H_1}$ et $\overrightarrow{H_2M_2}$, dans les directions de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{H_1H_2}$ le théorème de Pythagore qui s'écrit :

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2 = \|\overrightarrow{M_1H_1} + \overrightarrow{H_2M_2}\|^2 + \|\overrightarrow{H_1H_2}\|^2$$

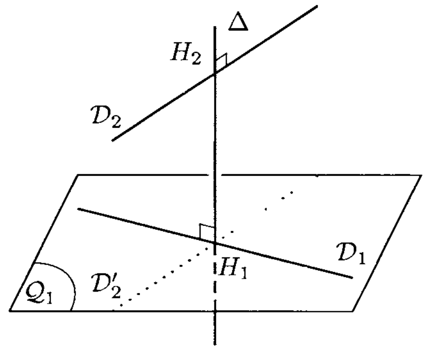
fournit l'inégalité désirée.

L'égalité est alors evidemment équivalente à :

$$\overrightarrow{M_1H_1} + \overrightarrow{H_2M_2} = 0$$

et les vecteurs $\overrightarrow{M_1H_1}$ et $\overrightarrow{H_2M_2}$ etant dans les directions des deux droites non parallèles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, cela n'est possible que lorsqu'ils sont nuls □

Remarques



Posons $\mathcal{D}_1 = (A_1, \vec{u}_1)$ et $\mathcal{D}_2 = (A_2, \vec{u}_2)$.

Soit $\mathcal{Q}_1$ le plan contenant $\mathcal{D}_1$ et le vecteur $\vec{u}_2$, c'est–à–dire le plan $(A_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

La droite $\mathcal{D}_2$ est parallèle à $\mathcal{Q}_1$, ce qui permet d'en déduire les points suivants.

- La projection de $\mathcal{D}_2$ sur $\mathcal{Q}_1$ est une droite $\mathcal{D}_2'$ parallèle à $\mathcal{D}_2$. Le point H_1 est alors le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2'$.
- La distance de H_2 à H_1 est aussi la distance à $\mathcal{Q}_1$ de n'importe quel point de $\mathcal{D}_2$, et en particulier de A_2.
  On a donc :
  $$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{\left|\mathrm{Det}(\vec{u}_1, \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u}_2)\right|}{\left\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\right\|}.$$
- Les droites $(A_1, \vec{u}_1)$ et $(A_2, \vec{u}_2)$ sont donc coplanaires si et seulement si, $\mathrm{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$.

Exemples

1. Prenons $A_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $A_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\vec{u}_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Avec les notations précédentes, le plan $\mathcal{Q}_1$ défini ci–dessus passe par A_1 et il est normal au vecteur $\vec{w} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$. Il admet donc pour équation $y - z = 0$.

On voit donc que le point A_2 appartient à $\mathcal{Q}_1$; donc $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 0$. La perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est donc la droite passant par $H \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ (intersection de $\mathcal{D}_1$ et D_2) et dirigé par $\vec{w}$.

2. Soient $\mathcal{D}_1$ la droite d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par O et dirigée par $\vec{u}_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$.

- La droite $\mathcal{D}_1$ est donnée par l'intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. On en obtient donc un vecteur directeur $\vec{u}_1$ en effectuant le produit vectoriel de vecteurs normaux à ces deux plans, soit $\vec{u}\left|\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{array}{c}2\\3\\-1\end{array}\right.$. On obtient $\vec{u}_1\left|\begin{array}{c}-4\\3\\1\end{array}\right.$.

  La perpendiculaire commune est donc dirigée par $\vec{w} = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1\left|\begin{array}{c}1\\-1\\7\end{array}\right.$.

- On peut obtenir une équation du plan $\mathcal{P}_1$ contenant $\mathcal{D}_1$ et $\vec{w}$ par combinaison linéaire des équations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, soit :

$$(\lambda+2)\,x + (\lambda+3)\,y + (\lambda-1)\,z = 1.$$

  On choisit λ de telle sorte que le vecteur $\vec{w}$ appartienne à la direction de ce plan c'est–à–dire $(\lambda+2)-(\lambda+3)+7(\lambda-1)=0$ On obtient $\lambda = 8/7$ ce qui donne pour équation de $\mathcal{P}_1$:

$$22x + 29y + z = 7.$$

- Comme il appartient à $\mathcal{D}_2$, le point H_2, intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{D}_2$ a pour coordonnees $(\alpha, \alpha, 0)$. En reportant dans l'équation de $\mathcal{P}_2$, on trouve $\alpha = 7/51$.

  La perpendiculaire commune Δ est donc la droite passant par H_2 et dirigée par $\vec{w}$.

- Pour trouver la distance $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, il suffit de trouver le point d'intersection de Δ avec $\mathcal{D}_1$, c'est–à–dire le point $H_2 + \lambda\,\vec{w}$ qui est dans $\mathcal{P}$ On obtient l'équation :

$$\left(\frac{7}{51}+\lambda\right) + \left(\frac{7}{51}-\lambda\right) + 7\lambda = 0$$

  ce qui donne $\lambda = -2/51$. La distance est donc $|\lambda|\,\|\vec{w}\|$, soit :

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{2}{\sqrt{51}}.$$

4.6 Angles

Angle de deux droites

La mesure de l'angle de deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est le réel $\theta \in [0, \pi/2]$ défini par :

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|} \qquad \text{ou} \qquad \sin\theta = \frac{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}{\|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|}$$

où $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont des vecteurs directeurs respectivement de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Angle de deux plans

La mesure de l'angle de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est la mesure de l angle de leurs normales. C'est donc le réel $\theta \in [0, \pi/2]$ défini par :

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|} \qquad \text{ou} \qquad \sin\theta = \frac{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}{\|\vec{u}_1\|\,\|\vec{u}_2\|}$$

où $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont des vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Les plans sont perpendiculaires si, et seulement si, la mesure de leur angle est $\pi/2$.

Angle d'une droite et d'un plan

La mesure de l'angle d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un plan $\mathcal{P}$ est le complément à $\pi/2$ de la mesure de l'angle de $\mathcal{D}$ et d'une droite normale à $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{D}$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}$, c est donc aussi la mesure de l angle de $\mathcal{D}$ avec sa projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

5. Sphères

5.1 Généralités

Définition 14

On appelle *sphère* de centre A et de rayon $R > 0$ l'ensemble :

$$\{M \in E \mid \|\overrightarrow{AM}\| = R\}.$$

Remarque Comme pour les cercles dans le plan il y a unicité du rayon et du centre : le rayon R d'une sphère $\mathcal{S}$ est la moitié de la distance maximale entre deux points de $\mathcal{S}$, et le centre est le milieu de tout diamètre, c'est–à–dire de tout segment $[MM']$, où M et M' sont deux points de $\mathcal{S}$ tels que $d(M\ M') = 2R$.

Équations cartésiennes dans un repère orthonormé

- La sphère de rayon R dont le centre a pour coordonnées (a, b, c) admet pour équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

ou encore :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

avec $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

- L'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, qui s'écrit $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + d - a^2 - b^2 - c^2 = 0$, admet des solutions si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 - d \geqslant 0$. L'ensemble des points vérifiant l'équation est alors :
  - réduit au point de coordonnées (a, b, c) si $d = a^2 + b^2 + c^2$,
  - la sphère ayant pour centre le point de coordonnées (a, b, c) et pour rayon $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ si $d < a^2 + b^2 + c^2$

Remarque Comme dans le plan, on définit la *puissance* d'un point M par rapport à la sphère $\mathcal{S}$ de centre A et de rayon R par $p = d(A, M)^2 - R^2$.

Si dans un repère orthonormé, $\mathcal{S}$ admet pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a\,x - 2b\,y - 2c\,z + d = 0,$$

la puissance d'un point $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$ est $p = x^2 + y^2 + z^2 - 2a\,x - 2b\,y - 2c\,z + d$.

Représentation paramétrique dans un repère orthonormé

Les expressions des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques donnent immédiatement un paramétrage de la sphère de centre O de rayon R :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{array} \right. \qquad \text{avec} \qquad \theta \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad \varphi \in]-\pi, \pi].$$

5.2 Plan et sphère

Proposition 24

Étant donnés une sphère $\mathcal{S}$ de centre A de rayon R et un plan $\mathcal{P}$:

- si $d(A, \mathcal{P}) > R$, alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \varnothing$,
- si $d(A, \mathcal{P}) = R$, alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \{H\}$,
- si $d(A, \mathcal{P}) < R$, alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2(A, \mathcal{P})}$,

où H est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{P}$

émonst ation Si M est un point de $\mathcal{P}$, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$d^2(A,M) = d^2(A,H) + d^2(H,M).$$

Donc M appartient à la sphère si, et seulement si,

$$d^2(H,M) = R^2 - d^2(A,\mathcal{P})$$

ce qui prouve les résultats □

Remarque Si A appartient à $\mathcal{P}$, le cercle intersection a même rayon et même centre que la sphère. C'est ce que l'on appelle un *grand cercle* de $\mathcal{S}$.

5.3 Droite et sphère

Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{S}$ une sphère de centre A. La détermination de l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ se ramène, dans un plan contenant A et $\mathcal{D}$, à l'intersection de $\mathcal{D}$ avec un grand cercle de $\mathcal{S}$. On en déduit les résultats suivants :

Proposition 25

Étant donnés une sphère $\mathcal{S}$ de centre A de rayon R et une droite $\mathcal{D}$:

- si $d(A,\mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{S} = \varnothing$,
- si $d(A,\mathcal{D}) = R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{S} = \{H\}$, et on dit que $\mathcal{D}$ est *tangente* à $\mathcal{S}$
- si $d(A,\mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ est réduit aux deux points de $\mathcal{D}$ à distance $\sqrt{R^2 - d^2(A,\mathcal{D})}$ de H,

où H est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}$.

Méthode Dans la pratique, pour trouver les points d'intersection, il est plus judicieux de partir d'une représentation paramétrique de la droite Il suffit alors de reporter dans l'équation de la sphère pour trouver les valeurs du paramètre.

Remarque Soient M un point et $\mathcal{D}$ une droite qui passe par M et qui rencontre la sphère $\mathcal{S}$ en deux points P et Q.

La quantité $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$ est la puissance de M par rapport à n'importe quel cercle contenant P et Q ; en particulier avec un grand cercle de $\mathcal{S}$. On a donc :

$$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = d(A,M)^2 - R^2$$

avec A et R respectivement les centre et rayon de $\mathcal{S}$.

La puissance du point M par rapport à une sphère est donc égal au produit $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$. Pour la même raison, elle est aussi égale à MT^2, où T est le point d'intersection de toute droite passant par M et tangente à $\mathcal{S}$.

5.4 Intersection de sphères

Étant données deux sphères non concentriques $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1z + d_1 = 0$$

et :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2z + d_2 = 0$$

la résolution du problème d'intersection de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ mène au système équivalent :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1z + d_1 = 0 \\ 2(a_2 - a_1)\,x + 2(b_2 - b_1)\,y + 2(c_2 - c_1)\,z + d_1 - d_2 = 0. \end{cases}$$

Les deux sphères n'étant pas concentriques, on a :

$$(a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1) \neq (0, 0, 0)$$

et la seconde équation est l'équation d'un plan $\mathcal{P}$. Donc :

$$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{P} = \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{P}.$$

L'intersection des sphères $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est donc un cercle, un point ou l'ensemble vide.

EXERCICES

1. Soient x, y et z trois vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension 3
Montrer que :

$$x \wedge (y \wedge z) + z \wedge (x \wedge y) + y \wedge (z \wedge x) = 0.$$

2. L'espace est rapporté au repère orthonormé $Oxyz$.

a) Déterminer la perpendiculaire commune et la distance des droites :

$$\mathcal{D}_1 = A_1 + \mathbb{R}\vec{u_1} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = A_2 + \mathbb{R}\vec{u_2}$$

où A_1 et A_2 sont de composantes $(1,0,0)$ et $(0,0,0)$ et $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ de composantes $(1,-1,1)$ et $(1,1,1)$.

b) Déterminer la perpendiculaire commune et la distance des droites :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x+y+z &= 4 \\ x-y+z &= 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x+y-z &= 4 \\ x+y+z &= -2. \end{cases}$$

3. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (S) des points équidistants de deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ non parallèles.

4. Soit $ABCD$ un tétraèdre dont cinq des côtés sont de longueur inférieure ou égale à 1. Montrer que le volume V de $ABCD$ vérifie :

$$V \leqslant \frac{1}{8}.$$

5 Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note A', B', C' et D' les projections orthogonales de A, B, C et D sur les plans BCD, CDA, DAB et ABC

a) Montrer :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

Prouver alors que $AB \perp CD$ et $AC \perp BD$ impliquent $AD \perp BC$.

b) Montrer que AA', BB', CC' et DD' sont concourantes si, et seulement si, on a $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ et $AD \perp BC$. On dit alors que $ABCD$ est un tétraèdre orthocentrique ; le point de concours H de AA', BB', CC' et DD' s'appelle l'orthocentre du tétraèdre.

c) Montrer qu'un tétraèdre régulier, c'est-à-dire dont les côtés ont même longueur, est orthocentrique.

6. Soient $A.B.C, A', B'.C'$ six points de l'espace affine euclidien ainsi que $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ six scalaires tels que $\alpha + \beta + \gamma$ et $\alpha' + \beta' + \gamma'$ soient non nuls Déterminer l'ensemble des points M tels que les vecteurs :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} \quad \text{et} \quad \alpha'\overrightarrow{MA'} + \beta'\overrightarrow{MB'} + \gamma'\overrightarrow{MC'}$$

soient orthogonaux.

7. Montrer que le centre d'un cercle de rayon r « posé » dans le coin $(\mathbb{R}\ \ )^3$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{2}r$.

8. **a)** Soit $(P, Q. R)$ un triplet de plans tel que P et Q sont parallèles Que peut-on conclure au sujet de R s'il est parallèle à P ? sécant à P ? perpendiculaire à P ?

b) On suppose désormais P et Q perpendiculaires. Que peut-on conclure au sujet de R s'il est parallèle à P ?

9. Soit $ABCD$ un tétraèdre formé de points non coplanaires. Un plan P coupe les segments $[AC]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[AD]$ en respectivement E, F, G et H. On suppose (AB) et (CD) parallèles à P, montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

10. Démontrer qu'il n'existe aucune droite incluse dans l ensemble P des points de l espace défini dans un repère quelconque par l'équation $x^2 + y^2 = 2z$.

11. Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un triplet de vecteurs unitaires de l'espace, et (a, b, c) le triplets de leurs produits scalaire deux à deux, de la forme $a = \vec{v}.\vec{w} = \cos\alpha$, $b = \vec{w}.\vec{u} = \cos\beta$ et $c = \vec{u}.\vec{v} = \cos\gamma$. Peut-on calculer le déterminant d de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en fonction de (a, b, c) ? Donner la valeur du carré de ce déterminant.

12. Soit λ un réel, $\vec{\imath}$ un vecteur et (O, P, Q, R, S) un quintuplet de points de l'espace liés par la relation $\overrightarrow{PQ} = \lambda\,\overrightarrow{RS}$. Que peut-on dire des produits scalaires de $\vec{\imath}$ des vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OS}$? Que peut-on en déduire des coordonnées des points (P, Q, R, S) dans un repère orthonormé ?

13. Montrer que deux plans strictement parallèles coupant deux droites sécantes strictement parallèles définissent un parallelogramme

14. Soit $(D\ D')$ un couple de droites orientées non coplanaires, A, B, C (respectivement A', B', C') trois points de D (respectivement D') deux à deux distincts et tels qu'il existe un réel k (nécessairement non nul) vérifiant les égalités :

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{B'C'}.$$

Monter que les trois droites AA', BB' et CC' sont parallèles à un même plan

15. Soit $OABC$ une pyramide trirectangle définie par les coordonnées respectives $(0,0,0)$, $(2a,0,0)$, $(0,2b,0)$ et $(0,0,2c)$ de ses sommets dans un repère orthonormé. On suppose $abc \neq 0$.

a) Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère contenant les quatre sommets, ainsi que le projeté orthogonal ω de Ω sur le plan ABC.

b) Que peut-on dire du projeté orthogonal H de O sur le plan ABC ?

Une telle pyramide est un cas particulier de tétraèdre orthocentrique (voir l'exercice 5).

16 Une pyramide $OABC$ est formée de quatre triangles dont trois sont rectangles en O. On note (a,b,c) les longueurs OA, OB et OC et (α,β,γ) les longueurs BC, CA et AB. L'objet de cet exercice et des deux suivants est de donner de nouvelles démonstrations du théorème de Descartes (exemple 3 de la page 119), montrant ainsi la très grande variété d'outils utilisables en géométrie.

a) Démontrer à l'aide des produits scalaire et vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et de l'égalité $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ que l'aire S du triangle ABC vérifie les égalités :

$$\begin{aligned} 16\,S^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)\,(-\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha-\beta+\gamma)\,(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= 2(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2) - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4. \end{aligned}$$

b) Calculer S en fonction de (a,b,c) et retrouver ainsi l'egalité :

$$\text{aire}\,(ABC)^2 = \text{aire}\,(OBC)^2 + \text{aire}\,(OCA)^2 + \text{aire}\,(OAB)^2.$$

17. Retrouver le théorème de Descartes en introduisant le projeté orthogonal commun H de O et de A sur la droite BC.

18. Retrouver le théorème de Descartes en introduisant une équation du plan ABC dans un repère orthonormé convenable.

19. Un triangle ABC étant donné, étudier l'existence de points O tels que les trois droites OA, OB et OC soient deux à deux perpendiculaires.

20. **a)** Soit $(\vec{u}.\vec{v},\vec{w})$ un triplet de vecteurs unitaires de l'espace, et (α,β,γ) le triplet des angles respectifs $(\vec{v},\vec{w})$, $(\vec{w},\vec{u})$ et $(\vec{u},\vec{v})$. Démontrer, à l'aide des projections orthogonales de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sur le plan orthogonal à $\vec{u}$, l'inégalité $\alpha \leqslant \beta+\gamma$.

b) Démontrer que cette inégalité est stricte si le déterminant des trois vecteurs est non nul.

c) Démontrer l'inégalité $\alpha+\beta+\gamma \leqslant 2\pi$.

Chapitre 4

Fonctions usuelles

Nous utilisons dans ce chapitre les propriétés de continuité et de dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Ces propriétés vues en terminale, seront reprises en détail dans les chapitres 11 et 12.

En particulier le résultat suivant sera démontré page 363 :

Proposition 1

Si f est une application dérivable sur un intervalle I qui possède une dérivée strictement positive sur I (respectivement strictement négative sur I), alors :

- elle est bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$,
- sa réciproque g est dérivable sur J,
- pour $a \in I$ et $b = f(a)$, on a $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Remarque La dérivée de g peut facilement être retrouvée grâce à la formule donnant la dérivée d'une fonction composée : comme $g \circ f = \mathrm{Id}$, on a $g'\big(f(a)\big)\, f'(a) = \mathrm{Id}'(a)$, c'est-à-dire $g'(b)\, f'(a) = 1$.

1. Fonctions logarithmes et exponentielles

1.1 Logarithme népérien

Définition 1

La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1. Elle est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\ln x = \int_1^x \frac{du}{u}.$$

Remarques

- On sait que toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I, ce qui prouve l'existence de la fonction logarithme.
- On sait d'autre part que deux primitives sur I d'une même fonction continue diffèrent d'une constante.

Ces résultats seront démontrés dans le chapitre 15.

Proposition 2

La fonction logarithme vérifie :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \ , \ \ln(x\,y) = \ln x + \ln y.$$

émonstratio Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $u_y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \ln(xy) \end{array}$ est dérivable et, par la formule donnant la dérivée d'une fonction composée :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,,\ u_y'(x) = \frac{y}{x\,y} = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions u_y et $\ln$ ayant même dérivée sur l'intervalle $]0,+\infty[$, leur différence $u_y - \ln$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme pour $x = 1$, elle vaut $\ln y$, on en déduit :

$$\ln(x\,y) = \ln x + \ln y.$$

□

Conséquences De la proposition précédente, on déduit :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall n \in \mathbb{Z}\,,\ \ln(x^n) = n \ln x\,.$

Proposition 3

La fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de $]\,0,+\infty\,[$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty.$$

é onstration Elle est strictement croissante sur l'intervalle $]\,0,+\infty\,[$ puisque sa dérivée est strictement positive Par conséquent :

$$\ln 2 > \ln 1 = 0,$$

et la suite :

$$\left(\ln(2^n)\right)_{n\in\mathbb{N}} = (n\,\ln 2)_{n\in\mathbb{N}}$$

tend vers $+\infty$. Donc la fonction logarithme népérien n'est pas majorée, et comme elle est croissante sur $]\,0,+\infty\,[$, on en deduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

On a alors $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1/x) = +\infty$, c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty.$$

La fonction logarithme népérien est donc une bijection strictement croissante de $]\,0,+\infty\,[$ sur $\mathbb{R}$.

□

Remarque On dit que le logarithme népérien est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

1.2 Exponentielle

Définition 2

La fonction *exponentielle*, notée exp, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

C'est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa dérivée.

Démonstration

- C'est la réciproque de la fonction logarithme népérien qui est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- Elle est croissante et, comme son image est $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty.$$

- La fonction logarithme néperien est derivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est strictement positive Sa fonction réciproque, l'exponentielle, est donc dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$ avec :

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \exp x.$$

□

Proposition 4

1. $\exp 0 = 1$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp x \, \exp y$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}\cdot$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n\,x) = (\exp x)^n$.

Démonstration Comme la fonction logarithme est bijective, il suffit de montrer, pour chaque égalité, que les deux membres (strictement positifs) ont même logarithme, ce qui est une conséquence des propriétés correspondantes de la fonction $\ln$. □

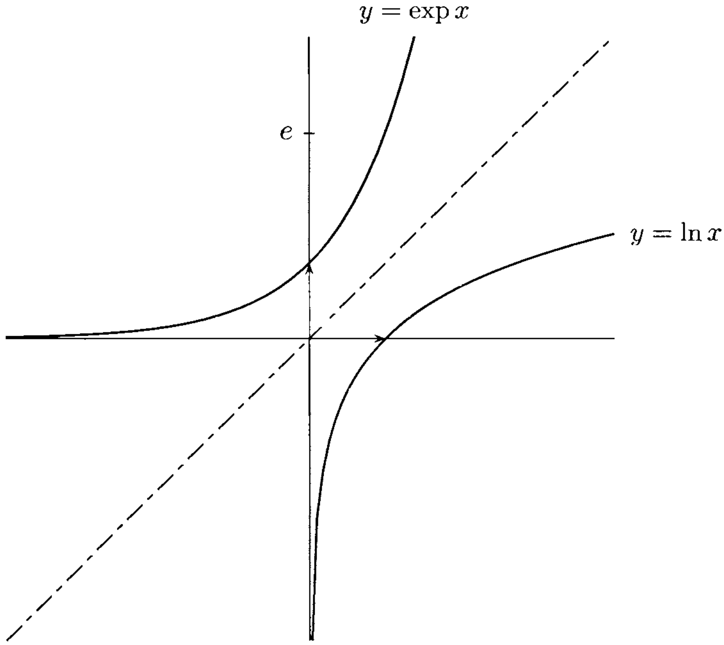
Remarque L'exponentielle étant la réciproque d'un isomorphisme de groupes, on en déduit que c'est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui permet de retrouver les résultats précédents.

1.3 Representation graphique des fonctions logarithme népérien et exponentielle

x	0	1	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

On note $e = \exp 1$ l'unique réel dont le logarithme vaut 1.



1.4 Logarithmes et exponentielles de base quelconque

Définition 3

Si a est un réel strictement positif et différent de 1, on appelle *logarithme de base* a, l'application, notée $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\cdot$$

Exemples

1. Si $a = 10$, on obtient le *logarithme décimal* que l'on note aussi $\log$ et qui, historiquement, a joué un rôle important car il a permis de faire de nombreux calculs avant l'avènement des ordinateurs et des calculatrices. Il est toujours utilisé en physique (décibels) et en chimie (pH).
2. Si n est un entier strictement positif, le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à la partie entière de $1 + \log n$.
3. Si $a = 2$, on obtient le logarithme binaire utilisé en informatique.

Propriétés

1. $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+ , \ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* , \ \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
4. $\forall x > 0 , \ \forall n \in \mathbb{Z} , \ \log_a(x^n) = n \log_a x$.

Définition 4

Si a est un réel strictement positif et différent de 1, la fonction logarithme de base a est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On l'appelle *exponentielle de base a*, et on la note $\exp_a$.

Propriétés

1. $\exp_a 0 = 1$ et $\exp_a 1 = a$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 , \ \exp_a(x + y) = \exp_a x \exp_a y$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 , \ \exp_a(x - y) = \dfrac{\exp_a x}{\exp_a y}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} . \ \forall n \in \mathbb{Z} . \ \exp_a(nx) = (\exp_a x)^n$.

Remarques

- Si $a = e$, la fonction $\exp_a$ est la fonction exponentielle déjà vue précédemment.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, si l'on pose $y = \exp_a x$, on a :

$$x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

  et donc $\ln y = x \ln a$, ce qui entraîne :

$$\boxed{\exp_a x = \exp(x \ln a).}$$

Notation Soit a un réel strictement positif différent de 1. On a $\exp_a 1 = a$, donc, d'après la proposition 4 de la page 148 :

$$\forall n \in \mathbb{Z} , \ \exp_a n = a^n.$$

On étend cette notation a^x à tout $\mathbb{R}$, en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} , \ a^x = \exp_a x = \exp(x \ln a).$$

On note ainsi en particulier $\exp x = e^x$.

En posant $1^x = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ a^x = \exp(x \ln a).$$

2. Fonctions puissances

2.1 Définition

Définition 5

On appelle *fonction puissance* toute fonction :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & x^a = \exp(a \ln x) \end{array}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

Cas particuliers La fonction φ_0 est constante et égale à 1, et la fonction φ_1 est l'identité de $\mathbb{R}_+^*$.

Les propriétés de la fonction exponentielle nous donnent les résultats suivants :

Proposition 5

Pour a et b réels, $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$x^a\, y^a = (x\, y)^a \qquad x^a\, x^b = x^{a+b} \qquad (x^a)^b = x^{ab}$$

$$1^a = 1 \qquad x^0 = 1 \qquad \ln(x^a) = a \ln x$$

La relation $\varphi_a(x) = \exp(a \ln x)$ prouve que φ_a et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{a}{x} x^a = a\, x^{a-1}.}$$

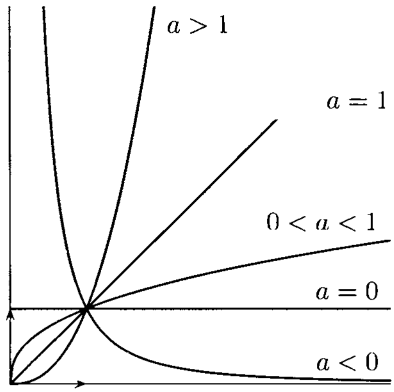
On a ainsi $\varphi_a' = a\,\varphi_{a-1}$ ce qui donne les variations de φ_a en fonction du signe de a On a immédiatement les limites aux bornes. D'où les variations :

x	0		1		$+\infty$
φ_a $(a>0)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
φ_a $(a<0)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Si $a > 0$ on peut prolonger la fonction φ_a par continuité en 0 en posant $\varphi_a(0) = 0$. Comme $\dfrac{\varphi_a(x)}{x} = \varphi_{a-1}(x)$, on en déduit :

- si $a > 1$, la fonction φ_a est dérivable en 0 et $\varphi_a'(0) = 0$,
- si $0 < a < 1$, la fonction φ_a n'est pas dérivable en 0 mais son graphe possède une tangente verticale à l'origine,
- si $a = 1$, la fonction φ_a est l identité qui est donc dérivable en 0 de dérivée 1

Représentation graphique des fonctions puissances



Attention Pour dériver une expression de la forme $f(x) = u(x)^{v(x)}$, avec u et v dérivables il est indispensable de l'écrire au préalable :

$$f(x) = \exp\bigl(v(x) \ln u(x)\bigr)$$

puis d utiliser la formule de dérivation d'une fonction composée. On obtient ainsi :

$$f'(x) = f(x) \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right) .$$

2.2 Fonctions racines

- Soit n un entier naturel non nul. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est continue, strictement croissante prend la valeur 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
  C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Sa réciproque est appelée fonction *racine $n^{\text{ème}}$* : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$.
- De même, si n est un entier naturel impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui permet de définir la fonction racine $n^{\text{ème}}$ sur $\mathbb{R}$

- Si n est un entier naturel strictement positif, la restriction f_n de la fonction racine $n^{\text{ème}}$ à $\mathbb{R}_+^*$ est telle que :
$$\forall x > 0\,,\ f_n(x)^n = x \qquad \text{donc} \qquad \forall x > 0\,,\ f_n(x) = x^{1/n}.$$
Donc $f_n(x) = x^{1/n}$. C'est pourquoi $\sqrt[n]{y}$ se note aussi $y^{1/n}$ lorsque $y > 0$.
On a ainsi pour $x > 0$:
$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

- Lorsque n est impair, la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et l'on a $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$. Cela permet de vérifier qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et que l'on a toujours, pour $x < 0$:
$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Remarque On aurait pu naturellement aussi démontrer ces résultats en utilisant la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque, mais le résultat utilisant la notation puissance est plus facile à retenir.

2.3 Comparaison des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles

Proposition 6

Si a et b sont deux réels strictement positifs, on a :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x^a |\ln x|^b = 0.$$

émonstration

- Commençons par prouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

  Pour $t \geqslant 1$, on a $t \geqslant \sqrt{t}$, ce qui, pour $x \geqslant 1$, permet d'écrire :
$$0 \leqslant \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leqslant \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \leqslant 2\sqrt{x},$$
  et entraîne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

- Pour a et b strictement positifs quelconques et $x > 1$, on peut écrire :
$$\frac{(\ln x)^b}{x^a} = \left(\frac{\ln x}{x^{a/b}}\right)^b = \left(\frac{b}{a}\right)^b \left(\frac{\ln(x^{a/b})}{x^{a/b}}\right)^b$$
  ce qui donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$.

- En remplaçant x par $1/x$ et en faisant tendre x vers 0 on a donc $\lim\limits_{x\to 0} x^a |\ln x|^b = 0$ □

Proposition 7

Si a et b sont deux réels strictement positifs, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(a\,x)}{x^b} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^b \exp(a\,x) = 0.$$

Démonstratio Il suffit de remplacer x par $\exp x$ dans les relations précédentes □

Remarque Les propositions précédentes ne traitent que du cas $a > 0$ et $b > 0$, car :

- on s'y ramène facilement par passage à l'inverse si $a < 0$ et $b < 0$,
- dans les autres cas, il n'y a aucune indétermination pour le calcul de la limite.

3. Fonctions circulaires réciproques

Dans cette section, nous supposons connues les fonctions sinus, cosinus, tangente ($\tan x = \sin x/\cos x$) et cotangente ($\operatorname{cotan} x = \cos x/\sin x$) ainsi que leurs propriétés élémentaires.

3.1 Fonctions Arc sinus et Arc cosinus

Définition 6

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; elle définit donc une bijection de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$ dont la réciproque est appelée *Arc sinus* et notée arcsin.

La fonction Arc sinus est donc une bijection strictement croissante et continue de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est impaire, puisque c'est la réciproque d'une fonction impaire.

La définition de la fonction Arc sinus donne immédiatement :

Proposition 8

Pour $x \in [-1, 1]$, le réel $\arcsin x$ est l'unique élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut x.

Relations fondamentales Grâce à cette proposition, on retrouve très facilement des résultats conséquences de la définition.

- On a :
$$\forall x \in [-1, 1]\ ,\ \sin(\arcsin x) = x$$
puisque le sinus de "l'unique... dont le sinus vaut x' est évidemment x
- Si $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, "l'unique élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut $\sin\alpha$" est évidemment α, ce qui donne la relation :
$$\forall \alpha \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\ ,\ \arcsin(\sin\alpha) = \alpha.$$
- En revanche, cette dernière relation n'est pas valable (bien qu'ayant un sens) pour tout réel α. On a ainsi par exemple $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$.

Définition 7

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$; elle definit donc une bijection de l intervalle $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ dont la réciproque est appelée *Arc cosinus* et notée $\arccos$.

La fonction Arc cosinus est donc une bijection strictement décroissante et continue de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. De même que pour la fonction Arc sinus, on a immédiatement :

Proposition 9

Pour $x \in [-1, 1]$, le réel $\arccos x$ est l'unique élément de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut x.

Relations fondamentales Comme pour Arc sinus, on prouve :
$$\forall x \in [-1, 1]\ ,\ \cos(\arccos x) = x$$
$$\forall \alpha \in [0, \pi]\ ,\ \arccos(\cos\alpha) = \alpha$$
cette dernière relation étant fausse en général pour $\alpha \in \mathbb{R}$, puisque l'on a, par exemple, $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$.

Exemples

1. Simplifions :
$$y = \cos(\arcsin x) \qquad \text{avec} \qquad x \in [-1, 1].$$
Comme $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, son cosinus est positif et donc :
$$y = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

De même, on a :

$$\forall x \in [-1,1]\ ,\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

2. La relation $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ montre que les graphes :

$$\left\{(x, \sin x) \mid x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\right\} \qquad \text{et} \qquad \left\{(x, \cos x) \mid x \in [0, \pi]\right\}$$

sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$. Les graphes des fonctions Arc sinus et Arc cosinus sont les symétriques des précédents par rapport à la première bissectrice ; ils sont donc symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}$, ce qui donne :

$$\forall x \in [-1,1]\ ,\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\cdot$$

On peut vérifier cette relation par le calcul en posant $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ et en prouvant :

$$\sin y = x \qquad \text{et} \qquad y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\ ,$$

ou bien en vérifiant, grâce à la proposition suivante que la quantité $\arcsin x + \arccos x$ est constante.

Proposition 10

Les fonctions Arc sinus et Arc cosinus sont dérivables sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in\ ]-1,1[\ ,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\forall x \in\ ]-1,1[\ ,\ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$$

Démonstration

- La restriction à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction sinus est dérivable et :

$$\forall x \in\ ]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\ ,\ \sin'(x) = \cos x > 0.$$

Sa fonction réciproque Arc sinus est donc dérivable sur $]-1,1[$, et l'on a :

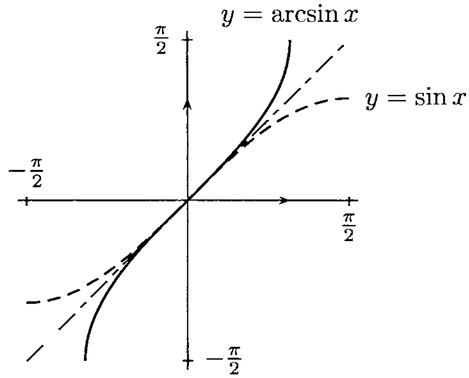
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot$$

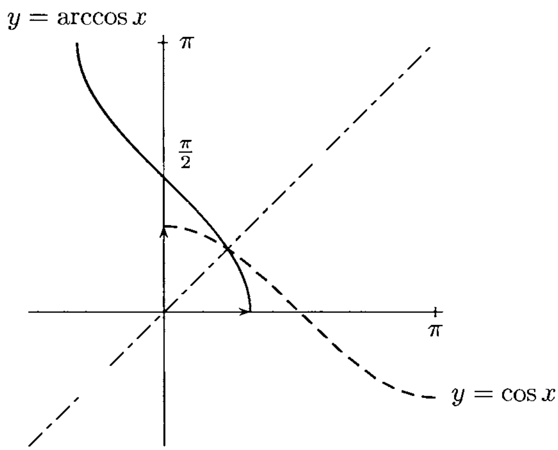
- Démonstration similaire pour la seconde relation □

Remarque Les fonctions Arc sinus et Arc cosinus ne sont pas dérivables en ± 1, car les dérivées de leurs fonctions réciproques s'annulent aux points correspondants. En ces points leurs représentations graphiques possèdent une tangente verticale.

Représentation graphique des fonctions Arc sinus et Arc cosinus

x	-1		0		1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
arccos	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0





3.2 Fonction Arc tangente

Définition 8

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; elle définit donc une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque est appelée *Arc tangente* et notée arctan.

La fonction Arc tangente est donc une bijection strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle est impaire, puisque c'est la réciproque d'une fonction impaire.

Proposition 11

Pour $x \in \mathbb{R}$ le réel $\arctan x$ est l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x.

Relations fondamentales

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \tan(\arctan x) = x$$

$$\forall \alpha \in \ ]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\ , \ \arctan(\tan \alpha) = \alpha$$

Comme pour les fonctions Arc sinus et Arc cosinus la seconde relation n'est vraie que dans l'intervalle indiqué.

Exemple La relation $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ montre que si $\alpha \in \ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin(\arctan x) = \tan(\arctan x) \ \cos(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Proposition 12

La fonction Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Demonstratio La restriction à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente est dérivable et :

$$\forall x \in \ ]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\ , \ \tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0.$$

Sa fonction reciproque Arc tangente est donc derivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

□

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0.$$

La fonction f est donc constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. En considérant ses valeurs en 1 et -1, on obtient :

$$\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall x < 0,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Méthode Ce résultat permet de ramener l'étude de la fonction Arc tangente à l'infini à son étude en 0.

Exemple

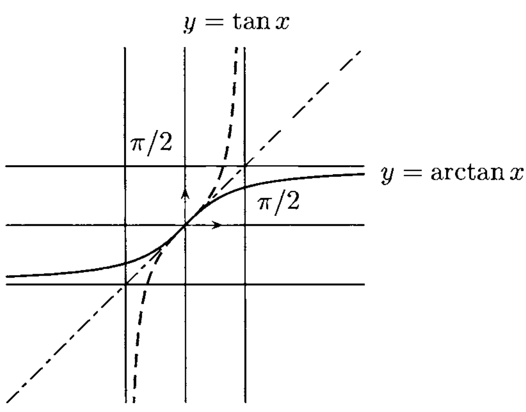
La fonction définie par $f(x) = x \arctan x$ admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ puisque pour $x > 0$, on a :

$$f(x) - \frac{\pi}{2}x = x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = -x \arctan \frac{1}{x}$$

et que $\displaystyle\lim_{u \to 0} \frac{\arctan u}{u} = \arctan'(0) = 1$.

Représentation graphique de la fonction Arc tangente

x	$-\infty$		0		$+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



4. Fonctions hyperboliques

4.1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Définition 9

Les fonctions *sinus hyperbolique* (notée sh ou sinh) et *cosinus hyperbolique* (notée ch ou cosh) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Proposition 13

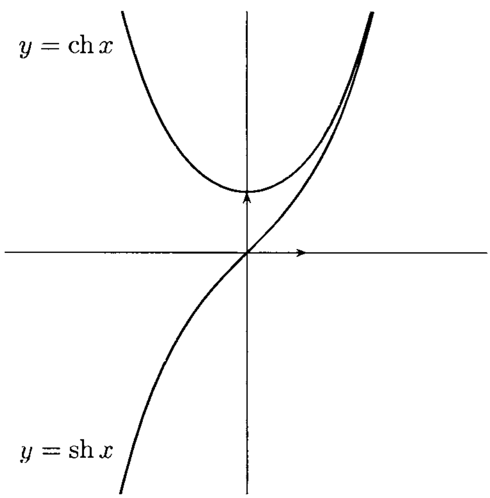
La fonction sinus hyperbolique est impaire, la fonction cosinus hyperbolique paire. Elles sont toutes deux dérivables avec :

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}.$$

Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus hyperboliques

La fonction cosinus hyperbolique étant strictement positive, on en déduit les variations de sinus hyperbolique puis de cosinus hyperbolique.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$
sh	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$



La continuité de ces fonctions ainsi que leurs variations montrent que :

- la fonction sinus hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,
- la fonction cosinus hyperbolique définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

4.2 Formules de base de la trigonométrie hyperbolique

Proposition 14

Pour tout réel t on a :

$$\exp t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

Remarques

- La relation $\exp t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t$ ainsi que les propriétés de parité des fonctions sinus et cosinus hyperboliques permettent de dire que ces fonctions sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle (voir page 818).
- De même que les fonctions sinus et cosinus permettent de paramétrer un cercle, la relation $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ peut s'interpréter géométriquement en considérant l'hyperbole équilatère H d'équation :

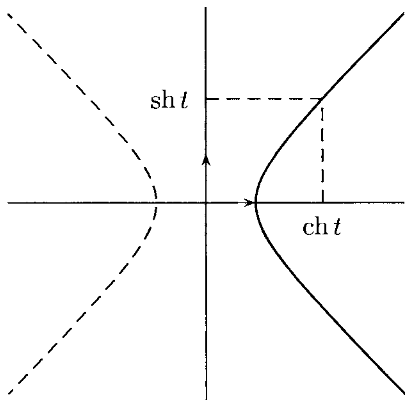
$$x^2 - y^2 = 1.$$

Comme la fonction sinus hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour tout point (x, y) de H d'abscisse positive il existe un unique réel t tel $y = \operatorname{sh} t$. On a alors $x = \operatorname{ch} t$. Donc l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \end{array}$$

est un paramétrage de la partie **de droite** de l'hyperbole H, l'autre branche étant paramétrée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (-\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t). \end{array}$$



4.3 La fonction tangente hyperbolique

Définition 10

La fonction *tangente hyperbolique*, notée th ou tanh est définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Remarque On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch} x > 0$, ce qui prouve que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

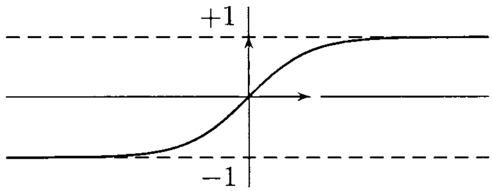
Proposition 15

La fonction tangente hyperbolique est impaire ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

Représentation graphique de la fonction tangente hyperbolique

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$



4.4 Fonctions hyperboliques réciproques

Définition 11

La fonction sinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque est appelée *Argument sinus hyperbolique* et notée argsh.

La fonction Argument sinus hyperbolique est donc une bijection strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire, puisque c'est la réciproque d'une fonction impaire.

Définition 12

La fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; elle définit une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}_+$ sur son image $[1, +\infty[$ dont la réciproque est appelée *Argument cosinus hyperbolique* et notée argch.

La fonction Argument cosinus hyperbolique est donc une bijection strictement croissante et continue de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exemples

1. Par définition, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = x.$$
2. Pour $x \geqslant 1$, le réel $\operatorname{argch} x$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_+$ dont le cosinus hyperbolique vaut x. On a ainsi :
   - $\forall x \geqslant 1,\ \operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = x,$
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argch}(\operatorname{ch} x) = |x|.$

3. La relation $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ ainsi que la positivité des fonctions ch et argch donnent :
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1+x^2}$,
   - $\forall x \in [1,+\infty[\ ,\ \operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2-1}$.

Proposition 16

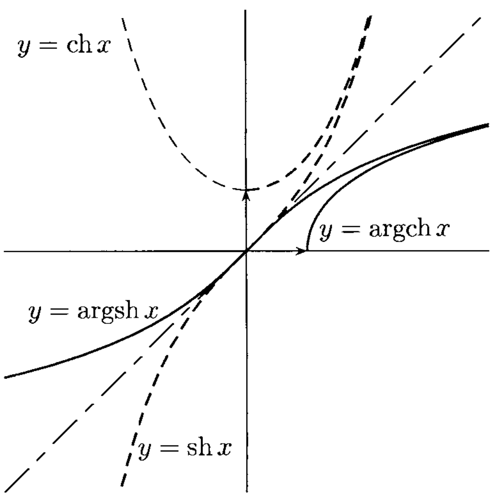
1. La fonction Argument sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$$
2. La fonction Argument cosinus hyperbolique est dérivable sur $]1,+\infty[$ et :
$$\forall x \in]1,+\infty[\ ,\ \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot$$

´monstratio C'est une conséquence du théorème de dérivation des fonctions réciproques (proposition 1 de la page 145) ainsi que de l'exemple 3. ci-dessus □

Représentation graphique des fonctions Argument sinus hyperbolique et Argument cosinus hyperbolique

x	$-\infty$	0	$+\infty$
argsh	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

x	1	$+\infty$
argch	0 ↗	$+\infty$



Définition 13

La fonction tangente hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $]-1,1[$ dont la réciproque est appelée *Argument tangente hyperbolique* et notée argth.

La fonction Argument tangente hyperbolique est donc une bijection strictement croissante et continue de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire, puisque c'est la réciproque d'une fonction impaire.

Proposition 17

La fonction Argument tangente hyperbolique est dérivable sur $]-1,1[$ et :

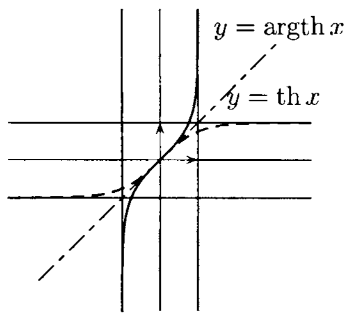
$$\forall x \in\ ]-1,1[\,,\ \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

émonstrati C'est la réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée est strictement positive. On a ainsi

$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{argth} x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$ □

Représentation graphique de la fonction Argument tangente hyperbolique

x	-1	0	1
argth	$-\infty$	0	$+\infty$



MPSI

Expression à l'aide de logarithmes

Proposition 18

On a :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$,
2. $\forall x \in [1,+\infty[\,,\ \operatorname{argch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
3. $\forall x \in\ ]-1,1[\,,\ \operatorname{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).$

nstrati

1. Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} y = \operatorname{argsh} x &\iff x = \operatorname{sh} y \\ &\iff e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0 \\ &\iff e^{y} = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{car } x - \sqrt{x^2+x} < 0 \\ &\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \end{aligned}$$

2. Soit $x \geqslant 1$ Cherchons l'élément $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \operatorname{ch} y$. On a $\operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - 1$ et comme $y \geqslant 0$, on en déduit :

$$\operatorname{sh} y = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Par suite :

$$e^{y} = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y = x + \sqrt{x^2-1} \qquad \text{soit} \qquad y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

3. Pour $x \in \left]-1,1\right[$:

$$y = \operatorname{argth} x \iff x = \operatorname{th} y \iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

donc :

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \cdot$$

□

Remarque On aurait pu utiliser ces expressions pour trouver les dérivées des fonctions hyperboliques réciproques. MPSI

5. Fonction exponentielle complexe

5.1 Dérivée d'un fonction complexe

L'étude des fonctions à valeurs complexes sera faite en détail dans le chapitre 18.

Définition 14

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est *dérivable* sur I si ses parties réelle et imaginaire sont dérivables sur I.

La *dérivée* de $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ est alors :

$$f' = (\operatorname{Re} f)' + i\,(\operatorname{Im} f)'.$$

Exemples

1. Si a est un complexe, la dérivée de $t \mapsto a\,t$ est a
2. Plus généralement, si $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, t^k$ est une fonction polynomiale à coefficients complexes, alors f est dérivable et :
$$f'(t) = \sum_{k=1}^{n} k a_k\, t^{k-1}.$$
3. Si f et g sont deux fonctions dérivables à valeurs complexes, on peut montrer facilement, à l'aide des parties réelle et imaginaire que $f\,g$ est dérivable et que l'on a, comme dans le cas réel :
$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'.$$

5.2 Dérivée de e^{φ}

Proposition 19

Si φ est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}$, alors e^{φ} est dérivable sur I, et :
$$\left(e^{\varphi}\right)' = \varphi'\,e^{\varphi}.$$

émonstratio En effet, si $g = \mathrm{Re}\,\varphi$ et $h = \mathrm{Im}\,\varphi$, alors :
$$\mathrm{Re}(e^{\varphi}) = e^g \cos h \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(e^{\varphi}) = e^g \sin h.$$
En utilisant les propriétés des fonctions réelles dérivables, on obtient la dérivabilité de e^{φ} et :
$$\begin{aligned}\left(e^{\varphi}\right)' &= \Big(g'e^g\cos(h) - h'e^g\sin(h)\Big)\\ &\quad + i\Big(g'e^g\sin(h) + h'e^g\cos(h)\Big)\\ &= e^g\Big(\big(g' + ih'\big)\big(\cos(h) + i\sin(h)\big)\Big)\\ &= e^g\varphi'e^{ih}\\ &= \varphi'e^{\varphi}.\end{aligned}$$
□

Exemple Si ρ et θ sont deux fonctions dérivables réelles, la fonction f définie par $f(t) = \rho(t)\,e^{i\theta(t)}$ est derivable et a pour dérivee :
$$f'(t) = \rho'(t)\,e^{i\theta(t)} + i\,\rho(t)\,\theta'(t)\,e^{i\theta(t)}.$$

Corollaire 20

Si a est un complexe, la fonction $\varphi_a(t) = t \mapsto e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi_a' = a\,\varphi_a$.

EXERCICES

1. Montrer que :

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=0.$$

2. Résoudre dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ le système :

$$\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5 \\ xy = e. \end{cases}$$

3. Résoudre :

$$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2.$$

4. Trouver :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}.$$

5. Résoudre l'équation :

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x.$$

6. Calculer :

$$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) \quad \arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos 4\pi\right), \quad \arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$$

7. Calculer $\tan(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arctan x)$.

8. Simplifier :

a) $\dfrac{\mathrm{ch}(\ln x) + \mathrm{sh}(\ln x)}{x}$

b) $\mathrm{sh}^2 x \cos^2 y + \mathrm{ch}^2 x \sin^2 y$.

9. Résoudre l'équation $\mathrm{ch}\, x = 2$.

10. Montrer que :

$$\arctan(e^x) - \arctan\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$$

est une constante C à déterminer.

11. Simplifier les expressions :

a) $e_1 = x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$

b) $e_2 = \log_x\left(\log_x x^{x^y}\right)$.

12. Calculer :

$$\arctan\frac{x+y}{1-xy} - \arctan x - \arctan y.$$

13. Montrer :

$$\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b)$$

et :

$$\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b).$$

En déduire l'expression de $\operatorname{ch}(a+b)$ et de $\operatorname{sh}(a+b)$ en fonction de $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{sh} a$, $\operatorname{sh} a$, $\operatorname{sh} b$.

14. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, n réels distincts et $P_1, \dots, P_n$, n fonctions polynômes. Montrer que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i x} P_i(x) = 0\right) \Longrightarrow \left(\forall i \in \{1, \dots, n\}\ ,\ P_i = 0\right).$$

15. Soient a et b, $b \neq 0$ deux réels, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a + kb).$$

16 Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $\dfrac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$ où $1 < a < b$

b) $\dfrac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}}$ où $a > 1$.

17. Résoudre les équations suivantes :

a) $\arctan x + \arctan 2x = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \dfrac{\pi}{2}$

c) $2 \arcsin x = \arcsin \left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

d) $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(\sqrt{2}x)$.

18. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\operatorname{argsh}\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$

b) $\operatorname{argch}(2x^2-1)$

c) $\operatorname{argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}\right)$

19. Montrer que pour tout couple $(x, y) \in \left]-1, 1\right[^2$, on a :

$$\operatorname{argth} x + \operatorname{argth} y = \operatorname{argth}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

20. Résoudre l'équation :

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^{\operatorname{argsh}(x-a)} = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^{\operatorname{argsh}(x-b)}.$$

21. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \operatorname{argsh} x = 2 \operatorname{argsh} y \\ 3 \ln x = 2 \ln y \end{cases}$$

22. Montrer que si :

$$x = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$$

alors :

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}\ ,\ \ \operatorname{th} x = \sin y \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}.$$

Chapitre 5

Équations différentielles

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

On sait qu'une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$ est constante si, et seulement si, sa dérivée est nulle : le cas réel a été vu dans les classes antérieures et le cas complexe s'en déduit en considérant les parties réelle et imaginaire.

En particulier, deux primitives sur I d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Enfin on sait que toute fonction continue sur I admet une primitive.

Remarque Une fonction f deux fois dérivable sur I est affine (c'est-à-dire a une expression de la forme $f(t) = a\,t + b$) si, et seulement si, $f'' = 0$.

ém nstration En effet, si $f'' = 0$, alors f' est une constante a.

Alors $f(t) - a\,t$ a une dérivée nulle, donc est constante.

La réciproque est évidente. □

1. Préliminaires

1.1 Définitions

Équations du premier ordre

Étant données une partie D de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$ et une application f de D dans $\mathbb{K}$, l'équation $y' = f(t, y)$ est une *équation différentielle du premier ordre*. On appelle *solution* de cette équation différentielle toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur l'intervalle I telle que pour tout $t \in I$, on ait :

$$\big(t, y(t)\big) \in D \qquad \text{et} \qquad y'(t) = f\big(t, y(t)\big).$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle *courbes intégrales* de l'équation différentielle, les représentations graphiques de ses solutions.

Le plus souvent, on doit chercher les solutions d'une équation différentielle $y' = f(t, y)$ vérifiant une *condition initiale* du type $y(t_0) = y_0$, où $(t_0, y_0) \in D$. C'est ce que l'on appelle un *problème de Cauchy*. Graphiquement, cela revient à chercher les courbes intégrales passant par le point (t_0, y_0).

Équations du second ordre

Étant données une partie D de $\mathbb{R} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ et une application f de D dans $\mathbb{K}$, l'équation $y'' = f(t, y, y')$ est une *équation différentielle du second ordre*. On appelle *solution* de cette équation différentielle toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur l'intervalle I telle que pour tout $t \in I$, on ait :

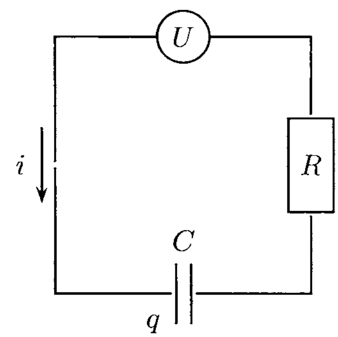
$$\big(t, y(t), y'(t)\big) \in D \qquad \text{et} \qquad y''(t) = f\big(t, y(t), y'(t)\big).$$

Le plus souvent, on doit chercher les solutions d'une équation différentielle $y'' = f(t, y, y')$ vérifiant des *conditions initiales* du type $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$, où $(t_0, y_0, y_1) \in D$. C'est ce que l'on appelle un *problème de Cauchy*.

1.2 Exemples de problèmes conduisant à une équation différentielle

Charge d'un condensateur à travers une résistance

Si l'on désigne par t le temps, par i l'intensité du courant dans le circuit et par q la charge de l'armature de gauche du condensateur, on a $i = \dfrac{dq}{dt}\cdot$



La loi d'Ohm permet d'écrire :

$$U = \frac{q}{C} + Ri$$

et la fonction $t \mapsto q(t)$ vérifie donc :

$$U = \frac{q}{C} + R\,\frac{dq}{dt}\cdot$$

La tension U du générateur est une fonction (assez souvent constante ou sinusoïdale) du temps.

Outre cette équation différentielle, le problème physique possède une condition initiale qui décrit le circuit à l instant $t = 0$, quand on le ferme. En genéral on prend un condensateur non chargé c'est à dire $q(0) = 0$.

Échange thermique

Un corps C dont T représente la température est voisin d'une source de chaleur à température constante T_0.

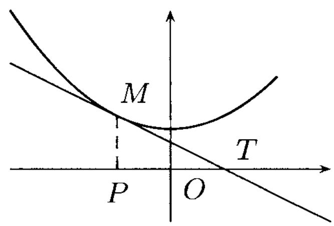
On admet qu'à chaque instant t, la variation de température de C est proportionnelle à la différence $T - T_0$, ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0) \qquad \text{avec} \qquad K < 0.$$

Là encore, il y a une condition initiale précisant la température du corps C à l'instant $t = 0$.

Recherche de courbes conditionnées

On cherche les courbes d'équation $y = f(x)$ vérifiant la propriété géométrique suivante : si M est le point courant de la courbe T l'intersection de la tangente en M avec l'axe Ox et P la projection de M sur Ox, alors O est le milieu de PT.



En désignant par (x, y) les coordonnées du point M, l'équation de la tangente en M est $Y - y = y'(X - x)$ et l'abscisse de T est $x - \dfrac{y}{y'}\cdot$

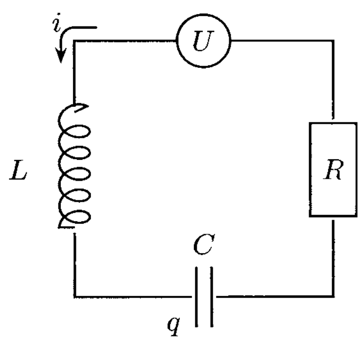
La condition donnée s'écrit donc $2xy' = y$.

Mais cette équation différentielle n'est pas équivalente au problème posé, puisque ce dernier suppose en tout point la tangente non parallèle à Ox. Il faut donc éliminer parmi les solutions celles où y' s'annule, et par exemple la fonction nulle qui est évidemment solution de l'équation différentielle.

Charge d'un condensateur avec une résistance et une inductance

Si, au circuit de la page ci-contre, on ajoute une inductance en série avec la résistance, la différence de potentiel aux bornes de l'inductance est :

$$L\,\frac{di}{dt} = L\,\frac{d^2q}{dt^2}$$



et la loi d'Ohm appliquée au circuit permet d'écrire :

$$U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2}\cdot$$

Ici, le problème physique possède une double condition initiale qui décrit le circuit à l'instant $t = 0$; en général on prend un condensateur non chargé c'est-à-dire $q(0) = 0$ et la continuité des phénomènes physiques impose $i(0) = \dfrac{dq}{dt}(0) = 0$.

Mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale

Si l'on veut étudier le mouvement d'un point matériel M de masse m, mobile dans le plan et soumis à tout instant à une force égale à $-k\,\overrightarrow{OM}$ le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -k\,\overrightarrow{OM}.$$

La position du point M dans le plan peut être définie à l'aide d'une fonction z à valeurs complexes et le problème consiste à chercher des fonctions z vérifiant l'équation différentielle :

$$m\,z'' = -k\,z.$$

Les conditions initiales décrivent en général la position et la vitesse de M à l'instant $t = 0$ et portent donc sur $z(0)$ et $z'(0)$

2. Équations différentielles linéaires

2.1 Généralités

Définition 1

Si a, b et c sont trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, on considère l'*équation différentielle linéaire du premier ordre* :

$$a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = c(t). \qquad (E)$$

- On appelle *solution* sur I de l'équation différentielle (E) toute fonction f dérivable de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall t \in I\,,\ a(t)\,f'(t) + b(t)\,f(t) = c(t).$$

- Si c est la fonction nulle, l'équation différentielle est dite *homogène*.
- On appelle *équation homogène associée* à (E) (ou *équation sans second membre*), l'équation :

$$a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = 0. \qquad (E_0)$$

Remarque Si la fonction a ne s'annule pas sur I, l'équation (E) peut être résolue par rapport à y', et devient :

$$y'(t) = \alpha(t)\,y(t) + \beta(t)$$

où les fonctions α et β sont continues sur I.

Définition 2

Si a, b, c et d sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ on considère l'*équation différentielle linéaire du second ordre* :

$$a(t)\,y''(t) + b(t)\,y'(t) + c(t)\,y(t) = d(t). \qquad (E)$$

- On appelle *solution* sur I de l'équation différentielle (E), toute fonction f deux fois dérivable de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall t \in I\,,\ a(t)\,f''(t) + b(t)\,f'(t) + c(t)\,f(t) = d(t).$$

- Si d est la fonction nulle l'équation différentielle est dite *homogène*
- On appelle *équation homogène associée* à (E) (ou *équation sans second membre*), l'équation :

$$a(t)\,y''(t) + b(t)\,y'(t) + c(t)\,y(t) = 0. \qquad (E_0)$$

Remarque De même que pour une équation linéaire du premier ordre, si la fonction a ne s'annule pas sur I, l'équation (E) est équivalente à une équation du type :

$$y''(t) = \alpha(t)\,y'(t) + \beta(t)\,y(t) + \gamma(t)$$

où les fonctions α β et γ sont continues sur I.

Proposition 1

L'ensemble des solutions de l'équation (E_0) est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

ém nstratio C est un sous–espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, puisqu'il contient la fonction nulle et qu'il est stable par combinaisons linéaires : si y_1 et y_2 sont solutions de (E_0), alors pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda_1\,y_1 + \lambda_2\,y_2$ est dérivable et vérifie encore (E_0). □

Proposition 2

Si f_0 est une solution particulière de l'équation (E) et si $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation (E_0), l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{f_0 + g \mid g \in \mathcal{S}\}$.

Démonst ation Cela résulte du fait que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées. □

Le résultat précédent montre que pour résoudre l'équation (E), il suffit de connaître une solution particulière de (E) et l'ensemble des solutions de (E_0).

2.2 Équations du premier ordre

Résolution d'une équation homogène

Soient a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et (E_0) l'équation différentielle homogène :

$$a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = 0. \tag{E_0}$$

Proposition 3

Si la fonction a ne s'annule pas et si A est une primitive sur I de la fonction $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$, les solutions sur I de l'équation (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda \exp\big(-A(t)\big) \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Démonstrat'o Soit f une fonction dérivable sur I Posons :

$$\forall t \in I\,,\ g(t) = f(t)\exp\big(A(t)\big).$$

La fonction g est donc dérivable et l'on a, pour $t \in I$ ·

$$\begin{aligned} g'(t) &= \exp\big(A(t)\big)\big(f'(t) + A'(t)f(t)\big) \\ &= \frac{\exp\big(A(t)\big)}{a(t)}\big(a(t)\,f'(t) + b(t)\,f(t)\big) \end{aligned}$$

La fonction f est donc solution de (E_0) si, et seulement si, $g' = 0$, c'est-à-dire g constante, puisque I est un intervalle.

D'où le résultat. □

Remarques

1. La proposition précédente montre que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension 1 (une *droite vectorielle*) admettant pour base la fonction $f_0 : t \mapsto \exp\big(-A(t)\big)$.
2. Pour résoudre l'équation (E_0), il suffit donc de trouver une solution f_0 non nulle. Or, l'expression de la solution générale de (E_0) montre qu'une solution non nulle de (E_0) ne s'annule pas sur I.

   Dans le cas où a et b sont à valeurs réelles, on calcule f_0 de la façon suivante :

   $$\forall t \in I\,,\ \frac{f_0'(t)}{f_0(t)} = -\frac{b(t)}{a(t)}$$

   ce qui montre, en intégrant, l'existence d'une constante K telle que :

   $$\forall t \in I\,,\ \ln\big|f_0(t)\big| = -A(t) + K.$$

   En prenant par exemple $K = 0$, on voit que $f_0(t) = \exp(-A(t))$ est une solution non nulle de (E_0).

   Les solutions sont donc λf_0, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemples

1. Si a et b sont des réels non nuls, l'équation différentielle $a\,y' + b\,y = 0$ admet pour solutions les fonctions $t \mapsto \lambda\, e^{-t/\tau}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\tau = a/b$.

   En physique, le réel τ (qui est en général positif) est appelé *constante de temps*. Il indique en combien de temps la solution est divisée par e.
2. Dans le circuit RC régi par l'équation $R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0$, la constante de temps est $\tau = RC$.
3. La solution générale sur $]\,0, \pi\,[$ de l'équation $y'(t)\,\sin t - y(t)\,\cos t = 0$ est :

   $$y(t) = \lambda \exp\big(\ln(\sin t)\big) = \lambda \sin t \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
4. L exemple de la page 173 nous a conduit à l'équation différentielle $2xy' = y$. On peut résoudre cette dernière sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. On obtient :

   - sur $\mathbb{R}_+^*$, $y = k\sqrt{x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
   - sur $\mathbb{R}_-^*$, $y = k\sqrt{-x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

   Nous avons vu que la fonction nulle était à exclure, et d'après leurs expressions, aucune autre solution n'a sa dérivée qui s'annule.

   Les courbes solutions sont donc les demi–paraboles d'axe Ox et de sommet O, privées de l'origine.

Résolution de l'équation avec second membre

Étant données trois fonctions a, b et c continues d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$, on considère l'équation différentielle :

$$a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = c(t). \tag{E}$$

La proposition 2 de la page 176 montre que, pour déterminer la solution générale de (E), il suffit de trouver une solution particulière de cette équation.

Utilisation d'une solution évidente

Exemples

1. Dans l'exemple du circuit RC de la page 172 où U est constante, la fonction constante égale à CU est une solution particulière. Elle correspond à l'état d'équilibre (lorsque le condensateur a "fini" de se charger).

   La solution générale de l'équation différentielle :

   $$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = U$$

   est donc :

   $$q = CU + \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Dans l'exemple de l'échange thermique de la page 173, la solution constante T_0 est une solution évidente qui correspond au cas particulier où le corps et la source sont à la même température T_0.

   La solution générale de l'équation différentielle :

   $$\frac{dT}{dt} = K\,(T - T_0)$$

   est donc :

   $$T = T_0 + \lambda\, e^{Kt} \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. La fonction $-\cos$ est une solution particulière « évidente » sur $]\,0,\pi\,[$ de l'équation :

   $$y'(t)\,\sin t - y(t)\,\cos t = 1.$$

   La solution générale de l'équation est donc :

   $$f(t) = \lambda \sin t - \cos t.$$

Méthode de la variation de la constante

Dans les cas où l'on ne voit aucune solution évidente, on peut avoir recours à la méthode de la *variation de la constante* qui consiste à rechercher une solution particulière sous la forme $y = \lambda y_0$, où y_0 est une solution non nulle de (E_0) et λ une fonction dérivable sur I. Pour tout $t \in I$, on a alors :

$$\begin{aligned} a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) &= a(t)\,y_0(t)\,\lambda'(t) + \lambda(t)\left(a(t)\,y_0'(t) + b(t)\,y_0(t)\right) \\ &= a(t)\,y_0(t)\,\lambda'(t) \end{aligned}$$

et donc λy_0 est solution de (E) si [1] la fonction λ vérifie :

$$\forall t \in I\,,\ \lambda'(t) = \frac{c(t)}{a(t)\,y_0(t)}$$

c'est-à-dire si λ est une primitive de la fonction $\dfrac{c}{a\,y_0}\cdot$

Remarque Ce qui précède prouve que l'équation différentielle (E) admet toujours des solutions sur I, puisqu'une telle solution y_0 non nulle de (E_0) ne s'annule pas sur I.

Exemple Résoudre sur $]\,0, +\infty\,[$ l'équation $t\,y'(t) - y(t) = t^2\,e^t$.

- On résout d'abord l'équation homogène $t\,y'(t) - y(t) = 0$ dont la solution générale est $y(t) = \lambda\,t$, λ étant un réel.
- Puis l'on cherche une solution particulière f_0 sous la forme $f_0(t) = t\,\lambda(t)$, ce qui donne :

$$\lambda'(t) = e^t.$$

La solution générale de l'équation est donc $y(t) = t\,e^t + \lambda\,t$, où λ est un réel.

Résolution avec condition initiale

Soient a, b et c trois fonctions continues d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$, et (E) l'équation différentielle :

$$a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = c(t).$$

Proposition 4 (Solution à un problème de Cauchy)

Si la fonction a ne s'annule pas sur I, et si $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de (E) telle que $f(t_0) = y_0$.

[1] C'est une équivalence, mais cela n'a pas d'importance ici puisque l'on cherche **une** solution particulière.

émonstratio Soient f_1 une solution particulière de (E) (il en existe d'après les résultats précédents) et f_0 une solution non nulle de l'équation homogène associée

Les solutions de (E) sont de la forme $f_1 + \lambda f_0$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

La condition $f(t_0) = y_0$ est donc équivalente à :

$$\lambda\, f_0(t_0) = y_0 - f_1(t_0)$$

ce qui donne une solution et une seule puisque la fonction f_0 ne s'annule pas sur I et donc $f_0(t_0) \neq 0$. □

Remarque Graphiquement, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la proposition précédente signifie que par tout point du plan dont l'abscisse est dans I, il passe une courbe intégrale et une seule.

Exemples

1. Cas du circuit RC avec U constant. On a l'équation différentielle :

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = U.$$

La condition initiale $q(0) = 0$ donne la solution :

$$q(t) = C\,U\left(1 - e^{-t:/RC}\right).$$

2. Cas de l'échange thermique régi par l'équation :

$$\frac{dT}{dt} = K\,(T - T_0) \qquad \text{avec} \qquad K < 0.$$

Si la température initiale est T_1, on obtient comme solution :

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\,e^{Kt}.$$

Proposition 5 (Caractérisations de $t \mapsto e^{\alpha t}$)

1. Si $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$ est la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $y' = \alpha\, y$ et la condition initiale $y(0) = 1$.
2. Les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)\, f(u) \qquad (*)$$

sont la fonction nulle et les fonctions $t \mapsto e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

émonstrati n

1. Il y a une unique solution au problème de Cauchy, et c'est la fonction proposée puisque celle-ci convient.

2. Les fonctions données sont évidemment des solutions
Réciproquement, soit f vérifiant $(*)$.

- Si $f(0) = 0$, alors :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \; f(t) = f(t)\, f(0) = 0.$$

- Sinon, on a $f(0) = 1$ puisque $f(0) = f(0)^2$.
En dérivant par rapport à u la relation $(*)$, on obtient $f'(t+u) = f(t)\, f'(u)$ puis pour $u = 0$, la relation $f'(t) = \alpha\, f(t)$ avec $\alpha = f'(0)$.
La fonction f est donc solution du problème de Cauchy :
$$y' = \alpha\, y \qquad \text{et} \qquad y(0) = 1$$
ce qui donne $f(t) = e^{\alpha t}$ d'après le résultat précédent.

□

Exemples d'équations où la fonction a s'annule

Les résultats précédents ne s'appliquent pas de façon immédiate aux équations différentielles de la forme $a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = c(t)$ sur un intervalle I où la fonction a s'annule. Étudions sur quelques exemples ce qui peut se passer.

Exemples

1. Résolution de l'équation :
$$t\, y'(t) - 2\, y(t) = t^3. \tag{E}$$

- Sur $]\,0, +\infty\,[$, la théorie nous dit que la solution générale est :
$$y(t) = \lambda\, t^2 + t^3 \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- De même sur $]-\infty, 0\,[$, la solution générale est :
$$y(t) = \mu\, t^2 + t^3 \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

- Sur $\mathbb{R}$, la théorie ne s'applique pas.
  - Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E). Elle est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on peut trouver une constante λ telle que :
  $$\forall t > 0, \; y(t) = \lambda\, t^2 + t^3.$$
  De même, on peut trouver une constante μ telle que :
  $$\forall t < 0, \; y(t) = \mu\, t^2 + t^3.$$
  La continuité de y en 0 (ou l'équation (E) vérifiée par y) entraîne alors $y(0) = 0$.

- Réciproquement soit y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = \begin{cases} \lambda\, t^2 + t^3 & \text{si } t \geqslant 0 \\ \mu\, t^2 + t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

  où λ et μ sont deux réels donnés.
  Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et l'on a :

$$\forall t \neq 0\,.\;\; t\, y'(t) - 2\, y(t) = t^3$$

  puisque les restrictions de y à $\mathbb{R}_+^*$ et à $\mathbb{R}_-^*$ sont solutions de l'équation différentielle (E).
  De plus, y est dérivable à droite et à gauche en 0 puisque ses restrictions à $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ coïncident au voisinage de 0 avec des fonctions dérivables et l'on a :

$$y'_d(0) = y'_g(0) = 0.$$

  Donc y est dérivable sur $\mathbb{R}$, et puisque $0\, y'(0) - 2\, y(0) = 0^3$, la fonction y est solution sur $\mathbb{R}$.

La solution générale sur $\mathbb{R}$ est donc définie par :

$$y(t) = \begin{cases} \lambda\, t^2 + t^3 & \text{si } t \geqslant 0 \\ \mu\, t^2 + t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

où λ et μ sont deux réels donnés.
On constate, dans cet exemple, que la solution générale sur $\mathbb{R}$ dépend de deux paramètres. Si l'on veut déterminer complètement une solution y, on doit donner deux conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y(t_1) = y_1$ correspondant à deux valeurs t_0 et t_1 telles que $t_0\, t_1 < 0$.

2. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$t^2\, y'(t) - y(t) = 0. \tag{E}$$

- Si y est solution, alors y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on peut donc trouver une constante λ telle que :

$$\forall t > 0\,,\;\; y(t) = \lambda\, e^{-1/t}.$$

  De même, on peut trouver une constante μ telle que :

$$\forall t < 0\,,\;\; y(t) = \mu\, e^{-1/t}.$$

  Puisque y est continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0 et l'on doit avoir $\mu = 0$ puisque $\lim\limits_{t \to 0^-} e^{-1/t} = +\infty$. Donc :

$$\begin{cases} \forall t > 0\,,\;\; y(t) = \lambda\, e^{-1/t} \\ \forall t \leqslant 0\,,\;\; y(t) = 0 \end{cases}$$

- Réciproquement on constate que la fonction y définie ci-dessus est continue dérivable sur $\mathbb{R}^*$ ainsi qu'en 0 puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{e^{-1/t}}{t} = 0$ par comparaison des fonctions exponentielle et puissance.
  De plus, elle vérifie l'équation (E) sur $\mathbb{R}^*$ et, de façon évidente, en 0.

3. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(1-t)\,y'(t) - y(t) = t. \tag{E}$$

- Sur chacun des deux intervalles $]1,+\infty[$ et $]-\infty,1[$, le coefficient de y' ne s'annule pas. On peut donc résoudre l'équation différentielle (E).
  - La solution générale de l'équation homogène est $y(t) = \dfrac{\lambda}{1-t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
  - La méthode de variation de la constante fournit une solution particulière $y_0(t) = \dfrac{t^2}{2(1-t)}$.

  Sur chacun des deux intervalles $]1,+\infty[$ et $]-\infty,1[$, l'équation (E) admet donc pour solutions :

$$y(t) = \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)}.$$

- Une solution y sur $\mathbb{R}$, étant solution sur chacun de ces deux intervalles on doit avoir :

$$\begin{cases} \forall t > 1\,,\ y(t) = \dfrac{\lambda + t^2}{2(1-t)} \\ \forall t < 1\,,\ y(t) = \dfrac{\mu + t^2}{2(1-t)} \end{cases}$$

  où λ et μ sont deux réels.
  Comme cette fonction doit avoir une limite en 1 on doit nécessairement avoir $\lambda = \mu = -1$ et donc :

$$\forall t \neq 1\,,\ y(t) = \frac{t^2-1}{2(1-t)} = -\frac{1}{2}(1+t).$$

  La fonction y définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ y(t) = -\frac{1}{2}(1+t)$$

  étant solution de (E) sur $\mathbb{R}$, on en déduit que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Remarque Les exemples précédents montrent qu'il n'y a pas de résultat général relatif au nombre de paramètres dont dépend la solution générale d une équation différentielle de la forme $a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = c(t)$ sur un intervalle I où la fonction a s'annule.

Méthode d'Euler

L'étude précédente montre qu'il est toujours possible de résoudre sur l'intervalle I une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme $y' = \alpha(t)\,y + \beta(t)$ où α et β sont des fonctions continues sur I.

Néanmoins, cette résolution nécessite un calcul de primitive, et le calcul effectif de cette primitive n'est pas toujours possible. Lorsque l'expression exacte des solutions n'est pas nécessaire (voire non souhaitable car trop compliquée), on peut parfois se contenter d'en donner une solution numérique approchée. C'est par exemple le cas lorsque l'on désire simplement tracer les courbes intégrales.

La *méthode d'Euler* est une des méthodes numériques les plus simples de résolution approchée des équations différentielles (en fait d'un problème de Cauchy).

Principe Soient $f(t,y) = \alpha(t)\,y + \beta(t)$ ainsi que le problème de Cauchy :

$$y' = f(t,y) \qquad \text{et} \qquad y(t_0) = y_0. \tag{$*$}$$

On considère les points $t_n = t_0 + n\,\delta$ de I, où δ est un réel strictement positif que l'on pourra choisir aussi petit que l'on veut.

Si y est la solution de $(*)$, on a pour tout n :

$$y'(t_n) = f\big(t_n, y(t_n)\big)$$

En assimilant la courbe à sa tangente sur $[\,t_n, t_{n+1}\,]$ pour δ suffisamment petit, on voit que $y(t_{n+1})$ est peu différent de $y(t_n) + \delta\, f\big(t_n, y(t_n)\big)$.

Pour avoir une approximation de la solution sur $I_+ = I \cap [\,t_0, +\infty\,[$, on considère donc la suite (y_n) définie par son premier terme y_0 (condition initiale) et vérifiant la relation de récurrence :

$$y_{n+1} = y_n + \delta\, f(t_n, y_n).$$

On peut montrer que y_n est alors une bonne approximation de $y(t_n)$.

- Pour avoir une approximation de $y(t)$, avec $t \in I_+$, il suffit de considérer l'entier n tel que $t_n \leqslant t < t_{n+1}$ et de faire une interpolation linéaire entre (t_n, y_n) et (t_{n+1}, y_{n+1}).
- En particulier la ligne polygonale reliant les points (t_n, y_n) est une approximation de la courbe intégrale solution.

On peut procéder de même sur $I_- = I \cap\,]-\infty, t_0\,]$.

Remarque La méthode d'Euler n'est pas limitée aux équations différentielles linéaires et peut être utilisée pour toute équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = f(t, y)$, ainsi que pour toutes équations du second ordre et au delà après quelques adaptations.

Mise en œuvre Dans la pratique, on cherche une solution sur un segment $[t_0, t_1]$, et l on choisit le pas δ de la forme $\delta = (t_1 - t_0)/n$, où n est un entier strictement positif.

L'algorithme de résolution approchée sur le segment $[t_0, t_1]$ est le suivant :

DONNÉES :
- les réels t_0, t_1,
- les fonctions α et β définies sur $[t_0, t_1]$
- le réel y_0 (condition initiale en t_0),
- un entier n non nul (nombre d'intervalles).

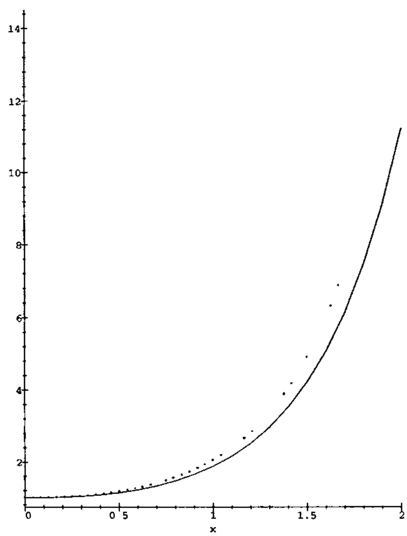
VARIABLES :
- k (l'indice de boucle),
- deux réels t et δ,
- un tableau $y[0..n]$ (le résultat).

- $y[0] \leftarrow y_0$
- $\delta \leftarrow (t_1 - t_0)/n$
- $t \leftarrow t_0$
- `Pour` k `allant de 0 jusqu'à` $n-1$ `:`
  - $y[k+1] \leftarrow y[k] + \delta * (\alpha(t) * y[k] + \beta(t))$
  - $t \leftarrow t + \delta$

RÉSULTAT : y.

Exemples

1. Pour le problème de Cauchy :
   $$y' = t\,y + t^2 \qquad \text{et} \qquad y(0) = 1$$
   on trouve avec `Maple` pour $n = 20$ le résultat suivant (en pointillé la solution exacte) :



2. On connaît la solution $y(t) = e^t$ au problème de Cauchy :
   $$y' = y \qquad \text{et} \qquad y(0) = 1.$$
   La méthode d Euler nous donne la suite :
   $$y_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = (1+\delta)\,y_n$$
   soit $y_n = (1+\delta)^n$.

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on prend n tel que $n\,\delta \leqslant t < (n+1)\,\delta$. La solution approchée, interpolation linéaire entre y_n et y_{n+1}, est donc comprise entre ces deux valeurs.
Or :

$$y_n = (1+\delta)^n \geqslant \left(1+\frac{t}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1+\frac{t}{n+1}\right)\right)$$

et :

$$n \ln\left(1+\frac{t}{n+1}\right) = \frac{n\,t}{n+1}\,\frac{\ln(1+t/(n+1))}{t/(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$$

ce qui prouve que y_n est minoré par une suite qui tend vers e^t lorsque δ tend vers 0.
De la même façon, on prouve que y_{n+1} est majorée par une suite qui tend aussi vers e^t.
La solution approchée converge donc en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ vers la solution exacte.

Remarque L'exemple précédent peut donner l'idée d'une autre définition de la fonction exponentielle comme l'unique solution du problème de Cauchy :

$$y' = y \qquad \text{et} \qquad y(0) = 1.$$

Il suffit pour cela de montrer que la suite $e_n(t) = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n$ admet une limite (évidemment sans utiliser la fonction logarithme), et de montrer que cette limite définit une fonction dérivable qui est égale à sa dérivée.

En **`Maple`**

- C'est la fonction `dsolve` qui permet de résoudre de façon exacte une équation différentielle.
- Lorsque ce n'est pas possible (ou pas souhaitable), on peut utiliser `dsolve(...,numeric)` pour obtenir une solution numérique approchée de l'équation. Le logiciel utilise une méthode similaire à celle que nous venons de décrire, mais améliorée afin d'avoir une meilleure approximation.

2.3 Équations du second ordre à coefficients constants

Résolution de l'équation homogène

Étant donnés trois complexes a, b et c, avec $a \neq 0$, on considère l'équation différentielle :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = 0. \qquad (E_0)$$

Proposition 6

Pour $r \in \mathbb{C}$, la fonction $\varphi_r \ : \ t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_0) si et seulement si, $a r^2 + b r + c = 0$.

L'équation $a r^2 + b r + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* de (E_0).

émonstration Cette équivalence provient de la relation :

$$\forall t \in I\,.\ a\varphi_r''(t) + b\varphi_r'(t) + c\varphi_r(t) = (a r^2 + b r + c)\,\varphi_r(t)$$

et du fait que la fonction φ_r ne s'annule pas. □

Cas complexe

Proposition 7

- Si l'équation caractéristique $a r^2 + b r + c = 0$ a deux racines distinctes r_1 et r_2, les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda_1\, e^{r_1 t} + \lambda_2\, e^{r_2 t} \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

- Si l'équation caractéristique $a r^2 + b r + c = 0$ a une racine double r_0, les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto e^{r_0 t}(\lambda_1 + \lambda_2\, t) \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Démonstration

- Calcul préliminaire : soit r une racine de l'équation caractéristique et f une fonction deux fois dérivable sur I. La fonction z définie sur I par $z(t) = e^{-rt} f(t)$ est deux fois dérivable sur I et vérifie, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} f(t) &= z(t)\, e^{rt} \\ f'(t) &= \big(z'(t) + r\, z(t)\big)\, e^{rt} \\ f''(t) &= \big(z''(t) + 2\, r\, z'(t) + r^2 z(t)\big)\, e^{rt}. \end{aligned}$$

Pour $t \in I$, on a donc :

$$\begin{aligned} a\, f''(t) + b\, f'(t) + c\, f(t) &= \big(a\, z''(t) + (2a\, r + b)\, z'(t) + (a\, r^2 + b\, r + c) z(t)\big)\, e^{rt} \\ &= e^{rt}\big(a\, z''(t) + (2a\, r + b)\, z'(t)\big). \qquad (*) \end{aligned}$$

- Si l'équation caractéristique $a r^2 + b r + c = 0$ a deux racines distinctes r_1 et r_2, les fonctions φ_{r_1} et φ_{r_2} sont solutions de (E_0) et donc leurs combinaisons linéaires le sont aussi (équation différentielle linéaire homogène)

Réciproquement, si f est solution de (E_0), alors en prenant $r = r_1$ dans l'équation $(*)$, on a :

$$\forall t \in I\,,\ 0 = a\,z''(t) + (2a\,r_1 + b)\,z'(t) = a\left(z''(t) + (r_1 - r_2)\,z'(t)\right)$$

puisque $r_1 + r_2 = -b/a$. La fonction z' vérifie alors une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont les solutions sont :

$$t \mapsto \alpha\,e^{(r_2 - r_1)t} \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

On en déduit donc l'existence de complexes α et β tels que :

$$\forall t \in I\,,\ z(t) = \frac{\alpha}{r_2 - r_1}\,e^{(r_2 - r_1)t} + \beta$$

et donc de scalaires $\lambda_2 = \dfrac{\alpha}{r_2 - r_1}$ et $\lambda_1 = \beta$ tels que :

$$\forall t \in I\,,\ f(t) = \lambda_1\,e^{r_1 t} + \lambda_2\,e^{r_2 t}.$$

- Si l'équation caractéristique $a\,r^2 + b\,r + c = 0$ a une racine double r_0, on a $2a\,r_0 + b = 0$, et pour $r = r_0$, la relation $(*)$ nous dit que f est solution de (E_0) si, et seulement si, $z'' = 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, l'on peut trouver deux complexes λ_1 et λ_2 tels que $\forall t \in I\,,\ z(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$, ce qui prouve que les solutions de (E_0) sont :

$$t \mapsto e^{r_0 t}(\lambda_1 + \lambda_2\,t) \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

□

Remarques

- Dans cette démonstration, nous avons en fait employé la méthode de la variation de la constante que l'on peut utiliser de façon plus générale pour résoudre une équation différentielle (E) linéaire du second ordre : si l équation homogène associée possède une solution particulière y_0 qui ne s'annule pas, on peut chercher les solutions de (E) sous la forme $y(t) = z(t)\,y_0(t)$, ce qui donne une équation différentielle linéaire du premier ordre en z' équation que l'on sait donc résoudre.

  Un simple calcul de primitive permet alors de déterminer z et donc y.
- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension 2 puisque ses éléments sont dans chacun des deux cas, combinaisons linéaires de deux solutions non proportionnelles.

Exemple L exemple du mouvement à force centrale de la page 174 donne l'équation complexe $m\,z'' = -k\,z$ dont la solution générale est :

$$z(t) = \lambda\,\exp\left(i\,t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + \mu\,\exp\left(-\imath\,t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \qquad \text{avec} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Cas réel

Proposition 8

Supposons a, b et c réels.

- Si l'équation caractéristique $a\,r^2 + b\,r + c = 0$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda_1\, e^{r_1 t} + \lambda_2\, e^{r_2 t} \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si l'équation caractéristique $a\,r^2 + b\,r + c = 0$ a une racine double r_0 (nécessairement réelle), les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto e^{r_0 t}(\lambda_1 + \lambda_2\, t) \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si l'équation caractéristique $a\,r^2 + b\,r + c = 0$ a deux racines conjuguées non réelles $\alpha \pm i\beta$ les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda_1\, e^{\alpha t}\cos\beta t + \lambda_2\, e^{\alpha t}\sin\beta t \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration

- Les deux premiers cas se traitent comme dans le cas complexe.
- Si l'équation caractéristique $a\,r^2+b\,r+c = 0$ a deux racines conjuguées $\alpha\pm i\beta$ avec $\beta \neq 0$, la proposition 7 de la page 187 montre que les solutions à valeurs complexes de l'équation (E_0) sont :

$$t \mapsto \lambda_1\, e^{(\alpha+i\beta)\,t} + \lambda_2\, e^{(\alpha-i\beta)\,t} \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Les fonctions :

$$\gamma_{\alpha,\beta}\ :\ t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t) = \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)\,t} + e^{(\alpha-i\beta)\,t}\right)$$

et

$$\sigma_{a,\beta}\ :\ t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t) = \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\beta)\,t} - e^{(\alpha-i\beta)\,t}\right)$$

sont donc solutions de (E_0), et par consequent il en est de même de leurs combinaisons linéaires.

Réciproquement, si f est une solution réelle de (E_0), alors on peut trouver deux complexes μ_1 et μ_2 tels que .

$$\forall t \in I\,,\ f(t) = \mu_1\, e^{(\alpha+i\beta)\,t} + \mu_2\, e^{(\alpha-i\beta)\,t}.$$

Comme f est reelle, elle est égale à sa partie réelle et donc combinaison linéaire à coefficients réels des fonctions $\gamma_{\alpha,\beta}$ et $\sigma_{\alpha,\beta}$. □

Exemples

1. Équation $y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = 0$.

   L'équation caractéristique admettant comme racines 1 et -5 la solution générale de l'équation est :

$$y(t) = k_1\, e^{t} + k_2\, e^{-5t}.$$

2. Équation $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$

   L'équation caractéristique admettant 1 comme racine double la solution générale de l'équation est :

$$y(t) = k_1\, e^t + k_2\, t\, e^t.$$

3. Équation $y''(t) + 2\,y'(t) + 2\,y(t) = 0.$

   L'équation caractéristique admettant comme racines $-1+i$ et $-1-i$, la solution générale de l'équation est :

$$y(t) = e^{-t}(k_1 \cos t + k_2 \sin t).$$

4. L'exemple du mouvement à force centrale de la page 174 donne, en projection, les deux équations réelles :

$$m\,x'' = -k\,x \qquad \text{et} \qquad m\,y'' = -k\,y$$

   ce qui donne les deux fonctions x et y combinaisons linéaires des fonctions :

$$t \mapsto \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \text{et} \quad t \mapsto \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\cdot$$

   Les trajectoires sont donc des ellipses centrées en O.

5. En physique, on rencontre souvent des équations différentielles du type :

$$y'' + \frac{\omega_0}{Q}\,y' + \omega_0^2\,y = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 > 0 \quad \text{et} \quad Q > 0.$$

   Le comportement des solutions dépend du signe du discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$ de l'équation caractéristique, et donc du *facteur de qualité* Q On dit que le régime est :

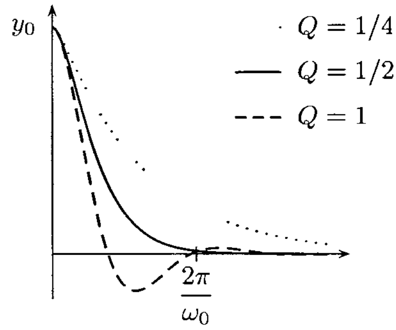
   - *apériodique* si $Q < 1/2$. Les solutions sont alors combinaisons linéaires de deux exponentielles décroissantes

   - *pseudo–périodique* si $Q > 1/2$. Les solutions sont alors produit d'une exponentielle décroissante par une fonction trigonometrique :

$$y(t) = A\,e^{-\omega_0 t/2Q}\cos(\omega_0'\,t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \omega_0' = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\cdot$$

   - *critique* si $Q = 1/2$. Les solutions sont alors de la forme $y(t) = e^{-\omega_0\,t}(A\,t + B)$.

Voici l'allure de trois courbes intégrales correspondant à une même valeur de ω_0 et aux conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$.



Remarque L'ensemble des solutions de l'équation différentielle E_0 est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension 2 puisque ses éléments sont, dans chacun des cas, combinaisons linéaires de deux solutions non proportionnelles.

Résolution de l'équation $a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = d(t)$

Soient a b et c trois complexes, a étant non nul, et d une fonction continue sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = d(t). \qquad (E)$$

Comme, d'après les résultats précédents, on connaît l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (E_0), il suffit alors de déterminer une solution particulière de l'équation (E).

Utilisation d'une solution évidente

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, il peut arriver que l'on devine une solution particulière, ou qu'elle nous soit donnée par le problème physique, géométrique,... dont est issue l'équation différentielle.

Exemple Dans l'exemple d'un circuit électrique RLC de la page 173, on obtient l'équation différentielle :

$$U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2}.$$

- Si U est constant, il existe une solution correspondant à un circuit sans courant. On cherche donc une solution particulière constante, et l'on trouve $q = C\,U$.
- Si $U = U_0 \cos(\omega t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω, on constate que le régime permanent est un courant sinusoïdal de même pulsation, mais déphasé d'un angle φ. On vérifie alors qu'il existe une solution du type $q = A\,\cos(\omega t + \varphi)$. Elle est obtenue en physique par des calculs d'impedance complexe.
- La solution générale de l'équation homogène associée, à base d'exponentielles décroissantes tend rapidement vers 0. Elle correspond à ce que les physiciens appellent le régime transitoire. Ils la négligent quand ils s'intéressent au régime permanent.

Cas où d est une fonction polynôme

On cherche une solution polynomiale, en remarquant que si y est un polynôme de degré p, alors $a\,y'' + b\,y' + c\,y$ est un polynôme :

- de degré p si $c \neq 0$,
- de degré $p-1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$
- de degré $p-2$ si $c = b = 0$.

Proposition 9

Si P est un polynôme de degré n, l'équation différentielle :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = P(t) \qquad (E)$$

possède comme solution particulière une fonction polynomiale de degré :

- n si $c \neq 0$,
- $n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$,
- $n+2$ si $b = c = 0$.

emonstration Posons

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, t^k.$$

Si $c \neq 0$ prenons y une fonction polynomiale de degré n :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k\, t^k.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = &\sum_{k=0}^{n-2}\big(a\,(k+2)\,(k+1)\,\beta_{k+2} + b\,(k+1)\,\beta_{k+1} + c\,\beta_k\big)\,t^k \\ &+ (b\,n\,\beta_n + c\,\beta_{n-1})\,t^{n-1} + c\,\beta_n\,t^n. \end{aligned}$$

Une telle fonction y est solution de (E) si, et seulement si, la famille $(\beta_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ vérifie le système :

$$\begin{cases} \alpha_n &= c\,\beta_n \\ \alpha_{n-1} &= b\,n\,\beta_n + c\,\beta_{n-1} \\ \alpha_{n-2} &= a\,n\,(n-1)\,\beta_n + b\,(n-1)\,\beta_{n-1} + c\,\beta_{n-2} \\ & \\ \alpha_k &= a\,(k+2)\,(k+1)\,\beta_{k+2} + b\,(k+1)\,\beta_{k+1} + c\,\beta_k \\ &\ \vdots \\ \alpha_0 &= 2a\,\beta_2 + b\,\beta_1 + c\,\beta_0 \end{cases}$$

Puisque $c \neq 0$ on peut résoudre ce système de proche en proche (c'est un système triangulaire avec des termes non nuls sur la diagonale). Il admet donc une solution, ce qui prouve que l'équation (E) admet une solution polynomiale, et celle-ci est de degré n puisque $\beta_n = \alpha_n/c \neq 0$.

- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, l'équation (E) est une équation différentielle du premier ordre en $z = y'$. Or le calcul précédent montre que l'équation différentielle :

$$0\, z''(t) + a\, z'(t) + b\, z(t) = P(t)$$

admet une solution polynomiale de degré n.

En intégrant cette solution, on obtient une fonction polynomiale de degré $n+1$ solution de (E)

- Si $b = c = 0$, l'equation différentielle (E) est $a\, y''(t) = P(t)$, avec $a \neq 0$, et donc en intégrant deux fois le polynôme P/a, on obtient une solution polynomiale de degré $n + 2$. □

Cas où $d(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Si le second membre d est de la forme :

$$d(t) = e^{mt}\varphi(t),$$

en posant $y(t) = e^{mt}\, z(t)$, l'équation :

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = e^{mt}\varphi(t) \qquad (E)$$

devient après simplification par e^{mt} :

$$a\, z''(t) + (2am + b)\, z'(t) + (a\, m^2 + b\, m + c)\, z(t) = \varphi(t). \qquad (E')$$

Pour avoir une solution particulière de (E), il suffit alors de trouver une solution particulière de (E'), ce que l'on sait faire lorsque φ est une fonction polynomiale.

Proposition 10

Si m est un nombre complexe et P un polynôme de degré n, on peut trouver une solution particulière de l'équation :

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = e^{mt}P(t) \qquad (E)$$

de la forme $y(t) = e^{mt}Q(t)$, où Q est un polynôme :

- de degré n si m n'est pas racine de l'équation $a\, r^2 + b\, r + c = 0$,
- de degré $n + 1$ si m est racine simple de l'équation $a\, r^2 + b\, r + c = 0$
- de degré $n + 2$ si m est racine double de l'équation $a\, r^2 + b\, r + c = 0$.

émonstratio En posant $y(t) = e^{mt}\, z(t)$, l'équation (E) est équivalente à .

$$a\, z''(t) + (2a\, m + b)\, z'(t) + (a\, m^2 + b\, m + c)\, z(t) = P(t) \qquad (E')$$

qui admet une solution Q polynomiale d'après la proposition 9 de la page 192 ; on en déduit que (E) possède pour solution $t \mapsto e^{mt}\, Q(t)$.

De plus la proposition 9 de la page 192 nous dit que l'on peut trouver Q :

- de degré n si $a\, m^2 + b\, m + c \neq 0$, c'est-à-dire si m n'est pas racine de l'equation caracteristique,
- de degré $n+1$ si $a\, m^2 + b\, m + c = 0$ et $2a\, m + b \neq 0$ c'est-à-dire si m est racine simple de l'équation caractéristique.
- de degré $n+2$ si $a\, m^2 + b\, m + c = 2a\, m + b = 0$, c'est-à-dire si m est racine double de l'équation caractéristique,

ce qui prouve le résultat. □

Remarques

- Dans le cas où m est racine de l'équation caractéristique, la fonction $\varphi_m\ :\ t \mapsto e^{mt}$ est solution de l'équation homogène associée. On peut donc chercher le polynôme Q avec un terme constant nul.
- De même, si m est racine double, les fonctions φ_n et $\psi_m\ :\ t \mapsto t\, e^{mt}$ sont solutions de l'équation homogène associée et l'on peut chercher Q sans constante et sans terme de degré 1.

  La solution particulière peut alors être cherchée sous la forme :

  $$e^{mt}\, R(t) \quad \text{ou} \quad e^{mt}\, t\, R(t) \quad \text{ou} \quad e^{mt}\, t^2\, R(t)$$

  selon que m n'est pas racine, est racine simple, ou est racine double de l equation caractéristique, avec R un polynôme de même degré que P

Exemples

1. Résoudre sur IR l'équation $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)\, e^{-t}$.

   Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de la forme :

   $$f_0(t) = (a\, t + b)\, e^{-t}$$

   et l'on trouve $f_0(t) = \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right)\, e^{-t}$, ce qui donne la solution générale de l'équation :

   $$y(t) = \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right)\, e^{-t} + k_1\, e^t + k_2\, e^{3t}.$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)\,e^t$.
   Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :
$$f_0(t) = (a\,t^2 + b\,t)\,e^t$$
   et l'on trouve $f_0(t) = \left(-\frac{t^2}{2} - t\right)\,e^t$, ce qui donne la solution générale de l équation :
$$y(t) = \left(-\frac{t^2}{2} - t\right)\,e^t + k_1\,e^t + k_2\,e^{3t}.$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = (t-1)\,e^t$
   Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :
$$f_0(t) = (a\,t^3 + b\,t^2)\,e^t$$
   et l'on trouve $f_0(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right)\,e^t$, ce qui donne la solution générale de l'équation :
$$y(t) = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right)\,e^t + k_1\,e^t + k_2\,t\,e^t.$$

Principe de superposition

Le principe de superposition est fondé sur le fait que si :

- f_1 est solution de $a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = d_1(t)$,
- f_2 est solution de $a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = d_2(t)$,

alors $\lambda_1\,f_1 + \lambda_2\,f_2$ est solution de $a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = \lambda_1\,d_1(t) + \lambda_2\,d_2(t)$.

Exemple Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''(t) - 4\,y'(t) + 3\,y(t) = (2t+1)\sinh t$.

On a vu que l'équation :
$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)\,e^t$$
admet pour solution particulière $f_1(t) = \left(-\frac{t^2}{2} - t\right)\,e^t$ et que l'équation :
$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)\,e^{-t}$$
admet pour solution particulière $f_2(t) = \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right)\,e^{-t}$. On en déduit que l'équation :
$$y''(t) - 4\,y'(t) + 3\,y(t) = (2t+1)\sinh t$$

admet comme solution particulière :

$$f_0(t) = \frac{1}{2}(f_1(t) - f_2(t)) = \left(-\frac{t^2}{4} - \frac{1}{2}t\right) e^t - \left(\frac{t}{8} + \frac{5}{32}\right) e^{-t}.$$

Cas où $d(t) = e^{ut}(\cos vt\, P(t) + \sin vt\, Q(t))$ avec a, b et c réels

Comme $\cos vt$ et $\sin vt$ sont des combinaisons linéaires de e^{ivt} et e^{-ivt}, en utilisant le principe de superposition, on se ramène à la résolution d'équations différentielles avec un second membre de la forme $e^{(u+iv)t}P(t)$, où P est un polynôme, et il suffit d'utiliser les résultats précédents.

On passe ainsi provisoirement au domaine complexe avant de revenir au cas réel par des combinaisons linéaires, ou en prenant, selon les cas, la partie réelle ou la partie imaginaire.

Exemples

1. Résoudre l'équation $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = t\,e^t \cos t$.

   On cherche d'abord une solution de $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = t\,e^{(1+i)t}$ sous la forme $f_1(t) = (a\,t + b)\,e^{(1+i)t}$, puisque $1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, et l'on trouve :

   $$f_1(t) = \left(\left(-\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}\right)t - \frac{14}{25} - \frac{2i}{25}\right) e^{(1+i)t}$$

   ce qui donne comme solution particulière de l'équation donnée :

   $$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{1}{2}\left(f_1(t) + \overline{f_1(t)}\right) = \operatorname{Re}(f_1)(t) \\ &= \left(-\frac{t}{5} - \frac{14}{25}\right) e^t \cos t - \left(\frac{2t}{5} - \frac{2}{25}\right) e^t \sin t. \end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation $y''(t) + y(t) = \sin^3 t$.

   La solution générale de l'équation homogène associée est :

   $$y(t) = \lambda \sin t + \mu \cos t \qquad \text{avec} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

   On linéarise le second membre :

   $$\sin^3 t = -\frac{1}{4}\sin 3t + \frac{3}{4}\sin t$$

   et l'on utilise le principe de superposition. On est ainsi amené à déterminer une solution f_1 de $y''(t) + y(t) = \sin 3t$ et une solution f_2 de $y''(t) + y(t) = \sin t$.

   Comme $\sin 3t$ est combinaison linéaire de e^{3it} et e^{-3it}, et que $\pm 3i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher f_1 comme combinaison linéaire de e^{3it} et e^{-3it} c'est–à–dire sous la forme $f_1(t) = a\cos 3t + b\sin 3t$. On trouve :

$$f_1(t) = -\frac{\sin 3t}{8}\cdot$$

De même on cherche la solution f_2 de la forme $f_2(t) = (a\,t+b)\cos t+(c\,t+d)\sin t$ ce qui donne :

$$f_2(t) = -\frac{1}{2}t\cos t.$$

La solution générale de l'équation donnée est donc :

$$f_0(t) = \frac{\sin 3t}{32} + \left(\lambda - \frac{3t}{8}\right)\cos t + \mu\sin t \qquad \text{avec} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Résolution avec conditions initiales

Soient a b et c trois éléments de $\mathbb{K}$, avec $a \neq 0$, et l'équation différentielle :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = d(t) \tag{E}$$

où d est une fonction continue sur un intervalle I

Dans la suite, on suppose avoir trouvé une solution particulière f_0 de l'équation (E), ce qui est le cas lorsque d est une somme de polynômes–exponentielles.

Proposition 11

Soient $t_0 \in I$ ainsi que y_0 et y'_0 deux éléments de $\mathbb{K}$. Il existe une solution f de l'équation (E) et une seule telle que :

$$f(t_0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad f'(t_0) = y'_0.$$

Démonstration On sait que les solutions de l'équation homogène (E_0) sont combinaisons linéaires de deux solutions non proportionnelles u et v

La solution générale de f s'écrit donc :

$$f(t) = f_0(t) + \lambda\,u(t) + \mu\,v(t) \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

La fonction f vérifie $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda\,u\,(t_0) + \mu\,v\,(t_0) = y_0 - f_0(t_0) \\ \lambda\,u'(t_0) + \mu\,v'(t_0) = y'_0 - f'_0(t_0). \end{cases}$$

Ce système de deux equations à deux inconnues λ et μ admet une solution et une seule car on a :

$$D = \begin{vmatrix} u(t_0) & v(t_0) \\ u'(t_0) & v'(t_0) \end{vmatrix} = u(t_0)\,v'(t_0) - u'(t_0)\,v(t_0) \neq 0,$$

ce que l'on vérifie facilement dans chacun des cas suivants :

- si l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2, car on a :

$$u(t) = e^{r_1 t} \qquad \text{et} \qquad v(t) = e^{r_2 t},$$

- si l'équation caractéristique a une racine double r, car on a :

$$u(t) = e^{rt} \qquad \text{et} \qquad v(t) = t\,e^{rt},$$

- si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si l'équation caractéristique a deux racines non réelles $\alpha \pm i\,\beta$, car on a :

$$u(t) = e^{\alpha t}\,\cos(\beta\,t) \qquad \text{et} \qquad v(t) = e^{\alpha t}\,\sin(\beta\,t).$$

□

Exemple L'exemple du mouvement à force centrale de la page 174 conduit à l'équation complexe :

$$m\,z'' + k\,z = 0. \tag{E_0}$$

L'espace vectoriel des solutions est de dimension 2. Il admet donc pour base les fonctions :

$$t \mapsto \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \text{et} \quad t \mapsto \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\cdot$$

puisque celles–ci sont des solutions non proportionnelles de (E_0).

Les solutions sont donc de la forme :

$$z(t) = A\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2.$$

Si l'on se donne les conditions initiales $z(0) = z_0$ et $z'(0) = v_0$, on obtient l'unique solution :

$$z(t) = z_0\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\cdot$$

EXERCICES

1. Soit E la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-$ et égale à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Trouver les solutions de l'équation $y'(x) + E(x)y(x) = 0$ sur l'intervalle $]-1, 1[$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

a) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$

b) $(x \ln x)\, y' - y = -\dfrac{1}{x}(\ln x + 1)$

c) $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$

d) $(1 - x)y' + y = \dfrac{x - 1}{x}$

e) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$

f) $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$

g) $2xy' + y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3 Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe Oz est régi par un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule et du champ magnétique. En utilisant $u = x' + iy'$ résoudre ce système différentiel.

4 Soit f une fonction de classe C^2 (c est à dire deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée seconde est continue sur $\mathbb{R}$).
Montrer qu'il existe au plus une application g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ g(x) = \int_0^x (x - t)g(t)\, dt + f(x).$$

Résoudre dans le cas où $f(x) = \cos x$.

5. Intégrer les équations suivantes :

a) $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$

b) $y'' + y' = 3 + 2x$

c) $y'' + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3$

d) $y'' + 3y' + 2y = e^x$

e) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

f) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

g) $y'' + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)e^{2x}$

h) $y'' - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$

i) $y'' - 4y' + 4y = x \operatorname{ch} 2x$

j) $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$

k) $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos x + 7e^{-x} \sin x - 4e^x \sin 2x.$

6. Intégrer l'équation différentielle suivante sur tout intervalle ne contenant pas -1:

$$(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0.$$

7. Soit q une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (c'est à dire dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est continue sur $\mathbb{R}$) telle que :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+ \ : \ \forall x \geqslant A \ , \ q(x) > 0 \ , \ q'(x) > 0$$

Montrer que toute solution de l'équation différentielle :

$$y'' + q(x)y = 0$$

est bornée au voisinage de $+\infty$, c'est à dire qu'il existe un intervalle de la forme $[B, +\infty[$ sur lequel la fonction est bornée.
On pourra considérer la fonction définie sur $[A + \infty[$ par :

$$z(x) = y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{q(x)}.$$

8. Intégrer l'équation différentielle :

$$x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$$

9. On considère l'équation :

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

a) Intégrer cette équation pour $-1 < x < 1$ en posant $x = \sin t$.

b) Intégrer cette équation pour $x > 1$ et $x < -1$.

10. Soit (E) l'équation différentielle :

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$

En posant $z = xy$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

11. Soit (E) l'équation différentielle :

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \quad \text{avec} \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2.$$

a) En posant $z(t) = y(e^t)$, montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution d une équation du second ordre à coefficients constants que l'on donnera.

b) Quelle est la forme des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $\mathbb{R}_-^*$?

c) Resoudre l'equation :

$$x^2y'' - xy' + y = 0.$$

12. On considère l'équation différentielle suivante : $y' = y + x^2y^2$ pour laquelle, on admettra le résultat suivant : pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple (I, f) appelé solution maximale ~~de l'équa~~tion tel que f soit solution de l'équation sur I avec $f(x_0) = y_0$ et f n'admet pas de prolongement solution de l'équation à un intervalle qui contient strictement I. Donner l'expression des solutions maximales de cette équation.

13. Résoudre l'équation différentielle $y' = (y-x)^2$.

14. Trouver toutes les applications f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ . \ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

15 Trouver toutes les applications f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f'(x) = f(\lambda - x).$$

16. Trouver toutes les applications f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x > 0\,,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

(on pourra utiliser l'exercice 11).

17. **a)** Expliquer comment trouver des solutions d'une équation différentielle du type $f(x) + g(y)y' = 0$.

b) Trouver des solutions des équations différentielles suivantes :

i) $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$

ii) $y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}\cdot$ Y a–t–il unicité des solutions au problème de Cauchy ? Quelles sont les formes des courbes intégrales ?

iii) $xe^{x+y} = yy'$. Montrer qu'il y a une solution sur $\mathbb{R}_+^*$. (On n essayera pas d'exprimer les solutions à l'aide des fonctions usuelles.)

Chapitre 6

Courbes paramétrées

Dans ce chapitre, tous les intervalles utilisés contiennent au moins deux points. Le plan euclidien est identifié à $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un repère orthonorme.

1. Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On note, pour $t \in I$:

$$f(t) = \big(x(t), y(t)\big).$$

Les fonctions x et y sont appelées *fonctions composantes* de f.

Définition 1

La fonction f est *derivable* si ses fonctions composantes x et y sont dérivables. La dérivée de f est alors définie par :

$$f'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big).$$

Remarques

- La fonction f est dérivable si, et seulement si la fonction complexe $x + i\,y$ est dérivable. On a donc les mêmes proprietés que pour ces dernières.
- De la même façon on définit les dérivées successives de f lorsqu'elles existent.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est *de classe* C^k sur I si f est k fois dérivable et que sa dérivée $k^{ème}$ est continue sur I

- On dit que f est *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f admet des dérivées à tout ordre
- Dans toute la suite de ce chapitre, on considère $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
- On peut définir de la même façon la dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ voire dans $\mathbb{R}^n$.

1.2 Propriétés

Proposition 1

Si $(u,v) \mapsto u \cdot v$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$, et si f_1, f_2 sont deux applications dérivables sur I, alors l'application $f_1 \cdot f_2 \ : \ t \mapsto f_1(t) \cdot f_2(t)$ est dérivable sur I et :

$$\forall a \in I\,,\ (f_1 \cdot f_2)'(a) = f_1'(a) \cdot f_2(a) + f_1(a) \cdot f_2'(a).$$

émonstration En notant (x_1, y_1) et (x_2, y_2) respectivement les fonctions composantes de f_1 et f_2, on a :

$$f_1 \cdot f_2 = x_1\, x_2 + y_1\, y_2$$

ce qui prouve la dérivabilité de $f_1 \cdot f_2$ et donne :

$$(f_1 \cdot f_2)' = x_1'\, x_2 + y_1'\, y_2 + x_1\, x_2' + y_1\, y_2' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'. \qquad \square$$

Exemples

1. Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^2)$, alors l'application $\|f\|^2$ est dérivable sur I et $\left(\|f\|^2\right)' = 2f \cdot f'$.
   En particulier si la norme de f est constante, pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.
2. En composant par la fonction racine, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que si f est dérivable et ne s'annule pas, alors $\|f\|$ est derivable avec $\|f\|' = \dfrac{f \cdot f'}{\|f\|}$.

Proposition 2

Si f_1 et f_2 sont dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, alors $\mathrm{Det}(f_1, f_2)$ est dérivable et l'on a :

$$\forall a \in I\,,\ \left(\mathrm{Det}(f_1, f_2)\right)'(a) = \mathrm{Det}\left(f_1'(a), f_2(a)\right) + \mathrm{Det}\left(f_1(a), f_2'(a)\right).$$

emonstrat'on La démonstration est similaire à celle de la proposition précédente, avec :

$$\mathrm{Det}(f_1, f_2) = x_1\, y_2 - y_1\, x_2. \qquad \square$$

Remarques

- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soient les deux vecteurs :

$$\vec{u}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

  Si la fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est donnée en coordonnées polaires par :

$$f(t) = \rho(t)\, \vec{u}\big(\theta(t)\big)$$

  où ρ et θ sont des fonctions dérivables, alors f est dérivable et l'exemple de la page 166 montre l'égalité :

$$f'(t) = \rho'(t)\, \vec{u}\big(\theta(t)\big) + \rho(t)\, \theta'(t)\, \vec{v}\big(\theta(t)\big).$$

- Soit de même une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ donnée en coordonnées cylindriques par :

$$f(t) = \rho(t)\, \vec{u}\big(\theta(t)\big) + z(t)\, \vec{k}$$

  avec :

$$\vec{u}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\,,\ \vec{v}(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\,,\ \vec{k} = (0, 0, 1).$$

  Si les fonctions ρ, θ et z sont dérivables, alors f est dérivable et :

$$f'(t) = \rho'(t)\, \vec{u}\big(\theta(t)\big) + \rho(t)\, \theta'(t)\, \vec{v}\big(\theta(t)\big) + z'(t)\, \vec{k}$$

- En coordonnées sphériques, on pose :

$$\vec{U}(\theta, \varphi) = \sin\theta\, \vec{u}(\varphi) + \cos\theta\, \vec{k}$$

$$\vec{V}(\theta, \varphi) = \cos\theta\, \vec{u}(\varphi) - \sin\theta\, \vec{k}$$

$$\vec{W}(\theta, \varphi) = \vec{U}(\theta, \varphi) \wedge \vec{V}(\theta, \varphi) = \vec{v}(\varphi).$$

  Le point de coordonnées sphériques (r, θ, φ) est donc represente par $\overrightarrow{OM} = r\, \vec{U}(\theta, \varphi)$.
  Si les fonctions r, θ et φ sont dérivables, la fonction f définie par :

$$f(t) = r(t)\, \vec{U}\big(\theta(t), \varphi(t)\big)$$

  est dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$f'(t) = r'(t)\, \vec{U}\big(\theta(t), \varphi(t)\big) + r(t)\, \theta'(t)\, \vec{V}\big(\theta(t), \varphi(t)\big) + r(t)\, \sin\theta(t)\, \varphi'(t)\, \vec{W}\big(\theta(t), \varphi(t)\big).$$

2. Arc paramétré

2.1 Définitions

Définition 2

On appelle *arc paramétré,* ou *courbe paramétrée* de classe C^k tout couple (I, f), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de classe C^k de I dans $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble $f(I) = \{f(t) \mid t \in I\}$ est appelé *support* (ou *image*) de l'arc (I, f).

Exemples

1. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, \operatorname{ch} t) \end{array}$ définit un arc paramétré de classe C^∞ dont le support est le graphe de la fonction cosinus hyperbolique, courbe appelée *chaînette.*
2. Si φ est une fonction réelle de classe C^k sur un intervalle I, l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, \varphi(t)) \end{array}$ définit un arc paramétré dont le support est le graphe de la fonction φ. Un tel arc paramétré est appelé une *représentation cartésienne* ou un *arc cartésien.*
3. L'application $f : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$ définit un arc paramétré de classe C^∞ dont le support est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.
4. L'application $g : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos 2t, \sin 2t) \end{array}$ définit un arc paramétré de classe C^∞ dont le support est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Cet arc paramétré a le même support que le précédent mais les applications f et g ne sont pas égales et donc les arcs paramétrés correspondants ne sont pas égaux.

2.2 Interprétation cinématique

Lorsque l'étude d'un arc paramétré (I, f) correspond à l'étude, sur un intervalle de temps I, du mouvement d'un point mobile $M(t)$ dont la position à l'instant $t \in I$ est le point $f(t)$,

- le support de l'arc paramétré (I, f) est appelé *trajectoire* du mouvement
- les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ sont appelés respectivement *vitesse* et *accélération* du point $M(t)$ à l'instant t.

Dans la suite du chapitre, nous utiliserons parfois cet aspect cinématique en notant $M(t)$ au lieu de $f(t)$.

3. Étude locale d'un arc paramétré

3.1 Tangente en un point d'un arc paramétré

Définition 3

Soient (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ et t_0 un élément de I.

- L'arc (I, f) admet une *tangente* au point $M(t_0)$ si la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ admet une position limite quand t tend vers t_0, c'est–à–dire si l'on peut en trouver, au voisinage de t_0, un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ possédant une limite non nulle en t_0.
- La droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par cette limite est alors appelée *tangente* en $M(t_0)$ à l'arc paramétré (I, f).

Remarques

- L'existence d'une limite pour $\vec{u}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ signifie que les fonctions x et y admettent des limites α et β. La limite de $\vec{u}(t)$ est alors le vecteur (α, β).
- Cette définition de la tangente impose $M(t) \neq M(t_0)$ pour $t \neq t_0$ (au moins au voisinage de t_0). Cette propriété étant toujours satisfaite en pratique nous la supposerons vérifiée par la suite.
- On parle de *demi–tangentes* au point $M(t_0)$ si la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ admet un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ possédant des limites non nulles à droite et à gauche de t_0. Les *demi–tangentes* sont alors les demi–droites d'extrémité $M(t_0)$ et dirigées par ces limites.

Tangente en un point régulier

Définition 4

Soient (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ et t_0 un élément de I. Le point $M(t_0)$ de l'arc paramétré (I, f) est :

- un *point régulier* de l'arc (I, f) si $f'(t_0) \neq 0$,
- un point *stationnaire* ou *singulier* de l'arc (I, f) si $f'(t_0) = 0$.

L'arc (I, f) est *régulier* si tous ses points sont réguliers.

Exemples

1. Toute représentation cartésienne de classe $\mathcal{C}^k$:

$$\big(x = t\,,\ y = g(t)\big)$$

définit un arc paramétré régulier, puisque $f'(t) = \big(1, g'(t)\big) \neq 0$.

2. Pour l'arc paramétré défini sur $[0, 4\pi]$ par :

$$\left(x = \cos t - 2\cos\frac{t}{2}\,,\ y = \sin t - 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

on a :

$$f'(t) = 0 \Longleftrightarrow t \equiv \frac{t}{2} \quad [2\pi].$$

Donc les points stationnaires sont les points de paramètre 0 et 4π les autres points étant réguliers.

3. L'arc paramétré défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left(x = t^2 - 2t\,,\ y = \frac{2}{3}t^3 - 2t\right)$$

possède pour unique point singulier le point de paramètre 1.

Proposition 3

Si (I, f) est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ dont $M(t_0)$ est un point régulier alors l'arc (I, f) admet en $M(t_0)$ une tangente dirigee par le vecteur $f'(t_0)$.

emonstratio Pour $t \neq t_0$, le vecteur :

$$\vec{u}(t) = \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

est un vecteur directeur de la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ et l'on a :

$$\lim_{t \to t_0} \vec{u}(t) = f'(t_0) \neq 0$$

ce qui prouve le résultat □

3.2 Tangente en un point singulier

Proposition 4

Posons $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Si l'on a :

- $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = m \in \mathbb{R}$ alors au point de paramètre t_0, la courbe admet une tangente de pente m.
- $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}\right| = +\infty$, alors au point de paramètre t_0, la courbe admet une tangente parallèle à Oy.

émonstratio En effet, dans les deux cas $\alpha(t) = \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ est defini au voisinage de t_0 et :

- si $\lim\limits_{t_0} \alpha = m$, le vecteur $\big(1, \alpha(t)\big)$ est un vecteur directeur de la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ et il tend vers $(1, m)$;
- si $\lim\limits_{t_0} |\alpha| = +\infty$, le vecteur $\big(1/\alpha(t), 1\big)$ est un vecteur directeur de la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ et il tend vers $(0, 1)$. □

Remarques

- Les variations de x et y permettent de préciser dans quel(s) quadrant(s) autour du point $M(t_0)$ se trouve la courbe.
- Il peut être bon de déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente :
  - si celle–ci est parallèle à Ox (respectivement à Oy), les variations de y (respectivement de x) permettent de préciser cette position ;
  - si la tangente a pour pente m, on peut étudier le signe de la quantité $y(t) - y(t_0) - m\big(x(t) - x(t_0)\big)$.
- Nous verrons page 514 comment à l'aide d'un développement limité, on peut déterminer la tangente et la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exemples

1. En $t = 0$, la courbe paramétrée par :

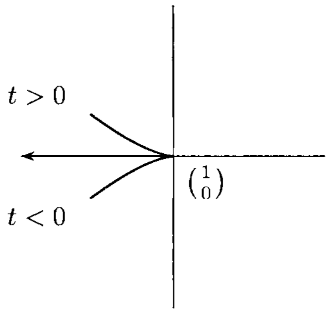
$$x(t) = \cos t \qquad \text{et} \qquad y(t) = \sin^3 t$$

admet un point stationnaire de coordonnées $(1, 0)$. Comme :

$$\frac{y(t)}{x(t)-1} = \frac{8\sin^3(t/2)\,\cos^3(t/2)}{-2\sin^2(t/2)} = -4\sin(t/2)\,\cos^3(t/2) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

l'axe Ox est en ce point tangent à la courbe.

Les variations de x et y donnent la position par rapport à la tangente :



Il s'agit ici d'un *point de rebroussement.*

2. Soit la courbe paramétrée sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

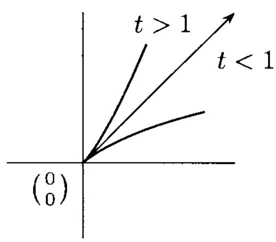
$$x(t) = \frac{(t-1)^2}{t} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{(t-1)^2}{t^2}.$$

On a $x'(t) = (t^2-1)/t^2$ et $y'(t) = 2(t-1)/t^3$ d'où les variations au voisinage de 1 :

t	1
x	$\searrow 0 \nearrow$
y	$\searrow 0 \nearrow$

ce qui permet de voir que la courbe reste, au voisinage de 1, dans le premier quadrant.

Comme $y/x = 1/t \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$, il y a une tangente d'équation $y = x$, et la position de $y(t)/x(t)$ par rapport à 1 donne la position de $M(t)$ par rapport à cette tangente. D'où l'allure de la courbe au voisinage de 1 :



4. Branches infinies

Dans cette section :

- (I, f) est un arc paramétré, avec $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$,
- t_0 est une extrémité de I n'appartenant pas à I (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$).

Définition 5

L'arc (I, f) admet une *branche infinie* en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \big\|f(t)\big\| = +\infty$.

Remarques

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \big|x(t)\big| = +\infty$ ou $\lim\limits_{t \to t_0} \big|y(t)\big| = +\infty$ alors l'arc paramétré (I, f) admet évidemment une branche infinie en t_0.
- Toutefois l arc (I, f) peut admettre une branche infinie en t_0 sans que l'on ait $\lim\limits_{t \to t_0} \big|x(t)\big| = +\infty$ ou $\lim\limits_{t \to t_0} \big|y(t)\big| = +\infty$, comme par exemple :

$$\big(x(t) = t\cos t\,,\ y(t) = t\sin t\big) \qquad \text{avec} \qquad t_0 = +\infty.$$

4.1 Asymptote

Dans toute la suite on suppose que l'arc (I, f) admet une branche infinie en t_0.

Définition 6

On dit qu'une droite $\mathcal{D}$ est *asymptote* à l arc (I, f) en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} d\big(M(t), \mathcal{D}\big) = 0$.

Proposition 5

L'arc (I, f) admet la droite $\mathcal{D}$ d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$ comme asymptote en t_0 si, et seulement si, l'on a :

$$\lim_{t \to t_0} a\,x(t) + b\,y(t) + c = 0.$$

émonstration Conséquence de l'égalité $d\big(M(t), \mathcal{D}\big) = \dfrac{\big|a\,x(t) + b\,y(t) + c\big|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. □

Exemples

1. Si (I, f) est un arc paramétré tel que $\lim\limits_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$ la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à l'arc (I, f) en t_0, la position de l'arc par rapport à l'asymptote étant donnee par le signe de $y(t) - y_0$.
2. Si (I, f) est un arc paramétré tel que $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty$, la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à l arc (I, f) en t_0, la position de l'arc par rapport à l'asymptote étant donnée par le signe de $x(t) - x_0$.
3. Dans le cas général d'une asymptote d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $a\,x(t) + b\,y(t) + c$.

4.2 Méthode de recherche d'une asymptote

Une seule des coordonnées tend vers l'infini en t_0

Lorsque x tend vers l'infini et que y admet une limite finie y_0, on a immédiatement une asymptote parallèle à Ox. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est alors donnée par les variations de y qui indiquent le signe de $y - y_0$.

De même, lorsque y tend vers l'infini et que x admet une limite finie, on a une asymptote parallèle à Oy et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est alors donnée par les variations de x.

Les deux coordonnees tendent vers l'infini

On suppose que $|x|$ et $|y|$ tendent vers l'infini. Si la courbe admet une asymptote, celle–ci ne peut pas être parallèle à Oy puisque x tend vers l'infini. Elle a donc une équation du type $y = a\,x + b$ et l'on a alors $y(t) = a\,x(t) + b + \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$ d'après la proposition 5 de la page précédente. On a ainsi :

- $\dfrac{y(t)}{x(t)} = a + \dfrac{b}{x(t)} + \dfrac{\varepsilon(t)}{x(t)}$ et donc $a = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$,
- $b = \lim\limits_{t \to t_0} \big(y(t) - a\,x(t)\big)$.

S'il existe une asymptote en t_0, celle–ci est donc unique.

Ainsi, pour étudier l'existence d'une asymptote en t_0 on commence par étudier y/x.

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$, d'après ce qui précède, une asymptote éventuelle ne peut être que parallèle à la droite d équation $y = a\,x$. On dit que la courbe admet cette droite pour *direction asymptotique*.

- Lorsque $a = 0$ comme y tend vers l'infini il ne peut pas y avoir d asymptote. Il s'agit d'une *branche parabolique* de direction asymptotique Ox.

  Lorsque $a \neq 0$:
  - ⋆ si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - a\,x(t) = b$, la courbe admet comme asymptote la droite d équation $y = a\,x + b$, et la position par rapport à l asymptote est donnée par le signe de $y(t) - a\,x(t) - b$
  - ⋆ si $\lim\limits_{t \to t_0} \left|y(t) - a\,x(t)\right| = +\infty$, il y a une branche parabolique de pente a,
  - ⋆ dans les autres cas (rares en pratique), il n'y a ni asymptote, ni branche parabolique.

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right| = +\infty$, il n'y a pas d'asymptote. Il s'agit d'une branche parabolique de direction asymptotique Oy.
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right|$ n'existe pas, il n'y a pas de direction asymptotique, et donc pas d'asymptote.

Exemple Étude de la branche infinie en $t = 1$ de l'arc paramétré défini sur $]-1, 1[$ par :

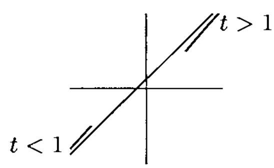
$$\left(x(t) = \frac{t}{t^4 - 1}, \ y(t) = \frac{t^2}{t^4 - 1}\right).$$

On a :

- $\lim\limits_{t \to 1} |x(t)| = \lim\limits_{t \to 1} |y(t)| = +\infty$.
- $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t$ et donc $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$.
- $y(t) - x(t) = \dfrac{t}{(t+1)(t^2+1)}$ et donc $\lim\limits_{t \to 1} \big(y(t) - x(t)\big) = \dfrac{1}{4}$.

  Par conséquent, la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{4}$ est asymptote à l'arc en $t = 1$.
- $$\begin{aligned} y(t) - x(t) - \frac{1}{4} &= \frac{t}{(t+1)(t^2+1)} - 1/4 \\ &= -\frac{1}{4}(t-1)\frac{t^2 + 2t - 1}{(t+1)(t^2+1)}. \end{aligned}$$

  Comme $\dfrac{t^2 + 2t - 1}{(t+1)(t^2+1)}$ est positif au voisinage de $t = 1$, on en déduit que l'arc, au voisinage de $t = 1$ est en dessous de l'asymptote pour $t > 1$ et au dessus pour $t < 1$.



Dans cet exemple, l'étude du signe de $\dfrac{(1-t)(t^2+2t-1)}{(t+1)(t^2+1)}$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote sur tout le domaine de définition.

Remarque Nous verrons page 520 comment les développements limités peuvent simplifier l'étude des asymptotes.

5. Tracé des courbes paramétrées

Dans la pratique, on se donne une application $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ où D est une partie de $\mathbb{R}$ qui est réunion d'intervalles disjoints I_k non réduits à un point Par extension, on dit encore que l'on a affaire à une courbe paramétrée, dont le support, l'ensemble $\{f(t) \mid t \in D\}$ est la réunion des supports des arcs paramétrés $(I_k, f_{|I_k})$.

Dans la suite de cette section, Γ désigne une courbe paramétrée donnée par une application f de D dans $\mathbb{R}^2$, les coordonnées du point courant $M(t)$ étant $\big(x(t), y(t)\big)$.

5.1 Réduction du domaine

Réduction du domaine de description totale

Il est parfois possible de tracer tout le support d une courbe paramétrée sans faire varier le paramètre sur la totalité du domaine D où f est définie.

Exemples

1. Soit Γ la courbe paramétrée :

$$(x = \sin 2t\,,\ y = \cos 3t) \qquad \text{avec} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Comme $f(t + 2\pi) = f(t)$, la courbe est entièrement décrite dans un intervalle I d'amplitude 2π et il suffit de tracer :

$$(x = \sin 2t\,,\ y = \cos 3t) \qquad \text{avec} \qquad t \in [a, a + 2\pi].$$

2. Soit Γ la courbe paramétrée :

$$(x = \cos 2t\,,\ y = \sin 3t) \qquad \text{avec} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Comme $f(t + 2\pi) = f(t)$, la courbe est entièrement décrite dans un intervalle $[a, a + 2\pi]$ d'amplitude 2π.
- Comme $f(\pi - t) = f(t)$, les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont identiques et si l'on prend a tel que l'intervalle $[a, a + 2\pi]$ soit symétrique par rapport à $\pi/2$, c'est-à-dire $a = -\pi/2$, on voit que le support de Γ est égal au support de :

$$(x = \cos 2t\,,\ y = \sin 3t) \qquad \text{avec} \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Réduction du domaine d'étude : symétries, translations

Certaines propriétés de f correspondent à des invariances du support par symétrie ou translation. Dans ce cas, on trace une partie de la courbe que l'on complète ensuite avec la transformation correspondante.

Exemples

1. Soit Γ la courbe parametrée :

$$(x = t - \sin t\,,\ y = 1 - \cos t) \qquad \text{avec} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Comme $f(t + 2\pi) = f(t) + 2\pi\vec{\imath}$, la courbe Γ est invariante par des translations de vecteur $2k\pi\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il suffit donc de tracer Γ_1 :

  $$(x = t - \sin t\,.\ y = 1 - \cos t) \qquad \text{avec} \qquad t \in [a.a + 2\pi]$$

  et de completer par ces translations.
- Comme :

  $$x(-t) = -x(t) \qquad \text{et} \qquad y(-t) = y(t),$$

  si l'on choisit $a = -\pi$ alors Γ_1 est symétrique par rapport à Oy. Il suffit donc de tracer :

  $$(x = t - \sin t\,,\ y = 1 - \cos t) \qquad \text{avec} \qquad t \in [0.\pi]$$

  puis de compléter par la symétrie par rapport à Oy pour avoir Γ_1.

2. Soit Γ la courbe paramétrée :

$$(x = \sin 3t\,,\ y = \sin 5t) \qquad \text{avec} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Comme f est 2π-periodique, on peut limiter à un intervalle du type $I_a = [a, a + 2\pi]$
- Comme $f(\pi - t) = f(t)$, la symétrie par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$ sur le paramètre laisse la courbe invariante. En prenant $a = -\dfrac{\pi}{2}$, l intervalle I_a est symétrique par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$, et l'on peut limiter l'étude à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
- La relation $f(-t) = -f(t)$ permet de faire l'étude sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis de compléter la courbe par une symétrie par rapport à O

3. La courbe paramétrée :

$$(x = \cos 2t\,,\ y = \sin 3t) \qquad \text{avec} \qquad t \in \mathbb{R}$$

est entièrement décrite sur $[-\pi/2, \pi/2]$ (*cf.* exemple 2. de la page ci-contre). La parité de x et l'imparite de y montrent que l on peut limiter l'étude à $[0, \pi/2]$ puis faire une symétrie par rapport à Ox.

5.2 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

- Déterminer le domaine de définition de f, le domaine de description totale.
- Déterminer le domaine d'étude et le trace D_1 et décrire les transformations géométriques, permettant de déduire toute la courbe de la partie construite
- Étudier les variations de x et de y sur D_1 et reproduire ces résultats dans un tableau de variations, en faisant figurer dans ce tableau les limites de x et de y aux bornes des intervalles d'étude.
- Étudier la forme de la courbe au voisinage des points stationnaires.
- Étudier les branches infinies et déterminer les asymptotes éventuelles ainsi que leurs positions par rapport à la courbe.
- Tracer l'allure de la courbe en utilisant les résultats précédents : tangentes parallèles aux axes, points stationnaires branches infinies, évolution du point $M(t)$ lorsque t décrit D_1, symétries et translations.

Exemples

1. Construire la courbe paramétree définie par :

$$(x(t) = \cos 3t\,,\ y(t) = \sin 2t)\,.$$

- Domaine d'étude : les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π–périodiques donc la courbe est obtenue entièrement lorsque t décrit l'intervalle $[-\pi,\pi]$
- Les relations :

$$x(-t) = x(t) \qquad \text{et} \qquad y(-t) = -y(t)$$

montrent que la courbe est symétrique par rapport à Ox et qu'on peut en limiter le tracé à $t \in [0,\pi]$. Les relations :

$$x(\pi - t) = -x(t) \qquad \text{et} \qquad y(\pi - t) = -y(t)$$

montrent que la courbe est symétrique par rapport à O et qu'on peut en limiter le tracé à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Cette partie étant tracée, une symétrie par rapport à O permet d'obtenir le tracé de la courbe sur $[0,\pi]$, puis une symétrie de ce tracé par rapport à Ox achève la construction.

- Variations de x et de y : pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

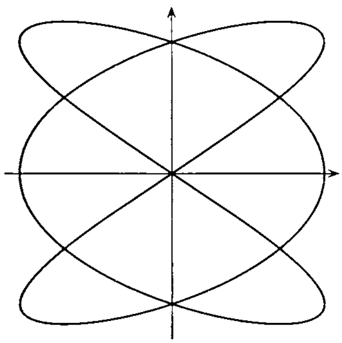
$$x'(t) = -3\sin 3t \qquad \text{et} \qquad y'(t) = 2\cos 2t$$

ce qui donne le tableau de variations :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0			$-$			0	$+$	3
$y'(t)$	2		$+$		0		$-$		-2
$x(t)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

La courbe ne présente donc pas de point stationnaire

- Tracé :



2. Construire la courbe paramétrée définie par :

$$\left(x(t) = 2t + \frac{1}{2t+1}\,,\ y(t) = t^2 - \frac{1}{2t+1}\right)$$

- Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
- Variations de x et de y : pour $t \in D$ on a :

$$x'(t) = \frac{8t(t+1)}{(2t+1)^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{2(t+1)(4t^2+1)}{(2t+1)^2}.$$

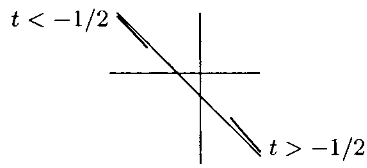
d'où le tableau de variations :

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$y'(t)$		$-$	0	$+$	‖		$+$		
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- Branches infinies :
  - $\lim\limits_{\pm\infty} |x| = \lim\limits_{\pm\infty} |y| = \lim\limits_{\pm\infty} \left|\dfrac{y}{x}\right| = +\infty$, donc la courbe admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique Oy.
  - $\lim\limits_{-1/2} |x| = \lim\limits_{-1/2} |y| = +\infty$.

    Comme on a $y(t) + x(t) = t^2 + 2t$, on en déduit que la courbe admet la droite d'équation $y + x = -\dfrac{3}{4}$ comme asymptote en $t = -\dfrac{1}{2}$.

    Les variations de $t^2 + 2t$ entraînent que la courbe est au dessus de son asymptote en $\left(-\frac{1}{2}\right)^+$ et en dessous en $\left(-\frac{1}{2}\right)^-$



- Étude du point stationnaire :

$$y(t) - 2 = \frac{(2t-3)\,(t+1)^2}{2t+1} \qquad \text{et} \qquad x(t) + 3 = \frac{4(t+1)^2}{2t+1}$$

et donc :

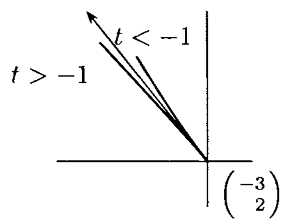
$$\frac{y(t)-2}{x(t)+3} = \frac{2t-3}{4} \underset{t\to -1}{\longrightarrow} -\frac{5}{4}.$$

Ainsi, la courbe admet en ce point une tangente de pente $-\dfrac{5}{4}$.

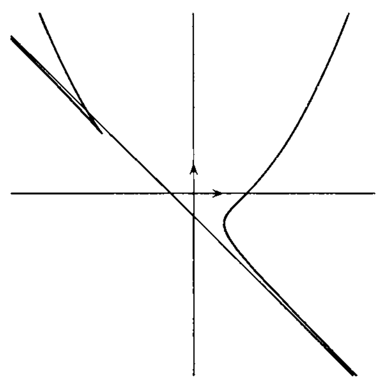
Au vu des variations de x et y, la courbe se trouve au voisinage de -1, dans le deuxième quadrant autour du point $(-3, 2)$.

La position par rapport à la tangente est donnée par le signe de :

$$\big(y(t) - 2\big) + \frac{5}{4}\big(x(t) + 3\big) = \frac{2(t+1)^3}{2t+1}.$$



- Tracé :



6. Courbes en coordonnées polaires

6.1 Représentation polaire

Si ρ et θ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I on peut définir une courbe paramétrée (I, f) par :

$$f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \rho(t)\,\vec{u}\big(\theta(t)\big) \end{array}$$

où $\big(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\big)$ désigne le repère polaire.

Remarque On a donc $\|f(t)\| = |\rho(t)|$ (on ne suppose rien concernant le signe de ρ).

6.2 Vitesse et accélération

Pour une courbe de représentation polaire $f(t) = \rho(t)\,\vec{u}\big(\theta(t)\big)$, avec des fonctions ρ et θ de classe $\mathcal{C}^k$, pour $k \geqslant 2$, les règles de dérivation des fonctions vectorielles nous donnent :

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u},$$

puisque $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\vec{v} = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Donc la vitesse est donnée en représentation polaire par :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \rho'(t)\,\vec{u}\big(\theta(t)\big) + \rho(t)\,\theta'(t)\,\vec{v}\big(\theta(t)\big)$$

encore notee :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \rho'\,\vec{u} + \rho\,\theta'\,\vec{v}$$

et l'accélération vaut :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\rho'' - \rho\,\theta'^2)\,\vec{u} + (2\rho'\,\theta' + \rho\,\theta'')\,\vec{v}.$$

6.3 Tangente

Dans le cas particulier où la représentation polaire est $\theta \mapsto \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$, on dit que la courbe a une équation polaire $r = \rho(\theta)$. Le vecteur dérivé est alors :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'(\theta)\,\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\,\vec{v}(\theta).$$

On s'aperçoit que, dans ce cas, seule l'origine peut être un point singulier et qu en dehors de ce point la tangente fait un angle V avec le vecteur $\vec{u}(\theta)$ où V est défini modulo 2π par :

$$\cos V = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin V = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$$

ou modulo π par $\operatorname{cotan} V = \rho'/\rho$.

6.4 Étude d'une courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$

Dans la suite de cette section, Γ désigne une courbe d équation polaire $r = \rho(\theta)$ où ρ est une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Un couple de coordonnées polaires du point courant $M(\theta)$ est donc $\big(\rho(\theta), \theta\big)$.

6.5 Réduction du domaine

Domaine de description totale

- Souvent la fonction ρ est 2π–périodique, ce qui permet, pour tracer toute la courbe de l'étudier seulement sur un intervalle de longueur 2π.

  Il en est de même si la fonction ρ est $2n\pi$–périodique avec $n \in \mathbb{N}$.

- De même, si $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$, alors la courbe est entièrement décrite sur un intervalle de longueur π. En effet, les deux points de coordonnées polaires (r, θ) et $(-r, \theta + \pi)$ sont confondus.

Symétries

Certaines propriétés de ρ (parité, imparité, π–périodicité) correspondent à des invariances par symétrie.

Exemples

1. Si $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$, alors la courbe est symétrique par rapport à O. Il suffit de tracer la partie obtenue en faisant varier θ dans un intervalle d'amplitude π puis de compléter par symétrie par rapport à O.

2. La cardioïde d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ est totalement décrite dans un intervalle d'amplitude 2π. Si l'on choisit cet intervalle égal à $[-\pi, \pi]$, la relation $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ nous dit que la courbe est symétrique par rapport à Ox. On peut donc limiter le tracé à $\theta \in [0, \pi]$ puis compléter par une symétrie par rapport à Ox.

6.6 Étude locale au pôle

Soit θ_0 une valeur pour laquelle $\rho(\theta_0) = 0$, c'est-à-dire pour laquelle le point $M(\theta_0)$ se trouve au pôle O.

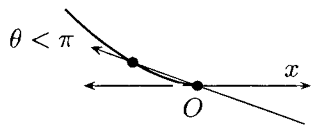
Comme le vecteur $\vec{u}(\theta)$ dirige la droite $\big(OM(\theta)\big)$ et comme $\vec{u}(\theta) \underset{\theta\to\theta_0}{\longrightarrow} \vec{u}(\theta_0)$, la courbe admet comme tangente la droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$.

Dans le repère polaire$(O, \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0))$, les coordonnées du point $M(\theta)$ sont $\big(X(\theta), Y(\theta)\big)$ avec :

$$X(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \qquad \text{et} \qquad Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0).$$

ce qui donne les signes de X et Y au voisinage de θ_0.

Exemple À l'origine ($\theta = \pi$) la cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$ est tangente à la droite d'angle polaire π et la positivité de r nous donne l'allure suivante au voisinage de π :



6.7 Étude locale en un point différent du pôle

Soit θ_0 une valeur pour laquelle $\rho(\theta_0) \neq 0$, c'est-à-dire pour laquelle le point $M(\theta_0)$ ne se trouve pas au pôle O.

Le vecteur :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta_0) = \rho'(\theta_0)\,\vec{u}(\theta_0) + \rho(\theta_0)\,\vec{v}(\theta_0)$$

est alors non nul et il dirige donc la tangente à la courbe au point de paramètre θ_0.

Classiquement on appelle $V(\theta_0)$ l'angle de la droite $(O, \vec{u}(\theta_0))$et de la tangente. En utilisant les composantes de $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on obtient :

$$\operatorname{cotan} V = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Remarque La tangente à la courbe au point $M(\theta_0)$ est perpendiculaire à la droite $(OM(\theta_0))$ si et seulement si $\rho'(\theta_0) = 0$.

6.8 Étude des asymptotes

On suppose que $|\rho(\theta)|$ tend vers $+\infty$ lorsque θ tend vers θ_0.

Cas où $\theta_0 = 0$

- La rapport $y/x = \tan\theta$ tend vers 0, donc la courbe admet l'axe Ox pour direction asymptotique.
- Il y a alors une asymptote si, et seulement si, $y = \rho(\theta)\,\sin\theta$ admet une limite finie.
  Si y tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, il y a une branche parabolique.

Cas général

La courbe se déduit de la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta_0 + \theta)$ par une rotation d'angle θ_0. On se ramène donc au cas précédent, ce qui prouve l'existence d une direction asymptotique d'angle polaire θ_0.

- Si $\theta_0 \equiv \pi/2 \quad [2\pi]$, l'étude de $x = \rho(\theta)\,\cos\theta$ ou de $y = \rho(\theta)\,\sin\theta$ permet de trouver l'asymptote éventuelle.
- Sinon, on se place dans le repère $\big(O, \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0)\big)$, c'est–à–dire que l'on étudie la limite éventuelle de $Y(\theta) = \rho(\theta)\,\sin(\theta - \theta_0)$.

Exemples

1. Étude de la branche infinie en $\frac{\pi}{3}$ de la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{\theta}{\theta - \frac{\pi}{3}}\cdot$

   Au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ on a :
   $$\rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \theta\,\frac{\sin(\theta - \pi/3)}{\theta - \pi/3} \underset{\theta\to\pi/3}{\longrightarrow} \frac{\pi}{3}$$
   et la droite d'équation $Y = \frac{\pi}{3}$ dans le repère polaire $\big(O, \vec{u}(\frac{\pi}{3}), \vec{v}(\frac{\pi}{3})\big)$ est asymptote à la courbe en $\dfrac{\pi}{3}\cdot$

2. La courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$ admet des branches infinies en 0 et $\pi/2$ (les autres s'en déduisant par symétries).
   - En 0 on étudie :
     $$y = r\,\sin\theta = \tan\theta + 1 \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 1$$
     ce qui donne une asymptote d'équation $y = 1$.
     De plus, le signe de $y - 1 = \tan\theta$ donne la positon par rapport à cette asymptote.
   - En $\pi/2$, on étudie $x = 1 + \operatorname{cotan}\theta$, ce qui donne une asymptote d'équation $x = 1$, la position de la courbe étant donnée par le signe de $x - 1 = \operatorname{cotan}\theta$.

6.9 Plan d'étude

- Déterminer le domaine de définition D de ρ, puis un domaine de description totale de la courbe et enfin le domaine de tracé D_1
- Étudier le signe de ρ sur D_1 et résumer les résultats dans un tableau en complétant avec les limites aux bornes. La plupart du temps il est inutile d'étudier les variations de ρ.
- Étudier les branches infinies et déterminer les asymptotes éventuelles et, si possible leur position par rapport à la courbe.
- En utilisant les résultats précédents et en déterminant quelques tangentes en des points particuliers (intersection avec les axes par exemple) tracer l'allure de la courbe décrite par M pour $\theta \in D_1$.

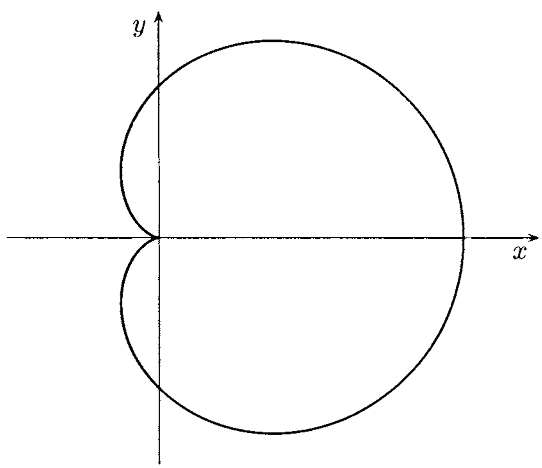
  Compléter, le cas échéant le dessin obtenu en effectuant les symétries nécessaires.

Exemples

1. Cardioïde d équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.
   - L'étude se fait sur $[0, \pi]$ avec une symétrie par rapport à Ox.
   - L'étude au pôle a déjà été faite page 221.
   - On a $\operatorname{cotan} V = -\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = -\tan(\theta/2)$.

θ	0	$\pi/2$	π
r	2	1	0
V	$\pi/2$	$-\pi/4$	

   - Courbe :

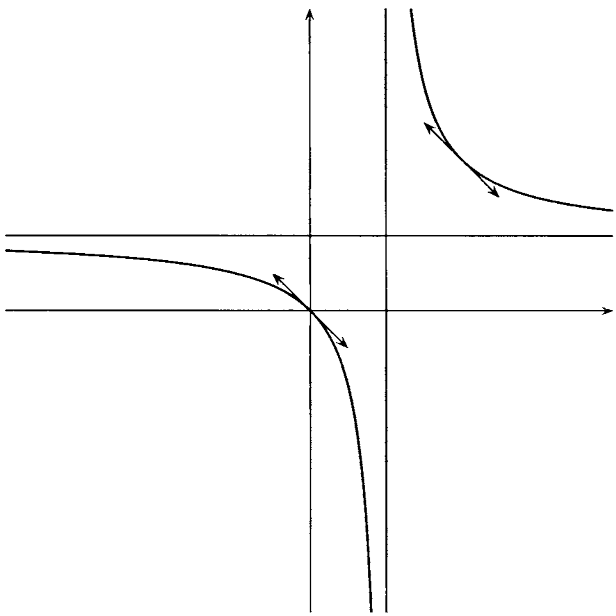


2. Courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}\cdot$

- La courbe est entièrement décrite sur tout intervalle de longueur π puisque $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta)$.
- Pour pouvoir utiliser la relation $\rho(\pi/2 - \theta) = \rho(\theta)$, on prend l'intervalle précédent symétrique par rapport à $\pi/4$ et l'on peut limiter l'étude à $[-\pi/4, \pi/4]$ puis compléter la courbe par une symétrie par rapport à la première bissectrice.
- La courbe passe par l'origine pour $\theta = -\pi/4$ avec donc pour tangente la deuxième bissectrice. La position par rapport à la tangente est donnée par le signe de r.
- Signe de r :

θ	$-\pi/4$		0		$\pi/4$
r	0	$-$	‖	$+$	$2\sqrt{2}$
$\operatorname{cotan} V$			‖		0

- L'asymptote en 0 a été étudiée page 222.
- Courbe :



Remarque Les égalités $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ donnent aussitôt :

$$x = 1 + \operatorname{cotan}\theta \qquad \text{et} \qquad y = 1 + \tan\theta.$$

Donc $(x-1)(y-1) = 1$, c'est-à-dire $xy = x + y$.

Réciproquement, si $x\,y = x + y$, on a $r^2 \sin\theta \cos\theta = r\,(\sin\theta + \cos\theta)$.

- Si $\theta \equiv 0 \quad [\pi/2]$, on a $x = 0$ ou $y = 0$ et donc $x = y = 0$. Le point est donc sur la courbe.
- Sinon, on a $r = 0$ ou $r = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$ et le point est encore sur la courbe.

La courbe étudiée est donc l'hyperbole d'équation $(x-1)\,(y-1) = 1$.

EXERCICES

1. La normale en un point M de la parabole d'équation cartésienne $x = y^2$ recoupe cette parabole en N. La parallèle en M à la tangente en N coupe la parallèle en N à la tangente en M en un point P. Déterminer le lieu de P et le tracer.

2. **a)** Etudier la courbe paramétrée Γ définie par :

$$x = \ln|1-t| \qquad \text{et} \qquad y = \ln|1+t|.$$

b) Pour quels points M de Γ peut–on trouver des points M_1 et M_2 tels que les tangentes à Γ en M, M_1 et M_2 forment un triangle équilatéral ? Déterminer alors les paramètres t_1 et t_2 de ces deux points en fonction du paramètre t de M et en deduire un paramétrage du lieu $\mathcal{C}$ des isobarycentres de M, M_1 et M_2.

c) Exprimer $\tan 3\theta$ en fonction de $\tan\theta$ et en deduire que $\mathcal{C}$ se déduit de Γ par une homothétie.

3. Soit Γ la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

a) Montrer qu'une droite du plan coupe cette courbe en au plus trois points.

b) Réciproquement, on se donne trois points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$. Donner une condition nécéssaire et suffisante portant sur t_1, t_2 et t_3 pour que les trois points soient alignés.

c) La tangente en $M(t)$ recoupe la courbe en $M(t')$. Exprimer t' en fonction de t.

d) Soient $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ trois points alignés de la courbe. Les tangentes en ces points recoupent la courbe respectivement en $M(t'_1)$, $M(t'_2)$ et $M(t'_3)$. Montrer que ces trois points sont alignés.

4 **a)** Construire la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Montrer en particulier que la courbe admet un axe de symétrie.

b) Montrer que l'ensemble des points par lesquelles passent deux tangentes à la courbe orthogonales entre elles est une droite dont on donnera l'équation.

5 Soit C un cercle du plan de centre 0 et de rayon R, soit D une droite telle que $d(O, D) > R$. D'un point P de D, on mène les tangentes au cercle C, les points de tangence étant notés M et M'. Étudier la courbe décrite par G isobarycentre de P, M et M' lorsque P décrit D.

6. **a)** Tracer la courbe d'équation $\rho = \dfrac{1}{\cos^3 \frac{\theta}{3}}$.

b) Montrer qu'une droite passant par O et d'angle polaire θ coupe la courbe en trois points et que les tangentes en ces trois points à la courbe sont les côtés d'un triangle équilatéral.

7. Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = 1 + \tan \dfrac{\theta}{2}$.

Montrer que la courbe a un point double en lequel les tangentes sont orthogonales.

Chapitre 7

Coniques

Dans tout ce chapitre, E est le plan euclidien.

1. Ellipses, hyperboles, paraboles

1.1 Définition monofocale

Définition 1

Soient $\mathcal{D}$ une droite, $F \notin \mathcal{D}$ un point du plan et e un réel strictement positif L'ensemble :

$$\mathcal{C} = \{M \mid d(F, M) = e\, d(M, \mathcal{D})\}$$

est appelé :

- *hyperbole* si $e > 1$,
- *ellipse* si $e < 1$,
- *parabole* si $e = 1$.

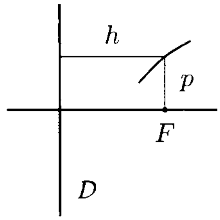
Le point F est appele *foyer* de $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}$, *directrice* associée au foyer F et e est l'*excentricité*.

L'ensemble $\mathcal{C}$ est appelé *conique* d'excentricité e, de foyer F et de directrice associée $\mathcal{D}$.

La droite contenant F et orthogonale à $\mathcal{D}$ est appelée l'*axe focal*.

Remarques

- Il est évident que l'axe focal est un axe de symetrie de $\mathcal{C}$.
- Si h est la distance du foyer F à la directrice $\mathcal{D}$, le réel $p = e\,h$ est appelé *paramètre.* Il correspond à la distance de F à chacun des deux points de $\mathcal{C}$ situés sur la droite passant par F et parallèle à $\mathcal{D}$.



1.2 Étude des paraboles

Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. Prenons un repère orthonormé centre en F dans lequel $\mathcal{D}$ admet pour équation $x = -p$, avec $p \neq 0$ (le paramètre de la parabole est alors $|p|$). Pour un point M de coordonnées (x, y), on a alors :

$$d(M,F)^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{et} \qquad d(M,\mathcal{D})^2 = (x+p)^2.$$

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc :

$$y^2 - 2p\,x - p^2 = 0$$

ou encore :

$$y^2 - 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

En prenant pour nouvelle origine le point de coordonnées $(-p/2, 0)$ appelé *sommet de la parabole,* on obtient une *équation réduite* de $\mathcal{P}$:

$$Y^2 = 2p\,X.$$

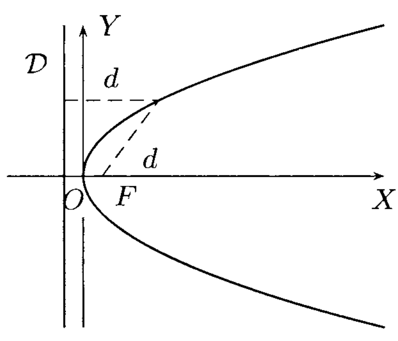
Réciproquement, au vu du calcul précédent si $p \neq 0$ la courbe d'équation $Y^2 = 2p\,X$ dans un repère orthonormé OXY est la parabole dont le foyer a pour coordonnées $(p/2, 0)$ et la directrice associée pour équation $X = -p/2$. L'origine du repère est le sommet de la parabole ; c est son unique point d'intersection avec l'axe focal.

Paramétrage

La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $Y^2 = 2p\,X$ peut se paramétrer par :

$$\left(X = 2p\,t^2\,,\ Y = 2p\,t\right) \qquad \text{avec} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Comme on a $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{Y}{X} = 0$, la parabole possède deux branches paraboliques (!) de direction asymptotique OX.



1.3 Étude des ellipses

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'excentricité $e < 1$, de foyer F et de directrice associee $\mathcal{D}$. Prenons un repère orthonormé centré en F dans lequel $\mathcal{D}$ admet pour équation $x = -h$, avec $h > 0$. Pour un point M de coordonnées (x, y), on a alors :

$$\begin{aligned} d(F, M) = e\, d(M, \mathcal{D}) &\Longleftrightarrow x^2 + y^2 = e^2\,(x+h)^2 \\ &\Longleftrightarrow x^2\,(1-e^2) + y^2 - 2h\, e^2\, x - e^2\, h^2 = 0. \end{aligned}$$

Comme $e < 1$, en posant $X = x - \dfrac{h\, e^2}{1-e^2}$ et $Y = y$, une équation de $\mathcal{E}$ s'écrit donc :

$$X^2 + \frac{Y^2}{1-e^2} = \alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{h^2 e^2}{(1-e^2)^2} > 0. \tag{$*$}$$

On obtient ainsi une *équation réduite* de l'ellipse $\mathcal{E}$ dans un repère orthonormé :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \dfrac{e\, h}{1-e^2}$ et $b = a\sqrt{1-e^2} < a$. Dans ce repère, le foyer F a pour coordonnées $(-c, 0)$ avec $c = \dfrac{h\, e^2}{1-e^2} = e\, a$.

Réciproquement, si $0 < b < a$, la courbe d'équation $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé OXY est une ellipse puisqu'il suffit de prendre $e \in \,]0, 1[$ tel que $1 - e^2 = b^2/a^2$ puis $h = \dfrac{(1-e^2)\, a}{e}$ pour obtenir l'équation $(*)$.

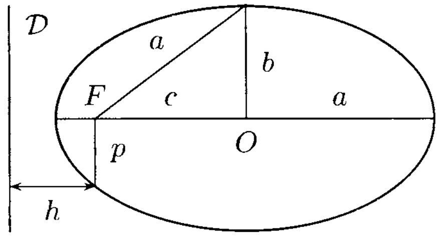
- L axe focal OX est aussi appelé *grand axe*. Il coupe l'ellipse aux deux points de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$.

  Le réel a est appelé *demi–axe focal*, ou *demi–grand axe*.

- La droite OY est aussi un axe de symétrie. On l'appelle *petit axe* ou *axe non focal*. Il coupe l'ellipse aux deux points de coordonnées $(0, b)$ et $(0, -b)$.

  Le réel b est appele *demi–axe non focal*, ou *demi–petit axe*

- Le point O est centre de symétrie de l'ellipse. La distance $c = e\, a = \sqrt{a^2 - b^2}$ du foyer F au centre est appelée *distance focale*.

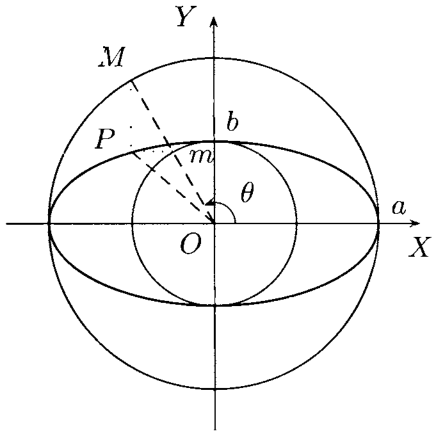


- Par symétrie, il existe un autre couple de foyer–directrice symétrique de $(F, \mathcal{D})$ par rapport à O.
- L'ordonnée Y de chacun des deux points de $\mathcal{E}$ d'abscisse c vérifie :

$$Y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2}.$$

Le paramètre de l'ellipse est donc $p = b^2/a$.

Paramétrage



L'ellipse d'équation réduite $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ peut se paramétrer par :

$$\left(X = a\cos\theta\,,\ Y = b\sin\theta\right)$$

avec $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$. C'est l'image du cercle centré en O et de rayon a par l'affinité orthogonale d'axe OX et de rapport b/a, c'est-à-dire par l'application $(x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$. Plus précisément, le point P de paramètre θ est l'image par cette affinité de M, le point du cercle d'angle polaire θ. Le réel θ est appelé *anomalie excentrique* du point P.

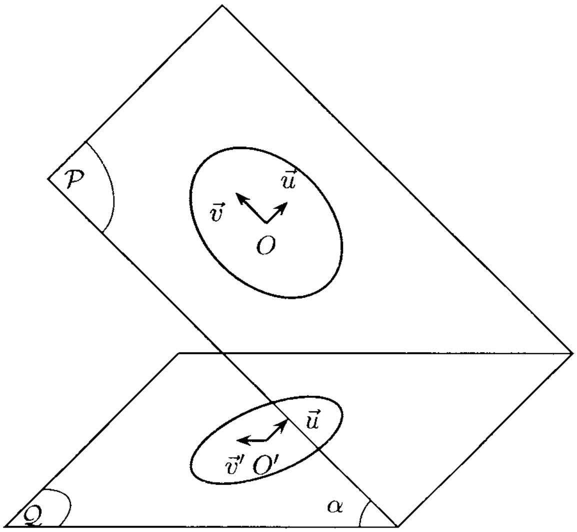
On peut également considérer le cercle centré en O et de rayon b. Le point P est alors aussi l'image par l'affinité orthogonale d'axe OY et de rapport a/b du point m de ce cercle d'angle polaire θ. Pour θ donné, comme M (ou m) est connu, on obtient une construction géométrique de P.

Remarque Lorsque $a = b \neq 0$, la courbe d'équation $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ est le cercle de centre O et de rayon a.

Par convention, on dit que c'est une ellipse d'excentricité nulle bien qu'elle ne possède pas de couple de foyer/directrice.

Exemple La projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan non perpendiculaire au plan du cercle est une ellipse.

Soit en effet $\mathcal{P}$ le plan du cercle et $\mathcal{Q}$ un plan non perpendiculaire à $\mathcal{P}$. On peut supposer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ non parallèles, sinon c'est évident.



Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de $\mathcal{P}$, où O est le centre du cercle $\mathcal{C}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Dans ce repère, un paramétrage du cercle est donc $(x, y) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$.

Soit $\alpha \in \,]0, \pi/2[$ l'angle entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Les projetés orthogonaux sur $\mathcal{Q}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux respectivement à $\vec{u}$ et à un vecteur $\vec{v}'$ orthogonal à $\vec{u}$ et de norme $\cos\alpha$.

Un paramétrage de la projection de $\mathcal{C}$ est donc $\overrightarrow{O'M'} = R\cos\theta\,\vec{u} + R\sin\theta\,\vec{v}'$, où O' est le projeté de O.

Dans un repère orthonormé de $\mathcal{Q}$ de centre O' et de premier vecteur $\vec{u}$, on a donc un paramétrage du type :

$$x = R\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = R\cos\alpha\,\sin\theta.$$

Il s'agit donc d'une ellipse d'excentricité $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sin\alpha$.

1.4 Étude des hyperboles

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'excentricité $e > 1$, de foyer F et de directrice associée $\mathcal{D}$ De même que pour l'ellipse, une équation de $\mathcal{H}$ dans un repère orthonormé centré en F est :

$$x^2(e^2-1) - y^2 + 2h\,e^2\,x + e^2\,h^2 = 0$$

où h est la distance de F à $\mathcal{D}$.

En posant $X = x + \dfrac{h\,e^2}{e^2-1}$ et $Y = y$ une équation de $\mathcal{H}$ s'écrit donc :

$$X^2 - \frac{Y^2}{e^2-1} = \alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{h^2e^2}{(e^2-1)^2} > 0. \tag{$*$}$$

On obtient ainsi une *équation réduite* de l'hyperbole $\mathcal{H}$ dans un repère orthonormé :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \dfrac{e\,h}{e^2-1}$ et $b = a\sqrt{e^2-1}$. Dans ce repère orthonormé, le foyer F a pour coordonnees $(c, 0)$ avec $c = \dfrac{h\,e^2}{e^2-1} = e\,a$.

Réciproquement, si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, la courbe d équation $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé OXY est une hyperbole, puisqu'il suffit de prendre $e > 1$ tel que $e^2 - 1 = b^2/a^2$ puis $h = \dfrac{(e^2-1)\,a}{e}$ pour obtenir l'équation $(*)$.

- L axe focal OX est aussi appelé *axe transverse*. Il coupe l'hyperbole aux deux points de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$.
  Le réel a est appelé *demi–axe focal*.
- La droite OY est aussi un axe de symétrie. On l'appelle *axe non focal* ou *axe non transverse*. Il ne rencontre pas l'hyperbole.
  Le réel b est appelé *demi–axe non focal*.
- Le point O est centre de symétrie de l'hyperbole. La distance $c = e\,a = \sqrt{a^2+b^2}$ du foyer F au centre est appelée *distance focale*.
- Par symétrie, il existe un autre couple de foyer–directrice symétrique de $(F, \mathcal{D})$ par rapport à O.
- L'ordonnée Y de chacun des deux points de $\mathcal{E}$ d'abscisse c vérifie :

  $$Y^2 = b^2\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) = \frac{b^4}{a^2}.$$

  Le paramètre de l'hyperbole est donc $p = b^2/a$

Paramétrage

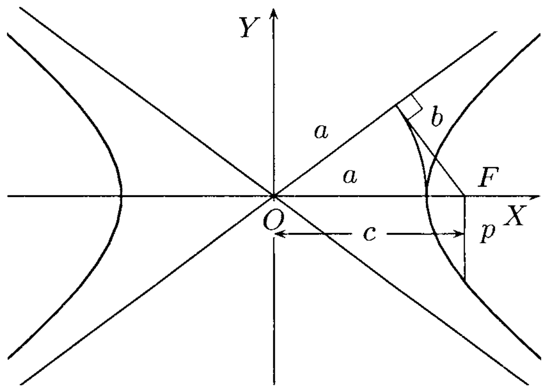
L'hyperbole d'équation réduite $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ peut se paramétrer par :

$$(X = \varepsilon a \operatorname{ch} t\,,\ Y = b \operatorname{sh} t) \qquad \text{avec} \qquad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

- La branche correspondant à $\varepsilon = 1$ appartient au demi–plan $X > 0$. La quantité $\dfrac{X}{a} - \dfrac{Y}{b} = e^{-t}$ (respectivement $\dfrac{X}{a} + \dfrac{Y}{b} = e^{t}$) tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) et on en déduit qu'il y a, pour cette branche, deux asymptotes d'équations $\dfrac{Y}{b} = \dfrac{X}{a}$ et $\dfrac{Y}{b} = -\dfrac{X}{a}$.
- La branche correspondant à $\varepsilon = -1$ appartient au demi–plan $X < 0$, et est symétrique de la précédente par rapport à O. Elle admet donc les mêmes asymptotes.

Les deux asymptotes font un angle $\pm \arctan(b/a)$ par rapport à l'axe OX. On en déduit le schéma ci-contre.

Les asymptotes sont orthogonales si, et seulement si, $b = a$; on dit alors que l'hyperbole est *équilatère*. Les hyperboles équilatères sont donc les coniques d'excentricité $\sqrt{2}$.



1.5 Équation polaire d'une conique de foyer O

On utilise les coordonnées polaires dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Proposition 1

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation polaire $r = \dfrac{h}{\cos(\theta - \theta_0)}$, avec $h \neq 0$.

Une équation polaire de la conique d'excentricité e, de foyer O et de directrice $\mathcal{D}$, est :

$$r = \frac{e\,h}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}.$$

émonstration

- Si $\theta_0 = 0$, la conique est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e\,|x - h| \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad r = \pm e\,(r\cos\theta - h)$$

C'est donc l'ensemble des points vérifiant :

$$r = \frac{e\,h}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{ou} \qquad r = -\frac{e\,h}{1 - e\cos\theta}.$$

Comme (r, θ) et $(-r, \theta + \pi)$ sont des couples de coordonnées polaires d'un même point les deux courbes d'équations polaires :

$$r = \frac{e\,h}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{et} \qquad r = -\frac{e\,h}{1 - e\cos\theta}$$

sont les mêmes et on en déduit qu'une équation polaire de la conique est par exemple :

$$r = \frac{e\,h}{1 + e\cos\theta}.$$

► Dans le cas général, il suffit d'effectuer une rotation d'angle θ_0 pour obtenir l'équation :

$$r = \frac{e\,h}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}.$$

□

Une équation polaire générale des coniques de foyer O est donc :

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\,\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 + \alpha\,\cos\theta + \beta\,\sin\theta}}$$

avec $p > 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

L'excentricité est $e = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et le paramètre p.

Exemple Déterminons une équation de la tangente à la conique d'équation polaire $r = \dfrac{p}{1 + e\,\cos\theta}$.

Cette tangente est dirigée par le vecteur $r'\,\vec{u} + r\,\vec{v}$ avec $r' = \dfrac{p\,e\,\sin\theta}{(1 + e\,\cos\theta)^2}$.

Elle admet donc pour équation dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

$$(1 + e\,\cos\theta)\,(X - r) - e\,\sin\theta\,Y = 0.$$

Pour revenir aux coordonnées cartésiennes (x, y), on utilise les relations :

$$X = x\,\cos\theta + y\,\sin\theta \qquad \text{et} \qquad Y = -x\,\sin\theta + y\,\cos\theta$$

ce qui donne :

$$x\,(e + \cos\theta) + y\,\sin\theta = p.$$

On retrouve ainsi, par exemple, que la tangente ne peut être parallèle à l'axe focal que dans le cas des ellipses et aux points de coordonnées polaires :

$$\left(\frac{p}{1 - e^2}, \pm\arccos(-e)\right) = \big(a, \pm(\pi - \arccos e)\big)$$

qui sont l'intersection de l'ellipse avec son petit-axe.

1.6 Définition bifocale des ellipses et des hyperboles

Les ellipses et hyperboles ont un centre de symétrie. Elles possèdent donc un autre couple de foyer–directrice $(F', \mathcal{D}')$. La proposition suivante montre qu'une ellipse ou une hyperbole peut être définie à l'aide de ses deux foyers

Proposition 2

Soient F et F' deux point distincts du plan tels que $\|\overrightarrow{FF'}\| = 2c$ et a un réel strictement positif.

1. Si $a > c$, l'ensemble des points M tels que :
$$\|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\| = 2a$$
est l'ellipse de foyers F et F' et de demi–grand axe a.
2. Si $a < c$, l'ensemble des points M tels que :
$$\left|\|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\|\right| = 2a$$
est l hyperbole de foyers F et F' et de demi–axe focal a.

émonstratio Étant donné un point M on pose $r = \|\overrightarrow{MF}\|$ et $r' = \|\overrightarrow{MF'}\|$
Considérons le nombre :
$$\Omega(M) = (2a + r + r')(2a + r - r')(2a - r + r')(2a - r - r').$$
D'après l'inégalité triangulaire, on a :
$$r + r' \geqslant 2c \qquad \text{et} \qquad |r - r'| \leqslant 2c$$
ce qui prouve les équivalences :

- $\Omega(M) = 0 \iff r + r' = 2a$ lorsque $a > c$,
- $\Omega(M) = 0 \iff |r - r'| = 2a$ lorsque $a < c$.

Prenons un repère orthonorme dans lequel F et F' ont pour coordonnees $(c, 0)$ et $(-c, 0)$, et posons $e = c/a$ On a alors, pour M de coordonnées (x, y) .
$$\begin{aligned}
\Omega(M) &= \left(4a^2 - (r+r')^2\right)\left(4a^2 - (r-r')^2\right)\\
&= \left(4a^2 - r^2 - r'^2\right)^2 - 4r^2r'^2\\
&= \left(4a^2 - (x-c)^2 - y^2 - (x+c)^2 - y^2\right)^2 - 4\left((x-c)^2 + y^2\right)\left((x+c)^2 + y^2\right)\\
&= \left(4a^2 - 2(x^2 + y^2 + c^2)\right)^2 - 4\left((x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2\right)\\
&= 16a^4 - 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 16x^2c^2\\
&= 16a^4(1 - e^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)}\right).
\end{aligned}$$

- Si $a > c$, en posant $b = a\sqrt{1-e^2}$, on a donc :

$$r + r' = 2a \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Si $a < c$, en posant $b = a\sqrt{e^2-1}$, on a donc :

$$|r - r'| = 2a \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

□

Remarque On peut définir de plusieurs façons l'*intérieur* d'une conique propre :

- pour une conique de foyer F, de directrice associée $\mathcal{D}$ et d'excentricité e c'est l'ensemble des points M tels que $d(M, F) < e\, d(M, \mathcal{D})$,
- c'est la partie du plan délimitée par la courbe et contenant le ou les foyers (dans le cas de l'hyperbole, cet ensemble est constitué de deux parties),
- dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole, c'est l'ensemble des points M pour lesquels $\Omega(M) > 0$.

2. Définition analytique

2.1 Définition

Définition 2

On appelle *conique* du plan euclidien E, toute courbe dont l équation dans un repère orthonormé, est du type :

$$A\,x^2 + 2B\,x\,y + C\,y^2 + 2D\,x + 2E\,y + F = 0$$

avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Proposition 3

Dans tout repère, une conique possède une équation de ce type.

Démonstratio Les formules de changement de repère s'écrivant

$$\begin{cases} x = \alpha\,x' + \beta\,y' + \lambda \\ y = \gamma\,x' + \delta\,y' + \mu \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

il est évident qu'une équation dans le nouveau repère sera de la forme :

$$A'\,x'^2 + 2B'\,x'\,y' + C'\,y'^2 + 2D'\,x' + 2E'\,y' + F' = 0.$$

De plus, si les trois scalaires A', B' et C' étaient nuls, par le changement de repère inverse, on obtiendrait $A = B = C = 0$ ce qui est exclu par hypothèse □

Cas particuliers de coniques

- L'ensemble d'équation $x^2 + y^2 = \alpha$ est un cercle ($\alpha > 0$), un point ($\alpha = 0$), ou l'ensemble vide ($\alpha < 0$).
- Une ellipse, une hyperbole ou une parabole.
- La réunion de 2 droites (éventuellement confondues), d'équation :

$$(\alpha\, x + \beta\, y + \gamma)(\alpha'\, x + \beta'\, y + \gamma') = 0.$$

2.2 Reduction de l'équation d'une conique (Descartes, 1637)

Soit $\mathcal{C}$ une conique d'équation dans un repère orthonorme :

$$A\, x^2 + 2B\, x\, y + C\, y^2 + 2D\, x + 2E\, y + F = 0.$$

Proposition 4

Il existe un repère orthonormé dans lequel $\mathcal{C}$ possède une équation sans terme en $x\, y$, c'est–à–dire de la forme :

$$A_1\, x^2 + C_1\, y^2 + 2D_1\, x + 2E_1\, y + F_1 = 0.$$

Demonstratio En effectuant une rotation du repère :

$$\begin{cases} x = X\, \cos\theta - Y\, \sin\theta \\ y = X\, \sin\theta + Y\, \cos\theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

le coefficient du terme en XY de l'équation obtenue est :

$$2\cos\theta \sin\theta\, (C - A) + 2B\, (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = (C - A)\, \sin 2\theta + 2B\, \cos 2\theta.$$

Si $A = C$, il suffit donc de prendre $\theta = \pi/4$ et sinon $\theta = \dfrac{1}{2} \arctan\left(\dfrac{2B}{A - C}\right)$. □

Prenons donc un repère orthonormé dans lequel une équation de $\mathcal{C}$ est :

$$A_1\, x^2 + C_1\, y^2 + 2D_1\, x + 2E_1\, y + F_1 = 0.$$

- Si $A_1\, C_1 \neq 0$, en prenant pour nouvelle origine le point O de coordonnées $\left(-\dfrac{D_1}{A_1}, -\dfrac{E_1}{C_1}\right)$, on obtient l'équation :

$$A_1\, x^2 + C_1\, y^2 + F_2 = 0.$$

  - Si $A_1\, C_1 > 0$, alors :
    - ⋆ soit $A_1\, F_2 > 0$ et $\mathcal{C}$ est vide,
    - ⋆ soit $F_2 = 0$ et $\mathcal{C}$ est réduite au centre O du repère

- $\star$ soit $A_1F_2 < 0$ et $\mathcal{C}$ est une ellipse d'équation réduite :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

C'est un cercle si $a = b$.

Si $A_1\,C_1 < 0$, alors :

- $\star$ soit $F_2 = 0$ et $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites sécantes en O
- $\star$ soit $F_2 \neq 0$ et $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'équation reduite :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.}$$

- Si $A_1 = 0$ et $C_1 \neq 0$, en prenant pour nouvelle origine le point O de coordonnées $\left(0, -\dfrac{E_1}{C_1}\right)$, on obtient l'équation :

$$C_1\,y^2 + 2D_1\,x + F_2 = 0.$$

Si $D_1 \neq 0$, par un nouveau changement d'origine on obtient l'équation réduite d'une parabole :

$$\boxed{y^2 = 2px.}$$

Si $D_1 = 0$, alors :

- $\star$ soit $F_2\,C_1 > 0$ et $\mathcal{C}$ est vide
- $\star$ soit $F_2\,C_1 \leqslant 0$ et $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites parallèles, éventuellement confondues.

- Le cas $A_1 \neq 0$ et $C_1 = 0$ se déduit du précédent par une symétrie par rapport à la première bissectrice.

2.3 Type d'une conique propre

Définition 3

On appelle *coniques propres* les paraboles, hyperboles et ellipses (y compris les cercles).

Soit une conique dont une équation dans un repère orthonormé direct est :

$$A\,x^2 + 2B\,x\,y + C\,y^2 + 2D\,x + 2E\,y + F = 0. \qquad (a)$$

Le *discriminant* de l'équation est par définition $A\,C - B^2$.

Si l'on prend un nouveau repère orthonormé direct dans lequel les coordonnées d'un point sont (X, Y), on obtient des formules de changement de repère du type :

$$\begin{cases} x = X\,\cos\theta + Y\,\sin\theta + \lambda \\ y = -X\,\sin\theta + Y\,\cos\theta + \mu \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad (\theta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3.$$

L'équation (a) devient alors :

$$A'\,X^2 + 2B'\,X\,Y + C'\,Y^2 + 2D'\,X + 2E'\,Y + F' = 0 \tag{a'}$$

avec :

$$\begin{aligned} A' &= A\,\cos^2\theta + C\,\sin^2\theta - 2B\,\cos\theta\,\sin\theta \\ &= \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2}\cos 2\theta - B\,\sin 2\theta \\ B' &= B\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (C-A)\,\cos\theta\sin\theta \\ &= \frac{A-C}{2}\sin 2\theta + B\,\cos 2\theta \\ C' &= A\,\sin^2\theta + C\,\cos^2\theta + 2B\,\cos\theta\,\sin\theta \\ &= \frac{A+C}{2} - \frac{A-C}{2}\cos 2\theta + B\,\sin 2\theta \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} A'\,C' - B'^2 &= \left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-C}{2}\cos 2\theta - B\,\sin 2\theta\right)^2 \\ &\qquad - \left(\frac{A-C}{2}\sin 2\theta + B\,\cos 2\theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-C}{2}\right)^2 - B^2 \\ &= A\,C - B^2. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'équation réduite des coniques propres, on a effectue un changement de repère orthonormé direct (ce qui ne change pas le discriminant) puis on a multiplié l'équation par un scalaire α non nul (ce qui multiplie le discriminant par α^2).

Le signe du discriminant est donc indépendant du repère orthonormé. En observant sur l'équation réduite le signe du discriminant, on en déduit que la conique propre d'équation (a) dans un repère orthonormé :

- est une ellipse si $A\,C - B^2 > 0$,

- est une hyperbole si $AC - B^2 < 0$,
- est une parabole si $AC - B^2 = 0$.

Exemple La conique d'équation $xy = \alpha^2$ dans un repère orthonormé (avec $\alpha \neq 0$) est une hyperbole. Ses asymptotes Ox et Oy sont orthogonales ; il s'agit donc d'une hyperbole équilatère.
Le changement de repère orthonormé défini par :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$$

donne l'équation réduite :

$$\frac{X^2}{2\alpha^2} - \frac{Y^2}{2\alpha^2} = 1.$$

Son demi–axe focal égal à son demi–axe non focal vaut donc $\alpha\sqrt{2}$ et son excentricite $\sqrt{2}$.

Remarques

- On ne voit pas sur l'équation initiale si la conique est propre. Néanmoins, selon la discussion faite lors de la réduction, on a les résultats suivants
  - Si $AC - B^2 > 0$, la conique est une ellipse, un point ou l'ensemble vide. On dit qu'elle est de *type ellipse.*
  - Si $AC - B^2 < 0$, la conique est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes. On dit qu'elle est de *type hyperbole.*
  - Si $AC - B^2 = 0$, la conique est une parabole, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide. On dit qu'elle est de *type parabole.*
- Nous verrons page 938 une démonstration des résultats précédents utilisant les déterminants.
  Nous verrons aussi que le type d'une conique est donne par le signe du discriminant dans **tout** repère.

2.4 Tangente à une conique propre

Soit une conique propre $\mathcal{C}$ d'équation :

$$P(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

D'après l'étude des ellipses, hyperboles et paraboles on peut trouver un paramétrage de $\mathcal{C}$ sans point singulier ; notons–le $\big(x(t), y(t)\big)$. En derivant la relation $P\big(x(t), y(t)\big) = 0$, on obtient :

$$(Ax + By + D)\,x' + (Bx + Cy + E)\,y' = 0.$$

Soit (x_0, y_0) un point du plan. Si l'on a $A\,x_0 + B\,y_0 + D = B\,x_0 + C\,y_0 + E = 0$ le point (x_0, y_0) est centre de symétrie de la conique puisqu'alors pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} P(x_0 + h, y_0 + k) &= P(x_0, y_0) + (2A\,x_0 + 2B\,y_0 + 2D)\,h \\ &\qquad + (2B\,x_0 + 2C\,y_0 + 2E)\,k + A\,h^2 + 2B\,hk + C\,k^2 \\ &= P(x_0, y_0) + A\,h^2 + 2B\,hk + C\,k^2 \\ &= P(x_0 - h, y_0 - k). \end{aligned}$$

Or soit ce centre de symétrie n'existe pas (parabole) soit il n'appartient pas à la conique (hyperbole et ellipse).

On en déduit qu'en tout point (x_0, y_0), la conique admet une tangente orthogonale à $(A\,x_0 + B\,y_0 + D, B\,x_0 + C\,y_0 + E)$ et donc d'équation :

$$(A\,x_0 + B\,y_0 + D)\,(x - x_0) + (B\,x_0 + C\,y_0 + E)\,(y - y_0) = 0$$

puisqu'elle passe par M_0.

Cette équation qui est de la forme :

$$A\,x\,x_0 + B\,(x\,y_0 + x_0\,y) + C\,y\,y_0 + D\,x + E\,y = \alpha$$

avec :

$$\alpha = A\,x_0^2 + 2B\,x_0 y_0 + C\,y_0^2 + D\,x_0 + E\,y_0 = -F - D\,x_0 - E\,y_0,$$

s'écrit aussi :

$$A\,x\,x_0 + B\,(x\,y_0 + x_0\,y) + C\,y\,y_0 + D\,(x + x_0) + E\,(y + y_0) + F = 0.$$

EXERCICES

Équations communes aux trois coniques

1. Les résultats de cet exercice fondamental, qui indique plusieurs caractérisations équivalentes de coniques et de leur intérieur, pourront être utilisés librement dans les exercices suivants. Il considère un plan euclidien avec comme coordonnées x et y ou X et Y dans différents repères. Dans le cas de coniques à centre, les symboles a,b, c, e et $p = \dfrac{b^2}{a} = \varepsilon a(1-e^2)$ ont leur sens habituel (avec $\varepsilon = 1$ pour une ellipse, et -1 pour une hyperbole). On sait qu'une conique à centre peut être définie par une équation du type :

$$f(X,Y) = (a^2-c^2)X^2 + a^2Y^2 - a^2(a^2-c^2) = 0$$

ou encore par :

$$g(X,Y) = \frac{f(X,Y)}{a^2} = (1-e^2)X^2 + Y^2 - a^2(1-e^2) = 0$$

et que son intérieur est alors défini par $f(X,Y) < 0$ ou $g(X,Y) < 0$.

a) Montrer qu'une conique à centre peut être caractérisée par une équation du type :

$$(x^2+y^2) - (ex-p)^2 = 0$$

avec, comme origine, le foyer d'abscisse εc (c'est-à-dire le plus à droite pour une ellipse, le plus à gauche pour une hyperbole). Étendre le résultat à une parabole. Donner une caractérisation de l'intérieur des trois coniques reliee à l'équation commune ainsi dégagée. En déduire une équation polaire générale des trois coniques.

b) Montrer qu'une conique à centre peut être caractérisée par une équation du type :

$$(x-c)^2 + y^2 - (a-ex)^2 = 0$$

avec, comme origine, le centre de la conique. En déduire une expression simple de la distance d'un point de la conique au foyer $(c, 0)$ en fonction de son abscisse, en discutant selon le genre (ellipse ou hyperbole). Étendre cette caractérisation et ces égalités en échangeant les deux foyers. Quelle propriété remarquable des coniques à centre retrouve-t-on ainsi ? Donner des caractérisations de l'intérieur des coniques reliées aux deux équations communes ainsi dégagées.

c) Montrer qu'une conique à centre peut être caractérisée par une équation du type :

$$y^2 - 2px - (\epsilon^2 - 1)x^2 = 0$$

avec, comme origine, le sommet d'abscisse $-\varepsilon a$ (c'est-à-dire le plus à gauche pour une ellipse, le plus à droite pour une hyperbole). Étendre le résultat à une parabole. Donner une caractérisation de l'intérieur des trois coniques inspirée de l'équation commune ainsi dégagée.

Propriétés de la parabole

2. La normale et la tangente en un point M d'une parabole Γ coupent respectivement l axe focal en N et T. Déterminer le lieu du point P tel que $NMTP$ soit un rectangle lorsque M décrit Γ. Que peut-on dire des abscisses de M et de N ?

3. Soit M le milieu d'une corde AB d'une parabole, qui se projette en H sur l'axe de symétrie. Que peut-on dire de la longueur HN où N est l'intersection de cet axe et de la médiatrice de AB ? Que se passe-t-il si la corde AB est remplacée par la tangente en A ?

4. Deux paraboles distinctes de même axe et de même foyer F ayant un point commun M, calculer une mesure de l angle des deux tangentes en ce point.

5. Demontrer que la projection K du foyer F d'une parabole sur une tangente en un point M appartient à la tangente au sommet.

6. Démontrer les deux théorèmes de Poncelet pour la parabole : si T et T' sont les points de contact des tangentes issues d'un point M à une parabole, FM est bissectrice de l'angle de droites (FT, FT') et les angles de droites (MT, MT') et (MF, Mx) (où Mx est parallèle à l'axe) ont mêmes bissectrices.

7. Les côtés BC, CA et AB d'un véritable triangle ABC sont tangents à la parabole d'équation $y^2 = 8x$ en des points d'ordonnées respectives $4a$,$4b$ et $4c$. Montrer que l'orthocentre H du triangle appartient à la directrice et que le foyer F appartient au cercle circonscrit au triangle.

8. Démontrer que la tangente en un point M à une parabole est bissectrice de l'angle du rayon vecteur MF et de la parallèle Mx à l'axe en posant $MF = r$, $\overrightarrow{MF} = r\vec{u}$ et $\overrightarrow{MH} = -r\vec{\imath}$, où H est la projection orthogonale de M sur la directrice et $\vec{\imath}$ dirige l'axe des abscisses. Montrer que la projection orthogonale K de F sur cette tangente est située sur la tangente au sommet.

Propriétés des hyperboles

9. Une hyperbole équilatère qui contient trois points $(A.B.C)$ formant triangle contient également leur orthocentre.

10 Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$. Si AB (respectivement CD) est une corde de $\mathcal{H}$ de milieu M et de support Δ (respectivement P et Δ') comparer les mesures des angles de droites (Δ, Δ') et (OM, OP).

11. Un point M d'une hyperbole se projette orthogonalement en H et H' sur les deux asymptotes. Montrer que le produit $MH.MH'$ est constant.

Propriétés des ellipses

12. Soit $a > b > 0$. Deux points P et Q décrivent respectivement des cercles de centre O de rayons respectifs $a + b$ et $a - b$ de façon que l'axe des abscisses soit toujours bissectrice intérieure de l'angle des demi-droites (OP, OQ). Que peut-on dire du lieu du milieu M de PQ, et de la normale en M à ce lieu ? Admettant que ce lieu est une conique de foyers F et F', calculer le produit $MF.MF'$ en fonction de P et Q.

13. À tout point M d'une ellipse, qui se projette orthogonalement en I sur l'axe focal, on associe l'un des deux points P de cette conique où la tangente est parallèle à OM, et sa projection J. Calculer l'aire du triangle MOP (premier théorème d'Apollonius), ainsi que les réels $OM^2 + OP^2$ (second théorème d'Apollonius) et $OI^2 + OJ^2$.

14. Deux points M et M' décrivent une ellipse de foyers F et F' de façon que leurs tangentes se coupent en un point P du cercle principal (tangent à l'ellipse en les sommets de l'axe focal). Montrer qu'au prix d'un éventuel échange entre M et M' le quadrilatère $MFF'M'$ est un trapèze (on pourra comparer les pentes des droites MF et OP).

Propriétés des coniques à centre

15. Une conique Γ varie en passant par un point fixe M et en gardant même centre O et même demi-axe focal a. Déterminer le lieu des foyers F et F' de Γ.

16. Étant donnés un point I et une conique Γ de centre O, on considère un point variable R de Γ tel que la parallèle à OR passant par I coupe Γ en C et D. Que peut-on dire du rapport du produit des mesures algébriques de IC et ID par OR^2 ? Retrouver la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle. En déduire une propriété des cordes CD et EG communes à un cercle et à une ellipse non circulaire (*théorème de Joachimstahl*).

17. Écrire une équation polaire d'une conique à centre en prenant le centre O pour pôle et l'axe des abscisses pour axe polaire. En déduire que, si P et Q décrivent une ellipse de façon à ce que OP et OQ restent perpendiculaires, la droite PQ reste tangente à un cercle fixe. Retrouver ce résultat par un calcul direct à partir de la représentation paramétrique usuelle de l'ellipse.

18. Montrer que le produit des distances des deux foyers d'une conique à centre à une tangente variable est constant (on orientera arbitrairement la direction de la normale de façon à disposer de mesures algébriques).

19. La tangente en un point M d'une conique à centre coupe son axe de symétrie non focal en un point I dont les projections orthogonales sur les rayons vecteurs MF et MF' sont notées H et H'. Montrer que $FH = F'H'$ est constant et que HH' est parallèle à la normale en M et passe par le centre de la conique (on pourra utiliser les expressions donnant la longueur du segment MF en fonction de l'abscisse x de M).

20. Demontrer que les projections orthogonales K et K' des foyers F et F' d'une conique à centre sur une tangente variable d'une conique à centre appartiennent au cercle principal (tangent à la conique en les sommets de l'axe focal).

21. Démontrer à l'aide de la définition bifocale des coniques à centre que la tangente en un point M est bissectrice des rayons vecteurs MF et MF' en posant $MF = r$, $MF' = \rho$, $\overrightarrow{MF} = r\vec{u}$ et $\overrightarrow{MF'} = \rho\vec{v}$. Montrer que les projections orthogonales K et K' de F et F' sur cette tangente sont situées à la distance a du centre O. Calculer de même le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{F'K'}$

22. La normale en un point M d'une conique à centre coupe l'axe focal en N et l axe non focal en P. Montrer que, quelle que soit l'orientation donnée à la normale, les mesures algébriques $\overline{MP}$, $\overline{MN}$ et $\overline{NP}$ sont liées, par des relations simples aux paramètres de la conique .

Propriétés des trois coniques

23. La normale en M à une conique coupe l'axe focal en N qui se projette orthogonalement en P sur le rayon vecteur MF. Calculer la longueur MP et le rapport $\dfrac{FN}{FM}$.

24. Calculer le rapport $\dfrac{FI}{TH}$ où H et I sont les projections orthogonales d'un point T de la tangente en M d'une conique non circulaire respectivement sur une directrice et sur la droite joignant M au foyer F qui lui est associé. Étudier les cas où $I = M$ et $I = F$.

Propriétés diverses

25. Déterminer le genre (ellipse, parabole, hyperbole) et les éléments caractéristiques (paramètre, excentricité, foyer(s), directrice(s), sommet(s), axe(s), et éventuellement centre, asymptotes, demi-distance focale, demi-axe focal et demi-axe non focal) de la conique définie par :

$$x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 2 = 0.$$

26. Soient (A, B, C) trois points deux à deux distincts d'une droite $\mathcal{D}$. Lieu d'un point M tel qu'il existe un cercle tangent aux droites MA et MB (dont on suppose qu'elles sont bien définies) et tangent en C à $\mathcal{D}$.

27. Étudier la conique d'équation $x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0$. En déduire la nature de l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant l égalité :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 - 1 = 0.$$

Déterminer l ensemble des couples (n, m) d'entiers relatifs solutions de l'équation diophantienne :

$$n^3 + 3nm + m^3 = 1.$$

Deuxième partie

Analyse réelle et complexe

Chapitre 8

Le corps des nombres réels

Lorsqu'on a cherché à mesurer une longueur on a d'abord utilisé les nombres entiers ; pour améliorer cette mesure, on s'est servi d'une portion de cette unité en introduisant des nombres s'écrivant comme quotient d'entiers.

Lorsque l'école pythagoricienne s'est posé le problème de pouvoir mesurer toute longueur à l'aide de quotients d'entiers, elle s'est rendu compte de l'insuffisance de ce que nous appelons aujourd'hui les nombres rationnels. En particulier, elle a découvert que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ne peut être égale au quotient de deux entiers.

Cette insuffisance de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, peut de façon moderne, s'exprimer de trois façons différentes :

- Il n'existe pas de rationnel x vérifiant $x^2 = 2$.

  Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'entiers naturels p et q tels que $(p/q)^2 = 2$. Quitte à diviser les entiers p et q autant de fois qu'il est nécessaire par 2 on peut supposer p ou q impair.

  Or, l'égalité $p^2 = 2q^2$ prouve que p^2 (et par suite p) est pair. On a donc $p = 2p'$ et par suite $q^2 = 2{p'}^2$, ce qui prouve que q est pair et contredit l'hypothèse. □

- Sur $\mathbb{Q}$, la fonction polynomiale $f\ :\ x \mapsto x^2 - 2$ prend des valeurs positives et des valeurs négatives mais elle ne s'annule pas, ce qui n'est pas "naturel".
- L'ensemble $X = \{x \mid x > 0 \quad \text{et} \quad x^2 \leqslant 2\}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (voir la définition 5 de la page 256 et la remarque de la page 259).

Cette insuffisance des nombres rationnels se manifeste aussi par exemple dans le fait que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont telles que :

- u est croissante,
- v est décroissante à partir du rang 1,
- la différence $v_n - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

alors que l'on peut montrer qu'elles ne convergent vers aucun rationnel.

Pour remédier à ces insuffisances, on introduit le corps $\mathbb{R}$ des réels, qui contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels comme sous–corps, dans lequel toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure Comme $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas cette propriété, l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est stricte Les éléments de $\mathbb{R}$ qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés *irrationnels*.

Nous admettrons dans la suite l'existence de $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes que nous définissons et développons dans ce chapitre :

Proposition 1

$\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure.

1. Propriétés liées à la relation d'ordre

1.1 Relation d'ordre

Sur $\mathbb{R}$, on dispose de la relation $\leqslant$ de comparaison C'est une *relation d'ordre*, ce qui signifie qu'elle est :

réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$;

antisymétrique : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \quad \text{et} \quad y \leqslant x) \Longrightarrow x = y$;

transitive : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \leqslant y \quad \text{et} \quad y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$.

Cet ordre est *total*, ce qui signifie que deux réels x et y quelconques sont *comparables* : on a toujours $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Définition 1

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et a un élément de A.

- On dit que a est *le plus grand élément* de A si $\forall x \in A\,,\ x \leqslant a$.
  Quand il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$ ou $\max A$
- On dit que a est *le plus petit élément* de A si $\forall x \in A\,,\ a \leqslant x$.
  Quand il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$ ou $\min A$

Remarque L'unicité du plus grand élément (sous–entendue par l'article défini « le ») vient du fait que si a et b sont deux tels éléments, on a $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, donc $a = b$.

Il en est de même pour le plus petit élément.

Exemples

1. Aucun des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'admet de plus grand élément ; parmi eux, seul $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément (0).
2. L'intervalle $[0,1]$ possède :
   - un plus grand élément 1,
   - un plus petit élément 0.
3. L'intervalle $]0,1]$ muni de l ordre usuel :
   - possède un plus grand élément 1
   - ne possède pas de plus petit élément puisque $\forall x > 0.\ 0 < \frac{x}{2} < x$.
4. On montre par recurrence que toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ possède un plus grand et un plus petit élément.
5. On en déduit en particulier que si $\eta_1,\ \eta_2, \ldots,\ \eta_n$ sont des réels strictement positifs, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \eta \leqslant \eta_i$: il suffit de prendre $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.
6. Soit f une application d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$. Si $\{f(x) \mid x \in X\}$ admet un plus grand elément, ce dernier est appelé *maximum* de f sur X et se note $\max\limits_X f$.

   Cet exemple permet d'expliquer la notation max pour désigner le plus grand élément.

   De même, on note $\min\limits_X f$ le *minimum* de f sur X, c est–à–dire le plus petit élément de $\{f(x) \mid x \in X\}$, lorsqu'il existe.

Définition 2

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, un élément $a \in \mathbb{R}$ est :

- un *majorant* de A si $\forall x \in A,\ x \leqslant a$,
- un *minorant* de A si $\forall x \in A,\ a \leqslant x$.

Exemples

1. L'intervalle $[0,1]$ a pour majorant tout élément de $[1,+\infty[$.
2. L'intervalle $[0,1[$ a pour majorant tout élément de $[1,+\infty[$.
3. Lorsqu'il existe, le plus grand élément d'une partie A est l'unique majorant de A qui se trouve dans A.

1.2 Corps totalement ordonné

L'ensemble des réels muni des deux lois internes $+, \times$ et de la relation d'ordre notee $\leqslant$ est un corps totalement ordonné ce qui signifie :

- $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps,
- la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x \leqslant y \Longrightarrow x+z \leqslant y+z \qquad \text{et} \qquad (x \leqslant y \quad \text{et} \quad 0 \leqslant z) \Longrightarrow xz \leqslant yz.$$

On en déduit que :

- si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a+c \leqslant a+d \leqslant b+d$,
- si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant ad \leqslant bd$.

Attention La multiplication par un nombre strictement négatif change le sens des inégalités. En particulier, on ne peut multiplier des inégalités terme à terme que si tous les réels intervenant dans ces inégalités sont positifs.

Remarques

- Si l'on a une suite d'inégalités :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$$

avec $a_1 = a_n$, alors tous les a_i sont égaux puisque chacun est inférieur ou égal à l'autre.

- On démontre souvent une inégalité par une succession d'inégalités. Si l'une de celles–là est stricte, l'inégalité résultante est alors stricte

Autrement dit lorsque l'on a démontré une inégalité $A \leqslant B$ et que l'on cherche dans quels cas il y a égalité ($A = B$), il suffit de voir quels sont les cas d'égalités dans chacune des inégalités intermédiaires qui ont conduit à $A \leqslant B$.

Exemple Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ et $a + c = b + d$, alors $a = b$ et $c = d$, comme le prouvent les relations :

$$a + c \leqslant a + d \leqslant b + d = a + c.$$

1.3 Valeur absolue

Définition 3

On définit la *valeur absolue* d'un réel x par :

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple Si x est un réel, on pose :

$$x^+ = \max(x, 0) \qquad \text{et} \qquad x^- = \max(0, -x).$$

On a alors :

$$x = x^+ - x^- \qquad \text{et} \qquad |x| = x^+ + x^-$$

et donc :

$$x^+ = \frac{|x| + x}{2} \qquad \text{et} \qquad x^- = \frac{|x| - x}{2}.$$

Proposition 2

Étant donnés deux réels x et y quelconques et un réel h strictement positif, on a :

(1) $|x| \geqslant 0$ et $\Big(|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0\Big)$

(2) $|y - x| \leqslant h \Longleftrightarrow x - h \leqslant y \leqslant x + h$

(3) $|x\, y| = |x|\,|y|$

(4) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (*Inégalité triangulaire*)

émonst tio Evident en étudiant les différents cas selon le signe des quantités figurant dans les valeurs absolues. □

Corollaire 3

Étant donnés deux réels x et y, on a :

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|.$$

émonst ation La relation $x = (x - y) + y$ et l'inégalité triangulaire entraînent $|x| \leqslant |x - y| + |y|$ et on a donc :

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|. \qquad (*)$$

En permutant les rôles joués par x et y, on obtient $|y| - |x| \leqslant |x - y|$, ce qui avec $(*)$ donne le résultat. □

Exemple Si u est un réel tel que $|u| \leqslant k < 1$, comme $1 - |u| \leqslant |1 + u| \leqslant 1 + |u|$, on a alors :

$$1 - k \leqslant |1 + u| \leqslant 1 + k.$$

Définition 4

On appelle *distance de deux reels* x et y la valeur absolue de leur différence

2. Propriété de la borne supérieure

2.1 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 5

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- La *borne supérieure* de A est, s'il existe, le plus petit des majorants de A. Elle se note $\sup(A)$ ou $\sup A$,
- La *borne inférieure* de A est, s'il existe, le plus grand des minorants de A. Elle se note $\inf(A)$ ou $\inf A$.

Remarque L'unicité de ces éléments provient de l'unicité démontrée après la définition 1 de la page 253.

Attention Ne pas confondre la borne supérieure d une partie X (notée $\sup X$) avec le plus grand élément de X (noté $\max X$). La borne supérieure de X est le plus petit des majorants de X, ce n'est pas forcément un élément de X. Toutefois, lorsque X possède un plus grand élément c'est évidemment aussi sa borne supérieure.

Exemples

1. Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, on a $\sup\,[0,1] = \sup\,[0,1\,[\; = 1$.
2. L'élément 0 est le plus grand élément de $\mathbb{R}_-$; il en est donc aussi la borne supérieure.
3. L'ensemble $X = \mathbb{R}_-^*$ possède une borne supérieure qui est égale à 0 et qui n'est pas élément de X. En effet, 0 est un majorant de $\mathbb{R}_-^*$ et tout élément $a < 0$ est non majorant de $\mathbb{R}_-^*$ puisque $a < a/2 < 0$.

Nous admettons que le corps des nombres réels possède la *propriété de la borne supérieure*, c'est-à-dire :

Proposition 4

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Exemple L'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \quad \text{et} \quad x^2 \leqslant 2\}$ est non vide puisqu'il contient 1 et il est majoré par 2, puisque si $x \in X$, on a $x^2 \leqslant 4$ et donc $x \leqslant 2$.

Montrons que sa borne supérieure a vérifie $a^2 = 2$; on note $a = \sqrt{2}$. Comme on a vu page 251 qu'il n'y a pas de rationnel qui vérifie cette relation, on en déduit que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration

- Supposons $a^2 > 2$ et posons $\varepsilon = a^2 - 2$. Pour $h > 0$, on a :
$$(a-h)^2 = a^2 - 2a\,h + h^2 \geqslant a^2 - 2a\,h = 2 + \varepsilon - 2a\,h.$$
En prenant $h = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{2a}, a\right) > 0$, on obtient $(a-h)^2 \geqslant 2$. Par suite, pour tout $x \in X$:
$$x^2 \leqslant 2 \leqslant (a-h)^2$$
et donc $x \leqslant a - h$ puisque $x > 0$ et $a - h \geqslant 0$. Ainsi le réel $a - h$ est un majorant de X strictement plus petit que a, ce qui contredit le fait que a est le plus petit des majorants de X
- Supposons $a^2 < 2$ et posons $\varepsilon = 2 - a^2$ Pour h strictement compris entre 0 et 1, on a :
$$(a+h)^2 = a^2 + 2a\,h + h^2 \leqslant a^2 + 2a\,h + h \leqslant 2 - \varepsilon + (2a+1)\,h.$$
En prenant $h = \min\bigl(1, \varepsilon/(2a+1)\bigr)$ on obtient $(a+h)^2 \leqslant 2$ et donc $a + h$ est un élément de X strictement plus grand que a, ce qui contredit le fait que a est un majorant de X. □

Proposition 5 (Caractérisation de la borne supérieure)

La borne supérieure a d'une partie X de $\mathbb{R}$ est caractérisée par :
$$\forall x \in X\,,\ x \leqslant a \qquad \text{et} \qquad \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists x \in X\ :\ a - \varepsilon < x.$$

emonstration La première relation exprime que a est un majorant de X. La deuxième signifie qu'un nombre strictement plus petit que a n'est pas majorant de X Cela équivaut à dire que tout majorant de X est supérieur ou égal à a □

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Posons :

$$X' = -X = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in X\}.$$

Les minorants de X sont les opposés des majorants de X', donc X est minorée si, et seulement si, X' est majorée et alors X possède un plus grand minorant qui est l'opposé du plus petit des majorants de X'. On en déduit donc les deux résultats suivants :

Proposition 6

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne ınférieure.

Proposition 7 (Caractérisation de la borne inférieure)

La borne inférieure a d'une partie X de $\mathbb{R}$ est caractérisée par :

$$\forall x \in X, \; x \geqslant a \qquad \text{et} \qquad \forall \varepsilon > 0, \; \exists x \in X \; : \; a + \varepsilon > x.$$

Exemple Le réel 0 est la borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$, ce qui prouve que si un réel a vérifie $\forall \varepsilon > 0, \; a \leqslant \varepsilon$, alors a est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$, et donc $a \leqslant 0$.

Ce résultat a pour conséquence la propriété suivante qui est utilisée couramment en analyse :

Proposition 8

Un réel a qui vérifie $\forall \varepsilon > 0, \; |a| \leqslant \varepsilon$ est nul.

2.2 Rationnels et irrationnels

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

- On a vu que son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (l'ensemble des irrationnels) est non vide puisqu'il contient $\sqrt{2}$.
- Si x est un irrationnel et y un rationnel, alors $z = x + y$ est irrationnel En effet, si z était rationnel, alors $x = z - y$ aussi, ce qui est contradictoire.
- On peut démontrer de même que le produit d un rationnel non nul par un irrationnel est un irrationnel.

- L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est donc infini, puisqu'il contient tous les reels de la forme $r + \sqrt{2}$ avec $r \in \mathbb{Q}$.

Attention La somme et le produit de deux irrationnels peuvent très bien être des nombres rationnels, comme par exemple $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})$ et $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$.

Remarque L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure. En effet, si l'ensemble :

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \quad \text{et} \quad x^2 \leqslant 2\}$$

possédait une borne supérieure a, on aurait, en reprenant avec des rationnels le raisonnement de l exemple de la page 257, la relation $a^2 = 2$, ce qui est impossible.

2.3 Droite numérique achevée

Définition 6

On appelle *droite numérique achevée* l'ensemble :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

On prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \leqslant +\infty \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \geqslant -\infty.$$

Avec cette définition, il est immédiat de voir que :

- $+\infty$ est le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
- $-\infty$ est le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Par convention :

- si X n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, on pose $\sup X = +\infty$,
- si X n'est pas minorée dans $\mathbb{R}$, on pose $\inf X = -\infty$.

Ces conventions correspondent en réalité aux notions de bornes supérieures et inférieures dans $\overline{\mathbb{R}}$, puisqu'une partie non majorée dans $\mathbb{R}$ admet $+\infty$ pour unique majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$; son plus petit majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$ est donc $+\infty$. De même, une partie non minorée dans $\mathbb{R}$ admet $-\infty$ pour plus grand minorant dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On prolonge partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations sur $\mathbb{R}$ selon les tables :

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

où ? correspond à un cas où l'opération n'est pas définie (*forme indéterminée*)

2.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Rappel Les *intervalles* de $\mathbb{R}$ autres que $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ de la forme :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \qquad]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$
$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} \qquad]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$
$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\} \qquad]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$
$$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\} \qquad]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

avec a et b deux réels.

Remarques

- L'ensemble vide est un intervalle puisque, par exemple, $\varnothing =]0,0[$.
- Si $a \leqslant b$, l'intervalle $[a,b]$ est appele *segment*. Par convention, si $a > b$, on note aussi $[a,b]$ le segment d'extrémités a et b c'est-à-dire le segment $[b,a]$.
- Pour $a < b$, l'intervalle $]a,b[$ est appelé *intervalle ouvert* d'extremités a et b.
- Les intervalles $]a,+\infty[$, et $]-\infty,b[$ sont appelés *demi-droites ouvertes*
- Les intervalles $[a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$ sont appelés *demi-droites fermées.*
- Pour $a < b$, les intervalles $[a,b[$ et $]a,b]$ sont appelés *intervalles semi-ouverts* ou *semi-fermés.*

Proposition 9

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties *convexes*, c'est-à-dire les parties I de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in I\,,\ \forall y \in I\,,\ [x,y] \subset I.$$

´monst atio Les intervalles sont évidemment des parties convexes. Montrons la réciproque.

Soit I une partie convexe de $\mathbb{R}$. Si I est vide, alors c'est un intervalle. Supposons donc I non vide et posons :

$$a = \inf I \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad b = \sup I \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Montrons les résultats résumés dans le tableau ci-dessous :

	$b \in I$	$b \in \mathbb{R} \setminus I$	$b = +\infty$
$a \in I$	$I = [a,b]$	$I = [a,b[$	$I = [a,+\infty[$
$a \in \mathbb{R} \setminus I$	$I =]a,b]$	$I =]a,b[$	$I =]a,+\infty[$
$a = -\infty$	$I =]-\infty,b]$	$I =]-\infty,b[$	$I =]-\infty,+\infty[$

- Il est évident que dans chaque cas, l'ensemble I est inclus dans l'intervalle indiqué
- Pour la réciproque, il suffit de montrer l'inclusion $]a,b[\subset I$ puisqu'alors on aura :

  $$I =]a,b[\,,\ I =]a,b]\,,\ I = [a,b[\quad \text{ou} \quad I = [a,b]$$

  en fonction de l'appartenance de a et b à I.

  Soit $z \in]a,b[$. Comme $z < b$, le réel z n'est pas un majorant de I, et on peut trouver $y \in I$ tel que $z < y$. De même on peut trouver $x \in I$ tel que $x < z$.

  On a ainsi $z \in [x,y]$ avec $x \in I$ et $y \in I$, ce qui entraîne $z \in I$ Donc $]a,b[\subset I$ □

2.5 Propriété d'Archimède

Proposition 10

$\mathbb{R}$ est *archimédien*, ce qui signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall y \in \mathbb{R}\,,\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ nx \geqslant y.$$

emons atio Faisons une demonstration par l'absurde en supposant, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$ ·

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ nx < y$$

L'ensemble $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ qui possède donc une borne supérieure a

On a $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (n+1)x \leqslant a$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ nx \leqslant a - x$ ce qui signifie que $a - x$ est un majorant de A strictement inférieur à a et contredit le fait que a est le plus petit des majorants de A. □

Remarque Le corps $\mathbb{Q}$ est aussi un corps totalement ordonné possédant la propriété d'Archimède, bien qu'il ne possède pas la propriété de la borne superieure.

En effet, si x et y sont deux rationnels tels que $x > 0$, on peut trouver un entier n tel que $n\,x \geqslant y$.

- C'est évident si $y \leqslant 0$.
- Si $y > 0$ en écrivant $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{c}{d}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^{*4}$, il suffit de prendre $n = b\,c$.

Corollaire 11

Étant donnés deux réels x et y avec $x > 1$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \geqslant y$.

Démonstratio Comme $x > 1$, on peut poser $x = 1 + h$ avec $h > 0$. Si n est un entier naturel, la formule du binôme de Newton permet d'ecrire :

$$(1+h)^n \geqslant 1 + n\,h.$$

D'après la propriété d'Archimède on peut trouver n tel que $n\,h \geqslant y - 1$ et on a alors $x^n \geqslant y$. □

2.6 Partie entière

Proposition 12

Étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier relatif n tel que $n\,a \leqslant x < (n+1)\,a$, c'est-à-dire tel que :

$$x = n\,a + y \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant y < a.$$

émonstration

Unicité. Si n et n' sont deux entiers répondant à la question, on a :

- $n \leqslant \dfrac{x}{a} < n' + 1$ donc $n - n' < 1$, c'est-à-dire $n - n' \leqslant 0$,
- $n' \leqslant \dfrac{x}{a} < n + 1$ donc $n' - n < 1$, c'est-à-dire $n' - n \leqslant 0$.

On en déduit $n = n'$.

Existence. $\mathbb{R}$ étant archimédien, on peut trouver

- un entier n_1 tel que $x \leqslant a\,n_1$

  un entier n_2 tel que $-x \leqslant a\,n_2$.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} \mid k\,a \leqslant x\}$ étant une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient $-n_2$) et majorée (par n_1), elle contient un plus grand élément n vérifiant $n\,a \leqslant x$.

Puisque l'entier $n+1$ n'appartient pas à cet ensemble on a $x < (n+1)\,a$ ce qui prouve que n convient.

□

Remarque Si $a > 0$, on définit la relation de *congruence modulo* a par :

$$x \equiv y \quad [a] \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \;:\; y = x + n\,a.$$

La proposition précédente signifie que pour tout réel x, il existe un unique $y \in [0, a[$ tel que $x \equiv y \quad [a]$.

On utilise fréquemment en géométrie les congruences modulo 2π (pour les mesures d'angles de vecteurs) et modulo π (pour les mesures d angle de droites).

Définition 7

Si x est un réel, l'unique entier relatif n vérifiant $n \leqslant x < n+1$ s'appelle la *partie entière* de x et se note $E(x)$, $[x]$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Remarque

- C'est la fonction `floor` de `MAPLE` qui correspond à la fonction partie entière E.
- La fonction `trunc` coïncide avec E sur $\mathbb{R}_+$ mais vérifie la relation :

  `trunc(-x) = -trunc(x),`

  ce qui la distingue de la partie entière mathématique.
- On peut encore citer la fonction `ceil` : si x est réel `ceil(x)` désigne le plus petit entier supérieur ou égal à `x`. En mathématiques, on la note $\lceil x \rceil$.

2.7 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$ ce qui signifie :

Proposition 13

Etant donnés deux réels x et y vérifiant $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]\,x, y\,[$.

Démons ra ion

- Prenons $q = E\left(\dfrac{1}{y-x}\right) + 1 \geqslant 1$ puis $p = E(qx)$. On a alors :
$$\frac{1}{q} < y - x \qquad \text{et} \qquad \frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p+1}{q}$$
et donc :
$$x < \frac{p+1}{q} \leqslant x + \frac{1}{q} < x + (y-x) = y$$
ce qui prouve que le rationnel $r = \dfrac{p+1}{q}$ vérifie $x < r < y$.
- D'après la propriété précédente, on peut trouver un rationnel r appartenant à l'intervalle $]\,x+\sqrt{2}, y+\sqrt{2}\,[$ Le nombre $r-\sqrt{2}$ est donc un irrationnel appartenant à $]\,x, y\,[$. □

3. Fonctions réelles

Dans cette section, les fonctions considérées sont toutes définies sur une partie non vide X de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Le cas des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ s'obtient lorsque X est égal à $\mathbb{N}$ ou plus généralement à une partie de $\mathbb{N}$.

3.1 L'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ainsi que λ et μ deux réels On définit les fonctions $\lambda.f + \mu.g$ et $f \times g$ en posant pour tout $x \in X$:
$$(\lambda.f + \mu.g)(x) = \lambda\, f(x) + \mu\, g(x) \quad \text{et} \quad (f \times g)(x) = f(x)\, g(x).$$

Remarques

- On écrit couramment $\lambda f + \mu g$ et $f g$ respectivement à la place de $\lambda.f + \mu.g$ et $f \times g$.
- L'ensemble des suites réelles est plutôt notée $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ s'etend naturellement à $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ en posant, pour $(f, g) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})^2$:
$$f \leqslant g \iff \forall x \in X\,,\ f(x) \leqslant g(x).$$

Attention

- Si X possède au moins deux éléments, il existe des fonctions f et g non comparables c'est-à-dire ne vérifiant ni $f \leqslant g$ ni $g \leqslant f$.

En effet si f prend au moins les valeurs 0 et 1 (une telle fonction existe puisque X possède au moins deux éléments), alors f et $g = 1 - f$ ne sont pas comparables.

On dit que la relation d ordre ainsi définie sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ n'est pas totale.

- On évitera d'utiliser la relation $f < g$ sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. En effet, cette dernière est ambiguë puisque qu'elle peut signifier :

$$\big(f \leqslant g \quad \text{et} \quad f \neq g\big) \qquad \text{ou bien} \qquad \forall x \in X \,,\ f(x) < g(x)$$

ce qui n'est pas équivalent lorsque X contient au moins deux éléments.

Notations Soient f et g deux applications définies sur X.

- On désigne par $|f|$ l'application définie sur X par :

$$\forall x \in X \,,\ |f|(x) = \big|f(x)\big|.$$

- On désigne par $\sup(f.g)$ et $\inf(f,g)$ les applications définies sur X par :

$$\forall x \in X \,,\ \sup(f,g)(x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$$
$$\forall x \in X \,,\ \inf(f,g)(x) = \min\big(f(x), g(x)\big).$$

  L'application $\sup(f,g)$ est la plus petite fonction supérieure à f et à g pour la relation d'ordre de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

  De même, la fonction $\inf(f,g)$ est la plus grande fonction inférieure à f et à g

Propriétés On voit immédiatement que :

- $|f| = \sup(f, -f)$.
- $\sup(f,g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$.

Exemple On désigne par f^+ et f^- les applications :

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \qquad \text{et} \qquad f^- = \frac{|f| - f}{2}.$$

On a les resultats suivants :

- $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$
- f^+ et f^- sont positives,
- $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

3.2 Fonctions bornées

Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$

Définition 8

On dit que f est :

- *majorée* si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \ f(x) \leqslant M$,
- *minorée* si $-f$ est majorée,
- *bornée* si elle est majorée et minorée, c'est–à–dire si :

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \ |f(x)| \leqslant M.$$

Remarque Lorsque l'on a :

$$\forall x \in X, \ |f(x)| \leqslant M,$$

on dit que f est bornée par M

Proposition 14

L'ensemble des fonctions bornées sur X est stable par combinaisons linéaires et par produit. C'est donc un sous–espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

émonstratio Il est immédiat que si f et g sont bornees, respectivement par M_1 et M_2, alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f g$ sont bornées respectivement par $|\lambda| M_1 + |\mu| M_2$ et $M_1 M_2$ □

Notations

- Si f est majorée, on note $\sup\limits_X f$ ou $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ la borne supérieure de l'ensemble $\{f(x) \mid x \in X\}$.
- Si f est minorée, on note $\inf\limits_X f$ ou $\inf\limits_{x \in X} f(x)$ la borne inférieure de l'ensemble $\{f(x) \mid x \in X\}$.

Exemples

1. Si f et g sont majorées sur X, alors $f + g$ est majorée sur X et on a :

$$\sup_X (f+g) \leqslant \sup_X f + \sup_X g.$$

2. L'inégalité ci–dessus n'est pas toujours une égalité comme le prouve l'exemple des fonctions sinus et cosinus qui vérifient :

$$\sup_{\mathbb{R}} \sin = \sup_{\mathbb{R}} \cos = 1 \qquad \text{et} \qquad \sup_{\mathbb{R}}(\sin + \cos) = \sqrt{2}$$

la dernière égalité pouvant se justifier à l'aide de la relation :

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4).$$

Définition 9

On dit que f admet un *maximum* en $a \in X$ si $\forall x \in X\,,\ f(x) \leqslant f(a)$.

On dit que f admet un *maximum local* en $a \in X$ si :

$$\exists h > 0\ :\ \forall x \in X\,,\ |x - a| \leqslant h \Longrightarrow f(x) \leqslant f(a)$$

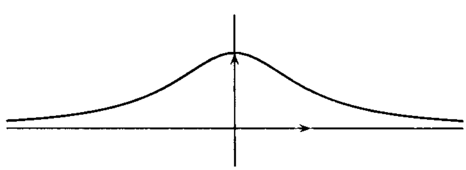
On définit de manière analogue les notions de *minimum* et de *minimum local.*

On dit que f admet un *extremum* (respectivement un *extremum local*) si f admet un maximum (respectivement un maximum local) ou un minimum (respectivement un minimum local).

Exemples

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$:

   - est majorée et possède un maximum en 0 qui vaut 1.
   - est minorée et l'on a $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$, mais ne possède pas de minimum.

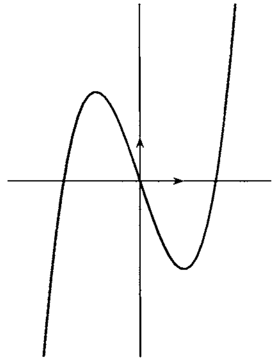


2. La fonction $\cos$ admet un maximum 1 qui est atteint en tous les multiples de 2π. De même, elle possède un minimum -1 atteint en tous les points de la forme $\pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x$$

admet un maximum local en -1 et un minimum local en 1 mais n'a ni maximum ni minimum sur $\mathbb{R}$.



Remarques

- Lorsque f possède un maximum sur X, celui–ci se note $\max\limits_X f$ ou $\max\limits_{x \in X} f(x)$. La fonction f est alors évidemment majorée et l'on a $\sup\limits_X f = \max\limits_X f$.
- De même, si f admet un minimum sur X, celui–ci se note $\min\limits_X f$ ou $\min\limits_{x \in X} f(x)$, et l'on a $\inf\limits_X f = \min\limits_X f$.
- Une fonction peut évidemment être majorée (respectivement minorée) sur X sans admettre de maximum (respectivement de minimum) sur X (*cf.* exemple 1. ci–dessus).
- On dit que la fonction f admet un maximum, minimum ou extremum strict en a si l'inégalité de la définition précédente est stricte pour $x \neq a$.

3.3 Monotonie

Définition 10

On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est :

- *croissante* si $\forall (x,y) \in X^2 ,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$,
- *strictement croissante* si $\forall (x,y) \in X^2 ,\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$,
- *(strictement) décroissante* si $-f$ est (strictement) croissante,
- *(strictement) monotone* si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Proposition 15

Soit f une application d'une partie X de $\mathbb{R}$ dans une partie Y de $\mathbb{R}$ et g une application de Y dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont monotones (respectivement strictement monotones), alors $g \circ f$ est monotone (respectivement strictement monotone).

Démonstration En notant $\nearrow$ pour « croissante » et $\searrow$ pour « décroissante », si $x \leqslant y$, le tableau suivant récapitule les 4 cas possibles :

	$f \nearrow$	$f \searrow$
	$f(x) \leqslant f(y)$	$f(x) \geqslant f(y)$
$g \nearrow$	$g(f(x)) \leqslant g(f(y))$	$g(f(x)) \geqslant g(f(y))$
$g \searrow$	$g(f(x)) \geqslant g(f(y))$	$g(f(x)) \leqslant g(f(y))$

De même pour la stricte monotonie avec des inégalités strictes, lorsque les fonctions f et g sont strictement monotones. □

Exemples

1. Une fonction monotone est strictement monotone si, et seulement si, elle est injective.
2. La somme de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
3. La somme de deux fonctions monotones n'est pas nécessairement monotone comme le prouve l'exemple de $x \mapsto e^x + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Étant donnés des réels a, b, c, d vérifiant $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$, l'*homographie* (ou *fonction homographique*) f :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array}$$
est strictement monotone sur $]-\infty, -\frac{d}{c}[$ et sur $]-\frac{d}{c}, +\infty[$ car on a :
$$\forall (x,y) \in D_f\,,\ x \neq y \Longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(ad-bc)}{(cx+d)\,(cy+d)}.$$
Attention La fonction f n'est pas monotone sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.
5. La fonction f $x \mapsto \ln\left(\dfrac{2e^x+1}{e^x+2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ et est monotone comme composée de trois fonctions monotones : exp, ln et une fonction homographique définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc monotone sur cet intervalle.
Comme $f(0) = 0$ et $f(\ln 2) = \ln(5/4) > 0$, on en déduit que f est croissante.
6. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. En effet pour tout x on a $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, et comme dans l'exemple précédent, f est la composée d'une fonction homographique croissante sur $\mathbb{R}_+$ et d une fonction croissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
7. Si f et g sont des fonctions positives et croissantes, la fonction $f\,g$ est croissante
8. Si f est monotone et garde un signe constant, alors $1/f$ est monotone.

3.4 Parité, périodicité

Définition 11

- On dit que f est *paire* si X est symétrique par rapport à 0 et si :
$$\forall x \in X\,,\ f(-x) = f(x).$$
- On dit que f est *impaire* si X est symétrique par rapport à 0 et si :
$$\forall x \in X\,,\ f(-x) = -f(x).$$

Exemples

1. La fonction $f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{2e^x+1}{e^x+2}\right) \end{array}$ est impaire.
2. La fonction définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \left\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ est paire.

Propriétés

- Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à Oy.
- Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à O.
- L'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) définies sur $\mathbb{R}$ est stable par combinaisons linéaires donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}.\mathbb{R})$.
- L'ensemble des fonctions paire est stable par produit mais pas celui des fonctions impaires.

Définition 12

- Un réel T est une *période* de f si :
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x \in X \Longleftrightarrow x + T \in X \qquad \text{et} \qquad \forall x \in X\,,\ f(x+T) = f(x).$$
- La fonction f est *périodique* si elle admet au moins une période T non nulle. On dit alors que f est *T–périodique* ou *périodique de période T*.

Remarques

- Soit f une fonction périodique. Il est évident que :

  si T est une période de f alors $-T$ est aussi une période de f,

  - si T_1 et T_2 sont deux periodes de f alors $T_1 + T_2$ est aussi une période de f.
- L'ensemble des périodes de f est donc un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
- D'après la structure des sous–groupes de $(\mathbb{R}, +)$ (voir l'exercice 18) :
  - si f possède une plus petite période T strictement positive, alors ses périodes sont les multiples non nuls de T,
  - sinon, l'ensemble de ses périodes est dense dans $\mathbb{R}$
- Ce dernier cas peut se produire sans que f soit constante (prendre la fonction qui vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels dont l'ensemble des périodes est $\mathbb{Q}$), sauf si on suppose f continue (voir l'exercice 15 de la page 351 du chapitre sur la continuité).

Proposition 16

Soit T un reel non nul.

L'ensemble des fonctions T–périodiques sur X est stable par combinaisons linéaires et par produit.

C'est donc un sous–espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3.5 Fonction réciproque

Proposition 17

Si f est une bijection d'une partie X de $\mathbb{R}$ sur une partie Y de $\mathbb{R}$, alors le graphe de f et de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

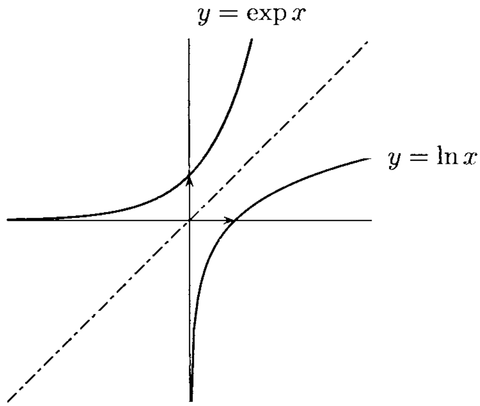
emonstration Notons Γ_f (respectivement $\Gamma_{f^{-1}}$) le graphe de f (respectivement de f^{-1}).

$$\begin{aligned}(x,y) \in \Gamma_f &\Longleftrightarrow x \in X \quad \text{et} \quad y = f(x)\\ &\Longleftrightarrow y \in Y \quad \text{et} \quad x = f^{-1}(y)\\ &\Longleftrightarrow (y,x) \in \Gamma_{f^{-1}}.\end{aligned}$$

□

Exemples

1. Graphes des fonctions exponentielle et logarithme :



2. Si f est bijective et croissante, la fonction réciproque de f est une fonction croissante. (Rappelons qu'une fonction bijective croissante est strictement croissante.) En effet :
$$f^{-1}(x) \geqslant f^{-1}(y) \Longrightarrow x = f\left(f^{-1}(x)\right) \geqslant f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$
et donc par contraposition :
$$x < y \Longrightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$$
ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante.
3. De même, la réciproque d'une fonction bijective (strictement) décroissante est (strictement) décroissante.
4. Si f est une fonction impaire bijective de X dans Y, alors sa réciproque est aussi impaire. En effet, Y est symétrique par rapport à O et pour tout élément $y \in Y$, on a :
$$f(f^{-1}(-y)) = -y = -f(f^{-1}(y)) = f(-f^{-1}(y)),$$
et l'injectivité de f permet de conclure $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

3.6 Fonctions lipschitziennes

Définition 13

Une application f définie sur un intervalle I est *lipschitzienne* sur I s'il existe un réel k tel que :
$$\forall (x,y) \in I^2, \ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k|x-y|.$$
On dit alors aussi que f est *k–lipschitzienne* ou *lipschitzienne de rapport k*.

Exemples

1. Toute fonction affine $f(x) = a\,x + b$ est lipschitzienne de rapport $|a|$
2. La tonction racine n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, puisque pour $k \in \mathbb{R}$, on ne peut pas avoir :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+\,,\ \sqrt{x} \leqslant k\,x.$$
3. Une combinaison linéaire de fonctions lipschitziennes est une fonction lipschitzienne, puisque si f et g sont lipschitziennes de rapports respectivement k_1 et k_2, alors pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in I^2$, on a :
$$\begin{aligned}\big|(\lambda\,f + \mu\,g)(x) - (\lambda\,f + \mu\,g)(y)\big| &\leqslant |\lambda|\big|f(x) - f(y)\big| + |\mu|\big|g(x) - g(y)\big|\\ &\leqslant \big(|\lambda|\,k_1 + |\mu|\,k_2\big)|x - y|.\end{aligned}$$
Comme la fonction nulle est lipschitzienne, on en déduit que l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
4. En revanche, un produit de fonctions lipschitziennes n'est pas nécessairement lipschitzienne comme le prouve l'exemple de la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ dont le carré n'est pas lipschitzien.
5. Soient f une fonction k_1–lipschitzienne sur I et g une fonction à valeurs dans I, lipschitzienne de rapport k_2 sur un intervalle J. On a, pour $(x, y) \in J^2$:
$$\big|f \circ g(x) - f \circ g(y)\big| \leqslant k_1\big|g(x) - g(y)\big| \leqslant k_1\,k_2|x - y|$$
ce qui prouve que la fonction $f \circ g$ est lipschitzienne de rapport $k_1 k_2$.
6. Soient a b et c trois réels tels que $a < b < c$ et f une fonction définie sur $[a, c]$. Si f est k–lipschitzienne sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f est k–lipschitzienne sur $[a, c]$.
En effet, montrons pour $(x, y) \in [a, c]^2$:
$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant k\,|x - y|.$$
   - Si $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$ ou $b \leqslant x \leqslant y \leqslant c$, c'est vrai par hypothèse.
   - Si $x \leqslant b \leqslant y$, alors :
$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \big|f(x) - f(b)\big| + \big|f(b) - f(y)\big| \leqslant k\,|b - x| + k\,|y - b|$$
puisque $(x, b) \in [a, b]^2$ et $(b, y) \in [b, c]^2$. Donc :
$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant k\,(b - x) + k\,(y - b) = k\,(y - x) = k\,|x - y|$$

EXERCICES

1. Soient a, b, c et d, quatre réels vérifiant :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da.$$

Montrer que $a = b = c = d$.

2. Parmi les relations suivantes, quelles sont celles qui sont vérifiées quels que soient les quatre réels x_1, x_2, y_1 et y_2, vérifiant $x_1 \leqslant y_1$ et $x_2 \leqslant y_2$?
a) $x_1^2 \leqslant y_1^2$
b) $x_1 - x_2 \leqslant y_1 - y_2$
c) $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$
d) $x_1 x_2 \leqslant y_1 y_2$
e) $\dfrac{x_1}{x_2} \leqslant \dfrac{y_1}{y_2}$
Même question, si l'on suppose de plus les quatre réels positifs ?

3. Résoudre :

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{3+x} \geqslant 1.$$

4. Simplifier :

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ et $a \geqslant b$.

5. Montrer que :

a) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ , \ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

b) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \sqrt{|a-b|} \geqslant \left| \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \right|.$

6. Montrer que la racine carrée d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.

7. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ avec A bornée et $B \subset A$.
Comparer $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$, $\inf B$.

8. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ avec $\sup A > 0$.
Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

9 Soient a et b deux reels strictement positifs, les parties suivantes sont-elles majorées, minorées, si oui, quelles sont leurs bornes supérieures, inférieures ?

$$\{a + bn \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{a + (-1)^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{a + \frac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$\{(-1)^n a + \frac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$\{a + \frac{(-1)^n b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

10. Soient a et b deux réels, montrer que :

a) $a \leqslant b \Longrightarrow E(a) \leqslant E(b)$

b) $E(a) + E(b) \leqslant E(a+b) \leqslant E(a) + E(b) + 1.$

11. Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n réels strictement positifs.
Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2.$$

12. Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide). Que peut-on dire de l'intersection de deux intervalles ouverts ? De deux intervalles fermés ?

13. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
On note :

$$-A = \{-x \mid x \in A\}$$

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$$

$$a + A = \{a + x \mid x \in A\}$$

$$AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\}.$$

a) Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

b) Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

c) Montrer que $\sup(a+A) = a + \sup(A)$.

d) A-t-on $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$?

14. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$
Montrer que $A \cup B$ est non vide et bornée et déterminer $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$.

15. Soient x un nombre réel et n un entier naturel non nul, montrer que :

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$$

16. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;,\; \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

En déduire la partie entière de :

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $2n$ nombres réels tels que :

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n.$$

Montrer que :

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On examinera $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$.

18. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

a) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. On note $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

b) Montrer que si $a > 0$ alors $a \in G$ et $G = a\mathbb{Z}$.

c) Montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avec $x < y$, il existe $z \in G$ tel que $z \in [x, y]$

19. Soient f et g deux fonctions. Montrer que :

$$\inf(-f, -g) = -\sup(f, g)$$

$$\sup(-f, -g) = -\inf(f, g)$$

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

Écrire $\inf(f, g)$ à l'aide de f, g et $|f - g|$.

20. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big|f(x) - f(y)\big| = |x - y|$$

21. Soient f une fonction majoree et g une fonction bornée définies sur une partie X de $\mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\sup_X f + \inf_X g \leqslant \sup_X (f+g).$$

22. Montrer que la fonction f définie sur $]0,1]$ par :

$$f(x) = (1-x)\sin\frac{\pi}{x}$$

est bornée.
Atteint-elle ses bornes ?

23. On considère n fonctions numériques $f_1, f_2, \ldots, f_n$ définies sur $\mathbb{R}$.
Parmi ces n fonctions, p sont décroissantes ($0 \leqslant p \leqslant n$) et $n-p$ croissantes.
La fonction $f_1 \circ f_2 \cdots \circ f_n$ est-elle monotone ?
Si oui, quelle est sa monotonie ?

24. Soient f et g deux fonctions numériques définies sur X qui sont paires ou impaires ?
Que peut-on dire du produit fg ?

25. Soit f définie par : si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 1$ et si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$.
Déterminer l'ensemble des periodes de f.

26. On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = x+1$, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Montrer que f est bijective et donner son application réciproque.

27. Montrer que toute fonction lipschitzienne est la différence de deux fonctions lipschitziennes croissantes.

28. Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes bornées est lipschitzienne.
En est-il de même si les deux fonctions ne sont pas bornées ?

Chapitre 9

Suites réelles

1. Définitions

On appelle *suite* à termes réels, ou *suite réelle,* une famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Traditionnellement, si u est une suite on utilise plutôt la notation indicée u_n à la place de $u(n)$ pour désigner l'image par u de l'entier n. La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Par extension, nous appellerons aussi suite réelle une famille de réels indexée par $\mathbb{N}^*$, voire plus généralement par un intervalle entier du type $[\![n_0,+\infty[\![$. On peut en ramener l'étude au cas des suites définies sur $\mathbb{N}$ par le changement d'indice $p=n-n_0$.

Définition 1

Une suite u est :

- *constante* si $\forall n\in\mathbb{N}\,,\ u_{n+1}=u_n\,,$
- *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si :

$$\exists p\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geqslant p\,,\ u_{n+1}=u_n.$$

1.1 Définitions liées à la relation d'ordre

Définition 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- *majorée* si $\exists M \in \mathbb{R} \;:\; \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_n \leqslant M$,
- *minoree* si $\exists m \in \mathbb{R} \;:\; \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_n \geqslant m$,
- *bornée* si elle est majorée et minorée c'est–à–dire si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \;:\; \forall n \in \mathbb{N}\,,\; |u_n| \leqslant M.$$

Définition 3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} \geqslant u_n$,
- *décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N}\,.\; u_{n+1} \leqslant u_n$,
- *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

On dit qu'elle est *strictement croissante, strictement decroissante,* ou *strictement monotone* si l'inégalité correspondante est stricte.

Exemples

1. La suite u définie par $u_n = 1/(n+1)$ est strictement décroissante.
2. Les suites constantes sont les seules suites qui soient simultanément croissantes et décroissantes.
3. Si $a \in \mathbb{R}_+$, la suite $u_n = a^n$ est monotone.
4. La suite $u_n = E(n/2)$ est croissante mais n'est pas strictement croissante.
5. La suite $(-1)^n$ n'est pas monotone.
6. L'opposée d'une suite croissante est une suite décroissante.
7. La somme de deux suites croissantes (respectivement le produit de deux suites croissantes positives) est une suite croissante.

Remarque Dans le chapitre précédent, on a défini la croissance d une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (p.q) \in \mathbb{N}^2\,.\; p \leqslant q \Longrightarrow u_p \leqslant u_q.$$

Ces deux definitions de la notion de suites croissantes sont évidemment équivalentes.

1.2 Suites convergentes

Définition 4

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 si :

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon.$$

Exemples

1. La convergence vers 0 de la suite $u = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une consequence de l'axiome d'Archimède. En effet, si ε est un réel strictement positif on peut trouver un entier n_0 tel que $n_0\,\varepsilon \geqslant 1$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors :
$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n_0+1} \leqslant \varepsilon.$$
2. Si $|a| < 1$ la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :
   - si $a = 0$ c'est évident puisque la suite est nulle à partir du rang 1,
   - si $a \neq 0$, on a $\dfrac{1}{|a|} > 1$ et, pour $\varepsilon > 0$ fixé, la propriété d'Archimède multiplicative permet de trouver un entier n_0 tel que $\left(\dfrac{1}{|a|}\right)^{n_0} \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}\cdot$
   On a alors de façon immédiate :
   $$\forall n \geqslant n_0\,,\ |a^n| \leqslant \varepsilon.$$
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $\left(u_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0. En effet, soit $\varepsilon \in\ ]0.1]$ et un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon$. Puisque $\varepsilon \leqslant 1$, on a alors :
$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n^2 \leqslant |u_n| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque Dans l exemple précédent, on s'est limité à $\varepsilon \leqslant 1$, ce qui n'est pas une restriction étant donné que dans une proposition du type :

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \cdots \Longrightarrow |\cdots| \leqslant \varepsilon,$$

si le résultat est vrai pour un certain $\varepsilon > 0$, il est évidemment vrai pour tous ceux qui sont plus grands.

Définition 5

On dit qu'une suite u est *convergente* s'il existe un réel ℓ tel que la suite $u - \ell$ converge vers 0.

Ce reel ℓ est alors unique ; on l'appelle *limite* de la suite u, on le note :

$$\ell = \lim u \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

et on dit que la suite u *converge* vers ℓ.

émonstrati Soient ℓ et ℓ' deux réels tels que $u-\ell$ et $u-\ell'$ convergent vers 0 Montrons $\ell=\ell'$.
Soit $\varepsilon>0$ D'après la définition 4 de la page précédente, on peut trouver n_1 et n_2 tels que :

$$\forall n \geqslant n_1\,,\ |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n\geqslant n_2\,.\ |u_n-\ell'|\leqslant\varepsilon.$$

Pour $n=\max\{n_1,n_2\}$, on peut écrire :

$$|\ell-\ell'|\leqslant|\ell-u_n|+|u_n-\ell'|\leqslant 2\varepsilon.$$

On a ainsi :

$$\forall\varepsilon>0\,.\ |\ell-\ell'|\leqslant 2\varepsilon$$

ce qui prouve que $\ell-\ell'$ est nul. □

Exemples

1. Si u est une suite constante, elle converge vers u_0.
2. Si a est un réel tel que $|a|<1$, une suite u vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}\,,\ u_{n+1}=a\,u_n+b$ est convergente.
   En effet, puisque $a\neq 1$, il existe un unique réel ℓ tel que $\ell=a\,\ell+b$ et alors :
   $$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ u_{n+1}-\ell=a(u_n-\ell)$$
   ce qui prouve que la suite $u-\ell$ est géométrique de raison a donc converge vers 0 puisque $|a|<1$.

Remarques

- La convergence d'une suite u s'écrit :
  $$\exists\ell\in\mathbb{R}\ :\ \forall\varepsilon>0\,,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ n\geqslant n_0\Longrightarrow|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$
- Pour démontrer qu une suite u est *divergente* (c'est–à–dire n'est pas convergente) il faut donc prouver :
  $$\forall\ell\in\mathbb{R}\,,\ \exists\varepsilon>0\ :\ \forall n_0\in\mathbb{N}\,,\ \exists n\geqslant n_0\ :\ |u_n-\ell|>\varepsilon$$
  ce qui est très lourd et n'est donc, en général, pas utilisé.

Exemple Il est évident d'après les définitions que si une suite u converge vers ℓ, alors la suite $-u$ converge vers $-\ell$ et la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Donc si la suite $u=\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on doit avoir $\ell=-\ell$, ce qui prouve $\ell=0$. Or, comme on a $|u_n|=1$, la suite u ne peut pas converger vers 0. Elle est par conséquent divergente.

Nous verrons plus loin une méthode beaucoup plus rapide pour prouver cette divergence.

Proposition 1

Soient u une suite réelle et ℓ un réel. S'il existe une suite v convergeant vers 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$, alors la suite u converge vers ℓ.

emonstratio Puisque la suite v tend vers 0, on a :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |v_n| \leqslant \varepsilon$$

et donc :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

□

Exemple Soit f une fonction majorée définie sur une partie X de $\mathbb{R}$. Si $M = \sup\limits_X f$, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = M$.

En effet d'après la caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément $x_n \in X$ tel que :

$$M - \frac{1}{2^n} \leqslant f(x_n) \leqslant M.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\big|f(x_n) - M\big| \leqslant 2^{-n}$, ce qui montre $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = M$.

Methode Pour démontrer qu'une suite u converge vers un reel ℓ, on peut donc commencer par evaluer $|u_n - \ell|$ et essayer de le majorer pour :

- soit trouver une suite v tendant vers 0 telle que $|u - \ell| \leqslant v$,
- soit montrer :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Par exemple, la majoration $\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|$ prouve :

Proposition 2

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $|u| = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.

Attention La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, comme le prouve l'exemple de la suite $u_n = (-1)^n$.

1.3 Propriétés des suites convergentes

Proposition 3

Toute suite convergente est bornee.

em nstration

- Soit u une suite convergeant vers 0. En utilisant la définition avec par exemple $\varepsilon = 1$, on peut trouver un entier N tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant 1$.

  En posant $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, 1\}$, on a évidemment $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$

- Soit u une suite convergeant vers un réel ℓ La suite $u - \ell$ converge vers 0 donc est bornée, d après ce qui précède, par un certain réel M L'inégalité $|u| \leqslant |u - \ell| + |\ell|$ prouve alors que u est bornée par $M + |\ell|$ □

Exemples

1. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, car elle n'est pas bornée.
2. La réciproque de la proposition précédente est fausse : par exemple la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais n'est pas convergente.

Proposition 4

Soit m un réel. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers une limite $\ell > m$, alors il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant m$.

Démonstratio Il suffit d'appliquer la définition de la limite avec $\varepsilon = \ell - m$ et l'on trouve un entier n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a donc $u_n - \ell \geqslant m - \ell$ et par conséquent, $u_n \geqslant m$. □

Remarque Dans cette sıtuation, on dit que la suite u est minorée par m *à partir d'un certain rang.*

Corollaire 5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une limite $\ell > 0$ est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang.

Démonstra io Il suffit d'applıquer le resultat précédent avec $m = \ell/2$ □

Corollaire 6

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers une limite $\ell \neq 0$ alors $|u|$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.

ém ns ration Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite $|u|$ qui converge vers $|\ell| > 0$. □

1.4 Suites tendant vers l'infini

Définition 6

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- *tend vers* $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\,.\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant A.$$

- *tend vers* $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant A.$$

Exemples

1. La suite $u_n = n$ tend vers $+\infty$ (prendre $n_0 = E(A) + 1$).
2. Si $a > 1$, la suite $u_n = a^n$ tend vers $+\infty$. En effet la propriété d'Archimède multiplicative permet de dire que pour A fixé, il existe un entier n_0 tel que $a^{n_0} \geqslant A$. On a alors de façon évidente :
$$\forall n \geqslant n_0\,,\ a^n \geqslant a^{n_0} \geqslant A.$$
3. Si une suite u tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée (évident d'après la définition) mais elle est minorée. En effet, on peut trouver un entier N tel que :
$$\forall n \geqslant N\,,\ u_n \geqslant 0$$
et alors u est minorée par $\min\{0, u_0, u_1, \dots . u_{N-1}\}$.

Attention Une suite tendant vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) ne fait pas partie des suites convergentes. On dit aussi que c'est une suite qui diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Remarques

- Une suite u tend vers $+\infty$ si, et seulement si, la suite $-u$ tend vers $-\infty$.
- Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou si elle tend vers $-\infty$ alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ mais la réciproque de ce résultat est fausse comme le prouve l'exemple de la suite u définie par $u_n = (-n)^n$.

1.5 Caractère asymptotique de la notion de limite

Proposition 7

Soient u et v deux suites égales à partir d'un certain rang c'est–à–dire telles que :

$$\exists n_0 \; : \; n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n = v_n.$$

Si $\lim u = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim v = \ell$.

Ce résultat évident d après les définitions, traduit ce que l on appelle le caractère asymptotique de la notion de limite. On peut ainsi changer un nombre fini de termes d'une suite, sans changer sa limite éventuelle.

C'est pourquoi dans la suite de ce chapitre, la plupart des résultats énoncés concerneront des propriétés vraies à partir d'un certain rang. Par exemple, le résultat de la proposition 1 de la page 283 peut se reformuler de la façon suivante : « S'il existe une suite v tendant vers 0 telle qu'à partir d'un certain rang on ait $|u_n - \ell| \leqslant v_n$, alors la suite u converge vers ℓ ».

1.6 Suites extraites

Définition 7

Une suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée *suite extraite*, ou *sous-suite*, d'une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une application φ, strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \; v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemples

1. La suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \; \varphi(n) \geqslant n.$$

Proposition 8

Si $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite d'une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et si u tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors v tend aussi vers ℓ.

Démonstration Les démonstrations des trois cas $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$ et $\ell = -\infty$ étant très similaires, nous ne traiterons que le premier.

Soient u une suite convergeant vers ℓ et $v = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de u

Établissons $\lim v = \ell$, c'est-à-dire :

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ \forall n \geqslant n_0\,,\ \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim u = \ell$, on peut trouver n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $\forall n \geqslant n_0\,,\ \varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$, on en déduit :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

□

> ***Méthode*** On utilise surtout le résultat précédent pour démontrer qu'une suite n'est pas convergente en exhibant deux sous-suites convergeant vers des limites différentes.

Exemples

1. La suite $u_n = (-1)^n$ est divergente, car la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.
2. La suite $u = \left(\cos(.\pi/4)\right)$ diverge puisque $u_{4n} = (-1)^n$ en est une sous-suite divergente.

Proposition 9

Si u est une suite telle que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors la suite u converge vers ℓ

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver n_1 et n_2 tels que :

$$\forall n \geqslant n_1\,,\ |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant n_2\,,\ |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Si l'on pose $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$, on a évidemment :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence de u vers ℓ □

2. Opérations sur les limites

Cette section regroupe les résultats, que l'on appelle *théorèmes généraux* qui permettent de determiner la limite d'une suite qui est somme, produit et quotient de suites possédant des limites.

2.1 Ensemble des suites bornées

Proposition 10

L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des suites bornées est stable par combinaison linéaire et par produit.

émonstration Si u et v sont bornées, respectivement par M_1 et M_2, alors les suites $\lambda u + \mu v$ et $u v$ sont bornees respectivement par $|\lambda| M_1 + |\mu| M_2$ et $M_1 M_2$. □

2.2 Opérations sur les suites tendant vers 0

Proposition 11

1. La somme de deux suites tendant vers 0 est une suite tendant vers 0.
2. Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 est une suite tendant vers 0.

émonstration

1. Étant données deux suites u et v tendant vers 0 prouvons que $u+v$ tend vers 0 c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ \forall n \geqslant n_0\,,\ |u_n + v_n| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ Comme u et v tendent vers 0, on peut trouver n_1 et n_2 tels que :

$$\forall n \geqslant n_1\,,\ |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant n_2\,,\ |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisissant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ |u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \varepsilon.$$

2. Étant données une suite u bornée et une suite v tendant vers 0, prouvons que $u\,v$ tend vers 0, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ \forall n \geqslant n_0\,,\ |u_n v_n| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La suite u est bornee, donc on peut trouver un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ |u_n| \leqslant M.$$

Comme la suite v tend vers 0 et que ε / M est un reel strictement positif, on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}.$$

Il est alors évident que $\forall n \geqslant n_0\,,\ |u_n v_n| \leqslant \varepsilon$. □

Remarque Une suite constante étant bornée, on en déduit que si u tend vers 0, alors $\lambda\, u$ aussi. Il en découle que toute combinaison linéaire de suites convergeant vers 0 est une suite qui tend vers 0.

L'ensemble des suites tendant vers 0 est donc un sous–espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2.3 Ensemble des suites convergentes

Proposition 12

Étant données deux suites u et v convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2, ainsi que deux réels λ et μ, les suites $\lambda\, u + \mu\, v$ et $u\, v$ convergent respectivement vers $\lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2$ et $\ell_1\, \ell_2$.

é o s ration

- Pour tout n, l'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$\big|(\lambda\, u_n + \mu\, v_n) - (\lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2)\big| \leqslant |\lambda|\, |u_n - \ell_1| + |\mu|\, |v_n - \ell_2|.$$

Les suites $\big(|u_n - \ell_1|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(|v_n - \ell_2|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0, donc leurs combinaisons linéaires aussi, ce qui prouve que la suite $\Big(\big|(\lambda\, u_n+\mu\, v_n)-(\lambda\, \ell_1+\mu\, \ell_2)\big|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une suite tendant vers 0, et donc tend aussi vers 0. On a ainsi $\lim(\lambda\, u + \mu\, v) = \lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2$.

- Pour tout n, on peut écrire :

$$\big|u_n\, v_n - \ell_1\, \ell_2\big| = \big|u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1)\big| \leqslant |u_n|\, |v_n - \ell_2| + |\ell_2|\, |u_n - \ell_1|$$

  - La suite $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, puisqu'elle converge, et la suite $\big(|v_n - \ell_2|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc la suite $\big(|u_n|\, |v_n - \ell_2|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
  - De même la suite $\big(|\ell_2|\, |u_n - \ell_1|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

D'où l'on déduit comme précédemment que la suite $(|u_n\, v_n - \ell_1\, \ell_2|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc $\lim(u\, v) = \ell_1\, \ell_2$. □

Remarques

- L'ensemble des suites convergentes est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et l'application $u \mapsto \lim u$ est linéaire.
- La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente. En effet, soit u une suite convergente et v une suite divergente. Si la suite $w = u + v$ était convergente, alors, d'après la proposition précédente, la suite $v = w - u$ serait convergente, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

- On ne peut rien dire de la somme ou du produit de deux suites divergentes, comme le prouve l exemple des deux suites $u_n = 1+(-1)^n$ et $v_n = 1-(-1)^n$.

2.4 Opérations sur les suites tendant vers l'infini

Proposition 13

Soit u une suite tendant vers $+\infty$.

1. Si v est une suite minorée alors $u+v$ tend vers $+\infty$
2. Si v est une suite minorée à partir d un certain rang par un nombre strictement positif, alors $u\,v$ tend vers $+\infty$.

Démonstration

1. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme v est minoree on peut trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant m$.
La suite u tendant vers $+\infty$, on peut trouver n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A - m$.
On en déduit de façon évidente $\forall n \geqslant n_0$, $u_n + v_n \geqslant A$.
2. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Comme v est minorée à partir d'un certain rang par un nombre strictement positif, on peut trouver $m > 0$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant n_1$, $v_n \geqslant m$.
La suite u tendant vers $+\infty$, on peut trouver $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_2$, $u_n \geqslant A/m$
Pour $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, on a alors :
$$v_n \geqslant m \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad u_n \geqslant \frac{A}{m} \geqslant 0$$
et donc $u_n\, v_n \geqslant A$ □

Remarque Comme dans la démonstration précédente, lorsque l'on veut montrer une proposition du type :
$$\forall A \in \mathbb{R}.\ \cdots \Longrightarrow \cdots \geqslant A,$$
on peut se limiter au cas où $A \geqslant 0$, car si la propriété est vraie pour un certain A elle est vraie pour tous ceux qui sont inférieurs.

Proposition 14

Soient u et v deux suites réelles admettant des limites ℓ_1 et ℓ_2 dans $\overline{\mathbb{R}}$.

- Si la forme $\ell_1 + \ell_2$ n'est pas indéterminée on a $\lim(u+v) = \ell_1 + \ell_2$.
- Si la forme $\ell_1\,\ell_2$ n'est pas indéterminée, on a $\lim(u\,v) = \ell_1\,\ell_2$.

émonstrat' n (Voir page 260 l'extension des opérations à $\overline{\mathbb{R}}$)

- Si ℓ_1 et ℓ_2 sont reels, le résultat a été déjà vu.
- Pour la somme :
  - si $\ell_1 = +\infty$ et $\ell_2 \neq -\infty$, alors soit v est convergente donc bornée, soit elle tend vers $+\infty$ et alors elle est minorée (cf. exemple 3. de la page 285). Dans les deux cas on a la somme d'une suite tendant vers $+\infty$ et d'une suite minorée, somme qui tend donc vers $+\infty$.
  - Le cas $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 \neq +\infty$ s'en déduit alors en considérant les suites $-u$ et $-v$.
- Pour le produit :
  - si $\ell_1 = +\infty$ alors pour $\ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$, la suite v est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif (d'après le corollaire 5 de la page 284) et pour $\ell_2 = +\infty$ la définition nous dit que v est minorée à partir d'un certain rang par 1 (par exemple). Dans les deux cas on en déduit $\lim(u\,v) = +\infty$.
  - Les autres cas s'en déduisent en considérant les suites $-u$ ou $-v$. □

Attention On ne peut rien dire :

- de la somme de deux suites qui tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$,
- du produit d'une suite qui tend vers l'infini et d'une suite convergeant vers 0.

Exemples

1. La suite $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers $-\infty$ puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty.$$

2. Si a est un réel strictement supérieur à 1, une suite u vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = a\,u_n + b$$

est soit constante, soit divergente vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. En effet en notant ℓ l'unique réel tel que $a\,\ell + b = \ell$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

3. Les résultats de la proposition 14 de la page ci-contre ne permettent pas de prouver directement la convergence de la suite u définie par $u_n = \left(n + \dfrac{1}{n}\right)^2 - n^2$.

En revanche, le calcul :

$$u_n = n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2}$$

permet de dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2.5 Inverse et quotient

Proposition 15

Si u est une suite convergeant vers une limite $\ell \neq 0$. Alors à partir d'un certain rang n_0 tous les u_n sont non nuls, et la suite $(1/u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers $1/\ell$.

émonstration D'après le corollaire 6 de la page 285, on peut trouver un entier n_0 et un réel $m > 0$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ |u_n| \geqslant m.$$

Pour $n \geqslant n_0$ on peut alors écrire :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{u_n - \ell}{\ell\, u_n}\right| \leqslant \frac{1}{|\ell| m}|u_n - \ell|,$$

et comme la suite $\left(\frac{1}{|\ell| m}|u_n - \ell|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on en déduit que $(1/u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers $1/\ell$. □

Proposition 16

Soit u une suite divergeant vers $+\infty$. Alors à partir d'un certain rang n_0 tous les u_n sont strictement positifs et la suite $(1/u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.

émonstration La définition de la divergence de u vers $+\infty$ nous permet de trouver un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0\,,\ u_n \geqslant 1$.

Soit alors $\varepsilon > 0$ On peut trouver un rang n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1 \quad u_n \geqslant 1/\varepsilon$.

Pour $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$, on a alors $0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon$ La suite $(1/u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge donc vers 0 □

Proposition 17

Soit u une suite convergeant vers 0 dont tous les termes sont strictement positifs (respectivement strictement négatifs) à partir d'un certain rang n_0. Alors la suite $(1/u_n)_{n \geqslant n_0}$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Démonstration Traitons le cas où $\forall n \geqslant n_0\,,\ u_n > 0$ (l'autre s'en déduisant immédiatement à l'aide de $-u$) en établissant :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \exists n_1 \;:\; \forall n \geqslant n_1 \quad \frac{1}{u_n} \geqslant A.$$

Soit $A > 0$; le reel $1/A$ est un nombre strictement positif, donc l'hypothèse $\lim u = 0$ permet de trouver un entier $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que .

$$\forall n \geqslant n_0'\,,\ |u_n| \leqslant \frac{1}{A}.$$

En posant $n_1 = \max(n_0, n_0')$ on a alors, pour $n \geqslant n_1$, $|1/u_n| \geqslant A$, c'est-à-dire $1/u_n \geqslant A$ puisque $u_n > 0$.
D'où la divergence de $(1/u_n)_{n \geqslant n_0}$ vers $+\infty$. □

Attention

- L'inverse d'une suite à termes non nuls convergeant vers 0 peut très bien ne tendre ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ comme le prouve l'exemple de la suite $u_n = (-1)^n/n$.
- En revanche, si $\lim u = 0$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, alors $|u|$ est une suite à termes strictement positifs convergeant vers 0, et donc $\lim 1/|u| = +\infty$.

Remarques

- Si l'on ecrit $\lim u = 0^+$ (respectivement $\lim u = 0^-$) pour signifier que la suite u tend vers 0 et a tous ses termes strictement positifs (respectivement strictement négatifs) à partir d'un certain rang, alors les résultats des trois propositions précedentes peuvent se résumer en disant que si $\lim u = \ell \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty, 0^+, 0^-\}$, alors on a $\lim(1/u) = 1/\ell$ en posant :
$$\frac{1}{0^+} = +\infty, \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$
- En utilisant les résultats sur l'inverse et le produit, on peut donner les resultats sur le quotient de deux suites : si u et v sont des suites admettant respectivement $\ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty, 0^+, 0^-\}$ pour limites, alors u/v admet ℓ_1/ℓ_2 pour limite s'il n'y a pas une des formes indeterminées suivantes $\frac{0}{0^\pm}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

3. Limites et relation d'ordre

3.1 Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 18

Soient u et v deux suites convergentes.

1. S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 0$, alors $\lim u \geqslant 0$.
2. S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant v_n$, alors $\lim u \geqslant \lim v$.

émons tion

1. À partir d'un certain rang, la suite u étant positive elle est egale à sa valeur absolue Si elle converge vers ℓ, on a donc :
$$\ell = \lim u = \lim |u| = |\ell| \geqslant 0.$$

2. On applique le résultat précédent à la suite $u - v$ □

Attention On ne peut pas affiner le résultat précédent en utilisant une inégalité stricte comme le prouve l'exemple de la suite strictement positive $u_n = 1/n$ dont la limite est nulle.

3.2 Existence de limite par encadrement

Proposition 19

Soient u et w deux suites convergeant vers la même limite. Si v est une suite vérifiant :

$$\exists n_0 \ : \ \forall n \geqslant n_0 \, , \ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

alors la suite v converge et $\lim u = \lim v = \lim w$.

Démonstration D'après les hypothèses on peut écrire :

$$\exists n_0 \ : \ \forall n \geqslant n_0 \, , \ 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n.$$

Puisque $\lim(w - u) = 0$, la proposition 1 de la page 283 permet de conclure que la suite $v - u$ converge vers 0.

Comme $v = u + (v - u)$, on a $\lim v = \lim u$ d'après les théorèmes généraux. □

► ***Attention*** Si l'on omet l'hypothèse $\lim u = \lim w$, on ne peut absolument rien conclure comme le prouve l'exemple des suites $u_n = -1$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1$.

Remarque Bien remarquer la différence entre les hypothèses des deux dernières propositions :

- on suppose la convergence de toutes les suites intervenant dans la proposition 18,
- dans la proposition 19, la convergence de v fait partie de la conclusion.

Proposition 20

Soient u et v deux suites verifiant $\exists n_0 \ : \ \forall n \geqslant n_0 \, , \ u_n \leqslant v_n$.

1. Si $\lim u = +\infty$, alors $\lim v = +\infty$.
2. Si $\lim v = -\infty$ alors $\lim u = -\infty$.

ém r ion Evident en revenant à la définition □

4. Consequences de la propriété de la borne supérieure

4.1 Suites monotones

Théorème 21

Soit u une suite croissante

1. Si elle est majorée, elle converge vers $\ell = \sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

emonst ation

1. Si l'on suppose la suite u majorée, l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré ; il possède donc une borne supérieure ℓ Montrons que u converge vers ℓ en établissant :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ \forall n \geqslant n_0\,,\ \ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell.$$

Soit $\varepsilon > 0$ D'après la caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver n_0 tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \ell$. Comme u est croissante, on a :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ \ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \ell$$

ce qui termine la démonstration.

2. Supposons u non majorée et montrons qu'elle tend vers $+\infty$.

Soit M un réel quelconque Il ne majore pas la suite, donc on peut trouver un entier n_0 tel que $M < u_{n_0}$. Comme la suite u est croissante, on a

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ M < u_{n_0} \leqslant u_n,$$

ce qui prouve que $\lim u = +\infty$. □

Remarques

- Toute suite croissante admet donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Lorsque l'on a majoré une suite croissante, on a non seulement montré sa convergence, mais aussi trouvé un majorant de sa limite, puisque celle–ci est le plus petit des majorants.

Exemple La suite $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{1}{p!}$ est évidemment croissante.

On peut vérifier par récurrence $\forall n \geqslant 1\,.\ \dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$, ce qui donne :

$$\forall n \geqslant 1\,,\ u_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 3.$$

La suite u est croissante et majorée par 3, donc elle converge et sa limite est inférieure ou égale à 3.

Corollaire 22

Soit u une suite décroissante.

1. Si elle est minorée, elle converge vers $\ell = \inf \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si elle n'est pas minorée, elle tend vers $-\infty$.

Démonstratio Appliquer le théorème précédent à $-u$ □

4.2 Suites adjacentes, segments emboîtés

Définition 8

Soient u et v deux suites reelles. On dit que u et v sont *adjacentes* si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$,
- u est croissante et v est décroissante
- $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Proposition 23

Deux suites adjacentes u et v convergent vers une limite commune ℓ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration D'après les hypothèses, la suite u est croissante et majorée par v_0. Elle converge donc et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \lim u$.

De même, la suite v étant décroissante et minorée par u_0, elle converge et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim v \leqslant v_n$.

De plus l'égalité $v = u + (v - u)$ avec $\lim(v - u) = 0$ prouve que $\lim u = \lim v$.

Les suites u et v convergent donc vers la même limite ℓ vérifiant l'inégalité annoncée. □

Remarque Dans la définition des suites adjacentes, la première hypothèse est en fait une conséquence des deux autres : en effet si u est croissante et v décroissante, alors $u - v$ est croissante et, comme elle tend vers 0, elle est négative. Toutefois, on a l'habitude de laisser cette hypothèse superflue dans la définition car c'est souvent la première que l'on « voit ».

Corollaire 24 (Théorème des segments emboîtés)

Si $\Big([a_n, b_n]\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de segments non vides dont les longueurs tendent vers 0 alors l ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est réduit à un point.

émonstration La suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,.\ \ [a_{n+1}.b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]\,.$$

Avec les hypothèses on peut donc écrire :

- la suite a est croissante et la suite b est décroissante,
- $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n \leqslant b_n\,,$
- $\lim b - a = 0.$

Les suites a et b sont donc adjacentes. Si ℓ désigne leur limite commune, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n \leqslant \ell \leqslant b_n.$$

La valeur ℓ appartient à chacun des intervalles $[a_n, b_n]$, et donc à leur intersection qui est par conséquent non vide.

Réciproquement, si x appartient à $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n \leqslant x \leqslant b_n$ et par passage à la limite, on déduit :

$$\ell = \lim a \leqslant x \leqslant \lim b = \ell$$

et donc $x = \ell$.

Donc $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.

□

> ***Remarque*** Dans la proposition 23 de la page précédente, le réel ℓ limite des deux suites adjacentes u et v est donc l unique élément de $\mathbb{R}$ vérifiant :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Exemples

1. Montrons que les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$ sont adjacentes.

   - La suite u est évidemment croissante.
   - Un calcul élémentaire prouve que $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0$; la suite v est donc décroissante.
   - On a $v_n - u_n = \dfrac{1}{n!}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

   Les suites u et v sont donc adjacentes. On peut prouver que leur limite commune est irrationnelle et même que c'est e, base des logarithmes népériens (voir l'exercice 24 et l'exemple 2. de la page 457).

   > ***Remarque*** La stricte monotonie à partir du rang 2 des suites u et v montre que l'on a :
   >
   > $$\forall n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant e \leqslant v_n$$
   >
   > puisque l'une des égalités en n_0 entraînerait l'égalité pour tout $\geqslant n_0$.

2. Étude de la suite $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}$.

On a :

$$u_n - u_{n-2} = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

ce qui prouve que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Comme $u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{-1}{2n+2}$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$.

Les suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et d'après la proposition 9 de la page 287, on en déduit que la suite u est convergente.

Remarque Quand on démontre la convergence d'une suite à l'aide des deux sous-suites adjacentes $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ on a, de façon naturelle, un encadrement de la limite en calculant deux termes consécutifs de la suite.

Ici on peut donc encadrer la limite ℓ entre u_{201} et u_{200} ; le calcul de ces deux termes à l'aide de `MAPLE` donne $0.690 \leqslant \ell \leqslant 0.696$. On peut prouver (voir l'exercice 15) que cette limite ℓ vaut $\ln 2$.

4.3 Théorème de Bolzano–Weierstrass

MPSI **Théorème 25**

> Toute suite bornée possède au moins une sous-suite convergente.

Démonstratio Soit u une suite bornée. Désignons par m (respectivement M) un minorant (respectivement un majorant) de la suite u.

- Nous allons construire une suite de segments emboîtés $I_n = [a_n, b_n]$ tels que, pour tout n, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ soit infini.

  Pour cela, on prend $I_0 = [m, M]$ (qui contient tous les termes de la suite) et, supposant construit $I_n = [a_n, b_n]$ tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ soit infini, au moins l'un des deux intervalles $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ et $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ possède la même propriété, intervalle que l'on choisit alors pour I_{n+1}.

  On a ainsi une suite décroissante de segments dont les longueurs $(M-m)/2^n$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

  Leur intersection contient donc un unique point ℓ qui est la limite des suites a et b. Nous allons maintenant extraire une sous-suite de u convergeant vers ℓ.

- Construisons par récurrence une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$.

On pose $\varphi(0) = 0$; on a alors $a_0 \leqslant u_{\varphi(0)} \leqslant b_0$. Supposons avoir défini $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)$ vérifiant :

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1)$$

et :

$$\forall p < n\,,\ a_p \leqslant u_{\varphi(p)} \leqslant b_p.$$

Comme l ensemble $\{p \mid u_p \in [a_n, b_n]\}$ est infini, il n'est pas majoré et il contient donc des éléments strictement supérieurs à $\varphi(n-1)$. Si l'on choisit l'un de ces éléments comme valeur de $\varphi(n)$, on a bien :

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1) < \varphi(n)$$

et :

$$\forall p \leqslant n\,,\ a_p \leqslant u_{\varphi(p)} \leqslant b_p.$$

On a ainsi défini une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n.$$

On en déduit par le théorème d'encadrement que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ □

Remarque Le résultat précédent permet de dire qu'une suite comme la suite $u_n = \sin(n)$ possède au moins une sous-suite convergente mais il ne donne aucune méthode pratique pour trouver une telle sous–suite. MPSI

4.4 Approximation décimale des nombres reels

Étant donnés un réel x et un entier naturel n, l'entier $p_n = E(x\,10^n)$ est l unique entier qui vérifie :

$$\frac{p_n}{10^n} \leqslant x < \frac{1+p_n}{10^n}.$$

Définition 9

Les rationnels $\dfrac{p_n}{10^n}$ et $\dfrac{1+p_n}{10^n}$ sont appelés *valeurs décimales approchées* de x à 10^{-n} près respectivement *par défaut* et *par excès.*

Exemples

1. Une simple élévation au carré prouve que $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$. Les valeurs decimales approchées à 10^{-4} près par défaut et par excès de $\sqrt{2}$ sont donc $1{,}4142$ et $1{,}4143$.
2. On sait que π admet 3,14159265 pour valeur décimale approchée à 10^{-8} près par défaut.

Etant donné un réel x, on peut, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ définir :

- $u_n = p_n\, 10^{-n}$ sa valeur approchée à 10^{-n} près par défaut,
- $v_n = (1 + p_n)\, 10^{-n}$ sa valeur approchée à 10^{-n} près par excès.

Proposition 26

Pour un réel x les suites u et v de ses approximations décimales par défaut et par excès sont adjacentes et convergent vers x.

émonstratio Par définition on a :

$$\frac{p_n}{10^n} \leqslant x < \frac{1+p_n}{10^n}$$

d'où l'on déduit $10p_n \leqslant 10^{n+1}\, x < 10p_n + 10$.

- Comme p_{n+1} est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^{n+1}\, x$, on en déduit $10p_n \leqslant p_{n+1}$ et donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite u est donc croissante.
- De même $1 + p_{n+1}$ est le plus petit entier strictement supérieur à $10^{n+1}\, x$ ce qui permet d'écrire $1 + p_{n+1} \leqslant 10p_n + 10$ et donc $v_{n+1} \leqslant v_n$. La suite v est ainsi décroissante.
- Comme $v_n - u_n = 10^{-n}$, on a $\lim(v - u) = 0$

Les suites u et v sont donc adjacentes. Si l'on désigne par ℓ leur limite commune l'inégalité $u_n \leqslant x \leqslant v_n$ entraîne $\ell = x$. □

Proposition 27

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

émonstration Il suffit de prendre la suite des approximations décimales par défaut (ou par excès) de x. □

Remarques

- Lorsque x est irrationnel, les suites précédentes fournissent un exemple simple de suites adjacentes de nombres rationnels qui ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$.
- Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on peut démontrer (voir l'exercice 28) que les propriétés suivantes sont équivalentes :

  (i) Entre deux réels distincts, il existe au moins un élément de A

  (ii) Tout réel est limite d'une suite d'éléments de A

  On dit alors que A est dense dans $\mathbb{R}$

  La proposition 27 est donc une autre formulation de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ déjà vue dans le chapitre sur les nombres réels.

EXERCICES

1. Le produit de deux suites réelles minorées est-il minoré ?

2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors la suite de terme général :

$$\frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

est monotone et de même monotonie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer qu'une suite reelle croissante à partir d'un certain rang est minorée.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Parmi les suites ci-dessous, trouver celles qui sont extraites d'une autre :
$(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{3.2^n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{3.2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que tout suite extraite de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. On considère la suite (u_n) définie par :
$u_n = 0$ si n est pair,
$u_n = 1$ si n est impair.
Montrer que cette suite admet une infinité de sous-suites convergentes.

7. Étudier les limites des suites définies par :

a) $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$

b) $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $a \in \mathbb{R}_+^*$ $b \in \mathbb{R}_+^*$

c) $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos n + \frac{1}{n^2}}$

d) $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

8. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' On considère les suites de termes généraux $\min\{u_n, v_n\}$ et $\max\{u_n, v_n\}$. Montrer que ces deux suites convergent respectivement vers $\min\{\ell, \ell'\}$ et $\max\{\ell, \ell'\}$.

9. À l'aide d'un encadrement, montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

est convergente et donner sa limite.

10. Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est convergente.

11. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que :

$$\forall n \geqslant 1 \ , \ u_n - \frac{u_{3n}}{3} = 1.$$

a) Montrer que si cette suite converge, alors sa limite est $\frac{3}{2}\cdot$

b) En considérant $u_{3n} - \frac{3}{2}$, montrer que la suite est stationnaire.

12. Que peut-on dire d'une suite réelle croissante qui admet une suite extraite convergente ?
D'une suite réelle croissante qui admet une suite extraite majorée ?

13. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante qui vérifie :

$$\forall p \in \mathbb{N} \ , \ |u_{2^{p+1}} - u_{2^p}| \leqslant \frac{1}{2^p}\cdot$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

14. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simultanément récurrentes définies par $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ et les relations suivantes :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

et :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\cdot$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite.

15. Montrer que pour tout nombre réel positif x et pour tout entier naturel n :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt.$$

En majorant $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$, montrer que la suite de terme général :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

converge vers $\ln(2)$.

16. On considère $N(n)$ et $S(n)$, respectivement le nombre de chiffres et la somme des chiffres dans la représentation en base 10 de l'entier n.
Les suites $\big(N(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(S(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles monotones ?

17. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et un nombre entier $k \geqslant 1$.
Trouver une suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ v_{kn} = u_n.$$

18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

En déduire le comportement de la suite de terme géneral

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

19. On considère une suite réelle positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel k, l ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > 10^{-k}\}$ soit fini.
Montrer que la suite converge vers 0.

20. On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

En déduire la limite de la suite définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

21. Etudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_n = 1 + \dfrac{1}{p} \ , & \text{si } n = 2p \\[2ex] u_n = 1 - \dfrac{1}{p^2} \ , & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

22. Montrer qu'une suite non majorée admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

23. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont des entiers relatifs
Montrer que si cette suite est convergente alors elle est stationnaire.

24. On rappelle (exemple 1 de la page 285) que les deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

Montrer que leur limite commune est un nombre irrationnel

(On supposera que leur limite commune est rationnelle et on montrera que c est impossible en remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < \ell < v_n$.)

Quelle est la limite de la suite :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{ak+b}{k!} \qquad (a.b) \in \mathbb{R}^2 \ ?$$

25. Montrer que la suite définie par :

$$u_n = \frac{5n^2 + \sin n}{3(n+2)^2 \cos \frac{n\pi}{5}}$$

est divergente.

26. Étudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \left(5 \sin \frac{1}{n^2} + \frac{1}{5} \cos n\right)^n$$

27. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit monotone.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

28. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (resp. de $[a, b]$).

a) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) entre deux éléments distincts de $\mathbb{R}$ (resp. de $[a, b]$), il existe au moins un élément de A,
(ii) tout élément de $\mathbb{R}$ (resp. de $[a. b]$) est limite d'une suite d'éléments de A.

Si l'une ou l'autre de ces deux propositions est vérifiée, on dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $[a, b]$).

b) Montrer que la partie A définie par :

$$A = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \ , \ k \in \mathbb{N} \ , \ 0 \leqslant k \leqslant 2^n \right\}$$

est dense dans $[0, 1]$.

29. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

On veut montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers 0.

a) On fixe $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :

$$\left|\frac{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

b) Montrer ensuite qu'il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on ait :

$$\left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_0-1}}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Démontrer enfin le résultat annoncé.

d) En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La réciproque est-elle vraie ?

30. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}.$$

Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

On s'inspirera de la méthode utilisée dans l'exercice 29

31. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell.$$

Montrer en utilisant l'exercice 29 que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

32. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que le réel ℓ est valeur d'adhérence de la suite s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ.

a) Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = (-1)^n$? de la suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$?

b) Montrer que si une suite est convergente alors elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.
La réciproque est-elle vraie ?

c) Montrer que tout suite réelle bornée qui admet une seule valeur d'adherence est convergente.

33 On considère la suite définie par :

$$u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!$$

et la donnée de u_0.

a) Montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$v_{n+1} - (n+1)v_n = 0$$

sont de la forme $v_n = Cn!$ avec $C = v_0$.

b) Trouver une condition sur la suite $C(n)$ pour que la suite $w_n = C(n)n!$ vérifie :

$$u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!.$$

En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Appliquer la même méthode pour trouver les suites vérifiant la récurrence suivante :

$$u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 3^{n^2}.$$

34 On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui divergent vers $+\infty$ avec de plus :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0.$$

On fixe $\varepsilon > 0$, on considère un rang n_0 à partir duquel $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$.

a) Montrer que, pour tout réel x tel que $x \geqslant u_{n_0}$, il existe un terme u_p de la suite tel que $|u_p - x| \leqslant \varepsilon$.

b) En utilisant le fait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ montrer que pour tout réel x, il existe $(m,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $\left|(u_p - v_m) - x\right| \leqslant \varepsilon$.

En déduire la densité de l'ensemble $\{u_n - v_m \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ dans $\mathbb{R}$ (voir l'exercice 28, pour la définition de la densité).

c) Application : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant les deux hypothèses qui précèdent.
Montrer que $\{u_n - E(u_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$

Chapitre 10

Limites — Continuité ponctuelle

Dans tout le chapitre, on considère des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Pour une telle fonction f, on note D_f son domaine de définition.

1. Définitions, propriétés

1.1 Fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Définition 1

Étant donné un réel a, on dit qu'une fonction f est *définie au voisinage de* a s'il existe un réel $h > 0$ tel que l'on soit dans l'un des trois cas suivants :

- $(D_f \cap [a-h, a+h]) \setminus \{a\} = [a-h, a[$,
- $(D_f \cap [a-h, a+h]) \setminus \{a\} =]a, a+h]$,
- $(D_f \cap [a-h, a+h]) \setminus \{a\} = [a-h, a+h] \setminus \{a\}$.

Exemples

Les fonctions suivantes sont définies au voisinage de 0 :

1. $\begin{array}{rcl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$

2. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$

3. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Exemples

Les fonctions suivantes ne sont pas définies au voisinage de 0 :

1. $x \mapsto \sqrt{x-1}$
2. $x \mapsto \ln\left(\sin \frac{1}{x}\right)$

Remarques

- Une fonction définie au voisinage de a n'est pas forcément définie en a, comme par exemple la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}\cdot$
- Dans la définition 1 de la page précédente, il y a donc en réalité six cas, suivant que a appartient ou non à D_f.
- On pourrait donner la condition suivante, moins restrictive, pour la notion de fonction définie au voisinage de a :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \ [\,a-\varepsilon, a+\varepsilon\,] \cap D_f \neq \varnothing,$$

définition qui serait suffisante pour démontrer l'unicité de la limite (voir page 310).

Cependant, pour les fonctions d'une variable la définition 1 de la page précédente est suffisante puisque dans la pratique les fonctions seront définies sur un intervalle, éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Définition 2

Une fonction f est :

- *définie au voisinage de* $+\infty$, s'il existe un réel A tel que $[\,A, +\infty\,[\ \subset D_f$,
- *définie au voisinage de* $-\infty$, s'il existe un réel A tel que $]\,-\infty, A\,]\ \subset D_f$.

Exemples

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est définie au voisinage de $+\infty$.
2. En désignant par D le complémentaire de l'ensemble (fini) des racines de $x^3 - x - 1$, la fonction :

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^3 - x - 1} \end{array}$$

est définie au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

1.2 Fonctions tendant vers 0

Définition 3

Une fonction f *tend vers* 0 en $a \in \mathbb{R}$ si elle est définie au voisinage de a et si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in D_f\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Exemples

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - a$ tend vers 0 en a.
2. La fonction racine carrée tend vers 0 en 0 : elle est bien définie au voisinage de 0, et pour $\varepsilon > 0$ il suffit de prendre $\eta = \varepsilon^2$ pour avoir :
$$\forall x \geqslant 0\,,\ |x| \leqslant \eta \Longrightarrow |\sqrt{x}| \leqslant \varepsilon.$$

Definition 4

- Une fonction f *tend vers* 0 en $+\infty$ si elle est définie au voisinage de $+\infty$, et si l'on a :
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists A \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in D_f\,,\ x \geqslant A \Longrightarrow \left|f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$
- Une fonction f *tend vers* 0 en $-\infty$ si elle est définie au voisinage de $-\infty$, et si l'on a :
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists A \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in D_f\,,\ x \leqslant A \Longrightarrow \left|f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Exemples

1. La fonction $x \mapsto 1/x$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. La fonction exponentielle tend vers 0 en $-\infty$ (prendre $A = \ln \varepsilon$).

1.3 Limites finies

Définition 5

Une fonction f admet le réel ℓ pour *limite* en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si la fonction $f - \ell$ tend vers 0 en a.

Ce réel ℓ est alors unique ; on l'appelle *limite* de la fonction f en a et on le note :

$$\ell = \lim_a f \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_{x \to a} f(x).$$

Remarques

- Dans ce cas on dit aussi que f tend ou converge vers ℓ en a ou que $f(x)$ tend ou converge vers ℓ quand x tend vers a.
- Par définition, une telle fonction est définie au voisinage de a.
- S'il existe un réel ℓ tel que f converge vers ℓ en a, on dit que f admet une limite finie en a.
- La convergence de f vers ℓ en a s'écrit
  - dans le cas où $a \in \mathbb{R}$:
  $$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in D_f\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon,$$
  - dans le cas où $a = +\infty$:
  $$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists A \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in D_f\,,\ x \geqslant A \Longrightarrow \big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon,$$
  - dans le cas où $a = -\infty$:
  $$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists A \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in D_f\,,\ x \leqslant A \Longrightarrow \big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon.$$
- Dans toute la suite, les résultats sur les limites se traduiront donc mathématiquement par trois énoncés suivant qu'il s'agit d'une limite en une valeur réelle, en $+\infty$ ou en $-\infty$. Les démonstrations correspondantes étant très similaires, nous n'en ferons qu'une, laissant au lecteur le soin de l'adapter aux autres cas.

émonstrati n e 'unicité de la limite ar exemple dans le cas où a $\in \mathbb{R}$.

Supposons que f tende vers deux réels ℓ_1 et ℓ_2, et montrons $\ell_1 = \ell_2$.
Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver deux réels η_1 et η_2 strictement positifs tels que pour tout $x \in D_f$, on ait :
$$|x-a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow \big|f(x)-\ell_1\big| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |x-a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow \big|f(x)-\ell_2\big| \leqslant \varepsilon.$$
Prenons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Comme f est définie au voisinage de a, on peut trouver un élément $x \in D_f$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$. Pour un tel x on a alors :
$$|\ell_1 - \ell_2| \leqslant \big|\ell_1 - f(x)\big| + \big|f(x) - \ell_2\big| \leqslant 2\varepsilon.$$
On a ainsi :
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ |\ell_1 - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon$$
ce qui prouve $\ell_1 = \ell_2$. □

Proposition 1

Si une fonction f, définie en a, admet une limite finie en a, celle–ci est égale à $f(a)$.

On dit alors que f est *continue* en a.

emonstration En effet, soit $\ell = \lim_a f$ Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in D_f\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)-\ell\big| \leqslant \varepsilon.$$
Comme $a \in D_f$ et que l'on a $|a-a| \leqslant \eta$, on en déduit :
$$\big|f(a)-\ell\big| \leqslant \varepsilon.$$
Donc $\ell = f(a)$. □

Exemples

1. La fonction constante ℓ admet ℓ pour limite en tout point de $\mathbb{R}$ ainsi qu'en $+\infty$ et $-\infty$.
2. L'identité de $\mathbb{R}$, et plus généralement une fonction affine, est continue en tout point.
3. Montrons le résultat suivant donné par MAPLE :

```
> L:=Limit((x^3-a^3)/(x-a),x=a) : L=value(L);
```

$$\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} = 3\,a^2$$

Soit la fonction $f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3-a^3}{x-a}. \end{array}$

Montrons :
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}\ ,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-3a^2| \leqslant \varepsilon$$
ou encore :
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall h \in \mathbb{R}^*\quad |h| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(a+h)-3a^2| \leqslant \varepsilon.$$
Pour $h \neq 0$, on a :
$$f(a+h) = \frac{(a+h)^3-a^3}{h} = \frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h} = 3a^2+3\,a\,h+h^2$$
et donc $\big|f(a+h)-3a^2\big| = |h|\,|3a+h|$.

Si l'on impose $|h| \leqslant 1$, on en déduit :
$$\big|f(a+h)-3a^2\big| \leqslant \big(3|a|+1\big)|h|.$$
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque fixé. Pour réaliser :
$$|f(a+h)-3a^2| \leqslant \varepsilon,$$
il suffit de réaliser :
$$|h| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \big(3|a|+1\big)|h| \leqslant \varepsilon.$$
En posant $\eta = \min\big(1, \varepsilon/(3|a|+1)\big)$, on a :
$$\forall h \neq 0\,,\ |h| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(a+h)-3a^2| \leqslant \varepsilon,$$
ce qui prouve le resultat.

1.4 Propriétés des limites finies

Proposition 2

Une fonction f admet ℓ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ s'il existe une fonction g définie sur D_f, tendant vers 0 en a et telle que $|f-\ell| \leqslant g$, c'est–à–dire telle que :

$$\forall x \in D_f\,,\ \left|f(x)-\ell\right| \leqslant g(x).$$

émonst ation par exemple pour $a \in \mathbb{R}$.

S'il existe une fonction g tendant vers 0 et telle que $|f-\ell| \leqslant g$, alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in D_g\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|g(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve de façon immédiate :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in D_f\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x)-\ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

□

Exemples

1. La fonction $f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array}$ est définie au voisinage de 1.

   Montrons qu elle admet une limite en 1, c'est–à–dire qu'elle est continue en 1. Il faut donc prouver que $f(x)-f(1)$ tend vers 0 quand x tend vers 1.
   Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

   $$\left|f(x)-f(1)\right| = \left|\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right| \leqslant \frac{|x-1|}{2}$$

   ce qui prouve le résultat puisque la fonction affine $x \mapsto (x-1)/2$ est continue en 1.

2. Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x+1} = 1$. Pour $x > 0$, on a :

   $$\left|\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-1\right| = \frac{x}{x^2+x+1} \leqslant \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

   avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Proposition 3

Si une fonction f tend vers ℓ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la fonction $|f|$ tend vers $|\ell|$ en a.

émonstratio On a en effet :

$$\forall x \in D_f\,,\ \big||f|(x) - |\ell|\big| \leqslant \big|f(x) - \ell\big|$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \big|f(x) - \ell\big| = 0.$ □

Corollaire 4

Si une fonction f est continue en $a \in \mathbb{R}$, alors $|f|$ est continue en a.

Définition 6

On dit qu'une propriété portant sur une fonction f est vraie *au voisinage de* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, si f est définie au voisinage de a et si cette propriété est vraie sur l'intersection de D_f avec un intervalle du type :

- $[a-h, a+h]$ avec $h > 0$ si $a \in \mathbb{R}$,
- $[A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ si $a = +\infty$,
- $]-\infty, A]$ avec $A \in \mathbb{R}$ si $a = -\infty$.

Exemples

1. Une fonction f est bornée au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, elle est définie au voisinage de a et que l'on a :
$$\exists \eta > 0\,,\ \exists M \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in D_f\,,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)\big| \leqslant M.$$
2. Une fonction f est positive au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, elle est définie au voisinage de $+\infty$ et :
$$\exists A \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in D_f\,,\ x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant 0 \qquad (*)$$
la propriété $(*)$ étant d'ailleurs équivalente à :
$$\exists A \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \geqslant A\,,\ f(x) \geqslant 0$$
lorsque f est définie au voisinage de $+\infty$.
3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\,(1 - x^2)$ est positive au voisinage de 0 et négative au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Proposition 5

Une application qui admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée au voisinage de a.

emonst ation par exemple our a $\in \mathbb{R}$.

Posons $\ell = \lim\limits_{a} f$. Pour $\varepsilon = 1$, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in D_f\,,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x) - \ell\big| \leqslant 1.$$

On a alors, avec $M = |\ell| + 1$:

$$\forall x \in D_f\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x)\right| \leqslant |\ell| + \left|f(x) - \ell\right| \leqslant M$$ □

Proposition 6

Soit m un réel. Une application qui admet une limite $\ell > m$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est minorée par m au voisinage de a.

Démonstration par exemple pour a $= -\infty$.
Pour $\varepsilon = \ell - m > 0$, on peut trouver un réel A tel que :

$$\forall x \in D_f\,,\ x \leqslant A \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, pour tout $x \in D_f$ on a :

$$x \leqslant A \Longrightarrow m - \ell \leqslant f(x) - \ell \leqslant \ell - m$$

ce qui donne $x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant m$. □

Corollaire 7

Une application admettant une limite $\ell > 0$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est minorée au voisinage de a par un réel strictement positif.

Démonstratio Appliquer le résultat précédent avec $m = \ell/2$ □

Corollaire 8

Si f admet une limite ℓ non nulle en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $|f|$ est minorée au voisinage de a par un réel strictement positif.

Démonstration Si la fonction f tend vers $\ell \neq 0$, alors la fonction $|f|$ tend vers $|\ell| > 0$ et le corollaire 7 permet de conclure. □

Remarques

- On en déduit que si f admet une limite ℓ non nulle en a, alors au voisinage de a, la fonction f ne s'annule pas.
- En particulier, si f est une fonction continue en $a \in \mathbb{R}$ et si $f(a) \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a.

  Plus précisément, le corollaire 7 montre que si f est continue en a et si $f(a) > 0$, alors f reste strictement positive au voisinage de a.

- Le lecteur notera que dans le cadre des fonctions, l'expression « au voisinage de » remplace dans les propriétés correspondantes, l'expression « à partir d'un certain rang » utilisée pour les suites.

1.5 Prolongement par continuité

Définition 7

Si f est une application non définie en $a \in \mathbb{R}$ qui admet une limite finie ℓ en a, alors la fonction g définie sur $D_f \cup \{a\}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \ell & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue en a.

Cette fonction g est appelee *prolongement par continuité* en a de la fonction f.

Remarque On dit souvent : « prolongeons f par continuité en posant $f(a) = \ell$ » et l'on note de la même façon la fonction et son prolongement, bien qu'en toute rigueur il s'agisse de deux fonctions distinctes, car elles n'ont pas le même ensemble de départ.

Exemples

1. On peut prolonger par continuité en 0 la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ en posant $f(0) = 1$.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^{-1/x}$ peut se prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Ce serait inexact sur $\mathbb{R}^*$.

1.6 Limites infinies

Definition 8

Une fonction f *tend vers* $+\infty$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si elle est définie au voisinage de a et si l'on a :

- pour $a \in \mathbb{R}$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in D_f, |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$,
- pour $a = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$,
- pour $a = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$.

On dit aussi que f admet $+\infty$ pour limite en a et on écrit :

$$\lim_a f = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Remarques

- Dans le cas $a \in \mathbb{R}$, les assertions :
$$\forall A \in \mathbb{R}.\ \exists \eta > 0 \ :\ \forall x \in D_f\ .\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$$
et :
$$\forall A \in \mathbb{R}_+\ ,\ \exists \eta > 0 \ :\ \forall x \in D_f\ ,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$$
étant équivalentes, il arrive parfois, dans la caractérisation précédente, que l'on remplace $\forall A \in \mathbb{R}$ par $\forall A \in \mathbb{R}_+$, voire par $\forall A > 0$, pour éviter des problèmes de signes (*cf.* par exemple les démonstrations des propositions 14 de la page 321 ou 18 de la page 324).
De même si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$ ne peut pas être définie en a puisque sinon on aurait :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ f(a) \geqslant A$$
ce qui est impossible.

Définition 9

Une fonction f *tend vers* $-\infty$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si $-f$ tend vers $+\infty$ en a. On dit aussi que f admet $-\infty$ pour limite en a et on écrit :
$$\lim_a f = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Remarques

- Une fonction f définie au voisinage de a tend vers $-\infty$ en a si, et seulement si,

  lorsque $a \in \mathbb{R}$:
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0 \ :\ \forall x \in D_f\ ,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant A,$$
  lorsque $a = +\infty$:
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} \ :\ \forall x \in D_f\ ,\ x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A,$$
  lorsque $a = -\infty$:
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} \ :\ \forall x \in D_f\ ,\ x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A.$$
- De même que precédemment il arrive dans ces caractérisations que l on remplace $\forall A \in \mathbb{R}$ par $\forall A \in \mathbb{R}_-$.

1.7 Caractère local de la notion de limite

Définition 10

La fonction f *coïncide* avec la fonction g au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si f et g sont définies *au voisinage de* a, et que :

- lorsque $a \in \mathbb{R}$, il existe un réel $h > 0$ tel que l'on ait, pour tout réel x :
$$\big(x \in D_f \quad \text{et} \quad |x-a| \leqslant h\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \quad \text{et} \quad f(x) = g(x)\big),$$
- lorsque $a = +\infty$, il existe un réel A tel que l'on ait, pour tout réel x :
$$\big(x \in D_f \quad \text{et} \quad x \geqslant A\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \quad \text{et} \quad f(x) = g(x)\big),$$
- lorsque $a = -\infty$, il existe un réel A tel que l'on ait, pour tout réel x :
$$\big(x \in D_f \quad \text{et} \quad x \leqslant A\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \quad \text{et} \quad f(x) = g(x)\big).$$

Exemples

1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = |x-1| \qquad \text{et} \qquad g(x) = x - 1$$
   - Au voisinage de tout point de $]1,+\infty[$, la fonction f coïncide avec la fonction g.
   - Au voisinage de tout point de $]-\infty,1[$, la fonction f coïncide avec la fonction $-g$.
   - Mais au voisinage de 1, la fonction f ne coïncide ni avec g, ni avec $-g$.

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ coïncide au voisinage de a avec la fonction $x \mapsto x^2 + a\,x + a^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Proposition 9

Si f coïncide avec g au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et si g admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite en a, alors f admet aussi ℓ pour limite en a.

émonstrati n a exem le pour $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$.

Puisque f coïncide avec g au voisinage de a, on peut trouver un réel $h > 0$ tel que l'on ait :
$$\forall x \in D_f\,,\ |x-a| \leqslant h \Longrightarrow \big(x \in D_g \quad \text{et} \quad f(x) = g(x)\big).$$
Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque Puisque $\lim\limits_{a} g = +\infty$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in D_g\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow g(x) \geqslant A.$$

Prenons $\alpha = \min(\eta, h)$. Si $x \in D_f$ et $|x-a| \leqslant \alpha$ alors on a $x \in D_g$ et $f(x) = g(x)$. Donc .

$$\forall x \in D_f\,,\ |x-a| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

On a ainsi prouvé que f tendait vers $+\infty$ en a □

Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = x^2 + x + 1 - |x^2 - 1|.$$

Pour montrer que f est continue en 2, il suffit de remarquer qu'elle coïncide au voisinage de 2 avec la fonction $g\ :\ x \mapsto x+2$ et que cette fonction est continue en 2 comme le prouve l'égalité $\big|g(x) - g(2)\big| = |x-2|$.

2. Dans l'exemple 3 de la page 311, on a démontré en fait la continuité en a de la fonction $g\ :\ x \mapsto x^2 + a\,x + x^2$, ce qui nous permet de prouver que $x \mapsto \dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ possède une limite en a et que cette limite vaut $g(a) = 3\,a^2$.

Méthode La proposition 2 de la page 312 nous donne un méthode pour démontrer qu'une fonction admet une limite ℓ : il suffit de majorer $|f - \ell|$ par une fonction qui tend vers 0.

Le caractère local de la notion de limite permet de ne faire cette majoration qu'au voisinage de a :

Définition 11

La fonction f est *majorée* par la fonction g *au voisinage de* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si f et g sont définies au voisinage de a, et que :

- lorsque $a \in \mathbb{R}$ il existe un reel $h > 0$ tel que l'on ait pour tout reel x :

$$\big(x \in D_f \quad \text{et} \quad |x-a| \leqslant h\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant g(x)\big),$$

- lorsque $a = +\infty$, il existe un réel A tel que l'on ait, pour tout réel x :

$$\big(x \in D_f \quad \text{et} \quad x \geqslant A\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant g(x)\big),$$

- lorsque $a = -\infty$, il existe un réel A tel que l'on ait, pour tout reel x :

$$\big(x \in D_f \quad \text{et} \quad x \leqslant A\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant g(x)\big).$$

On définit de même la notion de *minoration au voisinage de* a.

Proposition 10

Soient f et g deux applications définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $\lim\limits_a g = 0$ et si $|f - \ell|$ est majorée par g au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f = \ell$.
- Si $\lim\limits_a g = +\infty$ et si f est minorée par g au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f = +\infty$.
- Si $\lim\limits_a g = -\infty$ et si f est majorée par g au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f = -\infty$.

émonstration par exemple p ur $a = +\infty$.

► L'hypothèse de majoration au voisinage de a nous permet de trouver un réel A_1 tel que :

$$\forall x \in D_f\,,\ x \geqslant A_1 \Longrightarrow \big(x \in D_g \quad \text{et} \quad \big|f(x) - \ell\big| \leqslant g(x)\big).$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme $\lim\limits_a g = 0$, on peut trouver un réel A_2 tel que .

$$\forall x \in D_g\,,\ x \geqslant A_2 \Longrightarrow \big|g(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit de prendre $A = \max(A_1, A_2)$ pour avoir :

$$\forall x \in D_f\,,\ x \geqslant A \Longrightarrow \big|f(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon.$$

► Les deux autres points se démontrent de façon similaire □

Exemples

1. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 1}$ est définie au voisinage de $+\infty$ puisque le dénominateur ne s'annule qu'en deux points de $\mathbb{R}$. Montrons qu elle tend vers 1 en $+\infty$. Pour $x \in D_f$ et $x \geqslant 1$, on a :

$$\big|f(x) - 1\big| = \frac{|x|}{|x^2 + x - 1|} \leqslant \frac{1}{x}.$$

La fonction $|f - 1|$ est donc majorée au voisinage de $+\infty$ par une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$, donc f tend vers 1 en $+\infty$.

2. La majoration :

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

valable pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ prouve :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$

2. Opérations sur les limites

Cette section regroupe les résultats appelés *théorèmes généraux* sur les limites, qui permettent de déterminer l existence et la valeur de la limite d'une fonction qui s'exprime comme somme, produit et quotient de fonctions possédant des limites.

2.1 Propriétés des fonctions admettant 0 pour limite

Proposition 11

Soient f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = 0$, alors $\lim\limits_a (f+g) = 0$.
2. Si g est bornée au voisinage de a, et si $\lim\limits_a f = 0$, alors $\lim\limits_a (f \times g) = 0$.

émonstration

1. Par exemple pour $a \in \mathbb{R}$.
   Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Les hypothèses nous permettent de trouver deux réels strictement positifs η_1 et η_2 tels que pour tout $x \in \mathcal{D}$:
   $$|x-a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow \big|f(x)\big| \leqslant \varepsilon/2 \qquad \text{et} \qquad |x-a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow \big|g(x)\big| \leqslant \varepsilon/2.$$
   Comme $\big|f(x)+g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|$, en prenant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ on a :
   $$\forall x \in \mathcal{D},\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)+g(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$
2. Par exemple pour $a = -\infty$.
   Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. La fonction g étant bornée au voisinage de a, on peut trouver $A_1 \in \mathbb{R}$ et $M \geqslant 0$ tels que :
   $$\forall x \in \mathcal{D},\ x \leqslant A_1 \Longrightarrow \big|g(x)\big| \leqslant M.$$
   Comme $\lim\limits_a f = 0$ et $\dfrac{\varepsilon}{M+1} > 0$, on peut trouver un réel A_2 tel que :
   $$\forall x \in \mathcal{D},\ x \leqslant A_2 \Longrightarrow \big|f(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{M+1}.$$
   Il est alors évident que pour $A = \min(A_1, A_2)$, on a :
   $$\forall x \in \mathcal{D},\ x \leqslant A \Longrightarrow \big|f(x)\,g(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

□

Exemple Une combinaison linéaire de fonctions qui tendent vers 0 est une fonction qui tend vers 0.

2.2 Combinaisons linéaires et produits

Proposition 12

Soient f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, ainsi que λ et μ deux réels. Si $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_a g = m$, alors :

$$\lim_a(\lambda f + \mu g) = \lambda \ell + \mu m \qquad \text{et} \qquad \lim_a(f \times g) = \ell m.$$

monstra ion

- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, l'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$\big|(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda \ell + \mu m)\big| \leqslant |\lambda| \, \big|f(x) - \ell\big| + |\mu| \, \big|g(x) - m\big|.$$

Les fonctions $|f - \ell|$ et $|g - m|$ tendent vers 0 en a, donc $|\lambda| \, |f - \ell| + |\mu| \, |g - m|$ aussi. Par suite, $\big|(\lambda f + \mu g) - (\lambda \ell + \mu m)\big|$ est majorée par une fonction qui tend vers 0 et donc :

$$\lim_a(\lambda f + \mu g) = \lambda \ell + \mu m.$$

- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\big|f(x)\, g(x) - \ell m\big| &= \big|f(x)\big(g(x) - m\big) + m\big(f(x) - \ell\big)\big| \\ &\leqslant \big|f(x)\big| \, \big|g(x) - m\big| + |m| \, \big|f(x) - \ell\big|.\end{aligned}$$

La fonction f est bornée au voisinage de a, puisqu'elle admet une limite en a et la fonction $g - m$ tend vers 0 en a. Donc la fonction $|f| \, |g - m|$ tend vers 0 en a.

De même, la fonction $|m| \, |f - \ell|$ tend vers 0 en a

La fonction $\big|(f \times g) - (\ell m)\big|$ est alors majorée par une fonction qui tend vers 0 et donc $\lim\limits_a(f \times g) = \ell \times m$. □

Corollaire 13

Les combinaisons linéaires et produits de fonctions continues en a sont des fonctions continues en a.

Exemple Les fonctions polynomiales sont continues en tout point de $\mathbb{R}$, puisque ce sont des combinaisons linéaires de puissances de l'identité

Proposition 14

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ainsi que f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_a f = +\infty$.

1. Si g est minorée au voisinage de a, alors $f + g$ tend vers $+\infty$ en a.
2. Si g est minorée au voisinage de a par un réel strictement positif, alors $f \times g$ tend vers $+\infty$ en a.

Dem nstration par exemple our $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme g est minorée au voisinage de a, on peut trouver $\eta_1 > 0$ et $m \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow g(x) \geqslant m.$$

La fonction f tendant vers $+\infty$ en a, on peut trouver $\eta_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow f(x) \geqslant A - m.$$

On en déduit

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \min(\eta_1, \eta_2) \Longrightarrow f(x) + g(x) \geqslant A.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Comme g est minorée au voisinage de a par un réel $m > 0$, on peut trouver $\eta_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow g(x) \geqslant m > 0.$$

La fonction f tendant vers $+\infty$ en a, on peut trouver $\eta_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow f(x) \geqslant \frac{A}{m} \geqslant 0.$$

On en déduit

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \min(\eta_1, \eta_2) \Longrightarrow f(x)\, g(x) \geqslant A.$$

□

Attention Dans la deuxième partie de la proposition précédente, l'hypothèse « g strictement positive au voisinage de a » ne suffit pas pour avoir le résultat, comme le prouve l'exemple des fonctions définies au voisinage de $+\infty$:

$$f\ :\ x \mapsto x \qquad \text{et} \qquad g\ :\ x \mapsto \frac{1}{x}\cdot$$

Proposition 15

Soient f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et admettant en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, respectivement pour limites ℓ et m éléments de $\overline{\mathbb{R}}$

- Si $\ell + m$ n'est pas une forme indéterminée, alors $\lim\limits_a (f+g) = \ell + m$.
- Si ℓm n'est pas une forme indéterminée, alors $\lim\limits_a (f\,g) = \ell\, m$.

émonstration

- Le résultat est déjà connu si ℓ et m sont réels
- Pour la somme, si $\ell = +\infty$, on a $m \neq -\infty$ et donc la fonction g est minorée au voisinage de a, ce qui permet d'appliquer le résultat de la proposition précédente.
  Le cas $\ell = -\infty$ s en déduit en considérant $-f$ et $-g$.
- Pour le produit, on se ramène de même au cas où l'une des fonctions tend vers $+\infty$, l'autre ayant une limite strictement positive et donc étant minorée au voisinage de a par un réel strictement positif.

□

Exemples

1. On prouve par récurrence que si n est un entier strictement positif on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x+1) = +\infty$ puisque pour $x \neq 0$ on peut écrire :
$$x^2+x+1 = x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\cdot$$
3. Plus généralement, une fonction polynomiale a même limite en $\pm\infty$ que son terme de plus haut degré.

2.3 Inverse et quotient

Proposition 16

Si f est une fonction ayant une limite ℓ non nulle en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors au voisinage de a, la fonction f ne s'annule pas et $1/f$ (qui est donc définie au voisinage de a) admet $1/\ell$ pour limite en a.

é nstratio Le corollaire 8 de la page 314 nous donne l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que l'on ait $|f(x)| \geqslant \alpha$ au voisinage de a, ce qui prouve que f ne s annule pas au voisinage de a. Alors au voisinage de a, on a :
$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{f(x)-\ell}{f(x)\,\ell}\right| \leqslant \frac{1}{|\ell|\,\alpha}\big|f(x)-\ell\big|.$$
Comme $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{|\ell|\,\alpha}\big|f(x)-\ell\big| = 0$, on en déduit $\lim\limits_{a} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}\cdot$ □

Corollaire 17

- Si f et g sont deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ telles que :
$$\lim_a f = \ell \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \lim_a g = m \in \mathbb{R}^*,$$
alors f/g est définie au voisinage de a et $\lim\limits_a (f/g) = \ell/m$.
- Si f et g sont deux fonctions continues en a et si $g(a) \neq 0$, alors g ne s annule pas au voisinage de a et f/g est continue en a.

émonst atio Appliquer la proposition précédente et le résultat sur les produits de limites □

Exemples

1. Si p et q sont deux fonctions polynomiales la fonction rationnelle $f = p/q$ est continue en tout point où elle est définie, c'est-à-dire en tout a où $q(a) \neq 0$.
2. Soit la fonction rationnelle $f\ :\ x \mapsto \dfrac{2\,x^2 - 3\,x + 1}{x^2 + x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

   Les résultats précédents ne permettent pas de déterminer directement sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$, mais, pour tout $x \neq 0$, on peut écrire :
$$f(x) = \frac{2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}.$$
   Donc f coïncide au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ avec le quotient d'une fonction qui tend vers 2 par une fonction qui tend vers 1. On peut donc en déduire :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2.$$

Proposition 18

Soit f une application définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f tend vers $+\infty$ en a, alors au voisinage de a la fonction f ne s'annule pas et $1/f$ tend vers 0 en a.
2. Si la restriction de f à $D_f \setminus \{a\}$ est strictement positive au voisinage de a et si f tend vers 0 en a, alors $1/f$ tend vers $+\infty$ en a.

émonstration ar exem le our a $\in \mathbb{R}$.

1. La fonction f tendant vers $+\infty$ en a, elle est, au voisinage de a, supérieure à 1 (par exemple), ce qui montre que $1/f$ est définie au voisinage de a

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in D_f\,.\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$$
ce qui donne :
$$\forall x \in D_f\,,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{f(x)} \leqslant \varepsilon$$
et prouve la convergence de f vers 0 en a.

2. D'après l'hypothèse, on peut trouver un réel $h > 0$ tel que :
$$\forall x \in D_f\,,\ 0 < |x - a| \leqslant h \Longrightarrow f(x) > 0.$$
Si l'on pose $\mathcal{D} = D_f \cap [a - h, a + h] \setminus \{a\}$, la fonction $1/f$ est définie et strictement positive sur $\mathcal{D}$.

Supposons $\lim\limits_a f = 0$ et établissons $\lim\limits_a 1/f = +\infty$, c'est-à-dire :
$$\forall A > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} \geqslant A.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Le réel $1/A$ est un nombre strictement positif, donc l'hypothèse $\lim_a f = 0$ permet de trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \frac{1}{A}.$$

Pour $x \in \mathcal{D}$, on a alors :

$$|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| \geqslant A$$

ce qui donne le résultat puisque $1/f$ est positive sur $\mathcal{D}$. □

Remarques

- Si la restriction de f à $D_f \setminus \{a\}$ est strictement positive au voisinage de a et si f tend vers 0 en a, on écrit alors $\lim_a f = 0^+$. On introduit de même la notation $\lim_a f = 0^-$.
- De même que pour les suites, en combinant ces résultats sur les inverses avec ceux relatifs aux produits, on obtient que si deux fonctions admettent des limites ℓ et m, alors leur quotient admet pour limite ℓ/m s'il n'y a pas de forme indéterminée du type $\frac{0}{0^{\pm}}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, c'est-à-dire si ℓ et m ne sont pas tous les deux nuls, ou tous les deux infinis

3. Limites et relation d'ordre

3.1 Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 19

Si une fonction f est positive au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et admet une limite finie en a, alors celle-ci est positive.

émonst atio La fonction f étant positive au voisinage de a, elle coïncide avec sa valeur absolue au voisinage de a. Si f tend vers ℓ en a, alors :

$$\ell = \lim_a f = \lim_a |f| = |\ell| \geqslant 0.$$ □

Corollaire 20

Soient f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors $\lim_a f \leqslant \lim_a g$.

émonstratio Appliquer le résultat précédent à $g - f$ qui est positive au voisinage de a. □

Attention On ne peut pas améliorer les résultats précédents avec des inégalités strictes. Si f est strictement positive, on peut simplement conclure que sa limite (en supposant qu'elle existe) est positive ou nulle. Par exemple, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, mais $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

3.2 Existence de limite par encadrement

Proposition 21

Soient f, g et h trois applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_a f = \lim\limits_a h = \ell \in \mathbb{R}$.

Si $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a g = \ell$.

émonstratio Au voisinage de a, on a $|g(x) - f(x)| \leqslant |h(x) - f(x)|$. La proposition 10 de la page 319 permet donc de conclure que $g - f$ tend vers 0.
Comme $g = (g - f) + f$, la fonction g a une limite et on a :

$$\lim_a g = \lim_a (g - f) + \lim_a f = 0 + \ell = \ell.$$

□

Remarque Ce résultat permet de montrer l'existence d'une limite, contrairement au corollaire 20 de la page précédente qui nous donne des relations sur les limites une fois que l'on a montré leur existence.

Exemple L encadrement :

$$\frac{x-1}{x+2} \leqslant \frac{x + \cos x}{x+2} \leqslant \frac{x+1}{x+2}$$

valable pour $x > -2$, prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \cos x}{x+2} = 1$.

4. Théorèmes de composition des limites

4.1 Image d'une suite convergente

Théorème 22

Soit f une application admettant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si u est une suite d'éléments de D_f admettant a pour limite la suite $\left(f(u_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

émonstration par exemple pour $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; on peut trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in D_f\,,\ x \geqslant A \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque $\lim u = +\infty$, on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ u_n \geqslant A.$$

On en déduit alors :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ \left|f(u_n) - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Exemple Sachant que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$ puisque :

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Méthode Ce résultat est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a : il suffit d'exhiber une suite convergeant vers a dont l'image ne converge pas, ou deux suites convergeant vers a dont les images par f ont des limites différentes.

De même, pour montrer la discontinuité d'une fonction f en a, il suffit de trouver une suite convergeant vers a et dont l'image par f ne converge pas vers $f(a)$.

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos(1/x)$ ne peut pas être prolongée par continuité en 0, puisque la suite définie par $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ tend vers 0 alors que $f(x_n) = (-1)^n$ ne converge pas.

PCSI **Proposition 23**

Une fonction f définie au voisinage de a admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a si, et seulement si, l'image par f de toute suite de D_f convergeant vers a est une suite convergeant vers ℓ.

émonstration

- On sait déjà d'après le théorème précédent que si f admet ℓ pour limite en a, alors l'image par f de toute suite de D_f convergeant vers a est une suite convergeant vers ℓ.

- Démontrons la réciproque par contraposition : supposons que f ne tende pas vers ℓ en a, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall \eta > 0\,,\ \exists x \in D_f \ : \ |x-a| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \big|f(x)-\ell\big| > \varepsilon.$$

Prenons un tel $\varepsilon > 0$. Pour tout entier n, on peut donc trouver un élément x_n de D_f tel que $|x_n - a| \leqslant 2^{-n}$ et $\big|f(x_n)-\ell\big| > \varepsilon$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite tend vers a, et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \big|f(x_n)-\ell\big| > \varepsilon > 0$$

prouve que $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers ℓ. □ PCSI

4.2 Composition des limites

Théorème 24

Soit g une application admettant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f est une fonction à valeurs dans D_g admettant a pour limite en $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ alors la fonction $g \circ f$ admet ℓ pour limite en t_0.

émonstration par exem le po $t_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ $\ell = -\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque On peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in D_g\,,\ |x-a| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow g(x) \leqslant A.$$

Comme on a $\lim\limits_{t_0} f = a$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in D_f\,,\ |t-t_0| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(t)-a\big| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors :

$$\forall t \in D_f\,,\ |t-t_0| \leqslant \eta \Longrightarrow g\big(f(t)\big) \leqslant A$$

puisque $\forall t \in D_f\,,\ f(t) \in D_g$, ce qui prouve que $g \circ f$ admet $-\infty$ pour limite en t_0. □

Exemple Sachant que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$.

Corollaire 25

Soient g une application continue en $b \in \mathbb{R}$ et f une application à valeurs dans D_g, continue en $a \in \mathbb{R}$ et telle que $f(a) = b$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

Exemple La relation $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}\right)$ définit une fonction continue en 0.

En effet, la fonction h :

$$x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 avec $h(0) = 2 > 0$.

Donc h est strictement positive au voisinage de 0 et la fonction :

$$f = \ln \circ h$$

est définie au voisinage de 0.

La continuité en 2 de la fonction $\ln$ nous donne alors la continuité de f en 0

5. Cas des fonctions monotones

5.1 Limites à droite et à gauche

Dans cette section, a est un réel.

Définition 12

- La fonction f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour *limite à droite* en a si la restriction de f à $D_f \cap \,]\, a, +\infty\,[$ admet ℓ pour limite en a.
  On note alors :
  $$\ell = \lim_{a^+} f \qquad \text{ou} \qquad \ell = \lim_{x \to a^+} f(x).$$
- La fonction f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour *limite à gauche* en a si la restriction de f à $D_f \cap \,]-\infty, a\,[$ admet ℓ pour limite en a.
  On note alors :
  $$\ell = \lim_{a} f \qquad \text{ou} \qquad \ell = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Remarques

- Par définition, si f admet une limite à droite (respectivement à gauche) en a, alors il existe un réel $h > 0$ tel que $]\, a, a + h\,[\,\subset D_f$ (respectivement $]\, a - h, a\,[\,\subset D_f$).
- On utilise aussi parfois les notations $f(a^+)$ et $f(a^-)$ pour désigner les limites à droite et à gauche de f en a.

Définition 13

On dit que f est :

- *continue à droite* en a si sa restriction à $D_f \cap [a, +\infty[$ est continue en a, c'est-à-dire si $\lim_{a^+} f = f(a)$,
- *continue à gauche* en a si sa restriction à $D_f \cap]-\infty, a]$ est continue en a, c'est-à-dire si $\lim_{a^-} f = f(a)$.

Proposition 26

Soit f une application vérifiant :

$$\exists h > 0 \ : \ [a-h, a+h] \setminus \{a\} \subset D_f.$$

- Si $a \notin D_f$, alors f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a si, et seulement si, elle admet ℓ pour limite à droite et à gauche en a.
- Si $a \in D_f$, alors f est continue en a si, et seulement si, elle est continue à droite et à gauche en a.

Démonstratio Évident en revenant aux définitions. □

Exemples

1. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   - La fonction f est continue à gauche en 0 puisque sa restriction à $\mathbb{R}_-$ est nulle.
   - On a $\lim_{0^+} f = 0 = f(0)$ puisque la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto e^{-1/x}$ et que l'on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0.$$

   Donc f est continue à droite en 0.

   Par suite, f est continue en 0.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction partie entière :

   - est continue à droite en n, puisque sa restriction à $[n, +\infty[$ coïncide au voisinage de n avec une fonction constante,

- admet une limite à gauche en n, puisque sa restriction à $]-\infty, n[$ coïncide avec une fonction constante au voisinage de n,
- n est pas continue à gauche en n, puisque $\lim\limits_{n^-} E \neq E(n)$. *A fortiori*, elle n'est pas continue en n.

3. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1/x$ n'admet pas de limite en 0 puisque l'on a :

$$\lim_{0} f = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{0} f = -\infty$$

5.2 Fonctions monotones et limites

Théorème 27

Soit f une application croissante définie sur un intervalle ouvert $I =]\,a, b\,[$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$.

- Si f est majorée, elle admet pour limite en b le reel $\sup\limits_{I} f$.
- Si f n'est pas majorée, on a $\lim\limits_{b} f = +\infty$
- Si f est minoree, elle admet pour limite en a le réel $\inf\limits_{I} f$.
- Si f n'est pas minorée, on a $\lim\limits_{a} f = -\infty$

Demonst ation

Limites en b.

Soit $E = \{f(x) \mid x \in I\}$. La fonction f est majorée si, et seulement si, l'ensemble E est majoré. Puisque I est non vide, E est non vide

- Si f est majoree, alors $\ell = \sup E$ existe. Montrons que c'est la limite de f en b.
  Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. D'après la caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver un élément y_0 de E tel que $\ell - \varepsilon < y_0 \leqslant \ell$. Si $x_0 \in I$ est un antécédent de y_0, on a :

$$\forall x \in [x_0, b\,[\,,\ \ell - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \ell$$

  puisque f est croissante et majorée par ℓ

  - Si b est réel, comme $b \notin I$ on a $b > x_0$. En prenant $\eta = b - x_0 > 0$ on a :

$$\forall x \in I,\ |b - x| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

  - Si $b = +\infty$ on a directement :

$$\forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

  Dans les deux cas, on a montré $\lim\limits_{b} f = \ell$.

- Si f n'est pas majorée, alors E n'est pas majoré. Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque On peut donc trouver $y_0 \in E$ tel que $y_0 > A$. Prenons un antécédent x_0 de y_0. On a alors :

$$\forall x \in [x_0, b[\,,\ A < f(x_0) \leqslant f(x)$$

ce qui prouve, de la même façon que précédemment, que f tend vers $+\infty$ en b.

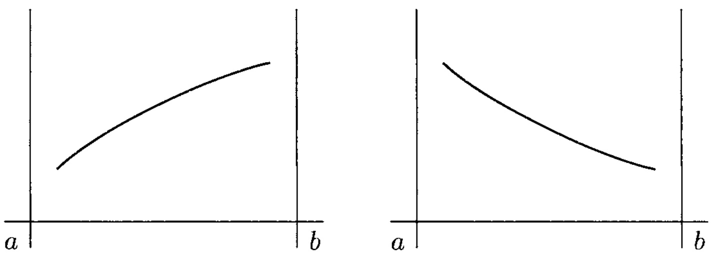
Limites en a.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction croissante g définie sur $]-b, -a[$ par $g(t) = -f(-t)$.

□

Remarques

- Il existe des résultats analogues pour une fonction f décroissante sur un intervalle ouvert. On les obtient en appliquant le théorème précédent à la fonction $-f$.
- Pour une fonction monotone, on voit immédiatement sur un dessin la condition de majoration ou de minoration nécessaire pour montrer que f admet une limite finie en une borne de son intervalle (ouvert) de définition :



- Dans le théorème 27 de la page précédente, l'hypothèse « I intervalle ouvert » est indispensable, puisque par exemple la restriction à $[0\ 1]$ de la fonction partie entière n'a pas de limite en 1.
- En revanche, si f est monotone sur un intervalle I quelconque, en appliquant le théorème 27 de la page précédente à la restriction de f à I privé de ses bornes, on en déduit que :

  si I admet un plus grand élément b, la fonction f admet une limite à gauche en b, et cette limite est finie puisque f est majorée (ou minorée) par $f(b)$,

  si I admet un plus petit élément a, la fonction f admet une limite finie à droite en a.

Théorème 28

Une application f monotone définie sur un intervalle I admet des limites finies à droite et à gauche en tout point qui n'est pas une extrémité de I

émonstration Quitte à considérer $-f$, on peut supposer f croissante

Si a est un élément de I qui n'est pas une extrémité de I, alors la restriction de f à $I \cap \,]-\infty, a[$ est croissante et majorée par $f(a)$ Donc f admet une limite à gauche finie en a et on a $\lim\limits_a f \leqslant f(a)$.

De même pour la limite à droite □

Remarques

- Si f est une fonction croissante sur un intervalle I et si a n'est pas une extrémité de I, on a, d'après la démonstration précédente :
$$\lim_{a^-} f \leqslant f(a) \leqslant \lim_{a^+} f.$$
- Si f est une fonction croissante sur un intervalle I et si a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$, alors $\lim\limits_{a^+} f \leqslant \lim\limits_b f$.

  En effet, soit c strictement compris entre a et b. La limite de f à droite en a est sa borne inférieure sur $I \cap \,]a, +\infty[$, donc est plus petite que $f(c)$. De même, on a $f(c) \leqslant \lim\limits_b f$, ce qui donne le résultat.
- On a des résultats similaires pour des fonctions décroissantes

EXERCICES

1. Montrer que toute fonction f périodique qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ croissante telle que la suite $(f(n))$ diverge vers $+\infty$.

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Étudier les limites suivantes .

a) $\dfrac{x^3 + x^2 + 5}{5x^3 - x^2 + 2}$ en $+\infty$.

b) $\sqrt{x^2 + 2x} - x$ en $+\infty$.

c) $\dfrac{\tan 5x}{\sin x}$ en 0.

d) $\dfrac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$ en $+\infty$.

4. Etudier les limites en 0 des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f_0 : x \mapsto E\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_1 : x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_2 : x \mapsto x^2 E\left(\frac{1}{x}\right).$$

5. Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x \ln x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est un entier premier} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $x > 1$, la suite $f(nx)$ converge vers 0

f admet-elle 0 pour limite en $+\infty$?

7 Soit f une fonction croissante définie sur $[a,b]$, qui prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Montrer que f est continue en tout point de $[a,b]$.

8. Déterminer les limites suivantes :

a) $\dfrac{x^2+1}{\sin^2 x}$ en 0.

b) $\dfrac{\sin x - \sin 5x}{\sin x + \sin 5x}$ en 0.

c) $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ en 0.

d) $\dfrac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ en 0.

e) $\dfrac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$ en $a \neq 0$.

9 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \,,\; f(2x) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \cdot$$

Quels sont les points où f est continue ?

Donner les limites à droites et à gauche en un point de discontinuité de f.

11 Soit f une fonction définie au voisinage de 0 telle que :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0.$$

Montrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

On écrira $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

12 Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in \mathbb{Q}\ ,\ f(x) = 1 \\ \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, f(x) = 0 \end{cases}$$

est discontinue en tout point.

13. On définit une fonction f par :

$$f(-1) = f(1) = 0$$

et pour les autres valeurs de x :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n} + 1}{x^{2n} - 1}.$$

Étudier la continuité de f.

14. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } x \neq 0 \text{ et } \dfrac{1}{x} \notin \mathbb{Z}\ .\ f(x) = x \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right) \\ \text{si } x \neq 0 \text{ et } \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}\ ,\ f(x) = 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de f

15. Soient f et g deux applications définies sur $\mathbb{R}$, on suppose que g est périodique, que f tend vers 0 en $+\infty$ et que $f + g$ est croissante.
Montrer que g est constante.

Chapitre 11

Continuité

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Une fonction définie sur I est donc définie au voisinage de chacun des points de I.

1. Continuité sur un intervalle

1.1 Définition

Définition 1

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue* sur I si f est continue en tout point de I.

Exemples

1. Une application constante est continue.
2. L'identité de $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1

Une fonction lipschitzienne sur I est continue sur I

émonstration Soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.
Pour $\varepsilon > 0$, on prend $\eta = \varepsilon/(k+1) > 0$ et l'on a :

$$\forall (x.y) \in I^2, \ |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant k\,\eta \leqslant \varepsilon.$$

□

Notation On note $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur I.

1.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 2

Une combinaison linéaire (respectivement un produit) de fonctions continues sur I est une fonction continue sur I

Remarque $\mathcal{C}(I)$ est donc un sous–espace vectoriel et un sous–anneau de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Exemples

1. L'identité et la fonction constante 1 étant continues, on peut montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire des fonctions précédentes.

Proposition 3

Si f et g sont continues sur I et que g ne s'annule pas sur I, alors f/g est continue sur I.

émonstration C'est la version globale de la propriété correspondante sur la continuité ponctuelle. □

Exemples

1. Une fonction homographique et, plus généralement, toute fraction rationnelle est continue sur tout intervalle où elle est définie.
2. Les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{C}(I)$ sont les fonctions qui ne s'annulent pas sur I.

Proposition 4

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si f est une application continue de I dans J et g une application continue sur J, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

émonstration C'est la version globale de la propriété correspondante sur la continuité ponctuelle. □

Exemples

1. Toute fonction obtenue par des sommes, des produits, des quotients et des composées de fractions rationnelles et de fonctions usuelles comme sin, ln, arctan..., qui sont continues sur leur domaine de définition, est continue sur tout intervalle où elle est définie.
2. La fonction f définie par :
$$f(0)=0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \neq 0,\ f(x)=x^2\sin(1/x)$$
est continue sur $\mathbb{R}$. En effet :
   - Les théorèmes généraux nous donnent la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$: au voisinage de tout point $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction f coïncide avec $x \mapsto x^2\sin(1/x)$ qui est continue en a comme produit d'une fonction polynôme et de la composée de la fonction sin avec une fraction rationnelle definie au voisinage de a.
   - Pour la continuité en 0, on remarque :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant x^2,$$
   et comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ on a $\lim\limits_{0} f = 0$.

Proposition 5

- Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I.
- Si f et g sont continues sur I, alors $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues sur I.

émonstration

- On a déjà vu le résultat pour $|f|$ dans le chapitre précédent
- Les relations $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$ donnent la continuité de $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$. □

Exemple Si f est continue sur I, alors $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \sup(-f,0)$ sont continues sur I.

1.3 Restrictions

Proposition 6

Soit f une fonction continue sur I. La restriction de f à tout intervalle J inclus dans I est continue sur J

émonstration Soit $a \in J$. Au voisinage de a la restriction de f à J coïncide avec f donc est continue en a. □

Proposition 7

Soient a un élément de I qui n'est pas une extrémité de I et f une application définie sur I. Si les restrictions de f à $I \cap [a, +\infty[$ et $I \cap]-\infty, a]$ sont continues alors f est continue sur I

emonstratio Notons $J = I \cap]-\infty, a]$ et $K = I \cap [a, +\infty[$. Soit $x_0 \in I$

- Si $x_0 \neq a$, la continuité de f en x_0 est une conséquence du caractère local de la continuité car f coïncide au voisinage de x_0 avec sa restriction à J ou à K
- Si $x_0 = a$, la continuité des restrictions de f à J et K est équivalente à la continuite à droite et à gauche de f en a, donc à sa continuité en a. □

Exemples

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ puisque ses restrictions à $[0, +\infty[$ et à $]-\infty, 0]$ sont continues.

2. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \ln|x| \quad \text{si} \quad |x| \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Les restrictions de g à $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ sont continues puisque la fonction $x \mapsto \ln|x|$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-$

Comme $\ln 1 = 0$, la restriction de g à $[-1, 1]$ est nulle, donc continue.

On en déduit que g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Les théorèmes fondamentaux

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 8

Soit f une application continue sur un intervalle I Si a et b sont deux points de I tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors :

$$\exists c \in [a, b] \ : \ f(c) = 0.$$

émonstratio Supposons par exemple $a \leqslant b$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$.

Construisons deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence :

- En posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$, on a $a_0 \leqslant b_0$ et $f(a_0) \leqslant 0 \leqslant f(b_0)$.

- Supposons a_n et b_n construits tels que $a_n \leqslant b_n$ et $f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$ et prenons $c_n = (a_n + b_n)/2$.
  - Si $f(c_n) \leqslant 0$ on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
  - Si $f(c_n) > 0$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

  Dans les deux cas on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ et $f(a_{n+1}) \leqslant 0 \leqslant f(b_{n+1})$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$. Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ puisque par construction on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Par conséquent les deux suites sont adjacentes et vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n).$$

En appelant alors c leur limite commune, on a $c \in [a, b]$ En passant à la limite, la continuité de f en c nous donne $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$, d'où le résultat □

Remarques

- On peut énoncer le résultat précédent en disant que, sur un intervalle, une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe constant.
- La démonstration précédente nous donne un algorithme simple pour trouver la valeur approchée d'une racine de l'équation $f(x) = 0$: c'est la méthode de résolution par *dichotomie* que l'on arrête lorsque $(b-a)/2^n$ est inférieur à la précision demandée.

Exemple en MAPLE

```
> # Resolution par dichotomie
> #    de l'équation tan(x)=x sur ]Pi,3*Pi/2[
> a:=Pi: b:=3*Pi/2-0.01: f:=x->tan(x)-x: eps:=1E-7:
> a:=evalf(a): b:=evalf(b):
> while abs(a-b)>=eps do
>    if sign(f((a+b)/2))=sign(f(a))
>       then a:=(a+b)/2
>       else b:=(a+b)/2
>    fi;
> od:
> lprint ('la solution est comprise entre',a,'et',b);

la solution est comprise entre 4.493409450 et 4.493409543
```

```
>  # comparaison avec  fsolve
> fsolve(f(x),x,Pi..3*Pi/2);
```

$$4.493409458$$

Théorème 9 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$. Toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par la fonction f sur $[a\ b]$

émonstrati Si d est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il suffit d'appliquer le théorème 8 de la page 340 à la fonction $f - d$. □

Remarques

- Il existe une variante du résultat précédent utilisant une limite Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ $(a \in \overline{\mathbb{R}})$ telle que :

$$f(b) > 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{a} f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

  Si $\ell < 0$ (en particulier si $\ell = -\infty$) alors il existe $c \in]a, b]$ tel que $f(c) = 0$. En effet, puisque la limite de f en a est strictement négative f est strictement négative au voisinage de a. Donc on peut trouver $a' \in]a, b]$ tel que $f(a') < 0$.

  Par suite il existe donc $c \in [a', b]$ tel que $f(c) = 0$.

- On a aussi le résultat plus général suivant : si f est continue sur I et admet aux extrémités de I des limites finies ou infinies (ou des valeurs) non nulles et de signes opposés, alors f s'annule en au moins un point de I.

  Il suffit de traiter chacun des cas :

$$I = [a, b[\ ,\ I = [a, +\infty[\ ,\ I =]a, b]\ ,\ ..$$

  de la même façon que ci–dessus

Corollaire 10

L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle

émonstration Si f est continue sur un intervalle I il faut montrer que $f(I)$ est aussi un intervalle, c'est-à-dire :

$$\forall (y_1, y_2) \in f(I)^2,\ [y_1, y_2] \subset f(I).$$

Soient $(y_1, y_2) \in f(I)^2$ et $y \in [y_1, y_2]$. Prenons $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence d'un élément c de I compris entre x_1 et x_2 tel que $y = f(c)$. Donc $y \in f(I)$. □

Proposition 11

Si f est continue et strictement monotone sur I le tableau suivant donne l'intervalle $f(I)$ en fonction de I :

	I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
$f \nearrow$	$f(I)$	$[f(a),f(b)]$	$[f(a),\lim\limits_b f[$	$]\lim\limits_a f, f(b)]$	$]\lim\limits_a f, \lim\limits_b f[$
$f \searrow$	$f(I)$	$[f(b),f(a)]$	$]\lim\limits_b f, f(a)]$	$[f(b),\lim\limits_a f[$	$]\lim\limits_b f, \lim\limits_a f[$

emonstratio Traitons par exemple le cas où f est croissante et où $I = [a,b[$.
La fonction f étant croissante, on a :

$$\forall x \in I\,,\ f(x) \geqslant f(a)$$

et donc $f(a)$ est le plus petit élement de $f(I)$

- Si f n'est pas majorée, alors :

  $$f(I) = [f(a),+\infty[$$

  ce qui donne le résultat puisque $\lim\limits_b f = +\infty$.
- Si f est majorée, sa limite en b est $\sup\limits_I f$ et $f(I)$ est alors un intervalle de bornes $f(a)$ et $M = \lim\limits_b f$ qui est égal à $\sup f(I)$ d'après le théorème sur les limites des fonctions monotones.

  Comme l'intervalle I n'a pas de plus grand élément, pour tout $x \in I$, on peut trouver $y \in I$ tel que $y > x$. Comme f est strictement croissante, on a alors $f(x) < f(y) \leqslant M$, ce qui montre que $M \notin f(I)$.

  Donc $f(I) = [f(a),M[$, ce que l'on voulait démontrer □

Remarque Si f est une application continue sur l intervalle I l'intervalle $f(I)$ « se voit » dans le tableau de variations de f.

Exemple La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

nous donne $f(\mathbb{R}) =]0,1]$.

2.2 Réciproque d'une fonction continue

Lemme

Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue.

émonst atio Supposons par exemple f croissante

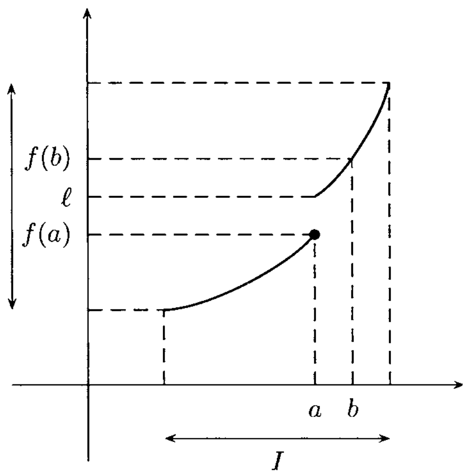
- Soit a un élément de I qui n'est pas sa borne supérieure. La fonction f étant croissante, elle admet en a une limite à droite $\ell \geqslant f(a)$.

  Supposons $\ell > f(a)$. On a pour tout x élément de I :

  $$\big(x > a \Longrightarrow f(x) \geqslant \ell\big)$$

  et :

  $$\big(x \leqslant a \Longrightarrow f(x) \leqslant f(a)\big).$$



  La fonction f ne prend donc aucune valeur strictement comprise entre $f(a)$ et ℓ. Or, puisque a n'est pas le plus grand élément de I, on peut trouver $b \in I$ strictement plus grand que a. ce qui donne $f(a) \leqslant \ell \leqslant f(b)$

  Comme $J = f(I)$ est un intervalle, on a $[f(a), f(b)] \subset J$ et en particulier toutes les valeurs de $]\,f(a), \ell\,[$ sont atteintes.

  C'est contradictoire, donc $\ell = f(a)$. Par suite, f est continue à droite en a (c'est-à-dire continue en a si a est le plus petit élément de I)

- De même, on démontre que f est continue à gauche en tout point de I qui n'est pas sa borne inferieure.

Donc f est continue sur I □

Théorème 12

Si f est une application continue strictement monotone sur un intervalle I, alors f induit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ et sa réciproque est continue de J dans I.

émonstration La fonction f est injective puisqu'elle est strictement monotone. Elle est donc bijective de I sur $J = f(I)$ qui est un intervalle d'après le corollaire 10 de la page 342.

Sa reciproque est alors une bijection strictement monotone de l'intervalle J sur l'intervalle I, donc est continue sur J d'après le lemme précédent. □

Exemples

1. Soit n un entier naturel non nul. L application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est continue strictement croissante prend la valeur 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
   C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ dont la réciproque est continue.
   Cette réciproque est la fonction racine $n^{\text{ème}}$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$
2. De même, si n est un entier naturel impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui permet de définir la fonction racine $n^{\text{ème}}$ sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $\sin$ est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle induit donc une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. Sa réciproque, la fonction « Arc sinus », est donc continue sur $[-1, 1]$.

2.3 Image continue d'un segment

Théorème 13

> Toute application continue sur un segment possède un maximum et un minimum.

MPSI **émonst ation (Le resu tat est a mis en SI)** Soit f une fonction continue sur un segment $[a. b]$.

- Montrons que f admet une borne superieure M sur $[a, b]$ et qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $M = f(x)$.
  - En raisonnant par l'absurde supposons f non majoree sur $[a, b]$ c'est-à-dire :
    $$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in [a, b]\ :\ f(x) > A.$$
    On peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a. b]$ telle que :
    $$\forall n \in \mathbb{N}.\ f(x_n) \geqslant n. \qquad (*)$$
    Cette suite étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la limite α est dans $[a. b]$.
    Comme f est continue en α. on en déduit que $\left(f(x_{\varphi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente donc bornée, ce qui est en contradiction avec la relation $(*)$.
    Donc f est majorée sur $[a, b]$.
  - Faisons à nouveau un raisonnement par l'absurde, en supposant que $M = \sup\limits_I f$ ne soit pas atteint, c'est-à-dire :
    $$\forall x \in [a, b]\ ,\ f(x) \neq M.$$

La fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{M - f(x)}$ est alors définie et continue sur $[a,b]$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Or, on a vu dans la première partie de la démonstration que toute application continue sur $[a,b]$ est majorée
Soit donc A un majorant (strictement positif) de g On a :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ g(x) \leqslant A$$

On en déduit :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ f(x) \leqslant M - \frac{1}{A}.$$

Le réel $M - \dfrac{1}{A}$ est alors un majorant de f strictement plus petit que M, ce qui contredit le fait que M est la borne supérieure de f sur $[a,b]$
Donc il existe $x \in [a,b]$ tel que $M = f(x)$.

- En appliquant ce qui précède à $-f$, on en déduit que f possède aussi une borne inférieure et que celle-ci est atteinte □ MPSI

Exemple Si f est une fonction continue strictement positive d'un segment I dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\exists \alpha > 0\ :\ \forall x \in I\ ,\ f(x) \geqslant \alpha.$$

En effet la borne inférieure α de f existe et est atteinte. Donc d'après l'hypothèse elle est strictement positive.

Attention Les deux hypothèses « continue sur un segment » sont indispensables pour disposer du résultat, comme le montre l'exemple des fonctions suivantes dont la borne inférieure 0 n'est pas atteinte :

1. la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \,]0,1]\ ,\ f(x) = x.$$

2. la fonction exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 14

Si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors :

$$f\big([a,b]\big) = [m,M]$$

où $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$.

Ce résultat s'énonce encore en disant que toute application continue sur un segment est bornée, atteint ses bornes ainsi que toutes les valeurs comprises entre celles–ci.

Démonstratio L'image d'un segment est un intervalle (corollaire 10 de la page 342) qui contient ses bornes (théorème 13 de la page précédente) C'est donc un segment. □

MPSI 3. Continuité uniforme

3.1 Définition, exemples

Définition 2

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f est *uniformément continue sur* I si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall (x,y) \in I^2\,,\ |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques

- La continuité de f sur I s'écrit :

$$\forall x \in I\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall y \in I\,,\ |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

- La différence entre les deux notions réside dans le fait que le η de l'uniforme continuité ne dépend que de ε, alors que pour la continuité il peut dépendre aussi de x.

Resultats

- Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I
- Une fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I. (C'est en réalité ce qu'on a prouvé dans la démonstration de la proposition 1 de la page 337.)

Exemples

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0,1]$ puisque elle est lipschitzienne sur $[0,1]$. En effet, on a :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2\,,\ |x^2 - y^2| = |x+y|\,|x-y| \leqslant 2|x-y|.$$

2. La fonction $f\ :\ x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour le prouver, montrons :

$$\exists \varepsilon > 0\ :\ \forall \eta > 0\,,\ \exists (x,y) \in I^2\ :\ |x-y| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \big|f(x) - f(y)\big| > \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = 2 > 0$ et $\eta > 0$ quelconque. Les réels $x = 1/\eta$ et $y = x + \eta$ vérifient $|x-y| \leqslant \eta$, alors que $y^2 - x^2 = 2 + \eta^2 > \varepsilon$.

3. La fonction sinus est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ car elle est lipschitzienne :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\,,\ |\sin x - \sin y| = \left|2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leqslant |x-y|$$

puisque $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\cos t| \leqslant 1$ et $|\sin t| \leqslant |t|$.

4. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$:

- L'égalité $|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}|x-0|$ prouve que l'on ne peut pas trouver de réel k tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2\,,\ |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$.
- Pour l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}_+$, on commence par remarquer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2\,,\ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

(Il suffit de comparer les carrés de ces deux nombres positifs)
On en déduit $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2\,,\ x \leqslant y \Longrightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; en prenant $\eta = \varepsilon^2 > 0$, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2\,,\ |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|} \leqslant \varepsilon.$$

Remarque Aucune des deux implications :

$$f \text{ lipschitzienne} \Longrightarrow f \text{ uniformément continue}$$

$$f \text{ uniformément continue} \Longrightarrow f \text{ continue}$$

n'est donc une équivalence d'après les exemples précédents.

3.2 Théorème de Heine

Théorème 15

Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Toute application continue sur I est uniformément continue sur I.

émonstratio Soit f une application continue sur le segment I.
Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur I, c'est-à-dire .

$$\exists \varepsilon > 0\ :\ \forall \eta > 0\,.\ \exists (x,y) \in I^2\ :\ |x-y| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad |f(x)-f(y)| > \varepsilon.$$

Prenons un tel $\varepsilon > 0$; pour $\eta = 1/2^n$, on peut donc choisir $(x_n, y_n) \in I^2$ tel que :

$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites vérifient :

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon. \qquad (*)$$

L'intervalle I étant borné, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on peut donc en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un élément α, et ce dernier appartient à I puisque I est un intervalle fermé.

Comme $y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + \left(y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = \alpha$

L'application f étant continue en α, on en déduit :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right) &= \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) - \lim_{n\to+\infty} f(y_{\varphi(n)})\\ &= f(\alpha) - f(\alpha) = 0\end{aligned}$$

ce qui contredit $(*)$. □ MPSI

EXERCICES

1. Soit f une fonction définie sur $I = [a, b]$ et soit $J = [c, d]$ avec $J \subset I$.
Les deux propositions suivantes sont-elles équivalentes ?
(i) $f_{|J}$ est continue.
(ii) f est continue en tout point de J.

2. Soient f et g définies et continues sur I, montrer que $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues sur I.

3. Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$, tel que $f(I) \subset I$.
Montrer que f admet au moins un point fixe.

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Trouver les fonctions f continues sur I dont l'image $f(I)$ ne contient qu'un nombre fini de points.

5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
a) L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert
b) L'image par f d'un segment est un segment.
c) L'image par f d'une partie bornée est bornée.
d) L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.
Mêmes questions en supposant f continue et strictement monotone

6. Soit f une application définie et continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

7. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x \mapsto \sqrt{x}(3 - \sqrt{x})$ est-elle uniformément continue ?

8. Soit f une application continue sur $\mathbb{R}_+$ qui admet une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

9. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ continue et injective.
Montrer que f est monotone.

10 Soient f et g deux applications continues sur $I = [a, b]$. On définit une application φ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \sup_{t \in I} \big(f(t) + xg(t)\big).$$

Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ (on montrera que φ est lipschitzienne).

11 Montrer qu'une fonction f uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ est majorée par une application affine.

12. Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

13. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Déterminer f sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Q}$ et enfin sur $\mathbb{R}$.

14. Soit f une fonction définie et continue sur $I =]a, b[$ telle que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x).$$

Montrer que f n'est pas injective.

15. Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$.
On vérifie facilement que l'ensemble des périodes de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
De plus, on rappelle que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense dans $\mathbb{R}$ soit du type $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$ (voir l'exercice 18 du chapitre 8).

a) On suppose que f est continue non constante et possède une période non nulle.
Montrer que l'ensemble de ses périodes est de la forme $T_0\mathbb{Z}$ avec $T_0 \in \mathbb{R}_+^*$

b) On suppose que f est continue et admet 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes. Montrer que f est constante.

16. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ continue périodique non constante.
Montrer qu'il ne peut exister deux fonctions périodiques distinctes solutions de l'équation :

$$y'' + 2y' + 2y = f(x)$$

Cet exercice utilise les résultats de l'exercice précédent.

17. Soit f strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$
Montrer que f admet un unique point fixe.

Chapitre 12

Dérivation

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et les fonctions, définies sur I, sont supposées à valeurs réelles.

1. Définitions

Dans toute cette section f est une fonction définie sur I, et a est un point de I.

1.1 Dérivée en un point

Définition 1

On dit que f est *dérivable* en a si la fonction τ_a, appelée *taux d'accroissement* de f en a, définie sur $I \setminus \{a\}$ par :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

possède une limite finie en a.

Cette limite s'appelle alors *nombre dérivé* de f en a et se note $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.

Exemples

1. Si α et β sont deux réels, la fonction $f\ :\ x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = \alpha$.
2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0\ +\infty[$.
   - Si $a > 0$, elle est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

puisque ce taux d'accroissement coïncide au voisinage de a avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ continue en a.

- En 0, elle n'est pas dérivable car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$

3. La fonction f définie par :

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas dérivable en 0, car la fonction :

$$\tau_0(x) = \frac{f(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'a pas de limite en 0, comme on peut le prouver à l'aide des suites :

$$u = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad v = \left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

qui tendent toutes deux vers 0, mais pour lesquelles on a :

$$\lim_{n \to \infty} \tau_0(u_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} \tau_0(v_n) = -1$$

1.2 Derivées à droite et à gauche en un point

Définition 2

Si a n'est pas une borne de I, on dit que f est :

- *dérivable à droite* en a si $\varphi = f_{|I \cap [a,+\infty[}$ est dérivable en a , la quantité $\varphi'(a)$ s'appelle alors *dérivée à droite* de f en a et se note $f'_d(a)$
- *dérivable à gauche* en a si $\psi = f_{|I \cap]-\infty,a]}$ est dérivable en a ; la quantité $\psi'(a)$ s'appelle alors *dérivée à gauche* de f en a et se note $f'_g(a)$.

Remarques

- Comme le taux d'accroissement en a de $f_{|I \cap [a,+\infty[}$ est égal à la restriction à $]a, +\infty[$ du taux d'accroissement en a de f, il est évident que f est dérivable à droite en a si, et seulement si, le taux d accroissement de f en a possède une limite à droite en a.
- De même, f est dérivable à gauche en a si et seulement si le taux d'accroissement de f en a possède une limite à gauche en a.

Proposition 1

Lorsque a n'est pas une borne de I la fonction f est dérivable en a si, et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

émonstratio On sait que la fonction τ_a, qui n'est pas définie en a, possède une limite en a si, et seulement si, elle y possède des limites à droite et à gauche qui sont égales. □

Exemples

1. La fonction $f : x \mapsto |x|$ n est pas dérivable en 0 car on a $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

- possède en 0 une dérivée à droite qui vaut $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\exp(-1/x)}{x} = 0$,
- possède en 0 une dérivée à gauche égale à 0 puisque sa restriction à $\mathbb{R}_-$ est nulle.

Elle est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

1.3 Caractère local de la dérivabilité

Proposition 2

Si f coïncide au voisinage de a avec une fonction g dérivable en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = g'(a)$.

émonstration Comme f coïncide avec g au voisinage de a, le taux d'accroissement de f en a coïncide avec le taux d'accroissement de g en a, ce qui prouve le resultat. □

Proposition 3

Lorsque a n'est pas une borne de I, si la restriction de f à $I \cap [a, +\infty[$ (respectivement à $I \cap]-\infty, a]$) coïncide au voisinage de a avec une fonction φ dérivable en a, alors f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a et $f'_d(a) = \varphi'(a)$ (respectivement $f'_g(a) = \varphi'(a)$).

émonstration Comme $f_{|I \cap [a,+\infty[}$ (respectivement $f_{|I \cap]-\infty, a]}$) coïncide avec φ au voisinage de a, sa dérivee existe et est égale à $\varphi'(a)$. □

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 1|$.

- f est derivable en 2 : en effet, pour $|x-2| \leqslant 1$, on a $f(x) = x^2 - 1$ et f coïncide donc au voisinage de 2 avec la fonction $g : x \mapsto x^2 - 1$; sachant que cette fonction polynomiale est dérivable en 2 et que $g'(2) = 4$, on en déduit que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 4$.
- f n'est pas dérivable en 1, car :
  - pour $x \geqslant 1$, on a $f(x) = g(x)$ et donc $f'_d(1) = g'(1) = 2$.
  - pour $x \in [-1, 1]$, on a $f(x) = -g(x)$ et donc $f'_g(1) = -g'(1) = -2$.

  La fonction f, ayant des dérivées différentes à droite et à gauche en 1, n est pas dérivable en 1.

1.4 Dérivabilité et continuité

Proposition 4

Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration
Après avoir prolongé la fonction τ_a par continuité en a en posant $\tau_a(a) = f'(a)$, on peut écrire

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \tau_a(x)\,(x - a).$$

Donc, d'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue en a □

Attention Une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a, comme le prouve l'exemple de la fonction $f : x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 et non dérivable en ce point car elle y possède des dérivées à droite et à gauche qui sont différentes.

Proposition 5

Lorsque a n'est pas une borne de I :

- si f est dérivable à droite en a, alors elle est continue à droite en a
- si f est dérivable à gauche en a, alors elle est continue à gauche en a.

Démonstration Appliquer le résultat précédent à $f_{|I\cap[a,+\infty[}$, puis à $f_{|I\cap]-\infty,a]}$. □

Exemples

1. En $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$:
   - n'est pas continue, donc n'est pas dérivable.
   - possède une dérivée à droite qui est nulle car sa restriction à $[n, +\infty[$ coïncide avec une constante au voisinage de n.
   - ne possède pas de dérivée à gauche car elle n'est pas continue à gauche.

2 Si une fonction admet en a une dérivée à droite et une dérivée à gauche elle est continue à droite et à gauche en a, donc elle est continue en a.

1.5 Fonction dérivée

Définition 3

Lorsque la fonction f est dérivable en tout point de I, on dit que f est *dérivable sur* I et la fonction définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f, et se note f', Df ou $\dfrac{df}{dx}$.

Proposition 6

Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

émonstratio C'est la version globale de la proposition 4 de la page ci-contre. □

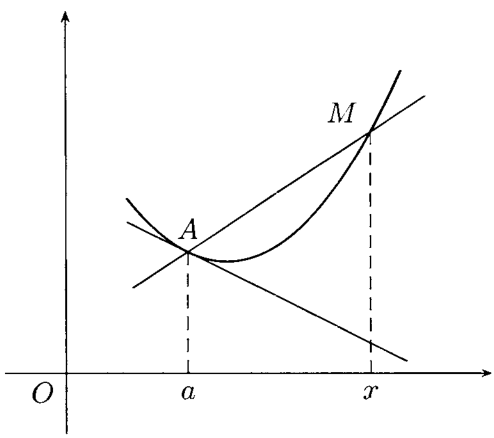
Notation $\mathcal{D}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs réelles dérivables sur I.

1.6 Interprétations des dérivées

Tangente à une courbe

Étant donnée une fonction f définie sur I pour $x \in I \setminus \{a\}$, la droite joignant les points $A \left| \begin{smallmatrix} a \\ f(a) \end{smallmatrix} \right.$ et $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right.$ (avec $a \neq x$) a pour pente :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



Si f est derivable en $a \in I$, cette pente a pour limite $f'(a)$ quand x tend vers a. Le vecteur de composantes $\big(1, \tau_a(x)\big)$ est un vecteur directeur de la corde (AM), et il tend vers $\big(1, f'(a)\big)$.

La droite passant par A et de pente $f'(a)$ est donc la tangente à la courbe d équation $y = f(x)$. C'est la position limite des cordes (AM) lorsque M tend vers A.

Remarques

- La tangente en A est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$.
- Lorsque f, continue en a, n'est pas dérivable en a mais que le taux d'accroissement tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, les cordes possèdent une position limite verticale que l'on appelle encore tangente à la courbe en A.
- Lorsque f n'est pas dérivable en a mais qu'elle possède des dérivées à droite et à gauche différentes, A est un *point anguleux* de la courbe, c'est-à-dire un point avec deux demi-tangentes de pentes différentes.

Vitesse instantanée

- Lorsque $f(t)$ est l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne, pour $t \neq a$ le taux d'accroissement $\tau_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ représente la *vitesse moyenne* entre les instants a et t, et sa limite $f'(a)$ (que l'on note aussi $\dot{f}(a)$ en physique) représente la *vitesse instantanée* à l'instant a.
- En cinétique chimique, la dérivée de la concentration d'un produit s'appelle vitesse d'apparition de ce produit.
- Lorsque la fonction f représente l évolution de la charge d'une armature de condensateur, sa dérivée représente l'intensité du courant de charge ou de décharge du condensateur.

2. Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 L'ensemble $\mathcal{D}(I)$

Proposition 7

Soient f et g deux fonctions définies sur I ainsi que λ et μ deux réels. Si f et g sont dérivables en a, alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f g$ sont dérivables en a et l'on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a) \quad \text{et} \quad (f g)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a).$$

´ onstration

1. On a, pour $x \neq a$:

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x - a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \mu \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

d'où le résultat en utilisant les operations sur les limites.

2. On a .
$$\frac{(f\,g)(x)-(f\,g)(a)}{x-a}=f(x)\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g(a)\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
Sachant que f est dérivable, donc continue en a, on en déduit le résultat en utilisant les opérations sur les limites □

Corollaire 8

$\mathcal{D}(I)$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et l'application dérivation :
$$\begin{array}{rccl} D: & \mathcal{D}(I) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & D(f) \end{array}$$
est linéaire.

émonst atio Les combinaisons linéaires de fonctions dérivables sur I ainsi que la fonction constante 0 étant dérivables sur I, on en déduit que $\mathcal{D}(I)$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$.

La linéarite de D provient de la relation $(\lambda\,f+\mu\,g)'=\lambda\,f'+\mu\,g'$ demontree dans la proposition précédente. □

Corollaire 9

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, alors $f\,g$ est dérivable sur I et :
$$(f\,g)'=f\,g'+f'\,g.$$

Exemples

1. On démontre par récurrence que, pour tout entier $n\geqslant 1$, la fonction $f_n\ :\ x\mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_n'(x)=n\,x^{n-1}$$
2. On en déduit que toute fonction polynôme :
$$f\ :\ x\mapsto\sum_{k=0}^{n}a_k\,x^k$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,a_k\,x^{k-1}$

3 Étude de la dérivabilité de f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\begin{cases}x^2(x-1)^2 & \text{si } x\in[0,1]\\ 0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0\,[\,\cup\,]\,1,+\infty\,[\end{cases}$$

- En $a \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ la fonction f est dérivable car, au voisinage de a, elle coïncide avec une fonction polynomiale et l'on a :

$$f'(a) = \begin{cases} 2a(a-1)(2a-1) & \text{si } a \in \left]0,1\right[\\ 0 & \text{si } a \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, +\infty\right[\end{cases}$$

- Étude de la dérivabilité en 0.

  La restriction de f à $\left]-\infty, 0\right]$ coïncide avec la fonction nulle. La fonction f est donc dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$

  ► La restriction à $[0,1]$ de f coïncide avec la fonction polynomiale :

$$g : x \mapsto x^2(x-1)^2.$$

  La fonction f est donc dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = g'(0) = 0$.

  La fonction f est donc dérivable en 0 et l'on a $f'(0) = 0$.

- On prouve de même que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Si f est une fonction dérivable sur I, on démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f^n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(f^n)' = n\, f^{n-1}\, f'$.

2.2 Inverse et quotient

Proposition 10

Si f est une fonction dérivable en a et ne s annulant pas sur I alors la fonction $1/f$ est dérivable en a et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}.$$

ém nstratio Pour $x \in I$ et $x \neq a$, on peut écrire :

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = -\frac{1}{f(x)\,f(a)}\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Sachant que f est dérivable, donc continue en a, on en déduit le résultat grâce aux propriétés des limites. □

Corollaire 11

Soient f et g deux fonctions dérivables en a. Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction f/g est dérivable en a et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g(a)^2}\right) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

émonstration Appliquer le résultat précédent et celui concernant la dérivabilité d'un produit □

Corollaire 12

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Si g ne s'annule pas sur I, alors la fonction f/g est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Exemples

1. Si n est un entier négatif, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (c'est-à-dire que $f_{|]0,+\infty[}$ et $f_{|]-\infty,0[}$ sont dérivables), et l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; f_n'(x) = n\, x^{n-1}.$$
2. Si f est une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I, la fonction f^n est dérivable sur I pour tout entier négatif n et l'on a :
$$(f^n)' = \left(\frac{1}{f^{-n}}\right)' = -\frac{-nf^{-n-1}\,f'}{f^{-2n}} = n\,f^{n-1}\,f'.$$
3. La fonction homographique $x \mapsto \dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}$ est dérivable sur chacun des intervalles de son domaine de définition et a pour dérivée la fonction :
$$x \mapsto \frac{a\,d - b\,c}{(c\,x+d)^2}.$$
4. Une fraction rationnelle est dérivable sur tout intervalle compris dans son domaine de définition.

Methode Il est souvent plus simple de dériver un quotient f/g comme le produit de f par $1/g$, surtout lorsque le dénominateur est une puissance : en dérivant f/g^n comme un quotient, on obtient un dénominateur égal à g^{2n} et il faudra alors simplifier la fraction, alors que la dérivée de $f\,g^{-n}$ donne naturellement un dénominateur égal à g^{n+1}.

2.3 Composée et fonction réciproque

Proposition 13

Soient I et J deux intervalles, f une application de I dans J et g une application définie sur J. Si f est dérivable en $a \in I$ et g dérivable en $b = f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)\,f'(a).$$

Démonstratio Soit τ_b la fonction définie sur J par :

$$\tau_b(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \quad \text{si} \quad y \neq b \qquad \text{et} \qquad \tau_b(b) = g'(b).$$

Cette fonction est continue en b et pour tout x de $I \setminus \{a\}$, la relation :

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \tau_b\big(f(x)\big)\,\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

qui est évidemment vérifiée lorsque $f(x) \neq b$, est aussi valable si $f(x) = f(a)$ puisque ses deux membres sont nuls.

En utilisant les théorèmes de composition et de produit de limites, on obtient donc :

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \tau_b(b)\, f'(a) = g'(b)\, f'(a).$$

□

Corollaire 14

Soient I et J deux intervalles. Si f est une application dérivable de I dans J et g une application dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'.$$

émonstratio Conséquence du résultat précédent puisque :

$$\forall x \in I\,,\ (g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\, f'(x)$$

□

Exemple Montrons la dérivabilité de la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

- Les théorèmes généraux donnent la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$ car au voisinage de tout point $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction f coïncide avec la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est dérivable en a comme produit d'une fonction polynôme et de la composée de la fonction sin avec une fraction rationnelle définie au voisinage de a, et donc dérivable en a. On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*\,,\ f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot$$

- Pour la dérivabilité en 0, on utilise le taux d'accroissement (défini sur $\mathbb{R}^*$) :

$$\tau_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est le produit de la fonction $x \mapsto x$ qui tend vers 0 en 0, et de la fonction bornée $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; il a donc 0 comme limite en 0, ce qui donne $f'(0) = 0$.

Remarque La restriction à $\mathbb{R}^*$ de f' n'a pas de limite en 0, et donc la fonction f' n'est pas continue en 0.

Proposition 15

Soit f une application continue et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$. La fonction f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si, $f'(a) \neq 0$, et l'on a alors :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

émonstration

1. Supposons f^{-1} dérivable en $b = f(a)$. Comme $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$, la proposition précédente permet d'écrire :

$$(f^{-1})'(b)\, f'(a) = \mathrm{Id}'(a) = 1$$

ce qui entraîne :

$$f'(a) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

2. En supposant $f'(a) \neq 0$, montrons $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{1}{f'(a)}$.

La fonction f étant dérivable en a, on a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Comme f^{-1} est continue en b, le theorème de composition des limites donne :

$$f'(a) = \lim_{y \to b} \frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}.$$

Cette limite étant non nulle, d'après le théorème sur l'inverse d'une limite, on a :

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Corollaire 16

Si f est une fonction dérivable et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ et si f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemples

1. Si n est un entier naturel strictement positif la fonction :

$$f_n \ : \ x \mapsto x^n$$

definit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même dont la dérivée ne s annule pas. Sa fonction réciproque :

$$g_n \ : \ y \mapsto \sqrt[n]{y}$$

est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$g_n'(y) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}}.$$

Avec la notation puissance (voir page 152), cette formule a un aspect plus familier :

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}.$$

2. La restriction à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction sinus définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-1, 1[$ qui est strictement croissante et dont la dérivée ne s'annule pas. Sa fonction réciproque Arc sinus est donc dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

3. Théorème de Rolle – Théorème des accroissements finis

3.1 Extremum d'une fonction dérivable

Proposition 17

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n en est pas une borne. Si la fonction f présente un extremum local en a et si elle est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

é onstratio Comme a n'est pas une extrémité de l'intervalle I, on peut trouver $h_1 > 0$ tel que :

$$[a - h_1, a + h_1] \subset I.$$

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f présente un maximum local en a, c'est-à-dire qu'il existe $h_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in I\,,\ |x - a| \leqslant h_2 \Longrightarrow f(x) \leqslant f(a).$$

Posons $h = \min(h_1, h_2)$;
pour $0 < x - a \leqslant h$, on a alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$

et donc :

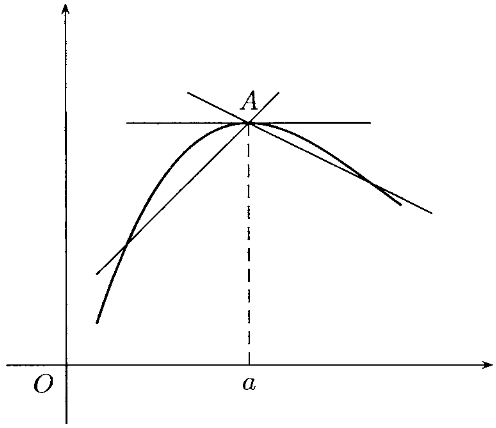
$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0.$$

De même, pour $-h \leqslant x - a < 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$

et donc :

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0.$$



Comme on suppose f dérivable en a, on en déduit $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a) = 0$. □

Attention

- Une fonction peut avoir un extremum local en a et ne pas être dérivable en a, comme le prouve l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.
- Si a est une extrémité de l'intervalle, une fonction peut présenter un extremum local en a et être dérivable en a sans que sa dérivée y soit nulle, comme le prouve l'exemple de la restriction à $[0, 1]$ de la fonction $x \mapsto x$ qui présente un minimum en 0 et un maximum en 1.
- L'annulation de la dérivée de f en a n'est qu'une condition nécessaire pour que f possède un extremum local en a, comme le prouve l'exemple de la fonction strictement croissante $x \mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0 mais qui ne possède pas d'extremum en 0.

3.2 Théorème de Rolle

Théorème 18 (Théorème de Rolle)

Étant donnés des réels a et b tels que $a < b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a. b]$ dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$, il existe un réel c appartenant à $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

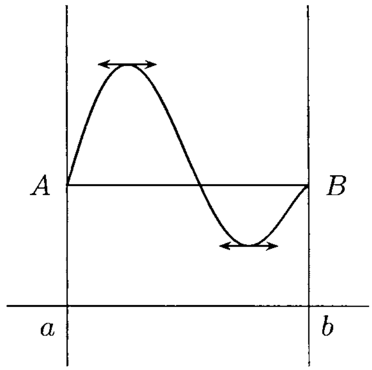
émonstration La fonction f étant continue sur $[a, b]$, l'image par f du segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$, avec $m \leqslant M$.

- Si $m = M$, la fonction f est constante sur $[a, b]$ donc de dérivée nulle sur $]a, b[$

- Si $m < M$, l'un des reels m ou M est différent de la valeur commune prise par f en a et b. Supposons par exemple $m \neq f(a)$; la fonction f atteint alors la valeur m en un point c différent de a et de b ; elle admet donc un minimum en ce point de l'intervalle ouvert $]a, b[$, ce qui implique $f'(c) = 0$. □

Interprétations graphique et cinématique

- Étant donnés des réels a et b tels que $a < b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$, le théorème de Rolle nous dit que le graphe Γ de la fonction f possède au moins une tangente horizontale.
- En cinématique, le théorème de Rolle nous dit qu'un point mobile sur un axe qui revient à son point de départ a vu sa vitesse s'annuler à un instant donné.



3.3 Egalité des accroissements finis

Théorème 19 (Formule des accroissements finis)

Étant donnés des réels a et b tels que $a < b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, il existe un réel c appartenant à $]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c).$$

Demonstration Étant donné un réel k, on considère la fonction φ définie sur $[a, b]$ par $\varphi(x) = f(x) - k(x - a)$ et l'on choisit k pour que $\varphi(a) = \varphi(b)$, ce qui donne :

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

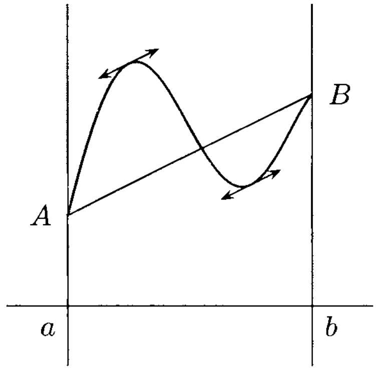
Comme la fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b)$, on peut lui appliquer le théorème de Rolle : il existe donc un réel c appartenant à $]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui équivaut à :

$$f'(c) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et donne le résultat. □

Interprétations graphique et cinématique

- Avec les hypothèses du théorème précédent, si Γ est le graphe de la fonction f dans le plan $\mathbb{R}^2$ et si A et B sont les points de Γ d'abscisses respectives a et b, l'égalité des accroissements finis nous dit qu'il existe au moins un point de Γ en lequel la tangente à Γ est parallèle à la droite (AB).
- En cinématique, la formule des accroissements finis nous dit que lorsqu'une voiture réalise un parcours à la moyenne de $90\,km/h$, il existe un instant du trajet en lequel sa vitesse instantanée est de $90\,km/h$.



Proposition 20

Soit f une fonction dérivable sur l intervalle I. Étant donnés deux réels x et h tels que x et $x+h$ appartiennent à I, il existe un réel $\theta \in \,]0,1[$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

émonstration Lorsque $h = 0$ le réel θ peut être choisi arbitrairement.

Sinon, il suffit d'appliquer la formule des accroissements finis sur le segment $[x, x+h]$ (inclus dans I puisque I est un intervalle) sur lequel la fonction f est dérivable donc continue. On en déduit l'existence d'un réel c strictement compris entre x et $x+h$ et vérifiant $f(x+h) = f(x) + h\,f'(c)$, lequel réel est de la forme $x+\theta h$ pour un certain $\theta \in \,]0,1[$.

□

Exemple Soit $x > 0$. D'après la proposition précédente, il existe un réel $\theta \in \,]0,1[$ tel que :

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{x+\theta}\cdot$$

Comme $0 < \theta < 1$ on obtient alors l'encadrement :

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}\cdot$$

On a alors, pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$:

$$\ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \ln(p) - \ln(p-1)$$

ce qui donne en sommant :

$$1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln n - \ln 1$$

et prouve :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1.$$

4. Applications

4.1 Variations d'une fonction

Proposition 21

Soient I un intervalle et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$.

La fonction f est croissante (respectivement décroissante) si, et seulement si, $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ (respectivement $\forall x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$).

Demonstrat'on Traitons le premier cas, le deuxième s'en deduisant en considérant $-f$.

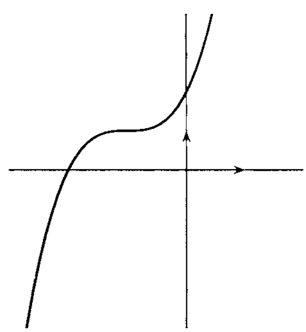
- Si f est croissante, pour tout $x_0 \in I$, le taux d'accroissement de f en x_0 est une fonction positive et sa limite $f'(x_0)$ en x_0 est donc positive.
- Réciproquement, supposons $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$. Soient x_1 et x_2 deux éléments de l'intervalle I verifiant $x_1 < x_2$. Comme, d'après les hypothèses, la fonction f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$, on peut lui appliquer l'égalité des accroissements finis sur le segment $[x_1, x_2]$: il existe donc un réel c appartenant à $]x_1, x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c) \geqslant 0$$

et par suite $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

La fonction f est donc croissante sur I □

Exemples



1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3(x+1)^2 \geqslant 0.$$

Cette fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

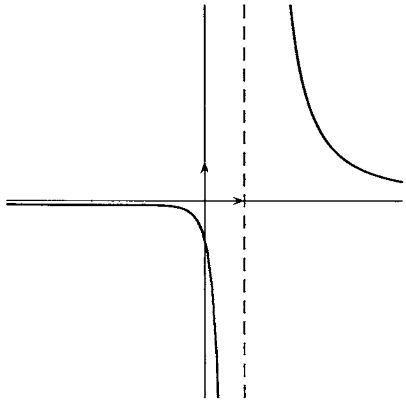
2. La fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3}$$

est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \; g'(x) = -\frac{(x+2)^2}{(x-1)^4} \leqslant 0.$$

Cette fonction g est donc décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.



Attention Bien que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \; g'(x) \leqslant 0,$$

la fonction g n'est pas décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Corollaire 22

Une fonction derivable sur un intervalle I est constante si, et seulement si sa dérivée est nulle.

émonstratio Une fonction est constante si, et seulement si, elle est croissante et décroissante. □

Exemple Deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées sont égales sur I diffèrent d'une constante.

Remarque Dans la démonstration de la proposition 21 de la page précédente, on n'utilise la dérivabilité de la fonction f que dans l'intervalle ouvert $]x_1 . . x_2[$ et l'on n'a donc pas besoin de la dérivabilité aux bornes. Par suite on peut affiner l'énoncé des résultats précédents en disant que, pour f continue sur un intervalle I d'extrémités a et b appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$ et dérivable sur $I' =]a, b[$:

- si pour tout $x \in I'$ on a $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I,
- si pour tout $x \in I'$ on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple

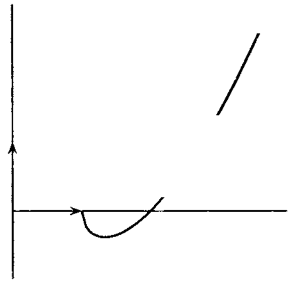
La fonction h :

$$\begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-2)\sqrt{x-1} \end{array}$$

est continue sur $[1,+\infty[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall x \in \,]1,+\infty[\,,\ h'(x) = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-1}}.$$

Elle est donc décroissante sur $[1, \frac{4}{3}]$ et croissante sur $[\frac{4}{3}, +\infty[$.



Proposition 23

Si une fonction f, dérivable sur un intervalle I, vérifie $\forall x \in I\,,\ f'(x) > 0$ (respectivement $\forall x \in I\,,\ f'(x) < 0$), alors elle est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I.

émonstratio Analogue à celle de la proposition 21 de la page 368, mais on obtient ici :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c) > 0$$

□

Attention Si une fonction f dérivable sur un intervalle I est strictement croissante, on n'a pas nécessairement :

$$\forall x \in I\,,\ f'(x) > 0$$

comme le montre l'exemple de la fonction f : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ dont la dérivée s'annule en 0.

On a néanmoins le résultat suivant :

Proposition 24

Une fonction f dérivable sur un intervalle I est strictement monotone sur I si, et seulement si, on a les deux conditions suivantes :

- sa dérivée est de signe constant,
- il n'existe pas d'intervalle inclus dans I et contenant au moins deux points sur lequel f' soit identiquement nulle.

émonstrat'on La première condition étant équivalente à la monotonie de f, il suffit de montrer que pour une fonction f monotone dérivable, la stricte monotonie est équivalente à la deuxième condition.
Or f n'est pas strictement monotone si, et seulement si, on peut trouver deux points distincts a et b tels que $f(a) = f(b)$, c'est-à-dire si, et seulement si, f est constante sur un intervalle contenant au moins deux points, soit enfin si, et seulement si, f' est nulle sur un tel intervalle □

Dans la pratique, on utilise le résultat suivant :

Corollaire 25

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est de signe constant et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement monotone.

Exemples D'après les études réalisées dans les exemples précédents, on peut dire que :

- la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- la fonction $x \overset{g}{\longmapsto} \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3}$:
  - est strictement décroissante sur $]\,1, +\infty\,[$,
  - est strictement décroissante sur sur $]\,-\infty, 1\,[$,
- la fonction $x \overset{h}{\longmapsto} (x-2)\sqrt{x-1}$:
  - est strictement croissante sur $[\,\frac{4}{3}, +\infty\,[$,
  - est strictement décroissante sur $[\,1, \frac{4}{3}\,]$ puisque comme précédemment, la démonstration de la proposition 23 de la page précédente utilise la formule des accroissement finis, et ne nécessite donc pas la dérivabilité aux bornes de l intervalle (c'est-à-dire ici en 1).

4.2 Inégalité des accroissements finis

Proposition 26 (Inégalité des accroissements finis)

Soient a et b des réels vérifiant $a < b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]\,a, b\,[$. S'il existe des réels m et M vérifiant :

$$\forall x \in \;]\,a, b\,[\,,\; m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

alors on a :

$$m\,(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b-a).$$

émonstration D'après l'égalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur le segment $[a,b]$, il existe un réel c tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ Par hypothèse, on a $m \leqslant f'(c) \leqslant M$, ce qui implique :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

□

Corollaire 27

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et k un réel positif tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$, alors on a :

$$\forall (x_1, x_2) \in I \times I, \ |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant k\,|x_2 - x_1|.$$

La fonction f est donc k-lipschitzienne sur I.

émonstratio Soient x_1 et x_2 deux éléments de I ; supposons par exemple $x_1 \leqslant x_2$.

- Si $x_1 = x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$ et donc $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant k\,|x_2 - x_1|$.
- Supposons $x_1 \neq x_2$. La fonction f étant continue et derivable sur $[x_1, x_2]$ et vérifiant $\forall x \in [x_1, x_2]$, $-k \leqslant f'(x) \leqslant k$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur le segment $[x_1, x_2]$ implique :

$$-k\,(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1) \leqslant k\,(x_2 - x_1)$$

ce qui équivaut à $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant k\,|x_2 - x_1|$.

□

Exemples

1. La fonction cosinus ayant une derivée bornée par 1, elle est 1–lipschitzienne.
2. Si f est une fonction dérivable sur $[a.b]$ dont la dérivée f' est continue sur $[a,b]$, alors $|f'|$ est majorée sur $[a,b]$ et la fonction f est lipschitzienne de rapport $\sup\limits_{[a,b]} |f'|$.

Remarques

- Une fonction peut être lipschitzienne et non dérivable, comme par exemple $x \mapsto |x|$.
- En revanche si f est une fonction dérivable et k-lipschitzienne sur I, alors pour tout $x \in I$ on a :

$$\forall t \in I \setminus \{x\}, \ \left|\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\right| \leqslant k.$$

En faisant tendre t vers x on a donc $|f'(x)| \leqslant k$, ce qui montre que $|f'|$ est majorée par k.

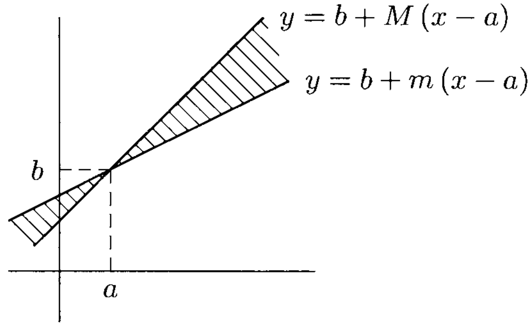
Interprétations graphique et cinématique

- Soit f dérivable sur I telle que :

  $$\forall x \in I \, . \; m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$

  Si $a \in I$ et $b = f(a)$, la courbe représentative de f se trouve entre les droites d'équations $y = b + m\,(x - a)$ et $y = b + M\,(x - a)$.

  En particulier, si f' est bornée par M, la courbe se situe entre les droites dé'équations $y = b \pm M\,(x - a)$.



- Une voiture qui ne dépasse pas la vitesse de $90km/h$, parcourt en une heure une distance inférieure ou égale à $90km$.

4.3 Étude d'une suite récurrente

On étudie dans cette partie des *suites récurrentes* d'ordre 1, c'est-à-dire des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes réels vérifiant une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}\, , \; u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction définie sur une partie $D_f \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Définition de la suite

La première chose à faire avec une suite récurrente est de justifier l'existence de la suite Pour cela il suffit de trouver une partie X de $\mathbb{R}$ stable par f (c'est-à-dire telle que $f\,(X) \subset X$) et contenant le premier terme de la suite.

Si a est élément d'une telle partie X, alors il existe une unique suite u vérifiant :

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\, , \; u_{n+1} = f(u_n).$$

Exemples

1. Étant donné $a \in [\,-1, +\infty\,[$, les relations :

   $$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\, . \; u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

   définissent une unique suite car l application $f \; : \; x \mapsto \sqrt{1+x}$ laisse stable son ensemble de définition $[\,-1, +\infty\,[$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

- Comme $\mathbb{R}_+$ est inclus dans l'ensemble de définition de f et est stable par f, on peut définir une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour toute valeur $u_0 \geqslant 0$.
- Si $u_0 < -1$, alors $u_1 = f(u_0) > 0$ et on se ramène au cas précédent.
- En revanche, si $u_0 \in \,]-1, 0[$, il se peut que la suite ne soit plus définie à partir d'un certain rang. Par exemple, si $u_0 = -1/2$, alors $u_1 = -1$ et u_2 n'est pas défini.
  On peut vérifier que les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite n est pas définie constituent une suite récurrente de premier terme -1 et associée à la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ (réciproque de f).

Dans toute la suite nous supposerons que I désigne un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ de la forme :

$$I = [a, b]\ ,\ I = [a, +\infty[\ ,\ I = \,]-\infty, b] \quad \text{ou} \quad I = \,]-\infty, +\infty[$$

et que f est une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset I$.

Recherche de la limite éventuelle

Proposition 28

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé I.

Si la suite converge, sa limite ℓ appartient à I et vérifie $\ell = f(\ell)$.

émonstratio Comme I est defini par une ou deux inegalites larges, la propriété de passage à la limite dans les inegalites (larges) prouve $\ell \in I$
Comme f est continue en ℓ, on peut dire que

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell),$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$, et l'unicité de la limite impose donc $\ell = f(\ell)$ □

Conséquence Si l'équation $x = f(x)$ n'a aucune solution, alors la suite est divergente.

Exemple Toute suite vérifiant $u_{n+1} = u_n^2 + 2$ est divergente puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq x^2 + 2.$$

Plus précisément, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < x^2 + 2$ ce qui prouve que la suite est (strictement) croissante. Comme elle diverge, elle tend vers $+\infty$.

Majoration directe de $|f(u_n) - l|$

Pour prouver que u converge vers un réel ℓ, solution de l'équation $f(x) = x$, une première méthode consiste à majorer $|u_n - \ell|$ pour démontrer que cette quantité tend vers 0.

Proposition 29

S'il existe un intervalle $J \subset I$ contenant ℓ et un réel $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in J\,,\ \left|f(x) - \ell\right| \leqslant k\,|x - \ell|$$

alors, pour $u_0 \in J$, la suite converge vers ℓ.

Démonstration On a, par une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \in J \qquad \text{et} \qquad |u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$$

ce qui prouve que la suite tend vers ℓ puisque $0 \leqslant k < 1$. □

Remarque Le résultat subsiste si l'on sait seulement que l'un des termes de la suite est dans J.

Exemple La donnée de $u_0 \geqslant 0$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{2 + u_n}$ définissent une suite dont tous les termes sont positifs car l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par l'application $f : x \mapsto \dfrac{2x+2}{2+x}$.

- L'équation $x = \dfrac{2x+2}{2+x}$ possède deux racines qui sont $\pm\sqrt{2}$. Comme tous les u_n sont positifs, la limite de u doit être positive et donc u ne peut converger que vers $\sqrt{2}$.
- Pour $x \geqslant 0$, la majoration :

$$\left|f(x) - \sqrt{2}\right| = \frac{(2 - \sqrt{2})\,|x - \sqrt{2}|}{2 + x} \leqslant \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)\left|x - \sqrt{2}\right|$$

  prouve $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.
- On peut remarquer que cet exemple fournit une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$. Il suffit de prendre $u_0 \in \mathbb{Q}_+$, par exemple $u_0 = 1$. On a alors la majoration :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^n$$

ce qui donne une façon de trouver des valeurs approchées aussi précises que l'on veut de $\sqrt{2}$.

Corollaire 30

Soit $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$.

S'il existe un réel $k \in [0, 1[$ tel que f soit k–lipschitzienne sur I alors la suite converge vers ℓ.

C'est vrai en particulier si f est dérivable sur I que sa dérivée est bornée sur I par un réel $k \in [0, 1[$.

Exemple La donnée de $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{3}{4}\cos u_n$ définissent une suite d'éléments de $[0, 1]$, intervalle qui est stable par la fonction $f = \frac{3}{4}\cos$.

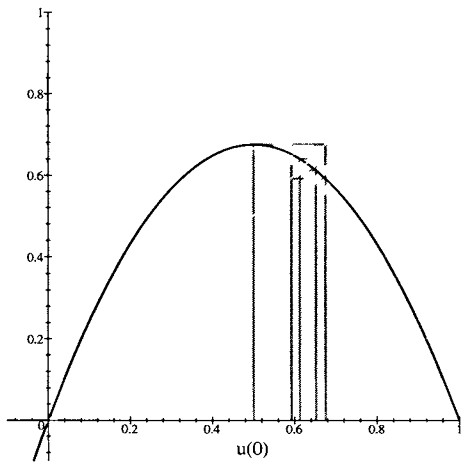
- La fonction g définie par $g(x) = x - f(x)$ est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$. Comme :
$$g(0) < 0 \qquad \text{et} \qquad g(1) > 1,$$
l'équation $x = f(x)$ possède une unique solution $\ell \in [0, 1]$.
- La fonction f est 3/4-lipschitzienne, puisqu'elle est dérivable et que sa dérivée est bornée par 3/4. La suite converge donc vers ℓ.
- On a de plus une majoration de $|u_n - \ell|$:
$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Utilisation d'un dessin

Quand la convergence n'est pas immédiate, il est impératif de construire graphiquement les premiers termes de la suite pour voir son comportement Il ne reste plus alors qu'à justifier ce que l'on voit sur le graphique.

La construction utilise :

- la courbe d'équation $y = f(x)$ pour déterminer en ordonnée la valeur de u_{n+1} en fonction de celle de u_n,
- la droite d'équation $y = x$ pour reporter cette valeurs sur l axe des abscisses



Une telle construction exige l'étude des points d'intersection de la courbe d'équation $y = f(x)$ et de la droite d'équation $y = x$, points dont les abscisses sont les seules valeurs possibles de la limite.

Méthodes pratiques

Pour étudier une suite récurrente (variations et convergence éventuelle), on dispose principalement des deux résultats suivants

Proposition 31

Si $f(x) - x$ garde un signe constant, alors la suite est monotone.

emonstration Les variations sont données par le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ □

Proposition 32

Si f est croissante alors la suite est monotone.

émonstration Si $u_0 \leqslant u_1$, alors $u_1 = f(u_0) \leqslant f(u_1) = u_2$ et par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leqslant u_{n+1}.$$

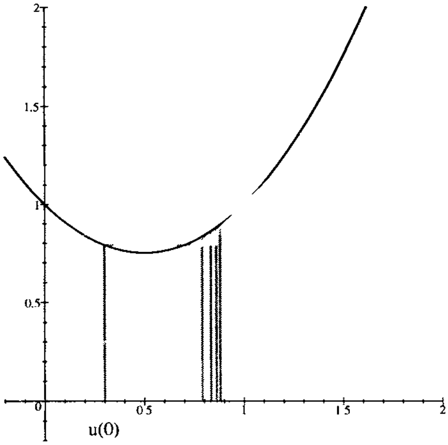
De même si $u_0 \geqslant u_1$, on montre que la suite est décroissante □

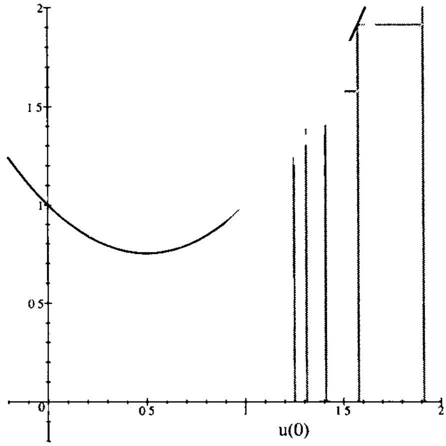
Remarques

- Dans les deux cas, il ne reste plus qu'à essayer de majorer ou minorer la suite pour montrer sa convergence.
- Lorsque f est croissante, on peut utiliser les points fixes de f pour majorer la suite, car, par exemple, si $f(a) = a$ et $u_n \leqslant a$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(a) = a$.

Exemples

1. Étude de la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.





On voit sur le dessin que la suite est croissante, et qu'elle est majorée si, et seulement si, $u_0 \leqslant 1$. Justifions-le.

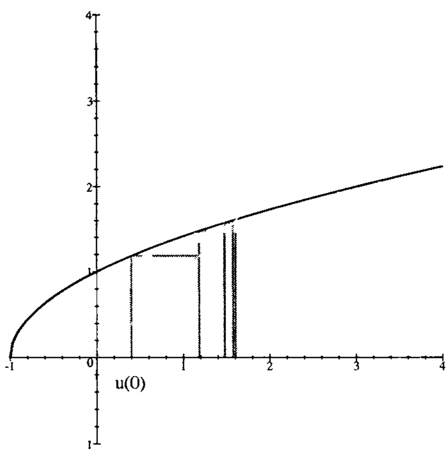
- On a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant x$, donc la suite est croissante.
- Le seul point fixe de f est 1. Donc si $u_0 > 1$, la suite croissante ne peut pas converger vers 1 et par conséquent diverge (la seule limite possible est 1).
- Si $u_0 \leqslant 1$, alors la suite est croissante et majorée par 1, puisque :

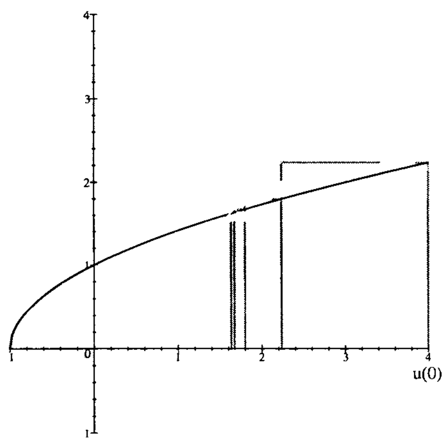
$$u_n \leqslant 1 \Longrightarrow u_{n+1} \leqslant f(1) = 1.$$

Donc la suite converge, et sa limite ne peut être qu'égale à 1.

2. Étude de la suite définie par $u_0 \geqslant -1$ et la relation $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$.

- À l'aide d'un dessin on peut construire les premiers termes de la suite :





- L'équation $x = \sqrt{1+x}$ possède comme unique solution $a = (1+\sqrt{5})/2$, qui est donc la seule limite possible de la suite.
- Comme f est croissante, la suite u est monotone quelque soit la valeur de u_0.
  - Si $u_0 = a$, la suite est constante.
  - Si $u_0 > a$, alors $u_1 < u_0$ et la suite est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge.
  - Si $u_0 < a$, alors $u_1 > u_0$ et la suite est croissante. On montre par récurrence qu'elle est majorée par a, donc elle converge.

  Dans tous les cas, la suite converge vers a.

Proposition 33

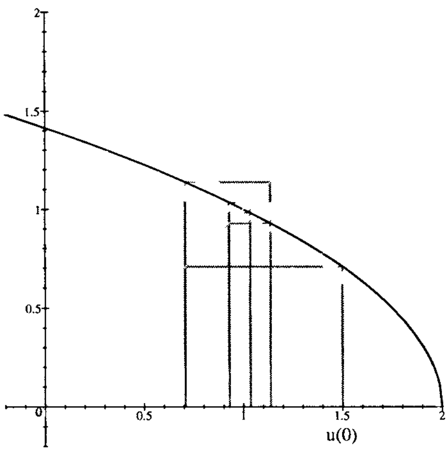
Si f est décroissante sur I, alors les suites u_{2n} et u_{2n+1} sont monotones de sens opposés.

émonstrat'o Elles vérifient toutes les deux une récurrence du type $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.

Elles sont donc monotones, et comme $u_{2n+1} = f(u_{2n})$, la croissance (respectivement la décroissance) de u_{2n} entraîne la décroissance (respectivement la croissance) de u_{2n+1} □

Exemple Étude de la suite définie par $u_0 \in [0,2]$ et $u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}$.

- Une construction graphique donne :



- La fonction $f \mapsto \sqrt{2-x}$ est définie sur $[0.2]$ à valeurs dans $[0.2]$. La suite est donc bien définie
- L'unique point fixe de f est 1 donc la suite ne peut converger que vers 1.

- Comme f est une application décroissante, les suites u_{2n} et u_{2n+1} sont monotones De plus elles sont bornées, donc elles convergent.
- Leurs limites sont des points fixes de $f \circ f$. On pourrait montrer que 1 est le seul point fixe de $f \circ f$, ce qui prouverait la convergence de u vers 1. Mais nous allons plutôt montrer directement cette convergence.
- La fonction f n'est pas lipschitzienne sur $[0, 2]$. Majorons donc $\left|f(x) - 1\right|$:

$$f(x) - 1 = \frac{1 - x}{1 + \sqrt{2 - x}}$$

et donc $\left|f(x) - 1\right| \leqslant |x - 1|$, ce qui ne permet pas de conclure mais prouve que la suite $|u_n - 1|$ est décroissante.

Remarquons de plus, que pour $\alpha < 2$, on a :

$$\forall x \in [0, \alpha]\ ,\ \left|f(x) - 1\right| \leqslant k\,|x - 1| \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{1}{1 + \sqrt{2 - \alpha}} < 1. \qquad (*)$$

- Si $1 \leqslant u_0 < 2$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leqslant |u_0 - 1|$ et donc la suite est majorée par $\alpha = u_0 < 2$. La relation $(*)$ prouve alors la convergence de u vers 1.
- Si $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$, alors $1 \leqslant u_1 \leqslant \sqrt{2}$ et on se ramène au cas précédent.
- Si $u_0 = 2$, on a $u_1 \leqslant 1$, ce qui se ramène au cas précédent.

Dans tous les cas on a montre la convergence de la suite vers 1.

Il y a des cas où les deux suites u_{2n} et u_{2n+1} ne convergent pas vers la même limite. Pour montrer la divergence de la suite, on peut parfois utiliser le résultat suivant :

Proposition 34

Soit a un point fixe de f. Si f est dérivable en a et si $\left|f'(a)\right| > 1$, alors la suite ne peut converger vers a que si elle est stationnaire.

émonstratio S'il existe n_0 tel que $u_{n_0} = a$, alors la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est constante Si la suite n'est pas stationnaire, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$

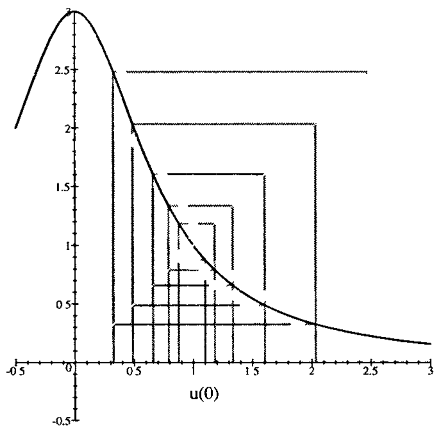
Supposons alors $\lim u = a$. On a donc :

$$\frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} = \frac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f'(a).$$

On en déduit donc qu'à partir d'un certain rang on a $\left|\dfrac{u_{n+1} - a}{u_n - a}\right| \geqslant 1$, ce qui prouve que la suite $|u_n - a|$ est croissante. Elle ne peut donc pas converger vers 0 ce qui donne une contradiction.

Donc la suite diverge. □

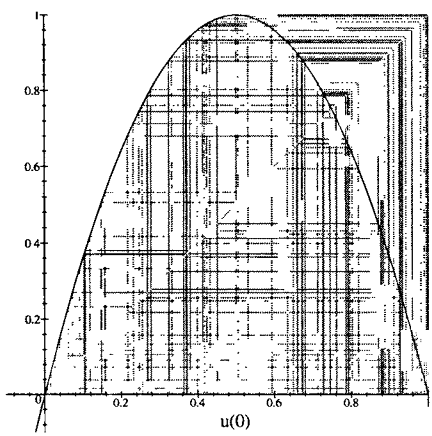
Exemple Étude de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{3}{1+2x^2}$.



- Une étude graphique *soignée* montre que la suite ne converge pas car les u_n s'éloignent de l'abscisse du seul point d'intersection de la courbe d'équation $y = \dfrac{3}{1+2x^2}$ et de la droite d'équation $y = x$.
- Comme l'application $f : x \mapsto \dfrac{3}{1+2x^2}$ est continue, cette suite ne peut converger que vers 1, seule solution de l'équation $f(x) = x$.
- Lorsque $u_0 = 1$, la suite est constante.
- Lorsque $u_0 \neq 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 1$ puisque l'équation $f(x) = 1$ n'admet que 1 comme racine positive. La suite diverge donc puisque 1 est la seule limite possible, et qu'en ce point la dérivée de f vaut $-4/3 < -1$.

Remarques

- Lorsque la fonction n'est pas monotone, on peut essayer de trouver des intervalles stables sur lesquels la fonction est monotone. Si l'un des termes de la suite est dans cet intervalle, on se ramène à un des cas précédents où l'on peut conclure.
- Mais il existe des cas où le comportement de la suite paraît assez aléatoire. Par exemple, avec $f(x) = 4x(1-x)$ et $u_0 \in\ ]0, 1[$, on obtient le graphique suivant :



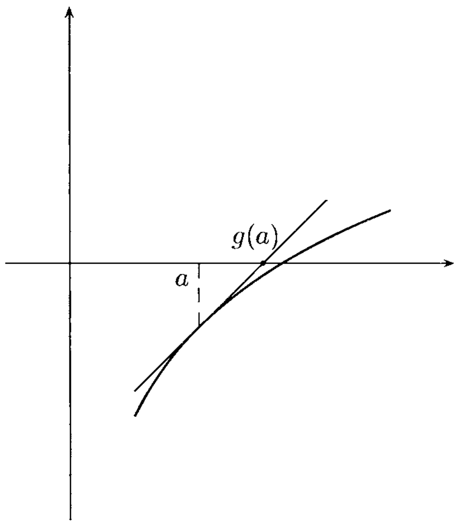
Méthode de Newton

Pour résoudre de façon approchée une équation du type $f(x) = 0$, on peut utiliser une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g(x) = x - f(x)$.

Si f est continue, la limite éventuelle d'une telle suite est un point fixe de g donc une racine de f.

Malheureusement, cette méthode ne fonctionne pas toujours, car la suite obtenue peut ne pas converger. On peut alors modifier la fonction g pour avoir cette convergence : on prend $g(x) = x - \varphi(x)\, f(x)$, où φ ne s'annule pas.

La *méthode de Newton* consiste, pour une fonction f dérivable dont la dérivée ne s'annule pas, à prendre $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.



Cette méthode revient à partir d'un point a de l'intervalle de définition de f, à prendre l'abscisse du point d'intersection de la tangente en a avec l'axe Ox et à recommencer avec celui-ci. En effet, la tangente en a a pour équation :

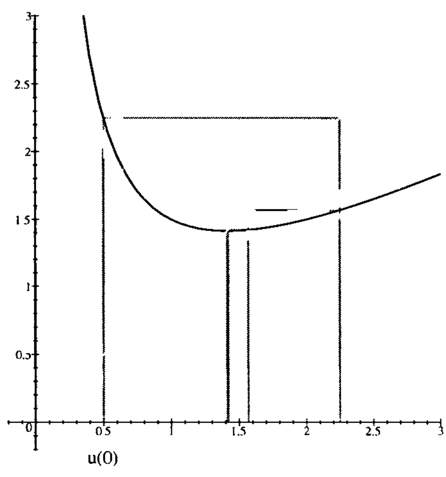
$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

et pour $y = 0$, on obtient :

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = g(a).$$

Exemple Soit a un réel strictement positif. Pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$, on peut utiliser la fonction $f(x) = x^2 - a$, ce qui donne :

$$g(x) = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$



Étudions donc une suite u définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$. Elle est bien définie puisque $\mathbb{R}_+^*$ est stable par g.

Une étude graphique montre que la suite converge très rapidement vers $\sqrt{a}$.

Pour le justifier, on commence par remarquer que :

$$g(x) - \sqrt{a} = \frac{(x-\sqrt{a})^2}{2x}$$

ce qui prouve que l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$ est stable par g et que u_1 (à défaut de u_0) appartient à cet intervalle.

Or, pour $x \geqslant \sqrt{a}$, on a $g(x) \leqslant x$, donc la suite est décroissante (à partir du rang 1). Comme elle est minorée par 0, elle converge et sa limite ne peut être que $\sqrt{a}$, seule racine positive à l'équation $g(x) = x$.

D'autre part, on a l'inégalité :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2.$$

C'est ce que l'on appelle une *convergence quadratique* : par exemple, si $2\sqrt{a} \geqslant 1$, on a :

$$|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \varepsilon^2$$

ce qui prouve que le nombre de chiffres exacts dans l'approximation de $\sqrt{a}$ par u_n est au moins multiplié par 2 à chaque itération.

Ainsi, pour $a = 2$, on obtient pour $u_0 = 1$ (en gras les chiffres exacts) :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mathbf{1.}50000000000000000000\\
u_2 &= \mathbf{1.41}666666666666666667\\
u_3 &= \mathbf{1.414215}68627450980392\\
u_4 &= \mathbf{1.41421356237}468991063\\
u_5 &= \mathbf{1.41421356237309504880}
\end{aligned}$$

et cette dernière valeur est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-20} près.

4.4 Condition suffisante de dérivabilité en un point

Théorème 35

Soit a un elément de I. Si une fonction f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f_{|_{I\setminus\{a\}}}$ a une limite finie ℓ en a, alors f est derivable en a on a $f'(a) = \ell$ et donc f' est continue en a

Démonstration Soit $x \in I \setminus \{a\}$. La formule des accroissements finis nous donne un point c_x strictement compris entre a et x tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Comme c_x tend vers a quand x tend vers a, on en déduit :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

ce qui donne le résultat. □

Attention Le théorème précédent n'est qu'une condition suffisante pour prouver l'existence de $f'(a)$. Il se peut que $f'(a)$ existe sans que $f'_{|I \setminus \{a\}}$ ait une limite en a comme le prouve l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ prolongée par continuité en 0 (voir page 362).

Proposition 36

Soit a un élément de I. Si une fonction f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'_{|I \setminus \{a\}}$ tend vers $+\infty$ en a, alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty.$$

Démonstratio Analogue à celle du théorème 35 de la page précédente □

Remarque Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Pour prouver que la courbe représentative de f possède une tangente au point d'abscisse a, il suffit donc, d'après les deux résultats précédents de démontrer que la restriction à $I \setminus \{a\}$ de sa dérivée possède une limite en a :

- si cette limite est un réel m, la tangente a pour pente m,
- si elle est infinie, la tangente est parallèle à Oy.

Exemples

1. La fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \arcsin(1 - x^4)$:
   - est continue sur $\mathcal{D} = [-1, 1]$ comme composée d'une fonction polynomiale à valeurs dans $[0, 1]$ et de la fonction Arc sinus qui est continue sur $[0, 1]$.
   - est dérivable sur $\mathcal{D}^* = [-1, 0[\cup]0, 1]$ comme composée d une fonction polynomiale à valeurs dans $[0, 1[$ et de la fonction Arc sinus qui est dérivable sur $[0, 1[$.

   Pour $x \neq 0$, on a :

   $$f'(x) = \frac{-4\,x}{\sqrt{2 - x^4}}.$$

   Comme $\lim\limits_{0} f'_{|\mathcal{D}^*} = 0$ et que f est continue en 0, on en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

2 De même, la fonction f définie sur $\mathcal{D}$ par $f(x) = \arcsin(1 - x^2)$ est continue sur $\mathcal{D}$ et dérivable sur $\mathcal{D}^*$.
Pour $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{|x|}.$$

- La fonction $g = f_{|[0,1]}$ est continue en 0, dérivable sur $]\,0,1\,]$ et :

$$\lim_{0} g'_{|]0,1]} = \lim_{0+} f' = -\sqrt{2}.$$

  Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\sqrt{2}$. Par suite f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\sqrt{2}$.
- On démontre de façon analogue que f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = \sqrt{2}$.

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 et son graphe y présente un point anguleux.

5. Dérivées successives

5.1 Derivée seconde

Soit f une fonction définie et dérivable sur I.

Définition 4

La fonction f est *deux fois dérivable* sur I si la fonction f' est dérivable en tout point de I. Sa dérivée est appelée fonction *dérivée seconde* de f ; elle est notée f'', $D^2 f$ ou $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Exemples

1. La dérivée d'une fonction polynomiale étant une fonction polynomiale, toute fonction polynomiale est deux fois dérivable.
2. On a vu page 359 que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-1)^2 & \text{si } x \in [\,0,1\,] \\ 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0\,[\, \cup \,]\,1, +\infty\,[\end{cases}$$

   est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x(x-1)(2x-1) & \text{si } x \in [\,0,1\,] \\ 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0\,[\, \cup \,]\,1, +\infty\,[\end{cases}$$

Au voisinage de $a \in]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$, la fonction f' coïncide avec une fonction polynomiale, elle est donc dérivable en a et :

$$f''(a) = \begin{cases} 12a^2 - 12a + 2 & \text{si } a \in]0,1[\\ 0 & \text{si } a \in]-\infty.0[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

- La restriction de f' à $[1,+\infty[$ est la fonction constante nulle. La fonction f' est donc dérivable à droite en 1 et $(f')'_d(1) = 0$.

  La restriction de f' à $[0,1]$ est la fonction polynomiale :

  $$x \mapsto 2x(x-1)(2x-1).$$

  La fonction f' est donc dérivable à gauche en 1 et $(f')'_g(1) = 2$.

  La fonction f' n'est donc pas dérivable en 1 et f n'est pas deux fois dérivable.
- On prouve de la même façon, ou en considérant $x \mapsto f(1-x)$, que f' n'est pas dérivable en 0.

Interprétation cinématique Lorsque $f(t)$ est l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne, alors $f''(t)$, s'il existe, représente l'*accélération* du point à l'instant t.

5.2 Dérivée d'ordre n

On considère un entier naturel n.

Définition 5

Étant donnée une fonction f de I dans $\mathbb{R}$, on pose $f^{(0)} = f$ et l'on définit par récurrence la fonction *dérivée* $n^{\text{ème}}$ de f sur I, notée $f^{(n)}$, comme la dérivee de $f^{(n-1)}$, si elle existe.

On la note aussi $D^n f$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Remarques

- L'existence de $f^{(n)}$ sur I entraîne l'existence et la continuité sur I de toutes les dérivées d'ordre strictement inférieur.
- Si elle existe, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est aussi la dérivée $(n-1)^{\text{ème}}$ de f' et plus généralement la dérivée $p^{\text{ème}}$ de $f^{(n-p)}$ (pour $0 \leqslant p \leqslant n$).

Proposition 37

Étant donnés deux fonctions f et g définies et n fois dérivables sur I ainsi que deux réels λ et μ la fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I.

émonstration Récurrence sur n en utilisant le fait que si f et g sont dérivables, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$. □

Proposition 38 (Formule de Leibniz)

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I alors $f g$ est n fois dérivable sur I et :

$$(f g)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p)}.$$

ém nstrati Démontrons ce résultat par récurrence sur n.

- La propriété est évidente pour $n = 0$
- Supposons le résultat vrai pour un entier naturel n et considérons deux fonctions f et g supposées $n+1$ fois dérivables sur I. Elles sont donc n fois dérivables et l'hypothèse H_n permet d'écrire .

$$(f g)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p)}.$$

La fonction $(f g)^{(n)}$ est une combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables ; elle est donc dérivable et par suite $f g$ est $n+1$ fois derivable. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
(f g)^{(n+1)} &= \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p)}\right)' \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(f^{(p)} g^{(n-p+1)} + f^{(p+1)} g^{(n-p)}\right) \\
&= \binom{n}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p+1)} \\
&\quad + \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} f^{(p+1)} g^{(n-p)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g
\end{aligned}$$

$$= \binom{n+1}{0} f\, g^{(n+1)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}\, g + \sum_{p=1}^{n} \left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right) f^{(p)}\, g^{(n-p+1)}$$

$$= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} f^{(p)}\, g^{(n+1-p)}$$

ce qui prouve le résultat pour $n+1$ □

6. Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Dans toute cette section, n désigne un entier naturel.

6.1 Définitions, exemples

Définition 6

Une fonction f est *de classe* $\mathcal{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'elle est *indéfiniment dérivable* ou *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Notations

- $\mathcal{C}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
- $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.

Remarques

- La définition précédente explique pourquoi l'on note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.
- Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction dérivable sur I dont la dérivée est continue. On dit aussi que f est *continûment dérivable.*

Exemples

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$), la dérivée d'ordre n de f étant donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

2. La fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ puisque :
$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$$
et que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. La fonction exponentielle étant solution de l'équation différentielle $y' = y$ on peut montrer par récurrence sur n qu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. De même, la fonction sinus étant solution de l'équation différentielle $y'' = -y$ elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction $f\ :\ x \mapsto |x|$ appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, mais elle n'est pas dérivable.
6. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
Cette dérivée n'est pas continue en 0, car $\lim\limits_{n\to+\infty} f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = -1 \neq f'(0)$ La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, mais elle n est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 39

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'_{|I\setminus\{a\}}$ a une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

émonst atio Conséquence du théorème 35 de la page 383 □

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \cos\sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$
Comme $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$, le theorème de composition des limites donne :
$$\lim_{x\to 0} -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2},$$
ce qui prouve, puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a $f'(0) = -\dfrac{1}{2}\cdot$

6.2 Ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Proposition 40

$\mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$ sont des $\mathbb{R}$–espaces vectoriels et l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^n(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ f & \longmapsto & f^{(n)} \end{array}$$

est linéaire.

Démonstratio Soient λ et μ deux réels. Si l'on suppose les fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^n$, on sait que $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable. La relation :

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)} \tag{$*$}$$

prouve alors la continuité de $(\lambda f + \mu g)^{(n)}$.

Comme la fonction constante 0 est de classe $\mathcal{C}^n$, on en déduit que $\mathcal{C}^n(I)$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

La relation $(*)$ prouve alors la linéarité de l'application $f \mapsto f^{(n)}$. □

Proposition 41

Un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

émonstration Si l'on suppose les fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^n$, on sait que fg est n fois dérivable et la formule de Leibniz prouve la continuité de sa dérivée $n^{\text{ème}}$ □

Exemples

1. Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ car elle est dérivable et la relation $\tan' = 1 + \tan^2$ prouve que si elle de classe $\mathcal{C}^n$, elle est aussi de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

6.3 Composée, inverse, et fonction réciproque

Les résultats qui suivent sont énoncés pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Ils s étendent naturellement au cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 42

Étant donnés deux intervalles I et J, ainsi que deux fonctions $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J)$ telles que $f(I) \subset J$ la fonction $g \circ f$ est élément de $\mathcal{C}^n(I)$.

emonst ation On démontre par récurrence sur n, la propriété H_n :

$$\forall f \in \mathcal{C}^n(I),\ \forall g \in \mathcal{C}^n(J),\ f(I) \subset J \Longrightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^n(I).$$

- H_0 est vraie d'après les résultats sur les fonctions continues.
- Supposons H_n et démontrons H_{n+1}.

  Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et $g \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$ telles que $f(I) \subset J$. La fonction $g \circ f$, composée de fonctions dérivables, est dérivable et :

  $$(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'.$$

  Puisque $f \in \mathcal{C}^n(I)$, $g' \in \mathcal{C}^n(J)$ et $f(I) \subset J$, l'hypothèse de récurrence montre que $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et comme f' est de classe $\mathcal{C}^n$, le produit $(g' \circ f)\, f'$ l'est aussi.

  L application $(g \circ f)'$ étant de classe $\mathcal{C}^n$, on en déduit $g \circ f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et donc H_{n+1} □

Proposition 43

Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ ne s'annule pas sur I, alors $1/f$ est élément de $\mathcal{C}^n(I)$.

emons ti n Puisque f est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I, elle garde un signe constant, par exemple positif On a donc $f(I) \subset \mathbb{R}_+^*$ et comme la fonction $u\ :\ x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\frac{1}{f} = u \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ d'après la proposition précédente. □

Exemples

- Une fraction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle où elle est définie, puisque c'est le quotient de deux fonctions polynomiales.
- Toute fonction obtenue par des sommes, des produits, des quotients et des composées de fractions rationnelles et de fonctions usuelles ($\exp$, $\ln$, $\sin$, $\cos$,...), qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition est $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle où elle est définie.

Proposition 44

Étant donné un entier $n \geqslant 1$, une fonction $f \in \mathcal{C}^n(I)$ dont la dérivée ne s'annule pas sur I est une bijection de I sur $J = f(I)$ et la fonction réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle J.

emonst atio Comme la dérivée de f est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I, elle garde un signe constant et donc f est strictement monotone sur I, ce qui démontre que f est une bijection de I sur $J = f(I)$ et assure l'existence de la fonction réciproque ainsi que sa continuité.

Demontrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété H_n :

Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ admet une dérivée ne s'annulant pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $J = f(I)$

- H_1 est vraie, car si $f \in \mathcal{C}^1(I)$ admet une dérivée ne s'annulant pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur I et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur J, donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
- Supposons H_n et démontrons H_{n+1}.

  Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ dont la dérivée ne s'annule pas sur I. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, il en est de même de f^{-1}.

  L'application $f' \circ f^{-1}$, composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, est de classe $\mathcal{C}^n$; comme elle ne s'annule pas sur J, son inverse est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

  est de classe $\mathcal{C}^n$, ce qui montre que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et prouve H_{n+1}. □

Exemples

1. Étant donné un réel α, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0, +\infty\,[$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ car $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
2. La fonction Arc sinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1\,[$. Elle n'est pas dérivable en ± 1 puisque la dérivée de la fonction sinus s'annule en $\pm\pi/2$.

EXERCICES

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

est-elle dérivable en 0 ?

2 Soit f une fonction dérivable en un point x_0.

Montrer que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

La réciproque est-elle vraie ?

3 Soit f une fonction dérivable en un point x_0, déterminer la limite éventuelle de :

$$\frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$$

en x_0.

4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ calculer la limite lorsque h tend vers 0 de :

$$\frac{f^2(x+3h) - f^2(x-h)}{h}.$$

5. La dérivée d'une fonction dérivable T-périodique est-elle périodique ?

6. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(kx)$.

7. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

8. Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels qui possède n racines réelles distinctes.

Montrer que P' possède $n-1$ racines réelles distinctes.

9. La formule des accroissements finis peut s'écrire sous la forme

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

Calculer un tel nombre θ dans le cas de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Quelle interprétation géométrique peut-on en donner ?

10. Étudier les variations des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

b) $x \mapsto \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}\cdot$

11. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, montrer l'inégalite :

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

12. On considère une fonction f dérivable sur le segment $[0, 1]$ avec $f(0) = f(1)$.

La fonction g définie par :

$$g(x) \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

est-elle continue ? dérivable ?

Si non, quelles hypothèses faut-il ajouter pour que g soit dérivable sur $[0\ 1]$?

13. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $x^2 \sin x$.

14 On considère la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0\ , \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

f est-elle de classe C^1 ?

15 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \text{ si } |x| < 1 \\ f(x) = 0 \text{ si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ \varphi(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Montrer que φ est de classe C^∞.

b) En déduire que f est de classe C^∞.

16. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que :

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$

17. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, dérivable sur $[a, b]$. On suppose $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$.

Montrer :

$$\exists c \in \,]a, b[\,:\; f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

18 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soient x et h dans $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe θ, $0 < \theta < 1$ tel que :

$$f(x) - 2f(x + h) + f(x + 2h) = h^2 f''(x + 2\theta h).$$

On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ définie par :

$$\varphi(z) = f(x) - 2f(x + z) + f(x + 2z) - Kz^2$$

où K est une constante à ajuster.

19 Calculer la dérivée d'ordre n de $x^n(1 - x)^n$

En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$.

20 On considère une fonction f qui a n zéros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec :

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

On suppose que f est n fois dérivable sur $[x_1, x_n]$.

Soit $a \in [x_1, x_n]$, montrer qu'il existe un nombre λ avec $x_1 < \lambda < x_n$ tel que :

$$f(a) = (a - x_1)(a - x_2) \ldots (a - x_n)\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}.$$

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la dérivée d'ordre $n+1$ de $x^n e^{1/x}$ est $\dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}$.

22. Soit f une application définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si a et b sont deux éléments de I vérifiant $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, alors il existe c entre a et b tel que $f'(c) = 0$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 9 du chapitre 11.

b) Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

23. Extension du théorème de Rolle.

Soit f une application définie et continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $f(x)$ tende vers $f(a)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Montrer qu'il existe x_0 dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

24. Soit f une application définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f'(x)$ tende vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et que f est lipschitzienne sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

25. On pose :

$$P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big((x^2-1)^n\Big).$$

a) Montrer que P_n est un polynôme de degré n, pair ou impair suivant la parité de n.

b) Montrer que $P_n(1) = 1$, en déduire $P_n(-1)$.

c) Montrer que P_n admet n zéros distincts entre -1 et 1

26. Résolution d'équation différentielles linéaires du premier ordre $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ sur un intervalle I sur lequel la fonction a s'annule.

Les équations différentielles suivantes ont été résolues sur des intervalles I sur lesquelles la fonctions a s'annule dans l'exercice 2 du chapitre 5. Trouver les solutions de ces équations différentielles sur l'intervalle sur lequel elles sont définies.

a) $(x \ln x)\, y' - y = -\dfrac{1}{x}(\ln x + 1)$

b) $(1 - x)y' + y = \dfrac{x-1}{x}$

c) $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$

d) $2xy' + y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

27. Reprendre l'exercice 9 du chapitre 5 et trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

28 Étudier les suites définies par :

a) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$.

b) $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

c) $u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = \Big|(u_n - 1)\sin(u_n)\Big|$.

d) $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n^2 - 1} + 1$.

29 Soit f continue croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} f(x) = k$$

avec $k < 1$.

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Chapitre 13

Fonctions convexes

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

1. Généralités

1.1 Définitions

Définition 1

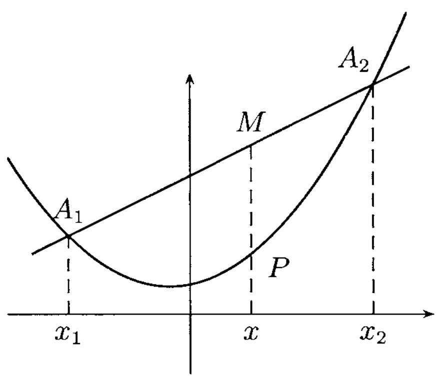
La fonction f est *convexe* sur I si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

La fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.

Interprétation graphique

Soit Γ le graphe de la fonction f dans le plan.



La fonction f est convexe sur I si, et seulement si pour tous points A_1 et A_2 de Γ d'abscisses respectives x_1 et x_2, le graphe de $f_{|[x_1,x_2]}$ est en dessous de la corde $[A_1, A_2]$.

En effet, pour tout x appartenant au segment $[x_1, x_2]$, c'est-à-dire de la forme $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ avec $\lambda \in [0,1]$, les points P et M d'abscisse x et se trouvant respectivement sur Γ et sur la corde $[A_1, A_2]$, admettent respectivement $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ et $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ pour ordonnées

Exemples

1. Toute fonction affine est à la fois convexe et concave.
2. La fonction valeur absolue est convexe car pour $\lambda \in [0,1]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$\left|\lambda x + (1-\lambda)y\right| \leqslant |\lambda x| + \left|(1-\lambda)y\right| = \lambda |x| + (1-\lambda)|y|.$$
3. Une somme de fonctions convexes est une fonction convexe

1.2 Inégalité de convexité

Proposition 1

Étant données une fonction f convexe sur I et une famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de réels positifs telle que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, on a :
$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in I^p,\ f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

Démonstratio Démontrons par récurrence sur p la propriété H_p :

Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ et pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in I^p$, on a :
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \Longrightarrow f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

- H_1 est vraie de façon évidente car si $p=1$ alors $\lambda_1 = 1$.
- Supposons H_{p-1} avec $p \geqslant 2$. Soit une famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in I^p$ ainsi qu'une famille $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ Le point $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ appartient bien à I, comme barycentre à coefficients positifs d'éléments de I.
  - Si $\lambda_p = 1$, alors pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$ on a $\lambda_i = 0$, et par suite :
  $$f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\Big) = f(x_p) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$
  - Si $\lambda_p \neq 1$, on peut ecrire :
  $$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i + \lambda_p x_p = (1-\lambda_p) \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_p} x_i + \lambda_p x_p.$$

La somme des réels positifs $\left(\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\right)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ étant égale à 1, le réel

$$y_p = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\, x_i$$

appartient à I et la propriéte H_{p-1} donne :

$$f(y_p) = f\Big(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\, x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\, f(x_i).$$

La convexité de f entraîne alors :

$$\begin{aligned} f\Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i\Big) &= f\big((1-\lambda_p)\, y_p + \lambda_p\, x_p\big) \\ &\leqslant (1-\lambda_p)\, f(y_p) + \lambda_p\, f(x_p) \\ &\leqslant (1-\lambda_p)\Big(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_p}\, f(x_i)\Big) + \lambda_p f(x_p) \end{aligned}$$

ce qui prouve H_p. □

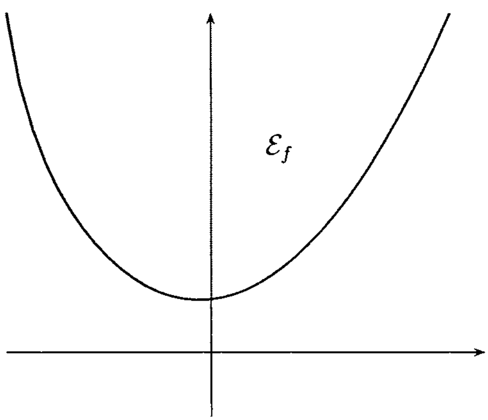
Remarque f étant convexe sur I, si λ_1, λ_2, …, λ_p sont des réels positifs non tous nuls, on a :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in I^p, \quad f\left(\frac{\lambda_1\, x_1 + \cdots + \lambda_p\, x_p}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}\right) \leqslant \frac{\lambda_1\, f(x_1) + \cdots + \lambda_p\, f(x_p)}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}.$$

1.3 Caractérisation géométrique

MPSI On considère dans cette section une fonction f définie sur un intervalle I et l'épigraphe de f défini par :

$$\mathcal{E}_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x \in I \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y\big\}.$$



Proposition 2

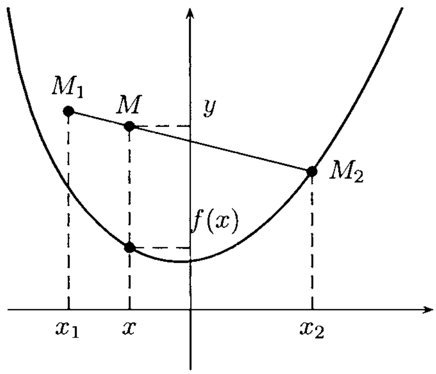
La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, son épigraphe est une partie convexe du plan, c'est-à-dire si, et seulement si, on a :

$$\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{E}_f \times \mathcal{E}_f\,,\ [M_1, M_2] \subset \mathcal{E}_f.$$

emonstration

- Supposons f convexe sur I. Étant donnés deux points M_1 et M_2 de $\mathcal{E}_f$ de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2), tout point M de coordonnées (x, y) du segment $[M_1, M_2]$ est barycentre des points (M_1, λ) et $(M_2, 1-\lambda)$ avec $\lambda \in [0, 1]$. On a donc :

$$x = \lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \qquad \text{et} \qquad y = \lambda\, y_1 + (1-\lambda)\, y_2.$$



La fonction f étant convexe, on a :

$$f(x) \leqslant \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2).$$

Comme les points M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{E}_f$, on a $f(x_1) \leqslant y_1$ et $f(x_2) \leqslant y_2$, ce qui donne :

$$f(x) \leqslant \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2) \leqslant \lambda\, y_1 + (1-\lambda)\, y_2 = y$$

et prouve que le point M appartient à $\mathcal{E}_f$.

- Supposons $\mathcal{E}_f$ convexe, c'est-à-dire :

$$\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{E}_f \times \mathcal{E}_f\,,\ [M_1, M_2] \subset \mathcal{E}_f.$$

Soient A_1 et A_2 deux points de Γ d'abscisses respectives x_1 et x_2. Comme A_1 et A_2 appartiennent à $\mathcal{E}_f$, tout point M du segment $[A_1, A_2]$, de coordonnées (x, y), appartient à $\mathcal{E}_f$, et par suite $f(x) \leqslant y$. Le graphe de $f_{|[x_1, x_2]}$ est donc en dessous du segment $[A_1, A_2]$, ce qui prouve que f est convexe

□

1.4 Caractérisation en terme de pente

Proposition 3

Pour $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, les propriétes suivantes sont équivalentes :

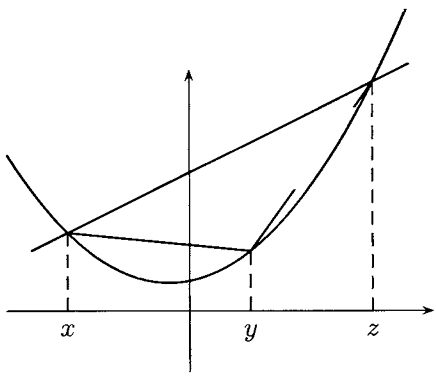
(*i*) f est convexe,

(*ii*) $\forall (x,y,z) \in I^3,\ x < y < z \Longrightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$,

(*iii*) $\forall (x,y,z) \in I^3,\ x < y < z \Longrightarrow \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$,

(*iv*) $\forall (x,y,z) \in I^3,\ x < y < z \Longrightarrow \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

Remarque Les propriétés précédentes, qui s'expriment en terme de pentes de droites, se retiennent facilement à l'aide d'un dessin.



emonstration

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Soient x, y et z des éléments de I vérifiant $x < y < z$; on a :

$$y = \lambda x + (1-\lambda) z$$

avec

$$\lambda = \frac{z-y}{z-x} \in [0,1]$$

ce qui, d'après la convexité de f, implique

$$f(y) \leqslant \left(\frac{z-y}{z-x}\right) f(x) + \left(1 - \frac{z-y}{z-x}\right) f(z)$$

et donne :

$$f(y) - f(x) \leqslant \left(\frac{z-y}{z-x} - 1\right) f(x) + \left(1 - \frac{z-y}{z-x}\right) f(z) = (y-x)\frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Soient $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 \leqslant x_2$ et $\lambda \in [0,1]$. Posons $y = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.

- Si $x_1 = x_2$ ou $\lambda \in \{0,1\}$, on a :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

- Si $x_1 < x_2$ et $0 < \lambda < 1$, on a $x_1 < y < x_2$. La relation (ii) donne alors :

$$\frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

soit :
$$\frac{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - f(x_1)}{(1-\lambda)(x_2 - x_1)} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
et, comme $x_2 - x_1 > 0$, on en déduit :
$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leqslant (1-\lambda)\big(f(x_2) - f(x_1)\big) + f(x_1) \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \end{aligned}$$

La fonction f est donc convexe.

$(ii) \iff (iii) \iff (iv)$ Un calcul élémentaire prouve que les relations (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes à :
$$(x-y)f(z) + (y-z)f(x) + (z-x)f(y) \leqslant 0$$
et donc équivalentes entre elles. □

Proposition 4

Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si, et seulement si, pour tout $a \in I$, la fonction φ_a :
$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$
est croissante.

émonstration

► Soient $a \in I$ ainsi que $(x, x') \in (I \setminus \{a\})^2$ tels que $x < x'$ Si f est convexe, on prouve :
$$\varphi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(x') - f(a)}{x' - a} = \varphi_a(x')$$
en utilisant :

- la propriété (ii) de la proposition précédente lorsque $a < x < x'$,
- la propriété (iii) de la proposition précédente lorsque $x < a < x'$,
- la propriété (iv) de la proposition précédente lorsque $x < x' < a$

La fonction φ_a est donc croissante.

► Réciproquement, soit $(x, y, z) \in I^3$ tel que $x < y < z$. La croissance de la fonction φ_x donne :
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$
ce qui, d'après la propriété (ii) de la proposition précédente prouve que f est convexe. □

Exemple Si p et q sont deux réels, la fonction $g : x \mapsto f(x) - px - q$ est convexe si, et seulement si, f est convexe. En effet, les fonctions φ_a correspondant à f et à g diffèrent de la constante p.

Attention Dans la proposition précédente, il s agit bien de la croissance de φ_a sur $I \setminus \{a\}$ et pas seulement de sa croissance sur chacun des deux intervalles $I \cap\ ]-\infty, a[$ et $I \cap\ ]a, +\infty[$.

2. Convexité et dérivabilité

2.1 Caractérisation des fonctions dérivables convexes

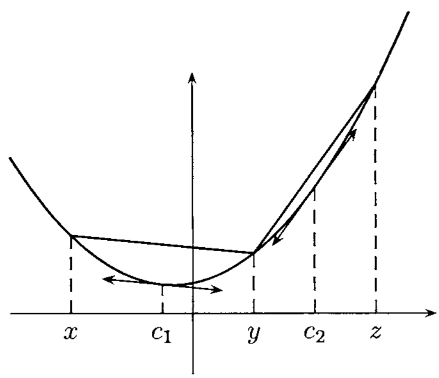
Proposition 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f est convexe si, et seulement si la fonction f' est croissante.

émonst tion

- Supposons f convexe. Soient $x < y$ deux points de I
  - Pour t quelconque appartenant à $]\,x, y\,[$ la proposition 3 de la page 403 donne :
  $$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$
  En passant à la limite lorsque t tend vers x à droite, on obtient :
  $$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$
  - De la même façon, on obtient :
  $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y).$$

  On en déduit :
  $$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y)$$
  et donc la croissance de f'.
- Supposons f' croissante. Soit $(x, y, z) \in I^3$ tel que $x < y < z$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_1 \in\ ]\,x, y\,[$ et $c_2 \in\ ]\,y, z\,[$ tels que :
  $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_1)$$
  et :
  $$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(c_2).$$



Comme $x < c_1 < y < c_2 < z$, la croissance de f' établit $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, ce qui donne :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

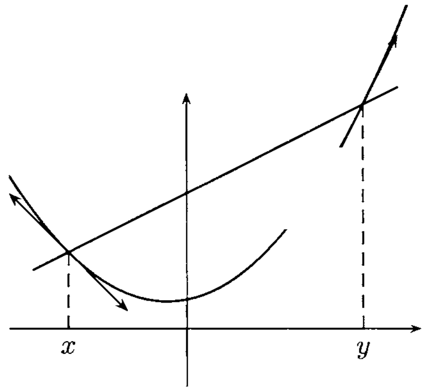
D'après la proposition 3 de la page 403, la fonction f est donc convexe □

Remarques

- Dans la première partie de la démonstration précédente, on a en fait établi que si f est une fonction convexe, on a :

  $$x < y \Longrightarrow f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y),$$

  résultat très facile à retrouver sur un dessin.



- Comme le théorème des accroissements finis sur lequel elle est fondée, la réciproque nécessite en fait seulement la continuité de f sur I et la dérivabilité sur I privé de ses bornes.

  Par exemple, la fonction Arc Sinus, qui est continue sur $[-1,1]$, est concave sur $[-1,0]$ et convexe sur $[0,1]$, comme le prouvent les variations sur $]-1,1[$ de sa dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exemple La monotonie de leurs dérivées prouve que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ et la fonction logarithme concave sur $\mathbb{R}_+^*$

Corollaire 6

Une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle I est convexe si et seulement si, $f'' \geqslant 0$.

émonstratio En effet, f' est croissante sur l'intervalle I si, et seulement si, $f'' \geqslant 0$. □

Exemples d'application de la convexité

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a,b]$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$ et dont la dérivée seconde est bornée par M sur $[a,b]$.

- La fonction g définie par :
$$g(x) = f(x) - M\,\frac{(x-a)\,(b-x)}{2}$$
a pour dérivée seconde $g''(x) = f''(x) + M$ qui est positive sur $[a,b]$. La fonction g est donc convexe et, comme elle est nulle en a et b elle est négative sur $[a,b]$.
- On prouve de même que la fonction h définie par :
$$h(x) = f(x) + M\,\frac{(x-a)\,(b-x)}{2}$$
est concave puis positive sur $[a,b]$.

Au total on a donc prouvé :
$$\forall x \in [a,b]\ ,\ \big|f(x)\big| \leqslant M\,\frac{(x-a)\,(b-x)}{2}.$$

2. Une inégalité classique de convexité.

Étant donnés des réels $u_1, u_2, \dots u_n$ strictement positifs et des réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, la concavité de la fonction logarithme permet d'écrire :
$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln u_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} u_i^{\lambda_i}\right)$$
ce qui, puisque la fonction exponentielle est croissante, implique :
$$\prod_{i=1}^{n} u_i^{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u_i.$$
En particulier pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ on obtient :
$$\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)$$
ce que l'on peut exprimer en disant que la *moyenne géométrique* est inférieure à la *moyenne arithmétique.*

2.2 Position par rapport à la tangente

Proposition 7

Si f est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I, on a :
$$\forall (x,a) \in I^2\ ,\ f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\,f'(a).$$

émons ratio Conséquence de la formule des accroissements finis :

$$f(x) = f(a) + (x - a)\, f'(c) \qquad \text{avec} \qquad c \in [a\ x]$$

et de la croissance de f', en distinguant les deux cas $a \leqslant c \leqslant x$ et $x \leqslant c \leqslant a$. □

Remarque Le résultat de la proposition précédente peut s'exprimer en disant que le graphe d'une fonction convexe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes.

Exemple : Cas de convergence dans la methode de Newton (voir page 382)

Soit f une fonction dérivable dont la dérivée est strictement positive sur un intervalle I. On suppose que f est concave sur I et qu'il existe un point $a \in I$ tel que $f(a) = 0$. Alors, pour toute valeur $u_0 \leqslant a$ de I, la suite définie par $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ existe et converge vers a.

En effet, si $x \leqslant a$, on a $f(x) \leqslant 0$ et donc $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \geqslant x$. D'autre part, par concavité de f, le point d'intersection de la tangente en x avec Ox se trouve au dessus de la courbe représentative de f, ce qui prouve $g(x) \leqslant a$. Par suite, l'intervalle $J = I \cap\,]-\infty, a]$ est stable par g et l'on a sur cet intervalle $\forall x \in J\,,\ g(x) \geqslant x$.

Ainsi la suite est bien définie, est croissante et majorée par a. Comme par stricte monotonie de f, a est son unique racine, on en déduit que la suite u converge vers a.

EXERCICES

1 Montrer que si g est convexe et f est convexe croissante alors $f \circ g$ est convexe.

2. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}_+^*$ est dite logarithmiquement convexe si et seulement si $\ln f$ est convexe.

Montrer que si f est logarithmiquement convexe alors f est convexe.

La réciproque est-elle vraie ?

3 Soient a et b deux nombres réels

Montrer l'inégalité :

$$e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{1}{2}(e^a + e^b).$$

4. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a et b étant deux réels strictement positifs, montrer que :

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Montrer que :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots x_n}{n}.$$

6. Soit f une fonction convexe strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle J.

Que peut-on dire de f^{-1} ?

On discutera suivant que f est croissante ou décroissante

7. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ croissante non constante et convexe

Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

8. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$

a) On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$, montrer que f est positive

b) On suppose que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote $\mathcal{D}$
Quelles sont les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$?

9. Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $[a.b]$.

Montrer que :

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

10. Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 > 1$ et $x_2 > 1$.

Montrer que :

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x_1 \ln x_2}.$$

11. Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ainsi que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres réels positifs.

Montrer l inégalité suivante dite de *Hölder* :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

12. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

13. Soit f une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$, montrer que f est constante.

Le résultat est-il conservé si f est convexe majorée sur $[A,+\infty[$?

En déduire que si f est une fonction deux fois dérivable bornée non constante, alors il existe t_1 et t_2 tels que $f''(t_1)f''(t_2) < 0$.

14. Soit f convexe sur un intervalle borné $]a.b[$, montrer que f est minorée.

15. Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et a un point qui n'est pas une extrémité de I.

Montrer que f est dérivable à droite et à gauche au point a et que :

$$f'_g(a) \leqslant f'_d(a).$$

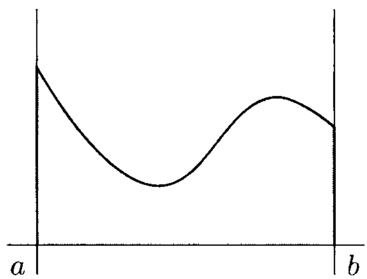
En déduire que f est continue en tout point qui n'est pas une extrémité de I.

Chapitre 14

Intégration

Jusqu'à la fin de la section 4., a et b désignent deux réels tels que $a < b$ et toutes les fonctions sont supposées définies sur $[a, b]$ et à valeurs réelles.

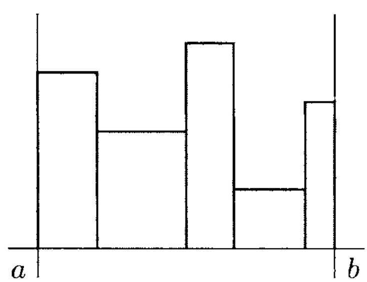
Le but de l'intégration est de définir un nombre qui, pour une fonction f positive sur un segment $[a.b]$, mesure l'aire délimitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

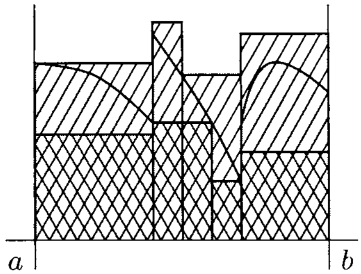


Ce nombre sera appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et notée :

$$\int_{[a,b]} f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

- Si f est en escalier, c'est–à–dire constante par morceaux, son intégrale doit donc être la somme des aires des rectangles délimités par sa courbe représentative (ou son graphe).

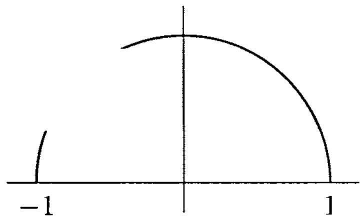




- Dans le cas général, s'il existe deux fonctions en escalier φ et ψ vérifiant $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, on doit avoir :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} \psi.$$

Dans les bons cas, et en particulier lorsque f est continue par morceaux, on peut prendre φ et ψ aussi proches que l'on veut l'une de l'autre, et avoir ainsi un encadrement aussi précis que l'on veut de l'intégrale de f.



- On retrouve ainsi des aires connues, comme par exemple $\pi/2$, aire d'un demi–disque qui correspond à l'intégrale de la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (voir l'exercice 7).

1. Intégrale des fonctions en escalier

1.1 Subdivision d'un segment

Définition 1

- On appelle *subdivision* de $[a,b]$, toute famille $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ telle que $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

- On appelle *pas* ou *module* de la subdivision $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, le réel :

$$\delta(u) = \max_{i\in[\![1,n]\!]} (x_i - x_{i-1}).$$

Exemple Étant donné un entier naturel n non nul on définit une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ par :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}.$$

Elle est appelée *subdivision à pas constant* ; son module est $\dfrac{b-a}{n}$ et on peut le rendre aussi petit que l'on veut.

Définition 2

Si u et v sont deux subdivisions de $[a, b]$, on dit que u est *plus fine* que v si tout élément de v est élément de u.

Remarque Se donner une subdivision de $[a, b]$, équivaut à se donner une partie finie de $[a, b]$ contenant a et b.

La relation définie ci–dessus est une relation d'ordre sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Elle correspond à l inclusion sur les parties finies de $[a, b]$ contenant a et b.

Comme la réunion de telles parties A et B est une partie finie C contenant a et b et telle que $A \subset C$ et $B \subset C$, on en déduit :

Proposition 1

Si u et v sont deux subdivisions de $[a, b]$, il existe une subdivision plus fine que u et v.

1.2 Fonctions en escalier

Définition 3

Une fonction φ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est *en escalier* si l'on peut trouver une subdivision $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Une telle subdivision u est appelée *subdivision adaptée* à la fonction en escalier φ.

Notation On note $\mathcal{E}\big([a, b]\big)$ l ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Exemples

1. Une fonction constante sur le segment $[a, b]$ est en escalier sur $[a, b]$
2. La fonction partie entière est en escalier sur tout segment $[a, b]$, une subdivision adaptée étant constituée de a, b et de tous les entiers compris entre a et b.

Remarques

- Une fonction en escalier prend un nombre fini de valeurs. En particulier, elle est bornée.

- Si u est une subdivision adaptée à une fonction φ en escalier, alors toute subdivision plus fine que u est adaptée à φ.
- Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, alors il existe une subdivision adaptée à φ et à ψ.

  En effet, soit u (respectivement v) une subdivision adaptée à φ (respectivement à ψ). D'après la proposition 1 de la page précedente, il existe une subdivision w plus fine que u et v. Une telle subdivision w est alors adaptée à φ et à ψ.

Proposition 2

$\mathcal{E}\big([a, b]\big)$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.

émonstratio Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, ainsi que λ et μ deux réels. Prenons une subdivision $u = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ adaptée à φ et à ψ. Les fonctions φ et ψ sont constantes sur chacun des intervalles $]\,x_{i-1}, x_i\,[$ et donc il en est de même de $\lambda\varphi + \mu\psi$.
La fonction nulle étant en escalier, on en déduit le résultat. □

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition 3

Soit $\varphi \in \mathcal{E}\big([a, b]\big)$ et $u = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à φ. Si, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note c_i la valeur de φ sur $]\,x_{i-1}, x_i\,[$, alors la quantité :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i$$

ne depend pas de la subdivision u choisie.

On l'appelle *intégrale* de φ sur $[a, b]$ et on la note $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$.

emonstratio Si u est une subdivision adaptée à la fonction φ, notons :

$$I(\varphi, u) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i.$$

On veut montrer que $I(\varphi, u) = I(\varphi, v)$ pour toutes subdivisions u et v adaptées à φ.

Si v est plus fine que u, elle est obtenue en rajoutant un nombre fini d'éléments à la subdivision u. Pour démontrer que $I(\varphi, u) = I(\varphi, v)$, il suffit donc de le démontrer dans le cas où v a un élément de plus que u.

Supposons donc $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $v = (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, y, x_p, \ldots, x_n)$ La fonction φ vaut c_p sur $]\,x_{p-1}, y\,[$ et sur $]\,y, x_p\,[$, et :

$$I(\varphi, v) = \sum_{i=1}^{p-1} (x_i - x_{i-1})\, c_i + (y - x_{p-1})\, c_p$$
$$+ (x_p - y)\, c_p + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i = I(\varphi, u).$$

Cas général. Si u et v sont deux subdivision adaptées à φ, alors il existe une subdivision w plus fine que u et v, qui est donc aussi adaptée à φ. D'après le premier cas, on a :

$$I(\varphi, u) = I(\varphi, w) = I(\varphi, v)$$

d'où le résultat □

Remarques

- L'intégrale de φ ne dépend pas des valeurs de φ aux points de la subdivision adaptée qui a servi à la calculer.
- Une fonction nulle sauf en un nombre fini de points est en escalier et son intégrale est nulle, comme on peut le vérifier en prenant une subdivision contenant les points où la fonction n'est pas nulle.

1.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition 4

L intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a.b])$.

Démonstration Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à φ et ψ. Si c_i (respectivement d_i) est la valeur de la fonction φ (respectivement ψ) sur l'intervalle $]\,x_{i-1}, x_i\,[$, alors, sur ce même intervalle, $\lambda\,\varphi + \mu\,\psi$ vaut $\lambda\, c_i + \mu\, d_i$, et :

$$\int_{[a,b]} \lambda\,\varphi + \mu\,\psi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\,(\lambda\, c_i + \mu\, d_i)$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i + \mu \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, d_i$$
$$= \lambda \int_{[a,b]} \varphi + \mu \int_{[a,b]} \psi.$$

□

Proposition 5

- Une fonction en escalier positive a une intégrale positive.
- Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ alors :

$$\varphi \leqslant \psi \Longrightarrow \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi.$$

émonstration

- En utilisant les notations de la proposition 3 de la page 414, si φ est positive alors les c_i sont tous positifs et, puisque $x_i - x_{i-1} > 0$, on en déduit :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i \geqslant 0.$$

- Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction en escalier positive $\psi - \varphi$ et d utiliser la linéarité de l'intégrale. □

Proposition 6

Soient $c \in \,]a,b[$ et φ une fonction définie sur $[a,b]$. La fonction φ est en escalier sur $[a,b]$ si, et seulement si, ses restrictions à $[a,c]$ et à $[c,b]$ sont en escalier, et on a alors :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]}.$$

émons rati n

- Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$. Prenons une subdivision adaptée à φ. En lui ajoutant éventuellement le point c, on obtient une subdivision $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ encore adaptée à φ et contenant le point c.

  Désignons par p l'entier strictement compris entre 0 et n tel que $c = x_p$.

  - $(x_i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ est une subdivision de $[a,c]$ et pour tout $i \in [\![1\ p]\!]$, la fonction φ est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$. Donc $\varphi_{|[a,c]}$ est en escalier sur $[a,c]$.
  - De même, $(x_i)_{i\in[\![p,n]\!]}$ est une subdivision de $[c,b]$ et $\varphi_{|[c\ b]}$ est en escalier sur $[c,b]$

  Si c_i est la valeur de φ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} \varphi &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} (x_i - x_{i-1})\, c_i + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i \\ &= \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]}.\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons $\varphi_{|[a,c]}$ et $\varphi_{|[c,b]}$ en escalier. Si :

- $(x_i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ est une subdivision de $[a,c]$ adaptée à $\varphi_{|[a,c]}$,
- $(y_j)_{j\in[\![0,q]\!]}$ est une subdivision de $[c,b]$ adaptée à $\varphi_{|[c,b]}$,

alors, $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p = c = y_0, y_1, \ldots, y_q)$ est une subdivision de $[a,b]$ et φ est constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ et $]y_{j-1}, y_j[$. Donc φ est en escalier sur $[a,b]$. □

2. Fonctions continues par morceaux

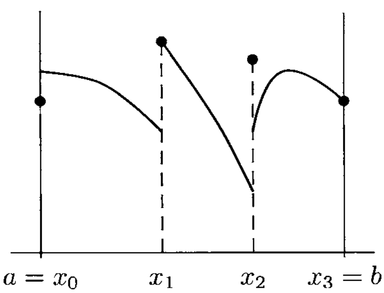
2.1 Définition, exemples

Définition 4

Une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} et x_i.

Une telle subdivision u est dite adaptée à la fonction continue par morceaux f.

Exemple de representation graphique



Remarque Une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est continue par morceaux si et seulement si, on peut trouver une subdivision $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction f_i continue sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$.

Exemples

1. Une fonction en escalier est continue par morceaux.
2. Une fonction continue est continue par morceaux.
3. La fonction f définie sur $[-1,1]$ par :
$$f(0)=0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \neq 0,\ f(x)=e^{1/x}$$
n'est pas continue par morceaux, car elle n a pas de limite finie à droite en 0.
4. Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la fonction f_α définie sur $[a+\alpha, b+\alpha]$ par $f_\alpha(x)=f(x-\alpha)$ est continue par morceaux.
Réciproquement, toute fonction f continue par morceaux sur $[a+\alpha, b+\alpha]$ est ainsi obtenue à partir de la fonction $x \mapsto f(x+\alpha)$ continue par morceaux sur $[a,b]$.

Remarques Comme pour les fonctions en escalier, on peut vérifier que :

- si u est une subdivision adaptée à une fonction f continue par morceaux alors toute subdivision plus fine que u est adaptée à f,
- si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, alors il existe une subdivision adaptée à f et à g.

Proposition 7

Une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.

émonstratio Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Prenons une subdivision $u=(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ adaptée à f. Pour $i\in[\![1,n]\!]$, la restriction de f à $]x_{i-1},x_i[$ se prolonge en une fonction continue qui est alors bornee sur le segment $[x_{i-1},x_i]$.
Par suite, la fonction f est bornee sur $]x_{i-1},x_i[$ et, en posant $M_i=\sup\limits_{]x_{i-1},x_i[}|f|$, la fonction f est donc bornée sur $[a,b]$ par :
$$\max\Big(M_1,M_2,\dots,M_n,\big|f(x_0)\big|,\big|f(x_1)\big|,\dots,\big|f(x_n)\big|\Big).$$
□

Proposition 8

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ constitue un sous–espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$. Il est de plus stable par produit

émonstra i n Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, ainsi que λ et μ deux réels. Prenons une subdivision $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ adaptée à f et à g. Les restrictions des fonctions f et g à chacun des intervalles $]\,x_{i-1},x_i\,[$ sont continues et admettent des limites finies en x_{i-1} et x_i, donc il en est de même pour $\lambda f + \mu g$ et fg. Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont donc continues par morceaux sur $[a,b]$
Comme de plus la fonction nulle est continue par morceaux, on en déduit le résultat. □

2.2 Approximation des fonctions continues par morceaux

PCSI Seul le théorème 10 est au programme de PCSI, et il est admis.

MPSI **Proposition 9**

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Pour tout reel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier θ telle que $|f-\theta| \leqslant \varepsilon$.

émonstration Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après le théorème de Heine, la fonction f qui est continue sur le segment $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$.
On peut donc trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b]\,,\ \forall y \in [a,b]\,,\ |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)-f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Prenons une subdivision $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de module inférieur à η (par exemple de pas constant, *cf* page 412) et définissons une fonction θ en escalier sur $[a,b]$ en posant :

$$\theta(a) = f(a) \qquad \text{et} \qquad \theta(x) = f(x_i) \quad \text{si} \quad x \in\ ]\,x_{i-1},x_i\,].$$

Pour $x \in\ ]a,b]$ et $i \in [\![1,n]\!]$ tels que $x_{i-1} < x \leqslant x_i$, on a $|x-x_i| \leqslant \eta$ et donc :

$$\big|f(x)-\theta(x)\big| = \big|f(x)-f(x_i)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Comme de plus $f(a) = \theta(a)$, on a :

$$\forall x \in [a,b]\,,\ |f(x)-\theta(x)| \leqslant \varepsilon.$$

□ MPSI

On peut approcher ou encadrer une fonction continue par morceaux d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier :

Théorème 10

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Pour tout reel $\varepsilon > 0$:

- il existe une fonction en escalier θ telle que $|f-\theta| \leqslant \varepsilon$,
- il existe des fonctions en escalier φ et ψ telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

MPSI

em nstration

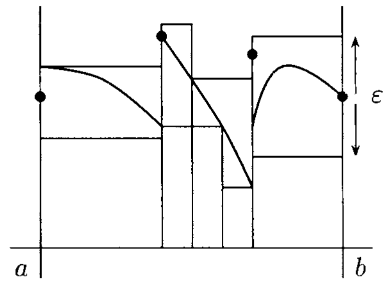
- Soit $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à la fonction f continue par morceaux. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, la restriction de f à $]\,x_{i-1}, x_i\,[$ se prolonge en une fonction f_i continue sur $[\,x_{i-1}, x_i\,]$

  Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après la proposition précédente, on peut trouver une fonction θ_i en escalier sur $[\,x_{i-1}, x_i\,]$ telle que $|f_i - \theta_i| \leqslant \varepsilon$.

  La fonction θ définie par :
$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \theta = \theta_i \qquad \text{sur} \qquad]\,x_{i-1}, x_i\,[$$
$$\forall i \in [\![0,n]\!]\,,\ \theta(x_i) = f(x_i)$$
  est en escalier et vérifie $|f - \theta| \leqslant \varepsilon$.

- En prenant une fonction en escalier θ telle que $|f - \theta| \leqslant \varepsilon/2$, les fonctions en escalier $\varphi = \theta - \varepsilon/2$ et $\psi = \theta + \varepsilon/2$ vérifient alors :
$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$
□ MPS

Interprétation graphique Exemple de graphes de fonctions en escalier φ et ψ encadrant f à ε près :



2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Notation Si f est continue par morceaux sur $[\,a, b\,]$, on note :

$\mathcal{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus grandes que f.

$\mathcal{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier plus petites que f.

Proposition 11

Si f est continue par morceaux, alors :

- $\left\{\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ admet une borne supérieure
- $\left\{\displaystyle\int_{[a,b]} \psi \;\middle|\; \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$ admet une borne inférieure,

et ces deux bornes sont égales.

e st atio Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. D'après la proposition 7 de la page 418, la fonction f est bornée ; notons $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$.

- La fonction constante m (respectivement M) appartient à $\mathcal{E}^-(f)$ (respectivement à $\mathcal{E}^+(f)$) donc $\mathcal{E}^-(f)$ et $\mathcal{E}^+(f)$ sont non vides.

  De plus, si $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$, alors $\varphi \leqslant f \leqslant M$, donc :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} M = M(b-a).$$

  L'ensemble $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ est une partie non vide majoree de $\mathbb{R}$ et possède donc une borne supérieure α.

  De même, $\left\{\int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ et possède donc une borne inférieure β.

- Toute fonction φ de $\mathcal{E}^-(f)$ est inférieure à toute fonction ψ de $\mathcal{E}^+(f)$ et par suite :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi.$$

  Soit $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$ fixée. L'ensemble $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ étant majoré par $\int_{[a,b]} \psi$, sa borne supérieure α est plus petite que cette intégrale.

  Le réel α est donc un minorant de l'ensemble $\left\{\int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$, par conséquent il est plus petit que la borne inférieure de ce dernier. On en déduit donc $\alpha \leqslant \beta$.

- Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 10 de la page 419, on peut trouver $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$ telles que $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$ On a alors

$$\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,b]} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon\,(b-a).$$

  Or, par définition de α et β, on a :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \int_{[a,b]} \psi.$$

  On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \varepsilon\,(b-a)$$

  ce qui prouve $\alpha = \beta$ □

Définition 5

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, on appelle *intégrale* de f sur $[a,b]$ le réel :

$$\int_{[a,b]} f = \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\} = \inf\left\{\int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}.$$

Cohérence Si f est en escalier sur $[a,b]$, alors elle est continue par morceaux et son intégrale en tant que fonction continue par morceaux est la même que son intégrale en tant que fonction en escalier ce qui permet de noter de la même façon ces deux intégrales.

En effet, $f \in \mathcal{E}^-(f) \cap \mathcal{E}^+(f)$ et donc son intégrale en tant que fonction en escalier est le plus grand élément de $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ et le plus petit élement de $\left\{\int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$.

2.4 Valeur moyenne

Si $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, alors m est une fonction en escalier inférieure à f, donc son intégrale $m(b-a)$ est inférieure à l'intégrale de f. En faisant le même type de raisonnement pour M, on obtient :

$$m(b-a) \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant M(b-a).$$

La quantité $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est donc un réel compris entre m et M.

Définition 6

On appelle *valeur moyenne* de la fonction f continue par morceaux sur le segment $I = [a,b]$, la quantité :

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

Exemples

1. Si u est une subdivision **à pas constant** adaptée à une fonction f en escalier, alors la valeur moyenne de f sur $[a.b]$ est la moyenne usuelle des valeurs de la fonction sur chacun des intervalles de la subdivision.

2. Pour une subdivision quelconque il s agit de la moyenne pondérée par les largeurs des intervalles de la subdivision

3. Propriétés de l'intégrale

3.1 Linéarité, relation de Chasles

Proposition 12

L intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

émonstration

- Si f est une fonction continue par morceaux, et si θ est une fonction en escalier telle que $|f - \theta| \leqslant \varepsilon$, on a $\theta - \varepsilon \leqslant f \leqslant \theta + \varepsilon$ ce qui prouve :

$$\int_{[a,b]} (\theta - \varepsilon) \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} (\theta + \varepsilon)$$

et donc :

$$\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta\right| \leqslant (b - a)\,\varepsilon.$$

- Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues par morceaux sur $[a. b]$, ainsi que λ_1 et λ_2 deux réels.

Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, prenons θ_1 et θ_2 deux fonctions en escalier telles que :

$$|f_1 - \theta_1| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |f_2 - \theta_2| \leqslant \varepsilon$$

ce qui entraîne, pour $i \in \{1, 2\}$:

$$\left|\int_{[a.b]} f_i - \int_{[a.b]} \theta_i\right| \leqslant (b - a)\,\varepsilon.$$

Posons $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ et $\theta = \lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2$. On a :

$$\begin{aligned}|f - \theta| &\leqslant |\lambda_1|\,|f_1 - \theta_1| + |\lambda_2|\,|f_2 - \theta_2| \\ &\leqslant \big(|\lambda_1| + |\lambda_2|\big)\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Et par suite ·

$$\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta\right| \leqslant (b - a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\,\varepsilon.$$

La linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{E}\big([a, b]\big)$ permet aussi d'écrire :

$$I = \int_{[a,b]} (\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2) = \lambda_1 \int_{[a,b]} \theta_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} \theta_2$$

ce qui donne :

$$\left|\lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2 - I\right| \leqslant (b-a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\,\varepsilon$$

et donc :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left|\int_{[a,b]} f - \lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 - \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right| \\ &= \left|\int_{[a,b]} f - I + I - \lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 - \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right| \\ &\leqslant \left|\int_{[a,b]} f - I\right| + \left|I - \lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 - \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2\right| \\ &\leqslant 2(b-a)(|\lambda_1| + |\lambda_2|)\,\varepsilon.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \Delta \leqslant 2(b-a)\big(|\lambda_1| + |\lambda_2|\big)\,\varepsilon$$

ce qui prouve $\Delta = 0$ et donc :

$$\int_{[a,b]} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \int_{[a,b]} f_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} f_2.$$

□

Exemple Deux fonctions continues par morceaux sur $[a.b]$ qui sont égales sauf en un nombre fini de points ont la même intégrale car leur différence, qui est nulle sauf en un nombre fini de points, est une fonction en escalier dont l'intégrale est nulle.

Proposition 13 (Relation de Chasles)

Soit $c \in\ ]a, b[$ et f une fonction définie sur $[a.b]$.

La fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si, et seulement si, ses restrictions à $[a, c]$ et à $[c, b]$ sont continues par morceaux, et l'on a alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}.$$

émonstration

- La démonstration de l'équivalence est similaire à celle correspondant au cas des fonctions en escalier.
- Soit alors φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ plus petite que f. On a :

$$\varphi_{|[a,c]} \in \mathcal{E}^-(f_{|[a,c]}) \qquad \text{et} \qquad \varphi_{|[c,b]} \in \mathcal{E}^-(f_{|[c,b]}).$$

Par suite :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]} \leqslant \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}.$$

Le réel $\int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$ qui est un majorant de l'ensemble :

$$\left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$$

est donc plus grand que la borne supérieure de ce dernier, ce qui donne :

$$\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}.$$

En appliquant ce résultat à $-f$, on en déduit l'inégalité inverse, et donc :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}.$$

□

Remarque Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, et $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à f. Notons f_i la fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ dont la restriction à $]x_{i-1}, x_i[$ est égale à celle de f.

La relation de Chasles nous donne alors :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f_i.$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction continue par morceaux est la somme d'intégrales de fonctions continues.

3.2 Inégalités

Proposition 14

- Une fonction positive et continue par morceaux a une intégrale positive.
- Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ alors :

$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g.$$

émonstration

- Si f est positive, alors la fonction nulle appartient à $\mathcal{E}^-(f)$ et son intégrale est plus petite que l'intégrale de f qui est donc positive.
- Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction positive $g - f$ et d'utiliser la linéarité de l'intégrale

□

Théorème 15

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors $|f|$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$$

Démonstration Soit $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à la fonction f Alors la restriction de f à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ est continue et admet des limites en x_{i-1} et x_i. Il en est donc de même pour la fonction $|f|$ d'après les propriétés des limites.

En intégrant la double inégalité $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, on obtient :

$$-\int_{[a,b]} |f| \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} |f|,$$

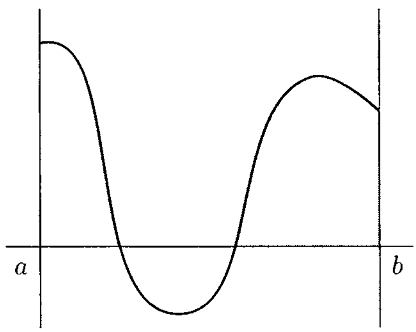
c'est-à-dire ·

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$$

□

Interprétation géométrique

Comme l'intégrale a été construite (*cf.* introduction), la quantité $\displaystyle\int_{[a,b]} |f|$ représente la somme des aires des parties du plan comprises entre l'axe Ox et la courbe représentative de f, alors que $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ représente la somme algébrique de ces aires, les parties situees sous l'axe Ox étant comptées négativement. Cela suppose nécessairement que les nombres de telles parties soient finis.



Proposition 16 (Inégalité de la moyenne)

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, alors :

$$\left|\int_{[a.b]} f\,g\right| \leqslant \sup_{[a.b]} |f| \int_{[a.b]} |g|.$$

émonstration Notons $M = \sup\limits_{[a,b]} |f|$. On a :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ \big|f(x)\,g(x)\big| \leqslant M\big|g(x)\big|$$

et donc :

$$\left|\int_{[a,b]} f\,g\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f\,g| \leqslant \int_{[a,b]} M|g| = M\int_{[a,b]} |g|.$$

□

Corollaire 17

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]} |f|.$$

Démonstration Il suffit d'appliquer l'inégalité de la moyenne avec $g = 1$. □

Théorème 18 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$, on a :

$$\left(\int_{[a,b]} f\,g\right)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2.$$

Démonstration Posons :

$$P(\lambda) = \int_{[a,b]} (f+\lambda g)^2 = \lambda^2\int_{[a,b]} g^2 + 2\lambda\int_{[a,b]} f\,g + \int_{[a,b]} f^2.$$

P est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geqslant 0.$$

- Si $\displaystyle\int_{[a,b]} g^2 = 0$, alors P est une fonction affine positive sur $\mathbb{R}$, et par suite une fonction constante On en déduit $\displaystyle\int_{[a,b]} f\,g = 0$ et donc

$$\left(\int_{[a,b]} f\,g\right)^2 = 0 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2.$$

- Sinon, P est un trinôme du second degré qui reste positif sur $\mathbb{R}$. Son discriminant :

$$\Delta = 4\left(\left(\int_{[a,b]} f\,g\right)^2 - \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2\right)$$

est donc négatif, ce qui donne l'inégalité annoncée. □

Remarque L inégalité de Cauchy–Schwarz s'écrit aussi :

$$\left|\int_{[a,b]} f\,g\right| \leqslant \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{1/2} \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^{1/2}$$

3.3 Cas des fonctions continues

Théorème 19

Une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ est nulle si, et seulement si, son intégrale sur $[a,b]$ est nulle.

émonstratio Si f est nulle, alors son intégrale est evidemment nulle.
Pour la réciproque, supposons f continue, positive et non nulle.
On peut alors trouver un élement $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$

- Si $a < c < b$: posons $\varepsilon = f(c)/2$. La continuité de f en c permet de trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ |x-c| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant \varepsilon.$$

En posant $\alpha = \max\left(\dfrac{a+c}{2}, c-\eta\right)$ et $\beta = \min\left(\dfrac{b+c}{2}, c+\eta\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f &= \int_{[a,\alpha]} f + \int_{[\alpha,\beta]} f + \int_{[\beta,b]} f \\ &\geqslant \int_{[\alpha,\beta]} f && \text{puisque } f \text{ est positive} \\ &\geqslant (\beta-\alpha)\,\varepsilon > 0 && \text{puisque } \forall x \in [\alpha,\beta]\ ,\ f(x) \geqslant \varepsilon\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'intégrale de f est non nulle.

- Si $c = a$ ou $c = b$: la fonction f est continue et $f(c) > 0$, ce qui prouve que f est strictement positive au voisinage de c Il existe donc un réel $d \in \,]a,b[$ tel que $f(d) > 0$, et l'on est ramené au cas précédent. □

Attention S'il manque l'une des deux hypothèses (continuité ou positivité), le résultat peut tomber en défaut.

- La fonction cos est continue et non nulle sur $[0,\pi]$ alors que son intégrale est nulle.
- La fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est positive et n'est pas la fonction nulle, mais son intégrale est nulle.

- Néanmoins, si f est positive et continue par morceaux la démonstration précédente montre que si son intégrale est nulle, alors f ne peut pas être strictement positive en un point où elle est continue.
  Comme une fonction continue par morceaux n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité, on en déduit qu'une fonction continue par morceaux positive qui a une intégrale nulle est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points.

  Remarque Le resultat du théorème précédent sera démontré plus simplement dans le chapitre suivant en utilisant que si la fonction f est continue, alors elle est la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_{[a,x]} f$.

Corollaire 20

Si f et g sont deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$, on a :

$$\left(\int_{[a,b]} f\,g\right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2.$$

si, et seulement si, f et g sont proportionnelles.

Démonstration

- Si f et g sont proportionnelles, il existe un réel λ tel que $f = \lambda\,g$ ou $g = \lambda\,f$. Supposons par exemple $f = \lambda\,g$.
  Alors :
  $$\left(\int_{[a,b]} f\,g\right)^2 = \lambda^2 \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2.$$
- Supposons que l'égalité ait lieu et reprenons le polynôme P de la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
  $$P(\lambda) = \int_{[a,b]} (f + \lambda\,g)^2 = \lambda^2 \int_{[a,b]} g^2 + 2\lambda \int_{[a,b]} f\,g + \int_{[a,b]} f^2.$$
  - Si $\int_{[a,b]} g^2 = 0$, alors g^2 est continue positive et a une intégrale nulle. La fonction g est donc nulle et f et g sont proportionnelles.
  - Sinon, le polynôme P a un discriminant nul, et on peut donc trouver un réel λ_0 tel que $P(\lambda_0) = 0$
    La fonction $(f + \lambda_0\,g)^2$ est alors continue, positive et d'intégrale nulle Par suite $f + \lambda_0\,g = 0$, ce qui prouve que f et g sont proportionnelles. □

3.4 Invariance par translation

Proposition 21

Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et α un réel. La fonction f_α définie sur $[a+\alpha, b+\alpha]$ par $f_\alpha(x) = f(x-\alpha)$ est continue par morceaux sur $[a+\alpha, b+\alpha]$ et :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha .$$

émonstration

- Si f est en escalier sur $[a,b]$: soit $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à f, alors la famille $(y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ définie par $y_i = x_i + \alpha$, est une subdivision de $[a+\alpha, b+\alpha]$. Si f vaut c_i sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, alors f_α est constante et vaut aussi c_i sur l'intervalle $]x_{i-1}+\alpha, x_i+\alpha[$. Donc f_α est en escalier sur $[a+\alpha, b+\alpha]$
De plus :
$$\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1})\, c_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i = \int_{[a,b]} f.$$
- Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$: d'après le résultat précédent, on a pour $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$, $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a+\alpha,b+\alpha]} \varphi_\alpha$, où φ_α est définie sur $[a+\alpha, b+\alpha]$ par :
$$\varphi_\alpha(x) = \varphi(x-\alpha).$$
Or, $\mathcal{E}^-(f_\alpha) = \{\varphi_\alpha \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\}$.
Donc :
$$\begin{aligned}\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha &= \sup\left\{\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} \psi \;\middle|\; \psi \in \mathcal{E}^-(f_\alpha)\right\}\\ &= \sup\left\{\int_{[a+\alpha,b+\alpha]} \varphi_\alpha \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}\\ &= \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\} = \int_{[a,b]} f.\end{aligned}$$
□

Exemple Soient $T > 0$ et f une fonction T-périodique et continue par morceaux sur une période et donc sur tout segment de $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \int_{[a,a+T]} f = \int_{[0,T]} f.$$

En effet, avec les notations de la proposition 21 de la page ci-contre :

- si $a = nT$, avec $n \in \mathbb{Z}$, la périodicité de f nous donne $f = f_a$ et donc
$$\int_{[a,a+T]} f = \int_{[a,a+T]} f_a = \int_{[0,T]} f.$$
- sinon, soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a < nT < a + T$. On a
$$\begin{aligned}\int_{[a,a+T]} f &= \int_{[a,nT]} f + \int_{[nT,a+T]} f \\ &= \int_{[a+T,nT+T]} f_T + \int_{[nT,a+T]} f \\ &= \int_{[a+T,nT+T]} f + \int_{[nT,a+T]} f \\ &= \int_{[nT,nT+T]} f \\ &= \int_{[0,T]} f.\end{aligned}$$

4. Sommes de Riemann

Définition 7

Soient $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a,b]$ et $v = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de points de $[a,b]$ telle que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i \in [x_{i-1}, x_i].$$
Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, on appelle *somme de Riemann* de f associée à la subdivision u et à la suite v, la quantité :
$$\sigma(f,u,v) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(y_i).$$

Remarque La somme de Riemann $\sigma(f,u,v)$ est égale à l'intégrale d'une fonction en escalier qui vaut $f(y_i)$ sur l'intervalle $]\,x_{i-1}, x_i\,[$.

Exemples Les cas les plus utilisés sont ceux où la subdivision $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est à pas constant, c'est-à-dire $x_i = a + i\,\dfrac{(b-a)}{n}$.

1. Si $\forall i \in [\![1.n]\!]$, $y_i = x_i$, on obtient :

$$\sigma(f,u,v) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i\,(b-a)}{n}\right) = R_n(f).$$

2. Si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = x_{i-1}$, on obtient :

$$\sigma(f,u,v) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+\frac{i\,(b-a)}{n}\right) = S_n(f).$$

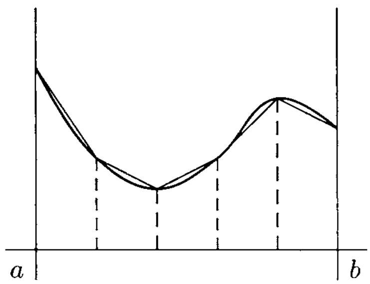
3. Si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$, on obtient :

$$\sigma(f,u.v) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(y_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{(2i-1)(b-a)}{2n}\right) = T_n(f).$$

4. On utilise également la somme :

$$U_n(f) = \frac{R_n(f)+S_n(f)}{2}$$

égale à l'intégrale de la fonction affine par morceaux sur $[a,b]$ qui prend les mêmes valeurs que f aux points de la subdivision u.



Cette somme s'écrit aussi :

$$U_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\right).$$

Proposition 22

Soit f une application k–lipschitzienne sur $[a.b]$. Si u est une subdivision de $[a,b]$ de module $\delta(u)$ et si $v = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille de points telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ y_i \in [x_{i-1}, x_i]\,,$$

alors on a :

$$\left|\int_{[a,b]} f - \sigma(f,u,v)\right| \leqslant k\,(b-a)\,\delta(u).$$

émonstration D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f - \sigma(f,u,v) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f - \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f(y_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} \big(f - f(y_i)\big).\end{aligned}$$

Or, pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$, on a :

$$\big|f(x) - f(y_i)\big| \leqslant k\,|x - y_i| \leqslant k|x_i - x_{i-1}| \leqslant k\,\delta(u).$$

Donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_{[a,b]} f - \sigma(f,u,v)\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{[x_{i-1},x_i]} \big(f - f(y_i)\big)\right|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} \big|f - f(y_i)\big|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\,k\,\delta(u) = k\,(b-a)\,\delta(u).\end{aligned}$$

□

Exemple Si l'on prend la fonction logarithme (qui est 1–lipschitzienne sur $[1,2]$ puisque sa dérivée y est bornée par 1), pour la subdivision à pas constant $u = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, on a :

$$\left|\int_{[1,2]} f - R_n(f)\right| \leqslant \delta(u) = \frac{1}{n}.$$

Pour avoir une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale, il suffit de prendre $n = 100$. Avec MAPLE :

```
> x_i:=a+i*(b-a)/n;
```

$$x_i := a + \frac{i(b-a)}{n}$$

```
> S:=Sum(ln(x_i),i=1..n)*(b-a)/n;
```

$$S := \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)\right)(b-a)}{n}$$

```
> a:=1: b:=2:
> n:=100:
> evalf(S);                    # valeur de la somme de Riemann
```

$$.3897559304$$

```
> evalf(Int(ln(t),t=1..2));  #valeur approchée de l'intégrale
```

$$.3862943611$$

```
> int(ln(t),t=1..2);  #valeur exacte
```

$$2\ln(2) - 1$$

```
> evalf(");
```

$$.386294361$$

Si le pas de la subdivision tend vers 0, les sommes de Riemann d'une fonction lipschitzienne sont donc aussi proches que l'on veut de son intégrale Ce résultat est valable aussi pour toute fonction f continue, bien que l'on n'ait plus alors de majoration de $\left|\int_{[a,b]} f - \sigma(f,u,v)\right|$:

Proposition 23

Soit f une application continue sur $[a,b]$,

Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et pour toute famille $v = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

on ait :

$$\delta(u) \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\int_{[a,b]} f - \sigma(f,u,v)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Démonst ation

PCSI Le résultat est admis en PCSI

MPSI D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{[a,b]} f - \sigma(f,u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f - \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f(y_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} (f - f(y_i)).$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après le théorème de Heine, la fonction f, qui est continue sur le segment $[a,b]$, est uniformément continue sur ce segment. On peut donc trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Si la subdivision u a un module inférieur à η, pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$, on a :

$$|x - y_i| \leqslant |x_i - x_{i-1}| \leqslant \delta(u) \leqslant \eta$$

et par suite $\left|f(x) - f(y_i)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_{[a,b]} f - \sigma(f,u,v)\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{[x_{i-1},x_i]} (f - f(y_i))\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} |f - f(y_i)| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□ MPSI

Exemple Soit f de classe C^1 sur $[a,b]$. La fonction f' est continue sur $[a,b]$, donc ses sommes de Riemann sont aussi proches que l'on veut de son intégrale quand le module de la subdivision tend vers 0.

Prenons une subdivision $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ quelconque. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, la formule des accroissements finis nous permet de trouver un élément $y_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tel que :

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f'(y_i).$$

Si l'on pose $v = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, on a alors :

$$\sigma(f',u,v) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f'(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = f(b) - f(a).$$

En faisant tendre le module de u vers 0, on en déduit

$$\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a),$$

résultat que l'on retrouvera au théorème 4 du chapitre suivant.

Corollaire 24

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, les suites $\big(R_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\big(S_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\big(T_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(U_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergent vers l'intégrale de f.

émonstration Les suites $\big(R_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\big(S_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(T_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des sommes de Riemann de f associees à une subdivision u à pas constant de module $\dfrac{b-a}{n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Comme on a $U_n(f) = \dfrac{R_n(f) + S_n(f)}{2}$, on en déduit que la suite $\big(U_{\cdot}(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers l'intégrale de f □

Remarque

- L'approximation d'une intégrale par l'une des sommes R_n, S_n ou T_n s appelle methode des rectangles.
- L'approximation par la somme U_n s'appelle méthode des trapèzes.
- On étudiera au chapitre 19 la qualité d'approximation de ces méthodes

5. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Dans cette section, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 8

On dit qu'une application définie sur I est *continue par morceaux* sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.

Remarque On peut donc intégrer une fonction continue par morceaux sur I sur tout segment inclus dans I et contenant au moins deux points.

Exemples

1. Une fonction continue sur I est continue par morceaux sur I.
2. La fonction $x \mapsto x - E(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \neq 0,\ f(x) = e^{1/x}$$

n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ puisque sa restriction à $[-1, 1]$ n'est pas continue par morceaux (voir l'exemple 3. de la page 418).
En revanche, ses restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont continues par morceaux puisqu'elles sont continues.

Notation Soient f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, ainsi que a et b deux éléments quelconques de I (on ne suppose plus à partir de maintenant $a < b$). On note :

- si $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f$
- si $a > b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{[b,a]} f$
- si $a = b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$

Attention

- L'implication :

$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

  n'est valable que lorsque $a \leqslant b$.

- On rappelle que $[a, b]$ désigne le segment d'extrémités a et b. On a alors si f est continue par morceaux sur I :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[b,a]} f$$

  en prenant la convention $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$ lorsque $a = b$.

- L'inégalité du théorème 15 de la page 426 devient :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$$

Proposition 25 (Relation de Chasles)

Si f est continue par morceaux sur un intervalle I, alors :

$$\forall (a, b, c) \in I^3, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

émonstration

- Le cas où $a < c < b$ est avec la nouvelle notation, la traduction de la proposition 13 de la page 424.
- Si $a < b < c$, la proposition 13 de la page 424 permet d'ecrire :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

  et donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

- Les cas :

$$b < a < c \qquad b < c < a \qquad c < a < b \qquad c < b < a$$

  se traitent de la même façon.
- Enfin, si a, b et c ne sont pas deux à deux distincts, le résultat est immédiat. □

Proposition 26

Si f est continue par morceaux et bornée sur I, on a :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant |b-a| \sup_I |f|.$$

Démonst atio D'après le corollaire 17 de la page 427, on a pour $a < b$:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |f| \leqslant |b-a| \sup_I |f|.$$

En appliquant le résultat au couple (b,a) on en déduit l'inégalité dans le cas où $a > b$
Enfin, si $a = b$, c'est évident. □

EXERCICES

1. Soient $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geqslant m$.

Calculer :

$$\int_m^n E(x)\,dx$$

($E(x)$ désignant la partie entière de x).

2. Calculer $\int_{-1}^{2} x|x|\,dx$ et $\int_{-1}^{1} x|x|\,dx$.

3. Soit f continue sur $[a,b]$ avec $a < b$.

a) Montrer qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

b) Montrer que l'on peut trouver c vérifiant la condition ci-dessus dans $]a,b[$

4. Soit f continue sur $[a,b]$.

Montrer que si :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

alors f garde un signe constant sur $[a,b]$.

5. Calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ à l'aide d'une somme de Riemann

6. Étudier les suites :

a) $u_n = \dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\dfrac{n\pi}{n}\right]$

b) $u_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$

c) $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$

d) $u_n = \sqrt[n]{\left(1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}$

7. Soit f définie sur $[a, b]$, continue et positive sur ce segment.

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b f(x)^n\,dx\right]^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a.b]} f(x).$$

8. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note :

$$u_n = \int_a^b \varphi(x)\sin nx\,dx.$$

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) En déduire que le résultat est conservé si la fonction φ est continue par morceaux sur $[a. b]$.

9. Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$.

Étudier :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)|\sin nt|\,dt.$$

10. Soient f et g deux applications définies sur $[a, b]$, f étant continue et g continue par morceaux positive.

a) Montrer qu'il existe c dans $[a. b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

b) On suppose de plus g continue et strictement positive.

Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

11 Soit f une application continue sur $[0. 1]$ telle que $f(1) = 0$.

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0.$$

12. On considère l ensemble E des fonctions continues et strictement positives sur $[a, b]$.

$$\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right)$$

existe-t-il ?

Si oui, est-il atteint ?

13. Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b]$.

Montrer que :

$$\left(\int_a^b \Big(f(x) + g(x) \Big)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g(x)^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On suppose de plus f et g continues, trouver une condition nécessaire et suffisante pour avoir une égalité.

14. Étudier la limite de :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}.$$

15. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Montrer que :

$$\left(\forall (\alpha, \beta) \in [a, b]^2, \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = 0 \right) \Longrightarrow \Big(\forall x \in [a, b], f(x) = 0 \Big).$$

16 Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et f de $[0, 1]$ continue sur $[0, 1]$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$.

On pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n + kp} \right).$$

Étudier la limite de la suite (u_n).

Chapitre 15

Intégration et dérivation

1. Primitives et intégrale d'une fonction continue

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

1.1 Definitions

Définition 1

Si f est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, on appelle *primitive* de f sur I toute fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I et dont la dérivée est égale à f.

Proposition 1

Si F est une primitive d une fonction f continue sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions $F + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

emonstration Une fonction G est une primitive de f si, et seulement si, la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur l'intervalle I, c'est-à-dire si, et seulement si, elle est constante sur I. □

Exemple Les primitives de la fonction polynomiale :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

sont les fonctions $F + \lambda$ avec :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\, x^{k+1} \qquad \text{et} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.2 Théorème fondamental

Proposition 2

Soient f une fonction continue par morceaux sur I et a un point de I. La fonction F_a définie par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est continue sur I.

émonstra io Soit en effet $x \in I$; on peut trouver $h > 0$ tel que $I \cap [x-h, x+h]$ soit un segment. La fonction f étant continue par morceaux elle est bornee sur ce segment par un certain réel M Pour $y \in I$ tel que $|x-y| \leqslant h$, on a alors :

$$\left|F_a(y) - F_a(x)\right| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leqslant M\,|y-x|$$

ce qui montre la continuité de F en x □

Théorème 3

Soient f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et a un point de I. La fonction F_a définie par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

émonstration

- Comme f est continue sur I, la fonction F_a est bien définie sur I
- Soit $x_0 \in I$. Montrons que $F_a'(x_0) = f(x_0)$ en établissant :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 : \forall x \in I,\ 0 < |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

  - Pour $h \neq 0$ et $x_0 + h \in I$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) - f(x_0)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - h\,f(x_0)\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt\end{aligned}$$

  et donc :

$$\left|\frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_{[x_0, x_0+h]} |f - f(x_0)|$$

- Soit $\varepsilon > 0$ Comme f est continue en x_0 on peut trouver $\eta > 0$ tel que :
$$\forall t \in I\,,\ |t - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$
Soit h tel que $0 < |h| \leqslant \eta$ et $x_0 + h \in I$. Tout élément t de $[x_0, x_0 + h]$ vérifie alors $|t - x_0| \leqslant \eta$ et l'on a :
$$\begin{aligned}\left|\frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{[x_0,x_0+h]} \varepsilon \\ &\leqslant \frac{1}{|h|}\,\varepsilon\,|h| = \varepsilon\end{aligned}$$
ce qui termine la démonstration

► Il est évident que F_a est nulle en a, et comme deux primitives de f diffèrent d une constante il ne peut y avoir qu'une primitive de f qui s'annule en a □

Remarques

- Soient f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b]$ et $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision de I adaptee à f. Notons f_i la fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ dont la restriction à $]x_{i-1}, x_i[$ est égale celle de f.
La relation de Chasles montre que pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$, on a :
$$F_a(x) = F_a(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x} f_i(t)\,dt.$$
Comme la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x} f_i(t)\,dt$ est dérivable sur $[x_{i-1}, x_i]$, de dérivee f_i, on en déduit que F_a est dérivable en tout point de $x \in\ ]x_{i-1}, x_i[$ avec $F_a'(x) = f_i(x) = f(x)$.
De plus, pour $i \in [\![1. n-1]\!]$, la fonction F_a est dérivable à droite et à gauche en x_i avec :
$$(F_a)'_g(x_i) = f_i(x_i) = \lim_{x_i^-} f \qquad \text{et} \qquad (F_a)'_d(x_i) = f_{i+1}(x_i) = \lim_{x_i^+} f.$$
Si ces deux limites sont différentes, la fonction F_a n'est pas dérivable en x_i, et n'est donc pas une primitive de f.
- D'ailleurs, si une fonction continue par morceaux admet une primitive, alors elle est continue. En effet, une dérivée qui admet des limites à droite et à gauche en tout point est nécessairement continue puisque si F est dérivable et si la restriction de F' à $I \cap\ ]-\infty, a[$ ou à $I \cap\ ]a, +\infty[$ admet une limite ℓ en a, on sait d'après la formule des accroissements finis que $F'(a) = \ell$.

Exemples

1. Avec les hypothèses du théorème précédent, la fonction :

$$x \mapsto \int_x^a f(t)\,dt$$

est derivable sur I et sa dérivee est $-f$ puisque l'on a :

$$\int_x^a f(t)\,dt = -\int_a^x f(t)\,dt.$$

2. Montrons, à l'aide du théorème fondamental qu'une fonction continue positive qui a une intégrale nulle sur un segment $[a,b]$, est nulle sur $[a,b]$ (résultat déjà démontré page 428).

Si f est une fonction continue et positive sur le segment $[a,b]$, la fonction F_a du théorème précédent est croissante, puisque :

$$x \leqslant y \Longrightarrow F_a(y) - F_a(x) = \int_x^y f(t)\,dt \geqslant 0.$$

Si l'intégrale de f est nulle sur $[a,b]$, alors F_a s'annule en a et en b. Elle est donc constante et par suite sa dérivée f est nulle sur $[a,b]$.

Corollaire 4

Soient f une fonction continue sur I, ainsi que α et β deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I La fonction définie sur J par :

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

est derivable sur J et sa dérivée est :

$$\varphi'(x) = \beta'(x) f\big(\beta(x)\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x)\big)$$

émonstratio Si a est un point de I, on a d'après la relation de Chasles :

$$\varphi(x) = F_a\big(\beta(x)\big) - F_a\big(\alpha(x)\big)$$

ce qui donne le résultat en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées □

Exemples

1. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors :

$$g(x) = \int_x^{x+T} f(u)\,du$$

est indépendant de x, car :

$$g'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

Ce résultat est une redite d'une propriété déjà vue au chapitre précédent dans le cas plus général de fonctions continues par morceaux (*cf.* page 431).

2. La fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$u(x)=\int_x^{2x}\frac{\exp t}{t}\,dt$$
est dérivable sur $]0,+\infty[$ et a pour dérivée :
$$u'(x)=2\,\frac{\exp 2x}{2x}-\frac{\exp x}{x}=\frac{\exp 2x-\exp x}{x}.$$

Le résultat suivant, qui est une conséquence importante du théorème fondamental, permet de ramener le calcul d'intégrales à un calcul de primitives :

Théorème 5

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ ainsi que a et b deux points de I. Si F est une primitive de f sur I on a :
$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

émonstration Le résultat, qui est évident si $F=F_a$, se généralise à toutes les primitives de f, puisque celles-ci diffèrent de F_a d'une constante. □

Exemples

1. $\displaystyle\int_a^b e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}(e^{2b}-e^{2a}).$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos\pi+\cos 0=2.$
3. Soit $f(x)=\alpha x+\beta$. Une primitive de f est $x\mapsto\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x$, donc :
$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{\alpha}{2}(b^2-a^2)+\beta(b-a)=(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$
On retrouve ainsi l'aire d'un trapèze.
La valeur moyenne d'une fonction affine sur un segment $[a,b]$ est donc la moyenne des valeurs de cette fonction en a et b.

Corollaire 6

Si $f\in\mathcal{C}^1(I)$, alors pour $(a,x)\in I^2$, on a :
$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt.$$

Notations

- Dans un calcul d'intégrale, la quantité $\left[F(x)\right]_a^b$ (ou $\left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b}$ pour préciser la variable) représente la différence de la fonction F entre a et b. On écrit ainsi si F est une primitive de f :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

- Lorsque f est une fonction continue, la notation $\displaystyle\int f(x)\,dx$ représente une primitive quelconque de la fonction f. Avec les notations précédentes on a donc :

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C^{te}.$$

2. Méthodes de calcul de primitives

2.1 Intégration par parties

Proposition 7

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur le segment $[a,b]$, on a :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u\ (t)\,v(t)\,dt$$

emonstratio Comme u et v sont de classe C^1 sur $[a,b]$, il en est de même de la fonction $u\,v$, et le corollaire 6 de la page précédente permet d'écrire :

$$\begin{aligned} u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) &= \int_a^b (u\,v)'(t)\,dt \\ &= \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt + \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt. \end{aligned}$$

□

Remarque Dans un calcul de primitive, la formule d'intégration par parties s'écrit :

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx.$$

En fait ces formules ne sont rien d'autre qu'une lecture à l'envers de la formule de dérivation d'un produit.

Exemples d'utilisation

La formule d'intégration par parties est en général utilisée :

- pour éliminer une fonction transcendante dont la dérivée est plus simple comme par exemple les fonctions ln, arcsin, arctan...
- pour calculer une intégrale par récurrence

Exemples

1. Sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C^{te}.$$

2. Sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C^{te}.\end{aligned}$$

3. Si pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$, on peut écrire, pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, \sin x \, dx \\ &= \left[-\sin^{n-1} x \, \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, \cos^2 x \, dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \,(1-\sin^2 x)\, dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n)\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Selon la parité de n, on obtient ainsi deux formules (dites de *Wallis*) :

$$\begin{aligned}I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p}\,\frac{2p-3}{2p-2}\,\frac{2p-5}{2p-4}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\, I_0 \\ &= \frac{2p(2p-1)}{(2p)^2}\,\frac{(2p-2)(2p-3)}{(2p-2)^2}\cdots\frac{4\times 3}{4^2}\,\frac{2\times 1}{2^2}\,\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

et de même :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\,\frac{2p-2}{2p-1}\,\frac{2p-4}{2p-3}\cdots\frac{4}{5}\,\frac{2}{3}\,I_1$$
$$= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

4. Pour calculer $\displaystyle\int x^2\, e^x\, dx$, on peut intégrer l'exponentielle et dériver le polynôme :

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2\int x\, e^x\, dx$$

puis recommencer :

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx$$
$$= x\, e^x - e^x + C^{te}$$

ce qui donne :

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C^{te}.$$

5. Plus généralement, on peut montrer par récurrence que si P est un polynôme de degré n, alors :

$$\int P(x)\, e^x\, dx = Q(x)\, e^x + C^{te}$$

où Q est un polynôme de degré n.

2.2 Changement de variable

Formule de changement de variable

Proposition 8

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, ainsi que f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe C^1 de J dans I. Si α et β sont deux éléments de J, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\, \varphi'(u)\, du.$$

émonstratio Comme f est continue sur I, elle possède une primitive F et l'on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big).$$

La fonction $F \circ \varphi$ composée de deux fonctions de classe C^1 est une fonction de classe C^1 Donc le corollaire 6 de la page 447 permet d'écrire ·

$$\begin{aligned} F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) &= \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(u)\, du \\ &= \int_\alpha^\beta F'\big(\varphi(u)\big)\, \varphi'(u)\, du \\ &= \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\, \varphi'(u)\, du \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Remarques

- En fait la formule de changement de variable n'est rien d'autre que la formule de dérivation d'une fonction composée lue à l'envers.
- Quand on utilise la formule précédente (avec les mêmes notations), on dit que l'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$. On remplace alors formellement t par $\varphi(u)$ et dt par la différentielle $\varphi'(u)\, du$, ce qui rend le calcul assez naturel.
- Attention de ne pas oublier de changer les bornes.

Diverses utilisations du changement de variable

On utilise la formule de changement de variable **de la droite vers la gauche** quand on reconnaît sous une intégrale une forme $(f \circ \varphi)\, \varphi'$:

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos u\, du = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}\cdot$
2. $\displaystyle\int_{-1}^2 \sqrt{4-u^2}\, u\, du = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{4-t}\, dt = \left[-\frac{1}{3}(4-t)^{3/2}\right]_1^4 = \sqrt{3}$
3. Pour calculer sur $\mathbb{R}_+^*$ la primitive $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ on écrit :

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_1^x \frac{\ln u}{u}\, du + C^{te},$$

intégrale dans laquelle on peut faire le changement de variable $t = \ln u$:

$$\int_1^x \frac{\ln u}{u}\, du = \int_0^{\ln(x)} t\, dt = \frac{1}{2}\, (\ln x)^2.$$

Dans un tel cas on écrit plus simplement :

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x}\,dx &= \int t\,dt \qquad \text{avec} \qquad t = \ln x\\ &= \frac{1}{2}\,t^2 + C^{te}\\ &= \frac{1}{2}\,(\ln x)^2 + C^{te}.\end{aligned}$$

On utilise la formule de changement de variable **de la gauche vers la droite** quand on cherche à rendre une intégrale plus sympathique (le plus souvent, il s'agit de faire disparaître un radical) :

Exemples

1. Pour simplifier $\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,dt$, on peut poser $t = \sin u$ en faisant varier u de $-\pi/2$ à $\pi/6$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} |\cos u|\,\cos u\,du\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \cos^2 u\,du\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/6} (1+\cos 2u)\,du\\ &= \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi.\end{aligned}$$

> ***Remarque*** On aurait pu aussi choisir de faire varier u de $-\pi/2$ à $5\pi/6$, mais il aurait alors fallu couper l intervalle $[-\pi/2, 5\pi/6]$, en utilisant la relation de Chasles, pour tenir compte de la valeur absolue de $\cos u$.

2. Pour calculer une primitive de $\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$, on écrit :

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt + C^{te}.$$

Pour pouvoir dans cette dernière intégrale faire le changement de variable simplificateur $t = \sin u$ il faut ici pouvoir calculer la nouvelle borne en fonction de x ce qui exige un changement de variable bijectif. On se limite donc à $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, ce qui donne $u = \arcsin t$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt &= \int_0^{\arcsin x} \cos u\,|\cos u|\,du\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin x} (1+\cos 2u)\,du\\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)\\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin(\arcsin x)\,\cos(\arcsin x)\\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

Dans la pratique pour calculer $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, on dit que l'on effectue le changement de variable $x = \sin u$ (ou $u = \arcsin x$) et on écrit :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \cos^2 u\,du\\ &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C^{te}\\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C^{te}.\end{aligned}$$

Remarque Bien qu'étant la somme de deux fonctions non dérivables en 1 et -1, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $[-1,1]$ comme primitive sur cet intervalle de la fonction continue $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

Changement de variable affine

L'utilisation de changements de variable affines permet souvent, sans calcul d'intégrale, de prouver des propriétés graphiquement évidentes.

1. Si f est périodique de période T, le changement de variable $v = u + T$ permet d'obtenir la relation :

$$\int_a^b f(u)\,du = \int_{a+T}^{b+T} f(v-T)\,dv = \int_{a+T}^{b+T} f(v)\,dv.$$

2. Si f est paire, on peut écrire :

$$\int_{-a}^a f(u)\,du = \int_{-a}^0 f(u)\,du + \int_0^a f(u)\,du$$

et le changement de variable $v = -u$ sur la première intégrale donne :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(u)\,du &= -\int_{a}^{0} f(v)\,dv + \int_{0}^{a} f(u)\,du \\ &= \int_{0}^{a} f(v)\,dv + \int_{0}^{a} f(u)\,du \\ &= 2\int_{0}^{a} f(u)\,du.\end{aligned}$$

3. De même si f est impaire :

$$\int_{-a}^{a} f(u)\,du = -\int_{0}^{a} f(v)\,dv + \int_{0}^{a} f(u)\,du = 0.$$

4. Le changement de variable $u = a + (b-a)\,v$ permet de transformer une intégrale sur $[a,b]$ en une intégrale sur $[0,1]$:

$$\int_{a}^{b} f(u)\,du = (b-a)\int_{0}^{1} f\big(a+(b-a)\,v\big)\,dv.$$

Voilà pourquoi certaines propriétés concernant les intégrales sont souvent établies sur $[0,1]$, ce qui fournit des notations plus simples, avant d'être généralisées, grâce au changement de variable précédent, à des intégrales sur $[a,b]$.

Grâce à la relation de Chasles, tous ces résultats s'étendent sans peine au cas des fonctions continues par morceaux.

3. Formules de Taylor

Dans cette section, a et b désignent deux éléments d'un intervalle I et n est un entier naturel.

3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 9

Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur I, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_{a}^{b} \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

émonstratio On prouve le résultat par récurrence sur n

- Pour $n = 0$: si f est de classe C^1 sur I, la fonction f' est continue et :

$$f(b) = f(a) + \int_{a}^{b} f'(t)\,dt.$$

► Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, avec $n \geqslant 1$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Elle est alors de classe $\mathcal{C}^n$, et l'hypothèse de récurrence nous donne :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt. \qquad (*)$$

Intégrons par parties le terme complémentaire :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt &= \left[-\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

puisque, n étant supérieur ou égal à 1, on a $\dfrac{(b-b)^n}{n!} = 0$.

La relation $(*)$ devient :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

ce qui démontre le résultat au rang n □

Remarque Le changement de variable $t = a + (b-a)u$ permet d'exprimer le reste à l'aide d'une intégrale entre 0 et 1 :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}\big(a + (b-a)u\big)\,du$$

Exemples

1. En appliquant à la fonction cosinus la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 on obtient :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin t\,dt.$$

Comme la fonction sinus est positive sur $[0, \pi]$ et négative sur $[-\pi, 0]$, on a :

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin t\,dt \geqslant 0$$

ce qui donne :

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ \cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}\cdot$$

2. Soit $x \geqslant 0$, en appliquant à la fonction exponentielle la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n on obtient :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t)\,dt$$

Comme $x \geqslant 0$, on en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \leqslant e^x.$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

est alors croissante et majorée par e^x, donc convergente.

3.2 Inégalité de Taylor–Lagrange

Théorème 10

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Si M majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[a, b]$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \, \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

émonstration En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| &= \left| (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\big(a + (b-a)t\big) \, dt \right| \\
&\leqslant |b-a|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \left| f^{(n+1)}\big(a + (b-a)t\big) \right| dt \\
&\leqslant |b-a|^{n+1} \int_0^1 M \, \frac{(1-t)^n}{n!} \, dt \\
&= M \, |b-a|^{n+1} \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = M \, \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarques

- Dans le théorème précedent, la fonction $f^{(n+1)}$ étant continue, elle est bornée sur le segment $[a, b]$; c'est pourquoi on est sûr de l'existence d'un tel réel M
- On peut prendre en particulier :

$$M = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.$$

Exemples

1. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{x^4}{24} \quad \text{puisque :} \quad \forall u \in \mathbb{R}, \ \left|\sin^{(4)} u\right| = \left|\sin u\right| \leqslant 1.$$

2. Pour tout réel x, établissons :

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

La fonction exponentielle étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on lui applique l'inégalite de Taylor–Lagrange à l'ordre n, ce qui donne pour tout réel x :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0)\right| \leqslant M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

le réel M, indépendant de n, désignant la borne supérieure de $\left|\exp^{(n+1)}\right| = \exp$ sur le segment $[0, x]$.

La convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'exemple 2. de la page 455 appliqué à $|x|$ montre que :

$$\lim_{n \to +\infty} M\left(S_{n+1} - S_n\right) = 0$$

c'est–à–dire :

$$\lim_{n \to +\infty} M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

et on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = 0.$$

3.3 Formule de Taylor–Young

Théorème 11

Si f est une fonction de classe C^n sur I il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall x \in I, \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque Le résultat est immédiat si f est de classe C^{n+1}, puisque $|f^{n+1}|$ est bornée au voisinage de a par un certain réel M et que

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant M\,|x-a|^{n+1}.$$

émonstration

- Si $n = 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = f - f(a)$ qui tend vers 0 en a d'après la continuité de f
- Supposons $n \geqslant 1$ et définissons la fonction ε sur I par $\varepsilon(a) = 0$ et :

$$\forall x \neq a\,,\ \varepsilon(x) = \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n}.$$

On a ainsi la relation :

$$\forall x \in I\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

et il ne reste plus qu'à montrer $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Quitte à considérer la fonction définie par $g(x) = f(x) - f^{(n)}(a)\dfrac{(x-a)^n}{n!}$, qui a les mêmes dérivées en a que f sauf la $n^{ème}$ qui est nulle, on peut supposer $f^{(n)}(a) = 0$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$ (on a supposé $n \geqslant 1$) donne alors, pour $x \neq a$:

$$\varepsilon(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}\big(a + t(x-a)\big)\, dt,$$

formule valable aussi lorsque $x = a$.

Soit $\alpha > 0$ La fonction $f^{(n)}$ étant continue en a, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I\,,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \alpha.$$

Si $x \in I$ est tel que $0 < |x-a| \leqslant \eta$, alors :

$$\forall t \in [0,1]\,,\ \left|f^{(n)}\big(a + t(x-a)\big)\right| \leqslant \alpha,$$

et donc :

$$\begin{aligned} |\varepsilon(x)| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}\big(a + t(x-a)\big)\right| dt \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, \alpha\, dt \leqslant \frac{\alpha}{n!} \leqslant \alpha \end{aligned}$$

ce qui prouve que ε tend vers 0 en a. □

Exemples

1. Les fonctions sinus et cosinus étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut leur appliquer la formule de Taylor–Young à tout ordre ; on obtient ainsi :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon_1(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_2(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Ces égalités permettent par exemple d'étudier la limite en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{x^5}.$$

En effet on a :

$$\frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{x^5} = -\frac{1}{60} + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$$

et donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{x^5} = -\frac{1}{60}.$$

2. Soit f une fonction de classe C^2 sur I et $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. En appliquant le formule de Taylor–Young à l'ordre 2 à la fonction f, on obtient :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + (x-a)^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

ce qui donne :

$$f(x) - f(a) = (x-a)^2 \left(\frac{f''(a)}{2} + \varepsilon(x)\right).$$

Comme $\lim\limits_{x\to a} \frac{f''(a)}{2} + \varepsilon(x) = \frac{f''(a)}{2} > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{f''(a)}{2} + \varepsilon(x)$ est positive au voisinage de a, ce qui implique que la fonction $x \mapsto f(x) - f(a)$ est positive au voisinage de a. Par suite, la fonction f possède un minimum local en a.

Remarques

- On peut aussi montrer ce résultat en remarquant que la fonction continue f'' étant positive en a, est positive au voisinage de a, ce qui implique que f est convexe au voisinage de a. Sa courbe représentative est donc au dessus de sa tangente (horizontale) en a.
- On a même un minimum strict, puisque l'égalité :

$$f(x) - f(a) = (x-a)^2 \left(\frac{f''(a)}{2} + \varepsilon(x)\right)$$

prouve que $f_{|I\setminus\{a\}}$ est strictement supérieure à $f(a)$ au voisinage de a.

EXERCICES

1. Trouver les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int (2x^2 + 3x - 5)\, dx$

b) $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x+1}\, dx.$

2. Calculer la dérivée de la fonction :

$$F : t \mapsto \int_{-\tan t}^{\operatorname{sh} t} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

3. Calculer :

a) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\, dx$

b) $\displaystyle\int x^3 e^{2x}\, dx$

c) $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx.$

4. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a,b] \ , \ f(a+b-x) = f(x).$$

Montrer que :

$$\int_a^b x f(x)\, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx.$$

5. Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (on posera $x = 2\sin^2 u$)

b) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$ (on posera $x^2 = \cos u$)

c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ (on posera $x = \cos u$).

6. Calculer :

$$I_n = \int \ln^n x \, dx.$$

7. Determiner les primitives sur $\mathbb{R}$ de :

$$t \mapsto \frac{1}{2 + \cos t}.$$

Puis calculer :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}.$$

On posera $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

8. Soit x un réel strictement positif.

Donner une majoration de l'erreur commise en prenant $x - \dfrac{x^2}{2}$ comme valeur approchée de $\ln(1+x)$.
Donner une valeur approchée de $\ln(1.003)$ à 10^{-8} près.

9. Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.
Trouver la limite lorsque h tend vers 0 de :

$$\frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}.$$

10. Soit α et β deux réels.
On considère l'ensemble E des fonctions de classe C^2 sur $[a, b]$ qui vérifient :

$$f(a) = \alpha \quad \text{et} \quad f(b) = \beta.$$

Montrer que $\inf\limits_{f \in E} \displaystyle\int_a^b f'^2(t)\, dt$ existe et est atteint par une fonction affine.

11. Soit f une fonction dérivable strictement croissante bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.
On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt - x f(x).$$

La fonction F est-elle dérivable ? En déduire une égalité.
Donner une interprétation géométrique du résultat.

12. Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

13. Montrer que :

$$\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t\ln t}\right) dt$$

tend vers 0 lorsque x tend vers 1.
En déduire la limite lorsque x tend vers 1 de :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

14. Pour $x > 0$, on définit :

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt.$$

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

15. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.
On définit F sur $[0,1]$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt.$$

Montrer que F est de classe C^2.
Calculer F'' et en déduire que :

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\, dt\right) du.$$

16. Trouver l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x) - \int_0^x (x-t) f(t)\, dt = x^2.$$

17. Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt.$$

18. Soient g une fonction continue sur $I = [a, b]$ et f une fonction C^1 sur I positive et décroissante sur I.
Montrer qu'il existe c dans I tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt.$$

19 Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$, T-périodique telle que :

$$\int_0^T f(t)\,dt = 0.$$

Montrer que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(\lambda x)\,dx = 0.$$

Que devient le résultat si l'on ne suppose plus $\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = 0$?

20. Soit f positive et continue sur $\mathbb{R}_+$.
On suppose qu'il existe un nombre réel k positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ f(x) \leqslant k\int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que f est nulle.

On pourra utiliser la fonction $F(x) = e^{-kx}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

21. Soient $c \in \mathbb{R}_+$, u et v deux applications continues positives de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \ u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)v(t)\,dt.$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \ u(x) \leqslant c\,\exp\left(\int_0^x v(t)\,dt\right).$$

22 Soit f une fonction positive ou nulle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$
On suppose que f'' est bornée et l'on note :

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f''(x)\right|.$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \left|f'(x)\right| \leqslant \sqrt{2Mf(x)}.$$

23 Allure d une courbe au voisinage d'un point.
Soit f une fonction de classe C^{∞} définie au voisinage d'un point x_0 en lequel :

$$f''(x_0) = \cdot \quad \cdot = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

et :

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

En écrivant une formule de Taylor, donner l allure de la courbe au voisinage du point x_0 en fonction de la parité de n.

24. Soient f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et x un point de $\mathbb{R}$ tel que $f''(x) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout h dans $[-\eta, +\eta] \setminus \{0\}$, il existe un unique nombre $\theta \in]0, 1[$ avec

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

La fonction définie sur $[-\eta, +\eta] \setminus \{0\}$ qui à h associe cet unique θ est notée θ_x.

b) Montrer que :

$$\lim_{h \to 0} \theta_x(h) = \frac{1}{2} \cdot$$

25. Égalité de Taylor-Lagrange.
Soit f une fonction de classe C^n $(n \geqslant 1)$ sur $[a, b]$ $(a \neq b)$ et telle que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a, b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

On appliquera le théorème de Rolle à la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \lambda$$

après avoir ajusté λ de telle sorte que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

26 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) + f'(x)\big) = 0.$$

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Chapitre 16

Étude locale : relations de comparaison

Comme les relations de comparaisons permettent d'étudier le comportement d'une fonction au voisinage d un point ou le comportement asymptotique d'une suite (lorsque son indice tend vers l'infini), nous retrouvons dans ce chapitre des hypothèses et des notations semblables à celles utilisées dans le chapitre concernant les limites.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont donc sauf mention explicite du contraire, définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et nous supposerons pour simplifier qu'elles sont toutes définies sur une même partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. Comme les résultats énoncés sont destinés à étudier le comportement local des fonctions, il est toujours possible de se ramener à ce cas en prenant les restrictions de ces fonctions à l'intersection de leur domaine de définition avec un intervalle du type :

- $[a-h, a+h]$ pour $h > 0$ lorsque $a \in \mathbb{R}$,
- $[A, +\infty[$ lorsque $a = +\infty$,
- $]-\infty, A]$ lorsque $a = -\infty$.

L ensemble, $\mathcal{D}$ est toujours une réunion d'intervalles disjoints de $\mathbb{R}$.

Enfin, si $a \in \mathcal{D}$, nous supposons que toutes ces fonctions sont continues en a

1. Fonctions dominées, fonctions négligeables

1.1 Définitions, exemples

Définition 1

Soient f et φ vérifiant les hypothèses précédentes.

1. On dit que f est *dominée* par φ au voisinage de a s'il existe une fonction u définie sur $\mathcal{D}$, bornée au voisinage de a et telle que $f = \varphi u$ au voisinage de a.
   On note alors $f = \mathrm{O}(\varphi)$ (lire "f égale grand O de φ").
2. On dit que f est *négligeable* devant φ au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur $\mathcal{D}$, telle que $f = \varphi\varepsilon$ au voisinage de a et $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$.
   On note alors $f = \mathrm{o}(\varphi)$ (lire "f égale petit o de φ").

Exemples

1. On a $x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \mathrm{O}(x^2)$ au voisinage de 0.
2. On a $x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \mathrm{o}(|x|^{3/2})$ au voisinage de 0.
3. On a $x^2 = \mathrm{o}(\sin x)$ au voisinage de 0 puisqu au voisinage de 0 on a $x^2 = \varepsilon(x)\sin x$ où :
   $$\varepsilon(x) = \frac{x^2}{\sin x} \quad \text{si} \quad 0 < |x| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(x) = 0 \quad \text{sinon}$$
   avec donc $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$.
4. Une fonction f est bornée au voisinage de a si, et seulement si, elle est dominée par la fonction constante 1, c'est-à-dire $f = \mathrm{O}(1)$.
5. Une fonction f tend vers 0 en a si, et seulement si, elle est négligeable devant la fonction constante 1, c'est-à-dire $f = \mathrm{o}(1)$.

Attention

- Lorsque f est négligeable devant g, on peut trouver une fonction ε tendant vers 0 telle que $f = \varepsilon\, g$ **au voisinage de** a, mais on ne peut pas forcément trouver une fonction ε telle que l'on ait $f = g\,\varepsilon$ sur tout leur domaine de définition, comme le prouve l'exemple 3 ci-dessus.

  Il en est de même lorsque f est dominée par g.

- Les écritures $f = \mathrm{o}(g)$ et $f = \mathrm{O}(g)$ ne sont qu une notation, et bien entendu, on n'a pas :
$$\big(f = \mathrm{o}(h) \quad \text{et} \quad g = \mathrm{o}(h)\big) \Longrightarrow f = g$$
ou son analogue avec la notation O.
- En cas de doute lors de l'utilisation de ces notations, ne pas hésiter à revenir à la définition, ou à la caractérisation à l'aide du quotient donnée dans la proposition 2 de la page suivante.

1.2 Proprietés

Règles de calcul : Les résultats suivants, qui ne sont que des traductions de résultats connus sur les fonctions bornées et sur les fonctions tendant vers 0 doivent pouvoir être retrouvés rapidement :

$$\begin{array}{rcccl}
 & & f = \mathrm{o}(\varphi) & \Longrightarrow & f = \mathrm{O}(\varphi) \\
f_1 = \mathrm{O}(\varphi) & \text{et} & f_2 = \mathrm{O}(\varphi) & \Longrightarrow & f_1 + f_2 = \mathrm{O}(\varphi) \\
f_1 = \mathrm{O}(\varphi_1) & \text{et} & f_2 = \mathrm{O}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f_1 f_2 = \mathrm{O}(\varphi_1\varphi_2) \\
f_1 = \mathrm{o}(\varphi) & \text{et} & f_2 = \mathrm{o}(\varphi) & \Longrightarrow & f_1 + f_2 = \mathrm{o}(\varphi) \\
f_1 = \mathrm{o}(\varphi_1) & \text{et} & f_2 = \mathrm{O}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f_1 f_2 = \mathrm{o}(\varphi_1\varphi_2) \\
f_1 = \mathrm{o}(\varphi_1) & \text{et} & f_2 = \mathrm{o}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f_1 f_2 = \mathrm{o}(\varphi_1\varphi_2) \\
f = \mathrm{O}(\varphi_1) & \text{et} & \varphi_1 = \mathrm{O}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f = \mathrm{O}(\varphi_2) \\
f = \mathrm{o}(\varphi_1) & \text{et} & \varphi_1 = \mathrm{O}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f = \mathrm{o}(\varphi_2) \\
f = \mathrm{O}(\varphi_1) & \text{et} & \varphi_1 = \mathrm{o}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f = \mathrm{o}(\varphi_2) \\
f = \mathrm{o}(\varphi_1) & \text{et} & \varphi_1 = \mathrm{o}(\varphi_2) & \Longrightarrow & f = \mathrm{o}(\varphi_2)
\end{array}$$

Proposition 1

1. Si, au voisinage de a, la fonction f est dominée par une fonction bornée au voisinage de a, alors f est bornée au voisinage de a.
2. Si, au voisinage de a, la fonction f est dominée par une fonction qui tend vers 0 en a, alors f tend vers 0 en a.
3. Si, au voisinage de a, la fonction f est négligeable devant une fonction bornee au voisinage de a, alors f tend vers 0 en a.

émonstration

1. La fonction f étant alors le produit de deux fonctions bornées au voisinage de a est également bornée au voisinage de a.
2. et 3. La fonction f étant alors le produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a, elle tend aussi vers 0 en a. □

Proposition 2

Supposons que φ ne s annule pas sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ Alors au voisinage de a :

1. f est dominée par φ si, et seulement si, $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a,
2. f est négligeable devant φ si, et seulement si, $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{\varphi} = 0$

émonstration

1. Si f est dominée par φ, alors on peut trouver une fonction u bornée au voisinage de a telle que $f = \varphi u$ au voisinage de a. La fonction f/φ coïncide alors au voisinage de a avec la fonction u, donc est aussi bornée au voisinage de a.

   Réciproquement, supposons f/φ bornée au voisinage de a et posons :
   $$u(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{D} \setminus \{a\}.$$
   Si $a \in \mathcal{D}$, il faut définir $u(a)$:

   - si $\varphi(a) \neq 0$, on pose $u(a) = \dfrac{f(a)}{\varphi(a)}$.
   - si $\varphi(a) = 0$, alors la continuité de f et de φ en a et le fait que f/φ soit bornée au voisinage de a impose $f(a) = 0$ et on pose alors par exemple $u(a) = 1$.

   On a ainsi :
   $$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) = \varphi(x)\, u(x)$$
   avec u bornée au voisinage de a, ce qui prouve que f est dominée par φ
2. Si f est négligeable devant φ, alors on peut trouver une fonction ε tendant vers 0 telle que $f = \varphi \varepsilon$ au voisinage de a La fonction f/φ coïncide alors au voisinage de a avec la fonction ε, donc tend vers 0 en a

   Réciproquement, si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{\varphi} = 0$, on peut poser :
   $$\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{D} \setminus \{a\}.$$
   Si $a \in \mathcal{D}$, il faut définir $\varepsilon(a)$. La fonction φ étant continue en a, elle est bornée au voisinage de a La restriction de f à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ coïncide alors avec le produit de φ par la fonction f/φ qui tend vers 0 Comme f est continue en a, on en déduit $f(a) = 0$ Si l'on pose $\varepsilon(a) = 0$ on a :
   $$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) = \varphi(x)\, \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{a} \varepsilon = 0$$
   ce qui prouve que f est négligeable devant φ. □

Malgré la restriction concernant φ, le résultat précédent est très important car dans la pratique les fonctions considérées ne s'annuleront pas sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ ou du moins pas au voisinage de a.

Exemples

1. On a $\ln x = o(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   Plus généralement, si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a au voisinage de $+\infty$:
   $$(\ln x)^\alpha = o(x^\beta), \quad x^\alpha = o(e^{\beta x}) \quad \text{et} \quad e^{-\alpha x} = o(x^{-\beta}).$$
2. On a $\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$ au voisinage de 0^+. L'utilisation de 0^+ est ici une formulation abrégée signifiant que l'on s'intéresse aux restrictions des fonctions à $\mathbb{R}_+^*$.

2. Fonctions équivalentes

2.1 Définitions

Définition 2

Étant données deux fonctions f et g définies sur $\mathcal{D}$, on dit que f est *équivalente* à g au voisinage de a, ou équivalente à g en a, s'il existe une fonction h définie sur $\mathcal{D}$, telle que $f = g\,h$ au voisinage de a et $\lim\limits_a h = 1$. On note alors $f \sim g$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ (lire "f équivalente à g").

Remarque On a $f \sim g$ si, et seulement si, il existe une fonction ε tendant vers 0 telle que $f = (1+\varepsilon)\,g$ au voisinage de a, c'est-à-dire si, et seulement si, $f - g = o(g)$.

Proposition 3

Si f est équivalente à g au voisinage de a, alors g est équivalente à f au voisinage de a. C'est pourquoi on dit alors aussi que f et g sont équivalentes au voisinage de a.

émonstration par exemple dans le cas o` $a \in \mathbb{R}$ On peut trouver une fonction u tendant vers 1 et un réel $\eta_1 > 0$ tels que $f = g\,u$ sur $[a-\eta_1, a+\eta_1] \cap \mathcal{D}$.
Puisque la fonction u tend vers 1 en a elle ne s'annule pas au voisinage de a, c'est-à-dire sur une partie de la forme $\mathcal{D}' = [a-\eta, a+\eta] \cap \mathcal{D}$, avec $\eta > 0$ que l'on peut supposer inférieur à η_1.

L'égalité $f = g\,u$ est donc équivalente sur $\mathcal{D}'$ à $g = \dfrac{1}{u}\,f$ et il suffit de prendre :

$$v(x) = \frac{1}{u(x)} \quad \text{si} \quad |x-a| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad v(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

pour avoir $g = f\,v$ **au voisinage de** a avec $\lim\limits_{a} v = 1$ □

Exemple Soit f la fonction polynôme non nulle définie par :

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k\, x^k \qquad \text{avec} \qquad a_p \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0.$$

1. **Étude en 0**. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = a_p\, x^p \left(1 + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{a_k}{a_p}\, x^{k-p}\right)$$

Comme la fonction entre parenthèses tend vers 1, quand x tend vers 0, on en déduit $f(x) \sim a_p\, x^p$ ce qui s'exprime en disant qu'en 0 une fonction polynôme non nulle est équivalente à son terme de plus bas degre.

2. **Étude en $\pm\infty$**. Pour $x \neq 0$, on a :

$$f(x) = a_n\, x^n \left(\sum_{k=p}^{n-1} \frac{a_k}{a_n\, x^{n-k}} + 1\right) \sim a_n\, x^n$$

ce qui s'exprime en disant qu'à l'infini une fonction polynôme non nulle est équivalente à son terme de plus haut degré.

Proposition 4

Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$, la fonction f est équivalente à g au voisinage de a si, et seulement si, $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 1$.

émonstratio La fonction f est équivalente à g si, et seulement si, $f - g = o(g)$, c'est-à-dire (d'après la proposition 2 de la page 468) si, et seulement si, la fonction :

$$\frac{f}{g} - 1 = \frac{f-g}{g}$$

tend vers 0 en a, ce qui prouve le résultat. □

De même que précédemment ce résultat est très important dans la pratique pour justifier que deux fonctions sont équivalentes puisqu'il suffit d'étudier la limite de leur quotient.

Exemples

1. Si f et g sont deux fonctions strictement positives sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ et équivalentes en a, alors $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ sont équivalentes en a.
2. Au voisinage de 1, on a :
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \sim 3(x-1)$$
et donc :
   - $\sqrt[3]{x^3-1} \sim \sqrt[3]{3(x-1)}$.
   - $(x^3-1)^\alpha \sim 3^\alpha (x-1)^\alpha$ (attention, ces fonctions sont définies sur $]\,1,+\infty\,[$).
3. Lorsque x tend vers $+\infty$ la quantité $x^3 - 2x^2 + x + 3$ est équivalente à x^3 et donc :
$$\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 3} \sim x^{3/2}.$$

2.2 Résultats fondamentaux

Proposition 5

Étant données deux fonctions f et g équivalentes en a, si g a une limite finie ou infinie en a alors f a une limite en a et :
$$\lim_a f = \lim_a g.$$

émonstratio Conséquence immédiate de l'égalité $f = g\,h$ avec $\lim\limits_a h = 1$. □

Remarques

- Réciproquement, deux fonctions qui admettent la même limite réelle non nulle sont équivalentes, puisque leur quotient tend vers 1.
- Mais deux fonctions peuvent toutes les deux tendre vers 0 ou toutes les deux vers $+\infty$ (ou $-\infty$) sans être équivalentes, comme le prouve l'exemple des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ qui ne sont équivalentes ni en 0 ni en $+\infty$.
- L'un des buts des notions abordées dans ce chapitre est justement de comparer des fonctions qui tendent vers 0 ou vers l'infini, pour pouvoir lever des indéterminations du type $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Proposition 6

Soient f et g deux fonctions équivalentes en a.

1. Si g est positive sur $\mathcal{D}$, alors f est positive au voisinage de a.
2. Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a
3. Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$, alors la restriction de f à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ ne s'annule pas au voisinage de a.

émonstrati n Puisque f et g sont équivalentes en a, on peut trouver une fonction h tendant vers 1 telle que $f = g\,h$ au voisinage de a

La fonction h ayant une limite strictement positive en a, elle est strictement positive au voisinage de a, ce qui prouve les trois résultats □

Exemples

1. La fonction $x \mapsto x^3 - 2x^2$ est équivalente à $-2x^2$ au voisinage de 0 on peut donc affirmer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

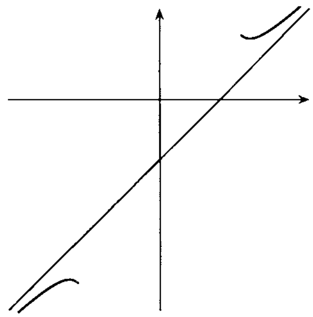
$$0 < |x| \leqslant \eta \Longrightarrow x^3 - 2x^2 < 0.$$

Cette fonction présente donc un maximum local strict en 0

2. Si au voisinage de $\pm\infty$ une fonction f vérifie :

$$f(x) - x + 2 \sim \frac{1}{x}$$

alors la courbe représentative de f possède une asymptote d'équation $y = x - 2$ et, au voisinage de $\pm\infty$, le signe de $f(x) - x + 2$ est le même que celui de x, ce qui donne, au voisinage de l'infini, la position de la courbe par rapport à son asymptote.



2.3 Obtention d'équivalents

Proposition 7

Si f est une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et si $f'(a) \neq 0$, alors au voisinage de a :

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a).$$

émonstratio Évident car $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x-a)} = 1$. □

Résultats La proposition précédente nous donne les équivalents suivants **au voisinage de** 0 :

$$e^x - 1 \sim x \qquad \ln(1+x) \sim x$$

$$\sin x \sim x \qquad \arcsin x \sim x$$

$$\tan x \sim x \qquad \arctan x \sim x$$

$$\operatorname{sh} x \sim x \qquad \operatorname{argsh} x \sim x$$

$$\operatorname{th} x \sim x \qquad \operatorname{argth} x \sim x$$

Proposition 8 (Substitution dans un équivalent)

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ équivalentes en a. Si u est une fonction définie sur $\Delta \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$ et telle que $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f\big(u(t)\big)$ et $g\big(u(t)\big)$ sont équivalentes en α.

emonstration Soit h une fonction tendant vers 1 telle que $f(x) = g(x)\,h(x)$ au voisinage de a. Alors on a, au voisinage de α :

$$f\big(u(t)\big) = g\big(u(t)\big)\,h\big(u(t)\big)$$

avec $\lim\limits_{t\to\alpha} h\big(u(t)\big) = 1$ d'après le théorème de composition des limites, ce qui prouve le résultat. □

Exemples

1. En 0, on a $\exp(\sin t) - 1 \sim \sin t$, car $\lim\limits_{t\to 0} \sin t = 0$ et $\exp u - 1 \underset{0}{\sim} u$.
2. En 0, on a $(1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln(1+x)} - 1 \sim \alpha \ln(1+x)$.
3. En 0, on a $\ln(\cos t) \sim \cos t - 1$.
4. Comme $x^3 - 2x^2 + x + 3 \sim x^3$ au voisinage de $+\infty$, si u est une fonction telle que $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) = +\infty$, alors au voisinage de α :

$$u(t)^3 - 2u(t)^2 + u(t) + 3 \sim u(t)^3.$$

Attention Il n'y a pas de résultat général concernant la composition des équivalents : si f et g sont équivalentes on ne peut rien dire *a priori* de $u \circ f$ et $u \circ g$. Par exemple, on a $x \sim x + \sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$, alors que $\exp x = o\big(\exp(x + \sqrt{x})\big)$.

2.4 Opérations sur les fonctions équivalentes

Proposition 9

Si au voisinage de a on a :

1. $f \sim g$ et $g \sim h$, alors $f \sim h$ en a.
2. $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1\, f_2 \sim g_1\, g_2$ en a.
3. $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, et si aucune de ces fonctions ne s'annule sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ alors $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$ en a.

emonstration

1. On peut trouver u et v telles que l'on ait au voisinage de a :

$$f = g\,u \quad \text{et} \quad g = h\,v \qquad \text{avec} \qquad \lim_a u = \lim_a v = 1$$

Alors au voisinage de a :

$$f = (u\,v)\,h \qquad \text{avec} \qquad \lim_a u\,v = 1$$

ce qui prouve le résultat

On peut aussi énoncer ce résultat en disant que la relation $f \sim g$ est transitive

2. Si au voisinage de a on a :

$$f_1 = g_1\,u_1 \quad \text{et} \quad f_2 = g_2\,u_2 \qquad \text{avec} \qquad \lim_a u_1 = \lim_a u_2 = 1$$

alors au voisinage de a :

$$f_1\,f_2 = (g_1\,g_2)\,(u_1\,u_2) \qquad \text{avec} \qquad \lim_a u_1\,u_2 = 1$$

ce qui prouve que $f_1\,f_2$ et $g_1\,g_2$ sont équivalentes

3. On a :

$$\frac{f_1}{f_2} \div \frac{g_1}{g_2} = \frac{f_1}{g_1} \times \frac{g_2}{f_2}$$

ce qui permet de conclure puisque :

$$\lim_a \frac{f_1}{g_1} = \lim_a \frac{f_2}{g_2} = 1.$$

□

Exemples

1. La transitivité de l'équivalence permet d écrire au voisinage de 0 :

$$\exp(\sin t) - 1 \sim \sin t \sim t \qquad \text{et} \qquad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \ln(1+x) \sim \alpha x$$

2. Si f est la fonction rationnelle non nulle définie par :

$$f(x) = \frac{\sum\limits_{k=p}^{n} a_k\,x^k}{\sum\limits_{k=q}^{m} b_k\,x^k} \qquad \text{avec} \qquad a_p\,a_n\,b_q\,b_m \neq 0,$$

alors :

- en 0, on a $f(x) \sim \dfrac{a_p\,x^p}{b_q x^q} \sim \dfrac{a_p}{b_q}\,x^{p-q}$, ce qu'on exprime en disant qu'en 0 une fonction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus bas degré,
- en $\pm\infty$, on a $f(x) \sim \dfrac{a_n\,x^n}{b_m x^m} \sim \dfrac{a_n}{b_m}\,x^{n-m}$, ce qu'on exprime en disant qu'en $\pm\infty$ une fonction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus haut degré.

3. En 0, on a $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \sim \dfrac{t}{2}$ et $1 - \cos t = 2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$. Par suite :

$$\cos t - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{t^2}{2}$$

et donc :

$$\ln(\cos t) \sim \cos t - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{t^2}{2}\cdot$$

4. Pour tout reel t, on a :

$$\operatorname{ch} t - 1 = \frac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{\operatorname{ch} t + 1} = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t + 1}\cdot$$

Comme $\lim\limits_{t \to 0}(\operatorname{ch} t + 1) = 2$, on en déduit qu'au voisinage de 0, on a $\operatorname{ch} t + 1 \sim 2$.

De plus $\operatorname{sh} t \underset{0}{\sim} t$, donc :

$$\operatorname{ch} t - 1 \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}\cdot$$

5. Au voisinage de 0, on a $1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}\cdot$ En remplaçant t par $\arccos u$ qui tend vers 0 quand u tend vers 1, on en déduit qu'au voisinage de 1 :

$$1 - u \sim \frac{(\arccos u)^2}{2}$$

Sachant que la fonction $\arccos$ est positive, on en deduit en prenant les racines :

$$\arccos u \underset{1^-}{\sim} \sqrt{2(1-u)}$$

ce que l'on peut écrire encore :

$$\arccos(1-x) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{2x}.$$

6. De la même façon, on obtient :

$$\operatorname{argch}(1+x) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{2x}.$$

7. Si f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right),$$

alors au voisinage de $+\infty$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{2x+1}{(x+1)^2 x^2}\right)\right) \\
&\sim 1 - \exp\left(-\frac{2x+1}{(x+1)^2 x^2}\right) \qquad \text{car } \lim_{x \to +\infty} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 \\
&\sim \frac{2x+1}{(x+1)^2 x^2} \qquad \text{car } \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{(x+1)^2 x^2} = 0 \\
&\sim \frac{2}{x^3}\cdot
\end{aligned}$$

2.5 Les équivalents et l'addition

Il n'y a pas de résultat général pour une somme ou une différence d'equivalents. Cela se comprend aisément en pensant à la caractérisation à l'aide du quotient : l'existence d'une limite pour $\dfrac{f_1}{g_1}$ et $\dfrac{f_2}{g_2}$ ne prouve rien pour la fonction $\dfrac{f_1+f_2}{g_1+g_2}\cdot$

Toutefois, comme on va le voir dans les exemples suivants, il est assez souvent possible de conclure en revenant à la définition.

Exemples

1. Étude en 0 de $\sin 2x + \operatorname{sh} 3x$.
   On a $\sin 2x \sim 2x$ et $\operatorname{sh} 3x \sim 3x$ et on peut ecrire :
   $$\sin 2x + \operatorname{sh} 3x = x\left(\frac{\sin 2x}{x} + \frac{\operatorname{sh} 3x}{x}\right)$$
   La parenthèse $\left(\dfrac{\sin 2x}{x} + \dfrac{\operatorname{sh} 3x}{x}\right)$ a pour limite 5 en 0, donc :
   $$\sin 2x + \operatorname{sh} 3x \sim 5x.$$
2. Si l'on essaie de suivre la démarche de l'exemple précédent pour donner un équivalent de $\sin 2x - \operatorname{th} 2x$ au voisinage de 0, on trouve d'abord :
   $$\sin 2x \sim 2x \qquad \text{et} \qquad \operatorname{th} 2x \sim 2x$$
   mais ensuite la relation :
   $$\sin 2x - \operatorname{th} 2x = x\left(\frac{\sin 2x}{x} - \frac{\operatorname{th} 2x}{x}\right)$$
   où la parenthèse $\left(\dfrac{\sin 2x}{x} - \dfrac{\operatorname{th} 2x}{x}\right)$ tend vers 0, ne permet plus de conclure et de trouver un équivalent de la somme. On peut simplement en déduire :
   $$\sin 2x - \operatorname{th} 2x = \mathrm{o}(x).$$
   Dans un tel cas, pour obtenir un équivalent, il faut utiliser un outil plus puissant, comme la formule de Taylor–Young ou plus généralement un développement limité.

3 Étude de $u(x) = \sin 2x + \cos x - 1$ au voisinage de 0. On a :
$$\sin 2x \sim 2x \qquad \text{et} \qquad \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}\cdot$$
Comme $\dfrac{x^2}{2}$ est négligeable devant $2x$, on pressent que $u(x)$ est équivalent à $2x$. Pour le prouver on écrit :
$$u(x) = x\left(\frac{\sin 2x}{x} + \frac{x}{2} \times \frac{\cos x - 1}{x^2/2}\right)\cdot$$

La parenthese $\left(\dfrac{\sin 2x}{x} + \dfrac{x}{2} \times \dfrac{\cos x - 1}{x^2/2}\right)$ tend vers 2, ce qui permet de conclure $u(x) \sim 2x$.

4. Étude de $x + \ln x$ en $+\infty$. La relation :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

s'énonçant encore $\ln x = o(x)$ incite à réaliser la factorisation suivante :

$$x + \ln x = x\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)$$

et permet de trouver $x + \ln x \underset{+\infty}{\sim} x$.

La méthode utilisee dans les deux derniers exemples se généralise dans le résultat suivant :

Proposition 10

Si f et g sont deux fonctions telles que $g = o(f)$, alors $f + g \sim f$.

Exemple Cherchons un équivalent en 0 de $\ln(\sin x)$. On peut écrire, pour $x \in \,]0, \pi[$:

$$\ln(\sin x) = \ln x + \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \cdot$$

Le deuxième terme de cette somme tend vers 0, donc est négligeable devant $\ln x$ qui tend vers $-\infty$. On en déduit :

$$\ln(\sin x) \underset{0}{\sim} \ln x.$$

Méthode La démarche précédente, qui consiste à mettre en facteur à l'intérieur du logarithme un equivalent de la fonction, est souvent utilisée pour trouver un équivalent du logarithme d une fonction qui tend vers 0 ou vers $+\infty$.

Attention

- Au voisinage de 0, ne pas écrire $e^x \sim 1 + x$ qui est correct, mais ne donne pas plus d'information que $e^x \sim 1$ ou $e^x \sim 1 - x^2$.
- En revanche, $\ln u \sim (u - 1)$ au voisinage de 1 donne une information intéressante car, dans ce cas, $(u - 1)$ tend vers 0, alors que les quantités u et 1 sont de même ordre et tendent vers 1. Dans un tel cas, on dit aussi que $u - 1$ est l'infiniment petit principal.

- Par définition, une fonction équivalente à 0 en a est identiquement nulle au voisinage de a. Il est ainsi fort peu probable qu'un calcul d'équivalents mène à ce résultat ; lorsque l'on y parvient c'est en général parce que l'on a fait illégalement une somme d'équivalents.

  Par exemple, si pour trouver un équivalent en 0 de $\cos x - 1$, on part de $\cos x \sim 1$ on arrive à $\cos x - 1 \sim 0$, ce qui doit déclencher un signal d'alarme nous prévenant de la faute de raisonnement.

  Mais si l'on utilise $\cos x \sim 1 - x^2/2$, le signal d'alarme est neutralisé, et on arrive, avec la même faute de raisonnement mais sans s'en rendre compte, au résultat correct $\cos x - 1 \sim -x^2/2$. On aurait pu aussi bien obtenir $\cos x - 1 \sim x$ en partant de la relation $\cos x \sim 1 + x$ qui est tout aussi juste que la précédente.
- C'est pourquoi d'une façon générale il ne faut pas chercher à mettre, à droite d'un symbole d'équivalence, une somme ou une différence de deux termes dont l'un est négligeable par rapport à l'autre. Dans un tel cas la prudence doit conduire à simplifier au maximum l'équivalent utilisé en supprimant le terme qui est négligeable devant l'autre.

2.6 Équivalents classiques en 0

$$\boxed{\begin{array}{rr}
e^x - 1 \sim x & \ln(1+x) \sim x \\
\sin x \sim x & \arcsin x \sim x \\
\tan x \sim x & \arctan x \sim x \\
\operatorname{sh} x \sim x & \operatorname{argsh} x \sim x \\
\operatorname{th} x \sim x & \operatorname{argth} x \sim x \\
\multicolumn{2}{c}{\cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}} \\
\multicolumn{2}{c}{\operatorname{ch} x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}} \\
\multicolumn{2}{c}{(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \qquad (\alpha \in \mathbb{R})}
\end{array}}$$

Pour calculer un équivalent en un point x_0 quelconque, on se ramène la plupart du temps en 0 en posant $x = x_0 + h$ (ou $x = 1/h$ pour $x_0 = \pm\infty$). Ainsi :

- la formule $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ est une façon d'écrire un équivalent en 1 de la fonction logarithme : $\ln u \underset{1}{\sim} u - 1$,
- de la dernière formule du tableau ci-dessus, on déduit $u^\alpha - 1 \underset{1}{\sim} \alpha(u-1)$

3. Comparaison des suites

Pour les suites, on a les mêmes notions et les mêmes résultats que pour les fonctions. Les démonstrations correspondantes étant très similaires elles sont laissées au lecteur.

3.1 Définitions, caractérisations

Définition 3

Étant données deux suites réelles u et v on dit que :

- u est *dominée* par v s'il existe une suite bornée w telle que $u = v\,w$ à partir d'un certain rang. On note alors $u = \mathrm{O}(v)$.
- u est *negligeable* devant v s'il existe une suite w tendant vers 0 et telle que $u = v\,w$ à partir d'un certain rang. On note alors $u = \mathrm{o}(v)$.
- u est *équivalente* à v s'il existe une suite w tendant vers 1 et telle que $u = v\,w$ à partir d'un certain rang. On note alors $u \sim v$.

Remarque Si u est équivalente à v, alors v est équivalente à u. C'est pourquoi on dit aussi que u et v sont équivalentes.

Proposition 11

Si, à partir d un certain rang, la suite v ne s'annule pas, alors :

- la suite u est dominée par v si, et seulement si, $\dfrac{u}{v}$ est bornée.
- la suite u est négligeable devant v si et seulement si, $\lim \dfrac{u}{v} = 0$.
- la suite u est équivalente à v si, et seulement si, $\lim \dfrac{u}{v} = 1$.

Exemples

1. Si v est une suite négligeable devant u, alors $u + v$ est équivalente à u.
2. Pour $a > 1$, on a $a^n = \mathrm{o}(n!)$.

   En effet, si l'on pose $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{n+1}$ et :

$$\forall n \geqslant 2a\,,\ 0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

En posant $n_0 = E(2a) + 1$, on en déduit :

$$\forall n \geqslant n_0 \,,\; 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$$

ce qui prouve que u converge vers 0 et donc que a^n est négligeable devant $n!$.

3.2 Résultats fondamentaux

Proposition 12

Étant données deux suites équivalentes u et v, si v a une limite (finie ou infinie) alors u a une limite et $\lim u = \lim v$.

Proposition 13

Soient u et v deux suites équivalentes.

1. Si la suite v ne s'annule pas alors à partir d'un certain rang u ne s'annule pas.
2. Si la suite v est positive, alors à partir d'un certain rang, u est positive.

3.3 Utilisation des résultats correspondants sur les fonctions

Soit u une suite à valeurs dans $\mathcal{D}$ et admettant a pour limite.

1. Si f est dominée par g au voisinage de a, alors la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $\big(g(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si f est négligeable devant g au voisinage de a, alors la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $\big(g(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Si f est équivalente à g au voisinage de a, alors les suites $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(g(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

Exemples

1. En utilisant les comparaisons des fonctions puissance, logarithme et exponentielle, on obtient, pour $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$(\ln n)^{\beta} = \mathrm{o}(n^{\alpha}) \quad \text{et} \quad n^{\alpha} = \mathrm{o}(a^{n}).$$

2. $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$.

3.4 Opérations sur les suites équivalentes

Proposition 14

1. Si $u \sim v$ et $v \sim w$, alors $u \sim w$.
2. Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$, alors $u\,u' \sim v\,v'$.
3. Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$, et si à partir d'un certain rang aucune de ces suites ne s'annule, alors $\frac{u}{u'} \sim \frac{v}{v'}$.

Attention De même que pour les fonctions, il n'y a pas de résultat général pour une somme ou une différence d'équivalents.

EXERCICES

1. Comparer les fonctions suivantes au voisinage des points indiqués :

a) $x \ln x$ et $\ln(1+2x)$ au voisinage de 0

b) $x \ln x$ et $\sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)\sin x$ au voisinage de $+\infty$

c) $\dfrac{1}{x+1}$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ au voisinage de -1

d) $x^{-\frac{1}{x}}$ et $\ln x$ au voisinage de 0.

2. Comparer les fonctions e^{x^2} et $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ au voisinage de $+\infty$

3. Trouver à l'aide d'équivalents les limites suivantes :

a) $x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$ en 0

b) $\dfrac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x}$ en 0

c) $\dfrac{x\ln(1+x)}{(\arcsin x)^2}$ en 0

d) $\dfrac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4}$ en 0

e) $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ en 0

f) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\ln x}$

4. La proposition suivante est-elle vraie ?

Si f et g sont équivalentes au voisinage de a et g est monotone au voisinage de a, alors f est monotone au voisinage de a.

5. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point a.

Montrer que :

$$e^f \underset{a}{\sim} e^g \iff \lim_a (f-g) = 0.$$

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$f \sim g \Longrightarrow e^f \sim e^g.$$

6. Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites :

a) $\begin{pmatrix} n+r \\ r \end{pmatrix}$ ($r \in \mathbb{N}$)

b) $\left(\ln(1+e^{-n^2})\right)^{\frac{1}{n}}$

c) $\left(\dfrac{e^n}{1+e^{-n}}\right)^n$

7. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par u_1 et la relation suivante :

$$\ln(n+1)u_{n+1} - \ln(n)u_n = n.$$

Donner un équivalent de u_n.

8. Soient f et g deux fonctions strictement positives au voisinage d'un point a.

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$ et que g admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a avec $\ell \neq 1$.

Montrer que $\ln f \sim \ln g$ au voisinage de a.

Le résultat est-il conservé si $\ell = 1$?

Application : les fonctions $\ln(e^x - 1)$ et x sont-elles équivalentes au voisinage de $+\infty$?

9 Trouver la limite lorsque x tend vers 0 de $\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

10. Trouver la limite lorsque x tend vers 0 de $(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$

11. Déterminer la limite en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\tan(2t)\ln(\tan t)$.

12. Déterminer la limite de :

$$(t+a)^{1+\frac{1}{t}} - t^{1+\frac{1}{t+a}}$$

en $+\infty$ $(a \in \mathbb{R}^*)$.

13. On considère les fonctions f_n définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n : x \mapsto n \cos^n x \sin x.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction possède un maximum dont on notera les coordonnées (x_n, y_n).

Trouver un équivalent des suites (x_n) et (y_n).

14. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \left((n+1)(n+2)\dots(n+n)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Trouver un équivalent de u_n.

15. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx.$$

a) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

b) Montrer que $I_n \sim I_{n-1}$.

c) Montrer que $I_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$.

d) En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

16. Trouver un équivalent de la suite :

$$u_n = \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$$

17. Soient $a_n = x_n + iy_n$ et $b_n = x'_n + iy'_n$ deux suites complexes non nulles à partir d'un certain rang.

On suppose $a_n \sim b_n$, c'est-à-dire que la suite $\dfrac{a_n - b_n}{a_n}$ converge vers 0.

Est-ce que $x_n \sim x'_n$ et $y_n \sim y'_n$?

Montrer que si $x_n \sim x'_n$ et $y_n \sim y'_n$ alors $a_n \sim b_n$.

18. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!.$$

19. Trouver la limite de la suite $u_n = (1 - \operatorname{th} n)^{\operatorname{th}\left(\frac{1}{n}\right)}$

20. Trouver un equivalent de la suite :

$$u_n = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n}.$$

21. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$ que l'on note u_n. Montrer que :

$$u_n = n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $]0, 1]$ que l'on note u_n.

Montrer que :

$$u_n = e^{-n} + e^{-2n} + \mathrm{o}(e^{-2n}).$$

23. Soit f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-n}$$

avec $n \geqslant 1$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que l'équation $f_n(x) = \lambda$ admet une unique solution dans $]n, +\infty]$ que l'on notera x_n.

Étudier la suite $f_n(\alpha n)$ pour $\alpha \in]1, +\infty[$.

En déduire que :

$$x_n \sim n \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1}.$$

Chapitre 17

Étude locale : developpements limités

Dans tout le chapitre, n désigne un entier naturel. Si f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$, on note D_f son domaine de définition.

1. Définitions, exemples

1.1 Développement limité au voisinage de 0

Définition 1

Une fonction f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de* 0, ou un *développement limité à l'ordre n en* 0, s'il existe des réels a_0, a_1,..., a_n et une fonction ε définie sur D_f tels que :

$$\forall x \in D_f\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0. \qquad (*)$$

Remarques

- Une fonction qui admet un développement limité en 0 est définie au voisinage de 0.
- La relation $(*)$ est équivalente à :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = \mathrm{o}(x^n)$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

Exemples

1. La fonction f :

$$\begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x) \end{array}$$

admet un developpement limité à l ordre 3 au voisinage de 0, puisqu en posant :

$$\forall x \in\ ]-1,1[\ ,\ \varepsilon(x) = \ln(1+x),$$

on a :

$$\forall x \in\ ]-1,1[\ ,\ f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. La fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

admet un développement limite en 0 à tout ordre n, car la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,,\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

permet d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\,\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

3. En remplaçant x par $-x^2$ dans la relation précédente on obtient pour tout x réel :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^{2k} + (-1)^n x^{2n} \varepsilon(-x^2) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} (-1)^n \varepsilon(-x^2) = 0$$

ce qui donne un développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. Si une fonction f est de classe C^n sur un intervalle contenant 0 alors la formule de Taylor–Young prouve qu'elle a un développement limité à l'ordre n en 0 qui s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

Proposition 1 (Unicité du développement limité)

Si f est une fonction pour laquelle il existe deux $(n+1)$–listes de réels $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ vérifiant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n),$$

alors on a $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$.

émonstration Par hypothèse, il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 définies sur D_f, vérifiant

$$\forall x \in D_f\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + x^n\, \varepsilon_1(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k + x^n\, \varepsilon_2(x)$$

et :

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Pour prouver l'égalité des listes $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$, raisonnons par l'absurde en les supposant différentes On peut alors considérer le plus petit entier p tel que $a_p \neq b_p$.
Pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$ on a donc :

$$a_p\, x^p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k\, x^k + x^n\, \varepsilon_1(x) = b_p\, x^p + \sum_{k=p+1}^{n} b_k\, x^k + x^n\, \varepsilon_2(x)$$

ce qui, après avoir divisé par x^p, donne :

$$a_p = b_p + \sum_{k=p+1}^{n} (b_k - a_k)\, x^{k-p} + x^{n-p}\,\big(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)\big).$$

En faisant tendre x vers 0 dans l'égalité précédente, on obtient $a_p = b_p$, ce qui est contradictoire avec la définition de l'entier p. □

Définition 2

Si $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n)$, alors le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ s'appelle *partie régulière du développement limité* de f à l'ordre n en 0 ou, plus simplement, *développement limité* de f à l'ordre n en 0.

Corollaire 2

Si f est une fonction admettant $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ comme développement limité à l'ordre n en 0 alors f admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre $p \leqslant n$ dont la partie régulière est $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k$.

Dé onstratio Par hypothèse, il existe une fonction ε définie sur D_f telle que :

$$\forall x \in D_f\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

La fonction ε_1 définie sur D_f par :

$$\forall x \in D_f\,,\ \varepsilon_1(x) = \sum_{k=p+1}^{n} a_k\, x^{k-p} + x^{n-p} \varepsilon(x)$$

vérifie :

$$\forall x \in D_f\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k\, x^k + x^p \varepsilon_1(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

ce qui montre la propriété. □

Corollaire 3

Soit f une fonction admettant au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$.

- Si f est paire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances paires de x.
- Si f est impaire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances impaires de x.

émonstratio Soit ε une fonction définie sur D_f et vérifiant :

$$\forall x \in D_f\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \qquad (*)$$

- En supposant f paire, la relation $(*)$ permet, pour tout $x \in D_f$, d'écrire :

$$f(x) = f(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, a_k\, x^k + (-1)^n\, x^n\, \varepsilon(-x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} (-1)^n \varepsilon(-x) = 0$ ce qui, d'après l'unicité du développement limité, entraîne :

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ a_k = (-1)^k a_k.$$

Donc le polynôme P ne contient que des puissances paires de x.

- De même, en supposant f impaire, la relation $f(x) = -f(-x)$ entraîne :

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ a_k = (-1)^{k+1} a_k,$$

ce qui prouve que le polynôme P ne contient que des puissances impaires de x □

1.2 Développements limités en 0 des fonctions élémentaires

On a déjà vu (*cf.* exemple 2. de la page 488) que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ possède au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n qui s'écrit :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).}$$

Les fonctions élémentaires suivantes étant de classe C^∞ au voisinage de 0, elles possèdent un développement limité à tout ordre en 0 developpement limité que l'on peut déterminer à l'aide de la formule de Taylor–Young.

- La fonction exponentielle et les fonctions hyperboliques :

$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

- Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus :

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

- La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

- Pour α réel quelconque, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$:

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\end{aligned}}$$

Exemple En utilisant la dernière formule avec $\alpha = \frac{1}{2}$ puis avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1}\frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}x^n + \mathrm{o}(x^n) \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n}\frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}x^n + \mathrm{o}(x^n)\end{aligned}$$

1.3 Développement limité en x_0

Dans cette partie, x_0 désigne un nombre réel et f une fonction définie au voisinage de x_0.

On pose :

$$\Delta = \{x - x_0 \mid x \in D_f\}$$

et on appelle g la fonction définie sur Δ par $g(h) = f(x_0 + h)$.

Définition 3

Avec les notations précédentes, on dit que la fonction f admet un *développement limité à l'ordre n en x_0* si la fonction g possède un développement limité à l'ordre n en 0 c'est-à-dire s'il existe une $(n+1)$-liste de réels $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k + \mathrm{o}(h^n). \qquad (*)$$

Remarques

- La relation $(*)$ s'écrit encore :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + \mathrm{o}\big((x - x_0)^n\big).$$

- Lorsque f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors d'après la proposition 1 de la page 489, il y a unicité de la $(n+1)$-liste $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ vérifiant $(*)$. Le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$ s'appelle *partie régulière* du développement limité de f à l'ordre n en x_0 ou encore *développement limité* de f à l'ordre n en x_0.

Exemples

1. Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 de f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
   Si, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $x = 2 + h$, on a :
$$f(2+h) = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}.$$
   On a vu dans l'exemple 2. de la page 488 que la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ a un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 qui s'écrit :
$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^3\varepsilon(u) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$$
   En remplaçant u par $-\frac{h}{2}$, on obtient :
$$\frac{1}{1+\frac{h}{2}} = 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\varepsilon\left(-\frac{h}{2}\right)$$
   soit :
$$f(2+h) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{16}h^3 + \mathrm{o}(h^3)$$
   ce qui, en revenant à x, donne :
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \mathrm{o}\big((x-2)^3\big).$$

2. Si f est une fonction de classe C^n au voisinage de x_0, alors la formule de Taylor–Young prouve que cette fonction possède un développement limité à l'ordre n en x_0 dont la partie régulière est :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Remarques

- Si f admet, au voisinage de x_0, un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$ dont la partie régulière est $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$, alors :
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x-x_0)^k = \mathrm{O}\big((x-x_0)^n\big).$$
- Réciproquement si, en x_0, la fonction f vérifie une relation du type :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{O}\big((x-x_0)^{n+1}\big),$$

alors elle admet au voisinage de x_0 un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$.

- En MAPLE, c'est la fonction `series` qui permet de calculer un développement limité. La réponse retournée utilise la notation O et non la notation o :

```
> series(1/x,x=2,4);
```

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\mathrm{O}\left((x-2)^4\right)$$

Comme on le voit, pour obtenir un développement limité à l'ordre 3, il faut demander l'ordre 4, c'est-à-dire l'ordre du terme à l'intérieur du O.

1.4 Développement limité à droite et à gauche

Définition 4

On dit qu'une fonction f admet un *developpement limité à droite* (respectivement *à gauche*) à l'ordre n au voisinage de x_0 si la restriction de f à $D_f \cap [\,x_0,+\infty\,[$ (respectivement à $D_f \cap\,]-\infty,x_0\,]$) admet un développement limité à l'ordre n en x_0.

Remarque Pour que f admette un développement limité à droite en x_0, il faut qu'il existe un réel $h>0$ tel que $]\,x_0,x_0+h\,[\,\subset D_f$. En particulier, le réel x_0 ne peut pas être la borne supérieure de D_f.

On a la propriété symétrique à gauche.

Proposition 4

Si D_f est tel que :

$$\exists h>0\ :\ [x_0-h.x_0+h]\setminus\{x_0\}\subset D_f,$$

il est équivalent de dire :

(i) la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en x_0,

(ii) la fonction f admet des développements limités à droite et à gauche à l'ordre n en x_0 et les coefficients de ces derniers développements limités sont égaux.

émonstration

$(i) \Rightarrow (ii)$. Comme les restrictions de f à $D_f \cap [x_0, +\infty[$ et $D_f \cap]-\infty, x_0]$ sont définies au voisinage de x_0, il est clair que si la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 alors elle admet des développements limités à droite et à gauche en x_0, et les coefficients de ces derniers sont les mêmes que ceux du développement limité de f

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si :

$$\forall x \in D_f \cap [x_0, +\infty[\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon_1(x)$$

$$\forall x \in D_f \cap]-\infty, x_0]\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon_2(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_2(x) = 0$, alors la fonction ε définie sur D_f par :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_1(x) & \text{si } x \geqslant x_0 \\ \varepsilon_2(x) & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

tend vers 0 et l'on a :

$$\forall x \in D_f\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x).$$

□

Ainsi, lorsqu'une fonction f possède en x_0 des développements limités à l'ordre n à droite et à gauche dont les parties régulières sont différentes, alors elle n'admet pas de développement limité à l'ordre n en x_0.

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|^3}$ admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 à droite puisque :

$$f_{|\mathbb{R}_+}(x) = \frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

et un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 à gauche puisque :

$$f_{|\mathbb{R}_-}(x) = \frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

Comme les parties régulières de ces développements sont différentes, on en déduit que f ne possède pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.

En revanche la fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 qui s'écrit $f(x) = 1 + \mathrm{o}(x^2)$.

1.5 Développement limité au voisinage de l'infini

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$. On pose :

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in D_f \cap \mathbb{R}^* \right\},$$

et on note g la fonction définie sur Δ par $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$.

Définition 5

La fonction f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de* $+\infty$ (respectivement *au voisinage de* $-\infty$) si la fonction g possède un développement limité à l'ordre n en 0 à droite (respectivement à gauche), c'est-à-dire s'il existe une $(n+1)$-liste de réels $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ telle que l'on ait, au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Remarque On dit que f admet un développement limité à l'infini si g possède un développement limité en 0.

Elle est alors définie au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$ (ou au voisinage des deux) et y admet un développement limité.

Exemples

1. Développement limité à l'ordre 2 au voisinage de l'infini de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

   Si pour $x \in \mathbb{R}^*$ on pose $u = \frac{1}{x}$, on a :

   $$f(x) = \frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{u} - 1} = \frac{1}{1-u}.$$

   La fonction $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ a pour développement limité à l'ordre 2 en 0 :

   $$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

   ce qui en revenant à la variable x, donne :

   $$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2. Pour obtenir le développement précédent (en $+\infty$) avec MAPLE on utilise aussi la fonction `series` :

```
> series(x/(x-1),x=infinity,3);
```

$$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

De la même façon que pour les développements limités en $a \in \mathbb{R}$, il faut toujours demander un ordre de plus que nécessaire à cause de la notation O.

1.6 Dérivabilité et développement limité

Développement limité à l'ordre 0

Soit f une fonction admettant une limite réelle ℓ en $x_0 \in \mathbb{R}$. En définissant la fonction ε sur D_f par $\varepsilon(x) = f(x) - \ell$, on obtient :

$$\forall x \in D_f\,,\ f(x) = \ell + \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

La fonction f admet donc un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de x_0.

Réciproquement. Soit f une fonction possédant un développement limité à l'ordre 0 en $x_0 \in \mathbb{R}$, pour laquelle on peut donc trouver un réel a_0 et une fonction ε vérifiant :

$$f(x) = a_0 + \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors f possède en x_0 une limite égale à a_0.

- Si $x_0 \in D_f$, la fonction f est continue en x_0.
- Si $x_0 \notin D_f$, on peut prolonger f par continuité en posant $f(x_0) = a_0$.

Développement limité à l'ordre 1

Soit f une fonction dérivable en x_0. En définissant la fonction ε par :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \quad \text{si} \quad x \in D_f \setminus \{x_0\} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(x_0) = 0$$

on obtient $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et :

$$\forall x \in D_f\,,\ f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\,\varepsilon(x).$$

La fonction f admet donc un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0.

Réciproquement. Soit f admettant un développement limité à l'ordre 1 en x_0, pour laquelle on peut donc trouver des constantes a_0 et a_1 telles que :

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0).$$

Quitte à prolonger f par continuité en posant $f(x_0) = a_0$, on a alors :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$$

c'est–à–dire que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = a_1$.

Développement limité à un ordre $n \geqslant 2$

Si f est une fonction de classe C^n au voisinage de x_0, alors la formule de Taylor–Young à l'ordre n montre que f possède un développement limité à l ordre n en x_0.

Attention Une fonction définie en x_0 peut admettre un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de x_0 et ne pas être deux fois dérivable en x_0 comme le prouve l exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^2\,\varepsilon(x)$ avec :

$$\varepsilon(x) = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(0) = 0$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cela prouve que f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ce qui prouve que $f'_{|\mathbb{R}^*}$ n a pas de limite en 0, donc que f' n'est pas continue 0 et par suite que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Remarque En revanche, si l'on sait que la fonction est de classe C^n et si l'on en connaît un développement limité en x_0 alors, grâce à l'unicité du développement limité, on peut en déduire les valeurs des dérivées en x_0.

Exemple En utilisant MAPLE, on trouve le développement limité de tan à l'ordre 5 en 0 :

```
> series(tan(x),x,6);
```

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

Comme la fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elle y possède un développement limité à l'ordre 5 et on a donc :

$$\tan^{(5)} 0 = \frac{2}{15} \times 120 = 16.$$

2. Opérations sur les développements limités

L'utilisation de la formule de Taylor–Young n'est pas en général la meilleure méthode pour calculer effectivement le développement limité d'une fonction f, car elle nécessite la recherche des dérivées successives de f dont le calcul est souvent pénible. On préfère le plus souvent utiliser les résultats que l'on va établir dans cette partie et qui permettent d'obtenir un développement limité comme somme, produit, quotient, composition ou intégration d'autres développements limités.

D'après les définitions précédentes, on voit que les calculs effectifs de développements limités s'effectuent en 0. C'est pourquoi les résultats qui suivent sont d'abord donnés pour des développements limités au voisinage de 0.

2.1 Somme et produit de développements limités

Proposition 5

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, ainsi que f et g deux applications de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ admettant en 0 des développements limités à l'ordre n qui s'écrivent :

$$f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^n).$$

Alors les fonctions $f + g$ et $f\,g$ admettent au voisinage de 0 des développements limités à l'ordre n qui s'écrivent :

$$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + \mathrm{o}(x^n)$$
$$f(x)\,g(x) = R(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

où R est le polynôme obtenu en ne gardant, dans le produit $P\,Q$, que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Demonstratio Par hypothèse, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 définies sur $\mathcal{D}$ telles que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \; f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathcal{D}, \; g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

- En posant $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, on a alors :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \; f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

  ce qui montre que $f + g$ admet $P + Q$ comme développement limité à l'ordre n en 0

- En effectuant le produit de $f(x)$ par $g(x)$ on obtient :

$$f(x)\, g(x) = P(x)\, Q(x) + x^n \big(P(x)\, \varepsilon_2(x) + Q(x)\, \varepsilon_1(x) + x^n\, \varepsilon_1(x)\, \varepsilon_2(x) \big).$$

  Par définition de R, il existe un polynôme T tel que :

$$P(x)\, Q(x) = R(x) + x^{n+1}\, T(x),$$

  ce qui donne :

$$f(x)\, g(x) = R(x) + x^n\, \varepsilon(x)$$

  avec :

$$\varepsilon(x) = x\, T(x) + P(x)\, \varepsilon_2(x) + Q(x)\, \varepsilon_1(x) + x^n\, \varepsilon_1(x)\, \varepsilon_2(x).$$

  Comme $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, on en déduit que la fonction $f\, g$ admet R comme développement limité à l'ordre n en 0. □

Exemples

1. Developpement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x$.

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto e^x$ admettent pour développements limités à l'ordre 3 en 0 :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

ce qui donne le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{5}{6}\, x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

2. Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de g définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$.

Les fonctions cosinus et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ admettent au voisinage de 0 des développements limités à l'ordre 3 qui s'écrivent :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \mathrm{o}(x^3)$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{5}{16}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

ce qui donne le développement limité de g à l'ordre 3 en 0 :

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \mathrm{o}(x^3).$$

3. Développement limité à l ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (1 - \operatorname{ch} x)\,\sin x$.
On a les développements limités suivants :

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^4)$$
$$1 - \operatorname{ch} x = -\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{24}\,x^4 + \mathrm{o}(x^5)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}(1-\operatorname{ch} x)\,\sin x &= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^5 + \frac{1}{144}\,x^7 + \mathrm{o}(x^4)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)\\ &\quad + \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)\right)\mathrm{o}(x^5)\\ &= -\frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^5 + \mathrm{o}(x^6).\end{aligned}$$

4. Dans l'exemple précédent on a obtenu le développement limité à l'ordre 6 du produit $f\,g$ en utilisant des développements limités de chacune de ces fonctions à un ordre strictement inférieur à 6. De façon générale, si f et g sont deux fonctions vérifiant :

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_p\,x^p \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{0}{\sim} b_q\,x^q,$$

avec $p+q \leqslant n$, pour obtenir un développement limité à l'ordre n du produit $f\,g$ il suffit de prendre un développement limité de f à l'ordre $n-q$ et de g à l ordre $n-p$. En effet, si l'on a :

$$f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x^{n-q}) = a_p\,x^p + a_{p+1}\,x^{p+1} + \cdots + a_{n-q}\,x^{n-q} + \mathrm{o}(x^{n-q})$$
$$g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^{n-p}) = b_q\,x^q + b_{q+1}\,x^{q+1} + \cdots + b_{n-p}\,x^{n-p} + \mathrm{o}(x^{n-p})$$

on obtient :

$$\begin{aligned} f(x)\,g(x) &= \big(P(x)+\mathrm{o}(x^{n-q})\big)\,\big(Q(x)+\mathrm{o}(x^{n-p})\big)\\ &= P(x)\,Q(x)+P(x)\mathrm{o}(x^{n-p})+\mathrm{o}(x^{n-q})\,Q(x)+\mathrm{o}(x^{n-p})\mathrm{o}(x^{n-q})\\ &= R(x)+\mathrm{o}(x^n) \end{aligned}$$

$R(x)$ étant la somme des termes de degré inférieur ou égal à n du polynôme $P(x)\,Q(x)$.

On a donc bien obtenu un développement limité à l'ordre n du produit $f\,g$.

Corollaire 6

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ ainsi que f et g deux applications de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. Si f et g admettent des développements limités à l'ordre n en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f+g$ et $f\,g$ admettent des développements limités à l'ordre n en a.

Démonstrati Il suffit d'appliquer les résultats de la proposition précédente, avec :

- les fonctions $h \mapsto f(a+h)$ et $h \mapsto g(a+h)$ si $a \in \mathbb{R}$,
- les fonctions $u \mapsto f(\frac{1}{u})$ et $u \mapsto g(\frac{1}{u})$ si $a = \pm\infty$. □

2.2 Quotient de développements limités

Proposition 7

Soit u une fonction telle que $\lim\limits_{0} u = 0$. Si u admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

émonstratio Comme $\lim\limits_{0} u = 0$, on a $\lim\limits_{0}(1-u) = 1$ et la fonction $1-u$ ne s'annule donc pas au voisinage de 0 ; par suite $\dfrac{1}{1-u}$ est définie au voisinage de 0.

- Si $n = 0$, alors le théorème de composition des limites permet d'écrire $\lim\limits_{0} \dfrac{1}{1-u} = 1$ Donc $\dfrac{1}{1-u}$ admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre 0.
- Supposons $n \geqslant 1$. La fonction $h \mapsto \dfrac{1}{1-h}$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, c'est-à-dire qu'il existe une fonction ε_1 définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ telle que :

$$\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{1}{1-h} = \sum_{k=0}^{n} h^k + h^n \varepsilon_1(h) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{0} \varepsilon_1 = 0.$$

En remplaçant h par $u(x)$ dans la relation précédente, on obtient au voisinage de 0.

$$\frac{1}{1-u(x)} = \sum_{k=0}^{n} u(x)^k + u(x)^n \varepsilon_1\big(u(x)\big). \tag{$*$}$$

En 0, la fonction u tend vers 0 et admet un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$, donc il existe un scalaire α_1 ainsi qu'une fonction ε_2 définie au voisinage de 0 tels que :

$$u(x) = \alpha_1\, x + x\,\varepsilon_2(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_0 \varepsilon_2 = 0$$

ce qui donne :

$$u(x)^n\,\varepsilon_1\big(u(x)\big) = x^n\big(\alpha_1 + \varepsilon_2(x)\big)^n \varepsilon_1\big(u(x)\big).$$

Comme $\lim\limits_0(\varepsilon_1 \circ u) = \lim\limits_0 \varepsilon_1 = 0$ et $\lim\limits_0 \big(\alpha_1 + \varepsilon_2(x)\big)^n = \alpha_1^n$, on obtient :

$$u(x)^n\,\varepsilon_1\big(u(x)\big) = \mathrm{o}(x^n)$$

et donc, d'après $(*)$:

$$\frac{1}{1-u(x)} = \sum_{k=0}^{n} u(x)^k + \mathrm{o}(x^n).$$

Or la fonction $\sum\limits_{k=0}^{n} u^k$ admet un développement limité à l'ordre n comme somme de puissances de fonctions admettant un développement limité à l'ordre n. Donc $\dfrac{1}{1-u}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 égal à celui de $\sum\limits_{k=0}^{n} u^k$. □

Exemples

1. Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2}}$.

   On a :

   $$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

   ce qui, d'après la démonstration de la proposition précédente, donne :

   $$\frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2}} = 1 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \mathrm{o}(x^2)$$
   $$= 1 - x + \frac{1}{2}\,x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$

2. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

On a :

$$g(x) = \frac{1}{1-(1-\cos x)}$$
$$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$
$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^2\varepsilon(u).$$

Lorsqu'on remplace u par $1-\cos x$ dans la dernière relation, on obtient :

$$g(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)\right)^2 + (1-\cos x)^2\varepsilon(1-\cos x).$$

Au voisinage de 0, on a $(1-\cos x)^2 \sim \dfrac{x^4}{4}$ et donc :

$$(1-\cos x)^2\varepsilon(1-\cos x) = \mathrm{o}(x^4)$$

ce qui entraîne :

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4).$$

> ***Remarque*** Ici, il a suffi de prendre un développement à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{1-u}$ car $u(x) = \mathrm{O}(x^2)$ et donc $\mathrm{o}(u(x)^2) = \mathrm{o}(x^4)$.

3. On peut en déduire un développement limité à l ordre 5 en 0 de la fonction tangente, en multipliant ce résultat par le développement limité de $\sin x$:

$$\tan x = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \mathrm{o}(x^4)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{o}(x^5)\right)$$
$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

Proposition 8

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ ainsi que f et g deux applications de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des développements limités à l'ordre n en a. Si g a une limite non nulle en a, alors la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en a.

ém nstration

► Quitte à remplacer x par $a+h$ si $a \in \mathbb{R}$ ou par $\dfrac{1}{u}$ si $a = \pm\infty$, on peut supposer $a = 0$

► La fonction g admettant une limite non nulle en 0, elle ne s'annule pas au voisinage de 0 et f/g est définie au voisinage de 0.
En posant $\lim\limits_0 g = \ell$, on peut écrire au voisinage de 0 :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{\ell - \big(\ell - g(x)\big)} = \frac{f(x)}{\ell}\,\frac{1}{1 - \left(1 - \dfrac{g(x)}{\ell}\right)}.$$

La fonction $u\ :\ x \mapsto 1 - \dfrac{g(x)}{\ell}$ admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n dont le terme constant est nul. Donc, d'après la proposition précédente, la fonction $\dfrac{1}{1-u}$ admet un developpement limité à l'ordre n en 0.
Par suite :

$$\frac{f}{g} = \frac{f}{\ell}\,\frac{1}{1-u}$$

admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n comme produit de fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0. □

Exemple Développement limité à l ordre 3 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Conformément à la méthode utilisée dans la démonstration précédente, on écrit :

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \left(\dfrac{1-e^x}{2}\right)}.$$

On a les développements limités :

$$\frac{e^x - 1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$
$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \mathrm{o}(u^3)$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}2f(x) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{12}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) + \left(\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{12}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{12}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right)^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{24}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\end{aligned}$$

soit :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{48}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

2.3 Composition de développements limités

Traitons cette opération sur des exemples.

Exemples

1. Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\sin x}$.

   Au voisinage de 0, on a :
$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + u^3\varepsilon(u).$$
   En remplaçant u par $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$ dans ce développement limité on obtient :
$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right)^2$$
$$+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right)^3 + \mathrm{o}(x^3)$$
   puisqu'au voisinage de 0, on a :
$$(\sin x)^3\varepsilon(\sin x) \sim x^3\,\varepsilon(\sin x) = \mathrm{o}(x^3).$$
   Donc :
$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^3).$$

2. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction g définie sur $]-\pi, \pi[\, \setminus \{0\}$ par $g(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

   On a les développements limités suivants :
$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$
$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \mathrm{o}(u^2).$$
   Or au voisinage de 0, on a :
$$\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)^2 \sim \left(-\frac{1}{6}x^2\right)^2 = \mathrm{O}(x^4),$$
   d'où $\mathrm{o}\left(\left(\dfrac{\sin x}{x} - 1\right)^2\right) = \mathrm{o}(x^4)$, et par suite :
$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)\right)^2 + \mathrm{o}(x^4)$$
$$= -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \mathrm{o}(x^4).$$

Remarque Dans le développement précédent, il a suffi de prendre un développement de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 car $u(x) = \dfrac{\sin x}{x} - 1 = \mathrm{O}(x^2)$ et donc $\mathrm{o}(u(x)^2) = \mathrm{o}(x^4)$.

2.4 Intégration des développements limités

Proposition 9

Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue possédant en 0 un développement limité à l'ordre n qui vaut $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$. Si F est une primitive de f, alors elle admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 qui est :

$$F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\, x^{k+1}.$$

Démonstration

Cas particulier. Le developpement limité de f est nul et $F(0) = 0$.

On suppose donc qu'il existe une fonction φ définie sur I telle que

$$\forall x \in I\,,\ f(x) = x^n \varphi(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{0} \varphi = 0$$

et on veut prouver que F possède en 0 un développement limité à l'ordre $n+1$ qui est nul, c'est-à-dire $F(x) = \mathrm{o}(x^{n+1})$.

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence vers 0 de la fonction φ nous donne l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I\,,\ |x| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)\big| \leqslant \varepsilon |x|^n.$$

Si $x \in I$ est tel que $|x| \leqslant \eta$, on a :

$$\forall t \in [0, x]\ ,\ \big|f(t)\big| \leqslant \varepsilon |t|^n \leqslant \varepsilon |x|^n$$

et par suite :

$$\big|F(x)\big| = \left|\int_0^x f(t)\, dt\right| \leqslant \int_{[0,x]} |f| \leqslant \varepsilon |x|^{n+1}.$$

On a ainsi prouvé la convergence de $\dfrac{F(x)}{x^{n+1}}$ vers 0 et donc $F(x) = \mathrm{o}(x^{n+1})$

Cas général. Par hypothèse on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + g(x) \qquad \text{avec} \qquad g(x) = \mathrm{o}(x^n)$$

Si F est une primitive de f, en intégrant entre 0 et x l'égalité ci-dessus, on a, en utilisant le cas précédent .

$$F(x) - F(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \int_0^x g(t)\,dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

ce qui prouve le résultat. □

Remarques

1. On a un résultat analogue au voisinage de x_0 ; si f a pour développement limité à l'ordre n :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^n\big)$$
alors F a un développement limité à l'ordre $n+1$ et :
$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\,(x - x_0)^{k+1} + o\big((x - x_0)^{n+1}\big).$$

2. On peut encore énoncer le résultat précédent en disant que si $f \in \mathcal{C}^1(I)$ et si sa dérivée f' admet au voisinage de x_0 un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$, alors f admet en x_0 un développement limité à l'ordre $n+1$ qui est $f(x_0) + \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \dfrac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1}$.

Attention

- Si la fonction f est dérivable, l'existence d'un développement à l ordre n pour f n'implique pas l'existence d'un développement limité à l ordre $n-1$ pour f' comme le prouve l'exemple de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$
La fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 mais f' n'a pas de limite en 0 et donc n'admet de développement limité à aucun ordre en 0 (*cf.* page 498).

- En revanche si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si l'on sait que f' admet un developpement limité à l'ordre $n-1$ (par exemple si f est de classe $\mathcal{C}^n$), alors on peut obtenir ce développement limité de f' en dérivant le développement limité à l'ordre n de la fonction f.

Exemples

1. En intégrant le développement limité à l'ordre n de $\dfrac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

on peut retrouver rapidement celui de $\ln(1+x)$ à l'ordre $n+1$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{o}(x^{n+1}).$$

2. Le développement limité :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

donne par intégration :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2}).$$

3. De la même façon, en intégrant le développement limité de $\dfrac{1}{1-x^2}$ on obtient :

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2}).$$

4. Le développement limité :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^{2n} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

donne par intégration :

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2}).$$

5. De la même façon en intégrant le developpement limité de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, on obtient :

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2}).$$

6. Développement limité de la fonction $f = \arctan$ à l'ordre 3 au voisinage de 1.

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Calculons un développement de f' à l'ordre 2 au voisinage de 1 en posant $x = 1 + h$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f'(1+h) &= \frac{1}{1+(h+1)^2} = \frac{1}{2+2h+h^2} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+h+\dfrac{h^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,h + \frac{1}{4}\,h^2 + \mathrm{o}(h^2). \end{aligned}$$

En remplaçant h par $x-1$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,(x-1) + \frac{1}{4}\,(x-1)^2 + \mathrm{o}\big((x-1)^2\big)$$

ce qui donne, en intégrant :

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,(x-1) - \frac{1}{4}\,(x-1)^2 + \frac{1}{12}\,(x-1)^3 + \mathrm{o}\big((x-1)^3\big).$$

7. On peut retrouver très rapidement le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $f = \tan$ en utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$.
Comme $\tan x \sim x$, on a $f(x) = x + \mathrm{o}(x)$ et on en déduit :

$$f'(x) = 1 + \big(f(x)\big)^2 = 1 + x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$

ce qui donne en intégrant :

$$f(x) = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \big(f(x)\big)^2 = 1 + \left(x + \frac{1}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right)^2 \\ &= 1 + x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + \mathrm{o}(x^4) \end{aligned}$$

soit, en intégrant :

$$\tan x = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

On peut facilement réitérer le procédé pour obtenir un développement limité à l'ordre 7 ou plus. On trouve ainsi :

$$\tan x = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 + \frac{17}{315}\,x^7 + \mathrm{o}(x^7).$$

En fait ce dernier résultat vaut aussi pour $\mathrm{o}(x^8)$.

3. Applications

3.1 Recherche d'équivalents

Méthode Quand une fonction f admet en x_0 un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0$$

alors :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p.$$

Exemples

1. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\,(1+\cos x) - 2\tan x.$$

L'utilisation directe des équivalents :

$$x\,(1+\cos x) \underset{0}{\sim} 2x \qquad \text{et} \qquad 2\tan x \underset{0}{\sim} 2x$$

ne permettant pas de conclure, le recours à un développement limité s'impose. On constate que f est impaire et que le coefficient de x dans le développement limité de f est nul, ce qui oblige à chercher un développement limité à un ordre au moins égal à 3. On a :

$$x\,(1+\cos x) = x\left(2 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right) = 2x - \frac{1}{2}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

$$-2\tan x = -2x - \frac{2}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

ce qui donne $f(x) = -\dfrac{7}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)$, et donc :

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{7}{6}\,x^3.$$

2. Déterminer un équivalent au voisinage de l'infini de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x\,(x+1)}{1+x^2}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, si l'on pose $u = \dfrac{1}{x}$, on a :

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = e^u - \frac{\dfrac{1}{u}\left(\dfrac{1}{u}+1\right)}{1+\dfrac{1}{u^2}} = e^u - \frac{1+u}{1+u^2}.$$

D'après les développements limités :

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

$$\frac{1+u}{1+u^2} = (1+u)\big(1 - u^2 + \mathrm{o}(u^2)\big) = 1 + u - u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

on a :

$$e^u - \frac{1+u}{1+u^2} = \frac{3}{2}u^2 + \mathrm{o}(u^2) \underset{0}{\sim} \frac{3}{2}u^2$$

et, par substitution de $\dfrac{1}{x}$ à u :

$$f(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{3}{2x^2}.$$

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x\,(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}$.

On a déjà trouvé un équivalent du numérateur :

$$x\,(1+\cos x) - 2\tan x \underset{0}{\sim} -\frac{7}{6}\,x^3.$$

Cherchons un équivalent du dénominateur en faisant un développement limité à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} 2x - \sin x - \tan x &= 2x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) - \left(x + \frac{1}{3}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) \\ &= -\frac{1}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ &\sim -\frac{1}{6}\,x^3 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{x\,(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x} \sim \frac{-\frac{7}{6}\,x^3}{-\frac{1}{6}x^3} = 7$$

et donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\,(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x} = 7.$$

4. Étude de $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

Transformons d'abord l'expression de manière à obtenir un quotient :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - x}{x\,\ln(1+x)}.$$

On a :

$$x \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x^2.$$

Un développement limité à l'ordre 2 donne :

$$\ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}\,x^2 + \mathrm{o}(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}\,x^2$$

Par suite :

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

et donc :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right) = -\frac{1}{2}.$$

3.2 Etude de tangentes

Courbe d'équation $y = f(x)$

L'existence d'une tangente non verticale au point d'abscisse x_0 du graphe d'une fonction f est équivalente à la dérivabilité de f en x_0, c'est–à–dire à l'existence d'un développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de x_0.

Dans ce cas, l'étude du signe de :

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\,f'(x_0)$$

permet de préciser la position de la courbe par rapport à la tangente.

Méthode

- Si en x_0, on dispose d'un développement limité :

  $$f(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2 + \mathrm{o}\big((x - x_0)^2\big) \quad \text{avec} \quad a_2 \neq 0$$

  alors la tangente est la droite d'équation $y = a_0 + a_1\,(x - x_0)$ et, au voisinage de x_0, la position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de a_2, car :

  $$f(x) - \big(a_0 + a_1\,(x - x_0)\big) \sim a_2\,(x - x_0)^2.$$

- Plus genéralement, si en x_0, on dispose d'un developpement limité à un ordre $p \geqslant 2$:

  $$f(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_p\,(x - x_0)^p + \mathrm{o}\big((x - x_0)^p\big) \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0$$

  alors la tangente est la droite d'équation $y = a_0 + a_1\,(x - x_0)$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $a_p\,(x - x_0)^p$.

Exemples

1. En 1, la fonction Arc tangente a pour développement limité à l'ordre 2 :

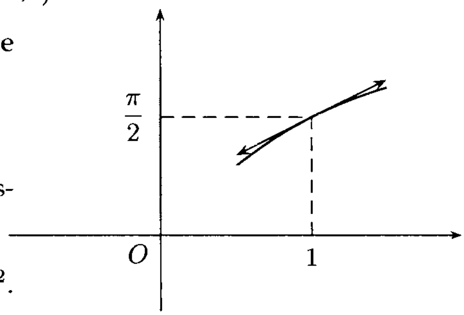
$$\arctan x = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\,(x-1)-\frac{1}{4}\,(x-1)^2+\mathrm{o}\big((x-1)^2\big).$$

Son graphe est donc tangent à la droite d'équation :

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1)$$

et au voisinage de 1 la courbe est en dessous de sa tangente car :

$$\arctan x - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,(x-1)\right) \sim -\frac{1}{4}\,(x-1)^2.$$



Remarque On aurait pu aussi trouver ce résultat en utilisant la concavité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction Arc tangente.

2. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ a pour développement limité à l'ordre 3 en 0 :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{48}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

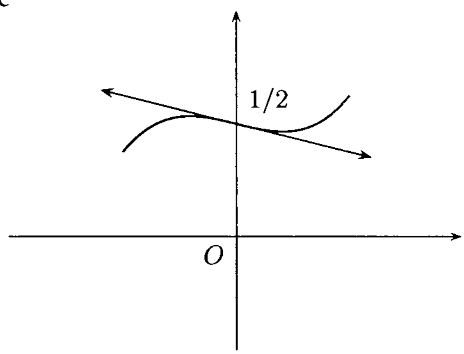
Au point d'abscisse 0, le graphe est donc tangent à la droite d'équation :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$$

et, au voisinage de 0, la quantité :

$$\frac{1}{1+e^x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,x\right) \sim \frac{1}{48}\,x^3$$

est positive à droite et négative à gauche. Le graphe traverse donc la tangente : il s'agit d'un point d'inflexion.



Courbe paramétrée

Soit une courbe paramétrée dont on cherche à étudier l'allure au voisinage d'un point de paramètre t_0. On suppose $t_0 = 0$, quitte à poser $u = t - t_0$.

On suppose que x et y admettent des développements limités en 0 à l'ordre n :

$$x(t) = x_0 + x_1\,t + \cdots + x_n\,t^n + \mathrm{o}(t^n)$$

$$y(t) = y_0 + y_1\,t + \cdots + y_n\,t^n + \mathrm{o}(t^n)$$

Posons $M_0 = (x_0, y_0)$, $A_i = (x_i, y_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $M(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. On écrit vectoriellement les développements limités ci–dessus sous la forme :

$$\overrightarrow{M_0 M(t)} = t\, A_1 + t^2\, A_2 + \cdots + t^n\, A_n + \mathrm{o}(t^n).$$

Comme les composantes dans n'importe quelle base du plan, du vecteur $\overrightarrow{M_0 M(t)} - t\, A_1 - t^2\, A_2 - \cdots - t^n\, A_n$ s'écrivent comme combinaisons linéaires de :

$$x(t) - x_0 - x_1\, t - \cdots - x_n\, t^n \qquad \text{et} \qquad y(t) - y_0 - y_1\, t - \cdots - y_n\, t^n,$$

on en déduit qu elles sont aussi negligeables devant t^n.

Supposons maintenant que parmi les vecteurs A_1, A_2,…, A_n, il y en ait au moins deux non proportionnels.

- Il existe donc au moins un vecteur A_i non nul et on peut poser $p = \min\big\{i \in [\![1, k]\!] \bigm| A_i \neq 0\big\}$.
- Par hypothèse il existe au moins un indice i tel que A_p et A_i soient linéairement indépendants ; prenons q le plus petit d'entre eux. Comme pour $\imath < p$ tous les vecteurs A_i sont nuls, on a $q > p$.

Les entiers p et q vérifient alors les propriétés suivantes :

- $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $A_\imath = 0$.
- $A_p \neq 0$.
- $\forall j \in [\![p+1, q-1]\!]$, $A_j = \lambda_j\, A_p$, avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$.
- $\big(A_p, A_q\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

En notant $X(t)$ et $Y(t)$ les coordonnées du point $M(t)$ dans le repère $\big(M_0, A_p, A_q\big)$, on obtient :

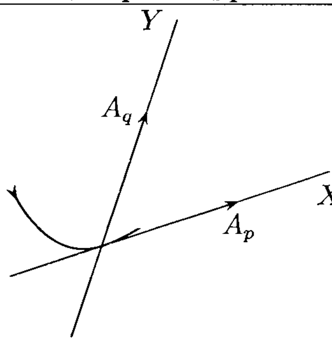
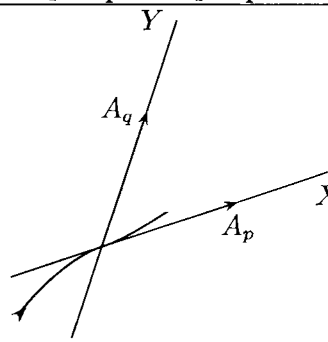
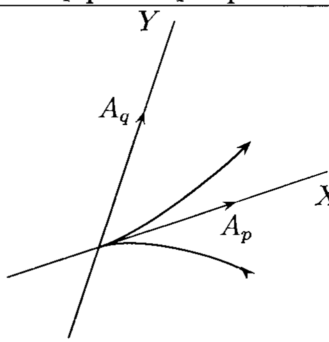
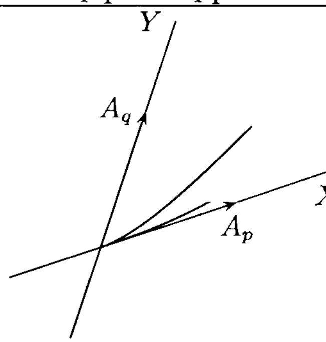
$$X(t) = t^p + \sum_{i=p+1}^{q-1} t^\imath\, \lambda_i + \mathrm{o}(t^q) \underset{0}{\sim} t^p$$

$$Y(t) = t^q + \mathrm{o}(t^q) \underset{0}{\sim} t^q$$

ce qui montre qu'au voisinage de 0 :

- $X(t)$ a le signe de t^p,
- $Y(t)$ a le signe de t^q.

Selon la parité de p et q, on obtient alors diverses formes de courbes :

p impair et q pair	p impair et q impair
	
X change de signe, $Y \geqslant 0$ Point banal	X et Y changent de signe Point d'inflexion
p pair et q impair	p pair et q pair
	
$X \geqslant 0$ et Y change de signe Rebroussement de première espèce	$X \geqslant 0$ et $Y \geqslant 0$ Rebroussement de seconde espèce

Remarques

- Le cas le plus courant est le cas où $p = 1$ et $q = 2$ (point banal).
- Dans le cas d'un point singulier, on a $p \geqslant 2$. Le plus souvent on trouve $p = 2$ et $q = 3$, c'est-à-dire un point de rebroussement de première espèce.

Exemple Étudions l'allure de la courbe paramétrée par :

$$x(t) = \ln(1 + t + t^2) - t \qquad \text{et} \qquad y(t) = \cos(t)$$

au voisinage de $t = 0$.

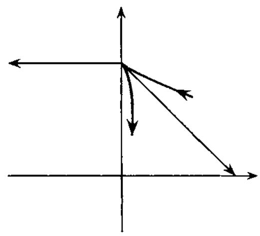
On obtient :

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} + o(t^3) \qquad \text{et} \qquad y(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

ce que l'on écrit :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2t^3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(t^3).$$

La courbe a donc l'allure suivante :



Points d'inflexion Pour qu'un point régulier ($p = 1$) soit un point d'inflexion il faut que q soit impair, donc $q \geqslant 3$. Si la courbe est de classe $\mathcal{C}^2$, les vecteurs $\overrightarrow{M}'$ et $\overrightarrow{M}''$ doivent donc être proportionnels. Les points d'inflexion sont donc à chercher là où :

$$x'y'' - x''y' = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

On peut aussi utiliser la pente de la tangente $p = \dfrac{y'}{x'}$ en les points où $x' \neq 0$.

En effet :

$$p'(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2}$$

s'annule aux points d'inflexion. Voir les exercices 20 et 21.

3.3 Recherche d'asymptotes

Courbe d'équation $y = f(x)$

Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{\infty} |f| = +\infty$. L'existence d'une asymptote au graphe de f est équivalente à l existence de constantes a_0 et a_1 ainsi que d'une fonction ε tendant vers 0 en l'infini et vérifiant :

$$f(x) = a_0\, x + a_1 + \varepsilon(x).$$

Dans ce cas, l'étude du signe de $f(x) - (a_0\, x + a_1)$ permet de « positionner » la courbe par rapport à son asymptote.

Méthode

- S'il existe des réels a_0, a_1 et a_2 tels que $a_2 \neq 0$ et au voisinage de l'infini :
$$f(x) = a_0\,x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$
alors la droite d'équation $y = a_0\,x + a_1$ est asymptote au graphe, et au voisinage de l'infini, la position de la courbe par rapport à son asymptote est alors donnée par la signe de a_2/x car :
$$f(x) - (a_0\,x + a_1) \sim \frac{a_2}{x}.$$
- Plus généralement, s'il existe un entier $p \geqslant 1$ et des réels a_0, a_1 et a_{p+1} tels que $a_{p+1} \neq 0$ et :
$$f(x) = a_0\,x + a_1 + \frac{a_{p+1}}{x^p} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^p}\right) \qquad (*)$$
alors la droite d'équation $y = a_0 x + a_1$ est asymptote au graphe, et au voisinage de l'infini, la position de la courbe par rapport à son asymptote est donnée par la signe de a_{p+1}/x^p.

Remarque Quand une fonction f vérifie $(*)$, on dit qu'elle possède un développement asymptotique au voisinage de l'infini. Pour obtenir un tel développement, on calcule un développement limité à l'ordre $p+1$ de $f(x)/x$ car $(*)$ est équivalent à :
$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_{p+1}}{x^{p+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^{p+1}}\right).$$

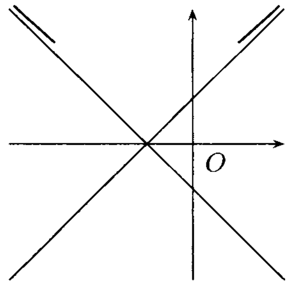
Exemples

1. Étude à l'infini de la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \,]0,1]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

Pour $x \in \mathcal{D}$, si l'on pose $u = \dfrac{1}{x}$, on a :
$$\frac{f(x)}{x} = u\sqrt{\frac{\frac{1}{u^3}}{\frac{1}{u} - 1}} = \frac{u}{|u|}\frac{1}{\sqrt{1-u}}.$$
Comme :
$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \frac{1}{2}\,u + \frac{3}{8}\,u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$
on a au voisinage de $+\infty$:
$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
c'est-à-dire :
$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

De même, au voisinage de $-\infty$:

$$f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$



Les droites d'équations $y = x + \dfrac{1}{2}$ et $y = -x - \dfrac{1}{2}$ sont donc asymptotes au graphe, et l'on a, au voisinage de l'infini, sa position par rapport à ses asymptotes : (voir ci-contre).

En MAPLE, on obtient le développement asymptotique précédent avec la fonction `series` :

```
> series(sqrt(x^3/(x-1)),x=infinity,2);
```

$$x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. Rechercher les asymptotes au graphe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\cdot$

Etant donné $x \neq 0$, si l'on pose $u = \dfrac{1}{x}$, on a :

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{1+e^u}\cdot$$

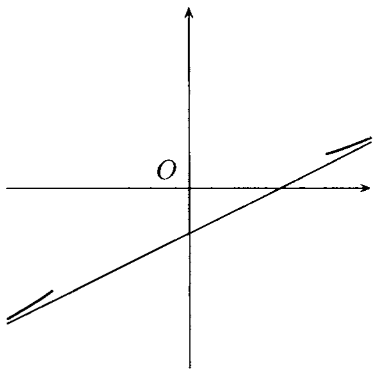
L'application $u \mapsto \dfrac{1}{1+e^u}$ a pour développement limité à l ordre 3 en 0 :

$$\frac{1}{1+e^u} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}u + \frac{1}{48}u^3 + \mathrm{o}(u^3)$$

ce qui donne finalement :

$$g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{48}\frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

La droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est donc asymptote au graphe et au voisinage de l'infini, le graphe est situé au dessus de son asymptote.



Courbe paramétrée

Soit une courbe paramétrée possédant une direction asymptotique d'équation $y = a\,x$ lorsque le paramètre t tend vers t_0.

On peut trouver l'asymptote éventuelle en effectuant un développement limité de $y(t) - a\,x(t)$ au voisinage de t_0. Par exemple dans le cas $t_0 \in \mathbb{R}$ si on trouve :

$$y(t) - a\,x(t) = b + c\,(t - t_0)^p + o\big((t - t_0)^p\big)$$

avec $p > 0$ et $c \neq 0$, on sait que la courbe possède au voisinage de t_0 une asymptote d'équation $y = a\,x + b$, et que sa position par rapport à son asymptote est donnée, au voisinage de t_0, par le signe de $c\,(t - t_0)^p$.

Exemple Étude des branches infinies en $\pm\infty$ de l'arc paramétré défini par :

$$\left(x(t) = \frac{t^2}{t-1}\,,\ y(t) = \frac{2\,t^3 + 1}{t^2 - t}\right).$$

- Au voisinage de $\pm\infty$, on a $x(t) \sim t$ et $y(t) \sim 2t$, ce qui donne $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 2$.
- En posant $h = \dfrac{1}{t}$, on peut calculer les développements asymptotiques de x et y à l'infini. On obtient :

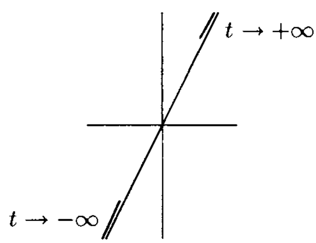
$$x\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h} \times \frac{1}{1-h} = \frac{1}{h} + 1 + h + h^2 + o(h^2)$$

$$y\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h} \times \frac{2 + h^3}{1-h} = \frac{2}{h} + 2 + 2h + 3h^2 + o(h^2)$$

ce qui donne :

$$y(t) - 2x(t) = \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La droite d'équation $y = 2x$ est donc asymptote à l'arc et, au voisinage de l'infini, la courbe est au dessus de son asymptote.



EXERCICES

1. Calculer les développements limités suivants :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ à l'ordre 2 en $x = 0$,

b) $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en $x = 2$,

c) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$.

2. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet-elle un développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 0 ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction :

$$x \mapsto |x|^n$$

admet-elle un développement limité d'ordre n en $x = 0$?

4. Calculer les développements limités suivants :

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0,

b) $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

c) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+2}$ à l'ordre 3 en 0

d) $\ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ à l'ordre 4 en 0,

e) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ à l'ordre 3 en 0

f) $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$,

g) $\arccos\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$ à l'ordre 2 en 0

5. Étudier les asymptotes du graphe de la fonction :

$$x \overset{f}{\mapsto} \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}.$$

6. Étudier les branches infinies de la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{x}(2x^2-1)e^{1/x}$$

7. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}.$$

a) Calculer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
Quelle conséquence en déduit-on sur la courbe représentative de f ?

b) Quelle est l'allure de la courbe au voisinage de 0 ?

c) Étudier les variations de f, puis tracer sa courbe représentative.

8. Trouver les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

b) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$,

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$,

e) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

9. La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

a-t-elle un développement limité au voisinage de 0 ?

10. Trouver le développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 de :

$$f(x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

11. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

12. Déterminer a et b pour que la partie principale en 0 de la fonction :

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit de degré le plus grand posssible.

13. Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2\tan x - x$.

Montrer que f admet une réciproque impaire de classe C^∞.

Donner le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0.

14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ que l'on notera u_n.

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Montrer ensuite que :

$$u_n \sim \ln n.$$

On considère $v_n = u_n - \ln n$.

Trouver un équivalent de v_n.

Montrer qu'il existe des nombres a et b tels que :

$$u_n = a\ln n + b\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\cdot$$

15. Soit :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\cdot$$

Montrer que :

$$u_n \sim \ln n$$

en encadrant $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}\cdot$

Étudier la convergence de la suite $u_n - \ln n$.

16. Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution x_n dans l intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

Montrer que $x_n \sim n\pi$, puis que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}\cdot$

Chercher un équivalent de :

$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}\cdot$$

Conclure que :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

17. Soit u_n une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \in \left]-1, +\infty\right[.$$

a) Montrer que si $u_n = \mathrm{o}(\sqrt{n})$ alors $\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n \sim e^{u_n}$.

b) Montrer la réciproque.

On pourra d'abord établir que si $u_n - \ln(1+u_n)$ converge vers 0, alors u_n converge vers 0.

18 Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ continue telle que :

$$f(x) = x - ax^\alpha + \mathrm{o}(x^\alpha)$$

au voisinage de 0 avec $a > 0$ et $\alpha > 1$.

On définit une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ .\ u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Montrer que pour u_0 assez petit, la suite est décroissante et converge vers 0

b) Soit $\beta > 0$, on pose :

$$x_n = \frac{1}{u_{n+1}^\beta} - \frac{1}{u_n^\beta}\cdot$$

Trouver un équivalent de (x_n)

c) En choisissant judicieusement β, trouver un équivalent de la suite (u_n).

On pourra utiliser le théorème de Cesàro (voir exercice 29 du chapitre 9)

d) Application : prendre $f(x) = \sin x$.

19 Soit (E) l'équation différentielle :

$$2xy'' - y' + x^2 y = 0.$$

a) Trouver une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant un développement limité en 0 à tout ordre ainsi que ses dérivées.

b) En effectuant un changement de variable pour ramener l'équation (E) à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

c) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$?

Études locales et asymptotiques des courbes paramétrées

20. Étudier la courbe paramétrée par :

$$x(t) = \sin t \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t}\cdot$$

On déterminera en particulier les points d'inflexion.

21. Tracer la courbe paramétrée par :

$$x(t) = 6t^2 + 4t^3 + t^4 \qquad \text{et} \qquad y(t) = 3t^2 + 2t^3.$$

On étudiera en particulier les points d'inflexion.

22. Un cercle Γ roule sans glisser sur une droite. Déterminer et tracer la courbe décrite par un point M fixe sur Γ.

23. Étude de la courbe paramétrée par :

$$x = \frac{t^2}{(1-t^2)(1-2t)} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{t^3}{(1-t^2)(1-2t)}\cdot$$

24. **a)** Étude de la courbe Γ paramétrée par :

$$x = 2t^2 - 2t + \frac{1}{t^2} \qquad \text{et} \qquad y = 2t + \frac{1}{t^2}\cdot$$

b) Trouver les coordonnées du point double (point ayant deux antécédents). On pourra utiliser $x - y$ et $x + y$.

c) Trouver des réels a, b et c pour que l'on ait :

$$\lim_{t \to \pm\infty} y^2 - a\,x - b\,y - c = 0.$$

On dit alors que la courbe d'équation $y^2 - a\,x - b\,y - c = 0$ est asymptote à Γ. Quelle est la nature de cette courbe ? En déterminer l'axe et le sommet.

Chapitre 18

Suites et fonctions complexes

Le but de ce chapitre est d'étendre aux suites et fonctions à valeurs complexes les principales notions et propriétés des suites et fonctions réelles.

Toutes les fonctions considérées sont donc définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Généralités

1.1 L'ensemble $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$

Si f et g sont deux applications d'une partie X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et si λ et μ sont deux complexes, on définit les fonctions $\lambda\, f + \mu\, g$ et $f\, g$ en posant, pour $x \in X$:

$$(\lambda\, f + \mu\, g)(x) = \lambda\, f(x) + \mu\, g(x) \qquad \text{et} \qquad (f\, g)(x) = f(x)\, g(x).$$

Notations Soit f une application définie sur X.

- On note $|f|$ la fonction definie sur X par $|f|(x) = \big|f(x)\big|$.
- On note $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ les fonctions définies sur X par :

$$(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}\big(f(x)\big) \qquad \text{et} \qquad (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}\big(f(x)\big)$$

- On pose $\overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f$; c'est la fonction définie sur X par $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$.

Remarques

- Le cas des suites complexes s'obtient en considerant $X = \mathbb{N}$
- On note plutôt $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes.

1.2 Fonctions bornées

Définition 1

On dit que f est *bornée* si $|f|$ est majorée c'est-à-dire si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \in X \, , \ \big|f(x)\big| \leqslant M.$$

Remarque Lorsque l'on a :

$$\forall x \in X \, , \ \big|f(x)\big| \leqslant M,$$

on dit que f est *bornée par* M.

Proposition 1

Étant donnée une fonction complexe f, il est équivalent de dire que f est bornée ou que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont bornées.

émonstratio Le résultat vient des inégalités :

$$|\operatorname{Re} f| \leqslant |f| \, , \qquad |\operatorname{Im} f| \leqslant |f| \quad \text{et} \quad |f| \leqslant |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|.$$ □

Proposition 2

Une combinaison linéaire (respectivement un produit) de fonctions bornées sur X est une fonction bornée sur X.

Démonstration

- Si f et g sont bornées, alors leurs parties réelles et imaginaires sont bornées, donc les parties réelle et imaginaire de $f + g$ aussi, ce qui prouve que $f + g$ est bornée.
- Si f et g sont deux fonctions bornées, on peut trouver M_1 et M_2 tels que :

$$\forall x \in X \, , \ \big|f(x)\big| \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad \forall x \in X \, , \ \big|g(x)\big| \leqslant M_2$$

  d'où l'on déduit :

$$\forall x \in X \, , \ \big|f(x)\, g(x)\big| \leqslant M_1 \, M_2.$$

- On en déduit en particulier que si f est bornée par M, alors pour tout complexe k, la fonction $k\, f$ est bornée □

2. Suites complexes

2.1 Suites convergentes

Définition 2

On dit qu'une suite complexe $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la suite réelle $(|u_n - \lambda|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Le complexe λ est alors unique. On l'appelle *limite* de la suite u et on note :

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \lim u.$$

On dit aussi que la suite u *converge* vers λ.

émonstratio S'il existe deux complexes λ et λ' tels que $|u - \lambda|$ et $|u - \lambda'|$ tendent vers 0, alors on a l'inégalité :

$$0 \leqslant |\lambda - \lambda'| \leqslant |\lambda - u_n| + |u_n - \lambda'|$$

qui, par passage à la limite sur des suites à termes réels, entraîne $0 \leqslant |\lambda - \lambda'| \leqslant 0$. Donc $\lambda = \lambda'$.

□

Proposition 3

Étant donnés une suite complexe u et un nombre complexe λ, il est équivalent de dire :

(i) la suite u converge vers λ,

(ii) les suites $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ convergent respectivement vers $\operatorname{Re}\lambda$ et $\operatorname{Im}\lambda$.

émonstration

- L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est une conséquence des inégalités :

$$0 \leqslant |\operatorname{Re} u_n - \operatorname{Re}\lambda| \leqslant |u_n - \lambda| \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant |\operatorname{Im} u_n - \operatorname{Im}\lambda| \leqslant |u_n - \lambda|.$$

- L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est une conséquence de :

$$|u_n - \lambda| \leqslant |\operatorname{Re} u_n - \operatorname{Re}\lambda| + |\operatorname{Im} u_n - \operatorname{Im}\lambda|.$$

□

Exemples

1. La suite définie par $u_n = \dfrac{(1+i)^n}{2^n}$ converge vers 0 car on a $|u_n| = 1/\sqrt{2^n}$ et donc $\lim |u| = 0$.

2. La suite définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right) + \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) i$ converge vers $1 + 2i$ car les suites réelles $\operatorname{Re} u$ et $\operatorname{Im} u$ convergent respectivement vers 1 et 2.

3. La suite définie par $u_n = 1 + n\imath$ ne converge pas car la suite $\operatorname{Im} u$ ne converge pas.
4. Si k est un nombre complexe de module strictement inférieur à 1, la suite géométrique $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 puisque son module est une suite géométrique de raison $|k| < 1$.
5. Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles convergeant respectivement vers r et θ, alors la suite $\left(r_n\, e^{i\theta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $r\,e^{i\theta}$, puisque l'on a :
$$r_n\, e^{i\theta_n} = r_n\, \cos\theta_n + i\, r_n\, \sin\theta_n$$
et que les propriétés des suites réelles prouvent que $(r_n\, \cos\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n\, \sin\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $r\, \cos\theta$ et $r\, \sin\theta$.
6. La réciproque du résultat précédent est fausse : on peut avoir $\left(r_n\, e^{i\theta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge sans que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Il suffit de prendre par exemple $r_n = (-1)^n$ et $\theta_n = n\,\pi$.

Proposition 4

Si u est une suite convergeant vers λ, alors la suite $|u|$ converge vers $|\lambda|$.

Démonstratio Évident en utilisant l'inégalité triangulaire :
$$0 \leqslant \big||u_n| - |\lambda|\big| \leqslant |u_n - \lambda|.$$
□

Attention

- La réciproque de la proposition précédente est fausse : la suite $|u_n|$ peut converger sans que la suite u converge comme le prouve l'exemple de la suite définie par $u_n = \exp(ni\pi/4)$. La suite des modules est constante et donc convergente mais la suite u ne converge pas car la suite réelle $\operatorname{Re} u = \big(\cos(n\pi/4)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
- Si une suite u à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ converge vers un complexe $\lambda \neq 0$, la suite des arguments principaux $(\operatorname{Arg} u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas nécessairement, et *a fortiori* ne converge pas vers $\operatorname{Arg}\lambda$.

  Il suffit pour s'en convaincre de considérer la suite $u_n = -e^{(-1)^n \imath\pi/n}$ qui converge vers -1. On a :

  - $\operatorname{Arg} u_n = -\pi + \dfrac{\pi}{n}$ si n est pair,
  - $\operatorname{Arg} u_n = \pi - \dfrac{\pi}{n}$ si n est impair.

Corollaire 5

Toute suite convergente est bornée.

émonstration Soit u une suite convergeant vers λ D'après la proposition précédente, la suite réelle $|u|$ converge vers $|\lambda|$; elle est donc bornée, ce qui équivaut à dire que la suite u est bornée. □

Attention Encore une fois, la réciproque est fausse comme le prouve l'exemple de la suite définie par $u_n = \exp(ni\pi/4)$.

Proposition 6

Si u est une suite convergeant vers λ, alors la suite $\overline{u}$ converge vers $\overline{\lambda}$.

émonstration On a $|\overline{u}_n - \overline{\lambda}| = |u_n - \lambda|$. □

2.2 Suites extraites

Définition 3

Une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite extraite*, ou *sous–suite*, d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Proposition 7

Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si u converge vers λ, alors v converge vers λ.

emonstration En effet, la suite $|v - \lambda|$ est une sous–suite de la suite $|u - \lambda|$ qui converge vers 0. □

Méthode On utilise surtout le résultat précédent pour démontrer qu'une suite n'est pas convergente en exhibant deux sous–suites convergeant vers des limites différentes.

Exemple On peut utiliser ce résultat pour donner une preuve de la *divergence* (non convergence) de la suite $u_n = \exp(ni\pi/2)$. Il suffit de remarquer que la suite $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge vers 1, et que la suite $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge vers i.

MPSI **Proposition 8 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**

Toute suite bornée possède une sous–suite convergente.

émonstratio Soit u une suite complexe bornée.
La suite réelle $\mathrm{Re}\, u$ est bornée ; on peut donc trouver une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(\mathrm{Re}\, u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente

La suite $v = (\mathrm{Im}\, u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bornée et on peut donc en extraire une sous-suite $(v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (avec $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante)

La suite $(\mathrm{Im}\, u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente par construction et la suite $(\mathrm{Re}\, u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente comme suite extraite d'une suite convergente

Donc la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Attention La suite extraite de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien $\left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et non $\left(u_{\psi\circ\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ comme pourrait le laisser croire une réflexion trop hâtive. □ MPSI

3. Propriétés des suites convergentes

3.1 Ensemble des suites convergentes

Proposition 9

Étant donnés deux suites complexes convergentes u et v ainsi que deux complexes λ et μ, les suites $\lambda u + \mu v$ et uv convergent respectivement vers $\lambda \lim u + \mu \lim v$ et $\lim u \lim v$.

émonstration Soient ℓ et m les limites des suites u et v. Les inégalités :

$$0 \leqslant \left|\lambda u + \mu v - (\lambda \ell + \mu m)\right| \leqslant |\lambda|\,|u-\ell| + |\mu|\,|v-m|$$

et

$$0 \leqslant |uv - \ell m| = \left|u\,(v-m) + m\,(u-\ell)\right| \leqslant |u|\,|v-m| + |m||u-\ell|$$

ainsi que le fait que u soit bornée entraînent les résultats. □

3.2 Inverse et quotient de suites

Proposition 10

Si u est une suite convergeant vers une limite $\lambda \neq 0$, alors à partir d'un certain rang n_0 tous les u_n sont non nuls et la suite $v = (1/u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $1/\lambda$.

émonstration Le premier point est une conséquence du résultat correspondant sur les suites réelles que l'on applique à la suite $\left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $n \geqslant n_0$, on peut alors écrire $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{\overline{u}_n}{|u_n|^2}$.

Comme u converge vers λ la suite $\overline{u}$ converge vers $\overline{\lambda}$ De même la suite réelle $|u_n|$ converge vers $|\lambda|$ et les résultats sur les suites à termes réels permettent de dire que la suite $\left(\dfrac{1}{|u_n|^2}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\dfrac{1}{|\lambda|^2}\cdot$

D'après la proposition 9 de la page ci-contre, on en déduit que la suite $\left(\dfrac{\overline{u}_n}{|u_n|^2}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\dfrac{\overline{\lambda}}{|\lambda|^2} = \dfrac{1}{\lambda}\cdot$ □

Corollaire 11

Soient u une suite convergente et v une suite convergeant vers une limite non nulle. Alors il existe un rang n_0 à partir duquel la suite v ne s'annule plus et la suite $(u_n/v_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\lim u/\lim v$.

4. Limites, continuité en un point

4.1 Définitions

Définition 4

On dit qu'une fonction f admet le complexe ℓ pour *limite* en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si la fonction réelle $|f-\ell|$ tend vers 0 en a. On dit aussi que f *tend vers* ℓ en a ou que $f(x)$ *tend vers* ℓ quand x tend vers a.

Remarque Par définition, si la fonction réelle $|f-\ell|$ tend vers 0 en a, alors elle est définie au voisinage de a (voir définition page 307). Une fonction complexe qui admet une limite en a est donc définie au voisinage de a.

Définition 5

Si une fonction complexe définie en $a \in \mathbb{R}$ admet une limite en a, on dit qu'elle est *continue* en a.

Proposition 12

Soit f une fonction complexe, $\ell \in \mathbb{C}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f admet ℓ pour limite en a.

(ii) Les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ admettent respectivement $\operatorname{Re}\ell$ et $\operatorname{Im}\ell$ pour limite en a.

émonstratio On remarque tout d'abord que les deux conditions entraînent que f est définie au voisinage de a.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Conséquence de $0 \leqslant |\operatorname{Re} f - \operatorname{Re} \ell| \leqslant |f - \ell|$ et $|\operatorname{Im} f - \operatorname{Im} \ell| \leqslant |f - \ell|$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Consequence de $0 \leqslant |f - \ell| \leqslant |\operatorname{Re} f - \operatorname{Re} \ell| + |\operatorname{Im} f - \operatorname{Im} \ell|$. □

Proposition 13

Si une fonction complexe f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors celle–ci est unique. On l'appelle la *limite* de f en a.

émonstratio Si f admet une limite ℓ en a, alors la partie réelle de ℓ est la limite de $\operatorname{Re} f$ et la partie imaginaire de ℓ est la limite de $\operatorname{Im} f$, ce qui prouve l'unicité de ℓ. □

Notation Lorsqu'elle existe, la limite de f en a se note $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Exemples

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+ix}$ tend vers 0 en $+\infty$ puisque $|f(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, puisque ses parties réelle et imaginaire (cosinus et sinus) sont continues sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{x}$ n'a pas de limite en 0 puisque sa partie réelle n'a pas de limite en 0.

4.2 Propriétés des limites

Proposition 14

Si une fonction f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a.

emonstratio Si f admet une limite en a, alors $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ admettent des limites finies en a, donc sont bornées au voisinage de a

On en déduit que f est bornée au voisinage de a □

Proposition 15

Si la fonction f admet $\ell \in \mathbb{C}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors :

- $|f|$ admet $|\ell|$ pour limite en a,
- $\overline{f}$ admet $\overline{\ell}$ pour limite en a.

émonstration Evident en utilisant les relations :

$$0 \leqslant \big||f(x)| - |\ell|\big| \leqslant |f(x) - \ell| \quad \text{et} \quad \big|\overline{f(x)} - \overline{\ell}\big| = |f(x) - \ell|$$

□

4.3 Opérations sur les limites

Proposition 16

Soient f et g deux fonctions complexes définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ainsi que λ et μ deux complexes.

Si $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_a g = m$, alors :

$$\lim_a (\lambda f + \mu g) = \lambda \ell + \mu m \qquad \text{et} \qquad \lim_a f g = \ell m$$

Démonstration Conséquence des inégalités :

$$0 \leqslant \big|\lambda f + \mu g - (\lambda \ell + \mu m)\big| \leqslant |\lambda|\,|f - \ell| + |\mu|\,|g - m|$$

et :

$$0 \leqslant |f g - \ell m| = \big|f(g - m) + m(f - \ell)\big| \leqslant |f|\,|g - m| + |m||f - \ell|$$

et du fait que f est bornée au voisinage de a. □

Proposition 17

Soient f et g deux fonctions complexes définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\lim_a f = \ell \quad \text{et} \quad \lim_a g = m \neq 0.$$

Alors f/g est définie au voisinage de a et $\lim\limits_a (f/g) = \ell/m$.

Démonstration Comme $\lim\limits_a g = m$, la fonction $g\,\overline{g}$ admet pour limite $m\,\overline{m} = |m|^2 \neq 0$ en a C'est une fonction réelle, donc on sait que son inverse admet $1/|m|^2$ pour limite en a On peut alors écrire au voisinage de a :

$$\frac{f}{g} = f\,\overline{g}\,\frac{1}{g\,\overline{g}}.$$

La fonction $\dfrac{f}{g}$, produit de trois fonctions admettant des limites, admet une limite qui vaut :

$$\ell\,\overline{m}\,\frac{1}{|m|^2} = \frac{\ell}{m}.$$

□

Proposition 18

Soit f une fonction complexe admettant une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si u est une suite d'éléments du domaine de définition de f admettant a pour limite, alors la suite $\big(f(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

émonstrati Les suites $\mathrm{Re}\big(f(u_n)\big)$ et $\mathrm{Im}(f(u_n))$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}\,\ell$ et $\mathrm{Im}\,\ell$, ce qui prouve la convergence de la suite $f(u_n)$ vers ℓ. □

Proposition 19 (Composition des limites)

Soit f une fonction complexe admettant une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si φ est une fonction **réelle** à valeurs dans D_f et admettant a pour limite en $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la fonction $f \circ \varphi$ admet ℓ pour limite en t_0.

émonstratio Il suffit d'ecrire $\mathrm{Re}(f \circ \varphi) = (\mathrm{Re}\, f) \circ \varphi$ et $\mathrm{Im}(f \circ \varphi) = (\mathrm{Im}\, f) \circ \varphi$ et d'utiliser le théorème de composition des limites pour des fonctions réelles □

5. Continuité sur un intervalle

Les résultats de cette section sont les versions globales, sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, des résultats correspondants concernant les limites.

5.1 Définition

Soit f une fonction complexe définie sur I.

Définition 6

On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout point de I.

Notation On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions complexes continues sur I.

Proposition 20

- f est continue sur I si, et seulement si, $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont continues sur I
- Si f est continue sur I, alors $\overline{f}$ et $|f|$ sont continues sur I.

Proposition 21

Si f est une fonction complexe continue sur un segment $[a, b]$, alors f est bornée et :

$$\exists x_0 \in [a, b] \ : \ \big|f(x_0)\big| = \sup_{[a,b]} |f|.$$

émons ratio La fonction $|f|$ est continue sur ce segment donc est majorée et atteint sa borne supérieure. □

5.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 22

Une combinaison linéaire (respectivement un produit) de fonctions continues sur I est une fonction continue sur I.

En particulier, $C(I, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I \ \mathbb{C})$.

Exemples

1. Une fonction polynôme à coefficients complexes est continue sur $\mathbb{R}$
2. Étant donnés une application f continue sur I et un entier naturel n la fonction f^n est continue sur I.
3. Si f est une fonction complexe continue sur I, alors la fonction

$$e^f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{f(x)} \end{array}$$

est continue sur I.
En effet :

$$e^f = e^{\mathrm{Re}\, f} \cos(\mathrm{Im}\, f) + i\, e^{\mathrm{Re}\, f} \sin(\mathrm{Im}\, f),$$

ce qui prouve la continuité de e^f d'après les opérations sur les fonctions reelles.

Proposition 23

Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est continue sur I.

Exemples

1. Une fraction rationnelle à coefficients complexes est continue sur tout intervalle où elle est définie.
2. Soit f une fonction complexe continue sur I et ne s annulant pas sur I. Alors, pour tout entier relatif n la fonction f^n est continue sur I.

Proposition 24

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si φ est une fonction réelle continue de I dans J et f une fonction complexe continue sur J, alors la fonction $f \circ \varphi$ est continue sur I.

6. Dérivation

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points

6.1 Dérivée en un point

On considère un élément a de l'intervalle I et une fonction f de I dans $\mathbb{C}$.

Définition 7

On dit que f est *dérivable* en a si la fonction τ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par $\tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite en a.

Cette limite s'appelle *nombre dérivé* de f en a et se note $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.

Proposition 25

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en a, et on a alors :

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a)$$

Démonstratio Conséquence de la proposition 12 de la page 533 appliquee à la fonction τ_a. □

Exemples

1. Si f est dérivable en a, alors $\overline{f}$ est dérivable en a et $(\overline{f})'(a) = \overline{f'(a)}$, puisque f et $\overline{f}$ ont mêmes parties réelles et des parties imaginaires opposées.
2. Si f est dérivable en a, alors e^f est dérivable en a, et :
$$(e^f)'(a) = f'(a)\, e^{f(a)}.$$
En effet si $g = \operatorname{Re} f$ et $h = \operatorname{Im} f$, alors :
$$\operatorname{Re}(e^f) = e^g \cos h \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(e^f) = e^g \sin h.$$
En utilisant les propriétés des fonctions réelles dérivables on obtient la dérivabilité de e^f et :
$$\begin{aligned}(e^f)'(a) &= \Big(g'(a)e^{g(a)} \cos\big(h(a)\big) - h'(a)e^{g(a)} \sin\big(h(a)\big)\Big)\\ &\quad + i\Big(g'(a)e^{g(a)} \sin\big(h(a)\big) + h'(a)e^{g(a)} \cos\big(h(a)\big)\Big)\\ &= e^{g(a)}\Big(\big(g'(a) + ih'(a)\big)\big(\cos(h(a)) + i\sin(h(a))\big)\Big)\\ &= e^{g(a)} f'(a) e^{ih(a)}\\ &= f'(a)e^{f(a)}.\end{aligned}$$

Proposition 26

Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.

émonstration Si f est dérivable en a, alors ses parties réelle et imaginaire sont dérivables en a donc continues en a, ce qui prouve la continuité de f en a □

6.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 27

Soient f et g deux fonctions complexes définies sur I et dérivables en $a \in I$ ainsi que λ et μ deux complexes.

1. La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et :
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$
2. La fonction $f g$ est dérivable en a et :
$$(f g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a).$$

Demonstration

1. Évident en revenant à la definition et en utilisant les propriétés des limites
2. Si l'on pose $f_1 = \operatorname{Re} f$, $f_2 = \operatorname{Im} f$, $g_1 = \operatorname{Re} g$, $g_2 = \operatorname{Im} g$, on a :
$$f g = (f_1 g_1 - f_2 g_2) + i\,(f_1 g_2 + f_2 g_1)$$
ce qui prouve la dérivabilité de $f g$ en utilisant les propriétés des fonctions réelles
De plus :
$$\operatorname{Re}\big((f g)'\big) = (f_1' g_1 + f_1 g_1' - f_2' g_2 - f_2 g_2') = \operatorname{Re}(f' g + f g')$$
et de même :
$$\operatorname{Im}\big((f g)'\big) = \operatorname{Im}(f' g + f g').$$
Donc $(f g)' = f' g + f g'$. □

Proposition 28

Soient f et g deux fonctions définies sur I et dérivables en $a \in I$. Si $g(a)$ est non nul, la fonction f/g, définie au voisinage de a, est dérivable en a et :
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g(a)^2}\right) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a) g'(a)}{g(a)^2}.$$

émonstration Il suffit d'écrire au voisinage de a :
$$\frac{f}{g} = f\,\overline{g}\,\frac{1}{g\,\overline{g}}.$$
La fonction $g\,\overline{g}$ est dérivable en a en tant que produit de deux fonctions dérivables Comme c'est une fonction réelle qui ne s'annule pas en a, son inverse est dérivable en a

La fonction $h = \dfrac{f}{g}$ est ainsi le produit de trois fonctions dérivables en a, donc est derivable en a

On a alors $f = g\,h$ et donc $f'(a) = g'(a)\,h(a) + g(a)\,h'(a)$, ce qui donne :

$$h'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{g'(a)h(a)}{g(a)} = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{g'(a)\,f(a)}{g(a)^2}.$$ □

Proposition 29

Soient I et J deux intervalles. Si φ est une application de I dans J dérivable en $a \in I$ et f une application de J dans $\mathbb{C}$ dérivable en $b = \varphi(a)$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et :

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)\,f'(b) = \varphi'(a)\,f'\big(\varphi(a)\big).$$

Démonstratio On a :

$$\operatorname{Re}(f \circ \varphi) = (\operatorname{Re} f) \circ \varphi \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f \circ \varphi) = (\operatorname{Im} f) \circ \varphi$$

ce qui prouve le résultat en utilisant les résultats correspondants pour les fonctions réelles □

6.3 Fonctions dérivables sur un intervalle

Définition 8

Lorsque la fonction f est dérivable en tout point de I, on dit que f est *dérivable sur* I et la fonction définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f, et notée f', Df ou $\dfrac{df}{dx}$.

Notation $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs complexes dérivables sur I.

Proposition 30

Soient I un intervalle et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}$.

La fonction f est constante si, et seulement si, $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.

émonstration f est constante si, et seulement si, ses parties réelle et imaginaire sont constantes c'est-à-dire si, et seulement si, leurs dérivées sont nulles □

Les propositions qui suivent sont les versions globales des résultats précédents concernant la dérivabilité en un point.

Proposition 31

Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

Proposition 32

- $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel et la dérivation est linéaire sur $\mathcal{D}(I \ \mathbb{C})$.
- Si f et g sont dérivables sur I, alors $f\,g$ est dérivable sur I et :

$$D(f\,g) = f\,D(g) + g\,D(f).$$

Exemples

1. Si $a_0, a_1, \ldots\ a_n$ sont des complexes, la fonction polynomiale :

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,x^k \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée :

$$P' \ : \ x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k\,a_k\,x^{k-1}.$$

2. Étant donnés une fonction f dérivable sur I et un entier naturel n la fonction f^n est dérivable sur I et sa dérivée est $n\,f^{n-1}\,f'$

Proposition 33

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I. Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction f/g est dérivable sur I et :

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{Df}{g} + f\left(-\frac{Dg}{g^2}\right) = \frac{g\,Df - f\,Dg}{g^2}.$$

Exemples

1. Une fraction rationnelle à coefficients complexes est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans son domaine de définition.
2. Si $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la fonction $f_n : x \mapsto (x-a)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n'(x) = n\,(x-a)^{n-1}.$$

3. Soit n un entier négatif. Si f est une fonction complexe dérivable sur I et qui ne s'annule pas sur I, alors f^n est dérivable sur I est sa dérivée est $n\,f'\,f^{n-1}$.

Proposition 34

Soient I et J deux intervalles. Si φ est une application de I dans J dérivable sur I et f une application de J dans $\mathbb{C}$ dérivable sur J, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et $(f \circ \varphi)' = \varphi'\,(f' \circ \varphi)$.

6.4 Dérivées successives

Définition 9

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$. On pose $f^{(0)} = f$ et on définit par récurrence la fonction *dérivée* $n^{\text{ème}}$ de f sur I, notée $f^{(n)}$ ou $D^n f$, comme la dérivée, si elle existe, de la derivée $(n-1)^{\text{ème}}$ de f (avec $n \geqslant 1$).

Remarque L'existence de $f^{(n)}$ sur I entraîne l'existence et la continuité sur I de toutes les dérivées d'ordre strictement inférieur.

Les deux résultats suivants se démontrent immédiatement par récurrence.

Proposition 35

La fonction complexe f admet une dérivée $n^{\text{ème}}$ sur I si, et seulement si, ses parties réelle et imaginaire admettent une dérivée $n^{\text{ème}}$ sur I et l'on a alors :

$$\operatorname{Re}\left(f^{(n)}\right) = (\operatorname{Re} f)^{(n)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\left(f^{(n)}\right) = (\operatorname{Im} f)^{(n)}.$$

Proposition 36

Soient f et g deux fonctions complexes n fois dérivables sur I, ainsi que λ et μ deux complexes. La fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I et l'on a :

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Exemples

1. Si a est un complexe non réel, la fonction $f \,:\, x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est donnée par :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}.$$

2. Si $\alpha \in \,]\,0, \pi\,[$, calculons la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

$$f(x) = \frac{x - \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}.$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque le discriminant du dénominateur est strictement négatif, et on a :

$$f(x) = \frac{x-\cos\alpha}{(x-e^{i\alpha})(x-e^{-i\alpha})} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-e^{i\alpha}} + \frac{1}{x-e^{-i\alpha}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{x-e^{i\alpha}}\right)\cdot$$

Donc la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \operatorname{Re}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-e^{i\alpha})^{n+1}}\right) \\ &= (-1)^n n! \operatorname{Re}\left(\frac{(x-e^{-i\alpha})^{n+1}}{(x^2-2x\cos\alpha+1)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2-2x\cos\alpha+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} x^{n+1-p}(-1)^p \cos(p\alpha) \end{aligned}$$

Proposition 37 (Formule de Leibniz)

Si f et g sont deux fonctions complexes définies et n fois dérivables sur I alors $f\,g$ est n fois dérivable sur I et :

$$\forall x \in I\,,\ (f\,g)^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)}(x)\, g^{(n-p)}(x).$$

Démonstration La démonstration par récurrence, fondée sur la formule $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$, est identique à celle déjà faite dans le cas réel. □

6.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 10

Soit n un entier naturel. On dit qu'une fonction f est *de classe* $\mathcal{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions complexes de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Définition 11

On dit qu'une fonction est *indéfiniment dérivable* sur I, ou *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur I, si elle est dérivable à tout ordre sur I. On note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions complexes indéfiniment dérivables sur I.

Les résultats suivants, énoncés pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, s'étendent naturellement au cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 38

Étant donné un entier naturel n l ensemble $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ est stable par combinaison linéaire et par produit. C'est donc en particulier un sous–espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$.

Exemple Soit $f \in \mathcal{C}^n(I.\mathbb{C})$ une fonction qui ne s'annule pas sur I

La fonction $f\,\overline{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$. Comme c'est une fonction réelle strictement positive et que la fonction racine est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $|f| = \sqrt{f\overline{f}}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Proposition 39

Si f et g sont deux application de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

émonstratio Il suffit de le montrer dans le cas où $f = 1$

Or, si $g = g_1 + i\,g_2$, avec g_1 et g_2 réelles. on a $\dfrac{1}{g} = \dfrac{g_1}{g_1^2+g_2^2} - i\dfrac{g_2}{g_1^2+g_2^2}$ dont les parties réelle et imaginaire sont de classe $\mathcal{C}^n$ d'après les résultats sur les fonctions réelles. □

Exemple Si f de classe $\mathcal{C}^n$ ne s'annule pas sur I, alors $f/|f|$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

7. Intégration

Dans cette section, on considère des fonctions complexes définies sur le segment $[a, b]$.

7.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 12

On dit que f est *continue par morceaux* sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $u = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ telle que pour tout $i \in [1, n]$, la restriction de f à $]\,x_{i-1}, x_i\,[$ soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} et x_i.

Une telle subdivision est dite *adaptée* à la fonction continue par morceaux f.

Proposition 40

Une fonction complexe est continue par morceaux si, et seulement si, ses parties réelle et imaginaire sont continues par morceaux.

Définition 13

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le complexe :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}\,\big(f(x)\big)\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}\,\big(f(x)\big)\,dx.$$

7.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 41

L'intégrale sur $[a, b]$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

émonstrati n

- D'après la définition, il est évident que l'on a pour des fonctions continues par morceaux f et g.

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

- Soit $f = g + \imath\, h$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\lambda = \alpha + i\,\beta$ un complexe On a :

$$\lambda f = (\alpha\, g - \beta\, h) + i\,(\alpha\, h + \beta\, g)$$

et donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(x)\, dx &= \int_a^b \big(\alpha\, g(x) - \beta\, h(x)\big)\, dx + \imath \int_a^b \big(\alpha\, h(x) + \beta\, g(x)\big)\, dx \\ &= \alpha \int_a^b g(x)\, dx - \beta \int_a^b h(x)\, dx + \imath \left(\alpha \int_a^b h(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\right) \\ &= (\alpha + i\,\beta) \left(\int_a^b g(x)\, dx + i \int_a^b h(x)\, dx\right) \\ &= \lambda \int_a^b f(x)\, dx.\end{aligned}$$

□

Proposition 42

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $|f|$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et :

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

émonstration

- Supposons $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \in \mathbb{R}_+$ et posons $g = \operatorname{Re} f$ et $h = \operatorname{Im} f$. Alors :

$$\int_a^b h(x)\, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \left|\int_a^b f(x)\, dx\right|.$$

Or, $g = \operatorname{Re} f \leqslant |f|$, donc :

$$\int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|\, dx$$

ce qui donne l'inégalité souhaitée

► Dans le cas général, on peut trouver un nombre complexe λ de module 1 tel que

$$\lambda \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}_+.$$

(Il suffit de prendre $\lambda = e^{-i\theta}$ où θ est un argument de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ si cette intégrale est non nulle, et $\lambda = 1$ sinon.)
Alors la fonction $f_1 = \lambda\, f$ a une intégrale réelle positive et donc, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\frac{1}{\lambda}\right| \left|\int_a^b f_1(x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_a^b f_1(x)\,dx\right| \\ &\leqslant \int_a^b \big|f_1(x)\big|\,dx \\ &= \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx.\end{aligned}$$

□

7.3 Primitives

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{C}$.

Définition 14

On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F de I dans $\mathbb{C}$, dérivable, dont la dérivée est égale à f.

Les resultats sur la dérivation donnent immédiatement :

Proposition 43

1. Une fonction F définie sur I est une primitive de f sur I si, et seulement si $\operatorname{Re} F$ et $\operatorname{Im} F$ sont primitives respectivement de $\operatorname{Re} f$ et de $\operatorname{Im} f$ sur I.
2. Si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont les fonctions $F + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exemples

1. Si k est un complexe non nul, les primitives de $x \mapsto \exp(k\,x)$ sont les fonctions :
$$x \mapsto \frac{1}{k}\exp(k\,x) + \lambda \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$
2. Pour calculer une primitive de f définie par :
$$f(t) = \cos(b\,t)\,\exp(a\,t),$$
avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a,b) \neq (0,0)$, on peut utiliser l'égalité $f = \operatorname{Re} g$ avec $g(t) = e^{(a+i\,b)t}$.

Comme G définie par $G(t) = \dfrac{1}{a+i\,b}\,e^{(a+i\,b)t}$ est une primitive de g on en déduit que $F = \operatorname{Re} G$ est une primitive de f, avec :

$$\begin{aligned}F(t) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{a+i\,b}e^{(a+i\,b)t}\right)\\ &= \frac{a}{a^2+b^2}e^{a\,t}\cos(b\,t) + \frac{b}{a^2+b^2}\,e^{a\,t}\sin(b\,t).\end{aligned}$$

Proposition 44 (Théorème fondamental)

1. Si $a \in I$, la fonction F_a définie par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est l unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

2. Si F est une primitive de f sur I, on a, pour tous points a et b de I :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration

1. Comme :

$$\begin{aligned}F_a(x) &= \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \big(\operatorname{Re} f(t) + i\,\operatorname{Im} f(t)\big)\,dt\\ &= \int_a^x \operatorname{Re} f(t)\,dt + i\int_a^x \operatorname{Im} f(t)\,dt\end{aligned}$$

on a :

$$\operatorname{Re} F_a(x) = \int_a^x \operatorname{Re} f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} F_a(x) = \int_a^x \operatorname{Im} f(t)\,dt.$$

La fonction f étant continue les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues et d'après le théorème fondamental (cas réel), les fonctions $\operatorname{Re} F_a$ et $\operatorname{Im} F_a$ sont dérivables et ont pour dérivées respectives les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$. La fonction F_a est donc dérivable et a pour dérivée f. C'est par conséquent une primitive de f qui s'annule en a.

Comme deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante, il ne peut y en avoir qu'une qui s'annule en a.

2. Le résultat, qui est évident pour F_a, est donc vrai pour toutes les primitives de f, puisque celles-ci sont égales à F_a à une constante près. □

Corollaire 45

Étant donnée $f \in C^1(I, \mathbb{C})$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

7.4 Théorème du relèvement

Théorème 46

Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ avec $k \geqslant 1$ telle que $\forall t \in I$, $|f(t)| = 1$. Il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in I\,,\; f(t) = e^{i\alpha(t)}.$$

emonstration

- Si α répond au problème, alors $f' = i\,\alpha'\,e^{i\alpha}$ et α est une primitive de f'/if
- Posons donc, pour $t_0 \in I$:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{1}{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du,$$

où α_0 est un argument de $f(t_0)$, c'est-à-dire est tel que $f(t_0) = e^{i\alpha_0}$ (la fonction f est de module 1).

La fonction α est une primitive (*a priori* complexe) de la fonction f'/if qui appartient à $\mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{C})$. Donc $\alpha \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ et l'on a $\alpha' = f'/if$.

En posant $g = f\,e^{-i\alpha}$, on a $g' = e^{-i\alpha}(f' - i\,\alpha' f) = 0$ Donc la fonction g est constante sur l'intervalle I, et puisque $g(t_0) = f(t_0)\,e^{-i\alpha_0} = 1$, on en déduit que g vaut 1 sur I. Par suite :

$$\forall t \in I\,,\; f(t) = e^{i\alpha(t)}.$$

Enfin α est à valeurs réelles puisque pour tout $t \in I$:

$$e^{-\operatorname{Im}(\alpha(t))} = |e^{i\alpha(t)}| = |f(t)| = 1.$$

□

Remarques

- Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ qui ne s'annule pas sur I. Le théorème du relèvement, appliqué à $f/|f|$, nous donne l'existence d'une fonction α de classe $\mathcal{C}^k$ telle qu'en tout point $t \in I$, le réel $\alpha(t)$ soit un argument de $f(t)$.
- Mais dans certains cas, on peut trouver explicitement une telle fonction α sans faire appel à ce théorème.
  - Si $f = g + i\,h$ avec g à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de prendre

$$\alpha(t) = \arctan\left(\frac{h(t)}{g(t)}\right).$$

De même, si g ne prend que des valeurs strictement négatives, on peut prendre $\alpha(t) = \pi + \arctan\left(\dfrac{h(t)}{g(t)}\right)$.

Si $f = g + i\,h$ ne prend pas de valeur réelle négative ou nulle, la fonction définie par $\alpha(t) = 2\arctan\left(\dfrac{h(t)}{g(t)+\sqrt{g(t)^2+h(t)^2}}\right)$ convient.

En effet, c'est une fonction de classe C^k d'après les théorèmes généraux, et on peut vérifier que $\alpha(t)$ est un argument de $f(t)$ pour tout t (*cf.* page 54).

8. Accroissements finis, formules de Taylor

8.1 Inégalité des accroissements finis

Proposition 47

Soit f une fonction de classe C^1 sur le segment $[a,b]$. Si M désigne la borne supérieure de $|f'|$ sur $[a,b]$, on a :

$$\big|f(b)-f(a)\big| \leqslant M|b-a|.$$

émonstratio Il suffit de le demontrer dans le cas où $a \leqslant b$. Puisque f' est continue, on a :

$$f(b)-f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$

d'où :

$$\big|f(b)-f(a)\big| = \left|\int_a^b f'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b \big|f'(t)\big|\,dt \leqslant \int_a^b M\,dt = M(b-a). \qquad \square$$

Attention Le théorème de Rolle et donc la formule des accroissements finis ne sont pas généralisables aux fonctions complexes. Par exemple, la fonction définie sur $[0,2\pi]$ par $f(t) = e^{it}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ pourtant sa dérivée $f'(t) = i\,e^{it}$ ne s'annule pas sur $[0,2\pi]$.

Interprétation cinématique

- Une fonction complexe peut représenter un mouvement ponctuel dans le plan euclidien identifié à $\mathbb{C}$. Sa dérivée est alors le vecteur vitesse et son module la norme de ce vecteur vitesse. L'inégalité des accroissements finis nous dit que si la vitesse d'un mobile est, entre les instants t_1 et t_2, inférieure en norme à v_0, alors le mobile parcourt une distance au maximum égale $v_0(t_2-t_1)$.
- Le fait que le théorème de Rolle ne soit pas vérifié se traduit par le fait que, contrairement à ce qui se passe pour un mouvement rectiligne, le mobile peut revenir à son point de départ sans pour autant que sa vitesse s'annule.

8.2 Formules de Taylor

Proposition 48 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient n un entier naturel non nul, I un intervalle et f une fonction de classe C^{n+1} sur I Étant donnés deux éléments a et b de I, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Démonstration Il suffit d'appliquer la formule de Taylor aux parties reelle et imaginaire de f et d'utiliser la linéarité de l'intégrale et de la dérivation. □

Proposition 49 (Inégalité de Taylor–Lagrange)

Soient n un entier naturel non nul, I un intervalle et f une fonction de classe C^{n+1} sur I. Étant donnés deux éléments a et b de I et M la borne supérieure de la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur le segment $[a,b]$ on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Démonstratio Il suffit de majorer le module du reste intégral.

- Dans le cas $a \leqslant b$:

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \right| &\leqslant \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt \\ &\leqslant M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt \\ &= M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

- Le cas $a > b$ est similaire □

Proposition 50 (Formule de Taylor–Young)

Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I et a un point de I, il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_a \varepsilon = 0.$$

emonstration On applique la formule de Taylor–Young aux deux fonctions réelles $g = \operatorname{Re} f$ et $h = \operatorname{Im} f$ de classe C^n, ce qui donne

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} g^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_a \varepsilon_1 = 0$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} h^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_a \varepsilon_2 = 0.$$

On a alors le résultat en prenant $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\,\varepsilon_2$ dont la limite en a est nulle. □

8.3 Développements limités

Définition 15

Soit f une fonction complexe définie au voisinage de x_0. La fonction f admet au voisinage de x_0 un *développement limité à l'ordre* n s'il existe des complexes a_0, a_1,..., a_n et une fonction ε définie sur D_f tels que :

$$\forall x \in D_f\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemple Une fonction de classe C^n sur un intervalle I admet un développement limité à l'ordre n en tout point de I : c'est son développement de Taylor–Young.

Résultats

- Une fonction complexe f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si, et seulement si, ses parties réelle et imaginaire admettent des developpements limités à l'ordre n en x_0.
- Les développements limités de ces dernières sont alors respectivement les parties réelle et imaginaire du développement limité de f.

EXERCICES

1. Étudier la convergence des suites :

a) $\dfrac{n^2 i^n}{n^3+1}$,

b) $\dfrac{1}{n} + (-1)^n i$,

c) $\dfrac{n}{n+3i} - \dfrac{ni}{n+1}$,

d) $\dfrac{n^2 i - in + 1 - 3i}{(2n+4i-3)(n-i)}$.

2. Étudier la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n - \overline{u_n}).$$

3. Étudier la convergence des suites réelles définies par $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ x_{n+1} = \alpha x_n - \beta y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n,$$

α et β étant deux réels donnés.

4. Suite homographique.

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation :

$$z_{n+1} = \frac{az_n + b}{cz_n + d}$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$.

On suppose dans tout l'exercice que z_0 est choisi de telle sorte que la suite (z_n) soit bien définie.

a) Montrer que l'application $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ a un ou deux points fixes dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer que si f admet deux points fixes α et β, alors :

$$\frac{f(x)-\alpha}{f(x)-\beta} = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\,\frac{x-\alpha}{x-\beta}.$$

En déduire que si $z_0 \neq \beta$, la suite $w_n = \dfrac{z_n - \alpha}{z_n - \beta}$ est géométrique.

Application :

Étudier la suite définie par $z_0 = i$ et $z_{n+1} = \dfrac{3z_n - 5}{z_n + 1}$.

c) Montrer que si f admet un unique point fixe α, alors :
$$\frac{1}{f(x)-\alpha} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{2c}{a+d}.$$
En déduire que si $z_0 \neq \alpha$, la suite $w_n = \dfrac{1}{z_n - \alpha}$ est arithmétique.

Application :

Étudier la suite définie par $z_0 = i$ et $z_{n+1} = \dfrac{3z_n - 1}{z_n + 1}$.

5. Soit f de I dans $\mathbb{C}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que f est uniformément continue sur I si :
$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall (x,y) \in I^2\ ,\ |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
Montrer que f est uniformément continue si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

Que peut-on dire d'une application continue sur un segment $[a, b]$?

6. Soit f définie sur $[a, b]$ continue et dérivable sur ce segment telle que :
$$\forall x \in [a,b]\ ,\ \big|f(x)\big| + \big|f'(x)\big| > 0.$$
Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.

7. Dans $\mathbb{C}$, on considère la transformation :
$$f : z \mapsto \frac{z + |z|}{2}$$
et la suite definie par la donnée de z_0 et $z_{n+1} = f(z_n)$.

Étudier la suite (z_n).

8. Soit (z_n) une suite complexe telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n^2 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |z_{n+1} - z_n| < 1.$$
Montrer que la suite (z_n) converge.

9. Soient f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et A une partie dense de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f(A)$ est une partie dense de $f(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que tout élément de $f(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de $f(A)$

b) En déduire que l'ensemble :
$$\{e^{2in\pi x} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
est dense dans le cercle trigonométrique si et seulement si x est irrationnel.

10. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f de I dans $\mathbb{C}$ et a un élément de I.

On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec :

$$\lim_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{C}.$$

Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = \ell$

11. Soient $n \geqslant 1$ et f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de classe C^n sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

On définit une application g sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(0) = f'(0) \\ \forall x \neq 0\ ,\ g(x) = \dfrac{f(x)}{x}. \end{cases}$$

Montrer que g est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}$.

On pourra procéder par récurrence et appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{x^i}{i!} f^{(i)}(x) - (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

12. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

si et seulement si f garde un argument constant sur $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [a, b]\ ,\ f(x) = |f(x)| e^{i\theta_0}.$$

Chapitre 19

Calculs d'intégrales

1. Calcul de primitives

Dans cette section, k désigne la constante d'intégration. C'est en général un nombre complexe, mais, lorsque l'on cherche les primitives réelles d'une fonction réelle, k désigne evidemment un nombre réel.

Les résultats énoncés ci–dessous ne sont, pour la plupart qu'une réécriture de résultats déjà vus dans le chapitre de dérivation.

1.1 Primitives d'une fraction rationnelle

Proposition 1

Soient $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ et $a \in \mathbb{C}$. Sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas a, on a :

$$\int (x-a)^n \, dx = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + k.$$

Proposition 2

1. Si $a \in \mathbb{R}$ sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas a, on a :

$$\int \frac{1}{x-a} \, dx = \ln|x-a| + k.$$

2. Si $a = \alpha + i\,\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, alors sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ on a :

$$\int \frac{1}{x-a} \, dx = \frac{1}{2} \ln\big((x-\alpha)^2 + \beta^2\big) + i \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + k$$

émo str tio Le cas où a est réel est évident. Pour l'autre, il suffit de dériver pour vérifier la formule mais on peut aussi la (re)trouver en écrivant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a} &= \frac{x-\overline{a}}{(x-a)(x-\overline{a})}\\ &= \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + i\,\frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\\ &= \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + i\,\frac{1}{\beta}\,\frac{1}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}\end{aligned}$$

et donc :

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \frac{1}{2}\ln\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big) + i\,\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + k. \qquad \square$$

Remarque Dans le cas où $a = \alpha + i\beta \notin \mathbb{R}$, pour $x \in \mathbb{R}$, le complexe $x-a$ a pour module $\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ et pour argument $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x-\alpha}{-\beta}\right)$ modulo π.

La formule donnant une primitive prend donc une forme facile à retenir :

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + i\,\mathrm{Arg}(x-a) + k$$

où $\mathrm{Arg}(x-a)$ est l'argument principal de $x-a$ (ou n'importe quel argument puisqu'ils sont tous égaux à une constante près).

Un bon moyen mnémotechnique est d écrire $x-a = |x-a|\,e^{i\,\mathrm{Arg}(x-a)}$ et de penser au logarithme.

MPSI ***Méthode*** Comme on le verra dans le chapitre sur les fractions rationnelles, toute fraction rationnelle peut se décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$, et donc s'écrire comme somme d'une fonction polynomiale et de fractions de la forme $\frac{1}{(x-a)^n}\cdot$

Les resultats précédents permettent donc, théoriquement, de calculer une primitive de toute fraction rationnelle. Toutefois ce n'est pas ainsi que fonctionne un logiciel de calcul formel car pour décomposer effectivement en éléments simples une fraction rationnelle il faut pouvoir factoriser son dénominateur ce qui n'est pas toujours explicitement faisable.

Exemples MPSI

1. La fonction $\frac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}$ est continue sur tout intervalle :

$$I \subset\ ]-\infty,-1\,[\ \cup\ ]-1,1\,[\ \cup\ ]\,1,2\,[\ \cup\ ]\,2,+\infty\,[.$$

Pour en calculer une primitive sur I on écrit :

$$\frac{1}{(x^2-1)(x-2)^2} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{18(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)^2} - \frac{4}{9(x-2)}$$

(voir chapitre 26 pour les méthodes pratiques de décomposition en éléments simples) et donc :

$$\int \frac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}\,dx = \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{18} - \frac{1}{3(x-2)} - \frac{4\ln|x-2|}{9} + k$$

2. Pour calculer une primitive de :

$$f(x) = \frac{5}{(x^2+x+1+i)}$$

on écrit :

$$f(x) = -\frac{1+2i}{x+1-i} + \frac{1+2i}{x+i}$$

ce qui donne en intégrant :

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx =&(2-i)\arctan x + (2-i)\arctan(1+x)\\ &+\left(\frac{1}{2}+i\right)\ln(x^2+1) - \left(\frac{1}{2}+i\right)\ln(x^2+2x+2) + k.\end{aligned}$$

3 Pour calculer sur $]-1,1[$ une primitive de $\dfrac{1}{1-x^4}$, on a intérêt, après avoir écrit la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, à regrouper les termes non réels pour retrouver des fonctions réelles. On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^4} &= \frac{-1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{i}{4(x+i)} - \frac{i}{4(x-i)}\\ &= \frac{-1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}\end{aligned}$$

et donc :

$$\int \frac{1}{1-x^4}\,dx = -\frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} + \frac{\arctan x}{2} + k$$

4. Pour calculer $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$, le changement de variable $u = x^2$ s'impose :

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,dx}{1+x^4} &= \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^4}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}\\ &= \frac{1}{2}\arctan u + k\\ &= \frac{1}{2}\arctan(x^2) + k.\end{aligned}$$

5. Pour calculer $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^3-1}$ il ne faut surtout pas faire la moindre décomposition en éléments simples, car le numérateur est proportionnel à la dérivée du dénominateur.
$$\int \frac{x^2\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x^3-1| + k.$$

Methode Pour calculer $\displaystyle\int \frac{\lambda\,x+\mu}{x^2+b\,x+c}\,dx$ où b et c sont réels vérifiant $b^2-4c<0$, la décomposition sur $\mathbb{C}$ donne, en général, des calculs plus compliqués que la méthode suivante qu'il est bon de savoir mettre en œuvre.

- On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur en utilisant tous les termes en x :
$$\int \frac{\lambda\,x+\mu}{x^2+b\,x+c}\,dx = \frac{\lambda}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+b\,x+c}\,dx - \left(\frac{b\,\lambda}{2}-\mu\right)\int \frac{1}{x^2+b\,x+c}\,dx.$$
- La première partie est égale à :
$$\frac{\lambda}{2}\ln(x^2+b\,x+c)+k.$$
- Pour la seconde, on met le trinôme $x^2+b\,x+c$ sous forme canonique :
$$\int \frac{1}{x^2+b\,x+c}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\omega^2}\,dx \qquad \text{avec} \qquad \omega=\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}$$
dont on peut donner une primitive à l'aide du résultat suivant (évident en dérivant) :
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+k \qquad \text{si} \qquad a\in\mathbb{R}^*$$

Cette méthode montre que le résultat est une combinaison linéaire des fonctions $f\ :\ x\mapsto \ln(x^2+b\,x+c)$ et $g\ :\ x\mapsto \arctan\left(\dfrac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)$ ce qui permet de chercher une primitive sous la forme $\alpha\,f+\beta\,g$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ (méthode des coefficients indéterminés).

Exemples

1. Pour calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$, on commence par faire une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:
$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)} + \frac{j}{3}\frac{1}{(x-j)} + \frac{j^2}{3}\frac{1}{(x-j^2)},$$

mais il est ensuite préférable de regrouper les termes conjugués :

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+k\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+k.\end{aligned}$$

ce qui donne donc :

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+k$$

2. Pour calculer une primitive de $\dfrac{x^3}{x^2+2x+2}$ on remarque que :

$$\frac{x^3}{x^2+2x+2} = x-2+\frac{\lambda\,x+\mu}{x^2+2x+2}.$$

D'après la remarque de la page ci-contre, on sait qu'il existe une primitive de la forme :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + a\ln(x^2+2x+2) + b\arctan(x+1)$$

et en dérivant on doit avoir :

$$x-2+\frac{a\,(2x+2)+b}{x^2+2x+2} = \frac{x^3}{x^2+2x+2}.$$

En prenant $x=-1$ on obtient $b=2$ puis avec $x=0$ on trouve $a=1$. Donc :

$$\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1)+k.$$

1.2 Primitives des polynômes–exponentielles

Proposition 3

Si a est un complexe non nul et P une fonction polynomiale, alors la fonction $x \mapsto P(x)\,e^{ax}$ possède une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)\,e^{ax}$ où Q est une fonction polynomiale de même degré que P.

Démonstrati On démontre par récurrence sur n la propriété H_n :

Si P est un polynôme de degré strictement plus petit que n, il existe un polynôme Q de même degré que P tel que $\left(Q(x)\, e^{ax}\right)' = P(x)\, e^{ax}$.

- H_1 est évident car si P est constant on peut prendre $Q = P/a$.
- Supposons H_n pour $n \geqslant 2$ et considérons P un polynôme de degré n. Une intégration par parties donne :

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} P(x)\, e^{ax} - \frac{1}{a} \int P'(x)\, e^{ax}\, dx$$

Le polynôme P' est de degré $n-1$ et l'hypothèse de récurrence permet de dire qu'il existe un polynôme Q_0 de degré $n-1$ tel que

$$\int P'(x)\, e^{ax}\, dx = Q_0(x)\, e^{ax} + k.$$

Le polynôme $Q = \dfrac{1}{a}\,(P - Q_0)$ est alors de degré n et vérifie :

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx = Q(x)\, e^{ax} + k.$$

□

Remarque On peut déterminer Q :

- soit en intégrant plusieurs fois par parties comme dans la démonstration précédente,
- soit en cherchant par une méthode de coefficients indéterminés un polynôme Q vérifiant :

$$\left(e^{ax}\, Q(x)\right)' = e^{ax}\, P(x)$$

c'est-à-dire :

$$a\, Q(x) + Q'(x) = P(x).$$

Exemples

1. On cherche une primitive de $f(x) = e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1)$ sous la forme :

$$F(x) = e^x(a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d).$$

On a alors :

$$F'(x) = e^x\left(a\,x^3 + (3a+b)\,x^2 + (2b+c)\,x + (c+d)\right)$$

ce qui permet de prouver que F est une primitive de f lorsque $a = 2$, $b = 3 - 3a = -3$, $c = -1 - 2b = 5$ et $d = 1 - c = -4$. On a donc :

$$\int e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1)\, dx = (2x^3 - 3x^2 + 5x - 1)\, e^x + k.$$

2. Pour évaluer $\displaystyle\int x\, \cos x\, e^x\, dx$, on peut écrire :

$$\int x\, \cos x\, e^x\, dx = \operatorname{Re}\left(\int x\, e^{(1+i)\,x}\, dx\right)$$

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int x\,e^{(1+i)x}\,dx &= \frac{1}{1+i}x\,e^{(1+i)x} - \frac{1}{1+i}\int e^{(1+i)x}\,dx\\ &= e^{(1+i)x}\left(\frac{x}{1+i}-\frac{1}{2i}\right)+k \qquad \text{avec} \qquad k\in\mathbb{C}\\ &= e^{(1+i)x}\left(\frac{1-i}{2}x+\frac{i}{2}\right)+k.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\int x\,\cos x\,e^{x}\,dx &= \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1-i}{2}\,x+\frac{i}{2}\right)\,e^{(1+i)x}+k\right)\\ &= \frac{1}{2}\,x\,\cos x\,e^{x}+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)e^{x}\sin x+k_1 \qquad \text{avec} \qquad k_1\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

1.3 Primitives des fonctions usuelles

La table de la page suivante donne les primitives des fonctions usuelles. Ce tableau ne contient aucune constante d'intégration : chacune des primitives est égale à la fonction correspondante à une constante additive près sur le, ou les, intervalle(s) I indiqué(s), et plus généralement sur tout intervalle inclus dans I.

2. Methodes de calcul approché d'intégrales

Soient a et b deux réels tels que $a<b$

Pour calculer numériquement une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ on peut partager le segment $I=[a,b]$ à l'aide d'une subdivision à pas constant $u=(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et, sur chaque intervalle $[x_{i-1},x_i]$, remplacer la fonction f par une fonction polynomiale dont on sait calculer l'intégrale. C'est la base des méthodes d'approximation d'intégrales étudiées dans cette section.

En supposant la fonction f suffisamment régulière et en désignant par M_p un majorant de $\left|f^{(p)}\right|$ sur $[a,b]$, on donnera pour chacune des méthodes un majorant de la valeur absolue de la différence entre l'intégrale et sa valeur approchée. Un tel majorant, encore appelé incertitude de la méthode permet de déterminer *a priori*, pour $\varepsilon>0$ donne, le pas de la subdivision à utiliser pour obtenir une approximation à ε près.

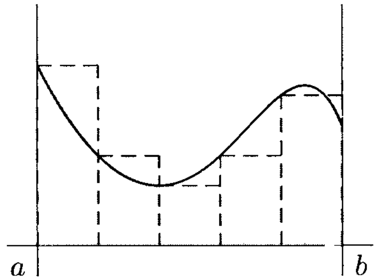
f	F	I
x^n $n\in\mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
x^n $n\in\mathbb{Z}^*_-$	$\begin{cases}\dfrac{x^{n+1}}{n+1} & \text{si } n\neq -1\\ \ln\lvert x\rvert & \text{si } n=-1\end{cases}$	$\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$
x^α $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^*_+$
$\ln\lvert x\rvert$	$x\ln\lvert x\rvert - x$	$\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$C_k\ (k\in\mathbb{Z})$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x$	$S_k\ (k\in\mathbb{Z})$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$	$\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$C_k\ (k\in\mathbb{Z})$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$S_k\ (k\in\mathbb{Z})$
$\operatorname{th} x$	$\ln\lvert\operatorname{ch} x\rvert$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$]-\infty,-1[$ $]-1,1[$ $]1,+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1\ 1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+h}}$ $h\in\mathbb{R}^*$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+h}\rvert$	$\mathbb{R}$ si $h>0$ $]-\infty,-\sqrt{-h}[$, $]\sqrt{-h},+\infty[$ si $h<0$

$$C_k = \,]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[\qquad \text{et} \qquad S_k = \,]k\pi,(k+1)\pi[.$$

2.1 Méthode des rectangles

Sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, on remplace f par la fonction constante $f(x_{i-1})$. L'intégrale de la fonction en escalier obtenue est alors :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$



C'est un cas particulier de somme de Riemann de f associée à la subdivision u (elle a été introduite par Cauchy). Elle est égale à l'aire de la réunion des rectangles de sommets $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, $(x_{i+1}, f(x_i))$, et $(x_i, f(x_i))$, d'où le nom de la méthode.

Lemme

Soit $f \in C^1(I)$ dont la dérivée est bornée par M_1 sur I. Si α et β sont deux éléments de I tels que $\alpha \leqslant \beta$, on a :

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta - \alpha)\, f(\alpha) \right| \leqslant \frac{M_1}{2} (\beta - \alpha)^2.$$

émonstrat˚o Si F est une primitive de f, on a d'après l'inégalité de Taylor–Lagrange :

$$\begin{aligned}
\left| \int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta - \alpha)\, f(\alpha) \right| &= \left| F(\beta) - F(\alpha) - (\beta - \alpha)\, F'(\alpha) \right| \\
&\leqslant \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \sup_I |F''| \\
&\leqslant \frac{M_1}{2} (\beta - \alpha)^2.
\end{aligned}$$

□

Incertitude de la méthode

On a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_I f - R_n(f) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} f(x_{i-1}) \right) \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} f(x_{i-1}) \right| \\
&\leqslant n \frac{M_1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\left|\int_I f - R_n(f)\right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n}. \qquad (r)$$

Remarques

- Comme il existe un nombre M vérifiant $\left|\int_I f - R_n(f)\right| \leqslant \frac{M}{n}$ on dit que la méthode des rectangles est d'ordre 1.
- Si l'on prend $f(x) = x - a$, on a $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}$ et :

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i\,(b-a)}{n} \\ &= \frac{(b-a)^2(n-1)}{2n} \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \frac{(b-a)^2}{2n} \end{aligned}$$

  ce qui prouve que l'inégalité (r) ne peut pas être améliorée.
- En remplaçant f par la constante $f(x_i)$ sur $]\,x_{i-1}, x_i\,[$, on obtient une autre methode des rectangles qui conduit à la même majoration d'incertitude.

2.2 Méthode des rectangles médians

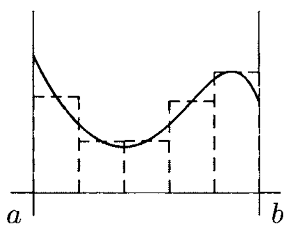
Sur chaque intervalle $]\,x_{i-1}, x_i\,[$, on remplace f par la fonction constante :

$$f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right).$$

L'intégrale de la fonction en escalier obtenue est alors :

$$R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

C'est une somme de Riemann de f associée à la subdivision u. Lorsque $f \geqslant 0$, elle est égale à l'aire de la réunion de rectangles de base $(x_{i-1}, 0)$, $(x_i, 0)$ et de hauteur $f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$, d'où le nom de la méthode.



En supposant f de classe $\mathcal{C}^1$, l'inégalité des accroissements finis prouve que f est M_1–lipschitzienne sur $[a,b]$, donc d'après l'inégalité vue dans le chapitre d'intégration (proposition 22 de la page 432), on a :

$$\left|\int_I f - R'_n(f)\right| \leqslant M_1(b-a)\delta(u) = M_1\,\frac{(b-a)^2}{n}.$$

Mais on va prouver qu'il existe une constante M vérifiant $\left|\int_I f - R'_n(f)\right| \leqslant \dfrac{M}{n^2}$ ce que l'on traduit en disant que la méthode des rectangles médians est d'ordre 2.

Lemme

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ telle que f'' soit bornée par M_2 sur I. Si α et β sont deux points de I tels que $\alpha \leqslant \beta$, on a :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M_2}{24}(\beta-\alpha)^3.$$

emonstr tio En posant $\gamma = (\alpha+\beta)/2$, on a $\int_\alpha^\beta (t-\gamma)\,f'(\gamma)\,dt = 0$ et donc :

$$(\beta-\alpha)f(\gamma) = \int_\alpha^\beta \big(f(\gamma)+(t-\gamma)f'(\gamma)\big)\,dt. \qquad (*)$$

Par suite :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha)f(\gamma)\right| = \left|\int_\alpha^\beta \big(f(t)-f(\gamma)-(t-\gamma)f'(\gamma)\big)\,dt\right|$$

$$\leqslant \int_\alpha^\beta \big|f(t)-f(\gamma)-(t-\gamma)f'(\gamma)\big|\,dt.$$

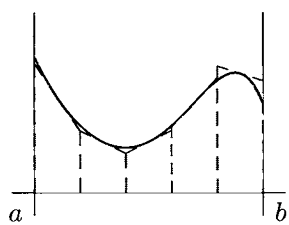
Comme f'' est bornée par M_2 sur I, l'inégalité de Taylor–Lagrange donne :

$$\big|f(t)-f(\gamma)-(t-\gamma)\,f'(\gamma)\big| \leqslant \frac{M_2}{2}(t-\gamma)^2$$

ce qui entraîne :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha)f(\gamma)\right| \leqslant \frac{M_2}{2}\int_\alpha^\beta (t-\gamma)^2\,dt = \frac{M_2}{24}(\beta-\alpha)^3 \qquad \square$$

Remarque La relation $(*)$ est la traduction analytique de l'égalité de l'aire du rectangle de base $[\alpha,\beta]$ et de hauteur $f(\gamma)$ et du trapèze de même base mais dont le côté supérieur est tangent à la courbe au point d'abscisse γ (lorsque γ est le milieu de $[\alpha,\beta]$).



C est pourquoi la méthode des rectangles médians s appelle aussi *méthode des tangentes*.

Incertitude de la méthode

On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_I f - R'_n(f)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right| \\ &\leqslant n\,\frac{M_2}{24}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\left|\int_I f - R'_n(f)\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24\,n^2}. \qquad (r')$$

Remarque Si l'on prend la fonction définie par $f(x) = (x-a)^2$, on a :

$$R'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\left(i-\frac{1}{2}\right)^2$$

Or :

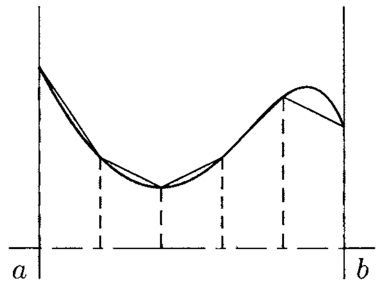
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 - i + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{4} \\ &= \frac{n\,(4n^2-1)}{12}.\end{aligned}$$

Donc :

$$R'_n(f) = \frac{(b-a)^3(4n^2-1)}{12n^2} = \frac{(b-a)^3}{3} - \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

et comme $M_2 = 2$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)^3}{3}$, on en déduit à nouveau que l'inégalité (r') est optimale.

2.3 Methode des trapèzes



Sur chaque intervalle $]\,x_{i-1}, x_i\,[$, on remplace f par la fonction affine coïncidant avec f en x_{i-1} et x_i. L'intégrale de la fonction affine par morceaux obtenue est alors égale à l'aire de la réunion des trapèzes de sommets $(x_{i-1}, 0)$, $(x_i, 0)$, $\big(x_i, f(x_i)\big)$, $\big(x_{i-1}, f(x_{i-1})\big)$ et vaut donc :

$$T_n(f) = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) + f(x_{i-1})\big) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

Lemme

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ telle que f'' soit bornée par M_2 sur I. Si α et β sont deux points de I tels que $\alpha \leqslant \beta$, on a :

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt - (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \right| \leqslant \frac{M_2}{12} (\beta - \alpha)^3.$$

Démonstration La fonction φ définie sur $[\alpha, \beta]$ par :

$$\varphi(t) = f(t) - \frac{M_2}{2} (t - \alpha)(\beta - t)$$

est deux fois dérivable et :

$$\forall t \in [\alpha, \beta]\ ,\ \varphi''(t) = f''(t) + M_2 \geqslant 0.$$

Elle est donc convexe et par suite inférieure ou égale à la fonction affine g qui coïncide avec f en α et β, ce qui donne :

$$\forall t \in [\alpha, \beta]\ ,\ f(t) - \frac{M_2}{2} (t - \alpha)(\beta - t) \leqslant g(t). \tag{a}$$

De même la fonction ψ définie sur $[\alpha, \beta]$ par :

$$\psi(t) = f(t) + \frac{M_2}{2} (t - \alpha)(\beta - t)$$

est concave et par suite supérieure ou égale à la fonction g, ce qui donne :

$$\forall t \in [\alpha, \beta]\ ,\ f(t) + \frac{M_2}{2} (t - \alpha)(\beta - t) \geqslant g(t). \tag{b}$$

De (a) et (b) on deduit

$$\forall t \in [\alpha, \beta]\ ,\ \big| f(t) - g(t) \big| \leqslant \frac{M_2}{2} (t - \alpha)(\beta - t).$$

La fonction g étant affine, sa valeur moyenne sur $[\alpha, \beta]$ est la moyenne de ses valeurs en α et β et on a donc :

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt = (\beta-\alpha)\,\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha)\,\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right| &= \left|\int_\alpha^\beta \big(f(t)-g(t)\big)\,dt\right|\\ &\leqslant \int_\alpha^\beta \big|f(t)-g(t)\big|\,dt\\ &\leqslant \int_\alpha^\beta \frac{M_2}{2}(t-\alpha)(\beta-t)\,dt\\ &= \frac{M_2}{12}(\beta-\alpha)^3.\end{aligned}$$

□

Incertitude de la méthode

On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_I f - T_n(f)\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\right|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right|\\ &\leqslant n\frac{M_2}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\left|\int_I f - T_n(f)\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}. \qquad (t)$$

Remarques

- On peut de même prouver que l'inégalité (t) est optimale en considérant la fonction $x \mapsto (x-a)^2$.
- La méthode des trapèzes est donc aussi du second ordre, mais deux fois moins précise que la méthode des rectangles médians.
- Dans le cas d'un fonction convexe la courbe est sous ses cordes et au dessus de ses tangentes. Par suite, les méthodes des trapèzes et des rectangles médians donnent dans ce cas un encadrement de l'intégrale :

$$R_n'(f) \leqslant \int_I f \leqslant T_n(f).$$

2.4 Méthode de Simpson

Sur chaque intervalle $]\,x_{i-1}, x_i\,[$, on remplace f par la fonction polynôme p de degré inférieur ou égal à 2 coïncidant avec f en x_{i-1} , $\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$ et x_i.

Calculons à l'aide de MAPLE l'intégrale de p :

```
> p:=x -> A*x^2+B*x+C:
> w:=(u+v)/2:
> s:=solve({p(u)=f(u),p(v)=f(v),p(w)=f(w)},{A,B,C}):
> Intégrale:=int(subs(s,p(x)),x=u..v):
> factor(Intégrale);
```

$$\frac{1}{6}(v-u)\left(f(u)+f(v)+4f\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v\right)\right)$$

La méthode de Simpson donne donc comme valeur approchée de l'intégrale (en posant $h=(b-a)/n$) :

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{n}\left[4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+f(x_{i-1})+f(x_i)\right] \\ &= \frac{h}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\,h)+2\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{2i-1}{2}\,h\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\big(T_n(f)+2R'_n(f)\big). \end{aligned}$$

La suite S_n, qui est barycentre des suites T_n et R'_n, converge donc vers $\displaystyle\int_I f$.

L'intérêt de cette nouvelle méthode est qu'elle est d'ordre 4, comme nous allons le prouver.

Lemme

Soit $f \in \mathcal{C}^4(I)$ telle que $f^{(4)}$ soit bornée par M_4 sur I. Si α est un point de I et h un nombre positif tel que $[\alpha-h,\alpha+h] \subset I$, alors :

$$\left|\int_{\alpha-h}^{\alpha+h} f(t)\,dt-\frac{h}{3}\big(f(\alpha+h)+f(\alpha-h)+4f(\alpha)\big)\right| \leqslant \frac{M_4}{90}h^5.$$

Démonstratio Si F est une primitive de f sur I, la fonction φ définie sur $[0,h]$ par :

$$\varphi(t) = F(\alpha+t) - F(\alpha-t) - \frac{t}{3}\big(F'(\alpha+t) + F'(\alpha-t) + 4F'(\alpha)\big)$$

est de classe C^4, et on a :

$$\varphi'(t) = \frac{2}{3}\big(F'(\alpha+t) + F'(\alpha-t)\big) - \frac{t}{3}\big(F''(\alpha+t) - F''(\alpha-t)\big) - \frac{1}{3}F'(\alpha)$$

$$\varphi''(t) = \frac{1}{3}\big(F''(\alpha+t) - F''(\alpha-t)\big) - \frac{t}{3}\big(F'''(\alpha+t) + F'''(\alpha-t)\big)$$

$$\varphi'''(t) = -\frac{t}{3}\big(F^{(4)}(\alpha+t) - F^{(4)}(\alpha-t)\big) = -\frac{t}{3}\big(f^{(3)}(\alpha+t) - f^{(3)}(\alpha-t)\big)$$

ce qui entraîne $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ et :

$$\left|\varphi'''(t)\right| \leqslant \frac{2M_4}{3}t^2.$$

On en déduit ·

$$\begin{aligned}\left|\varphi''(t)\right| &= \left|\int_0^t \varphi'''(u)\,du\right| \\ &\leqslant \int_0^t \left|\varphi'''(u)\right| du \\ &\leqslant \frac{2M_4}{3}\int_0^t u^2\,du \\ &= \frac{2}{9}M_4\,t^3\end{aligned}$$

puis :

$$\left|\varphi'(t)\right| \leqslant \frac{2}{9}M_4\int_0^t u^3\,du = \frac{1}{18}M_4\,t^4$$

et :

$$\left|\varphi(h)\right| \leqslant \frac{1}{18}M_4\int_0^h t^4\,dt = \frac{1}{90}M_4\,h^5.$$ □

Incertitude de la méthode

En posant :

$$\Delta_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{h}{3}\left[4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$$

et en appliquant le lemme avec $\alpha = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$ et $h = \dfrac{b-a}{2n}$, on obtient :

$$|\Delta_i| \leqslant \frac{M_4}{90}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^5$$

et comme $\displaystyle\int_I f - S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$, on en déduit :

$$\left|\int_I f - S_n(f)\right| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}. \qquad (s)$$

Remarques

- La méthode de Simpson est exacte pour une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2, puisque sur chaque intervalle on remplace évidemment f par elle-même.
- Mais la majoration (s) prouve qu'elle est exacte aussi pour toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.
- On peut vérifier que si f est une fonction polynomiale de degré 4, alors toutes les inégalités qui ont conduit à (s) sont des égalités. Ainsi la majoration (s) ne peut pas être améliorée.

EXERCICES

1. Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

b) $\displaystyle\int \cos 3x\sin 2x\,dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{1-\cos x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

f) $\displaystyle\int \arctan x\,dx.$

2. Calculer par récurrence :

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^3+1)^n}.$$

Intégration de fractions rationnelles

3. Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-4)^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-x+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{6x}{(x^2-x+1)^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx.$

Integration d'expressions polynomiales en sinus et cosinus

4. On cherche à calculer des primitives de fonctions qui sont des sommes de termes de la forme $\cos^n x \sin^m x$ où m et n sont deux entiers naturels.

a) Montrer que si n est impair, le changement de variable $u = \sin x$ conduit à une primitive de fonction polynomiale.

b) Trouver le changement de variable adéquat dans le cas où m est impair.

c) Quelle méthode peut-on utiliser si les deux exposants sont pairs ?

d) Calculer les primitives suivantes :

- $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$
- $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$
- $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^5 x\, dx$
- $\displaystyle\int \sin^4 x\, dx$
- $\displaystyle\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx.$

Intégration d'expressions rationnelles en sinus et cosinus

5. On cherche à trouver une primitive d'une fonction rationnelle en sinus et cosinus.

a) Montrer que sur tout intervalle du type $]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ conduit à la recherche d'une primitive d'une fraction rationnelle.

En fait, il est souvent possible de faire les changements de variables $u = \tan x$, $u = \cos x$ ou $u = \sin x$.

Les règles suivantes, appelés règles de Bioche, permettent de choisir ces changements de variables.

- Si l'expression $f(\cos x, \sin x)\, dx$ est invariante par le changement $x \mapsto -x$, on pose $u = \cos x$.
- Si l'expression $f(\cos x, \sin x)\, dx$ est invariante par le changement $x \mapsto x + \pi$, on pose $u = \tan x$.
- Si l'expression $f(\cos x, \sin x)\, dx$ est invariante par le changement $x \mapsto \pi - x$, on pose $u = \sin x$.
- Si les trois conviennent, on peut poser $u = \cos 2x$.

b) Montrer que si l'expression $f(\cos x . \sin x)\, dx$ est invariante par le changement $x \mapsto -x$, le changement de variable $u = \cos x$ conduit à la recherche d'une primitive d'une fonction rationnelle

c) Utiliser les règles précédentes pour calculer les primitives suivantes :

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x}\, dx$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \cos x}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$
- $\displaystyle\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}\, dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x(1 + 3\cos x)}\, dx$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Intégration de fonctions rationnelles en e^x

6. Les changements de variable $u = e^x$ ou $t = \operatorname{th} \dfrac{x}{2}$ conduisent à la recherche d'une primitive d'une fonction rationnelle.
Dans certains cas, il est plus simple de faire les changements de variables $u = \operatorname{th} x$, $u = \operatorname{ch} x$ ou $u = \operatorname{sh} x$.
Pour déterminer le bon changement de variable, on utilise la règle qui suit :
On considère l'expression en sinus et cosinus obtenue en remplaçant $\operatorname{ch} x$ par $\cos x$, et $\operatorname{sh} x$ par $\sin x$, puis l'on utilise les règles de Bioche.

- Si le changement $u = \tan x$ convient, on pose $u = \operatorname{th} x$.
- Si le changement $u = \sin x$ convient, on pose $u = \operatorname{sh} x$.
- Si le changement $u = \cos x$ convient, on pose $u = \operatorname{ch} x$.

Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1} e^x\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch} x(1 + \operatorname{sh} x)}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x + 1}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{th} x}$

e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}\, dx$.

7 Si la fonction à intégrer est rationnelle en x et en $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ permet de se ramener à une fonction rationnelle.
Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}}$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

8 Soient f définie sur $[a, b]$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une subdivision à pas constant de $[a, b]$.
On pose :

$$S_n = \int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k).$$

a) On suppose f de classe C^1.
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} nS_n = \frac{b-a}{2}\big(f(b) - f(a)\big).$$

On considérera la fonction g_k définie sur $[a_k, a_{k+1}]$ par :

$$g_k(x) = f(x) - f(a_k) - (x-a_k)f'(a_k).$$

b) On suppose f de classe C^2.
Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$S_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

au voisinage de $+\infty$. On considérera la fonction h_k définie sur $[a_k\ a_{k+1}]$ par :

$$h_k(x) = f(x) - f(a_k) - (x-a_k)f'(a_k) - \frac{(x-a_k)^2}{2}f''(a_k).$$

Chapitre 20

Propriétés métriques des courbes paramétrées

Dans tout le chapitre, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et l'on désigne par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée directe du plan euclidien. À l'aide de cette base orthonormée directe on peut identifier le plan à $\mathbb{R}^2$

1. Modes de définition d'une courbe plane

1.1 Représentation cartésienne

Si φ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ d un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ l'équation $y = \varphi(x)$ est appelée *représentation cartésienne* de la courbe $\mathcal{C}^k$ paramétrée par :

$$\begin{array}{rccl} f\ : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & \big(x, \varphi(x)\big). \end{array}$$

Cette courbe est régulière, puisque le vecteur dérivé $\big(1, \varphi'(x)\big)$ ne s'annule pas.

De même, si ψ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'équation $x = \psi(y)$ est appelée représentation cartésienne de la courbe $\mathcal{C}^k$ régulière paramétrée par :

$$\begin{array}{rccl} g\ : & J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & y & \longmapsto & \big(\psi(y), y\big). \end{array}$$

Toute représentation cartesienne $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$ définit donc une courbe paramétrée régulière, mais il existe des courbes paramétrées régulières qui n'admettent pas de représentation cartésienne. Par exemple, le cercle paramétré par $(x = \cos t, y = \sin t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$ ne peut pas avoir de représentation cartésienne, puisqu'il y a deux points d'abscisse 0 et deux points d'ordonnée 0.

1.2 Représentation paramétrique

Soit (I, f) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$. Les deux applications composantes f_1 et f_2 sont alors de classe $\mathcal{C}^k$.

- Si la fonction f_1' ne s'annule pas, cette dernière est de signe constant, puisque continue, et par suite f_1 définit une bijection strictement monotone de I sur un intervalle J Comme sa dérivée ne s'annule pas sa réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

  On obtient ainsi un reparamétrage de la courbe :

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \big(x, f_2 \circ f_1^{-1}(x)\big) \end{array}$$

  qui est la représentation cartésienne associée à la fonction $f_2 \circ f_1^{-1} \in \mathcal{C}^k(J)$.

- Si la fonction f_2' ne s'annule pas, on peut de même obtenir une représentation cartésienne du type $x = f_1 \circ f_2^{-1}(y)$.

Comme nous l'avons vu plus haut, une courbe paramétrée quelconque ne possède pas nécessairement de représentation cartésienne. Cependant, si $M(t_0)$ est un point régulier d'une courbe $\Gamma = (I, f)$, alors on a $f_1'(t_0) \neq 0$ ou $f_2'(t_0) \neq 0$, et donc au voisinage de t_0, au moins une des deux fonctions f_1' ou f_2' ne s'annule pas. On peut alors utiliser ce qui précède et donner, au voisinage de $M(t_0)$, une représentation cartésienne du type $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$.

1.3 Représentation polaire

Si ρ et θ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I on peut définir une courbe paramétrée (I, f) par :

$$f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \rho(t)\,\vec{u}\big(\theta(t)\big) \end{array}$$

où $\big(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\big)$ désigne le repère polaire.

Réciproquement, si (I, f) est une courbe $\mathcal{C}^k$, et si $\forall t \in I,\ f(t) \neq (0,0)$ on peut poser :

$$\forall t \in I,\ \rho(t) = \big\|f(t)\big\|_2 = \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}$$

ce qui définit une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

L'application f/ρ est alors de norme 1 et de classe C^k ; le théorème du relèvement (*cf.* page 548), permet alors de trouver une fonction θ de classe C^k telle que :

$$\forall t \in I\,,\ \frac{f(t)}{\rho(t)} = \big(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\big),$$

ce qui donne une représentation polaire $f(t) = \rho(t)\,\vec{u}\big(\theta(t)\big)$.

Dans le cas particulier où la représentation polaire est $\theta \mapsto \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$, c'est–à–dire pour une courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$, on rappelle que le vecteur dérivé est :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'(\theta)\,\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\,\vec{v}(\theta).$$

En particulier, seule l'origine peut être un point singulier.

1.4 Parametrage admissible

Définition 1

Soit (I, f) un arc paramétré de classe C^k. Un arc paramétré (J, g) de classe C^k est un *paramétrage admissible* (ou un *reparamétrage*) de (I, f) s'il existe une bijection φ de I sur J, de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que $f = g \circ \varphi$.

Une telle application φ est appelée *changement de paramétrage* de classe C^k

Remarques

1. Si φ est un changement de paramétrage de classe C^k, comme φ^{-1} est de classe C^k avec $k \geqslant 1$ la dérivée de φ ne s'annule pas. Étant continue, elle garde un signe constant sur l'intervalle I, ce qui prouve que φ est strictement monotone.
2. Avec les notations de la définition les supports des arcs (I, f) et (J, g) sont identiques, car φ est bijective et donc :

$$f(I) = g\big(\varphi(I)\big) = g(J)$$

Toutefois, l'exemple 2. ci–dessous montre que deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) peuvent avoir le même support sans qu'il existe d'application bijective φ de I dans J vérifiant $f = g \circ \varphi$

Exemples

1. L'arc paramétré défini pour $t \in \,]-\pi, \pi[\,$ par :
$$(x = \cos t\,,\ y = \sin t)$$
admet comme paramétrage admissible l'arc :
$$\left(x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,,\ y = \frac{2u}{1+u^2}\right) \qquad \text{avec} \qquad u \in \mathbb{R}.$$
Le changement de paramétrage est l'application :
$$\begin{array}{rccl} \varphi : &]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \tan \dfrac{t}{2}. \end{array}$$

2. Les applications :
$$\begin{array}{rccl} f : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccl} g : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos 2t, \sin 2t) \end{array}$$
définissent deux arcs paramétrés qui ont même support.
Comme le point $(-1, 0)$ admet un seul antécédent par f et deux antécédents par g, il ne peut pas exister de bijection φ telle que $f = g \circ \varphi$.

Remarque Soient (J, g) un paramétrage admissible d'un arc paramétré (I, f) de classe $\mathcal{C}^k$ et $\varphi : I \to J$ tel que $f = g \circ \varphi$ un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$.

Si M_0 est le point de paramètre t_0 sur l'arc (I, f), et de paramètre $u_0 = \varphi(t_0)$ sur l'arc (J, g), alors on a :
$$f'(t_0) = \varphi'(t_0)\, g'(u_0).$$
Comme $\varphi'(t_0) \neq 0$, la relation précédente montre que le point de paramètre t_0 est régulier sur l'arc (I, f) si, et seulement si, le point de paramètre $u_0 = \varphi(t_0)$ est régulier sur l'arc (J, g) et elle établit que les vecteurs $f'(t_0)$ et $g'(u_0)$ sont colinéaires, ce qui prouve que les arcs (I, f) et (J, g) ont même tangente au point M_0.

2. Longueur d'un arc paramétré

Soient $t_1 < t_2$ et $f \in \mathcal{C}^k\big([t_1, t_2], \mathbb{R}^2\big)$.

2.1 Définitions

Définition 2

On appelle *longueur* de l'arc $\big([t_1, t_2], f\big)$ le réel positif :
$$\int_{t_1}^{t_2} \big\|f'(t)\big\|\, dt.$$

Proposition 1

Si $\big([u_1,u_2],g\big)$ est un reparametrage admissible de l'arc $\big([t_1,t_2],f\big)$, avec $u_1 < u_2$, alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} \big\|f'(t)\big\|\,dt = \int_{u_1}^{u_2} \big\|g'(u)\big\|\,du.$$

La longueur d'un arc paramétré est donc indépendante du paramétrage admissible choisi.

émonstratio Avec les hypothèses, il existe une application $\varphi\ :\ [t_1,t_2] \to [u_1,u_2]$ bijective, de classe $\mathcal{C}^k$ et telle que $f = g\circ\varphi$. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \big\|f'(t)\big\|\,dt &= \int_{t_1}^{t_2} \big\|\varphi'(t)\,g'(\varphi(t))\big\|\,dt\\ &= \int_{t_1}^{t_2} |\varphi'(t)|\ \big\|g'(\varphi(t))\big\|\,dt.\end{aligned}$$

Le changement de paramétrage φ étant monotone :

- si φ est croissante alors $u_1 = \varphi(t_1)$ et $u_2 = \varphi(t_2)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \big\|f'(t)\big\|\,dt &= \int_{t_1}^{t_2} \big\|g'(\varphi(t))\big\|\,\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_{u_1}^{u_2} \big\|g'(u))\big\|\,du.\end{aligned}$$

- si φ est décroissante alors $u_1 = \varphi(t_2)$ et $u_2 = \varphi(t_1)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \big\|f'(t)\big\|\,dt &= -\int_{t_1}^{t_2} \big\|g'(\varphi(t))\big\|\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_{u_1}^{u_2} \big\|g'(u))\big\|\,du.\end{aligned}$$

□

Exemples

1. Si A et B sont deux points du plan le segment $[AB]$ peut être paramétré par :

$$\begin{array}{rcll} f\ : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & t & \longmapsto & t\,B + (1-t)\,A = A + t\,\overrightarrow{AB}.\end{array}$$

Comme $f' = \overrightarrow{AB}$, la longueur du segment est donc :

$$\int_0^1 \|\overrightarrow{AB}\|\,dt = \|\overrightarrow{AB}\|,$$

résultat conforme à ce que l on pouvait attendre.

2. Soit $([a,b], f)$ une courbe paramétrée de classe C^1, avec $a < b$.
   Si $u = (t_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une subdivision de I, la longueur de la ligne polygonale joignant les points $M(t_0)$, $M(t_1)$,..., $M(t_n)$ est :
   $$L_u = \sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{M(t_{i-1})M(t_i)}\|.$$
   Comme on a :
   $$\|\overrightarrow{M(t_{i-1})M(t_i)}\| = \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)\,dt\right\| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\|\,dt$$
   on en déduit :
   $$L_u \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\|\,dt = \int_a^b \|f'(t)\|\,dt.$$
   La longueur d'un arc paramétré est donc un majorant des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc. On peut même démontrer que c'est la borne supérieure de ces longueurs.
   En particulier, on peut en déduire que le plus court chemin pour aller d'un point à un autre est le segment qui les joint.

2.2 Calcul

- Si la courbe est paramétrée par $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ pour $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, alors sa longueur vaut :
  $$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$
- Si la courbe est définie par une représentation cartésienne $y = \varphi(x)$ pour $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, alors sa longueur vaut :
  $$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$
- Si la courbe a une représentation polaire $f(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$ pour $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, alors $f'(\theta) = \rho'\,\vec{u} + \rho\,\vec{v}$ et donc $\|f'(\theta)\| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$, ce qui donne la longueur de la courbe :
  $$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta.$$

Exemples

1. Si $R > 0$, le cercle paramétré sur $[0, 2\pi]$ par $t \mapsto (a + R\cos t, b + R\sin t)$ a pour longueur $2\pi R$.

2. Si $a > 0$, la longueur de l'arc paramétré par $f(t) = (a\cos^3 t\ a\sin^3 t)$ avec $t \in \left[0.\frac{\pi}{2}\right]$, vaut :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|f'(t)\|\, dt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t}\, dt$$
$$= \frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = \frac{3a}{2}\cdot$$

3. Pour la cardioïde d'équation polaire $r = a(1+\cos\theta)$ avec $\theta \in [0.2\pi]$ et $a > 0$, on a :

$$\int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\|\, d\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}\, d\theta$$
$$= 2a\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a.$$

4. L'ellipse, paramétrée par $f(t) = (2\cos t.3\sin t)$ avec $I = [0.2\pi]$, a pour longueur :

$$\int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^2 t + 4\sin^2 t}\, dt,$$

quantité qui ne peut être exprimée à l'aide des fonctions élémentaires, ce qui a conduit à introduire les intégrales et les fonctions dites elliptiques.

3. Abscisse curviligne sur un arc orienté

3.1 Arc paramétré orienté

Définition

Étant donné un arc parametré (I, f) de classe C^k, on a vu que les reparamétrages de cet arc sont les arcs paramétrés (J, g) de classe C^k pour lesquels il existe un changement de parametrage φ, de classe C^k de I dans J, strictement croissant ou strictement décroissant et tel que $f = g \circ \varphi$.

On appelle *arc paramétré orienté*, un arc (I, f) pour lequel on n'autorise que les reparamétrages (J, g) correspondant à des applications φ strictement croissantes.

Tangente orientée

Si (I, f) est un arc parametré orienté régulier et $M(t)$ le point de paramètre t de cet arc, le vecteur non nul $f'(t)$ est un vecteur directeur de la tangente à l'arc en $M(t)$. Il définit donc une orientation de cette tangente que l'on appelle alors *tangente orientée* en $M(t)$.

Remarque L'orientation de la tangente en un point ne dépend pas du paramétrage de cet arc orienté régulier. En effet, si (J, g) est un reparamétrage de cet arc orienté régulier, il existe un changement de paramétrage φ de classe C^k de I dans J strictement croissant et tel que $f = g \circ \varphi$, et l'on a :

$$\forall t \in I\,,\ f'(t) = \varphi'(t)\, g'\big(\varphi(t)\big).$$

Comme $\varphi'(t) > 0$. les vecteurs $f'(t)$ et $g'\big(\varphi(t)\big)$ définissent la même orientation de la tangente en $M(t)$.

Repère de Frénet

Notation Étant donné un arc orienté régulier (I, f), on note :

- $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ le vecteur unitaire dirigeant la tangente orientée en $M(t)$
- $\overrightarrow{N}(t)$, le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\overrightarrow{T}(t)$ c'est-à-dire le vecteur tel que $\big(\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t)\big)$ soit une base orthonormée directe du plan.

Définition 3

Le repère orthonormé direct $\big(M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t)\big)$ est appelé *repère de Frénet* de l'arc orienté (I, f) en $M(t)$.

3.2 Abscisse curviligne

Soit (I, f) un arc orienté de classe C^k.

Définition 4

On appelle *abscisse curviligne* de l'arc orienté (I, f), toute application σ de I dans $\mathbb{R}$ telle que si t_1 et t_2 sont deux éléments de I vérifiant $t_1 < t_2$, alors la longueur de l'arc $\big([t_1, t_2]\,.\,f\big)$ soit égale à $\sigma(t_2) - \sigma(t_1)$.

Soit σ une abscisse curviligne de (I, f). Pour $t_0 \in I$, on a :

- $\forall t > t_0\,,\ \sigma(t) = \sigma(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\, du$

- $\forall t < t_0\,,\ \sigma(t_0) = \sigma(t) + \displaystyle\int_t^{t_0} \|f'(u)\|\, du,$

et donc :

$$\forall t \in I\,,\ \sigma(t) = \sigma(t_0) + \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\, du.$$

On en déduit les résultats suivants :

Proposition 2

1. Les abscisses curvilignes de l'arc orienté (I, f) sont les primitives de la fonction $\|f'\|$.
2. Les abscisses curvilignes de l'arc orienté (I, f) sont égales à une constante additive près.
3. Toute abscisse curviligne σ de l'arc orienté (I, f) est dérivable et vérifie :

$$\forall t \in I\,,\ \frac{d\sigma}{dt}(t) = \|f'(t)\|.$$

Remarques

1. Si t_0 est un élément de I, il existe une et une seule abscisse curviligne σ telle que $\sigma(t_0) = 0$. Elle est appelée abscisse curviligne d'origine $M(t_0)$ et vérifie :

$$\forall t \in I\,,\ \sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(v)\|\, dv.$$

2. Soient (J, g) un reparamétrage admissible de l'arc orienté $(I\ f)$ et $\varphi\ :\ I \to J$ tel que $f = g \circ \varphi$ un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$. Si $u_0 = \varphi(t_0)$ et $u = \varphi(t)$ alors :

$$\begin{aligned}\sigma_f(t) &= \int_{t_0}^{t} \|f'(v)\|\, dv\\ &= \int_{t_0}^{t} \varphi'(v)\, \|g'(\varphi(v))\|\, dv \qquad \text{car } \varphi' > 0\\ &= \int_{u_0}^{u} \|g'(w)\|\, dw\\ &= \sigma_g(u)\end{aligned}$$

ce que l on peut exprimer en disant que l'abscisse curviligne est indépendante du paramétrage admissible de l'arc orienté (I, f).

3. Un calcul similaire montre que si l'on change l'orientation d'une courbe, les nouvelles abscisses curvilignes sont les opposées des anciennes.

Calcul pratique de l'abscisse curviligne

- En représentation cartésienne $f(x) = \big(x, y(x)\big)$, on a :

$$\frac{d\sigma}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

- Si l'arc est paramétré en cartésiennes par $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, alors :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

- Si l'arc est paramétré en polaires par $f(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$, alors :

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.$$

Exemples Soit $a > 0$.

1. Pour $x(t) = a\,\cos^3 t$ et $y(t) = a\,\sin^3 t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = a\sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} = \frac{3a}{2}|\sin 2t| = \frac{3a}{2}\sin 2t$$

et donc :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \sigma(t) = -\frac{3a}{4}\cos 2t + k.$$

2. Pour la cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} = a\sqrt{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\cdot$$

En prenant le point $M(0)$ comme origine des abscisses curvilignes, on a :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \ \sigma(\theta) = \int_0^\theta 2a\,\cos\frac{t}{2}\,dt = 4a\,\sin\frac{\theta}{2}.$$

$$\forall \theta \in [\pi, 2\pi], \ \sigma(\theta) = \sigma(\pi) + \int_\pi^\theta 2a\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = 8a - 4a\,\sin\frac{\theta}{2}\cdot$$

Remarque L'utilisation de $[-\pi, \pi]$ comme domaine de variations de θ aurait évité les problèmes de valeur absolue et donné :

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \ \sigma(\theta) = \int_0^\theta 2a\,\cos\frac{t}{2}\,dt = 4a\,\sin\frac{\theta}{2}\cdot$$

3.3 Paramétrage par l'abscisse curviligne

Dans toute la suite de ce chapitre on considère un arc orienté régulier (I, f).

Proposition 3

Si σ est une abscisse curviligne de l'arc orienté régulier (I, f) de classe $\mathcal{C}^k$, alors l'application σ est un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$ strictement croissant de l'intervalle I sur l'intervalle $J = \sigma(I)$.

émonstratio

- L'application σ étant une abscisse curviligne de l'arc (I, f), elle est dérivable et vérifie $\sigma' = \|f'\|$ Comme f' ne s'annule pas, l'application $\|f'\|$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I (voir page 544), et l'on en déduit que σ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
- De plus, σ' etant strictement positive sur I, la fonction σ est strictement croissante sur I. Puisqu'elle est continue, elle définit une bijection de I sur l'intervalle $J = \sigma(I)$.
- Comme σ' ne s'annule pas sur I, sa bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J □

Proposition 4

Avec les notations de la proposition précédente, si l'on pose :

$$g : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto & f\big(\sigma^{-1}(s)\big) \end{array}$$

alors l arc (J, g) est un reparamétrage de l'arc orienté (I, f).

Ce parametrage est dit *normal*, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall s \in J\,,\ \|g'(s)\| = 1.$$

Le paramétrage (J, g) est appelé *paramétrage* de l'arc (I, f) *par l'abscisse curviligne.*

Démonstration

- Par définition, on a la relation $f = g \circ \sigma$, le changement de paramétrage σ étant strictement croissant de I dans J, ce qui montre que (J, g) est un reparamétrage de l'arc orienté (I, f).
- En dérivant la relation $f = g \circ \sigma$, on obtient :

$$\forall t \in I\,,\ f'(t) = \sigma'(t)\, g'\big(\sigma(t)\big),$$

et donc :

$$\forall t \in I\,,\ \big\|g'\big(\sigma(t)\big)\big\| = \frac{\|f'(t)\|}{\sigma'(t)} = 1$$

c'est-à-dire :

$$\forall s \in J\,,\ \|g'(s)\| = 1.$$

□

4. Courbure d'un arc orienté régulier

Dans cette section, on considère un arc orienté régulier de classe C^k avec $k \geqslant 2$, dont (J, g) est un paramétrage par l'abscisse curviligne.

4.1 Courbure, rayon de courbure

Proposition 5

Si $M(s)$ est un point de paramètre s de l'arc (J, g), il existe un unique réel, noté $\gamma(s)$ et appelé *courbure* de l'arc au point $M(s)$, tel que :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) = \gamma(s)\overrightarrow{N}(s).$$

Démonstratio En dérivant la relation $\overrightarrow{T}.\overrightarrow{T} = 1$, on obtient $2\overrightarrow{T} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = 0$

Le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{T}$, et par conséquent colinéaire à $\overrightarrow{N}$ □

Définition 5

Le point $M(s)$ de paramètre s de l'arc (J, g) est *birégulier* si $\gamma(s) \neq 0$. On appelle alors *rayon de courbure* au point $M(s)$, le réel $\mathcal{R}(s) = \dfrac{1}{\gamma(s)}$.

Une courbe est *birégulière* si tous ses points sont biréguliers.

Proposition 6

Soit (I, f) un arc paramétré régulier. Un point $M(t)$ est birégulier si, et seulement si, les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ sont non colinéaires.

Démonstratio Les égalités :

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} &= \frac{ds}{dt}\overrightarrow{T} \\
\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} &= \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \gamma\overrightarrow{N}
\end{aligned}$$

entraînent :

$$\operatorname{Det}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}, \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{ds}{dt} & \frac{d^2s}{dt^2} \\ 0 & \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \gamma \end{vmatrix} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \gamma$$

ce qui donne le resultat puisque $\dfrac{ds}{dt} \neq 0$. □

Remarques

- On appelle *centre de courbure* en un point birégulier $M(s)$, le point $C(s)$ tel que :
$$\overrightarrow{M(s)C(s)} = \mathcal{R}(s)\,\overrightarrow{N}(s).$$
- Le lieu des centres de courbure d'une courbe Γ birégulière est appelé *développée* de Γ.
- Si l'on change l'orientation d'une courbe birégulière :
  - l'abscisse curviligne est multipliée par -1,
  - le vecteur $\overrightarrow{T}$ est multiplié par -1 ; il en est donc de même pour le vecteur $\overrightarrow{N}$,
  - le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}$ est donc inchangé, et la relation $\gamma\overrightarrow{N} = \dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}$ prouve que la courbure et le rayon de courbure sont multipliés par -1.

  Le centre de courbure en $M(s)$ ne depend donc pas de l'orientation choisie sur l'arc.

4.2 Formules de Frénet

Proposition 7

Il existe une fonction α de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur J telle que :

$$\forall s \in J\,,\ \overrightarrow{T}(s) = \cos\alpha(s)\,\vec{e}_1 + \sin\alpha(s)\,\vec{e}_2.$$

émonstration L'application $s \mapsto \overrightarrow{T}(s)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur J et vérifie :

$$\forall s \in J\,,\ \left\|\overrightarrow{T}(s)\right\| = 1.$$

Le résultat est donc une conséquence du théorème du relèvement de la page 548. □

Dans la suite de cette section, α désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur J vérifiant :

$$\overrightarrow{T} = \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_2,$$

c'est-à-dire $(\widehat{Ox, \overrightarrow{T}}) = \alpha$ et donc $(\widehat{Ox, \overrightarrow{N}}) = \alpha + \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Proposition 8

En tout point d'un arc régulier, on a :

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma \overrightarrow{T}.$$

émonstration

- En dérivant la relation $\overrightarrow{T} = \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_2$, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}\,(-\sin\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_2) = \frac{d\alpha}{ds}\,\overrightarrow{N}.$$

Par définition de la courbure, on a donc $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds}\cdot$

- En dérivant la relation $\overrightarrow{N} = -\sin\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\alpha\,\vec{e}_2$, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}\,(-\cos\alpha\,\vec{e}_1 - \sin\alpha\,\vec{e}_2) = -\frac{d\alpha}{ds}\,\overrightarrow{T}$$

et donc $\dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma\overrightarrow{T}$. □

Remarques

- En supposant l'arc (J, g) birégulier, on a $\dfrac{d\alpha}{ds} = \gamma \neq 0$ et l'application α est donc une bijection strictement monotone de J sur $\alpha(J)$, de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ ainsi que sa réciproque.

  On peut donc inverser l'application α et définir s comme fonction dérivable de α, ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{R}(s) = \frac{1}{\dfrac{d\alpha}{ds}} = \frac{ds}{d\alpha}\cdot$$

- Si C est le centre de courbure au point M, on a :

$$\overrightarrow{MC} = \mathcal{R}\,\overrightarrow{N} = \frac{ds}{d\alpha}\,\overrightarrow{N} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{N} = -\frac{dy}{ds}\,\vec{e}_1 + \frac{dx}{ds}\,\vec{e}_2.$$

  Les coordonnées (X, Y) de C vérifient donc :

$$X = x - \frac{dy}{d\alpha} \qquad \text{et} \qquad Y = y + \frac{dx}{d\alpha}\cdot$$

4.3 Interprétation cinématique

Dans l'étude d'un mouvement $t \mapsto M(t)$, le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ représente la vitesse du point et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ son accéleration.

On peut exprimer ces deux vecteurs dans la base de Frénet $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{T} = v\,\overrightarrow{T}$$

où v représente la vitesse scalaire du point.

Pour l'accélération, il suffit de dériver cette dernière égalité, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} &= \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + v\,\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}\\ &= \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + v\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}\\ &= \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{\mathcal{R}}\overrightarrow{N}.\end{aligned}$$

Dans cette formule, le terme $\frac{dv}{dt}\overrightarrow{T}$ représente l'*accélération tangentielle* et indique les variations de la norme du vecteur vitesse. Le deuxième terme est l'*accélération centripète* qui indique les variations de la direction du vecteur vitesse.

4.4 Calculs pratiques

Dans la pratique, une courbe est donnée par un paramétrage qui n'est pas nécessairement normal. Nous allons voir comment calculer alors le repère de Frénet et la courbure.

Courbe paramétrée en cartésiennes

Soit (I, f) un arc orienté régulier dont on note s une abscisse curviligne.

Abscisse curviligne et repère de Frénet

En normant le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (x', y')$, on obtient :

- $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$,
- $\overrightarrow{T} = \frac{dt}{ds}\,\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2$, où a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$
- $\overrightarrow{N} = -b\,\vec{e}_1 + a\,\vec{e}_2$ qui est le vecteur unitaire tel que $\left(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right)$ soit une base orthonormée directe.

Par intégration, on peut éventuellement obtenir une expression de s en fonction de t, mais ce n'est pas utile pour la suite des calculs

Détermination de l'angle α

$$\cos\alpha = a = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} \qquad \text{et} \qquad \sin\alpha = b = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}.$$

Courbure

- Si l'on peut déterminer une expression de α en fonction de t, on a :

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}. \qquad (*)$$

- S'il n'existe pas d'expression simple de α en fonction de t, il est préférable de dériver, lorsqu'elle a un sens, l'égalité :

$$\tan\alpha = \frac{y'}{x'}$$

ce qui permet d'obtenir $\dfrac{d\alpha}{dt}$ pour utiliser la formule $(*)$

- On peut aussi utiliser les relations :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \gamma\,\frac{ds}{dt}\overrightarrow{N} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\overrightarrow{T}}{dt}\cdot\overrightarrow{N} = \gamma\,\frac{ds}{dt},$$

la deuxième permettant, lors du calcul de $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt}$, de ne pas calculer les termes qui sont colinéaires à $\overrightarrow{T}$.

- On peut également écrire :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\overrightarrow{T}$$
$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\overrightarrow{T} + \gamma\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\,\overrightarrow{N}$$

et donc :

$$\operatorname{Det}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right) = \gamma\,\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

ce qui donne :

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Exemples

1. Pour l'astroïde paramétrée par $x(t) = a\cos^3 t$ et $y(t) = a\sin^3 t$ avec $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$x' = -3a\cos^2 t \sin t \qquad \text{et} \qquad y' = 3a\sin^2 t \cos t$$

ce qui donne :

- $\dfrac{ds}{dt} = 3a\sin t\cos t > 0$; l'arc est donc régulier,
- $\overrightarrow{T} = -\cos t\,\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2$ et $\overrightarrow{N} = -\sin t\,\vec{e}_1 - \cos t\,\vec{e}_2$; on peut donc prendre $\alpha = \pi - t$,
- $\gamma = \dfrac{d\alpha}{dt}\dfrac{dt}{ds} = -\dfrac{1}{3a\sin t\cos t}$ et $\mathcal{R} = -3a\sin t\cos t$.

2. Pour l'ellipse paramétrée par :

$$\big(x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t\big) \qquad \text{avec} \qquad t \in [0\ 2\pi]$$

on a :

- $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} > 0$ et l'arc est régulier.
- $$\overrightarrow{T} = -\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\,\vec{e}_1 + \frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\,\vec{e}_2$$
$$\overrightarrow{N} = -\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\,\vec{e}_1 - \frac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\,\vec{e}_2$$
- En dérivant l'expression de $\overrightarrow{T}$, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\right)(-a\sin t\,\vec{e}_1 + b\cos t\,\vec{e}_2)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}(-a\cos t\,\vec{e}_1 - b\sin t\,\vec{e}_2)$$

et donc :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}\cdot\overrightarrow{N} = \frac{1}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}(a\,b\cos^2 t + a\,b\sin^2 t)$$

Or :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}\cdot\overrightarrow{N} = \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}\cdot\overrightarrow{N} = \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{ds}{dt}$$

ce qui donne :

$$\mathcal{R} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

- Le centre de courbure en M est défini par :

$$\overrightarrow{MC} = \frac{\left(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\right)^{3/2}}{ab} \overrightarrow{N}$$

et donc :

$$C(t) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t\right).$$

Par suite la développée d'une ellipse est, à une affinité près, une astroïde.

3. On peut donner une représentation cartésienne d'une parabole d'axe Ox sous la forme $x = y^2/2p$, avec $p > 0$, ce qui revient à paramétrer la parabole par $f : y \mapsto (y^2/2p, y)$. On a alors $f'(y) = (y/p, 1)$.

- $\dfrac{ds}{dy} = \dfrac{\sqrt{y^2 + p^2}}{p}$.
- $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 + p^2}} (y\,\vec{e}_1 + p\,\vec{e}_2)$ et $\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 + p^2}} (-p\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2)$.
- Si $y \neq 0$, on a :

$$\tan\alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{p}{y}$$

ce qui donne en dérivant :

$$(1 + \tan^2\alpha)\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{p}{y^2}$$

soit :

$$\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right) \frac{d\alpha}{dy} = -\frac{p}{y^2}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{p}{y^2 + p^2}.$$

La courbe étant $\mathcal{C}^\infty$ et régulière, la fonction α est $\mathcal{C}^\infty$ et donc par continuité cette formule est valable aussi pour $y = 0$.

- $\gamma = \dfrac{d\alpha}{dy} \times \dfrac{dy}{ds}$ et $\mathcal{R} = \dfrac{1}{\gamma} = -\dfrac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{p^2}$.

4. Les formules qui donnent le vecteur normal et la courbure en fonction des dérivées de x et y permettent d'exprimer les coordonnées du centre de courbure :

$$X = x - y' \, \frac{x'^2 + y'^2}{x'\,y'' - x''\,y'} \qquad \text{et} \qquad X = y + x' \, \frac{x'^2 + y'^2}{x'\,y'' - x''\,y'}.$$

Ces expressions permettent un tracé informatique de la développée ; par exemple dans le cas d'une ellipse :

```
> x:=5*cos(t);y:=3*sin(t);
```

$$x := 5\cos(t)$$

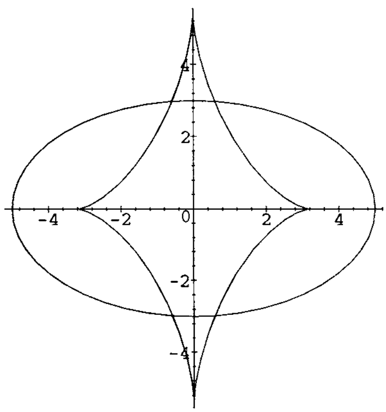
$$y := 3\sin(t)$$

```
> x1:=diff(x,t):y1:=diff(y,t):
> x2:=diff(x1,t):y2:=diff(y1,t):
> det:=x1*y2-x2*y1:
> v2:=x1^2+y1^2:
> X:=x-y1*v2/det;Y:=y+x1*v2/det;
```

$$X := 5\cos(t) - 3\frac{\cos(t)\left(25\sin(t)^2 + 9\cos(t)^2\right)}{15\sin(t)^2 + 15\cos(t)^2}$$

$$Y := 3\sin(t) - 5\frac{\sin(t)\left(25\sin(t)^2 + 9\cos(t)^2\right)}{15\sin(t)^2 + 15\cos(t)^2}$$

```
> plot({[x,y,t=-Pi..Pi],[X,Y,t=-Pi..Pi]});
```



Courbe définie en coordonnées polaires

Pour une courbe définie en coordonnées polaires par $r = \rho(\theta)$, au lieu d'appliquer les résultats précédents, il est beaucoup plus judicieux de faire les calculs à l'aide du repère mobile $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

En dérivant l'égalité $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}$, on obtient $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'\,\vec{u} + \rho\,\vec{v}$.

Abscisse curviligne et repère de Frénet

En normant le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \rho'\,\vec{u} + \rho\,\vec{v}$, on obtient :

- $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$,
- $\overrightarrow{T} = \dfrac{d\theta}{ds}\,\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$, avec $a^2 + b^2 = 1$,
- $\overrightarrow{N} = -b\,\vec{u} + a\,\vec{v}$.

Détermination de l'angle α

On a $\alpha = \theta + V\ [2\pi]$ où V est une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{T})}$.

Courbure en $M(\theta)$

- Si l'on peut déterminer une expression de V en fonction de θ on a :

$$\gamma = \frac{d(\theta + V)}{d\theta}\,\frac{d\theta}{ds}. \qquad (*)$$

- S'il n'existe pas d'expression simple de α en fonction de θ on peut dériver :

$$\operatorname{cotan} V = \frac{\rho'}{\rho}$$

  ce qui donne $\dfrac{dV}{d\theta}$ et permet d'utiliser la formule $(*)$

- On peut également utiliser la formule :

$$\operatorname{Det}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}, \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2}\right) = \gamma\,\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3$$

  qui donne, en calculant le produit mixte dans la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$:

$$\gamma = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

  puisque :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2} = (\rho'' - \rho)\,\vec{u} + 2\rho'\,\vec{v}.$$

Exemples Soit $a > 0$.

1. Pour la cardioïde définie par $\rho(\theta) = a\,(1+\cos\theta)$ avec $\theta \in \,]-\pi,\pi[$, on a (voir l'exercice 10 de la page 599) :
$$\rho'\,\vec{u} + \rho\,\vec{v} = -a\,\sin\theta\,\vec{u} + a\,(1+\cos\theta)\,\vec{v} = 2a\,\cos\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{v}\right)$$
ce qui donne :
   - $\dfrac{ds}{d\theta} = 2a\,\cos\dfrac{\theta}{2}$,
   - $\overrightarrow{T} = -\sin\dfrac{\theta}{2}\,\vec{u} + \cos\dfrac{\theta}{2}\,\vec{v}$ et $\overrightarrow{N} = -\cos\dfrac{\theta}{2}\,\vec{u} - \sin\dfrac{\theta}{2}\,\vec{v}$
   - $V = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\alpha = \dfrac{3\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$,
   - $\gamma = \dfrac{d\alpha}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{3}{4a\,\cos\frac{\theta}{2}}$ et $\mathcal{R} = \dfrac{4a}{3}\,\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot$

2. Pour la courbe définie par $\rho(\theta) = a\,e^{m\theta}$ avec $m \neq 0$:
   - $\dfrac{ds}{d\theta} = a\,\sqrt{m^2+1}\,e^{m\theta}$
   - $\overrightarrow{T} = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}\vec{u}(\theta) + \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}\vec{v}(\theta)$

     $\overrightarrow{N} = -\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}\vec{u}(\theta) + \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}\vec{v}(\theta)$
   - L'angle V est donc constant et par suite $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1$.
   - $\gamma = \dfrac{d\alpha}{d\theta}\,\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{a\,\sqrt{m^2+1}\,e^{m\theta}}$ et $\mathcal{R} = a\,\sqrt{m^2+1}\,e^{m\theta}$.
   - Le centre de courbure en M est défini par :
$$\overrightarrow{MC} = a\,e^{m\theta}\,\sqrt{m^2+1}\,\overrightarrow{N} = -a\,e^{m\theta}\vec{u} + m\,a\;e^{m\theta}\,\vec{v},$$
ce qui donne :
$$\overrightarrow{OC} = m\,a\,e^{m\theta}\,\vec{v} = m\,a\,e^{m\theta}\,\vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$
La développée est la courbe d'équation polaire :
$$r = m\,a\,e^{m\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} = m\,a\,e^{-m\pi/2}\,e^{m\theta} = a\,e^{m\left(\theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\ln m}{m}\right)}.$$
Elle se déduit donc de la courbe initiale par (au choix) :
     - l'homothétie de centre O et de rapport $m\,e^{-m\pi/2}$,
     - la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\ln m}{m}$,
     - la similitude directe de centre O de rapport m et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, cette dernière envoyant en outre chaque point sur le centre de courbure correspondant.

EXERCICES

1. Calculer la longueur de l'astroïde paramétrée par :

$$x = a\cos^3 t \quad \text{et} \quad y = a\sin^3 t \qquad \text{avec} \qquad a > 0.$$

2. Calculer la longueur d'une arche de cycloïde paramétrée sur $[0, 2\pi]$ par :

$$x = a\,(t - \sin t) \quad \text{et} \quad y = a\,(1 - \cos t) \qquad \text{avec} \qquad a > 0$$

3. Calculer la longueur de la courbe d'équation polaire $r = a\cos^3(\theta/3)$

4. Déterminer une abscisse curviligne d'une chaînette d'équation $y = \operatorname{ch} x$.

5. Montrer que la courbe d'équation :

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et calculer son abscisse curviligne qui s'annule en 1. Retrouver ce résultat en utilisant le changement de paramétrage défini par $x = \operatorname{ch} t$.

6 Quel est le rayon de courbure d'une conique de paramètre p en un point de l'axe focal ?

7. Soit C une courbe orientée birégulière. Un point P lié au repère de Frénet $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ décrit une courbe Γ.

a) À quelle condition le point P est-il un point singulier de Γ ?

b) Montrer que sinon la normale à Γ en P passe par le centre de courbure de C en M.

c) (i) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les points M et P aient des vitesses parallèles. On suppose cette condition satisfaite dans la suite.

(ii) Quel est, lorsqu'il existe, le centre de courbure de Γ en P ?

(iii) Dans le cas où C est la parabole d'équation $y = x^2/2p$, étudier la courbe Γ et représenter les différents cas sur un même graphique avec la développée de C.

8. Développée d'une hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

9. Développée de la courbe paramétrée par :

$$x = t - \operatorname{th} t \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

10. Étude de la cardioïde d'équation polaire $r = a\,(1 + \cos\theta)$.

Montrer que sa développée est encore une cardioïde.

11. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. On cherche les courbes orientées birégulières Γ pour lesquelles on peut trouver une abscisse curviligne telle qu'en tout point M de Γ, on ait $M - \frac{s}{2}\overrightarrow{T} \in \mathcal{D}$.

a) Montrer que si $a > 0$, l'arche de cycloïde paramétrée par :

$$x = a\,(t - \sin t) \quad \text{et} \quad y = a(1 - \cos t) \qquad \text{avec} \qquad t \in \,]\,0, 2\pi\,[$$

vérifie cette propriété lorsque $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $y = 2a$.

b) Réciproquement, soit Γ vérifiant cette propriété et ne possédant aucune tangente parallèle à $\mathcal{D}$. En prenant un repère orthonormé direct dans lequel la droite $\mathcal{D}$ est l'axe Ox, exprimer $\frac{dy}{ds}$ en fonction de $\alpha = \widehat{(Ox, \overrightarrow{T})}$ et en déduire y, s et x en fonction de α.
Montrer que Γ est une portion de cycloïde.

12. Soient Γ une courbe orientée birégulière, M_0 un point de Γ et s l'abscisse curviligne qui s'annule en M_0.

On prend un point A du plan distinct de M_0 et l'on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et passant par M_0.

a) Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 des coordonnées de $M(s)$ dans le repère de Frénet $(M_0, \overrightarrow{T}_0, \overrightarrow{N}_0)$.

b) À quelle condition sur A a-t-on $d\big(A, M(s)\big) = d(A, M_0) + o(s)$? Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ est alors tangent à Γ en M_0.

c) Quel est l'unique point A pour lequel on a $d\big(A, M(s)\big) = d(A, M_0) + o(s^2)$? Le cercle $\mathcal{C}$ est alors appelé cercle osculateur de Γ en M_0

13. Soient $\mathcal{C}$ une courbe orientée birégulière et Γ sa développée. Étant donnés un point M de $\mathcal{C}$ et I le centre de courbure de $\mathcal{C}$ en M, montrer que si I est un point régulier de Γ, alors la tangente à Γ en I est la normale à $\mathcal{C}$ en M.

14. Étant donnée une courbe orientée birégulière $\mathcal{C}$, on cherche les courbes orientees birégulières Γ dont la développée est $\mathcal{C}$. On note $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ le repère de Frénet au point M de $\mathcal{C}$.

a) En utilisant l'exercice précédent, montrer que l'on peut paramétrer une telle courbe Γ par une abscisse curviligne s de $\mathcal{C}$ sous la forme :

$$\mu(s) = M(s) + \lambda(s)\,\overrightarrow{T}(s)$$

et que l'on doit avoir $\dfrac{d\lambda}{ds} = -1$

b) Réciproquement, si l'on suppose $\dfrac{d\lambda}{ds} = -1$, montrer que la courbe définie par $\mu = M + \lambda\,\overrightarrow{T}$ est birégulière sauf éventuellement en un point et que sa développée est égale à $\mathcal{C}$.

c) Déterminer et représenter la courbe Γ lorsque $\mathcal{C}$ est un cercle.

Chapitre 21

Fonctions de deux variables

Dans ce chapitre :

- $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ définie par :
$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$
- (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$,

Remarque Tous les resultats peuvent facilement se généraliser à $\mathbb{R}^3$, voire à $\mathbb{R}^n$.

1. Préliminaires

1.1 Parties ouvertes

Définition 1

Si a est un point de $\mathbb{R}^2$ et R un réel strictement positif, on appelle :

- *boule ouverte* de centre a et de rayon R, l'ensemble :
$$B(a. R) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u-a\| < R\}.$$
- *boule fermée* de centre a et de rayon R, l'ensemble :
$$\overline{B}(a, R) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u-a\| \leqslant R\}.$$
- *sphère* de centre a et de rayon R, l'ensemble :
$$S(a, R) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u-a\| = R\}$$

Exemples

1. Dans le plan euclidien identifié à $\mathbb{R}^2$ au moyen d un repère orthonormé, les boules $B(a,R)$ et $\overline{B}(a,R)$ sont respectivement les disques ouverts et fermés de centre a et de rayon R, la sphère correspondante étant le cercle de centre a et de rayon R.
2. On peut généraliser facilement ces notions à $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne habituelle :
$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$
La terminologie de boules et de sphères provient du cas $n = 3$

Remarques

- On peut définir la *convergence* d une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$: une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R}^2$ si la suite $\big(\|u_n - a\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
Il est équivalent de dire :
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \in B(a,\varepsilon). \qquad (*)$$
- En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, on voit que la notion de convergence est la même que pour les suites complexes.
Les propriétés des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ sont donc les mêmes que celles vues au chapitre 18, en particulier une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (α,β) si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \beta$.
- On peut généraliser grâce à la définition $(*)$ ci–dessus la notion de convergence aux suites à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne

Définition 2

Une partie X de $\mathbb{R}^2$ est *bornée* s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall u \in X\,,\ \|u\| \leqslant M$$
c'est–à–dire si X est incluse dans une boule fermée de centre 0.

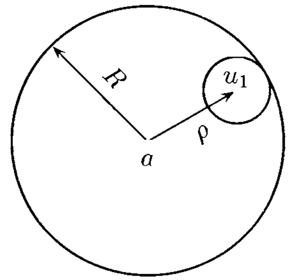
Exemples

1. Toute disque de $\mathbb{R}^2$ est borné, puisque l'inégalité triangulaire entraîne $\overline{B}(u_0, R) \subset \overline{B}\big(0. R + \|u_0\|\big)$.
2. Comme tout cercle est inclus dans un disque, on en déduit qu'il est borné
3. Le rectangle $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ est borné, car il est inclus dans $B(0, M\sqrt{2})$, où $M = \max\big(|a|,|b|,|c|,|d|\big)$.
4. L'intersection et la réunion de deux parties bornées sont bornées.

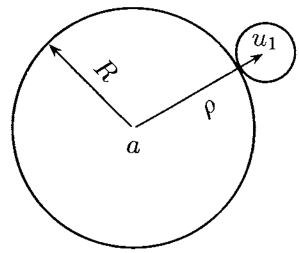
Définition 3

Une partie X de $\mathbb{R}^2$ est une *partie ouverte* de $\mathbb{R}^2$, ou un *ouvert* de $\mathbb{R}^2$, si pour tout $a \in X$, il existe un réel $h > 0$ tel que $B(a, h) \subset X$.

Exemples



1. La boule ouverte $B(a, R)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
   En effet si u_1 est un point de $B(a, R)$ et si $\rho = \|u_1 - a\|$, on a $\rho < R$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^2$:
   $$\begin{aligned}\|u - a\| &\leqslant \|u - u_1\| + \|u_1 - a\| \\ &\leqslant \|u - u_1\| + \rho.\end{aligned}$$
   Donc :
   $$\|u - u_1\| < R - \rho \Longrightarrow \|u - a\| < R,$$
   ce qui prouve $B(u_1, R - \rho) \subset B(a, R)$.



2. L'ensemble $X = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u - a\| > R\}$, complémentaire de $\overline{B}(a, R)$, est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet si u_1 est un point de X et si $\rho = \|u_1 - a\|$, on a $\rho > R$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\|u - u_1\| < \rho - R$:
   $$\|u - a\| \geqslant \|u_1 - a\| - \|u_1 - u\| > R$$
   ce qui prouve $B(u_1, \rho - R) \subset X$.
3. L'intersection de deux ouverts U_1 et U_2 est un ouvert. En effet, si $u \in U_1 \cap U_2$, on peut trouver $h_1 > 0$ et $h_2 > 0$ tels que $B(u, h_1) \subset U_1$ et $B(u, h_2) \subset U_2$. Pour $h = \min(h_1, h_2)$, on a alors $B(u, h) \subset U_1 \cap U_2$.
4. Toute réunion de parties ouvertes est une partie ouverte.

Définition 4

On dit qu'un point $a \in \mathbb{R}^2$ est *adhérent* à la partie A de $\mathbb{R}^2$ si toute boule centrée en a et de rayon strictement positif rencontre A, c'est-à-dire :
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists u \in A \ : \ \|u - a\| \leqslant \varepsilon.$$

Exemples

1. Tout élément de A est évidemment un point adhérent à A.
2. Tout point d'une sphère S de centre u_0 et de rayon $R > 0$ est adhérent à la boule ouverte $B(u_0, R)$.

En effet si a est un point de S, pour tout reel $\varepsilon \in \left]0, R\right[$ le point :

$$u = \frac{\varepsilon}{R}u_0 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)a$$

vérifie les relations :

$$\|u - u_0\| = \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)\|a - u_0\| < R \qquad \text{et} \qquad \|u - a\| = \frac{\varepsilon}{R}\|a - u_0\| = \varepsilon.$$

Remarques

- Une partie de $E = \mathbb{R}^2$ est *fermée* si elle contient tous ses points adhérents.
- Une partie A est fermée si, et seulement si, son complémentaire est un ouvert. En effet, $E \setminus A$ n est pas un ouvert si, et seulement si, l'on a :

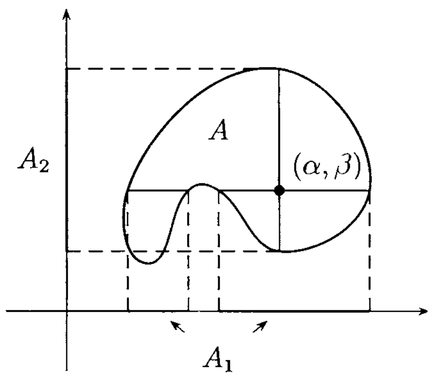
$$\exists a \in E \setminus A \ : \ \forall \varepsilon > 0, \ B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

et ceci est équivalent à dire qu'il existe un point adhérent à A qui n est pas dans A.

1.2 Applications partielles associées à une fonction de deux variables

Étant donné un point $a = (\alpha, \beta) \in A$, on définit les parties A_1 et A_2 de $\mathbb{R}$ par :

$$A_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (x, \beta) \in A\right\}$$
$$A_2 = \left\{y \in \mathbb{R} \mid (\alpha, y) \in A\right\}.$$



Les applications f_1 et f_2 définies par :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} A_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t, \beta) \end{array}$$

et

$$f_2 : \begin{array}{ccc} A_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(\alpha, t) \end{array}$$

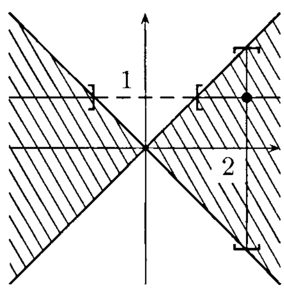
sont appelées les *applications partielles* associées à f au point a.

Exemples

1. Soient $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geqslant 0\right\}$ et f définie sur A par $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.
   - Au point $(2, 1)$, les fonctions partielles $f_1 : t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}$ et $f_2 : t \mapsto \sqrt{4 - t^2}$ sont définies respectivement sur :

$$A_1 = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$$

$$A_2 = [-2, 2].$$



- Au point $(0,0)$, la première fonction partielle $f_1 : t \mapsto |t|$ est définie sur $\mathbb{R}$, alors que la deuxième fonction partielle n'est définie qu'en 0.

2. Si A est un ouvert, on peut trouver $h > 0$ tel que $B(a,h) \subset A$, ce qui prouve que les ensembles A_1 et A_2 contiennent respectivement les intervalles $]\,\alpha - h, \alpha + h\,[$ et $]\,\beta - h, \beta + h\,[$. Les deux fonctions partielles sont donc définies respectivement au voisinage de α et au voisinage de β.
3. Même si a est un point adhérent à $A \setminus \{a\}$, les fonctions partielles peuvent ne pas être définies au voisinage de α et β, comme le montre l'exemple ci–dessus avec $a = (0,0)$.

Les fonctions partielles permettent d'étudier le comportement d une fonction de deux variables le long d'une droite parallèle à l un des deux axes de coordonnées. Ce sont des fonctions d'une variable réelle, auxquelles on peut donc appliquer les résultats classiques concernant ces fonctions.

Plus généralement, on peut étudier le comportement d'une fonction de deux variables sur toute droite passant par un point $a = (\alpha, \beta)$ de A en considérant, pour tout vecteur non nul $u = (h,k)$, la fonction définie par :

$$\varphi_u(t) = f(a + t\,u) = f(\alpha + t\,h, \beta + t\,k).$$

Cependant, nous verrons que l'étude de la limite d'une application de deux variables **ne peut pas** se ramener à l'étude de ses restrictions à toutes ces droites, et encore moins à l'étude de ses deux fonctions partielles.

2. Continuité

2.1 Limite et continuité d'une fonction de deux variables

Définition 5

Soit a un point adhérent à A.

- On dit que f tend vers 0 en a, ou admet 0 pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall u \in A\,,\ \|u - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(u)| \leqslant \varepsilon.$$

- Étant donné $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que f a pour limite ℓ en a si $f - \ell$ tend vers 0. Le réel ℓ est alors unique et on le note :

$$\ell = \lim_a f \qquad \text{ou} \qquad \ell = \lim_{u \to a} f(u).$$

- Lorsque $a \in A$, si f admet une limite en a celle–ci est égale à $f(a)$ et on dit que f est continue en a.

émonstration de l'un˙cité. Supposons que f admette deux limites ℓ_1 et ℓ_2. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que :

$$\forall u \in A\,,\ \|u - a\| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(u) - \ell_1| \leqslant \varepsilon$$

et :

$$\forall u \in A\,,\ \|u - a\| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow |f(u) - \ell_2| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$; comme a est adhérent à A, il existe un élément $u \in A$ tel que $\|u - a\| \leqslant \eta$. On a alors :

$$|\ell_1 - \ell_2| \leqslant |f(u) - \ell_1| + |f(u) - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon.$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0\,,\ |\ell_1 - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve $\ell_1 = \ell_2$.
Dans le cas où $a \in A$, supposons que f admette une limite ℓ
Comme on a $\forall \eta > 0\,,\ \|a - a\| \leqslant \eta$, on en deduit :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ |f(a) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve que $\ell = f(a)$ □

Exemples

1. Les projections canoniques :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$ puisque :

$$|x_1 - x_2| \leqslant \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \qquad \text{et} \qquad |y_1 - y_2| \leqslant \|(x_1 . y_1) - (x_2, y_2)\|.$$

2. Plus généralement, une application affine :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \alpha\, x + \beta\, y + \gamma \end{array}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

3. L'application $f\ :\ A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{3\,x^2 + x\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

tend vers 0 en $(0,0)$ car, pour tout $(x,y) \in A$, on a :

$$|f(x,y)| = \frac{|3\,x^2 + x\,y|}{\|(x,y)\|} \leqslant \frac{4\,\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} = 4\,\|(x,y)\|.$$

On en déduit que pour un $\varepsilon > 0$ donné il suffit de prendre $\eta = \varepsilon/4$ pour avoir :

$$\forall u \in A,\ \|u - 0\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(u)| \leqslant \varepsilon.$$

On peut ainsi prolonger par continuite la fonction f en posant $f(0,0) = 0$.

4 Si une fonction de A dans $\mathbb{R}$ est continue en a, alors sa restriction à toute partie de A contenant a est continue en a.

2.2 Propriétés

Proposition 1

Si f est continue en a alors elle est *bornée au voisinage de* a, c'est-à-dire :

$$\exists h > 0\,,\ \exists M \in \mathbb{R}\ :\ \forall u \in A\,,\ \|u-a\| \leqslant h \Longrightarrow |f(u)| \leqslant M.$$

émonstratio En utilisant la definition de la continuite avec (par exemple) $\varepsilon = 1$, on peut donc trouver $h > 0$ tel que :

$$\forall u \in A\,,\ \|u-a\| \leqslant h \Longrightarrow |f(u) - f(a)| \leqslant 1$$

ce qui entraîne :

$$\forall u \in A\,,\ \|u-a\| \leqslant h \Longrightarrow |f(u)| \leqslant |f(a)| + 1.$$

□

Proposition 2

Si f est continue en $a = (\alpha, \beta)$, et si les applications partielles selon a sont définies au voisinage respectivement de α et de β, alors elles sont continues respectivement en α et β.

emonstration Étant donné $\varepsilon > 0$, la continuité de f permet de trouver $\eta > 0$ tel que :

$$\forall u \in A\,,\ \|u-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(u) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $A_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid (t,\beta) \in A\}$ Si $t \in A_1$ vérifie $|t-\alpha| \leqslant \eta$, et si l'on pose $u_1 = (t, \beta)$, on a $\|u_1 - a\| = |t-\alpha| \leqslant \eta$, ce qui implique $|f(u_1) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $|f_1(t) - f_1(\alpha)| \leqslant \varepsilon$. La fonction f_1 est donc continue en α. On démontre de manière analogue la continuité de la fonction f_2 en β.

□

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}$$

ne peut pas être prolongée par continuité en $(0,0)$.

En effet, la continuité des fonctions partielles en ce point entraînerait $f(0,0) = 0$ Or on a :

$$\forall t \neq 0\,,\ f(t,t) = \frac{1}{2}$$

alors que le point (t,t) peut être choisi aussi proche que l on veut de $(0,0)$, ce qui contredit la continuité en $(0,0)$.

Attention

- La réciproque de la proposition 2 de la page précedente est inexacte comme le prouve l'exemple précédent.
- Le fait que a soit un point adhérent à A n'entraîne pas que les fonctions partielles f_1 et f_2 sont définies au voisinage de α et β.

  Par exemple $(0,0)$ est adhérent à :
  $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant |y| \leqslant 2|x|\}$$
  alors que les ensembles :
  $$A_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid (t,0) \in A\} \qquad \text{et} \qquad A_2 = \{t \in \mathbb{R} \mid (0,t) \in A\}$$
  sont tous les deux réduits à $\{0\}$.
- C'est vrai, en revanche, lorsque A est un ouvert, comme on l'a vu dans l'exemple 2. de la page 605.

Remarques

- Si une application $f : A \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in A$, l'image de toute suite de A convergeant vers a est une suite convergeant vers $f(a)$.

  En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, la continuité de f en a permet de trouver $\eta > 0$ tel que :
  $$\forall u \in A\,,\ \|u - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(u) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$
  Pour un tel $\eta > 0$ la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a permet de trouver n_0 tel que :
  $$\forall n \geqslant n_0\,,\ \|u_n - a\| \leqslant \eta.$$
  Comme pour tout n, le vecteur u_n est élément de A, on en déduit :
  $$\forall n \geqslant n_0\,,\ |f(u_n) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$
  ce qui prouve le résultat.
- Comme pour les fonctions d'une variable réelle, on peut ainsi montrer facilement la non continuité d'une fonction en un point a, en exhibant une suite convergeant vers a dont l'image ne converge pas vers $f(a)$.

2.3 L'espace vectoriel $\mathcal{C}(A\ \mathbb{R})$

Définition 6

On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A

On désigne par $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3

L'ensemble $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel stable par produit.

émonstr tio Soient f et g deux fonctions continues sur A, ainsi que λ et μ deux reels Pour $a \in A$, établissons que $\lambda f + \mu g$ et $f g$ sont continues en a.

- Étant donne $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que ·

$$\forall u \in A,\ \|u-a\| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(u)-f(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|\lambda|+1},$$

$$\forall u \in A,\ \|u-a\| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow |g(u)-g(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|\mu|+1}.$$

En prenant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, pour tout $u \in A$ tel que $\|u-a\| \leqslant \eta$, on a :

$$|(\lambda f + \mu g)(u) - (\lambda f + \mu g)(a)| \leqslant |\lambda|\,|f(u)-f(a)| + |\mu|\,|g(u)-g(a)| \leqslant \varepsilon.$$

- On a .

$$\begin{aligned}|(f g)(u) - (f g)(a)| &= \big|f(u)\,(g(u)-g(a)) + g(a)(f(u)-f(a))\big| \\ &\leqslant |f(u)|\,|g(u)-g(a)| + |g(a)|\,|f(u)-f(a)|\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en a, elle est bornée au voisinage de a et on peut donc trouver $\eta_1 > 0$ et M tels que :

$$\forall u \in A,\ \|u-a\| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(u)| \leqslant M.$$

On peut aussi trouver $\eta_2 > 0$ et $\eta_3 > 0$ tels que :

$$\forall u \in A,\ \|u-a\| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow |f(u)-f(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|g(a)|+1},$$

$$\forall u \in A,\ \|u-a\| \leqslant \eta_3 \Longrightarrow |g(u)-g(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M+1}.$$

En posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ on a alors :

$$\forall u \in A,\ \|u-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow |(f g)(u) - (f g)(a)| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de $f g$ en a □

Proposition 4

Si f et g sont deux fonctions continues en a et si $g(a) \neq 0$, alors f/g est définie sur l'intersection de A avec un disque de centre a et elle est continue en a.

Démonstratio D'après la proposition précédente, il suffit de montrer le résultat pour la fonction $1/g$.

Comme g est continue en a, en utilisant la définition de la continuité avec $\varepsilon = \left|\frac{g(a)}{2}\right| > 0$ on peut trouver $\eta_0 > 0$ tel que :

$$\forall u \in A,\ \|u-a\| \leqslant \eta_0 \Longrightarrow |g(u)-g(a)| \leqslant \left|\frac{g(a)}{2}\right|.$$

Pour $u \in A$ et $\|u-a\| \leqslant \eta_0$, on a :

$$|g(a)| - |g(u)| \leqslant |g(a)-g(u)| \leqslant \left|\frac{g(a)}{2}\right|,$$

et donc :

$$|g(u)| \geqslant \left|\frac{g(a)}{2}\right| > 0$$

ce qui prouve que $1/g$ est définie sur l'intersection de A avec le disque de centre a et de rayon $\eta_0 > 0$.

Pour $u \in A$ et $\|u-a\| \leqslant \eta_0$, on a alors

$$\left|\frac{1}{g(u)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a)-g(u)|}{|g(u)|\,|g(a)|} \leqslant \frac{2}{g(a)^2}|g(a)-g(u)|.$$

La continuité de g en a, permet de trouver $\eta_1 > 0$ tel que :

$$\forall u \in A,\ \|u-a\| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |g(u)-g(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, g(a)^2$$

En posant $\eta = \min(\eta_0, \eta_1)$ on a alors :

$$\forall u \in A,\ \|u-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\frac{1}{g(u)} - \frac{1}{g(a)}\right| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de $1/g$ en a. □

Corollaire 5

Si f et g sont deux fonctions continues sur A et si g ne s'annule pas sur A, alors f/g est continue sur A.

Exemples

1. L'application $f\ :\ (x,y) \mapsto 3x^2y - 2y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une combinaison linéaire de produits des fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ qui sont continues.
2. Plus généralement, toute fonction polynomiale en (x,y), c'est–à–dire toute fonction combinaison linéaire de monômes du type x^py^q avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. L'application $f\ :\ (x,y) \mapsto \dfrac{2xy+x^2}{x^2+y^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme quotient de deux fonctions polynomiales, le dénominateur ne s'annulant pas.

2.4 Espace vectoriel $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^2)$

Les opérations usuelles sur les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ munissent $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^2)$, ensemble des fonctions de A dans $\mathbb{R}^2$, d'une structure de $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

Pour une application $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^2)$ on note f_1 et f_2 les *applications composantes* par rapport à la base canonique, c'est–à–dire les applications vérifiant :

$$\forall u \in A\,,\ f(u) = \big(f_1(u), f_2(u)\big).$$

Définition 7

On dit que $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^2)$ est *continue* en a si la fonction $\|f - f(a)\|$ tend vers 0 en a c'est–à–dire si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall u \in A \quad \|u - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(u) - f(a)\| \leqslant \varepsilon.$$

On désigne par $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}^2$ c'est–à–dire des fonctions continues en tout point de A.

Proposition 6

Si $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^2)$ il est équivalent de dire :

- (i) L'application f est continue en a.
- (ii) Les applications f_1 et f_2 sont continues en a.

emonstration Consequence de l'égalité :

$$\|f(u) - f(a)\| = \sqrt{\big(f_1(u) - f_1(a)\big)^2 + \big(f_2(u) - f_2(a)\big)^2}$$

et des inégalités :

$$|f_1(u) - f_1(a)| \leqslant \|f(u) - f(a)\| \qquad \text{et} \qquad |f_2(u) - f_2(a)| \leqslant \|f(u) - f(a)\|. \qquad \square$$

Attention Ne pas confondre :

- les fonctions composantes d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^2$: on a l'équivalence entre la continuité d'une fonction et de ses fonctions composantes,
- les fonctions partielles d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, dont la continuité n'est qu'une condition necessaire de continuité pour f.

Exemples

1. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(x^2 + x\,y, \dfrac{x}{x^2+2\,y^2+1}\right) \end{array}$$

   est continue car les deux applications composantes sont continues d'après les théorèmes sur les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

2. Toute application affine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est continue car ses applications composantes sont affines de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et donc continues.

Les résultats démontrés sur la continuité des fonctions de A dans $\mathbb{R}$ se généralisent donc facilement, grâce à la proposition précédente au cas des fonctions vectorielles. En particulier :

- si $f \in \mathcal{F}(A.\mathbb{R}^2)$ est une fonction continue en a alors elle est bornée au voisinage de a ;
- $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^2)$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

2.5 Composées de fonctions continues

On considère ici $(n, p, q) \in \{1, 2\}^3$.

Proposition 7

Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$ B une partie de $\mathbb{R}^p$, $f \in \mathcal{C}(A\ \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{C}(B, \mathbb{R}^q)$. Si $f(A) \subset B$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur A

émonstration (Lorsque $x \in \mathbb{R}$, la notation $\|x\|$ représente $|x|$.)

Soient $a \in A$ et $b = f(a) \in B$.

Pour prouver que $g \circ f$ est continue en a il faut établir :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ :\ \forall u \in A,\ \|u - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow |g \circ f(u) - g \circ f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta_0 > 0$ tel que

$$\forall v \in B,\ \|v - b\| \leqslant \eta_0 \Longrightarrow \|g(v) - g(b)\| \leqslant \varepsilon.$$

On peut ensuite trouver $\eta > 0$ tel que :

$$\forall u \in A,\ \|u - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(u) - f(a)\| \leqslant \eta_0.$$

Comme pour tout $u \in A$ on sait que $f(u) \in B$, il est alors évident que :

$$\forall u \in A,\ \|u - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|g \circ f(u) - g \circ f(a)\| \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

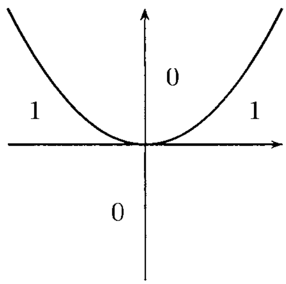
Exemples

1. Si f est une fonction de deux variables continue en $a = (\alpha, \beta)$ et si $v = (h, k)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, alors lorsqu'elle est définie au voisinage de 0, la fonction :

$$\varphi_v \,:\, t \mapsto f(\alpha + h\,t, \beta + k\,t)$$

est continue en 0 comme composée de la fonction affine $t \mapsto (\alpha + h\,t, \beta + k\,t)$ avec f.

Toutefois, pour une fonction f et un point a donné, la continuité de toutes les applications φ_v ne suffit pas à établir la continuité de f en a comme le prouve l'exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :



$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \geqslant x^2 \quad \text{ou} \quad y \leqslant 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa restriction à toute droite passant par l'origine est nulle au voisinage de l'origine, mais f n'est pas continue puisque $\varphi(t) = (2t, t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors que $f \circ \varphi$ n'est pas continue en 0 :

$$f(2t, t^2) = 1 \quad \text{si } t \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0.$$

2. La fonction $f \,:\, (r,t) \mapsto \cos t$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée des fonctions continues :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,t) & \longmapsto & t \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x. \end{array}$$

3. La fonction $(r,t) \mapsto (r\,\cos t, r\,\sin t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ puisque ses fonctions composantes sont des produits de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

4. La fonction $(x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\right)$ est continue sur son domaine de définition comme composée de fonctions continues sur leurs domaines de définitions. Son domaine de définition est :

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + \sqrt{x^2+y^2} \neq 0\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,0) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_-\right\}.$$

Sa restriction au cercle unité $\mathcal{U}$ privé de $(-1,0)$ est donc continue. Comme c'est la réciproque de l'application $\begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathcal{U} \setminus \{(-1,0)\} \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$ on en déduit que cette dernière est une bijection continue de $]-\pi,\pi[$ sur $\mathcal{U} \setminus \{(-1,0)\}$ dont la réciproque est continue (on dit qu'elle est *bicontinue* ou que c'est un *homéomorphisme*).

3. Dérivées d'ordre 1 d'une fonction de deux variables

Dans toute la suite de ce chapitre, on considère un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a = (\alpha, \beta)$ un point de U.

Les applications considérées seront définies sur U.

3.1 Dérivées partielles

Définition 8

Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

- Si la fonction partielle $f_1 : t \mapsto f(t, \beta)$ est dérivable en α le nombre dérivé $f_1'(\alpha)$ s'appelle *première dérivée partielle* de f ou *dérivée partielle* de f par rapport à x en a et se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$, $D_1 f(a)$ ou $f_x'(a)$.
- Si la fonction partielle $f_2 : t \mapsto f(\alpha, t)$ est dérivable en β le nombre dérivé $f_2'(\beta)$ s'appelle *deuxième dérivée partielle* de f ou *dérivée partielle* de f par rapport à y en a et se note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$, $D_2 f(a)$ ou $f_y'(a)$.

Exemples

1 La fonction définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $\theta(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$ possède en tout point $a \in U$ des dérivées partielles qui sont :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(a) = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}(a) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\cdot$$

2. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ possède des dérivées partielles en tout point différent de 0 et on a :

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cdot$$

3. Si f est une fonction d'une variable réelle dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g définie par $g(x, y) = f(y/x)$ possède des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ qui sont :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} f'\Big(\frac{y}{x}\Big) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} f'\Big(\frac{y}{x}\Big)\cdot$$

4. Si f admet des dérivées partielles en a et si φ, une fonction d'une variable réelle définie sur $f(U)$, est dérivable en $f(a)$, alors la fonction $g = \varphi \circ f$ admet des dérivées partielles en a.
   En effet, les fonctions partielles de g en a sont $\varphi \circ f_1$ et $\varphi \circ f_2$, ce qui prouve leur dérivabilité respectivement en α et en β. On a alors :
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = \varphi'(f(a))\,\frac{\partial f}{\partial x}(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(a) = \varphi\,(f(a))\,\frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot$$
5. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
   $$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0$$
   possède en 0 deux dérivées partielles qui sont nulles, puisque les deux fonctions partielles sont nulles. Or on a vu (*cf.* exemple de la page 607) que cette fonction n'est pas continue en 0. L'existence de dérivées partielles en un point n'est donc pas un bon indicateur de la régularité de la fonction en ce point.

Definition 9

Étant donnés un vecteur v de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, si elle existe, la dérivée en 0 de la fonction $\varphi_v \;:\; t \mapsto f(a + t\,v)$ s'appelle *dérivée* en a *suivant le vecteur* v ; elle est notée $D_v f(a)$.

Remarques

- Puisque U est ouvert, le domaine de définition de la fonction φ_v contient un intervalle $[-h, h]$ avec $h > 0$.
- Par définition la fonction f admet une première dérivée partielle en a si et seulement si, elle admet une dérivée en a suivant le vecteur e_1 et l'on a alors $D_1 f(a) = D_{e_1} f(a)$.
  On a le même résultat pour la dérivée par rapport à e_2 et la deuxième dérivée partielle.
- Le cas $v = 0$ correspond à $\varphi_v = f(a)$ et n'a pas grand intérêt.

Exemples

1. Soit f une application affine :
   $$f(x,y) = \lambda\,x + \mu\,y + \nu.$$
   Pour $v = (h,k)$, la fonction φ_v est affine de coefficient directeur $\lambda\,h + \mu\,k$, ce qui prouve que f admet une dérivée suivant v et que $D_v f(a) = \vec{f}(v)$, où $\vec{f}$ est l'application linéaire associée à f définie par $\vec{f}(x,y) = \lambda x + \mu y$.

2. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^4\,y^4}{(x^2+y^4)^3} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0)=0$$

admet en $(0,0)$ des dérivées suivant tout vecteur $v=(h,k)$. En effet :

- si $h=0$, on a $\varphi_v(t)=0$,
- si $h\neq 0$, la fonction $\varphi_v(t) = \dfrac{t^2\,h^4\,k^4}{(h^2+t^2\,k^4)^3}$ admet une dérivée nulle en 0.

Donc pour tout vecteur v, la dérivée $D_v f(0)$ existe et vaut 0.

Cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$ puisque la relation $f(t^2,t) = \dfrac{1}{8}$ si $t\neq 0$ montre que la fonction $t\mapsto f(t^2,t)$ n'est pas continue en 0.
Cet exemple montre que l'existence de dérivées suivant tout vecteur en un point n'est pas non plus un bon indicateur de régularité, et n'est donc pas une bonne généralisation de la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle.

3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 10

Une fonction $f\in\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$ est *de classe* $\mathcal{C}^1$ sur U si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et si les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.
On note $\mathcal{C}^1(U)$, ou $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ l ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.

Exemples

1. Une fonction polynomiale en (x,y) est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque elle admet des dérivées partielles qui sont encore polynomiales, donc continues.

2. La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ par $\theta(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ car ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} : (x,y)\mapsto -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} : (x,y)\mapsto \frac{x}{x^2+y^2}$$

sont continues sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ d'après les théorèmes généraux.

3. La fonction definie sur $\mathbb{R}^2$ par $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0.0)\}$ car ses dérivées partielles :
$$\frac{\partial r}{\partial x} : (x.y) \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} : (x,y) \mapsto \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
sont continues sur U

Remarque Les règles de dérivabilité des fonctions d'une variable ainsi que les propriétés de la continuité des fonctions de deux variables permettent de vérifier immédiatement les résultats suivants.

- Les combinaisons linéaires de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
  L'ensemble $\mathcal{C}^1(U)$ est donc un sous–espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$.
- Les produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
- Le quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout ouvert inclus dans U sur lequel le dénominateur ne s'annule pas.
- Si $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $f(U)$, la composée $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Théorème 8

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U Pour $a = (\alpha,\beta) \in U$ fixé, il existe une fonction ε definie sur U vérifiant pour tout $u = (x,y) \in U$:
$$f(u) = f(a) + (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|u-a\|\,\varepsilon(u)$$
avec $\lim\limits_{u \to a} \varepsilon(u) = 0$.

émonstration Définissons la fonction ε sur U par $\varepsilon(a) = 0$ et, pour $u \neq a$:
$$\varepsilon(u) = \frac{f(u) - f(a) - (x-\alpha)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) - (y-\beta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)}{\|u-a\|}$$
et prouvons la continuité de ε en a c'est-à-dire :
$$\forall \eta > 0 .\ \exists h > 0 \ :\ \forall u \in U\,,\ \|u-a\| \leqslant h \Longrightarrow |\varepsilon(u)| \leqslant \eta.$$
Comme U est ouvert, on peut trouver $h_1 > 0$ tel que :
$$\|u-a\| \leqslant h_1 \Longrightarrow u \in U.$$
Pour un tel $u = (x,y)$, le segment d'extrémités a et (α,y) ainsi que celui d extrémités (α,y) et u sont inclus dans U

Étant donné $\eta > 0$, pour $u \neq a$ vérifiant $\|u - a\| \leqslant h_1$, posons :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left|f(u) - f(a) - (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(a) - (y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \\ &= \left|f(x,y) - f(\alpha,y) - (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right. \\ &\qquad \left. + f(\alpha,y) - f(\alpha,\beta) - (y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \\ &\leqslant \underbrace{\left|f(x,y) - f(\alpha,y) - (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right|}_{\Delta_1} \\ &\qquad + \underbrace{\left|f(\alpha,y) - f(\alpha,\beta) - (y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right|}_{\Delta_2}.\end{aligned}$$

La fonction d'une variable reelle $t \mapsto f(t,y)$ (première fonction partielle) est continue et dérivable sur le segment d'extrémités x et α. D'après le théorème des accroissements finis on peut donc trouver un reel $t_1 \in [\alpha, x]$ tel que :

$$f(x,y) - f(\alpha,y) = (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(t_1,y)$$

et donc :

$$\Delta_1 = |x-\alpha| \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t_1,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right|$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur U, on peut trouver $h_2 > 0$ tel que :

$$\forall v \in U,\ \|v-a\| \leqslant h_2 \Longrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(v) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right| \leqslant \frac{\eta}{2}.$$

En supposant $\|u-a\| \leqslant \min(h_1, h_2)$ on a :

$$\|(t_1,y) - a\| \leqslant \|u-a\| \leqslant h_2$$

et donc :

$$\Delta_1 \leqslant \frac{\eta}{2}|x-\alpha| \leqslant \frac{\eta}{2}\|u-a\|.$$

De la même façon en appliquant le théorème des accroissements finis à la deuxième fonction partielle entre β et y, on prouve l'existence d'un réel $h_3 > 0$ tel que pour $\|u-a\| \leqslant \min(h_1, h_3)$ on ait :

$$\Delta_2 \leqslant \frac{\eta}{2}|y-\beta| \leqslant \frac{\eta}{2}\|u-a\|.$$

En résumé, on a $0 < \|u-a\| \leqslant \min(h_1,h_2,h_3) \Longrightarrow |\varepsilon(u)| \leqslant \eta$.

Comme l'inégalité $|\varepsilon(u)| \leqslant \eta$ est aussi valable pour $u = a$, on a donc prouvé :

$$\lim_{u \to a} \varepsilon(u) = 0$$

c'est-à-dire la continuité de ε en a. □

Remarques

- Lorsqu'il existe des nombres A et B ainsi qu'une fonction ε tendant vers 0 en a et vérifiant :
$$f(u) = f(a) + A\,(x-\alpha) + B\,(y-\beta) + \|u-a\|\,\varepsilon(u) \qquad (*)$$
on dit que f possède un *développement limité* à l'ordre 1 en a ou que f est *différentiable* en a.
  - On a donc prouvé qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U possède en tout point de U un développement limité à l'ordre 1.
  - Réciproquement si f possède en a un développement limité à l'ordre 1 donné par $(*)$ alors ses deux fonctions partielles f_1 et f_2 admettent des développements limités à l'ordre 1 respectivement en α et β donnés par :
$$f_1(t) = f_1(\alpha) + A(t-\alpha) + |t-\alpha|\,\varepsilon(t,\beta)$$
$$f_2(t) = f_2(\beta) + B(t-\beta) + |t-\beta|\,\varepsilon(\alpha,t)$$
ce qui prouve leur dérivabilité et donc l'existence de dérivées partielles pour f en a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = A \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = B$$
mais on ne sait rien en ce qui concerne la continuité de ces dérivées partielles.
  - La différentiabilité d'une fonction f de deux variables revient à écrire $f(u)$ comme somme d'une constante, d'une forme linéaire en $u-a$ et d une fonction négligeable devant $u-a$ au voisinage de a.
Cette forme linéaire qui est donc :
$$(h,k) \mapsto h\,\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$
est unique et s'appelle la *différentielle* de f en a. On la note df_a.
On a l'habitude de noter dx et dy les deux formes linéaires coordonnées :
$$dx\,:\,(h,k)\mapsto h \qquad \text{et} \qquad dy\,:\,(h,k)\mapsto k$$
Avec ces notations, on a :
$$df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,dy.$$

- Lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$ on a pour $a=(\alpha,\beta,\gamma)\in U$ et $u=(x,y,z)\in U$:
$$f(u) = f(a) + (x-\alpha)\,\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-\beta)\,\frac{\partial f}{\partial y}(a) + (z-\gamma)\,\frac{\partial f}{\partial z}(a) + \|u-a\|\,\varepsilon(u)$$
avec $\lim\limits_{u\to a}\varepsilon(u) = 0$.

Proposition 9

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors elle est continue sur U

émonstratio D'après la proposition précédente une telle fonction est somme d'une fonction affine, donc continue, et d'une application de la forme :

$$u \mapsto \|u - a\| \, \varepsilon(u)$$

qui est continue en a comme produit de deux fonctions continues en a. □

Remarque Cette proposition n'a pas d'intérêt pratique pour démontrer la continuité d'une fonction de deux variables car, même si les dérivées partielles sont obtenues par des dérivations de fonctions d'une seule variable, ce sont des fonctions de deux variables dont la continuité n est donc, *a prıorı*, pas plus simple à démontrer que celle de f (en plus, il y en a deux !).

Ce sont les theorèmes généraux qui permettent en général de montrer la continuité d'une fonction aussi bien que son appartenance à la classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 10

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors en tout point a de U, elle admet des dérivées suivant tout vecteur $v = (h, k)$ et on a :

$$D_v f(a) = h\, D_1 f(a) + k\, D_2 f(a) = h\, \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\, \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

En particulier, pour v fixé, l'application $a \mapsto D_v f(a)$ est continue sur U

émonstratio D'après le théorème 8 de la page 617 il existe une fonction ε définie sur U et tendant vers 0 en a, vérifiant pour tout $u = (x, y) \in U$:

$$f(u) = f(a) + (x - \alpha)\, \frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - \beta)\, \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|u - a\| \, \varepsilon(u).$$

Si l'on pose $u = a + t\,v$, on a .

$$f(a + t\,v) = f(a) + t\,h\, \frac{\partial f}{\partial x}(a) + t\,k\, \frac{\partial f}{\partial y}(a) + |t| \, \|(h, k)\| \, \varepsilon(a + t\,v)$$

$$= f(a) + t\,h\, \frac{\partial f}{\partial x}(a) + t\,k\, \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \mathrm{o}(t)$$

ce qui prouve que la fonction $\varphi_v \ : \ t \mapsto f(a + t\,v)$ est dérivable en 0 de dérivée :

$$\varphi_v'(0) = h\, \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\, \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

□

3.3 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 11

Soient $f \in \mathcal{C}^1(U)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^2)$ telle que $\varphi(I) \subset U$. La fonction d une variable réelle $h = f \circ \varphi$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I\,,\ h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big)\,\varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big)\,\varphi_2'(t)$$

où φ_1 et φ_2 sont les fonctions composantes de φ.

émonst a 'on Soient $t_0 \in I$ et $a = \varphi(t_0) = (\alpha, \beta) \in U$. D'après la proposition 8 de la page 617, il existe une fonction ε définie sur U, tendant vers 0 en a et vérifiant :

$$f(u) = f(a) + (x - \alpha)\,\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - \beta)\,\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \big\|u - a\big\|\,\varepsilon(u).$$

En remplaçant u par $\varphi(t)$, on obtient :

$$f\big(\varphi(t)\big) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)\,\big(\varphi_1(t) - \alpha\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,\big(\varphi_2(t) - \beta\big) + \big\|\varphi(t) - a\big\|\,\varepsilon\big(\varphi(t)\big).$$

Comme φ est dérivable, il en est de même de φ_1 et de φ_2 et on peut donc trouver des fonctions ε_1 et ε_2 tendant vers 0 en t_0 telle que :

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) - \alpha &= (t - t_0)\,\varphi_1'(t_0) + (t - t_0)\,\varepsilon_1(t) \\ \varphi_2(t) - \beta &= (t - t_0)\,\varphi_2'(t_0) + (t - t_0)\,\varepsilon_2(t) \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$f\big(\varphi(t)\big) = f(a) + (t - t_0)\,\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)\,\varphi_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,\varphi_2'(t_0)\right) + R(t)$$

avec $R(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,(t - t_0)\,\varepsilon_1(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\,(t - t_0)\,\varepsilon_2(t) + \big\|\varphi(t) - a\big\|\,\varepsilon\big(\varphi(t)\big)$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de prouver que la fonction R est négligeable devant $t - t_0$ Or pour $t \neq t_0$:

$$\frac{R(t)}{t - t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\,\varepsilon_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,\varepsilon_2(t) + \left\|\frac{\varphi(t) - a}{t - t_0}\right\|\,\frac{t - t_0}{|\,t - t_0\,|}\,\varepsilon\big(\varphi(t)\big).$$

Les deux premiers termes de la somme tendent évidemment vers 0 ; quant au troisième c'est le produit des fonctions .

- $t \mapsto \left\|\dfrac{\varphi(t) - a}{t - t_0}\right\|$ qui tend vers $\big\|\varphi'(t_0)\big\|$,
- $t \mapsto \dfrac{t - t_0}{|\,t - t_0\,|}$ qui est bornée,
- $\varepsilon\big(\varphi(t)\big)$ composée de fonctions continues donc continue en t_0 et vérifiant $\varepsilon\big(\varphi(t_0)\big) = \varepsilon(a) = 0$.

Il tend donc aussi vers 0 □

Exemples

1. Si f est une fonction de deux variables, de classe C^1 sur un ouvert contenant le cercle unité, alors la fonction :
$$g\,:\,t\mapsto f(\cos t.\sin t)$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$g'(t)=-\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t,\sin t)\,\sin t+\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t,\sin t)\,\cos t.$$

2. Si f est une fonction de deux variables, de classe C^1 sur un ouvert contenant le point $a=(\alpha,\beta)$, et si $v=(h,k)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, la fonction :
$$\varphi_v\,:\,t\mapsto f(\alpha+t\,h,\beta+t\,k)$$
est dérivable au voisinage de 0 et on a :
$$\varphi_v'(t)=h\,\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha+t\,h,\beta+t\,k)+k\,\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha+t\,h,\beta+t\,k).$$
On retrouve ainsi que toute fonction de classe C^1 admet des dérivées suivant tout vecteur.

3. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f\in C^1(U)$ et $\varphi\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R}^3)$ telle que $\varphi(I)\subset U$. La fonction d'une variable réelle $h=f\circ\varphi$ est dérivable sur I et :
$$\forall t\in I\,,\ h'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))\,\varphi_1'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))\,\varphi_2'(t)+\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi(t))\,\varphi_3'(t)$$
où φ_1, φ_2 et φ_3 sont les fonctions composantes de φ.

3.4 Gradient

Si $f\in C^1(U)$ et $a\in U$, l'application $v\mapsto D_vf(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ (c'est la différentielle df_a).

En munissant $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle, on a pour tout $\vec{v}=(h,k)\in\mathbb{R}^2$:
$$D_vf(a)=h\,\frac{\partial f}{\partial x}(a)+k\,\frac{\partial f}{\partial y}(a)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}_a\,f\cdot\vec{v}$$
où le vecteur :
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_a\,f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a),\,\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$
est appelé *gradient* de f en a.

Exemple Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(M) = \varphi\left(\|\overrightarrow{AM}\|\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ et on a, en notant (α, β) les coordonnées de A et en posant $r = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{x-\alpha}{r}\,\varphi'(r) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{y-\beta}{r}\,\varphi'(r).$$

Le gradient de f est donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M\, f = \varphi'\left(\|\overrightarrow{AM}\|\right) \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}.$$

Interprétation géométrique du gradient

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Proposition 12

Si $\Gamma = (I, \varphi)$ est une courbe régulière dont le support est dans U et qui vérifie :

$$\forall t \in I\,,\ F\big(\varphi(t)\big) = 0,$$

alors en tout point, la courbe Γ admet une tangente orthogonale au gradient de F.

emonstratio Notons, comme de coutume, $\varphi(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. On a, pour tout $t \in I$:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(F(x(t), y(t))\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\varphi(t)}\, F.\varphi'(t)$$

et comme la courbe est régulière, le vecteur $\varphi'(t)$ dirige la tangente au point $\varphi(t)$. $\square$

Remarques

- Il existe en fait un résultat beaucoup plus puissant (le *théorème des fonctions implicites*) qui affirme qu'au voisinage d'un point M_0 où $F(M_0) = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{M_0}\, F \neq 0$, l'ensemble des points vérifiant l'équation $F(x,y) = 0$ est une courbe régulière. La normale en tout point de cette courbe est donc dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F$.
- Les courbes d'équations $F(x,y) = \lambda$ sont appelées lignes de niveau de F Si le gradient de F ne s'annule pas, ce sont des courbes régulières dont la normale en tout point est dirigée par le gradient.

- En physique, lorsque V représente un potentiel électrostatique dans le plan, ses lignes de niveau sont appelées *équipotentielles*.

  Le champ électrostatique $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ est alors normal à toutes les équipotentielles. On appelle *lignes de champs*, des courbes tangentes en tout point au champ. Elles rencontrent donc les équipotentielles orthogonalement

Exemple Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers A et B. On sait que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{AM}\| + \|\overrightarrow{BM}\| = 2a$, où a est le demi grand axe.

C'est donc une ligne de niveau de la fonction $F(M) = \|\overrightarrow{AM}\| + \|\overrightarrow{BM}\|$.

Or, on a $\overrightarrow{\text{grad}}_M\, F = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|} + \dfrac{\overrightarrow{BM}}{\|\overrightarrow{BM}\|}$ (*cf.* exemple de la page précédente).

Comme ce vecteur est la somme de deux vecteurs directeurs unitaires des demi-droites (AM) et (BM), on en déduit que la droite qu'il dirige est leur bissectrice intérieure.

Ainsi, tout rayon issu d'un des foyers d'une ellipse et se réfléchissant selon les lois de Descartes sur l'ellipse passe par l'autre foyer. Par exemple sous une voûte en forme d'ellipse, deux personnes placées aux deux foyers peuvent s entendre distinctement, même en chuchotant.

3.5 Dérivées partielles d'une fonction composée

Soient f une fonction de deux variables x et y, de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et φ une fonction vectorielle de deux variables t_1 et t_2 définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans U et dont les fonctions composantes φ_1 et φ_2 possèdent sur V des dérivées partielles par rapport à t_1 et t_2. En appliquant ce qui précède aux applications partielles de φ, on en déduit que $F = f \circ \varphi$ possède des dérivées partielles et que :

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big)\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big)\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}(t) \qquad (a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_2}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big)\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big)\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}(t) \qquad (b)$$

En fait, surtout en physique, on utilise souvent les formules précédentes sous une forme moins orthodoxe mais bien plus pratique en notant x et y les fonctions composantes φ_1 et φ_2. La fonction F est alors définie par :

$$F(t_1, t_2) = f\big(x(t_1, t_2), y(t_1, t_2)\big)$$

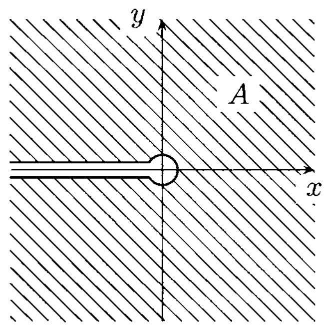
et par exemple, la formule (a) devient :

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t)\big)\,\frac{\partial x}{\partial t_1}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t)\big)\,\frac{\partial y}{\partial t_1}(t)$$

ce qui en « oubliant » les variables, donne :

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t_1}\cdot$$

3.6 Coordonnées polaires

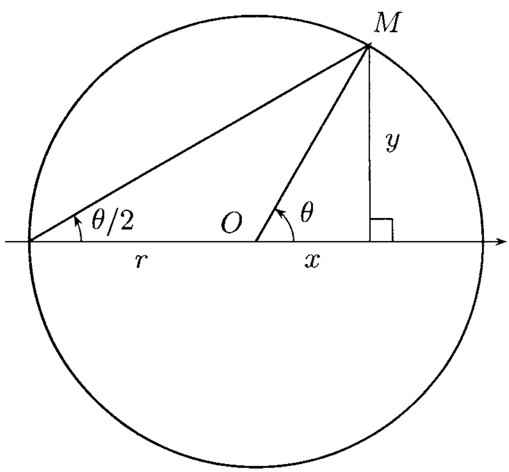


Soit A l'ensemble des points d'un plan euclidien dont les coordonnées dans un repère orthonormé ne sont pas de la forme $(x,0)$, avec $x \leqslant 0$.

On sait que tout point de A possède un unique couple de coordonnées polaires (r,θ), avec $r>0$ et $\theta \in \,]-\pi,\pi[$. On a les formules de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, qui définissent les deux bijections réciproques entre les ouverts $U_c = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid y\neq 0 \quad \text{ou} \quad x>0\}$ et $U_p = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid r>0 \quad \text{et} \quad -\pi<\theta<\pi\}$:

$$\begin{array}{ccc} U_c & \longrightarrow & U_p \\ (x,y) & \longmapsto & \left(r=\sqrt{x^2+y^2},\theta = 2\arctan\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} U_p & \longrightarrow & U_c \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x = r\,\cos\theta, y = r\,\sin\theta). \end{array}$$



Ces deux applications sont de classe C^1 et l'on a :

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\,\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\,\cos\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\cdot$$

Si f est une fonction de classe C^1 sur U_c, la fonction F définie sur U_p par $F(r,\theta) = f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$ est de classe C^1 et l'on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ &= -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\end{aligned}$$

Il faut toutefois bien garder en mémoire que, par exemple, la dernière relation signifie :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

De même, si F est une fonction de classe C^1 sur U_p, on peut définir une fonction $f \in C^1(U_c)$ telle que $F(r,\theta) = f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$, et l'on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta}\cdot\end{aligned}$$

En physique, lorsque l'on définit par exemple un potentiel V en tout point du plan, on définit en réalité deux fonctions V_1 et V_2 telles que si M admet (x,y) pour coordonnées cartésiennes et (r,θ) pour coordonnées polaires on ait $V(M) = V_1(x,y) = V_2(r,\theta)$.

Mais l'habitude veut que l'on oublie les indices et que l'on note V ces deux fonctions. Lorsque l'on écrit $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ ou $\dfrac{\partial V}{\partial y}$, il s'agit des dérivées partielles de la fonction V_1, alors que $\dfrac{\partial V}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$ représentent celles de V_2.

Les formules de calcul des dérivées partielles prennent alors une forme très simple à retenir :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\,\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial x} + r\,\cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial y}$$

et :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Exemple Calculons les composantes, dans la base $\big(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\big)$, du gradient d'une fonction V en fonction de $\dfrac{\partial V}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\, V &= \frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{e}_2 \\
&= \left(\cos\theta\,\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\vec{e}_1 \\
&\quad + \left(\sin\theta\,\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\vec{e}_2 \\
&= \frac{\partial V}{\partial r}\,(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,(\cos\theta\,\vec{e}_2 - \sin\theta\,\vec{e}_1) \\
&= \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u}(\theta) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{v}(\theta).
\end{aligned}$$

3.7 Extremum d'une fonction de deux variables

Définition 11

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ présente en a :

- un *maximum* (global) si $\forall u \in A,\ f(u) \leqslant f(a)$,
- un *minimum* (global) si $\forall u \in A,\ f(u) \geqslant f(a)$,
- un *extremum* (global) si elle présente en a un minimum (global) ou un maximum (global).

Définition 12

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ présente en a :

- un *maximum local* s'il existe un réel $r > 0$ tel que :
$$\forall u \in A, \; \|u - a\| \leqslant r \Longrightarrow f(u) \leqslant f(a),$$
- un *minimum local* s'il existe un réel $r > 0$ tel que :
$$\forall u \in A, \; \|u - a\| \leqslant r \Longrightarrow f(u) \geqslant f(a),$$
- un *extremum local* si elle présente en a un minimum local ou un maximum local.

Remarque On dit que f présente en a un *extremum* (local ou global) *strict* si les inégalités ci–dessus sont strictes pour $u \neq a$.

Proposition 13

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U. Si elle présente un extremum local en $a \in U$, alors ses dérivées partielles en a sont nulles.

émonstratio Supposons par exemple que f présente un maximum local en a On peut donc trouver $r > 0$ tel que :
$$\forall u \in U, \quad \|u - a\| \leqslant r \Longrightarrow f(u) \leqslant f(a).$$
L'ensemble U étant ouvert, quitte à prendre une plus petite valeur de r on peut supposer $\overline{B}(a, r) \subset U$.

Pour tout vecteur v de norme 1, la fonction $\varphi_v \; : \; t \mapsto f(a + t\,v)$ est donc définie sur $[-r, r]$ et admet un maximum en 0.

Par suite, sa dérivée en 0 est nulle, ce qui prouve $D_v f(a) = 0$.

On obtient le résultat en prenant les cas particuliers $v = e_1$ et $v = e_2$. □

Remarques

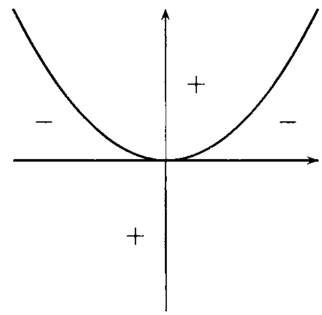
1. L'annulation des dérivées partielles premières n'est qu'une condition nécessaire d'extremum comme le prouve l'exemple de la fonction :
$$f : (x.y) \longrightarrow x^2 - y^2.$$
Ses deux dérivees partielles sont nulles en $(0, 0)$, mais dans toute boule centrée en 0 et de rayon strictement positif, elle prend des valeurs strictement positives et strictement negatives, ce qui prouve qu'elle ne possède pas d'extremum local en 0.

2. La démonstration précédente montre que si une fonction présente un maximum local en a, ses dérivées selon tout vecteur v sont nulles car la fonction $\varphi_v\ :\ t \mapsto f(a + t\,v)$ présente un maximum local en 0.

   Mais ces conditions ne sont toujours pas suffisantes pour prouver qu'une fonction possède un extremum local, comme le montre l'exemple de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = y(y - x^2)$.

   - Pour $v = (h, k)$ avec $k \neq 0$, on a
   $$\varphi_v(t) = k^2\,t^2 - k\,h^2\,t^3 \sim k^2\,t^2$$
   et cette fonction reste donc positive au voisinage de 0.
   - Pour $v = (h, 0)$, on a $\varphi_v(t) = 0$ qui reste aussi positive au voisinage de 0.

   Toutes les fonctions φ_v présentent donc un minimum local en 0 alors que dans toute boule centrée en $(0, 0)$ et de rayon strictement positif, la fonction f prend des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement positives.

   Il n'y a donc pas d'extremum local et *a fortiori* pas de minimum local en $(0, 0)$.

Exemples

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$
a pour dérivées partielles :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 4$$
qui ne s'annulent qu'en $(1, 2)$, seul point où il peut donc y avoir un extremum local.
En prenant ce point comme nouvelle origine, on est amené à étudier :
$$f(1 + X, 2 + Y) = -5 + X^2 + Y^2$$
qui reste toujours supérieur à $-5 = f(1, 2)$, ce qui prouve que f présente un minimum global en $(1, 2)$.

2 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$$
a pour dérivees partielles :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 12x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 12y.$$

Ces dérivées partielles ne s'annulent qu en $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,-4)$ et $(4,-4)$.

- Au voisinage de (0.0) :
  - $f(t,0) \sim -6t^2$ ce qui prouve que f ne présente pas de minimum local,
  - $f(0,t) \sim 6t^2$ ce qui prouve que f ne presente pas de maximum local.
- En $(4,0)$: en prenant ce point comme nouvelle origine, on est amené à étudier :

$$\begin{aligned} f(4+X,Y) &= -32+6X^2+6Y^2+X^3+Y^3 \\ &= -32+X^2(6+X)+Y^2(6+Y) \end{aligned}$$

  qui reste supérieur à -32 pour $\|(X,Y)\| \leqslant 6$, ce qui prouve que f possède un minimum local en $(4,0)$.
- De même on démontre qu'en $(0,-4)$ la fonction f présente un maximum local, mais qu'en $(4,-4)$ elle n'a pas d'extremum local.

4. Dérivées d'ordre supérieur

4.1 Dérivées partielles secondes

Soit f une fonction de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ possède des dérivées partielles :

- sa première dérivée partielle se note $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ou f''_{x^2},
- sa deuxième dérivée partielle se note $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ ou f''_{xy}.

De même, quand elles existent, les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ se notent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f''_{yx} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}.$$

Définition 13

Une fonction f, définie sur U, est de classe C^2 sur U si ses 4 *dérivées partielles secondes* :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

existent et sont continues sur U

Proposition 14 (Théorème de Schwarz)

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

émonstration Soient $a=(\alpha,\beta)\in U$ et η_0 tel que $\overline{B}(a,\eta_0)\subset U$.

Pour tout réel h non nul vérifiant $|h|\leqslant\eta_0$, les points (α,β), $(\alpha+h,\beta)$, $(\alpha,\beta+h)$ et $(\alpha+h,\beta+h)$ appartiennent à U. On pose alors

$$\Delta_h=f(\alpha+h,\beta+h)-f(\alpha+h,\beta)-f(\alpha,\beta+h)+f(\alpha,\beta).$$

La suite de la démonstration consiste à prouver que :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a)=\lim_{h\to0}\frac{\Delta_h}{h^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a).$$

- Définissons φ sur $[\alpha,\alpha+h]$ par :

$$\varphi(t)=f(t,\beta+h)-f(t,\beta).$$

On a alors $\Delta_h=\varphi(\alpha+h)-\varphi(\alpha)$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction φ est dérivable, et le théorème des accroissements finis permet de trouver $\theta_1\in\,]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha+h)-\varphi(\alpha)&=h\,\varphi'(\alpha+\theta_1h)\\&=h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha+\theta_1h,\beta+h)-\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha+\theta_1h,\beta)\right)\end{aligned}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction

$$\varphi_1\ :\ t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha+\theta_1h,t)$$

est dérivable sur le segment $[\beta,\beta+h]$, et le theorème des accroissements finis permet de trouver $\theta_2\in\,]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned}\varphi_1(\beta+h)-\varphi_1(\beta)&=h\,\varphi_1'(\beta+\theta_2h)\\&=h\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\alpha+\theta_1h,\beta+\theta_2h).\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{\Delta_h}{h^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\alpha+\theta_1h,\beta+\theta_2h).$$

Comme $\lim\limits_{h\to0}(\alpha+\theta_1h,\beta+\theta_2h)=(\alpha,\beta)=a$, la continuité de $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ entraîne :

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta_h}{h^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a).$$

► En utilisant la fonction ψ définie par :

$$\psi(y) = f(\alpha + h, y) - f(\alpha, y),$$

on a $\Delta_h = \psi(\beta + h) - \psi(\beta)$ et on prouve de même :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$$

ce qui termine la démonstration. □

Exemples

1. Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert contenant le point $a = (\alpha, \beta)$, et $v = (h, k)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. En posant $u = (\alpha + t\,h, \beta + t\,k)$ les dérivées première et seconde de la fonction :

$$\varphi_v \,:\, t \to f(\alpha + t\,h, \beta + t\,k)$$

(qui est définie au voisinage de 0), sont :

$$\varphi_v'(t) = h\,\frac{\partial f}{\partial x}(u) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(u)$$

$$\begin{aligned}\varphi_v''(t) = \quad & h\left(h\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u) + k\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(u)\right) \\ & + k\left(h\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(u) + k\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u)\right) \\ = \; & h^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(u) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u).\end{aligned}$$

2. Étant données deux fonctions g_0 et g_1 d'une variable réelle, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = g_0\left(\frac{y}{x}\right) + x\,g_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et on a (en notant $t = y/x$) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{y}{x^2}g_0'(t) + g_1(t) - \frac{y}{x}g_1'(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2y}{x^3}g_0'(t) + \frac{y^2}{x^4}g_0''(t) + \frac{y^2}{x^3}g_1''(t) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x}g_0'(t) + g_1'(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) &= -\frac{1}{x^2}g_0'(t) - \frac{y}{x^3}g_0''(t) - \frac{y}{x^2}g_1''(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{1}{x^2}g_0''(t) + \frac{1}{x}g_1''(t)\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)+y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

On peut remarquer que grâce au théorème de Schwarz, on n'a calculé qu'une seule des deux dérivées secondes croisées, en choisissant naturellement celle dont le calcul était le plus aisé.

Remarque D'après l'exemple 1. de la page précédente, la quantité :

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)+y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

est la dérivée seconde en 0 de la fonction :

$$t\longmapsto f(x+t\,x,y+t\,y)=y_0\left(\frac{y}{x}\right)+(t+1)\,x\,y_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

ce qui permet de retrouver le résultat puisque la dérivée seconde d'une fonction affine est nulle.

3. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}.$$

4.2 Exemples d'equations aux dérivées partielles

1 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0. \qquad (*)$$

À x fixé, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a une dérivée nulle. Elle est donc constante, ce qui prouve :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=f(x,0)$$

avec $x\mapsto f(x,0)$ qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement si $\varphi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la fonction f définie par :

$$f(x,y)=\varphi(x)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie $(*)$.

2. Si on essaie de résoudre la même équation sur l'ouvert U constitué des éléments de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas de la forme $(x,0)$ avec $x\leqslant 0$, on obtient un résultat sensiblement différent.

- En effet, pour $x>0$, on a toujours $f(x,y)=f(x,0)$.

- Mais pour $x \leqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ n'est plus nécessairement constante sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$, puisque celui–ci n'est pas un intervalle. On obtient donc :

$$f(x,y) = f(x,1) \quad \text{si } y > 0 \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = f(x,-1) \quad \text{si } y < 0.$$

Les solutions sont donc les fonctions f vérifiant :

$$\begin{aligned} &\forall y > 0\,,\ f(x,y) = \varphi_1(x) \\ &\forall y < 0\,,\ f(x,y) = \varphi_2(x) \\ &\forall x > 0\,,\ f(x,0) = \varphi_1(x) = \varphi_2(x) \end{aligned}$$

où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit à résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = x. \qquad (E)$$

On remarque que $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2}$ est une solution particulière.

L'équation (E) étant linéaire, il suffit donc d'ajouter à cette fonction, la solution générale de l'équation homogène associée :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (E_0)$$

Pour cela, on effectue un changement de variable du type :

$$\begin{cases} x = u + \alpha\, v \\ y = u + \beta\, v \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \alpha \neq \beta$$

c'est–à–dire que l'on pose $g(u,v) = f(u + \alpha\, v, y = u + \beta\, v)$.

La règle de dérivation des fonctions composées nous donne[1] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha\,\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Si on prend $\alpha = 1$ et $\beta = -3$, l'équation (E_0) est équivalente à $\dfrac{\partial g}{\partial v} = 0$, c'est–à–dire à $g(u,v) = \varphi(u)$, avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

---

[1] En sous–entendant les points où se calculent chacune des dérivees partielles : $(x\ y)$ pour f et (u,v) pour g.

Comme $u = \dfrac{3x+y}{4}$, les solutions de (E) sont donc :

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \psi(3x+y) \qquad \text{avec} \qquad \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

4. Considérons l'équation des ondes en dimension 1 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

($v \in \mathbb{R}_+^*$) d'inconnue la fonction $f(x,t)$ de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On utilise le changement de variable :

$$\begin{cases} r = x - v\,t \\ s = x + v\,t \end{cases}$$

c'est–à–dire que l'on cherche f sous la forme :

$$f(x,t) = g(x - v\,t, x + v\,t) \qquad \text{avec} \qquad g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2).$$

Les dérivations successives donnent[2] :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial s} \qquad \text{puis} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v\left(\frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial r}\right) \qquad \text{puis} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right).$$

L'équation est donc équivalente à $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r \partial s} = 0$.

La fonction $\dfrac{\partial g}{\partial s}$ est donc de la forme :

$$\frac{\partial g}{\partial s}(r,s) = \Phi(s) \qquad \text{avec} \qquad \Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

En notant φ une primitive de Φ on en déduit que g est de la forme :

$$g(r,s) = \varphi(s) + \psi(r) \qquad \text{avec} \qquad \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}).$$

On a donc :

$$f(x,t) = \psi(x - v\,t) + \varphi(x + v\,t).$$

Il est simple de vérifier que toute application de cette forme vérifie l'équation des ondes.

[2] Avec la même simplification de notation que dans l'exemple précédent.

4.3 Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$

Les dérivées partielles secondes peuvent, à leur tour, admettre des dérivées partielles, ce qui mène à la notion de dérivée partielle d ordre 3 et plus généralement à la notion de dérivée partielle d'ordre $k \geqslant 3$.

Définition 14

Une fonction f, définie sur U, est de classe C^k sur U si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues sur U.

Elle est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k.

Le théorème de Schwarz se généralise sans problème aux fonctions de classe C^k pour lesquelles il est inutile de préciser l'ordre des dérivations ; il suffit d'indiquer combien de fois on a dérivé par rapport à chacune des variables

Exemples

1. Par exemple $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$ signifie que l'on a dérivé deux fois par rapport à x et trois fois par rapport à y, mais si l'on suppose f de classe C^5 on peut faire ces dérivations dans l'ordre que l'on préfère.
2. On démontre facilement par récurrence que si f est de classe C^n sur un ouvert contenant $a = (\alpha, \beta)$ et si $v = (h, k)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, la fonction φ_v définie au voisinage de 0 par $\varphi_v(t) = f(\alpha + t\,h, \beta + t\,k)$ est n fois dérivable et que sa dérivee $n^{\text{ème}}$ est donnée par :
$$\varphi_v^{(n)}(t) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} h^p\, k^{n-p}\, \frac{\partial^n f}{\partial^p x \partial^{n-p} y}(u)$$
avec $u = (\alpha + t\,h, \beta + t\,k)$.

Il est évident que :

- pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $C^k(U)$ des fonctions de classe C^k sur l'ouvert U est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel,
- les operateurs D_1 et D_2 de dérivation partielle sont des applications linéaires de $C^k(U)$ dans $C^{k-1}(U)$,
- pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ l'opérateur de dérivation selon le vecteur v, qui est combinaison linéaire de D_1 et D_2, est une application linéaire de $C^k(U)$ dans $C^{k-1}(U)$.

EXERCICES

1 Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

a) $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin x$

f) $f(x,y) = x^y$

g) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2. Soit f la fonction definie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la droite d'équation $y = x$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x \neq y \ , \ f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}.$$

Est-il possible de prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$?

3. Soit f définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + y^2 - 1, & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ f(x,y) = -\dfrac{1}{2}x^2, & \text{si } x^2+y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

4. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ et f une fonction définie sur $[x_0-\eta, x_0+\eta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrer que f est dérivable en x_0 si et seulement si la fonction des deux variables :

$$(h,k) \mapsto \frac{f(x_0+h) - f(x_0-k)}{h+k}$$

définie sur $[0,\eta]^2 \setminus \{(0,0)\}$ admet une limite lorsque (h,k) tend vers $(0,0)$.

5. Soit f une application continue du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés du cercle ayant la même image par f.

6. Soient f une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et A une partie de $\mathbb{R}^2$.

Montrer que si a est adhérent à A, alors $f(a)$ est adhérent à $f(A)$.

7. On appelle *homéomorphisme* une bijection continue dont la réciproque est également continue et on dit que deux ensembles sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre

Montrer que toute boule ouverte

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| < r\} \qquad \text{avec} \qquad x_0 \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad r \in \mathbb{R}_+^*$$

est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.
On pourra utiliser l'application φ définie par :

$$\varphi(x, y) = r\frac{(x, y)}{1 + \|(x, y)\|},$$

r étant le rayon de la boule considérée.

8. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et x un point de $\mathbb{R}^2$.

On appelle distance de x à la partie A, le nombre réel

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Montrer que l'application d définie par $d(x) = d(x, A)$ est continue.

Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A

9. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle $f(x, y)$ la borne supérieure sur $[0, 1]$ de la fonction :

$$t \mapsto xt + yt^2$$

Donner l'expression de $f(x, y)$.

Étudier la continuité de f.

10 Une partie X de $\mathbb{R}^2$ est dite convexe si quelque soit le couple $(A, B) \in X^2$, le segment $[A, B]$ est inclus dans X. Soient X une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ et f une application continue sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$

11. Étudier l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes :

a) $(x, y) \mapsto \sup\big(|x|, |y|\big)$

b) $(x, y) \mapsto |x| + |y|$

c) $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$

12. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

Calculer les dérivées (partielles éventuellement) des fonctions suivantes :

a) $g(x, y) = f(y, x)$,

b) $g(x) = f(x, x)$,

c) $g(x, y) = f\big(y, f(x, x)\big)$,

d) $g(x) = f\big(x, f(x, x)\big)$.

13. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} \ , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée en $(0, 0)$ selon tout vecteur mais n est pas continue en $(0, 0)$.

14. On définit f par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \ , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

f est-elle continue ?

Est-elle de classe C^1 ?

15. Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ pour lesquelles la fonction définie de la manière suivante est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} \ , \text{ si } xy \neq 0 \\ f(x,0) = f(0,x) = 0 \end{cases}$$

16. On définit une fonction f par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \ , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

f est-elle de classe C^1, C^2 ?

17 Déterminer l'ensemble des fonctions définies de classe C^1 (ou C^2 pour les deux dernières questions) sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x)$
où h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(y)$
où h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$

d) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$

18. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes en utilisant les coordonnées polaires :

a) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$

b) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$

19 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de classe C^1 sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si (x_0, y_0) est un point de U et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tels que le segment $\big[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0+k)\big]$ soit inclus dans U, montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) &+ h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \\ &+ k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k). \end{aligned}$$

En appliquant le résultat précédent montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$e^{\theta a} = 1 + a(1-\theta).$$

20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et F définie par

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Donner l'expression du laplacien :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en coordonnées polaires (c'est-à-dire exprimer $\Delta f(x,y)$ en fonction de F, r, θ et des dérivées partielles de F).

21. Déterminer les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que la fonction g définie sur $\{(x,y) \mid x > 0\}$ par $g(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ soit solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

22. Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré r si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t > 0\ ,\ f(tx,ty) = t^r f(x,y)$$

a) Montrer que les dérivées partielles d'une fonction homogène de degre r sont homogènes de degré $r-1$.

b) Montrer que f est homogène de degré r si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y).$$

c) On suppose f de classe C^2.
Montrer que :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = r(r-1)f(x,y).$$

d) Soit :

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^5 + x^3y^2 + y^5}{x^3 + 2y^3}} \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } y > 0$$

Montrer que :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

23. Étudier les extrema locaux des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = x^3 + y^3$ sur $\mathbb{R}^2$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \sin(x^2 + y^2)$ sur $[-1,1]^2$.

c) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$ sur $\mathbb{R}^2$.

d) $f(x,y) = e^{x\cos y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

24. Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x}.$$

Calculer la dérivée de f en un point de l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation :

$$2x^2 + y^2 = a^2$$

dans la direction de la normale à l'ellipse.
Que peut-on en déduire sur $(\mathcal{E})$ et les paraboles d'équations $y^2 = 2px$?

Chapitre 22

Intégrales multiples

PCSI Tous les résultats de ce chapitre pourront être admis. PCSI

1. Integrale double sur un rectangle

Dans toute cette section on considère des réels a, b, c et d tels que $a < b$ et $c < d$, et on note $\mathcal{R}$ le rectangle :

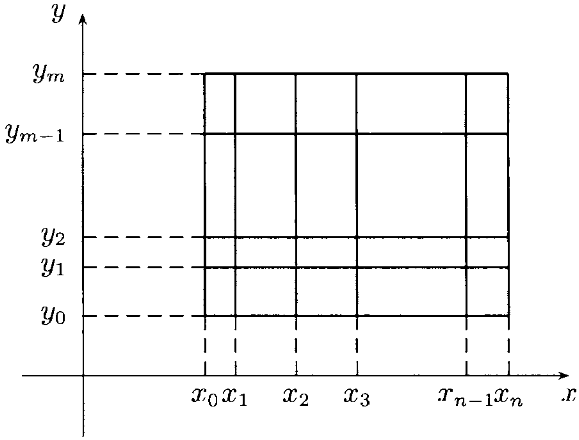
$$\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d].$$

1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1

On appelle *subdivision* de $\mathcal{R}$ tout couple $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ où $\sigma_1 = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision de $[a, b]$ et $\sigma_2 = (y_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ une subdivision de $[c, d]$.

Une telle subdivision définit donc un découpage du rectangle $\mathcal{R}$ en des rectangles $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.



Définition 2

Une fonction φ de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ est *en escalier* sur $\mathcal{R}$ si elle est bornée et s'il existe une subdivision $\sigma = \Big((x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}, (y_j)_{0\leqslant j\leqslant m}\Big)$ de $\mathcal{R}$ telle que φ soit constante sur chaque rectangle ouvert $]\,x_{i-1}, x_i\,[\ \times\ ]\,y_{j-1}, y_j\,[$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, m]\!]$.

Une telle subdivision est dite *adaptée* à φ.

Notation On désigne par $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $\mathcal{R}$

Définition 3

Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ et $\sigma = \Big((x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}, (y_j)_{0\leqslant j\leqslant m}\Big)$ une subdivision adaptée à φ. Si pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, on note $c_{i,j}$ la valeur de φ sur $]\,x_{i-1}, x_i\,[\ \times\ ]\,y_{j-1}, y_j\,[$, on appelle *integrale double* de φ sur $\mathcal{R}$ le réel $\iint_{\mathcal{R}} \varphi$ défini par :

$$\iint_{\mathcal{R}} \varphi = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} (x_i - x_{i-1})\,(y_j - y_{j-1})\,c_{i,j}.$$

Remarques

- La définition précédente a un sens car on peut verifier que la somme :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} (x_i - x_{i-1})\,(y_j - y_{j-1})\,c_{i,j}$$

ne dépend pas de la subdivision adaptée à φ choisie.

- Comme pour l'intégrale simple, on peut démontrer que l'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \iint_{\mathcal{R}} \varphi \end{array}$$

est une forme linéaire qui est de plus croissante, c'est–à–dire qu'elle vérifie :

$$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{E}(\mathcal{R})^2\,,\ \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \Longrightarrow \iint_{\mathcal{R}} \varphi_1 \leqslant \iint_{\mathcal{R}} \varphi_2.$$

1.2 Intégrale d'une fonction continue

MPSI **Proposition 1**

Si f est une fonction continue sur $\mathcal{R}$, alors elle est *uniformément continue* sur $\mathcal{R}$, c'est–à–dire :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall (u,v) \in \mathcal{R}^2\,,\ \|u - v\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon.$$

émonstration Supposons f non uniformément continue sur $\mathcal{R}$, c'est–à–dire

$$\exists \varepsilon > 0\ :\ \forall \eta > 0\,,\ \exists (u,v) \in \mathcal{R}^2\ :\ \|u - v\| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad |f(u) - f(v)| > \varepsilon.$$

Prenons un tel $\varepsilon > 0$; pour $\eta = 1/2^n$, considerons $(u_n, v_n) \in \mathcal{R}^2$ tel que :

$$\|u_n - v_n\| \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad |f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon.$$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites vérifient :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ |f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Le rectangle $\mathcal{R}$ etant borné, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on peut donc en extraire une sous–suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un élément u. D'autre part, en notant $u_n = (x_n, y_n)$ et $u = (x,y)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a \leqslant x_n \leqslant b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ c \leqslant y_n \leqslant d$$

et donc, par passage à la limite, $a \leqslant x \leqslant b$ et $c \leqslant y \leqslant d$. Ainsi, u appartient à $\mathcal{R}$
Comme $v_{\varphi(n)} = u_{\varphi(n)} + \left(v_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)}\right)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)} = u$.
L'application f étant continue en u, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(f(u_{\varphi(n)}) - f(v_{\varphi(n)})\right) = f(u) - f(u) = 0$$

ce qui contredit $|f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \varepsilon$. $\square$

Comme pour les fonctions d'une variable ce résultat va permettre d'encadrer toute fonction continue sur $\mathcal{R}$ par des fonctions en escalier, et ainsi de définir son intégrale sur $\mathcal{R}$.

Corollaire 2

Soit f une fonction continue sur $\mathcal{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions φ et ψ en escalier sur $\mathcal{R}$ telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

MPSI **émonstratio** Puisque f est uniformément continue sur $\mathcal{R}$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (u.v) \in \mathcal{R}^2, \ \|u - v\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(u) - f(v)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Si $\left((x_i)_{i\in[\![0.n]\!]}, (y_j)_{j\in[\![0,m]\!]}\right)$ est une subdivision de $\mathcal{R}$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \ |x_i - x_{i-1}| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![1,m]\!], \ |y_j - y_{j-1}| \leqslant \eta,$$

il suffit de considérer des fonctions en escalier φ et ψ telles que :

$$\forall u \in \,]x_{i-1}, x_i[\, \times \,]y_{j-1}, y_j[\,, \ \varphi(u) = f(x_i, y_j) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \psi(u) = f(x_i, y_j) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot \ \square$$ MPSI

Étant donnée une fonction f continue sur $\mathcal{R}$, on note :

- $\mathcal{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $\mathcal{R}$ plus grandes que f.
- $\mathcal{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $\mathcal{R}$ plus petites que f.

Définition 4

Si f est continue sur $\mathcal{R}$, alors :

- $\left\{\iint_{\mathcal{R}} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ admet une borne supérieure,
- $\left\{\iint_{\mathcal{R}} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$ admet une borne inférieure,

et ces deux bornes sont égales. Leur valeur commune est appelée *intégrale double* de f sur $\mathcal{R}$ et se note $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f$ ou $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy$.

1.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

Les propriétés qui suivent, analogues à celles vues pour l'intégrale simple, peuvent être démontrées par des méthodes similaires

Proposition 3 (Linéarité)

Si f et g sont continues sur $\mathcal{R}$, on a :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \iint_{\mathcal{R}}(\lambda f+\mu g)=\lambda\iint_{\mathcal{R}} f+\mu\iint_{\mathcal{R}} g$$

Proposition 4 (Croissance)

Si f et g sont continues sur $\mathcal{R}$, on a :

$$f\leqslant g\Longrightarrow \iint_{\mathcal{R}} f\leqslant \iint_{\mathcal{R}} g.$$

Proposition 5 (Additivité par rapport au domaine)

Étant donnés $x_0\in\,]a,b[$ et $y_0\in\,]c,d[$, on a pour toute fonction $f\in\mathcal{C}(\mathcal{R})$:

$$\iint_{\mathcal{R}} f=\iint_{[a,x_0]\times[c,d]} f+\iint_{[x_0,b]\times[c,d]} f$$

et :

$$\iint_{\mathcal{R}} f=\iint_{[a,b]\times[c,y_0]} f+\iint_{[a,b]\times[y_0,d]} f.$$

1.4 Calcul de l'intégrale double d'une fonction continue

Proposition 6 (Théorème de Fubini)

Si $f\in\mathcal{C}(\mathcal{R})$, on a :

$$\iint_{\mathcal{R}} f=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

emonst atio C'est évident si f est une fonction en escalier* et on le démontre par encadrement pour toute fonction continue en utilisant le corollaire 2 de la page ci-contre □

Corollaire 7

Étant données deux fonctions $g\in\mathcal{C}([a,b])$ et $h\in\mathcal{C}([c,d])$, on a :

$$\iint_{\mathcal{R}} g(x)\,h(y)\,dx\,dy=\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right).$$

* Attention : dans ce cas $\int_c^d f(x,y)\,dy$ n'est défini *a priori* que sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points.

Démonstration

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} g(x)\,h(y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_c^d g(x)\,h(y)\,dy\right) dx\\ &= \int_a^b g(x)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right) dx\\ &= \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right).\end{aligned}$$

□

Exemples

1 Calcul de $I = \displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{x+y+1}\,dx\,dy.$

En utilisant la formule de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y+1}\,dy\right) dx\\ &= \int_0^1 \left[\ln(x+y+1)\right]_0^1 dx\\ &= \int_0^1 \big(\ln(x+2)-\ln(x+1)\big)dx\\ &= 3\ln 3 - 4\ln 2.\end{aligned}$$

2. Si $\mathcal{R} = [0,a]\times[0,b]$ est une plaque rectangulaire homogène de densité surfacique de masse σ, son moment d'inertie par rapport à Ox est :

$$\begin{aligned} J_{Ox} &= \iint_{[0,a]\times[0,b]} y^2\,\sigma\,dx\,dy\\ &= \sigma\left(\int_0^a dx\right)\left(\int_0^b y^2\,dy\right)\\ &= \sigma\frac{a\,b^3}{3} = \frac{m\,b^2}{3}\end{aligned}$$

où m est la masse totale de la plaque.

2. Intégrale double d'une fonction sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$

2.1 Fonction intégrable sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$

Soient $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction bornée de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons :

- $\mathcal{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $\mathcal{R}$ plus grandes que f.

- $\mathcal{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $\mathcal{R}$ plus petites que f.
- M (respectivement m) un majorant (respectivement un minorant) de f sur $\mathcal{R}$.

L ensemble :
$$\left\{\iint_{\mathcal{R}} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$$
est majoré par $M\,(b-a)\,(d-c)$ et admet donc une borne supérieure α

L'ensemble :
$$\left\{\iint_{\mathcal{R}} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$$
est minoré par $m\,(b-a)\,(d-c)$ et admet donc une borne inférieure β et l'on a $\alpha \leqslant \beta$.

Définition 5

On dit que f est *intégrable* sur $\mathcal{R}$ si :
$$\sup\left\{\iint_{\mathcal{R}} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\} = \inf\left\{\iint_{\mathcal{R}} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}.$$
Cette valeur commune est appelée *intégrale double* de f sur $\mathcal{R}$ et notée :
$$\iint_{\mathcal{R}} f \qquad \text{ou} \qquad \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Définition 6

Soient $\mathcal{A}$ une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, f une fonction bornée de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{R} = [a.b] \times [c.d]$ un rectangle contenant $\mathcal{A}$. On dit que f est *intégrable* sur $\mathcal{A}$ si la fonction $\bar{f}$ définie sur $\mathcal{R}$ par :
$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin \mathcal{A} \end{cases}$$
est intégrable sur $\mathcal{R}$ et l'on pose :
$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \bar{f}(x,y)\,dx\,dy.$$

Remarque Grâce à l'additivité par rapport au domaine, on peut vérifier que la définition de l'intégrale sur $\mathcal{A}$ ne dépend pas du choix du rectangle $\mathcal{R}$ (aux côtés parallèles aux axes) contenant $\mathcal{A}$

Définition 7 (Partie bornée mesurable de $\mathbb{R}^2$)

Une partie bornée $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ est *mesurable* si la fonction constante 1 est intégrable sur $\mathcal{A}$, c'est–à–dire si la fonction caractéristique $\chi_{\mathcal{A}}$ est intégrable sur tout rectangle contenant $\mathcal{A}$.

On appelle *mesure* ou *aire* de $\mathcal{A}$ le réel, noté $\mu(\mathcal{A})$, défini par :

$$\mu(\mathcal{A}) = \iint_{\mathcal{A}} dx\, dy.$$

2.2 Calcul d'une intégrale double

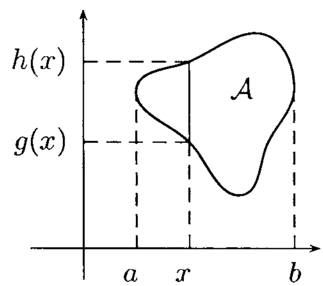
Le théorème de Fubini se généralise à des parties bornées autres que les rectangles. Nous admettons les deux résultats suivants :

Proposition 8

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in [a,b] \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\right\}$$

où g et h sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $g \leqslant h$.



Si f est une fonction continue sur $\mathcal{A}$, alors elle est intégrable sur $\mathcal{A}$, et l'on a :

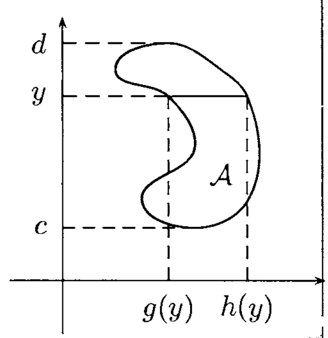
$$\iint_{\mathcal{A}} f = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Proposition 9

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \in [c,d] \quad \text{et} \quad g(y) \leqslant x \leqslant h(y)\right\}$$

où g et h sont deux fonctions continues sur $[c,d]$ telles que $g \leqslant h$.



Si f est une fonction continue sur $\mathcal{A}$ alors elle est intégrable sur $\mathcal{A}$, et l'on a :

$$\iint_{\mathcal{A}} f = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Exemples

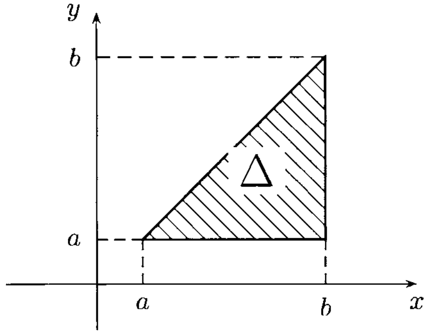
1. Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire de la partie :

$$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$$

puisque :

$$\iint_{\mathcal{A}} dx\,dy = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} dy\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ telles que $f(a) = g(a) = 0$. On a :



$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\left(\int_a^x g'(y)\,dy\right) dx$$
$$= \iint_\Delta f'(x)\,g'(y)\,dx\,dy$$

où :

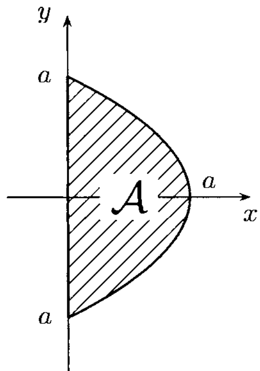
$\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad a \leqslant y \leqslant x\right\}$

Comme $\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqslant y \leqslant b \quad \text{et} \quad y \leqslant x \leqslant b\right\}$, on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}\iint_\Delta f'(x)\,g'(y)\,dx\,dy &= \int_a^b g'(y)\left(\int_y^b f'(x)\,dx\right) dy \\ &= \int_a^b g'(y)\big(f(b) - f(y)\big)\,dy \\ &= f(b)\,g(b) - \int_a^b f(y)\,g'(y)\,dy.\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule d'intégration par parties.

3. Soit $a > 0$. Le moment d'inertie par rapport à l'origine de :



$$\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant a - \frac{y^2}{a}\right\}$$

considéré comme plaque homogène de densité surfacique de masse σ vaut :

$$J_O = \iint_{\mathcal{A}} (x^2 + y^2)\,\sigma\,dx\,dy.$$

Si $(x, y) \in \mathcal{A}$ alors $-a \leqslant y \leqslant a$, et donc :

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leqslant y \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x \leqslant a - \frac{y^2}{a} \right\}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} J_O &= \sigma \int_{-a}^{+a} \left(\int_0^{a-\frac{y^2}{a}} (x^2 + y^2)\, dx \right) dy \\ &= \sigma \int_{-a}^{+a} \left(\frac{1}{3} \left(a - \frac{y^2}{a} \right)^3 + y^2 \left(a - \frac{y^2}{a} \right) \right) dy \\ &= \frac{4}{7} \sigma\, a^4. \end{aligned}$$

Comme la masse totale de la plaque vaut :

$$m = \sigma \int_{-a}^{+a} \left(\int_0^{a-\frac{y^2}{a}} dx \right) dy = \frac{4}{3} \sigma\, a^2$$

on a :

$$J_O = \frac{3}{7} m\, a^2.$$

4. L'aire du disque D de centre O et de rayon R vaut :

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \iint_D dx\, dy \\ &= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx \\ &= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $x = R \sin t$, on obtient :

$$\mu(D) = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \pi\, R^2.$$

3. Changement de variables

Les résultats de cette section seront admis.

3.1 Changement de variables affine

Cette partie utilise les notions de matrice et de déterminant d'un endomorphisme.

On désigne par φ une application affine bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

avec :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha\, u + \beta\, v \\ y = y_0 + \gamma\, u + \delta\, v \end{cases}$$

et α, β, γ, δ, x_0, y_0 des réels tels que $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0$.

Proposition 10

Si $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et si f une fonction intégrable sur $\varphi(\mathcal{A})$ alors la fonction $f \circ \varphi$ est intégrable sur $\mathcal{A}$ et l'on a :

$$\iint_{\varphi(\mathcal{A})} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{A}} (f \circ \varphi)(u,v)\ |\alpha\,\delta - \beta\,\gamma|\ du\, dv.$$

Remarques

- Matriciellement, le changement de variable peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

  où $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application linéaire $\vec{\varphi}$.

- Le résultat de la proposition précédente peut alors se reformuler en :

$$\iint_{\varphi(\mathcal{A})} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{A}} (f \circ \varphi)(u,v)\, \left|\det \vec{\varphi}\right|\, du\, dv.$$

Ce résultat permet facilement de calculer une intégrale double sur un parallélogramme, puisque par changement de variables affine on peut la ramener à une intégrale sur un rectangle.

Exemples

1. Un parallélogramme $(ABCD)$ est l'image du carré K de sommets O, $O + \vec{\imath}$, $O + \vec{\jmath}$ et $O + \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ par l'application affine φ définie par :

$$\varphi(O) = A\,,\ \vec{\varphi}(\vec{\imath}) = \overrightarrow{AB}\,.\ \vec{\varphi}(\vec{\jmath}) = \overrightarrow{AD}.$$

   On a :

$$\det \vec{\varphi} = \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \operatorname{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}).$$

   Donc l'aire du parallélogramme est :

$$\iint_{\varphi(K)} dx\, dy = \iint_K \left|\operatorname{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})\right| du\, dv = \left|\operatorname{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})\right|$$

2. L'image par une similitude de rapport k d'une partie de mesure m est une partie de mesure $k^2 m$ puisque le déterminant de cette similitude vaut k^2.

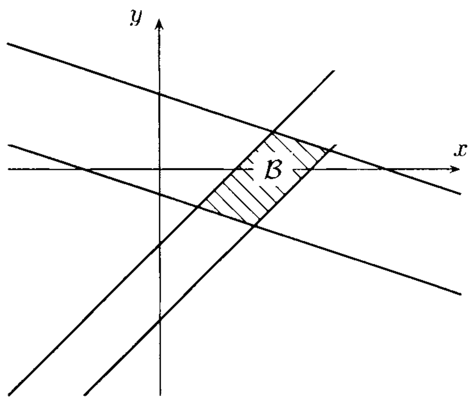
En particulier, une isométrie conserve les aires.

3. Comme une ellipse de demi–grand axe a et de demi–petit axe b est l'image d'un cercle de rayon a par une affinité orthogonale de rapport b/a, on en déduit que son aire est égale à $\pi\, a\, b$.

4. Calcul de $\iint_{\mathcal{B}} x^2 y\, dx\, dy$, où :

$$\mathcal{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqslant x - y \leqslant 2 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant x + 3y \leqslant 3\right\}.$$

Comme $\mathcal{B}$ est un parallélogramme, on va déterminer un changement de variables φ affine tel que $\mathcal{A} = \varphi^{-1}(\mathcal{B})$ soit un rectangle. Ce changement de variables est défini par :



$$u = x - y \qquad \text{et} \qquad v = x + 3y$$

soit :

$$x = \frac{1}{4}(3u+v) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{4}(v-u)$$

et le rectangle est :

$$\mathcal{A} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqslant u \leqslant 2 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant v \leqslant 3\right\}.$$

Le déterminant de $\varphi\ :\ (u,v) \mapsto \left(\frac{1}{4}(3u+v), y = \frac{1}{4}(v-u)\right)$ est :

$$D = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4},$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{B}} x^2 y\, dx\, dy &= \iint_{[1,2]\times[-1.3]} \left(\frac{1}{4}(3u+v)\right)^2 \times \frac{1}{1}(-u+v) \times \frac{1}{4}\, du\, dv \\
&= \frac{1}{4^4}\int_1^2 \left(\int_{-1}^3 (3u+v)^2\,(v-u)\, dv\right) du \\
&= \frac{1}{256}\int_1^2 \left(20 + \frac{140}{3}u + 12u^2 - 36u^3\right) du \\
&= -\frac{17}{256}.
\end{aligned}$$

3.2 Changement de variables en coordonnées polaires

Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

Proposition 11

Soient a un réel et $\mathcal{A}$ une partie bornée de $\mathbb{R}_+ \times [a, a+2\pi]$. Si f une fonction intégrable sur $\Phi(\mathcal{A})$, alors la fonction $(r,\theta) \mapsto r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est intégrable sur $\mathcal{A}$ et l'on a :

$$\iint_{\Phi(\mathcal{A})} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{A}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Exemples

1. Si D est le disque fermé de centre O et de rayon R, on peut prendre :

$$\mathcal{A} = \left\{(r,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant R \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\},$$

pour avoir $D = \Phi(\mathcal{A})$, et la formule de changement de variables devient :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\right)d\theta$$

ou encore :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^R r\left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta\right)dr.$$

Dans le cas particulier où $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = u(r)\,v(\theta)$, on obtient :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_0^R u(r)\,r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} v(\theta)\,d\theta\right)$$

- Second calcul de l'aire d'un disque :

$$\begin{aligned}\iint_D dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\,dr\right)d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R r\,dr\right) \\ &= \pi R^2.\end{aligned}$$

- Le moment d'inertie par rapport à l'origine d'un disque homogène de densité surfacique de masse σ vaut :

$$\begin{aligned}
J_O &= \sigma \iint_D \left(x^2+y^2\right) dx\, dy = \sigma \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3\, dr\right) d\theta \\
&= \sigma \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R r^3\, dr\right) \\
&= \sigma\, \pi\, \frac{R^4}{2} = m\, \frac{R^2}{2}
\end{aligned}$$

où m est la masse totale de la plaque.

2. Pour $\mathcal{A} = \left\{(r,\theta) \mid R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}$, l'ensemble $\Phi(\mathcal{A})$ est la couronne $\left\{M \in \mathbb{R}^2 \mid R_1 \leqslant d(O,M) \leqslant R_2\right\}$, et la formule de changement de variables devient :

$$\iint_{\Phi(\mathcal{A})} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_{R_1}^{R_2} f(r\, \cos\theta, r\, \sin\theta)\, r\, dr\right) d\theta.$$

3. Si ρ_1 et ρ_2 sont des fonctions continues sur $[\theta_1, \theta_2]$ vérifiant $0 \leqslant \theta_2 - \theta_1 \leqslant 2\pi$ et $0 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho_2$ et si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M dont un système de coordonnées polaires (r,θ) vérifie :

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \qquad \text{et} \qquad \rho_1(\theta) \leqslant r \leqslant \rho_2(\theta)$$

alors, on peut prendre :

$$\mathcal{A} = \left\{(r,\theta) \mid \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \quad \text{et} \quad \rho_1(\theta) \leqslant r \leqslant \rho_2(\theta)\right\}$$

et la formule de changement de variables devient :

$$\iint_{\Phi(\mathcal{A})} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(r\, \cos\theta, r\, \sin\theta) r\, dr\right) d\theta$$

4. En particulier, si ρ est une fonction continue positive sur $[\theta_1, \theta_2]$, l'aire du secteur angulaire :

$$\mathcal{S} = \left\{(r\, \cos\theta, r\, \sin\theta) \mid \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\, ,\ 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta)\right\}$$

vaut :

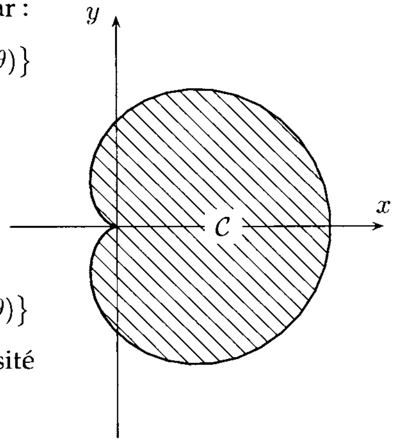
$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{S}) &= \iint_{\mathcal{S}} dx\, dy \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_0^{\rho(\theta)} r\, dr\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\, d\theta.
\end{aligned}$$

Par exemple, l'intérieur d'une cardioïde défini par :

$$\mathcal{C} = \{(r,\theta) \mid -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r \leqslant a(1+\cos\theta)\}$$

a pour aire :

$$\mu(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}\, a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} (1+\cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{3}{2}\, \pi\, a^2.$$



5. Le centre de gravité de la demi-cardioïde :

$$\mathcal{C}_1 = \{(r,\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r \leqslant a(1+\cos\theta)\}$$

considerée comme plaque homogène de densité surfacique de masse σ, est le point G tel que :

$$\sigma\, \mu(\mathcal{C}_1)\, \overrightarrow{OG} = \iint_{\mathcal{C}_1} \sigma\, \overrightarrow{OM}\, dx\, dy$$

c'est–à–dire que ses coordonnées sont définies par :

$$\sigma\, \mu(\mathcal{C}_1)\, x_G = \iint_{\mathcal{C}_1} x\, \sigma\, dx\, dy \qquad \text{et} \qquad \sigma\, \mu(\mathcal{C}_1)\, y_G = \iint_{\mathcal{C}_1} y\, \sigma\, dx\, dy.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{C}_1} y\, dx\, dy &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \sin\theta\, dr \right) d\theta \\
&= \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^3 \sin\theta\, d\theta \\
&= -\frac{a^3}{12} \left[(1+\cos\theta)^4 \right]_0^{\pi} = \frac{4a^3}{3}.
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{C}_1} x\, dx\, dy &= \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^3 \cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{5\pi\, a^3}{8}
\end{aligned}$$

puisque :

$$(1+\cos\theta)^3 \cos\theta = \frac{15}{8} + \frac{13}{4}\, \cos\theta + 2\, \cos 2\theta + \frac{3}{4}\, \cos 3\theta + \frac{1}{8}\, \cos 4\theta$$

Comme de plus $\mu(\mathcal{C}_1) = \dfrac{1}{2}\mu(\mathcal{C}) = \dfrac{3}{4}\pi\, a^2$, on en déduit :

$$x_G = \frac{5}{6}\, a \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{16a}{9\pi}.$$

4. Intégrales triples

Dans cette section, nous généralisons rapidement les résultats précédents au cas des fonctions de trois variables.

4.1 Intégrale triple sur un pavé

On appelle pavé, toute partie de $\mathbb{R}^3$ de la forme :

$$\mathcal{P} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$$

avec $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ et $c_1 < c_2$.

Une subdivision d'un tel pavé $\mathcal{P}$ est un triplet constitué d'une subdivision de $[a_1, a_2]$, d'une subdivision de $[b_1, b_2]$ et d'une subdivision de $[c_1, c_2]$.

De la même façon que dans le cas de $\mathbb{R}^2$, on définit les fonctions en escalier et leur intégrale sur $\mathcal{P}$, puis l'intégrale d'une fonction f continue sur $\mathcal{P}$ comme étant la valeur commune de :

- la borne supérieure de l'intégrale des fonctions en escalier inférieures à f,
- la borne inférieure de l'intégrale des fonctions en escalier supérieures à f.

On l'appelle *intégrale triple* de f sur $\mathcal{P}$ et on la note :

$$\iiint_{\mathcal{P}} f \qquad \text{ou} \qquad \iiint_{\mathcal{P}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

De même que l'intégrale double, l'intégrale triple a les propriétés de linéarité, de croissance et d'additivité par rapport au domaine.

Le calcul d'une intégrale triple sur un pavé peut se ramener à trois calculs d intégrales simples (théorème de Fubini), l ordre des intégrations étant quelconque. Par exemple, si f est une fonction continue sur $\mathcal{P} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$, on a :

$$\iiint_{\mathcal{P}} f = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

4.2 Intégrale triple d'une fonction sur une partie bornée de $\mathbb{R}^3$

On définit de même les fonctions intégrables sur une partie bornée $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^3$. L'intégrale triple d'une fonction f intégrable sur $\mathcal{A}$ est égale à l intégrale de $f\,\chi_{\mathcal{A}}$ sur tout pavé contenant $\mathcal{A}$.

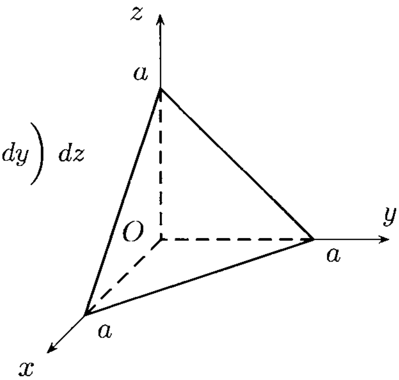
Si la fonction constante 1 est intégrable sur $\mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{A}$ est mesurable, et on appelle *mesure* ou *volume* de $\mathcal{A}$ le réel :

$$\mu(\mathcal{A}) = \iiint_{\mathcal{A}} dx\,dy\,dz.$$

Pour des domaines $\mathcal{A}$ définis par des conditions simples, le calcul de l'intégrale triple d'une fonction continue sur $\mathcal{A}$ peut se ramener au calcul d'intégrales simples.

Exemple Soit $a > 0$. Calculons J le moment d'inertie par rapport à Oz du tétraèdre $\mathcal{T}$ de sommets O, $O + a\vec{\imath}$, $O + a\vec{\jmath}$ et $O + a\vec{k}$, de masse volumique constante ρ.

$$\begin{aligned}
J &= \iiint_{\mathcal{T}} \rho\,(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \\
&= \rho \int_0^a \left(\int_0^{a-z} \left(\int_0^{a-z-y} (x^2+y^2)\,dx \right) dy \right) dz \\
&= \rho \int_0^a \left(\int_0^{a-z} \left(\frac{1}{3}(a-z-y)^3 + y^2(a-z-y) \right) dy \right) dz \\
&= \rho \int_0^a \left(\frac{1}{6}(a-z)^4 \right) dz \\
&= \rho \frac{a^5}{30}.
\end{aligned}$$



D'autre part, la masse de $\mathcal{T}$ est :

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_{\mathcal{T}} \rho\,dx\,dy\,dz \\
&= \rho \int_0^a \left(\int_0^{a-z} \left(\int_0^{a-z-y} dx \right) dy \right) dz \\
&= \rho \int_0^a \left(\int_0^{a-z} (a-z-y)\,dy \right) dz \\
&= \rho \int_0^a \left(\frac{1}{2}(a-z)^2 \right) dz \\
&= \rho \frac{a^3}{6}
\end{aligned}$$

ce qui donne $J = \dfrac{m\,a^2}{5}$.

4.3 Changement de variables

Changement de variables affine

Cette partie utilise la notion de déterminant d'un endomorphisme.

Soient φ une application affine bijective de $\mathbb{R}^3$ dans lui–même et $\mathcal{A}$ une partie bornée de $\mathbb{R}^3$. Si une fonction f est intégrable sur $\varphi(\mathcal{A})$ alors $f \circ \varphi$ est intégrable sur $\mathcal{A}$ et l'on a :

$$\iiint_{\varphi(\mathcal{A})} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{A}} (f\circ\varphi)(u,v,w)\,|\det\vec{\varphi}|\,du\,dv\,dw$$

Ce résultat permet de calculer une intégrale triple sur un parallélépipède puisqu'on peut se ramener à une intégrale sur un pavé.

Exemple Le volume d'un parallélépipède construit sur les trois segments $[AB]$ $[AC]$ et $[AD]$ peut se calculer à l'aide de l'application affine φ telle que :

$$\varphi(O) = A \qquad \text{et} \qquad \vec{\varphi}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$$

et vaut donc $\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$.

Changement de variable en coordonnées cylindriques

Les *coordonnées cylindriques* sont définies par l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R}_+ \times [a, a+2\pi] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta, z) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta, z). \end{array}$$

Soient a un réel et $\mathcal{A}$ une partie bornée de $\mathbb{R}_+ \times [a, a+2\pi] \times \mathbb{R}$. Si f est une fonction intégrable sur $\Phi(\mathcal{A})$, alors la fonction $(r, \theta, z) \mapsto r\,f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ est intégrable sur $\mathcal{A}$ et l'on a :

$$\iiint_{\Phi(\mathcal{A})} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{A}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Changement de variable en coordonnées sphériques

Les *coordonnées sphériques* sont définies par l application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R}_{\cdot} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta, \varphi) & \longmapsto & (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta). \end{array}$$

Soit $\mathcal{A}$ une partie bornée de $\mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Si f est une fonction intégrable sur $\Phi(\mathcal{A})$, alors la fonction :

$$(r.\,\theta, \varphi) \mapsto r^2\sin\theta\, f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

est intégrable sur $\mathcal{A}$ et l'on a :

$$\iiint_{\Phi(\mathcal{A})} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{\mathcal{A}} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Exemples

1. Le volume d'une boule de rayon R est :
$$\int_0^R r^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right) d\varphi\right) dr = \frac{4}{3}\pi \, R^3.$$

2. Soient a, b et c trois réels strictement positifs. L'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation :
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
est l'image de la boule $\mathcal{B}$ de centre O et de rayon 1 par l'application linéaire :
$$(u, v, w) \mapsto (a\,u, b\,v, c\,w)$$
dont le déterminant vaut $a\,b\,c$. On en déduit le volume de $\mathcal{E}$:
$$\iiint_{\mathcal{E}} dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{B}} a\,b\,c\,du\,dv\,dw = \frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c.$$

EXERCICES

1. Calculer les intégrales suivantes :

a)

$$I = \iint_D xye^{x+y}\,dx\,dy$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant a\ ,\ 1 \leqslant y \leqslant b\right\}$$

b)

$$I = \iint_D \frac{y}{x^2+1}\,dx\,dy$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0\ ,\ x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$$

c)

$$I = \iint_D x(y-e^y)dx\,dy$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0\ ,\ x+y \leqslant 1\right\}$$

d)

$$\iint_D \frac{1}{x+y+1}\,dx\,dy$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\right\}$$

e)

$$I = \iint_D (x+y)e^{x+y}\,dx\,dy$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 3\ ,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\right\}$$

f)

$$\iint_D x\,dx\,dy$$

$$D = \left\{(x,y) \mid \sqrt{x}+\sqrt{y} \geqslant 1\ ,\ \sqrt{1-x}+\sqrt{1-y} \geqslant 1\right\}$$

2. Calculer les intégrales suivantes (avec $a > 0$ et $b > 0$) :

a)

$$I = \iint_D |x - y| \, dx \, dy$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant a \ , \ 0 \leqslant y \leqslant a\}$$

b)

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy$$

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \ , \ 0 \leqslant y \ , \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$$

c)

$$I = \iint_D \frac{2xy \, dx \, dy}{x^2 + y^2}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \ , \ x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\}$$

d)

$$I = \iint_D \exp\left(\frac{x - y}{x + y}\right) dx \, dy$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \ , \ 0 \leqslant y \ , \ x + y \leqslant 1\}$$

e)

$$\iint_D |x + y| \, dx \, dy$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1 \ , \ |y| \leqslant 1\}.$$

3. Soit $X > 0$ et :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0 \ , \ x^2 + y^2 \leqslant X^2\}$$

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant X \ , \ 0 \leqslant y \leqslant X\}$$

a) Calculer :

$$I(X) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

b) On pose :

$$J(X) = \iint_\Delta e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy.$$

Donner un encadrement de $J(X)$ à l'aide de I.

c) Montrer que la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_0^X e^{-x^2} \, dx$ admet une limite en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

4. Calculer l aire du domaine limité par les paraboles $y^2 = 3 - x$ et $y^2 = 3 - 3x$ et $x \geqslant 0$.

5. Soit $a > 0$. Trouver l'aire du domaine extérieur au cercle d'équation polaire $r = a$ et intérieur à la cardioïde d'équation $r = a(1 + \cos\theta)$.

6. Déterminer l aire du domaine intérieur à la courbe $y^2 = x^2(2 - x)$, $x \geqslant 0$.

7. Soient f une fonction de classe C^4 et :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant a\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}.$$

Calculer :

$$I = \iint_D xy \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y)\, dx\, dy.$$

8. Soit $b \in \mathbb{R}$ avec $b \geqslant 1$. Calculer :

$$I = \int_1^{\sqrt{b}} \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \cos \frac{\pi x}{2y}\, dy \right) dx + \int_{\sqrt{b}}^{b} \left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{b}} \cos \frac{\pi x}{2y}\, dy \right) dx$$

9. Calculer les intégrales triples suivantes :

a) $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$

$$\iiint_D x^a y^b z^c\, dx\, dy\, dz$$

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant z \leqslant xy\}$$

b)

$$\iiint_D \frac{1}{(1 + x + y + z)^3}\, dx\, dy\, dz$$

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x\ ,\ 0 \leqslant y\ ,\ 0 \leqslant z\ ,\ x + y + z \leqslant 1\}$$

c)

$$\iiint_D dx\, dy\, dz$$

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x\ ,\ 0 \leqslant y\ ,\ z \leqslant 5\ ,\ x - y + z \geqslant 1\ ,\ x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

10. Calculer les intégrales suivantes :

a)

$$\iiint_D (xy + zx + yz)\, dx\, dy\, dz$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}.$$

b)

$$\iiint_D z^2\, dx\, dy\, dz$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2 \ ,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}.$$

c) $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$

$$\iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy\, dz$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\}$$

d)

$$I = \iiint_D |x^2 - y^2| dx\, dy\, dz$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant z^2 \ ,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

11. Calculer le volume de l'ellipsoïde défini par :

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} \leqslant 1\right\}.$$

12. Calculer les coordonnées du centre d'inertie du solide homogène S défini en coordonnées sphériques par :

$$\{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant R \ ,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \ ,\ -\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha\}$$

où $\alpha \in \left]0, \pi\right[$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$.

Chapitre 23

Calculs de champs de vecteurs

Dans tout le chapitre, $n = 2$ ou $n = 3$ et U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Ce chapitre utilise la notion de matrice

Définition 1

On appelle *champ de vecteurs* sur U toute application de U dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rccl} \vec{V}: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & M & \longmapsto & \vec{V}(M). \end{array}$$

1. Gradient, divergence, rotationnel

1.1 Différentielle, matrice jacobienne

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Ses fonctions composantes $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et vérifient pour $M \in U$ et $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ tel que $M + \vec{h} \in U$:

$$V_i(M + \vec{h}) = V_i(M) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(M)\, h_j + \|\vec{h}\|\, \varepsilon_i(\vec{h})$$

avec $\lim\limits_{0} \varepsilon_i = 0$.

Pour tout point $M \in U$ il existe donc une application linéaire notée $d\vec{V}_M$ telle que :

$$\vec{V}(M + \vec{h}) = \vec{V}(M) + d\vec{V}_M(\vec{h}) + \|\vec{h}\|\, \varepsilon(\vec{h})$$

avec $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$.

Cette application linéaire, appelée différentielle de $\vec{V}$ en M, a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$J = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(M)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

appelée *matrice jacobienne* de $\vec{V}$ en M.

1.2 Gradient

Rappels

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $M \in U$ et $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ tel que $M + \vec{h} \in U$, on a :

$$f(M+\vec{h}) = f(M) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M)\, h_j + \|\vec{h}\|\, \varepsilon(\vec{h})$$

avec $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M f$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(M)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est appelé gradient de f en M. Il est tel que :

$$f(M+\vec{h}) = f(M) + \vec{h}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M f + \|\vec{h}\|\, \varepsilon(\vec{h})$$

avec $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$.

On note $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ l'application $M \mapsto \overrightarrow{\mathrm{grad}}_M f$.

Propriétés

- L'application $f \mapsto \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ est une application linéaire de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$.
- Elle vérifie pour $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f\,g) = f\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + g\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$$

Exemples

1. On a vu page 623 que le gradient d'une fonction f définie sur $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par :

$$f(M) = \varphi(r)$$

où $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ est :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M f = \varphi'(r)\, \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}.$$

2. En particulier, si :

$$f(M) = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0\,r}$$

alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M\, f = -\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} = -\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}$$

où $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$.

1.3 Divergence

On appelle *divergence* d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ de classe C^1 sur U la fonction définie sur U par :

$$\mathrm{div}_M\,\vec{V} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_i}{\partial x_i}(M).$$

On note $\mathrm{div}\,\vec{V}$ l'application $M \mapsto \mathrm{div}_M\,\vec{V}$.

Propriétés

- L'application $\vec{V} \mapsto \mathrm{div}\,\vec{V}$ est une application linéaire de $C^1(U, \mathbb{R}^n)$ dans $C^0(U, \mathbb{R})$.
- Elle vérifie, pour $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $\vec{V} \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$:

$$\mathrm{div}(f\,\vec{V}) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f).\vec{V} + f\ \mathrm{div}\,\vec{V}.$$

Exemple Si $\vec{V}(M) = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^\alpha}$, on a $V_i(M) = \dfrac{x_i}{r^\alpha}$ et donc :

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{1}{r^\alpha} + x_i\left(\frac{-\alpha}{r^{\alpha+1}}\right)\left(\frac{x_i}{r}\right) = \frac{1}{r^\alpha} - \alpha\frac{x_i^2}{r^{\alpha+2}}$$

ce qui donne :

$$\mathrm{div}_M\,\vec{V} = \frac{n}{r^\alpha} - \alpha\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{r^{\alpha+2}} = \frac{n-\alpha}{r^\alpha} = \frac{n-\alpha}{\|\overrightarrow{OM}\|^\alpha}.$$

1.4 Laplacien

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ on appelle *Laplacien* de f en $M \in U$, le réel :

$$\Delta_M f = \operatorname{div}_M(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f).$$

On a donc :

$$\Delta_M f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(M).$$

On note Δf l'application $M \mapsto \Delta_M f$.

Propriétés

- L'application $f \mapsto \Delta f$ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$.
- Elle vérifie, pour $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$:

$$\Delta(f\,g) = f\,\Delta g + g\,\Delta f + 2\,(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f).(\overrightarrow{\operatorname{grad}} g).$$

Exemple Cherchons les fonctions à symétrie sphérique, c'est-à-dire ne dépendant que de $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, dont le laplacien est nul sur $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (on dit alors qu'elles sont harmoniques).

Si $f(M) = \varphi(r)$, alors $\overrightarrow{\operatorname{grad}}_M f = \varphi'(r)\,\dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$ et donc :

$$\begin{aligned}
\Delta_M f &= \varphi'(r)\operatorname{div}_M\left(\frac{\overrightarrow{OM}}{r}\right) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}_M\,\varphi'(r)\cdot\frac{\overrightarrow{OM}}{r}\\
&= \varphi'(r)\frac{n-1}{r} + \varphi''(r)\,\frac{\overrightarrow{OM}}{r}\cdot\frac{\overrightarrow{OM}}{r}\\
&= \varphi'(r)\frac{n-1}{r} + \varphi''(r).
\end{aligned}$$

On doit donc résoudre l'équation différentielle $r\,\varphi''(r) + (n-1)\,\varphi'(r) = 0$ ce qui donne $\varphi'(r) = \dfrac{K}{r^{n-1}}$ et l'on obtient alors :

- $\varphi(r) = A\,\ln r + B$ lorsque $n = 2$.
- $\varphi(r) = \dfrac{A}{r} + B$ lorsque $n = 3$.

1.5 Rotationnel

On suppose ici $n = 3$. Soient $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur U, et J sa matrice jacobienne.

La matrice $J - {}^tJ$ est une matrice antisymétrique, donc est de la forme :

$$J - {}^tJ = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de l endomorphisme $\vec{u} \mapsto \vec{\omega} \wedge \vec{u}$ où $\vec{\omega}$ a pour composantes (p, q, r).

Ce vecteur $\vec{\omega}$ est appelé *rotationnel* de $\vec{V}$ en M et se note $\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\, \vec{V}$.

On a donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\, \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}, \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right).$$

On note $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V}$ l'application $M \mapsto \overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\, \vec{V}$.

Propriétés

- L'application $\vec{V} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V}$ est une application linéaire de $C^1(U\ \mathbb{R}^3)$ dans $C^0(U, \mathbb{R}^3)$.
- Elle verifie, pour $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $\vec{V} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\,\vec{V}) = f\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \wedge \vec{V}.$$

Exemple Le rotationnel du champ de vecteurs $\vec{V}$ défini sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$$

est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V} = (1, 1, 1).$$

1.6 Potentiel scalaire

On suppose que U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Définition 2

On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{V}$ défini sur U *dérive d'un potentiel* s'il existe une fonction $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

Une telle fonction f est alors appelée un *potentiel scalaire* de $\vec{V}$

Proposition 1

Si un champ de vecteurs de classe C^1 dérive d'un potentiel alors son rotationnel est nul.

émonstratio Si $\vec{V} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ dérive d'un potentiel f, alors f est de classe C^2 et donc, pour tout $i \neq j$:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

ce qui donne le résultat □

Remarque La réciproque de ce résultat est fausse en général. Par exemple le champ de vecteurs défini par :

$$\vec{V}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

a un rotationnel nul comme on peut le vérifier par un calcul élémentaire mais nous verrons plus loin qu'il ne peut pas dériver d'un potentiel sur $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$

Cependant, on a le résultat suivant (proposition 2) que nous admettons.

Définition 3

On dit qu une partie A de $\mathbb{R}^n$ est *étoilée* par rapport à un de ses points Ω, si :

$$\forall M \in A, \ [\Omega M] \subset A.$$

Exemples

1. Un demi–plan, et plus généralement toute partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points.
2. $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$ n'est étoilé par rapport à aucun de ses points.
3. L'ouvert du plan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leqslant 0\}$ est étoilé par rapport à $(1,0)$.

Proposition 2

Si U est un ouvert étoilé, tout champ de vecteurs de classe C^1 à rotationnel nul dérive d'un potentiel.

Remarque Ce résultat prouve en particulier que la réciproque de la proposition 1 est vraie localement : au voisinage de chaque point M d'un ouvert U quelconque, un champ de vecteurs de classe C^1 à rotationnel nul dérive d'un potentiel, puisque U etant ouvert, il existe une boule ouverte centrée en M (donc un convexe) incluse dans U et sur laquelle on peut appliquer la proposition 2 de la page précédente.

2. Intégrale curviligne

2.1 Circulation d'un champ de vecteurs

Soient :

- $\Gamma = \big([a,b], t \mapsto M(t)\big)$ une courbe paramétrée orientée régulière
- U un ouvert contenant le support de Γ,
- $\vec{V}$ un champ de vecteurs continu sur U.

Proposition 3

L'intégrale :

$$\int_a^b \vec{V}\big(M(t)\big).\overrightarrow{M'}(t)\,dt = \int_a^b (\vec{V}\circ M)(t).\overrightarrow{M'}(t)\,dt$$

ne dépend pas du paramétrage admissible de Γ. On l'appelle *intégrale curviligne* (ou *circulation*) de $\vec{V}$ sur Γ.

On la note :

$$\oint_\Gamma \vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM}.$$

émonstration Si $\big([a,b], f\big)$ et $\big([\alpha,\beta], g\big)$ sont deux paramétrages admissibles de Γ, il existe une bijection croissante φ de classe C^1 de $[a,b]$ sur $[\alpha,\beta]$ telle que $f = g\circ\varphi$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b \vec{V}\big(f(t)\big).\overrightarrow{f'}(t)\,dt &= \int_a^b \vec{V}\big(g(\varphi(t))\big).\overrightarrow{g'}\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_\alpha^\beta \vec{V}\big(g(u)\big).\overrightarrow{g'}(u)\,du.\end{aligned}$$

□

Remarques

- En particulier, si Γ est paramétrée par son abscisse curviligne s sur $[s_1, s_2]$, alors :

$$\oint_\Gamma \vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{V}\big(M(s)\big).\overrightarrow{T}(s)\,ds$$

où $\overrightarrow{T}$ est le premier vecteur du repère de Frénet.

- Si $\vec{V}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$, on note aussi :

$$\oint_\Gamma \vec{V}(M)\, d\vec{V} = \int_\Gamma P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy.$$

Exemple Soit $\mathcal{C}$ le cercle de $\mathbb{R}^3$ paramétré par :

$$\big(x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ z(t) = 0\big) \quad \text{avec} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calculons la circulation sur $\mathcal{C}$ du champ de vecteurs défini par :

$$\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right).$$

Pour $t \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\vec{V}\big(M(t)\big) = (-\sin t, \cos t, 0) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{M'}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

ce qui donne :

$$\oint_\mathcal{C} \vec{V}(M)\, \overrightarrow{dM} = \int_\mathcal{C} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Proposition 4

Si $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ et si la courbe Γ a pour origine et extrémité respectivement les points A et B, alors :

$$\oint_\Gamma \vec{V}(M)\, \overrightarrow{dM} = f(B) - f(A).$$

émo stratio En effet ·

$$\begin{aligned}\vec{V}\big(M(t)\big).\overrightarrow{M'}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(M(t)\big)\, x_i'(t) \\ &= \frac{d}{dt}\Big(f\big(M(t)\big)\Big)\end{aligned}$$

et donc :

$$\int_a^b \vec{V}\big(M(t)\big).\overrightarrow{M'}(t)\, dt = f\big(M(b)\big) - f\big(M(a)\big).$$

□

Si le champ de vecteurs dérive d'un potentiel, son intégrale curviligne sur une courbe ne dépend donc que des extrémités de cette courbe

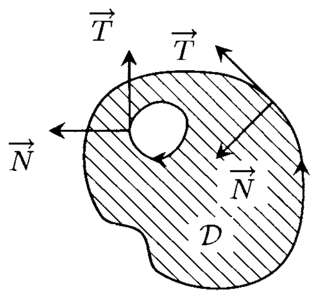
En particulier, si la courbe Γ est fermée, c'est–à–dire si ses deux extrémités sont égales, alors la circulation sur Γ de tout champ de vecteurs dérivant d un potentiel est nulle.

Exemples

1. Puisque le champ de vecteurs :
$$\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$
a une circulation non nulle sur un cercle, on en déduit qu'il ne dérive pas d'un potentiel sur $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ bien qu'il ait un rotationnel nul.
2. En mécanique, la circulation d'une force est égale au travail de cette force. Donc si la force dérive d'un potentiel, son travail ne depend que du point de départ et du point d'arrivée.

2.2 Formule de Green–Riemann

Soit $\mathcal{D}$ un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. On suppose que le bord de $\mathcal{D}$, noté $\partial\mathcal{D}$, est une réunion de courbes de classe C^1 que l'on oriente de telle façon que le vecteur normal soit dirigé vers l'intérieur de $\mathcal{D}$.



On admet la formule de Green–Riemann :

Proposition 5

Si $\vec{V} = (P, Q)$ est un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert U contenant $\mathcal{D}$, alors :
$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM} = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Exemples

1. Pour trouver l'aire de $\mathcal{D}$, qui vaut $\iint_{\mathcal{D}} dx\,dy$, il suffit de trouver deux fonctions P et Q de classe C^1 telles que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$.

   On peut prendre au choix :
   - $Q(x,y) = x$ et $P(x,y) = 0$, soit $\vec{V} = (0, x)$
   - $P(x,y) = -y$ et $Q(x,y) = 0$, soit $\vec{V} = (-y, 0)$
   - ou plus symétriquement $\vec{V} = \left(-\dfrac{y}{2}, \dfrac{x}{2}\right)$.

2. Dans le repère polaire $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, le champ de vecteurs $\vec{V} = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$ s'écrit $\vec{V} = \frac{r}{2}\,\vec{v}(\theta)$.

Si la courbe est paramétrée en polaires sous la forme $r = f(\theta)$, on a $\overrightarrow{M'} = r'\,\vec{u} + r\,\vec{v}$ et donc $\vec{V}.\overrightarrow{M'} = r^2$. La circulation de $\vec{V}$ le long de cette courbe entre les points d'angles polaires θ_1 et θ_2 est donc :

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\,d\theta.$$

L'aire de $\mathcal{D}$ est alors donnée par :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} x\,dy = -\int_{\partial\mathcal{D}} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{D}} x\,dy - y\,dx$$

qui est l'aire de la partie $\mathcal{D}$ du plan délimitée par la courbe et les deux droites d'équations polaires $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$ comme le prouve le changement de variable en polaire :

$$\iint_{\mathcal{D}} dx\,dy = \int_{\theta_1}^{\theta^2}\left(\int_0^{r(\theta)} \rho\,d\rho\right)d\theta.$$

Par exemple :

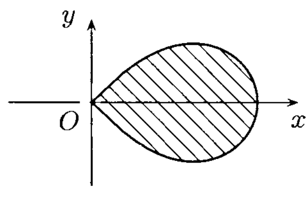
- l'aire d'un secteur angulaire défini en polaires par:

$$\left\{(r,\theta) \mid \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r \leqslant R\right\}$$

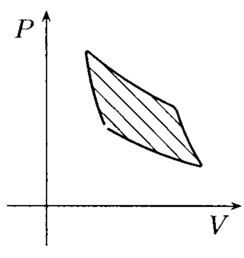
  vaut $\dfrac{R^2\,(\theta_2 - \theta_1)}{2}$,

- l'aire d'une boucle de la *lemniscate de Bernoulli* d'équation polaire $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, $-\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ vaut :

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\cdot$$



3. En thermodynamique, dans un cycle réversible (par exemple un cycle de Carnot), le travail reçu par le système est égal à l'intégrale sur tout le cycle de $-P\,dV$, c'est-à-dire, dans le plan (V, P) à l'intégrale curviligne du champ de vecteurs $(-P, 0)$. Ce travail correspond donc au signe près (cela dépend du sens dans lequel on parcourt le cycle) à l'aire du cycle dans le diagramme de Clapeyron.



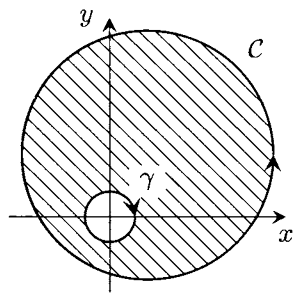
4. Soit $\vec{V} = (P, Q)$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ par :

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

On a $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ce qui prouve que la circulation de $\vec{V}$ sur le bord de tout fermé borné inclus dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ est nulle.

Considérons un cercle $\mathcal{C}$ ne passant pas par O et orienté dans le sens trigonométrique.

- Si $\mathcal{C}$ n'entoure pas O, le disque délimité par $\mathcal{C}$ est inclus dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et on a donc :
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM} = 0.$$
- Si $\mathcal{C}$ est centré en O, en le paramétrant par :
$$\left(x = R\cos\theta\,,\ y = R\sin\theta\right) \qquad \text{avec} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
on obtient immédiatement :
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM} = 2\pi.$$
- Si $\mathcal{C}$ entoure O, considérons le domaine $\mathcal{D}$ constitue du disque délimité par $\mathcal{C}$ privé d'un petit disque ouvert centré en O :
Le bord orienté de $\mathcal{D}$ est constitué de $\mathcal{C}$ et du cercle γ orienté dans le sens inverse du sens trigonométrique.



On a alors :
$$\oint_{\partial D} \vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM} + \oint_{\gamma} \vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM}.$$
Comme $\mathcal{D}$ ne contient pas O, la circulation de $\vec{V}$ sur son bord est nulle et d'après le point précédent, la circulation de $\vec{V}$ sur γ vaut -2π (attention à l'orientation de γ).
Donc :
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM} = 2\pi.$$

Plus généralement si Γ est une courbe fermée ne contenant pas O, le réel :
$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \vec{V}(M)\,\overrightarrow{dM}$$
est un entier qui indique combien de fois la courbe « tourne » autour de O dans le sens trigonométrique.

Troisième partie

Algèbre et géométrie

Chapitre 24

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

PCSI Seules sont au programme de PCSI :

- la divisibilité et la division euclidienne,
- la définition des nombres premiers page 696,
- la décomposition en facteurs premiers (théorème 25 de la page 698) que l'on admettra. PCSI

1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1.1 Diviseurs, multiples

Définition 1

Étant donnés deux entiers relatifs a et b, on dit que a est un *diviseur* de b ou que b est un *multiple* de a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k\,a$.

Notations

- Si d est un diviseur de a on note $d \mid a$.
- L'ensemble des diviseurs de a est noté $\mathcal{D}(a)$.
- L'ensemble des multiples de a est noté $\mathcal{M}(a)$ ou $a\mathbb{Z}$.

Exemples

- 1 et -1 divisent tous les entiers, mais ne sont divisibles que par 1 et -1.
- 0 est un multiple de tous les entiers, mais n'est diviseur que de lui–même.
- $\mathcal{D}(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Remarque

- La relation "divise" est réflexive et transitive, mais n'est pas une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$, car elle n'est pas antisymétrique.
- En revanche d'après la proposition suivante, sa restriction à $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre. Pour cet ordre, le plus petit élément de $\mathbb{N}$ est 1, et le plus grand 0.
- La divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est liée à l'ordre naturel de $\mathbb{N}^*$ par la relation :

$$a \mid b \Longrightarrow a \leqslant b.$$

En effet si $a \mid b$ alors $b = k\,a$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et, puisque a et b sont strictement positifs, on a $k \in \mathbb{N}^*$ et par suite $b \geqslant a$.

Ce résultat est faux dans $\mathbb{N}$ puisque, par exemple, $1 \mid 0$.

Proposition 1

On a $(a \mid b \quad \text{et} \quad b \mid a) \Longleftrightarrow |a| = |b|$.

Démonstration

- Supposons $a \mid b$ et $b \mid a$. Il existe alors des entiers relatifs k et k' tels que $b = k\,a$ et $a = k'\,b$, ce qui donne $a = k'\,k\,a$.
  - Si $a = 0$, alors $b = k\,0 = 0$ et $|a| = |b| = 0$.
  - Si $a \neq 0$, alors $k'\,k = 1$ Comme k et k' sont des entiers relatifs, on a $|k| = |k'| = 1$ ce qui montre $|a| = |b|$.
- Si $|a| = |b|$, alors $a = b$ ou $a = -b$ Donc $a \mid b$ et $b \mid a$ □

La proposition suivante est une conséquence évidente de la définition

Proposition 2

Soient a et b deux entiers relatifs.

- Si $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, alors :

$$(d \mid a \quad \text{et} \quad d \mid b) \Longrightarrow d \mid a\,u + b\,v$$

- Si x est un entier non nul, alors :

$$a \mid b \Longleftrightarrow a\,x \mid b\,x.$$

1.2 Division euclidienne sur $\mathbb{Z}$

Théorème 3

Soient a un entier relatif et b un entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers relatifs (q, r) tel que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < b. \tag{$*$}$$

- q est appelé *quotient de la division euclidienne* de a par b
- r est appelé *reste de la division euclidienne* de a par b.

émonstration

Unicité. Soient (q, r) et (q', r') deux couples vérifiant $(*)$. Montrons que $q = q'$ et $r = r'$.

Puisque $0 \leqslant r < b$ et $0 \leqslant r' < b$, on a $b\,|q-q'| = |r'-r| < b$, ce qui entraîne $|q-q'| = 0$ puis $r' - r = 0$.

Existence.

- Si $a \in \mathbb{N}$: l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid nb \leqslant a\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide puisque $0 \in A$.

  De plus A est majorée par a puisque si $n \in A$, alors $n \leqslant nb \leqslant a$ (b est non nul donc supérieur ou égal à 1).

  Donc A admet un plus grand element q qui vérifie alors :

  - $qb \leqslant a$ puisque $q \in A$,
  - $(q+1)\,b > a$ puisque $q + 1 \notin A$.

  En posant $r = a - bq$, on a alors $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < (q+1)\,b - bq = b$.

- Cas général : comme $b \geqslant 1$, on a $|a|\,b \geqslant |a|$, et donc $a + |a|\,b \in \mathbb{N}$. En appelant q' et r les reste et quotient de la division euclidienne de $a + |a|\,b$ par b, on obtient :

$$a = bq' + r - |a|\,b = bq + r$$

  avec $q = q' - |a|$. □

Remarques

- Si q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par $b \neq 0$, on a :

$$q = E\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{et} \quad r \equiv a \quad [b]$$

  où E désigne la fonction partie entière, puisque l'on a l'équivalence :

$$\forall q \in \mathbb{Z}, \ \left(q \leqslant \frac{a}{b} < q + 1 \Longleftrightarrow bq \leqslant a < bq + b\right).$$

- Si q est le quotient de la division euclidienne de l entier naturel a par b l ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid nb \leqslant a\}$ est l'intervalle $[\![0, q]\!]$.

- Étant donnés $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, notons q et r les quotient et reste de la division euclidienne de a par b.
  - Si $r = 0$, alors $a = bq$ et donc $b \mid a$.
  - Réciproquement, si $b \mid a$, alors on a $a = kb + 0$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant 0 < b$. L'unicité de la division euclidienne nous donne donc $k = q$ et $r = 0$.

  On a donc l'équivalence $b \mid a \iff r = 0$.

Exemple En MAPLE, la division euclidienne des entiers naturels se fait à l'aide des fonctions iquo et irem, la première donnant le quotient et la deuxième le reste

```
> q:=iquo(123456,456);
                              q := 270
> r:=irem(123456,456);
                              r := 336
> q*456+r;
                               123456
```

2. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM)

2.1 Définitions

MPSI

Soient a et b deux entiers relatifs.

- Si $(a,b) \neq (0,0)$, l'ensemble des diviseurs communs à a et b est une partie de $\mathbb{Z}$, non vide puisqu elle contient 1 et majorée par $\max(|a|,|b|)$[1]. Elle possède donc un plus grand élément, supérieur ou égal à 1.
- Si $ab \neq 0$, l'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car elle contient $|ab|$. Elle possède donc un plus petit élément.

Définition 2

- Le PGCD de a et b noté $a \wedge b$, est :
  - le plus grand des diviseurs communs à a et b lorsque $(a,b) \neq (0,0)$,
  - 0 lorsque $a = b = 0$.
- Le PPCM de a et b, noté $a \vee b$, est :
  - le plus petit des multiples strictement positifs communs à a et b lorsque $ab \neq 0$,

    0 lorsque $a = 0$ ou $b = 0$.

[1] Elle est même majorée par $\min(|a|,|b|)$ si a et b sont non nuls

Remarques

- Étant donnés deux entiers relatifs a et b, on a :

$$a \wedge b = |a| \wedge |b| \qquad \text{et} \qquad a \vee b = |a| \vee |b|.$$

  C'est pourquoi l'on supposera souvent par la suite que a et b sont des entiers naturels.
- Par définition, on a, pour tout $a \in \mathbb{Z}$:

$$a \wedge 0 = |a| \qquad \text{et} \qquad a \vee 0 = 0.$$

- Si $a = b = 0$, les diviseurs communs à a et b sont tous les entiers et il n'en existe donc pas de plus grand pour la relation d'ordre $\leqslant$ (voir cependant la remarque de la page 688).
- Si $ab = 0$, seul 0 est un multiple commun à a et b et il n'existe donc pas de multiple strictement positif commun à a et b.

Exemple En MAPLE, ce sont les fonctions `igcd` et `ilcm` qui calculent le PGCD et le PPCM :

```
> igcd(342,564);
> ilcm(342,364);
```

$$6$$
$$32148$$

2.2 Algorithme d'Euclide

Proposition 4

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Si $a = bq + r$, alors :

$$\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(r) \cap \mathcal{D}(b)$$

et par conséquent $a \wedge b = b \wedge r$.

emonst ation

- Si $d \in \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$, alors $d \mid (bq)$ et $d \mid a$, donc $d \mid (a - bq) = r$, par suite $d \in \mathcal{D}(r) \cap \mathcal{D}(b)$.
- Par symétrie, puisque $r = a - bq$, on a aussi $\mathcal{D}(r) \cap \mathcal{D}(b) \subset \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$.

D'où l'égalité

$$\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(r) \cap \mathcal{D}(b)$$

et donc les plus grands éléments de $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ et de $\mathcal{D}(r) \cap \mathcal{D}(b)$ sont égaux, ce qui donne le résultat. □

Le résultat précédent est en particulier vrai lorsque q et r sont respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de a par b et donc pour calculer le PGCD de a et b, il suffit de calculer celui de b et de r.

Comme $r < b$, on se ramène à un couple d'entiers plus petits. Il suffit alors de recommencer, ce qui constitue l'*algorithme d'Euclide* que nous décrivons ci-dessous.

Description

Étant donnés deux entiers naturels a et b, définissons :

- $r_0 = a$
- $r_1 = b$.
- Pour $n \geqslant 1$, si $r_n \neq 0$, r_{n+1} est le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n.

La suite r ne peut pas être définie sur $\mathbb{N}$, car elle est strictement décroissante à partir du rang 1 et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Il existe donc un rang N pour lequel on a $r_N \neq 0$ et $r_{N+1} = 0$.

D'après la proposition précédente, on a alors :

$$a \wedge b = r_0 \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_N \wedge r_{N+1}$$

et comme $r_{N+1} = 0$, on a $r_N \wedge r_{N+1} = r_N$

Le PGCD de a et de b est donc le dernier reste non nul obtenu dans la suite des divisions successives.

> ***Remarque*** Historiquement, l'algorithme d'Euclide reposait sur l'égalité $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a-b) \cap \mathcal{D}(b)$. Il était ainsi plus long, puisque si q et r sont les quotient et reste de la division euclidienne de a par b, il fallait q étapes pour se ramener au couple (b, r).
>
> En revanche, il était plus simple puisqu'il ne nécessitait que des soustractions et pas de division.

Algorithme

DONNÉES : les entiers naturels a et b.

VARIABLES : x, y et r.

- $x \leftarrow a$
- $y \leftarrow b$
- `tant que` $y \neq 0$
  - $r \leftarrow$ `reste de la division de` x `par` y
  - $x \leftarrow y$
  - $y \leftarrow r$

RÉSULTAT : x.

Remarques

- Lorsque $b = 0$, on n'effectue aucune division et le résultat obtenu est bien $a = a \wedge 0$.
- Lorsque $a < b$, la première division donne a pour reste et l'algorithme commence donc par échanger x et y. Par la suite, on a toujours $x > y$.

2.3 Coefficients de Bézout

Soient a et b deux entiers relatifs.

Proposition 5

Il existe des entiers relatifs u et v tels que :

$$a\,u + b\,v = a \wedge b.$$

Un tel couple (u, v) est appelé un couple de *coefficients de Bézout* de a et b.

Demonstration Quitte à remplacer a par $|a|$ et b par $|b|$, il suffit de traiter le cas où a et b sont des entiers naturels.

Demontrons par récurrence sur $b \in \mathbb{N}$ la propriété H_b : "Pour tout entier naturel a, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a\,u + b\,v = a \wedge b$."

- H_0 est vraie car $a \times 1 + 0 \times 0 = a = a \wedge 0$.
- Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $b - 1$, avec $b \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{N}$; notons d le PGCD de a et b On effectue la division euclidienne de a par b :

$$a = b\,q + r \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant r < b$$

D'après la proposition 4 de la page 685, on a donc $d = b \wedge r$ et la propriété H_r montre qu il existe $(u', v') \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$b\,u' + r\,v' = d.$$

On a donc :

$$b\,u' + (a - b\,q)\,v' = d$$

ce qui donne :

$$a\,u + b\,v = d$$

avec $u = v'$ et $v = u' - q\,v'$. D'où H_b. □

Proposition 6

Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$

émonstratio En reprenant les notations de l'algorithme d'Euclide de la page précédente, on a $\mathcal{D}(r_0) \cap \mathcal{D}(r_1) = \mathcal{D}(r_N) \cap \mathcal{D}(r_{N+1}) = \mathcal{D}(r_N)$ et donc $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$ ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque Le PGCD de a et b est donc le plus grand, au sens de la divisibilité, des diviseurs positifs communs à a et à b.

Ce résultat est valable même si $a = b = 0$, car dans ce cas, l'ensemble des diviseurs positifs communs est égal à $\mathbb{N}$ et 0 est bien le plus grand élément de $\mathbb{N}$ pour la divisibilité. En revanche, pour l'ordre naturel de $\mathbb{N}$, il n'existe pas dans ce cas de plus grand diviseur commun à a et b.

2.4 Entiers premiers entre eux

Définition 3

Les entiers a et b sont *premiers entre eux* si $a \wedge b = 1$ c'est–à–dire si les seuls diviseurs communs à a et b sont 1 et -1.

Proposition 7 (Identité de Bézout)

Les entiers a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a\,u + b\,v = 1$.

émonstration

- Si a et b sont premiers entre eux, alors $a \wedge b = 1$ et, d'après la proposition 5 de la page précédente, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a\,u + b\,v = a \wedge b = 1$
- S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\,u + b\,v = 1$, alors tout diviseur commun à a et b divise $a\,u + b\,v$ donc est égal à 1 ou à -1. On en déduit que a et b sont premiers entre eux. □

Proposition 8

Si $d = a \wedge b$, alors il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.

émonstration

- Si $a = b = 0$, on a $d = 0$ et il suffit de prendre $a' = b' = 1$
- Sinon, comme d divise a et b, il est clair qu'il existe a' et b' tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$. Comme d est le PGCD de a et b, il existe u et v entiers tels que $d = a\,u + b\,v$, ce qui donne $1 = a'\,u + b'\,v$. Ainsi, a' et b' sont premiers entre eux □

Corollaire 9

Tout nombre rationnel s écrit sous forme irréductible, c'est–à–dire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont des entiers premiers entre eux, b étant non nul

Pour obtenir cette forme irréductible d un rationnel quelconque, il suffit de diviser son numérateur et son dénominateur par leur PGCD.

2.5 Théorème de Gauss

Théorème 10

Étant donnés trois entiers relatifs a, b et c, on a :

$$(a \wedge b = 1 \quad \text{et} \quad a \mid bc) \Longrightarrow a \mid c.$$

émonst ation Supposons $a \wedge b = 1$ et $a \mid bc$. D'après l'identité de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a u + b v = 1$, ce qui implique $a c u + b c v = c$
Comme $a \mid b c$, on a $a \mid b c v$ et donc :

$$a \mid a c u + b c v = c.$$ □

Remarque Ce théorème est également appelé parfois lemme de Gauss.

Exemple Étant donné un rationnel possédant deux formes irréductibles $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_2}{b_2}$, on a $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Ainsi b_1 divise $a_1 b_2$, et comme il est premier avec a_1, on en déduit qu'il divise b_2. Par symétrie, on a aussi $b_2 \mid b_1$.
Alors $b_2 = \varepsilon\, b_1$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et par suite $a_2 = \varepsilon\, a_1$.
Un rationnel r s'écrit donc de manière unique sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$. C'est ce que l'on appelle l'*écriture canonique* de r.

Proposition 11

Étant donnés trois entiers relatifs a, b et c, on a :

$$(a \wedge b = 1 \quad \text{et} \quad a \wedge c = 1) \Longleftrightarrow a \wedge (b c) = 1.$$

emonstration

- Supposons $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ On peut montrer à l'aide du théorème de Gauss que a et bc sont premiers entre eux, mais on peut aussi utiliser l'identité de Bézout : si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, il existe $(u, v, u', v') \in \mathbb{Z}^4$ tel que :

  $$a u + b v = 1 \quad \text{et} \quad a u' + c v' = 1.$$

  En multipliant membre à membre ces deux egalités on obtient alors immédiatement une relation du type $a U + b c V = 1$ ce qui prouve que a et $b c$ sont premiers entre eux.
- La réciproque est évidente, puisque $a \wedge b$ et $a \wedge c$ sont des diviseurs communs à a et $b c$. □

Cette proposition se généralise facilement par récurrence à un produit fini quelconque :

Proposition 12

Un produit est premier avec un entier a si, et seulement si, chacun de ses facteurs est premier avec a.

Corollaire 13

Si a et b sont deux entiers relatifs premiers entre eux, alors on a :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \; a^m \wedge b^n = 1.$$

2.6 PPCM

Proposition 14

Si a et b sont deux entiers premiers entre eux, alors les multiples communs à a et b sont les multiples de $a\,b$.

En particulier, on a $a \vee b = |a\,b|$.

émonstratio Il est évident que les multiples de $a\,b$ sont des multiples communs à a et b. Réciproquement, supposons $a \mid x$ et $b \mid x$; il existe donc un entier c tel que $x = b\,c$. Comme $a \mid x$ et $a \wedge b = 1$, le théorème de Gauss montre que a divise c. Il existe donc un entier y tel que $c = a\,y$, ce qui donne $x = a\,b\,y$ et prouve le résultat. □

On peut facilement généraliser ce résultat à un produit fini quelconque d'entiers premiers entre eux :

Corollaire 15

Si des entiers premiers entre eux deux à deux divisent un entier a, alors leur produit divise a.

Corollaire 16

Soient a et b deux entiers. Notons d leur PGCD et prenons a' et b' premiers entre eux tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.

- Les multiples communs à a et b sont les multiples de $d\,a'\,b'$.
- En particulier, on a $a \vee b = d\,|a'\,b'|$ et :

$$(a \vee b)\,(a \wedge b) = |a\,b|.$$

émonstration Il est évident que $d\,a'\,b' = a\,b' = a'\,b$ est un multiple de a et b.
Réciproquement, soit x un multiple commun à a et b. Alors x est un multiple de d et l'on peut écrire $x = d\,x'$, avec $x' \in \mathbb{Z}$
On a donc $a' \mid x'$ et $b' \mid x'$ (même si $d = 0$, puisqu'alors $a' = b' = 1$) et comme a' et b' sont premiers entre eux, $a'\,b' \mid x'$. Ainsi $d\,a'\,b' \mid d\,x' = x$
Le deuxième point est immédiat. □

Corollaire 17

Les multiples communs à a et b sont les multiples de $a \vee b$.

Remarque Le PPCM de a et b est donc, au sens de la divisibilité, le plus petit des multiples positifs communs à a et à b. Le plus grand multiple commun est, quant à lui, égal à 0 (toujours pour la relation de divisibilité).

Exemple Soient a et b deux entiers relatifs.

Si $a = x\,a'$ et $b = x\,b'$ avec $(x, a', b') \in \mathbb{Z}^3$, alors :

$$a \wedge b = |x|(a' \wedge b') \qquad \text{et} \qquad a \vee b = |x|(a' \vee b').$$

emonstration Les résultats étant évidents pour $x = 0$, on peut supposer $x \neq 0$

- Soient $d = a \wedge b$ et $d' = a' \wedge b'$.
  - Comme $d' \mid a'$ et $d' \mid b'$, on a $x\,d' \mid x\,a' = a$ et $x\,d' \mid x\,b' = b$. Donc $x\,d' \mid d$.
  - On peut alors écrire $d = x\,d'\,z = x\,y$ avec $y = d'\,z$ qui est donc divisible par d' Par suite, on a :

    $$x\,y = d \mid a = x\,a'$$

    et de même $x\,y \mid x\,b'$ ce qui prouve, puisque $x \neq 0$, que y divise a' et b' et donc leur PGCD d'. On a ainsi $d = x\,y \mid x\,d'$.

  En conclusion $d = |x|\,d'$.
- Soient $m = a \vee b$ et $m' = a' \vee b'$.
  - Comme $a' \mid m'$ et $b' \mid m'$, on a $a = x\,a' \mid x\,m'$ et $b = x\,b' \mid x\,m'$. Donc $x\,m'$ est un multiple commun à a et b, et par suite $m \mid x\,m'$.
  - Puisque m est un multiple de $a = x\,a'$, on peut écrire $m = x\,y$ On a alors $x\,a' \mid x\,y$ et $x\,b' \mid x\,y$ ce qui donne, puisque $x \neq 0$, $a' \mid y$ et $b' \mid y$. Donc $m' \mid y$ ce qui prouve $x\,m' \mid x\,y = m$.

  En conclusion $m = |x|\,m'$. □

2.7 Résolution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $a\,x + b\,y = c$

Soient a, b et c trois entiers relatifs, a et b étant non nuls. Considérons l'équation :

$$a\,x + b\,y = c \tag{E}$$

dont on cherche les solutions (x, y) dans $\mathbb{Z}^2$.

Solution générale

- Si c n est pas multiple de $a \wedge b$, l'équation (E) n'a pas de solution car pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, l'entier $a\,x + b\,y$ est un multiple de $a \wedge b$

- Si c est un multiple de $a \wedge b$, il s'écrit $c = \lambda(a \wedge b)$.
  - D'après la proposition 5 de la page 687 il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = a \wedge b$, et le couple $(\lambda u, \lambda v)$ est alors une solution de l'équation (E). L'équation (E) possède donc des solutions ; dans la suite on note (x_0, y_0) une solution particulière.
  - Posons $d = a \wedge b$ et prenons a' et b', tels que $a = da'$ et $b = db'$. On a $a' \wedge b' = 1$.

    Un couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de (E) si, et seulement si, on a :
    $$ax + by = ax_0 + by_0$$
    c'est-à-dire :
    $$a(x - x_0) = b(y_0 - y)$$
    soit encore :
    $$a'(x - x_0) = b'(y_0 - y) \qquad (*)$$
    - ⋆ Si (x, y) est solution de $(*)$, alors $a' \mid b'(y_0 - y)$ et comme a' et b' sont premiers entre eux, le théorème de Gauss implique $a' \mid (y_0 - y)$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y_0 - y = a'\,k$ ce qui, en reportant dans $(*)$ et en simplifiant par $a' \neq 0$, donne $x - x_0 = b'\,k$.
    - ⋆ Réciproquement si $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(x_0 + b'\,k, y_0 - a'\,k)$ est solution de (E).

  L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc :
  $$\big\{(x_0 + b'\,k, y_0 - a'\,k) \;\big|\; k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Algorithme de recherche d'une solution particulière

Pour résoudre (E), il suffit donc de trouver une solution particulière de l'équation $ax + by = d$, avec $d = a \wedge b$, c'est-à-dire un couple de coefficients de Bézout.

Première méthode. Prenons la famille $(r_n)_{n \in [\![0, N+1]\!]}$ des restes successifs de l'algorithme d'Euclide décrit page 686. On a $r_0 = a$, $r_1 = b$ et :
$$\forall k \in [\![1, N]\!]\,, \; r_{k-1} = q_k\, r_k + r_{k+1}$$
avec $r_{N+1} = 0$. On sait alors que l'on a $\forall k \in [\![1, N+1]\!]\,,\; d = r_{k-1} \wedge r_k$, et en particulier $d = r_N$.

La relation $r_{N-2} - q_{N-1}\, r_{N-1} = r_N = d$ nous donne immédiatement un couple de coefficients de Bézout pour r_{N-2} et r_{N-1}.

D'autre part, si l'on a $r_k\, u + r_{k+1}\, v = d$, on obtient :

$$d = r_k\, u + (r_{k-1} - q_k\, r_k)\, v = r_{k-1}\, v + r_k\, (u - q_k\, v).$$

On peut ainsi, de proche en proche, en remontant l'algorithme d'Euclide trouver un couple de coefficients de Bézout pour a et b.

Exemple

$$\begin{array}{rclcrcl}
19 &=& 2 \times 7 + 5 & \qquad & 1 &=& 3 \times 19 - 8 \times 7 \\
7 &=& 1 \times 5 + 2 & & 1 &=& -2 \times 7 + 3 \times 5 \\
5 &=& 2 \times 2 + 1 & & 1 &=& 1 \times 5 - 2 \times 2
\end{array}$$

(Dans les équations de droite, on remplace l'entier entouré par la valeur tirée de l'équation de gauche correspondante.)

Malheureusement la méthode précédente, qui correspond à une programmation récursive, exige de garder en memoire toutes les divisions euclidiennes successives, ce qui rend coûteuse une programmation itérative On peut cependant modifier l'algorithme d'Euclide pour qu'il donne, en plus du PGCD, un couple de coefficients de Bézout.

Seconde méthode. Le principe consiste à garder, à chaque étape, un couple (u_k, v_k) tel que $a\, u_k + b\, v_k = r_k$.

- Pour $k = 0$, on pose $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$.
- Pour $k = 1$, on pose $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$.
- Si pour $1 \leqslant k \leqslant N - 1$, il existe $u_{k-1}, v_{k-1}, u_k, v_k$ tels que :

  $$r_{k-1} = a\, u_{k-1} + b\, v_{k-1} \qquad \text{et} \qquad r_k = a\, u_k + b\, v_k$$

  alors on a :

  $$\begin{aligned} r_{k+1} &= r_{k-1} - q_k\, r_k \\ &= a\, u_{k-1} + b\, v_{k-1} - q_k(a\, u_k + b\, v_k) \\ &= a\,(u_{k-1} - q_k\, u_k) + b\,(v_{k-1} - q_k\, v_k). \end{aligned}$$

  En posant $u_{k+1} = u_{k-1} - q_k\, u_k$ et $v_{k+1} = v_{k-1} - q_k\, v_k$, on a bien :

  $$r_{k+1} = a\, u_{k+1} + b\, v_{k+1}.$$

- Pour $k = N$, on a alors :

  $$d = r_N = a\, u_N + b\, v_N.$$

Une solution particulière de l'équation $a\, x + b\, y = d$ est donc (u_N, v_N).

Algorithme

DONNÉES : les entiers naturels a et b.

VARIABLES : x, y, u_0, v_0, u_1, v_1, et q.

- $(x, y) \leftarrow (a, b)$
- $(u_0, v_0) \leftarrow (1, 0)$
- $(u_1, v_1) \leftarrow (0, 1)$
- `tant que` $y \neq 0$
  - $q \leftarrow$ `quotient de la division de` x `par` y
  - $(x, y) \leftarrow (y, x - q\,y)$
  - $(u_0, u_1) \leftarrow (u_1, u_0 - q\,u_1)$
  - $(v_0, v_1) \leftarrow (v_1, v_0 - q\,v_1)$

RÉSULTAT : (x, u_0, v_0).

Interprétation matricielle

Si l'on pose $M_k = \begin{pmatrix} r_{k-1} & r_k \\ u_{k-1} & u_k \\ v_{k-1} & v_k \end{pmatrix}$, les relations :

$$\begin{cases} r_{k+1} = r_{k-1} - q_k\, r_k \\ u_{k+1} = u_{k-1} - q_k\, u_k \\ v_{k+1} = v_{k-1} - q_k\, v_k \end{cases}$$

se traduisent matriciellement par $M_{k+1} = M_k\, Q_k$, où $Q_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix}$.

En posant $\Omega = Q_1\, Q_2 \ldots Q_N$, on a alors $M_{N+1} = M_1\, \Omega$ avec :

$$M_{N+1} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ u_N & u_{N+1} \\ v_N & v_{N+1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et par suite :

$$\Omega = \begin{pmatrix} u_N & u_{N+1} \\ v_N & v_{N+1} \end{pmatrix}.$$

- Les coefficients de Bézout (u_N, v_N) forment donc la première colonne de Ω.
- De plus, la deuxième colonne est constituée de (u_{N+1}, v_{N+1}) qui vérifient donc $a\, u_{N+1} + b\, v_{N+1} = 0$.

- Comme Ω est le produit de matrices de déterminant -1, elle a un déterminant égal à ± 1, ce qui prouve $u_N\, v_{N+1} - v_N\, u_{N+1} = \pm 1$ et donc que u_{N+1} et v_{N+1} sont premiers entre eux.

  Une forme irréductible de la fraction $\frac{a}{b}$ est donc $-\frac{v_{N+1}}{u_{N+1}}\cdot$

2.8 Plus grand commun diviseur de plusieurs entiers

On peut généraliser les propriétés du PGCD de deux entiers à une famille $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ d'entiers relatifs ($p \geqslant 2$).

Les démonstrations par récurrence de ces propriétés sont laissées au lecteur.

Définition

Définition 4

On appelle plus grand commun diviseur de la famille $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$, l'entier noté $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p$ défini par :

- $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p = 0$, si $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$.
- sinon $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p$ est le plus grand, au sens de la relation $\leqslant$ des diviseurs communs à tous les entiers a_k et il est alors supérieur ou égal à 1.

Proposition 18

Il existe une famille $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ d entiers relatifs tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} u_k\, a_k = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p.$$

Proposition 19

Les diviseurs communs à a_1, a_2,..., a_p sont les diviseurs de $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p$.

Entiers premiers entre eux

Définition 5

Les entiers a_1, a_2,..., a_p sont premiers entre eux dans leur ensemble si $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p = 1$, c'est-à-dire si $\bigcap_{k=1}^{p} \mathcal{D}(a_k) = \{-1, 1\}$.

Proposition 20 (Identité de Bézout)

Les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il existe une famille $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ d entiers relatifs telle que :

$$\sum_{k=1}^{p} u_k a_k = 1.$$

Remarques

- Des entiers premiers entre eux deux à deux sont évidemment premiers entre eux dans leur ensemble.
- La réciproque est fausse ; si $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p = 1$ il se peut même que $\forall (i,j)\,,\ a_i \wedge a_j \neq 1$, comme le prouve l'exemple des entiers 6, 10 et 15. MPSI

3. Nombres premiers

Dans cette section, nous nous limitons à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

3.1 Définition

Définition 6

On appelle nombre premier tout entier naturel différent de 1 n'admettant pour diviseurs que 1 et lui–même

Exemples $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, 65\,537, \ldots, 314\,159, \ldots$ sont premiers.

Notation L'ensemble des nombres premiers est noté $\mathcal{P}$.

3.2 Propriétés

Proposition 21

MPSI Si $p \in \mathcal{P}$, alors p est premier avec tous les entiers qu'il ne divise pas. En particulier, si p est un nombre premier, on a :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!]\,,\ k \wedge p = 1.$$

Démonstratio Étant donné un entier naturel k non multiple de p, si d est un diviseur commun à k et à p, alors l'entier d est un diviseur de p différent de p donc est égal à 1 puisque p est premier. Par suite, k est premier avec p □

Exemples

- Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux
- Étant donné un nombre premier p, pour tout entier $k \in [\![1, p-1]\!]$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est divisible par p.

  En effet, si $k \in [\![1, p-1]\!]$, la relation $\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$ s'écrit aussi $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ et prouve donc que p divise $k\binom{p}{k}$.

  Comme p et k sont premiers entre eux, le théorème de Gauss entraîne $p \mid \binom{p}{k}$.

Corollaire 22

Un nombre premier divise un produit si, et seulement si, il divise l'un de ses facteurs.

émonstration S'il ne divise aucun des facteurs, il est premier avec chacun d entre eux et donc avec leur produit, ce qui prouve qu'il ne divise pas ce produit.
La réciproque est évidente. □

Proposition 23

Tout entier naturel strictement supérieur à 1 admet un diviseur premier.

emonstration Soit $n > 1$. L'ensemble des diviseurs de n strictement supérieurs à 1 est non vide puisqu'il contient n ; son plus petit élément p est un entier supérieur ou égal à 2. Or, tout diviseur de p est un diviseur de n, donc p n'a pas de diviseur strictement compris entre 1 et p, c'est-à-dire que p est premier. □

Corollaire 24

Il y a une infinité de nombres premiers.

emonstratio Si n est un entier naturel, l'entier $N = 1 + n!$ admet un diviseur premier p (éventuellement lui-même). Si $p \leqslant n$, alors p divise N et $n!$ et donc leur différence 1, ce qui est impossible. Donc $p > n$.
On a montré que pour tout entier n, il existe un nombre premier p strictement supérieur à n, ce qui prouve que l'ensemble des nombres premiers est non majoré, donc infini □

3.3 Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème 25

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Il admet une décomposition en facteurs premiers $n = q_1\,q_2 \dots q_k$ où q_1, $q_2,\dots$, q_k sont des nombres premiers décomposition que l'on peut encore écrire :
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$
où p_1, $p_2,\dots$, p_r sont des nombres premiers distincts deux à deux, et α_1, $\alpha_2,\dots$, α_r des entiers naturels non nuls.
- Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Remarques

- Si $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ est un ensemble de nombres premiers contenant tous les facteurs premiers de n, on peut encore écrire :
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$
en prenant $\alpha_i = 0$ si p_i n'est pas un diviseur de n.
- Avec cette convention, 1 peut aussi s'écrire sous cette forme en prenant tous les α_i nuls.
- Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, on peut écrire :
$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \qquad \text{et} \qquad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$$
en utilisant les mêmes nombres premiers. Il suffit pour cela de prendre tous les facteurs premiers du produit $a\,b$.

MPSI **émonstration du théorème 25.**

Existence. Démontrons par récurrence la propriété H_n : "Tout entier naturel compris entre 2 et n admet une décomposition en facteurs premiers".

- H_2 est vérifiée puisque 2 est premier.
- Supposons H_{n-1}, pour $n \geqslant 3$ et montrons que n admet une décomposition en facteurs premiers, ce qui prouvera H_n.
  - Si n est premier, alors c'est un produit d'un seul nombre premier.
  - Sinon, n admet un diviseur premier p. En posant $n = pq$, on a $1 < q < n$ et donc q est un produit de nombres premiers $q = q_1 q_2 \dots q_k$. Alors $n = p\,q_1 q_2 \dots q_k$ est aussi un produit de nombres premiers.

Unicité. Soit $n = q_1 q_2 \dots q_k$ une décomposition en facteurs premiers de n Chaque nombre premier q_i divise n et réciproquement, si un nombre premier p divise n, alors il divise l'un des q_i donc lui est égal puisqu'il s'agit de deux nombres premiers (positifs). Les facteurs premiers intervenant dans une telle décomposition sont donc tous les diviseurs premiers de n.

Soient alors deux décompositions de n, que l'on peut donc écrire

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$$

où les p_i sont premiers et deux à deux distincts.
Si, pour un entier i, on a $\alpha_i \neq \beta_i$, par exemple $\alpha_i < \beta_i$, alors on a :

$$\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j} = p_i^{\beta_i - \alpha_i} \prod_{j \neq i} p_j^{\beta_j}$$

et donc p_i divise $\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}$, ce qui est impossible puisque si $j \neq i$. les entiers p_i et p_j sont premiers entre eux.
Par suite $\forall i$, $\alpha_i = \beta_i$, ce qui montre l'unicité de la décomposition. □ MPSI

Exemples

1. $7007 = 7 \times 7 \times 11 \times 13$.
2. En MAPLE :

```
> ifactor(123456789);
```

$$(3)^2(3803)(3607)$$

MPSI **Proposition 26**

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Si :

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \qquad \text{et} \qquad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

où $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des nombres premiers distincts, alors on a :

1. $a \mid b \iff \forall i \in [\![1, k]\!]$, $\alpha_i \leqslant \beta_i$.
2. $a \wedge b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ et $a \vee b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$

émonstration

1. Si $a \mid b$, alors pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $p_i^{\alpha_i} \mid a$ et donc $p_i^{\alpha_i} \mid b$, ce qui montre $\alpha_i \leqslant \beta_i$.
   La réciproque est évidente.
2. ► Les diviseurs d communs à a et à b sont :

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k} \qquad \text{avec} \qquad \forall i,\ \delta_i \leqslant \alpha_i \quad \text{et} \quad \delta_i \leqslant \beta_i.$$

Le plus grand des diviseurs communs à a et à b est donc obtenu lorsque :

$$\forall i,\ \delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i),$$

ce qui montre la première égalité

- Les multiples m communs à a et à b s'écrivent :

$$m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_k^{\mu_k} \qquad \text{avec} \qquad \forall i\,,\ \mu_i \geqslant \alpha_i \quad \text{et} \quad \mu_i \geqslant \beta_i.$$

Le plus petit des multiples communs à a et à b est donc obtenu lorsque

$$\forall i\,,\ \mu_i = \max(\alpha_i, \beta_i),$$

ce qui montre la deuxième égalité. □

Exemples

1. Étant donné un entier naturel n non nul dont la décomposition en facteurs premiers est :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

les diviseurs d de a s'écrivent :

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k} \qquad \text{avec} \qquad \forall i\,,\ \delta_i \leqslant \alpha_i.$$

Un diviseur d est donc déterminé par le k–uplet $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$ élément de E=$[\![0, \alpha_1]\!] \times \cdots \times [\![0, \alpha_k]\!]$ et par suite le nombre de diviseurs positifs de n est le cardinal de E, c'est–à–dire $\prod_{i=1}^{k} (1 + \alpha_i)$.

2. Etant donnés deux entiers naturels non nuls a et b, on retrouve la formule :

$$(a \wedge b)(a \vee b) = ab$$

puisque pour tout couple d'entiers (α, β), on a :

$$\max(\alpha, \beta) + \min(\alpha, \beta) = \alpha + \beta.$$

MPSI

EXERCICES

1 Trouver le nombre d'entiers relatifs qui, dans la division euclidienne par 23, ont un quotient égal au reste.

2 Trouver la puissance de 2 dans la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $1000!$.

3. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ n a pas de racines dans $\mathbb{Q}$.

4. Soit $n \in \mathbb{Z}$, quel est le PPCM de n et de $2n+1$?

5. Montrer qu'il existe des intervalles de $\mathbb{N}$ de longueur aussi grande que l'on veut qui ne contiennent aucun nombre premier.

6. Soit p un nombre premier.

a) Soit k un entier tel que $0 < k < p$.

Montrer que $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ est divisible par p.

b) Soient a et b dans $\mathbb{Z}$, montrer que :

$$p \,\big|\, (a+b)^p - a^p - b^p.$$

c) En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \;,\; p \,\big|\, m^p - m.$$

d) Montrer que si m et p sont premiers entre eux alors :

$$p \,\big|\, m^{p-1} - 1.$$

7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Montrer que si a a pour reste r_1 dans la division euclidienne par n et b a pour reste r_2 dans la division euclidienne par n, alors $a+b$ a pour reste le reste de la division euclidienne de $r_1 + r_2$ par n et ab a pour reste le reste de la division euclidienne de $r_1 r_2$ par n.

b) Quels sont les restes de la division euclidienne de 10^k par 9 ?

Expliquer le principe de la *preuve par* 9.

c) Expliquer le principe de la *preuve par* 11.

8. On remarque que $1001 = 7 \times 11 \times 13$.

En déduire un critère de divisibilité par 13.

Si n s'écrit dans le système décimal $\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0}$, on pourra considérer les nombres $\overline{a_2 a_1 a_0}$, $\overline{a_5 a_4 a_3}$ $\overline{a_8 a_7 a_6} \ldots$.

Donner également un critère de divisibilité par 7.

9. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que :

$$E\left(\frac{a}{b}\right) + E\left(\frac{a+1}{b}\right) + \cdots + E\left(\frac{a+b-1}{b}\right) = a.$$

On déterminera les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $E\left(\dfrac{a+x}{b}\right) = E\left(\dfrac{a}{b}\right)$ ainsi que ceux tels que $E\left(\dfrac{a+x}{b}\right) = E\left(\dfrac{a}{b}\right) + 1$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.

a) Calculer le nombre de diviseurs positifs de n.

b) Calculer la somme $S(n)$ des diviseurs positifs de n.

c) Montrer que si m et n sont premiers entre eux alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

11. Trouver n de la forme $3^p 5^q$ sachant que le produit de ses diviseurs est 45^{42}.

12. Soit $n \geqslant 2$ et $a \in \mathbb{Z}$ un entier premier avec n.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note r_k le reste de la division euclidienne de a^k par n.

Montrer que la suite r_k est périodique.

Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{2003} par 5?

Montrer que 13 divise $3^{126} + 5^{126}$.

13. Soit n un entier avec $n \geqslant 2$.

Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

14. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m + 1$ soit premier.

Montrer que m est de la forme $m = 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$
Montrer que si $n \neq m$ alors F_n et F_m sont premiers entre eux.

16. Soit p un nombre entier tel que $2^p - 1$ soit premier. On sait alors (voir exercice 13) que p est premier.

a) Montrer que le nombre $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait, c'est-à-dire que $2n = S(n)$ où $S(n)$ représente la somme de ses diviseurs.

b) Montrer que tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ où p est premier.

17. **a)** Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$.

b) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k + 5$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}$ et p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

a) Montrer que :

$$p_{n+1} \leqslant p_1 p_2 \dots p_n + 1.$$

b) En déduire que $p_n \leqslant 2^{2^n}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.
Montrer que pour x assez grand :

$$\ln(\ln x) \leqslant \pi(x) \leqslant x.$$

On utilisera le fait que pour $n \geqslant 3$, $e^{e^{n-1}} \geqslant 2^{2^n}$.

19. Montrer qu'il existe une application d de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$ et une seule telle que pour tout nombre premier p, $d(p) = 1$ et :

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ , \ d(uv) = ud(v) + vd(u).$$

Résoudre l'équation $d(n) = n$.

20. **a)** Soient a et b deux entiers naturels tels que $0 < a < b$.
Montrer que :

$$(a + b) \wedge (a \vee b) = a \wedge b.$$

b) Trouver a et b tels que :

$$\begin{cases} a + b = 144 \\ a \vee b = 420. \end{cases}$$

21. Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation :

$$x^y = y^x.$$

Chapitre 25

Polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

On rappelle que les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

1. Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.1 Polynômes

Construction

Définition 1

On appelle *polynôme à une indéterminée* à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang.

Notations

- Si $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un polynôme à *coefficients* dans $\mathbb{K}$, alors :

$$\exists n \in \mathbb{N} \; : \; \forall k > n\,, \; a_k = 0.$$

  On note $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$, et les nombres a_0, a_1,..., a_n sont appelés coefficients du polynôme A.
- On désigne par 0 le polynôme nul, c'est-à-dire le polynôme $(0, 0, \ldots)$

Si $A = (a_0, a_1, \ldots a_p, 0, 0, \ldots)$ et $B = (b_0, b_1, \ldots b_q, 0, 0, \ldots)$ sont deux polynômes, il est évident que pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la suite $\lambda\, A + \mu\, B$ est nulle au moins à partir du rang $\max(p, q) + 1$. On en déduit immédiatement :

Proposition 1

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Produit de polynômes

Étant donnes $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux polynômes, on définit la suite $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i\, b_j .$$

Lemme

Si :

$$\forall k > p_0\,,\ a_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k > q_0\,,\ b_k = 0,$$

alors la suite C définie ci–dessus vérifie :

$$\forall k > p_0 + q_0\,,\ c_k = 0 \qquad \text{et} \qquad c_{p_0+q_0} = a_{p_0}\, b_{q_0} .$$

C'est donc un polynôme.

émons ratio En effet supposons $k \geqslant p_0 + q_0$.
Si (i,j) est un couple tel que $i + j = k$, on a $i \geqslant p_0$ ou $j \geqslant q_0$ (sinon $i + j < p_0 + q_0$)
Donc tous les termes de la somme $\sum_{i+j=k} a_i\, b_j$ sont nuls, sauf éventuellement celui correspondant à $i = p_0$ et $j = q_0$.

- Si $k > p_0 + q_0$, alors il n'y a aucun terme non nul dans la somme et donc $c_k = 0$.
- Si $k = p_0 + q_0$, alors le seul terme qui reste est $a_{p_0}\, b_{q_0}$, qui est donc égal à $c_{p_0+q_0}$. □

Le polynôme C défini par :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ c_k = \sum_{i+j=k} a_i\, b_j .$$

est appelé *produit* de A par B et noté $A \times B$ ou $A\,B$.

On définit ainsi une loi de composition interne appelée *multiplication* sur l'ensemble des polynômes.

Anneau des polynômes

Proposition 2

Muni de l addition et et de la multiplication, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif

ém nstration

- C'est un sous–espace vectoriel, donc un sous–groupe additif, de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- La multiplication des polynômes :
  - est interne,
  - est commutative, car la formule donnant le coefficient générique du produit de deux polynômes est symétrique,
  - est associative, car si A, B et C sont trois polynômes, alors on a, en posant $D = A(BC)$:
  $$d_n = \sum_{i+l=n} a_i \left(\sum_{j+k=l} b_j\, c_k \right) = \sum_{i+j+k=n} a_i\, b_j\, c_k,$$
  et l'expression obtenue étant symétrique en A, B et C, on en déduit :
  $$A(BC) = C(AB)$$
  ce qui, en utilisant la commutativité, prouve :
  $$A(BC) = C(AB) = (AB)C$$
  - possède comme élément neutre le polynôme $(1, 0, 0, \ldots)$,
  - est distributive par rapport à l'addition (évident sur la formule donnant le coefficient générique du produit),

□

Attention L'anneau des polynômes n'est pas un sous–anneau de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, car la multiplication des polynômes n'est pas la multiplication terme à terme des suites.

Notation définitive

En posant $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, on vérifie par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que l'on a :

$$X^k = (\underset{\substack{\uparrow\\0}}{0}, \underset{\substack{\uparrow\\1}}{0}, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow\\k}}{1}, 0, \ldots).$$

On peut alors écrire :

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k.$$

Avec cette notation, on peut réécrire les propriétés vues précédemment.

- Le polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est nul si, et seulement si, tous les a_k sont nuls.
- Si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, alors :

$$A + B = \sum_{k=0}^{\max(n.m)} (a_k + b_k) X^k$$

  où, par convention, les a_k (respectivement les b_k) ne figurant pas dans l'écriture de A (respectivement de B) sont nuls

- Si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, alors :

$$A\,B = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i\, b_j \right) X^k = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i\, b_j\, X^{i+j} \right).$$

Notation On désigne par $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque Dans certains cas, on peut être amené à écrire :

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k.$$

Malgré son apparence, cette dernière somme est une somme finie car il n'y a qu'un nombre fini de coefficients a_k non nuls. Une telle écriture peut parfois s'avérer utile, notamment pour exprimer une somme de polynômes. Si l'on a :

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k,$$

alors :

$$A + B = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) X^k.$$

Définition 2

On appelle :

- *monôme*, tout polynôme du type λX^k,
- *polynôme constant*, tout polynôme du type $(\lambda, 0, 0, \dots) = \lambda X^0$,

avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

On identifie l'élément λ de $\mathbb{K}$ avec le polynôme constant $(\lambda. 0. 0, \dots) = \lambda X^0$ ce qui permet d'écrire :

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 X^0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n.$$

1.2 Degré d'un polynôme

Lorsqu un polynôme A n'est pas nul, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, majorée puisque la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, et admettant donc un plus grand élément.

Définition 3

Soit $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, on définit le *degré* de A, noté $\deg(A)$ ou $\deg A$ par :

$$\deg(A) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} & \text{si } A \neq 0 \\ -\infty & \text{si } A = 0. \end{cases}$$

Remarques

- Un polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est de degré inférieur ou égal à n. Il est de degré n si, et seulement si, $a_n \neq 0$. Dans ce cas le coefficient a_n s appelle le *coefficient dominant* du polynôme.
- Un polynôme (non nul) dont le coefficient dominant est égal à 1 est appelé *polynôme unitaire* ou *normalisé*.

Proposition 3

Étant donnés deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$, on a :

1. $\deg(A+B) \leqslant \max(\deg A, \deg B)$, avec égalité lorsque $\deg A \neq \deg B$
2. $\deg(A\,B) = \deg A + \deg B$.

émonst ati n

1. Si $A = B = 0$, alors $A + B = 0$ et le résultat est évident
Sinon, posons $n = \max(\deg A. \deg B) \in \mathbb{N}$; on peut alors écrire :

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{k=0}^{n} b_k\, X^k,$$

ce qui donne $A + B = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, X^k$ et prouve $\deg(A+B) \leqslant n$.

De plus, le terme de degré n est $a_n + b_n$. Si $\deg A \neq \deg B$, par exemple $\deg A < \deg B$, alors $a_n = 0$ et $b_n \neq 0$, et par suite $a_n + b_n \neq 0$, ce qui prouve que $A + B$ est de degre n.

2. Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $A\,B = 0$ et :

$$\deg(A\,B) = \deg(0) = -\infty = \deg A + \deg B$$

car avec l'extension des opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$:

$$n + (-\infty) = -\infty + n = -\infty.$$

Sinon, soit $p_0 = \deg A$ et $q_0 = \deg B$ Le lemme de la page 706 prouve que ·

- les coefficients de $A\,B$ d'indice strictement supérieur à $p_0 + q_0$ sont nuls, ce qui donne $\deg(A\,B) \leqslant p_0 + q_0$,
- le coefficient de $A\,B$ d'indice $p_0 + q_0$ vaut $a_{p_0}\, b_{q_0}$ qui est donc non nul, puisque c'est le produit de deux éléments non nuls d'un corps. Donc $\deg(A\,B) = p_0 + q_0$. □

Remarques

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathbb{K}[X]$, alors :

$$\deg(\lambda\, A) = \begin{cases} \deg A & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

- Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, alors :

$$\deg(\lambda\, A + \mu\, B) \leqslant \max(\deg A, \deg B)$$

Corollaire 4

L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

émonst ation Il contient le polynôme nul, et il est stable par combinaisons linéaires, puisqu'une combinaison linéaire de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n est de degré inférieur ou égal à n. □

Attention Si $n \geqslant 1$, le sous–espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas un sous–anneau de $\mathbb{K}[X]$ puisque $X^n \times X^n \notin \mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 5

Dans l'anneau $\big(\mathbb{K}[X], +, \times\big)$, on a la propriété :

$$\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2,\ A\,B = 0 \Longrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0).$$

émonstration En effet, la formule $\deg(A\,B) = \deg A + \deg B$ entraîne :

$$(A \neq 0 \quad \text{et} \quad B \neq 0) \Longrightarrow A\,B \neq 0.$$ □

Remarque On dit alors que l'anneau $\big(\mathbb{K}[X], +, \times\big)$ est *intègre* (voir page 1083).

Proposition 6

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0.

é onst ation

- Si A est un polynôme de degre 0, c'est-à-dire une constante non nulle λ, le polynôme constant λ^{-1} est l'inverse de A
- Réciproquement, si A est un polynôme inversible, c'est-à-dire tel qu'il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $A\,B = 1$ alors A et B sont non nuls et l'on a .

$$0 = \deg(1) = \deg(A\,B) = \deg A + \deg B.$$

Comme $\deg A$ et $\deg B$ sont des entiers naturels, on en déduit $\deg A = 0$. □

1.3 Substitution

Fonction polynomiale

Définition 4

Soit $A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

- Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit :

$$A(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\alpha^k = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\alpha^k \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant \deg A.$$

- La fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $x \mapsto A(x)$ est appelée *fonction polynomiale* associée au polynôme A.

Remarque Pour obtenir $A(\alpha)$ on dit que l on substitue α à X ou que l'on remplace X par α.

Proposition 7

Étant donnés deux éléments A et B de $\mathbb{K}[X]$ ainsi que trois scalaires α, λ et μ, on a :

1. $(\lambda A + \mu B)(\alpha) = \lambda A(\alpha) + \mu B(\alpha)$,
2. $(A B)(\alpha) = A(\alpha) B(\alpha)$.

émonstratio La linéarite de $A \mapsto A(\alpha)$ est évidente.

Pour le produit, si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ alors ·

$$A B = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_k b_l X^{k+l}$$

et, d'après la linéarité de l'application $P \mapsto P(\alpha)$:

$$\begin{aligned}(A B)(\alpha) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_k b_l \alpha^{k+l} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k\right)\left(\sum_{l=0}^{m} b_l \alpha^l\right) \\ &= A(\alpha) B(\alpha).\end{aligned}$$

Il faut remarquer que la définition du produit sur $\mathbb{K}[X]$ a justement ete choisie pour avoir ce resultat.

□

Algorithme de Horner

En informatique, pour calculer la valeur en α du polynôme $A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, on utilise habituellement l *algorithme de Horner* consistant à calculer :

$$A(\alpha) = a_0 + (a_1 + (a_2 + \cdots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n \alpha) \alpha) \alpha \cdots) \alpha) \alpha$$

qui nécessite bien moins d opérations (n multiplications) que l'algorithme naïf calculant toutes les puissances de α (qui nécessite $n(n+1)/2$ multiplications).

Cet algorithme s'écrit :

DONNÉES : La liste $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ des coefficients du polynôme
Le scalaire α.

VARIABLES : Le compteur de boucle k le scalaire *Résultat*.

- *Résultat* $\leftarrow 0$
- Pour k allant de n jusqu'à 0 par pas de -1 :
  Résultat $\leftarrow a_k +$ *Résultat* $* \alpha$

RÉSULTAT : *Résultat*.

Exemple avec MAPLE

```
> A:=X^4+3*X^3+2*X^2+X+1;
```

$$A := X^4 + 3X^3 + 2X^2 + X + 1$$

```
> A1:=subs(X=alpha,A);
```

$$A1 := \alpha^4 + 3\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + 1$$

```
> convert(A1,horner,alpha);
```

$$1 + (1 + (2 + (3 + \alpha)\alpha)\alpha)\alpha$$

Exponentiation rapide

L'algorithme de Horner permet de limiter le nombre de multiplications à n pour calculer la valeur d'une fonction polynomiale de degré n. Cependant, pour un monôme, on peut faire encore mieux.

En effet, pour calculer α^n, on peut naïvement effectuer $n-1$ multiplications :

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \times \alpha \times \cdots \times \alpha}_{n \text{ fois}}.$$

Cependant, l'exemple de $\alpha^{1024} = \left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left((\alpha^2)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2$

montre que l'on peut faire beaucoup mieux (ici 10 multiplications au lieu de 1023).

L'algorithme d'exponentiation rapide part de la remarque :

- si $n = 0$, alors $\alpha^n = 1$,
- si $n = 2p$, alors $\alpha^n = (\alpha^p)^2$,
- si $n = 2p+1$, alors $\alpha^n = (\alpha^p)^2 \times \alpha$.

Le calcul de α^n peut donc se faire à l'aide de la fonction (récursive) MAPLE suivante :

```
> puiss:=(alpha,n)->
   if n=0 then
      RETURN(1)
   elif (n mod 2) = 1 then
      RETURN(puiss(alpha iquo(n,2))^2*alpha)
   else
      RETURN(puiss(alpha,iquo(n,2))^2)
   fi:
puiss(2,560);
```

$$\begin{aligned}&377396242482154135224155458098826889091692122\backslash\\&\quad 041644042837620630024562416239214885208\backslash\\&\quad 612672517765876754146837503076384489977\backslash\\&\quad 058462992479263256143425143269604364939\backslash\\&\quad 5326976\end{aligned}$$

Remarques

- Notons M_n le nombre de multiplications (ou d'élévation au carré) effectuées dans cet algorithme lors du calcul de α^n, et montrons par récurrence sur k la propriétés $H_k : 2^{k-1} \leqslant n < 2^k \Longrightarrow k \leqslant M_n \leqslant 2k$.
  - H_1 est évident puisque $M_1 = 2$.
  - Supposons H_k, pour $k \geqslant 1$. Soit $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$
    - ⋆ Si $n = 2p$, on a $2^{k-1} \leqslant p < 2^k$ et donc $k \leqslant M_p \leqslant 2k$.
      On a de plus $M_n = 1 + M_p$, ce qui donne bien $k+1 \leqslant M_n \leqslant 2(k+1)$.
    - ⋆ Si $n = 2p+1$, on a $2^{k-1} \leqslant p + \frac{1}{2} < 2^k$ et comme p est un entier, $2^{k-1} \leqslant p < 2^k$. Donc $k \leqslant M_p \leqslant 2k$.
      On a de plus $M_n = 2 + M_p$ qui donne bien $k+1 \leqslant M_n \leqslant 2(k+1)$.

  D'où H_{k+1}.
- Le nombre de multiplications effectuées est donc équivalent à $\lg n$, où $\lg$ représente le logarithme en base 2.
- Plus précisément, on peut montrer que si l'écriture de n en base 2 comporte k chiffres dont ℓ égaux à 1, alors $M_n = k + \ell$.

Composition des polynômes

Définition 5

Étant donnés $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ on définit :

$$A \circ P = A(P) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P^k = \sum_{k=0}^{n} a_k P^k \quad \text{pour tout } n \geqslant \deg A.$$

Remarques

1. Dans le cas particulier où $P = X$, le polynôme $A(P) = A(X)$ est donc égal à A, c'est pourquoi on utilise aussi bien A que $A(X)$ pour désigner ce polynôme.
2. Si A et P sont non nuls on a $\deg(A \circ P) = \deg(A)\ \deg(P)$.
3. On a des résultats analogues à ceux de la proposition 7 de la page 712 :
$$(\lambda A + \mu B)(P) = \lambda A(P) + \mu B(P)$$
$$(A B)(P) = A(P) B(P)$$
et ils se démontrent de façon similaire.
4. Comme pour le calcul d'une valeur numérique, il est préférable d'utiliser le schéma de Horner pour développer le polynôme $A \circ P$. Pour s'en convaincre il suffit de comparer, sous `MAPLE` (à l'aide de la fonction `time`), les temps d'exécution des lignes suivantes :
```
> A:=expand((1+X)^100):

> expand(subs(X=1+u^2,A)):

> A1:=convert(A,horner,X):

> expand(subs(X=1+u^2,A1)):
```
On trouve sur cet exemple que la conversion au schéma de Horner (dont le temps d'exécution est négligeable) apporte une amélioration approximativement d'un facteur 10 dans le temps de calcul.

Exemples

1. Un polynôme A est *pair* si $A(-X) = A(X)$

Si $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on a $A(-X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{-n} a_n X^n$.

Donc A est pair si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ c'est–à–dire si, et seulement si, A est combinaison linéaire de puissances paires de X.

2. De même un polynôme A est *impair*, c'est–à–dire vérifie $A(-X) = -A(X)$, si, et seulement si, il est combinaison linéaire de puissances impaires de X.

2. Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

2.1 Multiples, diviseurs

Définition 6

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que A *divise* B ou que B est *multiple* de A si $\exists C \in \mathbb{K}[X] \ : \ AC = B$.

On note alors $A \mid B$.

Exemples

1. Le polynôme $(X-1)(X-2)$ divise $(X-1)^2(X-2)(X^2+X+1)$.
2. Le polynôme 0 est divisible par tous les polynômes mais il ne divise que lui-même.
3. Si $A \mid B$ avec B non nul, alors $\deg B \geqslant \deg A$, car on a $B = AC$ avec $C \neq 0$, et donc $\deg B = \deg A + \deg C \geqslant \deg A$.
4. La relation $A \mid B$ est réflexive et transitive, mais elle n'est pas antisymétrique lorsque $\mathbb{K} \neq \{0,1\}$ car si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$, on a par exemple $X \mid \lambda X$ et $\lambda X \mid X$. Ce n'est donc pas une relation d'ordre.

Proposition 8

Étant donnés deux polynômes A et B il est équivalent de dire :

(i) A divise B et B divise A.

(ii) Il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$.

Dans ce cas, A et B sont dits *associés*.

émonstration

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Avec l'hypothèse (i), on peut trouver C_1 et C_2 tels que :

$$B = A\,C_1 \qquad \text{et} \qquad A = B\,C_2$$

et donc $A = A\,C_1\,C_2$.

- Si $A = 0$, alors la relation $B = A\,C_1$ prouve que $B = 0$ et donc toute valeur $\lambda \in \mathbb{K}^*$ convient.
- Si $A \neq 0$, on peut simplifier par A, car $\mathbb{K}[X]$ est intègre, ce qui donne $C_1\,C_2 = 1$
  D'après la proposition 6 de la page 711, on en déduit que C_2 est un polynôme de degre 0, c'est-à-dire une constante non nulle.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Evident. □

Remarque La relation de divisibilité restreinte à l'ensemble des polynômes unitaires est une relation d'ordre. En effet, d'après la proposition précédente, deux polynômes unitaires associés sont égaux, ce qui prouve l'antisymétrie.

2.2 Division euclidienne sur K[X]

Théorème 9

Étant donnés deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$ il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$A = B\,Q + R \qquad \text{avec} \qquad \deg R < \deg B.$$

Q est appelé le *quotient* et R le *reste de la division euclidienne* de A par B.

ém nstr ti n

Unicité. Supposons qu'il existe deux couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) vérifiant :

$$A = B\,Q_1 + R_1 \qquad \text{avec} \qquad \deg R_1 < \deg B.$$
$$A = B\,Q_2 + R_2 \qquad \text{avec} \qquad \deg R_2 < \deg B.$$

On a alors :

$$(Q_1 - Q_2)\,B = R_2 - R_1.$$

Si $Q_1 \neq Q_2$, alors :

$$\deg(R_2 - R_1) = \deg\big((Q_1 - Q_2)\,B\big) = \deg(Q_1 - Q_2) + \deg B \geqslant \deg B$$

et :

$$\deg(R_2 - R_1) \leqslant \max(\deg R_1 . \deg R_2) < \deg B$$

ce qui est contradictoire. Donc $Q_1 = Q_2$ et par suite $R_1 = R_2$.

Existence. $B = \sum_{k=0}^{m} b_k\,X^k$ étant fixé, avec $b_m \neq 0$, demontrons par récurrence sur n la propriété H_n : pour tout polynôme A de degré strictement inférieur à n il existe un couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = B\,Q + R$ avec $\deg R < m$.

- H_m est vraie car si $\deg A < m$, il suffit de prendre $R = A$ et $Q = 0$
- Supposons H_n pour $n \geqslant m$, et démontrons H_{n+1}.

  Si $A \in \mathbb{K}[X]$ est de degré strictement plus petit que $n+1$, alors $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et le polynôme :
  $$A_1 = A - a_n b_m^{-1} X^{n-m} B \qquad (a)$$
  appartient à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et trouver un couple (Q_1, R) tel que :
  $$A_1 = B Q_1 + R \qquad \text{avec} \qquad \deg R < m. \qquad (b)$$
  En posant
  $$Q = Q_1 + a_n b_m^{-1} X^{n-m}$$
  et en utilisant (a) et (b), on a
  $$A = B Q + R \qquad \text{avec} \qquad \deg R < m.$$

□

Exemples

1. Le reste de la division euclidienne de A par $X - \alpha$ est un polynôme de degré strictement inférieur à 1, degré de $X - \alpha$, et donc une constante λ. En désignant par Q le quotient, on a alors $A = (X - \alpha) Q(X) + \lambda$.

   Si l on remplace X par α dans cette dernière relation, les résultats de la proposition 7 de la page 712 donnent $\lambda = A(\alpha)$.
2. Le polynôme B divise A si, et seulement si, le reste de la division de A par B est 0. En effet :
   - si le reste est nul, on a $A = B Q$,
   - si B divise A, il existe un polynôme Q tel que $A = B Q$ et l'unicité de la division euclidienne prouve que Q et 0 sont respectivement les quotient et reste de la division de A par B.
3. En MAPLE, ce sont les fonctions `quo` et `rem` qui permettent de déterminer le quotient et le reste d'une division euclidienne.

```
> A:=X^5+4*X^4+2*X^3+X^2-X-1;
```

$$A := X^5 + 4X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1$$

```
> B:=X^3-2*X+3;
```

$$B := X^3 - 2X + 3$$

```
> quo(A,B,X); rem(A,B,X);
```

$$X^2+4X+4$$

$$6X^2-5X-13$$

Remarque Soit $(A,B)\in\mathbb{R}[X]^2$, avec $B\neq 0$. Effectuons la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{R}[X]$:

$$A=BQ+R \qquad \text{avec} \qquad (Q,R)\in\mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad \deg R<\deg B. \qquad (*)$$

Les polynômes Q et R sont aussi dans $\mathbb{C}[X]$ et la relation $(*)$ ainsi que l'unicité de la division euclidienne montrent que ce sont aussi les quotient et reste de la division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$ de A par B.

En particulier, B divise A dans $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si, il divise A dans $\mathbb{C}[X]$.

Algorithme de la division euclidienne

La démonstration d'existence de la proposition précédente fournit une méthode pour déterminer le quotient et le reste d une division euclidienne. On a l'habitude de poser les calculs comme suit :

$$\begin{array}{lrrrrrr|ll}
A= & X^5 & +4X^4 & +2X^3 & +X^2 & -X & -1 & X^3-2X+3 & =B \\ \cline{8-8}
A_1=A-X^2B= & & 4X^4 & +4X^3 & -2X^2 & -X & -1 & X^2+4X+4 & =Q \\
A_2=A_1-4XB= & & & 4X^3 & +6X^2 & -13X & -1 & & \\
A_3=A_2-4B=R= & & & & 6X^2 & -5X & -13 & &
\end{array}$$

La programmation de la division euclidienne utilise l'algorithme suivant.

DONNEES : Le polynôme A de degré n.
Le polynôme B de degré m et de coefficient dominant $b_m\neq 0$

VARIABLES : Le compteur de boucle k.
Les polynômes Q et R.

- $Q\leftarrow 0$; $R\leftarrow A$
- Pour k allant de $n-m$ jusqu'à 0 par pas de -1 :
  (* *On a* $\deg R\leqslant k+m$ *)
  - $q_k\leftarrow r_{k+m}/b_m$
  - $R\leftarrow R-q_k X^k B$ (* r_{k+m} *est donc nul* *)

RÉSULTAT : (Q,R).

Remarque Si $n < m$, la boucle n'est pas exécutée et alors le résultat est $(0, A)$

3. Racines d'un polynôme

3.1 Racines

Soit A un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 7

Un élément α de $\mathbb{K}$ est *racine* du polynôme A si $A(\alpha) = 0$.

Proposition 10

Un élément α de $\mathbb{K}$ est racine de A si, et seulement si, $(X - \alpha)$ divise A.

Démonstratio Le polynôme $(X-\alpha)$ divise A si, et seulement si, $A(\alpha)$, reste de la division euclidienne de A par $(X - \alpha)$, est nul (cf. exemples 1. et 2. de la page 718). □

Proposition 11

Si α_1, α_2,…,α_p sont p racines distinctes de A, alors A est divisible par $\prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)$.

Démonstration Démontrons par récurrence sur p qu'un polynôme qui admet p racines distinctes α_1, α_2,…, α_p est divisible par $\prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)$.

- C'est vrai pour $p = 1$ d'après la proposition précédente.
- Supposons le résultat vrai pour p et démontrons-le pour $p+1$ Soient α_0, α_1,…, α_p, $p+1$ racines distinctes d'un polynôme A.

  D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un polynôme $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que .

$$A = B_1 \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i).$$

  Comme α_0 est racine de A, on a

$$B_1(\alpha_0) \prod_{i=1}^{p}(\alpha_0 - \alpha_i) = 0,$$

ce qui prouve $B_1(\alpha_0) = 0$ puisque $\prod_{i=1}^{p}(\alpha_0 - \alpha_i) \neq 0$. Il existe donc un polynôme B_2 tel que :

$$B_1 = (X - \alpha_0)\, B_2$$

c'est-à-dire :

$$A = B_2 \prod_{i=0}^{p}(X - \alpha_i).$$

□

Corollaire 12

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.

émonstra ion Si A est un polynôme non nul admettant p racines distinctes α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_p$, la proposition 11 de la page ci-contre montre qu'il est divisible par $\prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)$. On a donc $p \leqslant \deg A$. □

Remarque On utilise souvent le corollaire précédent pour démontrer qu'un polynôme est nul :

- soit en exhibant $n+1$ racines lorsque l'on sait que $\deg A \leqslant n$,
- soit, plus radicalement, en exhibant une infinité de racines de A.

Exemples

1. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on sait (*cf.* page 33) qu'il existe un polynôme A tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(\cos x) = \cos(n\,x).$$

Montrons son unicité. S'il existe deux tels polynômes A et B, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(\cos x) = B(\cos x)$$

et comme la fonction cosinus a pour image $[-1, 1]$:

$$\forall u \in [-1, 1]\ ,\ (A - B)(u) = 0.$$

Le polynôme $A - B$ possède donc une infinité de racines, et par suite $A = B$.

2 La fonction exponentielle complexe n'est pas polynomiale. En effet, s il existait un polynôme $A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ A(z) = e^z$, alors le polynôme $A - 1$ posséderait pour racines tous les complexes de la forme $2ik\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et donc serait nul. On aurait alors $A = 1$ ce qui est impossible puisque, par exemple, $e^{i\pi} = -1$.

Corollaire 13

Si A est de degré n et admet n racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, alors :

$$A = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

où λ est le coefficient dominant de A.

émonstration D'après la proposition 11 de la page 720, il existe un polynôme Q tel que :

$$A = Q \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

Comme les polynômes A et $\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$ sont de même degre n, le polynôme Q est de degré 0 donc $Q = \lambda \in \mathbb{K}^*$ et le coefficient dominant de A est alors λ □

Exemple Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme unitaire $X^n - 1$ possède n racines qui sont les n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. On a donc :

$$X^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} \right) \right).$$

3.2 Identification entre polynôme et fonction polynomiale

Notation Si A est un élément de $\mathbb{K}[X]$, on note $\widetilde{A}$ sa fonction polynomiale associée :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & A(x). \end{array}$$

Proposition 14

L application $A \mapsto \widetilde{A}$ est un morphisme injectif d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, dont l'image s'appelle ensemble des fonctions polynomiales.

émonstration C'est évidemment une application linéaire, donc pour démontrer son injectivité, il suffit de prouver que son noyau est réduit à $\{0\}$.

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\widetilde{A} = 0$ On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \ A(x) = \widetilde{A}(x) = 0$$

et le polynôme A possède comme racines tous les éléments de $\mathbb{K}$, donc une infinité. Par suite $A = 0$. □

Méthode Pour démontrer que deux polynômes sont égaux, il suffit de montrer que leurs fonctions polynomiale coïncident sur $\mathbb{K}$, voire même sur une partie infinie de $\mathbb{K}$.

Remarques

- La démonstration précédente utilise le fait que le corps $\mathbb{K}$, égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$, est infini.
- On sait, d'après la proposition 7 de la page 712, que l'application $A \mapsto \tilde{A}$ est un morphisme d'anneaux. L'ensemble des fonctions polynomiales est donc un anneau isomorphe à $\mathbb{K}[X]$. Il en a donc toutes les propriétés algébriques, et en particulier il est intègre.
- Par conséquent, un produit de deux fonctions polynomiales est nul si, et seulement si, l'une des deux fonctions est nulle, ce résultat étant évidemment faux pour des fonctions quelconques.
- Si l'on définit l'anneau des polynômes à coefficients dans un corps (commutatif) quelconque de la même façon que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tous les résultats précédents subsistent excepté la proposition 14 de la page précédente qui ne reste vraie que dans le cas d'un corps infini.
- Lorsque le corps est fini, si l'on note $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ses éléments, le polynôme $\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$ est non nul puisque de degré n alors que sa fonction polynomiale associée est nulle.

3.3 Racines multiples

Soit A un polynôme non nul.

Définition 8

Étant donnés un scalaire α et un entier naturel p non nul, on dit que α est :

- *racine d'ordre au moins* p de A, si $(X - \alpha)^p \mid A$.
- *racine d'ordre* p de A, si α est racine d'ordre au moins p mais pas $p + 1$. L'entier p est alors appelé *ordre de multiplicité* de la racine α.
- *racine multiple* de A, si α est racine d'ordre au moins 2 de A.

Remarques

- Une racine de A est racine d'ordre au moins 1 de A.

- Si α est une racine d'un polynôme non nul A de degre n, le polynôme $(X-\alpha)^{n+1}$ ne divise pas A, ce qui prouve l'existence d'un plus grand entier p tel que $(X-\alpha)^p$ divise A Comme cet entier est évidemment unique, on peut donc bien définir l ordre de multiplicité de la racine α ; c est un entier inférieur ou égal à n.
- Par extension, on dit que α est racine d'ordre 0 de A si α n'est pas racine de A.
- Les racines d'ordre 1, 2, 3,... sont respectivement appelées *racines simples doubles, triples,...*

Proposition 15

Soient α une racine d ordre au moins p d'un polynôme non nul A, et $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A=(X-\alpha)^p B$.

Alors α est racine d'ordre p du polynôme A si, et seulement si, $B(\alpha) \neq 0$.

Démonstratio Il suffit de démontrer que α est racine de A d'ordre au moins $p+1$ si, et seulement si, $B(\alpha)=0$.

- Si $B(\alpha)=0$, on peut trouver un polynôme B_1 tel que $B(X)=(X-\alpha)\,B_1(X)$, et donc :
$$A(X)=(X-\alpha)^{p+1}\,B_1(X)$$
ce qui signifie que α est une racine de A d'ordre au moins $p+1$
- Réciproquement si α est racine de A, d'ordre au moins $p+1$, alors $(X-\alpha)^{p+1}$ divise A et on peut trouver un polynôme $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$(X-\alpha)^{p+1}\,B_1(X)=A(X)=(X-\alpha)^p\,B(X).$$
L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre et $(X-\alpha)^p$ n'étant pas le polynôme nul, on en déduit $(X-\alpha)B_1(X)=B(X)$ et donc $B(\alpha)=0$ □

Exemple Une racine simple (racine d'ordre 1) du polynôme A est donc caractérisée par :
$$\exists B \in \mathbb{K}[X] \,:\, A(X)=(X-\alpha)\,B(X) \qquad \text{avec} \qquad B(\alpha)\neq 0$$

Proposition 16

Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Si $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de A d ordre respectivement au moins égal à $r_1, r_2,\ldots, r_p$, alors A est divisible par $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{r_i}$.

émonstration

- Si $p = 1$ la propriété est vraie par définition de l'ordre d'une racine
- Supposons la propriété vraie au rang p et considérons $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $p+1$ racines distinctes de A d'ordre respectivement au moins égal à $r_0, r_1, \ldots, r_p$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un polynôme $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$A = B_1 \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{r_i}.$$

  Soit r l'unique entier (éventuellement nul) tel que :

$$B_1 = (X - \alpha_0)^r B \qquad \text{avec} \qquad B(\alpha_0) \neq 0.$$

  En posant $B_2 = B \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{r_i}$, on a :

$$A = (X - \alpha_0)^r B_2 \qquad \text{avec} \qquad B_2(\alpha_0) \neq 0.$$

  Donc α_0 est racine de A d'ordre r, ce qui prouve $r \geqslant r_0$. Par suite, le polynôme $\prod_{i=0}^{p} (X - \alpha_i)^{r_i}$ divise $(X - \alpha_0)^r \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{r_i}$ et donc aussi A

  On a ainsi montré la propriété au rang $p + 1$. □

Lorsque l'on dénombre les racines d'un polynôme, on peut :

- soit compter le nombre de racines distinctes,
- soit compter chaque racine avec (c'est–à–dire autant de fois que) son ordre de multiplicité ; dans ce cas, une racine d ordre r compte comme r racines.

Exemple Le polynôme $(X - 1)(X + 1)^2(X - 2)^3$ possède :

- 3 racines distinctes : $-1, 1, 2$
- 6 racines comptées avec leur ordre de multiplicité : $-1, -1, 1, 2, 2, 2$.

De même que pour les racines distinctes, on a les deux résultats suivants, qui se démontrent de manière analogue :

Corollaire 17

Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

Corollaire 18

Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de A d'ordre respectivement égal à $r_1, r_2, \ldots, r_p$ et si $\deg A = \sum_{k=1}^{p} r_k$, alors :

$$A = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{r_i}$$

où λ est le coefficient dominant de A.

3.4 Polynômes scindés, fonctions symétriques élémentaires

Définition 9

Un polynôme A non nul est *scindé* sur $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire sous la forme :

$$A = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

où $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires.

Exemples

1. Un polynôme de degré n qui admet n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
2. Un polynôme de degré n qui admet n racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur ordre de multiplicité est scindé sur $\mathbb{K}$.
3. Réciproquement, si $A = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors les racines de A dans $\mathbb{K}$ sont les α_i, et il y en a n comptées avec leur ordre de multiplicité.

Soit $A = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ avec $a_n \neq 0$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} A &= a_n (X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) \\ &= a_n \big(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \cdots + (-1)^p \sigma_p X^{n-p} + \cdots + (-1)^n \sigma_n\big) \end{aligned}$$

avec :

$$\sigma_p = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$$

et en particulier :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i\, x_j = x_1\, x_2 + x_1\, x_3 + \cdots + x_{n-1}\, x_n$$

$$\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1\, x_2 \ldots x_n.$$

Définition 10

Les quantités σ_i sont appelées *fonctions symétriques élémentaires* des racines du polynôme A.

Exemples

1. Pour $n = 2$, si :

$$A = a_2\, X^2 + a_1\, X + a_0 = a_2(X - x_1)(X - x_2),$$

il y a deux fonctions symétriques élémentaires :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

2. Pour $n = 3$, si :

$$A = a_3\, X^3 + a_2\, X^2 + a_1\, X + a_0 = a_3(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3),$$

il y a trois fonctions symétriques élémentaires :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

Plus généralement, les égalités :

$$\begin{aligned} A &= a_n\, X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_0 \\ &= a_n\big(X^n - \sigma_1\, X^{n-1} + \sigma_2\, X^{n-2} - \cdots + (-1)^p \sigma_p\, X^{n-p} + \cdots + (-1)^n \sigma_n\big) \end{aligned}$$

permettent d'exprimer les fonctions symétriques élémentaires des racines du polynôme A en fonction des coefficients de A

$\sigma_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$	$\sigma_2 = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$	$\cdots$	$\sigma_r = (-1)^r \dfrac{a_{n-r}}{a_n}$	$\cdots$	$\sigma_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

Il faut savoir que toute expression polynomiale symétrique en les racines d'un polynôme peut s'exprimer de façon polynomiale à l'aide des fonctions symétriques élémentaires et donc des coefficients du polynôme.

Exemples

1. Si x_1, x_2, x_3 sont les trois racines complexes d'une équation $x^3 + px + q = 0$ on a :
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + x_2\,x_3) \\ &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2p. \end{aligned}$$

2. Si x_1, x_2, x_3 sont les trois racines complexes d'une équation $x^3 + px + q = 0$ avec $q \neq 0$, le calcul de :
$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$
est plus simple si l'on commence par écrire :
$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1\,x_2 \\ &= x_3^2 + 4\frac{q}{x_3} \\ &= \frac{x_3^3 + 4q}{x_3} \\ &= \frac{-px_3 + 3q}{x_3}. \end{aligned}$$
Par suite :
$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{-px_1 + 3q}{x_1}\right)\left(\frac{-px_2 + 3q}{x_2}\right)\left(\frac{-px_3 + 3q}{x_3}\right) \\ &= \frac{-p^3\sigma_3 + 3qp^2\sigma_2 - 9q^2p\sigma_1 + 27q^3}{\sigma_3} \\ &= -(4p^3 + 27q^2). \end{aligned}$$
On en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^3 + pX + q$ admette une racine multiple est $4p^3 + 27q^2 = 0$.

On peut noter que cette condition, établie pour $q \neq 0$, reste clairement vraie lorsque $q = 0$.

3. Déterminer x, y et z vérifiant :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

- Soit (x, y, z) un triplet solution du système. En désignant par $t^3 + a\,t^2 + b\,t + c$ le polynôme unitaire ayant pour racines x, y et z, on a :

  $$\begin{cases} 2 = x + y + z = -a \\ 14 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2b \\ 20 = x^3 + y^3 + z^3 = -14a - 2b - 3c \end{cases}$$

  puisque $x^3 + y^3 + z^3 = -a(x^2 + y^2 + z^2) - b(x + y + z) - 3c$.

  La résolution en (a, b, c) du système donne :

  $$a = -2\,,\ b = -5\,,\ c = +6.$$

  Comme $t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = (t-1)(t+2)(t-3)$, le triplet cherché est, à l'ordre près, égal à $(-2, 1, 3)$.

- Réciproquement il est immédiat de vérifier que $(-2, 1, 3)$, et donc tout triplet obtenu par permutation de $(-2, 1, 3)$, est solution du système.

4. Dérivation des polynômes

MPSI 4.1 Polynôme dérive

Définition 11

Pour $A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit A', le *polynôme dérivé* de A, par :

$$A' = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, X^{k-1} \quad \text{pour tout } n \geqslant \deg A.$$

Remarque Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a de façon évidente $(\widetilde{A})' = \widetilde{A'}$ et l'identification entre polynôme et fonction polynôme permet de transférer à cette dérivation formelle les résultats que l'on a démontrés sur les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ Toutefois il est nécessaire de justifier les résultats correspondants lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. C'est l'objet de ce qui suit.

Proposition 19

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$.

(1) Si $\deg A > 0$ alors $\deg(A') = \deg(A) - 1$.

(2) Le polynôme A est constant si, et seulement si, $A' = 0$.

émonstration

(1) Supposons $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $\deg A = n > 0$.

Comme $A' = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, X^{k-1}$ avec $n\, a_n \neq 0$, on en déduit $\deg A = n - 1$.

(2) Si $A = a_0$ alors $A' = 0$.

Si $\deg A > 0$, alors d'après (1) on a $\deg(A') \geqslant 0$ et donc $A' \neq 0$. □

Proposition 20 (Linéarité de la dérivation)

Étant donnés deux éléments A et B de $\mathbb{K}[X]$ ainsi que deux scalaires λ et μ, on a :

$$(\lambda\, A + \mu\, B)' = \lambda\, A' + \mu\, B'.$$

émonstratio Évident d'après la définition. □

Proposition 21

Étant donnés deux éléments A et B de $\mathbb{K}[X]$, on a :

$$(A\, B)' = A'B + A\, B'.$$

Demonstratio Si $A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, X^j$ et $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, X^k$, on a :

$$A\, B = \sum_{j,k} a_j\, b_k\, X^{j+k}.$$

La linéarité de la dérivation des polynômes nous donne :

$$(A\, B)' = \sum_{j,k} a_j\, b_k\, (X^{j+k})'.$$

D'autre part les relations $A' = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, (X^j)'$ et $B' = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, (X^k)'$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} A'B + A\, B' &= \sum_{j,k} a_j\, b_k (X^j)' X^k + \sum_{j,k} a_j\, b_k\, X^j (X^k)' \\ &= \sum_{j,k} a_j\, b_k \big((X^j)' X^k + X^j (X^k)'\big). \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier, pour tout couple $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, la relation :

$$(X^{j+k})' = (X^j)'X^k + X^j(X^k)'.$$

C'est évident si $j = 0$ ou $k = 0$; si $j \neq 0$ et $k \neq 0$, on a :

$$(X^{j+k})' = (j+k)\,X^{j+k-1} = j\,X^{j-1}\,X^k + X^j\,k\,X^{k-1} = (X^j)'\,X^k + X^j\,(X^k)'. \quad \square$$

4.2 Dérivées successives, formule de Taylor

Définition 12

Pour $r \in \mathbb{N}$, on définit, par récurrence, le *polynôme dérivé d'ordre* r :

$$A^{(0)} = A \qquad \text{et} \qquad \forall r \geqslant 0,\ A^{(r+1)} = \left(A^{(r)}\right)'.$$

Remarque Pour $r \in \mathbb{N}$, l'application $A \mapsto A^{(r)}$ est linéaire puisque c'est l'itérée $r^{\text{ème}}$ de la dérivation.

Exemple Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$(X^n)^{(p)} = n\,(n-1)\,\ldots(n-p+1)\,X^{n-p} = p!\binom{n}{p}X^{n-p}.$$

Proposition 22 (Formule de Leibniz)

Si A et B sont deux polynômes on a :

$$(A\,B)^{(r)} = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}A^{(k)}\,B^{(r-k)}.$$

émonstrat'on Cette formule se démontre par récurrence de la même façon que pour les fonctions dérivables, en utilisant le résultat :

$$\left(A^{(k)}\,B^{(r-k)}\right)' = A^{(k+1)}\,B^{(r-k)} + A^{(k)}\,B^{(r-k+1)}.$$

$\square$

Proposition 23 (Formule de Taylor)

Étant donnés $A \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$A(X) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}\,(X-\alpha)^p,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$A(\alpha+X) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}\,X^p.$$

Remarque Malgre les apparences, la somme $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}(X-\alpha)^p$ est finie car, pour un polynôme A fixé, tous les polynômes dérivés $A^{(p)}$ sont nuls dès que $p > \deg A$.

Démonstratio L'application $\varphi : A \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}(X-\alpha)^p$ est manifestement linéaire

Pour démontrer $\forall A \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi(A) = A$, il suffit de le montrer pour les polynômes X^n puisque tout élément de $\mathbf{K}[X]$ est combinaison linéaire de ces derniers.

Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(X^n) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(X^n)^{(p)}(\alpha)}{p!}(X-\alpha)^p \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{(X^n)^{(p)}(\alpha)}{p!}(X-\alpha)^p \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \alpha^{n-p}(X-\alpha)^p = X^n.\end{aligned}$$

□

4.3 Caractérisation de l'ordre d'une racine

Proposition 24

Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{K}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre r de A alors α est racine d'ordre $r-1$ du polynôme dérivé A'.

Démonstratio Soit α une racine d'ordre r de $A \in \mathbf{K}[X]$. On peut écrire :

$$A(X) = (X-\alpha)^r B(X) \qquad \text{avec} \qquad B(\alpha) \neq 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned}A'(X) &= (X-\alpha)^{r-1}\big(r\,B(X) + (X-\alpha)\,B'(X)\big) \\ &= (X-\alpha)^{r-1}\,B_1(X)\end{aligned}$$

avec $B_1(\alpha) = r\,B(\alpha) \neq 0$, ce qui prouve le résultat □

Remarque Le résultat est valable même si $r = 1$, puisqu'on a convenu qu'un scalaire qui n'est pas racine de A est racine d'ordre 0 de A.

Proposition 25

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^*$, il est équivalent de dire :

(i) α est racine d'ordre r de A

(ii) $A(\alpha) = A'(\alpha) = \cdots = A^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $A^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

ém stration

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Soit α une racine d'ordre r de A. D'après la proposition précédente, pour $k \in [\![0, r]\!]$, le scalaire α est racine d'ordre $r-k$ de $A^{(k)}$.

Donc α est racine des polynômes A, A',..., $A^{(r-1)}$ et α est racine d'ordre 0 de $A^{(r)}$, c'est-à-dire n'est pas racine de $A^{(r)}$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$. En utilisant la formule de Taylor, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A(X) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}(X-\alpha)^p \\ &= \sum_{p=r}^{\infty} \frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}(X-\alpha)^p \\ &= (X-\alpha)^r \sum_{p=r}^{\infty} \frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}(X-\alpha)^{p-r} \\ &= (X-\alpha)^r B(X) \end{aligned}$$

avec $B(X) = \sum_{p=r}^{\infty} \frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}(X-\alpha)^{p-r}$ et donc $B(\alpha) = \frac{A^{(r)}(\alpha)}{r!} \neq 0$, ce qui prouve que α est racine d'ordre r de A. □

Corollaire 26

Soit A un polynôme. Un scalaire α est racine multiple de A si, et seulement si, $A(\alpha) = A'(\alpha) = 0$. MPSI

5. Étude de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

5.1 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 27 (Théorème de d'Alembert)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$

émonstration Voir en annexe page 747. □

Corollaire 28

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Démonstratio Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les racines (complexes) distinctes de A et par $r_1, r_2, \ldots, r_p$ leurs ordres respectifs D'après la proposition 16 de la page 724 il existe un polynôme Q tel que :

$$A = \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k} Q.$$

Si Q est de degré non nul, il admet au moins une racine complexe qui est alors une racine α_j de A, et donc $(X - \alpha_j)^{r_j+1}$ divise A, ce qui contredit la définition de r_j.
Par suite Q est une constante λ et on a :

$$A = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k}$$

où λ est évidemment le coefficient dominant de A □

Remarques

1. Ce résultat est évidemment faux dans $\mathbb{R}[X]$, puisque par exemple X^2+1 n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Cependant, tout polynôme à coefficients réels est aussi un polynôme à coefficients complexes et par suite est scindé sur $\mathbb{C}$
2. La démonstration précédente montre que tout polynôme A dont les racines (complexes) distinctes sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ d'ordres respectifs $r_1, r_2, \ldots, r_p$ s'écrit :
$$A = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k}.$$
3. Une telle factorisation est unique à une permutation près des facteurs, puisque l'ensemble des racines de A est alors $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$, chaque entier r_k étant l'ordre de la racine α_k, et que λ est égal au coefficient dominant du polynôme A.

5.2 Conjugaison

Si $A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients complexes, on appelle conjugué de A, le polynôme $\overline{A} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \overline{a}_k X^k$. Par exemple $\overline{X} = X$

Les propriétés de la conjugaison dans $\mathbb{C}$ nous donnent immédiatement pour $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$:

- $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ et $\overline{A\,B} = \overline{A}\,\overline{B}$,

- $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\overline{A(\alpha)} = \overline{A}(\overline{\alpha})$,
- $A \in \mathbb{R}[X] \iff \overline{A} = A$.

Lemme

Étant donnés $A \in \mathbb{C}[X]$ et $r \in \mathbb{N}$, un complexe α est racine de A d ordre r si, et seulement si, $\overline{\alpha}$ est racine de $\overline{A}$ d'ordre r.

em ns atio Le complexe α est racine d'ordre r de A si, et seulement si, l'on a :

$$A(\alpha) = A'(\alpha) = \cdots = A^{(r-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad A^{(r)}(\alpha) \neq 0$$

c'est-à-dire en conjuguant :

$$\overline{A}(\overline{\alpha}) = \overline{A'}(\overline{\alpha}) = \cdots = \overline{A^{(r-1)}}(\overline{\alpha}) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{A^{(r)}}(\overline{\alpha}) \neq 0$$

Le résultat s'ensuit, puisque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \overline{A}^{(k)} = \overline{A^{(k)}}.$$

□

Proposition 29

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. Si un complexe α est racine de A, alors $\overline{\alpha}$ est racine de A au même ordre de multiplicité.

5.3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 30

Tout polynôme non nul $A \in \mathbb{R}[X]$, peut s'écrire sous la forme :

$$A = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^{q} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{s_k}$$

où p et q sont deux entiers naturels, λ et les α_k, β_k et γ_k des réels vérifiant $\forall k \in [\![1, q]\!]$, $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$, et les r_k et s_k des entiers naturels non nuls.

émonstratio Puisque A est à coefficients réels, on sait que si ω est une racine complexe non réelle de A d'ordre s, alors $\overline{\omega}$ est aussi racine d'ordre s. Comme A est scindé sur $\mathbb{C}$, il s'écrit donc :

$$A = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^{q} (X - \omega_k)^{s_k} \prod_{k=1}^{q} (X - \overline{\omega}_k)^{s_k}$$

où λ est le coefficient dominant de A, donc réel, les ω_k et $\overline{\omega}_k$ sont les racines non réelles et les α_k les racines réelles de A.

Le résultat s'ensuit, puisque :

$$(X-\omega_k)\,(X-\overline{\omega}_k) = (X^2+\beta_k\,X+\gamma_k) \in \mathbb{R}[X]$$

avec $\beta_k = -\omega_k - \overline{\omega}_k = -2\,\mathrm{Re}(\omega_k) \in \mathbb{R}$ et $\gamma_k = \omega_k\,\overline{\omega}_k = |\omega_k|^2 \in \mathbb{R}$
Ce polynôme n'ayant pas de racine réelle, son discriminant $\Delta = \beta_k^2 - 4\gamma_k$ est strictement négatif □

Exemples

1. Pour décomposer X^4+1, on peut écrire :
$$\begin{aligned} X^4+1 &= (X^2+1)^2 - 2X^2 \\ &= (X^2+\sqrt{2}\,X+1)(X^2-\sqrt{2}\,X+1). \end{aligned}$$
Comme X^4+1 n'a pas de racines réelles, ces deux polynômes du second degré n'ont pas de racines réelles, et donc leur discriminant est strictement négatif.

2. Décomposition de X^8-1 :
$$\begin{aligned} X^8-1 &= (X^4-1)(X^4+1) \\ &= (X^2-1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1) \\ &= (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1). \end{aligned}$$

3. Pour décomposer X^5+1, on commence par le décomposer dans $\mathbb{C}[X]$:
$$X^5+1 = \left(X-e^{\frac{i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{5}}\right)(X+1)\left(X-e^{\frac{7i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{\frac{9i\pi}{5}}\right)$$
puis l'on regroupe les termes conjugués :
$$\begin{aligned} X^5+1 &= (X+1)\left((X-e^{\frac{i\pi}{5}})(X-e^{\frac{9i\pi}{5}})\right)\left((X-e^{\frac{3i\pi}{5}})(X-e^{\frac{7i\pi}{5}})\right) \\ &= (X+1)\left(X^2-2X\cos(\tfrac{\pi}{5})+1\right)\left(X^2-2X\cos(\tfrac{3\pi}{5})+1\right). \end{aligned}$$

MPSI

6. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM)

6.1 Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide

Proposition 31

Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $B \neq 0$. Si Q et R sont les quotient et reste de la division euclidienne de A par B, alors les diviseurs communs à A et B sont les mêmes que les diviseurs communs à B et R.

Démonstration Conséquence des égalites $A = B\,Q+R$ et $R = A - B\,Q$ □

Proposition 32

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$. Il existe un unique polynôme D nul ou unitaire dont les diviseurs sont les diviseurs communs à A et B c'est–à–dire tel que l'on ait :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \ (P \mid A \quad \text{et} \quad P \mid B) \Longleftrightarrow P \mid D.$$

De plus, il existe deux polynômes U et V tels que $A\,U + B\,V = D$.

- Le polynôme D est appelé *PGCD* de A et B et noté $A \wedge B$.
- Le couple (U, V) est un *couple de coefficients de Bézout* de A et B

ém nst ati n

Unicité Si D_1 et D_2 repondent au problème, alors D_1 divise A et B et donc il divise D_2. Par symétrie on a aussi $D_2 \mid D_1$, ce qui prouve que D_1 et D_2 sont associés.

Si l'un est nul, l'autre aussi et sinon puisqu'ils sont unitaires, ils sont égaux.

Existence. Démontrons par récurrence sur n que si $\deg B < n$, alors pour tout A il existe un polynôme D dont les diviseurs sont les diviseurs communs à A et B, ainsi que U et V tels que $A\,U + B\,V = D$.

- Si $n = 0$, alors $B = 0$ et il suffit de prendre $D = A$, $U = 1$ et $V = 0$
- Supposons le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$ Soient B de degré strictement plus petit que $n + 1$ et A quelconque.

  Si $\deg B < n$, l'hypothèse de recurrence donne immediatement le résultat. Sinon, B est non nul ; soient respectivement Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de A par B. Comme $\deg R < \deg B$, on a $\deg R < n$ et l'hypothèse de récurrence nous donne l'existence d'un polynôme D dont les diviseurs sont les diviseurs communs à B et R, ainsi que U_1 et V_1 tels que $B\,U_1 + R\,V_1 = D$.

  D'après la proposition 31 de la page précédente, les diviseurs communs à A et B sont les mêmes que ceux communs à B et R, et donc sont les diviseurs de D D'autre part, la relation $B\,U_1 + R\,V_1 = D$ donne $B\,U_1 + (A - B\,Q)\,V_1 = D$. Le triplet $(D, V_1, U_1 - Q\,V_1)$ est donc solution.

En divisant D, U et V par le coefficient dominant de D, si $D \neq 0$, on obtient bien un polynôme répondant au problème □

Remarques

- Le PGCD de A et B est le plus grand des diviseurs de A et B au sens de la divisibilité.
- Le PGCD de A et B est nul si, et seulement si, $A = B = 0$.
- Il n'y a pas unicité des polynômes U et V, puisque si (U_0, V_0) est un couple de coefficients de Bezout de A et B, alors il en est de même du couple $(U_0 + Q\,B, V_0 - Q\,A)$ pour tout polynôme Q (voir la proposition 43 de la page 742 pour un résultat d'unicité).

- Si A et B sont dans $\mathbb{R}[X]$, on déduit de la remarque de la page 719 que le PGCD de A et B est le même en travaillant dans $\mathbb{R}[X]$ que celui obtenu dans $\mathbb{C}[X]$.
- Comme pour le cas des entiers, le calcul du PGCD est basé sur l'algorithme d'Euclide. En remontant l'algorithme on peut alors trouver un couple de coefficients de Bézout. Mais on peut aussi utiliser l'algorithme suivant (même démonstration que dans le cas des entiers) :

DONNÉES : les polynômes A et B.

VARIABLES : U_0, V_0, U_1, V_1, Q et λ.

- $(U_0, V_0) \leftarrow (1, 0)$
- $(U_1, V_1) \leftarrow (0, 1)$
- `tant que` $B \neq 0$
  - $Q \leftarrow$ `quotient de la division de` A `par` B
  - $(A, B) \leftarrow (B, A - Q\,B)$
  - $(U_0, U_1) \leftarrow (U_1, U_0 - Q\,U_1)$
  - $(V_0, V_1) \leftarrow (V_1, V_0 - Q\,V_1)$
- `si` $A \neq 0$ `:`
  - $\lambda \leftarrow$ `coefficient dominant de` A
  - $A \leftarrow A/\lambda \quad U_0 \leftarrow U_0/\lambda, \quad V_0 \leftarrow V_0/\lambda$

RÉSULTAT : (A, U_0, V_0).

Exemple En MAPLE c'est la fonction gcd qui calcule le PGCD de deux polynômes :

```
> gcd(1+X+X^2+X^3,1+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6);
```

$$X^2 + 1$$

6.2 Plus petit commun multiple

Proposition 33

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$. Il existe un unique polynôme M nul ou unitaire dont les multiples sont les multiples communs à A et B c'est–à–dire tel que l'on ait :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \ (A \mid P \quad \text{et} \quad B \mid P) \Longleftrightarrow M \mid P$$

Ce polynôme est appelé *PPCM* de A et B et il est noté $A \vee B$.

émonstration

Unicité. De même que pour le PGCD, si M_1 et M_2 sont deux tels polynômes alors ils sont associés, donc égaux.

Existence. Si $A = 0$ ou $B = 0$, il suffit de prendre $M = 0$. Supposons donc $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Il existe alors des multiples non nuls communs à A et B (par exemple AB). Prenons M un multiple commun non nul de degré minimal, polynôme que l'on peut supposer unitaire.

- Comme M est un multiple de A et B, ses multiples sont aussi multiples de A et B
- Réciproquement, soit P un multiple commun à A et B. En effectuant la division euclidienne de P par M on obtient $P = M\,Q + R$, avec $\deg R < \deg M$.
  Alors, $R = P - M\,Q$ est un multiple de A et de B. Comme il est de degré strictement plus petit que celui de M, et que M a été choisi de degré minimal, on en deduit $R = 0$. Donc $P = M\,Q$ est un multiple de M. □

Remarque Le PPCM de A et B est donc le plus petit, au sens de la divisibilité, des multiples communs à A et à B.

6.3 Polynômes premiers entre eux

Définition 13

Deux polynômes A et B sont *premiers entre eux* si $A \wedge B = 1$, c'est–à–dire si les seuls diviseurs communs à A et B sont les polynômes de degré 0

Exemples

1. Soient a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$. Si p et q sont deux entiers naturels, les polynômes $A = (X-a)^p$ et $B = (X-b)^q$ sont premiers entre eux puisque les diviseurs unitaires de A sont les polynômes $(X-a)^k$, avec $k \leqslant p$, et que parmi eux, seul 1 divise B.
2. Pour $(a_1, a_2, \ldots, a_p) \in \mathbb{K}^p$, le polynôme $(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_p)$ est premier avec tout polynôme n'admettant aucun a_i pour racine. En effet, les diviseurs unitaires de A sont les polynômes de la forme $\prod_{i \in I}(X-a_i)$, avec $I \subset [\![1,p]\!]$ et aucun d'eux, hormis 1, ne divise B puisque A et B n'ont pas de racines communes.
3. Si $A = 0$, alors A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, le polynôme B est constant non nul.

Proposition 34 (Identité de Bézout)

Les polynômes A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A\,U + B\,V = 1$.

émonstration

- Si A et B sont premiers entre eux, alors $A \wedge B = 1$ et, d'après la proposition 32 de la page 737, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A\,U + B\,V = A \wedge B = 1$

- S'il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$, alors tout diviseur commun à A et B divise $AU + BV$ donc est de degré 0. On en déduit que A et B sont premiers entre eux. □

6.4 Propriétés du PGCD et du PPCM

Soient A et B deux polynômes.

Proposition 35

Si $A = PA_1$ et $B = PB_1$ avec $(P, A_1, B_1) \in \mathbb{K}[X]^3$ et P unitaire alors :

$$A \wedge B = (A_1 \wedge B_1)\,P \qquad \text{et} \qquad A \vee B = (A_1 \vee B_1)\,P.$$

émo stration

- Soient $D = A \wedge B$ et $D_1 = A_1 \wedge B_1$.
  - Comme $D_1 \mid A_1$ et $D_1 \mid B_1$, on a $PD_1 \mid PA_1 = A$ et $PD_1 \mid PB_1 = B$. Donc $PD_1 \mid D$.
  - On peut alors écrire $D = PD_1R = PQ$ avec $D_1 \mid Q$. Par suite, on a :
  $$PQ = D \mid A = PA_1$$
  et de même $PQ \mid PB_1$ ce qui prouve, puisque $P \neq 0$, que Q divise A_1 et B_1 et donc leur PGCD D_1. On a ainsi $D = PQ \mid PD_1$.

  En conclusion D et PD_1 sont associés, et comme ils sont unitaires (ou nuls), on en déduit qu'ils sont égaux.
- Soient $M = A \vee B$ et $M_1 = A_1 \vee B_1$
  - Comme $A_1 \mid M_1$ et $B_1 \mid M_1$, on a $A = PA_1 \mid PM_1$ et $B = PB_1 \mid PM_1$. Donc PM_1 est un multiple commun à A et B, et par suite $M \mid PM_1$.
  - Puisque M est un multiple de $A = PA_1$, on peut écrire $M = PQ$. On a alors $PA_1 \mid PQ$ et $PB_1 \mid PQ$ ce qui donne, puisque $P \neq 0$, $A_1 \mid Q$ et $B_1 \mid Q$ Donc $M_1 \mid Q$ ce qui prouve $PM_1 \mid PQ = M$.

  En conclusion $M = PM_1$, puisque ce sont deux polynômes unitaires (ou nuls) associés. □

Proposition 36

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$. Il existe deux polynômes A_1 et B_1 premiers entre eux tels que : $\quad A = DA_1 \quad$ et $\quad B = DB_1 \qquad$ avec $\qquad D = A \wedge B.$

émonstratio

- Si $A = B = 0$, on a $D = 0$ et il suffit de prendre $A_1 = B_1 = 1$.
- Sinon, comme D divise A et B, on peut trouver A_1 et B_1 tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$. La proposition précédente nous donne alors :
$$D = A \wedge B = (A_1 \wedge B_1)\,D$$
ce qui prouve que A_1 et B_1 sont premiers entre eux puisque $D \neq 0$. □

6.5 Théorème de Gauss

Théorème 37

Étant donnés trois polynômes A, B et C, on a :

$$(A \wedge B = 1 \quad \text{et} \quad A \mid BC) \Longrightarrow A \mid C.$$

ém nst ati Supposons $A \wedge B = 1$ et $A \mid BC$. D'après l'identité de Bézout, il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$ ce qui implique $ACU + BCV = C$
On a alors $A \mid ACU + BCV = C$. □

Corollaire 38

Si A et B sont deux polynômes premiers entre eux, alors $A \vee B$ et AB sont associés.

émonst atio Il est évident que les multiples de AB sont des multiples communs à A et B.
Réciproquement, supposons $A \mid P$ et $B \mid P$; il existe donc un polynôme Q tel que $P = BQ$
Comme A divise P et qu'il est premier avec B, on en déduit d'après le théorème de Gauss que A divise Q. Il existe donc un polynôme R tel que $Q = AR$, ce qui donne $P = ABR$.
Les multiples communs à A et à B sont donc les multiples de AB, ce qui prouve le résultat □

Corollaire 39

Si $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, les polynômes AB et $(A \wedge B)(A \vee B)$ sont associés.

émo st atio Le résultat étant évident si $AB = 0$, on peut supposer A et B non nuls, et unitaires quitte à les diviser par leurs coefficients dominants.
Soit $D = A \wedge B$. Prenons A_1 et B_1 tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$ et $A_1 \wedge B_1 = 1$.
Comme A_1 et B_1 sont unitaires et premiers entre eux, on a $A_1 \vee B_1 = A_1 B_1$
Alors :

$$A \vee B = D(A_1 \vee B_1) = D A_1 B_1$$

et par suite $D(A \vee B) = AB$. □

Proposition 40

Étant donnés trois polynômes A, B et C, on a :

$$(A \wedge B = 1 \quad \text{et} \quad A \wedge C = 1) \Longleftrightarrow A \wedge (BC) = 1.$$

émonstration

- Supposons $A \wedge B = A \wedge C = 1$ Il existe donc des polynômes U_1, V_1, U_2 et V_2 tels que :

$$A\,U_1 + B\,V_1 = 1$$
$$A\,U_2 + C\,V_2 = 1$$

En multipliant ces deux égalités, on obtient une relation du type $A\,U + (B\,C)\,V = 1$, ce qui prouve que A et $B\,C$ sont premiers entre eux.

- La réciproque est évidente, puisque $A \wedge B$ et $A \wedge C$ sont des diviseurs communs à A et $B\,C$.

□

Les propositions 38 et 40 se généralisent facilement par récurrence à des produits quelconques :

Proposition 41

Si des polynômes premiers entre eux deux à deux divisent un polynôme A, alors leur produit divise A.

Proposition 42

Un produit est premier avec A si, et seulement si, chacun de ses facteurs est premier avec A.

Exemples

On peut ainsi retrouver plus rapidement des résultats déjà connus.

1. Si a et b sont deux scalaires distincts, les polynômes $X - a$ et $X - b$ sont premiers entre eux, comme le prouve l'identité de Bézout $\dfrac{X-a}{b-a} + \dfrac{X-b}{a-b} = 1$. On en déduit, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, que $(X-a)^p$ et $(X-b)^q$ sont premiers entre eux.
2. Soit A un polynôme admettant pour racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ d'ordres respectifs $r_1, r_2, \ldots, r_p$. Par définition, les polynômes $(X - \alpha_i)^{r_i}$ divisent A, et comme ils sont premiers entre eux deux à deux, leur produit divise A.

Proposition 43

Étant donnés deux polynômes non constants A et B premiers entre eux, il existe un unique couple de polynômes (U_0, V_0) tel que :

$$A\,U_0 + B\,V_0 = 1 \qquad \text{avec} \qquad \deg U_0 < \deg B \quad \text{et} \quad \deg V_0 < \deg A.$$

émonstration

Unicité. Si (U_1, V_1) et (U_2, V_2) sont deux tels couples, on a :

$$(U_1 - U_2)\,A = (V_2 - V_1)\,B.$$

Le polynôme A divise donc $(V_2 - V_1)\,B$, et comme $A \wedge B = 1$, le théorème de Gauss entraîne $A \mid (V_2 - V_1)$.

Le polynôme $V_2 - V_1$ est alors un multiple de A de degré strictement inférieur à $\deg A$, ce qui prouve qu'il est nul

Donc $V_1 = V_2$, et par suite $U_1 = U_2$ puisque $A \neq 0$.

Existence. Soit (U, V) un couple de coefficients de Bézout pour A et B. Notons Q le quotient de la division euclidienne de U par B. L'égalité $A\,U + B\,V = 1$ nous donne $A\,(U - Q\,B) + B\,(V + Q\,A) = 1$, ce qui donne $A\,U_0 + B\,V_0 = 1$ avec $U_0 = U - Q\,B$ et $V_0 = V + Q\,A$.

Comme U_0 est le reste de la division euclidienne de U pas B, on a $\deg U_0 < \deg B$.

Puisque B n'est pas constant, le polynôme U_0 ne peut pas être nul (sinon on aurait $B\,V_0 = 1$) et donc $\deg(A\,U_0) > 0$. Alors :

$$\deg(B\,V_0) = \deg(1 - A\,U_0) = \deg(A\,U_0)$$

ce qui donne $\deg V_0 = \deg A + \deg U_0 - \deg B < \deg A$. □ MPSI

7. Polynômes irréductibles

7.1 Définition

Définition 14

On appelle *polynôme irréductible* de $\mathbb{K}[X]$ tout polynôme P vérifiant :

- $\deg P \geqslant 1$,
- les seuls diviseurs de P sont les éléments de $\mathbb{K}^*$ et les associés de P,

c'est–à–dire tel que P soit non constant et que pour tout $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, on ait :

$$P = A\,B \Longrightarrow \big(\deg A = 0 \quad \text{ou} \quad \deg B = 0\big)$$

Exemples

1. Tout polynôme de degré 1 est irréductible, puisque le produit de deux polynômes non constants est au moins de degré 2.
2. Un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ possédant une racine $\alpha \in \mathbb{K}$ est de degré 1. En effet, il est divisible par le polynôme non constant $X - \alpha$ qui lui est donc associé.
3. Un polynôme qui n'admet pas de racine dans $\mathbb{K}$ n'est pas nécessairement irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, comme le prouve l'exemple de $(X^2 + 1)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

4. En revanche un polynôme de degré 2 ou 3 qui n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, puisqu une décomposition non triviale d'un tel polynôme utilise nécessairement un polynôme de degré 1 qui a donc une racine.
5. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si, son discriminant est strictement négatif.

Proposition 44

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degre 1.

émonstratio On sait que tout polynôme de degré 1 est ırréductible. D'autre part, le théorème de d'Alembert nous dit qu'un polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}$, c est-à-dire produit de polynômes de degré 1. Un polynôme de degré au moins 2 n'est donc pas irréductible □

Proposition 45

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

- les polynômes de degré 1,
- les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

émonstration

- Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- D'après l'exemple 5 ci-dessus, un polynôme de degré 2 est irréductible si, et seulement si, son discriminant est strictement négatif.
- Comme tout polynôme non constant est produit de polynômes de degré 1 ou 2 (proposition 30 de la page 735), on en déduit qu'un polynôme de degré au moins 3 n'est pas irréductible. □

MPSI 7.2 Propriétés

Proposition 46

Un polynôme P irréductible est premier avec tous les polynômes qu'il ne divise pas.

émonstration Les diviseurs communs à P et à un polynôme A sont des diviseurs de P, donc sont, soit constants, soit associés à P Donc, si P ne divise pas A, les seuls diviseurs communs à P et A sont les constantes. □

Exemple Deux polynômes irréductibles non associés sont premiers entre eux.

En particulier, deux polynômes irréductibles unitaires distincts sont premiers entre eux.

Corollaire 47

Un polynôme irréductible divise un produit si, et seulement si, il divise l'un des facteurs.

emonstrati n S'il ne divise aucun des facteurs, il est premier avec chacun d'entre eux et donc avec leur produit, ce qui prouve qu'il ne divise pas ce produit.
La réciproque est évidente. □ MPSI

7.3 Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irreductibles

Proposition 48

Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est le produit d un scalaire par un produit de polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$. De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

PCSI Admis en PCSI PCSI

MPSI **émonst ati n**

Existence On démontre par récurrence, pour $n \geqslant 1$ la propriété H_n

Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n peut s'écrire sous forme d'un produit de polynômes irréductibles.

- H_1 est vraie de façon évidente car tout polynôme de degré 1, étant irréductible, est un produit d'un seul polynôme irréductible.
- Supposons H_n. Soit A un polynôme de degré $n+1$.
  - Si A est irréductible, alors c'est un produit d'un seul polynôme irréductible.
  - Sinon, on peut trouver deux polynômes non constants B et C tels que $A = BC$. Les polynômes B et C ont donc des degrés strictement inférieurs à celui de A et l'on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui permet d'obtenir une décomposition de A en un produit de polynômes irréductibles.

En mettant en facteur les coefficients dominants de chaque polynôme irréductible, on obtient la décomposition annoncée.

Unicité. Soit $A = \lambda\, Q_1 Q_2 \dots Q_k$ une telle décomposition d'un polynôme A. Alors, le scalaire λ est le coefficient dominant de A. De plus, chaque polynôme irréductible unitaire Q_i divise A et réciproquement, si un polynôme irréductible unitaire P divise A, alors il divise l'un des Q_i donc lui est égal puisqu'il s'agit de deux irréductibles unitaires. Les facteurs intervenant dans une telle décomposition sont donc tous les diviseurs irréductibles unitaires de A.
Soient alors deux décompositions de A que l'on peut donc écrire :

$$A = \lambda\, P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_r^{\alpha_r} = \lambda\, P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \dots P_r^{\beta_r}$$

où les P_i sont irréductibles unitaires et deux à deux distincts.
Si, pour un entier i, on a $\alpha_i \neq \beta_i$, par exemple $\alpha_i < \beta_i$, alors on a

$$\prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j} = P_i^{\beta_i - \alpha_i} \prod_{j \neq i} P_j^{\beta_j}$$

et donc P_i divise $\prod\limits_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$, ce qui est impossible puisque P_i est premier avec P_j si $j \neq i$

Par suite $\forall i,\ \alpha_i = \beta_i$, ce qui montre l'unicité de la décomposition □ MPSI

Remarques

- En fait, nous avons vu à la section 5. page 733 que :
  - tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$,
  - tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ est produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

  Dans les deux cas, on a démontré que tout polynôme non constant est produit de polynômes irréductibles.
  La proposition précédente montre l'unicité de cette décomposition.
- Si l'on travaillait sur un autre corps que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les polynômes irréductibles seraient bien sûr différents, mais la même démonstration prouverait l'existence et l'unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles

Exemples

1. Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ de $X^6 - 1$:
$$X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1).$$
2. La fonction `factor` de `MAPLE` décompose un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ mais pas nécessairement dans $\mathbb{R}[X]$.

```
> factor(X^2-2);
```
$$X^2 - 2$$
```
> factor(X^2-3*X+2);
```
$$(X-1)(X-2)$$

MPSI **Proposition 49**

Soient A et B deux polynômes non nuls. Si :
$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k} \qquad \text{et} \qquad B = \mu P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \dots P_k^{\beta_k}$$
où P_1, P_2,..., P_k sont des polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux, alors on a :

1. $A \mid B \iff \forall i \in [\![1.k]\!]\,.\ \alpha_i \leqslant \beta_i$.
2. $A \wedge B = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$ et $A \vee B = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$.

Démonstration

1. ► Si $A \mid B$, alors pour $i \in [\![1,k]\!]$, $P_i^{\alpha_i} \mid A$ et donc $P_i^{\alpha_i} \mid B$, ce qui montre $\alpha_i \leqslant \beta_i$.
   ► Si $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\alpha_i \leqslant \beta_i$, alors $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k} \mid P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \dots P_k^{\beta_k}$, c'est-à-dire $A \mid B$.

2. ► Les diviseurs unitaires D communs à A et à B sont :

$$D = P_1^{\delta_1} P_2^{\delta_2} \dots P_k^{\delta_k} \qquad \text{avec} \qquad \forall i \,,\ \delta_i \leqslant \alpha_i \quad \text{et} \quad \delta_i \leqslant \beta_i.$$

Le plus grand des diviseurs communs à A et à B est obtenu lorsque :

$$\forall i \,,\ \delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i),$$

ce qui montre la première égalité

► Les multiples unitaires M communs à A et à B s'écrivent :

$$M = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \dots P_k^{\mu_k} \qquad \text{avec} \qquad \forall i \,,\ \mu_i \geqslant \alpha_i \quad \text{et} \quad \mu_i \geqslant \beta_i.$$

Le plus petit des multiples communs à A et à B est donc obtenu lorsque :

$$\forall i \,,\ \mu_i = \max(\alpha_i, \beta_i),$$

ce qui montre la deuxième égalité. □

Exemple Etant donnés deux polynômes unitaires A et B, on retrouve la formule :

$$(A \wedge B)(A \vee B) = AB$$

puisque pour tout couple d'entiers (α, β), on a :

$$\max(\alpha, \beta) + \min(\alpha, \beta) = \alpha + \beta.$$

MPSI

Démonstration du théorème de d'Alembert

MPSI Soit A un polynôme à coefficients complexes de degré $p > 0$ Pour montrer que A possède une racine complexe, considérons $\alpha = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |A(z)|$, qui existe puisque $\{|A(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$, et montrons que cette borne inférieure est atteinte, puis qu'elle est nulle

► Si $A = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$, pour $|z| = r$, on a :

$$|A(z)| \geqslant |a_p z^p| - \left|\sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k\right| \geqslant |a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k.$$

Ce minorant définit une fonction réelle polynomiale de r, qui tend vers $+\infty$ quand r tend vers $+\infty$ puisqu'elle est équivalente à $|a_p| r^p$. Elle est donc plus grande que $\alpha + 1$ au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve qu'il existe un disque D centré en 0 en dehors duquel on a $|A(z)| \geqslant \alpha + 1$

Puisque $\alpha = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |A(z)|$, on peut trouver une suite de complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} |A(u_n)| = \alpha$. Cette suite est donc, à partir d'un certain rang, dans le disque D, et par suite elle est bornée On peut donc en extraire une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un complexe z_0.

Comme :

$$A(u_{\varphi(n)}) = \sum_{k=0}^{p} a_k\, u_{\varphi(n)}^k,$$

on en déduit $\lim_{n\to+\infty} A(u_{\varphi(n)}) = A(z_0)$, ce qui donne :

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \left|A(u_{\varphi(n)})\right| = \left|A(z_0)\right|.$$

- Montrons par l'absurde que $A(z_0) = 0$ en supposant $\alpha > 0$ Quitte à considérer le polynôme $\dfrac{A(z_0+X)}{A(z_0)}$, on peut supposer $\alpha = 1$ et $z_0 = 0$.

Le polynôme non constant A s'écrit donc :

$$A = 1 - a_q\, X^q + \sum_{k=q+1}^{p} a_k\, X^k \quad \text{avec} \quad a_q \neq 0 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant q \leqslant p.$$

Posons $a_q = \rho e^{-i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $z = re^{i\theta/q}$, avec $r > 0$, on a :

$$A(z) = 1 - \rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} a_k\, r^k\, e^{ik\theta/q}$$

et donc :

$$\left|A(z)\right| \leqslant |1 - \rho r^q| + \sum_{k=q+1}^{p} |a_k|\, r^k.$$

Si l'on suppose $r \leqslant \sqrt[q]{1/\rho}$, on a $|1 - \rho r^q| = 1 - \rho r^q$ et donc :

$$\left|A(z)\right| - 1 \leqslant -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} |a_k|\, r^k.$$

Ce majorant définissant une fonction polynomiale de r, équivalente en 0 à $-\rho r^q$, il est strictement négatif au voisinage de 0.

Par conséquent, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left|A(z)\right| < 1 = \alpha$, ce qui est contradictoire □ MPSI

EXERCICES

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
Déterminer le degré du polynôme :

$$P(X+1) - P(X)$$

en fonction du degré de P.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, factoriser le polynôme :

$$P = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\ldots(X+n-1)}{n!}.$$

3. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \; P(z) = \overline{z}.$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Déterminer le reste de la division du polynôme $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

5. Calculer la valeur du polynôme :

$$P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$$

en $1+\sqrt{2}$ (on utilisera la division euclidienne de P par un polynôme à coefficients rationnels qui s'annule pour $1+\sqrt{2}$).

6. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est T-périodique ($T \in \mathbb{C}^*$).

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme :

$$(X-1)^{n+2} + X^{2n+1} \in \mathbb{C}[X]$$

est divisible par $X^2 - X + 1$.

8. Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4 + 12X - 5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

9. On considère le polynôme :

$$X^4 + pX^2 + qX + r$$

($r \neq 0$) dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont notees x_1, x_2, x_3, x_4.
Calculer en fonction de p, q, et r :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$$

puis :

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2}.$$

10. Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(2) = 6 \ , \ P'(2) = 1 \quad \text{et} \quad P''(2) = 4$$

et :

$$\forall n \geqslant 3 \ . \ P^{(n)}(2) = 0.$$

11. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $1 + X + X^2$.

12. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le reste de la division euclidienne du polynôme :

$$X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$$

par $(X+1)^2$.

14. Calculer le PGCD des deux polynômes : $X^5 - 4X^4 + 6X^3 - 6X^2 + 5X - 2$ et $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.

15. Décomposer les polynômes suivants :

a) $X^4 + X^2 + 1$

b) $X^8 + X^4 + 1$

c) $X^6 + 1$

en produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

16. Soient P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et a un nombre complexe.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et a pour que a soit racine de multiplicité 3 du polynôme :

$$Q(X) = (X - a)\big(P'(X) + P'(a)\big) - 2\big(P(X) - P(a)\big).$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les racines distinctes de 1 du polynôme :

$$P(X) = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1$$

sont de module strictement inférieur à 1 et que toutes les racines de P sont simples.
On pourra considérer le polynôme $Q(X) = (X - 1)P(X)$.

18. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$
Montrer que $P\big(P(X)\big) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

19. Soient P, A et B trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg P \geqslant 1$ tels que $A\big(P(X)\big)$ divise $B\big(P(X)\big)$.
Montrer que A divise B.

20. Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant p$.
Faire la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$ (on donnera l'expression du quotient et du reste).
Donner une condition necessaire et suffisante pour que $X^n - 1$ soit divisible par $X^p - 1$.

21. Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $X^p - 1$ est :

$$R = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{r_k}$$

où r_k désigne le reste de la division de k par p.

22 Soient n et p deux entiers naturels non nuls
Calculer le PGCD de $X^n - 1$ et de $X^p - 1$.

23. On considère le polynôme $P = X^3 + pX^2 + qX + r$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur p, q et r pour qu'une des racines de P soit la somme des deux autres.

24. Soient p, q et r trois nombres complexes et a, b, c les trois racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.
Calculer en fonction de p, q et r l'expression :

$$S = a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b.$$

25. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

soient en progression arithmétique.

26. Soient x_1, x_2 et x_3 les trois racines complexes du polynôme $X^3 + pX + q$.

a) Trouver le polynôme normalisé du troisième degré dont les racines sont $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$ et $x_1 + x_3$.

b) Trouver le polynôme normalisé du troisième degré dont les racines sont x_1x_2, x_2x_3 et x_1x_3.

27. Soient a et b deux nombres complexes avec $b \neq 0$.
Trouver les polynômes de degré 5 tel que $P(X) + a$ soit divisible par $(X + b)^3$ et $P(X) - a$ par $(X - b)^3$.

28. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que le polynôme $P^2 + \lambda^2$ n'a que des racines simples.

29. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2.
Montrer que les images dans le plan complexe des zéros de P' peuvent s'écrire comme des barycentres à coefficients positifs des images dans le plan complexe des zéros de P.
$\left(\text{On considérera la fraction} \dfrac{P'}{P}\right)$.

30. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) \geqslant 0$
(ii) $\exists A \in \mathbb{R}[X]\,,\ \exists B \in \mathbb{R}[X]\,,\ A^2 + B^2 = P$.

31. Déterminer les polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient :

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0.$$

32. Montrer que les polynômes P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $P+Q$ et PQ le sont.

33. Soient A et B deux polynômes.
Trouver tous les polynômes C tels que chacun des trois polynômes A, B et C divise le produit des deux autres.

34. **a)** Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n.
Montrer que si P a k racines distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $P \wedge P'$ est de degré $n-k$.

b) Le résultat précédent est-il vrai dans $\mathbb{R}[X]$?

c) Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$de degré n tel que P' divise P, $P(1) = 0$ et $P(0) = 1$.

35. Soit $n \geqslant 1$.

a) Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes de degrés strictement inférieurs à n tel que :

$$(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1.$$

b) Montrer que :

$$P(X) = Q(1-X) \text{ et } Q(X) = P(1-X)$$

c) Montrer qu'il existe une constante k telle que :

$$(1-X)P'(X) - nP(X) = kX^{n-1}$$

d) En déduire les coefficients de P.

36. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$
On considère l'équation :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n = 0$$

a) Montrer que si $r = \dfrac{p}{q}$ (avec $p \wedge q = 1$) est racine de l'équation alors $q \mid a_n$ et $p \mid a_0$.
Que peut-on conclure si $a_n = 1$?

b) Montrer alors que :

$$\forall m \in \mathbb{Z}\ ,\ p - mq \mid P(m)$$

c) Donner une décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes suivants :

- $X^3 - X - 1$
- $3X^3 - 2X^2 - 2X - 5$
- $6X^4 + 19X^3 - 7X^2 - 26X + 12 = 0$

d) On suppose qu'il existe deux entiers relatifs distincts m_1 et m_2 tels que :

$$\left|P(m_1)\right| = 1 \text{ et } \left|P(m_2)\right| = 1.$$

Montrer que si $|m_1 - m_2| > 2$, alors P n'a pas de racine rationnelle.
Montrer que si $|m_1 - m_2| \leqslant 2$ et si P a une racine rationnelle alors cette racine est nécessairement $\dfrac{m_1 + m_2}{2}$.

Chapitre 26

Fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

PCSI Ce chapitre est hors programme en PCSI. PCSI

MPSI

1. Corps des fractions rationnelles

1.1 Définition, règles de calcul

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre ; on admet que l'on peut définir son corps des fractions $\mathbb{K}(X)$ appelé *corps des fractions rationnelles* à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est un corps admettant $\mathbb{K}[X]$ comme sous-anneau et dont tout élément F s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{P}{Q} \qquad \text{avec} \qquad (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \text{et} \quad Q \neq 0.$$

Un tel couple (P,Q) s'appelle un *représentant* de la fraction rationnelle F.

On a les règles de calcul suivantes (dans lesquelles Q, Q_1 et R sont des polynômes non nuls) :

- $\dfrac{P}{Q} + \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P\,Q_1 + P_1\,Q}{Q\,Q_1}$
- $\dfrac{P}{Q}\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P\,P_1}{Q\,Q_1}$
- $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1} \iff P\,Q_1 = P_1\,Q$

- $\dfrac{PR}{QR} = \dfrac{P}{Q}$
- Si $P \neq 0$, $\left(\dfrac{P}{Q}\right)^{-1} = \dfrac{Q}{P}$.

Conjuguée d'une fraction rationnelle à coefficients complexes

Si (P, Q) et (P_1, Q_1) sont deux representants d'une fraction rationnelle F à coefficients dans $\mathbb{C}$, alors $\dfrac{\overline{P}}{\overline{Q}} = \dfrac{\overline{P_1}}{\overline{Q_1}}$ puisque l'on a :

$$PQ_1 = P_1 Q \Longrightarrow \overline{P}\,\overline{Q_1} = \overline{P_1}\,\overline{Q}.$$

Cette fraction rationnelle est appelée *conjuguée* de F et notée $\overline{F}$.

Les propriétés sur les polynômes nous donnent immédiatement pour $(F, G) \in \mathbb{C}(X)^2$:

$$\overline{F+G} = \overline{F} + \overline{G} \qquad \text{et} \qquad \overline{FG} = \overline{F}\,\overline{G}.$$

1.2 Representant irréductible d'une fraction rationnelle

Définition 1

- On appelle *représentant irréductible* d'une fraction rationnelle F tout représentant (P, Q) de F où P et Q sont premiers entre eux.
- On appelle *représentant irréductible unitaire* d'une fraction rationnelle F tout représentant irréductible (P, Q) de F tel que Q soit un polynôme unitaire.

Proposition 1

- Si $\dfrac{P}{Q}$ est une forme irréductible d'une fraction rationnelle $F = \dfrac{P_1}{Q_1}$, alors :

$$\exists R \in \mathbb{K}[X] : (P_1 = RP \quad \text{et} \quad Q_1 = RQ).$$

- Si $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{P_1}{Q_1}$ sont deux formes irréductibles d'une fraction F, alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : (P_1 = \lambda P \quad \text{et} \quad Q_1 = \lambda Q).$$

- Toute fraction rationnelle admet un représentant irréductible unitaire et un seul.

émonstr tion

- On a $PQ_1 = QP_1$ et donc Q divise PQ_1. Comme P et Q sont premiers entre eux, on en déduit d'après le théorème de Gauss que Q divise Q_1.

  On peut donc trouver un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_1 = RQ$, et l'on a :
$$P_1 = \frac{PQ_1}{Q} = RP.$$
- Soient (P, Q) et (P_1, Q_1) deux représentants irréductibles de F. Alors, d'après le point précédent, Q divise Q_1 et Q_1 divise Q. Les polynômes Q et Q_1 sont donc associés et par conséquent, le polynôme R est une constante non nulle.
- L'unicité est évidente d'après ce qui précède

  Pour l'existence, il suffit de prendre un représentant quelconque (P, Q), de diviser P et Q par leur PGCD et de diviser le numérateur et le dénominateur par le coefficient dominant de ce dernier (qui est non nul). □

Remarque Un polynôme P admet $P/1$ pour représentant irréductible unitaire. En particulier, $0/1$ est la forme irréductible unitaire de la fraction rationnelle nulle.

Exemple Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $\overline{F} = F$. Si (P, Q) est un représentant irréductible unitaire de F, alors :
$$\frac{P}{Q} = F = \overline{F} = \frac{\overline{P}}{\overline{Q}}.$$
D'après la proposition précédente il existe donc un polynôme R tel que $\overline{Q} = RQ$. Comme Q et $\overline{Q}$ sont deux polynômes unitaires de même degré on en déduit $R = 1$ et par suite $Q = \overline{Q} \in \mathbb{R}[X]$ et $P = \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$. Par suite, $F \in \mathbb{R}(X)$.

La réciproque étant évidente, on a donc, pour $F \in \mathbb{C}(X)$, l'équivalence :
$$F \in \mathbb{R}(X) \iff \overline{F} = F.$$

1.3 Degré d'une fraction rationnelle

Définition 2

Si F est une fraction rationnelle, la quantité $\deg P - \deg Q \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ne dépend pas du représentant (P, Q) choisi pour la fraction F On l'appelle *degré* de F et on le note $\deg(F)$ ou $\deg F$

En particulier, on a $\deg 0 = -\infty$.

é onstrati On peut bien définir ainsi le degré de F car :

- la quantité $\deg P - \deg Q$ est toujours définie puisque Q étant non nul, on a $\deg Q \neq -\infty$,

- la quantité $\deg P - \deg Q$ ne dépend pas du représentant (P, Q) choisi pour la fraction rationnelle F, car si (P_1, Q_1) est un autre représentant, on a $P\,Q_1 = Q\,P_1$ et donc :
$$\deg P + \deg Q_1 = \deg(P\,Q_1) = \deg(P_1\,Q) = \deg P_1 + \deg Q$$
c'est-à-dire, puisque $\deg Q$ et $\deg Q_1$ sont des entiers naturels :
$$\deg P - \deg Q = \deg P_1 - \deg Q_1.$$
□

Remarque Un polynôme P est égal à la fraction $\dfrac{P}{1}$ dont le degré est $\deg P$ Donc la définition du degré sur $\mathbf{K}(X)$ prolonge celle du degré défini sur $\mathbf{K}[X]$.

Proposition 2

Étant données deux fractions rationnelles F_1 et F_2 de $\mathbf{K}(X)$, on a :

1. $\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2)$
2. $\deg(F_1 F_2) = \deg F_1 + \deg F_2$

Démonstration Posons $F_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}$.

1. On a alors $F_1 + F_2 = \dfrac{P_1\,Q_2 + P_2\,Q_1}{Q_1\,Q_2}$, ce qui donne :
$$\deg(F_1 + F_2) = \deg(P_1\,Q_2 + P_2\,Q_1) - \deg(Q_1\,Q_2).$$
Supposons, par exemple, $\deg F_1 \geqslant \deg F_2$. Alors :
$$\deg P_1 - \deg Q_1 \geqslant \deg P_2 - \deg Q_2,$$
et puisque $\deg Q_1$ et $\deg Q_2$ sont des entiers :
$$\deg(P_1\,Q_2) = \deg P_1 + \deg Q_2 \geqslant \deg P_2 + \deg Q_1 = \deg(P_2\,Q_1).$$
Les résultats sur le degré d'une somme de polynômes impliquent .
$$\deg(F_1 + F_2) \leqslant \deg(P_1\,Q_2) - \deg(Q_1\,Q_2) = \deg P_1 - \deg Q_1$$
ce qui donne :
$$\deg(F_1 + F_2) \leqslant \deg F_1 = \max(\deg F_1, \deg F_2).$$

2. On a de même $F_1\,F_2 = \dfrac{P_1\,P_2}{Q_1\,Q_2}$, ce qui donne .
$$\begin{aligned}\deg(F_1\,F_2) &= \deg(P_1\,P_2) - \deg(Q_1\,Q_2)\\ &= \deg P_1 + \deg P_2 - \deg Q_1 - \deg Q_2\\ &= \deg F_1 + \deg F_2.\end{aligned}$$
□

Exemple La somme de deux fractions rationnelles de degrés strictement négatifs est une fraction rationnelle de degré strictement négatif.

1.4 Racines, pôles

Définition 3

Soit F une fraction rationnelle de forme irréductible $\frac{P}{Q}\cdot$

- On appelle *racine* de F toute racine de P
- On appelle *pôle* de F toute racine de Q.
- Si a est une racine (respectivement un pôle) de $F \neq 0$, l'*ordre de multiplicité* de a est l'ordre de multiplicité de a en tant que racine du polynôme P (respectivement Q).

émonstration Vérifions que ces notions ne dépendent pas du représentant irréductible choisi.

La proposition 1 de la page 756 nous dit que les formes irréductibles de F sont $\frac{\lambda P}{\lambda Q}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Donc les racines (respectivement les pôles) de F sont les racines de P (respectivement de Q) dans toute forme irréductible $\frac{P}{Q}\cdot$ □

Remarque Un élément a de $\mathbb{K}$ ne peut pas être à la fois racine et pôle d'une fraction rationnelle F. Sinon, en prenant une forme irréductible $F = \frac{P}{Q}$, on aurait $P(a) = Q(a) = 0$ et donc les polynômes P et Q seraient divisibles par $X - a$, ce qui contredirait le caractère irréductible de $\frac{P}{Q}\cdot$

Attention Les racines (respectivement les pôles) d'une fraction rationnelle F ne peuvent être obtenues qu'à partir d'une forme irréductible de F.

Par exemple, $F = \dfrac{X^3 - 1}{X^2 - 1}$ n'admet 1 ni comme racine ni comme pôle, car $F = \dfrac{X^2 + X + 1}{X + 1}\cdot$

Définition 4

Soit F une fraction rationnelle de forme irréductible $\frac{P}{Q}$, dont on désigne par A l'ensemble des pôles.

- Pour $\alpha \in \mathbb{K} \setminus A$, on définit $F(\alpha) = \dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}\cdot$
- La fonction définie sur $\mathbb{K} \setminus A$ par $x \mapsto F(x)$ est appelée *fonction rationnelle* associée à la fraction rationnelle F

Exemple La fonction rationnelle f associée à la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^2 - 4X + 3}{X^2 - 1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}\cdot$

Remarques

1. Si $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit sous une forme $F = \dfrac{P_1}{Q_1}$ non nécessairement irréductible, et si $Q_1(\alpha) \neq 0$, alors α n'est pas pôle de F et on a :
$$F(\alpha) = \frac{P_1(\alpha)}{Q_1(\alpha)}\cdot$$
2. Étant donnés deux fractions rationnelles F et G, deux scalaires λ et μ, et $\alpha \in \mathbb{K}$ qui n'est pôle ni de F ni de G alors α n'est pôle ni de $\lambda F + \mu G$ ni de FG, et on a :
$$(\lambda F + \mu G)(\alpha) = \lambda F(\alpha) + \mu G(\alpha)$$
$$(FG)(\alpha) = F(\alpha)\, G(\alpha).$$

1.5 Composition

Si $F = \dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle et R un polynôme non constant, alors le polynôme $Q \circ R$ est non nul, puisqu'il est de degré $\deg Q \deg R$.

De plus, si (P_1, Q_1) est un autre représentant de la fraction F l'égalité $P\,Q_1 = P_1\,Q$ entraîne $(P \circ R)\,(Q_1 \circ R) = (P_1 \circ R)\,(Q \circ R)$. Le quotient $\dfrac{P \circ R}{Q \circ R}$ ne dépend donc pas du representant (P, Q) choisi pour la fraction rationnelle F. C'est une fraction rationnelle dont le degré vaut $\deg F \deg R$, que l'on l'appelle *composée* de F par R et que l'on note $F(R)$.

Exemples

1. Si $F \in \mathbb{K}(X)$, on a $F(X) = F$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $F \in \mathbb{K}(X)$, la fraction rationnelle $F(X - \alpha)$ est de même degré que F. L'ensemble de ses racines (respectivement de ses pôles) est $\alpha + A$, où A est l'ensemble des racines (respectivement des pôles) de F.
3. Une fraction rationnelle F est dite *paire* si $F(X) = F(-X)$.

   Si P et Q sont deux polynômes pairs, alors $\dfrac{P}{Q}$ est évidemment paire.

   Réciproquement, si $F = \dfrac{P}{Q}$ est paire alors on peut trouver un représentant (P_1, Q_1) de F avec P_1 et Q_1 pairs.

En effet quitte à considérer $X P$ et $X Q$, on peut supposer que Q n'est pas impair. On a alors :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(-X)}{Q(-X)} = \frac{P(X)+P(-X)}{Q(X)+Q(-X)}$$

avec $P(X) + P(-X)$ et $Q(X) + Q(-X)$ deux polynômes pairs, le deuxième étant non nul.

4. De même, une fraction rationnelle F est *impaire*, c'est-à-dire vérifie $F(X) = -F(-X)$, si, et seulement si, elle est de la forme $\frac{P}{Q}$ avec P un polynôme impair et Q un polynôme pair.

2. Décomposition en éléments simples

2.1 Partie entière

Proposition 3

Toute fraction rationnelle F s'écrit de façon unique comme la somme d un polynôme, appelé *partie entière* de F, et d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif.

émonstration

Unicité. Supposons :

$$F = E_1 + F_1 = E_2 + F_2$$

avec $(E_1, E_2) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(F_1, F_2) \in \mathbb{K}(X)^2$, $\deg F_1 < 0$ et $\deg F_2 < 0$

Alors $E_1 - E_2$ est un polynôme, et comme il est égal à $F_2 - F_1$, son degré est strictement négatif. Donc $E_1 - E_2 = 0$ c'est-à-dire $E_1 = E_2$ et par suite $F_1 = F_2$

Existence. Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle, avec $Q \neq 0$ Si l'on appelle E le quotient et R le reste de la division euclidienne de P par Q, on obtient :

$$F = E + \frac{R}{Q} \qquad \text{avec} \qquad \deg R < \deg Q,$$

ce qui constitue l'écriture cherchée. □

Méthode D après la démonstration précédente, la partie entière d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est le quotient de la division euclidienne du numérateur P par le dénominateur Q.

Exemples

1. Si $\deg F < 0$, alors sa partie entière est nulle

2. Si F est de degré 0, alors sa partie entière est le polynôme constant quotient du coefficient dominant du numérateur par celui du dénominateur.

3. La partie entière de la fraction $\dfrac{X^5}{(X^2+X+1)^2}$ est $X-2$.

4. Si F est une fraction rationnelle paire, alors sa partie entière est paire.
   En effet, si :
$$F(X) = E(X) + F_0(X) \qquad \text{avec} \qquad E \in \mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad \deg F_0 < 0$$
   alors on a :
$$F(X) = F(-X) = E(-X) + F_0(-X)$$
   avec $E(-X) \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg F_0(-X) < 0$.
   L'unicité de la partie entière nous donne alors $E(X) = E(-X)$.

5. De même, la partie entière d'une fraction rationnelle impaire est impaire.

6. La fraction rationnelle $F = \dfrac{X^5+X^3+X}{(X^2+1)^2} = \dfrac{X^5+\cdots}{X^4+\cdots}$ a une partie entière de la forme $X+\alpha$. Comme F est impaire, on a $\alpha = 0$ et la partie entière de F est donc X.

2.2 Partie polaire

Proposition 4

Si F est une fraction rationnelle admettant a pour pôle d'ordre n, il existe un unique n-uplet de scalaires $(\lambda_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ et une unique fraction F_0 n'admettant pas a pour pôle tels que :
$$F = \sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p} + F_0.$$
La quantité :
$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p}$$
s'appelle la *partie polaire* de F relative au pôle a.

émonstration

Unicité. Supposons l'existence de deux n-uplets distincts $(\lambda_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ et $(\mu_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ et de deux fractions rationnelles F_1 et F_2 n'admettant pas a pour pôle vérifiant :
$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{(X-a)^k} + F_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{(X-a)^k} + F_2$$
et prenons $p = \max\{k \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_k \neq \mu_k\}$.

Comme $\forall k \in [\![p+1, n]\!]$, $\lambda_k = \mu_k$, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{(X-a)^k} + F_1 = \sum_{k=1}^{p} \frac{\mu_k}{(X-a)^k} + F_2$$

ce qui, en multipliant par $(X-a)^p$, donne :

$$\lambda_p + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k\,(X-a)^{p-k} + (X-a)^p\,F_1 = \mu_p + \sum_{k=1}^{p-1} \mu_k\,(X-a)^{p-k} + (X-a)^p\,F_2.$$

En substituant a à X dans cette égalité de fractions rationnelles n'admettant pas a pour pôle, on obtient $\lambda_p = \mu_p$ ce qui est en contradiction avec la définition de p

D'où l'unicité de la famille $(\lambda_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ et par suite de la fraction $F_0 = F - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\lambda_k}{(X-a)^k}$.

Existence. Soit $F = \dfrac{P}{(X-a)^n\,Q_1}$ avec Q_1 un polynôme unitaire tel que $Q_1(a) \neq 0$.

Les polynômes Q_1 et $(X-a)^n$ sont premiers entre eux, puisque le seul facteur irréductible de $(X-a)^n$ est $(X-a)$, et que ce dernier ne divise pas Q_1.

D'après l'identité de Bézout, on peut donc trouver des polynômes U et V tels que $Q_1\,U + (X-a)^n\,V = 1$. On a alors :

$$F = \frac{PU}{(X-a)^n} + \frac{PV}{Q_1}.$$

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$(PU)(X) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p\,(X-a)^p,$$

ce qui entraîne :

$$\frac{PU}{(X-a)^n} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\alpha_p}{(X-a)^{n-p}} + R$$

où R est un polynôme.

Alors :

$$F = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\alpha_p}{(X-a)^{n-p}} + R + \frac{PV}{Q_1}$$

et la fraction rationnelle $R + \dfrac{PV}{Q_1}$ n'admet pas a pour pôle. □

Remarques

- On peut remarquer l'analogie avec un développement limité : on cherche à écrire la fraction comme combinaison linéaire de puissances de $X-a$.
- Si l'on désigne par a_1, a_2,..., a_p les autres pôles de F et par r_1 r_2,..., r_p leurs ordres de multiplicité respectifs, alors F_0 admet comme pôles a_1, a_2,..., a_p d'ordres de multiplicité respectifs r_1, r_2,..., r_p.

En effet, soit $\dfrac{P}{Q}$ une forme irréductible de F et R la partie polaire associée à a. La fraction $F - R$ n'admet pas a pour pôle et s'écrit sous la forme (non forcément irréductible) :

$$F - R = \frac{P_p}{Q} \quad \text{avec} \quad P_p \in \mathbb{K}[X].$$

Si l'on désigne par $\dfrac{A}{B}$ la forme irréductible de $F - R$, le polynôme B divise Q donc admet au plus pour racines a_1, $a_2, \ldots, a_p$ d'ordres respectifs α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ avec $0 \leqslant \alpha_i \leqslant r_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. L'égalité $F = R + \dfrac{A}{B}$ prouve alors, en réduisant au même dénominateur $(X - a)^n B$, que F admet a_i pour pôle d'ordre au plus α_i. Donc $\alpha_i = r_i$.

Méthode

Soit F une fraction rationnelle admettant a pour pôle.

- Si a est pôle d'ordre 1 de F, on peut écrire $F = \dfrac{P}{(X-a)\,Q_1}$ où Q_1 est un polynôme n'admettant pas a pour racine.

  On cherche le scalaire λ_1 tel que :

  $$F = \frac{\lambda_1}{X - a} + F_0$$

  où F_0 est une fraction rationnelle qui n'admet pas a pour pôle

  En multipliant cette égalité par $X - a$, on obtient :

  $$\frac{P}{Q_1} = \lambda_1 + (X - a)\,F_0$$

  ce qui, en substituant a à X, donne $\dfrac{P(a)}{Q_1(a)} = \lambda_1$.

  La partie polaire relative au pôle a est donc :

  $$\boxed{\frac{\lambda}{(X-a)} \quad \text{avec } \lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}}$$

  la dernière égalité venant de la relation $Q' = (X - a)\,Q_1' + Q_1$.

- Si a est pôle d'ordre 2 de F, on peut écrire $F = \dfrac{P}{(X-a)^2\,Q_2}$ où Q_2 est un polynôme n'admettant pas a pour racine.

On cherche les scalaires λ_1 et λ_2 tels que :

$$F = \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \frac{\lambda_1}{X-a} + F_0$$

où F_0 est une fraction rationnelle qui n'admet pas a pour pôle.
En multipliant cette égalité par $(X-a)^2$, on obtient :

$$\frac{P}{Q_2} = \lambda_2 + \lambda_1\,(X-a) + (X-a)^2\,F_0$$

ce qui, en substituant a à X, donne $\dfrac{P(a)}{Q_2(a)} = \lambda_2$.
La partie polaire relative au pôle a est donc :

$$\boxed{\frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} \text{ avec } \lambda_2 = \frac{P(a)}{Q_2(a)}\cdot}$$

Pour trouver λ_1, on peut alors retrancher $\dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2}$ pour obtenir une fraction dont a n'est pas pôle, ou est pôle simple ce qui ramène au cas précédent.

- Dans le cas général si a est pôle d'ordre n alors $F = \dfrac{P}{(X-a)^n\,Q_n}$ avec $Q_n(a) \neq 0$, et la partie polaire relative au pôle a est :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p} \text{ avec } \lambda_n = \frac{P(a)}{Q_n(a)}}$$

comme on le voit en multipliant l'égalité :

$$F = \sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p} + F_0$$

par $(X-a)^n$ et en substituant a à X.

Comme de plus $Q = (X-a)^n\,Q_n$, alors on a $Q_n(a) = \dfrac{Q^{(n)}(a)}{n!}$ (par exemple en utilisant la formule de Leibniz ou la formule de Taylor).

Exemples

1. Soit $F = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}\cdot$

   - La partie polaire associée au pôle 0 est $\dfrac{\lambda}{X}$ avec $\lambda = 1$.

- La partie polaire associée au pôle 1 est $\dfrac{\lambda}{X-1}+\dfrac{\mu}{(X-1)^2}$ avec $\mu=2$. Comme :
$$F-\frac{2}{(X-1)^2}=\frac{X^4+X^3+X^2+X-1}{(X-1)\,X}$$
on en déduit $\lambda=3$.

2. Soit $F=\dfrac{1}{X^5-1}\cdot$ Si ω est un pôle de F, c'est–à–dire une racine cinquième de l'unité, alors la partie polaire associée à ω est $\dfrac{\lambda}{X-\omega}$ avec :
$$\lambda=\frac{1}{5\omega^4}=\frac{\omega}{5\omega^5}=\frac{\omega}{5}\cdot$$

2.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Dans cette partie, on suppose $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Le dénominateur d'une fraction rationnelle est donc scindé.

Théorème 5

Étant donnee une fraction rationnelle $F\in\mathbb{C}(X)$ dont les pôles sont a_1, $a_2,\ldots,$ a_n distincts deux à deux et d'ordres de multiplicité respectifs r_1, $r_2,\ldots,$ r_n, il existe un unique polynôme $E\in\mathbb{C}[X]$ et une unique famille de scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant r_i}}$ tels que :
$$F=E+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j}\right).$$

Autrement dit toute fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ est la somme de sa partie entière et des parties polaires associées à chacun de ses pôles.

Cette décomposition s'appelle la *décomposition en éléments simples* dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction F.

émonst ation

Unicité. Si $F=E+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{r_i}\dfrac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j}\right)$, alors E est la partie entière de F puisque $F-E$ est une somme de fractions de degrés strictement négatifs

Pour $1\leqslant k\leqslant n$, on a :
$$F=\sum_{j=1}^{r_k}\frac{\lambda_{k,j}}{(X-a_k)^j}+F_k$$

où la fraction $F_k = E + \sum_{i \neq k} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j} \right)$ n'admet pas a_k pour pôle.

Donc $\sum_{j=1}^{r_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X-a_k)^j}$ est la partie polaire de F associée au pôle a_k, ce qui prouve l'unicité de $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}, \dots, \lambda_{k,r_k}$.

Existence. On a vu qu'en retranchant à une fraction rationnelle F la partie polaire associée à un de ses pôles, on obtient une fraction rationnelle dont les pôles sont les autres pôles de F, avec le même ordre de multiplicité que dans F.

Donc, en retranchant à une fraction rationnelle F les parties polaires associées à chacun de ses pôles, on obtient une fraction de forme irréductible $\frac{P}{Q}$ qui n'admet plus de pôle. Donc le polynôme Q n'a pas de racine, ce qui prouve qu'il est constant puisqu'il est scindé sur $\mathbb{C}$

On a ainsi montré que F était la somme d'un polynôme et des parties polaires associées à chacun de ses pôles. □

Exemples

1. La partie entière de la fraction rationnelle $F = \frac{X^5+1}{X(X-1)^2}$ est $X^2 + 2X + 3$.

   L'exemple 1. de la page 765 nous donne donc :

$$F = X^2 + 2X + 3 + \frac{1}{X} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{3}{X-1}.$$

2. L'exemple 2. de la page ci-contre nous donne les parties polaires associées aux cinq pôles simples de la fraction rationnelle $F = \frac{1}{X^5-1}$.

   Ces pôles sont 1, $\omega_1 = e^{2i\pi/5}$, $\omega_2 = e^{4i\pi/5}$, $\overline{\omega_1}$ et $\overline{\omega_2}$. Comme la partie entière est nulle, on a :

$$F = \frac{1}{5(X-1)} + \frac{\omega_1}{5(X-\omega_1)} + \frac{\overline{\omega_1}}{5(X-\overline{\omega_1})} + \frac{\omega_2}{5(X-\omega_2)} + \frac{\overline{\omega_2}}{5(X-\overline{\omega_2})}.$$

3. Soit P un polynôme dont les racines sont $a_1, a_2, \dots, a_n$ d'ordres de multiplicité respectifs $r_1, r_2, \dots, r_n$, c'est-à-dire un polynôme de la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X-a_i)^{r_i} \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

   La décomposition de $\frac{P'}{P}$ en éléments simples s'obtient directement en écrivant (dérivée d'un produit) :

$$P' = \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(r_i (X-a_i)^{r_i-1} \prod_{j \neq i} (X-a_j)^{r_j} \right),$$

ce qui donne :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{X - a_i}.$$

Avec MAPLE, c'est la fonction `convert(...,parfrac)` qui retourne la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de $\mathbb{Q}(X)$ dont le dénominateur est scindé sur $\mathbb{Q}$ Lorsque son dénominateur n'est pas scindé sur $\mathbb{Q}$, il est de la responsabilité de l'utilisateur d'en obtenir une factorisation en produit de polynômes du premier degré.

Exemples

```
> F:=(X^6+X+1)/(X^5-4*X^3-2*X^2+3*X+2);
```

$$F := \frac{X^6 + X + 1}{X^5 - 4X^3 - 2X^2 + 3X + 2}$$

```
> convert(F,parfrac,X);
```

$$X - \frac{3}{8}\frac{1}{X-1} + \frac{67}{27}\frac{1}{X-2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(X+1)^3} - \frac{25}{36}\frac{1}{(X+1)^2} + \frac{409}{216}\frac{1}{X+1}$$

```
> alias(j=RootOf(X^2+X+1)):
> P:=factor(X^3-1,{j});
```

$$P := (X - j)(X + 1 + j)(X - 1)$$

```
> F:=convert(1/P^2,parfrac,X):
>              # Résultat non simplifié et sans intérêt.
> map(factor,F);
>              # Applique factor à chaque terme de la somme.
```

$$-\frac{2}{9}\frac{j}{X-j} - \frac{1}{9}\frac{j+1}{(X-j)^2} + \frac{2}{9}\frac{j+1}{X+1+j} + \frac{1}{9}\frac{j}{(X+1+j)^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{9}\frac{1}{(X-1)^2}$$

2.4 Méthodes pratiques

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes dont les pôles sont $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'ordres de multiplicité respectifs $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Sa décomposition en éléments simples est de la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - a_i)^j} \right).$$

- La détermination de la partie entière E se fait à l'aide de la division euclidienne de P par Q, division limitée puisque seul le quotient nous intéresse.
- Les coefficients λ_{i,r_i} se calculent immédiatement à l'aide des formules :
$$\lambda_{i,r_i} = \frac{P(a_i)}{Q_i(a_i)} = \frac{r_i! P(a_i)}{Q^{(r_i)}(a_i)}$$
avec $Q = (X - a_i)^{r_i} Q_i$.
- Si tous les pôles sont simples, on a ainsi la décomposition en éléments simples de F. Sinon, on peut retrancher à F chaque fraction $\dfrac{\lambda_{i,r_i}}{(X - a_i)^{r_i}}$ et recommencer avec la fraction ainsi obtenue. Mais il est souvent beaucoup plus rapide de déterminer les derniers coefficients en utilisant certaines des méthodes qui suivent.

Si la fraction est à coefficients réels...

Si F est une fraction rationnelle à coefficients réels et si a est un pôle non réel de F d ordre r, alors $\overline{a}$ est aussi un pôle d ordre r et les coefficients des parties polaires associées à a et $\overline{a}$ sont conjugués deux à deux.

En effet :

- Puisque le dénominateur Q de F est réel, si a est une racine non réelle de Q, alors $\overline{a}$ est aussi racine de Q au même ordre de multiplicité.
- Si $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{(X - a)^i} + F_1$ où a n'est pas pôle de la fraction rationnelle F_1, alors :
$$F = \overline{F} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\overline{\lambda_i}}{(X - \overline{a})^i} + \overline{F_1}$$
et la fraction rationnelle $\overline{F_1}$ n'admet pas $\overline{a}$ pour pôle. Donc, la partie polaire associée au pôle $\overline{a}$ est :
$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\overline{\lambda_i}}{(X - \overline{a})^i}$$
(unicité de la partie polaire).

Si la fraction est paire ou impaire...

Si la fraction rationnelle F est paire ou impaire et que a est un pôle de F d'ordre n, alors $-a$ est aussi pôle de F d'ordre n et la comparaison des décompositions en éléments simples de $F(X)$ et $F(-X) = \pm F(X)$ donne des relations entre les coefficients.

Exemple La fraction $F = \dfrac{4}{(X^2-1)^2}$ se décompose en éléments simples :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$

On a :

$$F(X) = F(-X) = \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{-X+1} + \frac{c}{(-X-1)^2} + \frac{d}{(-X+1)^2}.$$

L'unicité de la decomposition en éléments simples nous donne alors $a = -b$ et $c = d$.

- On a immédiatement $c = \dfrac{4}{(1+1)^2} = 1$, donc $c = d = 1$.
- Pour déterminer a et b, il suffit de substituer 0 à X, ce qui donne :

$$4 = -a + b + c + d = 2 - 2a,$$

donc $a = -1$ et $b = 1$. On a donc :

$$F = \frac{4}{(X^2-1)^2} = -\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+1)^2}.$$

Si la fraction est de degré strictement négatif...

Soit F une fraction rationnelle de degré strictement négatif. Si f est la restriction à $\mathbb{R}$ de sa fonction rationnelle associée, alors la fonction $x \mapsto x\,f(x)$ a une limite finie en l'infini : on peut ainsi trouver des relations entre les coefficients des termes en $\dfrac{1}{X-a_i}$ de la décomposition en éléments simples de F

Exemple Soit la fraction rationnelle $F = \dfrac{4X^3}{(X^2-1)^2}$.

L'imparité de F nous dit que sa décomposition en éléments simples est du type :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{b}{(X+1)^2}.$$

Alors $b = 1$ et puisque $\lim\limits_{x\to\infty} x\,f(x) = 4$, on a $2a = 4$. Donc :

$$F = \frac{2}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X+1)^2}.$$

S'il ne reste qu'un ou deux coefficients à calculer...

Lorsqu'il ne reste plus qu'un ou deux coefficients à déterminer, on peut substituer à X une ou deux valeurs simples.

Exemple Soit :

$$F = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)} = 1 + \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{\overline{c}}{X+i}.$$

On trouve d'abord :

$$c = \frac{i^4+1}{(i+i)(i+1)^2} = \frac{2}{(2i)^2} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad a = \frac{1+1}{1+1} = 1.$$

En substituant 0 à X, on obtient de plus :

$$1 = 1 + a + b - \frac{c}{i} + \frac{\overline{c}}{i} = 2 + b$$

et donc $b = -1$. D'où :

$$F = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)} = 1 + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{2(X-i)} - \frac{1}{2(X+i)}.$$ MPSI

EXERCICES

1. Montrer que si F_1 et F_2 sont deux fractions rationnelles, la partie entière de $F_1 + F_2$ est la somme des parties entières.

2 Décomposer en élements simples sur $\mathbb{C}[X]$ les fractions suivantes :

a) $F = \dfrac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}$

b) $F = \dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$

c) $F = \dfrac{X^3-1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

d) $F = \dfrac{X^2}{(X^2+X+1)^2}$

e) $F = \dfrac{(X^2+4)^2}{(X^2+1)(X^2-2)^2}$

3. Simplifier les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$, les fractions :

a) $\dfrac{1}{X^n-1}$

b) $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$

c) $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$

5 Soit F une fraction de $\mathbb{C}[X]$, $F = \dfrac{P}{Q}$ avec :

$$Q = (X - x_1)^{\lambda_1} \dots (X - x_n)^{\lambda_n}$$

la fraction n'étant pas nécessairement sous forme irréductible
Montrer que l'on peut écrire :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i$$

où :

$$\mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{a_{i,j}}{(X - x_i)^j}.$$

Application : donner la décomposition en éléments simples de la fraction :

$$\frac{X^3 + aX^2 + bX + c}{(X-1)^2(X+1)}.$$

6. Soient a, b et c trois nombres complexes et F la fraction :

$$F(X) = \frac{aX^2 + bX + c}{(X-1)^2(X-2)^2}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que F admette une primitive rationnelle.

7 Calculer les dérivees d'ordre n des fonctions définies par :

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$,

b) $f(x) = \arctan x$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos a + 1}$,

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x \operatorname{ch} a + 1}$.

8 Réduire sous la forme $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ la fraction :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i^2}{X - \omega_i}$$

où les ω_i sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité ($n \geqslant 2$).

9. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; P(\cos x) = \cos(nx).$$

Quelles sont les racines de P ?

Décomposer $\dfrac{1}{P}$ en éléments simples.

10. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n éléments distincts deux à deux

On pose :

$$P(X) = (X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n)$$

et :

$$F(X) = \frac{1}{P(X)^2}.$$

Décomposer F en éléments simples.

On exprimera les coefficients en fonction de $P'(x_i)$ et $P''(x_i)$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Decomposer en éléments simples la fraction suivante :

$$F(X) = \frac{1}{X} + \frac{1!}{X(X+1)} + \cdots + \frac{n!}{X(X+1)\ldots(X+n)}.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Quel est le développement limité en 0 à l'ordre $n-1$ de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$?

b) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ la fraction :

$$F = \frac{1}{X^n(X-1)^n}$$

c) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ la fraction :

$$\frac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}.$$

d) Trouver un couple (U, V) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$(1-X)^n U(X) + X^n V(X) = 1.$$

13 Soient $a \in \mathbb{C}$ et F une fraction de $\mathbb{C}[X]$ de la forme :

$$F = \frac{P(X)}{(X-a)^n Q(X)}$$

avec $Q(a) \neq 0$.

Exprimer la partie polaire relative au pôle a à l'aide des dérivées $k^{\text{èmes}}$ de $G(X) = F(X)(X-a)^n$ en a.

14 On considère la fraction :

$$F(X) = \frac{1}{(X^3 - 1)^3}.$$

Calculer la partie polaire relative au pôle 1.
Puis, en remarquant que $F(jX) = F(j^2X) = F(X)$ déterminer la décomposition en éléments simples de F.

15. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
Montrer que si les racines de P sont réelles et simples alors le polynôme $Q = P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.
On considérera la fraction $-\left[\dfrac{P'(X)}{P(X)}\right]'$.

16. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n et à n racines simples réelles :

$$a_1 < a_2 < \dots a_{n-1} < a_n .$$

On sait que P' a $n-1$ racines réelles $b_1, b_2, \dots b_n$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \ , \ a_i < b_i < a_{i+1}$$

(voir exercice 8 du chapitre 12).
On pose $\delta_i = a_{i+1} - a_i$, montrer que :

$$a_i + \frac{\delta_i}{n} < b_i < a_{i+1} - \frac{\delta_i}{n}.$$

On décomposera la fraction $\dfrac{P'}{P}$ en éléments simples.

17. Soient a_i et α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $2n$ scalaires.
Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 + \alpha_1} + \dfrac{x_2}{a_2 + \alpha_1} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n + \alpha_1} = 1 \\[2ex] \dfrac{x_1}{a_1 + \alpha_2} + \dfrac{x_2}{a_2 + \alpha_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n + \alpha_2} = 1 \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{x_1}{a_1 + \alpha_n} + \dfrac{x_2}{a_2 + \alpha_n} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n + \alpha_n} = 1 \end{cases}$$

18. Soient a, b et c trois nombres complexes.
Donner une expression simple de :

$$A = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(b+c-a)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(c+a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(a+b-c)}$$

19. Soient $x_1, x_2, \dots x_n$, n nombres complexes distincts et $y_1, y_2, \dots y_n$, n nombres complexes.
On veut déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \ , \ P(x_i) = y_i.$$

En considérant la fraction :

$$\frac{P}{(X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_n)}$$

montrer que les polynômes cherchés sont de la forme :

$$P = (X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_n)Q(X) + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{Q_i(x_i)} Q_i(X)$$

où Q est un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$ et :

$$Q_i = (X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\dots(X-x_n).$$

Chapitre 27

Algèbre linéaire et géométrie affine élémentaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

1. Espaces vectoriels

1.1 Définition, propriétés, exemples

Définition 1

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble muni d'une loi interne notée $+$ et d'une application (appelée *loi externe*) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha . x \end{array}$$

On dit que $(E, +, .)$ est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$*–espace vectoriel,* si :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif
- pour tout $(x, y) \in E^2$, et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :

(1) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$ (3) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

(2) $1\,x = x$ (4) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

On appelle alors *vecteurs* les élements de E et *scalaires* les éléments de $\mathbb{K}$

Remarque Si α est un scalaire et x un vecteur on ecrit aussi $\alpha\, x$ au lieu de $\alpha.x$. Si $\alpha \neq 0$, le vecteur $\dfrac{1}{\alpha}\, x$ est également noté $\dfrac{x}{\alpha}\cdot$

Exemples

1. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.
2. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont des $\mathbb{R}$–espaces vectoriels.
3. Plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel pour l'addition et la loi externe définies par :
$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) + (x''_1, x''_2, \ldots, x''_n) = (x'_1 + x''_1, x'_2 + x''_2, \ldots, x'_n + x''_n).$$
$$\alpha\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \ldots, \alpha\, x_n).$$
4. En géométrie, l'ensemble des vecteurs du plan constitue un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

   Comme dans le plan ou l'espace, on verra plus loin que l'on peut faire de la géométrie affine dans tout espace vectoriel réel.
5. Si X est un ensemble, $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel pour les opérations $+$ et $.$ définies par :
$$f+g\ :\ \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)+g(t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \alpha.f\ :\ \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha\, f(t). \end{array}$$
6. De même, $\mathcal{F}(X. \mathbb{C})$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
7. En particulier, l'ensemble des suites réelles (respectivement complexes) est muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (respectivement sur $\mathbb{C}$).
8. Plus géneralement, si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et X un ensemble, alors $\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel pour les opérations suivantes :
$$f+g\ :\ \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & f(t)+g(t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \alpha\cdot f\quad \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \alpha\, f(t). \end{array}$$
9. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Remarque Ces derniers exemples sont fondamentaux, car tous les espaces vectoriels utilisés en analyse (fonctions continues dérivables...) sont en fait des sous–espaces vectoriels d'un espace vectoriel du type $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{F}(X, E)$.

Proposition 1

Si E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, alors pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :

1. $0_{\mathbf{K}}\, x = 0_E$ et $\alpha\, 0_E = 0_E$,
2. $-(\alpha\, x) = \alpha\,(-x) = (-\alpha)\, x$.

e nst tion (0_E et $0_{\mathbf{K}}$ representent respectivement le vecteur nul de E et l'élément nul de $\mathbf{K}$)

1. Pour $x \in E$, on a $0_E + 0_{\mathbf{K}}\, x = 0_{\mathbf{K}}\, x = (0_{\mathbf{K}} + 0_{\mathbf{K}})\, x = 0_{\mathbf{K}}\, x + 0_{\mathbf{K}}\, x$. En ajoutant aux deux membres l'opposé de $0_{\mathbf{K}}\, x$, on obtient $0_{\mathbf{K}}\, x = 0_E$.

   De même, pour $\alpha \in \mathbf{K}$, les égalités $\alpha\, 0_E = \alpha\,(0_E + 0_E) = \alpha\, 0_E + \alpha\, 0_E$ entraînent que $\alpha\, 0_E = 0_E$.
2. On a :
$$\alpha\, x + (-\alpha)\, x = (\alpha - \alpha)\, x = 0_{\mathbf{K}}\, x = 0_E,$$
   donc $(-\alpha)\, x$ est l'opposé de $\alpha\, x$, c'est-à-dire $(-\alpha)\, x = -(\alpha\, x)$

   De même on a $\alpha\,(-x) = -(\alpha\, x)$. □

Proposition 2

Si E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, alors pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ on a :
$$\alpha\, x = 0_E \Longrightarrow (\alpha = 0_{\mathbf{K}} \text{ ou } x = 0_E).$$

émonst atio Supposons $\alpha\, x = 0_E$ et $\alpha \neq 0_{\mathbf{K}}$ Comme $\mathbf{K}$ est un corps, α est inversible et :
$$x = 1\, x = \alpha^{-1}\,(\alpha\, x) = \alpha^{-1}\, 0_E = 0_E$$
ce qui prouve le résultat. □

1.2 Combinaisons linéaires

Définition 2

Soient E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, toute vecteur de la forme :
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \qquad \text{où} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n.$$

Si A est une partie de E, on appelle *combinaison linéaire* d'éléments de A toute combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de A.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{C}$ tout complexe est combinaison linéaire à coefficients réels de 1 et i.
2. Dans $\mathbb{K}[X]$, les combinaisons linéaires des éléments de $\{X^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont les polynômes pairs.

1.3 Produit d'espaces vectoriels

Proposition 3

Étant donnés deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels E et F, l'ensemble $E \times F$ muni des lois produit :

- l'addition définie par $(x', y') + (x'', y'') = (x' + x'', y' + y'')$
- la loi externe définie par $\lambda\,(x, y) = (\lambda\, x, \lambda\, y)$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ appelé *espace vectoriel produit.*

Dém nstration

► Muni de l'addition, $E \times F$ est un groupe commutatif puisque :

- la loi $+$ est associative grâce à l'associativité de l'addition dans E et F :

$$\begin{aligned}\big((x,y) + (x',y')\big) + (x'',y'') &= (x + x', y + y') + (x'', y'')\\ &= \big((x + x') + x'', (y + y') + y''\big)\\ &= \big(x + (x' + x''), y + (y' + y'')\big)\\ &= (x,y) + \big((x',y') + (x'',y'')\big).\end{aligned}$$

- de façon similaire, on démontre que la loi $+$ est commutative,
- l'élément $(0_E, 0_F)$ est neutre pour $+$,
- tout élement (x, y) de $E \times F$ admet pour oppose $(-x, -y)$.

Les quatre autres propriétés se déduisent des propriétés correspondantes sur E et F Par exemple, si $(x, y) \in E \times F$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\alpha\,\big(\beta\,(x,y)\big) &= \alpha\,(\beta\, x, \beta\, y)\\ &= \big(\alpha\,(\beta\, x), \alpha\,(\beta\, y)\big)\\ &= \big((\alpha\beta)\, x, (\alpha\beta)\, y\big)\\ &= (\alpha\beta)\,(x,y).\end{aligned}$$

□

1.4 Sous–espaces vectoriels

Dans cette partie, $(E,+,.)$ représente un $\mathbb{K}$–espace vectoriel

Définition 3

Un *sous–espace vectoriel* de E est un sous–groupe de $(E,+)$ qui est stable par multiplication par tout scalaire.

Remarque Pour les lois induites, un sous–espace vectoriel de E est alors un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples

1. $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont des sous–espaces vectoriels du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. E et $\{0\}$ sont des sous–espaces vectoriels de l'espace vectoriel E appelés sous–espaces vectoriels *triviaux* de E.
3. Si F est un sous–espace vectoriel de E, alors $\mathcal{F}(X,F)$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{F}(X,E)$.

Théorème 4

Soit F une partie de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F est un sous–espace vectoriel de E.

(ii) $0 \in F$ et $\Big(\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall(x,y) \in F^2,\ \alpha x + \beta y \in F\Big)$.

ém nst at˙on

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Si F est un sous–espace vectoriel de E, c'est un sous–groupe de $(E,+)$ et il contient donc son élément neutre 0. De plus, la stabilité pour la multiplication par les scalaires α et β prouve que si x et y sont deux éléments de F, alors αx et βy sont dans F, et par suite $\alpha x + \beta y \in F$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$.

- F est stable pour l'addition puisque pour $(x,y) \in F^2$, on a :
$$x + y = 1\,x + 1\,y \qquad \text{avec} \qquad (1,1) \in \mathbb{K}^2.$$
- F est stable pour la multiplication externe puisque pour $x \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :
$$\alpha x = \alpha x + 0\,x \qquad \text{avec} \qquad (\alpha,0) \in \mathbb{K}^2 \quad \text{et} \quad (x,x) \in F^2.$$
- En particulier, si $x \in F$, son opposé $-x = (-1)\,x$ appartient à F.
- L'élément neutre 0 de E appartient à F par hypothèse.

Donc F est un sous–groupe de E, stable par multiplication scalaire. □

Remarques

1. Dans la caractérisation précédente des sous–espaces vectoriels, on peut remplacer l'hypothèse $0 \in F$ par $F \neq \varnothing$, puisque si $x \in F$, on a :
$$0 = 0.x + 0.x \in F.$$
Une autre formulation du théorème précédent est donc : « Un sous–espace vectoriel de E est une partie de E non vide et stable par combinaisons linéaires. »
2. Pour montrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace vectoriel, on montre presque toujours, à l'aide du théorème 4 de la page précédente, que c'est un sous–espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, ce qui est bien plus rapide que de revenir à la définition.

Exemples

1. Les théorèmes généraux sur la continuité montrent que $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$.
C'est une façon rapide de prouver qu'il s'agit d'un espace vectoriel.
2. Si $E = \mathbb{R}^n$, alors $F = \left\{x \in E \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$ est un sous–espace vectoriel de E.
3. En revanche, $F = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$ n'est pas un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, puisqu'il ne contient pas 0.
4. $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant n\}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

2. Sous–espace vectoriel engendré par une partie

2.1 Définition

Proposition 5

Une intersection de sous–espaces vectoriels de E est un sous–espace vectoriel de E.

émonstration

- Tous les sous–espaces vectoriels contiennent 0, donc leur intersection aussi
- Si x et y appartiennent à chacun des sous–espaces vectoriels, alors $\alpha x + \beta y$ aussi, donc $\alpha x + \beta y$ appartient à l'intersection.

Par suite, l'intersection est un sous–espace vectoriel. □

Remarque Ce résultat s'énonce encore : si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille non vide de sous–espaces vectoriels de E, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous–espace vectoriel de E que l'ensemble I soit fini ou non.

Attention Une réunion de sous–espaces vectoriels n'est pas en général un sous–espace vectoriel comme le prouve l'exemple de deux droites vectorielles distinctes dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 6

Soit A une partie de E. Il existe un plus petit sous–espace vectoriel contenant A. On l'appelle *sous–espace vectoriel engendré* par A et on le note $\mathrm{Vect}(A)$ ou $\mathrm{Vect}\, A$.

émonstra ·on Il existe des sous–espaces vectoriels de E qui contiennent A (par exemple E lui–même), et leur intersection est un sous–espace vectoriel de E qui est évidemment le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous–espaces vectoriels de E contenant A □

Exemples

1. Si A est vide, le sous–espace vectoriel engendré par A est $\{0\}$.
2. Dans le $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{C}$:
   - le sous–espace vectoriel engendré par $\{1\}$ est $\mathbb{R}$,
   - le sous–espace vectoriel engendre par $\{i\}$ est l'ensemble des imaginaires purs,
   - le sous–espace vectoriel engendré par $\{1, i\}$ est égal à $\mathbb{C}$.

MPSI

3. Dans le $\mathbb{C}$–espace vectoriel $\mathbb{C}(X)$, le sous–espace vectoriel engendré par $\{X^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble $\mathbb{C}_0(X)$ des fractions rationnelles n admettant pas d'autre pôle que 0. En effet :
   - $\mathbb{C}_0(X)$ est évidemment un sous–espace vectoriel de $\mathbb{C}(X)$
   - tous les X^n (avec $n \in \mathbb{Z}$) sont dans $\mathbb{C}_0(X)$,
   - si F est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{C}(X)$ contenant tous les X^n, il contient toute fraction rationnelle n'admettant pas d'autre pôle que 0, puisque d'après la décomposition en éléments simples, une telle fraction s'écrit comme somme d'un polynôme et d'une combinaison linéaire des X^{-n} pour $n \in \mathbb{N}^*$, c'est–à–dire comme combinaison linéaire des X^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

4. Plus généralement, le théorème de décomposition en éléments simples dit que toute fraction rationnelle est somme d'un polynôme et d'une combinaison linéaire de terme de la forme $\dfrac{1}{(X-a)^n}$ pour $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $\mathbb{C}(X)$ est engendré par :
$$\{X^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\frac{1}{(X-a)^n} \mid a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

2.2 Cas d'une partie finie

Proposition 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une partie finie à n éléments de E. Le sous–espace vectoriel engendré par A est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs a_1, a_2,..., a_n, soit :
$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{y \in E \;\Big|\; \exists(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ :\ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i\right\}.$$

émonstratio Soit $B = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i \;\Big|\; (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$

- $A \subset B$ car pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on a $a_p \in B$ (prendre tous les λ_i nuls sauf λ_p égal à 1)
- B est un sous–espace vectoriel de E
  - il est non vide puisqu'il contient A,
  - il est stable par combinaisons linéaires puisque :
$$\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, a_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\, \lambda_i + \beta\, \mu_i)\, a_i.$$
- Soit F un sous–espace vectoriel de E contenant A. Puisque F est stable pour les deux lois de E et qu'il contient tous les a_i, il contient tous les éléments de B

B est donc bien le plus petit sous–espace vectoriel contenant A. □

Exemples

1. Si a est un élément non nul d un espace vectoriel E, le sous–espace vectoriel engendré par a, est :
$$\mathrm{Vect}\{a\} = \{\lambda\, a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$
On le note aussi $\mathrm{Vect}(a)$ ou $\mathbb{K}\, a$ et on l'appelle *droite vectorielle engendrée* par a.
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est le sous–espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ engendre par $\{1, X, \dots, X^n\}$.

3. Sous–espaces affines

Il s'agit dans cette section de considérer la *structure affine* des espaces vectoriels, c'est–à–dire de mettre en œuvre, sur un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, des outils permettant d'exprimer entre autres :

- que des points sont alignés ou coplanaires
- que des droites ou des plans sont parallèles.

Le corps de base des espaces vectoriels considérés dans cette section est donc $\mathbb{R}$.

Notations Soit E un espace vectoriel. Lorsque l'on fait de la géométrie affine sur E :

- les éléments de E sont, selon la coutume, appelés points,
- si a et b sont deux points de E, on désigne par $\overrightarrow{ab}$ le vecteur $b-a$

Généralement lorsque l'on fait de la géométrie affine, les vecteurs sont représentés par des lettres minuscules, le plus souvent surmontées de flèches ($\vec{\imath}$, $\vec{u}\dots$), et les points par des lettres majuscules (A, B, $M\dots$). En particulier, le point O est l'élément 0 de l'espace vectoriel E.

Avec ces notations, on a :

- $A=B \iff \overrightarrow{AB}=0$,
- $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$,
- $B=A+\vec{u} \iff \vec{u}=\overrightarrow{AB}$,
- $\forall (A,B,C)\in E^3$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (*relation de Chasles*)

3.1 Translations

Définition 4

Si $\vec{u}$ est un élément d'un espace vectoriel E, l'application de E dans E définie par $M\mapsto M+\vec{u}$ est appelée *translation* de vecteur $\vec{u}$. On la note $t_{\vec{u}}$.

Propriétés

- La composée de deux translations est une translation. Plus précisément, on a : $t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}=t_{\vec{u}+\vec{v}}=t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}$.
- La translation $t_{\vec{u}}$ est bijective et admet pour réciproque la translation $t_{-\vec{u}}$.
- La translation $t_{\vec{u}}$ est l'identité si, et seulement si, $\vec{u}=0$.

3.2 Sous–espaces affines

Dans toute la suite de cette section E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 5

- Une partie $\mathcal{F}$ de E est un *sous–espace affine* de E si l'on peut trouver un point Ω de E et un sous–espace vectoriel F de E tels que :
$$\mathcal{F} = \Omega + F = \{\Omega + \vec{u} \mid \vec{u} \in F\}$$
- Si Ω est un point de E et si F est un sous–espace vectoriel de E, le sous–espace affine $\Omega + F$ est appelé *sous–espace affine de E passant par Ω et dirigé par F*.

Remarque Un sous–espace affine est donc l'image d'un sous–espace vectoriel par une translation. Plus précisément, $\Omega+F$ est l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$, ou, d'après la proposition suivante, par n'importe quelle translation de vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ avec $A \in \mathcal{F}$.

Proposition 8

Soit $\mathcal{F}$ le sous–espace affine de E passant par un point Ω et dirigé par un sous–espace vectoriel F. Pour tout point $A \in \mathcal{F}$, on a :
$$\mathcal{F} = A + F \qquad \text{et} \qquad F = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\}.$$

Démonstration

- Pour tout point $A \in \mathcal{F}$, on a $A = \Omega + \vec{u}$ avec $\vec{u} \in F$.
  Par suite, tout élément $M \in A + F$ est de la forme :
  $$M = A + \vec{v} = \Omega + \vec{v} + \vec{u}$$
  avec $\vec{v}$, et donc $\vec{v} + \vec{u}$, dans F. Donc $A + F \subset \Omega + F = \mathcal{F}$.
  Réciproquement, tout élément de $\mathcal{F} = \Omega + F$ est de la forme
  $$M = \Omega + \vec{v} = A + \vec{v} - \vec{u}$$
  avec $\vec{v} \in F$ et l'on en déduit de même $\Omega + F \subset A + F$
- Soit $A \in \mathcal{F}$. On a alors $\mathcal{F} = A + F$ d'après ce qui précède
  - Si $M \in \mathcal{F}$ alors $M = A + \vec{u}$ avec $\vec{u} \in F$, et donc $\overrightarrow{AM} = \vec{u} \in F$.
  - Réciproquement, si $\vec{u} \in F$, alors $M = A + \vec{u} \in A + F = \mathcal{F}$ et donc $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ avec $M \in \mathcal{F}$.

Par conséquent, $F = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\}$. □

Définition 6

Si $\mathcal{F}$ est un sous–espace affine de E, on appelle *direction* de $\mathcal{F}$ l'unique sous–espace vectoriel de E tel que pour tout $A \in \mathcal{F}$ on ait $\mathcal{F} = A + F$

Remarque L'unicité est une conséquence de la proposition précédente, puisque si Ω est un point fixé de $\mathcal{F}$, on a $F = \{\overrightarrow{\Omega M} \mid M \in \mathcal{F}\}$.

Exemples

1. Tout sous–espace vectoriel F de E est un sous–espace affine de E et il est sa propre direction, comme le prouve l'égalité $F = O + F$.
   Réciproquement, si un sous–espace affine contient O, alors l'égalité $\mathcal{F} = O + F$ prouve que $\mathcal{F}$ est égal à sa direction F, donc est un sous–espace vectoriel.
   Un sous–espace affine est donc un sous–espace vectoriel si, et seulement si, il contient O.
2. Le disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ n'est pas un sous–espace affine de $\mathbb{C}$.
3. L'ensemble $\big\{(1+t, 3-2t, -1+3t) \mid t \in \mathbb{R}\big\}$ est un sous–espace affine de $\mathbb{R}^3$: c'est le sous–espace affine passant par $(1, 3, -1)$ et dirigé par $\mathrm{Vect}\big\{(1, -2, 3)\big\}$.
4. $\mathcal{F} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\big\}$ est un sous–espace affine de $\mathbb{R}^3$; c'est le sous–espace affine passant par $(1, 0, 0)$ et dirigé par :
$$F = \big\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha + \beta + \gamma = 0\big\}$$

Droites et plans

1. Une partie $\mathcal{D}$ de E est une *droite affine* s'il existe un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$ tels que $\mathcal{D} = A + \mathbb{K}\vec{u} = \big\{A + \lambda\,\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{K}\big\}$.
   Une telle droite $\mathcal{D}$ se note aussi $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$ et le vecteur $\vec{u}$ est appelé *vecteur directeur* de la droite $\mathcal{D}$. On dit aussi que $\mathcal{D}$ est *dirigée* par $\vec{u}$.
2. Si A et B sont deux points distincts de E, il existe une unique droite affine, notée (AB), passant par A et B : c'est la droite passant par A et dirigée par $\mathrm{Vect}\,\overrightarrow{AB}$.
3. Trois points A, B et C sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont proportionnels.
   - En effet, si A, B et C sont alignés, ils appartiennent à une même droite $\mathcal{D}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ appartiennent à la direction de $\mathcal{D}$ qui est une droite vectorielle.
   - Réciproquement, si $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$, alors :
     - soit $A = B$, et les points A, B et C sont confondus

- soit $A \neq B$ et le point C appartient à la droite (AB) puisque $C = A + \lambda\,\overrightarrow{AB}$.

Dans les deux cas, les points A, B et C sont alignés.

4. Dans le plan, l'ensemble d'équation $a\,x+b\,y+c = 0$, avec $(a.b) \neq (0.0)$, est une droite affine ; elle est dirigée par la droite vectorielle d'équation $a\,x + b\,y = 0$, c'est–à–dire par le vecteur de composantes $(-b, a)$.
   C'est une droite vectorielle si, et seulement si, $c = 0$.
5. Une partie $\mathcal{P}$ de E est un *plan affine* s'il existe un point A et deux vecteurs non proportionnels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\mathcal{P} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Dans ce cas on note aussi $\mathcal{P} = (A, \vec{u}, \vec{v})$.
6. Par trois points non alignés A, B et C passe un unique plan affine : c'est le plan $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

3.3 Parallélisme

Définition 7

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous–espaces affines de E dirigés respectivement par F et G.

- On dit que $\mathcal{F}$ est *parallèle* à $\mathcal{G}$ si $F \subset G$.
- On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *parallèles* si $F = G$

Exemples

1. Deux droites sont parallèles si, et seulement si, elles admettent un vecteur directeur commun.
2. Dans l'espace :
   - une droite peut être parallèle à un plan,
   - deux plans peuvent être parallèles,
   - un plan n'est jamais parallèle à une droite

Remarques

- Soient A un point de E et F un sous–espace vectoriel de E. Si τ est une translation, on a $\tau(A+F) = \tau(A)+F$. Donc $A+F$ et $\tau(A+F)$ sont parallèles.
- Réciproquement si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux sous–espaces affines parallèles, et si $(A_1, A_2) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, alors $\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Proposition 9

1. Si $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varnothing$ ou $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$
2. Deux sous–espaces affines parallèles sont soit disjoints soit confondus

emonstr tion Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous–espaces affines de directions respectives F et G.

1. Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$ et prenons un point $\Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors :
$$\mathcal{F} = \Omega + F \subset \Omega + G = \mathcal{G}.$$

2. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ne sont pas disjoints, alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ puisque $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ parallèle à $\mathcal{F}$ □

3.4 Intersection de sous–espaces affines

Proposition 10

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous–espaces affines de E, de directions respectives F et G. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varnothing$, alors c'est un sous–espace affine de direction $F \cap G$.

émonstration Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$ et prenons $\Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. On a :
$$\mathcal{F} = \left\{\Omega + \vec{u} \;\middle|\; \vec{u} \in F\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = \left\{\Omega + \vec{u} \;\middle|\; \vec{u} \in G\right\}$$
Donc :
$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \left\{\Omega + \vec{u} \;\middle|\; \vec{u} \in F \cap G\right\} = \Omega + (F \cap G)$$
ce qui prouve que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous–espace affine de direction $F \cap G$ □

Proposition 11

Soient A et B deux points ainsi que F et G deux sous–espaces vectoriels de E.

Le sous–espace affine $\mathcal{F}$ passant par A et dirigé par F et le sous–espace affine $\mathcal{G}$ passant par B et dirigé par G ont une intersection non vide si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

nstration

- Si l'on peut trouver $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$, alors le point $M = B - \vec{v} = A + \vec{u}$ est alors à la fois dans $\mathcal{F}$ et dans $\mathcal{G}$, ce qui prouve que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide
- Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide, on peut trouver un point $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

  Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est alors dans F et le vecteur $\overrightarrow{BM}$ dans G. Par suite $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. □

MPSI

3.5 Barycentres

Définition

Proposition 12

Étant donnés des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de E et des reels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de somme non nulle il existe un unique point $G \in E$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

Ce point est appelé *barycentre* des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

émonstration Montrons qu'il existe un unique point $G \in E$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Si Ω est un point de E, en écrivant $\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{\Omega A_i} - \overrightarrow{\Omega G}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{\Omega G}$$

et donc le point G vérifie la relation donnée si, et seulement si,

$$\overrightarrow{\Omega G} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

ce qui prouve l'existence et l'unicité de G □

Remarques

- La relation qui définit un barycentre montre que ce dernier est inchangé si l'on multiplie tous les coefficients par un même scalaire non nul. C'est pourquoi l'on peut toujours utiliser des coefficients de somme 1
- Dans ce cas particulier où $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, le barycentre des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ est caractérisé par :

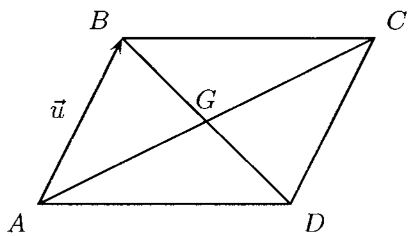
  $$\overrightarrow{\Omega G} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}$$

  où Ω est un point quelconque de E. C'est pourquoi l'on écrit aussi $G = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, confondant ainsi points et vecteurs.

  Dans un espace vectoriel un barycentre est donc un cas particulier de combinaison linéaire dans laquelle la somme des coefficients vaut 1.

Exemples

1. L'*isobarycentre* des points A_1, $A_2,\dots,$ A_n est le barycentre des points A_1, $A_2,\dots,$ A_n affectés du coefficient 1, c'est-à-dire le point $\dfrac{1}{n}A_1 + \dfrac{1}{n}A_2 + \cdots + \dfrac{1}{n}A_n$.
2. Dans le cas particulier de deux points A et B, le point $I = \dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}B$, noté encore $\dfrac{A+B}{2}$ est appelé *milieu* des points A et B
   - L'égalité $\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B}}{2}$ est équivalente à $\overrightarrow{\Omega B} = 2\overrightarrow{\Omega I} - \overrightarrow{\Omega A}$ soit encore à $B = 2I - A$. Le point B est donc le barycentre des points I et A affectés des coefficients 2 et -1.
   - La *symétrie* de centre Ω est donc l'application définie par $M \mapsto 2\Omega - M$. Elle est telle que tout segment reliant un point à son image ait Ω pour milieu.
3. L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le milieu de ses diagonales. En effet, on a $B = A + \vec{u}$ et $D = C - \vec{u}$. L'isobarycentre G vérifie donc :
   $\vec{0} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC}$,
   ce qui prouve que G est le milieu des points A et C et, par symétrie, de B et D.



Propriétés

Proposition 13

Une translation conserve les barycentres, ce qui signifie que si $\vec{u}$ est un vecteur de E, et si A_1, $A_2,\dots,$ A_n sont des points de E et λ_1, $\lambda_2,\dots,$ λ_n des réels dont la somme vaut 1, on a :

$$t_{\vec{u}}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_{\vec{u}}(A_i).$$

em nstratio Si on note $A_i' = t_{\vec{u}}(A_i) = A_i + \vec{u}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i'} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} + \vec{u}$$

puisque $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, ce qui prouve le résultat

□

Corollaire 14

Une application affine conserve les barycentres ce qui signifie que si f est une application affine de E dans F, et si A_1, $A_2, \dots$, A_n sont des points de E et λ_1, $\lambda_2, \dots$, λ_n des réels dont la somme vaut 1, on a .

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(A_i).$$

Démonstration Toute application affine est composée d'une translation et d'une application linéaire, et ces dernières conservent les barycentres. □

Remarque Si l'on suppose seulement $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, le résultat précédent s'écrit :

$$f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

Exemples

1. Par une application affine, le milieu des images est l'image du milieu.
2. L'image par une application affine du centre de gravité d'un triangle (isobarycentre des sommets) est le centre de gravité du triangle image.

Proposition 15

Un sous–espace affine est stable par passage au barycentre.

Démonstration C'est évident pour un sous–espace vectoriel, puisqu'il est stable par combinaisons linéaires Comme tout sous–espace affine est le translaté de sa direction et qu'une translation conserve les barycentres, on en déduit le résultat pour tout sous–espace affine. □

Exemples

1. Les barycentres de deux points distincts A et B sont sur la droite (AB).
   Réciproquement, soit M un point de la droite (AB). On peut alors trouver un réel λ tel que $M = A + \lambda \overrightarrow{AB}$, et $M = (1 - \lambda) A + \lambda B$ est donc un barycentre de A et B.
   Un paramétrage de la droite (AB) est donc :
   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & (AB) \\ \lambda & \longmapsto & (1-\lambda) A + \lambda B. \end{array}$$
2. On démontre de même que l'ensemble des barycentres de trois points non alignes est le plan contenant ces trois points.

Proposition 16 (Associativité des barycentres)

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des points de E. Etant donnés des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \neq 0$, si :

- G_k est le barycentre des points $A_1, A_2, \ldots, A_k$ affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$,
- G est le barycentre des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

alors G est le barycentre des points $G_k, A_{k+1}, \ldots, A_n$ affectés des coefficients $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$.

émonstratio Soit Ω un point de E. On a :

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \overrightarrow{\Omega G_k} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i}$$

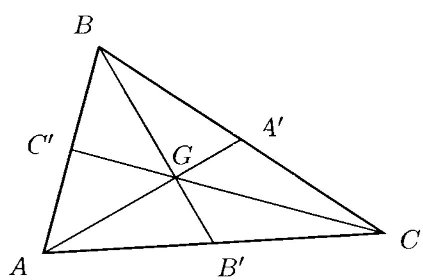
et donc :

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \overrightarrow{\Omega G_k} + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i}. = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{\Omega G}$$

ce qui prouve le résultat □

Exemple

Soient A B et C trois points, A' le milieu de BC et G le centre de gravité du triangle ABC. On a :



$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \\ &= \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) \\ &= \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A'. \end{aligned}$$

Le point G est donc à l'intersection des médianes (AA'), (BB') et (CC').

Convexité

On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 8

Soient A et B deux points de E. On appelle *segment* d'extrémités A et B noté $[AB]$, l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients positifs, c'est-à-dire :

$$[AB] = \{t\,A + (1-t)\,B \mid t \in [0,1]\}.$$

Remarque L'application :

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [AB] \\ t & \longmapsto & t\,A + (1-t)\,B \end{array}$$

est un paramétrage du segment $[AB]$.

Définition 9

Soit $\mathcal{C}$ une partie d'un espace affine E. On dit que $\mathcal{C}$ est convexe si :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{C}^2\,,\ [AB] \subset \mathcal{C}.$$

Exemples

1. Un sous–espace affine est convexe, puisqu'il est stable par passage au barycentre.
2. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes. Comme on l a vu dans le chapitre sur les réels, ce sont les seules parties convexes de $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 est convexe. En effet, si $|z| \leqslant 1$ et $|z'| \leqslant 1$, alors pour $t \in [0.1]$, on a :

$$\left|t\,z + (1-t)\,z'\right| \leqslant t|z| + (1-t)|z'| \leqslant t + (1-t) = 1.$$

4. Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si, et seulement si, son épigraphe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\,,\ y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe du plan (voir le chapitre 13). MPSI

4. Applications linéaires

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

4.1 Définition, caractérisation

Définition 10

Une application $f : E \longrightarrow F$ est une *application linéaire* si :

$$\forall (x,y) \in E^2\,,\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2\,,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

On dit aussi que f est un *morphisme d'espaces vectoriels.*

On parle :

- d'*endomorphisme* si $E = F$,
- d'*isomorphisme* si f est bijective,
- d'*automorphisme* si f est bijective et si $E = F$.

Remarques

1. Si f est linéaire de E dans F, on a $f(0_E) = 0_F$ puisque :
$$f(0_E) = f(0_{\mathbb{K}}\, 0_E) = 0_{\mathbb{K}}\, f(0_E) = 0_F.$$
2. Si f est une application linéaire de E dans F on a immédiatement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(x_i).$$

Exemples

1. Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $x \mapsto kx$, avec $k \in \mathbb{R}$.

   En effet, celles–ci sont évidemment linéaires, et si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}$, alors on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x\,1) = k\,x \qquad \text{avec} \qquad k = f(1).$$
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $x \mapsto \lambda x$ de E dans E (*homothétie* de rapport λ) est une application linéaire.

3. Une translation de vecteur $\vec{u} \neq 0$ n'est pas linéaire puisque $t_{\vec{u}}(0) = \vec{u} \neq 0$.

4. Pour $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, l application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & ax + by \end{array}$ est linéaire.

5. Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (ax + by, cx + dy) \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^2$.

6. La dérivation est une application linéaire de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

Sa restriction à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

7. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & af'' + bf' + cf \end{array}$$

est une application lineaire.

Définition 11

On appelle *forme linéaire sur E* une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples

1. Pour $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & ax + by \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$.

2. L'intégrale sur le segment $I = [a, b]$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \end{array}$$

3. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application $P \mapsto P(\alpha)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$

4.2 Noyau, image d'une application linéaire

Rappels (Voir page 5 ainsi que page 1036)

Si f est une application de E dans F :

- l'image directe par f d'une partie E' de E est :

$$f(E') = \{f(x) \mid x \in E'\},$$

- l'image réciproque par f d'une partie F' de F est :

$$f^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}.$$

Proposition 17

Soit f une application linéaire de E dans F

- Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

- Soient E' un sous-espace vectoriel de E et $F_0 = f(E') \subset F$
  - Puisque $0 \in E'$, on a $0 = f(0) \in F_0$.
  - Soient $(\alpha', \alpha'') \in \mathbb{K}^2$ et $(y', y'') \in F_0^2$. On peut trouver $(x', x'') \in E'^2$ tel que $y' = f(x')$ et $y'' = f(x'')$ et donc .

$$\alpha' y' + \alpha'' y'' = \alpha' f(x') + \alpha'' f(x'') = f(\alpha' x' + \alpha'' x'') \in F_0$$

    puisque $\alpha' x' + \alpha'' x'' \in E'$.

  Par suite, F_0 est un sous-espace vectoriel de F

- Soient F' un sous-espace vectoriel de F et $E_0 = f^{-1}(F') \subset E$
  - Puisque $f(0) = 0 \in F'$ on a $0 \in E_0$.
  - Soient $(x', x'') \in E_0^2$ et $(\alpha', \alpha'') \in \mathbb{K}^2$. Alors $f(x') \in F'$ et $f(x'') \in F'$ donc :

$$f(\alpha' x' + \alpha'' x'') = \alpha' f(x') + \alpha'' f(x'') \in F'$$

    puisque F' est un sous-espace vectoriel, et par suite $\alpha' x' + \alpha'' x'' \in E_0$

  Donc E_0 est un sous-espace vectoriel de E. □

Définition 12

Étant donnée une application linéaire $f : E \longrightarrow F$, on appelle :

- *noyau* de f, le sous–espace vectoriel de E :

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0\},$$

- *image* de f, le sous–espace vectoriel de F :

$$\operatorname{Im} f = f(E).$$

Théorème 18

Soit f une application linéaire de E dans F Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective

(ii) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

(iii) $\forall x \in E\,,\ f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

émonstration

- La propriété (iii) est équivalente à $\operatorname{Ker} f \subset \{0\}$, donc à (ii) puisque le noyau de f est un sous–espace vectoriel donc contient 0.
- Supposons f injective. Si $x \in \operatorname{Ker} f$ alors $f(x) = 0 = f(0)$ donc $x = 0$ puisque f est injective.
- Supposons $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors :

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = 0,$$

c'est–à–dire $x - y \in \operatorname{Ker} f$. Donc $x - y = 0$, ce qui donne $x = y$.
Donc f est injective. □

Remarque Lorsque l'on sait qu'une application est linéaire, pour démontrer son injectivité on utilise systématiquement la propriété (ii) ou sa traduction (iii).

4.3 Structures de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$

Notations

- $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F

  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E

Proposition 19

Étant donnés deux applications linéaires f et g de E dans F, ainsi que deux scalaires λ et μ, l'application $\lambda f + \mu g$ est linéaire.

stra i Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned}
&(\lambda f + \mu g)(\alpha x + \beta y) \\
&\quad = \lambda f(\alpha x + \beta y) + \mu g(\alpha x + \beta y) && \text{(définition de } \lambda f + \mu g\text{)} \\
&\quad = \lambda \big(\alpha f(x) + \beta f(y)\big) + \mu \big(\alpha g(x) + \beta g(y)\big) && \text{(linéarité de } f\text{)} \\
&\quad = \alpha \big((\lambda f + \mu g)(x)\big) + \beta \big((\lambda f + \mu g)(y)\big). && \text{(définition de } \lambda f + \mu g\text{)}
\end{aligned}$$

□

Proposition 20

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
- Si f est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E dans F alors f^{-1} est linéaire.

emonstration

- Pour $(x, y) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\alpha x + \beta y) &= g\big(f(\alpha x + \beta y)\big) \\
&= g\big(\alpha f(x) + \beta f(y)\big) \\
&= \alpha g\big(f(x)\big) + \beta g\big(f(y)\big) \\
&= \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y)
\end{aligned}$$

  et donc $g \circ f$ est linéaire.

- Soient $(x, y) \in F^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

  Comme f est injective, pour montrer que $f^{-1}(\alpha x + \beta y)$ et $\alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y)$ sont égaux, il suffit de montrer qu'ils ont même image par f. Or :

$$\begin{aligned}
f\big(\alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y)\big) &= \alpha f\big(f^{-1}(x)\big) + \beta f\big(f^{-1}(y)\big) \\
&= \alpha x + \beta y \\
&= f\big(f^{-1}(\alpha x + \beta y)\big).
\end{aligned}$$

  Donc f^{-1} est linéaire □

Proposition 21

$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

émonstration

- L'application nulle est linéaire,
- d après la proposition 19 de la page précédente, l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est stable par combinaisons linéaires.

Donc $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous–espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E.F)$. □

Proposition 22

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

1. Si φ et ψ sont deux applications linéaires de F dans G, on a :
$$(\alpha\varphi + \beta\psi) \circ u = \alpha\,(\varphi \circ u) + \beta\,(\psi \circ u).$$
2. Si φ et ψ sont deux applications linéaires de E dans F, on a :
$$v \circ (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\,(v \circ \varphi) + \beta\,(v \circ \psi).$$

Autrement dit, les applications :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F.G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ \varphi & \longmapsto & v \circ \varphi \end{array}$$
sont linéaires

émonstration Le premier résultat provient de la définition de $\alpha\varphi + \beta\psi$ alors que le deuxième est une conséquence de la linéarité de v. □

Proposition 23

$(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau (non commutatif en général).

Démonstration

- $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel (proposition 21 de la page précédente) donc un groupe commutatif pour l'addition.
- Il est stable pour la composition des applications (proposition 20 de la page precédente)
- Il contient l'identité qui est élément neutre.

  La composition des applications est associative.

  La distributivité de $\circ$ par rapport à $+$, c'est-à-dire les relations :
$$(f+g)\circ h = (f\circ h) + (g \circ h) \qquad \text{et} \qquad f \circ (g+h) = (f\circ g) + (f \circ h).$$
  pour tout $(f,g,h) \in \mathcal{L}(E)^3$, est une consequence de la proposition precedente □

Notation On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de l espace vectoriel E.

Proposition 24

$(GL(E), \circ)$ est un groupe. On l'appelle groupe linéaire de E.

é ns rati

- La proposition 20 de la page 799 montre que le composé de deux automorphismes est linéaire. D'autre part c'est une bijection, donc il appartient à $GL(E)$ Ainsi $GL(E)$ est stable par composition.
- Comme sur $\mathcal{L}(E)$, la composition est associative.
- L'identité appartient à $GL(E)$.
- La proposition 20 de la page 799 montre que si $f \in GL(E)$, alors f est bijective et que f^{-1} appartient aussi à $GL(E)$. Tout élément de $GL(E)$ admet donc un symétrique □

Remarque C'est le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

4.4 Applications affines

Soient E et F deux espaces vectoriels.

Définition, exemples

Définition 13

On dit qu'une application f de E dans F est *affine* s'il existe une application linéaire φ de E dans F telle que :

$$\forall (A, B) \in E^2\,,\ \overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB}).$$

L'application linéaire φ est alors unique ; on l'appelle *application linéaire associée* à f et on la note $\vec{f}$.

émonst ati L'unicité vient du fait que si Ω est un point fixé de E, on a :

$$\forall \vec{u} \in E\,,\ \varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{f(\Omega)f(\Omega + \vec{u})}.$$ □

Exemple Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. La translation de vecteur $\vec{u}$ est affine. Son application linéaire associée est l'identité.

En effet, on a, pour $(A, B) \in E^2$:

$$f(B) = B + \vec{u} = A + \vec{u} + \overrightarrow{AB} = f(A) + \overrightarrow{AB}$$

Proposition 25

Une application f de E dans F est affine si, et seulement si, elle est la somme d'une constante et d'une application linéaire. Cette dernière est alors l'application linéaire associée à f.

émonstration

- Si f est affine, on a :

$$\forall x \in E, \ f(x) = f(O) + \vec{f}(x)$$

et donc f est la somme de l'application constante $f(O)$ et de l'application linéaire $\vec{f}$.

- Réciproquement, si f est la somme d'une application constante et d'une application linéaire φ, alors pour $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\overrightarrow{f(x)f(y)} = f(y) - f(x) = \varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y - x) = \varphi(\overrightarrow{xy}).$$

□

Remarques

- En particulier, une application linéaire est affine.
- Une application affine f de E dans F est linéaire si, et seulement si, $f(O) = O$. Elle est alors sa propre application linéaire associée.
- Une application affine est caractérisée par l'image de O et son application linéaire associée, ou plus généralement par l'image d'un point Ω et son application linéaire associée, comme le prouve la relation :

$$\forall M \in E, \ f(M) = f(\Omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M}).$$

Exemples

1. Les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont $x \mapsto \alpha x + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. Les applications affines de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont $(x, y) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Applications affines et sous–espaces affines

Proposition 26

Si $\mathcal{E}'$ est un sous–espace affine de E de direction E', et f une application affine de E dans F, alors $f(\mathcal{E}')$ est un sous–espace affine de F de direction $\vec{f}(E')$.

é onstra i Si Ω est un point de $\mathcal{E}'$, on a $\mathcal{E}' = \{\Omega + \vec{u} \mid \vec{u} \in E'\}$. Donc :

$$\begin{aligned} f(\mathcal{E}') &= \{f(\Omega + \vec{u}) \mid \vec{u} \in E'\} \\ &= \{f(\Omega) + \vec{f}(\vec{u}) \mid \vec{u} \in E'\} \\ &= \{f(\Omega) + \vec{v} \mid \vec{v} \in \vec{f}(E')\}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $f(\mathcal{E}')$ est le sous–espace affine passant par $f(\Omega)$ et dirigé par $\vec{f}(E')$ □

Corollaire 27

Une application affine conserve l'alignement et le parallélisme.

´monstration

- L'image par une application affine f d'une droite de direction D est un sous–espace affine dirigé par le sous–espace vectoriel $\vec{f}(D)$ de dimension inférieure ou égale à 1

  $f(\mathcal{D})$ est donc soit un point, soit une droite dirigée par $\vec{f}(D)$.

  Par suite, des points alignés ont leurs images confondues ou sur une même droite affine, et par conséquent alignées.
- Si $\mathcal{E}_1$ est un sous–espace affine parallèle à un sous–espace affine $\mathcal{E}_2$, alors leurs directions respectives E_1 et E_2 vérifient $E_1 \subset E_2$.

  Comme $f(\mathcal{E}_1)$ et $f(\mathcal{E}_2)$ sont respectivement dirigés par $\vec{f}(E_1)$ et $\vec{f}(E_2)$ et que $\vec{f}(E_1) \subset \vec{f}(E_2)$, on en déduit que $f(\mathcal{E}_1)$ est parallèle à $f(\mathcal{E}_2)$. □

Exemples

1. Les translations, homothéties et rotations, et plus généralement les similitudes directes du plan euclidien (étudiées au chapitre 2) sont des applications affines ; elles conservent en particulier l'alignement et le parallélisme.

   En effet, une telle application est représentée dans le plan complexe par $z \mapsto az + b$, donc est somme d'une constante et de l'application linéaire $z \mapsto az$.
2. En revanche, les inversions du plan euclidien transforment des droites en des cercles, donc ne sont pas des applications affines.

Composition, transformations affines

Proposition 28

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Si f est une application affine de E dans F et g une application affine de F dans G alors $g \circ f$ est une application affine de E dans G et :

$$\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}.$$

émons rati Soient A et B deux points de E. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{(g\circ f)(A)(g\circ f)(B)} &= \vec{g}\Big(\vec{f}(\overrightarrow{AB})\Big)\\ &= \vec{g}\circ\vec{f}(\overrightarrow{AB})\end{aligned}$$

ce qui prouve que $g\circ f$ est une application affine d'application linéaire associée $\vec{g}\circ\vec{f}$ □

Définition 14

On appelle *transformation affine* de E une application affine bijective de E dans E.

Proposition 29

Une application affine de E dans E est une transformation affine si, et seulement si, son application linéaire associée est un automorphisme de l'espace vectoriel E.

émonstratio Soit f une application affine de E dans E

- Supposons f bijective Pour tout vecteur $\vec{v}\in E$, l'équation $\vec{f}(\vec{u})=\vec{v}$ possède une unique solution puisque l'on a :

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{u})=\vec{v} &\iff f(O)+\vec{f}(\vec{u})=f(O)+\vec{v}\\ &\iff f(O+\vec{u})=f(O)+\vec{v}\\ &\iff O+\vec{u}=f^{-1}\left(f(O)+\vec{v}\right)\\ &\iff \vec{u}=\overrightarrow{Of^{-1}\big(f(O)+\vec{v}\big)}.\end{aligned}$$

  L'application $\vec{f}$ est donc bijective

- Supposons $\vec{f}$ bijective et prenons Ω un point de E
  Pour tout $B\in E$, on a :

$$\begin{aligned}f(M)=B &\iff \overrightarrow{f(\Omega)f(M)}=\overrightarrow{f(\Omega)B}\\ &\iff \vec{f}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)=\overrightarrow{f(\Omega)B}\\ &\iff \overrightarrow{\Omega M}=\vec{f}^{-1}\left(\overrightarrow{f(\Omega)B}\right)\end{aligned}$$

  ce qui prouve que l'équation $f(M)=B$ possède une solution et une seule et donc que f est bijective. □

Proposition 30

1. La composée de deux transformations affines est une transformation affine.
2. La réciproque d'une transformation affine est une transformation affine.

ém nst atio

1. On sait déjà (proposition 28 de la page 803) qu'une composée d'applications affines est affine Donc une composée de bijections affines est aussi une bijection affine.
2. Soit f une transformation affine de E

   Pour $(A,B) \in E^2$, on a :

$$\vec{f}\left(\overrightarrow{f^{-1}(A)f^{-1}(B)}\right) = \overrightarrow{f(f^{-1}(A))f(f^{-1}(B))} = \overrightarrow{AB}$$

   et donc :

$$\overrightarrow{f^{-1}(A)f^{-1}(B)} = (\vec{f}\,)^{-1}(\overrightarrow{AB})$$

   ce qui prouve que f^{-1} est affine et que son application linéaire associée est $\left(\vec{f}\,\right)^{-1}$ □

Remarques

- L'ensemble des transformations affines d'un espace affine E est un groupe pour la composition des applications appelé *groupe affine* de E et noté $GA(E)$.
- D'après la proposition 28 de la page 803, l'application $f \mapsto \vec{f}$ est un morphisme de groupes de $GA(E)$ dans $GL(E)$.

Homothéties, translations

Proposition 31

Une application affine f de E dans E est une translation si, et seulement si, $\vec{f} = \mathrm{Id}_E$.

émonstration

- On sait déjà que si f est une translation, alors $\vec{f} = \mathrm{Id}_E$.
- Réciproquement, soit f une application affine dont l'application linéaire associée est l'identité

  Prenons $A \in E$ et posons $\vec{u} = \overrightarrow{Af(A)}$. Pour $M \in E$, on a alors :

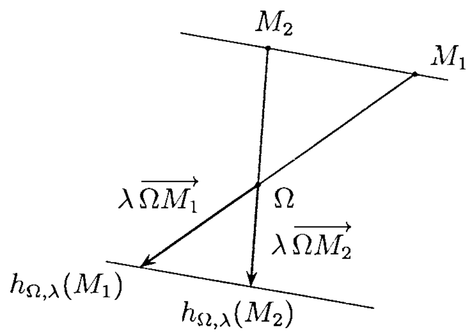
$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{AM} = A + \vec{u} + \overrightarrow{AM} = M + \vec{u}$$

  ce qui prouve que f est la translation de vecteur $\vec{u}$ □

Définition 15

Soit Ω un point de E et λ un réel non nul. On appelle *homothétie* de centre Ω et de rapport λ, l'application $h_{\Omega,\lambda}$:

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \Omega + \lambda\,\overrightarrow{\Omega M}. \end{array}$$



Proposition 32

L homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \neq 0$ est une application affine bijective. Son application linéaire associée est l'homothétie vectorielle $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.

émonstratio Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport λ D'après la définition, on a immédiatement $h(\Omega) = \Omega$ et donc :

$$\forall M \in E,\ h(M) = h(\Omega) + \lambda\,\mathrm{Id}_E(\overrightarrow{\Omega M}),$$

ce qui prouve que h est affine d'application linéaire associée $\lambda\,\mathrm{Id}_E$. Comme de plus cette dernière est bijective, on en déduit que h est bijective. □

Exemples

1. Une homothétie de rapport 1 est l'identité.
2. L'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est aussi appelée *symétrie centrale* par rapport à Ω.
3. L'image d'une droite $\mathcal{D}$ par une homothétie (de rapport non nul) est une droite parallèle à $\mathcal{D}$. Plus genéralement un sous–espace affine et son image par une telle homothétie sont parallèles, car les homothéties vectorielles $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \neq 0$ laissent invariants tous les sous–espaces vectoriels de E.

Proposition 33

Soient λ un réel non nul et f une application affine telle que $\vec{f} = \lambda\ \mathrm{Id}_E$.

1. Si $\lambda = 1$, alors f est une translation.
2. Si $\lambda \neq 1$, alors f est une homothétie de rapport λ.

Démonstration

1. Déjà vu.

2. Supposons $\lambda \neq 1$.

- L'application f admet un unique point fixe, car si A est un point donne de E, on a :

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff f(A) + \lambda\,\overrightarrow{AM} = M \\ &\iff \overrightarrow{f(A)M} = \lambda\,\overrightarrow{AM} \\ &\iff (\lambda - 1)\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{f(A)A} \\ &\iff M = A + \frac{1}{\lambda - 1}\,\overrightarrow{f(A)A}. \end{aligned}$$

- En appelant Ω ce point fixe, on a :

$$\forall M \in E\,,\ f(M) = f(\Omega) + \lambda\,\overrightarrow{\Omega M} = \Omega + \lambda\,\overrightarrow{\Omega M}$$

ce qui prouve que f est l'homothétie de centre Ω et de rapport λ

□

Exemple Soient deux homothéties $h_1 = h_{A_1,\lambda_1}$ et $h_2 = h_{A_2,\lambda_2}$.

- Si $\lambda_1\,\lambda_2 = 1$, la composée $t = h_1 \circ h_2$ est une translation. Comme :

$$t(A_2) = h_1(A_2) = A_1 + \lambda_1\,\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 + (\lambda_1 - 1)\,\overrightarrow{A_1A_2},$$

  on en déduit que t est la translation de vecteur $(\lambda_1 - 1)\,\overrightarrow{A_1A_2}$.

- Si $\lambda_1\,\lambda_2 \neq 1$, la composée $h = h_1 \circ h_2$ est une homothétie de rapport $\lambda_1\,\lambda_2$ Son centre est son unique point fixe A. Pour le déterminer on peut écrire :

$$\begin{aligned} h_2(A) &= A_2 + \lambda_2\,\overrightarrow{A_2A} \\ A = h_1\big(h_2(A)\big) &= h_1(A_2) + \lambda_1\,\lambda_2\,\overrightarrow{A_2A} \\ &= A_1 + \lambda_1\,\overrightarrow{A_1A_2} + \lambda_1\,\lambda_2\,\overrightarrow{A_2A}. \end{aligned}$$

  On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1A} &= \lambda_1\,\overrightarrow{A_1A_2} + \lambda_1\,\lambda_2\,\overrightarrow{A_2A} \\ &= \lambda_1\,\overrightarrow{A_1A_2} + \lambda_1\,\lambda_2\,\overrightarrow{A_2A_1} + \lambda_1\,\lambda_2\,\overrightarrow{A_1A} \end{aligned}$$

  et le point A est caractérisé par :

$$\overrightarrow{A_1A} = \frac{\lambda_1(1 - \lambda_2)}{1 - \lambda_1\,\lambda_2}\,\overrightarrow{A_1A_2}.$$

4.5 Applications bilinéaires

Définition 16

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$–espaces vectoriels On dit qu'une application $S\ :\ E \times F \mapsto G$ est *bilinéaire* si pour tout $(x\ y) \in E \times F$, les applications :

$$\begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & S(x,t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & S(t,y) \end{array}$$

sont linéaires.

On appelle *forme bilinéaire* sur E une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$.

Exemples

1. L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z,z') & \longmapsto & zz' \end{array}$$

   est une application bilinéaire sur le $\mathbb{C}$–espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.

2. Si E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

   est une application bilinéaire.

3. Les résultats de la proposition 22 de la page 800 peuvent s'énoncer en disant que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ (u,v) & \longmapsto & v \circ u \end{array}$$

   est bilinéaire.

4. L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E.F) \times E & \longrightarrow & F \\ (u,x) & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

   est bilinéaire.

5. L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ (A.B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

   est une application bilinéaire.

6. L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (P,Q) & \longmapsto & PQ \end{array}$$

   est une application bilinéaire.

7. Dans le plan ou l'espace euclidien, le produit scalaire est une forme bilinéaire.
8. Dans le plan euclidien, le déterminant Det est une forme bilinéaire.
9. Dans l'espace euclidien, le produit vectoriel est une application bilinéaire.

5. Équations linéaires

5.1 Définition, exemples

Définition 17

Une *équation linéaire* est une équation du type $u(x) = b$, où :

- u est une application lineaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F,
- b est un vecteur de F
- l'inconnue x est dans E.

Le vecteur b est appelé *second membre* de l'équation linéaire.

Exemples

1. Un système linéaire de n équations à p inconnues du type :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où les données sont les éléments $a_{i,j}$ et b_i de $\mathbf{K}$, et où l'inconnue est le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbf{K}^p$.

2. Une équation différentielle linéaire du premier ordre du type :

$$a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)$$

où les données sont les fonctions a, b et c continues sur un intervalle I, et où l'inconnue est la fonction y. L'application linéaire est :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & a\,y' + b\,y \end{array}$$

et le second membre est $c \in \mathcal{C}^0(I)$.

3 De même pour une équation différentielle linéaire du second ordre du type :

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = d(t).$$

5.2 Structure de l'ensemble des solutions

Soient u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, et b un élément de F.

Dans la suite, on considère l'equation linéaire :

$$u(x) = b. \tag{$\mathcal{E}$}$$

On note S l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et S_0 l'ensemble des solutions de :

$$u(x) = 0 \tag{$\mathcal{E}_0$}$$

appelée *équation homogène* (ou *équation sans second membre*) associée à $(\mathcal{E})$.

Proposition 34

1. S_0 est un sous–espace vectoriel de E · il est en particulier non vide.
2. Si $S \neq \varnothing$ et si x_0 est un élément de S, alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est :
$$S = \left\{x_0 + h \;\middle|\; h \in S_0\right\}.$$
L'ensemble des solutions, s'il est non vide, est donc un sous–espace affine de E

émonstration

1. $S_0 = \operatorname{Ker} u$; c'est donc un sous–espace vectoriel.
2. Soit $x_0 \in S$.
   - Si $h \in S_0$, alors $u(h) = 0$ donc $u(x_0 + h) = u(x_0) + u(h) = b + 0 = b$, et $x_0 + h \in S$.
   - Soit $x \in S$. Alors $u(x) = b = u(x_0)$. Donc $u(x - x_0) = 0$ et $x = x_0 + h$ avec $h = x - x_0 \in S_0$. □

Remarque On énonce le résultat précédent en disant que la solution d'une équation linéaire est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Exemples

1. Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre du type :
$$a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = d(t),$$
on cherche une solution particulière, et on lui ajoute la solution générale de l'équation :
$$a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = 0.$$
2. De même pour une équation différentielle linéaire du premier ordre.

EXERCICES

1. Soit $E(+,.)$ un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. On definit une autre loi externe sur E par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ , \forall x \in E\ \lambda \star x = \mathrm{Re}(\lambda).x$$

L'ensemble $(E, +, \star)$ est-il un $\mathbb{C}$ espace vectoriel ?

2. Parmi les sous ensembles suivants de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$ lesquels en sont des sous-espaces vectoriels ?

a) L'ensemble des fonctions dérivables en 0.

b) L'ensembles des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.

c) L'ensemble des fonctions prenant la valeur 1 en 0.

3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

4. Dans $\mathbb{K}^3$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on considère l ensemble :

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3\ : x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz = 0\right\}.$$

Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$?

5. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G et contenant respectivement les points A et B.
Montrer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ si et seulement si $F \subset G$ et $\overrightarrow{AB} \in G$.

6. Dans E, on considère deux triplets de points (A, B, C) et (A', B', C') ainsi que G et G' les isobarycentres respectifs des triangles ABC et $A'B'C'$.
Montrer que :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

7. On appelle enveloppe convexe d'une partie non vide A de E la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe de E qui contient A.

a) Montrer que l'enveloppe convexe $C_v(A)$ d'une partie A existe et est égale à l'intersection de toutes les parties convexes qui contiennent A.

b) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n points de E.
Montrer que l enveloppe convexe de ces n points est égale à l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de ces n points.

8. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que :

- $\operatorname{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\operatorname{Ker} g)$
- $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$
- $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.

9. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E. Montrer que si f et g commutent alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

10. Soient f et g deux formes linéaires sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E telles que $\forall x \in E\ ,\ f(x)g(x) = 0$.
Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

11. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x) = x \wedge u.$$

a) Montrer que f est linéaire.

b) f est-elle injective ?

c) Montrer que f^3 et f sont proportionnelles.

12. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que :

$$\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

13. Sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit l'application φ par $\varphi(f) = g$ où g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ g(x) = \int_0^x t f(t)\, dt.$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E.
Est-il injectif, surjectif ?

14. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et U l'endomorphisme de E défini par :

$$U(f) = f' - 2xf$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le noyau de U^n.

15. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et g un endomorphisme de E. On définit φ_g de $\mathcal{L}(E)$ sur lui-même par $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi_g(f) = f \circ g - g \circ f$.

- Montrer que φ_g est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
- Montrer que si g est *nilpotent*, c'est–à–dire s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^n = 0$ alors φ_g l'est également.

16. Soient f une transformation affine de E et h l'homothétie de centre A et de rapport $k \neq 1$.
Montrer que $f \circ h \circ f^{-1}$ est une homothétie dont on donnera le rapport et le centre.

17. Quelles sont les applications affines qui commutent avec toutes les translations ?

18. Soit f une application affine de E.
Montrer que l'ensemble des points invariants de f est soit vide, soit un sous-espace affine dirigé par le sous espace vectoriel des vecteurs invariants par $\vec{f}$.

19. Dans un espace E, on considère h_1 l'homothétie de centre Ω_1 et de rapport $k \neq 0$ et h_2 l'homothétie de centre Ω_2 et de rapport $\frac{1}{k}$.
Montrer que $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont des translations.
Peut-on avoir $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$?

20 Soit f une application de E dans F.
Montrer que f est affine si et seulement si f conserve le barycentre

Chapitre 28

Sous–espaces supplémentaires et bases d'un espace vectoriel

1. Sous–espaces vectoriels supplémentaires

1.1 Somme de sous–espaces vectoriels

On a vu page 783 que la réunion de deux sous–espaces vectoriels F et G de E n'est pas en général un sous–espace vectoriel. Le plus petit sous–espace vectoriel contenant F et G est donc le sous–espace vectoriel engendré par $F \cup G$ qui est en général différent de $F \cup G$.

Proposition 1

Si F et G sont deux sous–espaces vectoriels de E, le plus petit sous–espace vectoriel contenant F et G est :

$$H = \Big\{x + y \;\Big|\; (x, y) \in F \times G\Big\}.$$

On l'appelle *somme* de F et G et on le note $F + G$.

émonstration

- On a $F \subset H$ car $\forall x \in F$, $x = x + 0$ avec $0 \in G$. De même, $G \subset H$.
- D'après le premier point, H est non vide.

  Si $(u_1, u_2) \in H^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, on peut écrire :

  $$u_1 = x_1 + y_1 \quad \text{et} \quad u_2 = x_2 + y_2 \qquad \text{avec} \qquad (x_1, x_2) \in F^2 \quad \text{et} \quad (y_1, y_2) \in G^2.$$

  On a :

  $$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

  avec $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$ et $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in G$ puisque F et G sont des sous–espaces vectoriels, et on en déduit $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in H$.

  Donc H est un sous–espace vectoriel de E.

- Soit H' un sous–espace vectoriel de E contenant F et G. Étant donné $u \in H$, prenons $(x, y) \in F \times G$ tels que $u = x + y$. Alors $x \in H'$ et $y \in H'$, donc $u = x + y \in H'$. Par suite, H' contient H.

Donc H est bien le plus petit sous–espace vectoriel de E contenant F et G □

Exemples

1. Si $E = \mathbb{K}^2$, alors $E = \mathrm{Vect}\{(1,0)\} + \mathrm{Vect}\{(1,1)\}$ puisque tout élément $(x, y) \in E$ peut s'écrire sous la forme $(x - y)(1, 0) + y(1, 1)$.
2. Si F, G et H sont trois sous–espaces vectoriels d'un espace vectoriel E le plus petit sous–espace vectoriel contenant F, G et H est
$$F + G + H = \Big\{x + y + z \;\Big|\; (x, y, z) \in F \times G \times H\Big\}.$$
On l appelle *somme* des sous–espaces vectoriels F, G et H.
3. De même, si E_1, E_2,..., E_n sont des sous–espaces vectoriels de E on définit :
$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \big\{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \;\big|\; \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i\big\}.$$
C'est le plus petit sous–espace vectoriel de E qui contient chaque E_i.
On a ainsi, par exemple :
$$\mathrm{Vect}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbb{K}\,a_1 + \mathbb{K}\,a_2 + \cdots + \mathbb{K}\,a_n.$$
4. Soit u une application linéaire de E dans un espace vectoriel E'.
   - Si F et G sont deux sous–espaces vectoriels de E, on a ·
   $$u(F + G) = u(F) + u(G).$$
   - Plus généralement, si si E_1, E_2,..., E_n sont des sous–espaces vectoriels de E, on a :
   $$u(E_1 + E_2 + \cdots + E_n) = u(E_1) + u(E_2) + \cdots + u(E_n).$$

1.2 Sous–espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 2

Soient F et G deux sous–espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$,

(ii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on dit que F et G sont deux *sous–espaces vectoriels supplémentaires* de E et l'on écrit $E = F \oplus G$.

émonstration

- Supposons $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$. Alors tout élément de E s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. Montrons l'unicité d'une telle écriture.

  Supposons que $x = y' + z' = y'' + z''$ avec $(y', y'') \in F^2$ et $(z', z'') \in G^2$.

  Alors $y' - y'' = z'' - z' \in F \cap G$ puisque F et G sont des sous–espaces vectoriels de E

  Donc $y' - y'' = z'' - z' = 0$.

- Réciproquement, supposons que tout élément de E s'écrive de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

  On a donc $E = F + G$.

  Soit $x \in F \cap G$. Alors x peut s'écrire $x = 0 + x = x + 0$ L'unicité de la décomposition de x comme somme d'un élément de F et d'un élément de G implique $x = 0$

  Donc $F \cap G = \{0\}$ □

Méthode Lorsque F et G sont des sous–espaces vectoriels, pour prouver $F \cap G = \{0\}$, il suffit, comme dans la démonstration précédente, de montrer l'implication $x \in F \cap G \Longrightarrow x = 0$. L autre inclusion est évidente puisque, $F \cap G$ étant un sous–espace vectoriel de E il contient le vecteur nul.

Exemples

1. Dans $\mathbb{K}^2$:
   - les deux sous–espaces vectoriels $F = \operatorname{Vect}\{(1,0)\}$ et $G_1 = \operatorname{Vect}\{(0,1)\}$ sont supplémentaires. En effet, tout élément $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha\,(1,0) + \beta\,(0,1)$, avec $\alpha = x$ et $\beta = y$.
   - les deux sous–espaces vectoriels $F = \operatorname{Vect}\{(1,0)\}$ et $G_2 = \operatorname{Vect}\{(1,1)\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^2$. En effet :
     - $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2$, $(x, y) = (x - y, 0) + (y, y) \in F + G$
     - si $(x, 0) = (y, y)$, alors $y = 0$ puis $x = 0$.
2. Dans $E = \mathbb{K}^3$, les sous–espaces vectoriels $\mathbb{K}^2 \times \{0\}$ et $\operatorname{Vect}\{(0,0,1)\}$ sont supplémentaires.
3. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires et l ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires forment deux sous–espaces vectoriels supplémentaires.

   Ce sont des sous–espaces vectoriels de E car ils contiennent l'application nulle et sont stables par combinaisons linéaires · montrons que toute fonction f de E s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction g paire et d'une fonction h impaire.

Unicité. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $f = g + h$ avec g paire et h impaire, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{array} \right.$$

Donc pour tout réel x :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \qquad (*)$$

ce qui prouve l'unicité d'un tel couple (g, h).

Existence. Il suffit de vérifier que les fonctions g et h définies par $(*)$ conviennent. On a immédiatement $g + h = f$ et pour tout réel x :

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \;\text{ ainsi que : }\; h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x).$$

Les fonctions g et h ci–dessus sont appelées respectivement *partie paire* et *partie impaire* de la fonction f.

Ainsi, les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont respectivement les parties paire et impaire de la fonction exponentielle.

4. Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et P un élément non nul de E. Les ensembles :

$$F = \{Q \in E \mid \deg(Q) < \deg(P)\} \qquad \text{et} \qquad G = \{PQ \mid Q \in E\}$$

sont deux sous–espaces vectoriels. La division euclidienne nous prouve que tout élément de E s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Donc F et G sont deux sous–espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$.

MPSI 5. L'existence et l'unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle prouve que $\mathbb{K}[X]$ et l'ensemble des fractions rationnelles de degré strictement négatif sont deux sous–espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}(X)$. MPSI

1.3 Intersection de sous–espaces affines

Proposition 3

Deux sous–espaces affines dont les directions sont supplémentaires ont une intersection réduite à un point.

Démonstratio Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous–espaces affines dont les directions respectives F et G sont deux sous–espaces vectoriels supplémentaires de E.

- Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$ Comme $F + G = E$, on peut trouver $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$. Le point $M = B - \vec{v} = A + \vec{u}$ est alors à la fois dans $\mathcal{F}$ et dans $\mathcal{G}$. ce qui prouve que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide.

  Comme $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide, c'est un sous–espace affine de direction $F \cap G = \{\vec{0}\}$; il est donc réduit à un point □

Remarques

- Le fait que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ soit non vide peut aussi se voir comme conséquence de la proposition 11 de la page 789 puisque tout vecteur de E s'écrit comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
- Plus généralement, si $F + G = E$, tout sous–espace affine dirigé par F rencontre tout sous–espace affine dirigé par G.

Exemples

1. Soient deux droites non parallèles dans le plan. Comme leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, tout vecteur du plan s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   On retrouve ainsi que deux droites non parallèles du plan se rencontrent et que leur intersection est un point puisque $\mathbb{K}\vec{u} \cap \mathbb{K}\vec{v} = \{0\}$.
2. On retrouve de même que dans l'espace, une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à un plan $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{P}$ en un point unique.

1.4 Projections, symétries, affinités

Projecteurs vectoriels

Définition 1

Soient F et G deux sous–espaces vectoriels supplémentaires de E. L'application p de E dans E qui, à tout élément x de E, associe l'unique y de F tel que $x = y + z$, avec $z \in G$ est appelée *projection sur F parallèlement à G*

Une telle application est aussi appelée un *projecteur*.

Proposition 4

Étant donnés deux sous–espaces vectoriels supplémentaires F et G de E, la projection sur F parallèlement à G est linéaire.

- Son noyau est G.
- Son image, qui est aussi l'ensemble des vecteurs invariants, est égale à F.

Demonstration

► Soit $(x, y) \in E^2$; on peut écrire $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, y_1) \in F^2$ et $(x_2, y_2) \in G^2$.

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)$$

avec :

$$\alpha x_1 + \beta y_1 \in F \quad \text{et} \quad \alpha x_2 + \beta y_2 \in G$$

puisque F et G sont des sous–espaces vectoriels. Par suite :

$$p(\alpha x + \beta y) = \alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha p(x) + \beta p(y).$$

L'application p est donc linéaire

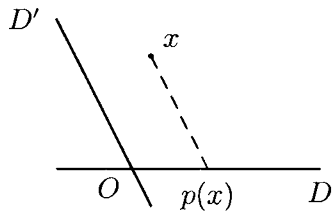
- Si $x \in G$, alors $x = 0 + x$ avec $(0, x) \in F \times G$, donc $p(x) = 0$.
  Réciproquement, si $p(x) = 0$, alors comme $x = p(x) + x_2 = x_2$ avec $x_2 \in G$, on a $x \in G$
  Par suite, $\operatorname{Ker}(p) = G$.
- On a immédiatement $\operatorname{Im}(p) \subset F$ et donc aussi l'implication :

$$x = p(x) \Longrightarrow x \in F.$$

Réciproquement, si $x \in F$, alors $x = x + 0$ avec $(x, 0) \in F \times G$, donc $x = p(x) \in \operatorname{Im}(p)$.
Par suite, $\operatorname{Im}(p) = F = \{x \in E \mid p(x) = x\}$. □

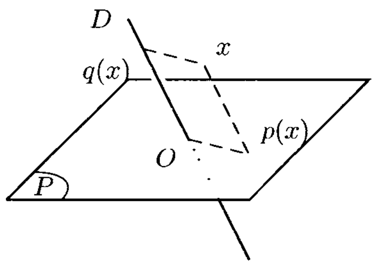
Exemples

1. Dans le plan, si D et D' sont deux droites vectorielles distinctes, la projection p sur D parallèlement à D' est une application linéaire dont le noyau est D', et l'image D.



2. De même, si P est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et D une droite vectorielle non contenue dans P, les projections :
   - p sur P parallèlement à D
   - q sur D parallèlement à P

   sont des applications linéaires dont les noyaux sont respectivement D et P et les images respectivement P et D.



Proposition 5

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si, $p \circ p = p$.

émonstration

- Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors pour tout élément x de E, on a $p(x) \in F$ et donc $p\big(p(x)\big) = p(x)$. Par suite $p \circ p = p$
- Supposons $p \circ p = p$. Les ensembles $G = \operatorname{Ker}(p)$ et $F = \operatorname{Im}(p)$ qui sont respectivement noyau et image de l endomorphisme p, sont donc des sous–espaces vectoriels de E. Montrons qu'ils sont supplémentaires.

- Soit $y \in F \cap G$. Comme $y \in F = \operatorname{Im}(p)$, on peut trouver $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Or $y \in G = \operatorname{Ker}(p)$, donc :
$$0 = p(y) = (p \circ p)(x) = p(x) = y.$$
Par suite $F \cap G = \{0\}$.
- Si $x \in E$, alors :
$$x = p(x) + \big(x - p(x)\big). \qquad (*)$$
On a $x - p(x) \in G$ puisque :
$$p\big(x - p(x)\big) = p(x) - (p \circ p)(x) = 0$$
et évidemment $p(x) \in F$. Ainsi $x \in F + G$ et donc $E = F + G$

Enfin, la relation $(*)$ montre que $p(x)$ est le projeté de x sur F parallèlement à G
Donc p est la projection sur F parallèlement à G. □

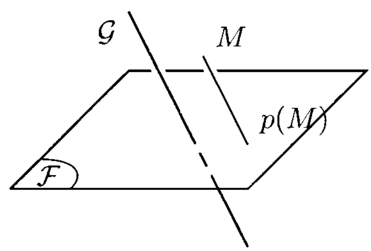
Attention Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, la projection sur F parallèlement à G est, par définition, un endomorphisme de E et non une application linéaire de E dans F. C'est ce qui permet d'ailleurs de parler de $p \circ p$ dans la proposition précédente.

Projections affines

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces affines de E dont les directions respectives F et G sont supplémentaires.

Définition 2

Pour tout point M de E, les sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $M + G$ ont une intersection réduite à un point. Si l'on note $p(M)$ ce point, on définit ainsi une application p de E dans E appelée projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$.



Démonstration L'existence et l'unicité de ce point $p(M)$ sont données par la proposition 3 de la page 818. □

Remarque Seule la direction de $\mathcal{G}$ intervient dans cette définition ; c'est pourquoi on dit aussi que p est la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

Proposition 6

La projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ est une application affine Son application linéaire associée est la projection π sur F parallèlement à G.

ém nstratio Soient A et B deux points de E. Leurs images respectives A' et B' sont dans $\mathcal{F}$ et vérifient :

$$\overrightarrow{AA'} \in G \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BB'} \in G.$$

La décomposition :

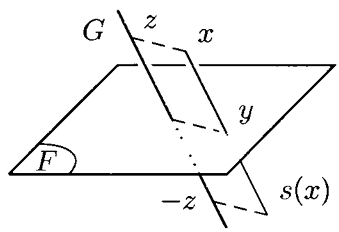
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'B}) \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{A'B'} \in F \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'B} \in G$$

donne $\pi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{p(A)p(B)}$ et prouve le résultat □

Symétries vectorielles

Définition 3

Soient F et G deux sous–espaces vectoriels supplémentaires de E. On appelle *symétrie* par rapport à F parallèlement à G, l'application s de E dans E telle que si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, on ait $s(x) = y - z$.



Proposition 7

Une symétrie s est un automorphisme *involutif*, c'est–à–dire vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

émonstrati Soient F et G deux sous–espaces vectoriels supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Si l'on note p la projection sur F parallèlement à G, il est immédiat que l'on a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, ce qui prouve que s est lineaire.
Si $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$, alors $s(x) = y - z$ et donc $s \circ s(x) = y - (-z) = x$. Donc s est involutive, ce qui prouve qu'elle est bijective. □

Proposition 8

Tout endomorphisme involutif de E est une symétrie.

Plus précisément, si $s \in \mathcal{L}(E)$ est involutif, c'est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

émonstratio En posant $p = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$ on a :

$$p \circ p = \frac{s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E}{4} = \frac{s + \mathrm{Id}_E}{2} = p$$

ce qui prouve que l'endomorphisme p est la projection sur $F = \mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}\, p$ Donc $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Enfin :

$$G = \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$$

et :

$$F = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E).$$

□

Exemples

1. La conjugaison sur $\mathbb{C}$ est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.
2. L'application $P(X) \mapsto P(-X)$ est un endomorphisme involutif de $\mathbb{K}[X]$. C'est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel des polynômes pairs parallèlement au sous-espace vectoriel des polynômes impairs.

Symétries affines

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces affines de E dont les directions respectives F et G sont supplémentaires.

Définition 4

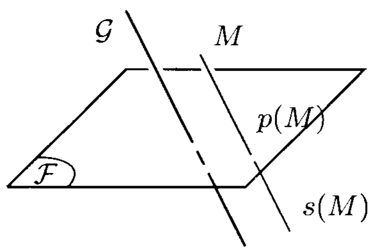
En désignant par p la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$, on appelle symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ l'application s de E dans E telle que, pour $M \in E$, $s(M)$ soit l'unique point M' de E vérifiant l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(i) $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{Mp(M)}$

(ii) $\overrightarrow{p(M)M'} = -\overrightarrow{p(M)M}$

(iii) $M' = 2p(M) - M$

(iv) $\overrightarrow{MM'} \in G$ et $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M' \in \mathcal{F}$



emonstration

- Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont équivalentes, puisqu'elles signifient toutes les trois que $p(M)$ est le milieu du segment $[MM']$.
- L'implication $(i) \Rightarrow (iv)$ est évidente, puisque $p(M) \in \mathcal{F}$ et $\overrightarrow{Mp(M)} \in G$
- Réciproquement, supposons (iv) et posons $M_1 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M'$ On a alors :

$$M_1 \in \mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'} \in G$$

ce qui prouve $M_1 = p(M)$ et établit (i).
- Enfin la propriété (iii) prouve l'existence et l'unicité du point M'. □

Exemple La symetrie centrale par rapport à Ω est la symétrie par rapport à $\{\Omega\}$ parallèlement à E.

Remarque Si s est la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ et p la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$, on a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ puisque :

$$\forall M \in E,, \quad s(M) = 2p(M) - M.$$

Proposition 9

La symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ est une application affine. Son application linéaire associée est la symétrie σ par rapport à F parallèlement à G.

é ons atio La projection p correspondante est la somme d'une constante et de sa projection linéaire associée π. Donc $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est la somme d'une constante et de l'application linéaire $\sigma = 2\pi - \mathrm{Id}_E$, ce qui prouve le résultat. □

Affinites

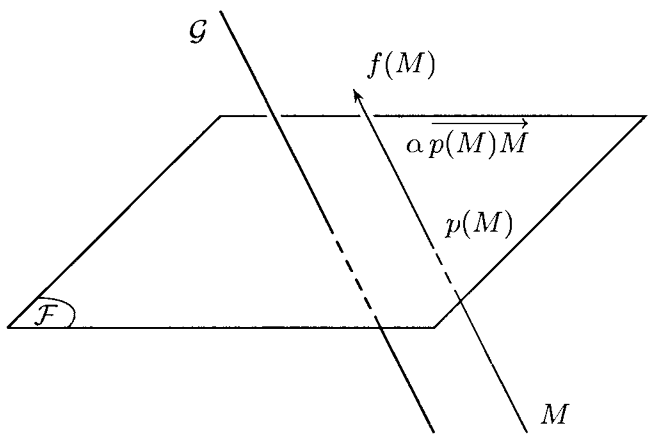
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous–espaces affines de E dont les directions respectives F et G sont supplémentaires.

Soit p la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$.

Définition 5

On appelle affinité de base $\mathcal{F}$ de direction $\mathcal{G}$ et de rapport $\alpha \neq 0$, l application f de E dans E telle que, pour tout $M \in E$, on ait :

$$\overrightarrow{p(M)f(M)} = \alpha\,\overrightarrow{p(M)M}.$$



Proposition 10

Une telle affinité est une application affine dont l'application linéaire associée est l'affinité de base F de direction G et de rapport α.

em nstration Par définition, on a $\forall M \in E$, $f(M) = p(M) + \alpha\,\overrightarrow{p(M)M}$ ce qui prouve l'égalité $f = (1-\alpha)\,p + \alpha\ \mathrm{Id}_E$ où p est la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$. Donc f est la somme d'une constante et de l'application linéaire $(1-\alpha)\,\vec{p} + \alpha\ \mathrm{Id}_E$. Cette dernière étant l affinité de base F, de direction G et de rapport α, on en déduit le résultat. □

Exemples

1. Une affinité de rapport -1 est une symétrie.
2. Une affinité de rapport 1 est l'identité.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est une application de I dans $\mathbb{R}$, la courbe représentative de λf se déduit de celle de f par une affinité de base Ox, de direction Oy et de rapport λ.
   En particulier, les courbes intégrales d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$ sur un intervalle où a et b sont continues et a ne s annule pas, se déduisent de l'une d'entre elles par des affinités de base Ox et de direction Oy.
4. L'image d'un cercle par une affinité du plan est une ellipse.

2. Familles libres, familles génératrices, bases

Dans cette section, n désigne un entier naturel.

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une n–liste d'éléments de E, les combinaisons lineaires des vecteurs x_1, x_2,…, x_n s'écrivent :

$$\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \cdots + \lambda_n\, x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n.$$

En particulier, si $n = 0$, la liste $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est la liste vide · la somme est vide et il n'y a qu'une seule combinaison linéaire qui vaut 0 par définition.

2.1 Familles génératrices

Définition 6

Une famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ est *génératrice* de E si :

$$E = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

c'est–à–dire si tout élément de E s'écrıt comme combinaison linéaire des éléments x_1, x_2,…, x_n, ou encore :

$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \ :\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i.$$

Remarque Si une famille est génératrice, toute famille obtenue en permutant ses éléments est aussi génératrice. Le fait qu'une famille soit génératrice ne dépend donc pas de l'ordre de ses éléments.

Exemples

1. $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$–espace vectoriel.
2. Deux vecteurs non colinéaires du plan en forment une famille génératrice.
3. Trois vecteurs non coplanaires de l'espace en forment une famille genératrice.
4. $(1, X, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ puisque tout polynôme de degré inférieur ou égal à n s'écrit sous la forme :
$$\sum_{p=0}^{n} a_p X^p \qquad \text{avec} \qquad \forall p \in \{0, 1, \ldots, n\} \ , \ a_p \in \mathbb{K}.$$
5. Une famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est génératrice de E si, et seulement si, $E = \mathbb{K}\, x_1 + \mathbb{K}\, x_2 + \cdots + \mathbb{K}\, x_n$.

En ajoutant des éléments à une famille génératrice, on obtient évidemment une autre famille génératrice :

Proposition 11

Toute sur–famille finie d'une famille génératrice est encore génératrice.

Proposition 12

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Une famille $\mathcal{X}$ d'éléments de E est génératrice de E si, et seulement si, tout élément de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{X}$.

émonstration

- Si $\mathcal{X}$ est génératrice, tout élément de E est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{X}$, et *a fortiori* tout élément de $\mathcal{G}$.
- Réciproquement, supposons que tout élément de $\mathcal{G}$ soit combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{X}$. Puisque $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ est le plus petit sous–espace vectoriel contenant $\mathcal{G}$ et que $\mathrm{Vect}(\mathcal{X})$ est un sous–espace vectoriel contenant $\mathcal{G}$, on en déduit $E \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$, ce qui prouve que $\mathcal{X}$ est génératrice. □

Exemples

1. Si $j = e^{2i\pi/3}$, alors $(1, j)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{C}$ puisque $(1, i)$ est une famille génératrice et que 1 et i sont des combinaisons linéaires de 1 et j : pour 1, c'est évident, et pour i, il suffit d'écrire $i = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, j + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, 1$.
2. On prouve de même que si $\mathrm{Im}(\omega) \neq 0$, alors $(1, \omega)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$.

2.2 Familles libres

Définition 7

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'éléments de E.

- On dit que $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une *famille libre* ou que les vecteurs x_1, $x_2,\ldots$, x_n sont *lineairement indépendants*, si pour tout $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,x_i=0\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$$

- Dans le cas contraire, c'est-à-dire si l'on peut trouver une famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de scalaires **non tous nuls** vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\,x_i=0$, on dit que la famille est *liée* ou que les vecteurs x_1, $x_2,\ldots$, x_n sont *linéairement dépendants*.

Remarque Si une famille est libre, toute famille obtenue en permutant ses éléments est aussi libre. Le fait qu'une famille soit libre ne dépend donc pas de l'ordre de ses éléments.

Exemples

1. Une famille à un élément x est libre si, et seulement si, x est non nul. En effet :
   - si $x=0$, alors $1\,x=0$ avec $1\neq 0$, et donc x forme une famille liée.
   - si $x\neq 0$, alors $\lambda\,x=0\Longrightarrow\lambda=0$.
2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1,i)$ est libre, puisque pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a :
   $$a+i\,b=0\Longrightarrow a=b=0.$$
3. Dans $\mathbb{C}$, la famille $(1,j)$ est libre.
   Plus genéralement, si $\operatorname{Im}\omega\neq 0$, la famille $(1,\omega)$ est libre.
   En effet, soit $(a.b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a+b\,\omega=0$. En prenant les parties imaginaires on en déduit $b\,\operatorname{Im}\omega=0$ et donc $b=0$. Par suite, $a=0$.
4. Dans $\mathbb{K}^3$, les vecteurs $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ forment une famille libre puisque si $\alpha\,e_1+\beta\,e_2+\gamma\,e_3=(\alpha,\beta,\gamma)$ est nul, alors α, β et γ sont nuls.
5. De même dans $\mathbb{K}^n$, les vecteurs :
   $$e_1=(1,0,0,\ldots,0)\,,\ e_2=(0,1,0,\ldots,0)\,,\ \ldots\ ,\ e_n=(0,0,\ldots,0,1)$$
   forment une famille libre.

6. La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$, puisque le polynôme $\sum_{p=0}^{n} \lambda_p X^p$ est nul si, et seulement si, tous les λ_p sont nuls.
7. Si deux éléments x et y d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E sont *proportionnels* (ou *colinéaires*), c'est–à–dire si :
$$\exists k \in \mathbb{K} \,:\, x = k\,y \quad \text{ou} \quad y = k\,x,$$
alors la famille (x, y) est liée puisque l'on a $1\,x - k\,y = 0$ ou $-k\,x + 1\,y = 0$ avec $(1, -k) \neq (0.0)$.
Réciproquement, si la famille à deux éléments (x, y) est liée, alors on a $\alpha\,x + \beta\,y = 0$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Les scalaires α et β ne sont donc pas tous les deux nuls. Si $\alpha \neq 0$, on a $x = (-\beta/\alpha)\,y$, et si $\beta \neq 0$, $y = (-\alpha/\beta)\,x$.
Donc x et y sont colinéaires.

   Attention La proposition $\exists k \in \mathbb{K} \,:\, y = k\,x$ ne suffit pas pour dire que les vecteurs x et y sont colinéaires :
   - si x et y sont non nuls, on a bien l'équivalence :
   $$y = \lambda\,x \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\lambda}\,y,$$
   - mais si $x = 0$ et $y \neq 0$, on ne peut pas trouver de scalaire λ tel que $y = \lambda\,x$ alors que la famille (x, y) est liee.

8. Nous avons vu dans le chapitre 3 que trois vecteurs non coplanaires de l'espace forment une famille libre.
9. La famille vide est libre, puisqu'il n'en existe pas de combinaison linéaire à coefficients non tous nuls.

Proposition 13

- Toute sous–famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur–famille d'une famille liée est liée.

Démonstra io Ces deux résultats sont contraposés l'un de l'autre. Démontrons le premier. Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille libre. Prenons une sous–famille constituée de p vecteurs $(0 \leqslant p \leqslant n)$. Quitte à permuter les x_i, on peut supposer que cette sous–famille est $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\,x_k = 0$. En posant $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, on obtient $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,x_k = 0$, et comme la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, on en déduit $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\lambda_i = 0$. En particulier, on a $\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\lambda_i = 0$, ce qui prouve que $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont linéairement indépendants. □

En particulier

- une famille libre ne peut pas contenir le vecteur nul
- une famille libre ne peut pas avoir deux vecteurs proportionnels et *a fortiori* deux vecteurs égaux.

Attention Une famille contenant deux vecteurs proportionnels est liée, mais une famille d'au moins trois vecteurs peut être liée sans contenir deux vecteurs proportionnels, comme le prouve, dans le $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{C}$, l'exemple de la famille $(1, i, 1+i)$.

Proposition 14

Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille libre et x un élément de E. La famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ est liée si, et seulement si x est combinaison linéaire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

émonstration

- S'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, alors on a $1x + \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) x_i = 0$ et par suite la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ est liée.
- Si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ est liée, alors il existe $\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\alpha x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0.$$

Si $\alpha = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ avec les λ_i non tous nuls, ce qui est absurde puisque la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.
On en déduit $\alpha \neq 0$ et donc :

$$x = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\lambda_i}{\alpha} x_i.$$

□

Théorème 15

Etant données une famille libre $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ainsi que deux familles de scalaires $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \Longrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \ , \ \lambda_i = \mu_i.$$

émonstratio Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$ alors $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$ et donc :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ ,\ \lambda_i - \mu_i = 0.$$

□

2.3 Bases

Définition 8

Une famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de E est une *base* de E si c est une famille libre et génératrice de E.

Exemples

1. $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. Dans le plan, deux vecteurs non colinéaires forment une base.
3. Dans l'espace, trois vecteurs non coplanaires forment une base.
4. La famille $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définie par :
$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)\,,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)\,,\ \ldots\ ,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$
est une base de $\mathbf{K}^n$ car l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ prouve que tout élément de $\mathbf{K}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, et qu'une telle combinaison linéaire ne peut être nulle que si tous les λ_i sont nuls..
Cette base « naturelle » est appelée *base canonique* de $\mathbf{K}^n$
5. $(1, X, \ldots, X^n)$ forme une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
Cette base « naturelle » est appelée *base canonique* de $\mathbf{K}_n[X]$.
6. La famille vide est une base de $\{0\}$.

Théorème 16

Une famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E si, et seulement si pour tout vecteur $x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbf{K}^n$ telle que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

La famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est alors appelée famille des *composantes* (ou *coordonnees*) de x dans la base $\mathcal{B}$

ém nstration

- Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base, alors elle est génératrice (d'où l'existence) et libre (d'où l'unicité d'après le théorème 15 de la page 829)
- Réciproquement :
  - L'existence de la décomposition prouve que $\mathcal{B}$ est génératrice
  - Supposons $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Comme $0 = \sum_{i=1}^{n} 0\, e_i$, l'unicité prouve que tous les λ_i sont nuls.

    Par suite, $\mathcal{B}$ est libre. □

Exemples

1. Les composantes d'un nombre complexe dans la base $(1, i)$ sont ses parties réelle et imaginaire.
2. Les composantes de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont les scalaires x_1, $x_2, \ldots$, x_n.
3. Les composantes du polynôme $\sum_{p=0}^{n} a_p X^p$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont les coefficients du polynôme, à savoir les scalaires a_0, $a_1, \ldots$, a_n.

Remarque Etant donnée une famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de E, on peut prouver facilement que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \end{array}$$

est linéaire.

- Elle est injective si, et seulement si, la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.
- Elle est surjective si, et seulement si, la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de E.
- Elle est bijective si, et seulement si, la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E.

2.4 Bases et applications linéaires

Théorème 17

Étant données une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et une famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = f_i.$$

emonst ation

Unicité. Soit u une telle application linéaire Si x est un vecteur de E, alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, avec $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, et la linéarité de u nous donne :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

ce qui prouve l'unicité de u

Existence. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, tout élément x de E s écrit de façon unique $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

En posant $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, on définit une application u de E dans F.

Elle est linéaire car étant donnés deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ de E ainsi que deux scalaires α et β, on a :

$$\begin{aligned} u(\alpha x + \beta y) &= u\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) f_i \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right) + \beta \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i\right) \\ &= \alpha u(x) + \beta u(y). \end{aligned}$$

- De plus on a $\forall i \in [\![1.n]\!]$, $u(e_i) = f_i$ puisque les composantes de e_i dans la base $\mathcal{B}$ sont $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{i-1} = 0$, $\lambda_i = 1$, $\lambda_{i+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$.

□

Remarques

- On énonce encore le résultat précédent en disant qu'une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base.
- Si u et v sont deux applications linéaires de E dans F et si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, alors :
  - $u = v$ si, et seulement si, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = v(e_i)$,
  - en particulier, $u = 0$ si, et seulement si, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = 0$

Proposition 18

Soit u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F. Étant donnée une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E :

- la famille $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$,
- u est surjective si et seulement si, $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de F,
- u est injective si, et seulement si, $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de F
- u est bijective si, et seulement si, $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de F

émonstration

- Comme la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de E, on a :
$$E = \mathbf{K}\, e_1 + \mathbf{K}\, e_2 + \cdots + \mathbf{K}\, e_n$$
et donc, puisque u est une application linéaire :
$$\operatorname{Im} u = u(E) = \mathbf{K}\, u(e_1) + \mathbf{K}\, u(e_2) + \cdots + \mathbf{K}\, u(e_n)$$
ce qui montre que $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$
- u est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im} u = F$, c'est-à-dire, d'après le premier point, si, et seulement si, $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de F.
- • Supposons u injective. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u(e_i) = 0$. Puisque u est linéaire, on a $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i\right) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i \in \operatorname{Ker} u$.

  Comme u est injective, on a $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i = 0$. La famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant libre, on en déduit $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$, ce qui prouve que la famille $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

  • Supposons la famille $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ libre. Si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i$ est un vecteur de $\operatorname{Ker} u$ on a :
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u(e_i) = u(x) = 0.$$
  Comme $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre, on en déduit que tous les λ_i sont nuls, et donc que x est égal à 0.
  Par suite u est injective.
- Conséquence des autres résultats. □

3. Repères cartésiens

3.1 Definitions

Définition 9

On appelle *repère cartésien* de E, tout couple $(\Omega, \mathcal{B})$, où Ω est un point de E et $\mathcal{B}$ une base de E.

Exemple On appelle repère cartésien canonique de $\mathbb{R}^n$ le repère $(0.\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 10

Soit $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ un repère cartésien de E avec $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

On appelle famille de *coordonnées* d'un point M de E dans le repère $\mathcal{R}$, l'unique n–uplet de scalaires $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \vec{e}_i.$$

Remarque Les x_i sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ dans la base $\mathcal{B}$, ce qui en prouve l'existence et l'unicité.

3.2 Règles de calcul

Soit $\mathcal{R} = (\Omega . \mathcal{B})$ un repère de E.

1. Si A et B sont deux points de E dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont respectivement $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, alors l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega A}$ montre que, dans la base $\mathcal{B}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$.
2. Si A est un point de E de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ dans $\mathcal{R}$ et $\vec{u}$ un vecteur de E de composantes $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B}$, alors la relation $\overrightarrow{\Omega B} = \overrightarrow{\Omega A} + \vec{u}$ montre que, dans $\mathcal{R}$, le point $B = A + \vec{u}$ a pour coordonnees $(x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, \ldots, x_n + \alpha_n)$.

Exemples

1. Si $\vec{u}$ est un vecteur de composantes $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathcal{B}$, alors dans un repère $(\Omega, \mathcal{B})$, l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$ est :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \alpha_1 \\ y_2 = x_2 + \alpha_2 \\ \quad\vdots \\ y_n = x_n + \alpha_n. \end{cases}$$

Réciproquement, toute relation de ce type correspond à une translation.

2. Si A est un point de E dont les coordonnées dans un repère $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ sont $(a_1 . a_2, \ldots . a_n)$, alors l'expression analytique dans $\mathcal{R}$ de la symétrie de centre A est :

$$\begin{cases} y_1 = 2a_1 - x_1 \\ y_2 = 2a_2 - x_2 \\ \quad\vdots \\ y_n = 2a_n - x_n. \end{cases}$$

Réciproquement, étant donnés des scalaires b_1, $b_2, \ldots$, b_n quelconques, toute famille de relations du type :

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - x_1 \\ y_2 = b_2 - x_2 \\ \quad\vdots \\ y_n = b_n - x_n \end{cases}$$

correspond à une symétrie centrale dont le centre est le point de coordonnées :

$$\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}, \ldots, \frac{b_n}{2}.$$

EXERCICES

1. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les deux vecteurs $u = (1,2,3)$ et $v = (3,2,1)$
Trouver une condition sur x, y et z pour que le vecteur (x,y,z) appartienne au sous-espace vectoriel engendré par u et v.

2. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Comparer $F \cap (G+H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

3. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère :

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ puis en donner un supplémentaire.

4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $F + G = E$.
Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que :

$$F' \oplus G = E.$$

5. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G et contenant respectivement les points A et B.
Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \in F + G$.

6 Préciser si les familles suivantes sont libres ou non :

a) dans $\mathbb{R}^2$: $\big((1,2),(3,5)\big)$,

b) dans $\mathbb{R}^3$: $\big((1,2,3),(1,-2,-3),(1,4,3)\big)$,

c) dans $\mathbb{C}^4$: $\big((2,i,4,-i),(i,-1,-i,1),(0,3,-i,1)\big)$.

7. On considère une famille $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ de n polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) échelonnée en degré, c'est-à-dire telle que :

$$\deg P_1 < \deg P_2 < \cdots < \deg P_n.$$

Montrer que cette famille est libre.

8. Soient u, v et w trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a) Montrer que :

$$\operatorname{Vect}(u, v) = \operatorname{Vect}(u, w)$$

si et seulement si :

$$\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3 \ , \ \beta\gamma \neq 0 \ : \ \alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que :

$$F + \mathbb{K}v = F + \mathbb{K}w$$

si et seulement si :

$$\exists u \in F \quad \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \ , \ \alpha\beta \neq 0 \ : \ u + \alpha v + \beta w = 0.$$

9 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) qui vérifient l'équation :

$$x + y + z + t = 0.$$

Donner une base de ce sous-espace vectoriel.

10 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble des vecteurs (x, y, z) qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

Donner une base de ce sous-espace vectoriel.

11. Dans $\mathbb{R}^4$, donner un système d'équations du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, -1, 3)$.

12. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, on considère les trois formes linéaires f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x, y, z) = -x + y + z$$

$$f_2(x, y, z) = 2x - y - z$$

$$f_3(x, y, z) = x + 2y + z.$$

La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?

13 Soient a et b deux nombres complexes distincts.
Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 admettant a et b comme racines est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_4[X]$.
Trouver une base de cet espace.

14. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ où :

$$f_n : x \mapsto \sin nx$$

est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}. \mathbb{R})$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n réels tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
Montrer que la famille :

$$(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x})$$

est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

16. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E.
Montrer que $p \circ f = f \circ p$ si, et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.

17. Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $p + q$ soit également un projecteur.
Montrer que :

$$p \circ q = q \circ p = 0,$$
$$\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q,$$
$$\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q.$$

18. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que, pour tout x dans E, la famille $\big(x, f(x)\big)$ soit liée.
Montrer que f est une homothétie.

19. Soient f une application affine de E dans E.
Montrer que f est une symétrie affine si f admet au moins un point fixe et si $\vec{f}$ est une symétrie vectorielle.

20. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de direction respectives F et G avec $F \oplus G = E$.
On note s_1 (resp. s_2) la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$(resp. $\mathcal{G}$) parallèlement à G (resp. F).
Étudier $s_1 \circ s_2$ et $s_2 \circ s_1$.

21. Quelle est la composée

a) de deux symétries centrales ?

b) d'une symétrie centrale et d'une translation ?

c) de n symétries centrales ?

22. **a)** Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n points du plan.
Montrer que la recherche de points $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tels que :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ ,\ A_i = \frac{1}{2}(B_i + B_{i+1})$$

(en posant $B_{n+1} = B_1$) est équivalente à la recherche d'un point fixe pour une certaine composée de symétries centrales.

b) Discuter l'existence et l'unicité des points B_i et en donner une construction géométrique.

23. Soit f une application affine telle que :

$$\vec{f} \circ \vec{f} = \mathrm{Id}\,.$$

Montrer qu'il existe un unique couple (t, s) où t est une translation et s une symétrie affine tel que :

$$f = t \circ s = s \circ t.$$

Chapitre 29

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout ce chapitre, n est un entier naturel et E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. De plus $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou des complexes.

Définition 1

On dit que E est de *dimension finie*, s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie*.

1. Dimension d'un espace vectoriel

1.1 Existence d'une base

Proposition 1

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Toute famille libre contenue dans $\mathcal{G}$ peut, à l'aide d'éléments de $\mathcal{G}$, être complétée en une base de E.

émonst ation Soient $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ une famille génératrice de E et $\mathcal{L} = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ une famille libre contenue dans $\mathcal{G}$ (avec $p \leqslant n$).
L'ensemble :

$$\mathcal{S} = \left\{\text{card } I \;\middle|\; [\![1,p]\!] \subset I \subset [\![1.n]\!] \quad \text{et} \quad (g_i)_{i\in I} \text{ libre}\right\}$$

est une partie de $\mathbb{N}$ non vide ($p \in \mathcal{S}$ puisque $\mathcal{L} = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ est libre) et majorée par n
Par suite, elle possède un plus grand élément r, et on peut trouver I de cardinal r tel que :

$$[\![1,p]\!] \subset I \subset [\![1,n]\!] \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B} = (g_i)_{i\in I} \quad \text{libre.}$$

Par hypothèse, $\mathcal{B}$ est libre ; montrons que tout élément de la famille génératrice $\mathcal{G}$ s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, ce qui prouvera, d'après la proposition 12 de la page 826 que $\mathcal{B}$ est génératrice.

Soit donc $i \in [\![1, n]\!]$.

- Si $i \in I$, alors g_i est dans $\mathcal{B}$ et le résultat est évident
- Sinon, posons $I' = I \cup \{i\}$ Comme $\operatorname{card} I' > r$ et $[\![1, p]\!] \subset I' \subset [\![1, n]\!]$, la famille $(g_i)_{i \in I'}$ n'est pas libre. On en déduit donc, d'après la proposition 14 de la page 829, que g_i est combinaison lineaire des éléments de $\mathcal{B}$. □

Théorème 2

Tout $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie admet une base finie. De plus cette base peut être extraite de n'importe quelle famille génératrice finie

Démonstratio Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E La famille vide est une sous–famille libre de $\mathcal{G}$ donc, d'après la proposition précédente il existe une base de E constituée d'éléments de $\mathcal{G}$. □

Remarque Si $E = \{0\}$ la seule famille libre est la famille vide qui est alors la seule base de E.

1.2 Dimension

Proposition 3

Soit $\mathcal{G}$ une famille à n éléments de E. Toute famille à $n+1$ éléments de E dont les vecteurs sont combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{G}$ est une famille liée.

émonstratio Soit H_n la propriété à démontrer. Procédons par récurrence sur l'entier n.

- H_0 est vraie, puisqu'un vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est nul
- Supposons H_{n-1} vraie, pour $n \geqslant 1$. Soient $\mathcal{G} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille à n éléments de E, et $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de $n+1$ vecteurs de E.

  Supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le vecteur x_k soit combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{G}$, et notons α_k le coefficient de e_n dans une telle combinaison linéaire

  - Si tous les α_k sont nuls, alors la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs combinaisons linéaires de $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$, donc est liée d'après H_{n-1}. A fortiori, la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est liée.
  - Si l'un des α_k est non nul, quitte à permuter les vecteurs, on peut supposer $\alpha_0 \neq 0$. En posant $y_k = x_k - \dfrac{\alpha_k}{\alpha_0} x_0$, la famille $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est alors une famille de n vecteurs combinaisons linéaires de e_1, $e_2, \ldots$, e_{n-1} (les coefficients de e_n s'annulent). D'après H_{n-1}, on en déduit qu'elle est liée et donc qu'il existe des scalaires

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, y_k = 0.$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, x_k = 0 \qquad \text{avec} \qquad \lambda_0 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\alpha_0}.$$

Puisqu'au moins l'un des n derniers éléments de la famille $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est non nul, la famille $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est liée. □

Par suite, H_n est vraie.

Remarque D'après la proposition précédente, si $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une famille libre et $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ une famille génératrice de E, alors $p \leqslant q$.

Toute famille géneratrice a donc au moins autant d'éléments que toute famille libre. On en deduit les deux résultats suivants :

Théorème 4

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments. L'entier n est appelé *dimension de E sur* $\mathbb{K}$ ou plus simplement *dimension* de E.

émonst ation Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E, alors $\mathcal{B}_1$ est génératrice et $\mathcal{B}_2$ libre, ce qui prouve que $\mathcal{B}_1$ a au moins autant d'éléments que $\mathcal{B}_2$.

Par symétrie, on a le résultat inverse, et donc $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont autant d'éléments. □

Exemples

1. L'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension 0
2. $\mathbb{K}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{K}$.
3. $\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$; il admet pour base $(1, i)$.
4. $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$; il admet pour base la famille constituée des vecteurs :
$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)\,,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)\,,\ \ldots\,,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$
5. $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur $\mathbb{K}$; il admet pour base la famille $(X^p)_{0 \leqslant p \leqslant n}$.
6. Soit l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$, avec $(a, b. c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.

   En considérant le polynôme $P = a\,X^2 + b\,X + c$, on a vu dans le chapitre sur les équations différentielles page 189, que :

   - si P a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ sont deux solutions non proportionnelles et toute solution est combinaison linéaire de ces deux–là ; elles forment donc une base à deux élements

- si P a une racine réelle double r, alors $x \mapsto e^{rx}$ et $x \mapsto x\,e^{rx}$ sont deux solutions non proportionnelles et toute solution est combinaison linéaire de ces deux–là ; elles forment donc une base à deux éléments,
- sinon, P a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ avec $\beta \neq 0$ Alors $x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ sont deux solutions non proportionnelles et toute solution est combinaison linéaire de ces deux–là ; elles forment donc une base à deux éléments.

Dans tous les cas, l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle est de dimension 2.

Proposition 5

Si E est un espace vectoriel de dimension n, alors :

- toute famille libre a au maximum n élements,
- toute famille génératrice a au minimum n éléments

Corollaire 6

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille de p éléments de E.

- Si $p > n$, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est liée.
- Si $p < n$, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ n'est pas génératrice de E.

Proposition 7

Un espace vectoriel E est de dimension infinie si et seulement si, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ soit libre.

Démonstration

- Si E est de dimension finie n, il est clair que l'on ne peut pas trouver une telle famille puisqu'une famille libre a au maximum n éléments
- Si E n'est pas de dimension finie, alors on peut construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ répondant au problème.
  - Puisque E n'est pas de dimension finie, il n'est pas réduit à $\{0\}$ et l'on peut trouver un élément x_0 non nul.
  - Supposons construite une famille libre $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Comme E n'est pas de dimension finie, cette famille n'est pas génératrice de E et il existe un élément $x_{n+1} \in E$ non combinaison linéaire de $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Par suite, la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ est libre.

$\square$

Exemple L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

1.3 Théorème de la base incomplète

Théorème 8

Toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base de E.

em nst a ˚o Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie et $\mathcal{L}$ une famille libre (donc finie) En ajoutant les éléments de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{G}$, on obtient une famille finie $\mathcal{G}'$ contenant $\mathcal{L}$ et génératrice de E. D'après la proposition 1 de la page 841, on peut donc, en ajoutant à $\mathcal{L}$ des éléments de $\mathcal{G}'$, obtenir une base de E. □

Théorème 9

Soit $\mathcal{B}$ une famille d'éléments d'un espace vectoriel E de dimension n. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{B}$ est une base

(ii) $\mathcal{B}$ est une famille libre à n élements

(iii) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice à n éléments.

émonstration

$(i) \Rightarrow (ii)$ **et** (iii). En effet toute base est une famille libre et génératrice à n éléments.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si $\mathcal{B}$ est une famille libre à n éléments, on peut la compléter en une base $\mathcal{B}'$ de E, qui est donc une famille à n éléments. Donc les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont identiques et par suite $\mathcal{B}$ est une base de E

$(iii) \Rightarrow (i)$. Si $\mathcal{B}$ est une famille génératrice à n éléments, on peut en extraire une base $\mathcal{B}'$ de E, qui est donc une famille à n éléments. Donc les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont identiques et par suite $\mathcal{B}$ est une base de E □

Méthode Ce résultat fondamental est d une utilisation courante pour montrer qu'une famille $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel dont on connaît la dimension n. Le plus souvent on prouve que $\mathcal{B}$ est une famille libre à n éléments.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1, \omega)$ est libre, c'est–à–dire est une base, si, et seulement si, ω n'est pas reel.
2. Deux vecteurs non proportionnels d'un espace vectoriel de dimension 2 en forment une base.

1.4 Un exemple : les suites récurrentes d'ordre 2

MPSI Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$. On considère E, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant la récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \qquad (*)$$

Le cas $b = 0$ étant évident, on peut supposer $b \neq 0$.

- On remarque tout d'abord qu'une suite u élément de E est caractérisée par ses deux premiers termes u_0 et u_1, c'est-à-dire que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, il existe un unique $u \in E$ tel que $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$.

  Montrons que l'espace vectoriel E est de dimension 2 en prouvant que les suites u et v de E définies par :

  $$(u_0, u_1) = (1, 0) \qquad \text{et} \qquad (v_0, v_1) = (0, 1)$$

  en forment une base.

  Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, la combinaison linéaire $w = \alpha\, u + \beta\, v$ est l'unique élément de E vérifiant $w_0 = \alpha$ et $w_1 = \beta$. On en déduit que la famille (u, v) est :

  - libre, puisque si $w = \alpha\, u + \beta\, v = 0$, alors $w_0 = w_1 = 0$ et donc $\alpha = \beta = 0$,
  - génératrice, puisque toute suite $w \in E$ est égale à $w_0\, u + w_1\, v$.

- Pour trouver une base de E, il suffit donc de trouver deux solutions non proportionnelles.

  Considérons pour cela le polynôme $P = X^2 - aX - b$. Il est évident que si r est une racine de P, alors la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E.

  Si r_1 et r_2 sont deux racines distinctes de P, les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non proportionnelles. Elles forment donc une base de E et les solutions de $(*)$ sont donc les suites $(\alpha\, r_1^n + \beta\, r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

  Si r est une racine double de P, alors on vérifie que la suite $(n\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient aussi à E. On a ainsi deux éléments de E non proportionnels puisque $r \neq 0$, et donc une base. Les solutions de $(*)$ sont donc les suites $((\alpha + \beta\, n) r^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme P a soit deux racines distinctes, soit une racine double. Dans les deux cas on a trouvé les solutions.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il se peut que P n'ait pas de racine réelle. Dans ce cas, les racines de P sont de la forme $r = \rho\, e^{\pm i\theta}$, avec $\theta \not\equiv 0 \quad [\pi]$.

  Les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\bar{r}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient alors $(*)$ ainsi donc que toutes leurs combinaisons linéaires. En particulier, les suites $\left(\rho^{\cdot} \cos(\cdot\, \theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\rho^{\cdot} \sin(\cdot\, \theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $(*)$ et elles sont réelles. Ce sont donc deux éléments de E, et comme il est évident qu'elles sont non proportionnelles elles forment une base de E. Les suites répondant au problème sont donc les suites $\left(\rho^n\left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ ou, si l'on préfère, les suites $\left(A\rho^{\cdot} \cos(.\,\theta + \varphi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $(A,\varphi) \in \mathbb{R}^2$. MPSI

1.5 Dimension des sous–espaces vectoriels

Proposition 10

Si E est de dimension n, tout sous–espace vectoriel F de E est de dimension finie $p \leqslant n$. De plus F est égal à E si, et seulement si, $n = p$.

émonst a ion

- Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des familles libres de F. Comme tout élément de $\mathcal{H}$ est une famille libre de E, elle a au plus n éléments. Il existe donc dans $\mathcal{H}$ un élément $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de cardinal maximum p Par hypothèse, la famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est libre.

  Pour tout élement x de F, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p, x)$ possède $p+1$ éléments et n'est donc pas libre d'après la definition de p. La proposition 14 de la page 829 montre alors que le vecteur x est combinaison linéaire des vecteurs x_1, x_2,..., x_p. Par suite, $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une base de F qui est donc un espace vectoriel de dimension finie $p \leqslant n$.
- Il est évident que si $E = F$, on a $n = p$. Réciproquement, si $n = p$, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille libre de E possédant n vecteurs, donc une base puisque E est un espace vectoriel de dimension n. Par suite les espaces vectoriels E et F admettent $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ comme base commune et sont donc égaux. □

Exemples

1. Dans $E = \mathbb{R}^4$, considérons le sous–espace vectoriel :

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

Un vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) de F est caractérisé par ses 3 premiers éléments x_1, x_2 et x_3, ce qui incite à penser que F est de dimension 3. On prouve effectivement que F est de dimension 3 en exhibant les trois vecteurs suivants de F :

$$f_1 = (1.0.0, -1),\ f_2 = (0.1.0, -1),\ f_3 = (0.0.1, -1)$$

dont on prouve qu'ils forment une base de F.

Pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3).$$

- La famille est donc libre, puisque :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

- La famille est donc génératrice puisque tout élément de F est de la forme :

$$(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3) = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3.$$

2. Dans $E = \mathbb{R}^4$, considérons le sous–espace vectoriel :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}.$$

Un élément de F est de la forme $(x_1, -x_1, -x_4, x_4)$; il est donc caractérisé par ses deux éléments extrêmes, ce qui incite à penser que F est de dimension 2. On prouve que F est effectivement de dimension 2 en prouvant que les deux vecteurs suivants de F :

$$f_1 = (1, -1, 0, 0), \ f_2 = (0, 0, -1, 1)$$

forment une base de F.

3. Puisque $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension 1, ses sous–espaces vectoriels sont de dimension 0 ou 1. Donc $\mathbb{K}$ n'a que deux sous–espaces vectoriels : $\{0\}$ et $\mathbb{K}$.

Proposition 11

Tout sous–espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

émonstratio Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous–espace vectoriel de E.

Si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une base de F, c'est une famille libre de E donc, d'après le théorème de la base incomplète, on peut construire une base de E de la forme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Vérifions que le sous–espace vectoriel G engendré par la famille $(e_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant n}$ est un supplémentaire de F.

- Tout vecteur x de E se décompose dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i. \qquad (*)$$

Si l'on pose $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $z = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$, la relation $(*)$ s'écrit $x = y + z$ avec $x \in F$ et $y \in G$ Donc $E = F + G$

- Si x est un vecteur de $F \cap G$, il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \mu_{p+1}, \mu_{p+2}, \dots, \mu_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=p+1}^{n} \mu_i e_i.$$

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^{n} (-\mu_i) e_i = 0.$$

Puisque la famille $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est libre, tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls, et en particulier :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \ \lambda_i = 0.$$

Par suite $x = 0$, et donc $F \cap G = \{0\}$ □

Définition 2

Si $\mathcal{F}$ est un sous–espace affine de E, on appelle *dimension* de F la dimension de la direction de F.

Exemples

1. Les droites affines sont les sous–espaces affines de dimension 1.
2. Les droites affines sont les sous–espaces affines de dimension 2.

2. Relations entre les dimensions

2.1 Dimension et isomorphisme

Proposition 12

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie n. Un espace vectoriel F est isomorphe à E si, et seulement si, F est de dimension finie et $\dim F = n$.

émonstration

- S'il existe un isomorphisme u de E dans F et si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, la proposition 18 de la page 833 montre que $\big(u(e_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de F, ce qui implique que F est de dimension finie n.
- Si $\dim E = \dim F = n$, soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E et $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de F. Il existe une (unique) application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ u(e_i) = f_i.$$

Comme la famille $\big(u(e_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de F, la proposition 18 de la page 833 montre que u est bijective donc est un isomorphisme de E dans F. □

Corollaire 13

Tout $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Notons que si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E l'application qui à $x \in E$ fait correspondre ses composantes dans $\mathcal{B}$ est un tel isomorphisme.

2.2 Dimension d'un produit de sous–espaces vectoriels

Proposition 14

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie et :

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

émonstratio Soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E et $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F Montrons que la famille :

$$\mathcal{B} = \big((e_1, 0), (e_2, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, f_1), (0, f_2), \ldots, (0, f_p)\big)$$

est une base de $E \times F$

- Si (x, y) est un élément de $E \times F$, les vecteurs x et y se décomposent dans les bases respectives $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^{p} \mu_i\, f_i$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}(x, y) &= (x, 0) + (0, y)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i, 0\right) + \left(0, \sum_{i=1}^{p} \mu_i\, f_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(e_i, 0) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i\,(0, f_i).\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $E \times F$.

- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ des scalaires tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, 0) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i(0, f_i) = 0. \tag{$*$}$$

Si l'on pose $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i\, f_i$, la relation $(*)$ s'écrit $(x, y) = (0, 0)$, ce qui implique :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^{p} \mu_i\, f_i = 0.$$

Puisque les familles $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont libres, on en déduit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \lambda_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ \mu_i = 0.$$

Donc $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Par suite, la famille $\mathcal{B}$ est une base à $n + p$ éléments de $E \times F$ □

Exemples

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
2. Par récurrence, on a :

$$\dim(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \dim(E_2) + \cdots + \dim(E_n).$$

On retrouve par exemple $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

2.3 Dimension d'une somme de sous–espaces vectoriels

Proposition 15

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie. Si E_1 et E_2 sont deux sous–espaces vectoriels supplémentaires de E, alors :

- $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$,
- si $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de E_1 et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ une base de E_2, alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.

  Une telle base est dite *adaptée* à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$.

onstration

- L'application φ

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$

est linéaire. De plus elle est bijective, puisque tout élément de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2. C'est donc un isomorphisme, ce qui entraîne :

$$\dim E = \dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

- Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2 = (e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ une base de E_2 Vérifions que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E. Comme $\mathcal{B}$ a n éléments et que $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 = n$, il suffit de verifier qu'elle est génératrice.

  Soit donc $x \in E$. On peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Comme $\mathcal{B}_1$ est une base de E_1, on a :

$$x_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p.$$

  De même :

$$x_2 = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \qquad \text{avec} \qquad (\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p},$$

  et donc $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ est bien combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$ □

Remarque On aurait pu aussi dire que $\mathcal{B}$ est l'image par l'isomorphisme φ de la base introduite dans la démonstration de la proposition 14 de la page 850.

Proposition 16

Étant donnés E_1 et E_2 deux sous–espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E de dimension finie, on a :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

émonstration Soit E_2' un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2. On a $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$ et par suite :

$$\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim E_2'. \qquad (a)$$

Vérifions que E_1 et E_2' sont deux sous–espaces vectoriels supplémentaires de $E_1 + E_2$.

- Ce sont des sous–espaces vectoriels de $E_1 + E_2$.
- Comme $E_2' \subset E_2$, un élément commun à E_1 et E_2' est dans E_2 et donc dans $E_1 \cap E_2$ et dans E_2' Par suite il est nul, ce qui prouve $E_1 \cap E_2' = \{0\}$

  Soit $x \in E_1 + E_2$. On peut trouver $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Comme $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_2'$, il existe $x_2' \in E_2'$ et $x_2'' \in E_1 \cap E_2$ tels que $x_2 = x_2' + x_2''$. Ainsi :

  $$x = x_1 + x_2'' + x_2' \qquad \text{avec} \qquad x_1 + x_2'' \in E_1 \quad \text{et} \quad x_2' \in E_2'.$$

  Donc $E_1 + E_2 = E_1 + E_2'$.

On a donc :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \oplus E_2') = \dim E_1 + \dim E_2'. \qquad (b)$$

Les relations (a) et (b) entraînent alors le résultat annoncé. □

Exemples

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, ainsi que F et G deux sous–espaces vectoriels de E. Pour démontrer $E = F \oplus G$, il suffit de prouver $\dim E = \dim F + \dim G$ et au choix :
   - $F \cap G = \{0\}$ car alors on a :

     $$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim E$$

     ce qui prouve que $F + G$ est un sous–espace vectoriel de E de même dimension que E et donc égal à E,
   - $F + G = E$ car alors on a :

     $$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 0$$

     et donc $F \cap G = \{0\}$.

2. Soient E_1 et E_2 deux sous–espaces vectoriels d un espace vectoriel E de dimension finie. Posons :
   - $q = \dim E_1$,
   - $p = q - \dim(E_1 \cap E_2)$,
   - $n = \dim E_2 + p = \dim(E_1 + E_2)$.

   Prenons $(e_{p+1}, \ldots, e_q)$ une base de $E_1 \cap E_2$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E_1 et en une base de E_2 selon le schéma :

$$(\underbrace{e_1, \ldots, e_p, \overbrace{e_{p+1}, \ldots, e_q}^{}}_{\text{base de } E_1}\overbrace{{}, e_{q+1}, \ldots, e_n}^{\text{base de } E_2})$$

   Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de $E_1 + E_2$ puisque tout élément de E_1 est combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_q)$ et tout élément de E_2 combinaison linéaire de $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Comme de plus on a $\dim(E_1 + E_2) = n$, on en déduit que c'est une base de $E_1 + E_2$.

3. Rang

3.1 Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

Définition 3

Le *rang d'une famille* finie $\mathcal{X}$ de vecteurs de E, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{X})$ ou $\mathrm{rg}\,\mathcal{X}$, est la dimension du sous–espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{X}$.

Remarques

Soit $\mathcal{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Comme $\mathcal{X}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\,\mathcal{X}$, on peut en extraire une base de $\mathrm{Vect}\,\mathcal{X}$. Par suite $\mathrm{rg}\,\mathcal{X} \leqslant n$, avec égalité si, et seulement si, $\mathcal{X}$ est libre.
2. Si $\mathcal{X}$ contient r vecteurs linéairement indépendants, on a $\mathrm{rg}\,\mathcal{X} \geqslant r$, avec égalité si, et seulement si, ces vecteurs engendrent $\mathrm{Vect}\,\mathcal{X}$, c'est–à–dire si, et seulement si tout élément de $\mathcal{X}$ est combinaison linéaire de ces r vecteurs

Définition 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. On appelle *rang* de u, que l'on note $\mathrm{rg}(u)$ ou $\mathrm{rg}\,u$ la dimension de $\mathrm{Im}\,u$ lorsqu'elle est finie.

Remarques

- Si F est de dimension finie n, le rang de toute application linéaire u de E dans F est fini et inférieur ou égal à n, avec égalité si, et seulement si, u est surjective.
- Soient E un espace vectoriel de dimension finie p et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E. Si u est une application linéaire de E dans F, on a vu à la proposition 18 de la page 833 que $\operatorname{Im} u$ est engendré par la famille de vecteurs $\big(u(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant p}$, ce qui montre que le rang de u est fini. Il est égal au rang de la famille $u(\mathcal{B})$, donc inférieur ou égal à p avec égalité si, et seulement si, $u(\mathcal{B})$ est une base de $\operatorname{Im} u$, c'est-à-dire si, et seulement si, u est injective.

3.2 Théorème du rang

Proposition 17

Soient E et F deux espaces vectoriels, et u une application linéaire de E dans F. Si E_0 est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, l'application u induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$.

émonstratio L'application v :

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

est bien définie puisque l'image de tout vecteur de E (et donc de E_0) appartient à $\operatorname{Im} u$ Elle est évidemment linéaire ; montrons qu'elle est bijective.

- Le noyau de v est :

$$\operatorname{Ker} v = \big\{x \in E_0 \bigm| u(x) = 0\big\} = E_0 \cap \operatorname{Ker} u.$$

  Comme E_0 et $\operatorname{Ker} u$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E, on a $E_0 \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$, ce qui prouve que v est injective

- Si $y \in \operatorname{Im} u$ il existe un vecteur x de E tel que $y = u(x)$ et puisque E_0 et $\operatorname{Ker} u$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E, on peut écrire :

$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{avec} \qquad x_1 \in E_0 \quad \text{et} \quad x_2 \in \operatorname{Ker} u.$$

  Par suite :

$$y = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1) = v(x_1)$$

  ce qui montre la surjectivité de v □

Theorème 18 (Formule du rang)

Étant donnés un espace vectoriel E de dimension finie et une application linéaire u de E dans un espace vectoriel F, on a :

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u).$$

émonstration Soit E_0 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. D'après la proposition précédente, les sous-espaces vectoriels E_0 et $\operatorname{Im} u$ sont isomorphes et ont donc même dimension finie. Par suite :
$$\dim E = \dim E_0 + \dim \operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u$$
ce qui prouve le résultat □

Exemples

1. Si E_1 et E_2 sont deux sous–espaces vectoriels de E on peut retrouver la relation :
$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$
en considérant l'application (trivialement linéaire) :
$$\begin{array}{rccc} f : & E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 + E_2. \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$
Par définition son image est $E_1 + E_2$, et son noyau :
$$\operatorname{Ker} f = \{(x, -x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}$$
est isomorphe à $E_1 \cap E_2$ par l'application $x \mapsto (x, -x)$
Donc $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim \operatorname{Ker} u$ et la formule du rang nous donne le resultat.
2. Considérons l'endomorphisme Δ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$
   - Tout polynôme constant est dans le noyau de Δ. Réciproquement si $\Delta(P) = 0$, alors $P(X+1) = P(X)$ et donc le polynôme $P(X) - P(0)$ possède tous les entiers pour racines. Par suite il est nul et P est constant. Donc $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$.
   - D'après la formule du rang, l'image de Δ est de dimension n. Comme elle est évidemment incluse dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est aussi de dimension n, on en déduit $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   Ainsi, tout polynôme de degré strictement inférieur à n est de la forme $P(X+1) - P(X)$ avec $\deg P \leqslant n$.

3.3 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 19

Étant donnés deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels E et F de **même** dimension finie n, et u une application linéaire de E dans F les propositions suivantes sont equivalentes :

(i) u est injective,

(ii) u est surjective,

(iii) u est bijective.

émonstratio Il suffit de montrer $(i) \Leftrightarrow (ii)$. D'après le théorème du rang et l'égalité des dimensions de E et de F, on a :

$$\dim F = \dim E = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u). \qquad (*)$$

L'application u est injective si, et seulement si, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, ce qui équivaut d'après $(*)$, à $\dim F = \dim(\operatorname{Im} u)$, c'est-à-dire à $F = \operatorname{Im} u$ et finalement à la surjectivité de u. □

Exemple Soient $n+1$ scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$, distincts deux à deux. Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet tous les a_i pour racines est nul. Donc l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)\big) \end{array}$$

est injective. Comme les deux espaces vectoriels ont même dimension $n+1$, on en déduit que c'est un isomorphisme.

Donc, quels que soient les scalaires $b_0, b_1, \ldots, b_n$, il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$P(a_0) = b_0\,,\ P(a_1) = b_1\,,\ \ldots\,,\ P(a_n) = b_n.$$

On l'appelle *polynôme d'interpolation de Lagrange* aux points a_i.

Corollaire 20

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il est équivalent de dire que l'application u est injective, qu elle est surjective ou qu'elle est bijective.

Exemple Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Alors, u est un automorphisme de E.

En effet, u est injective puisque :

$$u(x) = 0 \Longrightarrow v \circ u(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

et par suite u est bijective et $u^{-1} = (v \circ u) \circ u^{-1} = v$.

De même, s'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$, alors u est surjective, puisque :

$$\forall x \in E\,,\ x = u\big(v(x)\big).$$

donc bijective et $u^{-1} = v$.

Attention Si l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie :

- un endomorphisme de E peut être injectif sans être surjectif, comme le prouve l'exemple de l'application $P(X) \mapsto X\,P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$,
- un endomorphisme de E peut être surjectif sans être injectif, comme le prouve l'exemple de la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 21

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ deux applications linéaires.

- Si u est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
- Si v est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

ém nst atio On a :

$$\operatorname{Im}(v \circ u) = \{v(u(x)) \mid x \in E\} = \{v(y) \mid y \in \operatorname{Im} u\} = v(\operatorname{Im} u).$$

- Si u est bijective, alors $\operatorname{Im} u = F$ et donc $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$. L'égalité des rangs s'ensuit.
- Si v est bijective alors v induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur $v(\operatorname{Im} u)$. Ces deux sous–espaces vectoriels ont donc même dimension, ce qui donne le résultat □

Remarque Dans le cas général, on peut prouver facilement que :

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} v. \operatorname{rg} u)$$

grâce aux inclusions :

$$\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker}(v \circ u) \supset \operatorname{Ker} u.$$

3.4 Hyperplans et formes linéaires

Hyperplans vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$.

Proposition 22

Si H est un sous–espace vectoriel de E, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim H = n - 1$,

(ii) il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$,

(iii) il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = \operatorname{Ker} f$.

On appelle *hyperplan vectoriel* (ou *hyperplan*) de E tout sous–espace vectoriel H de E verifiant l'une de ces conditions

´monstration

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Si le sous-espace H est de dimension $n - 1$, il admet dans E un supplémentaire D et on a

$$\dim D = \dim E - \dim H = 1,$$

ce qui prouve que D est une droite vectorielle vérifiant $E = H \oplus D$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Soit p la projection de E sur $D = \mathbb{K}d$ parallèlement à H ; alors H est le noyau de la forme linéaire f définie par $p(x) = f(x)\, d$

$(iii) \Longrightarrow (i)$. S'il existe une forme linéaire non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} f$, alors d'après la formule du rang, on a

$$\dim E = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim H.$$

Comme f est une forme linéaire non nulle, son image est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{K}$ non réduit à $\{0\}$ donc de dimension 1, ce qui implique :

$$\dim H = \dim E - 1 = n - 1.$$

□

Remarques

- Tout sous–espace vectoriel F de E différent de E est inclus dans au moins un hyperplan. En effet on peut compléter une base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de F en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, et l'hyperplan $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ répond à la question puisque $p < n$.
- Si un sous–espace vectoriel F contient strictement un hyperplan, alors il est égal à E puisque sa dimension est strictement supérieure à $n - 1$, donc égale à n.
- Réciproquement, si H est un sous–espace vectoriel de E différent de E et vérifiant, pour tout sous–espace vectoriel F de E :

$$H \subset F \subset E \Longrightarrow (F = H \quad \text{ou} \quad F = E)$$

alors H est un hyperplan d'après la première remarque.

Exemples

1. En dimension 3, les hyperplans sont les plans vectoriels, d'où le nom en dimension quelconque.
2. En dimension 2, les hyperplans sont les droites vectorielles.

L'expression générale d'une forme linéaire dans une base $\mathcal{B}$ étant :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i,$$

on en déduit :

Corollaire 23

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Une partie H de E est un hyperplan si et seulement si, elle admet dans $\mathcal{B}$ une équation du type :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = 0$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des scalaires non tous nuls.

Proposition 24

Étant données deux formes linéaires non nulles f et g telles que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, il existe un scalaire λ non nul tel que $f = \lambda\, g$.

Démonstration D'après la proposition 22 de la page 857, l'hyperplan $H = \operatorname{Ker} f$ admet un supplémentaire qui est une droite vectorielle D ; notons e_n un vecteur directeur de D. Puisque e_n n'appartient pas à $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ on a :

$$g(e_n) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{f(e_n)}{g(e_n)} \neq 0.$$

Comme tout vecteur x de E s'écrit :

$$x = h + \alpha\, e_n \qquad \text{avec} \qquad h \in H \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{K},$$

on a les relations :

$$g(x) = g(h) + \alpha\, g(e_n) = \alpha\, g(e_n)$$

$$f(x) = f(h) + \alpha\, f(e_n) = \alpha\, f(e_n) = \lambda\, g(x).$$

Donc $f = \lambda\, g$. □

Corollaire 25

Deux hyperplans d'équations respectives :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i = 0$$

dans une base de E, sont égaux si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \lambda\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Hyperplans affines

Définition 5

Un *hyperplan affine* est un sous–espace affine dirigé par un hyperplan vectoriel, c'est–à–dire de dimension $n - 1$ dans un espace vectoriel de dimension n.

Proposition 26

Soit E de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$.

1. Un hyperplan $\mathcal{H}$ de E possède au moins une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ du type :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = h \qquad \text{avec} \qquad (u_1, u_2, \dots, u_n) \neq (0, 0, \dots, 0). \qquad (*)$$

2. Réciproquement, la relation $(*)$ est l'équation d'un hyperplan dont la direction admet pour équation dans $\mathcal{B}$:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = 0.$$

Démonstration

1. La direction de $\mathcal{H}$ est un hyperplan vectoriel de E et donc admet dans $\mathcal{B}$ au moins une équation du type :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = 0 \qquad \text{avec} \qquad (u_1, u_2, \dots, u_n) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

Soit A un point de $\mathcal{H}$ de coordonnées $(a_1, a_2, \dots . a_n)$ dans le repère $\mathcal{R}$ Si $M \in E$ a pour coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{R}$, on a

$$M \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - a_i) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i x_i = h$$

avec $h = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i$.

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $u_k \neq 0$ Le point A de coordonnées $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vérifiant :

$$a_k = \frac{h}{u_k} \qquad \text{et} \qquad a_i = 0 \quad \text{si } i \neq k$$

appartient à $\mathcal{H}$.

Une équation de $\mathcal{H}$ s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = \sum_{i=1}^{n} u_i\, a_i \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i\,(x_i - a_i) = 0$$

et donc un point M appartient donc à $\mathcal{H}$ si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ appartient à l'hyperplan vectoriel H d'équation $\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = 0$, ce qui prouve que $\mathcal{H}$ est le sous-espace affine passant par A et dirigé par H. □

Proposition 27

Dans un repère $\mathcal{R}$, deux hyperplans d'équations :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i = h \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i = k$$

- sont parallèles si, et seulement si, $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sont proportionnels,
- sont égaux si, et seulement si, $(u_1, u_2, \ldots, u_n, h)$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_n, k)$ sont proportionnels.

émonstration

- Conséquence du fait que deux hyperplans vectoriels sont égaux si, et seulement si, leurs équations sont proportionnelles.
- Il est évident que si les équations sont proportionnelles, les hyperplans sont égaux.

  Réciproquement, si les deux hyperplans sont égaux, ils sont parallèles et les vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sont proportionnels. On peut donc trouver un réel λ tel que $(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \lambda\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. En prenant un point de coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans cet hyperplan, on a :

$$k = \sum_{i=1}^{n} v_i\, a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i\, a_i = \lambda\, h$$

  et donc $(v_1, v_2, \ldots, v_n, k) = \lambda\,(u_1, u_2, \ldots, u_n, h)$. □

Remarque On retrouve ainsi les équations d'une droite dans le plan (chapitre 2) et d un plan dans l'espace (chapitre 3).

EXERCICES

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $u = (1,1,-1)$, $v = (-1,1,1)$ et $w = (1,-1,1)$.
Montrer que u, v, w forment une base de $\mathbb{R}^3$.
Donner les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n) et $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que la famille $\big(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^{n-1}, (X-a)^n\big)$ est une base de E.
Donner les coordonnées de X^p $(p \leqslant n)$ dans cette base.
Exprimer les coordonnées dans cette base d'un polynôme P quelconque en fonction de ses dérivées en a.

3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$.
Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

4. Déterminer le rang des familles suivantes :

a) dans $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{F} = \big((1,0,1,0), (1,1,0,0), (-1,-1,1,0), (0,0,2,0)\big)$.

b) dans $\mathbb{C}[X]$: $\mathcal{F} = \big(X^2+X+1, X^2+3X+1, 2X, X^3+3\big)$.

c) dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ où :

$$\varphi_1(x,y,z,t) = x + z$$

$$\varphi_2(x,y,z,t) = -x + 2y$$

$$\varphi_3(x,y,z,t) = x + y - z + t$$

$$\varphi_4(x,y,z,t) = y + t.$$

5. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles finies de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que :

$$\max\big(\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1), \mathrm{rg}(\mathcal{F}_2)\big) \leqslant \mathrm{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \leqslant \mathrm{rg}(\mathcal{F}_1) + \mathrm{rg}(\mathcal{F}_2).$$

6. Dans $\mathbb{R}^4$, écrire le sous-espace engendré par les vecteurs $u = (2,1,0,2)$ et $v = (-1,-2,3,1)$ comme l intersection de noyaux de deux formes linéaires indépendantes.

7. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, H un hyperplan de E et u un vecteur de E tel que $u \notin H$.
Montrer qu'il existe une et une seule forme linéaire φ telle que $\operatorname{Ker}\varphi = H$ et $\varphi(u) = 1$.

8. Soit f un endomorphisme d un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.
Montrer que :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2.$$

9. Soit f un endomorphisme de rang p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n $(p \leqslant n)$.
Montrer que f peut s'écrire comme la somme de p endomorphismes de rang 1.

10. Donner une base de l'espace des suites à termes complexes vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = 2u_n - 2u_{n-1}.$$

Même question pour les suites à termes réels.

11. Donner une base de l'espace des suites à termes complexes vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

12. Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n+1$ formes linéaires :

$$\varphi_k : P \mapsto P^{(k)}(0). \quad \text{avec} \quad k \in \{0, \dots n\}.$$

Montrer que la famille :

$$(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

est une base de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

13. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Montrer que :

$$\dim \operatorname{Ker} g \circ f \leqslant \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Ker} f$$

(on pourra considérer la restriction de f à $\operatorname{Ker} g \circ f$).

14. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ainsi que u et v deux applications linéaires de E dans F.
Montrer que :

$$|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

On suppose de plus que $u+v$ est inversible et que $u \circ v = 0$.
Montrer que :

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E.$$

15. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots . u_n)$ une famille de n vecteurs de E de rang s.
On suppose qu'il existe une sous-famille $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ à r éléments $(r < n)$ de rang s'.
Montrer :

$$s' \geqslant r + s - n.$$

16. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n paire.
Montrer :

$$\left(f^2 = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} f = \frac{n}{2}\right) \Longleftrightarrow (\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f).$$

17. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E dont l'image est une droite vectorielle $\mathbb{K}u$, u étant un vecteur non nul de E
On pose :

$$\forall x \in E \ , \ f(x) = g(x)u.$$

Montrer que l'application $x \mapsto g(x)$ est une forme linéaire sur E et qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$f^2 = \lambda f.$$

18. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Montrer qu il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ forme une base de E.

19. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
Trouver tous les endomorphismes de E qui commutent avec f.

20. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, f un endomorphisme de E P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.
Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on note $P(f)$ l'endomorphisme $a_0 \operatorname{Id} + a_1 f + \cdots + a_n f^n$

a) Monter que $(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

b) Montrer que si P divise Q alors :

$$\operatorname{Ker} P(f) \subset \operatorname{Ker} Q(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Im} P(f).$$

c) Montrer que si D est le PGCD de P et de Q, alors :

$$\operatorname{Ker} D(f) = \operatorname{Ker} Q(f) \cap \operatorname{Ker} P(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} D(f) = \operatorname{Im} P(f) + \operatorname{Im} Q(f).$$

21. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$u^2 + 3u + 2\operatorname{Id} = 0.$$

Montrer qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G de E tels que :

$$f_{|F} = -\operatorname{Id} \qquad \text{et} \qquad f_{|G} = -2\operatorname{Id}$$

(on pourra considérer $v = u + 2\operatorname{Id}$).

22. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$K_p = \operatorname{Ker} f^p \quad \text{et} \quad I_p = \operatorname{Im} f^p.$$

a) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad K_p \subset K_{p+1}$$

et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ I_{p+1} \subset I_p.$$

b) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.

c) Montrer que :

$$I_r = I_{r+1}$$

et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ K_r = K_{r+p} \quad \text{et} \quad I_r = I_{r+p}.$$

d) Montrer que :

$$E = K_r \oplus I_r.$$

Chapitre 30

Matrices

Dans tout ce chapitre, n et p sont des entiers naturels non nuls et $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

1. Introduction

1.1 Définitions

Définition 1

On appelle *matrice* à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. On dit aussi matrice de type (n,p) ou encore matrice $n \times p$.

Remarques Comme pour les suites, on utilise une notation indicée plutôt qu'une notation fonctionnelle. Si A est une matrice à n lignes et p colonnes, on écrit donc :

$$A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \qquad \text{ou} \qquad A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

ou encore :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où, classiquement, le premier indice désigne le numéro de la ligne et le second celui de la colonne. Cette représentation sous forme de tableau rectangulaire explique les définitions suivantes.

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes.

- On appelle :
  - j *ème vecteur colonne* de A, le vecteur $(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j})$ de $\mathbf{K}^n$.
  - i *ème vecteur ligne* de A, le vecteur $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,p})$ de $\mathbf{K}^p$.
- Si $n = p$ on dit que A est une *matrice carree* et on la note aussi :
$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$
- Si $p = 1$, on dit que A est une *matrice colonne*. On identifie une matrice colonne $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ avec l'élément $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbf{K}^n$.
- Si $n = 1$ on dit que A est une *matrice ligne.*
- Lorsque A est une matrice carrée, on dit qu'elle est :
  - *triangulaire superieure* si $\forall (i, j)$, $i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$, c'est–à–dire si A est de la forme :
$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots \; 0 & * \end{pmatrix}$$
    où $*$ représente n'importe quel scalaire,
  - *triangulaire inférieure* si $\forall (i, j)$, $i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$, c'est–à–dire si A est de la forme :
$$\begin{pmatrix} * & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$$
  - *diagonale* si $\forall (i, j)$, $i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$, c'est–à–dire si A est de la forme :
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots \; 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
    Cette matrice se note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- On appelle *matrice scalaire* une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux. La matrice scalaire $\mathrm{Diag}(1, 1, \ldots, 1)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n.
- Une *sous–matrice* de A est une restriction de A à $I' \times J'$ avec $I' \subset [\![1, n]\!]$ et $J' \subset [\![1, p]\!]$. Visuellement (et par abus de langage) on peut dire que c'est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A.
- La *transposée* de A est la matrice notée ${}^tA$, possédant p lignes et n colonnes, dont l'élément générique $b_{i,j}$ vaut $a_{j,i}$. On a évidemment :
  - ${}^t({}^tA) = A$,
  - A est triangulaire supérieure si, et seulement si, ${}^tA$ est triangulaire inférieure.
- Une matrice carrée A est :
  - *symétrique* si ${}^tA = A$,
  - *antisymétrique* si ${}^tA = -A$, où $-A$ est la matrice obtenue en multipliant par -1 tous les coefficients de A.

Notations

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$,
- $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimensions respectives p et n ainsi que $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de F.

Une application linéaire u de E dans F est entièrement définie par la donnée des vecteurs $u(e_j)$, pour $j \in [\![1, p]\!]$, qui eux mêmes sont déterminés par leurs composantes dans la base $\mathcal{B}_2$.

Définition 2

On appelle *matrice* de u par rapport aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, notée $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$, la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne, pour $j \in [\![1,p]\!]$, est formee des composantes de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

C'est donc la matrice à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

telle que :

$$\forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, f_i.$$

Utilisation

Cette matrice permet d'écrire analytiquement l'application u. Si x est un vecteur de composantes $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dans la base $\mathcal{B}_1$, et si $y = u(x)$ a pour composantes $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans la base $\mathcal{B}_2$, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, f_i = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\, e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j\, u(e_j)$$

et donc :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, f_i\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_j\, a_{i,j}\, f_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\, a_{i\,j}\right) f_i.$$

L'unicité de la décomposition dans la base $\mathcal{B}_2$ nous donne donc :

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j.$$

L'expression de y_i utilise donc les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice de u.

Réciproquement

Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une matrice à n lignes et p colonnes on peut lui associer l'application u qui, au vecteur x de composantes $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dans la base $\mathcal{B}_1$ associe le vecteur y dont les composantes $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans la base $\mathcal{B}_2$ sont données par :

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j.$$

- u est une application linéaire de E dans F.
- Sa matrice par rapport aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est, par définition obtenue en écrivant en colonnes les composantes dans $\mathcal{B}_2$ des vecteurs $u(e_1)$, $u(e_2)$,... $u(e_p)$. Comme ϵ_j est le vecteur dont toutes les composantes dans $\mathcal{B}_1$ sont nulles à l'exception de la $j^{\text{ème}}$ qui vaut 1, les composantes de son image par rapport à $\mathcal{B}_2$ sont donc les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.
- La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est donc A.

En particulier, lorsque A est une matrice à n lignes et p colonnes, on lui associe l application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice par rapport aux bases canoniques de chacun de ces deux espaces vectoriels. C'est ce que l'on appelle l'*application linéaire canoniquement associée* à A.

Cas particuliers

- Dans le cas où u est un endomorphisme de E, on prend le plus souvent la même base $\mathcal{B}$ pour repérer un vecteur et son image. La matrice correspondante s'appelle alors matrice de u par rapport à $\mathcal{B}$ et se note $M_{\mathcal{B}}(u)$.
- Dans le cas où u est une forme linéaire sur E, on utilise habituellement le scalaire 1 comme base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{K}$. La matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est alors appelée matrice de la forme linéaire u par rapport à la base $\mathcal{B}_1$. Elle possède une seule ligne $L = (\ell_1\, \ell_2\, \dots\, \ell_p)$ avec $\ell_j = u(e_j)$ et, pour x de composantes $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, on a :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{p} \ell_j\, x_j.$$

On identifie une matrice ligne $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdot & a_p \end{pmatrix}$ avec la forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$ définie par $(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} a_i\, x_i$.

Exemple Étude de la symétrie s de $\mathbb{R}^2$, d'axe la droite D d'équation $y + 2x = 0$ et de direction D' d'équation $y = x$.

- Sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ s'obtient analytiquement : si $v = (x, y)$ a pour image $v' = (x', y')$, alors on a $x' = x + t$ et $y' = y + t$, avec $t \in \mathbb{R}$ puisque $v' - v \in D'$.

De plus, $0 = \left(\dfrac{y+y'}{2}\right) + 2\left(\dfrac{x+x'}{2}\right)$ car le milieu de v et de v' est sur D

Donc $t = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{2}{3}y$, ce qui entraîne :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y \\ y' = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}y \end{cases}$$

et la matrice cherchée est donc $M_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{4}{3} & +\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

- Sa matrice M_2 par rapport à la base (f_1, f_2) avec $f_1 = (1,-2) \in D$ et $f_2 = (1,1) \in D'$, s'obtient en exprimant en colonnes les composantes dans $(f_1\ f_2)$ de $s(f_1) = f_1$ et de $s(f_2) = -f_2$. On a donc :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On voit que la matrice d'une application linéaire peut dépendre de la base (ou des bases) que l'on utilise.

En résumé La matrice d'une application linéaire u permet :

- par ses colonnes, d'exprimer vectoriellement l'application linéaire : la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des composantes de l image du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base de départ par rapport à la base d'arrivée.
- par ses lignes, d'exprimer analytiquement l'application linéaire : la $i^{\text{ème}}$ ligne donne l'expression de la $i^{\text{ème}}$ composante de $u(x)$ en fonction des composantes de x.

1.3 Matrice de changement de bases

Soit E un espace vectoriel de dimension n que l'on rapporte successivement :

- à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ appelée première base ou ancienne base
- à une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, appelée seconde base ou nouvelle base

Les composantes dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un vecteur de E sont appelées respectivement anciennes et nouvelles composantes.

Définition 3

On appelle *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $P(\mathcal{B},\mathcal{B}')$, la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne, pour $j \in [\![1,n]\!]$, est formee des composantes de e'_j dans la base $\mathcal{B}$

C'est donc la matrice carrée à n lignes et n colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$$

telle que :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i.$$

Utilisation

Cette matrice permet d'écrire analytiquement le changement de bases : soit x un vecteur de E dont les composantes sont $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$ et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ dans $\mathcal{B}'$.

On peut ecrire :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i = x = \sum_{j=1}^{n} x'_j\, e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i\right)$$

et donc :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, x'_j\, e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x'_j\right) e_i.$$

D'après l'unicité de la décomposition dans la base $\mathcal{B}$, on en déduit :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x'_j.$$

L expression de x_i utilise donc les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de cette matrice.

Remarque Contrairement à ce qui se passe pour une application linéaire, on ne peut pas associer un changement de bases à n'importe quelle matrice carrée. Nous préciserons dans la proposition 18 de la page 889 à quelle condition une matrice carrée peut representer un changement de bases.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$ la matrice de passage de la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J})$ définie par :

$$\vec{I} = (2,3) \qquad \text{et} \qquad \vec{J} = (4,5)$$

est obtenue en écrivant en colonnes les composantes par rapport à la première base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ des vecteurs de la seconde base $(\vec{I}, \vec{J})$. Elle vaut $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède, les formules permettant, pour un vecteur v, de passer de ses composantes (X, Y) dans $(\vec{I}, \vec{J})$ à ses composantes (x, y) dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont :

$$\begin{cases} x = 2X + 4Y \\ y = 3X + 5Y \end{cases}$$

Remarques

- La famille $(\vec{I}, \vec{J})$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$, puisqu'elle est constituée de deux vecteurs non proportionnels.
- Les formules ci-dessus donnant (x, y) en fonction de (X, Y) permettent aisément d'écrire l'équation cartésienne d'une courbe dans la nouvelle base Si par exemple, une courbe Γ a pour équation $17x^2 - 26xy + 10y^2 = 1$ dans la première base, son équation dans la seconde est alors :

$$17(2X + 4Y)^2 - 26(2X + 4Y)(3X + 5Y) + 10(3X + 5Y)^2 = 1$$

soit :

$$2X^2 + 2Y^2 = 1.$$

En résumé La matrice $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ permet :

- par ses colonnes, d'exprimer vectoriellement le changement de base : la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des composantes du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base $\mathcal{B}'$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.
- par ses lignes, d'exprimer analytiquement le changement de base : la $i^{\text{ème}}$ ligne donne l'expression de la $i^{\text{ème}}$ composante dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur en fonction de ses composantes dans $\mathcal{B}'$.

Il faut bien remarquer que si une matrice de changement de bases donne les vecteurs de la nouvelle base en fonction des vecteurs de l'ancienne, elle permet d'exprimer les anciennes composantes d'un vecteur quelconque en fonction des nouvelles.

Changement de repère

Soient $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ et $\mathcal{R}' = (\Omega', \mathcal{B}')$ deux repères de E de dimension n, ainsi que P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de Ω' dans le repère $\mathcal{R}$.

Si X et X' sont les matrices des coordonnées d'un point M respectivement dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $X = A + P\,X'$.

En effet, X' est la matrice des composantes dans la base $\mathcal{B}'$ du vecteur $\overrightarrow{\Omega' M}$. La matrice des composantes de ce même vecteur $\overrightarrow{\Omega' M}$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc PX'.

L'égalité $M = \Omega' + \overrightarrow{\Omega' M}$ se traduit, dans le repère $\mathcal{R}$, par $X = A + P\,X'$.

Remarques

- Comme pour un changement de base, la formule $X = A + P\,X'$ permet d'exprimer les coordonnées d'un vecteur dans $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées de ce même vecteur dans $\mathcal{R}'$, alors que la matrice P permet d'exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$.
- Pour savoir à quoi correspond la matrice A, il suffit de prendre le cas particulier du point Ω' correspondant à $X' = 0$, et alors $A = X$ represente les coordonnées de ce point Ω' dans le repère $\mathcal{R}$.

1.4 Matrice d'une famille finie de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

Définition 4

La *matrice* dans la base $\mathcal{B}$ *d'une famille* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *de vecteurs* de E, notée $M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne, pour $j \in [\![1, p]\!]$, est formée des composantes de x_j dans la base $\mathcal{B}$

C'est donc la matrice à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

telle que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!]\,,\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i.$$

Remarques

- Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, munis respectivement de bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Si u est une application linéaire de E dans F on a :
$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = M_{\mathcal{B}_2}\big(u(\mathcal{B}_1)\big).$$
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a :
$$P(\mathcal{B},\mathcal{B}') = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$
- Dans le cas particulier d'une famille à un seul vecteur x, la matrice $M_{\mathcal{B}}(x)$ est une matrice colonne que l'on appelle aussi matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

2. Opérations sur les matrices

2.1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des applications de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbf{K}$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel pour les opérations suivantes :
$$\lambda\,(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} + \mu\,(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda\, a_{i,j} + \mu\, b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

L'élément neutre additif de $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,.)$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls ; elle se note 0 voire $0_{n,p}$ si l'on veut préciser le type (c'est-à-dire la taille) de la matrice.

Proposition 1

Étant donnés deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F de dimensions respectives p et n, rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, l'application φ :
$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})\\ u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)\end{array}$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

émonstration

► Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Étant donnés deux applications linéaires u et v de E dans F ainsi que deux scalaires λ et μ, posons :
$$A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$$
$$B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(v)$$
$$C = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\lambda\, u + \mu\, v)$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire par rapport aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, le scalaire $c_{i,j}$ est la $i^{ème}$ composante dans $\mathcal{B}_2$ de $(\lambda u + \mu v)(e_j)$. Or :

$$\begin{aligned}(\lambda u + \mu v)(e_j) &= \lambda u(e_j) + \mu v(e_j)\\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} f_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) f_i.\end{aligned}$$

Donc $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$ et .

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\lambda u + \mu v) = C = \lambda A + \mu B = \lambda M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) + \mu M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(v)$$

ce qui prouve que φ est une application linéaire.

- Comme pour toute famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ il existe une unique application linéaire u vérifiant :

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i,$$

l'application φ est une bijection de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. □

Notation On désigne par $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

Proposition 2

La famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, que l'on appelle *base canonique de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes est donc de dimension $n\,p$.

émonstration Si $(\lambda_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une famille de scalaires, on a

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \lambda_{i,j} E_{i,j} = (\lambda_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

Donc toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des $E_{i,j}$ □

Proposition 3

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \dim F$.

émonstration Si E et F sont rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, on a vu que l'application φ de la proposition 1 de la page 876 est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Donc ces deux espaces vectoriels ont même dimension. □

Remarques

- Si $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, l'image par l'isomorphisme φ^{-1} de la base $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est donc une base $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de $\mathcal{L}(E,F)$ où $u_{i,j}$ est l'application linéaire de E dans F définie par :
$$u_{i,j}(e_j) = f_i \qquad \text{et} \qquad u_{i,j}(e_k) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq j.$$
- $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$ est le sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ engendré par la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$. C'est donc un sous–espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$ est le sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ engendré par la famille $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. C'est donc un sous–espace vectoriel de dimension n.

Proposition 4

La transposition des matrices définit un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

Démonstration La transposition des matrices définit évidemment une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

Elle est bijective, d'application réciproque la transposition de $\mathcal{M}_{p,n}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}$ car :
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),\ {}^t({}^tA) = A,$$
$$\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}),\ {}^t({}^tB) = B.$$
□

Remarque En particulier la transposition est une involution de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$; c'est donc une symétrie. L'ensemble des éléments invariants est $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et l'ensemble des éléments transformes en leur opposé est $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$. On en déduit que $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ sont supplémentaires.

Comme $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ est engendré par :
$$\mathcal{B}_1 = \{E_{i,j} + E_{j,i}\}_{1\leqslant j<i\leqslant n} \cup \{E_{i,i}\}_{1\leqslant i\leqslant n}.$$
et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ par :
$$\mathcal{B}_2 = \{E_{i,j} - E_{j,i}\}_{1\leqslant j<i\leqslant n},$$
on en déduit $\dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

L'égalité $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ nous prouve alors que les deux inégalités ci–dessus sont des égalités, c'est–à–dire :

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

et donc que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont respectivement des bases de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

2.2 Produit de matrices

Définition

Soient E, F, et G trois $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimension finie, respectivement munis de bases $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \dots . e_r)$, $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ et $\mathcal{B}_3 = (g_1, g_2, \dots, g_p)$.

Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, notons $A = (a_{j,k})_{(j,k)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,r]\!]}$ la matrice de u par rapport à $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$ la matrice de v par rapport à $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.

La matrice par rapport aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$ de la composée $v \circ u$ est une matrice à p lignes et r colonnes. Pour la déterminer il faut calculer :

$$\begin{aligned}
v \circ u(e_k) &= v\left(\sum_{j=1}^{q} a_{j,k}\, f_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{q} a_{j,k}\, v(f_j) \\
&= \sum_{j=1}^{q} a_{j,k} \left(\sum_{i=1}^{p} b_{i,j}\, g_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} a_{j,k}\, b_{i,j}\, g_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\, a_{j,k}\right) g_i.
\end{aligned}$$

Si l'on désigne par $C = (c_{i,k})_{(i,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,r]\!]}$ cette matrice, on a donc :

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\, a_{j,k}.$$

Dans le calcul de $c_{i,k}$ interviennent les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de B et les coefficients de la $k^{\text{ème}}$ colonne de A ce que l'on peut visualiser de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \boxed{a_{1,k}} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & & a_{j,k} & & a_{j,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q,1} & \dots & a_{q,k} & \dots & a_{q,r} \end{pmatrix} \\ & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \boxed{b_{i,1} \quad \dots \quad b_{i,j} \quad \dots \quad b_{i,q}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{p,1} & \dots & b_{p,j} & \dots & b_{p,q} \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & & \dots & c_{1,r} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & \boxed{c_{i,k}} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{p,1} & \dots & & \dots & c_{p,r} \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 5

Étant données deux matrices :

$$A = (a_{j,k})_{(j,k)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,r]\!]} \qquad \text{et} \qquad B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]},$$

on appelle *produit* BA la matrice :

$$C = (c_{i,k})_{(i,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,r]\!]} \qquad \text{avec} \qquad c_{i,k} = \sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\, a_{j,k}.$$

Cette définition du produit a été choisie pour avoir :

Proposition 5

Étant donnés trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F et G de dimension finie respectivement munis de bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ ainsi que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, on a :

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v)\, M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u).$$

Attention Pour pouvoir faire le produit BA il faut que le nombre de colonnes de la matrice B soit égal au nombre de lignes de la matrice A. Ce nombre commun est la dimension de l'espace vectoriel intermédiaire lors de la composition des applications linéaires associées.

Exemples

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 & -4 \\ 12 & -9 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ n'a pas de sens

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14).$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$

5. Soient p, q et r trois entiers naturels non nuls. Pour calculer le produit de la matrice $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ par la matrice $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$, nous allons considérer leurs applications linéaires canoniquement associées v et u.

   Si $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_r)$, $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ et $\mathcal{B}_3 = (g_1, g_2, \ldots, g_p)$ sont les bases canoniques de $\mathbf{K}^r$, $\mathbf{K}^q$ et $\mathbf{K}^p$, on a :

$$v(f_j) = g_i \qquad \text{et} \qquad v(f_\beta) = 0 \quad \text{si} \quad \beta \neq j$$

   ainsi que :

$$u(e_l) = f_k \qquad \text{et} \qquad u(e_\gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma \neq l.$$

   - Si $j \neq k$, on a alors :

$$\forall \gamma \in [\![1, r]\!]\,,\ v \circ u(e_\gamma) = 0,$$

     ce qui prouve $E_{i,j}\, E_{k,l} = 0$.

   - Si $j = k$, alors :

$$v \circ u(e_l) = v(f_j) = g_i \qquad \text{et} \qquad v \circ u(e_\gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma \neq l$$

     ce qui prouve $E_{i,j}\, E_{k,l} = E_{i,l}$.

   On a ainsi dans tous les cas :

$$E_{i,j}\, E_{k,l} = \delta_{j,k}\, E_{i,l}$$

   où $\delta_{j,k}$ est le *symbole de Kronecker* qui vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon.

Utilisation

De nombreuses relations rencontrées au début de ce chapitre s'écrivent très simplement sous forme de produit de matrices.

Proposition 6

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, rapportés respectivement à des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, ainsi que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$.

Si l'on désigne par X la matrice colonne des composantes du vecteur x dans la base $\mathcal{B}_1$ et par Y la matrice colonne des composantes dans la base $\mathcal{B}_2$ du vecteur $y = u(x)$, on a $Y = A\,X$.

émonstrati C'est la traduction des formules permettant d'écrire analytiquement une application linéaire (*cf.* 870) :

$$\forall i \in [\![1.n]\!]\,,\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\,x_j.$$

□

Exemples

1. Dans le cas de $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$ munis de leurs bases canoniques, grâce à l'identification de tout vecteur avec une matrice colonne, l'application linéaire canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^p & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ X & \longmapsto & A\,X. \end{array}$$

2. Dans le cas d'une forme linéaire u définie sur E (*cf.* 871), si l'on désigne par X la matrice colonne des composantes du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ et par L la matrice de la forme linéaire dans la base $\mathcal{B}$, quitte à confondre une matrice 1×1 avec le seul scalaire qu'elle contient, on a :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{p} \ell_j\,x_j = L\,X.$$

Proposition 7

Étant donnees deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un espace vectoriel E de dimension finie, notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Si l'on désigne par X la matrice colonne des composantes d un vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ et par X' la matrice colonne des composantes de ce même vecteur x dans la base $\mathcal{B}'$ on a $X = P\,X'$.

émonstration C'est la traduction des formules de changement de base (*cf.* 873) :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x'_j.$$

□

Propriétés du produit de matrices

Proposition 8

- Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(B', B'') \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})^2$, on a pour $(\lambda', \lambda'') \in \mathbb{K}^2$:
$$A\,(\lambda' B' + \lambda'' B'') = \lambda' (A\,B') + \lambda'' (A\,B'').$$
- Si $(A', A'') \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a pour $(\lambda', \lambda'') \in \mathbb{K}^2$:
$$(\lambda' A' + \lambda'' A'')\,B = \lambda' (A'\,B) + \lambda'' (A''\,B).$$

Remarques

- Le résultat précédent traduit la linéarité des applications $B \mapsto A\,B$ et $A \mapsto A\,B$, c'est-à-dire la bilinéarité de $(A, B) \mapsto A\,B$.
- En particulier, la multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et si λ est un scalaire, on a :
$$(\lambda\,A)\,B = \lambda\,(A\,B) = A\,(\lambda\,B).$$

Proposition 9

Étant données $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, on a :
$$A\,(B\,C) = (A\,B)\,C.$$

émonstration Désignons par :

- u l'application linéaire de $\mathbb{K}^q$ dans $\mathbb{K}^p$ canoniquement associée à A,
- v l'application linéaire de $\mathbb{K}^r$ dans $\mathbb{K}^q$ canoniquement associée à B,
- w l'application linéaire de $\mathbb{K}^s$ dans $\mathbb{K}^r$ canoniquement associée à C.

Alors $A\,(B\,C)$ est la matrice par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{K}^s$ et $\mathbb{K}^p$ de l'application linéaire $u \circ (v \circ w)$ et $(A\,B)\,C$ est la matrice par rapport aux mêmes bases de $(u \circ v) \circ w$ Comme ces deux applications sont égales, il en est de même de leurs matrices. □

Remarque En particulier, la multiplication des matrices est une loi de composition interne associative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 10

Étant données $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a :
$${}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA.$$

Démonstratio Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$ et $B = (b_{j,k})_{(j,k)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,r]\!]}$.
La matrice $C = A\,B$ possède p lignes et r colonnes, donc $C' = {}^t(A\,B)$ possède r lignes et p colonnes et on a :

$$c'_{k,i} = c_{i,k} = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}\, b_{j,k}.$$

Comme $A' = {}^tA \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $B' = {}^tB \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, le produit $D = {}^tB\,{}^tA$ existe et possède aussi r lignes et p colonnes. La relation :

$$d_{k,i} = \sum_{j=1}^{q} b'_{k,j}\, a'_{j,i} = \sum_{j=1}^{q} b_{j,k}\, a_{i,j} = c'_{k,i}$$

prouve alors que les matrices ${}^tB{}^tA$ et ${}^t(A\,B)$ sont égales. □

2.3 Anneau des matrices carrées d'ordre n

Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition 11

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

émonstration

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un espace vectoriel, et donc en particulier, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.
- La seconde loi, $\times$, est interne, associative et distributive par rapport à la première
- La matrice scalaire I_n est élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puisque c'est la matrice de l'identité d'un espace vectoriel de dimension n dans n'importe quelle base □

Proposition 12

Si E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, l'application φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration On sait déjà que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc une bijection. Le résultat est donc une conséquence de $M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$ et de :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E)\,,\ \forall v \in \mathcal{L}(E)\,,\ M_{\mathcal{B}}(u \circ v) = M_{\mathcal{B}}(u)\, M_{\mathcal{B}}(v). \qquad \square$$

Remarque En particulier l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ par l'application qui met en relation une matrice et l endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associée.

Exemples

1. Si $n \geqslant 2$, alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n est pas un anneau commutatif comme le prouvent :

- pour $n = 2$, l'exemple des produits :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- pour n quelconque, l'exemple des produits :

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

2. Les exemples précédents prouvent que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on peut très bien avoir $A\,B = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Sous–anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition 13

L'ensemble $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures d'ordre n est un sous–espace vectoriel et un sous–anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

émonstration

- C'est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant I_n.
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure car si $(A, B) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})^2$ et $C = A\,B$, alors pour $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$ et $i > k$, on a :

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k}. \qquad (*)$$

  - Si $j > k$, alors $b_{j,k} = 0$ car B est triangulaire supérieure.
  - Si $j \leqslant k$, alors $j < i$ (puisque $k < i$) et alors $a_{i,j} = 0$.

Tous les termes intervenant dans la somme $(*)$ sont donc nuls, et on en déduit que $c_{i,k}$ est nul. Par suite, C est une matrice triangulaire supérieure. $\square$

Remarques

- On démontre de manière analogue que l'ensemble des matrices triangulaires inférieures est aussi un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On obtient la diagonale d'un produit de deux matrices triangulaires supérieures A et B en effectuant le produit terme à terme des diagonales de A et B.

  En effet en reprenant les notations de la proposition précédente on a :

$$c_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,i} = a_{i,i}\, b_{i,i}$$

  puisque pour $j > i$ (respectivement $j < i$) on a $b_{j,i} = 0$ (respectivement $a_{i,j} = 0$).

Proposition 14

L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales d'ordre n est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau (commutatif) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

émonstration C'est un sous-espace vectoriel (respectivement un sous-anneau) car c'est l'intersection du sous-espace vectoriel (respectivement du sous-anneau) des matrices triangulaires supérieures et du sous-espace vectoriel (respectivement du sous-anneau) des matrices triangulaires inférieures.

Le produit est commutatif sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ car, d'après la remarque précedente, multiplier deux matrices diagonales revient à multiplier terme à terme leurs éléments diagonaux :

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, . . , \lambda_n)\ \mathrm{Diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \mathrm{Diag}(\lambda_1\, \mu_1, \lambda_2\, \mu_2, \dots, \lambda_n\, \mu_n). \qquad \square$$

Remarques

- Multiplier à gauche une matrice A par la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ revient à multiplier les lignes de A respectivement par λ_1, λ_2,..., λ_n.

  En effet, en notant $a_{i,j}$, $d_{i,j}$ et $b_{i,j}$ les coefficients respectifs des matrices A, D et $B = D\,A$, on a :

$$b_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} d_{i,j}\, a_{j,k} = d_{i,i}\, a_{i,k} = \lambda_i\, a_{i,k}.$$

- De même, multiplier à droite une matrice A par la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ revient à multiplier les colonnes de A respectivement par λ_1, λ_2,..., λ_n.

Éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: le groupe $GL_n(\mathbb{K})$

Définition 6

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* s'il existe une matrice B vérifiant :

$$A\,B = B\,A = I_n,$$

c'est-à-dire si elle est inversible pour la seconde loi de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Notations

- Une matrice B vérifiant la relation ci-dessus est unique. Elle s'appelle *inverse* de A et se note A^{-1}.
- On désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 15

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n rapportés respectivement à des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective si, et seulement si, la matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est inversible, et on a alors :

$$\left(M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)\right)^{-1} = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(u^{-1}).$$

emonstration

- Si u est bijective, on peut écrire :

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)\,M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(u^{-1}) = M_{\mathcal{B}_2}(u \circ u^{-1}) = M_{\mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}_F) = I_n$$

$$M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(u^{-1})\,M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = M_{\mathcal{B}_1}(u^{-1} \circ u) = M_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id}_E) = I_n$$

ce qui prouve que $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est inversible et que $(M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u))^{-1} = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(u^{-1})$.

- Réciproquement, supposons $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ inversible et considérons l'application linéaire v de F dans E dont $(M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u))^{-1}$ est la matrice par rapport aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$. On a alors :

$$M_{\mathcal{B}_2}(u \circ v) = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)\,M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(v) = I_n = M_{\mathcal{B}_2}(\mathrm{Id}_F)$$

$$M_{\mathcal{B}_1}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(v)\,M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = I_n = M_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id}_E)$$

ce qui entraîne $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ et prouve que u est une application bijective □

Méthode Pour démontrer que $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est inversible et exhiber son inverse, il suffit de montrer que, pour tout $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$, le système :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x_j = y_i$$

possède au plus une solution.

En effet on prouve ainsi que l'endomorphisme canoniquement associé à A est injectif et donc bijectif. D'autre part l'expression de la solution $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ en fonction des $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ donne l expression analytique de l'application réciproque et donc la matrice inverse de A.

Exemples

1. Pour prouver que :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible et en donner l'inverse, on considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & y_2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

Si (x_1, x_2, x_3) est solution du système alors en faisant la somme des trois équations on obtient :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}$$

et par différence avec chacune des équations, on a :

$$x_1 = \frac{3y_1 - y_2 - y_3}{4}$$
$$x_2 = \frac{-y_1 + 3y_2 - y_3}{4}$$
$$x_3 = \frac{-y_1 - y_2 + 3y_3}{4}$$

D'où l'inversibilité de A et l'expression de A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. En utilisant cette méthode on peut prouver que si A est une matrice triangulaire dont tous les éléments diagonaux sont non nuls, alors elle est inversible et son inverse est une matrice triangulaire.

Proposition 16

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n.1}(\mathbb{K}),\ A\,X = 0 \Longrightarrow X = 0$$

alors A est une matrice inversible.

émonst atio En effet, cette relation signifie que l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est injectif et donc bijectif puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. □

Proposition 17

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ vérifient :

$$AB = I_n$$

alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

émonstratio En effet, si l'on désigne par u et v les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés respectivement à A et B, alors la relation $AB = I_n$ entraîne $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$. L'application u est donc surjective et comme c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit qu'elle est bijective.

Par suite A est inversible et en multipliant la relation $AB = I_n$ par A^{-1}, on obtient $B = A^{-1}$. La matrice B est donc aussi inversible et son inverse est A. □

Proposition 18

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$. Une famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E est une base de E si, et seulement si, la matrice $M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est inversible.

émonstratio La matrice $M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme de E qui transforme $\mathcal{B}$ en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On sait que cet endomorphisme est bijectif (et donc que sa matrice est inversible d'après la proposition précédente) si, et seulement si, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de E □

Proposition 19

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie, alors la matrice de passage $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

émonstration La matrice $P = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ par rapport à la base $\mathcal{B}$; elle est donc inversible d'après la proposition précédente

Mais P est aussi la matrice de l'identité par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ puisque :

$$P = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = M_{\mathcal{B}}\big(\mathrm{Id}_E(\mathcal{B}')\big) = M_{\mathcal{B}'.\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

Donc $P^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_F^{-1}) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de passage $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ □

Remarque La proposition 18 prouve réciproquement que toute matrice inversible peut être considérée comme une matrice de changement de base.

Proposition 20

Si E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n, alors $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe isomorphe à $(GL(E), \circ)$.

Démonstration

- $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe car c'est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

  Rappelons que si A et B sont deux matrices inversibles alors l'inverse de $A\,B$ est $B^{-1}\,A^{-1}$, l'ordre étant ici très important dans la mesure où $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est pas un anneau commutatif.

  Si $\mathcal{B}$ est une base de E la bijection φ

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

  réalise une bijection de $GL(E)$ sur $GL_n(\mathbb{K})$ d'après la proposition 15 de la page 887, et c'est un morphisme de groupe par définition du produit matriciel. □

Proposition 21

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. On note cette matrice ${}^tA^{-1}$.

Demonstration La relation

$${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(A\,A^{-1}) = {}^tI_n = I_n$$

prouve que ${}^tA$ est inversible et que son inverse est ${}^t(A^{-1})$. □

2.4 Exemple : une construction de $\mathbb{C}$

Dans le chapitre sur les complexes, nous avons montré l'existence d'un corps :

- contenant $\mathbb{R}$ et un élément i vérifiant $i^2 = -1$,
- qui soit un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont $(1, i)$ est une base.

Nous allons redemontrer ce résultat en utilisant le calcul matriciel.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, posons $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et :

$$\mathcal{C} = \left\{M(a,b) \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathbb{R}\,I + \mathbb{R}\,J$$

avec :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $\mathcal{C}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2 admettant (I, J) pour base.

Un calcul élémentaire prouve $J^2 = -I$ et donc :

$$M(a,b)\,M(c,d) = M(a\,c - b\,d, a\,d + b\,c).$$

Par suite, la multiplication laisse stable $\mathcal{C}$ et est commutative sur $\mathcal{C}$.

Comme $\mathcal{C}$ contient l'élément neutre multiplicatif I, on en déduit qu'il forme une sous–anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

L'égalité $M(a,b)\,{}^tM(a,b) = (a^2 + b^2)\,I$ prouve que tout élément non nul de $\mathcal{C}$ est inversible.

L'application $\lambda \mapsto \lambda\,I$ étant un morphisme injectif d'anneaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}$, le corps $\mathbb{R}$ est isomorphe à un sous–corps de $\mathcal{C}$. Il suffit alors d'identifier tout réel λ avec la matrice scalaire $\lambda\,I$ et de poser $i = J$ pour avoir un corps répondant au problème.

Remarques

- Par cette construction la conjugaison des complexes correspond à la transposition des matrices.
- Le module d un nombre complexe est la racine carrée de son déterminant.

3. Rang des matrices

3.1 Matrices d'une application linéaire dans des bases différentes

Proposition 22

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ainsi que u une application linéaire de E dans F. Si l'on désigne par :

- $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}'_1$,
- $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$ deux bases de F et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}'_2$,
- $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(u)$,

alors on a $A' = Q^{-1}\,A\,P$.

émonstration Si x (respectivement y) est un vecteur quelconque de E (respectivement de F), et si l'on désigne par :

- X (respectivement Y) la matrice colonne de ses composantes par rapport à $\mathcal{B}_1$ (respectivement $\mathcal{B}_2$),
- X' (respectivement Y') la matrice colonne de ses composantes par rapport à $\mathcal{B}'_1$ (respectivement $\mathcal{B}'_2$),

alors on a :

$$X = P X' \qquad \text{et} \qquad Y = Q Y'.$$

Lorsque $y = u(x)$ on peut écrire $Y = A X$, donc :

$$Q Y' = A P X'$$

et, comme Q est inversible :

$$Y' = Q^{-1} A P X'$$

ce qui prouve que la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}_1'$ et $\mathcal{B}_2'$ est $Q^{-1} A P$ □

Corollaire 23

Soient u un endomorphisme d un espace vectoriel E de dimension finie ainsi que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Si on note A (respectivement A') la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$), on a :

$$A' = P^{-1} A P$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exemples

1. Pour la symétrie étudiée au début de ce chapitre, on trouvé :
   - sa matrice par rapport à la base canonique : $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$,
   - sa matrice par rapport à la base (f_1, f_2) : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   La matrice de passage de la première à la seconde base est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $A' = P^{-1} A P$, ce que l'on peut vérifier par le calcul.
2. Si A est une matrice carrée d'ordre n et si l'on a trouvé une matrice P inversible et une matrice diagonale D vérifiant $A = P^{-1} D P$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $A^k = P^{-1} D^k P$. Comme D^k est facile à calculer, on peut alors obtenir facilement l'expression de A^k.

3.2 Rang d'une matrice

Définition 7

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle *rang* de A, et on note $\mathrm{rg}(A)$ ou $\mathrm{rg}\, A$ le rang des vecteurs colonnes de A (vecteurs de $\mathbb{K}^n$).

Proposition 24

1. Étant donnée une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E de dimension n le rang d'une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de E est égal au rang de la matrice $M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$.
2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimension finie rapportés respectivement à des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Le rang d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est égal au rang de la matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$.

émonstration

1. Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, l'application linéaire .
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\xi_i)_{i\in[\![1,n]\!]} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i \end{array}$$
est un isomorphisme, puisque l'image de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la base $\mathcal{B}$ Cet isomorphisme transforme la famille des vecteurs colonnes de $M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ en la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, et donc le sous–espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de $M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ en $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p)$. Ces deux sous–espaces vectoriels ont donc même dimension, d'où le résultat.
2. Conséquence du point précédent puisque $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = M_{\mathcal{B}_2}\big(u(\mathcal{B}_1)\big)$ et que :
$$\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim \mathrm{Vect}\big(u(\mathcal{B}_1)\big).$$ □

Exemple Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on sait que l'endomorphisme canoniquement associé à A est bijectif si, et seulement si, il est surjectif c'est–à–dire si, et seulement si, son rang est n. Donc A est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n.

Notation Soient n et p deux entiers naturels non nuls et r un entier strictement compris entre 0 et $\min(n, p)$. La matrice :
$$J_r = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] r \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] n-r \end{array} \\ \underbrace{\hphantom{1\ 0\ \cdots\ 0}}_{r}\ \underbrace{\hphantom{0\ \cdots\ 0}}_{p-r} \end{array}$$
est aussi représentée par blocs : $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$

On définit de même la matrice J_r lorsque $r \in \{0, n, p\}$, en supprimant par convention les blocs dont au moins une des dimensions est nulle

Remarque Les r premières colonnes de la matrice J_r sont les r premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et les dernières sont nulles On en deduit donc que J_r est de rang r.

Proposition 25

Une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $M = Q\, J_r\, P$.

Démonstration

- Supposons M de rang r et désignons par u l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à M D'après la proposition 24 de la page précédente, elle est de rang r et son noyau est donc de dimension $p - r$. On peut compléter une base $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_p)$ de $\operatorname{Ker} u$ par une base d'un supplémentaire E_0 de $\operatorname{Ker} u$. On obtient ainsi une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ de E.

  Posons $f_1 = u(e_1)$, $f_2 = u(e_2)$,..., $f_r = u(e_r)$. Comme u induit un isomorphisme de E_0 sur $\operatorname{Im} u$ (proposition 17 de la page 854), on en déduit que l'image $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ d'une base de E_0 est une famille libre. On peut donc la completer en une base $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ de F.

  Par construction de ces bases, la matrice de u dans $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est J_r, ce qui, d'après la proposition 22 de la page 891 donne le résultat annoncé en prenant pour P l'inverse de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ à $\mathcal{B}_1$ et pour Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{B}_2$.
- Réciproquement, supposons $M = Q\, J_r\, P$ et désignons par :
  - p l'automorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à la matrice inversible P,
  - q l'automorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice inversible Q,
  - j l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à J_r

  Alors $Q\, J_r\, P$ est la matrice par rapport aux bases canoniques de $q \circ j \circ p$ Comme p et q sont des isomorphismes, le rang de $q \circ j \circ p$ est, d'après la proposition 21 de la page 857 égal à celui de j c'est-à-dire à r □

Proposition 26

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le rang de ${}^tA$ est égal au rang de A.

Démonstration Soit r le rang de A. D'après la proposition précédente on sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ tels que $A = P\, J_r\, Q$ et donc :

$$ {}^tA = {}^tQ\, {}^tJ_r\, {}^tP. $$

Les matrices ${}^tP$ et ${}^tQ$, transposées de matrices inversibles, sont inversibles et ${}^tJ_r$ est du même type que J_r mais avec p lignes et n colonnes. Donc, d'après la proposition précédente, le rang de ${}^tA$ est r et par suite est égal à celui de A. □

La transposition échangeant les rôles des lignes et des colonnes on peut résumer les résultats précédents :

Proposition 27

Le rang d une matrice est égal au rang :

- de ses vecteurs colonnes,
- de ses vecteurs lignes,
- de toute application linéaire qu'elle peut représenter.

Exemples

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le rang de A est :
   - inférieur ou égal à n, car c'est le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$,
   - inférieur ou egal à p, car c'est le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^p$.

   Il est donc au plus égal à $\min(n, p)$.
2. Si A est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si on a $a_{i,i} = 0$, alors les i premiers vecteurs colonnes de cette matrice sont combinaisons linéaires des $i - 1$ premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et forment donc une famille liée. Par suite une telle matrice n'est pas de rang n et elle n'est donc pas inversible.
   Ce résultat, combiné à celui de l'exemple 2. de la page 888, montre qu'une matrice triangulaire supérieure A est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Son inverse est alors aussi triangulaire supérieure avec sur sa diagonale les inverses des coefficients diagonaux de A, puisque dans le produit des matrices triangulaires les diagonales se multiplient terme à terme.

EXERCICES

Dans tous les exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

2. Soit f l'application lineaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associee à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

3. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \ u(P) = P' + P.$$

Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

4. Dans $\mathbb{R}^3$ déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, ou :

$$\mathcal{B}_1 = \Big((1,2,1), (2,3,3), (3,7,1) \Big)$$

$$\mathcal{B}_2 = \Big((3,1,4), (5,3,2), (1,-1,7) \Big).$$

5. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice de la composée de l'homothétie de rapport 5 et de la projection sur le plan d'équation $x+y+2z=0$ parallèlement à la droite dirigée par $(1,2,1)$.

6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ et trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un terme non nul.

Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

7. **a)** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,l}$.

b) Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

d) Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

8. Soient $n \in \mathbb{N}$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le rang de A^n.

9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
Montrer que A peut s'écrire comme la somme de r matrices de rang 1.

10. Soient k et n deux entiers et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

a_1, a_2, …, a_n étant n nombres complexes.
Trouver une condition suffisante pour qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré k tel que $P(A) = 0$.

11. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall i \in \{1.2.\dots.n\}\ ,\ \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

Montrer que A est inversible.

12 On considère la matrice $n \times n$ suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & .. & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & .. & .. & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, en déduire que A est inversible et donner son inverse

13 Soient a et b deux scalaires et $A = (a_{i,j})$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\begin{cases} \text{si } i \neq j \ a_{i,j} = a, \\ a_{i,i} = b. \end{cases}$$

Calculer A^m $(m \in \mathbb{N})$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice A soit inversible et donner alors son inverse.

14 Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.
Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = B$ où :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & .. & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15 Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

$(a.b.c.d) \in \mathbb{C}^4$.
Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Ce sous-anneau est-il commutatif ?
Est-il intègre ?
E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
Si oui, de quelle dimension ?

16 Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
On appelle trace de A l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

a) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que :

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

b) Soit f un endomorphisme de E.
Montrer que la trace de la matrice de f dans une base de E ne dépend pas de la base choisie.
On peut ainsi définir la trace d'un endomorphisme comme la trace de sa matrice dans n'importe quelle base de E.

c) Soit p un projecteur de E, montrer que :

$$\text{rg}\, p = \text{tr}\, p.$$

17. Soient A, B et C trois matrices non nulles telles que $ABC = 0$.
Montrer que deux au moins de ces trois matrices ne sont pas inversibles.

18. Soient a et b deux nombres complexes et A la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Calculer A^n $(n \in \mathbb{N})$.

19. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^{n+1} = 0$.
Montrer que $M^n = 0$.

20. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.
Montrer que l'on peut trouver deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que :

$$M = AB.$$

Application : déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

21 Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice inversible avec $A^{-1} = (b_{i,j})$ et telle que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \ , \ a_{i,j} \geqslant 0 \ , \ b_{i,j} \geqslant 0.$$

Montrer que dans chaque rangée de A, il y a un et un seul élément non nul.

22 Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ f(AB) = f(BA).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ f(A) = \lambda \text{tr}(A).$$

(Voir exercice 16 pour la définition de la trace.)

23. Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et A la matrice carrée d'ordre $n+1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de A^2.

24. Soit M la matrice de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général :

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \quad \text{si } 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ &= 0 \qquad\quad \text{sinon} \end{aligned}$$

(on numérote les lignes et les colonnes de 0 à n).

a) En considérant M comme une matrice de changement de base sur $\mathbb{R}_n[X]$ (espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n), déterminer M^{-1}

b) Soit deux suites réelles a_n et b_n liées par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} b_p$$

En introduisant les vecteurs $A_n = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, trouver l'expression de b_n en fonction de a_p pour $p = 0, 1, \dots, n$.

c) Applications :

- Trouver le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal m dans un ensemble de cardinal n.
- Trouver le nombre de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ n ayant aucun point fixe.

Chapitre 31

Systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, n et p sont des entiers naturels non nuls et $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

1. Opérations élémentaires sur les rangées d'une matrice

Dans cette section, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.1 Généralités

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes (respectivement colonnes) d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :

1. addition d'un multiple d'une ligne (respectivement colonne) à une autre ligne (respectivement colonne),
2. multiplication d'une ligne (respectivement colonne) par un scalaire non nul,
3. échange de deux lignes (respectivement colonnes).

Étant donnés deux entiers distincts i et j compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}$, on convient des codages suivants.

addition de $\lambda\, L_j$ à la ligne L_i	$L_i \leftarrow L_i + \lambda\, L_j$
multiplication de la ligne L_i par $\lambda \neq 0$	$L_i \leftarrow \lambda\, L_i$
échange des lignes L_i et L_j	$L_i \leftrightarrow L_j$

On utilise un codage analogue pour les colonnes en remplaçant L par C.

Si B est déduite de A par une opération élémentaire, alors A peut se deduire de B par une opération élémentaire. Par exemple, pour des opérations sur les lignes on a les transformations suivantes

Passage de A à B	Passage de B à A
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

Proposition 1

Deux matrices déduites l'une de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires ont même rang.

Démonstration Par récurrence, il suffit de montrer le résultat pour une opération élémentaire, et, quitte à transposer les matrices, on peut supposer qu'il s'agit d'une opération sur les lignes Considérons deux telles matrices A et B, et notons F (respectivement G) le sous–espace vectoriel engendré par les lignes de A (respectivement par les lignes de B).
On a $G \subset F$ puisque chaque ligne de B est évidemment combinaison linéaire des lignes de A. Comme on passe de B à A par une opération élémentaire, on en déduit que l'on a aussi $F \subset G$. Les sous–espaces vectoriels F et G étant alors égaux, ils ont donc même dimension. □

1.2 Traduction en terme de produit matriciel

Proposition 2

- Chaque opération élémentaire sur les lignes consiste en la multiplication à gauche par une matrice inversible.
- Chaque opération élémentaire sur les colonnes consiste en la multiplication à droite par une matrice inversible.

Démonstration

- On vérifie que le passage de A à B par chaque opération élémentaire sur les lignes correspond à la relation $B = P\,A$, selon le tableau suivant.

Opération élémentaire	Matrice P
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$I_n + \lambda E_{i,j}$
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$I_n - E_{i,i} + \lambda E_{i,i}$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$

Les matrices P des deux dernières lignes de ce tableau étant respectivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dans chacun des cas, la matrice P se déduit de la matrice I_n par la même opération élémentaire que celle qui permet de passer de A à B D'après la proposition précédente, la matrice P est donc de même rang que I_n et par suite est inversible

- On vérifie de même que chaque opération élémentaire sur les colonnes correspond à la multiplication à droite par la matrice Q selon le tableau suivant :

Opération élémentaire	Matrice Q
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$I_p + \lambda E_{j,i}$
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$I_p - E_{i,i} + \lambda E_{i,i}$
$C_i \leftrightarrow C_j$	$I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$

ces matrices ayant la même forme que précédemment.

La matrice Q est inversible puisqu'elle se déduit de la matrice I_p par la même opération élémentaire. □

Remarque Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que l on passe de A à B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. Si ces opérations sont successivement associées aux matrices P_1, P_2,..., P_s, alors on a :

$$B = P_s \dots P_2 P_1 A.$$

1.3 Application au calcul du rang

Lemme

Si α est un scalaire non nul, on a :

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) = 1 + \operatorname{rg} A'.$$

emonstration Notons A la matrice de l'énoncé et F le sous–espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$ engendré par ses lignes $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$. Comme α est non nul, la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(L_1)$ et le sous–espace vectoriel $\operatorname{Vect}(L_2, \ldots, L_n)$ ont une intersection réduite à $\{0\}$ et forment donc deux sous–espaces vectoriels supplémentaires de F.
Par consequent, on a $\dim F = 1 + \dim \operatorname{Vect}(L_2, \ldots, L_n)$ c'est-à-dire :

$$\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \cdot & A' \\ 0 & \end{array} \right)$$

ce qui prouve le résultat, puisque le sous–espace vectoriel engendré par les colonnes de cette dernière matrice est le même que celui engendré par les colonnes de A' □

Méthode

On peut ainsi déterminer le rang d'une matrice A quelconque.

- Si $A = 0$, son rang est égal à 0.
- Sinon, A possède au moins un coefficient non nul ; quitte à permuter ses lignes et ses colonnes (ce sont des opérations élémentaires, donc cela ne change pas le rang), on peut supposer que ce coefficient α est en position $(1,1)$.

  En retranchant aux $n-1$ dernières lignes un multiple judicieux de la première, on obtient une matrice du type :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

  et donc $\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A'$.
- On se ramène ainsi à une matrice $(n-1) \times (p-1)$ et il suffit de réitérer le procédé jusqu'à obtenir une matrice nulle ou une matrice dont le rang est evident (par exemple à une ligne ou une colonne).

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$.

En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - aL_1$ on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & b-2a & c-3a & d-4a \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A'$ où $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ b-2a & c-3a & d-4a \end{pmatrix}$.

En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - (b-2a)\,L_1$, on obtient :

$$\operatorname{rg} A' = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+c-2b & 2a+d-3b \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

- si $a+c=2b$ et $2a+d=3b$, c'est-à-dire si (a,b,c,d) sont en progression arithmétique, alors $\operatorname{rg} A = 2$,
- sinon, $\operatorname{rg} A = 3$.

1.4 Méthode du pivot de Gauss

Proposition 3

Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on peut transformer toute matrice inversible en une matrice triangulaire supérieure (inversible).

émonstration Procédons par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, la matrice est déjà triangulaire.
- Supposons le résultat vrai pour $n-1$, et prenons une matrice A inversible de taille n

  Comme A est inversible, sa première colonne est non nulle et, quitte à permuter les lignes, on peut supposer $a_{1,1} \neq 0$ (le pivot). En retranchant aux $n-1$ dernières lignes un multiple de la première, on obtient une matrice de la forme :

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

  Le lemme de la page 903 nous dit alors :

$$n = \operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A',$$

  et par suite A' est inversible. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut donc, par des opérations élémentaires sur les lignes de A', transformer A' en une matrice triangulaire et la forme de B montre que cela revient à faire les opérations correspondantes sur la matrice B qui se transforme alors en matrice triangulaire supérieure. □

Méthode La démonstration précédente donne une méthode pour transformer, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, une matrice inversible en matrice triangulaire supérieure.

- Dans un premier temps, on peut transformer la matrice en une matrice du type :
$$\left(\begin{array}{c|ccc} a & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$
- Si $n \geqslant 2$, en répétant le procédé sur la matrice inversible A_1, on obtient une matrice de la forme :
$$\left(\begin{array}{cc|ccc} \alpha_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right).$$
- Ainsi de proche en proche jusqu'à obtenir une matrice triangulaire.

Mais cette méthode permet aussi de montrer qu'une matrice est inversible. En effet, si l'on peut transformer, par des opérations élémentaires sur les lignes, une matrice A en une matrice triangulaire T qui a des termes non nuls sur la diagonale alors la matrice A a même rang que T et donc est inversible.

Exemple Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$.

En utilisant la méthode de Gauss on obtient successivement :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ce qui prouve que A est inversible.

On verra page 911 une application de cette méthode à la résolution de systèmes, et donc en particulier au calcul de l'inverse d'une matrice.

Remarque Si la matrice A n'est pas inversible :

- soit on ne peut pas aller jusqu'au bout de la transformation c'est-à-dire qu'une des matrices A, $A_1, \ldots, A_{n-2}$ a une première colonne nulle,
- soit le dernier coefficient diagonal est nul.

2. Systèmes linéaires

2.1 Définitions

Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls on appelle système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tout système $(\mathcal{S})$ du type :

$$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,j}\,x_j + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,j}\,x_j + \cdots + a_{i,p}\,x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,j}\,x_j + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n \end{cases}$$

où $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

- La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ s'appelle la *matrice du système.*
- Le n–uplet $(b_1, b_2, \ldots. b_n)$ est appelé le *second membre* du système.
- Lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ on dit que le système est *homogène* ou que le système est « *sans second membre* ».
- On appelle *solution du système* toute p–liste $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations de $(\mathcal{S})$.
- Le système $(\mathcal{S})$ est dit *compatible* s'il admet au moins une solution. Tout système homogène est compatible puisqu'il admet au moins la solution $(0.0, \ldots, 0)$.
- On appelle *rang du système* $(\mathcal{S})$ le rang de la matrice A.
- Le système $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en remplaçant tous les b_i par 0 est appelé *système homogène associé* à $(\mathcal{S})$.

Exemple Le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 - x_1 = 1 \end{cases}$$

n'est pas compatible puisque si (x_1, x_2, x_3) était une solution en sommant les trois équations on obtiendrait $0 = 3$.

Le système homogène associé :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \end{cases}$$

admet pour solutions tous les triplets de la forme $(\lambda, \lambda, \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

2.2 Structure affine de l'ensemble des solutions

La linéarité du système $(\mathcal{S})$ montre que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$, s'il est non vide, est un sous–espace affine de $\mathbb{K}^p$ dirigé par le sous–espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{S}_0)$, c'est–à–dire que :

- l ensemble des solutions de $(\mathcal{S}_0)$ est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$,
- si $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ sont deux solutions de $(\mathcal{S})$, alors leur différence est solution de $(\mathcal{S}_0)$,
- si $(x_1, x_2, \ldots x_p)$ est solution de $(\mathcal{S})$ et si $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_p)$ est solution de $(\mathcal{S}_0)$ alors leur somme est solution de $(\mathcal{S})$,
- lorsque $(\mathcal{S})$ est compatible, on en obtient les solutions en ajoutant à une solution particulière de $(\mathcal{S})$ toutes les solutions de $(\mathcal{S}_0)$.

2.3 Interprétations d'un système linéaire

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire de n équations à p inconnues x_1, x_2,..., x_p qui s'écrit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j = b_i.$$

Interprétation matricielle

Si A est la matrice de $(\mathcal{S})$, alors en posant :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

le système $(\mathcal{S})$ s'écrit $A\,X = B$.

Réciproquement : si l'on se donne $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n\,1}(\mathbb{K})$, la recherche d'une matrice $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A\,X = B$ se traduit par un système linéaire.

Avec cette interprétation, il est évident que si la matrice A est inversible (et donc carrée), alors le système $(\mathcal{S})$ possède une solution unique donnée par $X = A^{-1}\,B$.

Interprétation vectorielle

Si $C_1, C_2, \ldots, C_p$ désignent les vecteurs colonnes de la matrice A et si B désigne le vecteur $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, alors le système peut s'écrire :

$$\sum_{j=1}^{p} x_j\, C_j = B.$$

Réciproquement : si v_1, v_2,..., v_p et b sont $p+1$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, la recherche de p scalaires x_1, x_2,..., x_p tels que :

$$\sum_{j=1}^{p} x_j v_j = b$$

peut se traduire, dans une base $\mathcal{B}$, par un système linéaire de n equations à p inconnues.

Avec cette interprétation, il est évident que :

1. le système $(\mathcal{S})$ est compatible si, et seulement si, B appartient au sous–espace vectoriel $\text{Vect}\{C_1, C_2, \ldots, C_p\}$ de $\mathbb{K}^n$,
2. le rang de $(\mathcal{S})$ est égal au rang de $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$,
3. si la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ est libre alors le système possède au plus une solution,
4. si $n = p$ et si la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ alors pour tout B le système possède une unique solution, correspondant aux composantes de B dans la base $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice A du système. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, alors le système $(\mathcal{S})$ s'écrit $u(x) = b$.

Réciproquement : étant donnés deux $\mathbb{K}$–espaces vectoriels E et F de dimensions respectives p et n, ainsi qu'une application linéaire u de E dans F et un vecteur b de F, la recherche des x tels que $u(x) = b$ peut se traduire par un système linéaire de n équations à p inconnues.

Avec cette interprétation, il est évident que :

1. le système est compatible si, et seulement si, b appartient à $\operatorname{Im} u$
2. si u est injective le système possède au plus une solution,
3. si u est bijective le système possède une solution et une seule,
4. si x_0 est une solution de $(\mathcal{S})$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est :
$$x_0 + \operatorname{Ker} u = \{x_0 + h \mid h \in \operatorname{Ker} u\},$$
5. le rang de $(\mathcal{S})$ est égal au rang de u
6. si $(\mathcal{S})$ est un système homogène de rang r, alors l ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - r$.

Interprétation à l'aide de formes linéaires

Soient φ_1, φ_2,..., φ_n les formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$ canoniquement associées aux lignes de A. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, le système $\mathcal{S}$ peut s'écrire :

$$\varphi_1(x) = b_1\ ,\ \varphi_2(x) = b_2, \ldots, \varphi_n(x) = b_n.$$

Réciproquement : étant donnés un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E de dimension p, ainsi que des formes linéaires φ_1, φ_2,...,φ_n sur E, la recherche des $x \in E$ vérifiant un système du type :

$$\varphi_1(x) = b_1\ ,\ \varphi_2(x) = b_2, \ldots, \varphi_n(x) = b_n$$

peut se traduire par un système linéaire de n équations à p inconnues.

Avec cette interprétation, il est évident que :

1. l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}_0$ est l'intersection des noyaux des formes linéaires φ_1, φ_2,..., φ_n c'est–à–dire de n hyperplans vectoriels,
2. l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}$ est l'intersection de n hyperplans affines,
3. l'intersection de n hyperplans vectoriels, noyaux de formes linéaires independantes sur un espace vectoriel de dimension p, est un sous–espace vectoriel de dimension $p - n$.

3. Systèmes de Cramer

3.1 Définition

Définition 1

Si $(\mathcal{S})$ est un système linéaire de n équations à n inconnues il est équivalent de dire :

(i) le système $(\mathcal{S})$ admet une solution et une seule

(ii) le système homogène associé $(\mathcal{S}_0)$ ne possède que la solution triviale $(0, 0, \ldots, 0)$,

(iii) la matrice du système est inversible.

On appelle *système de Cramer* tout système linéaire de n équations à n inconnues vérifiant l'une des propriétés précédentes.

Démonstratio Notons A la matrice du système et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Soit X l'unique solution de $(\mathcal{S})$. Si X_0 est solution de $(\mathcal{S}_0)$, alors $X + X_0$ est solution de $(\mathcal{S})$ donc égal à X. Par suite $X_0 = 0$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Comme $(\mathcal{S}_0)$ ne possède que la solution triviale, le noyau u est réduit à $\{0\}$. Alors u est alors un endomorphisme injectif de $\mathbb{K}^n$, donc bijectif et sa matrice A est inversible.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Comme A est inversible le système $(\mathcal{S})$ admet une solution et une seule $X = A^{-1} B$. □

Exemples

1. Pour montrer qu'une matrice carrée A est inversible, il suffit de montrer que le système $A X = 0$ ne possède que la solution nulle.
2. Pour montrer qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et trouver son inverse, il suffit de montrer que pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$, le système $A X = Y$ possède au plus une solution. L'expression de cette solution X en fonction de Y donne alors la matrice inverse A^{-1}.
   Il n'est donc pas nécessaire, dans ce cas, de résoudre le système par équivalence : l'unicité de la solution prouve aussi son existence.
3. Soit $(\mathcal{S})$ un système triangulaire de n équations à n inconnues, c'est-à-dire un système dont la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,i} x_i + \cdots + & a_{1,n-1} x_{n-1} + & a_{1,n} x_n & = b_1 \\ a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,i} x_i + \cdots + & a_{2,n-1} x_{n-1} + & a_{2,n} x_n & = b_2 \\ & & & \vdots \\ a_{i,i} x_i + \cdots + & a_{i,n-1} x_{n-1} + & a_{i,n} x_n & = b_i \\ & & & \vdots \\ & a_{n-1,n-1} x_{n-1} + & a_{n-1,n} x_n & = b_{n-1} \\ & & a_{n,n} x_n & = b_n \end{array}\right.$$

   La matrice A est inversible (et donc $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer) si, et seulement si, tous les $a_{i,i}$ sont non nuls. Dans un tel cas l'unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peut être déterminée en calculant x_n grâce à la dernière équation, puis en calculant x_{n-1} grâce à l'avant-dernière équation, etc. En supposant avoir calculé x_n, x_{n-1},..., x_{i+1}, la valeur de x_i peut être obtenue à l'aide de la $i^{\text{ème}}$ équation car le coefficient $a_{i,i}$ est non nul.

3.2 Résolution d'un système de Cramer par la méthode du pivot de Gauss

Étant donné un système de Cramer $(\mathcal{S})$ d'écriture matricielle $A X = B$, la méthode du pivot de Gauss permet, par des opérations élémentaires sur les lignes de A de transformer la matrice A en une matrice triangulaire. En faisant les mêmes opérations sur les lignes du second membre B, on obtient un système équivalent à $(\mathcal{S})$. Comme ce dernier est triangulaire avec des coefficients non nuls sur la diagonale, on sait résoudre ce dernier de proche en proche.

En particulier, cette méthode peut être utilisée pour inverser une matrice A en résolvant le système $A\,X = Y$.

Exemple Pour inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$, résolvons le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = X \\ x + 2y + 3z + 4t = Y \\ x + 3y + 6z + 10t = Z \\ x + 4y + 10z + 20t = T \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Gauss, on obtient successivement les systèmes (équivalents) :

$$\begin{cases} x + y + z + t = X \\ \phantom{x + {}} y + 2z + 3t = Y - X \\ \phantom{x + {}} 2y + 5z + 9t = Z - X \\ \phantom{x + {}} 3y + 9z + 19t = T - X \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = X \\ \phantom{x + {}} y + 2z + 3t = Y - X \\ \phantom{x + y + {}} z + 3t = Z + X - 2Y \\ \phantom{x + y + {}} 3z + 10t = T + 2X - 3Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = X \\ \phantom{x + {}} y + 2z + 3t = Y - X \\ \phantom{x + y + {}} z + 3t = Z + X - 2Y \\ \phantom{x + y + z + {}} t = -X + 3Y - 3Z + T \end{cases}$$

La solution est alors donnée par :

$$\begin{cases} t = -X + 3Y - 3Z + T \\ z = Z + X - 2Y - 3t = 4X - 11Y + 10Z - 3T \\ y = Y - X - 2z - 3t = -6X + 14Y - 11Z + 3T \\ x = X - y - z - t = 4X - 6Y + 4Z - T \end{cases}$$

et l'inverse de A est donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques

1. On a vu que les combinaisons linéaires utilisées dans la méthode précédente transforment un système en un système équivalent. Donc si l'on peut à l'aide de cette méthode transformer un système carré quelconque $(\mathcal{S})$ en un système de Cramer triangulaire, cela permet à la fois de prouver que $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer et d'en donner la solution.
2. Bien que la méthode du pivot de Gauss permette de résoudre tout système de Cramer, il est parfois préférable, lorsque le système présente une certaine symétrie, de résoudre par combinaisons linéaires (*cf.* exemple 1. de la page 888).
3. On peut résoudre un système quelconque par la méthode du pivot de Gauss. En effet, en utilisant la méthode de la page 904, on peut par des opérations élémentaires sur les lignes et des permutations de colonnes (ce qui revient à permuter les inconnues), transformer la matrice du système en :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & & & \cdots & \alpha_{1,p} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ & & \alpha_{r,r} & \cdots & \alpha_{r,p} \\ & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2}\ldots\alpha_{r,r} \neq 0$.

Le système a alors une solution si, et seulement si, les $n-r$ dernières équations ainsi transformées ont un second membre nul. Les $p-r$ dernières inconnues sont alors quelconques, et les autres s'expriment en fonction de ces dernières (attention : les inconnues ne sont pas nécessairement dans l'ordre initial)

EXERCICES

1. Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Inverser les matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{C}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$.

c) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$ telle que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 1$$

et :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\ , a_{i,i} = 0.$$

Montrer que A est inversible et donner son inverse.

4. Resoudre le système suivant :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

5. Résoudre le système suivant (on discutera suivant les valeurs de m) :

$$\begin{cases} x + my + (m-1)z = m+1 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m-1. \end{cases}$$

Donner le rang du système en fonction de m.

6. Soient a, b et c trois nombres réels, résoudre le système :

$$\begin{cases} (b+c)x + bcy + (1+b)(1+c)z = a \\ (c+a)x + acy + (1+c)(1+a)z = b \\ (a+b)x + aby + (1+a)(1+b)z = c. \end{cases}$$

7. Résoudre le système homogène dont la matrice $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quel est son rang ?

8. Soient a, b, c trois réels distincts.

a) Montrer que le système suivant est de Cramer :

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ x + by + b^2 z = 0 \\ x + cy + c^2 z = 0. \end{cases}$$

On pourra introduire le polynôme $x + yX + zX^2$.

b) Résoudre :

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^4 \\ x + by + b^2 z = b^4 \\ x + cy + c^2 z = c^4. \end{cases}$$

On pourra introduire le polynôme $P = X^4 - zX^2 - yX - x$.

9. Soit a et b deux réels distincts.
Résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & ay & + & a^2 z & + & a^3 t & = & 0 \\ x & + & by & + & b^2 z & + & b^3 t & = & 0 \\ & & y & + & 2az & + & 3a^2 t & = & 1 \\ & & y & + & 2bz & + & 3b^2 t & = & 1. \end{array} \right.$$

10. Soit A_1, A_2,..., A_n n points du plan. On cherche des points B_1, B_2,..., B_n tels que pour $i \in [\![1,n]\!]$, A_i soit le milieu de $[B_i, B_{i+1}]$ (en posant $B_{n+1} = B_1$).

On note a_1, a_2,..., a_n les premières coordonnées des points A_1, A_2,..., A_n et x_1, x_2,..., x_n les premières coordonnées des points B_1, B_2,..., B_n.

a) Écrire le système vérifié par x_1, x_2,..., x_n.
Quel est le système vérifié par les deuxièmes coordonnées des points ?

b) Résoudre ce système pour $n = 3$ et $n = 4$.
Donner une interprétation géométrique du résultat (on donnera en particulier une construction du polygone $B_1, B_2, \ldots, B_n$).

c) Résoudre le système dans le cas général.

d) Quel est l'inverse de la matrice du système quand elle est inversible ? Sinon quel est son rang ?

11. Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver les scalaires λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Resoudre alors le système $AX = \lambda X$.

b) Trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

12. Mêmes questions pour la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Chapitre 32

Déterminants

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes, et E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

PCSI En PCSI :

- on se limite aux cas $n = 2$ ou $n = 3$
- l'étude du groupe symétrique étant hors programme le chapitre commence à la page 922. PCSI

MPSI 1. Groupe symétrique

1.1 Définition

Notation On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

Si $n = 1$, on a $\mathcal{S}_n = \{\mathrm{Id}\}$. Dans toute la suite, nous supposerons $n \geqslant 2$.

Proposition 1

Muni de la composition des applications, $\mathcal{S}_n$ est un groupe de cardinal $n!$ que l'on appelle *groupe symétrique*.

Si $(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n^2$, le composé $\sigma \circ \tau$ est noté $\sigma\tau$ et appelé produit des éléments σ et τ.

Exemples

1. Étant donnés deux éléments distincts i et j de $[\![1,n]\!]$, l'application τ définie par :
$$\tau(i)=j\,,\ \tau(j)=i\,,\qquad \text{et}\quad \forall x\notin\{i,j\}\,,\ \tau(x)=x$$
est une involution donc une permutation de $[\![1,n]\!]$; on la note (i,j).
Une telle permutation est appelée *transposition.*

2. Étant donnés un entier $p\geqslant 2$, ainsi que des éléments distincts a_1, $a_2,\dots$, a_p de $[\![1,n]\!]$, l'application σ définie par :
$$\forall x\notin\{a_1,a_2,\dots,a_p\}\,,\ \sigma(x)=x$$
$$\forall i\in[\![1,p-1]\!]\,,\ \sigma(a_i)=a_{i+1}$$
$$\sigma(a_p)=a_1$$
est une permutation de $[\![1,n]\!]$ que l'on note $(a_1,a_2,\dots,a_p)$. Une telle permutation est appelée *p–cycle* ou *cycle d'ordre p*.
L'inverse du p–cycle $(a_1,a_2,\dots,a_p)$ est le p–cycle $(a_p,\dots,a_2,a_1)$.

Proposition 2

Si $n\geqslant 3$, le groupe $\mathcal{S}_n$ n'est pas commutatif.

émonstration Il suffit de vérifier par exemple :
$$(1,2)(1,3)=(3,2,1)\qquad\text{et}\qquad(1,3)(1,2)=(1,2,3).$$
□

Proposition 3

Toute permutation de $[\![1,n]\!]$ est un produit de transpositions.

émonstration Démontrons par récurrence sur $k\in[\![1,n]\!]$ la propriété H_k . toute permutation de $[\![1,n]\!]$ laissant fixes k, $k+1,\dots$, et n est un produit de transpositions.

- H_1 est vérifiée, puisque seule l'identité laisse fixe tous les éléments de $[\![1,n]\!]$ et que $\mathrm{Id}=(1,2)(1,2)$ (on rappelle que l'on a supposé $n\geqslant 2$).
- Supposons H_k pour $1\leqslant k\leqslant n-1$ et prenons une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ laissant fixes $k+1$, $k+2,\dots,n$.
  - Si $\sigma(k)=k$, alors d'après l'hypothèse de récurrence, σ est un produit de transpositions.
  - Sinon, on a $\sigma(k)<k$ puisque $k+1$, $k+2,\dots$, n sont leurs propres antécédents, et en posant $\tau_0=\big(k,\sigma(k)\big)$, la permutation $\sigma'=\tau_0\,\sigma$ laisse fixes k, $k+1,\dots$, n et d'après H_k s'écrit donc :
  $$\sigma'=\tau_1\,\tau_2\dots\tau_p$$
  où les τ_i sont des transpositions. On a alors $\sigma=\tau_0\,\sigma'=\tau_0\,\tau_1\dots\tau_p$.

  D'où H_{k+1}.

□

Exemples

1. L'application $\sigma : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ x & \longmapsto & n+1-x \end{array}$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$ (elle est involutive). Une décomposition en produit de transpositions est :
$$\sigma = \begin{cases} (1,n)(2,n-1)\dots(p,p+1) & \text{si } n = 2p \\ (1,n)(2,n-1)\dots(p-1,p+1) & \text{si } n = 2p-1. \end{cases}$$
2. Le p–cycle $\gamma = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ se décompose en :
$$\gamma = (a_1, a_2)(a_2, a_3)\dots(a_{p-1}, a_p).$$
Attention : comme il s'agit d'une composée d'applications, pour calculer l'image d'un élément de $[\![1,n]\!]$ par une tel produit de transpositions, il faut commencer par la transposition de droite.

1.2 Signature

Définition 1

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On dit qu'un couple (i,j) d'éléments de $[\![1,n]\!]$ est une *inversion* de σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ.

Exemples

1. L'application $\sigma : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ x & \longmapsto & n+1-x \end{array}$ admet pour inversions tous les couples (i,j) tels que $i < j$. On a donc $I(\sigma) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. Le n–cycle $\sigma = (1, 2, \dots, n)$ admet pour inversions tous les couples (i, n), avec $i < n$. On a donc $I(\sigma) = n - 1$.

Définition 2

On appelle *signature* d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, le réel $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.

- Une permutation *paire* est une permutation de signature 1.
- Une permutation *impaire* est une permutation de signature -1

Proposition 4

La signature d une transposition est égale à -1.

emonstratio Soit $\tau = (k, l)$ une transposition, avec $k < l$. Les inversions de τ sont les couples :

- (k, i) et (i, l) avec $k < i < l$,
- (k, l).

Donc $I(\sigma)$ est impair. □

Théorème 5

Si σ et τ sont deux permutations de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\varepsilon(\sigma\,\tau) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau).$$

L'application ε est donc un morphisme de groupes de $\mathcal{S}_n$ vers $\big(\{-1, 1\}, \times\big)$.

emonstration On considère l'ensemble $A = \big\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \;\big|\; i < j\big\}$ que l'on décompose en quatre parties disjointes :

$$A_1 = \big\{(i,j) \in A \;\big|\; \tau(i) < \tau(j) \quad \text{et} \quad \sigma\big(\tau(i)\big) < \sigma\big(\tau(j)\big)\big\}$$

$$A_2 = \big\{(i,j) \in A \;\big|\; \tau(i) < \tau(j) \quad \text{et} \quad \sigma\big(\tau(i)\big) > \sigma\big(\tau(j)\big)\big\}$$

$$A_3 = \big\{(i,j) \in A \;\big|\; \tau(i) > \tau(j) \quad \text{et} \quad \sigma\big(\tau(i)\big) < \sigma\big(\tau(j)\big)\big\}$$

$$A_4 = \big\{(i,j) \in A \;\big|\; \tau(i) > \tau(j) \quad \text{et} \quad \sigma\big(\tau(i)\big) > \sigma\big(\tau(j)\big)\big\}$$

de cardinaux respectifs n_1, n_2, n_3 et n_4.
On a évidemment $I(\tau) = n_3 + n_4$ et $I(\sigma\,\tau) = n_2 + n_4$
Les applications :

$$f : \begin{array}{ccc} A_2 & \longrightarrow & A \\ (i,j) & \longmapsto & \big(\tau(i), \tau(j)\big) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} A_3 & \longrightarrow & A \\ (i,j) & \longmapsto & \big(\tau(j), \tau(i)\big) \end{array}$$

sont injectives. Leurs images :

$$f(A_2) = \big\{(k,l) \in A \;\big|\; \tau^{-1}(k) < \tau^{-1}(l) \quad \text{et} \quad \sigma(k) > \sigma(l)\big\}$$

et :

$$g(A_3) = \big\{(k,l) \in A \;\big|\; \tau^{-1}(k) > \tau^{-1}(l) \quad \text{et} \quad \sigma(k) > \sigma(l)\big\}$$

sont deux ensembles disjoints dont la réunion est l'ensemble des inversions de σ.
Donc $I(\sigma) = n_2 + n_3$ et finalement :

$$I(\sigma\,\tau) - I(\sigma) - I(\tau) = (n_2 + n_4) - (n_2 + n_3) - (n_3 + n_4) = -2n_3$$

ce qui prouve que $I(\sigma\,\tau)$ et $I(\sigma) + I(\tau)$ ont même parité et donc $\varepsilon(\sigma\,\tau) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau)$ □

Corollaire 6

Si $\sigma = \tau_1\,\tau_2 \ldots \tau_p$ est une décomposition en produit de transpositions de la permutation σ alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Remarque Pour une permutation σ, il n'y a pas unicité de la décomposition en produit de transpositions. En revanche, la parité du nombre de transpositions intervenant dans un tel produit est constante.

Exemple La décomposition $(a_1, a_2, \dots, a_p) = (a_1, a_2)(a_2, a_3)\dots(a_{p-1}, a_p)$ prouve qu'un p–cycle a pour signature $(-1)^{p-1}$.

1.3 Groupe alterné

Définition 3

On appelle *groupe alterné* $\mathcal{A}_n$, l'ensemble des permutations paires.

Remarque C'est un sous-groupe de S_n comme noyau de la signature qui est un morphisme de groupe.

Exemples

1 On a $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, (1,2)\}$, donc $\mathcal{A}_2 = \{\mathrm{Id}\}$.

2. Le groupe $\mathcal{S}_3$ est composé :
   - de l'identité, qui est paire
   - des transpositions $(1,2)$, $(1,3)$ et $(2,3)$, qui sont impaires,
   - des 3–cycles $(1,2,3)$ et $(3,2,1)$, qui sont pairs.

   Donc $\mathcal{A}_3 = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (3,2,1)\}$.

Proposition 7

Si $\tau \in \mathcal{S}_n$ est une permutation impaire (par exemple une transposition) alors l ensemble des permutations impaires est :

$$\mathcal{A}_n \tau = \{\sigma\tau \mid \sigma \in \mathcal{A}_n\}.$$

emonstrat on

- Si $\sigma \in \mathcal{A}_n$, alors $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -1$, ce qui prouve que $\sigma\tau$ est impaire.
- Réciproquement, si σ est impaire alors $\sigma\tau^{-1}$ est paire et donc :

$$\sigma = (\sigma\tau^{-1})\tau \in \mathcal{A}_n\tau.$$

□

Il y a donc autant que de permutations paires que d'impaires ce qui prouve :

Corollaire 8

Le groupe $\mathcal{A}_n$ est de cardinal $\frac{n!}{2}$.

2. Applications p–linéaires

Soient p un entier naturel non nul et F un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

2.1 Définition

Définition 4

Une *application p–linéaire* de E dans F est une application f de E^p dans F telle que pour toute famille $(a_1, a_2, \ldots, a_p) \in E^p$ et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, x. a_{i+1}, \ldots, a_p) \end{array}$$

soit une application linéaire.

Une *forme p–linéaire* sur E est une application p–linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples

1. Les applications 1–linéaires sont les applications linéaires.
2. L'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) & \longmapsto & x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{array}$$
est une forme bilinéaire (c'est-à-dire 2-linéaire) sur $\mathbb{R}^2$.
3. Si E est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E, l'application :
$$(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$$
est une forme bilinéaire sur E.
4. Dans le plan euclidien, le produit scalaire et le déterminant sont deux formes bilinéaires.
5. Dans l'espace euclidien :
   - le produit scalaire est une forme bilinéaire,
   - le produit vectoriel est une application bilinéaire,
   - le déterminant est une forme trilinéaire (c'est–à–dire 3–linéaire).
6. L'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt \end{array}$$
est une forme bilinéaire sur $E = \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$.

7. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^p & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2, \ldots, z_p) & \longmapsto & z_1\, z_2 \ldots z_p \end{array}$$

est une application p–linéaire sur $\mathbb{C}$.

2.2 Expression d'une application p–linéaire en dimension finie

On munit E d'une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Applications bilinéaires ($p = 2$)

Si f est une application bilinéaire de E dans F et si u et v sont deux vecteurs de E tels que :

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i \qquad \text{et} \qquad v = \sum_{i=1}^{n} b_i\, e_i$$

alors on a :

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, e_k, \sum_{l=1}^{n} b_l\, e_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k\, f\left(e_k, \sum_{l=1}^{n} b_l\, e_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k\, \left(\sum_{l=1}^{n} b_l\, f(e_k, e_l)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k\, b_l\, f(e_k, e_l). \end{aligned}$$

Réciproquement, si $(y_{i,j})_{(i,j)\in[\![1.n]\!]^2}$ est une famille de vecteurs de F, l'application :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i, \sum_{i=1}^{n} b_i\, e_i\right) \longmapsto \sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2} a_k\, b_l\, y_{k,l}$$

est une application bilinéaire de E dans F.

Applications trilinéaires ($p = 3$)

Si f est une application trilinéaire de E dans F et si u_1 u_2 et u_3 sont trois vecteurs de E tels que :

$$\forall j \in [\![1,3]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$$

alors, on a :

$$\begin{aligned}
f(u_1,u_2,u_3) &= f\Bigl(\sum_{k=1}^n a_{k,1}\,e_k, \sum_{l=1}^n a_{l,2}\,e_l, \sum_{m=1}^n a_{m,3}\,e_m\Bigr)\\
&= \sum_{k=1}^n a_{k,1}\, f\Bigl(e_k, \sum_{l=1}^n a_{l,2}\,e_l, \sum_{m=1}^n a_{m,3}\,e_m\Bigr)\\
&= \sum_{k=1}^n a_{k.1}\Bigl(\sum_{l=1}^n a_{l.2}\, f\Bigl(e_k, e_l, \sum_{m=1}^n a_{m.3}\,e_m\Bigr)\Bigr)\\
&= \sum_{k=1}^n a_{k,1}\Bigl(\sum_{l=1}^n a_{l,2}\Bigl(\sum_{m=1}^n a_{m,3}\, f(e_k,e_l,e_m)\Bigr)\Bigr)\\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n a_{k,1}\,a_{l,2}\,a_{m,3}\, f(e_k,e_l,e_m).
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $(y_{i,j,k})_{(i,j,k)\in[\![1,n]\!]^3}$ est une famille de vecteurs de F l'application :

$$\Bigl(\sum_{i=1}^n a_{i,1}\,e_i, \sum_{i=1}^n a_{i,2}\,e_i, \sum_{i=1}^n a_{i,3}\,e_i\Bigr) \longmapsto \sum_{(k,l,m)\in[\![1,n]\!]^3} a_{k,1}\,a_{l,2}\,a_{m,3}\,y_{k,l,m}$$

est une application trilinéaire de E dans F

Cas général

Proposition 9

Soit f une application p–linéaire de E dans F. Si u_1, u_2,..., u_p sont p vecteurs de E tels que :

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}\,e_i$$

alors on a :

$$f(u_1,u_2,\ldots,u_p) = \sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \cdots\\ 1\leqslant i_p\leqslant n}} a_{i_1,1}\,a_{i_2,2}\ldots a_{i_p,p}\, f(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_p}).$$

Démonstration Vérifions cette formule par recurrence sur p.

- Soit f une application 1-linéaire sur E, c'est-à-dire une application linéaire sur E

  Si $u_1 = \sum_{i=1}^n a_{i,1}\,e_i$, on a $f(u_1) = \sum_{i=1}^n a_{i,1}\,f(e_i)$, ce qui demontre la relation pour $p=1$

- Supposons la formule vérifiée au rang $p-1$, avec $p \geqslant 2$. Étant donnés une application p-linéaire f de E dans F et u_1, u_2,..., u_p tels que :

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$$

la linéarité de l'application $x \mapsto f(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, x)$ implique :

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_p,p}\, f(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, e_{i_p}). \qquad (*)$$

Pour tout entier $i_p \in [\![1,n]\!]$, l'application :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, e_{i_p})$$

est une application $(p-1)$–linéaire et l'hypothèse de récurrence montre alors :

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, e_{i_p}) = \sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \cdots\\ 1\leqslant i_{p-1}\leqslant n}} a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \ldots a_{i_{p-1},p-1}\, f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p})$$

ce qui, en remplaçant dans l'égalité $(*)$, donne :

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_p,p} \Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \cdots\\ 1\leqslant i_{p-1}\leqslant n}} a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \ldots a_{i_{p-1},p-1}\, f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}) \Bigg)$$

et prouve la relation au rang p. □

Réciproquement, si $(y_\sigma)_{\sigma \in [\![1,n]\!]^p}$ est une famille de vecteurs de F, l'application :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}\, e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i,2}\, e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,p}\, e_i \right) \longmapsto \sum_{\sigma \in [\![1,n]\!]^p} a_{\sigma_1,1}\, a_{\sigma_2,2} \cdots a_{\sigma_p,p}\, y_\sigma$$

est une application p–linéaire de E dans F.

2.3 Applications p–linéaires alternées

Définition 5

Une application p–linéaire f de E dans F est *alternée* si pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in E^p$ et pour tout $i \neq j$, on a :

$$u_i = u_j \Longrightarrow f(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0.$$

Proposition 10

Si f est une application p–linéaire alternée, alors elle est *antisymétrique* c'est–à–dire vérifie pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in E^p$ et pour tout $i < j$:

$$f(u_1, \ldots, \underset{i^{\text{ème}}}{\underset{\uparrow}{u_i}}, \ldots \underset{j^{\text{ème}}}{\underset{\uparrow}{u_j}}, \ldots, u_p) = -f(u_1, \ldots, \underset{i^{\text{ème}}}{\underset{\uparrow}{u_j}}, \ldots \underset{j^{\text{ème}}}{\underset{\uparrow}{u_i}}, \ldots, u_p).$$

émonstratio Étant donnes i et j tels que $i < j$, fixons u_1, $u_2, \ldots, u_p$.
L'application g :

$$\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & f(u_1, \ldots, \underset{i^{\text{ème}}}{\underset{\uparrow}{x}}, \ldots \underset{j^{\text{ème}}}{\underset{\uparrow}{y}}, \ldots, u_p) \end{array}$$

est une application bilinéaire de E dans F vérifiant :

$$\forall x \in E, \ g(x.x) = 0.$$

Montrons :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ g(x,y) = -g(y,x).$$

Pour $(x, y) \in E^2$, la bilinéarité de g nous donne :

$$g(x+y, x+y) = g(x, x) + g(x,y) + g(y,x) + g(y,y)$$

ce qui prouve le résultat puisque :

$$g(x,x) = g(y,y) = g(x+y, x+y) = 0.$$ □

Remarque La réciproque de la proposition précédente est vraie. En effet, pour une application bilinéaire antisymétrique f, en échangeant u_i et u_j, la valeur de f est multipliée par -1. Comme elle n'est pas modifiée si $u_i = u_j$, cela prouve qu'elle est nulle.

Exemple Nous avons vu dans les chapitres de géométrie que le déterminant est une forme bilinéaire alternée dans le plan et une forme trilinéaire alternée dans l'espace. En revanche, le produit scalaire n'est pas une forme bilinéaire alternée.

Proposition 11

Étant donnée une application p–linéaire alternée f de E dans F, si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille liée de vecteurs de E, alors $f(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0$.

émonstration Comme la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée, il existe i tel que u_i soit combinaison linéaire $\sum\limits_{k \neq i} \lambda_k \, u_k$ des autres vecteurs. On a donc :

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, \ldots, u_p) &= f\big(u_1, \ldots, u_{i-1}, \sum_{k \neq i} \lambda_k \, u_k, u_{i+1}, \ldots, u_p\big) \\ &= \sum_{k \neq i} \lambda_k \, f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_k, u_{i+1}, \ldots u_p) \end{aligned}$$

qui est nul parce que chacune des familles $(u_1,\dots,u_{i-1},u_k,u_{i+1},\dots,u_p)$, pour $k\neq i$, contient deux vecteurs egaux et que f est alternee. □

Corollaire 12

Etant donnés une application p–linéaire alternée f de E dans F et $(u_1,u_2,\dots,u_p)\in E^p$, le vecteur $f(u_1,u_2,\dots,u_p)$ est inchangé si l'on ajoute à l un des u_j une combinaison linéaire des autres.

emonstra ion Si x est une combinaison linéaire de la famille :

$$(u_1,\ \dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_p),$$

alors, d'après la proposition précédente :

$$f(u_1,\dots,u_{j-1},x,u_{j+1},\dots,u_p)=0,$$

et, par p–linéarité de f, on a :

$$\begin{aligned}f(u_1,\dots,u_{j-1},u_j+x,u_{j+1},\dots,u_p)=&f(u_1,\dots,u_{j-1},u_j,u_{j+1},\dots,u_p)\\&+f(u_1,\dots,u_{j-1},x,u_{j+1},\dots,u_p)\\=&f(u_1,\dots,u_{j-1},u_j,u_{j+1},\dots,u_p).\end{aligned}$$

□

MPSI 2.4 Expression d'une application n–linéaire alternée en dimension n

La proposition 10 de la page précédente implique que si f est n–linéaire alternée, alors pour toute transposition $\tau\in\mathcal{S}_n$, et pour tout $u\in E^n$, on a :

$$f(u_{\tau(1)},u_{\tau(2)},\dots,u_{\tau(n)})=-f(u_1,u_2,\dots,u_n),$$

ou encore :

$$f(u_{\tau(1)},u_{\tau(2)},\dots,u_{\tau(n)})=\varepsilon(\tau)\,f(u_1,u_2,\dots,u_n),$$

avec ε la signature de $\mathcal{S}_n$.

Comme la signature est un morphisme de groupes et que toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions, on obtient :

Proposition 13

Étant données une application n–linéaire alternée f de E dans F et une permutation σ de $\mathcal{S}_n$, on a :

$$\forall u\in E^n\ ,\ f(u_{\sigma(1)},u_{\sigma(2)},\dots,u_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\,f(u_1,u_2,\dots,u_n).$$

Soit φ une application n–linéaire alternée sur E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Si u_1, u_2,..., u_n sont n vecteurs tels que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \,,\; u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$$

alors on a, d'après la proposition 9 de la page 924 :

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant n \\ 1 \leqslant i_2 \leqslant n \\ \cdots \\ 1 \leqslant i_n \leqslant n}} a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \ldots a_{i_n,n}\, \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in [\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}\, \varphi\big(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\big) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}\, \varphi\big(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\big)
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que lorsque σ n'est pas une permutation, la famille $\big(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\big)$ possède au moins deux vecteurs égaux et qu'alors son image par l'application n–linéaire alternée φ est nulle.

La proposition 13 de la page précédente nous donne alors :

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}\, \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n). \qquad (*)$$ MPSI

3. Déterminants

Remarques

- L'ensemble des applications p–linéaires alternées de E dans un $\mathbb{K}$–espace vectoriel F, est non vide et stable par combinaisons linéaires ; c'est donc un sous–espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E^p, F)$.
- En particulier, l'ensemble des formes p–linéaires alternées sur E est un espace vectoriel que l'on note $\Lambda^{*p}(E)$.

3.1 Formes n–linéaires alternees sur un espace de dimension n

Théorème 14

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Il existe une unique forme n–linéaire alternée φ_0 sur E telle que :

$$\varphi_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1.$$

2. Toute forme n–linéaire alternée sur E est proportionnelle à φ_0.

Corollaire 15

> $\Lambda^{*n}(E)$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Nous donnons la démonstration d'abord dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$, puis dans le cas général.

Cas de la dimension . Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base (e_1, e_2) et φ une forme bilinéaire alternée sur E. Si u et v sont deux vecteurs de E s'écrivant :

$$u = a_1\, e_1 + a_2\, e_2 \qquad \text{et} \qquad v = b_1\, e_1 + b_2\, e_2$$

la bilinéarité de φ permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\varphi(u,v) &= \varphi(a_1\, e_1 + a_2\, e_2, b_1\, e_1 + b_2\, e_2)\\ &= a_1\, b_1\, \varphi(e_1, e_1) + a_1\, b_2\, \varphi(e_1, e_2) + a_2\, b_1\, \varphi(e_2, e_1) + a_2\, b_2\, \varphi(e_2, e_2).\end{aligned}$$

Comme φ est alternée, on a :

$$\varphi(e_1, e_1) = \varphi(e_2, e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2),$$

ce qui donne :

$$\varphi(u,v) = (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\, \varphi(e_1, e_2).$$

On voit :

- que φ est proportionnelle à la forme bilinéaire φ_0 de l'exemple 3. de la page 922,
- que si l'on impose $\varphi(e_1, e_2) = 1$, la forme φ est alors egale à φ_0,
- que φ_0 est une forme bilinéaire alternee non nulle. □

s de la dimension 3. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) et φ une forme trilinéaire alternée sur E. Si u_1, u_2 et u_3 sont trois vecteurs de E s'écrivant :

$$\forall j \in [\![1,3]\!]\,,\ u_j = \sum_{i=1}^{3} a_{i,j}\, e_i$$

la trilinéarité de φ permet d'écrire :

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} a_{k,1}\, a_{l,2}\, a_{m,3}\, \varphi(e_k, e_l, e_m).$$

Comme φ est alternée, $\varphi(e_k, e_l, e_m)$ est nul dès que k, l et m ne sont pas distincts deux à deux et :

$$\begin{aligned}\varphi(e_1, e_3, e_2) &= \quad \varphi(e_3, e_2, e_1) = \varphi(e_2, e_1, e_3) = -\varphi(e_1, e_2, e_3)\\ \varphi(e_2, e_3, e_1) &= -\varphi(e_3, e_2, e_1) = \varphi(e_1, e_2, e_3)\\ \varphi(e_3, e_1, e_2) &= -\varphi(e_1, e_3, e_2) = \varphi(e_1, e_2, e_3)\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \Big(+ a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} - a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} + a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3}$$
$$- a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3} + a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3} - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3} \Big)\, \varphi(e_1, e_2, e_3).$$

On en déduit les résultats suivants

- Toute forme trilinéaire alternée φ sur E est proportionnelle à l'application φ_0 :
$$\begin{array}{ccl} E^3 & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (u_1, u_2, u_3) & \longmapsto & + a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} - a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} \\ & & + a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3} - a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3} \\ & & + a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3} - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3} \end{array}$$
et si l'on impose $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$, la forme φ est alors égale à φ_0.
- L'application φ_0 est une forme trilinéaire ; elle est alternée puisque lorsque deux des vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont égaux, les six produits ci–dessus définissant $\varphi_0(u_1, u_2, u_3)$ s'annulent deux à deux selon les schémas :
$$u_1 = u_2 \quad \begin{matrix} * & & * \\ * & & * \\ * & & * \end{matrix} \qquad u_1 = u_3 : \begin{matrix} * & & * \\ * & & * \\ * & & * \end{matrix} \qquad u_2 = u_3 : \begin{matrix} * & \leftrightarrow & * \\ * & \leftrightarrow & * \\ * & \leftrightarrow & * \end{matrix}$$
et donc $\varphi_0(u_1, u_2, u_3) = 0$.
- On a $\varphi_0(e_1, e_2, e_3) = 1$, ce qui prouve donc que φ_0 est non nulle. □

MPSI **as général.** Posons : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

- Si l'on note φ_0 l'application de E^n dans $\mathbf{K}$ définie par :
$$\varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$
la formule $(*)$ de la page 928 montre que toute forme n–linéaire alternée φ est proportionnelle à φ_0, et plus précisément que l'on a :
$$\varphi = \varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n)\, \varphi_0.$$
En particulier, si $\varphi(e_1, e_2, \ldots e_n) = 1$, on a $\varphi = \varphi_0$, ce qui prouve l'unicité.
Il ne reste plus qu'à montrer que φ_0 est une forme n–linéaire alternée vérifiant $\varphi_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$
- L expression de φ_0 prouve que c'est une forme n–linéaire.
- Montrons que si, pour $i \neq j$, l'on a $u_i = u_j$, alors $\varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$
En notant τ la transposition (i, j), l'on sait que l'ensemble des permutations impaires est $\mathcal{A}_n \tau = \{\sigma\tau \mid \sigma \in \mathcal{A}_n\}$. On peut donc écrire :
$$\begin{aligned} \varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma\tau(k),k}. \end{aligned}$$

Or, on a :
$$a_{\sigma\tau(i),i} = a_{\sigma(j),i} = a_{\sigma(j),j} \qquad \text{et} \qquad a_{\sigma\tau(j),j} = a_{\sigma(i),j} = a_{\sigma(i),i}$$
puisque $u_i = u_j$ et $a_{\sigma\tau(k),k} = a_{\sigma(k),k}$ pour $k \notin \{i,j\}$.
Donc :
$$\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma\tau(k),k} = \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}$$
et par suite $\varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$.

► Enfin, vérifions que $\varphi_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$. Par définition de φ_0, on a :
$$\varphi_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, \delta_{\sigma(1),1}\, \delta_{\sigma(2),2} \cdots \delta_{\sigma(n),n}$$
où $(\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice des composantes de e_1, $e_2, \ldots$, e_n dans $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ c'est-à-dire est égale à I_n.
Dans la somme précédente :
- si σ n'est pas l'identité, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq i$ et donc $\delta_{\sigma(i),i} = 0$. Par suite le produit $\varepsilon(\sigma)\, \delta_{\sigma(1),1}\, \delta_{\sigma(2),2} \cdots \delta_{\sigma(n),n}$ est nul.
- si $\sigma = \mathrm{Id}$, on a $\varepsilon(\sigma)\, \delta_{\sigma(1),1}\, \delta_{\sigma(2),2} \cdots \delta_{\sigma(n),n} = 1$

Donc $\varphi_0(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$. □ MPSI

3.2 Diverses notions de déterminants

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 6

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et φ_0 l'unique forme n–linéaire alternée telle que $\varphi_0(\mathcal{B}) = 1$. Le scalaire $\varphi_0(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ s'appelle *déterminant de la famille de vecteurs* $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *par rapport à la base* $\mathcal{B}$ et se note $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

L'application $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de E^n dans $\mathbb{K}$ se note $\det_{\mathcal{B}}$.

Exemple Comme $\Lambda^{*n}(E)$ est un espace vectoriel de dimension 1 et que $\det_{\mathcal{B}}$ en est un élément non nul, on en déduit que $\det_{\mathcal{B}}$ est une base de $\Lambda^{*n}(E)$ et donc que toute forme n–linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$.

En particulier, si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, il existe un scalaire λ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire :
$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n,\ \det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$
En prenant $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathcal{B}$, on obtient $\lambda = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

Par suite, pour $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathcal{B}'$, on obtient :
$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\, \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1.$$

Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 16

Si f est un endomorphisme de E, il existe un unique scalaire λ, appelé *déterminant* de f, tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E et pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$, on ait :

$$\det_{\mathcal{B}}\big(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Le déterminant de f se note $\det(f)$ ou $\det f$ et pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a :

$$\det f = \det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{B})\big).$$

émonstration

Unicité. Si λ convient et si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors pour $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}\big(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

et en particulier pour $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathcal{B}$, on obtient :

$$\lambda = \det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{B})\big)$$

ce qui prouve l'unicité.

Existence.

Soit $\mathcal{B}_0$ une base fixée de E L'application :

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}_0}\big(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\big)$$

de E^n dans $\mathbb{K}$ est clairement une forme n-linéaire alternée ; elle est donc proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}_0}$.

Par suite, il existe un scalaire λ tel que pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$, on ait :

$$\det_{\mathcal{B}_0}\big(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathcal{B}_0}(u_1, u_2, \ldots, u_n). \qquad (*)$$

- Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. La forme n-linéaire $\det_{\mathcal{B}}$ est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}_0}$ et donc il existe un scalaire α tel que $\det_{\mathcal{B}} = \alpha \det_{\mathcal{B}_0}$.

  En multipliant la relation $(*)$ par α, on obtient, pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}\big(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

ce qui prouve le résultat. □

Exemples

1. $\det \mathrm{Id}_E = 1$.
2. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Étant données une base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de F et

une base $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ de G, la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et :

$$\begin{aligned}\det s &= \det_{\mathcal{B}}\big(s(e_1), \dots, s(e_n)\big)\\ &= \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_p, -e_{p+1}, \dots, -e_n)\\ &= (-1)^{n-p}\\ &= (-1)^{\dim G}.\end{aligned}$$

MPSI 3. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, l endomorphisme de E défini par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

a pour déterminant :

$$\det f = \det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma).$$ MPSI

Déterminant d'une matrice carrée

Définition 7

On appelle *déterminant d'une matrice carrée* d ordre n, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On le note $\det(A)$ ou $\det A$.

Notation Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, le déterminant de A se note :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exemples

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

2. $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1} + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} \\ -a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}. \end{array}$$

   Cette formule peut se retrouver à l'aide de la *méthode* dite *de Sarrus* : on recopie les deux premières lignes de la matrice sous la troisième et on effectue les produits en diagonale, chacun étant affecté du signe $+$ ou $-$ selon le schema :

$$\begin{array}{cccc}
 & & & - \\
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & - \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & - \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \\
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & + \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & + \\
 & & & +
\end{array}$$

Attention Cette méthode n'est pas généralisable à des matrices d ordre strictement supérieur à 3.

MPSI **Proposition 17**

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice carrée d'ordre n, on a :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

émonstratio C'est la formule démontrée page 930. □ MP I

Corollaire 18

Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E dont A est la matrice des composantes dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors $\det A = \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

PCSI Ce résultat est une conséquence des formules trouvées dans la démonstration (pour $n = 2$ et $n = 3$) du théorème 14 de la page 928 PCSI

Proposition 19

Soient f un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Si A est la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$, alors $\det f = \det A$.

emonstration Ces deux déterminants sont égaux au déterminant de la famille $\big(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\big)$ dans la base $\mathcal{B}$ □

Exemple Si D est une matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on a :

$$\det D = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

En effet D est la matrice de la famille $(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et on a donc :

$$\begin{aligned}\det D &= \det_{\mathcal{B}}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.\end{aligned}$$

3.3 Propriétés des déterminants

Théorème 20

Si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E (de dimension n) muni d'une base $\mathcal{B}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E,

(*ii*) $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0$.

onstration

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $\mathcal{B}' = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, l'application $\det_{\mathcal{B}'}$ est élément de $\Lambda^{*n}(E)$ et, comme $\det_{\mathcal{B}}$ en est une base, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire :

$$\forall (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n\ ,\ \det_{\mathcal{B}'}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

et, puisque $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \dots, u_n) = 1$, on en déduit :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. En utilisant la proposition 11 de la page 926, on obtient la contraposée, à savoir : si $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n'est pas une base de E, la famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est liée et $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$. □

Proposition 21

Étant donnés deux endomorphismes f et g de E (de dimension n) et un scalaire λ, on a :

- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$,
- $\det(f \circ g) = \det f \det g$.

ém nstrati Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. On a :

$$\begin{aligned}
\det(\lambda f) &= \det_{\mathcal{B}}\big(\lambda f(e_1), \lambda f(e_2), \dots, \lambda f(e_n)\big) \\
&= \lambda^n \det_{\mathcal{B}}\big(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\big) \\
&= \lambda^n \det f. \\
\det(f \circ g) &= \det_{\mathcal{B}}\Big(f \circ g(e_1), f \circ g(e_2), \dots, f \circ g(e_n)\Big) \\
&= \det_{\mathcal{B}}\Big(f\big(g(e_1)\big), f\big(g(e_2)\big), \dots, f\big(g(e_n)\big)\Big) \\
&= \det f \det_{\mathcal{B}}\big(g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_n)\big) \\
&= \det f \det g.
\end{aligned}$$ □

Proposition 22

Étant donnés deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et un scalaire λ, on a :

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$,
- $\det(A B) = \det A \det B$.

é onstrati n

- Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à A La matrice de λf par rapport à la base canonique de $\mathbf{K}^n$ est λA et l'on a :

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda f) = \lambda^n \det f = \lambda^n \det A.$$

- Soit g l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à B La matrice de $f \circ g$ par rapport à la base canonique de $\mathbf{K}^n$ est $A B$ et l'on a :

$$\det(A B) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$ □

Remarques

- Si $(A. B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, on a donc $\det(A B) = \det(B A)$.
- Étant donnes deux $\mathbf{K}$–espaces vectoriels E et F de **même** dimension finie, si $f \in \mathcal{L}(E. F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des endomorphismes respectivement de E et de F. En prenant une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F, on a :

  $$M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)\, M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \qquad \text{et} \qquad M_{\mathcal{C}}(f \circ g) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\, M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)$$

  ce qui prouve $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$

Attention

- On ne peut pas écrire dans ce cas $\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$ puisque f et g ne sont pas des endomorphismes.
- On n'a $\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = \det(f)\,\det(g)$ que lorsque cela a un sens, c'est–à–dire lorsque f et g sont des endomorphismes ($E = F$)

Proposition 23

1. Un endomorphisme f de E est bijectif si et seulement si, $\det f \neq 0$ et on a alors :
$$\det\left(f^{-1}\right) = (\det f)^{-1}.$$
2. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$ et on a alors :
$$\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}.$$

e nst ation

1. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E On a
$$\det f = \det_{\mathcal{B}}\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big).$$
Donc, d'après le théorème 20 de la page 935 le scalaire $\det f$ est non nul si, et seulement si, $\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big)$ est une base de E c'est–à–dire si, et seulement si, f est un automorphisme de E. La proposition 21 de la page précédente permet alors d'écrire :
$$\det f \,\det\left(f^{-1}\right) = \det \mathrm{Id}_E = 1$$
et donc $\det\left(f^{-1}\right) = (\det f)^{-1}$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On sait que $\det A = \det f$ et que A est inversible si, et seulement si, f est bijectif. Grâce au résultat précédent, on en déduit que A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$. La proposition 22 de la page ci-contre permet alors d'écrire :
$$\det A \,\det\left(A^{-1}\right) = \det I_n = 1$$
et donc $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$ □

Proposition 24

Le déterminant d'une matrice est une forme n–linéaire alternée de ses lignes.

MPSI **onstration** La formule :
$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$
montre que le déterminant d'une matrice est une forme n–linéaire de ses lignes, puisque dans tous les produits ci-dessus intervient un et un seul élément de chaque ligne. Or, si deux lignes sont égales, alors la matrice n'est pas inversible et donc son déterminant est nul, ce qui prouve le résultat. MPSI

PCSI La démonstration est identique en utilisant les formules explicites du déterminant lorsque $n = 2$ ou $n = 3$. □ PCSI

Corollaire 25

Étant donnee une matrice carrée A d ordre n, on a :

$$\det A = \det\left({}^t\!A\right).$$

Démonstratio Les applications :

$$(C_1, C_2, \dots, C_n) \mapsto \det(C_1 \dots C_n) \quad \text{et} \quad (C_1, C_2, \dots, C_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} {}^tC_1 \\ \vdots \\ {}^tC_n \end{pmatrix}$$

sont n–linéaires alternées sur l'espace vectoriel des matrices colonnes Elles sont donc proportionnelles, ce qui prouve l'existence d'un scalaire λ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ \det A = \lambda \det\left({}^t\!A\right).$$

En prenant $A = I_n$, on en deduit $\lambda = 1$ et donc le résultat. □

MPSI ***Remarque*** La relation $\det A = \det {}^t\!A$ s'écrit aussi :

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

et peut donc se retrouver en remarquant que pour $\sigma \in S_n$, on a :

$$a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

(permutation des termes dans le produit). MPSI

Exemple Soit une conique dont une équation dans un repère orthonormé est :

$$A\,x^2 + 2B\,x\,y + C\,y^2 + 2D\,x + 2E\,y + F = 0. \qquad (a)$$

Si l'on note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'équation (a) s'écrit :

$${}^tX\,M\,X + 2L\,X + F = 0. \qquad (b)$$

Un changement de repère se traduit par :

$$X = P\,X_1 + K \qquad \text{avec} \qquad P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

ce qui en reportant dans (b), donne :

$${}^tX_1\,M_1\,X_1 + L_1\,X_1 + F_1 \qquad \text{avec} \qquad M_1 = {}^tP\,M\,P.$$

Le signe du discriminant $AC - B^2 = \det M$ est donc indépendant du repère puisque $\det M_1 = \det M (\det P)^2$ En particulier, pour un changement de repères orthonormés, on a $AC - B^2 = A_1 C_1 - B_1^2$.

On peut donc déduire le type d une conique propre de son équation dans n importe quel repère :

- si $AC - B^2 > 0$, c'est une ellipse,
- si $AC - B^2 < 0$, c'est une hyperbole,
- si $AC - B^2 = 0$, c'est une parabole. •

4. Applications

Comme on l'a vu dans la section précédente, l'évaluation du déterminant d'une famille de vecteurs par rapport à une base, ou du déterminant d'un endomorphisme, peut se ramener au calcul du déterminant d'une matrice carrée que dans cette section, nous appellerons simplement déterminant.

4.1 Opérations sur les lignes ou les colonnes d'un déterminant

Le déterminant d'une matrice étant une forme n–linéaire alternée des colonnes ou des lignes de cette matrice, les propriétés des formes n–linéaires alternées permettent d'énoncer les règles suivantes.

- Un déterminant qui a deux colonnes (respectivement deux lignes) identiques est nul.
- L'échange de deux colonnes d'un déterminant (respectivement deux lignes) multiplie le déterminant par -1.
- Un déterminant dont une colonne (respectivement une ligne) est combinaison linéaire des **autres** colonnes (respectivement des **autres** lignes) est nul.
- Un determinant dont une colonne (respectivement une ligne) est formée de 0 est nul.
- La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une colonne (respectivement à une ligne) une combinaison linéaire des **autres** colonnes (respectivement des **autres** lignes).
- Si l on multiplie une colonne d'un déterminant (respectivement une ligne) par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.

  Donc si l on multiplie par λ tous les coefficients d une matrice $n \times n$ le déterminant est multiplié par λ^n.

Ces règles de transformation d'un déterminant permettent :

- soit de prouver qu'il est nul,
- soit d'introduire dans une colonne (respectivement une ligne) un maximum de 0 afin d'utiliser avec profit les résultats qui vont suivre.

Exemples

1. On a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$ puisque la matrice a deux colonnes proportionnelles.

2. On a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ puisque la deuxième ligne est la demi–somme des deux autres.

4.2 Développement d'un déterminant suivant une rangée

On suppose dans cette partie $n \geqslant 2$.

Proposition 26

Si A est une matrice carrée de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \cdots & * & a_{n,n} \end{array}\right)$$

alors $\det A = a_{n\,n} \det A'$.

P I **émonstration** Le résultat est évident pour une matrice 2×2 ou 3×3 PCSI

MPSI On a par définition :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

et comme par hypothèse :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n\,,\ \sigma(n) \neq n \Longrightarrow a_{\sigma(n),n} = 0,$$

la relation précédente s'écrit :

$$\det A = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n-1),n-1}\, a_{n,n}.$$

Or la restriction à $[\![1, n-1]\!]$ de toute permutation σ vérifiant $\sigma(n) = n$ est une permutation s de $[\![1, n-1]\!]$. Réciproquement en prolongeant une permutation $s \in \mathcal{S}_{n-1}$ par $s(n) = n$, on obtient une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$. De plus, on a alors $\varepsilon(s) = \varepsilon(\sigma)$ puisqu'une décomposition de s en produit de k transpositions donne également une décomposition de σ en k transpositions.

On a alors :

$$\det A = \sum_{s \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(s)\, a_{s(1),1}\, a_{s(2),2} \dots a_{s(n-1),n-1}\, a_{n,n} = a_{n,n} \det A'.$$ □ MPSI

Corollaire 27

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

emonstra 'on

- Comme le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée, il suffit de démontrer le resultat pour les matrices triangulaires inférieures.
- Si A est triangulaire inférieure, la proposition précédente nous donne :

$$\det A = a_{n,n} \det A'$$

où A' est la matrice A privée de sa dernière ligne et de sa dernière colonne Le résultat est alors immédiat par récurrence. □

Exemple Étant donnés trois scalaires a, b et c, considérons le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} && \text{mise en facteur dans } L_2 \text{ et } L_3 \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= (b-a)(c-a)(c-b) && \text{d'après le corollaire 27.}
\end{aligned}$$

Définition 8

Étant donnés une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi que des entiers i et j de $[\![1, n]\!]$, on appelle :

- *mineur* de $a_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A
- *cofacteur* de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Théorème 28 (Développement suivant une colonne)

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

Démonstration Désignons par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et par $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de A Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on a $C_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\det A &= \det_{\mathcal{B}}\left(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_{\mathcal{B}}(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n).\end{aligned}$$

Notons :

$$D_{i,j} = \det_{\mathcal{B}}(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On peut opérer sur $D_{i,j}$ une suite de $n - j$ échanges de colonnes pour amener la $j^{\text{ème}}$ en dernière position, puis une suite de $n - i$ échanges de lignes pour amener la $i^{\text{ème}}$ en dernière position Le déterminant est alors multiplié par $(-1)^{n-j}(-1)^{n-i} = (-1)^{i+j}$ et l'on a :

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}$$

ce qui entraîne, d'après la proposition 26 de la page 940, $D_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ et donc :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\,(-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}.$$

□

En appliquant ce résultat à la transposée, on obtient :

Théorème 29 (Développement suivant une ligne)

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

Exemples

1. Pour un déterminant 3×3, on a ainsi :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

2. Dans le plan la condition d'alignement de trois points M_0, M_1 et M_2 de coordonnées respectives dans un repère (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

(colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0M_2}$).
Cette condition peut aussi s'écrire, de façon plus symétrique :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

puisqu en retranchant la première colonne de ce déterminant 3×3 aux deux autres on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

qui est égal au déterminant 2×2 ci–dessus par développement par rapport à la première ligne.

MPSI

3. De même, la condition de coplanéarité de 4 points de l'espace M_0, M_1, M_2 et M_3 de coordonnées respectives dans un repère (x_0, y_0, z_0), $(x_1. y_1, z_1)$, (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_2 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$ MPSI

Exemple (déterminant de Vandermonde)

Étant donnés des scalaires $x_0, x_1, \dots, x_n$, on note $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$ le déterminant d'ordre $n+1$ défini par :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & & x_n^n \end{vmatrix}$$

On a :

$$V(x_0, x_1, \dots. x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

ce qui montre que :

$$V(x_0, x_1 . \dots . x_n) = 0 \iff \exists (i, j) \in [\![0 . n]\!]^2 \ . \ (i \neq j \quad \text{et} \quad x_i = x_j).$$

En effet, démontrons par récurrence sur n la propriété H_n :

Étant donnes des scalaires $x_0, x_1, \dots, x_n$, on a :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

- H_1 est vraie car si x_0 et x_1 sont des scalaires, $V(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0$.

- Supposons H_{n-1} et prenons des scalaires $x_0, x_1, \dots, x_n$.
  - Si les scalaires $x_0, x_1, \dots, x_n$ ne sont pas distincts deux à deux, le déterminant $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$ a deux colonnes identiques et donc il est nul. Dans ce cas la formule $V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$ est vérifiée.
  - Si les scalaires $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont distincts deux à deux, le développement par rapport à la dernière colonne du déterminant $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ montre que ce dernier est une fonction f polynomiale en x, de degré inférieur ou égal à n et dont le terme de degré n est :
$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})\, x^n.$$
D'après H_{n-1} :
$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1} (x_i - x_j)$$
est donc non nul puisque les scalaires $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont deux à deux distincts, et par suite f est une fonction polynomiale de degré n.
De plus, f admet comme racines $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ car pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la quantité $f(x_i)$ est un déterminant admettant deux colonnes identiques. Puisque f est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ et qui admet pour racines les scalaires distincts $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, on a l'égalité :
$$\forall x \in \mathbb{K},\ V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$$
ce qui implique :
$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1} (x_i - x_j) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$
et établit la propriété H_n.

4.3 Comatrice

Définition 9

Étant donnée une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *comatrice* de A, notee $\mathrm{Com}(A)$ ou $\mathrm{Com}\, A$, la matrice des cofacteurs de A c'est-à-dire la matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ où $b_{i,j}$ est le cofacteur de $a_{i,j}$ dans A.

Proposition 30

Si B est la comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A\,{}^tB = {}^tB\,A = (\det A)\,I_n.$$

émonstrati n

► Posons $A\,{}^tB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Etant donnés deux entiers i et k de $[\![1, n]\!]$, on a par définition :

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} \Delta_{k,j}\, a_{i,j}$$

- Si $k = i$ la dernière somme ci–dessus représente le développement du déterminant de A suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne, ce qui implique $c_{i,i} = \det A$.
- Si $k \neq i$, soit $A' = (a'_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice obtenue à partir de A en recopiant la $i^{\text{ème}}$ ligne dans la $k^{\text{ème}}$ ligne. Comme A' admet deux lignes identiques, son déterminant est nul et en développant ce déterminant suivant sa $k^{\text{ème}}$ ligne, on a

$$0 = \det A' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} \Delta'_{k,j}\, a'_{k,j}.$$

Par construction, on a $a'_{k,j} = a_{i,j}$ et. puisque les lignes de A et de A autres que les $k^{\text{èmes}}$ sont identiques, on a $\Delta'_{k,j} = \Delta_{k,j}$. Par suite la relation precédente devient :

$$0 = \det A' = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{j+k} \Delta_{k,j} = c_{i,k}.$$

On a donc l'égalité $A\,{}^tB = (\det A)\,I_n$.

On démontre de manière analogue, en utilisant des développements par rapport aux colonnes, la relation ${}^tB\,A = (\det A)\,I_n$. □

Corollaire 31

Si B est la comatrice d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^tB.$$

Exemple Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la comatrice B vaut $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Si A est inversible, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Remarques

- À l'exception de ce cas des matrices 2×2 on utilise rarement la formule précédente pour inverser une matrice. La plupart du temps, on préfère résoudre un système d'équations.
- En revanche, cette formule peut se révéler intéressante lorsqu'une matrice A dépend d'un paramètre, pour étudier les propriétés de continuité, de dérivabilité... des coefficients de A^{-1}.

4.4 Formules de Cramer

Proposition 32

Si $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$, l'unique solution de $(\mathcal{S})$ est le n–uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

où A_i est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa $i^{\text{ème}}$ colonne par B.

Démonstration Si $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer, l'unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $(\mathcal{S})$ vérifie la relation vectorielle :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\, C_j = B$$

ce qui implique :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \ldots, C_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j\ \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n).$$

Comme $\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n)$ est nul dès que $j \neq i$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \det A_i = x_i \det A$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarques

- Dans la pratique, ces formules ne sont pas utilisées sauf pour $n = 2$ et dans les cas exceptionnels où l'on sait calculer facilement les déterminants des matrices A_i et A.
- En revanche, lorsque le système dépend d'un paramètre, ces formules permettent d'étudier la continuité, la dérivabilité... des solutions en fonction de ce paramètre.

Exemple Pour $n = 2$, le système :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

est un système de Cramer si, et seulement si, on a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

et la solution en est alors :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

EXERCICES

1. Montrer que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme le produit de transpositions de la forme $(1, i)$, $i \in \{2, \ldots, n\}$.

2. Même question que dans l'exercice précédent avec les transpositions :

$$(i, i+1),\ \ i \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

3. Dans $\mathcal{S}_n$, on considère le cycle :

$$\sigma = (1, 2, \ldots, n-1, n)$$

et la transposition :

$$\tau = (1.2).$$

Montrer que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ peut s' écrire comme un produit où n apparaissent que les permutations τ et σ.

4. Soit $n \geqslant 3$, montrer que toute permutation paire de $\mathcal{S}_n$ peut s écrire comme le produit de cycles d'ordre 3.

5. Soit $n \geqslant 5$, montrer que si (a, b, c) et (a', b', c') sont deux cycles d'ordre 3 dans $\mathcal{S}_n$, alors il existe une permutation σ paire telle que :

$$\sigma \circ (a, b, c) \circ \sigma^{-1} = (a', b', c').$$

6. Soit $n \geqslant 3$, chercher l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ commutant avec tous les éléments de $\mathcal{S}_n$.

7. Soient τ et τ' deux transpositions de $\mathcal{S}_n$.
Montrer que l'on a :

$$\tau\tau' = \mathrm{Id}\ \text{ ou }\ (\tau\tau')^2 = \mathrm{Id}\ \text{ ou }\ (\tau\tau')^3 = \mathrm{Id}.$$

8. Montrer que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ peut se décomposer en produit de cycles à supports disjoints.
Décomposer la permutation suivante en produit de cycles :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Quel est l ordre de cette permutation ?

9. Calculer les déterminants suivants ($(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$) :

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

10. Même question pour les déterminants suivants :

a) $$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

11 Démontrer sans le calculer que le nombre :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

est divisible par 13×8 (on commencera par remarquer que 156, 260 et 325 sont divisibles par 13).

12. Montrer que le déterminant d une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

13 Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

(on trouvera une relation de récurrence vérifiée par D_n).

14 Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

15 Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}.$$

16 Calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}$$

$(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$.

17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots a_n$ et b, $n+2$ éléments de $\mathbb{R}$.
Calculer :

$$D = \begin{vmatrix} \cos a_0 & \cos(a_0+b) & .. & \cos(a_0+nb) \\ \cos a_1 & \cos(a_1+b) & \dots & \cos(a_1+nb) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos a_n & \cos(a_n+b) & \dots & \cos(a_n+nb) \end{vmatrix}.$$

18. Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré k avec $n \geqslant k+2$.
Montrer que le déterminant d'ordre n :

$$D = \begin{vmatrix} P(1) & P(2) & .. & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix}$$

est nul.
On pourra utiliser l'application Δ définie par $\Delta(P) = P(X) - P(X-1)$

19. Soient n et p deux entiers non nuls avec $n > p$.
Que vaut $\det(AB)$ pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}$?

20. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\det(\mathrm{com} A) = (\det A)^{n-1}.$$

21. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Résoudre l'équation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A = \mathrm{com}(X).$$

22. Soient $(z_0, z_1, \dots z_n)$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts Montrer que la famille :

$$\big((X-z_0)^n, (X-z_1)^n, \dots, (X-z_n)^n\big)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

23. On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\varphi(M) = {}^tM.$$

Calculer le déterminant de φ.

24. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose que M peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_{n'}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n',n-n'}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-n'}(\mathbb{K})$.
Montrer que :

$$\det M = \det A \det B.$$

25. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres complexes, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \ldots & \ldots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & & & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \ldots & \ldots & \left(\omega^{n-1}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer AM et en déduire $\det A$.

26 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$, et l'on veut montrer qu il existe Q dans $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.
Montrer que si l'on écrit $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $RB = AR$ et $SB = AS$.
En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ (R + tS)B = A(R + tS).$$

Conclure.

27. Dans $\mathbb{R}^2$, soient D_1, D_2 et D_3 trois droites d'équations respectives :

$$u_i x + v_i y + h_i = 0.$$

On suppose qu'au moins deux des trois droites ne sont pas parallèles.
Montrer que les trois droites sont concourantes si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

28. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $\det(A - \lambda I_n)$ est un polynôme de degre n en λ.
Quel est le coefficient dominant de ce polynôme ? le coefficient du terme en λ^{n-1} ? le terme constant ?

29. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine et M_1 (respectivement M_2, M_3) le barycentre de ces trois points affectés respectivement des coefficients a_1, b_1 et c_1 (respectivement a_2, b_2 et c_2, a_3, b_3 et c_3).
Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

30 Théorème de Pappus : soient (A_1, A_2, A_3) et (B_1, B_2, B_3) deux systèmes de trois points alignés. Montrer que les points C_1, C_2 et C_3, intersections des droites A_2B_3 et A_3B_2, A_3B_1 et A_1B_3 ainsi que A_1B_2 et A_2B_1 (que l'on suppose exister) sont alignés.

Chapitre 33

Espaces euclidiens

1. Définitions

1.1 Formes bilinéaires symétriques

Définition 1

Étant donné un espace vectoriel E, on appelle *forme bilinéaire symétrique* sur E une forme bilinéaire S sur E telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2\,,\; S(x,y) = S(y,x).$$

Exemples

1. La forme bilinéaire S définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
$$S\big((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$
est symétrique.
2. Si E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension 2, le déterminant dans toute base de E est une forme bilinéaire alternée non nulle ; elle ne peut donc pas être symétrique.
3. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrons que la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$ est symétrique si, et seulement si, la matrice A est symétrique.
   - Si A est symétrique, on a :
$$\begin{aligned}
\varphi(Y,X) &= {}^tYAX \\
&= {}^t\big({}^tYAX\big) && \text{puisque } {}^tYAX \text{ est un réel} \\
&= {}^tX\,{}^tAY \\
&= \varphi(X,Y) && \text{puisque } A \text{ est symétrique}
\end{aligned}$$
   donc φ est une forme bilinéaire symétrique.

- Reciproquement, notons $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$
  Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ \varphi(e_i, e_j) = a_{i,j}.$$
  Donc si φ est une forme bilinéaire symétrique la matrice A est symétrique.

1.2 Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel

Définition 2

On appelle *produit scalaire* sur E une forme bilinéaire symétrique S sur E vérifiant :

- $\forall x \in E,\ S(x,x) \geqslant 0.$
- $S(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$

Notations

- Le produit scalaire de deux éléments x et y de E est noté généralement $(x \mid y)$.
- En géométrie, on utilise souvent la notation $\vec{u}.\vec{v}$ pour désigner le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\ \mid\ )$.

1. Pour x et y dans E, on a :
$$(x \mid y)^2 \leqslant (x \mid x)\ (y \mid y).$$
2. Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, x et y sont proportionnels.

é nstration

1. - Si $y = 0$, l'inégalité est evidente (c'est une égalité).
   - Sinon, posons :
$$P(\lambda) = (x + \lambda y \mid x + \lambda y) = \lambda^2 (y \mid y) + 2\lambda (x \mid y) + (x \mid x).$$
Alors P est une fonction polynomiale de degré 2 (puisque $(y \mid y) > 0$) vérifiant :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geqslant 0.$$
Son discriminant ·
$$\Delta = 4(x \mid y)^2 - 4(x \mid x)\ (y \mid y)$$
est donc négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité annoncée

2. ► Si x et y sont proportionnels il existe un scalaire λ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$ Supposons par exemple $y = \lambda x$. Alors :

$$(x \mid y)^2 = (x \mid \lambda x)^2 = \lambda^2 (x \mid x)^2 = (x \mid x)(y \mid y).$$

► Réciproquement, supposons $(x \mid y)^2 = (x \mid x)(y \mid y)$

- Si $y = 0$, alors x et y sont proportionnels.
- Sinon, le polynôme P a un discriminant nul. Il existe donc un scalaire λ tel que $P(\lambda) = 0$. On a alors :

$$(x + \lambda y \mid x + \lambda y) = 0.$$

Par définition du produit scalaire, on en deduit $x + \lambda y = 0$ et donc que x est proportionnel à y. □

1.3 Norme euclidienne

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

Definition 3

On appelle *norme* sur E, toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

- $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ *(Séparation)*
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ *(Homogénéité)*
- $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(Inégalité triangulaire)*

Proposition 2

Si N est une norme sur E, l'application d :

$$\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (A, B) & \longmapsto & N(\overrightarrow{AB}) \end{array}$$

appelée *distance* associée à la norme N, vérifie :

- $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2,\ d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$,
- $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2,\ d(A, B) = d(B, A)$,
- $\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3,\ d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$.

str ti Pour $(A, B, C) \in \mathcal{E}^3$, on a :

$d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow N(\overrightarrow{AB}) = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \Longleftrightarrow A = B$

► $d(B\ A) = N(\overrightarrow{BA}) = N(-\overrightarrow{AB}) = N(\overrightarrow{AB}) = d(A, B)$,

► $d(A, C) = N(\overrightarrow{AC}) = \ V(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \leqslant N(\overrightarrow{AB}) + N(\overrightarrow{BC}) = d(A, B) + d(B, C)$ □

Remarque L'inégalité $N(x) \leqslant N(x-y) + N(y)$ peut aussi s'écrire :

$$N(x-y) \geqslant N(x) - N(y)$$

ce qui, en échangeant les rôles de x et y donne :

$$N(x-y) \geqslant \left|N(x) - N(y)\right|.$$

En terme de distance, cette inégalité s'écrit :

$$d(A,C) \geqslant \left|d(B,C) - d(A,B)\right|.$$

Proposition 3

Si E est muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{(\,x \mid x\,)} \end{array}$$

est une norme sur E.

On l'appelle *norme euclidienne* associée au produit scalaire $(\ |\ )$; la distance associée est appelée *distance euclidienne.*

Remarque En utilisant cette norme, l'inégalité de Cauchy–Schwarz s'écrit :

$$\left|(\,x \mid y\,)\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

ém nst ation

- Cette application est bien définie sur E, puisque :

$$\forall x \in E,\ (\,x \mid x\,) \geqslant 0,$$

et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

- Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ Par bilinéarité du produit scalaire, on a .

$$(\,\lambda x \mid \lambda x\,) = \lambda\,(\,x \mid \lambda x\,) = \lambda^2\,(\,x \mid x\,)$$

et donc $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

- Pour $x \in E$, on a :

$$\|x\| = 0 \Longrightarrow (\,x \mid x\,) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

- Pour $(x,y) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (\,x+y \mid x+y\,) \\ &= (\,x \mid x\,) + (\,y \mid y\,) + 2(\,x \mid y\,) \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\left|(\,x \mid y\,)\right| \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \qquad \text{d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

Exemples

1. L'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé *produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}^n$.
La norme euclidienne associée est :
$$\left\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$
L'inégalite de Cauchy–Schwarz pour ce produit scalaire s'écrit :
$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

2. Dans un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, on peut définir un produit scalaire en posant $(\, x \mid y \,) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$, où x_1, x_2,..., x_n (respectivement y_1, y_2,..., y_n) sont les composantes dans $\mathcal{B}$ du vecteur x (respectivement y).

3. Dans $C^0(\,[a, b]\,)$, l'application :
$$(f, g) \mapsto (\, f \mid g \,) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$
est un produit scalaire. L'inégalité de Cauchy–Schwarz correspondante a déjà été démontrée dans le chapitre sur l'intégration :
$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right)^{1/2}.$$

4. Sur l espace vectoriel des fonctions continues et 2π–périodiques sur $\mathbb{R}$ l'application :
$$(f, g) \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$
est un produit scalaire.

5. Sur $\mathbb{R}^3$, la forme bilinéaire symétrique S définie par :
$$S\big((x, y, z), (x', y', z')\big) = x\,x' + y\,y' + z\,z' + \frac{1}{2}(x\,y' + x'\,y + x\,z' + x'\,z + y\,z' + y'\,z)$$

est un produit scalaire puisque :

$$\begin{aligned} S\big((x,y,z),(x,y,z)\big) &= x^2+y^2+z^2+x\,y+x\,z+y\,z \\ &= \frac{1}{2}\left((x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right) \end{aligned}$$

est positif et ne peut être nul que si $x=y=z=0$.

1.4 Espaces vectoriels euclidiens

Définition 4

On appelle *espace vectoriel euclidien,* un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire et de la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Exemples

1. Dans les chapitres de géométrie euclidienne étudiés en début de volume, on s'est placé dans un espace vectoriel euclidien de dimension 2 ou 3.
2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique est un espace vectoriel euclidien.

1.5 Identités de polarisation

La norme euclidienne d'un espace vectoriel euclidien est définie à partir du produit scalaire. Réciproquement, si l'on connaît la norme euclidienne, on peut retrouver le produit scalaire grâce aux trois premières égalités suivantes appelées *identités de polarisation* ; la quatrième est dite *égalité du parallélogramme.*

Proposition 4

Soit E un espace vectoriel euclidien. On a, pour $(x,y)\in E^2$:

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2(\,x \mid y\,)$.
2. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2-2(\,x \mid y\,)$.
3. $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(\,x \mid y\,)$.
4. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$.

é ons atio

1. On a :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (\,x+y \mid x+y\,) \\ &= (\,x \mid x\,)+(\,x \mid y\,)+(\,y \mid x\,)+(\,y \mid y\,) \\ &= (\,x \mid x\,)+2(\,x \mid y\,)+(\,y \mid y\,). \end{aligned}$$

2. Appliquer l'égalité précédente à x et $-y$

3. et **4.** Déduits des précédents par somme et différence. □

Exemples

1. Pour prouver que :
$$N(x,y) = \sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}$$
définit une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, on commence par vérifier que :
$$x^2 + 2xy + 3y^2 = (x+y)^2 + 2y^2$$
est positif et ne peut être nul que si $(x,y) = (0,0)$.
Il faut alors exhiber le produit scalaire dont elle provient, produit scalaire qui, d'après la dernière identité de polarisation, ne peut être que :
$$\begin{aligned} S\big((x,y),(x',y')\big) &= \frac{N(x+x',y+y')^2 - N(x-x',y-y')^2}{4} \\ &= x\,x' + x\,y' + y\,x' + 3y\,y'. \end{aligned}$$
Comme cette dernière relation définit une forme bilinéaire symétrique S et que l'on a :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ S\big((x,y),(x,y)\big) = N(x,y)^2,$$
on en déduit que N est une norme euclidienne.

2. Sur $\mathbb{R}^2$ l'application définie par :
$$\big\|(x,y)\big\| = \max\big(|x|,|y|\big)$$
est une norme (immédiat), mais ce n'est pas une norme euclidienne.
En effet, pour $u = (2,1)$ et $v = (1,2)$, on a :
$$\|u+v\| = 3 \qquad \|u-v\| = 1 \qquad \|u\| = \|v\| = 2$$
et donc :
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \neq 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

3. Dans un triangle (ABC), la première identité de polarisation donne :
$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\,(\,\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC}\,).$$

4. Dans un parallélogramme $(ABCD)$, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales et égale à la somme des carrés des quatre côtés, comme le prouve la dernière égalité de la proposition 4 de la page ci-contre appliquée aux vecteurs $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

2. Bases orthonormées

Jusqu'à la fin du chapitre E désigne un espace vectoriel euclidien muni de sa norme euclidienne $\| \ \|$ et de la distance d associée.

> ***Remarque*** Certains exemples sont donnés dans le cadre d'espaces vectoriels de dimension infinie munis d'un produit scalaire, car les notions correspondantes ne nécessitent pas la dimension finie.

2.1 Familles orthonormées

Définition 5

On appelle vecteur *normé* ou *unitaire*, un vecteur de norme 1.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont normés.
2. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire :
$$(f,g) \longmapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx$$
les eléments sin et cos sont unitaires

Définition 6

On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si $(\, x \mid y \,) = 0$. On note alors $x \perp y$.

> ***Remarque*** Par symétrie du produit scalaire, si $(\, x \mid y \,) = 0$ alors $(\, y \mid x \,) = 0$, ce qui justifie la symétrie de la définition précédente.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont orthogonaux deux à deux
2. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire :
$$(f,g) \longmapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx,$$
les fonctions sin et cos sont orthogonales.

Définition 7

On appelle *orthogonal* d'une partie A de E, l'ensemble noté $A^{\perp}$ ou A° défini par :
$$A^{\perp} = \left\{ x \in E \;\middle|\; \forall t \in A,\ x \perp t \right\}$$

Proposition 5

L'orthogonal d'une partie de E est un sous–espace vectoriel de E.

Démonstration Soit A une partie de E.

- $A^{\perp}$ contient le vecteur nul puisque celui–ci est orthogonal à tout élément de A.
- Soient x et y deux éléments de $A^{\perp}$, ainsi que λ et μ deux scalaires. Pour tout $t \in A$, on a :

$$(t \mid \lambda x + \mu y) = \lambda (t \mid x) + \mu (t \mid y) = 0$$

et donc $\lambda x + \mu y \in A^{\perp}$.

Donc $A^{\perp}$ est un sous–espace vectoriel de E □

Exemples

1. L'orthogonal de $\{0\}$ est E.
2. L'orthogonal de E est $\{0\}$. En effet :
   - 0 est orthogonal à tout élément de E,
   - si $x \in E^{\perp}$, alors en particulier x est orthogonal à lui même et donc :

   $$\|x\|^2 = (x \mid x) = 0$$

   ce qui prouve que x est nul.
3. Si a est un vecteur non nul de E, l'orthogonal H de $\{a\}$ est un hyperplan. En effet, un vecteur est dans H si, et seulement si, il est orthogonal au vecteur a. Le sous–espace vectoriel H est donc le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi_a \,:\, x \mapsto (a \mid x)$.

   Remarque Si A est une partie de E, on a :

   $$A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} \operatorname{Ker} \varphi_a$$

   ce qui permet de redémontrer qu'il s'agit d'un sous–espace vectoriel.
4. Si $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Proposition 6

Étant donnés des vecteurs $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ de E, l'orthogonal du sous–espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est égal à l'orthogonal de la partie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

émonstratio Posons $F = \text{Vect}\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Il est évident que si x est orthogonal à tous les éléments de F, il est orthogonal aux x_i
- Réciproquement, supposons x orthogonal à chacun des x_i. Si $y \in F$, on peut trouver des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, et alors :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,(x \mid x_i) = 0$$

ce qui prouve que x est orthogonal à y. □

Proposition 7 (Théorème de Pythagore)

1. Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si, et seulement si, on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2. Trois points A, B et C forment un triangle rectangle en A si et seulement si :

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2.$$

émonstrati n Conséquences de la proposition 4 de la page 960 et de la définition de l'orthogonalité. □

Définition 8

- On appelle *famille orthogonale,* toute famille de vecteurs deux à deux orthogonaux.
- On appelle *famille orthonormée* (ou *orthonormale*) toute famille de vecteurs normés deux à deux orthogonaux.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique la base canonique est une famille orthonormée.
2. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π–périodiques sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire :

$$(f, g) \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx,$$

la famille :

$$\Big(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ x \mapsto \cos x\,,\ x \mapsto \cos 2x, \ldots,\ x \mapsto \cos nx$$
$$x \mapsto \sin x\,,\ x \mapsto \sin 2x, \ldots,\ x \mapsto \sin nx\Big)$$

est orthonormée.

Proposition 8

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

ém nst ati n Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i \mid x_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i \mid x_i)$$

puisque si $i \neq j$, alors $(x_i \mid x_j) = 0$. □

Proposition 9

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille orthonormée de E.

1. Si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = (e_i \mid x)$.
2. La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre.

émonst ation

1. Par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$(e_i \mid x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (e_i \mid e_j) = \lambda_i.$$

2. D'après ce qui précède, un vecteur de $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ s'écrit donc de façon unique comme combinaison lineaire des e_i, ce qui prouve que la famille est libre. □

2.2 Bases et repères orthonormés

Définition 9

- On appelle *base orthonormée* de E, toute base de E qui est une famille orthonormée.
- Un *repère* $(O, \mathcal{B})$ est *orthonormé* si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

Exemple Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique ainsi que le repère canonique sont orthonormes

Proposition 10

Un espace vectoriel euclidien E admet au moins une base orthonormée

émonstratio Raisonnons par récurrence sur la dimension de E

- Si $\dim E = 0$, la famille vide est une base orthonormée de E.
- Étant donné $n \geqslant 1$, supposons que tout espace vectoriel euclidien de dimension $n-1$ admette une base orthonormée. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Alors E possède un élément a non nul et quitte à diviser a par sa norme, on peut le supposer normé. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à a est un hyperplan H de E et possède donc, d'après l'hypothèse de récurrence, une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$. Le vecteur a étant normé et orthogonal à tous les e_i, on en déduit que $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, a)$ est une famille orthonormée de n vecteurs, donc une base orthonormée de E □

Remarques

- Tout sous–espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien est euclidien pour le produit scalaire induit et donc admet au moins une base orthonormée.
- Tout espace vectoriel euclidien admet des repères orthonormés. En particulier, si E est un espace vectoriel euclidien de dimension 2 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on peut lui appliquer tous les résultats étudiés dans le chapitre 2.
- De même, dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on peut utiliser tous les résultats étudiés dans le chapitre 3.

Proposition 11

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E

1. Si x est un vecteur de E, on a $x = \sum_{i=1}^{n} (\, e_i \mid x\,)\, e_i$.
2. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$ sont deux vecteurs de E, on a
$$(\, x \mid y\,) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = {}^tXY \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^tXX,$$
où X et Y sont les matrices colonnes constituées des composantes dans $\mathcal{B}$ des vecteurs x et y.

Démonstration L'égalité $x = \sum_{i=1}^{n} (\, e_i \mid x\,)\, e_i$ est une conséquence de la proposition 9 de la page précédente. Les autres résultats sont immédiats. □

Remarque Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E.

- L'application qui associe à un vecteur de E ses composantes dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur $\mathbb{R}^n$.
- Si l'on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, cet isomorphisme conserve la norme et le produit scalaire.

Corollaire 12

Si A et B sont deux points de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans un repère orthonormé on a :

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

2.3 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Théorème 13

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, on peut construire une base orthonormée $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \ \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_p\} = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_p\}.$$

émonst ation Cette démonstration par récurrence nous donne en fait une méthode pratique de détermination d'une telle base : c'est le *procédé d'orthonormalisation de Schmidt.*

- f_1 doit être un vecteur normé colineaire à e_1. Il suffit de prendre $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.
- Supposons construits $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ orthonormés tels que :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \ \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_k\} = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}.$$

Comme :

$$F = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_p\} = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_p\},$$

tout vecteur de $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_{p+1}\}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de f_1 $f_2, \dots, f_p$ et e_{p+1}.

Cherchons donc g_{p+1} orthogonal à $f_1, f_2, \dots, f_p$ sous la forme :

$$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i.$$

Le vecteur g_{p+1} répond au problème si, et seulement si, on a :

$$\forall i \leqslant p, \ (f_i \mid g_{p+1}) = (f_i \mid e_{p+1}) - \lambda_i = 0.$$

En prenant $\lambda_i = (\, f_i \mid e_{p+1}\,)$ on a donc bien un vecteur g_{p+1} orthogonal à $f_1, f_2, \dots, f_p$ appartenant à $\operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_{p+1}\}$.
Le vecteur g_{p+1} est non nul puisque :

$$e_{p+1} \notin \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_p\} = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$$

et on peut donc le normer en posant $f_{p+1} = \dfrac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|}$.
La famille $(f_1, f_2, \dots, f_{p+1})$ est alors une famille orthonormée (donc libre) de $p+1$ vecteurs de $\operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_{p+1}\}$. Elle en est donc une base et l'on a :

$$\operatorname{Vect}\{f_1, f_2, \dots, f_{p+1}\} = \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_{p+1}\}.$$

□

Exemple Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire (*cf.* exemple 5. de la page 959) :

$$(\,(x,y,z) \mid (x',y',z')\,) = x\,x' + y\,y' + z\,z' + \frac{1}{2}(x\,y' + x'\,y + x\,z' + x'\,z + y\,z' + y'\,z)$$

dont la norme associée est :

$$\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + x\,y + x\,z + y\,z}$$

Construisons une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) par le procédé de Schmidt à partir de la base canonique (e_1, e_2, e_3).

- Le vecteur $e_1 = (1,0,0)$ est normé, donc on peut prendre $f_1 = e_1$.
- Cherchons g_2 orthogonal à f_1 de la forme :

  $$g_2 = e_2 - \lambda\, f_1.$$

  On a $(\, f_1 \mid g_2\,) = (\, f_1 \mid e_2\,) - \lambda$, donc il suffit de prendre $\lambda = (\, f_1 \mid e_2\,) = \dfrac{1}{2}$ ce qui donne :

  $$g_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) \qquad \text{et donc} \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 2, 0).$$

- Cherchons g_3 orthogonal à f_1 et f_2 de la forme :

  $$g_3 = e_3 - \lambda\, f_1 - \mu\, f_2.$$

  Il suffit de prendre :

  $$\lambda = (\, f_1 \mid e_3\,) = \frac{1}{2}$$

  $$\mu = (\, f_2 \mid e_3\,) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

  ce qui donne :

  $$g_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \qquad \text{et donc} \qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 3).$$

Corollaire 14

Si $\mathcal{B}$ est une base d un espace vectoriel euclidien E il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure.

3. Sous–espaces orthogonaux

PCSI Jusqu'à la fin du chapitre on se limite aux cas des espaces vectoriels euclidiens de dimensions 2 et 3. PCSI

Soit E un espace vectoriel euclidien.

3.1 Définitions

Définition 10

- Deux sous–espaces vectoriels F et G de E sont *orthogonaux* si :
$$\forall (x, y) \in F \times G \,.\; x \perp y.$$
- Deux sous–espaces affines sont *orthogonaux* si leurs directions sont orthogonales.

Exemples

1. Si F est un sous–espace vectoriel de E, les sous–espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont orthogonaux, puisque par définition les éléments de $F^\perp$ sont orthogonaux à tous les éléments de F.
2. Les sous–espaces vectoriels F et G sont orthogonaux si, et seulement si, $F \subset G^\perp$.

3.2 Supplémentaire orthogonal

Proposition 15

Si F est un sous–espace vectoriel de E, alors :

1. F et $F^\perp$ sont supplémentaires,
2. $\dim F^\perp + \dim F = \dim E$,
3. $(F^\perp)^\perp = F$.

C'est pourquoi $F^\perp$ est aussi appelé **le** *supplémentaire orthogonal* de F et que l'on écrit $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

emons rati n

1. On a $F \cap F^\perp = \{0\}$ puisqu'un vecteur commun à F et $F^\perp$ est orthogonal à lui–même donc nul Montrons $F + F^\perp = E$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. Si $x \in E$, considérons $y = \sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x \,)\, e_i$. On a :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ (\, e_i \mid y \,) = (\, e_i \mid x \,)$$

et par suite, le vecteur $z = x - y$ est orthogonal à tous les éléments de $\mathcal{B}$ donc à F. On a alors $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$.

2. Conséquence du fait que F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

3. Par définition, tout élément de F est orthogonal à tout élément de $F^\perp$ ce qui prouve $F \subset (F^\perp)^\perp$. Comme de plus

$$\dim(F^\perp)^\perp = n - \dim F^\perp = \dim F,$$

on a $F = (F^\perp)^\perp$. □

Proposition 16

Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Démonst atio Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille orthonormée de E et F le sous–espace vectoriel qu'elle engendre.

Prenons $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$ Il est alors évident que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormée de E, donc une base orthonormée puisqu'elle est constituée de n vecteurs et que $\dim E = n$. □

Remarques

- Comme nous l'avons vu dans la démonstration précédente, si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$, la réunion d une base orthonormée de F et d'une base orthonormee de G est une base orthonormée de E.
- Réciproquement si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormee de E et si $p \leqslant n$, alors les sous–espaces vectoriels :

$$F = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_p\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}\{e_{p+1}, \ldots, e_n\}$$

sont deux sous–espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.

3.3 Équations d'un hyperplan

Définition 11

- On appelle *vecteur normal* à un hyperplan vectoriel de E, tout vecteur non nul (et donc toute base) de son supplémentaire orthogonal.
- On appelle *vecteur normal* à un hyperplan affine de E, tout vecteur normal à sa direction.

Notation Si a est un vecteur de E, on note φ_a la forme linéaire définie sur E par $\varphi_a(x) = (\, a \mid x \,)$.

Proposition 17

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, H un hyperplan de E et a un vecteur non nul de E de composantes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans $\mathcal{B}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) H est le noyau de la forme linéaire φ_a,

(ii) H admet pour équation dans $\mathcal{B}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = 0,$$

(iii) a est un vecteur normal à H.

Démonstration

$(i) \Longleftrightarrow (ii)$. Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, l'égalité $\varphi_a(x) = 0$ se traduit par l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i = 0.$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Si a est un vecteur normal à H, alors le noyau de φ_a est un hyperplan contenant H et donc égal à H.

$(i) \Longrightarrow (iii)$. Si H est le noyau de φ_a, alors tous les éléments de H sont orthogonaux au vecteur a. L'orthogonal de H est donc une droite contenant le vecteur a non nul, ce qui prouve que a est un vecteur normal à H. □

Corollaire 18

Soient $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère orthonormé de E et a un vecteur non nul de composantes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans $\mathcal{B}$.

Un hyperplan $\mathcal{H}$ de E admet pour équation dans $\mathcal{R}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i + h = 0$$

si, et seulement si, le vecteur a est normal à $\mathcal{H}$, c'est–à–dire normal à sa direction.

Proposition 19

Si f est une forme linéaire sur E, il existe un et un seul vecteur a de E tel que $f = \varphi_a$.

émonstration

Unicité Si a et b sont deux vecteurs de E tels que $\varphi_a = \varphi_b$, alors on a :

$$\forall x \in E,\ (a \mid x) = (b \mid x) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \forall x \in E,\ (a - b \mid x) = 0.$$

Le vecteur $a - b$ est donc orthogonal à tous les éléments de E et par conséquent il est nul.

Existence.

- Si $f = 0$, alors le vecteur nul convient.
- Sinon, le noyau de f est un hyperplan H. C'est donc aussi le noyau de la forme linéaire φ_a, où a est un vecteur normal de H Ces deux formes linéaires non nulles sont donc proportionnelles et il existe un scalaire λ tel que $f = \lambda\,\varphi_a = \varphi_{\lambda a}$.

□

Remarque On peut donner une démonstration plus abstraite de ce résultat, utilisant le théorème du rang : l'application $a \mapsto \varphi_a$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (espace vectoriel des formes linéaires sur E)

- Son noyau est réduit à 0, car si $\varphi_a = 0$, alors tous les vecteurs de E sont orthogonaux au vecteur a et donc $a = 0$.
- Comme $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, on en déduit que c'est un isomorphisme et donc que toute forme linéaire s'écrit de façon unique sous la forme φ_a.

4. Projections orthogonales

4.1 Projections vectorielles

Définition 12

Si F est un sous–espace vectoriel de E, on appelle *projection orthogonale* sur F, la projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal $F^{\perp}$.

Proposition 20

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée d'un sous–espace vectoriel F de E le projeté orthogonal sur F d un vecteur x de E est :

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)\, e_i.$$

ém nst atio Décomposons $\pi(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ ·

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, e_i.$$

Comme $x - \pi(x) \in F^{\perp}$, on en déduit :

$$(\, e_i \mid x \,) = (\, e_i \mid \pi(x) \,) = \lambda_i$$

ce qui donne le résultat □

Exemples

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Si a est un vecteur normé, la proposition précédente nous donne l'expression de la projection orthogonale π sur la droite vectorielle engendrée par a :

$$\pi(x) = (\, x \mid a \,)\, a.$$

   Si le vecteur a n'est pas normé, on peut soit le normer, soit trouver directement l'expression de π en procédant comme suit : pour $x \in E$, on a $\pi(x) = \lambda\, a$, où λ est tel que $x - \lambda\, a \perp a$, c'est-à-dire $\lambda = \dfrac{(\, a \mid x \,)}{(\, a \mid a \,)}$.

   Donc :

$$\forall x \in E\,,\ \pi(x) = \frac{(\, a \mid x \,)}{(\, a \mid a \,)}\, a.$$

   Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (respectivement $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$) sont les composantes de x (respectivement de a) dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\pi(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \, x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}\, a.$$

   La matrice de π dans $\mathcal{B}$ est donc

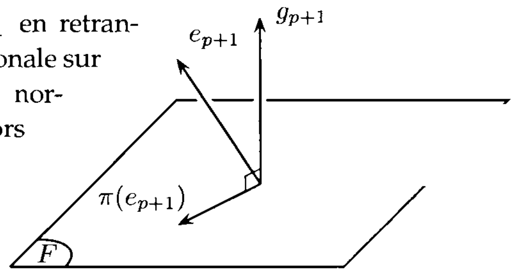
$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 \, a_2 & \cdots & a_1 \, a_n \\ a_1 \, a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2 \, a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 \, a_n & a_2 \, a_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

   ce qui permet de vérifier qu'elle est bien symétrique.

2. Dans le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on construit :

$$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, f_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i = (\, f_i \mid e_{p+1} \,).$$

On obtient donc le vecteur g_{p+1} en retranchant à e_{p+1} sa projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$. Pour normer le vecteur g_{p+1}, il suffit alors d'appliquer le théorème de Pythagore aux vecteurs orthogonaux $\pi(e_{p+1})$ et g_{p+1}. On obtient ainsi :



$$\|g_{p+1}\|^2 = \|e_{p+1}\|^2 - \|\pi(e_{p+1})\|^2 = \|e_{p+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2.$$

4.2 Projections affines

Soit $\mathcal{F}$ un sous–espace affine de E de direction F.

Définition 13

On appelle *projection orthogonale* sur $\mathcal{F}$, la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $F^\perp$ Si M est un point de E, son projeté orthogonal P sur $\mathcal{F}$ est donc caractérisé par :

$$P \in \mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MP} \in F^\perp.$$

4.3 Distance à un sous–espace

Définition 14

Si $\mathcal{X}$ est une partie non vide de E et A un point de E, on appelle *distance* de A à $\mathcal{X}$ la quantité :

$$d(A, \mathcal{X}) = \inf_{M \in \mathcal{X}} d(A, M).$$

L'existence de cette quantité $d(A, \mathcal{X})$ vient du fait que $\{d(A, M) \mid M \in \mathcal{X}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$.

Proposition 21

Si $\mathcal{F}$ est un sous–espace affine de E, la distance d'un point A à $\mathcal{F}$ est :

$$d(A, \mathcal{F}) = d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

où B est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{F}$.

Démonstration Pour $M \in \mathcal{F}$, on a :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BM},$$

et donc d'après le théorème de Pythagore,

$$d(A, M)^2 = d(A, B)^2 + d(B, M)^2 \geqslant d(A, B)^2.$$

Par conséquent, $d(A, \mathcal{F}) \geqslant d(A, B)$ et, comme $B \in \mathcal{F}$, on a $d(A, \mathcal{F}) \leqslant d(A, B)$. D'où le résultat. □

Remarque D'après la démonstration précédente, il existe un unique point B du sous–espace affine $\mathcal{F}$ tel que $d(A, \mathcal{F}) = d(A. B)$: c'est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{F}$.

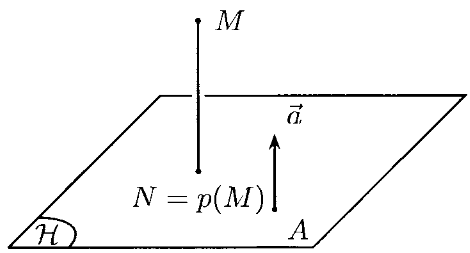
Exemple Si F est un sous–espace vectoriel de E, la distance d'un élément x de E à F est $\|x - \pi(x)\|$ où π est la projection orthogonale sur F.

Distance à un hyperplan

Proposition 22

Soient $\mathcal{H}$ un hyperplan de E, A un point de $\mathcal{H}$ et $\vec{a}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Si M est un point de E, on a :

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|(\vec{a} \mid \overrightarrow{AM})|}{\|\vec{a}\|}.$$



Démonstration La distance d'un point M à $\mathcal{H}$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$ où N est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{H}$.

On a donc $\overrightarrow{NM} = \lambda \vec{a}$ avec $\overrightarrow{AN} \perp \vec{a}$ Par suite :

$$(\vec{a} \mid \overrightarrow{AM}) = (\vec{a} \mid \overrightarrow{AN}) + (\vec{a} \mid \overrightarrow{NM}) = \lambda (\vec{a} \mid \vec{a})$$

ce qui donne $\lambda = \dfrac{(\vec{a} \mid \overrightarrow{AM})}{\|\vec{a}\|^2}$ et donc :

$$d(M, \mathcal{H}) = \|\overrightarrow{MN}\| = |\lambda| \, \|\vec{a}\| = \frac{|(\vec{a} \mid \overrightarrow{AM})|}{\|\vec{a}\|}.$$ □

Proposition 23

Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + h = 0$ dans un repère orthonormé, alors la distance d'un point M de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à $\mathcal{H}$ est donnée par :

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + h\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

Démonstratio Le vecteur $\vec{a}$ de composantes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un vecteur normal à $\mathcal{H}$ Soit A un point de $\mathcal{H}$ de coordonnées $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. On a :

$$\|\vec{a}\|\, d(M, \mathcal{H}) = \left|(\vec{a} \mid \overrightarrow{AM})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\, t_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i + h\right|$$

ce qui donne le résultat □

Remarque On retrouve ainsi l'expression de la distance :

- à une droite dans le plan,
- à un plan dans l'espace.

5. Orientation

Dans cette section, on suppose E de dimension $n \geqslant 1$.

5.1 Définition

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors les scalaires $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ sont non nuls et inverses l'un de l'autre. Ils sont donc tous les deux strictement positifs ou tous les deux strictement négatifs.

Si l'on prend $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}'' = (-e_1, e_2, \ldots, e_n)$, pour toute base $\mathcal{B}$ on a :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')\, \det_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}) = -\det_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B})$$

et donc les ensembles :

$$\mathcal{O}' = \left\{\mathcal{B} \;\middle|\; \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) > 0\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}'' = \left\{\mathcal{B} \;\middle|\; \det_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}) > 0\right\}$$
$$= \left\{\mathcal{B} \;\middle|\; \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) < 0\right\}$$

sont disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les bases de E

Orienter l espace vectoriel E consiste à choisir l'un des deux ensembles $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ dont les éléments sont appelés *bases directes*, les autres étant appelés *bases indirectes*. On dit alors que E est un *espace vectoriel euclidien orienté*

Orienter l'espace vectoriel E revient donc à choisir une base $\mathcal{B}_0$ décrétée directe ainsi donc que toutes les bases $\mathcal{B}$ telles que $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$.

5.2 Bases orthonormées directes

Proposition 24

- Un espace vectoriel euclidien orienté admet des bases orthonormées directes.
- Un espace vectoriel euclidien orienté admet des repères orthonormés directs, c'est–à–dire des repères constitués d'un point et d'une base orthonormée directe.

Démonstration Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Si $\mathcal{B}$ est directe, c'est une base orthonormée directe. Sinon, $\mathcal{B}$ est indirecte et $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée qui vérifie $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$, ce qui prouve que $\mathcal{B}'$ est directe □

Exemples

1. Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée directe d'un plan euclidien orienté, les bases orthonormées :
   - $(-\vec{\imath}, -\vec{\jmath})$, $(\vec{\jmath}, -\vec{\imath})$ et $(-\vec{\jmath}, \vec{\imath})$ sont directes,
   - $(-\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(\vec{\imath}, -\vec{\jmath})$, $(\vec{\jmath}, \vec{\imath})$ et $(-\vec{\jmath}, -\vec{\imath})$ sont indirectes.
2. En dimension 3, si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe alors :
   - $(\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath})$ et $(\vec{k}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont des bases orthonormées directes
   - $(\vec{\imath}, \vec{k}, \vec{\jmath})$, $(\vec{k}, \vec{\jmath}, \vec{\imath})$ et $(\vec{\jmath}, \vec{\imath}, \vec{k})$ sont des bases orthonormées indirectes.

MPSI

3. Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée directe d'un espace vectoriel euclidien orienté et si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, la base orthonormée $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ est directe si, et seulement si, $\varepsilon(\sigma) = 1$.

MPSI

EXERCICES

1. Soient E un espace euclidien de dimension n et $(x_1, x_2, \dots x_n)$ une famille de n vecteurs de E.
Montrer que :
$$\big|[x_1, x_2, \dots, x_n]\big| \leqslant \|x_1\| \dots \|x_n\|$$
où $[x_1.x_2.\dots.x_n]$ désigne le déterminant de la famille.

2. Montrer que :
$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leqslant n\,(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$
Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.
Montrer que :
$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$
$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

4. On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'equations :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

5. Soient E un espace euclidien et p un endomorphisme de E.
Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :
$$p \circ p = p \ \text{ et } \ \forall x \in E\ ,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

6. Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit :
$$S(P.Q) = \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,dx$$

a) Montrer que S est un produit scalaire.

b) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

c) Calculer le minimum pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de :
$$\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$
(traduire le problème en terme de distance à un sous-espace)

7. Soient E un espace euclidien ainsi que f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormale sont respectivement symétrique et antisymétrique.
Montrer que :

$$\forall x \in E \ , \ \big(f(x) \mid g(x)\big) = 0$$

puis que :

$$\forall x \in E \ , \ \big\|(f-g)(x)\big\| = \big\|(f+g)(x)\big\|.$$

8 Soient E un espace vectoriel orienté de dimension 3 ainsi que a, b deux vecteurs non nuls de E.
On considère l'application f de E dans E définie par :

$$\forall x \in E \ , \ f(x) = (a \mid x)a + b \wedge x.$$

Quel est le rang de f ?

9. Soient $x_1 . x_2, \dots x_p$, p vecteurs d'un espace vectoriel euclidien de dimension n
On considère la matrice carrée G d'ordre p définie par

$$G(x_1, x_2, \dots, x_p) = \big((x_i \mid x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$$

On note $[x_1 \dots x_p]$ le produit mixte de $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ c'est–à–dire le déterminant de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ dans n'importe quelle base orthonormée directe.

a) Montrer que la famille $(x_1, x_2, \dots x_p)$ est liée si et seulement si $\det G = 0$.

b) On suppose que la famille $(x_1, x_2, \dots x_p)$ est libre, on note :

$$F = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

- Montrer que :

$$\det G = [x_1, x_2, \ \dots, x_p]_F^2 > 0.$$

- Si $x \in E$, montrer que :

$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, x_2 \dots, x_p)}{\det G(x_1, x_2 \dots, x_p)}.$$

Chapitre 34

Isométries du plan et de l'espace

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien orienté.

1. Isométries, matrices orthogonales

1.1 Automorphismes orthogonaux

Définition 1

On appelle endomorphisme *orthogonal* de E, tout endomorphisme φ de E conservant le produit scalaire, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \; (\varphi(x) \mid \varphi(y)) = (x \mid y).$$

Proposition 1

Un endomorphisme φ de E est orthogonal si, et seulement si, il conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \; \|\varphi(x)\| = \|x\|.$$

émonstration

- Si φ est orthogonal, alors pour tout $x \in E$:

$$\|\varphi(x)\|^2 = (\varphi(x) \mid \varphi(x)) = (x \mid x) = \|x\|^2.$$

- Réciproquement, si l'endomorphisme φ conserve la norme, alors d'après l'identité de polarisation, on a :

$$\begin{aligned}4(\varphi(x) \mid \varphi(y)) &= \|\varphi(x)+\varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2\\ &= \|\varphi(x+y)\|^2 - \|\varphi(x-y)\|^2\\ &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\\ &= 4(x \mid y)\end{aligned}$$

ce qui prouve que φ est orthogonal. □

Corollaire 2

Un endomorphisme orthogonal est un automorphisme de E.

Démonstration Si φ est un endomorphisme orthogonal, alors il est injectif puisque :

$$\varphi(x) = 0 \Longrightarrow \|\varphi(x)\| = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Comme φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que c'est un automorphisme. □

Exemples

1. Id et $-$Id sont des automorphismes orthogonaux.
2. Une symétrie orthogonale, c'est–à–dire une symetrie par rapport à un sous–espace vectoriel F parallèlement à $F^\perp$, est un automorphisme orthogonal puisque si $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, on a :
$$\|s(x)\|^2 = \|y-z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y+z\|^2 = \|x^2\|.$$
3. Reciproquement, soient F et G deux sous–espaces vectoriels supplémentaires. Si la symétrie par rapport à F parallèlement à G est un automorphisme orthogonal, alors $F \perp G$ puisque, pour $(x, y) \in F \times G$, on a :
$$0 = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x \mid y).$$
4. Une projection orthogonale sur un sous–espace vectoriel strict de E n'est pas un automorphisme orthogonal, puisqu'elle n'est pas bijective.

Proposition 3

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormee de E. Un endomorphisme φ de E est orthogonal si, et seulement si l'image par φ de $\mathcal{B}$ est une base orthonormee.

émonstration

- Si φ est orthogonal, il conserve la norme et le produit scalaire, donc aussi l'orthogonalité L'image d'une base orthonormée est donc une famille orthonormée, et une base puisque φ est un automorphisme.
- Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ un vecteur de E. On a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée.

  De plus, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \varphi(e_i)$ et comme $\varphi(\mathcal{B})$ est orthonormée, on a :
  $$\|\varphi(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2.$$
  L'endomorphisme φ conserve la norme et donc est orthogonal □

Méthode Pour démontrer que l'endomorphisme φ est orthogonal, il suffit de montrer que l'image d'une base orthonormée est une famille orthonormée. C'est alors évidemment une famille libre, donc une base.

Exemples

1. L'endomorphisme canoniquement associe à la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est orthogonal pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, l'unique endomorphisme φ de E tel que :
   $$\varphi(\vec{\imath}) = \vec{\jmath}. \quad \varphi(\vec{\jmath}) = \vec{k} \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{k}) = \vec{\imath}$$
   est un automorphisme orthogonal puisqu'il transforme la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ en la base orthonormée $(\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath})$.

Proposition 4

1. La composée de deux automorphismes orthogonaux de E est un automorphisme orthogonal.
2. La réciproque d'un automorphisme orthogonal de E est un automorphisme orthogonal.

émonstration

1. Si φ et ψ conservent la norme, il est évident qu'il en est de même pour $\psi \circ \varphi$
2. Si φ est orthogonal, alors pour $x \in E$, on a :
   $$\|\varphi^{-1}(x)\| = \|\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\| = \|x\|$$
   ce qui prouve que l'automorphisme φ^{-1} conserve la norme □

Corollaire 5

L'ensemble $O(E)$ des automorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

1.2 Isométries affines

Définition 2

On appelle *isométrie* de E toute application de E dans lui-même qui conserve la distance, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall (A, B) \in E^2, \ d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

Exemples

1. Une translation t est une isométrie puisque $\overrightarrow{t(A)t(B)} = \overrightarrow{AB}$.
2. Une symétrie centrale s est une isométrie puisque $\overrightarrow{s(A)s(B)} = -\overrightarrow{AB}$.
3. Les seules homotheties qui soient des isométries sont l'identité et les symétries centrales, puisqu'une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$.

Proposition 6

Toute isométrie est une application affine.

Démonstration Soit f une application de E dans E telle que :

$$\forall (A, B) \in E^2, \ d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

Quitte à composer f par une translation (ce qui donne une application qui conserve encore les distances), on peut supposer $f(0) = 0$. Montrons alors que f est linéaire

Par hypothèse, on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|,$$

et en particulier, pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \|x\|$ puisque $f(0) = 0$

Pour $(x, y) \in E^2$, l'identité de polarisation :

$$(x \mid y) = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{2}$$

montre alors que $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$, c'est-à-dire que f conserve le produit scalaire et en particulier l'orthogonalité.

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E, son image est donc une famille orthonormée, c'est-à-dire une base orthonormee de E

Si $x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $x_i = (e_i \mid x)$ puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée
Comme $f(\mathcal{B})$ est aussi orthonormée, on a :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (f(e_i) \mid f(x)) f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x) f(e_i),$$

la dernière égalité venant du fait que f conserve le produit scalaire.

Par suite, f est l application linéaire $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, ce qui prouve le résultat. □

Proposition 7

Une application affine f est une isométrie de E si, et seulement si, son application lineaire associée $\vec{f}$ est un automorphisme orthogonal de E.

émonstration

- Si $\vec{f}$ est orthogonal, il est bijectif ainsi donc que f et, pour $(A, B) \in E$, on a :

$$d(f(A), f(B)) = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B)$$

ce qui prouve que f est une isométrie.

- Supposons que f soit une isométrie. Pour $\vec{u} \in E$, on peut trouver deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Alors :

$$\|\vec{f}(\vec{u})\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{u}\|$$

ce qui prouve que $\vec{f}$ conserve la norme donc est orthogonal. □

Remarques

- En particulier, on en déduit qu'une isométrie est une bijection.
- Une application linéaire étant sa propre application linéaire associée, on en déduit qu un automorphisme orthogonal de E est une isométrie de E. C est pourquoi les automorphismes orthogonaux s'appellent aussi isométries vectorielles.

Proposition 8

1. La composee de deux isométries de E est une isométrie de E.
2. La réciproque d'une isométrie de E est une isométrie de E.

on t Évident d après la définition. □

Remarque L'ensemble $\mathrm{Is}(E)$ des isométries de E est donc un sous–groupe du groupe des transformations affines

1.3 Matrices orthogonales

Proposition 9

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) ${}^tMM = I_n$,

(ii) $M\,{}^tM = I_n$,

(iii) M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$,

(iv) les colonnes de M forment une famille (base) orthonormée de $\mathbb{R}^n$,

(v) les lignes de M forment une famille (base) orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Sous ces conditions, on dit que M est une *matrice orthogonale.*

Remarque Quand on dit que les lignes ou les colonnes de M forment une famille orthonormée, c'est dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Démonstration

$(ii) \Longleftrightarrow (v)$. Si $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, le terme de la ligne i et de la colonne k du produit $M\,{}^tM$ est .

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}m_{k,j}$$

c'est–à–dire le produit scalaire des lignes i et k de la matrice M. D'où le résultat.

$(i) \Longleftrightarrow (iv)$. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à ${}^tM$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ **et** (ii). Évident.

(i) **ou** $(ii) \Longrightarrow (iii)$. On a $(\det M)^2 = 1$ ce qui prouve que M est inversible En multipliant alors à droite ou à gauche par M^{-1} on obtient $M^{-1} = {}^tM$ □

Remarques

- Si P est une matrice orthogonale, alors $\det P = \pm 1$. En effet, on a ${}^tPP = I_n$, et donc $(\det P)^2 = 1$
- Quand, lors de l'étude d'un système, d une application linéaire ou d'un changement de base, on doit inverser une matrice orthogonale il suffit de la transposer.

Exemple La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

est manifestement orthogonale. Son inverse est donc :

$$A^{-1} = {}^tA = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Proposition 10

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormee de E Une base $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

Démonstration Posons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ et $P = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Comme :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}\ ,\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

et que la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a :

$$\forall (j,k) \in \{1, 2, \dots, n\}^2\ ,\ (\, e'_j \mid e'_k \,) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, a_{i,k}$$

et donc $(\, e'_j \mid e'_k \,)$ est le produit scalaire des colonnes j et k de la matrice P.

La base $\mathcal{B}'$ est donc orthonormée si, et seulement si, les colonnes de P forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. □

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, prenons les vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Alors (u, v) et $(u, -v)$ sont des bases orthonormées et les matrices de changement de base correspondantes sont orthogonales :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

La proposition 21 de la page 995 montrera réciproquement que ce sont les seules matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. En physique ou en sciences industrielles, on n'utilise la plupart du temps que des bases orthonormées ; les matrices de changement de base sont donc orthogonales, ce qui facilite leur inversion.

Proposition 11

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E. Un endomorphisme de E est orthogonal si, et seulement si, sa matrice dans $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Démonstration Un endomorphisme f de E est orthogonal si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée c'est-à-dire si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est orthogonale. □

Exemple La matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est donc la matrice, dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, d'un automorphisme orthogonal. Cet automorphisme est appelé *rotation* d'angle θ autour de l'axe orienté par le vecteur $(0,0,1)$.

1.4 Groupe orthogonal

Notations

- On note $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales $n \times n$.
- On note $SO(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales $n \times n$ dont le déterminant vaut 1.

Proposition 12

$O(n)$ et $SO(n)$ sont des groupes, appelés respectivement groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal.

Démonstration Ce sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$. □

Exemples

1. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on a, pour $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

En particulier, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

2. On peut ainsi définir le *produit mixte* des n vecteurs u_1, u_2,…, u_n comme leur déterminant dans n'importe quelle base orthonormée directe. On le note :

$$\mathrm{Det}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad \text{ou} \qquad [u_1, u_2, \ldots, u_n].$$

3. On retrouve ainsi les notions de déterminants dans le plan et l'espace euclidien introduites dans les chapitres de géométrie.

4. Si u et v sont deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3 il existe un unique vecteur w de E tel que :

$$\forall x \in E\,,\ \mathrm{Det}(u.v, x) = (\, w \mid x\,)\,.$$

En effet, l'application $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \mathrm{Det}(u, v, x) \end{array}$ est une forme linéaire sur E, et la proposition 19 de la page 971 nous donne alors l existence et l'unicité de w.

On retrouve ainsi le *produit vectoriel* dans l'espace euclidien.

5. Soient (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) les composantes respectives de u et de v dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$.

Pour un vecteur x de composantes (x_1, x_2, x_3) dans $\mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(u, v, x) &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Comme on travaille dans une base orthonormee, les composantes de $u \wedge v$ sont :

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

On retrouve ainsi les composantes du produit vectoriel dans toute base orthonormée directe.

1.5 Rotations, déplacements

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté

Remarque Si φ est un automorphisme orthogonal de E, alors $\det\varphi = \pm 1$ puisque $\det\varphi = \det P$, où P, la matrice de φ dans une base orthonormée de E est orthogonale.

Définition 3

1. On appelle *rotation* de E, tout automorphisme orthogonal de E dont le déterminant est 1 On note $SO(E)$ l'ensemble des rotations ; on l'appelle *groupe spécial orthogonal* de E.
2. On appelle *déplacement* de E toute isométrie de E dont l'application linéaire associée est une rotation. On note $\mathrm{Is}^+(E)$ ou $\mathcal{D}(E)$ l ensemble des déplacements de E.

Proposition 13

$SO(E)$ et $\mathrm{Is}^+(E)$ sont des groupes.

emonstratio Ce sont des sous-groupes de $O(E)$ et $\mathrm{Is}(E)$. □

Exemples

1. Une translation est un déplacement.
2. Une symétrie centrale est un déplacement si, et seulement si, la dimension de E est paire.

Proposition 14

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. Un endomorphisme φ de E est une rotation si, et seulement si, $\varphi(\mathcal{B})$ est une base orthonormée directe.

émonstration φ est orthogonal si, et seulement si, l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée De plus $\det \varphi > 0$ si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}\big(\varphi(\mathcal{B})\big) > 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, $\varphi(\mathcal{B})$ est une base directe. □

2. Réflexions

2.1 Symétries orthogonales

Définition 4

- Étant donné un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de E on appelle *symétrie orthogonale* par rapport à $\mathcal{F}$, la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement au supplémentaire orthogonal de la direction de $\mathcal{F}$.
- On appelle *réflexion*, une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. On note $s_{\mathcal{H}}$ la réflexion d'hyperplan $\mathcal{H}$.

Remarques

- En particulier, si F est un sous–espace vectoriel de E la symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.
- Si $\mathcal{F}$ a pour direction le sous–espace vectoriel F, l'application linéaire associée à la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$ est la symétrie orthogonale par rapport à F.
- Si s est une application affine laissant un point Ω fixe et dont l'application linéaire associée est la symétrie orthogonale par rapport à un sous–espace vectoriel F, alors s est la symétrie orthogonale par rapport à $\Omega + F$ car ces deux applications affines coïncident en Ω et ont même application linéaire associée.

Proposition 15

1. Les symétries qui sont des isométries sont les symétries orthogonales.
2. Les réflexions sont des isométries indirectes.

é nstrat n

1. Il suffit de montrer le résultat pour les symétries vectorielles
   Soit σ la symétrie par rapport à un sous–espace vectoriel F parallèlement à un supplémentaire G.
   - On a pour tout $x \in E$
   $$x = y + z \qquad \text{avec} \qquad y \in F \quad \text{et} \quad z \in G$$
   et donc $\sigma(x) = y - z$. Si $F \perp G$, le théorème de Pythagore montre :
   $$\|\sigma(x)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$$
   ce qui prouve que σ conserve la norme.
   - Si σ conserve la norme, pour $(y, z) \in F \times G$, on a :
   $$0 = \|\sigma(y+z)\|^2 - \|y+z\|^2 = \|y-z\|^2 - \|y+z\|^2 = -4(\, y \mid z\,)$$
   ce qui prouve que F est orthogonal à G
2. Si s est une réflexion vectorielle d'hyperplan H, la matrice de s dans une base adaptee à la décomposition $E = H \oplus H^{\perp}$ est :
   $$\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$$
   dont le déterminant vaut -1 □

Remarque En particulier, les symétries vectorielles orthogonales sont des automorphismes orthogonaux.

2.2 Propriétés des réflexions

Proposition 16

Soient A et B deux points distincts de E. L'ensemble des points à égale distance de A et B, est l hyperplan passant par le milieu du segment $[AB]$ et orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. On l'appelle *hyperplan médiateur* du segment $[AB]$.

Démonstratio En posant $I = \dfrac{A+B}{2}$ on a :

$$\|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MA}\|^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}.$$

Donc $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\| \iff \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB}$, ce qui prouve le résultat □

Proposition 17

Étant donnés deux points distincts A et B de E, il existe une unique réflexion s échangeant A et B. C'est la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur de $[AB]$.

Démonstration

Unicité.

Soit s une réflexion par rapport à un hyperplan $\mathcal{H}$ échangeant A et B Un point M de $\mathcal{H}$ est invariant par s, donc :

$$d(A, M) = d\big(s(A), s(M)\big) = d(B, M)$$

ce qui prouve que M est dans l'hyperplan $\mathcal{H}'$ médiateur de $[AB]$.

Par suite, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$, et donc $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ puisqu'ils ont même dimension. L'application s est donc la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur de $[AB]$

Existence.

Il est évident que la réflexion par rapport à l'hyperplan $\left(\dfrac{A+B}{2}, \overrightarrow{AB}^{\perp}\right)$ échange A et B. □

Exemple Si A et B sont deux points distincts, on peut facilement calculer l'image d'un point M par la réflexion qui échange A et B. En appelant I le milieu du segment $[AB]$, cette image M' est caractérisée par :

$$\overrightarrow{MM'} \in \operatorname{Vect} \overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \frac{M+M'}{2} \in I + \overrightarrow{AB}^{\perp},$$

ce qui peut s'écrire :

$$\overrightarrow{MM'} = \lambda\, \overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{IM} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AB}.$$

On en déduit alors la valeur de λ :

$$\lambda = -2\,\frac{\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2} \quad \text{et donc :} \quad M' = M - 2\,\frac{\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\,\overrightarrow{AB}$$

Corollaire 18

Si u et v sont deux vecteurs de E distincts et de même norme, il existe une unique réflexion vectorielle échangeant u et v

emonst a i Il existe une unique réflexion affine s qui échange u et v, et cette dernière est linéaire puisque, u et v étant de même norme, le vecteur nul est dans l'hyperplan médiateur de $[uv]$ et donc invariant par s □

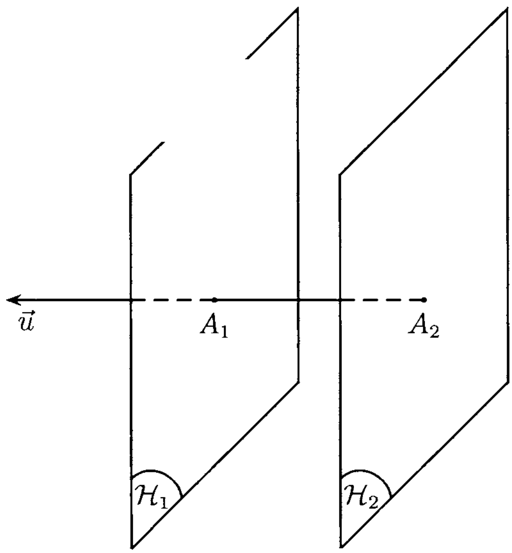
2.3 Composées de réflexions

Proposition 19

1. La composée de deux réflexions d'hyperplans $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ parallèles est une translation de vecteur orthogonal à $\mathcal{H}_1$
2. Si $\mathcal{H}_1$ est un hyperplan et $\vec{u}$ un vecteur orthogonal à $\mathcal{H}_1$, il existe deux hyperplans $\mathcal{H}'_2$ et $\mathcal{H}''_2$ parallèles à $\mathcal{H}_1$ tels que :

$$t_{\vec{u}} = s_{\mathcal{H}''_2} \circ s_{\mathcal{H}_1} = s_{\mathcal{H}_1} \circ s_{\mathcal{H}'_2}.$$

Demonst ation



1. Soient $s_1 = s_{\mathcal{H}_1}$ et $s_2 = s_{\mathcal{H}_2}$. Les deux réflexions s_1 et s_2 ont même application linéaire associée : la réflexion vectorielle par rapport à la direction commune de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. Comme cette dernière est involutive, on en déduit que l'application linéaire associée à $s_1 \circ s_2$ est l'identité et donc que $s_1 \circ s_2$ est une translation.
   Si A est un point de $\mathcal{H}_2$, son image par $s_1 \circ s_2$ est $A' = s_1(A)$. Le vecteur de translation, qui est égal à $\overrightarrow{AA'}$, est donc orthogonal à $\mathcal{H}_1$.
   Plus précisément, si A_2 est un point de $\mathcal{H}_2$ et A_1 sa projection orthogonale sur $\mathcal{H}_1$, le vecteur de la translation $s_1 \circ s_2$ est $2\overrightarrow{A_2A_1}$.
2. D'après ce qui précède, il suffit de prendre :

$$\mathcal{H}'_2 = t_{-\frac{\vec{u}}{2}}(\mathcal{H}_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}''_2 = t_{\frac{\vec{u}}{2}}(\mathcal{H}_1).$$

□

Lemme

Si f est une transformation affine de E, l'ensemble $\mathcal{I}(f)$ des points de E invariants par f est soit vide, soit un sous–espace affine de E.

émonstratio Supposons $\mathcal{I}(f) \neq \varnothing$ et prenons $\Omega \in \mathcal{I}(f)$ Les équivalentes :

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff \overrightarrow{f(\Omega)f(M)} = \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff \vec{f}\,(\overrightarrow{\Omega M}) = \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff \overrightarrow{\Omega M} \in \operatorname{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

montrent que $\mathcal{I}(f)$ est le sous–espace affine de E passant par Ω et dirigé par le sous–espace vectoriel $\operatorname{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_E)$. □

Lemme

Soit f une isométrie de E de dimension n.

Si l'ensemble $\mathcal{I}(f)$ des points invariants par f est un sous–espace affine de dimension p alors f est composée d'au plus $n-p$ réflexions.

émonstration Par récurrence descendante sur p.

Si $p = n$, alors $f = \mathrm{Id}_E$ est produit de 0 réflexion.

► Supposons le résultat pour $p+1$, $p+2, \ldots, n$, avec $p < n$. Soit f une isométrie telle que $\dim \mathcal{I}(f) = p$.

Il existe alors un point A tel que $f(A) \neq A$. Notons s la réflexion qui échange A et $B = f(A)$, et posons $g = s \circ f$

Comme f conserve les distances, tout point invariant par f est à égale distance de A et B, donc dans l'hyperplan médiateur $\mathcal{H}$ de $[AB]$. Ainsi, $\mathcal{I}(f) \subset \mathcal{H}$ et donc $\mathcal{I}(f) \subset \mathcal{I}(g)$.

Or $A \in \mathcal{I}(g)$ et $A \notin \mathcal{I}(f)$, donc $\mathcal{I}(g)$ est un sous–espace affine de E de dimension k strictement supérieure à p. L'hypothèse de récurrence implique que g est composée d'au plus $n-k$, donc d'au plus $n-p-1$ réflexions.

Par suite $f = s \circ g$ est composée d'au plus $n-p$ réflexions. □

Remarque En particulier, si $\mathcal{I}(f) \neq \varnothing$, alors f est composée d'au plus n réflexions.

Proposition 20

Soit E une espace vectoriel euclidien de dimension n.

1. Toute isométrie de E est composée d'au plus $n+1$ réflexions
2. Tout automorphisme orthogonal de E est composé d'au plus n réflexions vectorielles

émonstration

1. Le résultat est une conséquence du lemme lorsque $\mathcal{I}(f) \neq \varnothing$ Sinon, soit A un point de E et s la réflexion échangeant A et $f(A)$. Alors $g = s \circ f$ laisse A invariant et est donc composée d'au plus n réflexions. Par suite, $f = s \circ g$ est composée d'au plus $n+1$ réflexions

2. Soit φ un automorphisme orthogonal. Comme $\varphi(0) = 0$, on a $\mathcal{I}(\varphi) \neq \varnothing$, et donc $\varphi = s_1 \circ \cdots \circ s_p$ avec $p \leqslant n$ et s_i des réflexions affines.
On a alors $\varphi = \vec{\varphi} = \vec{s}_1 \circ \cdots \circ \vec{s}_p$ qui est composée d'au plus n réflexions vectorielles □

3. Automorphismes orthogonaux du plan

On suppose dans cette section que E est de dimension 2.

3.1 Matrices orthogonales

Proposition 21

1. Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme :
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
avec $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Le groupe $SO(2)$ est l'ensemble des matrices $R(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

em nstration

1. Si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale, alors ses colonnes sont normées, donc :
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$$
ce qui prouve l'existence de deux réels θ et φ tels que :
$$(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{et} \quad (c, d) = (\sin\varphi, \cos\varphi).$$
L'orthogonalité des colonnes nous donne alors $\sin(\theta + \varphi) = 0$, c'est-à-dire $\varphi \equiv -\theta \quad [\pi]$.
Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont donc :
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. Consequence des égalités $\det R(\theta) = 1$ et $\det S(\theta) = -1$. □

Proposition 22

1. Pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $R(\theta + \theta') = R(\theta)\, R(\theta')$.
2. Le groupe $\big(SO(2), \times\big)$ est commutatif.
3. L'application $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme surjectif de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur $\big(SO(2), \times\big)$ dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration

1. Simple calcul.
2. On en déduit $R(\theta)\,R(\theta') = R(\theta+\theta') = R(\theta')\,R(\theta)$.
3. C est évidemment un morphisme surjectif et l'on a :

$$R(\theta) = I_2 \iff (\cos\theta, \sin\theta) = (1,0) \iff \theta \equiv 0 \quad [2\pi].$$

□

3.2 Rotations vectorielles, angles

Proposition 23

Si r est une rotation vectorielle, il existe un réel θ unique modulo 2π, tel que dans toute base orthonormée directe de E la matrice de r soit égale à $R(\theta)$. On dit alors que r est la *rotation* d'angle θ, ou que θ est une *mesure de l'angle* de la rotation r.

émonstration Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. La matrice de r dans $\mathcal{B}$ appartient à $SO(2)$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta)$.

Si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée directe de E, la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est aussi dans $SO(2)$. Comme ce groupe est commutatif, on en déduit :

$$M_{\mathcal{B}'}(r) = P^{-1}\,R(\theta)\,P = R(\theta).$$

L'unicité de θ modulo 2π vient de l'équivalence :

$$R(\theta) = R(\theta') \iff \theta \equiv \theta' \quad [2\pi].$$

□

Proposition 24

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs normes, il existe une unique rotation r telle que $r(\vec{u}) = \vec{v}$.

Démonstration Complétons $\vec{u}$ en une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{u}')$. Puisque le vecteur v est normé, il a pour composantes dans $\mathcal{B}$ $(\cos\theta, \sin\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$

La matrice d'une rotation qui transforme $\vec{u}$ en $\vec{v}$ est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & * \\ \sin\theta & * \end{pmatrix}$$

et la rotation d'angle θ est l'unique rotation qui convient. □

Définition 5

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on appelle *mesure de l'angle* (orienté) de vecteurs $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, une mesure θ de l'angle de l'unique rotation qui transforme $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\,\vec{u}$ en $\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v}$, et l'on note :

$$\widehat{(\vec{u}.\vec{v})} \equiv \theta \quad [2\pi].$$

- On appelle *mesure de l'angle* (orienté) de deux demi–droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ une mesure θ de l'angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, et l'on note :

$$\widehat{(\mathcal{D},\mathcal{D}')} \equiv \theta \quad [2\pi].$$

Proposition 25 (Relation de Chasles)

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls, on a :

$$\widehat{(\vec{u},\vec{w})} \equiv \widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{(\vec{v},\vec{w})} \quad [2\pi].$$

émonstratio Quitte à diviser les trois vecteurs par leur norme, on peut supposer qu ils sont normés.
Si r_1 est la rotation qui transforme $\vec{u}$ en $\vec{v}$ et r_2 celle qui transforme $\vec{v}$ en $\vec{w}$ la rotation $r_2 \circ r_1$ transforme $\vec{u}$ en $\vec{w}$, ce qui prouve le résultat □

Remarques

- On a $\widehat{(\vec{u},\vec{u})} \equiv 0 \quad [2\pi]$ et $\widehat{(\vec{u},-\vec{u})} \equiv \pi \quad [2\pi]$.
- Grâce à la relation de Chasles, on en déduit :

$$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} \equiv -\widehat{(\vec{v},\vec{u})} \quad [2\pi]$$

$$\widehat{(-\vec{u},\vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \pi \quad [2\pi]$$

$$\widehat{(-\vec{u},-\vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u},\vec{v})} \quad [2\pi]$$

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si l'on a $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} \equiv 0 \quad [\pi]$. On peut donc définir une mesure de l'angle de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ modulo π par une mesure de l'angle de leurs vecteurs directeurs

Proposition 26

Si θ est une mesure de l angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ normés, on a :

$$\cos\theta = \vec{u}.\vec{v} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v}).$$

Démonstratio Dans une base orthonormée directe du type $(\vec{u}, \vec{u}')$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour composantes respectivement $(1, 0)$ et $(\cos\theta, \sin\theta)$, ce qui prouve le résultat. □

Remarque On retrouve ainsi la définition des angles donnée page 59.

Corollaire 27

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

- Si f est une rotation, on a :

$$\left(\widehat{f(\vec{u}), f(\vec{v})}\right) \equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \quad [2\pi].$$

- Si f est une isométrie vectorielle indirecte, on a :

$$\left(\widehat{f(\vec{u}), f(\vec{v})}\right) \equiv -(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \quad [2\pi].$$

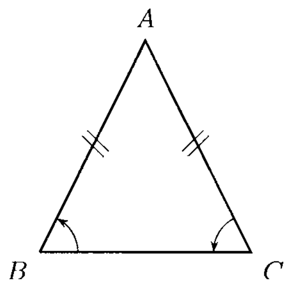
émonstration Quitte à diviser $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par leur norme, on peut les supposer normés. Le résultat est alors une conséquence de la proposition précédente, puisqu'un automorphisme orthogonal conserve le produit scalaire et que l'on a :

$$\operatorname{Det}\big(f(\vec{u}), f(\vec{v})\big) = \det f \ \operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v})$$

avec $\det f = 1$ si f est une isométrie vectorielle directe et $\det f = -1$ sinon. □

Exemple Si (ABC) est un triangle isocèle en A, c'est-à-dire si l'on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$, alors :

$$(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \quad [2\pi].$$



En effet, le point A étant à égale distance de B et C, il est invariant par la réflexion s échangeant B et C.

Par s, le triangle (ABC) est donc transformé en (ACB), et comme l'application linéaire $\vec{s}$, qui est une isométrie vectorielle indirecte, change les angles en leurs opposés, on en déduit le résultat.

3.3 Réflexions vectorielles

Proposition 28

Les isométries vectorielles indirectes du plan sont les réflexions.

émonstration

Toute réflexion est une isométrie indirecte d'après la proposition 15 de la page 991.

► Réciproquement, si s est une isométrie indirecte, sa matrice dans une base orthonormee directe $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est de la forme $S(\theta)$.

Un calcul élémentaire prouve que $S(\theta)^2 = I_2$ et donc que s est une symétrie orthogonale puisque c'est un automorphisme orthogonal.
Comme s n'est égale ni à Id_E ni à $-\mathrm{Id}_E$, il s'agit d'une réflexion.
Pour trouver l'axe de réflexion, il suffit de trouver les vecteurs invariants par s, ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} (\cos\theta - 1)\,x + \sin\theta\, y = 0 \\ \sin\theta\, x - (\cos\theta + 1)\, y = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire à :

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\theta}{2}\left(-\sin\dfrac{\theta}{2}\,x + \cos\dfrac{\theta}{2}\,y\right) = 0 \\ \cos\dfrac{\theta}{2}\left(+\sin\dfrac{\theta}{2}\,x - \cos\dfrac{\theta}{2}\,y\right) = 0 \end{cases}$$

dont une solution évidente est :

$$\vec{u} = \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{e}_1 + \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{e}_2.$$

L'application s est donc la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{u})$. □

Proposition 29

1. Si D et D' sont deux droites vectorielles dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, la composée des deux réflexions $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation d'angle $2\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$.
2. Toute rotation vectorielle est la composée de deux réflexions dont l'une peut être choisie arbitrairement.

émonst ation

1. On sait déjà que la composée de deux réflexions vectorielles est une isométrie vectorielle directe, donc une rotation. Pour déterminer son angle, supposons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ unitaires et considérons une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$. On sait d'après la démonstration de la proposition 28 de la page précédente, que la matrice dans $\mathcal{B}$ de $s_{D'}$ est $S(2\theta)$, où $\theta \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}\quad [2\pi]$. D'autre part, la matrice dans $\mathcal{B}$ de s_D est $S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   Donc la matrice de $s_{D'} \circ s_D$ dans $\mathcal{B}$ est .

$$S(2\theta)\, S(0) = R(2\theta).$$

2. Réciproquement, si r est une rotation d'angle θ, et si $\vec{u}$ est un vecteur d'une droite D fixée, il suffit de prendre les droites D_1' et D_2' dirigées respectivement par des vecteurs $\vec{u}_1'$ et $\vec{u}_2'$ vérifiant :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{u}_1')} \equiv -\frac{\theta}{2} \quad [2\pi] \qquad \text{et} \qquad \widehat{(\vec{u}, \vec{u}_2')} \equiv \frac{\theta}{2} \quad [2\pi]$$

   pour avoir $r = s_D \circ s_{D_1'} = s_{D_2'} \circ s_D$. □

4. Isométries du plan affine

On suppose dans cette section que E est de dimension 2.

4.1 Étude des déplacements du plan

Définition 6

Étant donnés un point Ω et un réel α, on appelle *rotation* de centre Ω et d'angle α, l'application affine r définie par :

$$\forall M \in E\,,\ \overrightarrow{\Omega\, r(M)} = \rho(\overrightarrow{\Omega M})$$

où ρ est la rotation vectorielle d'angle α.

Remarques

- On retrouve ainsi la définition des rotations du plan euclidien donnée page 89.
- La rotation de centre Ω et d'angle α est l'unique application affine laissant Ω fixe et admettant pour application linéaire associée la rotation vectorielle d'angle α.

Proposition 30

Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation d'angle non nul.

Démonstration Soit f un déplacement Si sa partie linéaire est Id_E, alors f est une translation. Sinon l'application linéaire associée à f est une rotation vectorielle ρ d'angle $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, on a :

$$\left(\widehat{\vec{u}, \rho(\vec{u})}\right) \equiv \alpha \quad [2\pi].$$

Seul le vecteur nul est donc invariant par ρ ce qui prouve que $\rho - \mathrm{Id}_E$ est injective donc bijective Soit O un point fixé de E. Un point Ω est invariant par f si, et seulement si, on a :

$$\overrightarrow{f(O)f(\Omega)} = \overrightarrow{f(O)\Omega}$$

c'est-à-dire :

$$\rho(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{f(O)\Omega}$$

soit enfin :

$$(\rho - \mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{f(O)O}. \qquad (*)$$

Comme l'application $\rho - \mathrm{Id}_E$ est bijective, il existe un point Ω et un seul verifiant $(*)$ et par suite f est la rotation de centre Ω et d'angle α. $\square$

4.2 Composées de réflexions

Remarque On sait qu'un déplacement du plan est composé d'au plus 3 réflexions, mais comme il s'agit d'une isométrie directe, il ne peut pas être composé d'un nombre impair de réflexions. C'est donc soit l'identité soit une composée de 2 réflexions.

Nous donnons ci–dessous des resultats plus précis sur cette décomposition.

Proposition 31

1. Étant données deux droites parallèles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, l'application $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
2. Étant données une droite $\mathcal{D}_1$ et une translation t de vecteur $\vec{u}$ orthogonal à la direction de $\mathcal{D}_1$, il existe deux droites $\mathcal{D}'_2$ et $\mathcal{D}''_2$ parallèles à $\mathcal{D}_1$ telles que :
$$t = s_{\mathcal{D}'_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}''_2}.$$

émons ration Cas particulier de la proposition 19 de la page 993 □

Proposition 32

1. Étant donnees deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en Ω et dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, l'application $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $2(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$.
2. Étant données une rotation r de centre Ω et une droite $\mathcal{D}_1$ passant par Ω, il existe deux droites $\mathcal{D}'_2$ et $\mathcal{D}''_2$ passant par Ω telles que :
$$r = s_{\mathcal{D}'_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}''_2}.$$

émo s ration

1. La transformation affine $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ admet Ω comme point invariant, et son application linéaire associée est la rotation d'angle $2(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$, ce qui prouve le résultat
2. Si l'on désigne par ρ la rotation vectorielle associée à r et par σ_1 la réflexion vectorielle associée à $s_{\mathcal{D}_1}$, on sait qu'il existe des réflexions vectorielles σ'_2 et σ''_2 telles que $\rho = \sigma'_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma''_2$.
En posant $\mathcal{D}'_2 = \Omega + D'_2$ et $\mathcal{D}''_2 = \Omega + D''_2$, les applications affines r, $s_{\mathcal{D}'_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ et $s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}''_2}$ admettent toutes les trois ρ comme application linéaire associée et coïncident en Ω ; elles sont donc égales. □

Remarques

1. Si α est l'angle de r, les droites $\mathcal{D}'_2$ et $\mathcal{D}''_2$ sont les images respectives de la droite $\mathcal{D}_1$ par les rotations de centre Ω et d'angles respectifs $\frac{\alpha}{2}$ et $-\frac{\alpha}{2}$.

2. Si la rotation r est une rotation d'angle plat c'est–à–dire la symétrie de centre Ω, les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_2$ sont confondues avec la perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}_1$ passant par Ω.

4.3 Similitudes du plan

Définition 7

- On appelle *similitude* de E toute transformation affine qui multiplie les distances par un réel strictement positif donné. Ce réel est appelé *rapport de similitude.*
- Une similitude est *directe* si le déterminant de son application linéaire associée est positif, *indirecte* sinon.

Exemples

1. Une homothétie du plan de rapport $k \neq 0$ est une similitude de rapport $|k|$. Elle est directe puisque $\det(k\ \mathrm{Id}_E) = k^2 > 0$.
2. Une isométrie est une similitude de rapport 1, qui est directe si, et seulement si, c'est un déplacement.
3. En particulier, les translations et les rotations du plan sont des similitudes directes, et les réflexions sont des similitudes indirectes

Les composées d'homothéties et d'isométries sont donc des similitudes. Réciproquement :

Proposition 33

1. Toute similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.
2. Toute similitude directe est la composée d'un déplacement et d'une homothétie.

émonstration Si f est une similitude de rapport k et si h est une homothétie de rapport k, l'application affine $f \circ h^{-1}$ conserve les distances C'est donc une isométrie g et on a alors $f = g \circ h$.

Comme de plus $\det(\vec{f}) = \det(\vec{g})\ \det(\vec{h}) = k^2\ \det(\vec{g})$, on en déduit que f est une similitude directe si, et seulement si, g est un déplacement □

Remarque La définition d'une similitude et la proposition précédente se généralisent à un espace euclidien de dimension quelconque.

Corollaire 34

Soient A, B et C trois points distincts du plan.

- Si f est une similitude directe, on a :

$$(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \quad [2\pi].$$

- Si f est une similitude indirecte, on a :

$$(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \quad [2\pi].$$

émonstratio Le resultat est vrai pour les isometries d après le corollaire 27 de la page 998. Comme les homothéties conservent les angles, il est vrai pour toute similitude □

Proposition 35

Les similitudes directes sont les transformations représentées dans le plan complexe par les applications $z \mapsto a\,z + b$, avec $(a.b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

émons ration

- Une rotation est représentée par $z \mapsto e^{i\theta}\,z + b_1$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{C}$) et une homothétie par $z \mapsto k\,z + b_1$ (avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $b_2 \in \mathbb{C}$) Leur composée est donc de le forme annoncée
- Réciproquement, si $a = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, l'application $z \mapsto a\,z + b$ represente la composée de la translation de vecteur d'affixe b, de l'homothétie de centre O et de rapport r et de la rotation de centre O et d'angle θ qui est donc une similitude directe. □

Remarque On retrouve ainsi la définition des similitudes donnée page 90.

5. Automorphismes orthogonaux de l'espace

On suppose dans cette section que E est de dimension 3.

5.1 Orientation d'un plan

Lemme

Étant donne un plan P de E de vecteur normal unitaire a il existe une unique orientation de P telle que pour toute base orthonormée directe $(e_1 . e_2)$ de P, la famille $(e_1, e_2 . a)$ soit une base orthonormée directe de E.

On dit alors que le plan P est *orienté par le vecteur normal* a

émonstratio Prenons une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de P.

Unicité. Les deux bases de P :
$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{et} \quad (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$
définissent les deux orientations de P, mais parmi les deux bases de E :
$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a) \quad \text{et} \quad (-\varepsilon_1, \varepsilon_2, a),$$
il n'y en a qu'une qui soit directe.

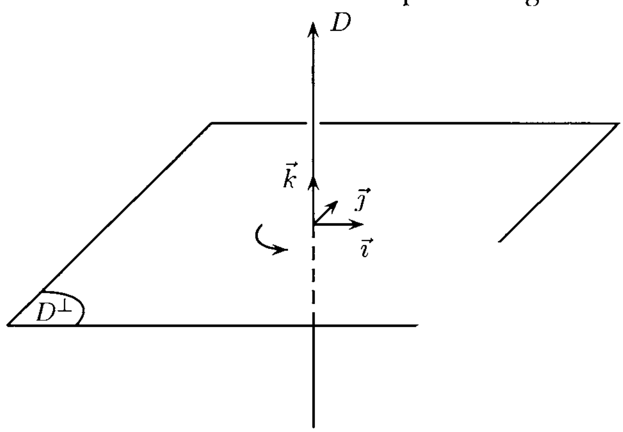
Existence. Quitte à changer ε_1 en $-\varepsilon_1$, supposons que $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, a)$ soit directe, et orientons P par $\mathcal{B}'_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe de P

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, a)$ est une base orthonormée de E.

Si Q' est la matrice de passage de $\mathcal{B}'_0$ à $\mathcal{B}'$, on a $\det Q' > 0$ puisque $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'_0$ sont des bases directes de P. Or, la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est .
$$Q = \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et son déterminant, égal à celui de Q', est donc strictement positif. Par suite, $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de E. □

Exemple Ainsi, dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 l'orientation d'une droite définit une orientation de son plan orthogonal :



5.2 Décomposition en produit de réflexions

D'après la proposition 20 de la page 994, tout automorphisme orthogonal est une composée d'au plus trois réflexions.

Plus précisément, en posant $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$:

- si $F = E$, l'application f est l'identité
- si F est un plan, l'application f est une réflexion

- si F est un droite f ne peut être ni une réflexion ni l identité, donc est un produit de deux réflexions nécessairement distinctes
- si $F = \{0\}$ l'application f n'est ni l'identité, ni une réflexion, ni un produit de deux réflexions distinctes, puisqu'alors l'intersection des plans de réflexions serait une droite de vecteurs invariants. Par suite, f est un produit de trois réflexions.

5.3 Rotations vectorielles

Les rotations vectorielles (c'est–à–dire les automorphismes orthogonaux de déterminant $+1$) sont donc soit l'identité, soit le produit de deux réflexions distinctes.

Proposition 36

Si f est une rotation, il existe une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Une telle application est appelée *rotation d'angle θ* autour du vecteur $\vec{w}$.

- Si $f \neq \mathrm{Id}_E$, l'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite $\mathrm{Vect}(\vec{w})$; on l'appelle *axe de la rotation.*
- La restriction de f au plan $\vec{w}^{\perp}$ orienté par $\vec{w}$ est la rotation d'angle θ.

émonstratio Le résultat précédent étant évident si $f = \mathrm{Id}_E$, on peut supposer $f \neq \mathrm{Id}_E$. Puisque f est une isométrie vectorielle directe, elle ne peut être ni une réflexion, ni un produit de trois réflexions. C'est alors un produit de deux réflexions distinctes, possédant donc un vecteur invariant normé $\vec{w}$.

L'ensemble des vecteurs invariants est une droite d'après la remarque précédente et est donc égal à $\mathrm{Vect}(\vec{w})$

Un vecteur orthogonal à $\vec{w}$ a par f une image orthogonale à $f(\vec{w}) = \vec{w}$, ce qui prouve que le plan normal à $\vec{w}$ est stable par f Orientons ce plan P par son vecteur normal $\vec{w}$; l'application f induit sur P un automorphisme orthogonal qui n'a pas de vecteur invariant non nul C'est donc une rotation, et on peut trouver une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v})$ de P dans laquelle la matrice de $f_{|P}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

La base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est alors une base orthonormée directe de E et l'on a :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Proposition 37

Soit ρ une rotation d'angle θ autour d'un vecteur unitaire $\vec{w}$.

1. Si $\vec{x}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{w}$, on a :

$$\rho(\vec{x}) = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{w} \wedge \vec{x}.$$

2. Si $\vec{x}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{w}$, on a :

$$\cos\theta = \vec{x}.\rho(\vec{x}) \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \mathrm{Det}\big(\vec{x}.\,\rho(\vec{x}).\,\vec{w}\big).$$

émonstration

1. Il suffit de le montrer dans le cas où $\vec{x}$ est normé. Dans le plan $P = \vec{w}^{\perp}$ orienté par $\vec{w}$, on peut compléter $\vec{x}$ en une base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{y})$. Comme la restriction à P de la rotation ρ est la rotation d'angle θ, on en déduit :

$$\rho(\vec{x}) = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}$$

ce qui donne le résultat puisque, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{w})$ étant une base orthonormée directe, on a $\vec{y} = \vec{w} \wedge \vec{x}$.

2. Conséquence du résultat précédent et de la relation :

$$\mathrm{Det}\big(\vec{x}, \rho(\vec{x}), \vec{w}\big) = \mathrm{Det}\big(\vec{w}, \vec{x}, \rho(\vec{x})\big) = (\vec{w} \wedge \vec{x})\,.\rho(\vec{x}).$$

□

Exemples

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique déterminons la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ autour du vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On décompose tout vecteur de E comme somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{w}$ (et donc invariant par ρ) et d un vecteur orthogonal à $\vec{w}$ (dont on connaît l'image d'après la proposition précédente) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Comme on a :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 2z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} z \\ -z \\ y-x \end{pmatrix}.$$

on en déduit :

$$\rho\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\cos\theta}{2}\begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 2z \end{pmatrix} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} z \\ -z \\ y-x \end{pmatrix}$$

ce qui donne la matrice :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & 1-\cos\theta & \sin\theta\sqrt{2} \\ 1-\cos\theta & 1+\cos\theta & -\sin\theta\sqrt{2} \\ -\sin\theta\sqrt{2} & \sin\theta\sqrt{2} & 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

2. Soit ρ un endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

- C'est une rotation (évidemment différente de l'identité) car ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et son déterminant vaut 1.
- On détermine l'axe de rotation en résolvant l'équation $\rho(\vec{w}) = \vec{w}$, ce qui donne comme solution normée :

$$\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}}(3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}).$$

- Le vecteur $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(\vec{\imath} + 3\jmath)$ est un vecteur normé orthogonal à $\vec{w}$; l'angle de rotation autour de $\vec{w}$ est donc caractérisé par :

$$\cos\theta = \vec{u}.\rho(\vec{u}) = \frac{7}{18} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \operatorname{Det}(\vec{u}, \rho(\vec{u}), \vec{w}) = \frac{5\sqrt{11}}{18}.$$

3. Lorsque l'on connaît un vecteur $\vec{w}$ de l'axe de la rotation ρ et un vecteur $\vec{x}$ orthogonal à $\vec{w}$, ces deux vecteurs n'étant pas nécessairement normés on peut calculer l'angle d une rotation autour de $\vec{w}$ à l'aide des formules :

$$\|\vec{x}\|^2 \cos\theta = \vec{x}.\rho(\vec{x}) \qquad \text{et} \qquad \|\vec{x}\|^2\,\|\vec{w}\|\,\sin\theta = \operatorname{Det}\big(\vec{x}, \rho(\vec{x}), \vec{w}\big).$$

6. Isométries affines de l'espace

On suppose dans cette section que E est de dimension 3.

6.1 Rotations affines

Proposition 38

Soit f un déplacement de E différent de Id_E, admettant au moins un point invariant et dont l'application linéaire associée est notée $\vec{f}$

- L'application $\vec{f}$ est une rotation différente de Id_E.
- L'ensemble des points invariants par f est une droite dont la direction est l'axe de $\vec{f}$.

émonst atio Comme f est un déplacement, $\vec{f}$ est une rotation vectorielle

Si $\vec{f} = \mathrm{Id}_E$ alors f est une translation admettant un point invariant donc $f = \mathrm{Id}_E$, ce qui est exclu. Donc $\vec{f} \neq \mathrm{Id}_E$.

Soit Ω un point invariant par f. Un point M est invariant par f si, et seulement si, :

$$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{f(\Omega)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{\Omega M})$$

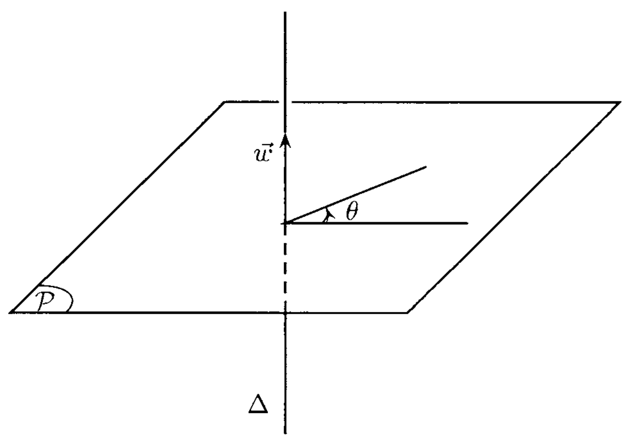
ce qui prouve que l'ensemble des points invariants par f est la droite passant par Ω et dirigée par l'axe de $\vec{f}$ □

Définition 8

- On appelle *rotation* de E tout déplacement de E qui possède au moins un point invariant.
- Si r est une rotation de E différente de Id_E, on appelle *axe* de r l'ensemble Δ des points invariants par r. Si $\vec{w}$ est un vecteur unitaire de la direction D de Δ, on appelle *mesure de l'angle* de r autour de Δ orienté par $\vec{w}$ toute mesure de la rotation vectorielle ρ associée autour de $\vec{w}$.
- On appelle *demi–tour* autour d'une droite Δ, la rotation d'axe Δ et d'angle π, c'est–à–dire la symétrie orthogonale par rapport à Δ.

Remarque Si r est une rotation d'angle θ autour d'un axe Δ orienté par un vecteur $\vec{w}$, tout plan $\mathcal{P}$ orthogonal à Δ contient un point de Δ donc invariant par r. Orientons le plan $\mathcal{P}$ par le vecteur $\vec{w}$.

Comme la direction P de $\mathcal{P}$ est invariante par la rotation vectorielle ρ associée à r, et que la restriction de ρ à P est la rotation d angle θ, on en déduit que $\mathcal{P}$ est stable par r et que la restriction de r à $\mathcal{P}$ est une rotation d'angle θ dont le centre est le point d'intersection de Δ avec $\mathcal{P}$.



Exemple Étant donné un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l espace E, considérons l'application affine dont l expression analytique dans $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1 \end{cases}$$

L'application linéaire ρ associée à r a pour matrice dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice orthogonale de déterminant 1, donc ρ est une rotation. Le vecteur $\vec{w} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ est invariant par ρ ; pour trouver l'angle θ de la rotation autour de $\vec{w}$, utilisons le vecteur $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ qui est orthogonal à $\vec{w}$. On a $\rho(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = \vec{k} - \vec{\imath}$ et donc :

$$2\cos\theta = (\vec{\imath} - \vec{\jmath}).(\vec{k} - \vec{\imath}) = -1$$

$$2\sqrt{3}\sin\theta = \operatorname{Det}(\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{k} - \vec{\imath}, \vec{w}) = -3$$

ce qui prouve que ρ est la rotation d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$ autour du vecteur $\vec{w} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Comme le point Ω de coordonnées $(1, 1, 0)$ est fixe, L'application r est la rotation d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$ autour de l'axe $(\Omega, \vec{w})$ orienté par $\vec{w}$.

6.2 Vissages

Définition 9

Étant donnés une droite orientée Δ, un réel θ et un vecteur $\vec{u}$ de la direction de Δ on appelle *vissage* d'angle θ autour de Δ et de vecteur $\vec{u}$, la composée (commutative) de la rotation d'angle θ autour de Δ et de la translation de vecteur $\vec{u}$.

émonstra io Vérifions la commutativité de la décomposition.

- Dans le cas où $r = \mathrm{Id}_E$, on a évidemment $r \circ t = t \circ r = t$.
- Dans le cas où $r \neq \mathrm{Id}_E$, pour tout point Ω de l'axe Δ de r, le point $t(\Omega)$ appartient à Δ et on a :

$$(r \circ t)(\Omega) = r\big(t(\Omega)\big) = t(\Omega) = t\big(r(\Omega)\big) = (t \circ r)(\Omega)$$

et comme $r \circ t$ et $t \circ r$ ont même application linéaire associée, on obtient $r \circ t = t \circ r$ □

Remarque Avec les notations de la définition précédente :

- si $\theta = 0$ le vissage est la translation de vecteur $\vec{u}$
- si $\vec{u} = 0$, c'est la rotation d'angle θ autour de Δ.

Lemme

Soient Δ une droite et $\vec{u}$ un vecteur appartenant à la direction de Δ. Si f est un vissage composé de la translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une rotation r d'angle non nul autour de Δ, alors la droite Δ est invariante par f et aucune autre droite parallèle à Δ n'est invariante par f.

émonstration Soit $\mathcal{P}$ un plan orthogonal à Δ. Toute droite parallèle à Δ rencontre $\mathcal{P}$ en un unique point et a pour image par r une droite parallèle à Δ Or, la restriction de r à $\mathcal{P}$ n'a qu'un point fixe, et donc la droite Δ est la seule droite dirigée par $\vec{u}$ qui soit invariante par r.

Comme toute droite parallèle à Δ est invariante par t, on en déduit que Δ est la seule droite dirigée par $\vec{u}$ qui soit invariante par f. □

Lemme

Étant données une rotation $r \neq \mathrm{Id}_E$ d'axe Δ et une translation t de vecteur $\vec{u}$ orthogonal à Δ, l'application $t \circ r$ est une rotation d'axe parallèle à Δ.

émonstration L'application $t \circ r$ est un déplacement et son application linéaire associée ρ est égale à celle de r. Pour prouver que $t \circ r$ est une rotation, il suffit donc de prouver qu'elle possède un point fixe.

Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ et $\mathcal{P}$ un plan orthogonal à Δ. On sait (remarque de la page 1008) que $\mathcal{P}$ est stable par r et que la restriction de r à $\mathcal{P}$ est une rotation d angle $\theta \not\equiv 0 \quad [2\pi]$. Comme $\mathcal{P}$ est aussi stable par t, il l'est par la composée $t \circ r$ dont la restriction à $\mathcal{P}$ est un déplacement qui n'est pas une translation. C'est par conséquent une rotation, qui possède donc un point fixe dans $\mathcal{P}$. □

Proposition 39

Soit f un déplacement qui n'est pas une translation. Il existe une unique rotation r et une unique translation t dont le vecteur est dans la direction de l'axe de r telles que $f = t \circ r$.

émonstrat'on L'application linéaire associée à f est une rotation vectorielle ρ, différente de l'identité, dont l'axe est dirigé par un vecteur non nul $\vec{u}$.

Unicité. Soit un couple (r, t) vérifiant les conditions précédentes. Le déplacement f est donc un vissage et le premier lemme nous montre l'unicité de r : c'est la rotation associée à ρ dont l'axe est l'unique droite dirigée par $\vec{u}$ qui soit invariante par f

Par suite, la relation $t = f \circ r^{-1}$ donne l'unicité de t

Existence. On peut écrire $f = t_1 \circ r_1$ où t_1 est une translation et r_1 une application affine ayant un point fixe. Comme :

$$\rho = \vec{f} = \vec{t}_1 \circ \vec{r}_1 = \mathrm{Id}_E \circ \vec{r}_1 = \vec{r}_1,$$

on en déduit que r_1 est une isométrie directe, donc une rotation differente de Id_E. Soit Δ_1 son axe orienté par $\vec{w}$, et $\vec{u}_1$ le vecteur de la translation t_1. En désignant par $\vec{u}$ la projection orthogonale de $\vec{u}_1$ sur la direction D de Δ_1, on a :

$$\vec{u}_1 = \vec{u} + \vec{u}' \qquad \text{avec} \qquad \vec{u}' \in D^{\perp}.$$

Si t et t' sont les translations respectivement associées à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, on a $f = t \circ t' \circ r_1$ et, d'après le deuxième lemme, $t' \circ r_1$ est une rotation d'axe parallèle à Δ_1, d'où le résultat. □

Remarques

- Si f est un vissage d'axe Δ qui n'est pas une translation, la droite Δ est donc l'ensemble des points M de E tels que le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ appartienne à la direction de Δ Cette propriété peut permettre de déterminer l'axe Δ.
- Une translation s'écrit de façon unique comme la composée d une translation et d'une rotation, cette dernière étant alors d'angle nul.
- Les déplacements sont donc les vissages.

Exemple Soient $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de E et f l'application de E dans E dont l'expression analytique dans $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = x + 1 \\ z' = y + 2 \end{cases}$$

Comme l'application linéaire φ associée à f est la rotation d angle $\dfrac{2\pi}{3}$ autour de $\vec{w} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, on en déduit que f est un vissage d'axe dirigé par $\vec{w}$. Grâce à la remarque précédente, on peut trouver l'axe Δ du vissage en cherchant les points M de coordonnées (x, y, z) pour lesquels $\overrightarrow{Mf(M)}$ est colinéaire à $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, c'est–à–dire pour lesquels il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} z - x = \lambda \\ x + 1 - y = \lambda \\ y + 2 - z = \lambda \end{cases}$$

En faisant la somme des trois équations, on obtient $\lambda = 1$ ce qui donne le vecteur du vissage : $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

L'axe, qui est alors paramétré par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

est la droite dirigee par $\vec{u}$ et passant par le point de coordonnees $(0, 0, 1)$.

6.3 Composées de réflexions

Proposition 40

1. Étant donnés deux plans parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, l'application $s_{\mathcal{P}_2} \circ s_{\mathcal{P}_1}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
2. Étant donnés un plan $\mathcal{P}_1$ et une translation t de vecteur $\vec{u}$ orthogonal à la direction de $\mathcal{P}_1$, il existe deux plans $\mathcal{P}_2'$ et $\mathcal{P}_2''$ parallèles à $\mathcal{P}_1$ tels que :
$$t = s_{\mathcal{P}_2'} \circ s_{\mathcal{P}_1} = s_{\mathcal{P}_1} \circ s_{\mathcal{P}_2''}.$$

émonstra ˚o Cas particulier de la proposition 19 de la page 993 □

Proposition 41

- Étant donnés deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupant suivant une droite Δ, l'application $s_{\mathcal{P}_2} \circ s_{\mathcal{P}_1}$ est une rotation d'axe Δ.
- Étant donnés une rotation r d'axe Δ et un plan $\mathcal{P}_1$ contenant Δ il existe deux plans $\mathcal{P}_2'$ et $\mathcal{P}_2''$ contenant Δ tels que :
$$r = s_{\mathcal{P}_2'} \circ s_{\mathcal{P}_1} = s_{\mathcal{P}_1} \circ s_{\mathcal{P}_2''}.$$

émons ration

- La transformation affine $s_{\mathcal{P}_2} \circ s_{\mathcal{P}_1}$ est un déplacement qui admet tout point de Δ comme point invariant. Par suite, c'est une rotation d'axe contenant Δ et donc egal à Δ.
- Considérons l'isométrie $f = r \circ s_{\mathcal{P}_1}$. Tous les points de Δ sont invariants par f, donc l'application linéaire associée à f est une isométrie vectorielle indirecte qui possède au moins une droite de vecteurs invariants. D'après la discussion de la page 1004, on en déduit que c'est une réflexion vectorielle. Comme tous les points de Δ sont fixes par f, celle–ci est une réflexion affine dont l'hyperplan $\mathcal{P}_2'$ contient Δ

  On a alors $r = f \circ s_{\mathcal{P}_1} = s_{\mathcal{P}_2'} \circ s_{\mathcal{P}_1}$
- On fait de même avec $s_{\mathcal{P}_1} \circ r$. □

Remarque On sait qu'un déplacement est composée d'au plus 4 réflexions. Pour un vissage d'axe Δ, d'angle θ et de vecteur $\vec{u}$ on peut prendre :

- deux réflexions de plan contenant Δ dont la composée est la rotation d'axe Δ et d'angle θ,
- deux réflexions de plan orthogonal à Δ dont la composee est la translation de vecteur $\vec{u}$.

EXERCICES

1 Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

-
$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n.$$

-
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

2. Soient E un espace euclidien et F un sous espace vectoriel de E.
Soient u et v deux endomorphismes orthogonaux respectivement de F et de $F^{\perp}$ et p la projection orthogonale sur F.
Montrer que l'endomorphisme de E défini par :
$$\forall x \in E\ ,\ f(x) = u\big(p(x)\big) + v\big(x - p(x)\big)$$
est orthogonal.

3. Soit E un espace euclidien.
Montrer qu'un endomorphisme qui commute avec toutes les symétries orthogonales est une homothétie.
En déduire les endomorphismes commutant avec tout automorphisme orthogonal de E.

4. Soient E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et u un vecteur de E. On considère l'application f définie par :
$$\forall x \in E\,,\ f(x) = x + \lambda(\,x \mid u\,)\,u.$$
Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et u pour que f soit un automorphisme orthogonal.
Décrire f dans ce cas.

5. Soit E un espace euclidien de dimension 1 Quelles sont les isométries de E ?

6. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^2.
Décrire l'endomorphisme f.

7. Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big(f(x) \mid y\big) = \big(x \mid f(y)\big).$$

Montrer que la matrice dans une base orthonormee de f est une matrice symétrique.

Réciproquement, montrer que si la matrice de f dans une base orthonormee est symétrique, alors elle l'est dans n'importe quelle base orthonormée et que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \ , \ \big(f(x) \mid y\big) = \big(x \mid f(y)\big).$$

8. Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, on suppose que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$ est antisymétrique.

Montrer que dans toute base orthonormale la matrice de f est antisymétrique et que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \ , \ \big(x \mid f(y)\big) = -\big(f(x) \mid y\big).$$

9. Soient f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E et F un sous-espace vectoriel de E tel que $f(F) \subset F$.
Montrer que $f(F) = F$ et $f(F^\perp) = F^\perp$.

10. Dans l'espace euclidien orienté $E = \mathbb{R}^3$, soit r la rotation d'angle θ autour de l'axe orienté et dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u}$.

Montrer que :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ , \ r(\vec{x}) = \cos\theta\, \vec{x} + \sin\theta(\vec{u} \wedge \vec{x}) + 2(\vec{u} \mid \vec{x}) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u}.$$

11. Soient E un espace de dimension 3 et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Donner la matrice relativement à une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de E de :

a) la réflexion par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$,

b) la rotation autour de la droite dirigée et orientée par $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

12. Soient E un espace euclidien de dimension n ainsi que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux sous-espaces affines parallèles.

Montrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{u}$ orthogonal à la direction commune de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{F}_2$ et tel que $t_{\vec{u}}(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$.

13. Soient f et g deux rotations vectorielles qui ne sont pas des retournements.

Montrer que f et g commutent si et seulement si elles ont le même axe.

14. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 ainsi que f_1 et f_2 deux retournements vectoriels d'axes respectifs D_1 et D_2 distincts.

Montrer que f_1 et f_2 commutent si et seulement si D_1 et D_2 sont orthogonales.

15. Dans le plan euclidien, quelle est la composée de deux rotations ?

16. Soit f un antidéplacement du plan (c'est-à-dire une isométrie dont la partie linéaire est un endomorphisme orthogonal indirect).

a) Montrer que si f admet au moins un point fixe alors f est une réflexion.

b) Montrer que si f n'a pas de point fixe, alors il existe un unique couple (t, s) où s est une réflexion affine et t une translation dont le vecteur est dans la direction de l'axe de s tel que $f = t \circ s$ et que t et s commutent.

17. Soit f un automorphisme orthogonal indirect d'un espace euclidien E de dimension 3.

En remarquant que $-f$ est un automorphisme direct de E, décrire f.

18. Cet exercice utilise les résultats de l'exercice précédent.

Soit f un antidéplacement d'un espace de dimension 3 (c'est-à-dire une isométrie dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal indirect de l'espace).

a) Montrer que l'ensemble des points invariants de f est soit vide, soit réduit à un point, soit est un plan affine.

b) On suppose que l'ensemble des points invariants de f est un plan affine. Montrer que f est une réflexion.

c) On suppose que f n'a pas de point fixe. Montrer qu'il existe un unique couple (t, s) où s est une réflexion par rapport à un plan $\mathcal{P}$ et t une translation dont le vecteur appartient à la direction de $\mathcal{P}$ tel que $f = t_{\vec{u}} \circ s$.

d) On suppose que f a un unique point fixe, montrer que f est la composée commutative d'une rotation et d'une réflexion.

19. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non coplanaires dans $\mathbb{R}^3$ de directions respectives D_1 et D_2 et soient f_1 et f_2 deux retournements d'axe respectivement $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Montrer que $f_1 \circ f_2$ est un vissage d'axe $\mathcal{D}$, perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

20. Trouver l'ensemble des isométries planes qui laissent globalement invariant un ensemble de 4 points A, B, C, et D formant un carré non réduit à un point.

21. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l espace de directions respectives P_1 et P_2. On suppose que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires, c'est à dire que $P_1^\perp \subset P_2$.

Soient s_1 et s_2 les réflexions par rapport à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Quelle est la composée $s_2 \circ s_1$?

22. Soit f une isométrie telle que $M \mapsto \left\|\overrightarrow{Mf(M)}\right\|$ soit une constante k sur l'espace E.

Montrer que f est une translation.

23. Soit dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé Oxy le carré de sommets O, A, B et C de coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$. Montrer que pour tout triangle équilatéral orienté positivement LMN tel que L appartienne à $[O,A]$, M à $[A,B]$ et N à $[C,O]$, le milieu de MN a pour coordonnees $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

Notions de base

Chapitre 35

Ensembles, applications, relations

L'activité mathématique se développe suivant trois axes principaux :

- la construction d'objets mathématiques, qui peuvent être des nombres des fonctions, des figures géométriques... Ces objets servent de modèles pour étudier des phénomènes physiques, chimiques, biologiques...
- la recherche de propriétés reliant ces objets : ce sont des conjectures qui peuvent être élaborées par exemple à partir de cas particuliers ou par utilisation de moyens informatiques,
- la démonstration des propriétés énoncées précédemment. Une fois démontrées, ces propriétés prennent le nom de théorème

Dans ce livre, pour distinguer les différents théorèmes que nous allons démontrer nous leur donnons les noms de :

- **proposition** pour la plupart des résultats,
- **théorème** pour les résultats les plus fondamentaux,
- **corollaire** pour les conséquences (le plus souvent immédiates) des résultats précédents,
- **lemme** pour certains résultats préliminaires, utiles pour la suite, mais dont l'intérêt intrinsèque est assez limité.

Les démonstrations obéissent à des règles précises dont nous allons donner un aperçu dans ce chapitre.

1. Assertions

1.1 Assertions

La notion d'*assertion* est une notion première. Intuitivement, une assertion est un assemblage de mots dont la construction obéit à une certaine syntaxe et à laquelle on peut donner une valeur de vérité : V (Vraie) ou F (Fausse).

Exemples

1. « 2 est un entier impair » est une assertion (fausse) ;
2. « $(1000+1)^2 = 1000^2 + 2000 + 1$ » est une assertion (vraie) ·
3. « $1 = 2+$ » n'est pas une assertion.

On dit que deux assertions sont logiquement équivalentes si elles ont la même valeur de vérité.

1.2 Connecteurs

À partir d'un certain nombre d'assertions on peut en fabriquer de nouvelles en utilisant des *connecteurs*.

Connecteurs élémentaires

Si P et Q sont deux assertions on définit les assertions :

- $(\text{NON } P)$ qui est vraie lorsque P est fausse, et fausse sinon,
- $(P \text{ ET } Q)$ qui est vraie lorsque les deux assertions P et Q sont vraies et fausse sinon,
- $(P \text{ OU } Q)$ qui est vraie lorsqu'au moins une des deux assertions est vraie et fausse sinon.

Les valeurs de vérité de ces nouvelles assertions satisfont donc aux tables suivantes (appelées *tables de vérité*) :

P	NON P
V	F
F	V

P	Q	P ET Q	P OU Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Remarques

- On voit que les tableaux précédents donnent un sens précis au connecteur OU alors que dans le langage courant ce mot peut être utilisé avec des sens différents. Par exemple :

   – ou exclusif : « fromage ou dessert » ;
   – ou mathématique : « qu'il pleuve ou qu'il fasse du vent, je ne jouerai pas au tennis » ;
   – ou "conditionnel" : « mange ta soupe ou tu auras une fessee ».

- Les assertions $(P \text{ ET } Q)$ et $\text{NON}(\text{NON } P \text{ OU NON } Q)$ sont équivalentes, et il en est de même de $(P \text{ OU } Q)$ et $\text{NON}(\text{NON } P \text{ ET NON } Q)$.

  Cela permettrait de n introduire que deux connecteurs élémentaires et de définir le troisième en fonction des deux autres, mais à cause de la symétrie entre les connecteurs ET et OU, il est plus judicieux de ne pas privilégier l'un par rapport à l'autre.

Implication, équivalence

Si P et Q sont deux assertions, on définit les assertions $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftrightarrow Q$ par :

$$P \Rightarrow Q \ : \ (\text{NON } P) \text{ OU } Q.$$

$$P \Leftrightarrow Q \ : \ (P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P)$$

Leurs valeurs de vérité vérifient le tableau suivant :

P	Q	$P \Rightarrow$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Remarques

- Par définition, l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie dès que P est fausse ; elle peut donc être vraie même lorsque Q est fausse.

  Par exemple, l'assertion « $(2 = 3) \Rightarrow (1 = 4)$ » est vraie.
- Si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie.
- L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si, P et Q sont logiquement équivalentes.

Les propriétés intuitives des connecteurs peuvent se vérifier facilement grâce aux tables de vérité.

Exemples

1. Quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q et R, on a équivalence entre les deux assertions de chacune des lignes ci-après :

NON(NON P)	P
P ET Q	Q ET P
(P OU Q) OU R	P OU (Q OU R)
(P OU Q) ET R	(P ET R) OU (Q ET R)

2. Il en est de même si l'on échange les rôles de ET et OU.
3. Les assertions $P \Leftrightarrow P$, $\big((P$ ET $Q) \Rightarrow P\big)$ et $\big(P \Rightarrow (P$ OU $Q)\big)$ sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité de leurs variables. De telles assertions sont appelées *tautologies*.

1.3 Méthodes de démonstration

Dans une théorie mathématique :

- un *axiome* est une assertion que l'on pose vraie *a priori*. Par exemple les axiomes d'Euclide en géométrie plane ;
- un *théorème* est une assertion que l'on peut déduire d'axiomes ou d'autres théorèmes. Le théorème de Pythagore en est un exemple en géométrie plane.

Les règles de déduction sont fondées sur les propriétés élémentaires des connecteurs ainsi que sur les règles suivantes.

Modus ponens : si l'on a P ET $(P \Rightarrow Q)$ alors on a Q. Cette règle est fondée sur la tautologie $\big(P$ ET $(P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q$ que l'on vérifie facilement à l'aide des tables de vérité.
Ainsi, pour démontrer que Q est un théorème il suffit de verifier que P et $P \Rightarrow Q$ sont des théorèmes ou des axiomes.

Transitivité de l'implication : si l'on a $(P \Rightarrow Q)$ ET $(Q \Rightarrow R)$, alors on a $P \Rightarrow R$.
Ainsi, pour démontrer $P \Rightarrow R$, il suffit de montrer que R est conséquence de Q lui même conséquence de P.

Contraposée : on a $P \Rightarrow Q$ si, et seulement si, on a NON $Q \Rightarrow$ NON P
Ainsi, pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, il suffit de montrer sa contraposée NON $Q \Rightarrow$ NON P.

Disjonction des cas : si l'on a $(P$ OU $Q)$ ET $(P \Rightarrow R)$ ET $(Q \Rightarrow R)$, alors on a R.
Ainsi, pour démontrer le résultat R, il suffit de montrer que l'on a P ou Q, et que dans chacun des cas on peut en déduire R.

Raisonnement par l'absurde : si l'on a (NON $P \Rightarrow Q$) ET (NON $P \Rightarrow$ NON Q) alors on a P.
Ainsi, pour démontrer P, on montre que sa négation NON P entraîne une assertion et son contraire c'est–à–dire une contradiction.

2. Ensembles, prédicats

2.1 Généralités

Les notions d'*ensemble* et d'*élément* sont des notions premières ; un ensemble correspond intuitivement à une collection On dispose de deux types d'assertions :

- $a \in E$ qui se lit : a appartient à E ou a est élément de E, et dont la négation s'écrit $a \notin E$.
- $E \subset F$ qui se lit : E inclus dans F et qui signifie que tout élément de E est aussi élément de F. Sa négation s'écrit $E \not\subset F$.

Deux ensembles E et F sont égaux ($E = F$) s'ils ont les mêmes éléments, c'est–à–dire si l'on a simultanément $E \subset F$ et $F \subset E$. Pour démontrer une égalité d'ensembles, on prouvera donc en général une double inclusion.

On admet les résultats suivants.

- Il existe un ensemble, appelé *ensemble vide* et note $\varnothing$ qui ne contient aucun élément. Il est inclus dans tout ensemble.
- Si E est un ensemble, il existe un ensemble, appelé *ensemble des parties* de E et noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont tous les ensembles inclus dans E. Il vérifie donc, pour tout ensemble F :

$$F \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow F \subset E.$$

Exemple Si $E = \{a. b. c\}$ est l'ensemble dont les éléments sont a, b et c, l'ensemble de ses parties est :

$$\mathcal{P}(E) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\big\}.$$

2.2 Prédicats

Exemples

1. « x est pair » n est pas une assertion puisqu'on ne peut pas lui donner de valeur de vérité tant qu'on ne connaît pas x. C'est ce que l'on appelle un prédicat sur $\mathbb{N}$: il dépend d'une variable x, et lorsqu'on remplace x par une valeur entière, on obtient une assertion.
2. De même, « $x^2 + 1 > 0$ » est un prédicat sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$ tant que l on n'a pas défini de relation $>$ sur les complexes.
3. « $x + y^2 = 0$ » est un prédicat à deux variables réelles
4. Lorsque l'on substitue à x, dans le prédicat précédent, le réel 1, on obtient le prédicat à une variable « $1 + y^2 = 0$ »

Un *prédicat* est ainsi un énoncé $A(x, y, \ldots)$ dépendant de variables x, y,... tel que, lorsqu'on substitue à ces variables des éléments de certains ensembles, on obtienne une assertion.

2.3 Quantificateurs

À partir d'un prédicat $A(x)$ à une variable x dans un ensemble E, on peut construire trois assertions :

- $\forall x \in E\,,\ A(x)$ qui se lit « quel que soit l'élément x de E, $A(x)$ ».
  Cette assertion est vraie lorsque $A(a)$ est vraie pour tout élément a de l'ensemble E.
  Par exemple l'inclusion $E \subset F$ peut s'écrire $\forall x \in E\,,\ x \in F$.
  Le symbole $\forall$ est appelé *quantificateur universel.*
- $\exists x \in E\ :\ A(x)$ qui se lit « il existe un élément x de E tel que $A(x)$ ».
  Cette assertion est vraie lorsque $A(a)$ est vraie pour au moins un élément a de l'ensemble E.
  Le symbole $\exists$ est appelé *quantificateur existentiel.*

Attention Malgré les apparences, les assertions $\forall x \in E\,,\ A(x)$ et $\exists x \in E : A(x)$* ne sont pas des prédicats dépendant de la variable x. On dit que le x figurant dans ces assertions (et qui est quantifié) est une variable muette Le nom x peut être remplacé par n'importe quel autre nom.

Exemples

1. $\exists x \in \mathbb{R}\ :\ x^2 + 1 = 0$ est une assertion fausse.
2. $\exists x \in \mathbb{C}\ :\ x^2 + 1 = 0$ est une assertion vraie.
3. À partir du prédicat à deux variables réelles $x + y^2 = 0$, on peut former :
   - $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x + y^2 = 0$ est un prédicat $P(y)$. Ce prédicat n'est vérifié pour aucune valeur de y.
   - $\exists x \in \mathbb{R}\ :\ x + y^2 = 0$ est un prédicat $Q(y)$. Ce prédicat est vérifié pour toute valeur de y.
   - $\exists y \in \mathbb{R}\ :\ x + y^2 = 0$. C'est un prédicat $R(x)$ vérifié lorsque la variable x prend une valeur négative.

---

* Dans cet ouvrage, nous adoptons des notations différentes pour les deux quantificateurs. Le quantificateur universel est suivi d'une virgule, alors que le quantificateur existentiel utilise le deux–points qui se lit « tel que ».

4. Plus généralement, en quantifiant une variable d'un prédicat à n variables on obtient un prédicat à $n-1$ variables.
5. Si E est l'ensemble vide et P un prédicat à une variable :
   - la proposition $\forall x \in E,\ P(x)$ est vraie,
   - la proposition $\exists x \in E\ :\ P(x)$ est fausse.

2.4 Négation de quantificateurs

Les règles suivantes ne font que codifier le sens intuitif des quantificateurs :

$$\text{NON}\big(\forall x \in E,\ A(x)\big) \Longleftrightarrow \exists x \in E\ :\ \text{NON}\, A(x)$$
$$\text{NON}\big(\exists x \in E\ :\ A(x)\big) \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \text{NON}\, A(x)$$

Exemples

1. La négation de $\big(\forall x \in E,\ A(x) \Rightarrow B(x)\big)$ est :
$$\exists x \in E\ :\ \big(A(x)\ \text{ET NON}\, B(x)\big).$$
   En effet, le prédicat $\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$ est logiquement équivalent à :
$$\big(\text{NON}\, A(x)\ \text{OU}\ B(x)\big).$$
2. L'assertion $\big(\forall x \in E,\ A(x) \Leftrightarrow B(x)\big)$ est équivalente à :
$$\forall x \in E,\ \big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)\ \text{ET}\ \big(B(x) \Rightarrow A(x)\big).$$
   Sa négation est donc :
$$\exists x \in E\ :\ \big(A(x)\ \text{ET NON}\, B(x)\big)\ \text{OU}\ \big(B(x)\ \text{ET NON}\, A(x)\big)$$

Remarque Il arrive souvent que certains quantificateurs universels soient sous–entendus, lorsque la variable correspondante apparaît dans les deux membres d'une implication ou d'une équivalence. Par exemple, l assertion « la suite u est croissante à partir d'un certain rang » peut s'écrire :
$$\exists N \in \mathbb{N}\ :\ n \geqslant N \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$$
au lieu de :
$$\exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Toutefois, pour écrire sans risque d'erreur la négation, il est alors impératif de retablir les quantificateurs manquants. Dans l exemple ci–dessus, cela donne :
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ (n \geqslant N\ \text{ET}\ u_{n+1} < u_n).$$

2.5 Sous-ensembles définis par un prédicat

Si P est un prédicat à une variable et si E est un ensemble, on peut définir la partie de E constituée des éléments de E vérifiant P. On la note :

$$F = \{x \in E \mid P(x)\}^{**}.$$

Cette partie est donc caractérisée par l'équivalence suivante :

$$\forall x \in E\,,\ x \in F \Longleftrightarrow P(x).$$

Exemple L'ensemble des entiers naturels pairs peut être défini par :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}\ :\ n = 2k\}.$$

> ***Remarques***
>
> - Toute partie F de E peut ainsi être associée à un predicat : il suffit de prendre par exemple le prédicat $x \in F$.
> - Si A et B sont deux parties de E, définies respectivement par les prédicats $P(x)$ et $Q(x)$, l'inclusion $A \subset B$ est equivalente à l'assertion $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$.

2.6 Opérations sur les parties

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle :

- *intersection* de A et B, la partie de E définie par :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ET } x \in B\}.$$

- *réunion* de A et B, la partie de E definie par :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ OU } x \in B\}$$

- *difference* de A et de B la partie de E définie par :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

- *complémentaire* de A dans E, la différence :

$$\complement_E A = E \setminus A.$$

** La barre verticale se lit « tels que ».

Remarques

- Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats. On définit les ensembles :
$$A = \{x \in E \mid P(x)\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in E \mid Q(x)\}.$$
Les prédicats $\big(P(x) \text{ ET } Q(x)\big)$, $\big(P(x) \text{ OU } Q(x)\big)$ et $\big(\text{NON } P(x)\big)$ sont alors associés respectivement aux ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $\complement_E A$.
- Les propriétés élémentaires de l'intersection, de la réunion et de la différence, se déduisent donc des propriétés correspondantes des connecteurs Par exemple, les relations :
$$A \cup A = A \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
proviennent des tautologies :
$$(P \text{ OU } P) \Leftrightarrow P$$
$$(P \text{ OU } (Q \text{ OU } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ OU } Q) \text{ OU } R)$$
$$(P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ET } P)$$
$$(P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)) \Leftrightarrow \big((P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \text{ OU } R)\big).$$
On a encore :
$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$$
$$A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$$
ainsi que les resultats obtenus en echangeant, dans les assertions ci–dessus les rôles de $\cap$ et $\cup$.

2.7 Couples, produit cartésien

- À partir de deux éléments a et b, on peut construire le *couple* (a, b), avec la propriété fondamentale suivante :
$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow (a = a' \text{ ET } b = b').$$
Étant donnés deux ensembles A et B, l ensemble des couples de la forme (a, b), avec $a \in A$ et $b \in B$ est appelé *produit cartésien* de A par B et se note $A \times B$.
On a donc :
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ ET } b \in B\}$$
Lorsque $A = B$ le produit cartésien $A \times B$ se note aussi A^2

- De même, on peut définir la notion de *triplet* (a, b, c) vérifiant la propriété :
$$(a, b, c) = (a', b', c') \iff (a = a' \text{ ET } b = b' \text{ ET } c = c')$$
ainsi que le produit :
$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A \text{ ET } b \in B \text{ ET } c \in C\}$$
Le produit $A \times A \times A$ se note aussi A^3.
- Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir la notion de n*–uplet* ou de n*–liste* $(a_1, a_2, \dots a_n)$ ainsi que l'ensemble :
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$
Lorsque $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, le produit $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est noté A^n.
En particulier lorsque $n = 1$, on identifie la 1–liste (a) avec son unique élément a. On a ainsi $A^1 = A$.
Par convention, il existe une unique 0–liste, appelée liste vide. On note alors A^0 l'ensemble qui contient comme unique élément la liste vide.

3. Applications

Dans toute cette section, E et F désignent des ensembles quelconques.

3.1 Définitions

Définition 1

- On appelle *graphe* de E vers F toute partie du produit cartésien $E \times F$.
- Une *application* (ou *fonction*) est un triplet $u = (E, F, \Gamma)$ où Γ est un graphe de E vers F tel que, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$.
On dit aussi que u est une application de E dans F ou de E vers F.

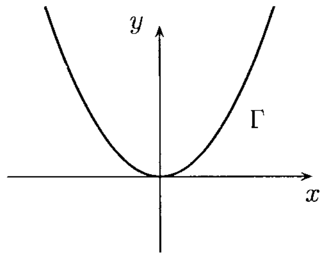
Avec les notations précédentes :

- E est appelé l'*ensemble de depart* ou *ensemble de définition* de u,
- F est l'*ensemble d'arrivée* de u,
- pour $x \in E$, l unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$ s'appelle *image* de x par u et se note $u(x)$,
- pour $y \in F$, tout $x \in E$ tel que $y = u(x)$ est appelé un *antecédent* de y
- le *graphe* Γ de u, est égal à $\{(x, u(x)) \mid x \in E\}$,

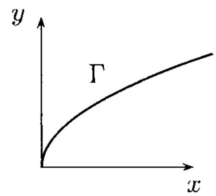
- l'ensemble :
$$\{y \in F \mid \exists x \in E \,:\, y = u(x)\} \text{ noté } \{u(x) \mid x \in E\}$$
est l'*ensemble image* de u ; c'est une partie de F,
- l'application u se note :
$$E \xrightarrow{u} F \quad \text{ou} \quad u : E \longrightarrow F \quad \text{ou} \quad u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x). \end{array}$$

Exemples

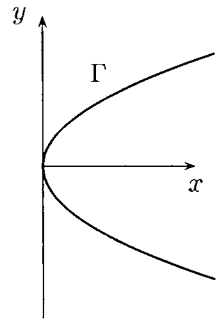
1. Si $\Gamma = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$, alors $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \Gamma)$ est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ notée $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$



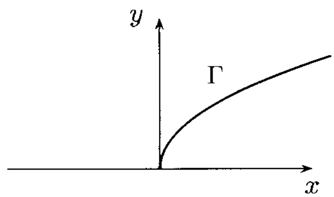
2. Si $\Gamma = \{(t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$, alors $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+, \Gamma)$ est une application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$, représentée par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+. \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$



3. Si $\Gamma = \{(t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, alors $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \Gamma)$ n'est pas une application car, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe deux éléments $y \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y) \in \Gamma$.



4. Si $\Gamma = \{(t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$, alors $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \Gamma)$ n'est pas une application car, pour un $x < 0$, il n'existe pas de y tel que $(x, y) \in \Gamma$.



5. L'application $f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est appelée identité de E et se note Id_E.
6. Une application constante est une application du type $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & a \end{array}$, où a est un élément fixé de F. Par abus, on la note souvent a.
7. Si E est vide, il existe une unique application de E dans F : celle dont le graphe est vide.
8. Si F est vide et E non vide, il n'existe pas d'application de E dans F.

Égalité de deux applications Comme conséquence de la définition, on déduit que l'égalité de deux applications u et v signifie :

(1) l'égalité des ensembles de départ,

(2) l'égalité des ensembles d'arrivée,

(3) l'égalité $u(x) = v(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble de depart commun.

Ne pas oublier de vérifier les conditions (1) et (2).

Remarque Le plus souvent en pratique, on dispose d'une expression $u(x)$ et il faut commencer par déterminer des ensembles E et F tels que la relation $y = u(x)$ définisse une application de E dans F.

Lorsque l'on connaît ces ensembles, on dit alors : « soit l'application définie de E dans F par $x \mapsto u(x)$ ». On la note encore $(x \in E) \mapsto \big(u(x) \in F\big)$.

Exemples

1. La relation $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ définit une application de
$$]-\infty, -1\,[\; \cup \;]-1, 1\,[\; \cup \;]\,1, +\infty\,[$$
dans $\mathbb{R}$.
2. La relation $y = \sin x$ définit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais elle peut aussi définir une application de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$. Ces deux applications ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble d arrivée.

Notation L'ensemble des applications (ou fonctions) d un ensemble E dans un ensemble F se note $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E.

Définition 2

Soit u une application de E vers F.

- Si A est une partie de E, la *restriction* de u à A, notée $u_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :
$$\forall x \in A\,,\ u_{|A}(x) = u(x).$$
- On appelle *prolongement* de u toute application v définie sur un ensemble A contenant E et vérifiant :
$$\forall x \in E\,,\ v(x) = u(x).$$

Remarques

- En fait $u_{|A}$ est le triplet (A, F, Γ_1) avec $\Gamma_1 = \left\{ \Big(x, u(x)\Big) \mid x \in A \right\}$.
- u est une restriction de v si, et seulement si, v est un prolongement de u.
- Dans le cas $E = F$, lorsque A est stable par u, c'est-à-dire lorsque l'on a $\forall x \in A,\ u(x) \in A$, l'application $(x \in A) \mapsto (u(x) \in A)$ est appelée application induite sur A par u. On la note parfois abusivement $u_{|A}$, alors que la restriction de u à A est en réalité une application de A dans E.

3.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 3

On dit qu'une application u de E dans F est une *injection* ou est *injective* si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

(i) Tout élément de F a au plus un antécédent par u.

(ii) Pour tout $y \in F$ l'équation $u(x) = y$ possède au plus une solution

(iii) $\forall (x_1, x_2) \in E^2\,,\ u(x_1) = u(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

Définition 4

On dit qu'une application u de E dans F est une *surjection* ou est *surjective* si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

(i) Tout élément de F a au moins un antécédent par u.

(ii) Pour tout $y \in F$, l'équation $u(x) = y$ possède au moins une solution

(iii) $\forall y \in F\,,\ \exists x \in E\ :\ y = u(x)$.

Définition 5

On dit qu'une application u de E dans F est une *bijection* ou est *bijective* si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

(i) tout élément de F a un et un seul antécédent par u,

(ii) pour tout $y \in F$, l équation $u(x) = y$ possède une unique solution.

Définition 6

Une application bijective de E sur E est encore appelée *permutation* de E.

L'ensemble des permutations de E est habituellement noté $\mathcal{S}(E)$.

Exemples

1. L'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$:
   - est surjective car tout élément de $\mathbb{R}_+$ possède au moins un antécédent,
   - n'est pas injective car -1 et 1 ont même image.
2. L'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est bijective car tout élément de $\mathbb{R}_+$ possède un unique antécédent qui est sa racine carrée.
3. L'identité de E est une permutation de E.

3.3 Composition d'applications

Soient E, F, G et H quatre ensembles.

Définition 7

Si $u \in \mathcal{F}(E,F)$ et $v \in \mathcal{F}(F,G)$, l'application $x \mapsto v\big(u(x)\big)$ définie sur E et à valeurs dans G est appelée *composée* des applications v et u ; on la note $v \circ u$.

Remarque En fait $v \circ u$ est le triplet (E, G, Γ) avec $\Gamma = \Big\{\Big(x, v\big(u(x)\big)\Big) \;\Big|\; x \in E\Big\}$.

Proposition 1

Étant données trois applications $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \xrightarrow{w} H$, on a :

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u.$$

ns ati Les applications $w\circ(v\circ u)$ et $(w\circ v)\circ u$ ont évidemment même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée H, et pour tout $x\in E$, on a :

$$\big(w\circ(v\circ u)\big)(x)=w\big((v\circ u)(x)\big)=w\Big(v\big(u(x)\big)\Big)$$

et :

$$\big((w\circ v)\circ u\big)(x)=(w\circ v)\big(u(x)\big)=w\Big(v\big(u(x)\big)\Big)$$

ce qui prouve le résultat. □

Proposition 2

Soient $u\in\mathcal{F}(E,F)$ et $v\in\mathcal{F}(F,G)$.

1. Si u et v sont injectives, alors $v\circ u$ est injective.
2. Si u et v sont surjectives, alors $v\circ u$ est surjective.
3. Si u et v sont bijectives, alors $v\circ u$ est bijective.

emonst ati n

1. Supposons u et v injectives.
   Soient x et x' deux éléments de E tels que $v\big(u(x)\big)=v\big(u(x')\big)$
   Grâce à l'injectivité de v on a $u(x)=u(x')$; l'injectivité de u donne alors $x=x'$
   L'application $v\circ u$ est donc injective.
2. Supposons u et v surjectives.
   Soit z un élément de G.
   Grâce à la surjectivité de v on peut trouver $y\in F$ tel que $z=v(y)$.
   Comme u est surjective, on peut trouver $x\in E$ tel que $y=u(x)$, et on a alors :
   $$z=v\big(u(x)\big)=(v\circ u)(x).$$
   L'application $v\circ u$ est donc surjective.
3. Conséquence immédiate des précédents □

3.4 Application réciproque

Définition 8

Si u est une application bijective de E dans F, alors l application de F dans E qui associe à tout élément de F son unique antécédent dans E s'appelle *application reciproque* de u et se note u^{-1}.

On a donc :

$$\forall(x,y)\in E\times F\,,\ y=u(x)\iff x=u^{-1}(y).$$

Exemples

1. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$ est bijective et sa réciproque est notée $\sqrt{\ }$.
2. L'application $\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est bijective. Sa réciproque est notée arcsin.

Proposition 3

Si u est une application bijective de E dans F, on a :

$$u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_F .$$

émonstration

- $u^{-1} \circ u$ et Id_E sont deux applications de E dans E, et pour tout $x \in E$, on a $u^{-1}\big(u(x)\big) = x$ puisque $u(x)$ possède, par u, un unique antécédent qui est évidemment x.
  Donc $u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E$.
- $u \circ u^{-1}$ et Id_F sont deux applications de F dans F, et pour tout $y \in F$, on a :
  $$u\big(u^{-1}(y)\big) = y$$
  car $u^{-1}(y)$ est par définition l'antécédent de y par u.
  Donc $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_F$. □

Attention Si u est une application bijective de E dans F, l'égalité :

$$u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u$$

n'a de sens que si les ensembles E et F sont égaux.

Proposition 4

Si $u \in \mathcal{F}(E, F)$ et $v \in \mathcal{F}(F, E)$ sont deux applications vérifiant $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors elles sont toutes deux bijectives et réciproques l'une de l'autre.

émonstration

- L'existence d'une application $v \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ entraîne que u est injective. En effet, si x et x' sont deux éléments de E tels que $u(x) = u(x')$, alors $v\big(u(x)\big) = v\big(u(x')\big)$ et donc $x = x'$ puisque $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
- L'existence d'une application $v \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ entraîne la surjectivité de u. En effet, si y est un élément de F et que l'on pose $x = v(y)$ on a $u(x) = y$ puisque $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.
  L'application u est donc bijective et on peut écrire :
  $$v = \mathrm{Id}_E \circ v = u^{-1} \circ u \circ v = u^{-1} \circ \mathrm{Id}_F = u^{-1}.$$
  Par symétrie, v est bijective et $v^{-1} = u$ □

Remarque On notera qu'en adaptant légèrement cette demonstration on peut prouver que :

- si $v \circ u$ est injective, alors u est injective
- si $v \circ u$ est surjective, alors v est surjective

Corollaire 5

> Si u est une bijection de E dans F, alors u^{-1} est une bijection de F dans E et $\left(u^{-1}\right)^{-1} = u$.

Méthode Pour démontrer qu'une application $u \in \mathcal{F}(E, F)$ est bijective et trouver sa réciproque, on peut :

- soit exhiber une application $v \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$,
- soit résoudre l'équation $y = u(x)$ pour montrer qu'elle admet, quel que soit $y \in F$, une unique solution $x = v(y)$.

Exemple La relation $y = x + \sqrt{x^2+1}$ définit une application u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ puisque pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \geqslant |x|$ et évidemment $x + |x| \geqslant 0$. Montrons qu'elle est bijective et trouvons sa réciproque. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}
x + \sqrt{x^2+1} = y &\iff \sqrt{x^2+1} = y - x \\
&\iff x^2 + 1 = (y-x)^2 \quad \text{et} \quad x \leqslant y \\
&\iff 2x\,y = y^2 - 1 \quad \text{et} \quad x \leqslant y \\
&\iff x = \frac{y^2-1}{2y} \quad \text{et} \quad x \leqslant y \\
&\iff x = \frac{y^2-1}{2y}
\end{aligned}$$

la dernière équivalence venant du fait que si $y > 0$, on a :

$$\frac{y^2-1}{2y} = y - \frac{y^2+1}{2y} \leqslant y.$$

Donc f est bijective et sa réciproque est :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
y & \longmapsto & \dfrac{y^2-1}{2y}.
\end{array}$$

Définition 9

Une *involution* de E, ou *application involutive* de E, est une application u de E dans lui même vérifiant $u \circ u = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 6

Une application involutive de E est bijective, et elle est sa propre réciproque ; c'est donc une permutation de E.

Exemple L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \complement_E A \end{array}$ est une permutation de $\mathcal{P}(E)$ puisqu'elle est involutive.

Proposition 7

Soient E, F et G trois ensembles. Si $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ sont deux applications bijectives alors $v \circ u$ est bijective et :

$$(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}.$$

Démonstratio Il suffit d'utiliser la proposition 4 de la page 1034 en vérifiant :

$$\left(u^{-1} \circ v^{-1}\right) \circ (v \circ u) = u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u = u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_I$$

$$(v \circ u) \circ \left(u^{-1} \circ v^{-1}\right) = v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} = v \circ v^{-1} = \mathrm{Id}_G$$

□

3.5 Images directes, images réciproques

Définition 10

Soient u une application de E dans F ainsi que A une partie de E et B une partie de F. On appelle :

- *image (directe)* de A par u, l'ensemble :

$$u(A) = \left\{y \mid \exists x \in A \ : \ y = u(x)\right\} = \left\{u(x) \mid x \in A\right\},$$

- *image reciproque* de B par u l'ensemble :

$$u^{-1}(B) = \left\{x \in E \mid u(x) \in B\right\}.$$

Remarques

1. L utilisation de la notation $u^{-1}(B)$ ne suppose pas que u est bijective.
2. Lorsque u est bijective, $u^{-1}(B)$ représente aussi bien l image directe de B par l'application u^{-1} que l'image réciproque de B par u car on a alors :
$$\{x \in E \mid u(x) \in B\} = \{u^{-1}(y) \mid y \in B\}$$
comme on peut le vérifier par double inclusion.

Exemples

1. Si f est l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$, on a :
   - $f([-2,2]) = [0,4]$;
   - $f([-1,2]) = [0,4]$;
   - $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$;
   - $f^{-1}([-2,4]) = [-2,2]$;
   - $f^{-1}([-2,-1]) = \varnothing$.
2. Si $u \in \mathcal{F}(E,F)$, alors on a :
   - $u^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $u(\varnothing) = \varnothing$,
   - $u^{-1}(F) = E$ mais l'inclusion $u(E) \subset F$ n'est une égalité que si u est surjective.
3. Une application u de E dans F est :
   - injective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $u^{-1}(\{y\})$ a au plus un élément,
   - surjective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $u^{-1}(\{y\})$ a au moins un élément,
   - bijective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $u^{-1}(\{y\})$ a exactement un élément.

Méthode Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$.

- Pour trouver l'image réciproque d'une partie B de F par u, il suffit de résoudre $u(x) \in B$.
- Pour trouver l'image directe d'une partie A de E par u, il suffit de trouver les éléments $y \in F$ pour lesquels l équation $\big(y = u(x)$ et $x \in A\big)$ a au moins une solution.

Exemple Soit f : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy). \end{array}$

- Soit $(s,p) \in \mathbb{R}^2$. Pour que (s,p) appartienne à l image de f, il faut et il suffit que le système :
$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$$
admette des solutions dans $\mathbb{R}^2$, c'est–à–dire que l'équation du second degré $X^2 - sX + p = 0$ admette des solutions réelles
L'image de f est donc :
$$\left\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p \geqslant 0\right\}.$$
- L'image réciproque par f de l'ensemble $\left\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p = 1\right\}$ est l'ensemble des couples (x,y) tels que $(x+y)^2 - 4xy = 1$.
Cette équation est équivalente à $(y-x)^2 = 1$, ce qui prouve que l'ensemble cherché est la réunion des deux droites d'équations $y = x+1$ et $y = x-1$.

Exemples

1. Étant donnés $u \in \mathcal{F}(E,F)$ ainsi que B et B' deux parties de F on a les relations suivantes :
   (a) $B \subset B' \Longrightarrow u^{-1}(B) \subset u^{-1}(B')$,
   (b) $u^{-1}(B \cup B') = u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B')$,
   (c) $u^{-1}(B \cap B') = u^{-1}(B) \cap u^{-1}(B')$,
   (d) $u^{-1}(\complement_F B) = \complement_E u^{-1}(B)$.

   émonstration

   (a) Si $B \subset B'$, on a :
   $$x \in u^{-1}(B) \Longrightarrow u(x) \in B \Longrightarrow u(x) \in B' \Longrightarrow x \in u^{-1}(B')$$
   (b) On a .
   $$\begin{aligned} x \in u^{-1}(B \cup B') &\Longleftrightarrow u(x) \in B \cup B' \\ &\Longleftrightarrow u(x) \in B \quad \text{ou} \quad u(x) \in B' \\ &\Longleftrightarrow x \in u^{-1}(B) \quad \text{ou} \quad x \in u^{-1}(B') \\ &\Longleftrightarrow x \in u^{-1}(B) \cup u^{-1}(B'). \end{aligned}$$
   (c) Même démonstration en remplaçant $\cup$ par $\cap$ et « ou » par « et »

(d) L'équivalence :

$$x \in u^{-1}(B) \iff u(x) \in B$$

peut s'écrire

$$x \notin u^{-1}(B) \iff u(x) \notin B$$

ce qui donne :

$$x \in \complement_E\big(u^{-1}(B)\big) \iff u(x) \in \complement_F B \iff x \in u^{-1}\left(\complement_F B\right)$$ □

2. Les résultats correspondants pour l'image directe ne sont pas toujours vérifiés. Soient $u \in \mathcal{F}(E,F)$ ainsi que $A \subset E$ et $A' \subset E$.
   - On a évidemment $A \subset A' \Longrightarrow u(A) \subset u(A')$.
   - On a bien $u(A \cup A') = u(A) \cup u(A')$:
     - comme $A \subset A \cup A'$, on a $u(A) \subset u(A \cup A')$. Par symétrie on a donc aussi $u(A') \subset u(A \cup A')$, ce qui donne $u(A) \cup u(A') \subset u(A \cup A')$.
     - si $y \in u(A \cup A')$, on peut trouver $x \in A \cup A'$ tel que $y = u(x)$. Comme x appartient à A ou à A', l'élément y appartient à $u(A)$ ou à $u(A')$ et donc à leur réunion.
   - De même que ci–dessus, les inclusions $A \cap A' \subset A$ et $A \cap A' \subset A'$ entraînent $u(A \cap A') \subset u(A) \cap u(A')$, mais l'inclusion inverse est fausse en général comme le prouvent par exemple les égalités suivantes :

$$\sin\big([0,2\pi]\big) \cap \sin\big([-\pi,\pi]\big) = [-1,1]$$
$$\sin\big([0,2\pi] \cap [-\pi,\pi]\big) = [0,1].$$

3.6 Familles

Définition 11

Étant donnés deux ensembles I et E, on appelle *famille* d'éléments de E *indexée* par I toute application de I dans E.

Remarques

- L utilisation du terme famille sous-entend que l'on utilise une notation indicée $(x_i)_{i \in I}$ à la place d'une notation fonctionnelle $i \mapsto x(i)$.
  On peut d'ailleurs aussi écrire $(x(i))_{i \in I}$.
- Suivant que l'on utilise l'écriture indicée ou l écriture fonctionnelle, une application I dans E est plutôt considérée comme :
  – une collection d'objets étiquetés par les éléments de I,
  – un processus permettant de calculer les images des éléments de I

Exemples

1. Si p est un entier naturel non nul et $I = [\![1, p]\!]$, une famille $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est identifiée avec la p–liste $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.
2. Si $I = \mathbb{N}$, une famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de E est appelée suite d'éléments de E.
3. Par extension, on appelle suite d'éléments de E une famille indexée par une partie de $\mathbb{N}$ du type $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0\}$; on la note aussi $(x_n)_{n\geqslant n_0}$.
4. Étant donnés deux ensembles I et E, une famille de parties de E indexée par I est une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.
   On peut généraliser à la famille $(A_i)_{i\in I}$ les notions d'intersection et de réunion par :
   $$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$
   $$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I\ :\ x \in A_i\}$$
   Avec ces définitions, on a les propriétés suivantes :
   $$\bigcap_{i\in I\cup J} A_i = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in J} A_i\right)$$
   $$\bigcup_{i\in I\cup J} A_i = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in J} A_i\right)$$
   $$\complement_E \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement_E A_i$$
   $$\complement_E \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement_E A_i$$

4. Relations d'ordre

4.1 Relations binaires

Soit E un ensemble quelconque.

Définition 12

Si G est un graphe de E le prédicat $\mathcal{R}$ défini par :

$$\mathcal{R}\ (x, y) \iff (x, y) \in G$$

est appelé *relation binaire* sur E.

La plupart du temps on donne une relation binaire par le prédicat $\mathcal{R}$ sans parler de G et on écrit $x\ \mathcal{R}\ y$ au lieu de $\mathcal{R}\ (x, y)$.

Exemples

1. La relation définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x \leqslant y$ a pour graphe le demi-plan situé au dessus de la première bissectrice.
2. La relation définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x^2 = y^2$ a pour graphe la réunion des droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.

4.2 Ensembles ordonnés

Définition 13

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'ordre sur E si elle est :

réflexive : $\forall x \in E\,,\ x \mathcal{R} x$

antisymétrique : $\forall (x,y) \in E^2\,,\ (x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} x) \Longrightarrow x = y$

transitive : $\forall (x.y,z) \in E^3\,.\ (x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} z) \Longrightarrow x \mathcal{R} z$

On appelle *ensemble ordonné* un couple $(E, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.

Exemples

1. Les relations d'ordre usuelles sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ notées $\leqslant$ ou $\geqslant$.
2. La relation d'ordre strict $<$ utilisée habituellement sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'ordre : elle est antisymétrique et transitive, mais elle n est pas réflexive.
3. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.
4. La relation de divisibilité définie dans $\mathbb{N}$ par :
$$x \mid y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ :\ y = k\,x.$$
5. La relation de divisibilité définie dans $\mathbb{Z}$ par :
$$x \mid y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ :\ y = k\,x$$
n'est pas une relation d'ordre car elle n est pas antisymétrique.
6. L'*ordre lexicographique* défini sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$(a,c) \leqslant (b,d) \Longleftrightarrow \big(a < b \quad \text{ou} \quad (a = b \quad \text{et} \quad c \leqslant d)\big).$$
7. Sur $\mathbb{C}$, on peut définir des relations d'ordre (ordre lexicographique par exemple) mais, en général, on ne les utilise pas car elles ne sont pas compatibles avec la structure de corps de $\mathbb{C}$, c'est–à–dire qu'aucune ne vérifie, pour tous z_1, z_2, z les deux propriétés suivantes :
$$z_1 \leqslant z_2 \Longrightarrow z_1 + z \leqslant z_2 + z \qquad \text{et} \qquad (z_1 \leqslant z_2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant z) \Longrightarrow z_1\,z \leqslant z_2\,z.$$
8. L'ordre alphabétique sur l'ensemble des mots de la langue française ; c'est en fait une généralisation de l'ordre lexicographique défini ci-dessus sur $\mathbb{R}^2$.

Remarques

- On note souvent une relation d'ordre par le symbole $\leqslant$, qui se lit « inférieur ou égal », ce qui ne signifie pas forcément que l'on travaille sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ munis de leur relation d'ordre usuelle. Si $x \leqslant y$ est vérifié, on dit aussi que « x est plus petit que y » ou que « y est plus grand que x ».
- Lorsque la relation d'ordre est notée $\leqslant$, on écrit $x < y$ pour signifier $x \leqslant y$ et $x \neq y$, et on dit que « x est strictement plus petit que y » ou que « y est strictement plus grand que x ».
- On pourra écrire $a \leqslant b \leqslant c$ à la place de $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Par transitivité, cela implique évidemment aussi : $a \leqslant c$.

4.3 Propriétés

Définition 14

On dit que la relation d'ordre $\leqslant$ définit un *ordre total* sur E si :

$$\forall (x, y) \in E^2\,,\ (x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x).$$

Dans le cas contraire on dit que c'est un *ordre partiel*.

Exemples d'ordre total

1. Les relations d'ordre usuelles sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.
2. L'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$
3. L'ordre alphabétique dans un dictionnaire.

Exemples d'ordre partiel

1. La relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$.
2. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ lorsque E contient au moins deux éléments
3. Sur $\mathbb{R}^2$ la relation définie par $(a, c) \leqslant (b, d) \iff (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d)$.

Attention Bien prendre garde que certaines réactions que l'on peut avoir ne s'appliquent qu'à un ordre total. Par exemple, une réflexion trop hâtive peut laisser croire que la négation de $x \leqslant y$ est $y < x$, c'est–à–dire $y \leqslant x$ et $x \neq y$. Il n'en est rien comme le prouve $X \subset Y$ dont la négation n'est pas $Y \subsetneq X$.

Définition 15

Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, A une partie de E et a un élément de A.

- On dit que a est le *plus grand élément* de A si $\forall x \in A\,,\ x \leqslant a$.

  Quand il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$ ou $\max A$.
- On dit que a est le *plus petit élément* de A si $\forall x \in A\,,\ a \leqslant x$.

  Quand il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$ ou $\min A$

em nstrati n L'utilisation de l'article défini « le » dans la définition précédente exige une démonstration d'unicité.
Supposons que a et b soient deux plus grands éléments de A ; on a :

- $a \leqslant b$ car b est plus grand élément,
- $b \leqslant a$ car a est plus grand élément,

et donc, par antisymétrie, $a = b$.
Il en est de même pour le plus petit élément □

Exemples

1. Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ munis de leur ordre usuel il n'y a pas de plus grand élément.
2. L'intervalle $[0,1]$ muni de l'ordre usuel possède :
   - un plus grand élément 1,
   - un plus petit élément 0.
3. L'intervalle $]0,1]$ muni de l ordre usuel :
   - possède un plus grand élément 1,
   - ne possède pas de plus petit élément.
4. $\mathcal{P}(E)$ possède, pour l inclusion, un plus grand élément E et un plus petit élément $\varnothing$.
5. Si E possède au moins deux éléments, l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$ ne possède pas de plus grand élément pour l'inclusion.
6. Dans $\mathbb{N}$ muni de la divisibilité, le plus petit élément est 1, et le plus grand élément est 0.
7. Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble ordonné E. Si $\{f(x) \mid x \in X\}$ admet un plus grand élément, ce dernier est appelé *maximum* de f sur X et se note $\max\limits_X f$.

   Cet exemple permet d'expliquer la notation max pour désigner le plus grand élément.
   De même, on note $\min\limits_X f$ le *minimum* de f sur X, c'est-à-dire le plus petit élément de $\{f(x) \mid x \in X\}$, lorsqu'il existe.

Définition 16

Si A est une partie d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$, un élément $a \in E$ est :

- un *majorant* de A si $\forall x \in A\,,\ x \leqslant a$,
- un *minorant* de A si $\forall x \in A\,,\ a \leqslant x$.

Exemples

1. Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, l'intervalle $[0,1]$ a pour majorant tout élément de $[1,+\infty[$
2. Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, l'intervalle $[0,1[$ a pour majorant tout élément de $[1.+\infty[$
3. Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, la partie $\{X, Y\}$ est majorée par tout ensemble contenant $X \cup Y$
4. Dans $(\mathbb{N}, |)$, les majorants de $\{8.18.12\}$ sont les multiples de 72.

Définition 17

Soient E et F deux ensembles ordonnés. Une application f de E dans F est :

- *croissante* si $\forall (x,y) \in E^2$, $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$,
- *décroissante* si $\forall (x,y) \in E^2$, $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$,
- *strictement croissante* si $\forall (x,y) \in E^2$, $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$,
- *strictement décroissante* si $\forall (x,y) \in E^2$, $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$
- *(strictement) monotone* si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Remarque Une application monotone est strictement monotone si, et seulement si, elle est injective.

Chapitre 36

Entiers naturels, ensembles finis, dénombrement

1. Principe de récurrence

1.1 L'ensemble $\mathbb{N}$

L'ensemble $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* est un ensemble non vide totalement ordonné qui possède les propriétés fondamentales suivantes :

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Remarques

- Si n est un entier naturel, l'ensemble des entiers strictement plus grands que n est un ensemble non vide · son plus petit élément, appelé *successeur* de n, est $n+1$. Si x est un entier naturel, on a donc l'équivalence :

$$x > n \Longleftrightarrow x \geqslant n+1.$$

- Si n est un entier naturel non nul, l'ensemble des entiers strictement plus petits que n est non vide (il contient 0) et majoré par n ; son plus grand élément, appelé *prédécesseur* de n, est $n-1$. Si x est un entier naturel, on a donc l'équivalence :

$$x < n \Longleftrightarrow x \leqslant n-1.$$

- Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$ majorée par $M \in \mathbb{Z}$. En prenant $n_0 \in A$ l'ensemble $A' = \mathbb{N} \cap \{n - n_0 \mid n \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée par $M - n_0 \in \mathbb{N}$. Elle possède donc un plus grand élément a', et il est clair que $a' + n_0$ est alors le plus grand élément de A

  Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède donc un plus grand élément.
- De même, si A est une partie non vide de $\mathbb{Z}$ minorée par $m \in \mathbb{Z}$, on demontre que A possède un plus petit élément en considérant $\{n - m \mid n \in A\}$

1.2 Raisonnement par récurrence

Théorème 1

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si :

(1) $P(0)$ est vraie,

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\big(P(n) \Longrightarrow P(n+1)\big)$.

Alors, pour tout entier naturel n $P(n)$ est vraie.

émons rati Raisonnons par l'absurde en supposant que la propriété P n'est pas vérifiée sur $\mathbb{N}$.

L'ensemble A des entiers n pour lesquels $P(n)$ est faux est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$ qui admet donc un plus petit élément α. D'après (1), l'entier 0 n'appartient pas à A Par suite, α est non nul et, comme c'est le plus petit élément de A, l'entier $\alpha - 1$ n'appartient pas à A

On en déduit que $P(\alpha - 1)$ est vraie, ce qui implique, d'après la propriete (2), que $P(\alpha)$ est vraie, et contredit l'appartenance de α à A.

La propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n. □

Exemple On démontre par récurrence les identités classiques :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

En appliquant le théorème 1 à la propriété $P(n_0 + n)$, on deduit :

Corollaire 2 (Récurrence à partir d'un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$)

Soit P une propriéte définie sur $[\![n_0, +\infty[\![$. On suppose que :

(1) $P(n_0)$ est vraie,

(2) $\forall n \geqslant n_0\,.\ \big(P(n) \Longrightarrow P(n+1)\big)$.

Alors, pour tout entier $n \geqslant n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie

Corollaire 3

Soit P une propriété définie sur $[\![n_0, +\infty[\![$. On suppose que :

(1) $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies,

(2) $\forall n \geqslant n_0\,,\ \Big(\big(P(n) \quad \text{et} \quad P(n+1)\big) \Longrightarrow P(n+2)\Big)$.

Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

emonstratio Il suffit d'appliquer le corollaire 2 à la propriété $\big(P(n)$ et $P(n+1)\big)$. □

Attention Dans le cas d'utilisation de cette forme de récurrence, il ne faut surtout pas oublier de vérifier la double initialisation $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

On peut déterminer les premières valeurs prises par la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	3	5	9	17	33	65

Ce tableau nous suggère $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = 2^n + 1$. Démontrons donc par récurrence la propriété $P(n)\ :\ u_n = 2^n + 1$.

- $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies d'après les deux premières colonnes du tableau ci-dessus.
- Soit n un entier ; supposons $P(n)$ et $P(n+1)$. Alors d après la définition de la suite :
$$u_{n+2} = 3 \times (2^{n+1} + 1) - 2 \times (2^n + 1) = 2^{n+2} + 1$$
ce qui montre $P(n+2)$.

Corollaire 4

Soit P une propriété définie sur $[\![n_0, +\infty[\![$. On suppose que :

(1) $P(n_0)$ est vraie,

(2) $\forall n \geqslant n_0\,,\ \Big(\big(P(n_0)\quad \text{et} \quad P(n_0+1)\ \dots \quad \text{et} \quad P(n)\big) \Longrightarrow P(n+1)\Big)$

Alors, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

émonstration Appliquons le corollaire 2 de la page précédente à la propriété Q définie sur $[\![n_0, +\infty[\![$ par :

$$Q(n)\ :\ \forall k \in [\![n_0, n]\!]\,,\ P(k).$$

- $Q(n_0)$ est vraie d'après (1)
- Soit n un entier supérieur ou égal à n_0 ; supposons $Q(n)$ De la propriété (2), on déduit que $P(n+1)$ est vraie, ce qui montre que la propriété $\big(Q(n)$ et $P(n+1)\big)$ c'est-à-dire $Q(n+1)$, est vraie.

D'après le corollaire 2 de la page précédente, on en déduit que $Q(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, d'où en particulier :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ P(n).$$

□

Exemple Demontrons par récurrence que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.

Soit $P(n)$: « L'entier n admet un diviseur premier ».

- $P(2)$ est vraie, puisque 2 est un diviseur premier de lui-même.
- Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; supposons la propriété vraie jusqu'au rang n, c'est-à-dire supposons $P(2)$, $P(3)$,..., $P(n)$. Il y a deux cas possibles pour l'entier $n+1$:

  soit $n+1$ est premier et alors l'entier $n+1$ est lui-même un diviseur premier de $n+1$.

  soit $n+1$ n'est pas premier et alors $n+1$ admet un diviseur k strictement compris entre 1 et $n+1$; comme $2 \leqslant k \leqslant n$, on sait que $P(k)$ est vraie et donc que l'entier k a un diviseur premier d ; par transitivité, l'entier $n+1$ admet d comme diviseur premier.

  Dans chacun des cas, l entier $n+1$ a un diviseur premier, ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie.

1.3 Suites définies par récurrence

Si E est un ensemble, une suite d'éléments de E est une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$, et plus généralement par une partie de $\mathbb{N}$.

Étant donnés une application f de E dans lui–même, ainsi qu'un élément a de E, le principe de récurrence entraîne qu il existe une unique suite u, définie sur $\mathbb{N}$, telle que :

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Plus généralement, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement définie par :

- la donnée de u_0 et d'une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(n, u_n)$, où f est une application de $\mathbb{N} \times E$ dans E.
- la donnée de u_0 et u_1 ainsi que d'une relation du type $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$, où f est une application de $E \times E$ dans E.
- la donnée de u_0 et u_1 ainsi que d'une relation du type $u_{n+2} = f(n. u_n, u_{n+1})$, où f est une application de $\mathbb{N} \times E \times E$ dans E.
- la donnée de u_0, u_1,..., et u_p ainsi que d'une relation du type $u_{n+p} = f(n, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1})$, où p est un entier naturel et f est une application de $\mathbb{N} \times E^p$ dans E.
- la donnée de u_0 ainsi que d'une relation du type $u_{n+1} = f_n(n, u_0, u_1, \ldots, u_n)$, où pour tout entier naturel n, f_n est une application de $\mathbb{N} \times E^{n+1}$ dans E

2. Ensembles finis

2.1 Définitions

Lemme

Si n et m sont deux entiers naturels tels que $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, m]\!]$ soient en bijection, alors $n = m$.

émonstration Montrons par recurrence la propriété H_n : « Pour tout entier naturel m, si $[\![1. n]\!]$ et $[\![1. m]\!]$ sont en bijection, alors $n = m$. »

- H_0 est vraie, car l'ensemble vide n'est en bijection qu'avec lui–même.
- Supposons H_n pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $h : [\![1, n+1]\!] \to [\![1, m]\!]$ une bijection.
  Premier cas : si $h(n+1) \neq m$. Posons $a = h(n+1)$ et considérons $\tilde{h} = \varphi \circ h$ où φ est l'application de $[\![1. m]\!]$ dans lui–même échangeant a et m et laissant fixes les autres éléments. L'application $\tilde{h}$ est une bijection de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$, puisque φ est involutive et h bijective. De plus, elle vérifie $\tilde{h}(n+1) = m$. Quitte à remplacer h par $\tilde{h}$, on peut donc supposer être dans le cas suivant

Deuxième cas : si $h(n+1) = m$. Alors h induit une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, m-1]\!]$ et donc, d'après H_n, on a $n = m - 1$, c'est-à-dire $n + 1 = m$
D'où H_{n+1}. □

Définition 1

Un ensemble E est un *ensemble fini* s'il existe un entier naturel n tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$. Il y a alors unicité d'un tel entier n que l'on appelle cardinal de E et que l'on note $\operatorname{card}(E)$ ou $\operatorname{card} E$.

Un ensemble qui n'est pas fini est appelé *ensemble infini*.

emonstratio Soit φ une bijection de E sur $[\![1, n]\!]$ et ψ une bijection de E sur $[\![1, m]\!]$ Alors l'application $\psi \circ \varphi^{-1}$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$, ce qui prouve $n = m$ d'après le lemme précédent. □

Exemples

1. L'ensemble vide est un ensemble fini de cardinal 0.
2. Si n est un entier naturel, l'intervalle $[\![1, n]\!]$ est fini et a pour cardinal n.
3. Si n et p sont deux entiers naturels l'application $k \mapsto k + p$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![p+1, p+n]\!]$. L'intervalle $[\![p+1, p+n]\!]$ est donc un ensemble fini à n éléments.
4. Si p et q sont deux entiers relatifs tels que $p \leqslant q$, l'ensemble $[\![p, q]\!]$ est fini de cardinal $q - p + 1$.
   En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $[\![0, n]\!]$ est fini de cardinal $n + 1$.
5. La composée de deux bijections étant une bijection, tout ensemble en bijection avec un ensemble fini de cardinal n est lui-même fini et de cardinal n.
6. Un ensemble en bijection avec un ensemble infini est lui-même infini.

Remarques Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Une bijection de $[\![1. n]\!]$ dans E permet de numéroter les éléments de E et d'écrire l'ensemble en extension :
$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$
- Mais l'écriture $E = \{x_1. x_2, \ldots. x_n\}$ n'implique pas $\operatorname{card} E = n$. Il faut en plus que les x_k soient distincts deux à deux pour que l'application $i \mapsto x_i$ soit une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans E.

2.2 Propriétés des cardinaux

Sous–ensemble d'un ensemble fini

Lemme

Étant donnés un ensemble fini E de cardinal $n \neq 0$ et un élément a de E, l'ensemble $E' = E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal $n-1$.

ons t'o Soit h une bijection de E sur $[\![1, n]\!]$.

- Si $h(a) = n$, l'application h induit une bijection de E' sur $[\![1, n-1]\!]$, ce qui prouve que E est fini de cardinal $n-1$.
- Si $h(a) = p < n$ on se ramène au cas précédent en posant $\tilde{h} = \varphi \circ h$ où φ est l'involution de $[\![1, n]\!]$ échangeant p et n et laissant les autres fixes □

Théorème 5

Si E est un ensemble fini et F une partie de E alors :

- F est un ensemble fini et $\operatorname{card} F \leqslant \operatorname{card} E$,
- $\operatorname{card} F = \operatorname{card} E \iff F = E$.

nstratio Démontrons ce résultat par récurrence sur le cardinal de E

- Si $\operatorname{card} E = 0$, alors E est vide et les résultats sont évidents.
- Supposons le résultat pour tout ensemble fini de cardinal n. Soit E de cardinal $n+1$ et F une partie de E
  - Si $F = E$, alors F est fini et $\operatorname{card} F = \operatorname{card} E$.
  - Sinon, il existe un élément e de E qui n'est pas dans F On a alors $F \subset E' = E \setminus \{e\}$ avec $\operatorname{card} E' = n$ d'après le lemme précédent. L'hypothèse de récurrence nous dit donc que F est fini et que :

$$\operatorname{card} F \leqslant \operatorname{card} E' = n < n+1 = \operatorname{card} E.$$

On a donc demontré :

$$\operatorname{card} F \leqslant \operatorname{card} E \qquad \text{et} \qquad \operatorname{card} F = \operatorname{card} E \iff F = E.$$ □

Remarques

1. Le résultat précédent prouve qu'il est impossible qu'un ensemble fini E soit en bijection avec l'une de ses parties strictes.
2. L'exemple de la bijection $n \mapsto 2n$ de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des pairs montre que :
   - $\mathbb{N}$ est infini
   - il se peut qu'un ensemble (infini) soit en bijection avec une de ses parties strictes.

Parties de $\mathbb{N}$

Proposition 6

Soit E un ensemble. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) E est infini,

(ii) il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E c'est–à–dire une suite d'éléments de E distincts deux à deux,

(iii) il existe une partie de E en bijection avec $\mathbb{N}$.

émonstration

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Construisons une suite d'éléments de E distincts deux à deux.

Puisque E n'est pas fini, il est non vide. On peut donc trouver un élément $x_0 \in E$.

- Supposons construits x_0, x_1,...et x_{n-1} des éléments de E distincts deux à deux Alors, puisque E n'est pas fini, l'inclusion $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \subset E$ est stricte, ce qui permet de trouver un élément $x_n \in E$ distinct des précédents.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Si f est une injection de $\mathbb{N}$ dans E, elle induit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $f(\mathbb{N})$

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Une partie de E en bijection avec $\mathbb{N}$ est infinie, ce qui prouve que E ne peut pas être fini.

□

Remarque Si E est un ensemble infini, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E distincts deux à deux. L'application $f : x_n \mapsto x_{n+1}$ est alors une injection de $F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dans lui–même. En prolongeant f sur E par $\forall x \in E \setminus F$, $f(x) = x$, on obtient une injection de E dans E, non bijective puisque x_0 n'a pas d'antécédent

Tout ensemble infini est donc en bijection avec une de ses parties strictes.

Proposition 7 (Caractérisation des parties finies de $\mathbb{N}$)

Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si, et seulement si, elle est majorée.

Démonstration

Soit P une partie majorée de $\mathbb{N}$. Il existe donc un entier n_0 majorant P et P étant une partie de l'ensemble fini $[\![0.n_0]\!]$, est elle–même finie.

Démontrons par récurrence sur n que toute partie à n éléments de $\mathbb{N}$ est majorée.

- Seul l'ensemble vide a un cardinal nul, et il est majoré par 0 (par exemple) puisque l'on a $\forall x \in \varnothing.\ x \leqslant 0$.
- Supposons la propriété vraie au rang $n-1$
  Soit A une partie à n éléments ; la partie A s'écrit $A = A' \cup \{a\}$, avec card $A' = n-1$.

D'après l'hypothèse de récurrence, la partie A' à $n-1$ éléments est majorée par un entier M, et par suite la partie A est majorée par $\max(a, M)$.
D'où le résultat au rang n □

Lemme

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une application strictement croissante de $[\![0, n]\!]$ dans $\mathbb{N}$, alors $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $f(p) \geqslant p$.
2. Si f est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$. $f(n) \geqslant n$.

monstration

1. Raisonnons par récurrence sur n
   - Si $n = 0$, le résultat est évident
   - Supposons le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$. Si f est une application strictement croissante de $[\![0. n+1]\!]$ dans $\mathbb{N}$, alors sa restriction à $[\![0\ n]\!]$ est strictement croissante et l'hypothèse de récurrence donne $\forall p \leqslant n$, $f(p) \geqslant p$.

     Alors $f(n+1) > f(n) \geqslant n$, ce qui prouve $f(n+1) \geqslant n+1$ Le résultat est donc vrai pour $n+1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $f_{|[\![0,n]\!]}$. □

Proposition 8

Si P est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$ de cardinal n, il existe une bijection (strictement) croissante, et une seule, de l'intervalle $[\![1. n]\!]$ sur P.

ém nstrati n

Existence. Raisonnons par récurrence sur le cardinal de P.

- Si P a un seul élément x, l'application $1 \mapsto x$ est évidemment une bijection croissante de $[\![1, 1]\!]$ dans P
- Supposons le résultat vrai pour toute partie de $\mathbb{N}$ de cardinal $n-1$ Soit P une partie de $\mathbb{N}$ à n éléments Alors, d'après la proposition précédente, P est majorée. C'est alors une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, qui possède donc un plus grand élément a

  Comme $P \setminus \{a\}$ possède $n-1$ elements, on peut trouver une bijection croissante f de $[\![1, n-1]\!]$ sur $P \setminus \{a\}$ En prolongeant f par $f(n) = a$, on obtient une bijection croissante de $[\![1, n]\!]$ sur P

  D'où le résultat pour toute partie de $\mathbb{N}$ à n éléments.

Unicite. Si f est une bijection croissante de $[\![1, n]\!]$ sur P, alors sa réciproque est une bijection croissante. En effet, si x et y sont deux éléments de P tels que $x < y$, on ne peut pas avoir $f^{-1}(x) \geqslant f^{-1}(y)$ d'après la croissance de f et donc, puisque $\mathbb{N}$ est totalement ordonne, on a $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$.

Si maintenant f et g sont deux bijections croissantes de $[\![1,n]\!]$ sur P, la composée $h = f^{-1} \circ g$ ainsi que sa réciproque sont des bijections croissantes de $[\![1,n]\!]$ sur lui–même. On a donc d'après le lemme précédent :

$$\forall p \in [\![1,n]\!]\,,\ h(p) \geqslant p \qquad \text{et} \qquad \forall p \in [\![1,n]\!]\,,\ h^{-1}(p) \geqslant p.$$

Donc $\forall p \in [\![1,n]\!]\,,\ h(p) = p$, ce qui prouve $f = g$. □

Proposition 9

Si P est une partie infinie de $\mathbb{N}$, il existe une bijection (strictement) croissante, et une seule, de $\mathbb{N}$ sur P.

émonstration

Existence. Comme P est infinie, elle est non vide ; on peut donc définir $a_0 = \min P$.
Définissons par récurrence une application f de $\mathbb{N}$ dans P.

On pose $f(0) = a_0$.

- Supposons construits $f(0) < f(1) < \cdots < f(n-1)$. Comme P est infini, il n'est pas majoré par $f(n-1)$, et donc l'ensemble des éléments de P strictement supérieurs à $f(n-1)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. On peut donc prendre pour $f(n)$ son plus petit élément, qui vérifie donc $f(n) > f(n-1)$

Par construction, la fonction f est strictement croissante, donc injective.

Montrons par l'absurde qu'elle est surjective. Si elle ne l'est pas l'ensemble $P \setminus f(\mathbb{N})$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément a, différent de a_0 puisque $a_0 = f(0)$. L'ensemble des éléments de P strictement inférieurs à a est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ Elle admet donc un plus grand élément b, qui est alors l'image d'un certain entier n puisque a est le plus petit élément de P n'ayant pas d'antécédent. Par construction, $f(n+1)$ est le plus petit élément de P strictement plus grand que b, c'est-à-dire a. D'où la contradiction
Donc f est une bijection croissante de $\mathbb{N}$ sur P.

Unicité. De même que pour la proposition précédente, si f et g sont deux telles bijections, la composée $f^{-1} \circ g$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ ainsi que sa réciproque D'après le lemme, on a alors $f^{-1} \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire $f = g$ □

Remarques

- Les deux propositions précédentes peuvent encore s'enoncer :
  - toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$,
  - toute partie infinie de $\mathbb{N}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

- Ces deux derniers résultats montrent que toute famille indexee par une partie de $\mathbb{N}$ peut quitte à renuméroter ses éléments (sans changer leur ordre), être indexée par $\mathbb{N}$ ou par $[\![1,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}$.

  L'étude d'une telle famille indexée par une partie infinie de $\mathbb{N}$ se ramène donc à l'étude d'une suite.

Réunion d'ensembles finis

Proposition 10

Si A et B sont deux ensembles finis disjoints, alors $A \cup B$ est fini et :

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\ A + \text{card}\ B.$$

´m nstra io Soient m et n les cardinaux respectifs des ensembles A et B.
Étant donnees une bijection f de A dans $[\![1,m]\!]$ et une bijection g de B dans $[\![m+1,m+n]\!]$ (cf. exemple 3. de la page 1050), on définit l'application h de $A \cup B$ dans $[\![1.\,m+n]\!]$ par .

$$\forall x \in A\,,\ h(x) = f(x)$$

$$\forall x \in B\,,\ h(x) = g(x).$$

Cette application h est bien definie car A et B sont disjoints ; c'est une bijection dont la réciproque est donnée par :

$$\forall k \in [\![1,m]\!]\,,\ h'(k) = f^{-1}(k)$$

$$\forall k \in [\![m+1,m+n]\!]\,,\ h'(k) = g^{-1}(k).$$

Donc $A \cup B$ est un ensemble fini de cardinal $m+n$. □

Exemple Soit E un ensemble fini de cardinal n. Si $a \notin E$, l'ensemble $E \cup \{a\}$ est fini de cardinal $n+1$.

Corollaire 11

Si A est une partie d'un ensemble fini E, alors :

$$\text{card}\,(\complement_E A) = \text{card}\ E - \text{card}\ A.$$

émonstratio Les ensembles A et $\complement_E A$ sont finis d'après le théorème 5 de la page 1051. De plus, ils sont disjoints et $E = A \cup (\complement_E A)$. On a donc :

$$\text{card}\ E = \text{card}\ A + \text{card}\,(\complement_E A)$$

ce qui prouve le résultat. □

Par une récurrence immédiate, on généralise la proposition 10 de la page précédente :

Proposition 12

Si $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille de p ensembles finis deux à deux disjoints alors $\bigcup\limits_{k=1}^{p} A_k$ est un ensemble fini et :

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{card} A_k.$$

Proposition 13

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A\cup B$ est fini et :

$$\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A\cap B).$$

émons ratio On a les égalités .

$$A\cup B = (A\setminus B)\cup B \qquad \text{et} \qquad (A\setminus B)\cap B = \varnothing$$

ce qui prouve que $A\cup B$ est fini et que l'on a

$$\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card}(A\setminus B) + \operatorname{card} B. \tag{a}$$

De même, on a :

$$\operatorname{card}(A\setminus B) + \operatorname{card}(A\cap B) = \operatorname{card} A \tag{b}$$

puisque :

$$(A\setminus B)\cup(A\cap B) = A \qquad \text{et} \qquad (A\setminus B)\cap(A\cap B) = \varnothing.$$

En ajoutant membre à membre les égalités (a) et (b) puis en simplifiant par $\operatorname{card}(A\setminus B)$, on obtient :

$$\operatorname{card}(A\cup B) + \operatorname{card}(A\cap B) = \operatorname{card} B + \operatorname{card} A.$$

□

Exemple Soient A, B et C trois ensembles finis. On a la relation :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A\cup B\cup C) = {} & \operatorname{card} A + \operatorname{card} B + \operatorname{card} C \\ & - \operatorname{card}(A\cap B) - \operatorname{card}(A\cap C) - \operatorname{card}(B\cap C) \\ & + \operatorname{card}(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

En effet, d'après la proposition précédente, on a :

$$\operatorname{card}\big(A\cup(B\cup C)\big) = \operatorname{card} A + \operatorname{card}(B\cup C) - \operatorname{card}\big(A\cap(B\cup C)\big)$$

$$\operatorname{card}(B\cup C) = \operatorname{card} B + \operatorname{card} C - \operatorname{card}(B\cap C).$$

Comme $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$, on obtient :

$$\operatorname{card}\big(A\cap(B\cup C)\big) = \operatorname{card}(A\cap B) + \operatorname{card}(A\cap C) - \operatorname{card}(A\cap B\cap C)$$

ce qui prouve la relation annoncée.

Produit d'ensembles finis

Proposition 14

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est fini et :

$$\text{card}\,(A \times B) = \text{card } A \text{ card } B.$$

´monstrati Le résultat est évident si A est vide ; supposons donc $A \neq \varnothing$. Si p est le cardinal de l'ensemble A, on peut écrire A en extension :

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}.$$

L ensemble $A \times B$ s'écrit alors :

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^{p} \{a_k\} \times B.$$

Chaque ensemble $\{a_k\} \times B$ est en bijection avec B par l'application $b \mapsto (a_k, b)$, et donc $A \times B$ est la réunion de p ensembles finis de même cardinal que B et disjoints deux à deux. Par suite, $A \times B$ est fini et :

$$\text{card}\,(A \times B) = p \text{ card } B = \text{card } A \text{ card } B \qquad \square$$

Corollaire 15

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et A un ensemble fini. L'ensemble A^p est fini et :

$$\text{card}\,(A^p) = (\text{card } A)^p.$$

émonstratio Récurrence sur l'entier p en utilisant le résultat précédent. $\square$

Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Proposition 16

Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F. On a :

(1) $\text{card } f(E) \leqslant \text{card } E$,

(2) L'application f est injective si, et seulement si, $\text{card } f(E) = \text{card } E$.

´ nst ati n

(1) Pour tout élément y de $f(E)$ choisissons un élément x de E tel que $y = f(x)$. Soit A la partie de E constituée par les éléments x ainsi sélectionnés.

L'application :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est bijective puisque tout élément de $f(E)$ admet dans A un antécédent et un seul Par suite les ensembles A et $f(E)$ ont même cardinal

Comme l'ensemble A est une partie de E, son cardinal est inférieur au cardinal de E ce qui implique :

$$\operatorname{card}\big(f(E)\big) = \operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E.$$

(2) Si f est injective, elle induit une bijection de E dans $f(E)$ et on a donc $\operatorname{card} E = \operatorname{card}\big(f(E)\big)$.

Supposons $\operatorname{card}\big(f(E)\big) = \operatorname{card} E$. En reprenant les notations de (1), on obtient alors les égalités :

$$\operatorname{card} A = \operatorname{card}\big(f(E)\big) = \operatorname{card} E.$$

La partie A de E a même cardinal que E, donc $A = E$. Tout élément de $f(E)$ admet donc un unique antécédent dans E par f, ce qui prouve que f est injective. □

Remarques

- Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F. Le théorème 5 de la page 1051 donne immédiatement les résultats suivants, symétriques de ceux énoncés dans la proposition précédente :
  - $\operatorname{card}\big(f(E)\big) \leqslant \operatorname{card} F$ car $f(E)$ est une partie de F ;
  - si f est surjective, alors $\operatorname{card} F \leqslant \operatorname{card} E$;
  - l'application f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{card}\big(f(E)\big) = \operatorname{card} F$, puisque cette égalité de cardinaux est équivalente à $f(E) = F$.
- L ensemble $E = \{x_1.x_2.\dots.x_n\}$ est un ensemble fini de cardinal au plus n, puisque l'application $f\ :\ i \mapsto x_i$ est une surjection de $[\![1,n]\!]$ sur E. Si, de plus $\operatorname{card} E = n$, alors f est injective d'après la proposition précédente, et donc les x_i sont distincts deux à deux.

Théorème 17

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et f une application de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l'application f est injective,

(ii) l'application f est surjective,

(iii) l'application f est bijective.

´monstration D'après les résultats précédents, on a les équivalences

$$f \text{ injective} \iff \operatorname{card}\big(f(E)\big) = \operatorname{card} E$$

$$f \text{ surjective} \iff \operatorname{card}\big(f(E)\big) = \operatorname{card} F$$

Comme $\operatorname{card} E = \operatorname{card} F$, les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes. D'où l'équivalence des propriétés (i), (ii) et (iii). □

3. Dénombrement

Dans toute cette section, p et n désignent des entiers naturels. Pour l'instant et sauf mention du contraire, ils sont supposés non nuls.

3.1 Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Nombre de p–listes d'un ensemble fini

Proposition 18

Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre de p–listes d'éléments de E est n^p.

emonstration En effet, $\text{card}\,(E^p) = (\text{card } E)^p = n^p$. □

Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Soient E et F des ensembles de cardinaux respectifs p et n. L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E,F)$

Proposition 19

Si $E = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, l'application Φ :

$$\begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^p \\ u & \longmapsto & \big(u(a_1), u(a_2), \dots, u(a_p)\big) \end{array}$$

est une bijection.

nstr tio Si $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ est un élément quelconque de F^p, il existe une unique application u de E dans F telle que :

$$\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ u(a_k) = b_k,$$

ce qui exprime que l'élement $(b_1, b_2, \dots, b_p) \in F^p$ admet un unique antécédent par Φ.

L'application Φ est donc une bijection □

Corollaire 20

Si $\text{card } E = p$ et $\text{card } F = n$, alors $\text{card } \mathcal{F}(E,F) = n^p$.

Remarques

- La notation F^E est donc bien adaptée pour désigner l'ensemble des applications de E dans F, puisque le resultat precédent s'écrit :

$$\text{card}\,(F^E) = (\text{card } F)^{\text{card } E} \qquad (*)$$

- Si E est vide ($p = 0$ et n quelconque), il y a une seule application de E dans F : celle dont le graphe est vide. La relation $(*)$ reste vraie car on a alors $n^0 = 1$ (même si $n = 0$).
- Si F est vide et E non vide ($p > 0$ et $n = 0$), il n'y aucune application de E dans F, car par une application, l'image d'une partie non vide est non vide. La relation $(*)$ reste encore vraie car on a alors $0^p = 0$

Nombre d'injections

Proposition 21

Étant donnés deux entiers n et p strictement positifs et un ensemble F de cardinal n, le nombre de p listes d'éléments de F distincts deux à deux est :

$$\underbrace{n\,(n-1)\;\ldots\;(n-p+1)}_{p \text{ termes}}.$$

Il est en particulier nul si $p > n$.

émonstratio Notons A_n^p ce nombre et démontrons, par récurrence sur p, la propriété H_p définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\; A_n^p = n\,(n-1)\;\ldots\;(n-p+1).$$

- H_1 est vraie car si F possède n éléments, il y a évidemment n listes de longueur 1 dans F, et elles sont évidemment constituées d'élements distincts deux à deux.
- Supposons H_p pour $p \geqslant 1$ et prouvons H_{p+1}. Soient n un entier naturel fixé quelconque et F un ensemble de cardinal n.
  - Si $n = 1$, il n'y a aucune $(p+1)$–liste de F, puisque $p+1 \geqslant 2$, et on a alors
  $$A_n^{p+1} = 0 = n\,(n-1)\;\ldots\;(n-p).$$
  - Sinon, une $(p+1)$–liste $(a_0, a_1, \ldots, a_p) \in F^{p+1}$ est determinée par son premier terme a_0 et la p–liste $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$.

    Ces éléments sont distincts deux à deux si, et seulement si, $(a_1, a_2, \ldots a_p)$ est une p–liste d'éléments distincts de $F \setminus \{a_0\}$. Il y a n façons de choisir a_0 et, d'après l'hypothèse de récurrence H_p, pour chaque choix de a_0, il y a :
  $$A_{n-1}^p = (n-1)\;\ldots\;(n-p+1)\,(n-p)$$
    manières de choisir $(a_1, a_2, \ldots a_p)$.

    On a donc
  $$A_n^{p+1} = n\big((n-1)\ldots(n-p+1)\,(n-p)\big).$$

Ainsi H_{p+1} est vraie, ce qui termine la demonstration par recurrence □

Remarque Soient E et F deux ensembles non vides de cardinaux respectifs p et n. L'application Φ de la proposition 19 de la page 1059 induit une bijection de l'ensemble des injections de E dans F sur l ensemble des p–listes d'éléments de F distincts deux à deux.

Le nombre d'applications injectives de E dans F est donc aussi $n(n-1)\ \dots\ (n-p+1)$.

Nombre de permutations

On rappelle qu'une permutation d'un ensemble E est une bijection de E dans lui–même.

Proposition 22

Si card $E = n$, alors le nombre de permutations de E vaut :

$$n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1.$$

On le note $n!$ (lire « *factorielle* n »).

é onstratio Comme E est un ensemble fini, une application de E dans E est bijective si, et seulement si, elle est injective ; le nombre de permutations de E est donc le nombre d'applications injectives de E dans E, d'où le résultat. □

Remarques

- Plus généralement, $n!$ est le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal n dans un autre ensemble de cardinal n.
- Il n'y a pas de bijection de E dans F si card $E \neq$ card F.

Convention On convient que $0! = 1$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (n+1)! = (n+1)\, n!.$$

3.2 Nombre de parties à p éléments

Parties d'un ensemble fini

Définitions – Notations Soit E un ensemble fini de cardinal n.

- On désigne par $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties à p éléments de E.
- Le nombre de parties de E à p éléments ne dépend que de n et de p ; on le note $\binom{n}{p}$.
- On trouve aussi la notation C_n^p à la place de $\binom{n}{p}$.

Proposition 23

Le nombre de parties de E à p éléments est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

le numérateur étant par convention égal à 1 si $p = 0$.

Démonstration

Pour $p = 0$, le résultat est vrai par convention.

Pour $p > n$, l'égalité est encore vérifiée puisque les deux membres sont nuls.

Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, comptons le nombre de p-listes d'éléments de E distincts deux à deux : il y en a $n(n-1)\dots(n-p+1)$.

D'autre part, se donner une telle liste revient à se donner une partie de E à p éléments (soit $\binom{n}{p}$ possibilités) puis d'ordonner ces éléments, c'est-à-dire de choisir une permutation de cette partie ($p!$ possibilités).

On a ainsi $n(n-1)\dots(n-p+1) = p!\binom{n}{p}$. □

Corollaire 24

Etant donnés deux entiers naturels n et p, on a :

- si $p \leqslant n$ alors $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n(n-1)\,\dots\,(n-p+1)}{p!}$,
- si $p > n$ alors $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$.

Remarque Le cas $p = 0$ vient de la convention $0! = 1$

Formules fondamentales

Proposition 25

Étant donnés deux entiers naturels n et p, on a :

- $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ si $p \leqslant n$,
- $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$. **(Relation de Pascal)**

emonstration On peut vérifier ces relations par le calcul en utilisant l'expression explicite des $\binom{n}{p}$, mais nous allons les démontrer par des méthodes de dénombrement en considérant un ensemble E à n éléments

- L'involution de $\mathcal{P}(E)$, qui à toute partie de E associe son complémentaire, induit une bijection de $\mathcal{P}_p(E)$ sur $\mathcal{P}_{n-p}(E)$; ce qui entraîne la première relation.
- Soit a un élément de E fixé. Les $\binom{n}{p}$ parties de E à p éléments se partagent en deux catégories disjointes :
  - celles qui contiennent a : ce sont les parties de la forme $\{a\} \cup X$, où X est une partie à $p-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$; leur nombre est donc $\binom{n-1}{p-1}$.
  - celles qui ne contiennent pas a : ce sont les parties à p éléments de $E \setminus \{a\}$; leur nombre est donc $\binom{n-1}{p}$.

  D'où la relation de Pascal □

Triangle de Pascal

La relation $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ permet de construire le triangle de Pascal dont les premières lignes sont :

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
\vdots & & & \multicolumn{2}{|c|}{\binom{n-1}{p-1} \quad \binom{n-1}{p}} & & & \ddots \\
 & & & & \downarrow & & & \\
 & & & & \boxed{\binom{n}{p}} & & &
\end{array}
$$

La formule :

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,(n-1)\,\dots\,(n-p+1)}{p\,(p-1)\,\dots\,1} \qquad (*)$$

est en général la plus rapide pour calculer $\binom{n}{p}$ (ne pas oublier de changer p en $n-p$ si p est strictement supérieur à $n/2$).

Pour limiter la taille des nombres entiers à manipuler, on peut aussi utiliser la proposition suivante qui permet de calculer $\binom{n}{p}$ par récurrence sur p.

Proposition 26

Étant donnés deux entiers naturels n et p tels que $n \geqslant p \geqslant 1$, on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} \quad \text{et} \quad \binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}.$$

emonstration Il suffit, dans la formule $(*)$, de factoriser p au denominateur et n ou $n-p+1$ au numérateur. □

D'où l'algorithme :

DONNÉES : deux entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.

VARIABLES : k (l'indice de boucle), C (le resultat)

- $C \leftarrow 1$
- `Pour` k `allant de 1 jusqu'à` p `:`
  - $C \leftarrow (n-k+1) * C$
  - $C \leftarrow C/k$ `(*` *division exacte* `*)`

RÉSULTAT : C.

Proposition 27

Si E est un ensemble fini à n éléments, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et a pour cardinal 2^n.

On a ainsi :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

émonstration Ce resultat peut se prouver par récurrence en utilisant le même type de raisonnement que pour la démonstration de la relation de Pascal.

Il peut aussi être vu comme une conséquence de la formule du binôme de Newton (voir page 1081) puisque :

$$(1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^p \, 1^{n-p}.$$

□

Chapitre 37

Structures algébriques usuelles

Le but de ce chapitre est de définir le vocabulaire élémentaire sur les structures algébriques usuelles (groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels). Ces structures sont une formalisation des propriétés classiques des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^n$ munis de leurs opérations usuelles $+$ et $\times$, propriétés que nous supposerons connues.

1. Lois de composition interne

1.1 Généralités

Définition

Définition 1

Soit E un ensemble. On appelle *loi de composition interne sur* E une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

Exemples

1. L'addition, la multiplication sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
   La soustraction sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
   La division sur $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{C}^*$.
2. Si E est un ensemble, on a sur $\mathcal{P}(E)$ les lois de composition interne suivantes :
   - l'intersection notee $\cap$,
   - la reunion notée $\cup$.

3. La composition des applications notée $\circ$ est une loi de composition interne sur :
   - A^A, l'ensemble des applications de A dans A,
   - $\mathcal{S}(A)$, l'ensemble des permutations de A, c'est–à–dire des bijections de A dans A.

Propriétés des lois de composition interne

Soit $*$ une loi de composition interne sur un ensemble E.

Définition 2

On dit que $*$ est :
- *associative* si $\quad \forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x*y)*z = x*(y*z)$.
- *commutative* si $\quad \forall (x,y) \in E^2, \quad x*y = y*x$.

Exemples

1. Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives.
2. Sur $\mathcal{P}(E)$, les lois $\cap$ et $\cup$ sont associatives et commutatives.
3. Sur $\mathbb{R}$, la soustraction n'est ni commutative, ni associative.
4. Sur E^E la composition des applications est associative, mais non commutative si E a au moins deux éléments.
5. Le produit vectoriel dans l'espace euclidien n'est ni commutatif ni associatif.

Remarque La notation additive $+$ est utilisee exclusivement pour une loi commutative.

Définition 3

Soient $\oplus$ et $\otimes$ deux lois de composition interne sur E. On dit que $\otimes$ est *distributive* par rapport à $\oplus$ si pour tous x, y et z de E, on a :

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \quad \text{et} \quad (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z).$$

Exemples

1. Sur $\mathbb{R}$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition
2. Sur $\mathcal{P}(E)$, la réunion et l'intersection sont chacune distributive par rapport à l'autre.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous ne considérerons que des lois de composition interne associatives.

Propriétés des éléments

Soit $*$ une loi de composition interne sur un ensemble E.

Définition 4

On dit que $a \in E$ est *régulier* ou *simplifiable* pour $*$ si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$a * x = a * y \Longrightarrow x = y \qquad \text{et} \qquad x * a = y * a \Longrightarrow x = y.$$

Exemples

1. Dans $\mathbb{N}$:
   - tous les éléments sont réguliers pour l'addition,
   - tous les éléments non nuls sont réguliers pour la multiplication.
2. Dans $\mathcal{P}(E)$, seul E est régulier pour l'intersection.

Définition 5

On dit que $e \in E$ est *élément neutre* pour $*$ si :

$$\forall x \in E\,,\ x * e = e * x = x.$$

Un tel élément, quand il existe, est unique.

émons ration de l'unicité. Si e et e' sont deux elements neutres alors $e = e * e' = e'$. □

Exemples

1. Sur $\mathbb{R}$:
   - 0 est élément neutre pour l'addition,
   - 1 est élément neutre pour la multiplication.
2. Id_E est élément neutre pour la composition sur E^E.
3. E est élément neutre pour l'intersection sur $\mathcal{P}(E)$.
4. $\mathbb{N}^*$ n'a pas d'élément neutre pour l'addition.

Remarque L'élément neutre est toujours régulier.

Définition 6

Étant donné un ensemble E muni d'une loi associative $*$ et possédant un élément neutre e, un élément x de E est *symétrisable* ou *inversible* si :

$$\exists y \in E\ :\ x * y = y * x = e.$$

Il y a alors unicité d un tel élément y que l'on appelle le *symétrique* de x.

émonstration de l'unic˙té. Soient y et z de E tels que $x * y = z * x = e$ Alors par associativité de la loi :

$$z = z * e = z * (x * y) = (z * x) * y = e * y = y.$$

□

Remarque Le symétrique d'un élément x se note :

- x^{-1} pour une loi notée multiplicativement et s'appelle *inverse* de x.
- $-x$ pour une loi notée additivement et s'appelle *opposé* de x.

Exemples

1. Pour l'addition dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, tout élément admet un opposé.
2. Pour la multiplication de $\mathbb{R}$, tout élément non nul admet un inverse.
3. L'élément neutre de $(E, *)$ est inversible pour $*$ et il est son propre symétrique.
4. Dans $(E^E, \circ)$, les éléments inversibles sont les bijections qui admettent pour symétrique leur bijection réciproque.
5. Dans $\mathcal{P}(E)$, seul l'élément neutre E admet un symétrique pour $\cap$.

Proposition 1

Si a et b sont deux éléments inversibles de $(E, *)$, alors $a * b$ est inversible et :

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

emonstratio Il suffit de vérifier :

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e \qquad \text{et} \qquad (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e.$$

ce qui découle de l'associativité de $*$. □

Exemples

1. Si f et g sont deux bijections d un ensemble E dans lui–même alors $f \circ g$ est aussi bijective et sa réciproque est $g^{-1} \circ f^{-1}$.
2. Si A et B sont deux matrices inversibles, le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Proposition 2

Soit E un ensemble muni d une loi associative $*$ et possédant un élément neutre e. Tout élément inversible de E est regulier

émonstratio Soit x inversible et y son symétrique. On a :

$$y * (x * a) = (y * x) * a = e * a = a$$

et de même $y * (x * b) = b$.

On en déduit donc que si $x * a = x * b$, alors $a = b$.

On démontre de même l'implication $a * x = b * x \Longrightarrow a = b$. □

Attention Un élément regulier n'est pas forcément inversible car, par exemple, dans $(\mathbb{N}, +)$, tout élément est régulier, alors que seul 0 est inversible.

1.2 Itérés d'un élément

Soit E un ensemble muni d'une loi associative $*$ et possédant un élément neutre e. Pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, l'élément :

$$x^n = \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}$$

appelé itéré $n^{ème}$ de x est défini par récurrence :

$$x^0 = e \qquad \text{et} \qquad x^{n+1} = x * (x^n) \quad \text{si} \quad n \geqslant 0.$$

Si $x \in E$ est inversible, alors, pour tout entier naturel n l'élément x^n est inversible et son inverse est $(x^{-1})^n$ que l'on note x^{-n}.

Proposition 3

Étant donne $x \in E$, on a pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$:

$$x^{p+q} = x^p * x^q \qquad \text{et} \qquad (x^p)^q = x^{pq}.$$

Ces relations sont vraies pour $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ si x est inversible.

emonstration Ces propriétés se démontrent aisément par récurrence si p et q sont des entiers naturels.

Par passage à l'inverse, on en déduit les résultats pour p et q entiers relatifs quelconques si x est inversible. □

1.3 Produit de n éléments

Soit E un ensemble muni d'une loi associative $*$ et possédant un élément neutre e.

Étant donnée une suite $(x_p)_{p \in [\![1,n]\!]}$ d'éléments de E, le produit :

$$x_1 * x_2 * \cdots * x_n = \prod_{1 \leqslant p \leqslant n} x_p$$

est défini par récurrence :

$$\prod_{1\leqslant p\leqslant n} x_p = \begin{cases} e & \text{si } n=0 \\ \left(\prod_{1\leqslant p\leqslant n-1} x_p\right) * x_n & \text{si } n\geqslant 1. \end{cases}$$

Ce produit est aussi noté $\prod_{p=1}^{n} x_p$

Lorsque tous les x_i sont inversibles, le produit $x_1 * x_2 * \cdots * x_n$ est inversible, d'inverse $x_n^{-1} * \cdots * x_2^{-1} * x_1^{-1}$.

Cas des lois commutatives

Lorsque la loi $*$ est commutative, on peut effectuer le produit $x_1 * x_2 * \cdots * x_n$ dans n'importe quel ordre ; on peut alors le noter $\prod_{p\in[\![1,n]\!]} x_p$.

Plus généralement, si I est un ensemble fini, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I d'élements de E, on note $\prod_{i\in I} x_i$ le produit (dans n'importe quel ordre) des éléments de la famille. Par définition, ce produit est égal à e si I est vide.

Avec ces définitions, si J et K sont deux ensembles finis **disjoints**, on a :

$$\left(\prod_{i\in J} x_i\right) * \left(\prod_{i\in K} x_i\right) = \prod_{i\in J\cup K} x_i.$$

1.4 Notation additive

Lorsque la loi est commutative et qu'elle est notée additivement :

- l'élément neutre est noté 0,
- l'itéré $n^{\text{ème}}$ d'un élément x s'écrit $n.x$ ou $n\,x$ au lieu de x^n pour $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{Z}$ si x est inversible).

Les résultats de la proposition 3 de la page précédente s'écrivent alors, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ (ou $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ si x admet un opposé) :

$$(p+q).x = p.x + q.x \qquad \text{et} \qquad p.(q.x) = (pq).x.$$

La somme de n éléments x_1, x_2,..., x_n est notée :

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant n} x_p\,, \ \sum_{p\in[\![1,n]\!]} x_p \qquad \text{ou} \qquad \sum_{p=1}^{n} x_p$$

et vérifie donc :

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant n} x_p = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ \left(\sum\limits_{1\leqslant p\leqslant n-1} x_p\right) + x_n & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Plus généralement, si I est un ensemble fini, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E indexée par I, on note $\sum\limits_{i\in I} x_i$ la somme (dans n importe quel ordre) des éléments de la famille. Par définition, cette somme est nulle si I est vide.

1.5 Construction de lois

Partie stable — loi induite

Définition 7

Soient E muni d'une loi de composition interne $*$ et F une partie de E.

On dit que F est *stable* par $*$ si :

$$\forall (x,y) \in F^2 , \; x*y \in F.$$

La loi de composition interne alors définie sur F par :

$$\begin{array}{ccc} F^2 & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & x*y \end{array}$$

est appelée *loi induite* par $*$ sur F.

Exemples

1. Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1 est stable par $\times$.
2. $\mathbb{N}$ est stable par l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$.

Loi produit

Définition 8

Soient $(E,*)$ et $(F,*)$ deux ensembles munis de lois de composition interne. On définit la *loi produit* sur $E\times F$ en posant :

$$(x,y)*(x',y') = (x*x', y*y').$$

Exemples

1. On définit ainsi une addition sur $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2).$$

2. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 muni de la multiplication des nombres complexes, et $\mathbb{R}_+^*$ muni de la multiplication. La loi produit sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{U}$ est définie par :
$$(r, u).(r', u') = (rr', uu').$$
3. Si $\mathbb{R}_+^*$ est muni de la multiplication et $\mathbb{R}$ de l'addition, la loi produit sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est définie par :
$$(r, \theta) * (r', \theta') = (rr', \theta + \theta').$$

On peut généraliser ce procédé de construction à un produit quelconque d'ensembles munis de lois de composition interne, ce qui permet par exemple, de définir une addition sur $\mathbb{R}^n$:
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Lois sur E^X

Exemple Si f et g sont des fonctions définies sur un même ensemble X et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on définit leur somme $f+g$ et leur produit $f.g$ par :
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (f.g)(x) = f(x)\,g(x).$$

- L'élément neutre pour l'addition est l'application nulle.
- Tout élément f admet pour opposé l'application $(-f) \; : \; x \mapsto -f(x)$.
- L'élément neutre pour la multiplication est l'application constante égale à 1.
- Une fonction f est inversible pour la multiplication si, et seulement si, elle ne s'annule pas · son inverse est alors :
$$\frac{1}{f} \; : \; x \longmapsto \frac{1}{f(x)}.$$

Plus généralement :

Définition 9

Soient E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ et X un ensemble. On définit sur E^X la loi de composition interne, notée encore $*$ par :
$$\forall x \in X \,, \; (f * g)(x) = f(x) * g(x).$$

Les propriétés (associativité, commutativité,...) de la loi ainsi définie sur E^X sont les mêmes que celles de la loi correspondante sur E. Par exemple si E a un élément neutre e pour $*$, alors E^X possède un élément neutre pour $*$ qui est :
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & e. \end{array}$$

1.6 Morphismes

Définition 10

Soient E et E' deux ensembles, $*$ une loi de composition interne sur E, et $*'$ une loi de composition interne sur E'.

On dit qu'une application f de E dans E' est un *morphisme* de $(E, *)$ dans $(E', *')$ si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \,,\ f(x * y) = f(x) *' f(y).$$

- Un morphisme bijectif est appelé *isomorphisme.*
- Un morphisme de $(E, *)$ dans lui–même est appelé *endomorphisme* de E.
- Un endomorphisme bijectif est appelé *automorphisme.*

Exemples

1. La fonction logarithme est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.
   Sa réciproque, l'exponentielle, est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$
2. Si $*$ est une loi de composition interne sur E, l'identité est un automorphisme de $(E, *)$
3. Soit $x \in \mathbb{Z}$.
   - L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & nx \end{array}$ est un endomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$.
   - L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & x^n \end{array}$ est un morphisme de $(\mathbb{N}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, \times)$.
4. La règle $x^p * x^q = x^{p+q}$ de calcul sur les itérés peut s'énoncer en disant que l'application :
   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & x^n \end{array}$$
   est un morphisme de $(\mathbb{N}, +)$ dans $(E. *)$.

Proposition 4

La composée de deux morphismes est un morphisme.

émonstration Soient $(E, *) \xrightarrow{f} (F, *) \xrightarrow{g} (G, *)$ deux morphismes. (Nous utilisons pour simplifier la même notation pour les lois de E, F et G.)

Pour $(x,y) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x * y) &= g\big(f(x * y)\big) \\ &= g\big(f(x) * f(y)\big) \\ &= g\big(f(x)\big) * g\big(f(y)\big) \\ &= (g \circ f)(x) * (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

□

Proposition 5

La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

emons rat°o Soient f un isomorphisme de $(E,*)$ dans $(F,*)$ et $(x,y) \in F^2$. On a :

$$f\big(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) * f\big(f^{-1}(y)\big) = x * y = f\big(f^{-1}(x * y)\big)$$

et, puisque f est injective, on en déduit $f^{-1}(x) * f^{-1}(y) = f^{-1}(x * y)$ □

2. Groupes

2.1 Définitions, exemples

Définition 11

Étant donné un ensemble G, on dit que $(G,*)$ est un *groupe* si :

- $*$ est une loi de composition interne associative sur G
- $(G,*)$ possède un élément neutre
- tout élément de G possède un symétrique dans G.

Si de plus $*$ est commutative, on dit que G est un groupe *commutatif* (ou *abélien*).

Remarques

- Par abus de langage et lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, on dit souvent « soit G un groupe… » sans préciser la loi.
- Dans un groupe, tout élément est régulier, puisqu'inversible.

Exemples

1. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{R}_+^*,\times)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$ sont des groupes commutatifs.
2. $(\mathbb{N},+)$ et $(\mathbb{R},\times)$ ne sont pas des groupes puisqu'ils ont des éléments non inversibles.

3. L'ensemble $(\mathcal{S}(E), \circ)$ des permutations de E est un groupe qui n'est pas commutatif si E a au moins trois éléments.
4. $(E^E, \circ)$ n'est pas un groupe si E a au moins 2 éléments puisqu'une application constante n'est pas inversible.
5. Si G est un groupe et A un ensemble non vide, alors G^A est un groupe pour la loi déduite de celle de G. Il est abélien si, et seulement si, G est abelien.

   L'inverse de $f \in G^A$ est l'application $x \mapsto \big(f(x)\big)^{-1}$.
6. Si G et H sont des groupes, alors $G \times H$ muni de la loi produit est un groupe.

   Le neutre de $G \times H$ est (e, e') où e est le neutre de G et e' celui de H.

   Le symétrique de $(x, y) \in G \times H$ est (x^{-1}, y^{-1}).

2.2 Sous–groupes

Définition 12

Soit G un groupe. Une partie H de G est un *sous–groupe* de G si elle est stable par produit et passage au symetrique, et si elle contient l'élément neutre de G.

Exemples

1. $\mathbb{Z}$ est un sous–groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. $\mathbb{R}_+^*$ est un sous–groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ mais pas de $(\mathbb{R}, +)$.
3. Dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$, l'ensemble $\mathcal{U}$ des éléments de module 1 et l ensemble $\mathcal{U}_n$ des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, sont des sous–groupes de $\mathbb{C}^*$.
4. G et $\{e\}$ sont des sous–groupes du groupe G. On les appelle *sous–groupe triviaux* de G.

Proposition 6

Muni de la loi induite, un sous–groupe est un groupe.

émonstrat'o Soit H un sous–groupe d'un groupe G

- La restriction de la loi de G à H (qui est stable par hypothèse) est évidemment associative.
- L'élément neutre de G est aussi neutre de H
- Si $x \in H$, son inverse x^{-1} dans G appartient à H et est alors évidemment son inverse dans H

□

2.3 Morphismes de groupes

Définition 13

Soient G et G' deux groupes. On appelle *morphisme de groupes* de G dans G', une application de G dans G' qui est un morphisme pour leurs lois respectives.

On utilise la terminologie (isomorphisme, endomorphisme, automorphisme) de la définition 10 de la page 1073

Exemples

1. La fonction logarithme est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
2. L'application qui envoie tous les élements d'un groupe G sur l'élément neutre d'un groupe G' est un morphisme de groupes.
3. L'application :
$$\begin{array}{rcl} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ A & \longmapsto & \det A \end{array}$$
est un morphisme de groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.
4. Si $\mathcal{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1, l'application $(\rho, u) \mapsto \rho u$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times) \times (\mathcal{U}, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Proposition 7

Soit f un morphisme de groupes de G (d'élément neutre e) dans G' (d'élément neutre e'). On a :

- $f(e) = e'$,
- $\forall x \in G,\ \big(f(x)\big)^{-1} = f\left(x^{-1}\right)$,
- $\forall x \in G,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \big(f(x)\big)^{n} = f\left(x^{n}\right)$.

Démonstration

- En notant $*$ les lois de G et de G', on a :
$$e' * f(e) = f(e) = f(e * e) = f(e) * f(e).$$
En simplifiant par $f(e)$ qui est régulier dans le groupe G' on en déduit donc $f(e) = e'$
- D'autre part :
$$f(x) * f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$$
et de même
$$f(x^{-1}) * f(x) = e',$$
ce qui prouve que le symétrique de $f(x)$ est $f(x^{-1})$

► Une récurrence permet de prouver la dernière formule pour $n \in \mathbb{N}$ Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, on écrit alors :
$$f(x)^n = \left(f(x)^{-n}\right)^{-1} = \left(f(x^{-n})\right)^{-1} = f\left((x^{-n})^{-1}\right) = f(x^n)$$
□

Exemples

1. Dans le cas particulier de la fonction logarithme, on obtient :
$$\ln 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0\,,\ \ln(1/x) = -\ln x.$$
2. Si A est une matrice inversible, alors $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}\cdot$

2.4 Noyau, image

Soient G et G' deux groupes d'éléments neutres respectifs e et e' ainsi que f un morphisme de groupes de G dans G'.

Proposition 8

- Si H est un sous-groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
- Si H' est un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

émonst ation

► Soit H un sous-groupe de G et $H'_0 = f(H)$.
Comme H contient l'élément neutre e de G, H'_0 contient $e' = f(e)$ qui est l'élément neutre de G'
Soit $(y, y') \in {H'_0}^2$. Prenons $(x, x') \in H^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Alors :
- $y * y' = f(x) * f(x') = f(x * x') \in H'_0$ puisque $x * x' \in H$
- $y^{-1} = f(x)^{-1} = f\left(x^{-1}\right) \in H'_0$ puisque $x^{-1} \in H$

Donc H'_0 est un sous-groupe de G'.

► Soit H' un sous-groupe de G' et $H_0 = f^{-1}(H')$.
Comme $f(e) = e' \in H'$, on a $e \in H_0$.
Soit $(x, x') \in {H_0}^2$. Alors $f(x) \in H'$ et $f(x') \in H'$ et puisque H' est un sous-groupe :
- $f(x * x') = f(x) * f(x') \in H'$
- $f\left(x^{-1}\right) = f(x)^{-1} \in H'$

et par suite $x * x'$ et x^{-1} appartiennent à H_0.
Donc H_0 est un sous-groupe de G. □

Corollaire 9

- $f(G)$, l'*image* de f, est un sous–groupe de G'. On le note $\mathrm{Im}(f)$ ou $\mathrm{Im}\, f$.
- L'ensemble $f^{-1}(\{e'\})$, appelé *noyau* de f, est un sous–groupe de G On le note $\mathrm{Ker}(f)$ ou $\mathrm{Ker}\, f$.

Exemples

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est un endomorphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Son noyau est $\mathcal{U}_n$, l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, ce qui permet de prouver que ce dernier est un sous–groupe de $\mathbb{C}^*$.
2. Le morphisme $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G' \\ x & \longmapsto & e' \end{array}$ a pour noyau G et pour image $\{e'\}$.
3. L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathcal{U}, \times)$. Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.
4. L'application $z \mapsto e^z$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Son noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$.
5. L'application $(\rho, \theta) \mapsto \rho e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times) \times (\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Théorème 10

L'application f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{e\}$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in G\,,\ f(x) = e' \Longrightarrow x = e. \qquad (*)$$

émonstration

- La propriété $(*)$ signifie $\mathrm{Ker}\, f \subset \{e\}$, ce qui est bien équivalent à $\mathrm{Ker}\, f = \{e\}$ puisque, $\mathrm{Ker}\, f$ étant un sous–groupe de G, il contient l'élément neutre.
- Supposons f injective Si $x \in \mathrm{Ker}\, f$ alors $f(x) = e' = f(e)$ donc $x = e$ puisque f est injective.

  Supposons $\mathrm{Ker}\, f = \{e\}$ Soit $(x, y) \in G^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors :

  $$f(x * y^{-1}) = f(x) * f(y)^{-1} = e',$$

  c'est-à-dire $x * y^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f$ Donc $x * y^{-1} = e$, ce qui donne $x = y$
  Donc f est injective.

□

3. Anneaux

3.1 Définitions

Définition 14

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

- $(A, +)$ est un groupe commutatif,
- $\times$ est associative,
- A possède un élément neutre pour $\times$
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.

On dit que l'anneau est commutatif si $\times$ est commutative

Notation Dans un anneau A :

- on note 0 (ou 0_A) l'élément neutre pour $+$.
- on note 1 (ou 1_A) l'élément neutre pour $\times$.
- on note couramment $x.y$ ou même $x\,y$ à la place de $x \times y$
- on utilise simultanément les deux notations :
  - $n.a$ ou $n\,a$ avec $n \in \mathbb{Z}$ pour l'itéré additif.
  - a^n avec $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{Z}$ si a est inversible) pour l'itéré multiplicatif.
- on a $\forall x \in A$, $x^0 = 1$. En particulier, $0^0 = 1$.

Exemples

1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des anneaux commutatifs pour l'addition et la multiplication usuelles.
2. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
3. En revanche, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ)$ n'est pas un anneau puisque $\circ$ n'est pas distributive par rapport à $+$:
   - par définition de $f+g$, on a bien l'égalité $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$,
   - mais la relation $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$ n est pas vraie en général (prendre par exemple $f = 1$).
4. Si $(G, +)$ est un groupe commutatif, l'ensemble des endomorphismes de groupe de G muni de l'addition et de la composition est un anneau non commutatif en général.

5. Si A est un anneau et E un ensemble alors A^E est un anneau pour les lois déduites de celles de A.
6. Si A et B sont des anneaux, alors $A \times B$ muni des lois produit est un anneau
7. $(\{0\}, +, \times)$ est un anneau.

3.2 Règles de calcul

Proposition 11

Dans un anneau A, on a les propriétés suivantes :

- $\forall a \in A,\ 0 \times a = a \times 0 = 0,$ *(0 est absorbant)*
- $\forall (a,b) \in A^2,\ (-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b).$ *(règle des signes)*

emons ration

- Pour $a \in A$, on a :

$$a \times 0 + a \times 0 = a \times (0+0) = a \times 0 = a \times 0 + 0.$$

Puisque $(A, +)$ est un groupe, on peut simplifier par $a \times 0$, ce qui donne $a \times 0 = 0$ Raisonnement analogue pour montrer $0 \times a = 0$.

- Soit $(a,b) \in A^2$ Montrons que $a \times (-b)$ et $a \times b$ sont opposés

$$a \times (-b) + a \times b = a \times (b - b) = a \times 0 = 0.$$

Donc $a \times (-b) = -(a \times b)$. On prouve de même $(-a) \times b = -(a \times b)$ □

Remarque Si dans un anneau A on a $0_A = 1_A$, alors :

$$\forall x \in A,\ x = 1_A\, x = 0_A\, x = 0_A$$

et donc $A = \{0_A\}$.

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des anneaux A contenant au moins deux éléments, et donc vérifiant $0_A \neq 1_A$.

Proposition 12 (Distributivité généralisée)

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles d'éléments d'un anneau A indexées par des ensembles finis I et J, on a :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \left(\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j\right)$$

emonstratıo On démontre par recurrence la propriété H_n :
si I a n éléments, on a pour tout J fini :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \left(\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j\right).$$

- H_0 est vérifié puisque si I est vide, alors $I\times J$ aussi et les deux membres de l'égalité sont nuls.
- H_1 se démontre par récurrence sur le nombre d'éléments de J en utilisant la distributivité.
- Supposons H_{n-1} pour $n \geqslant 1$, et prenons un ensemble I à n éléments. En écrivant I comme réunion disjointe d'un singleton $\{i_0\}$ et d'un ensemble I' à $n-1$ éléments, on a :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j\in J} b_j\right) &= \left(a_{i_0} + \sum_{i\in I'} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j\in J} b_j\right)\\ &= a_{i_0}\left(\sum_{j\in J} b_j\right) + \left(\sum_{i\in I'} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j\in J} b_j\right)\\ &= \sum_{j\in J} a_{i_0}\, b_j + \left(\sum_{(i,j)\in I'\times J} a_i b_j\right) && \text{d'après } H_1 \text{ et } H_{n-1}\\ &= \left(\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j\right)\end{aligned}$$

□

Proposition 13

Soient a et b deux éléments d'un anneau A tels que $a\,b = b\,a$ (on dit que a et b *commutent*).

(a) **Formule du binôme de Newton :**

$$\forall n \in \mathbb{N}\,.\ (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1})$$

(c) Pour $p \in \mathbb{N}$:

$$a^{2p+1} + b^{2p+1} = (a+b)\,(a^{2p} - a^{2p-1}\,b + \cdots - a\,b^{2p-1} + b^{2p}).$$

En particulier, ces relations sont vraies quels que soient les éléments a et b d un anneau commutatif.

émonstration

(a) Par récurrence sur n : pour $n = 0$, on obtient $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$

Supposons $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{p+1} b^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p+1} \\
&= \sum_{q=1}^{n+1} \binom{n}{q-1} a^q b^{n-q+1} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p+1} \qquad \text{en posant } q = p+1 \\
&= \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \right) a^p b^{n-p+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^p b^{n-p+1}
\end{aligned}$$

puisque $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ et $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1}$.

(b) Il suffit de développer le produit :

$$\begin{aligned}
(a-b) \sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-1-p} &= \sum_{p=0}^{n-1} a^{p+1} b^{n-1-p} - \sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-p} \\
&= \sum_{p=1}^{n} a^p b^{n-p} - \sum_{p=0}^{n-1} a^p b^{n-p} \\
&= a^n - b^n.
\end{aligned}$$

(c) La dernière formule s'obtient à partir de la précédente en remplaçant n par $2p+1$ et b par $-b$.

□

Remarque Grâce à la formule du binôme de Newton, on peut vérifier que si E est un ensemble fini de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ a pour cardinal 2^n.

En effet l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est la réunion disjointe des $\mathcal{P}_p(E)$ pour $p \in [\![0, n]\!]$, où $\mathcal{P}_p(E)$, ensemble des parties à p éléments de E a pour cardinal $\binom{n}{p}$.

Donc :

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n.$$

3.3 Anneaux intègres

Définition 15

Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est un *diviseur de* 0 si $a \neq 0$ et s'il existe un élément x de A non nul tel que $a\,x = 0$.

Proposition 14

Un élément non nul d'un anneau commutatif est régulier pour la multiplication si, et seulement si, ce n'est pas un diviseur de 0.

ém nstrat˙on

- Supposons a régulier. Si $a\,x = 0$, alors $a\,x = a\,0$ et par suite $x = 0$
  Donc a n'est pas diviseur de 0.
- Supposons a non diviseur de 0
  Si $a\,x = a\,y$, alors $a\,(x-y) = 0$ donc $x - y = 0$ c'est-à-dire $x = y$
  Donc a est régulier. □

Définition 16

Un anneau *intègre* est un anneau commutatif, différent de $\{0\}$, et sans diviseur de 0.

Remarque Dans un anneau intègre, on retrouve la propriété, utilisée couramment dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, disant qu'un produit ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul.

Exemples

1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont intègres.
2. $\mathbb{R}^2$ muni de l addition et la multiplication produit n'est pas un anneau intègre, puisque $(0,1) \times (1,0) = (0,0)$.
3. Si X est un ensemble ayant au moins 2 éléments, alors $(\mathbb{R}^X, +, \times)$ n'est pas intègre car on peut trouver f et g, deux applications non nulles de X dans $\mathbb{R}$, telles qu'en tout point de X l'une ou l'autre soit nulle.

3.4 Sous–anneaux

Définition 17

On appelle *sous–anneau* d un anneau $(A, +, \times)$, un sous–groupe de $(A, +)$ qui est stable par $\times$ et qui contient 1_A.

Remarques

- Un sous–anneau de A est donc une partie de A contenant 1_A, stable pour les deux lois de A et passage à l opposé. En effet une telle partie contient $0_A = 1_A + (-1_A)$ et par suite est un sous–groupe de $(A, +)$.
- Muni des lois induites un sous–anneau est évidemment un anneau.

Exemples

1. $\mathbb{Z}$ est un sous–anneau de $\mathbb{R}$.
2. Le singleton $\{0\}$ est inclus dans $\mathbb{R}$ et il est stable pour les deux lois d'anneau de $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un sous–anneau de $\mathbb{R}$, puisqu'il ne contient pas 1.

3.5 Morphismes d'anneaux

Définition 18

Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux. On dit que $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

1. $\forall (x, y) \in A^2$. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall (x, y) \in A^2$, $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$,
3. $f(1_A) = 1_B$.

Les morphismes d'anneaux de $(A, +, \times)$ dans $(B, +, \times)$ sont en particulier des morphismes de groupes de $(A, +)$ dans $(B, +)$ Ils en ont donc toutes les propriétés et on utilise la même terminologie : endomorphisme isomorphisme automorphisme.

Exemples

1. L'identité est l'unique endomorphisme de $\mathbb{Z}$, puisque si f est un tel endomorphisme, on a $f(1) = 1$ ce qui entraîne par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N} . \ f(n) = n.$$
puis :
$$\forall n \in \mathbb{Z}^- , \ f(n) = -f(-n) = -(-n) = n.$$

2. L'application f :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$
est un morphisme pour les deux lois de $\mathbb{R}$, mais n est pas un morphisme d'anneaux puisqu'on n'a pas l'égalité $f(1) = 1$.
3. Si B est un sous–anneau de A, l'application :
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$
est un morphisme d'anneaux.

Proposition 15

L'image d'un sous–anneau de A par un morphisme d'anneaux de A dans B est un sous–anneau de B

ém stratio Évident d'après les définitions. □

Remarque Si f est un morphisme d'anneaux de A dans B, c'est aussi un morphisme de groupes, ce qui permet de parler de son noyau $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(\{0_B\})$. Mais ce dernier n'est pas un sous–anneau de A puisqu'il ne contient pas 1_A (on a supposé $A \neq \{0_A\}$).

On conserve évidemment l'équivalence :
$$f \text{ injectif} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0\}.$$

3.6 Éléments inversibles, unités

Définition 19

Soit A un anneau, on appelle *unité* de A tout élément de A inversible pour la multiplication.

Proposition 16

L'ensemble des unités de A forme un groupe pour $\times$, et se note A^*

émonstration Soit G l'ensemble des unités de A.

G est stable par $\times$ car si $(u, v) \in G^2$, alors $u\,v$ est inversible, d'inverse $v^{-1}\,u^{-1}$

- $\times$ est associative sur A donc aussi sur G
- 1_A est une unité ; c'est le neutre de G
- Si $u \in G$, alors $u^{-1} \in G$ car u^{-1} est inversible d'inverse u

Donc G est un groupe. □

Exemples

1. Le groupe des unités de $\mathbb{Z}$ est $\{-1, 1\}$. Mais l'usage veut que $\mathbb{Z}^*$ représente $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et non le groupe des unités de $\mathbb{Z}$.
2. Le groupe des unités de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. Le groupe des unités de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des applications qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$:
   - il est nécessaire que f ne s annule pas pour pouvoir trouver g telle que $f.g = 1$,
   - c'est suffisant, puisqu'alors $1/f$ convient.

4. Corps

4.1 Définitions

Définition 20

On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un *corps* si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$ et dont tous les éléments non nuls sont inversibles, c'est-à-dire dont le groupe des unités est $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$

Remarques

- Dans toute la suite de ce cours nous ne considérerons que des corps commutatifs, c'est-à-dire dont la seconde loi est commutative. Par abus, nous dirons corps à la place de corps commutatif.
- Un corps est un anneau intègre puisqu'il est commutatif, non réduit à $\{0\}$ et que tous ses éléments non nuls sont inversibles donc réguliers.

Exemples

1. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis des lois usuelles sont des corps.
2. $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps, puisque seuls 1 et -1 sont inversibles.
3. $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ n'est pas un corps si l ensemble X contient au moins 2 élements puisqu'alors il n'est pas intègre.
4. On peut munir l'ensemble $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ des lois $+$ et $\times$ définies par les tables suivantes :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

(Ce sont les lois usuelles hormis la relation $1 + 1 = 0$.)

On peut vérifier facilement que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps. Dans ce corps chaque élément est son propre symétrique pour l'addition. En particulier on a $1 = -1$ et $2.1 = 1 + 1 = 0$ (il s'agit de l'itéré pour l'addition).

Notation Si a et b sont deux élements d'un corps $\mathbb{K}$ (commutatif), b étant non nul, on note $\dfrac{a}{b}$ l'élément $a \times b^{-1} = b^{-1} \times a$ de $\mathbb{K}$.

Pour $(a, b. a', b', x) \in \mathbb{K}^5$, $b \neq 0$, $b' \neq 0$ et $x \neq 0$, on a alors les règles de calcul suivantes :

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} \iff a\,b' = a'\,b.$
- $\dfrac{a\,x}{b\,x} = \dfrac{a}{b}\cdot$
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a\,b' + a'\,b}{b\,b'}\cdot$

  $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a\,a'}{b\,b'}\cdot$
- Si $a \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}\cdot$

Proposition 17

Soient $\mathbb{K}$ un corps $a \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\cdot$$

ém s ratio Conséquence de la proposition 13 de la page 1081 □

Définition 21

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On appelle *sous–corps* de $\mathbb{K}$ un sous–anneau de $\mathbb{K}$ qui est un corps.

Exemples

1. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont trois sous–corps de $\mathbb{C}$.
2. Si $\mathbb{K}$ est un sous–corps de $\mathbb{C}$ il contient 1 et par conséquent tous les entiers naturels, puis tous les entiers relatifs. Comme il est stable par produit et passage à l'inverse, il contient donc tous les rationnels. Ainsi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ et donc $\mathbb{Q}$ est le plus petit sous–corps de $\mathbb{C}$.

4.2 Corps des fractions

MPSI On admet le résultat suivant :

Proposition 18

Soit A un anneau intègre. Il existe un corps $\mathbb{K}$, unique à un isomorphisme près, tel que A soit un sous–anneau de $\mathbb{K}$ et que tout élément de $\mathbb{K}$ soit de la forme $\dfrac{a}{b}$, avec $(a, b) \in A^2$ et $b \neq 0$.

Ce corps est appelé *corps des fractions* de l'anneau intègre A.

Remarques

- Ce corps est unique à un isomorphisme près, ce qui signifie que si $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ sont deux corps vérifiant les propriétés précédentes alors il existe un isomorphisme de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}'$.
- L'expression $\dfrac{a}{b}$ représente $a \times b^{-1} = b^{-1} \times a$, où b^{-1} désigne l'inverse dans $\mathbb{K}$ de l'élément b appartenant à A donc à $\mathbb{K}$.

Exemples

1. Le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ est appelé corps des rationnels et noté $\mathbb{Q}$.
2. Le corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$, anneau des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$, est appele corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ et noté $\mathbb{K}(X)$. MPSI

5. Espaces vectoriels

Voir page 777.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Chapitre 0

1. **a)** $x < 1$ ou $y \leqslant x$

b) $x \neq 0$ et $y \neq 0$

c) $x^2 = 1$ et $x \neq 1$

2.
- $[\forall x \in E\ ,\ p(x)$ et $q(x)] \Longleftrightarrow [\forall x \in E\ ,\ p(x)]$ et $[\forall x \in E\ ,\ q(x)]$
- $[\exists x \in E\ :\ p(x)$ et $q(x)] \Longrightarrow [\exists x \in E\ :\ p(x)]$ et $[\exists x \in E\ :\ q(x)]$
- $[\forall x \in E\ ,\ p(x)$ ou $q(x)] \Longleftarrow [\forall x \in E\ ,\ p(x)]$ ou $[\forall x \in E\ ,\ q(x)]$
- $[\exists x \in E\ :\ p(x)$ ou $q(x)] \Longleftrightarrow [\exists x \in E\ :\ p(x)]$ ou $[\exists x \in E\ :\ q(x)]$

3. **a)** vraie

b) vraie

c) vraie

d) fausse

e) vraie

4. **a)** vraie

b) fausse

c) fausse

d) fausse

5. **a)**
$$\exists x \in E, \exists x' \in E\ :\ x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')$$

b)
$$\exists \varepsilon > 0\ :\ \forall \eta > 0\ ,\ \exists x \in \,]a, b[\ :\ |x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$$

c)
$$\exists a \in \mathbb{Z}\ ,\ \exists b \in \mathbb{N}^*\ :\ \forall q \in \mathbb{Z}, \forall r \in \mathbb{Z}\ ,\ a \neq bq + r \text{ ou } r < 0 \text{ ou } b \leqslant r$$

6. L'application n'est pas injective puisque $f(1,0) = f(1,1)$.
Elle est surjective. En effet si $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, prenons $x = X$, puis l'étude de la fonction $y \mapsto Xy - y^3$ montre qu'il existe y vérifiant $Xy - y^3 = Y$. Un tel couple (x,y) vérifie bien $f(x,y) = (X,Y)$.

7. • Supposons par exemple f injective. Alors h est injective, puisque si x et x' dans E sont tels que $h(x) = h(x')$ alors $f(x) = f(x')$ puis $x = x'$.

• h n'est pas forcément surjective. Prenons par exemple $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^3$, sont surjectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, mais le point $(0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas atteint par h.

8. **a)** Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. Alors $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$ puis $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ et $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$.

b) Soit $z \in G$, $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$, c'est-à-dire $z = g\big(f(x)\big)$, ce qui montre que z est atteint par g, soit g surjective.

c) Soient y et y' dans F tels que $g(y) = g(y')$. Alors f étant surjective, il existe x et x' dans E tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On a alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, puis $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$, et $y = f(x) = f(x') = y'$, ce qui montre que g est injective.

d) Soit y dans F. Alors $g(y)$ est un élément de G et par surjectivité de $g \circ f$, il existe x dans E tel que $g(y) = g \circ f(x)$. L'injectivité de g donne alors $y = f(x)$, ce qui montre que y est atteint par f, puis que f est surjective.

9. Par récurrence ou en utilisant la formule du binôme :

$$(1 + 1)^n \geqslant 1 + n \times 1 > n.$$

On vérifie que la formule est egalement vraie pour $n = 0$.

10. On montre par récurrence, après avoir trouvé la formule avec des petites valeurs de n :

$$1.1! + 2.2! + \cdots + n.n! = (n + 1)! - 1.$$

11. On a $f(0) + f(0) = f(0)$, d'où $f(0) = 0$. Posons $f(1) = a \in \mathbb{N}$.
On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) = na.$$

Finalement : $$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ f(n) = na.$$

Puis l'on vérifie que les fonctions de ce type satisfont bien à la condition demandée.

12. On a $g(0) = g(0)^2$ d où, soit $g(0) = 0$ auquel cas l'on montre que g est la fonction nulle, soit $g(0) = 1$. Dans ce cas, posons $g(1) = a \in \mathbb{N}$. On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g(n) = a^n.$$

Finalement, on a : $$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(n) = a^n$$

et l on vérifie que les fonctions de ce type satisfont bien à la condition demandée.

13. Montrons par récurrence sur n que $f(n) = n$.
On a $f(0) \leqslant 0$ d'où $f(0) = 0$.
Supposons la propriété H_n :

$$\forall k \in \{0. \ldots, n\} \quad f(k) = k.$$

Alors $f(n+1) \leqslant n+1$ et f étant injective :

$$f(n+1) \notin \{0, \ldots, n\}$$

d'où $f(n+1) = n+1$
On a donc H_{n+1}.
Inversement, la fonction identité convient.

14 La relation est vérifiée pour $n = 2$.
Supposons le résultat vrai pour une famille de n ensembles et considérons une famille à $n+1$ éléments.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathrm{Card}\,(A_{n+1}) - \mathrm{Card}\left((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\,(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_i \cap A_j) \\
&\quad + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \\
&\quad + (-1)^{n-1} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathrm{Card}\, A_{n+1} \\
&\quad - \mathrm{Card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

On applique l'hypothèse de récurrence au dernier terme.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\,(A_i \cap A_{n+1}) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n-1} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)
\end{aligned}$$

On reporte l'expression obtenue dans $(*)$ et l on regroupe les termes afin d'étendre la sommation sur les indices.

15. $\binom{n}{p}$: l'application φ de l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{1,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ dans l'ensemble des parties à p éléments de $\{1,\dots,n\}$, qui à f associe $f(\{1,\dots,p\})$ est une bijection.

16. L'ensemble des solutions s'écrit :

$$\begin{aligned} S &= \big\{(x,y,n-x-y) \mid x \in \mathbb{N}\ ,\ y \in \mathbb{N}\ ,\ x+y \leqslant n\big\} \\ &= \big\{(x,y,n-x-y) \mid x \in [\![0,n]\!]\ ,\ y \in [\![0,n-x]\!]\big\} \end{aligned}$$

d'où :

$$\operatorname{Card} S = \sum_{x=0}^{n}(n-x+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot$$

17. L'ensemble S des solutions est l'ensemble des triplets de la forme $(x,y,n-x-y)$ avec :

$$2x \leqslant n\ ,\ 2y \leqslant n\ ,\ n \leqslant 2(x+y)\ ,\ x+y \leqslant n$$

c'est-à-dire :

$$S = \left\{(x,y,n-x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{N}^2\ ,\ x \leqslant \frac{n}{2}\ ,\ \frac{n}{2}-x \leqslant y \leqslant \frac{n}{2}\right\}$$

Si n est pair, on trouve $\operatorname{Card} S = \dfrac{(n+2)(n+4)}{8}\cdot$

Si n est impair, on trouve $\operatorname{Card} S = \dfrac{(n-1)(n+1)}{8}\cdot$

18. **a)** On a $F = \big\{(A,A) \mid A \in \mathcal{P}(E)\big\}$ d'où $\operatorname{Card}(F) = 2^n$.

b) Soit φ de $\mathcal{P}(A)$ dans G_A définie par :

$$\varphi(X) = \bar{A} \cup X.$$

φ est une bijection de $\mathcal{P}(A)$ sur G_A, d'où $\operatorname{Card}(G_A) = 2^p$.

c) $H = \displaystyle\bigcup_{A \subset E} \big\{(A,B) \mid B \in G_A\big\}$ donc :

$$\operatorname{Card}(H) = \sum_{A \subset E} \operatorname{Card}(G_A) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = (1+2)^n = 3^n$$

19. Faisons une récurrence sur n.
La relation est vraie pour $n = 2$. Supposons que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p < n$:

$$\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p < n+1$
Si $p < n$, alors :

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{p+1} &= \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}\\ &= \binom{n}{p} + \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence.
Si $p = n$, la relation est bien vraie.

20. On écrit :

$$(1+x)^{p+q} = (1+x)^p(1+x)^q$$

puis l'on développe les deux termes du deuxième produit par la formule du binôme :

$$(1+x)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k$$

et :

$$(1+x)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{k'=0}^{q} \binom{p}{k}\binom{q}{k'} x^{k+k'}.$$

Le coefficient du terme x^n est :

$$\binom{p}{0}\binom{q}{n} + \binom{p}{1}\binom{q}{n-1} + \cdots + \binom{p}{j}\binom{q}{n-j} + \cdots + \binom{p}{n}\binom{q}{0}.$$

Pour la deuxième relation, on prend $p = q = n$, d'où :

$$\binom{p}{0}^2 + \binom{p}{1}^2 + \cdots + \binom{p}{p}^2 = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{p}{p-k} = \binom{2n}{n}$$

On peut également démontrer ce résultat de la manière suivante.
Soient F_1 et F_2 deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et q tels que $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.
Il y a $\binom{p}{j}\binom{q}{n-j}$ parties X à n éléments de $F_1 \cup F_2$ telles que $\mathrm{Card}\,(X \cap F_1) = j$.

Le nombre de parties à n éléments de $F_1 \cup F_2$ est donc :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j}\binom{q}{n-j} = \binom{p+q}{n}$$

21. $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$, on met $\binom{n}{p}$ en facteur, puis l'on reconnaît le développement de $(1+1)^p$ dans le premier cas et $(1-1)^p$ dans le deuxième cas.

Remarque. L'égalité $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$ s'interprète de la manière suivante. Chaque partie à p éléments contient $\binom{p}{k}$ parties à k éléments donc $\binom{n}{p}\binom{p}{k}$ représente le nombre de parties à k éléments parmi n, chaque partie étant comptée un nombre de fois égal au nombre de parties à p éléments qui la contiennent, c'est-à-dire $\binom{n-k}{p-k}$.

On a donc $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$.

22. $(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k = \left(1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots\right) + i\left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \cdots\right)$

On a donc :

$$\left(1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots\right)^2 + \left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \cdots\right)^2 = \left|(1+i)^n\right|^2 = 2^n$$

23. **a)** $p\binom{n-p}{k-1}$.

b) Il y a $\binom{n-p}{k}$ parties ne contenant aucun element de A donc le nombre cherché est $\binom{n}{k} - \binom{n-p}{k}$

24. **a)** $S_{p,n} = 0$ pour $p < n$.

b) Un élément de l'ensemble d'arrivée a deux antécédents les autres éléments en ayant un et un seul. On choisit l'élément qui a deux antécédents, puis les deux antécédents. Il y a ensuite $(n-1)!$ choix pour la construction des images des autres éléments.

On a donc :

$$S_{n+1,n} = n\begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}(n-1)! = n!\begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Supposons $p \geqslant 2$. Soit F l'ensemble d'arrivée, $F = \{x_1, x_2\}$.
Il n'y a que deux applications non surjectives de E dans F qui sont les deux applications constantes.
On a donc :

$$S_{p,2} = 2^p - 2.$$

c) On écrit :

$$\mathcal{F}(E,F) = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \{f \in \mathcal{F}(E,F) \mid \text{Card}\,(f(E)) = i\}$$

la réunion étant disjointe.
Puis :

$$A_i = \{f \in \mathcal{F}(E,F) \mid \text{Card}\,(f(E)) = i\} = \bigcup_{\text{Card}\,A=i} \{f \in \mathcal{F}(E,F) \mid f(E) = A\}$$

la réunion étant aussi disjointe.

Or $\text{Card}\{f \in \mathcal{F}(E,F) \mid f(E) = A\} = S_{p,i}$ d'où $\text{Card}\,(A_i) = \binom{n}{i} S_{p,i}$ et :

$$n^p = \text{Card}\,(\mathcal{F}(E,F)) = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} S_{p,i}.$$

25. Le nombre d'applications cherché est :

$$\begin{pmatrix} n \\ a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-a_1-a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} n-a_1-\cdots-a_{P} \\ a_p \end{pmatrix} = \frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_p!}.$$

26. Le nombre de droites tracées est $p = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le nombre de points d'intersection de ces p droites est :

$$\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n-2)$$

Mais chacun des points initiaux a été compté $\binom{n-1}{2}$ fois. Le nombre de points d'intersection hormis les points initiaux est donc :

$$\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} - n\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 3\begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ce résultat peut être retrouvé en remarquant que quatre points permettent d'obtenir trois nouveaux points.

27. **a)** $\sum\limits_{X \subset E} \operatorname{Card}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

Simplifions cette expression :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

En dérivant, on a :

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

Prenons $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

b) On écrit $X = F \cup X'$ et $Y = F \cup Y'$ avec $X' = X \setminus F$ et $Y' = Y \setminus F$. Alors $X \cap Y = F$ si et seulement si $X' \cap Y' = \varnothing$.

Il suffit donc de déterminer les couples (X', Y') de $\mathcal{P}(\bar{F})^2$ tels que $X' \cap Y' = \varnothing$.

Il y en a :

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} 2^{n-k-i} = 3^{n-k}.$$

Ensuite :

$$\sum_{X \subset E, Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y) = \sum_{F \subset E} \sum_{(X,Y), X \cap Y = F} \operatorname{Card}(F)$$

soit :

$$\sum_{X \subset E, Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y) = \sum_{F \subset E} \operatorname{Card}(F) 3^{n - \operatorname{Card}(F)} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 3^{n-k}.$$

On reconnaît la dérivée de $x \mapsto (x+3)^n$ en 1. On a donc :

$$\sum_{X \subset E, Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y) = n4^{n-1}.$$

Autre solution.

On a :

$$\begin{aligned} 4 \sum_{X \subset E, Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y) &= \sum_{X \subset E, Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y) + \sum_{X \subset E\, Y \subset E} \operatorname{Card}(\bar{X} \cap Y) \\ &\quad + \sum_{X \subset E, Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y) + \sum_{X \subset E, Y \subset E} \operatorname{Card}(\bar{X} \cap \bar{Y}) \\ &= \sum_{X \subset E, Y \subset E} \operatorname{Card} E = n4^n. \end{aligned}$$

28. Soit X une partie à p éléments de E. Il y a $P_{n-1,p}$ partitions qui contiennent X.

De plus, il y a $\begin{pmatrix} np \\ p \end{pmatrix}$ choix pour X, d'où $\begin{pmatrix} np \\ p \end{pmatrix} P_{n-1,p}$ partitions. Mais chaque partition est comptée autant de fois qu'elle contient de parties X soit n d'où le résultat.

On a :

$$P_{n,p} = \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} np \\ p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (n-1)p \\ p \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix} P_{1,p} = \frac{1}{n!}\frac{(np)!}{(p!)^n}.$$

Chapitre 1

1. On pose $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et l'on montre que :

$$|z - i| = |z + i|$$

si, et seulement si $y = 0$.

L'ensemble des points cherchés est géométriquement la médiatrice des points du plan d'affixe i et $-i$, c'est-à-dire l'axe réel.

2. Posons $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$.

$z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ [\pi]$.

$z_1 z_2 \in i\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\theta_1 + \theta_2 \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

3. $Z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2j$, d où :

$$Z^3 = 2^3(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 8j^3 = 8$$

4. **a)** L' équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} 3x - \dfrac{\pi}{5} = x + \dfrac{4\pi}{5} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \\ x + \dfrac{4\pi}{5} \neq \dfrac{\pi}{2} + k'\pi\ ,\ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La première equation est équivalente à $x = k''\dfrac{\pi}{2}$, $k'' \in \mathbb{Z}$ et l'on vérifie que les solutions de cette équation vérifient bien $x + \dfrac{4\pi}{5} \neq \dfrac{\pi}{2} + k'\pi$.

b) Il suffit d'écrire $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\left(\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

On trouve alors que l ensemble des solutions est :

$$\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

c) En exprimant $\cos 2x$ en fonction de $\sin x$ l'équation devient $2a\sin^2 x + 4\sin x - a = 0$. Posons ensuite $y = \sin x$ et considérons l'équation $2ay^2 + 4y - a = 0$ dont on recherche les solutions entre -1 et 1.
Le cas $a = 0$ conduit à l'ensemble de solutions pour l'équation en x : $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Si $a \neq 0$, l'équation en y admet deux racines réelles. Si $a \notin \left]-4, 4\right[$ alors les deux racines sont entre -1 et 1, ce qui conduit à la résolution de deux équations de la forme $\sin x = \alpha$ puis à l'ensemble des solutions. Si $a \in \left]-4, 4\right[$ alors une seule racine est entre -1 et 1, ce qui conduit à la résolution d' une équation de la forme $\sin x = \alpha$ puis à l'ensemble des solutions.

d) On peut mettre l'expression $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x$ sous la forme $2\sqrt{2}\cos(x+\varphi)$ mais la valeur de $\varphi = -\dfrac{\pi}{12}$ n'apparaît pas simplement Remarquant que $x = \pi$ n'est pas solution de l'équation, on pose $t = \tan\dfrac{x}{2}$ comme inconnue auxilliaire. L'équation devient alors :

$$(\sqrt{3}+1)\frac{1-t^2}{1+t^2} + (\sqrt{3}-1)\frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3} - 1 = 0,$$

puis $t^2 + (1-\sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0$ dont les racines sont -1 et $\sqrt{3}$.
Il reste à résoudre :

$$\tan\frac{x}{2} = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \tan\frac{x}{2} = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$$

ce qui conduit à l'ensemble de solutions :

$$\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \mid k' \in \mathbb{Z}\right\}.$$

e) Résolvons cette équation graphiquement en posant $X = \cos x$ et $Y = \sin x$. On cherche alors l'intersection de la droite d'équation $Y + (1+\sqrt{2})X - 1 = 0$ avec le cercle $X^2 + Y^2 = 1$. On trouve alors deux points solutions $(X = 0, Y = 1)$ et $(X' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, Y' = -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, ce qui conduit aux solutions de l'équation trigonométrique $\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ \} \cup \{-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ .\ k \in \mathbb{Z}\}$.
On pourra essayer de résoudre cette équation par les méthodes des deux exercices précédents.

5. On trouve :

$$\cos^7 x = \frac{1}{2^6}(\cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x).$$

6. On utilise la formule de Moivre pour calculer $\sin 6x$.

$$\frac{\sin 6x}{\sin x} = 32\cos^5 x - 32\cos^3 x + 6\cos x.$$

7. On a :

$$\cos(a+b) = \cos(\pi - c) = -\cos c$$

d'où :

$$\cos a \cos b + \cos c = \sin a \sin b.$$

En élevant au carré et en changeant les termes en $\sin^2$ par $1 - \cos^2$, on trouve la relation demandée.

8. **a)** Le système est équivalent à $e^{ix} + e^{iy} = 1 + e^{ia}$

- si $a \equiv \pi\ [2\pi]$, le système est équivalent à $x - y \equiv \pi\ [2\pi]$
- sinon, quitte à échanger éventuellement x et y et à remplacer x par $x + 2\pi$, on peut supposer :

$$\frac{x+y}{2} \equiv \frac{a}{2}\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{x-y}{2} \equiv \frac{a}{2}\ [2\pi].$$

On a alors $x \equiv a\ [2\pi]$ et $y \equiv 0\ [2\pi]$.

Réciproquement, les couples $(a + 2k\pi, 2k'\pi)$ et $(2k\pi, a + 2k'\pi)$ sont solutions.

b) Le système initial est équivalent à :

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2a \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 2b \end{cases}$$

lui même équivalent à :

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 2a \\ \cos(x+y) = 2b \end{cases}$$

qui n'a de solutions que si $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $b \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ En considérant α et β tels que $\cos\alpha = 2a$ et $\cos\beta = 2b$, on est conduit à la résolution de quatre systèmes puis à l'ensemble des solutions du système initial.

9. On calcule :

$$S + iS' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = (1 + e^{ix})^n = \left(2e^{i\frac{x}{2}} \cos\frac{x}{2}\right)^n.$$

puis :

$$S = \operatorname{Re}\left((1 + e^{ix})^n\right) = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos\frac{nx}{2}$$

et

$$S' = \operatorname{Im}\left((1 + e^{ix})^n\right) = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin\frac{nx}{2}.$$

10. **a)** $S = \{3 + 1i, -3 - 1i\}$.

b) $S = \{1 - 2i, -1 + 2i\}$.

c) $S = \{1 + 3i, 3 - i\}$.

d) $S = \left\{\frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right\}$

e) $S = \{1 + i, 3 + 2i\}$.

f) L'équation est équivalente à :

$$(2z - 2)^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}(z + 1)\right)^4$$

Comme $z \neq 1$, l'équation devient :

$$\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}(z + 1)}{2z - 2}\right)^4 = 1$$

soit :

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}(z + 1)}{2z - 2} = e^{ik\frac{\pi}{2}} \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant 3,$$

ce qui donne 4 equations du premier degré à résoudre.
Finalement, les solutions sont :

$$-\frac{(\sqrt{2} + 4) + i\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - 4) + i\sqrt{2}}, \quad -\frac{\sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 4)}{\sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 4)},$$

$$-\frac{(\sqrt{2} - 4) + i\sqrt{2}}{(\sqrt{2} + 4) + i\sqrt{2}}, \quad -\frac{\sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 4)}{\sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 4)}$$

c'est–à–dire encore, par exemple,

$$\frac{1}{17}\left[6\sqrt{2} + 15 + (8 + 10\sqrt{2})i\right] = \frac{1}{17}(5 + 2\sqrt{2})(3 + 2i\sqrt{2})$$

et les trois nombres obtenus en changeant $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$ et i en $-i$.

g) Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
L'équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x + 2 = 0 \\ 2xy + y = 0. \end{cases}$$

Il y a deux solutions $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}$.

11 **a)** Les racines cinquièmes de $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ sont :

$$\{e^{\left(\frac{-\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)i} \mid 0 \leqslant k \leqslant 4\}.$$

b) On a $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Les racines sixièmes de $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ sont donc :

$$\{\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3})} \mid 0 \leqslant k \leqslant 5\}.$$

12. Soit ω une racine $n^{ème}$ de 1 alors ω^p est également une racine $n^{ème}$ de 1 donc d'après la proposition 22 du cours, si p est un multiple de n alors la somme cherchée vaut n, sinon , la somme est nulle.

13. Supposons $|z| > 1$, alors :

$$|nz^n| = |1 + z + z^2 + \cdot\ \cdot + z^{n-1}| \leqslant 1 + |z| + \cdots |z^{n-1}| \leqslant n|z^{n-1}|$$

d'où $|z| \leqslant 1$, ce qui est absurde.

14. On remarque que l'équation n'admet pas $z = 0$ comme solution. En divisant par z^2 l'équation devient équivalente à :

$$z^2 - 4z\cos a\cos b + 2(1 + \cos 2a + \cos 2b) - 4\frac{1}{z}\cos a\cos b + \frac{1}{z^2} = 0.$$

On est donc amené à poser $Z = z + \dfrac{1}{z}\cdot$ L'équation est alors équivalente au système :

$$\begin{cases} z^2 - Zz + 1 = 0 \\ Z^2 - 4Z\cos a\cos b + 2(\cos 2a + \cos 2b) = 0. \end{cases}$$

Après calculs, on trouve comme solutions de l'équation en Z : $Z' = 2\cos(a+b)$ et $Z'' = 2\cos(a-b)$, puis les solutions de l'équation initiale :

$$\left\{e^{(a+\varepsilon b)i}, e^{-(a+\varepsilon b)i} \mid \varepsilon \in \{-1, 1\}\right\}.$$

15. **a)** Remarquons que (u, v) vérifie le système si et seulement si u et v sont solutions de l'équation $X^2 - xX - \frac{p}{3} = 0$. Donc il existe bien un couple (u, v) vérifiant le système considéré. D'autre part :

$$u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = -q$$

et :

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

donc u^3 et v^3 sont bien solutions de l'equation à coefficients réels $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$ $(*)$.

b) Notons $\Delta = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}$ le discriminant (qui est réel) de l'équation $(*)$.

- Si $\Delta \geqslant 0$, les deux racines de $(*)$ sont réelles donc possèdent chacune une racine cubique réelle respectivement u et v. Le produit uv est alors réel et vérifie $(uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$ donc $uv = -\frac{p}{3}$.
- Si $\Delta < 0$, les deux racines de $(*)$ sont conjuguées et leurs racines cubiques sont conjuguées deux à deux. Donc il existe u et v racines cubiques respectivement de chacune des solutions dont le produit uv soit réel. Comme précédemment, on a alors $uv = -\frac{p}{3}$.

On vérifie alors que $u + v$ est racine de $X^3 + pX + q = 0$. L'ensemble des solutions de l'équation est alors l'ensemble des $u + v$ où u et v sont des racines cubiques de X' et X'' telles que $uv \in \mathbb{R}$. Or si u et v sont deux racines cubiques de X' et de X'' telles que $uv \in \mathbb{R}$, les racines cubiques de X' sont $\{u, ju, j^2u\}$ et les racines cubiques de X'' sont $\{v, jv, j^2v\}$ et les couples de racines cubiques dont le produit est réel sont $(u.v), (ju.j^2v), (j^2.jv)$. Les solutions cherchées sont alors $u + v, ju + j^2v, j^2u + jv$.

c)
- Si $\Delta > 0$, X' et X'' sont réelles distinctes et u et v sont réels, on vérifie que la seule racine réelle de l'équation est $u + v$.
- Si $\Delta = 0$, $X' = X''$ est réel $u = v$, et $u + v$, $ju + j^2u = j^2u + ju = -u$ sont réels. Il y a deux racines réelles, éventuellement confondues si $u = 0$ soit $p = q = 0$.
- $\Delta < 0$, alors u et v sont complexes conjuguées et $u + v$ est réel, dans ce cas $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont également réels et l'équation a trois racines réelles.

16. On a $a^k + b^k = 2\rho^k cos k\theta$ d'où :

$$(a + b)(a^2 + b^2) \cdots (a^n + b^n) = 2^n \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos\theta \cos 2\theta \ldots \cos n\theta.$$

17. $p(\bar{z}) = a_0 + a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + \cdot \quad + a_n\bar{z}^n = \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdot \quad + a_n z^n} = 0 = 0.$

18. Les deux racines sont complexes conjuguées si, et seulement si :

$$2 + i\alpha \in \mathbb{R}\ ,\ i\alpha + 2 - \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \delta \leqslant 0.$$

On trouve $\alpha = 0$ avec $\delta = -4$ les deux solutions sont alors $1 + i$ et $1 - i$

19. Les deux racines de $Z^2 - 2Z\cos\theta + 1 = 0$ sont $z_0 = e^{i\theta}$ et $\overline{z_0} = e^{-i\theta}$. Les racines de l'équation sont alors les racines de $z^3 = z_0$ et $z^3 = \overline{z_0}$ qui sont : $e^{i\frac{\theta}{3}}, e^{i\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}}$ et leurs conjugués.
On regroupe ensuite les racines qui sont conjuguées.
On obtient :

$$\left(z^2 - 2\cos\frac{\theta}{3}z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)z + 1\right)$$

20. L'ensemble cherché est :

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \geqslant 0 \quad y = \sqrt{3}x\} \cup \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \geqslant 0 \ . \ y = -\sqrt{3}x\}.$$

C'est la réunion de deux demi-droites.

21 Notons $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$.

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \iff \rho = 1.$$

$$|1 - e^{i\theta}| = 1 \iff |\cos\theta| = \frac{1}{2}.$$

Les solutions sont donc $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

22. On écarte le cas évident $z_1 = z_0$. Pour $\alpha = 1$ la suite est arithmétique de raison $z_1 - z_0$ et donc n'est pas périodique si $z_1 - z_0 \neq 0$, on suppose donc dans la suite $\alpha \neq 1$. On a :

$$z_n - z_0 = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}(z_1 - z_0).$$

Si la suite est périodique, il existe n_0 tel que $z_{n_0} = z_0$. Donc α doit vérifier $\alpha^{n_0} = 1$ avec $n_0 \geqslant 2$.
Reciproquement, si α est une racine d'une équation du type $\alpha^{n_0} = 1$, avec $n_0 \geqslant 2$, alors la suite est n_0-périodique, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+n_0} - z_n = \frac{1 - \alpha^{n_0}}{1 - \alpha}(z_{n+1} - z_n) = 0.$$

23. a) On a

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = (z+z')\overline{(z - z')} + (z-z')\overline{(z - z')} = 2z\overline{z} + 2z'\overline{z'} = 2\big(|z|^2 + |z'|^2\big)$$

b) Soit :

$$\begin{aligned} A &= \left(\left|u + \frac{z+z'}{2}\right| + \left|u - \frac{z+z'}{2}\right|\right)^2 \\ &= \left|u + \frac{z+z'}{2}\right|^2 + \left|u - \frac{z+z'}{2}\right|^2 + 2\left|u^2 - \left(\frac{z+z'}{2}\right)^2\right|. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la médiane et $u^2 = zz'$, on a :

$$A = 2|u|^2 + \frac{|z+z'|^2}{2} + \frac{|z-z'|^2}{2} = 2|zz'| + \frac{1}{2}\left(|z-z'|^2 + |z+z'|^2\right) = \left(|z| + |z'|\right)^2$$

en utilisant à nouveau le théorème de la médiane.

24. On montre que l'égalité est vraie si et seulement si pour tout i, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $z_i = \lambda_i z_1$. On montre la propriété par récurrence sur n.
La remarque de la page 25 du cours montre la proprieté à l'ordre 2.
Supposons la propriété vraie avec $n-1$ termes.
On a : $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}| + |z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.
On a donc :

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_{n-1}|.$$

On a donc, d'après l'hypothèse de récurrence pour tout i entre 1 et $n-1$, $z_i = \lambda_i z_1$ où λ_i est réel positif.
On a donc $z_1 + \cdots + z_{n-1} = (1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1})z_1 \neq 0$ donc en appliquant le résultat avec $n = 2$ on obtient :

$$z_n = \alpha(z_1 + \cdots + z_{n-1}) \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+$$

soit $z_n = \lambda_1 z_1$ avec $\lambda_n = \alpha(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}_+$.

25. Si $a = e^{i\theta}$:

$$z_k = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad (1+z_k)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right) e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}.$$

Tous les $(1+z_k)^n$ sont donc sur la droite portée par $e^{i\frac{\theta}{2}}$.

26. Supposons que z, z^2 et z^4 soient deux à deux distincts
Ils sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{z^4 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R}$, soit si, et seulement si $1 + z + z^2 \in \mathbb{R}$.
En écrivant $z = x + iy$, on trouve que $y + 2xy = 0$ soit $y = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{2}\cdot$
Finalement en ajoutant les racines de $z = z^2$, $z = z^4$ et $z^2 = z^4$, on voit que les solutions sont les nombres reels, et les complexes dont la partie réelle est $-\dfrac{1}{2}\cdot$

27. On remarque que si x y et z sont solutions alors $|xyz| = 1$ puis $|x| = |y| = |z| = 1$. Posons alors $x = e^{ia}$, $y = e^{ib}$, $z = e^{ic}$. Le système devient alors :

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 1 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \\ a + b + c = 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos(a+b) = 1 \\ \sin a + \sin b - \sin(a+b) = 0 \\ a + b + c = 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos(a+b) = 1 \\ \sin \dfrac{a+b}{2} \left(\cos \dfrac{a-b}{2} - \cos \dfrac{a+b}{2} \right) = 0 \\ a + b + c = 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ce qui permet de trouver les 6 triplets (x, y, z) de solutions obtenues par permutation de 1, i et $-i$.
Remarque : En utilisant les résultats sur les relations coefficients-racines d'un polynôme voir page 720, on peut également calculer $xy + xz + yz = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \overline{z} + \overline{y} + \overline{x} = 1$ et conclure que x, y et z sont les racines de l'équation $X^3 - X^2 + X - 1 = 0$.

Chapitre 2

1. On considère un repère orthonormé choisi de telle sorte que le centre de $\mathcal{C}$ soit à l'origine et que le centre de $\mathcal{C}'$ soit le point de coordonnée $(a, 0)$ où $a \geqslant 0$ Notons R et R' respectivement les rayons des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Une paramétrisation de $\mathcal{C}$ (respectivement de $\mathcal{C}'$) est :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

respectivement :

$$\begin{cases} x = a + R'\cos\theta' \\ y = R'\sin\theta' \end{cases}$$

La tangente à $\mathcal{C}$ en $M(\theta)$ est orthogonale à la tangente en $M'(\theta')$ à $\mathcal{C}'$ si et seulement si $\cos(\theta - \theta') = 0$. L'affixe du milieu du segment $[MM']$ est alors $z = \dfrac{a}{2} + \left(\dfrac{R}{2} + i\varepsilon\dfrac{R'}{2}\right)e^{i\theta}$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. En écrivant alors

$\dfrac{R}{2} + i\varepsilon\dfrac{R'}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{R^2 + R'^2}e^{i\varphi_\varepsilon}$ avec $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, on conclut que le lieu cherché est le cercle de centre le point d'affixe $\dfrac{a}{2}$, milieu de OO' et de rayon $\dfrac{1}{2}\sqrt{R^2 + R'^2}$.

2 **a)** Soit u l'affixe du projeté orthogonal de A sur (BC). Il existe alors $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u = c + t(b-c)$ [appartenance du projete à la droite (BC)] et $u = a + is(c-b)$ [appartenance du projeté à la droite passant par A et orthogonale à (BC)]. On a alors :

$$\begin{cases} u = c + t(b-c) \\ \overline{u} = \overline{c} + t(\overline{b} - \overline{c}) \\ u = a + is(c-b) \\ \overline{u} = \overline{a} - is(\overline{c} - \overline{b}) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} (\overline{b} - \overline{c})u - (b-c)\overline{u} = c\overline{b} - \overline{c}b \\ (\overline{b} - \overline{c})u + (b-c)\overline{u} = (\overline{b} - \overline{c})a + (b-c)\overline{a} \end{cases}$$

puis :

$$u = \frac{a(\overline{b} - \overline{c}) + \overline{a}(b-c) + \overline{b}c - b\overline{c}}{2(\overline{b} - \overline{c})}.$$

La distance cherchée vaut $d = |a-u| = \frac{|a(\overline{c}-\overline{b})+b(\overline{a}-\overline{c})+c(\overline{b}-\overline{a})|}{2|b-c|}$.

b) Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $|a(\overline{c} - \overline{b}) + b(\overline{a} - \overline{c}) + c(\overline{b} - \overline{a})| = 0$, ce qui s'écrit aussi $(a-b)(\overline{c} - \overline{b}) - (\overline{a} - \overline{b})(c-b) = 0$, soit $(a-b)(\overline{c} - \overline{b}) \in \mathbb{R}$ ou encore $\dfrac{a-b}{c-b} \in \mathbb{R}$.

c) En utilisant la question précédente, on trouve $(\overline{b} - \overline{a})z + (a-b)\overline{z} = a\overline{b} - \overline{a}b$, ce qui s'écrit $z + ab\overline{z} = a + b$ dans le cas où a et b sont de module 1.

d) Une droite orthogonale à la droite d'équation $p\overline{z} + \overline{p}z = h$ a pour équation $p\overline{z} - \overline{p}z = ik, k \in \mathbb{R}$. En ecrivant que la droite cherchée passe par A, on trouve l'équation $(b-c)(\overline{z} - \overline{a}) + (\overline{b} - \overline{c})(z-a) = 0$.

e) Pour trouver l'affixe de l'orthocentre h, on écrit qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $h = b + ix(a-c) = c + iy(b-a)$ puis en utilisant la méthode de la première question, on trouve $\dfrac{(a^2+bc)(\overline{b} - \overline{c}) + (b^2+ac)(\overline{c} - \overline{a}) + (c^2+ab)(\overline{a} - \overline{b})}{a(\overline{b} - \overline{c}) + b(\overline{c} - \overline{a}) + c(\overline{a} - \overline{b})}$.

f) Calculatoirement avec le résultat précédent, on trouve $h = a + b + c$. On peut aussi montrer la relation géométriquement
Soit H le point d'affixe $a+b+c$ et O' le point d'affixe $b+c$. Alors O' est le

symétrique de O par rapport à (BC) d'où comme $h-a=b+c$, $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OO'}$ est orthogonal à la droite (BC), donc que H est sur la hauteur issue de A. On obtient également que le symétrique de H par rapport à la droite (BC) est sur le cercle (ABC). On voit aussi que l'orthocentre est l'image du centre de gravité $\dfrac{a+b+c}{3}$ par l'homothétie de centre O et de rapport 3. Ces trois points sont donc alignés.

3 Plaçons nous dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
La droite (DE) ne pouvant pas être parallèle à (AB) ou à (AC), elle admet une équation de la forme $y-\frac{1}{2}=k\left(x-\frac{1}{2}\right)$ avec $k\in\mathbb{R}^*$.

Les points D et E ont alors respectivement comme coordonnées $(\frac{1}{2}(1-\frac{1}{k}),0)$ et $(0,\frac{1}{2}(1-k))$. Les droites (BE) et (CD) ont pour équations respectives $(1-k)x+2y+k-1=0$ et $-2x+\left(\dfrac{1}{k}-1\right)y+1-\dfrac{1}{k}=0$. On trouve alors les coordonnées du point d'intersection des deux droites :

$$\left(\frac{k-\frac{1}{k}}{2+k+\frac{1}{k}},-\frac{k-\frac{1}{k}}{2+k+\frac{1}{k}}\right)=\left(\frac{k-1}{k+1},\frac{1-k}{k+1}\right)$$

lorsque les deux droites ne sont pas parallèles, c'est–à–dire lorsque $k\neq-1$.

Le lieu cherché est donc une partie de la droite d'équation $x+y=0$.

Plus précisément, l'application $k\mapsto\frac{k-1}{k+1}$ étant une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, il s'agit de l'ensemble des points de cette droite d'abscisse differente de 1 et de -1.

Le lieu cherché est donc la droite $(A,\overrightarrow{BC})$ privée des deux points $A\pm\overrightarrow{BC}$ c'est–à–dire des deux points M pour lesquels les quatre points A, B, C et M forment un parallélogramme.

4 Des vecteurs normaux des 3 droites sont :

$$\vec{u}\left|\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right.\qquad\vec{v}\left|\begin{matrix}a-b\sqrt{3}\\ b+a\sqrt{3}\end{matrix}\right.\qquad\vec{w}\left|\begin{matrix}a+b\sqrt{3}\\ b-a\sqrt{3}\end{matrix}\right.$$

On a $\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=2\|\vec{u}\|$ donc :

$$\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}\quad\text{et}\quad\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{w}}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

5. Comme t est réel $t-i\neq 0$. Posons $f(t)=\dfrac{t-z}{t-i}=1+\dfrac{i-z}{t-i}\cdot$
Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{t-i}$ décrit le cercle de centre le point $(0,\dfrac{1}{2})$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ (transformé par l'inversion de centre O et de rapport 1 de la droite d équation $y=1$) et $\dfrac{i-z}{t-i}$ décrit le cercle de centre le point $\dfrac{i}{2}(i-z)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{iz}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}|i-z|$. Alors $f(t)$ décrit le cercle de centre le point d'affixe $\dfrac{1}{2}-\dfrac{iz}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}|i-z|$ privé du point d'affixe 1.
La distance de O au centre du cercle est $d=\frac{1}{2}|1-iz|$ et le rayon R du cercle est $\dfrac{1}{2}|i-z|=\dfrac{1}{2}|1+iz|$. On a donc :

$$d-R=\frac{1}{2}\big(|1-iz|-|1+iz|\big)=\frac{1}{2}\big(|z+i|-|z-i|\big)=\frac{2\operatorname{Im}z}{|z+i|+|z-i|}\cdot$$

On constate que $d-R>0$ ce qui prouve que O est exterieur au cercle. Il en résulte que $\inf|f(t)|=d-R$.

6 Soit $A(R)$ l'ensemble des points à coordonnées (x,y) entières telles que $x^2+y^2\leqslant R$. À chaque point M de $A(R)$ on associe le carré $C(x,y)$ dont les sommets ont pour coordonnées (x,y), $(x+1,y)$, $(x+1,y+1)$ et $(x,y+1)$. La réunion de ces carrés lorsque M décrit $A(R)$ est un domaine Δ dont l'aire est $f(R)$ puisque chaque carré a pour aire 1 et que les carrés sont disjoints aux côtés près.
Il est clair que Δ contient le disque de centre l origine et de rayon $R-\sqrt{2}$.
Le domaine Δ est inclus dans le disque de centre l origine et de rayon $R+\sqrt{2}$. En effet si $M(x,y)$ est dans $A(R)$, il existe un point M_0 de coordonnées (x_0,y_0) de $A(R)$ tel que $d(M,M_0)\leqslant\sqrt{2}$. Comme $d(M_0,0)\leqslant R$, on a $R-\sqrt{2}\leqslant d(M,M_0)\leqslant R+\sqrt{2}$. Finalement, on a :

$$\pi(R-\sqrt{2})^2\leqslant f(R)\leqslant\pi(R+\sqrt{2})^2.$$

7 Par hypothèse $e^{ia}+e^{ib}+e^{ic}=0$ En désignant par A, B et C les points d'abscisses respectives e^{ia}, e^{ib} et e^{ic}, cette relation signifie $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$. Le point O est alors l'isobarycentre du triangle ABC et comme $OA=OB=OC=1$ également le centre du cercle circonscrit. Chaque médiane issue d'un sommet est alors la médiatrice du segment opposé et le triangle ABC est équilatéral de centre O. À une permutation près, on a donc $e^{ib}=je^{ia}$ et $e^{ic}=j^2e^{ia}$ où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ Il en résulte que $e^{2ia}+e^{2ib}+e^{2ic}=e^{2ia}(1+j+j^2)=0$.

Plus généralement, on remarque que $e^{kia} + e^{kib} + e^{kic} = 0$ si $k \in \mathbb{N}$ n'est pas un multiple de 3.

8. $MCAB$ est un quadrilatère convexe inscriptible Par le théorème de Ptolémée: $MA.BC = MB.AC + MC.BA$. Le triangle étant équilatéral, on en déduit $MA = MB + MC$. Le lecteur pourra chercher une démonstration directe n'utilisant pas le théorème de Ptolémée.

9. On munit le plan du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

En notant $\alpha = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$, on a $\overrightarrow{A'B} = \alpha \overrightarrow{A'C}$ soit en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{AB} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{AC}.$$

Les coordonnées de A' sont donc $\left(\frac{1}{1-\alpha}, \frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)$. En notant $\beta = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ et $\gamma = \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$, on montre de même que les coordonnées de B' et C' sont $\left(0, \frac{1}{1-\beta}\right)$ et $\left(\frac{-\gamma}{1-\gamma}, 0\right)$

Les points A', B' et C' sont alignés si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{-1}{1-\alpha} & \dfrac{-\gamma}{1-\gamma} - \dfrac{1}{1-\alpha} \\ \dfrac{-\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{1}{1-\beta} & \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \end{vmatrix} = 0,$$

condition qui s'écrit après développement :

$$(1-\gamma) + \alpha\gamma(1-\beta) + \gamma(1-\alpha) = 1 - \alpha\beta\gamma = 0.$$

10. Soient G l'isobarycentre des trois points A , B et C et h' l'homothétie de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

On a :

$$h'(A) = I \ . \ h'(B) = J \ . \ h'(C) = K$$

d'où :

$$h \circ h'(A) = A' \quad h \circ h'(B) = B' \ . \ h \circ h'(C) = C'.$$

Or $h \circ h'$ est une homothétie de rapport -1, c'est-à-dire une symétrie centrale. Son centre appartient aux trois droites (AA'), (BB') et (CC'), ce qui prouve qu'elles sont concourantes.

11. **a)** La famille $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ forme un repère du plan. En remarquant que pour tout M la relation :

$$\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$$

peut s'écrire :

$$\overrightarrow{AM} = (1 - \beta - \gamma)\,\overrightarrow{AA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC},$$

on voit que (α, β, γ) est un système de coordonnées barycentriques de somme 1 de M ($\alpha = 1 - \beta - \gamma$) si, et seulement si, (β, γ) est le système de coordonnées de M dans $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Cela montre le premier point

b) Si (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont proportionnels, les barycentres de (A, B, C) affectés de (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont égaux. Si réciproquement (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont des systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point, la question précédente montre l'égalité :

$$\frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\alpha' + \beta' + \gamma'}(\alpha', \beta', \gamma').$$

12. On munit le plan du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

Par définition, P est le barycentre des points (A, B, C) affectés des poids $(0, 1, -\alpha)$. On a donc :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{AB} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{AC}.$$

Les coordonnées de P sont donc $\left(\frac{1}{1-\alpha}, \frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)$. De la même façon, les coordonnées de Q et R sont $\left(0, \frac{1}{1-\beta}\right)$ et $\left(\frac{-\gamma}{1-\gamma}, 0\right)$. Nous avons vu dans l'exercice 9 que P, Q et R sont alignés si, et seulement si, $\alpha\beta\gamma = 1$.

a) Le point P' est barycentre des points (A, B, C) affectés des poids $(0, -\alpha, 1)$ ou, par homogénéité, $(0, 1, -\alpha^{-1})$. Les points P', Q' et R' sont donc alignés si, et seulement si, $\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1} = 1$. Cela montre l'équivalence souhaitée.

b) Les milieux I, J et K des segments AP, BQ et CR ont pour coordonnees $\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}, \frac{-\alpha}{2(1-\alpha)}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2(1-\beta)}\right)$ et $\left(\frac{-\gamma}{2(1-\gamma)}, \frac{1}{2}\right)$. Ces points sont alignés si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\,(1-\alpha)} & \dfrac{-\gamma}{2\,(1-\gamma)} - \dfrac{1}{2\,(1-\alpha)} \\ \dfrac{1}{2\,(1-\beta) - \frac{-\alpha}{2(1-\alpha)}} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{-\alpha}{2\,(1-\alpha)} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est équivalent à $\alpha\beta\gamma = 1$.

c) Le barycentre de points (I, P') affectés des poids $(2, 1)$ est de coordonnées :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}, \frac{-\alpha}{2(1-\alpha)}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\alpha^{-1}}, \frac{-\alpha^{-1}}{1-\alpha^{-1}}\right),$$

soit $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Il s'agit donc du centre de gravité G de ABC Il en est évidemment de même pour les couples (J, Q') et (K, R'). On passe donc de la droite de Newton à la droite isotomique par l'homothétie de centre G et rapport -2. En particulier, ces droites sont parallèles.

13. Il existe un triplet (x, y, z) vérifiant $x + y + z = 1$ tel que D soit le barycentre de $(A, B.C)$ affectés de (x, y, z). Considérons alors le point S barycentre de (P, Q, R) affectés de (x, y, z).

On a :

$$x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DB} + z\overrightarrow{DC} = 0.$$

Par hypothèse, il existe des scalaires tels que $\overrightarrow{QR} = \alpha\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{RP} = \beta\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{PQ} = \gamma\overrightarrow{DC}$. Il vient donc :

$$\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PQ} = 0.$$

Par unicité à proportionnalité près des coordonnées barycentriques il existe k tel que $x = \alpha k$, $y = \beta k$ et $z = \gamma k$. On obtient alors :

$$\overrightarrow{PS} = x\overrightarrow{PP} + y\overrightarrow{PQ} + z\overrightarrow{PR} = y\gamma\overrightarrow{DC} - z\beta\overrightarrow{DB} = \beta\gamma k\overrightarrow{BC}$$

Donc PS est parallèle à BC On fait de même pour les droites QS et RS. Cela montre ce que l'on voulait.

14. a) En écrivant $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ on obtient :

$$\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right).$$

Par permutation circulaire, il vient $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{BC}. \overrightarrow{BA}\right) = \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

b) Notons $\alpha \in]-\pi, \pi]$ la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. On a :

$$\cos A = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \sin A = |\sin\alpha|.$$

Lorsque le triangle est d'orientation positive, la relation :

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \sin\alpha > 0$$

montre que l on a $\alpha = A$ et par permutation circulaire $\beta = B$ et $\gamma = C$ On a évidemment $\alpha = -A$. $\beta = -B$ et $\gamma = -C$ dans le cas contraire Dans tous les cas, la relation :

$$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right)$$

montre :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}\right)$$

et $\alpha+\beta+\gamma\equiv\pi\quad[2\pi]$. Si ABC est orienté positivement $\alpha+\beta+\gamma$ appartient à $]0,3\pi[$ et par conséquent :

$$A+B+C=\alpha+\beta+\gamma=\pi.$$

Le cas où ABC est orienté négativement est analogue.

c) Le développement :

$$\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos A$$

donne la première relation. Notons O le centre du cercle circonscrit et M le symétrique de B par rapport à O. Le triangle BCM est rectangle en C et :

$$\left|\sin\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)\right|=\frac{a}{2R}\cdot$$

Comme A,B,C,M sont cocycliques, l'angle $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)$ a même mesure modulo π que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. Leur sinus sont donc égaux en valeur absolue. Il vient ainsi :

$$\sin A=\left|\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{a}{2R}\cdot$$

On obtient les autres relations par permutation circulaire. On a :

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}bc\,|\sin\alpha|=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

En remplaçant $\sin A$ par $\dfrac{a}{2R}$, on obtient $S=\dfrac{abc}{4R}\cdot$ Les relations $16S^2=4b^2c^2\sin^2 A$ et $4b^2c^2\cos^2 A=\left(a^2-b^2-c^2\right)^2$ montrent que l'on a :

$$16S^2=4b^2c^2-\left(a^2-b^2-c^2\right)^2.$$

La factorisation :

$$\begin{aligned}4b^2c^2-\left(a^2-b^2-c^2\right)^2&=\left(2bc+a^2-b^2-c^2\right)\left(2bc-a^2+b^2+c^2\right)\\&=\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)\\&=(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c)\end{aligned}$$

et les relations $a+b+c=2p$, $-a+b+c=2(p-a)$, $a-b+c=2(p-b)$ et $a+b-c=2(p-c)$ fournissent alors :

$$S^2=p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,.$$

Le centre I du cercle inscrit est à l'intérieur de ABC et est à la distance r des côtés de ABC. L'aire S est donc la somme des aires des triangles BCI,

CAI et ABI. Les aires de ces triangles étant $\frac{1}{2}ra$, $\frac{1}{2}rb$ et $\frac{1}{2}rc$, on obtient $S = rp$.

15. **a)** On sait (concavité de la fonction logarithme) que pour tout $(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$ on a :

$$(xyz)^{1/3} \leqslant \frac{1}{3}(x + y + z)$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque x, y et z sont égaux. On a donc :

$$S^{2/3} = p^{1/3}\left((p-a)(p-b)(p-c)\right)^{1/3} \leqslant \frac{1}{3}p^{1/3}(3p - a - b - c) = \frac{1}{3}p^{4/3}$$

d'où :

$$S \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}p^2.$$

L'egalité n'a lieu que si $p - a = p - b = p - c$ c est-à-dire $a = b = c$

b) On a :

$$S^3 = \frac{1}{8}(abc)^2 \sin A \sin B \sin C.$$

La fonction $x \mapsto \ln \sin x$ de $]0, \pi[$ vers $\mathbb{R}$ à pour dérivée seconde $-\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot$ Elle est donc strictement concave et l'on a :

$$\begin{aligned}\ln \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) &\geqslant \frac{1}{3}(\ln \sin A + \ln \sin B + \ln \sin C) \\ &= \ln(\sin A \sin B \sin C)^{1/3}\end{aligned}$$

soit :

$$\sin A \sin B \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque $A = B = C$. On obtient ainsi :

$$S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3}$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque $A = B = C$.

c) En utilisant $S = \frac{1}{2}bc \sin A$, $b = 2R \sin B$ et $c = 2R \sin C$, on obtient :

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

On a vu dans le point précédent l'inégalité :

$$\sin A \sin B \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque $A = B = C$. Il vient alors :

$$S \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque $A = B = C$.

16 On choisit l'orientation du plan de telle sorte que ABC soit orienté positivement. Nous avons vu les propriétés suivantes :

- tout point M est le barycentre de (A, B, C) affectés de :

$$\left(\text{Det}\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right), \text{Det}\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right), \text{Det}\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)\right)$$

(la somme de ces trois nombres réels, égale à $\text{Det}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, est non nulle).

- M est le barycentre de (A, B, C) affectés de (α, β, γ) ou de $(\alpha', \beta', \gamma')$ si, et seulement si, il existe δ non nul tel que $(\alpha', \beta', \gamma') = (\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma)$.

a) • Le point G est par définition le barycentre de $(A.B.C)$ affectés de $(1, 1, 1)$.

- Le point O etant le centre du cercle passant par A, B et C, on a :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv 2A \quad [2\pi].$$

La relation $\text{Det}\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = R^2 \sin\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}\right)$ montre que le centre du cercle circonscrit est le barycentre de (A, B, C) affectés de :

$$(\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C).$$

Si le triangle n'est pas rectangle on a de plus :

$$\sin 2A = 2 \cos A \cos B \cos C \,(\tan B + \tan C),$$

et O est aussi le barycentre de (A, B, C) affectés de :

$$((\tan B + \tan C), (\tan C + \tan A), (\tan A + \tan B)).$$

- Le point I est à l'intérieur de ABC et à la distance r des côtés du triangles. Ainsi $\text{Det}\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right)$, double de l'aire algébrique du triangle IBC vaut ra. Le point I est donc le barycentre de (A, B, C) affectés de $(a.b.c)$.

- Supposons que l'orthocentre H soit le barycentre de (A, B, C) affectes de (α, β, γ). On a :

$$(\alpha + \beta + \gamma)\, \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \left(\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC} = a\,(\gamma b \cos C - \beta c \cos B)$$

soit :

$$0 = a2R\cos B\cos C\,(\gamma\tan B - \beta\tan C)$$

En utilisant les relations analogues obtenues par permutation circulaire on voit que (α,β,γ) est proportionnel à $(\tan A, \tan B, \tan C)$ lorsque ABC n'est pas rectangle. Lorsque ABC est rectangle en A H est le barycentre de (A,B,C) affectés de $(1,0,0)$.

b) Supposons le triangle non rectangle. La relation $A+B+C=\pi$ montre que la somme :

$$s = \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$$

n'est pas nulle. L'expression :

$$s\left(\overrightarrow{OH} - 3\overrightarrow{OG}\right) = \tan A.\overrightarrow{OA} + \tan B.\overrightarrow{OB} + \tan C.\overrightarrow{OC} - s\overrightarrow{OA} - s\overrightarrow{OB} - s\overrightarrow{OC}$$

opposée à :

$$(\tan B + \tan C)\,\overrightarrow{OA} + (\tan C + \tan A)\,\overrightarrow{OB} + (\tan A + \tan B)\,\overrightarrow{OC},$$

est nulle puisque O est barycentre de (A,B,C) affectés de :

$$((\tan B + \tan C)\,,(\tan C + \tan A)\,,(\tan A + \tan B))$$

On a finalement $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
Le cas d'un triangle rectangle est immédiat.

Remarque : ce résultat peut se démontrer géométriquement par l'homothétie de centre G et de rapport -2.

17. **a)** Soient $(x_1, 1/x_1)$, $(x_2, 1/x_2)$ et $(x_3, 1/x_3)$ les coordonnées des sommets M_1, M_2 et M_3 d'un triangle équilatéral inscrit dans $\mathcal{H}$ et (α,β) celles de son centre de gravité G. On a :

$$3\alpha = x_1 + x_2 + x_3 \quad\text{et}\quad 3\beta = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\cdot$$

Les médianes d'un triangle équilatéral étant ses hauteurs, on a :

$$\overrightarrow{M_1G}.\overrightarrow{M_2M_3} = 0,$$

soit :

$$(\alpha - x_1)(x_3 - x_2) + \left(\beta - \frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_2}\right) = 0$$

ainsi que les deux relations analogues obtenues par permutation circulaire des indices. Après simplification par $x_3 - x_2$ qui n'est pas nul puisque le triangle n'est pas réduit à un point, la relation ci-dessus donne :

$$(\alpha - x_1) - (x_1\beta - 1)\frac{1}{x_1x_2x_3} = 0.$$

Par sommation, on obtient :

$$\big(3\alpha-(x_1+x_2+x_3)\big)-\big((x_1+x_2+x_3)\beta-3\big)\frac{1}{x_1x_2x_3}=0$$

soit $\alpha\beta=1$. Cela montre le premier point.

b) Soit $(x,1/x)$ les coordonnées de M. Le cercle $\mathcal{C}_M$ de centre M passant par le point M' de coordonnées $(-x,-1/x)$ a pour équation :

$$(X-x)^2+\left(Y-\frac{1}{x}\right)^2=(-x-x)^2+\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)^2,$$

soit :

$$X^2+Y^2-2xX-\frac{2}{x}Y-3x^2-\frac{3}{x^2}=0.$$

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{C}_M$ sont les racines de l'équation obtenue en remplaçant Y par $1/X$ dans la relation précedente. Ce sont donc les racines du polynôme :

$$X^4-2xX^3-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)X^2-\frac{2}{x}X+1=(X+x)\left(X^3+3xX^2-\frac{3}{x^2}x+\frac{1}{x}\right)\cdot$$

Les abscisses x_1,x_2 et x_3 des trois autres points d'intersection que l'on notera M_1, M_2 et M_3 sont les racines de l'équation :

$$X^3-3xX^2-\frac{3}{x^2}X+\frac{1}{x}=0.$$

Les relations entre les coefficients et les racines [voir le chapitre 26 ou développer l'expression $(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$] s écrivent :

$$x_1+x_2+x_3=3x,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{3}{x^2}\text{ et }x_1x_2x_3=\frac{1}{x}\cdot$$

Elles donnent $3x=x_1+x_2+x_3$ et $3/x=1/x_1+1/x_2+1/x_3$. Le centre M du cercle circonscrit à $M_1M_2M_3$ en est donc aussi le centre de gravité. Le triangle $M_1M_2M_3$ est ainsi équilatéral.

c) Les deux points précédents montrent que le lieu des centres de gravité des triangles équilatéraux inscrits dans $\mathcal{H}$ est $\mathcal{H}$ elle-même.

18. Le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, le quotient :

$$\frac{c-a}{b-a}$$

vaut $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Ces nombres étant les racines complexes de X^2-X+1 la condition précédente est équivalente à :

$$\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^2-\frac{c-a}{b-a}+1=0$$

soit $(c-a)^2 - (c-a)(b-a) + (b-a)^2 = 0$. Après calcul, on obtient :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

19. **a)** La mesure principale de $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ appartient à $]0, \frac{2\pi}{3}[$ et, par conséquent, celle de $\left(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA}\right)$ à $]0, \pi[$. De la même façon, la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}\right)$ appartient $]-\pi, 0[$. La droite $A'A$ recoupe donc $\mathcal{C}_A$ en un point F appartenant à l'arc de $\mathcal{C}_A$ limité par B et C et ne contenant pas A'. L'angle $\left(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC}\right)$, supplémentaire de $\left(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B}\right)$, a une valeur principale égale à $\frac{2\pi}{3}$. L'hypothèse sur l'angle en A montre que F appartient au segment $[A', A]$.

b) Par le théorème de Ptolémée, pour tout M, on a :

$$MB \cdot A'C + MC \cdot A'B \geqslant MA' \cdot BC$$

soit, en utilisant $A'B = A'C = BC$:

$$MB + MC > MA'.$$

L'égalité n'a lieu que lorsque M appartient à l'arc de $\mathcal{C}_A$ limité par B et C et contenant F.

c) Si M n'appartient pas à l'arc de $\mathcal{C}_A$ limité par B et C et contenant F on a donc :

$$MB + MC > MA'.$$

Il vient dans ce cas $f(M) > MA + MA' \geqslant AA'$. Si M appartient à cet arc mais est distinct de F, on a :

$$f(M) = MA + MA' > AA'.$$

Comme $f(F) = AA'$, la fonction f atteint bien son minimum en A et uniquement en ce point.

d) Nous avons vu que F appartient au cercle $\mathcal{C}_A$ et à la droite AA'. Par symétrie, il appartient à BB' et CC' ainsi qu'aux cercles $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$.

20. **a)** Dans le triangle $BA'C$, l'angle $A' = \pi - A$ est inférieur à $\frac{\pi}{3}$, donc inférieur aux écart angulaires des angles en B et C. La proportion entre les côtés et les sinus des angles montre alors :

$$a = BC < BA' = CA'.$$

On notera $\lambda = \dfrac{BC}{BA'} \in]0, 1[$.

b) Par le théorème de Ptolémée, pour tout M, on a :

$$MB.A'C + MC.A'B \geqslant MA'.BC$$

soit, en utilisant $A'B = A'C$:

$$MB + MC \geqslant \frac{BC}{BA'} MA'$$

L'égalité n'a lieu que lorsque M appartient à l'arc de $\mathcal{C}$ limité par B et C et contenant A.

c) Si M n'appartient pas à l'arc de $\mathcal{C}$ limité par B et C et contenant A on a donc :

$$f(M) > MA + \frac{BC}{BA'} MA' \geqslant \lambda (MA + MA') \geqslant \lambda AA'.$$

Si M appartient à cet arc mais est distinct de A, on a :

$$f(M) = MA + \frac{BC}{BA'} MA' > \lambda (MA + MA') \geqslant \lambda AA'.$$

Comme $f(A) = \dfrac{BC}{BA'} AA' = \lambda AA'$, on voit que f atteint son minimum en F et uniquement en ce point.

21 **a)** Les applications $g(z) = az + b$ et $s(z) = \overline{z}$ sont telles que $f = g \circ s$.

b) On a $(f \circ f)(z) = a\overline{a}z + a\overline{b} + b$. Pour que f représente une symetrie il faut $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, soit $|a| = 1$ et $a\overline{b} + b = 0$.

Il est alors immédiat que $f\left(\dfrac{b}{2}\right) = \dfrac{b}{2}$ et donc que le point d'affixe $\dfrac{b}{2}$ est sur l'axe de symétrie.

c) On a $u = e^{i\theta/2}\overline{z} + e^{-i\theta/2}z = 2\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta/2}z\right) \in \mathbb{R}$.

De même, $v = \left(e^{i\theta/2}\overline{z} - e^{-i\theta/2}z\right) + be^{-i\theta/2} = -2i\,\mathrm{Im}\left(e^{-i\theta/2}z\right) + be^{-i\theta/2}$.

Or $0 = a\overline{b} + b = e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2}\overline{b} + e^{-i\theta/2}b\right)$, ce qui prouve que $be^{-i\theta/2}$ est imaginaire pur.

On a donc $\dfrac{f(z) + z}{2} = \dfrac{b}{2} + ke^{i\theta/2}$, avec $k \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que le milieu des points M et M' d'affixes respectives z et $f(z)$, se trouve sur la droite passant par le point B d'affixe $b/2$ et dirigée par le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $e^{i\theta/2}$. De plus, la relation $e^{-i\theta/2}\ (f(z) - z) \in i\mathbb{R}$ prouve que MM' est orthogonal à $\vec{w}$. L'application f représente donc la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(B, \vec{w})$.

d) On écrit :

$$f(z) - \frac{b}{2} = a\overline{\left(z - \frac{b}{2}\right)} + \alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{a\bar{b} + b}{2} = e^{i\theta/2}\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta/2}b\right).$$

ce qui donne $f = t \circ s$ où $s(z) = \dfrac{b}{2} + a\overline{\left(z - \dfrac{b}{2}\right)}$ représente une symétrie d'axe $\mathcal{D}$ dirigée par le vecteur d'affixe $e^{i\theta/2}$ et t représente la translation de vecteur d'affixe α qui est dans la direction de $\mathcal{D}$.

On a alors :

$$s \circ t(z) = \frac{b}{2} + a\overline{\left(z + \frac{a\bar{b}}{2}\right)} = a\bar{z} + b = f(z),$$

d'où $s \circ t = f$

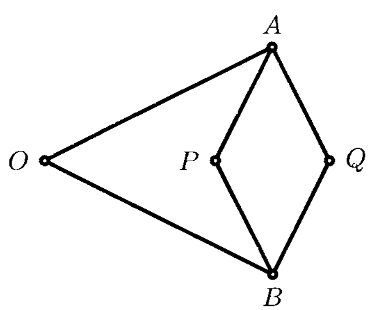
Pour l'unicité, il suffit de remarquer que $t \circ t = f \circ f$ (qui donne l'unicité du vecteur de la translation t) puis $s = t^{-1} \circ f$ (qui donne l unicité de s).

22 Soit I le milieu du segment $[AB]$. Les points O, P et Q sont alignés sur OI, médiatrice de AB. Ils vérifient les égalités :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IP}).(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{IP}) \\ &= OI^2 - IP^2 \\ &= (OA^2 - IA^2) - (AP^2 - IA^2) = r^2 - a^2\end{aligned}$$

d'après le théorème de Pythagore, d'où le résultat.

Les points P et Q restent dans une couronne circulaire de rayons $|r - a|$ et $r + a$. Le système articulé défini par $APBQ$ permet donc de réaliser, au moins partiellement, une inversion ; il porte le nom d'*inverseur de Peaucellier*



du nom du général français qui l'inventa en 1864. Comme l inverseur de Hart, il permet notamment de transformer une partie d'un mouvement rectiligne en mouvement circulaire et inversement

Chapitre 3

Géométrie de l'espace euclidien

1. Il suffit d'écrire :

$$x \wedge (y \wedge z) = (x|z)y - (x|y)z$$
$$z \wedge (x \wedge y) = (z|y)x - (z|x)y$$
$$y \wedge (z \wedge x) = (y|x)z - (y|z)x$$

2. **a)** La perpendiculaire commune Δ à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est dirigée par le vecteur $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = \vec{v}$ de composantes $(-2, 0, 2)$. On cherche alors λ_1 et λ_2 tels que le vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$ reliant les points :

$$H_1 = A_1 + \lambda_1\vec{u_1} \quad \text{et} \quad H_2 = A_2 + \lambda_2\vec{u_2}$$

de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soit parallèle à $\vec{v}$. En terme de coordonnées, il s'agit de déterminer λ_1 et λ_2 tels que :

$$(\lambda_2 - 1 - \lambda_1, \lambda_2 + \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1)$$

soit parallèle à $(-2, 0, 2)$. Cela donne $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1/4$. Les points H_1 et H_2 sont alors de coordonnées $(3/4, 1/4, -1/4)$ et $(1/4, 1/4, 1/4)$. La droite Δ est donc donnée par :

$$\Delta = H_1 + \mathbb{R}\vec{w}$$

où $\vec{w}$ est de composantes $(-1/2, 0, 1/2)$ La distance de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_2$, égale à celle entre H_1 et H_2, est :

$$d = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) En résolvant le système, on obtient les paramétrisations :

$$(5 - \lambda_1, -1, \lambda_1) \quad \text{et} \quad (1 - \lambda_2, \lambda_2, -3)$$

de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. La perpendiculaire commune Δ à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est alors dirigée par le vecteur de composantes $(-1, -1, -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$, de composantes :

$$(-4 - \lambda_2 + \lambda_1, \lambda_2 + 1, -3 - \lambda_1)$$

doit être parallèle à $(-1, -1, -1)$. Cela donne $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -3$. Ainsi H_1 et H_2 sont de coordonnées $(6, -1, -1)$ et $(4, -3, -3)$ et $\overrightarrow{H_1H_2}$ de composantes $(-2, -2, -2)$. La droite Δ a pour representation parametrique :

$$(6 - 2\lambda, -1 - 2\lambda, -1 - 2\lambda).$$

Elle est définie par le système d'équations $x - y = 7$ et $y = z$. La distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est $2\sqrt{3}$.

3 Soient Δ la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ainsi que H_1 et H_2 les intersections de Δ avec ces droites On considère alors le repère orthonormé direct $Oxyz$ dont l'origine est le milieu de $[H_1, H_2]$, Oz la droite Δ et Ox la bissectrice des projections de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sur le plan orthogonal à Δ en O. Dans ce repère, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont pour systèmes d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -\tan\theta\, x \\ z & = & -\lambda \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} y & = & \tan\theta\, x \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

La droite $\mathcal{D}_1$ passe par le point H_1 de coordonnées $(0, 0, -\lambda)$ et est parallèle au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\cos\theta, -\sin\theta, 0)$. La distance de $M = (x, y, z)$ à $\mathcal{D}_1$ est donc donnée par :

$$d(M, \mathcal{D}_1)^2 = \|MH_1\|^2 - \left(\overrightarrow{MH_1}.\vec{u}\right)^2$$

soit :

$$d(M, \mathcal{D}_1)^2 = x^2 + y^2 + (z+\lambda)^2 - (x\cos\theta - y\sin\theta)^2.$$

De la même façon, celle de M à $\mathcal{D}_2$ est fournie par :

$$d(M, \mathcal{D}_2)^2 = x^2 + y^2 + (z-\lambda)^2 - (x\cos\theta + y\sin\theta)^2.$$

L'équation de la surface (S) est donc :

$$(z+\lambda)^2 - (x\cos\theta - y\sin\theta)^2 - (z-\lambda)^2 + (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 = 0$$

c'est-à-dire après simplification :

$$2\lambda z = -(\sin 2\theta)\, xy.$$

Lorsque $\lambda = 0$, on obtient $xy = 0$. La surface (S) est donc la réunion des deux plans Oxz et Oyz.

Lorsque $\lambda \neq 0$, il vient :

$$z = \frac{\sin 2\theta}{2\lambda} xy.$$

Cette surface s'appelle un paraboloïde hyperbolique. On voit aisément que ses intersections avec les plans parallèles à Oxy sont des hyperboles et que celles obtenues avec les plans passant par Oz sont des paraboles.

4. Supposons que les côtés de longueur inférieure ou égale à 1 soient les côtés autres que CD. On peut écrire $AB = 2\sin\theta$ avec $\theta \in [0, \pi/6]$

- Notons h et h' les distances de C et D à la droite AB. La distance de D au plan ABC est inférieure à h'. L'aire du triangle ABC est inférieure à $hAB/2$. Ainsi :
$$V \leqslant \frac{1}{3} hh' \sin\theta.$$
- Soit O le milieu de AB Le théorème de la médiane donne :
$$2h^2 \leqslant 2CO^2 = CA^2 + CB^2 - 2OA^2 \leqslant 2 - 2\sin^2\theta$$
soit $h \leqslant \cos\theta$. On obtient de même $h' \leqslant \cos\theta$. Ainsi :
$$V \leqslant \frac{1}{3} \cos^2\theta \sin\theta.$$
- La fonction $f(\theta) = \frac{1}{3}\cos^2\theta\sin\theta$ est de dérivée :
$$f'(\theta) = \frac{1}{3}\cos\theta\left(1 - 3\sin^2\theta\right)$$
strictement positive sur $[0, \pi/6]$. On a donc :
$$V \leqslant f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}.$$
De plus, cette borne est atteinte pour le tétraèdre $ABCD$ où ABC et ABD sont des triangles équilatéraux de côtés unité situés dans des plans orthogonaux ; on a en effet dans ce cas :
$$V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}.$$

5. **a)** On a par Chasles :
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$$
La somme de ces relations fournit l'égalité désirée. Les relations $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$ impliquent alors $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

b) Supposons $A' \neq B$. Le plan ABA' est orthogonal à CD puisque l'on a $AA' \perp CD$ et $AB \perp CD$. Il contient donc la droite BB' orthogonale elle aussi à CD. Que A soit égal ou non à B, les droites AA' et BB' sont donc coplanaires. Comme elles sont orthogonales aux plans BCD et CDA, elles ne sont pas parallèles. Considérons alors leur intersection H. On a $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD} = 0$ et $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{DA} = 0$. On obtient alors :
$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{DA} = 0$$

et de même $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$. La droite CC' passe ainsi par H. Il en est de même pour DD'.

Supposons réciproquement que les droites AA', BB', CC' et DD' concourent en H. Si H appartient à la droite AB, le plan DCH, qui contient les droites CC' et DD' est orthogonal à la droite AB. Si H n'appartient pas à AB, le plan ABH qui contient AA' et BB' est orthogonal à CD.

c) Si $ABCD$ est régulier le plan médiateur du segment $[A, B]$ contient les points C et D équidistants de A et de B. On a donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$. On obtient de la même façon les deux autres relations

6. Notons G et G' les barycentres de A, B, C affectés de α, β, γ et A', B', C' de α', β', γ' La relation :

$$(\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$$

et son analogue montrent que l'ensemble cherché est l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'} = 0$. Il s'agit donc de la sphère de diamètre GG'

7. Le cercle est posé dans le coin $(\mathbb{R}_+)^3$ de $\mathbb{R}^3$ s'il est inclus dans $(\mathbb{R}_+)^3$ et tangent aux plans des coordonnées.

- On décrit la position du cercle $\mathcal{C}$ par l'arc paramétré :

$$t \mapsto C + r\cos t\,\vec{u} + r\sin t\,\vec{v}$$

où C est le centre de $\mathcal{C}$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée du plan de $\mathcal{C}$. Les coordonnées du point courant de $\mathcal{C}$ sont données pour $i = 1, 2, 3$ par :

$$x_i(t) = C_i + r\cos t\; u_i + r\sin t\; v_i$$

en fonction de celles de C, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Le cercle est « pose » dans le coin $(\mathbb{R}_+)^3$ si, et seulement si, pour tout i la fonction $x_i(t)$ est positive et s'annule au moins une fois. On peut interpréter cela en disant qu'alors le cercle unité $\mathbb{U}$ de paramétrisation $(\cos t, \sin t)$ rencontre et est situé d'un seul côté de la droite :

$$\mathcal{D}_i : C_i + xru_i + xrv_i = 0.$$

Ainsi $\mathcal{D}_i$ est tangente à $\mathbb{U}$ et :

$$d(0, \mathcal{D}_i) = \frac{|C_i|}{\sqrt{r^2u_i^2 + r^2v_i^2}} = 1.$$

- On obtient alors :

$$C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = r^2(u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + u_3^2 + v_3^2) = 2r^2.$$

8. Cet exercice peut être resolu sans calculs, en notant simplement qu'un plan Q est parallèle (respectivement perpendiculaire) à un plan P si et seulement si ses vecteurs normaux sont identiques (respectivement orthogonaux) à ceux de P. On peut également user de la géométrie analytique comme ci-dessous.

a) On peut supposer que P et Q ont des équations de la forme $z = h$ et $z = -h$. Dans le premier cas, R a lui aussi une équation de la forme $z = a$ et est donc aussi parallèle à Q. Dans le second, il n'est pas perpendiculaire au vecteur non nul n de coordonnées $(0, 0, 1)$, normal à P et à Q, et est donc aussi sécant avec Q. Dans le troisième cas, un vecteur non nul normal à R doit être orthogonal à n, ce qui montre inversement que R est aussi perpendiculaire à Q (on retrouverait plus lourdement ces résultats en introduisant explicitement une équation de R sous la forme $ax + by + cz = d$).

b) Cette fois-ci on prendra $x = 0$ et $y = 0$ pour équations respectives de P et Q, et R doit avoir une équation de la forme $x = k$ et donc être aussi perpendiculaire à Q.

En revanche, le fait que R soit sécant ou perpendiculaire à P n'apporte aucune information supplémentaire sur les positions relatives de R et de Q, comme le montre l'exemple du plan d'équation $y = 1$

9. Les plans P et ABC ont en commun la droite EF (qui existe puisque E et F sont distincts) mais non le point G qui n appartient qu'au second; ils sont donc distincts et EF est leur intersection. Si la droite AB, parallèle à P, avait un point commun avec EF, elle serait incluse dans P donc egale à EF : elle est donc disjointe de EF qui lui est strictement parallèle. Il en est de même de AB et de GH, d'où par transitivité le parallélisme de EF et de GH. On prouverait de même que EH et FG sont parallèles, d'où le résultat.

10. Comme P est inclus dans le demi-espace $z \geqslant 0$, il ne peut contenir que des droites parallèles à Oxy. Or une section horizontale de P est soit vide, soit réduite à un point, soit une ellipse. Elle ne contient donc aucune droite

11. Changer $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en $(-\vec{u}, -\vec{v}, -\vec{w})$ laisse (a, b, c) invariant, alors que d est multiplié par -1. Nous allons montrer qu inversement la chose est possible pour d^2.

Si d est nul, on peut supposer par exemple que $\vec{u}$ est une combinaison linéaire $\vec{u} = x\,\vec{v} + y\,\vec{w}$ du couple $(\vec{v}, \vec{w})$. Sinon, $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w})$ est une base de l'espace puisque le troisième vecteur n'est pas nul et orthogonal à chacun des deux autres, et que ces deux derniers ne sont pas colinéaires. Soit alors $\vec{k}$ un vecteur unitaire défini par l'égalité $\vec{v}\wedge\vec{w} = (\sin\alpha)\,\vec{k}$, et (x, y, z) le triplet de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{k})$:

$$\vec{u} = x\,\vec{v} + y\,\vec{w} + z\,\vec{k}.$$

Par exemple le nombre $|z|$ est la distance de l extrémite de $\vec{u}$ au plan $(\vec{v}, \vec{w})$. Cette égalité est donc valable que l'on ait $d = 0$ ou $d \neq 0$, avec $\vec{k}$ unitaire et orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Par définition :

$$d = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0x + 0y + z\,(\sin\alpha), \qquad d^2 = (\sin^2\alpha)\,z^2 = (1 - a^2)\,z^2$$

On dispose des égalités $b = \vec{w}.\vec{u} = a\,x + y$ et $c = \vec{u}.\vec{v} = x + a\,y$, d'où $(\sin^2\alpha)\,x = c - ab$ et $(\sin^2\alpha)\,y = b - ac$. Or $\vec{u}.\vec{k} = z$, d'où $1 = \vec{u}.\vec{u} = c\,x + b\,y + z^2$. Par suite :

$$(1 - a^2)\,(1 - z^2) = (\sin^2\alpha)\,(1 - z^2) = c\,(c - ab) + b\,(b - ac) = b^2 + c^2 - 2\,abc,$$

$$(\sin^2\alpha)\,(1 - z^2) = \frac{b^2 + c^2 - 2\,abc}{1 - a^2},$$

$$d^2 = (\sin^2\alpha)\,z^2 = 1 - a^2 - b^2 - c^2 + 2\,abc$$

et le résultat demandé.

12. L'egalité $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \lambda\left(\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR}\right)$ conduit aussitôt à l'égalité

$$\vec{\imath}.\overrightarrow{OQ} - \vec{\imath}.\overrightarrow{OP} = \lambda\left(\vec{\imath}.\overrightarrow{OS} - \vec{\imath}.\overrightarrow{OR}\right).$$

Si $\vec{\imath}$ est un vecteur d'un repère orthonormé de l'espace, la relation précédente signifie que les coordonnées (p, q, r, s) des quatre points (P, Q, R, S) vérifient la relation $q - p = \lambda\,(s - r)$.

13. Soit (U, U') le couple des intersections d un plan H avec deux parallèles strictes Δ et Δ', et (V, V') le couple analogue où H est remplacé par un plan K strictement parallèle à H. Les quatre points (U, U', V, V') définissent un plan coupant respectivement les plans H et K selon les droites UU' et VV'. Ces intersections, coplanaires, sont disjointes et donc parallèles, comme le sont UV et $U'V'$: le quadrilatère $UU'V'V$ est bien un parallélogramme.

14 Si les droites AA' et BB' étaient parallèles, elles seraient coplanaires et il en serait de même de $D = AB$ et de $D' = A'B'$. La parallèle à AA' issue de B est donc distincte de BB' et définit avec elle un plan P, sécant avec D' en B' et parallèle à BB'. Le parallélisme de AA' et d'une droite de P montre que P est aussi parallèle à AA'. Reste à prouver que P est encore parallèle à CC'.

Il existe un repère orthonormé de l espace dans lequel le plan P a pour équation $z = 0$. Il existe un réel h tel que le plan parallèle à P contenant A et A'

ait pour équation $z = a$. Les égalités $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{B'C'}$ et le résultat de l'exercice 10 impliquent que les points C et C' appartiennent au plan d'équation $z = c$ avec $kc = -a$, ce qu'il fallait démontrer.

Voici une variante n'utilisant plus la geométrie analytique mais l'exercice 11. La parallèle L à D' issue de A coupe P en un point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{A'B'}$. Soit Q le plan strictement parallèle à P issu de C. Il contient la parallèle à BE issue de C, qui coupe elle-même la droite AE en un point F tel que les triangles ABE et ACF soient homothétiques et vérifient la relation

$$k\,\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{B'C'}.$$

Les droites L et D' strictement parallèles, forment avec les plans P et Q, strictement parallèles, un parallélogramme $EB'GF$ d'où les égalités $\overrightarrow{B'G} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{B'C'}$, l'égalité $C' = G$, l'inclusion $CC' \subset Q$ et le résultat

Ce résultat porte le nom de *réciproque du théorème de Thalès dans l espace.*

15. **a)** Une telle sphère a une équation de la forme $x^2 + y^2 + z^2 = 2(px + qy + rz)$ où (p, q, r) sont les coordonnées de Ω. Elle vérifie les égalités :

$$0 = 4a^2 - 4ap = 4b^2 - 4bq = 4c^2 - 4cr,$$

d'où $(p, q, r) = (a, b, c)$ et $R^2 = p^2 + q^2 + r^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Une équation évidente du plan ABC s'écrivant $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} + \frac{z}{2c} = 1$, le vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ a des coordonnées de la forme $\left(a + \frac{\lambda}{a}, b + \frac{\lambda}{b}, c + \frac{\lambda}{c}\right)$. En reportant ces valeurs dans l'équation du plan, on trouve $\lambda = -\dfrac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$ et finalement le triplet de coordonnees de ω :

$$\frac{a^3(b^2 + c^2)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}, \quad \frac{b^3(a^2 + c^2)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}, \quad \frac{c^3(a^2 + b^2)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}.$$

b) Le plan défini par les droites OA et OH, toutes deux orthogonales à BC, est donc perpendiculaire à BC, d'où il résulte que la droite AH, qu'il contient, est perpendiculaire à BC Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC puisque les trois points A, B et C jouent des rôles symétriques.

NB : On peut aussi procéder par le calcul, comme au a), mais le résultat n'apparaît pas clairement sur les formules et est obtenu ainsi de manière beaucoup plus laborieuse.

16. **a)** Le produit vectoriel donne aussitôt $2S = \beta\gamma \sin A$ où A désigne aussi une mesure de l'angle en A, alors que le produit scalaire donne $2\beta\gamma \cos A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$. L'égalité s'ensuit facilement.

b) Puisque $\alpha^2 = b^2 + c^2$, $\beta^2 = c^2 + a^2$ et $\gamma^2 = a^2 + b^2$, il en résulte l'égalité :

$$16\, S^2 = 4\,(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$$

qu'il fallait vérifier.

NB : Cette démonstration est celle que donne Descartes dans ses *Cogitationes Privatæ*, non destinées à la publication.

17. Les projetés orthogonaux sur la droite BC des points de la droite OA perpendiculaire à BC, sont confondus en un même point H, intersection de BC avec l'unique plan perpendiculaire à BC contenant OA. En particulier O et A ont même projeté (ce résultat est connu sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires*).

La fonction définie par :

$$f(a) = \text{aire}\,(ABC)^2 - \text{aire}\,(OBC)^2$$

vérifie donc les égalités :

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{4}\, BC^2\,(AH^2 - OH^2) = \frac{1}{4}\, BC^2\, OA^2 = \frac{1}{1}\,(OB^2 + OC^2)\, OA^2 \\ &= \text{aire}\,(OAB)^2 + \text{aire}\,(OCA)^2. \end{aligned}$$

18. Prenant O comme origine et les vecteurs de base positivement proportionnels à $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, on trouve que le plan ABC a pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, et est distant de l'origine de $\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$.

Or S vérifie l'égalité $3V = \delta S$ où $V = \frac{abc}{6}$ est le volume de la pyramide (ces relations connues depuis le collège, résultent en fait d exercices très faciles sur les intégrales doubles et triples). Le résultat en découle aussitôt.

NB : Comme Descartes semble en avoir eu l'obscure intuition, toutes ces démonstrations peuvent être étendues à un espace euclidien de dimension arbitraire. Le théorème général qui en découle porte parfois le nom de *théorème de Schläfli* (1852).

19. Géométriquement, il faut et il suffit que O appartienne aux trois sphères de diamètres respectifs BC, CA et AB. Les deux dernières se coupent, puisqu'elles ont un point commun A ; leur intersection est le cercle situe dans un plan perpendiculaire à ABC dont un diamètre est AP où P est le projeté orthogonal de A sur BC. S'il existe un tel point O il se projette donc orthogonalement en H, orthocentre du triangle ABC, et il existe deux solutions symétriques par rapport au plan du triangle, confondues si le triangle est rectangle ou il n'en existe aucune. La condition d'existence est que les trois hauteurs se coupent à l'intérieur (éventuellement un un sommet) du triangle, c'est-à-dire que ses angles soient tous aigus (triangle acutangle).

Le calcul redonne aussitôt cette condition : si l'on pose $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = \alpha$, $CA = \beta$ et $AB = \gamma$, ces nombres doivent vérifier trois égalités de la forme $\alpha^2 = b^2 + c^2$, d'où par exemple la relation $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = 2a^2 \geqslant 0$ et le caractère aigu (éventuellement droit) de l'angle en A du triangle ABC.

Remarque :

Connaissant ainsi (a, b, c), la détermination de O est alors facile : partant d'un point arbitraire M et d un triplet (U, V, W) défini par l'orthogonalité mutuelle des droites MU, MV et MW et les égalités $MU = a$, $MV = b$ et $MW = c$, on constate que l'on peut passer du triangle ABC au triangle UVW par une isométrie f de l'espace, et O n'est autre que $f^{-1}(M)$. En fait, l'étude systématique de telles isométries montrera qu'il existe en général deux f possibles, d'où deux points O possibles (le cas limite étant celui où $abc = 0$ la pyramide étant aplatie en un sommet du triangle ABC qui est alors rectangle).

20 **a)** Posons $\vec{p} = \vec{v} - (\cos\gamma)\vec{u}$ et $\vec{q} = \vec{w} - (\cos\beta)\vec{u}$. Le calcul de $\vec{p}.\vec{u}$ montre que $\vec{p}$ est orthogonal à $\vec{u}$, et que sa norme est donc égale à $\sin\gamma \geqslant 0$ (respectivement $\vec{q}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et de norme $\sin\beta$). On peut écrire

$$\cos\alpha = \vec{v}.\vec{w} = \cos\beta\cos\gamma + \vec{p}.\vec{q},$$

nombre supérieur ou égal à $\cos\beta\cos\gamma - \|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\|$, lui-même égal à $\cos(\beta+\gamma)$. Si $\beta + \gamma > \pi$, il n'y a rien à démontrer. Sinon les variations de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$ montrent que $\alpha \leqslant \beta + \gamma$.

b) S'il y a égalité, c'est que le produit scalaire $\vec{p}\,\vec{q}$ est egal à l'opposé du produit des normes des deux vecteurs, c'est-à-dire que $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont négativement proportionnels et définissent avec $\vec{u}$ un plan contenant $\vec{v}$ et $\vec{w}$, c'est-à-dire la nullité du déterminant.

c) C'est celle du a) pour le triplet $(-\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Chapitre 4

1. $$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln(\sqrt{1+x^2}-x) &= \ln\left((x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)\right)\\ &= \ln(1)=0.\end{aligned}$$

2. $$\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5 \\ xy = e \end{cases} \iff \begin{cases} 2(\ln x)^2+2(\ln y)^2+5\ln x \ln y = 0 \\ \ln x + \ln y = 1 \\ x \neq 1 \text{ et } y \neq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln x \ln y = -2 \\ \ln x + \ln y = 1 \\ x \neq 1 \text{ et } y \neq 1. \end{cases}$$

$\ln x$ et $\ln y$ sont les solutions de $X^2 - X - 2 = 0$, c'est-à-dire -1 et 2. Finalement les solutions du système sont (e^{-1}, e^2) et (e^2, e^{-1}).

3. $$\begin{aligned}\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2 &\iff \ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leqslant \ln 2\\ &\iff \left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leqslant 2 \text{ et } x \neq -1\\ &\iff (x+1)^2 \leqslant 4(2x+1)^2 \text{ et } x \neq -1 \text{ et } x \neq -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On trouve :

$$S =]-\infty, -1[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

4. $$\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = e^{x^2 \ln x - x^x \ln x} = e^{x^x(x^{2-x}-1)\ln x}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x \ln x = +\infty$.
La limite cherchée est donc 0.

5. $$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x &\iff e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x \ln\sqrt{x}}\\ &\iff \sqrt{x}\ln x = \frac{x}{2}\ln x\\ &\iff (x=1) \text{ ou } (x>0 \text{ et } x = 2\sqrt{x})\\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 4.\end{aligned}$$

6. $\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, 0, -\dfrac{\pi}{4}$.

7. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \sqrt{1-x^2}, \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

8. **a)** 1.

b) $\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y$.

9. L'équation est équivalente à $(e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0$.
Les solutions de $X^2 - 4X + 1 = 0$ sont $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$
Les solutions de l'équation sont donc $\ln(2 - \sqrt{3})$ et $\ln(2 + \sqrt{3})$

10. Il suffit de vérifier que la dérivée de l expression est nulle sur $\mathbb{R}$.
Puis :

$$\arctan\left(e^x\right) - \arctan\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right) = \arctan\left(e^0\right) - \arctan\left(\operatorname{th}\frac{0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

11. **a)** $e_1 = e^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\ln x} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$

b) $e_2 = \log_x(x^y \log_x x) = \log_x(x^y) = y \log_x x = y$

12. Soit $y \neq 0$. Considérons la fonction

$$f_y : x \mapsto \arctan x + \arctan y - \arctan\frac{x+y}{1-xy}$$

définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{y}\right\}$.

On vérifie que f_y' est nulle sur chacun des intervalles $\left]-\infty, \dfrac{1}{y}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{y}, +\infty\right[$, donc que f_y est constante sur chacun de ces intervalles
Si $y > 0$ en considérant la limite en $-\infty$ de f_y, on trouve

$$\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{y}\right[\ ,\ f_y(x) = 0$$

et :

$$\forall x \in \left]\frac{1}{y}, +\infty\right[\ ,\ f_y(x) = \pi.$$

De même, si $y < 0$, on trouve :

$$\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{y}\right[\ ,\ f_y(x) = -\pi$$

et :

$$\forall x \in \left]\frac{1}{y}, +\infty\right[\quad f_y(x) = 0.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \arctan x + \arctan y - \arctan \frac{x+y}{1-xy} &= 0 \text{ si } xy < 1 \\ &= \pi \text{ si } xy > 1 \text{ et } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ &= -\pi \text{ si } xy > 1 \text{ et } x < 0 \text{ et } y < 0. \end{aligned}$$

et n'est pas défini si $xy = 1$.

13. On trouve :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

et :

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

14. Supposons les λ_i classés par ordre croissant :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n.$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} P_i(x) + P_n(x) = 0.$$

En prenant la limite de cette expression en $+\infty$ (comparaison des fonctions puissances et exponentielles), on trouve :

$$\lim_{x \to +\infty} P_n(x) = 0$$

d'où $P_n = 0$.
Le résultat demandé s'en suit par récurrence.

15 Notons $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$

$$\begin{aligned} C + S &= \sum_{k=0}^{n} e^{a+kb} \\ &= \frac{e^{a+(n+1)b} - e^a}{e^b - 1} \\ &= \frac{e^{a+\frac{n+1}{2}b}\left(\operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}b)\right)}{e^{\frac{b}{2}}\left(\operatorname{sh}(\frac{b}{2})\right)} \\ &= e^{a+\frac{nb}{2}} \frac{\operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}b)}{\operatorname{sh}(\frac{b}{2})}. \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve :

$$C - S = e^{-a-\frac{nb}{2}} \frac{\operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}b)}{\operatorname{sh}(\frac{b}{2})}.$$

On en déduit :

$$C = \operatorname{ch}\left(a + \frac{nb}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}b)}{\operatorname{sh}(\frac{b}{2})}$$

et :

$$S = \operatorname{sh}\left(a + \frac{nb}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}b)}{\operatorname{sh}(\frac{b}{2})}.$$

16. **a)**

$$\ln\left(\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}\right) = b^x \ln a - a^x \ln b = b^x \left(\ln a - \left(\frac{a}{b}\right)^x \ln b\right)$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\ln a - \left(\frac{a}{b}\right)^x \ln b\right) = \ln a > 0$$

d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}\right) = +\infty$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} = +\infty.$$

b)

$$\ln\left(\frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}}\right) = a^x \ln a - x^a \ln x = a^x \left(\ln a - \frac{x^a \ln x}{a^x}\right).$$

L'expression entre parenthèses a une limite égale à $\ln a$ en $+\infty$, d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}}\right) = +\infty$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}} = +\infty.$$

17. **a)** Si $\arctan x + \arctan 2x = \dfrac{\pi}{4}$, alors les deux membres de l'égalité ont la même tangente et :

$$\frac{3x}{1-2x^2} = 1.$$

Les solutions sont donc à chercher parmi les solutions de $2x^2 + 3x - 1 = 0$ qui sont $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$.
Le réel x_1 n'est évidemment pas solution et l'on a :

$$\arctan x_2 + \arctan 2x_2 \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\pi].$$

Comme $0 \leqslant \arctan x_2 + \arctan 2x_2 \leqslant \pi$, on en déduit que x_2 est solution

Remarque : on a $\arctan x_1 + \arctan 2x_1 = -\dfrac{3\pi}{4}$ par le même argument.

b) Posons $x = \sin\theta$ avec $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors x est solution de l'équation si et seulement si :

$$\theta + \arcsin(\cos\theta) = \frac{\pi}{2}$$

soit :

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\pi}{2} - \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Finalement l'ensemble des solutions est $[0, 1]$

c) Posons $x = \sin\theta$ avec $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors :

$$2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta.$$

L'équation est donc équivalente à :

$$2\theta = \arcsin(\sin 2\theta)$$

qui est équivalente à :

$$2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

soit :

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right].$$

L'ensemble des solutions est donc $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

d) On a : $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin(\sqrt{2}x)$ si et seulement si :

$$\cos\left(\arcsin(2x)\right) = \cos\left(\arcsin x + \arcsin(\sqrt{2}x)\right)$$
$$\text{et } \sin\left(\arcsin(2x)\right) = \sin\left(\arcsin x + \arcsin(\sqrt{2}x)\right).$$

La seconde équation conduit (après calculs) à $x = 0$, $x = \dfrac{\sqrt{14}}{8}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{14}}{8}\cdot$

On vérifie que ces trois valeurs sont solutions.

En effet, la fonction continue $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin\sqrt{2}x + \arcsin x - \arcsin 2x}{x}$ tend vers $\sqrt{2}+1-2 > 0$ en 0 et vaut $2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{2}\right) < 0$ en $\dfrac{1}{2}\cdot$ Donc f s'annule sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et par imparité sur $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$.

18. **a)** La fonction $f : x \mapsto \operatorname{argsh}\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$. On en déduit : $\forall x > 0\ ,\ f(x) = \ln x + k$. En prenant la valeur en 1, on trouve $k = 0$. Puis par imparité, $\forall x < 0\ ,\ f(x) = -\ln|x|$.

b) La fonction $f : x \mapsto \operatorname{argch}(2x^2-1)$ est définie pour $|x| \geqslant 1$ et dérivable pour $|x| > 1$.

Sa dérivée est pour $x > 1$, $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ et $x \mapsto -\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ pour $x < -1$.

On conclut en utilisant la continuité en 1 et en -1 que $f(x) = 2\operatorname{argch}|x|$ pour $|x| \geqslant 1$.

c) $f(x) = \operatorname{argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{1-\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}\right)$ où l'on a pose $y = \operatorname{ch} x$.

Puis $\dfrac{1+\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{1-\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}} = \dfrac{(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1})^2}{2} = \operatorname{ch} x + |\operatorname{sh} x| = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$

On a donc finalement $f(x) = \dfrac{|x|}{2}\cdot$

19. On vérifie que si $(x, y) \in\,]-1, 1[^2$ alors $\dfrac{x+y}{1+xy} \in\,]-1, 1[$. La fonction th étant bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$, il suffit de montrer que les deux termes de l'égalite ont la même tangente hyperbolique, ce qui découle immédiatement de la formule :

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}\cdot$$

20. L'équation est équivalente à :

$$\operatorname{argsh}(x-a)\ln(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) = \operatorname{argsh}(x-b)\ln(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x).$$

Or : $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$. L'équation devient alors : $x\operatorname{argsh}(x-a) = -x\operatorname{argsh}(x-b)$ qui a deux solutions 0 et $\dfrac{a+b}{2}\cdot$

21. La deuxième équation du système est équivalente à $y^2 = x^3$ et la première à $x = \operatorname{sh}\big(2\operatorname{argsh}(y)\big) = 2y\sqrt{1+y^2}$. Il reste à chercher les solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $x^2 = 4x^3 + 4x^6$ obtenue en élevant au carré l'équation précédente. On trouve facilement qu'il y en a une seule.

22.
- On a $e^x = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{y}{2}\right) = \dfrac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}$ ce qui permet d écrire $\tan\dfrac{y}{2} = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}\cdot$
- On exprime $\operatorname{th} x$ en fonction de $\operatorname{th}\dfrac{x}{2}$ puis en fonction de $\tan\dfrac{y}{2}$ et on reconnait l'expression de $\sin y$ en fonction de la tangente de $\dfrac{y}{2}\cdot$
- On écrit $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$, puis on remarque que si $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{y}{2}\right) > 0$ alors $\cos y > 0$.

Chapitre 5

1. Soit f une solution de l'equation sur $]-1,1[$. Alors f est solution de l'équation $y' = 0$ sur $]-1,0[$ et de $y' + y = 0$ sur $]0,1[$, donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in\ ]-1,0[\ ,\ f(x) = \lambda$ et $\forall x \in\ ]0,1[\ ,\ f(x) = \mu e^x$. En écrivant que f est continue et dérivable en 0, on trouve $\lambda = \mu = 0$, puis $f = 0$ qui est bien solution de l'équation.
On remarque que cette équation linéaire du premier ordre n'a que la solution nulle, ce qui n'est pas en désaccord avec la proposition 3 du cours puisque la fonction b n est ici pas continue sur I.

2. **a)** La solution générale de l'équation homogène est λe^{-2x}.
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2.
La solution générale de l'équation avec second membre est :
$$\lambda e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}.$$

b) La solution générale de l'équation homogène est $\lambda \ln x$.
$\frac{1}{x}$ La méthode de variation de la constante permet de trouver $\frac{1}{x}$ comme solution particulière.
La forme des solutions sur $]0,1[$ ou sur $]1,+\infty[$ est donc :
$$\lambda \ln x + \frac{1}{x}.$$

c) La solution générale de l'équation homogène est $\frac{\lambda}{1+x}$.
La fonction $\ln(1+x)$ est une solution particulière.
La forme des solutions sur $]-1,+\infty[$ est donc :
$$\frac{\lambda}{1+x} + \ln(1+x).$$

d) La solution générale de l'équation homogène est :
$$\lambda(x-1).$$
Puis la méthode de variation de la constante donne :
$$\lambda'(x) = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$
soit :
$$\lambda = \ln|x| - \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|.$$
Les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ ou $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$ sont donc :
$$(x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \lambda(x-1).$$

e) La solution générale de l'equation homogène est λe^{-x} puis la méthode de variation de la constante donne :
$$\lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$
soit :
$$\lambda(x) = \ln(1+e^x).$$
La solution générale est donc :
$$e^{-x}\ln(1+e^x) + \lambda e^{-x}.$$

f) Sur un intervalle du type $I_n =]n\pi, (n+1)\pi[$, les solutions de l'équation homogène sont de la forme $\lambda \sin x$. On remarque d'autre part que $\cos x$ est une solution particulière de l'équation.
La solution générale sur un intervalle I_n est donc de la forme $\cos x + \lambda \sin x$.

g) On résout l'equation sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
La solution générale de l'équation homogène associée est :

- sur $\mathbb{R}^{+*}$: $\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$
- sur $\mathbb{R}^{-*}$: $\dfrac{\mu}{\sqrt{-x}}$.

Une solution particulière sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation est $\dfrac{x^n}{2n+1}$.
La solution générale de l'équation est donc :

- sur $\mathbb{R}^{+*}$: $\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} + \dfrac{x^n}{2n+1}$
- sur $\mathbb{R}^{-*}$: $\dfrac{\mu}{\sqrt{-x}} + \dfrac{x^n}{2n+1}$.

3. La fonction $u = x' + iy'$ est solution de l'équation $u' = -i\omega u$ dont les solutions sont de la forme :

$$u = u_0 e^{i\omega t} = (x'(0)\cos\omega t - y'(0)\sin\omega t) + i(x'(0)\sin\omega t + y'(0)\cos\omega t)$$

Puis $x' = x'(0)\cos\omega t - y'(0)\sin\omega t$ et $y' = x'(0)\sin\omega t + y'(0)\cos\omega t$, qui s'intègrent en :

$$x = \frac{x'(0)}{\omega}\sin\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\cos\omega t + x(0) - \frac{y'(0)}{\omega}$$

et

$$y = -\frac{x'(0)}{\omega}\cos\omega t + \frac{y_0'}{\omega}\sin\omega t + y(0) + \frac{x'(0)}{\omega}.$$

L'équation en z donne directement $z = z'(0)t + z(0)$.

4. Par double dérivation, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ g''(x) - g(x) = f''(x)$$

avec de plus $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$.
Si g_1 et g_2 sont deux solutions du problème alors $y = g_1 - g_2$ est solution du problème de Cauchy $y'' - y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ qui admet une seule solution qui est la fonction nulle.
Cela prouve que le problème admet au plus une solution.

Dans le cas où $f(x) = \cos x$, la solution générale de l'équation :

$$y'' - y = -\cos x$$

est :

$$\lambda e^{-x} + \mu e^{x} + \frac{1}{2}\cos x.$$

Il faut de plus $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$ ce qui impose $\lambda = \mu = \frac{1}{4}\cdot$

5. **a)** L'équation caractéristique est $r^2 + r - 6 = 0$ qui a deux racines 2 et -3.
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 : on trouve $2 + 3x + 5x^2$.
Les solutions sont donc de la forme :

$$2 + 3x + 5x^2 + \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{-3x}.$$

b) L'équation caractéristique est $r^2 + r = 0$ qui a deux racines 0 et -1.
On cherche une solution particulière sous la forme d un polynôme de degré 2 : on trouve $x + x^2$.
Les solutions sont donc de la forme :

$$x + x^2 + \lambda_1 + \lambda_2 e^{-x}.$$

c) L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$ qui a deux racines $2i$ et $-2i$.
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3 : on trouve $2 + 2x - 2x^2 - x^3$.
Les solutions réelles sont donc de la forme :

$$2 + 2x - 2x^2 - x^3 + \lambda_1 \cos 2x + \lambda_2 \sin 2x \;\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

et les solutions complexes :

$$2 + 2x - 2x^2 - x^3 + \lambda_1 e^{2ix} + \lambda_2 e^{-2ix} \;\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

d) L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$ qui a deux racines -2 et -1.
On cherche une solution particulière sous la forme αe^{x} : on trouve $\frac{1}{6}e^{x}$.
Les solutions sont donc de la forme :

$$\frac{1}{6}e^{x} + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x}.$$

e) L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$ qui a deux racines -2 et -1.
On cherche une solution particulière sous la forme $\alpha x e^{-x}$: on trouve xe^{-x}.
Les solutions sont donc de la forme :

$$xe^{-x} + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x}.$$

f) L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ qui une racine double -1.
On cherche une solution particulière sous la forme $\alpha x^2 e^{-x}$: on trouve $x^2 e^{-x}$.
Les solutions sont donc de la forme :

$$x^2 e^{-x} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 x e^{-x}.$$

g) L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0$ qui une racine double - 2.
On cherche une solution particulière sous la forme $P(x)e^{2x}$ avec P de degré 2 : on trouve $(x^2 - 1)e^{2x}$.
Les solutions sont donc de la forme :

$$(x^2 - 1)e^{2x} + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 x e^{-2x}.$$

h) L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ qui a deux racines 1 et 2.
On cherche une solution particulière sous la forme $P(x)e^x$ avec P de degré 3 : on trouve $(x^3 - 2x^2 + 3x)e^x$.
Les solutions sont donc de la forme :

$$(x^3 - 2x^2 + 3x)e^x + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}.$$

i) L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ qui a une racine double 2
On cherche une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{x}{2}e^{2x}$ et de $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{x}{2}e^{-2x}$ et l'on applique le principe de superposition des solutions.
On trouve que les solutions sont de la forme :

$$\frac{1}{12}x^3 e^{2x} + \frac{1}{32}x e^{-2x} + \frac{1}{64}e^{-2x} + \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 x e^{2x}.$$

j) L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$ dont les racines sont 1 et -2.
On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $\lambda \sin(2x) + \mu \cos(2x)$.
On trouve :

$$-\frac{6}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x.$$

La solution générale de l'équation est donc :

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-2x} - \frac{6}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x.$$

k) L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$ dont les solutions sont $1 - 2i$ et $1 + 2i$.
La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$\lambda_1 e^x \cos 2x + \lambda_2 e^x \sin 2x.$$

On cherche une solution particulière de l'équation :

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos x + 7e^{-x}\sin x$$

sous la forme :

$$\alpha e^{-x}\sin x + \beta e^{-x}\cos x.$$

On trouve $e^{-x}\sin x$. On cherche une solution particulière de l'équation :

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{x}\sin 2x$$

sous la forme :

$$\alpha x e^{x}\sin 2x + \beta x e^{x}\cos 2x.$$

On trouve $xe^{x}\cos 2x$. La forme générale des solutions est donc :

$$xe^{x}\cos 2x + e^{-x}\sin x + \lambda_1 e^{x}\cos 2x + \lambda_2 e^{x}\sin 2x.$$

6. Posons $y' = z$ alors :

$$(1+x)^2 z' + (1+x)z = 2.$$

La solution générale de l'équation homogène est :

$$\lambda\frac{1}{x+1}.$$

La methode de variation de la constante conduit à :

$$z = \frac{1}{x+1}(2\ln|1+x| + \lambda_1).$$

Finalement la solution générale de l'équation sur tout intervalle ne contenant pas -1 est :

$$y = (\ln|1+x|)^2 + \lambda_1\ln|1+x| + \lambda_2.$$

7 Si z est une solution de l'équation alors :

$$\begin{aligned} z'(x) &= 2y'(x)y(x) - y'^2(x)\frac{q'(x)}{q^2(x)} + 2y'(x)y''(x)\frac{1}{q(x)} \\ &= -y'^2(x)\frac{q'(x)}{q^2(x)} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Par suite z est une fonction positive décroissante donc bornée au voisinage de $+\infty$ et :

$$\forall x \geqslant A\ ,\ 0 \leqslant y^2(x) \leqslant z(x)$$

ce qui prouve que y est bornée au voisinage de $+\infty$

8. On pose $z = y^2$, l'équation devient $x^2 + z - xz' = 0$ dont les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$ sont $\lambda x + x^2$.

Les solutions de l'équation sont donc de la forme $\sqrt{x^2 + \lambda x}$ ou $-\sqrt{x^2 + \lambda x}$.

9. **a)** Soit z la fonction définie par $z(t) = y(\sin t)$.

On a :

$$z'(t) = \cos t\, y'(\sin t)$$

puis .

$$z''(t) = \cos^2 t\, y''(\sin t) - \sin t\, y'(\sin t).$$

L'équation devient :

$$z'' + z = 0$$

dont les solutions sont :

$$A \sin t + B \cos t.$$

Les solutions de l'équation de départ sont donc de la forme :

$$A \sin(\arcsin x) + B \cos(\arcsin x) = Ax + B\sqrt{1 - x^2}$$

b) Si $x > 1$, posons $x = \operatorname{ch} t$ l'équation devient :

$$z'' - z = 0$$

dont les solutions sont :

$$A \operatorname{ch} t + B \operatorname{sh} t.$$

Or :

$$x = \operatorname{ch} t \text{ et } t \geqslant 0 \Longrightarrow \operatorname{sh} t = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$Ax + B\sqrt{x^2 - 1}.$$

De plus, on remarque que si y est solution de l'équation de départ sur $]-\infty, -1[$ alors la fonction z définie par $z(x) = y(-x)$ est solution de l'équation sur $]1, +\infty[$ donc est de la forme précédente.

On en déduit la forme des solutions sur $]-\infty, -1[$:

$$Ax + B\sqrt{x^2 - 1}$$

10. On a $z' = y + xy'$ et $z'' = 2y' + xy''$

L'équation devient :

$$z'' + 2z' + z = 0$$

dont les solutions sont :

$$\lambda x e^{-x} + \mu e^{-x}.$$

Alors les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme :

$$\lambda e^{-x} + \mu \frac{e^{-x}}{x}.$$

11. **a)** Soit y une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(e^t)$. On a :

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

Donc y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de :

$$az'' + (b-a)z' + cz = 0.$$

b) On en déduit, suivant les racines de l'équation caractéristique de (E') la forme des solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ et donc de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$

- Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de (E) sont les combinaisons linéaires de x^{r_1} et x^{r_2}.
- Si l'équation caractéristique admet une racine double r_1, les solutions de (E) sont les combinaisons linéaires de x^{r_1} et $x^{r_1} \ln x$.
- Si l'équation admet deux racines complexes non réelles conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, alors les solutions de (E) sont les combinaisons linéaires de $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ et $x^\alpha \sin(\beta \ln x)$.

On réalise la même opération pour les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ de (E) en posant :

$$z(t) = y(-e^t).$$

Remarque : l'espace des solutions est de dimension 2

c)
- Solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Posons $z(t) = y(e^t)$, z est solution de $z'' - 2z' + z = 0$ donc est de la forme $\lambda e^t + \mu t e^t$.
  Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc de la forme $\lambda x + \mu x \ln x$.
- Solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.

  Remarquons que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $y(-x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont donc de la forme $\lambda x + \mu x \ln(-x)$.

12. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et (I, f) l'unique solution maximale de l équation. Si $y_0 = 0$ alors il est clair que $I = \mathbb{R}$ et $f = 0$. Supposons que $y_0 \neq 0$, alors f ne s'annule pas sur I et l'on a sur I :

$$\frac{f'}{f^2} - \frac{1}{f} = x^2.$$

Posons $g = \dfrac{1}{f}$, alors $g' = -\dfrac{f'}{f^2}$ et g est la solution sur I de l'équation $z' + z = x^2$ qui vérifie $g(x_0) = \dfrac{1}{y_0}$ soit $g = \lambda e^{-x} - x^2 + 2x - 2$ où $\dfrac{1}{y_0} = \lambda e^{-x_0} - x_0^2 + 2x_0 - 2.$

Soit I_0 le plus grand intervalle contenant x_0 et contenu dans I sur lequel g ne s'annule pas. Si I_0 a une extrémité réelle a alors $g(a) = 0$, sinon par continuité g ne s'annulerait pas autour de a et donc $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$, ce qui assure que $I_0 = I$. Finalement $f(x) = \dfrac{1}{\lambda e^{-x} - x^2 + 2x - 2}$ sur le plus grand intervalle contenant x_0 sur lequel le dénominateur ne s'annule pas.
Remarque : cette méthode permet de résoudre les équations différentielles de la forme $y' = a(x)y + b(x)y^n$ dites de Bernoulli.

13 On trouve une solution polynomiale évidente $y = x + 1$. Posons alors $y = x + 1 + z$. L'équation devient $z' = z^2 + 2z$. Sur un intervalle où z ne s'annule pas, on peut poser (voir l'exercice précédent) $w = \dfrac{1}{z}$.
L'équation devient alors $u' = -2u - 1$ dont les solutions sont $u = -\dfrac{1}{2} + \lambda e^{-2x}$ d'où les solutions en y sous la forme $y = x + 1 + \dfrac{1}{-\frac{1}{2} + \lambda e^{-2x}}$.

14 On derive deux fois l'équation fonctionnelle par rapport à x, puis par rapport à y.
On obtient :

$$2f''(x)f(y) = f''(x+y) + f''(x-y)$$

et :

$$2f(x)f''(y) = f''(x+y) + f''(x-y)$$

d'où :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$

Supposons que f n'est pas la fonction identiquement nulle (qui est une solution du problème), alors il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. Posons $k = \dfrac{f''(x_0)}{f(x_0)}$.
On a :

$$\forall y \in \mathbb{R} \ , \ f''(y) = kf(y)$$

dont les solutions sont les fonctions du type $y \mapsto \cos(ay+b)$ et $y \mapsto \operatorname{ch}(ax+b)$.
Or on a $2f(x) = 2f(x)f(0)$, donc si f n'est pas identiquement nulle $f(0) = 1$.
Donc les solutions sont nécessairement de la forme $x \mapsto \cos(ax)$ ou $x \mapsto \operatorname{ch}(ax)$.
On vérifie finalement que ces deux types de fonctions ainsi que la fonction nulle sont solutions.

15. En dérivant :

$$f''(x) = -f'(\lambda - x) = -f(x)$$

donc f est de la forme $a \cos(x + \varphi)$ et la condition $f'(x) = f(\lambda - x)$ donne :

$$\frac{\pi}{2} + \varphi = -\varphi - \lambda + 2k\pi \ . \ k \in \mathbb{Z}$$

soit :

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

16. En dérivant, on trouve que si f est solution du problème alors elle vérifie l'équation :

$$x^2 y'' + y = 0$$

d'où, en posant $z(t) = y(e^t)$:

$$z'' - z' + z = 0.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$\lambda \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right).$$

On cherche ensuite parmi ces fonctions celles qui vérifient $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

On trouve comme condition nécessaire et suffisante $\lambda = \sqrt{3}\mu$. Les fonctions cherchées sont donc de la forme :

$$\mu\sqrt{3}\sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) = 2\mu\sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3}\right)$$

17. **a)** On remarque que si y est solution de l'équation alors :

$$\int f(x)\, dx = -\int g(y)\, dy = -h(y)$$

où h est une primitive de g.

Sur les intervalles sur lesquels h est bijective de réciproque k on a $y = -k \circ F$ où F est une primitive de f.

b) i)

$$(1 + x^2) y' = 1 + y^2 \iff \frac{y'}{1 + y^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

ce qui donne :

$$\arctan(y) = \arctan(x) + \lambda = \arctan(x) + \arctan(\mu)$$

donc :

$$y = \frac{x+\mu}{1-\mu x}.$$

On vérifie que y est bien solution de l'équation.
ii) Si

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

alors :

$$\arcsin(y) = \arcsin(x) + \alpha$$

et :

$$y = x\cos\alpha + \sqrt{1-x^2}\sin\alpha$$

sur un intervalle sur lequel $\alpha + \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Si $y_0 = 1$ ou $y_0 = -1$, il n'y a pas unicité des solutions au problème de Cauchy puisque la fonction constante $y = y_0$ est également solution. D'autre part :

$$(y - x\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha(1-x^2)$$

d' où :

$$y^2 - 2xy\cos\lambda + x^2 = \sin^2\alpha$$

ce qui prouve que les courbes intégrales sont des morceaux d'ellipses.
iii) L'équation est équivalente à $xe^x = ye^{-y}y'$ soit :

$$xe^x - e^x + \lambda = -ye^{-y} - e^{-y}.$$

Soit $\varphi : t \mapsto -te^{-t} - e^{-t}$. On montre que φ est une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ sur $]-1,+\infty[$ et si $\psi : x \mapsto xe^x - e^x$, $\psi(\mathbb{R}_-^*) =]-1,+\infty[$; alors $y = \varphi^{-1}\circ\psi$ est bien une solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

Chapitre 6

1. Prenons une représentation paramétrique de la parabole :

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t. \end{cases}$$

Le vecteur normal en $M(t)$ a pour coordonnées $(1, -2t)$. Les coordonnées de N sont de la forme $(t^2+\lambda, t-2\lambda t)$, puis on détermine λ en écrivant que N est sur la parabole soit $t^2 + \lambda = (t-2\lambda t)^2$ équation qui a pour solution $\lambda = 0$ et $\lambda = \frac{1}{4t^2} + 1$. Les cooordonnées de N sont alors $\left(\left(\frac{2t^2+1}{2t}\right)^2, -\frac{2t^2+1}{2t}\right)$ Un

vecteur tangent en N a pour coordonnées $(-\dfrac{2t^2+1}{t}, 1)$
La parallèle en M à la tangente en N a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - t^2 & -\frac{2t^2+1}{t} \\ y - t & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La parallèle en N à la tangente en M a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - \left(\frac{2t^2+1}{2t}\right)^2 & 2t \\ y + \frac{2t^2+1}{2t} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En écrivant que P est le point d'intersection des deux droites, on trouve que si $M \neq O$, le point P a pour coordonnées $\left(3t^2 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4t^2}, -\dfrac{1}{4t}\right)$
Pour tracer le lieu de P étudions la courbe parametrée :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4t^2} \\ y(t) = -\frac{1}{4t} \end{cases}$$

Les relations $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ montrent que la courbe est symétrique par rapport à Oy et qu'il suffit d'étudier la courbe sur $\mathbb{R}_+$.
On a :

$$\begin{cases} x'(t) = 6t - \frac{1}{2t^3} \\ y'(t) = \frac{1}{4t^2} \end{cases}$$

ce qui conduit au tableau de variation suivant :

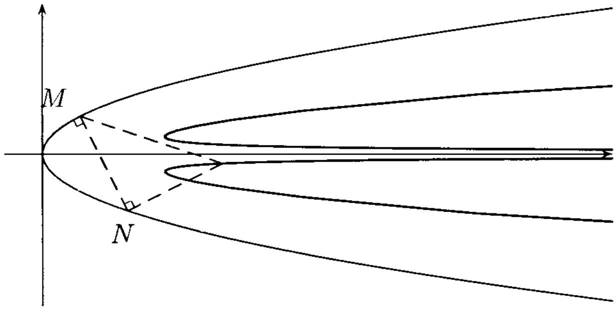
t	0		α		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$	
y'		$+$		$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$		$\nearrow$		0

La courbe a une tangente verticale au point $t = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Lorsque t tend vers $+\infty$, la courbe est asymptote à Ox.

Lorsque t tend vers 0 la courbe a une branche parabolique de direction Ox

Courbe :



2 **a)** Le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. La relation $x(-t) = y(t)$ montre que la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice et permet de limiter l'étude à $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

On a $x' = \dfrac{1}{t-1}$ et $y' = \dfrac{1}{t+1}$ et donc les variations :

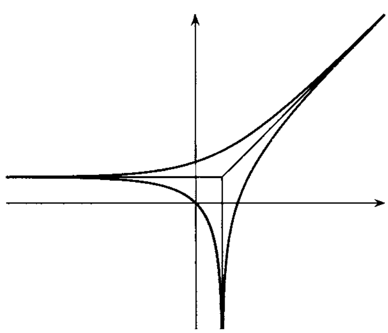
t	0	1	$+\infty$
$x'(t)$	$-$	‖	$+$
$y'(t)$	$+$	‖	$+$
$x(t)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$
$y(t)$	$0 \nearrow \ln 2$	‖	$\ln 2 \nearrow +\infty$

Par suite, il n'y a pas de point singulier.

Lorsque t tend vers 1, il y a une asymptote d'équation $y = \ln 2$.

En $+\infty$, on a $y - x = \ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|$ qui tend vers 0. La première bissectrice est donc asymptote.

b) Courbe :



c) La pente de la tangente en $M(t)$ est $p = \dfrac{t-1}{t+1}$.

C'est une fonction homographique qui définit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Les points M_1 et M_2 existent donc si, et seulement si, l'angle de la tangente en M avec Ox n'est égal ni à $\pm 2\pi/3$, ni à $\pi/4 \pm 2\pi/3$ ni à $\pi/2 \pm 2\pi/3$ modulo π c'est-à-dire :

$$p \neq \pm\sqrt{3} \qquad p \neq -2 \pm \sqrt{3} \qquad p \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

soit :

$$t \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad t \neq \pm 2 \pm \sqrt{3}.$$

Pour un tel t, on a :

$$\frac{t_1 - 1}{t_1 + 1} = \frac{p - \sqrt{3}}{1 + p\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad \frac{t_2 - 1}{t_2 + 1} = \frac{p + \sqrt{3}}{1 - p\sqrt{3}}$$

ce qui donne :

$$t_1 = \frac{t - \sqrt{3}}{1 + t\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{t + \sqrt{3}}{1 - t\sqrt{3}}.$$

On en déduit $(1-t)(1-t_1)(1-t_2) = \dfrac{2(t-1)(t^2+4t+1)}{1-3t^2}$ et l'abscisse de l'isobarycentre est donc :

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3}\big(\ln|1-t| + \ln|1-t_1| + \ln|1-t_2|\big) \\ &= \frac{1}{3}\ln\big|(1-t)(1-t_1)(1-t_2)\big| \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2(t-1)(t^2+4t+1)}{1-3t^2}\right|. \end{aligned}$$

De même, on obtient l ordonnée :

$$Y = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2(t+1)(t^2-4t+1)}{1-3t^2}\right|.$$

d) La formule de Moivre donne :

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \qquad \text{et} \qquad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

ce qui implique, lorsque $\theta \not\equiv \pi/2 \quad [\pi]$ et $3\theta \not\equiv \pi/2 \quad [\pi]$:

$$u = \tan 3\theta = \frac{t^3 - 3t}{3t^2 - 1}$$

avec $t = \tan\theta$.

Donc :

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2(t^3+3t^2-3t-1)}{1-3t^2}\right| \\ &= \frac{1}{3}\big(\ln|\tan 3\theta - 1| + \ln 2\big) \\ &= \frac{1}{3}\big(\ln|u-1| + \ln 2\big) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} Y = X(-t) &= \frac{1}{3}\big(\ln|\tan 3\theta + 1| + \ln 2\big) \\ &= \frac{1}{3}\big(\ln|u+1| + \ln 2\big) \end{aligned}$$

ce qui montre que la courbe C est l'image de Γ par l'homothétie de rapport $1/3$ et de centre $(\ln 2/2, \ln 2/2)$.

3 **a)** Soit D une droite d'equation $ax+by+c=0$. Le point $M(t)$ est sur D si et seulement si $at+bt^2+c(1+t^3)=0$. Cette équation est au plus du troisième degré en t donc ne peut avoir plus de trois racines reélles.

b) Si les trois points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont alignés alors il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ tels que t_1,t_2 et t_3 soient racines de l'équation $ct^3+bt^2+at+c=0$, d'où $c\neq 0$ et $ct^3+bt^2+at+c=c(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$ ce qui assure que $t_1t_2t_3=-1$.
Réciproquement si $t_1t_2t_3=-1$, alors posons $b=-t_1-t_2-t_3$ et $a=t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3$, on a $(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)=t^3+bt^2+at+1$ et les trois points sont sur la droite d'équation $ax+by+1=0$.

c) Soit $M(t)$ et $M(t+h)$, la droite $\big(M(t)M(t+h)\big)$ coupe la courbe en $M\big(t'(h)\big)$ avec $t(t+h)t'(h)=-1$.

Lorsque h tend vers 0, la droite $\big(M(t)M(t+h)\big)$ tend vers la tangente en $M(t)$ et $M\big(t'(h)\big)$ vers $M(t')$ d'où $t^2t'=-1$. La tangente en $M(t)$ recoupe la courbe si $t\neq 0$ au point $M(-\frac{1}{t^2})$.

d) Si $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont alignés, alors $t_1t_2t_3=-1$ d'où $\dfrac{-1}{t_1^2}\dfrac{-1}{t_1^2}\dfrac{-1}{t_1^2}=-1$ donc les points $M(t_1')$, $M(t_2')$ et $M(t_3')$ sont alignés.

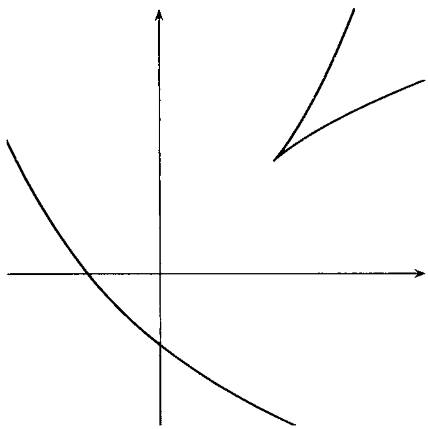
4. **a)** Les relations $x(\frac{1}{t}) = y(t)$ et $y(\frac{1}{t}) = x(t)$ montrent que la courbe est symétrique par rapport à la droite d équation $x = y$ et qu'il suffit d'étudier la courbe sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$. Puis :

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \frac{1}{t^3} \\ y'(t) = t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

ce qui conduit au tableau de variation suivant :

t	-1	0	1
$x'(t)$	$+$	‖	$-$ 0
$y'(t)$	$-$	‖	$-$ 0
$x(t)$	$-1 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 3$
$y(t)$	$-1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 3$

Au point $t = -1$ un vecteur tangent est $(1, -1)$, au point $t = 1$, un vecteur tangent est $(1, 1)$. En 0^+ et 0^-, il y a deux branches paraboliques dans la direction Ox.
Courbe :



b) La tangente au point $M(t)$ a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - t - \frac{1}{2t^2} & 1 \\ y - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} & t \end{vmatrix} = 0$$

soit $-2t^2x + 2ty + t^3 - 1 = 0$. Soit Γ le lieu cherché. Le point (x, y) est dans Γ si et seulement si il existe (t_1, t_2) avec $t_1t_2 = -1$ (orthogonalité des deux vecteurs tangents en $M(t_1)$ et en $M(t_2)$), tels que t_1 et t_2 soient racines de $t^3 - 2xt^2 + 2yt - 1 = 0$.

Il suffit donc de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $t^3 - 2xt^2 + 2yt - 1 = 0$ ait deux racines réelles dont le produit est -1.
S'il existe deux racines vérifiant la condition et appelons t_3 la troisième racine, on a alors :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 2x \\ t_1t_2 + t_1t_3 + t_2 + t_3 = 2y \\ t_1t_2t_3 = 1 \\ t_1t_2 = -1. \end{cases}$$

On a alors $t_3 = -1$ puis $x + y = -1$ qui est une condition nécessaire au problème.
Réciproquement supposons que $x + y = -1$, alors l'équation en X, $X^2 + (2y+1)X - 1 = 0$ est de discriminant strictement positif donc possède deux racines non nulles t_1 et t_2 dont le produit vaut -1. On a alors : $(t+1)(t-t_1)(t-t_2) = t^3 - 2xt^2 + 2yt - 1$, ce qui montre que le point (x, y) est dans Γ et que la condition $x + y + 1 = 0$ est une condition suffisante.

5. Plaçons-nous dans un repère de centre O dans lequel D a pour équation $x = d$. Un point P de D a pour coordonnées polaires $(r = \frac{d}{\cos\theta}, \theta)$. Soit I le milieu de MM', les triangles OIM et OMP étant semblables, on a $OI.OP = OM^2$, le point I a pour coordonnees polaires $\left(r' = \dfrac{R^2}{r}, \theta\right)$. L'isobarycentre de O, M et M' est le barycentre de $(I, 2)$ et $(P, 1)$, ses coordonnées polaires sont donc $\left(\dfrac{2r'+r}{3}, \theta\right) = \left(\dfrac{2R^2}{3d}\cos\theta + \dfrac{d}{3\cos\theta}, \theta\right)$.
Par symétrie, il suffit d'étudier la courbe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\rho'(\theta) = -\dfrac{2R^2}{3d}\sin\theta + \dfrac{d\sin\theta}{3\cos^2\theta}$ s'annule pour $\cos^2\theta = \dfrac{d^2}{2R^2}$. Il y a donc deux tableaux de variations :

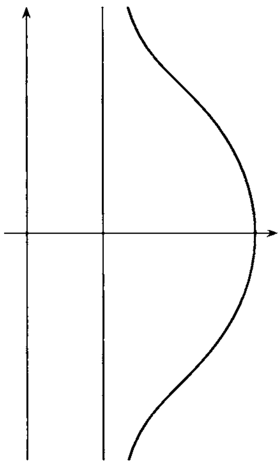
θ	0		$\pi/2$
ρ	$\frac{2R^2}{3d} + \frac{d}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

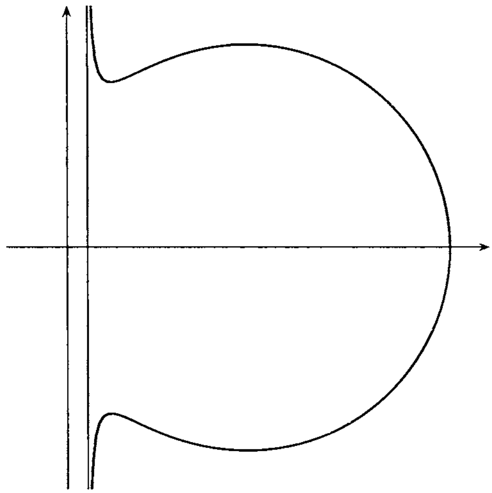
si $d \geqslant R\sqrt{2}$

θ	0		α		$\pi/2$
ρ	$\frac{2R^2}{3d} + \frac{d}{3}$	$\searrow$	$+$	$\nearrow$	$+\infty$

si $d < R\sqrt{2}$

Lorsque θ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$, la courbe est asymptote à la droite d'équation $x = \dfrac{d}{3}\cdot$
Courbe.



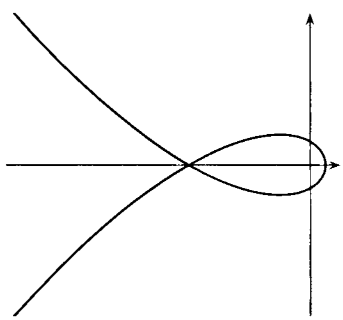


6 **a)** La fonction ρ est 6π-périodique. De plus, $\rho(\theta + 3\pi) = -\rho(\theta)$, donc il suffit d'étudier le courbe pour θ parcourant un intervalle de longueur 3π. On a aussi $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox.

Etudions les variations de ρ sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$. $\rho'(\theta) = \dfrac{\sin\frac{\theta}{3}}{\cos^4\frac{\theta}{3}}\cdot$ Lorsque θ tend vers $\dfrac{3\pi}{2}$, la courbe a une branche parabolique dans la direction Oy.

θ	0	$3\pi/2$
ρ	1 $\nearrow$	$+\infty$

Courbe.



b) La droite d'angle polaire θ_0 coupe la courbe aux points de paramètres θ_0, $\theta_0 + \pi$ et $\theta_0 + 2\pi$. L'angle V que fait le vecteur tangent avec $\overrightarrow{u}(\theta)$ en un point $M(\theta)$ où $\theta \neq 0$ est tel que $\tan V = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \operatorname{cotan}\dfrac{\theta}{3} = \tan(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3})$ d'où $V = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3} + k\pi$ et l'angle polaire de la tangente en $M(\theta)$ est donc $V + \theta = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\theta}{3}\cdot$ Les angles polaires des trois droites considérées sont donc $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\theta_0}{3}$ $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\theta_0}{3} + \dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\theta_0}{3} + \dfrac{4\pi}{3}$, ce qui montre le résultat

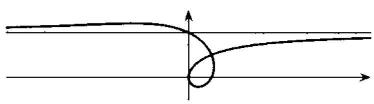
7 • La courbe est 2π-périodique. Il suffit d'étudier la courbe sur $]-\pi, \pi[$. Puis, $\rho'(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2})$ ce qui conduit au tableau de variation :

θ	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
ρ	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	2	$+$	$+\infty$

Au voisinage de π, on a $\rho(\pi + h)\sin h = \sin h - 2\cos^2 \dfrac{h}{2}$ et la droite $y = 0$ est asymptote à la courbe la courbe étant sous l'asymptote.

Au voisinage de $-\pi$, on trouve la même droite asymptote, la courbe étant au dessus de l'asymptote.

Courbe.



• La courbe a un point double qui est atteint pour θ_1 et $\theta_2 = \pi + \theta_1$ avec $-\pi < \theta_1 < 0$ pour lesquels $1 + \tan\dfrac{\theta_1 + \pi}{2} = -\left(1 + \tan\dfrac{\theta_1}{2}\right)$. Alors $\tan\dfrac{\theta_1}{2}$ est solution de l'équation $1 - \dfrac{1}{t} = -1 - t$, soit $t = -1 + \sqrt{2}$ ou $t = -1 - \sqrt{2}$. Comme $-\pi < \theta_1 < 0$, on a $0 < \theta_2 < \pi$, $\tan\dfrac{\theta_1}{2} < 0$ et $\tan\dfrac{\theta_2}{2} > 0$ soit, $\tan\dfrac{\theta_1}{2} = -1 - \sqrt{2}$ et $\tan\theta_2 = -1 + \sqrt{2}$. On a aussitôt $\tan\theta_1 = \tan\theta_2 = 1$, d'où $\theta_1 = \dfrac{-3\pi}{4}$ et $\theta_2 = \dfrac{\pi}{4}\cdot$ L'angle V de la tangente avec $\overrightarrow{u}(\theta)$ est tel que $\tan V = \dfrac{2(1 + \tan\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$.

On vérifie que le produit des pentes des tangentes au point double vaut -1 et donc que les tangentes sont orthogonales. La courbe est une strophoïde.

Les coordonnées du point double sont $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Chapitre 7

Équations communes aux trois coniques

1. **a)** Il suffit de poser $X = x + \varepsilon c$ et $Y = y$, puisque l'identité algébrique :

$$(x^2 + y^2) - (ex - p)^2 = g(x + \varepsilon c, y)$$

justifie le résultat. Pour la parabole, d'équation classique $Y^2 - 2pX = 0$ il suffit de prendre $X = \frac{p}{2} - x$, $Y = y$ et $e = 1$. Les intérieurs sont évidemment caractérisés par $(x^2 + y^2) - (ex - p)^2 < 0$ (ils contiennent notamment le foyer origine). En polaires, l'équation $\rho^2 = (e\rho\cos\theta - p)^2$ admet deux solutions :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \rho = \frac{p}{e\cos\theta - 1}$$

mais qui définissent exactement la même partie du plan (on passe de l'une à l'autre en changeant θ en $\theta + \pi$ et ρ en $-\rho$ ce qui, on le sait, ne modifie pas le point admettant (ρ, θ) comme couple de coordonnées polaires). L'équation :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

par exemple convient dans tous les cas (on remarquera sur cette expression que la portion de l'arc de la conique la plus proche du foyer origine, engendrée par des valeurs de θ voisines de 0, a sa concavité tournée vers les abscisses négatives).

b) Il suffit de poser $X = x$ et $Y = y$, puisque l'identité algébrique :

$$(x - c)^2 + y^2 - (a - ex)^2 = g(x, y)$$

justifie le résultat. Il en résulte que la distance étudiée vérifie la relation $MF = |a - ex|$ (plus précisément $MF = a - ex$ pour un point d'une ellipse ou un point de la branche de gauche d'une hyperbole où $x < 0$, $MF = ex - a$ pour un point de la branche de droite où $x > 0$). Le changement de c en $-c$ conduit à la seconde caractérisation :

$$(x + c)^2 + y^2 - (a + ex)^2 = 0$$

ou encore $MF' = |a + ex|$, (plus précisément $MF' = a + ex$ pour un point d'une ellipse ou un point de la branche de droite d'une hyperbole où $x > 0$ et $MF' = -a - ex$ pour un point de la branche de gauche d'une hyperbole où $x < 0$). On en déduit aussitôt les définitions bifocales $MF + MF' = 2a$ pour l'ellipse, $MF - MF' = 2a$ pour la branche de gauche d'une hyperbole et $MF' - MF = 2a$ pour la branche de droite (soit $|MF - MF'| = 2a$ pour l'ensemble). Les intérieurs sont définis par l'une des deux inégalités équivalentes $MF < |a - ex|$ ou $MF' < |a + ex|$ (ils contiennent notamment les deux foyers), ou encore par $MF + MF' < 2a$ pour l'ellipse, et $|MF - MF'| > 2a$ pour l'hyperbole.

c) Il suffit de poser $X = x - \varepsilon a$ et $Y = y$, puisque l'identité algébrique :

$$y^2 - 2px - (e^2 - 1)x^2 = g(x - \varepsilon a, y)$$

justifie le résultat. Pour la parabole, d équation classique $Y^2 - 2pX = 0$, il suffit de prendre $X = x$, $Y = y$ et $\epsilon = 1$. Les intérieurs sont évidemment caractérisés par $y^2 - 2px - (e^2 - 1)x^2 < 0$ (ils contiennent notamment les points d'ordonnee nulle et d'abscisse positive assez petite ; on remarquera que la portion de la conique contenant le sommet origine a sa concavité tournée vers les abscisses positives).

Propriétés de la parabole

2 Partant par exemple de la représentation paramétrique ($x = 2pt^2$ $y = 2pt$) de Γ, on trouve facilement les relations $x_N = p(2t^2 + 1)$ et $x_T = -2pt^2$ ce qui montre que P est le symétrique de M par rapport au foyer ; son lieu est donc une parabole de même paramètre, plus précisément celle d'équation $y^2 = 2p(p - x)$. La relation $x_N = x_M + p$ traduit simplement le fait que la portion de normale MN se projette sur l'axe des abscisses selon une longueur constante (et égale au paramètre).

3. Posant $(2pa^2, 2pa)$ [respectivement $(2pb^2, 2pb)$] comme coordonnées de A (respectivement B), on trouve les coordonnées $\big(p(a^2 + b^2), p(a + b)\big)$ pour M et $\big(p(a^2 + b^2 + 1), 0\big)$ pour N, ce qui donne p comme valeur constante de la mesure algébrique de HN. Lorsque $B = A$, on retrouve un résultat de l'exercice précédent, à savoir que la sous-normale est constante et égale au paramètre.

4. Nous prendrons ici $(x^2 + y^2) = (x - p)^2$ et $x^2 + y^2 = (x + q)^2$ comme équations des deux courbes avec $p > 0$, $q > 0$ et $p \neq q$. On a, par exemple, $y > 0$ et $\sqrt{x^2 + y^2} = p - x = q + x$, d'où $x = \dfrac{p - q}{2}\cdot$ La tangente à la demi-parabole d'équation $y = \sqrt{p(p - 2x)}$ se calcule par dérivation ; sa pente est $-\sqrt{p/q}$. L'autre demi-parabole est telle que $y = \sqrt{q(q + 2x)}$, ce qui donne une pente de $\sqrt{q/p}$ qui montre que les deux tangentes sont perpendiculaires. Ce résultat est évident géométriquement, puisque l'on sait que la tangente en M est l'une des bissectrices de l'angle de la droite MF et de la parallèle à l'axe issue de M.

5. La tangente au point M de coordonnées $(2pt^2, 2pt)$ a pour équation $2ty = x + 2pt^2$; elle coupe la tangente au sommet au point K de coordonnées $(0, pt)$, ce qui annule bien le produit scalaire $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{MK}$. Ce résultat est évident géométriquement : le segment MK est en effet la hauteur-bissectrice du triangle isocèle FMH, où H est la projection de M sur la directrice. De plus, ce raisonnement montre que le symétrique du foyer par rapport à une tangente est sur la directrice.

6. Par une homothétie, nous pouvons nous ramener à une parabole d'équation $y^2 = 4x$ de paramètre $p = 2$, pour laquelle le foyer a pour coordonnées $(1, 0)$. Soient (X, Y) celles de M et $(t^2, 2t)$ (respectivement $(t'^2, 2t')$) celles de T et T'. On trouve facilement $x - ty + t^2 = 0$ comme équation de la tangente en T, d'où $X = tt'$ et $Y = t + t'$ puisque t et t' sont les deux racines de l'équation $t^2 - Yt + X = 0$. La pente de la droite FM est donc $\dfrac{t+t'}{tt'-1}$, alors que celles de FT et FT' sont respectivement $\dfrac{2t}{t^2-1}$ et $\dfrac{2t'}{t'^2-1}$. La formule d'addition donnant la tangente d'une somme (et donc celle du double d'un réel) montre aussitôt que FM est bien bissectrice de (FT, FT') (on peut d'ailleurs poser $t = \tan\theta$, ce qui simplifie les calculs). En ce qui concerne le second théorème, il suffit de montrer que $\dfrac{1}{t'}$, qui est la pente de MT' et donc la tangente de la mesure de l'angle (Mx, MT'), est égale à la tangente de la différence des mesures des angles (Mx, MF) et (Mx, MT), mesures dont les tangentes sont respectivement $\dfrac{t+t'}{tt'-1}$ et $\dfrac{1}{t}$, ce qui se vérifie cette fois-ci avec la formule donnant la tangente d'une différence avec, encore, une légère simplification si l'on pose $t = \tan\theta$. Naturellement il faut examiner à part le cas où les dénominateurs de l une de ces fractions s'annuleraient, ce qui n'introduit aucune difficulté particulière Les théorèmes de Poncelet s'étendent aux autres coniques à condition de remplacer Mx par MF' où F' est l'autre foyer. Il existe des démonstrations géométriques de ces théorèmes reposant sur des mesures d'angles de droites.

7 Tout est ici affaire de calculs simples, dont nous ne donnerons que les étapes essentielles. La directrice a pour équation $x = -2$, et les coordonnées de F sont $(2, 0)$ puisque le paramètre est $p = 4$. La pente de BC est $\dfrac{1}{a}$ puisque son point de contact a pour coordonnees $(2a^2, 4a)$ et les coordonnées de A sont $(2bc, 2b + 2c)$ (avec des formules analogues par permutation circulaire entre a, b et c). La hauteur issue de A a pour équation $y + ax = 2(b + c + abc)$ ce qui donne comme coordonnées de l'orthocentre H

le couple $\big(-2, 2(a+b+c+abc)\big)$. Enfin la médiatrice de BC a pour équation $y + ax = 2a + (a^2+1)(b+c)$, ce qui donne comme coordonnees du centre du cercle circonscrit $(1 + ab + bc + ca, a + b + c - abc)$. Il est alors facile d'ecrire l'équation de ce cercle, à savoir :

$$x^2 + y^2 - 2(1 + ab + bc + ca)x - 2(a + b + c - abc)y + 4(ab + bc + ca) = 0$$

(son rayon vérifie l'égalité simple $R^2 = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$, mais ce calcul n'est pas nécessaire) puis de vérifier qu'il passe bien par le point $(2,0)$. On peut beaucoup alléger ce dernier point (plutôt pénible) en montrant que les mesures des angles de droites $(AB.AC)$ et (FB, FC) ont même tangente, ce qui est très facile. Cette congruence d'angles découle d'ailleurs du second théorème de Poncelet qui affirme que, par exemple, la mesure de l'angle de AB et de la parallèle Bx à l'axe de la parabole est congrue à celle de celui de BF et de BC (BA et BC sont deux tangentes issues de B). Pour la même raison, elle est congrue à celle de AB et Ax et donc à celle de AF et AC, ce qui démontre l appartenance de F au cercle (ABC). (NB : cette propriété résulte aussi du théorème de Simson sur les projections d'un point sur les côtés d'un triangle, qui sont alignées si et seulement si les quatre points sont cocycliques la droite de Simson étant évidemment ici la directrice).

8. Prenons un parametrage $M(t)$ de classe C^1 de la parabole. Alors $r = \|\overrightarrow{FM}(t)\|$ puis $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{MF}}{r}$ et $H = M - r\,\vec{\imath}$ sont dérivables. Comme $\vec{u}\cdot\vec{u} = 1$, on a $\vec{u}\cdot\vec{u}\,' = 0$ et en dérivant l'égalité $\overrightarrow{MF} = r\,\vec{u}$ on obtient $r' = -\overrightarrow{M}' \cdot \vec{u}$. Comme H décrit la directrice (orthogonale à $\vec{\imath}$) on a $\overrightarrow{H}'\cdot\vec{\imath} = 0$ et en dérivant $\overrightarrow{MH} = -r\,\vec{\imath}$ on obtient $r' = \overrightarrow{M}'\cdot\vec{\imath}$.

Finalement, $\overrightarrow{M}' \cdot (\vec{u} + \vec{\imath}) = 0$, ce qui prouve que la tangente est orthogonale au vecteur $\vec{u} + \vec{\imath}$ qui dirige une bissectrice de l'angle $\big(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{Mx}\big)$.

Enfin, prenant pour K le milieu du segment HF situé sur la tangente au sommet à la parabole par homothétie, on voit aussitôt que $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{KF}$ sont orthogonaux : K est donc bien la projection de F sur la tangente en M.

Propriétés des hyperboles

9. Si $(a, 1/a)$ sont les coordonnées de A situé sur l'hyperbole d'équation $xy = 1$ (avec des notations analogues pour B et C), le point D où la hauteur issue de A recoupe la courbe a pour coordonnées $(-1/abc, -abc)$ dont le caractère symétrique prouve que D est l'orthocentre étudié

10. Notant $(a, 1/a)$ et $(b, 1/b)$ les coordonnées respectives de A et B, il vient aussitôt que les tangentes des mesures des angles de l'axe des abscisses avec OM et Δ sont opposées (elles valent respectivement $1/ab$ et $-1/ab$). Il en résulte que les angles (Δ, Δ') et (OM, OP) ont des mesures opposées. (Cette démonstration suppose explicitement que M et P sont distincts de O, soit $a + b \neq 0$ et $c + d \neq 0$, mais dans le cas contraire l'une des droites OM ou OP n'est pas définie.)

11. Nous écrirons l'hyperbole sous la forme $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. La relation $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ et la formule donnant la distance d'un point à une droite montrent que, par exemple, $cMH = |ay - bx|$ et $cMH' = |ay + bx|$ d'où, finalement, $c^2MH.MH' = |a^2y^2 - b^2x^2| = a^2b^2$.

Propriétés des ellipses

12. Nous noterons φ une mesure de l'angle de Ox et de la demi-droite OP · les coordonnées de P sont alors $\big((a + b)\cos\varphi, (a + b)\sin\varphi\big)$ tandis que celles de Q sont $\big((a - b)\cos\varphi, -(a - b)\sin\varphi\big)$. Le milieu M a donc les coordonnées classiques d'un point d'une ellipse, à savoir $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ et un calcul immédiat de dérivation montre que la normale en M n'est autre que PQ (les cercles lieux de P et Q s'appellent *cercles de Chasles* de l'ellipse). Les formules $MF = a - ex$ et $MF' = a + ex$ de l'exercice inaugural montrent que $MF.MF'$ est égal à :

$$\begin{aligned} a^2 - e^2x^2 &= a^2(1 - e^2\cos^2\varphi) \\ &= a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi \\ &= a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi \\ &= MP^2 = MQ^2 = \tfrac{1}{4}PQ^2. \end{aligned}$$

13 Les coordonnées de M sont de la forme (ac, bs) où $c = \cos\varphi$ et $s = \sin\varphi$. Deux dérivations par rapport à φ montrent que les points P en question, symétriques par rapport à O, ont pour coordonnées les couples $(-as, bc)$ et $(as, -bc)$ correspondant par exemple à $\varphi \pm \dfrac{\pi}{2}\cdot$ Il en résulte donc que l'aire du triangle MOP est la moitié de la valeur absolue du produit mixte $\mathrm{Det}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$, soit $\dfrac{ab}{2}$, et que :

$$OM^2 + OP^2 = (a^2c^2 + b^2s^2) + (a^2s^2 + b^2c^2) = a^2 + b^2,$$

$$OI^2 + OJ^2 = a^2c^2 + a^2s^2 = a^2.$$

Ces resultats sont évidents par des considérations géométriques, puisque l'ellipse peut être considérée comme projection (ou image par une affinité) d'un cercle, ce qui donne simplement l'aire de MOP ainsi que les valeurs de $OI^2 + OJ^2$ et $JP^2 + IM^2$. La valeur de $OM^2 + OP^2$ s'en déduit.

14. Notons (ac, bs) les coordonnées de M, avec $c = \cos\varphi$ et $s = \sin\varphi$. Un point P de la tangente en M a des coordonnées de la forme $\big(a(c - \lambda s), b(s + \lambda c)\big)$. Il appartient au cercle principal si et seulement si :

$$a^2 = a^2(c - \lambda s)^2 + b^2(s + \lambda c)^2$$

ce qui s'écrit encore $(a^2 - b^2)(s + \lambda c)^2 = \lambda^2 a^2$. On en déduit que l'excentricité de la courbe est de la forme $e = \varepsilon \dfrac{\lambda}{s + \lambda c}$, puis que la pente de la droite OP est :

$$\frac{b}{a}\,\frac{s + \lambda c}{c - \lambda s} = \frac{b}{a}\,\frac{s}{c - \varepsilon e}$$

ce qui est justement la pente de la droite joignant M au foyer d'abscisse $\varepsilon a e$. Renommant éventuellement M et M' de façon à pouvoir prendre $\varepsilon = 1$, il en résulte que MF et OP sont parallèles, ainsi évidemment que $M'F'$ et OP ce qui montre que MF et $M'F'$ sont parallèles. Une démonstration géométrique du parallélisme entre MF et OP est possible si l'on sait que les projections de F et F' sur la tangente en M sont sur le cercle principal. Soit par exemple P la projection de F'. La droite MF coupe $F'P$ en le symétrique G de F' par rapport à P à cause de l'égalité des mesures des angles (MF', MP) et (MP, MG). Il en résulte par homothétie que OP est parallèle à FG, donc à FM.

Propriétés des coniques à centre

15. Nous noterons $(u, 0)$ les coordonnées de M. Par définition un foyer de coordonnees (x, y) est tel que :

$$\sqrt{(x-u)^2 + y^2} + \varepsilon\sqrt{(x+u)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Par deux élévations successives au carré destinées à éliminer les racines carrées, on en déduit la relation :

$$a^2(x^2 + y^2 + u^2) - u^2x^2 = a^4$$

visiblement équivalente à :

$$(a^2 - u^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - u^2) = 0.$$

On reconnaît ici l'équation d'une conique de foyer M et de centre O ayant même demi-axe focal a que Γ. Pour affirmer que cette conique est bien le lieu cherché, il faudrait regarder si elle convient tout entière en renversant les élévations au carré, ce qui est possible en jouant sur les signes ε et $\pm$. Cela dit, il est beaucoup plus simple de remarquer que le résultat est géométriquement trivial en complétant par un point M' un parallélogramme $FMF'M'$, sur lequel il est clair que :

$$MF + \varepsilon MF' = FM + \varepsilon FM' = \pm 2a.$$

Notons enfin que si $u^2 = a^2$, c'est-à-dire si M est sur l'axe focal, le lieu dégénère en une droite (double) d'équation $y^2 = 0$.

16. Soit $Bx^2 + Ay^2 - AB = 0$ l'équation de Γ avec $A = a^2$ et $B = \varepsilon b^2 = A - c^2$. Si (u, v) sont les coordonnées de I, une droite variable passant par I est définie paramétriquement par $x = u + \lambda\cos\theta$, $y = v + \lambda\sin\theta$ où $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$ sont les coordonnées de R. Ses points sur Γ sont obtenus à partir de l'équation en λ :

$$0 = (B\cos^2\theta + A\sin^2\theta)\lambda^2 + 2(Bu\cos\theta + Av\sin\theta)\lambda + Bu^2 + Av^2 - AB$$

dont le produit des racines (qui est le produit des mesures algébriques de IC et de ID selon une certaine direction) est égal à $P = \dfrac{Bu^2 + Av^2 - AB}{B\cos^2\theta + A\sin^2\theta}$.

Or l'appartenance de R à Γ implique l'égalité $r^2(B\cos^2\theta + A\sin^2\theta) = AB$ ce qui donne finalement :

$$\overline{IC}.\overline{ID} = P = \frac{Bu^2 + Av^2 - AB}{AB}\,r^2 = \left(\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} - 1\right) OR^2.$$

On notera que ce produit des longueurs orientées $\overline{IC}$ et $\overline{ID}$ est donc nul si I est sur Γ — ce qui est évident — et positif si Γ est une ellipse par rapport à laquelle I est extérieur ou si Γ est une hyperbole par rapport à laquelle I est intérieur, puisque l'intérieur d'une conique à centre est défini par $Bx^2 + Ay^2 < AB = \varepsilon a^2 b^2$. Le cas particulier d'un cercle redonne le théorème de la puissance : le produit $\overline{IC}.\overline{ID}$ est constant, et égal à $IO^2 - R^2$. Si (C, D, E, G) sont quatre points cocycliques deux à deux distincts d'une ellipse (conique à centre pour laquelle il existe des diamètres dans toutes les directions) non circulaire, on voit en construisant R et S sur l'ellipse tels que OR soit parallèle à CD et OS à EG, que $OR = OS$ avec O, R et S non alignés, c'est-à-dire que les droites OR et OS ont des pentes opposees par rapport à l'axe focal, et il en est donc également ainsi pour les droites CD et EG. Ce résultat peut s'étendre au cas où deux points, par exemple C et D, viennent coïncider à condition de remplacer CD par la tangente en C, et reste également vrai pour une hyperbole ou une parabole.

17. Soit $Bx^2 + Ay^2 - AB = 0$ l'équation cartésienne de la conique avec $A = a^2$ et $B = \varepsilon b^2 = A - c^2$. Une équation polaire de la forme $\rho = f(\theta)$ n existe pas mais la relation évidente :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{A} + \frac{\sin^2\theta}{B}$$

en tient parfaitement lieu. Dans le cas d'une ellipse si P et Q ont par exemple θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$ pour angles polaires, il en résulte que la hauteur OH du triangle rectangle POQ vérifie l'égalité :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{PQ^2}{OP^2OQ^2} = \frac{OP^2 + OQ^2}{OP^2OQ^2} = \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

et reste donc constante lorsque P et Q varient. Le calcul direct est plus lourd. Nous prendrons (ac, bs) et (ac', bs') pour coordonnées de P et Q, avec $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$, $c' = \cos\varphi'$, $s' = \sin\varphi'$ et $a^2cc' + b^2ss' = 0$. L'orthogonalité de OP et OQ implique encore que le produit $OP.OQ$ est égal au module du produit mixte $\mathrm{Det}(\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ})$, c'est-à-dire à $ab(cs' - c's)$. Il reste à vérifier que $a^2b^2(OP^2 + OQ^2) = (a^2 + b^2)OP^2OQ^2$, soit :

$$OP^2 + OQ^2 - (a^2 + b^2)(cs' - sc')^2 = 0.$$

Or cette expression s'écrit encore :

$$(a^2c^2 + b^2s^2 + a^2c'^2 + b^2s'^2) - (a^2 + b^2)(c^2s'^2 - 2cc'ss' + s^2c'^2)$$

ce qui compte tenu de $c^2 + s^2 = c'^2 + s'^2 = 1$ se factorise effectivement en :

$$2(a^2cc' + b^2ss')(cc' + ss') = 0.$$

18 Nous poserons ici $A = a^2$, $B = \varepsilon b^2 = A - c^2$. Montrons tout d'abord qu'une équation de la tangente en un point de coordonnées (x, y) s'écrit sous la formule :

$$(Bx)X + (Ay)Y - AB = 0$$

(voir page 243, on dit parfois que l'on obtient cette relation par *dédoublement* de l'équation $Bx^2 + Ay^2 - AB = 0$). Il en résulte que l'expression :

$$\frac{cBx - AB}{\sqrt{B^2x^2 + A^2y^2}}\,\frac{-cBx - AB}{\sqrt{B^2x^2 + A^2y^2}}$$

qui se simplifie en $B^2\dfrac{A^2 - c^2x^2}{B^2x^2 + A^2y^2}$ représente le produit des distances algébriques comptées suivant une même direction, des deux foyers à cette droite.

Il ne reste plus qu'à simplifier encore davantage cette expression, ce qui est facile puisque :

$$B^2x^2 + A^2y^2 + Bc^2x^2 = A(Bx^2 + Ay^2) = A^2B$$

d'où l'on conclut que ce produit des distances est bien constant et finalement égal à $B = \varepsilon b^2$. Si l'on sait que les projections des foyers sur une tangente décrivent le cercle principal (de diamètre les sommets de l'axe focal), ce résultat provient immédiatement de la théorie de la puissance d'un point (F par exemple) par rapport à ce cercle et de la symétrie des deux foyers par rapport à son centre.

19 Nous poserons ici $A = a^2$ et $B = \varepsilon b^2 = A - c^2$. Si x et y sont les coordonnées de M (liées par $Bx^2+Ay^2-AB = 0$), l'ordonnée de I est facilement calculée et vaut $\dfrac{B}{y}$ (utiliser par exemples des coordonnées paramétriques en trigonométrie circulaire ou hyperbolique, ou écrire que la tangente en M a pour équation $(Bx)X + (Ay)Y = AB$ comme cela a été vu dans les exercices précédents). Les équations des droites FM et IH sont respectivement :

$$yX + (c - x)Y = cy \qquad \text{et} \qquad (x - c)X + yY = B.$$

Le déterminant de ce système donnant les coordonnées de H est :

$$\Delta = (x - c)^2 + y^2 = (a - ex)^2$$

d'après une propriété des rayons vecteurs démontrée dans l'exercice inaugural Il en résulte que ces coordonnées sont :

$$X = \frac{Bx}{a(a - ex)} \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{ay}{a - ex}\cdot$$

La pente de la droite OH est donc bien celle de la normale en M, dont une équation est $Ay(X - x) = Bx(Y - y)$. De plus l'expression de l'ordonnée de H montre que l'on passe de M à H dans l'homothétie de centre F et de rapport $\dfrac{a}{a - ex}$, ce qui montre que $FH = \dfrac{a}{|a - ex|}FM = a$. Les calculs sont analogues pour H' en changeant c en $-c$. Géométriquement, il est clair que HH' est orthogonal à la tangente MI. Les égalités $FH = F'H' = a$ sont évidentes si l'on trace deux figures distinctes suivant le genre de la conique : on peut passer de FIH à $F'IH'$ par une rotation de centre I et $MH = MH'$ (la tangente est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs) ce qui implique que, selon le cas, la somme ou la différence des longueurs MF et MF' vaut $2a$. Enfin la considération du symétrique G de F par rapport à la tangente et le fait que H' est alors le milieu du segment $F'G$ de longueur $2a$ montrent que OH' est parallèle à FG et donc à la normale en M.

20. Nous poserons ici $A = a^2$ et $B = \varepsilon b^2 = A - c^2$. L'équation de la tangente en M à la conique d'équation $Bx^2 + Ay^2 - AB = 0$ étant $(Bx)X + (Ay)Y - AB = 0$ (voir par exemple les exercices précédents) et $-(Ay)X + (Bx)Y + Acy = 0$ celle de la droite FK, on est en présence d un système linéaire de déterminant :

$$\Delta = B^2x^2 + A^2y^2 = B(A^2 - c^2x^2) = A(B^2 + c^2y^2).$$

Or sa résolution donne $\Delta X = A(B^2x + cAy^2)$ et $\Delta Y = AB(A - cx)y$, c'est-à-dire :

$$\Delta^2(X^2 + Y^2) = A^2[(B^2x + cAy^2)^2 + B^2(A - cx)^2y^2] = A^2\Delta[B^2 + c^2y^2]$$

ce qui donne finalement :

$$\Delta(X^2 + Y^2) = A^2(B^2 + c^2y^2) = A\Delta$$

et $X^2 + Y^2 = A = a^2$, ce qui est bien le résultat cherché Le calcul pour K' est analogue (changer c en $-c$). Par contre, une démonstration géométrique est facile : soit G le symétrique de F par rapport à K ; on a en effet:

$$2OK = F'G = |F'M + \varepsilon MG| = |F'M + \varepsilon MF| = 2a$$

21 Comme dans l'exercice 8, on a :

$$r' = -\overrightarrow{M}' \cdot \vec{u} \qquad \rho' = -\overrightarrow{M}' \cdot \vec{v}.$$

Puisque $r + \varepsilon\rho = \pm 2a$, il en résulte que $0 = \overrightarrow{M}' \cdot (\vec{u} + \varepsilon\vec{v})$ ce qui montre bien que la tangente en M est dirigée par $\vec{u} - \varepsilon\vec{v}$ et est donc bissectrice extérieure de l'angle (MF, MF') pour une ellipse $(\varepsilon = 1)$ intérieure pour une hyperbole $(\varepsilon = -1)$. Soit G le point défini par $\overrightarrow{MG} = -\varepsilon r\vec{v}$, et K le milieu de FP. On vérifie très facilement que $\overrightarrow{FK}$ est orthogonal à la tangente, puis que $\overrightarrow{MK}$ est parallèle à la tangente : K est donc bien la projection de F annoncée. Un dernier calcul montre que $2\overrightarrow{OK} = -\varepsilon(r + \varepsilon\rho)\vec{v}$, donc que $\overrightarrow{OK} = \mp\varepsilon a\vec{v}$, ce qui prouve que K appartient au cercle principal de centre O et de rayon a (il en va évidemment de même pour K'). On en déduit les égalités :

$$\begin{aligned} 4\,\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{F'K'} &= \varepsilon r\rho\|\vec{u} + \varepsilon\vec{v}\|^2 \\ &= (r + \varepsilon\rho)^2 - \|r\vec{u} - \rho\vec{v}\|^2 \\ &= 4a^2 - \|\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MF'}\|^2 \\ &= 4(a^2 - c^2) \\ &= 4\varepsilon b^2. \end{aligned}$$

(Ces résultats ont déjà été obtenus d'autre façon dans des exercices précédents.)

22. Nous poserons ici $A = a^2$ et $B = \varepsilon b^2 = A - c^2$. L'équation de la tangente en M étant $(Bx)X + (Ay)Y - AB = 0$ (voir par exemple les exercices précédents), celle de la normale est $(Bx)Y - (Ay)X + c^2xy$. Les coordonnées de N et P sont donc respectivement $\left(\frac{c^2}{A}x, 0\right)$ et $-\left(\frac{c^2}{B}y, 0\right)$, ce qui montre que les mesures algébriques $\overline{MP}$, $\overline{MN}$ et $\overline{NP}$ sont proportionnelles aux constantes $A = a^2$, $B = \varepsilon b^2$ et c^2 (on retrouve naturellement que $\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP}$, puisque $A = B + c^2$).

Propriétés des trois coniques

23 Nous choisirons $x^2 + y^2 = (ex - p)^2$ comme équation de la conique, avec F comme origine. Un calcul classique de dérivation montre que l'abscisse du point N où la normale coupe l'axe focal est :

$$\begin{aligned} \overline{FN} &= x + yy' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(ex - p)^2 \\ &= e(ex - p) = \pm e\sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\big((e^2 - 1)x - ep, -y\big)$, ce qui donne pour la norme de $\overrightarrow{MP}$ le quotient par $\|\overrightarrow{MF}\| = |ex - p|$ du module du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MN}\right| &= \left|(1 - e^2)x^2 + epx + y^2\right| \\ &= \left|(1 - e^2)x^2 + epx - x^2 + (ex - p)^2\right| = \left|p(p - ex)\right| \end{aligned}$$

d'où finalement $MP = p$. De plus, la relation $(*)$ montre que le rapport $\dfrac{FN}{FM}$ est constant et égal à l'excentricité e.

24. Nous choisirons $x^2 + y^2 = (ex - p)^2$ comme équation de la conique, avec F comme origine. Posons $\rho = ex - p$. On en déduit une égalité de la forme $x + yy' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(ex - p)^2 = e\rho$. Or les coordonnées de T sont de la forme $(x + \lambda, y + \lambda y')$. Les équations des droites TI et FI sont donc respectivement :

$$Xx + Yy = x^2 + y^2 + \lambda(x + yy') = \rho(\rho + \lambda e) \qquad \text{et} \qquad Xy - Yx = 0$$

et donnent $X = \dfrac{x}{\rho}(\rho + \lambda e)$ et $Y = \dfrac{y}{\rho}(\rho + \lambda e)$ pour coordonnées de I. Finalement $FI = |\rho + \lambda e| = |ex - p + \lambda e|$; or $\overline{TH} = \dfrac{p}{e} - x - \lambda$: le rapport étudié est donc constant et égal à e Le cas particulier où $F = M$ ($\lambda = 0$) est bien connu. Un autre exemple (celui où l'on choisit T sur la directrice, d'où $I = H$) est intéressant : il montre que la portion de tangente comprise entre la conique et une directrice est vue du foyer associé sous un angle droit puisqu'alors $I = F$.

Propriétés diverses

25 Par rotation de $\dfrac{\pi}{4}$ et translation au centre, on voit qu'il s'agit d'une ellipse de paramètre $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$, d'excentricité $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, de foyers $\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{10}{3}}, 2 \pm \sqrt{\dfrac{10}{3}}\right)$, de directrices $x - y + 1 = \pm\sqrt{30}$ de sommets $(1 \pm \sqrt{5}, 2 \mp \sqrt{5})$ et $\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{5}{3}}\ 2 \pm \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$, d'axes $x + y = 3$ et $x - y + 1 = 0$, de centre $(1, 2)$, de demi-distance focale $c = \sqrt{\dfrac{20}{3}}$, de demi-axe focal $a = \sqrt{10}$ et de demi-axe non focal $b = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

26. Nous prendrons AB comme axe des abscisses et C comme origine. Posant $a = \overline{CA}$ et $b = \overline{CB}$ et définissant Γ_λ comme le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0$, on trouve que la droite d'équation $y = \rho(x - a)$ est tangente à Γ_λ si et seulement si l'équation en x :

$$(\rho^2 + 1)x^2 - 2\rho x(a\rho + \lambda) + a\rho(a\rho + 2\lambda) = 0$$

admet une racine double, ce qui s'écrit :

$$0 = \rho^2(a\rho + \lambda)^2 - a\rho(\rho^2 + 1)(a\rho + 2\lambda) = \rho\big(\rho(\lambda^2 - a^2) - 2a\lambda\big)$$

et montre que la tangente non triviale est définie par $\rho = \dfrac{2a\lambda}{\lambda^2 - a^2}$, qui conduit à l'équation $(\lambda^2 - a^2)y = 2a\lambda(x - a)$. L'équation analogue avec b conduit aux coordonnees paramétriques de M données par les égalités :

$$x = \frac{a + b}{\lambda^2 + ab}\,\lambda^2 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{2ab}{\lambda^2 + ab}\,\lambda.$$

On en tire λ en fonction de x/y, puis une équation du lieu cherché sous la forme :

$$4abx(a + b - x) = (a + b)^2 y^2.$$

Les transformations usuelles conduisent à la forme classique d'une conique à centre :

$$\frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{ab} = 1.$$

La demi-distance focale est $\dfrac{|a-b|}{2}$, alors que le demi-axe focal est $\dfrac{|a+b|}{2}$. On voit donc que ce lieu est la conique de foyers A et B dont C est un sommet. Une étude détaillée des calculs ci-dessus montre qu'il faut prendre quelques précautions (notamment en raison de divisions possibles par des dénominateurs nuls si $\lambda^2 = a^2$, $\lambda^2 = b^2$ ou $\lambda^2 = -ab$). Nous laissons le lecteur conduire ces vérifications, et exclure par exemple du lieu le symétrique de C par rapport au milieu de AB (qui correspond à un cercle Γ_∞ réduit à la droite AB). Notons qu'une démonstration géométrique est « évidente » à condition de considérer les cas de figure possibles ; en tenant compte de l'égalité des distances issues de M aux deux points de contacts des tangentes MA et MB, on montre en effet facilement des relations telles que $MA + MB = OA + OB$ ou $MA - MB = OA - OB$ ce qui redonne le résultat déterminé ci-dessus par calcul.

27. On trouve facilement que cette conique est dégénérée en un unique point de coordonnées $(-1, -1)$, soit en décomposant dans le corps des complexes le polynôme donné (on trouve $(y+xj-j^2)(y+xj^2-j)$ où j est l'une des racines troisièmes de l'unité non réelles), soit en remarquant que son équation s'écrit encore $(x+1)^2-(x+1)(y+1)+(y+1)^2$, ou même par une décomposition en carrés comme $\dfrac{1}{4}\left((2y-x+1)^2+3(x+1)^2\right)$. L'identité $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ laisse espérer que le polynôme $f(x,y)$ est divisible par $x^2-xy+y^2+x+y+1$. De fait, on trouve bien que $f(x,y) = (y+x+1)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$ On peut d'ailleurs noter que la résolution traditionnelle d'une équation du troisième degré par la méthode de Cardan redonne facilement la décomposition complète :

$$x^3+3xy+y^3-1 = (y+x-1)(y+xj-j^2)(y+xj^2-j).$$

Il en résulte que l'ensemble cherché est formé de la droite d'équation $y = 1-x$ et du point (isolé) $(-1,-1)$. Les solutions entières sont donc le couple $(-1,-1)$ et les couples $(n, 1-n)$ où n est un entier relatif arbitraire.

Chapitre 8

1. Calculer $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2$.

2. Dans le cas général, seule c) est vérifiée.
Si les réels sont positifs, seules a), c) et d) sont vraies

3. Si $x \in [-3, 0]$, on a $\sqrt{2-x} \geqslant \sqrt{2} \geqslant 1$, et si $x \in [0, 2]$, on a $\sqrt{3+x} \geqslant \sqrt{3} \geqslant 1$.
L'ensemble des solutions est donc $[-3, 2]$.

4. $\sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} = |\sqrt{a-b} + \sqrt{b}| + |\sqrt{a-b} - \sqrt{b}|$
qui vaut $2\sqrt{a-b}$ si $a \geqslant 2b$ et $2\sqrt{b}$ si $a \leqslant 2b$.
Finalement :

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} = 2\sqrt{\max(a-b, b)}.$$

5. **a)** L'inégalité est équivalente à :

$$(\sqrt{a+b})^2 \leqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

soit :

$$0 \leqslant 2\sqrt{a}\sqrt{b}.$$

b) D après la question précédente :

$$\sqrt{|a|} + \sqrt{|a-b|} \geqslant \sqrt{|a| + |a-b|} \geqslant \sqrt{|a-a+b|}.$$

De même :

$$\sqrt{|b|} + \sqrt{|a-b|} \geqslant \sqrt{|a|}.$$

6. Si l'on suppose $\sqrt{a} = \dfrac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ alors $a = \dfrac{p^2}{q^2}$.

7. Comme $B \subset A$, B est bornée, et l'on a :

$$\inf A \leqslant \inf B \leqslant \sup B \leqslant \sup A.$$

8. Si tous les éléments de A étaient négatifs, 0 serait un majorant de A d où $\sup A \leqslant 0$.

9 $A = \{a + bn \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minorée non majorée avec $\inf A = a$.
$A = \{a + (-1)^n b \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a-b, a+b\}$ est bornée avec $\inf A = a - b$ et $\sup A = a + b$.
$A = \left\{a + \dfrac{b}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est bornée avec $\inf A = a$ et $\sup A = a + b$.
$A = \left\{(-1)^n a + \dfrac{b}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est bornée avec $\inf A = -a$ et $\sup A = \max\{a + \dfrac{b}{2}, -a + b\}$.
$A = \left\{a + \dfrac{(-1)^n b}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est bornée avec $\inf A = a - b$ et $\sup A = a + \dfrac{b}{2}$.

10. **a)** On a $E(a) \leqslant a \leqslant b < E(b)+1$, d'où $E(a) \leqslant E(b)$.

b) De plus :

$$E(a)+E(b) \leqslant a+b < E(a)+E(b)+2$$

d'où :

$$E(a)+E(b) \leqslant E(a+b)$$

et :

$$E(a+b) \leqslant E(a)+E(b)+1.$$

11 En developpant, on trouve :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) = n + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right)$$

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

donc :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n + 2\binom{n}{2} = n^2.$$

12. On montre que l'intersection est convexe :
soient I_1 et I_2, deux intervalles dont l'intersection est non vide et $(x,y) \in (I_1 \cap I_2)^2$, alors pour tout $z \in [x,y]$, on a $z \in I_1$ (convexité de I_1) et $z \in I_2$ (convexité de I_2).
L'intersection de deux intervalles ouverts (resp. fermés) est un intervalle ouvert (resp. fermé) (traiter les différents cas).

13. **a)** Pour tout $x \in A$, on a $\inf A \leqslant x$ donc $-x \leqslant -\inf A$ et donc $\sup(-A) \leqslant -\inf A$. De même pour tout $x \in A$, $-x \leqslant \sup(-A)$, donc $-\sup(-A) \leqslant x$ d'où $\inf A \geqslant -\sup(-A)$. On a donc finalement $\sup(-A) = -\inf(A)$.

b) Pour tout $(x,y) \in A \times B$, on a $x + y \leqslant \sup A + \sup B$, d'où $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$. De même pour tout $(x.y) \in A \times B$, on a $x \leqslant \sup(A+B) - y$ et donc $\sup A \leqslant \sup(A+B) - y$ d'où pour tout $y \in B$, $y \leqslant \sup(A+B) - \sup A$ d'où $\sup B \leqslant \sup(A+B) - \sup A$. Finalement, on a montré $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

c) On applique le résultat précédent avec $B = \{a\}$.

d) Dans le cas général, on n'a pas $\sup(AB) = \sup A \sup B$ (prendre $A = B = [-1, 0]$).
Si A et B sont des parties de $\mathbb{R}_+$, le résultat est vrai.
Éliminons le cas évident où A est réduit à $\{0\}$. Pour tout $(x, y) \in A \times B$, on a $xy \leqslant \sup A \sup B$ et donc $\sup(AB) \leqslant \sup A \sup B$. De plus, pour tout $(x, y) \in A \times B$, $xy \leqslant \sup(AB)$. Soit $y \in B$, $y \neq 0$, on a pour tout $x \in A$, $x \leqslant \dfrac{\sup(AB)}{y}$ donc $\sup A \leqslant \dfrac{\sup(AB)}{y}$ puis $y \leqslant \dfrac{\sup(AB)}{\sup A}$.
Cette inégalité étant également vraie si y est éventuellement nul, on a $\sup A \sup B \leqslant \sup(AB)$.

14. On montre que :

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

et :

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

15. Encadrons $\dfrac{E(nx)}{n}$:

$$nE(x) \leqslant nx < nE(x) + n$$

d'où :

$$nE(x) \leqslant E(nx) < nE(x) + n$$

soit :

$$E(x) \leqslant \frac{E(nx)}{n} < E(x) + 1$$

d'où le résultat.

16 L'encadrement s'obtient en utilisant :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

En sommant les inégalités obtenues pour n variant de 1 à $10\,000$, on obtient :

$$\sqrt{10001} - 1 < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) < \sqrt{10000}$$

d'où :

$$E\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)\right) = 99.$$

17. $$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-x_j)(y_i-y_j)=2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_iy_j+x_jy_i)$$
$$=2n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right).$$

De plus x_i-x_j et y_i-y_j ont toujours le même signe donc :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-x_j)(y_i-y_j)\geqslant 0$$

ce qui montre l'inégalité.

18. **a)** G possède au moins un élément non nul x. Or $x>0$ ou $-x>0$ donc $G\cap\mathbb{R}_+^*$ est non vide.

b) Supposons que $a\notin G$.

Il existe $x\in G$ tel que $a\leqslant x<\dfrac{3a}{2}$ et $x\neq a$ puisque $a\notin G$.

De même, il existe $y\in G$ tel que $a<y<x$ d'où :

$$0<x-y<\frac{a}{2}.$$

Or $x-y\in G$, ce qui contredit $a=\inf(G\cap\mathbb{R}_+^*)$.
Finalement $a\in G$. On a donc clairement $a\mathbb{Z}\subset G$
Montrons que $G\subset a\mathbb{Z}$.
Soit $x\in G$, l'entier $n=E\left(\frac{x}{a}\right)$ vérifie :

$$na\leqslant x<(n+1)a.$$

Alors :

$$0\leqslant x-na<a.$$

Or $x-na\in G$ donc $x=na$, ce qui prouve que $x\in a\mathbb{Z}$.

c) Soient x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $x<y$. Puisque $a=0$, il existe $z\in G$ tel que

$$0<z<y-x.$$

De plus, il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que :

$$nz\leqslant x<(n+1)z.$$

Alors :

$$x<(n+1)z<x+y-x=y.$$

et $(n+1)z$ est un élément de G entre x et y.

19. Il suffit d'écrire que $\inf\big(-f(x), -g(x)\big) = -\sup\big(f(x), g(x)\big)$.
Pour la deuxième égalité, appliquer la première à $-f$ et $-g$.
On a :
$$\sup(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\Big)$$
ce qui montre que $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$.
De même, on montre $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.

20. Soit f, une fonction qui répond au problème posé. Posons $f(0) = a$ d'après la relation, on a $f(1) - a = \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_0 \in \{-1, 1\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\big|f(x) - a\big| = |x|$$
soit :
$$f(x) = \varepsilon x + a$$
avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ (ε dépend de x). De plus, on a :
$$\big|f(x) - f(1)\big| = |\varepsilon x - \varepsilon_0| = |x - 1|.$$
En élevant au carre, on obtient (puisque $x \neq 0$) :
$$\varepsilon\varepsilon_0 = 1$$
soit :
$$\varepsilon_0 = \varepsilon$$
(ε ne dépend plus de x).
De plus :
$$f(0) = f(0) + \varepsilon \times 0.$$
f est donc de l une des deux formes :
$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x + f(0)$$
ou :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -x + f(0).$$
Réciproquement, ces deux types de fonctions verifient l'équation fonctionnelle

21. Posons $a = \sup\limits_X f$, $b = \inf\limits_X g$ et $c = \sup\limits_X (f + g)$.
On a :
$$\forall x \in X \quad f(x) + b \leqslant f(x) + g(x) \leqslant c$$
d'où :
$$\forall x \in X\ ,\ f(x) \leqslant c - b.$$
Il en resulte $a \leqslant c - b$, soit $a + b \leqslant c$.

22. On a :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ \left|(1-x)\sin\frac{\pi}{x}\right| \leqslant |1-x| \leqslant 1$$

ce qui montre que f est bornée.
Montrons que $\sup\limits_{]0,1]} f = 1$ et $\inf\limits_{]0,1]} f = -1$.
Soient les points x_k définis par $x_k = \dfrac{2}{1+4k}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = 1$ ce qui montre que $\sup\limits_{]0,1]} f = 1$. On fait de même avec les points définis par $\dfrac{\pi}{x_k} = \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$, pour montrer que $\inf\limits_{]0,1]} f = -1$ On montre facilement que ces bornes ne sont pas atteintes.

23. $f_1 \circ f_2 \cdots \circ f_n$ est monotone croissante si p est pair, décroissante sinon.

24. Le produit est une fonction paire ou impaire suivant les cas. Si les deux fonctions n'ont pas la même parité, le produit est une fonction impaire, sinon le produit est une fonction paire.

25. L'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}$.

26. Son application réciproque est définie par $f^{-1}(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f^{-1}(x) = x - 1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

27. Si f est k-lipschitzienne, prendre les fonctions $x \mapsto kx$ et $x \mapsto kx - f(x)$.
On montre que ces deux fonctions sont croissantes, de plus la première est k-lipschitzienne et la seconde $2k$-lipschitzienne.

28. Soient f et g, les deux fonctions bornées respectivement par M_1 et M_2 et de rapports respectifs k_1 et k_2.

$$\begin{aligned}\big|f(x)g(x) - f(y)g(y)\big| &= \big|f(x)\big(g(x)-g(y)\big) + g(y)\big(f(x)-f(y)\big)\big| \\ &\leqslant (M_1k_1 + M_2k_2)|x-y|.\end{aligned}$$

Le résultat n'est pas conservé dans le cas où les fonctions ne sont pas toutes les deux bornées (prendre x et $\cos x$).

Chapitre 9

1. Le produit de deux suites réelles minorées n'est pas nécessairement minoré. Prendre $u_n = n$ et $v_n = -1$.

2. On suppose, par exemple, la suite croissante et l'on utilise :

$$nu_{n+1} \geqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

3. Soit n_0 un rang à partir duquel la suite est croissante, un minorant de la suite est alors $\min\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, u_{n_0}\}$.

4. $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{3.2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ sont extraites de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
$(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{3.2^n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{3.2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ sont extraites de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.
$(u_{3.2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$.
$(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$.
$(u_{3.2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{3.2^n})_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Notons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors $w_n = v_{\psi(n)} = u_{\varphi\circ\psi(n)}$. Les applications ψ et φ étant strictement croissantes, $\varphi \circ \psi$ est également strictement croissante.

6. Soit $k \geqslant 2$ et φ_k définie par

$$\begin{cases} \varphi_k(0) = 0 \\ \text{si } 0 < n < k \text{ , } \varphi_k(n) = 2n - 1 \\ \text{si } n \geqslant k \text{ , } \varphi_k(n) = 2n \end{cases}$$

Les suites $(u_{\varphi_k(n)})$ sont toutes convergentes.

7. **a)** La suite tend vers 0 comme produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0.

b) Si $a = b$, la suite est nulle.

Si $b > a$, on a alors $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n + 1}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -1$

Si $a > b$, on obtient de manière analogue $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

c) $u_n = \dfrac{1 + \dfrac{5}{n^2}}{5 + \dfrac{\cos n}{n^3} + \dfrac{1}{n^5}}$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{5}$.

d) $u_n = \dfrac{2+\dfrac{(-1)^n}{n}}{5+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}}$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{2}{5}\cdot$

8. Il suffit de remarquer que pour deux réels a et b, on a :

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{et} \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

et d'appliquer ce resultat aux nombres u_n et v_n.

9. Notons que :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot$$

On déduit que :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\cdot$$

La suite est alors encadrée par deux suites qui convergent vers 1.

10. On montre par récurrence que la suite est croissante et majorée par 2. Pour trouver la limite, on peut soit utiliser la continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ (voir le chapitre sur la continuité) et considérer ensuite l'unique racine de l'équation $\sqrt{2+x} = x$, soit démontrer par récurrence que :

$$|u_n - 2| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

en utilisant :

$$|u_{n+1} - 2| = \frac{|u_n - 2|}{2+\sqrt{2+u_n}} \leqslant \frac{|u_n-2|}{2}.$$

11. **a)** Si la suite converge, sa limite ℓ vérifie $\ell - \dfrac{\ell}{3} = 1$.

b) On a :

$$u_{3n} - \frac{3}{2} = 3(u_n - 1) - \frac{3}{2} = 3\left(u_n - \frac{3}{2}\right)$$

Pour $k \geqslant 0$, on a donc :

$$u_{3^k n} - \frac{3}{2} = 3^k\left(u_n - \frac{3}{2}\right)\cdot$$

La suite étant bornée, si $n \geqslant 1$, alors $u_n = \dfrac{3}{2}\cdot$

12. Dans les deux cas, la suite considérée est croissante majorée donc convergente.

13. On montre que la suite $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite majorée. En effet, on a :

$$\begin{aligned}|u_{2^n}| &\leqslant |u_1| + |u_{2^n} - u_{2^{n-1}} + u_{2^{n-1}} - u_{2^{n-2}} + \cdots + u_2 - u_1| \\ &\leqslant |u_1| + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + 1\end{aligned}$$

or :

$$|u_1| + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + 1 = |u_1| + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \leqslant |u_1| + 2$$

et l'on utilise l'exercice précédent.

14. On montre aisément que les deux suites sont bien définies, strictement positives et que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n \geqslant u_n$.
On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante majorée par v_1 est convergente vers ℓ, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante minorée par u_1 est convergente vers ℓ'.
De la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on déduit $\ell = \ell'$.

15. On écrit pour $t \neq -1$:

$$1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n\frac{t^n}{1+t}.$$

Puis l'on intègre entre 0 et x.
On prend ensuite $x = 1$ et l'on utilise

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

16. $\big(N(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais non strictement croissante et $\big(S(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone puisque par exemple $S(10) < S(11) < S(9)$.

17. Il suffit de prendre la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison $\dfrac{r}{k}$.

18. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

On en déduit $2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant u_n$ et donc $\lim u_n = +\infty$.

19. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-k} \leqslant \varepsilon$. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > 10^{-k}\}$ est fini donc admet un plus grand élément n_0.
Pour $n \geqslant n_0 + 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 10^{-k} \leqslant \varepsilon$.

20. On trouve $a = c = \dfrac{1}{2}$ et $b = -1$.
On écrit ensuite pour $n \geqslant 3$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}$$

et donc $\lim \sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{4}\cdot$

21. Les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1, donc la suite est convergente.

22. On construit par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{\varphi(n)} \geqslant n.$$

Il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u_{\varphi(0)} \geqslant 0.$$

Supposons construits $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$ tels que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ \ldots, n\} \ , \ u_{\varphi(k)} \geqslant k$$

et construisons $\varphi(n+1)$ La suite $(u_m)_{m>\varphi(n)}$ est non majorée donc il existe $\varphi(n+1)$ avec $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que :

$$u_{\varphi(n+1)} \geqslant n+1.$$

23. Si la suite (u_n) est convergente alors la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, donc :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{1}{2}\cdot$$

Alors :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_{n+1} = u_n.$$

La suite est donc stationnaire

24. Supposons $\ell = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_q < \frac{p}{q} < v_q.$$

En multipliant les inégalités par $q!$, on obtient :

$$u_q q! < p(q-1)! < u_q q! + 1.$$

Or $u_q q! \in \mathbb{Z}$ et $p(q-1)! \in \mathbb{Z}$, ce qui conduit à une contradiction
Pour trouver la limite de :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{ak+b}{k!}$$

on écrit :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{ak+b}{k!} = au_{n-1} + bu_n.$$

25. On écrit :

$$u_n = \frac{1}{\cos\dfrac{n\pi}{5}} \left(\frac{5n^2}{3(n+2)^2} + \frac{\sin n}{3(n+2)^2} \right).$$

La suite :

$$v_n = \frac{5n^2}{3(n+2)^2} + \frac{\sin n}{3(n+2)^2}$$

convergeant vers $\dfrac{5}{3}$, comme $u_n \cos\dfrac{n\pi}{5} = v_n$, la convergence de u_n entrainerait, si la limite de u_n est non nulle, la convergence de la suite $(\cos\frac{n\pi}{5})_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui est impossible, ou si la limite de u_n était nulle, la divergence de $(|\cos\frac{n\pi}{5}|))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $+\infty$, ce qui est également impossible.

26 La suite $\left(5\sin\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant N \Longrightarrow -\frac{1}{5} \leqslant 5\sin\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{5}.$$

On en deduit que :

$$-\frac{2}{5} \leqslant 5\sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}\cos n \leqslant \frac{2}{5}$$

ce qui permet de majorer la suite $(|u_n|)_{n\geqslant N}$ par la suite $\left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right)_{n\geqslant N}$ qui converge vers 0.

27. Si l'on suppose $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, deux cas sont possibles :

- soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$ auquel cas la suite est décroissante minorée donc convergente,

- soit $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $u_{n_0+1}-u_{n_0} > 0$ auquel cas, la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang n_0 et donc convergente car majorée.

28. **a)** $(i) \Longrightarrow (ii)$

Soit x dans $\mathbb{R}$. Entre x et $x+\dfrac{1}{n}$, il existe au moins un élément de A que l'on note u_n. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x.

$(ii) \Longrightarrow (i)$

Soient x et y deux éléments de A tels que $x<y$, d'après (ii), $\dfrac{x+y}{2}$ est limite d'une suite (u_n) d'éléments de A, il existe donc un rang N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant N \Longrightarrow x = \frac{x+y}{2}-\frac{y-x}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2} = y.$$

b) On a bien $A \subset [0.1]$. Soient x et y dans $[0.1]$ avec $x<y$ et n_0 tels que :

$$\frac{1}{2^{n_0}} \leqslant y-x.$$

Posons $k_0 = \max\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{k}{2^{n_0}} \leqslant x\right\}$. On a alors :

$$x \leqslant \frac{k_0+1}{2^{n_0}} \leqslant y.$$

29. **a)** Soit n_0 tel que :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid u_n \mid \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$\left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n}{n}\right| \leqslant \frac{|u_{n_0}|+|u_{n_0+1}|+\cdots+|u_n|}{n} \leqslant \frac{n-n_0+1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

b) L existence du rang n_1 provient de la convergence vers 0 de la quantité considérée (il y a un nombre fixé de termes dans la somme).

c) On en déduit que pour $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$:

$$|v_n| \leqslant \left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n}{n}\right| + \left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\right| \leqslant \varepsilon$$

d) Il suffit ensuite d'appliquer le resultat précédent à la suite $(u_n - \ell)$ (où ℓ est la limite de la suite) en remarquant que :

$$v_n - \ell = \frac{u_1 - \ell + u_2 - \ell + \cdots + u_n - \ell}{n}.$$

Ce résultat s'appelle le théorème de *Cesàro*
La réciproque est fausse : il suffit de prendre $u_n = (-1)^n$, (u_n) est divergente, alors que (v_n) converge vers 0.

30 Soit ℓ la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on écrit :

$$v_n - \frac{n+1}{2n}\ell = v_n - \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\ell = \frac{(u_1-\ell)+2(u_2-\ell)+\cdots+n(u_n-\ell)}{n^2}$$

et l'on montre comme dans l'exercice précédent que la suite $v_n - \dfrac{n+1}{2n}\ell$ converge vers 0, d'où $\lim v_n = \dfrac{\ell}{2}\cdot$

31. Il suffit d'appliquer le théorème de Cesàro (exercice 29) à la suite $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour obtenir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - u_0}{n} = \ell$.

32. **a)** La suite $(-1)^n$ a deux valeurs d'adherence 1 et -1
La suite $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ admet $0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ comme valeurs d'adhérence.

b) Si la suite est convergente, toutes les suites extraites convergent vers la limite de la suite.
La suite définie par $u_n = 1$ si n est pair et $u_n = n$ si n est impair n'admet qu'une seule valeur d'adhérence mais n'est pas convergente.

c) Soit (u_n) une suite bornée qui admet une seule valeur d'adhérence ℓ et supposons que (u_n) ne converge pas vers ℓ.
Dans ce cas :

$$\exists \varepsilon > 0 \;:\; \forall N \in \mathbb{N}\;,\; \exists n \geqslant N \;:\; |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

On peut alors construire une sous-suite $u_{\varphi(n)}$, dont tous les termes vérifient $|u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon$; d'après Bolzano-Weierstrass il existerait une sous-suite de $(u_{\varphi(n)})$ et donc de (u_n) convergeant vers ℓ' avec $|\ell' - \ell| \geqslant \varepsilon$, ce qui contredit l'existence d'une unique valeur d'adhérence.

33. **a)** On trouve facilement que :

$$v_{n+1} = (n+1)v_n = (n+1)(n)v_{n-1} = \cdots = (n+1)!\ v_0.$$

b) On trouve $C(n+1) - C(n) = 2^n$, ce qui donne :

$$C(n) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1 + C(0) = C(0) + 2^n - 1$$

La suite de terme général $(C(0) + 2^n - 1)n!$ vérifie donc la même relation de récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et a pour premier terme $C(0)$. Le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc $(u_0 + 2^n - 1)n!$.

c) Pour la deuxième récurrence, on cherche les suites vérifiant :

$$v_{n+1} - 3^{2n}v_n = 0$$

c'est-à-dire, les suites de la forme :

$$v_n = 3^{2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2}v_0 = 3^{n(n-1)}v_0.$$

Puis l'on cherche les suites de la forme $w_n = C(n)3^{n(n-1)}$ qui vérifient la relation de récurrence :

$$w_{n+1} - 3^{2n}w_n = 3^{n^2}.$$

Ce qui donne comme condition sur la suite $C(n)$:

$$C(n+1) - C(n) = 3^{-n}$$

d'où :

$$C(n) = C(0) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\cdot$$

Le terme général des suites cherchées est donc :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right)3^{n(n-1)}.$$

34 **a)** Soit $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n_0, u_k > x\}$ (partie non vide de $\mathbb{N}$, car la suite diverge vers $+\infty$). On a :

$$|u_{p-1} - u_p| \leqslant \varepsilon \quad (\text{car} \quad p - 1 \geqslant n_0).$$

Deux cas sont possibles :

- Si $p = n_0 + 1$, alors :

$$u_{p-1} \leqslant x < u_p \quad \text{d'où} \quad 0 \leqslant u_p - x \leqslant \varepsilon.$$

- Si $p > n_0 + 1$, alors $p - 1 > n_0$ donc $p - 1$ n'appartient pas à l'ensemble ci-dessus et nécessairement :

$$u_{p-1} \leqslant x < u_p \quad \text{d'où} \quad 0 \leqslant u_p - x \leqslant \varepsilon.$$

b) Soit x quelconque, comme (v_n) diverge vers $+\infty$, il existe m tel que :

$$x + v_m \geqslant u_{n_0}.$$

En appliquant le résultat précédent à $x + v_m$, on en déduit l'existence de p tel que :

$$\left|(u_p - v_m) - x\right| \leqslant \varepsilon.$$

La densité de l'ensemble considéré en découle.

c) Soit $x \in [0,1]$, en posant $v_n = E(u_n)$ et en appliquant ce qui précède on peut trouver n et m tels que :

$$\left|(u_n - u_m) - x\right| \leqslant \varepsilon \text{ et } u_n - v_m \in [0,1[.$$

Il en résulte que nécessairement $v_m = E(u_n)$.

Ce résultat s'applique par exemple avec les suites $(\ln n)_{n\geqslant 1}$ ou $(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$.

Chapitre 10

1. Supposons que f soit T-périodique et admette ℓ pour limite en $+\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\exists A \in \mathbb{R} \;:\; x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \frac{1}{n}\cdot$$

Soit x_0 un élément quelconque de D_f.

$$\exists k \in \mathbb{N} \;:\; x_0 + kT \geqslant A$$

d'où :

$$|f(x_0) - \ell| \leqslant \frac{1}{n}\cdot$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;,\; |f(x_0) - \ell| \leqslant \frac{1}{n}$$

d'où $f(x_0) = \ell$.
Autre solution.
Supposons $T > 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_0 + nT)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, donc $\big(f(x_0 + nT)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
Or $\forall n$, $f(x_0 + nT) = f(x_0)$, donc $f(x_0) = \ell$.

2. Soit $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \Longrightarrow f(n) \geqslant A$$

alors :

$$x \geqslant N \Longrightarrow f(x) \geqslant f(N) \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

Autre solution.
La fonction est croissante non majorée donc diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

3. **a)** $\dfrac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2} = \dfrac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{5-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2} = \dfrac{1}{5}.$

b) On multiplie et divise par la quantité conjuguée et on suppose $x > 0$ puisque x tend vers $+\infty$:

$$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - x = 1.$$

c) $\dfrac{\tan 5x}{\sin x} = \dfrac{\tan 5x}{5x}\,\dfrac{5x}{x}\,\dfrac{x}{\sin x}$ d'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\sin x} = 5.$$

d) $\dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}} = e^{2x}\,\dfrac{1+2xe^{-3x}+7e^{-3x}}{1+e^{-2x}}$ d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}} = +\infty.$$

4. On a :

$$E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$$

d'où :

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui donne :

$$\lim_{x\to 0^+} f_0(x) = +\infty.$$

De même, on obtient :

$$1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$$

d'où :

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 1.$$

On a $f_2(x) = xf_1(x)$ d'où :

$$\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = 0.$$

5. **a)** $\dfrac{\sin(x\ln x)}{x} = \ln x \dfrac{\sin(x\ln x)}{x\ln x}$.

Or $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

On a donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\ln x)}{x\ln x} = 1$$

et la limite cherchée est $-\infty$.

b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. Or :

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

La limite cherchée est donc e.

6 Soit $x > 1$, si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ nx n'est pas un entier, donc $f(nx) = 0$. Cette suite converge vers 0

Si x est rationnel, $x = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et donc, car $x > 1$, $p > q \geqslant 1$; on constate que nx est premier pour au plus une valeur de $n \in \mathbb{N}$. La suite $(f(nx))$ est donc constante égale à 0 à partir d'un certain rang. Elle converge vers 0.

f n'a pas de limite en $+\infty$ car, si (p_n) représente la suite des nombres premiers, la suite $(f(p_n))$ a pour limite 1 tandis que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

7. Soit x_0 un point de $]a, b[$. La fonction f étant croissante, elle admet en x_0 une limite à droite ℓ_d et une limite à gauche ℓ_g qui vérifient :

$$f(a) \leqslant \ell_g \leqslant f(x_0) \leqslant \ell_d \leqslant f(b).$$

En supposant f discontinue en x_0, on aurait $\ell_g < \ell_d$.

De plus $\ell_d = \inf\limits_{x>x_0} f(x)$ et $\ell_g = \sup\limits_{x<x_0} f(x)$.

On aurait donc :

$$\forall x > x_0\ ,\ f(x) \geqslant \ell_d \text{ et } \forall x < x_0\ .\ f(x) \leqslant \ell_g.$$

Les valeurs de l'intervalle $]\ell_g, \ell_d[$ ne peuvent être atteintes à l'exception de la valeur $f(x_0)$. C'est absurde donc f est continue en x_0. On montre la continuité en a et en b, en raisonnant sur l'intervalle $]f(a), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$ et $]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(b)[$ respectivement.

8. **a)** On a $\lim x^2+1=1$ et $\lim \sin^2 x = 0^+$ donc la limite cherchee est $+\infty$

b) $\dfrac{\sin x - \sin 5x}{\sin x + \sin 5x} = \dfrac{\dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{\sin 5x}{x}}{\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\sin 5x}{x}}\cdot$

La limite cherchée est donc $-\dfrac{2}{3}\cdot$

c) $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{\sin x}{x}\,\dfrac{1-\cos x}{x^2}\,\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{x}\,\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\,\dfrac{1}{\cos x}\cdot$

La limite cherchée est donc $\dfrac{1}{2}\cdot$

d) Si x tend vers 0 par valeurs positives, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et $e^{\frac{1}{x}}+1$ tend vers $+\infty$.

Comme $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$, la limite de $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ en 0^+ est 0.

Si x tend vers 0 par valeurs négatives, $e^{\frac{1}{x}}+1$ tend vers 1.

Or :

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right).$$

Si $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ avait une limite en 0^-, alors $\sin\dfrac{1}{x}$ aurait une limite en 0^-, ce qui est faux.

Il n y a donc pas de limite en 0^-.

e) On écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2-a^2} &= \frac{\sin x - \sin a}{x-a}\,\frac{\sin x + \sin a}{x+a}\\ &= 2\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{2\frac{x-a}{2}}\,\frac{\sin x + \sin a}{x+a}.\end{aligned}$$

La limite cherchée est $\dfrac{\sin a \cos a}{a}\cdot$

9 Soit x un réel quelconque, on a pour tout entier naturel k :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^k}\right)\cdot$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ la continuité de f en 0 assure $f(x)=f(0)$.

10. Si $x > 1$, alors $E\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $f(x) = 0$.

La fonction f est donc continue en tout point de $]1, +\infty[$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, sur l intervalle $\left]\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right[$, $E\left(\dfrac{1}{x}\right) = k$ donc f coïncide avec la fonction $x \mapsto kx^2$ qui est continue.

À droite du point $\dfrac{1}{k}$, la fonction coïncide avec $x \mapsto (k-1)x^2$ donc :

$$\lim_{\frac{1}{k}^+} f(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}.$$

À gauche du point $\dfrac{1}{k}$, la fonction coïncide avec $x \mapsto kx^2$ donc :

$$\lim_{\frac{1}{k}^-} f(x) = \frac{1}{k}.$$

La fonction est donc discontinue en tout point de la forme $\dfrac{1}{k}$, $k \geqslant 1$.

11. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$0 < |x| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\frac{f(2x) - f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus :

$$|x| \leqslant \eta \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \ , \ \left|\frac{x}{2^k}\right| \leqslant \eta.$$

Soit x tel que $0 < |x| \leqslant \eta$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{2^k}{x}\left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\left|\frac{f\left(2\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\frac{x}{2^k}}\right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$, il existe N tel que :

$$\left|f\left(\frac{x}{2^N}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|f\left(\frac{x}{2^N}\right)\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}\frac{2^k}{x}\left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

12. Soit x_0 dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels (x_n) convergeant vers x_0.
De même la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ permet d'affirmer qu'il existe une suite de nombres irrationnels (y_n) convergeant vers x_0.
Les suites $\big(f(x_n)\big)$ et $\big(f(y_n)\big)$ convergeant vers deux limites distinctes, f n'est pas continue en x_0.

13. On trouve $f(x) = 1$ pour $|x| > 1$ et $f(x) = -1$ pour $|x| < 1$.
Les points de discontinuité sont 1 et -1.

14. Étudions la continuité de f en 0. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ |f(x)| \leqslant |x|$$

(étudier les différents cas).
Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(0) = 0$, ce qui prouve que f est continue en 0
Étudions la continuité de f en $x_0 \neq 0$ avec $\dfrac{1}{x_0} \in \mathbb{Z}$.
Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \setminus \{x_0\} \ , \ \frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$$

Notons $I = [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. On a :

$$\forall x \in I \ , \ |f(x)| \leqslant |x| \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| \cdot$$

Or, lorsque x tend vers x_0, $\left|\sin \dfrac{\pi}{x}\right|$ tend vers 0, donc :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = f(x_0)$$

ce qui prouve que f est continue en x_0.
Étudions la continuité de f en $x_0 \neq 0$ avec $\dfrac{1}{x_0} \notin \mathbb{Z}$.
Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \ , \ \frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$$

donc f coïncide au voisinage de x_0 avec $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right)$ qui est continue en x_0 comme produit de fonctions continues en x_0.
Finalement f est continue sur tout $\mathbb{R}$.
Autre solution
La fonction $\varphi : u \mapsto u \sin \dfrac{\pi}{u}$ prolongee en 0 par $\varphi(0) = 0$ est continue en 0.
Pour $x \neq 0$, $f(x) = x\varphi\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$, ce qui prouve la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$.

15. Soit T une période strictement positive de g.
Soient x et y dans $\mathbb{R}$, il existe N tel que $y \leqslant x + NT$. Alors pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$f(y+nT) + g(y+nT) \leqslant f(x+nT+NT) + g(x+nT+NT)$$

Et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $g(y) \leqslant g(x)$.
De même, on montre $g(x) \leqslant g(y)$.
Finalement, on a $g(x) = g(y)$.

Chapitre 11

1. Les deux propositions ne sont pas équivalentes :
on a $(ii) \Longrightarrow (i)$, mais on n'a pas $(i) \Longrightarrow (ii)$.
Prendre par exemple f définie par :

$$\forall x \in J \ , \ f(x) = 0 \ \text{ et } \ \forall x \in I \setminus J \ , \ f(x) = 1.$$

2. Il suffit de remarquer que :

$$\inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2} \ \text{ et } \ \sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}.$$

3. Soit g définie sur $I = [a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$.
On a $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$ et g étant continue sur I, on en déduit qu'il existe un point c de I tel que $g(c) = 0$

4. $f(I)$ étant un intervalle, il ne contient qu un nombre fini de points que dans le cas où $f(I)$ est réduit à un point.
Les fonctions cherchées sont donc les fonctions constantes.

5. **a)** La proposition est fausse : prendre une fonction constante.

b) La proposition est vraie.

c) La proposition est vraie, car toute partie bornée est incluse dans un segment.

d) La proposition est fausse : pour $f(x) = x^2$ on a $f^{-1}(]0,+\infty[) = \mathbb{R}^*$.

Dans le cas où f est supposée de plus strictement monotone :

a) La proposition est vraie.

b) La proposition est vraie.

c) La proposition est vraie.

d) La proposition est vraie : soit J un intervalle, f étant continue injective, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et f^{-1} définie sur $f(\mathbb{R})$ est continue.
De plus :

$$f^{-1}(J) = f^{-1}\big(J \cap f(\mathbb{R})\big)$$

est l'image par f^{-1} de $J \cap f(\mathbb{R})$. Comme $J \cap f(\mathbb{R})$ est un intervalle (éventuellement vide) et que f^{-1} est continue, on en déduit que $f^{-1}(J)$ est un intervalle.

6. Par définition de la limite :

$$\exists a > 0 : x \geqslant a \Longrightarrow f(x) \geqslant f(0).$$

Sur $[a, +\infty[$, f est minoree par $f(0)$, et sur $[0, a]$, f est continue donc minorée par $\min\limits_{[0.a]} f \leqslant f(0)$.
La fonction f est donc minorée et $\inf f = \min\limits_{[0,a]} f$.

7. On écrit que :

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}.$$

On a $f(x) = 3\sqrt{x} - x$, f est la somme de deux fonctions uniformément continues donc est uniformément continue.

8. Notons ℓ la limite de f.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \ x \geqslant A \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

f est uniformément continue sur $I = [0, A]$, donc :

$$\exists \eta > 0 \ : \ \forall (x, y) \in I^2 \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ avec $|x - y| \leqslant \eta$.
Si $(x, y) \in I^2$, on a bien $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$.
Si $x \geqslant A$ et $y \geqslant A$, alors :

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \left|f(x) - \ell\right| + \left|\ell - f(y)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Et enfin si $x \in I$ et $y \geqslant A$, on écrit .

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \left|f(x) - f(A)\right| + \left|f(A) - \ell\right| + \left|\ell - f(y)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On fait de même si $y \in I$ et $x \geqslant A$.

9. Supposons f non monotone. Il existe donc $(x, y, z) \in I^3$ tels que :
$$x < y < z$$
et :
$$f(y) \notin \Big[\min\big(f(x), f(z)\big), \max\big(f(x), f(z)\big)\Big]$$
soit par exemple :
$$f(y) < f(x) < f(z).$$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait t avec $y < t < z$ tel que $f(t) = f(x)$.
Or $x \neq t$, ce qui contredit l'injectivité de f.

10. Soient x et y dans $\mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto f(t) + xg(t)$ et $t \mapsto f(t) + yg(t)$ étant continues sur un segment, leurs bornes supérieures sont atteintes, donc :
$$\exists t_1 \in I : \varphi(x) = f(t_1) + xg(t_1)$$
$$\exists t_2 \in I : \varphi(y) = f(t_2) + yg(t_2).$$
Or :
$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi(y) &= f(t_1) + xg(t_1) - f(t_2) - yg(t_2)\\ &\leqslant f(t_1) + xg(t_1) - f(t_1) - yg(t_1)\\ &= g(t_1)(x - y).\end{aligned}$$
On montre de même que :
$$\varphi(x) - \varphi(y) \geqslant g(t_2)(x - y).$$
Si l'on pose :
$$M = \sup_{t \in I} \big|g(t)\big|$$
on obtient :
$$\big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| \leqslant M|x - y|$$
ce qui prouve que φ est M-lipschitzienne donc continue.

11. Il existe $\eta > 0$ tel que :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2\ ,\ |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant 1.$$
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$n\eta \leqslant x < (n+1)\eta.$$
On a :
$$\begin{aligned}f(x) = f(0) + f(\eta) - f(0) + f(2\eta) - f(\eta) +&\\ \cdots + f(n\eta) - f\big((n-1)\eta\big) + f(x) - f(n\eta).&\end{aligned}$$

d'où :

$$f(x) \leqslant |f(0)| + (n+1).$$

Or $n \leqslant \dfrac{x}{\eta}$, d'où :

$$f(x) \leqslant |f(0)| + \left(\frac{x}{\eta} + 1\right) = |f(0)| + 1 + \frac{1}{\eta}x.$$

12. Soit x_0 dans $\mathbb{R}_+^*$, f étant croissante, elle admet des limites à droite et à gauche en x_0 notées respectivement ℓ et ℓ' avec $\ell' \leqslant f(x_0) \leqslant \ell$.

Comme $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante, on a :

$$\forall x \geqslant x_0 \ , \ \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x_0)}{x_0}$$

d'où par passage à la limite :

$$\frac{\ell}{x_0} \leqslant \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

De même, on montre que :

$$\frac{\ell'}{x_0} \geqslant \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

Finalement $\ell = \ell' = f(x_0)$, ce qui prouve la continuité de f en x_0.

13. En prenant $x = y = 0$ on trouve $f(0) = 0$. Puis :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x) + f(-x) = f(0) = 0$$

donc f est impaire.

On montre ensuite par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ . \ f(nx) = nf(x)$$

d'où pour $x = 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ f(n) = nf(1).$$

En utilisant le fait que f est impaire, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ , \ f(n) = nf(1).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f(1) = f\left(n\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1).$$

De plus : $$\forall x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\ ,\ f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1).$$

on a donc :
$$\forall x \in \mathbb{Q}\ ,\ f(x) = xf(1).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est limite d'une suite de nombres rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ f(x_n) = x_n f(1).$$

Par passage à la limite en utilisant la continuité de f en x, on obtient $f(x) = xf(1)$ Les fonctions cherchées sont donc nécessairement linéaires :
$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = ax.$$

On vérifie pour finir, que toutes les fonctions de ce type vérifient l'équation fonctionnelle. Remarquons qu'il suffit de supposer f continue en 0, la relation suivante permettant de montrer la continuité en tout point de $\mathbb{R}$:
$$f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h) \rightarrow f(x_0) + f(0) = f(x_0).$$

14. Notons :
$$\ell = \lim_{x\rightarrow a} f(x) = \lim_{x\rightarrow b} f(x).$$

On peut donc prolonger f par continuité en a et en b en posant :
$$f(a) = f(b) = \ell.$$

Si $\forall x \in I\ ,\ f(x) = \ell$ alors f est clairement non injective.
Sinon , il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq \ell$. On peut supposer par exemple $f(x) > \ell$.
Soit $y \in]\ell, f(x_0)[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_1 \in]a, x_0[$ tel que $f(x_1) = y$.
De même on montre qu'il existe $x_2 \in]x_0, b[$ tel que $f(x_2) = y$.
Cela montre que f n'est pas injective car $x_1 < x_0 < x_2$ donc $x_1 \neq x_2$.

15. **a)** Montrons que si le sous-groupe des périodes de f est dense dans $\mathbb{R}$, alors f est constante.
Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (T_n) de périodes de f qui converge vers x. Alors $f(T_n) = f(0)$ converge vers $f(x)$ (continuité de f), donc $f(x) = f(0)$, ce qui prouve que f est constante.

b) Le groupe des périodes contient 1 et $\sqrt{2}$.

S'il était de la forme $T_0\mathbb{Z}$ avec $T_0 \neq 0$, on aurait $\sqrt{2} = pT_0$ et $1 = qT_0$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^*$.

Alors, $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

D'après ce qui précède, f est constante.

16. Soient y_1 et y_2 deux fonctions périodiques et solutions de l'équation. Soient T_1 et T_2 des periodes respectivement de y_1 et de y_2. T_1 et T_2 sont alors deux périodes de f
Comme f est périodique continue non constante, il existe $T > 0$ tel que le sous-groupe des périodes de f soit $T\mathbb{Z}$: il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$T_1 = pT \qquad \text{et} \qquad T_2 = qT.$$

Alors :

$$pqT = qT_1 = pT_2$$

est une période commune à y_1 et à y_2. C'est donc une période de $y_2 - y_1$
Or $y_2 - y_1$ est solution de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.
La seule solution périodique de cette équation est la solution nulle, donc $y_1 = y_2$.

17. L'unicité du point fixe provient de la décroissance stricte de $x \overset{g}{\mapsto} f(x) - x$.
ce qui est absurde.

Montrons l'existence d'un point fixe. Comme f est continue, si f n avait pas de point fixe, on aurait :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) > x \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) < x$$

puisque g, ne s'annulant pas, garderait un signe constant.

Dans le premier cas, on aurait $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$ et dans le deuxième $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$. Dans chacun des 2 cas cela contredit la décroissance de f.

Chapitre 12

1. Il suffit d'écrire $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{1 + |x|} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$, ce qui prouve que f est dérivable en 0 de nombre dérivé 1.

2. On écrit :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}\right).$$

La réciproque est fausse : prendre $x \mapsto |x - x_0|$.

3. On écrit :
$$\frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) + x_0 \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0}.$$
La limite cherchée est donc $f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

4. On écrit :
$$\frac{f^2(x+3h) - f^2(x-h)}{h} = \big(f(x+3h) + f(x-h)\big)\left(\frac{f(x+3h) - f(x-h)}{h}\right)$$
f etant continue en x $f(x+3h) + f(x-h)$ tend vers $2f(x)$.
Puis :
$$\frac{f(x+3h) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x+3h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$
Lorsque h tend vers 0, le premier terme tend vers $3f'(x)$ et le second vers $f'(x)$. Finalement la limite cherchée est $8f(x)f'(x)$.

5. Oui, il suffit de dériver $f(x+T) = f(x)$.

6. On reconnait la dérivée de :
$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \sin\left(n\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{si } x \not\equiv 0\ [2\pi]$$

- Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

7. On applique le théorème de Rolle $n-1$ fois entre deux racines consécutives de P.

8. Il est équivalent de montrer :
$$x\big(\ln(x+1) - \ln x\big) < 1 < (x+1)\big(\ln(x+1) - \ln x\big).$$
En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\ln$ entre x et $1+x$, on trouve :
$$\exists c \in\ ]0,1[\ :\ \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{x+c}.$$
Il suffit alors de remarquer que :
$$\frac{x}{x+c} < 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x+1}{x+c} > 1.$$

On montre le deuxième encadrement par récurrence sur n.
On verifie qu'il est vrai pour $n = 1$.
Puis si l'on suppose :

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!}$$

en utilisant :

$$\left(\frac{1+n}{n}\right)^n < e < \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n+1}$$

on trouve que la relation est vraie à l'ordre n.

9. On obtient, après calcul, l'unique solution $\theta = \dfrac{1}{2}\cdot$
La courbe est une parabole : la corde joignant les points $(x, f(x))$ et $(x+h, f(x+h))$ est parallèle à la tangente au point $\left(x+\frac{h}{2}, f(x+\frac{h}{2})\right)$.

10. Faire les tableaux de variations en étudiant le signe de la dérivée.

11. Étudier les fonctions $x \mapsto \sin x - x$ et $x \mapsto \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$.
On peut aussi utiliser la concavité de la fonction sinus (voir chapitre 13).

12. La fonction g est continue en tout point de $[0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1]$. Elle est de plus continue en $\frac{1}{2}$, puisque :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(2x) = f(1)$$

et :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(2x-1) = f(0) = f(1) = g\left(\frac{1}{2}\right)\cdot$$

La fonction g est dérivable en tout point de $[0, \frac{1}{2}[$ de dérivée $2f'(2x)$, et en tout point de $]\frac{1}{2}, 1]$ de dérivée $2f'(2x-1)$.
En général g n'est pas dérivable en $\dfrac{1}{2}$ (prendre $x \mapsto x(x-1)$).
Pour $x < \dfrac{1}{2}$: $\dfrac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = 2\,\dfrac{f(2x) - f(1)}{2x-1}$ et donc $g'_g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2f'(1)$.
Pour $x > \dfrac{1}{2}$: $\dfrac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = 2\,\dfrac{f(2x-1) - f(0)}{2x-1}$ et donc $g'_d\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2f'(0)$.
Ce qui montre que g est dérivable en $\dfrac{1}{2}$ si et seulement si $f'(0) = f'(1)$ et dans ce cas $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2f'(0)$.

13. On applique la formule de Leibniz. Si $n \geqslant 2$:

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (x^2)^{(p)} (\sin x)^{(n-p)} \\
&= \sum_{p=0}^{2} \binom{n}{p} (x^2)^{(p)} (\sin x)^{(n-p)} \\
&= x^2 \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \\
&\qquad + n(n-1)\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Cette relation est également vraie pour $n < 2$.

14. On vérifie que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :
si $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $f'(0) = 0$
La fonction dérivée n'est pas continue en 0 donc f n'est pas de classe C^1.

15. **a)** On montre le resultat par récurrence.
Soit $\mathcal{H}_n$: $\varphi \in C^n(\mathbb{R})$ avec :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x} \text{ si } x > 0$$

$$\varphi^{(n)}(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0$$

où P_n est un polynôme.

- $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ avec $n \geqslant 1$.
  On a clairement $\varphi \in C^n(\mathbb{R}_-^*)$ avec $\varphi^{(n)}(x) = 0$.
  De plus $\varphi^{(n-1)}$ est dérivable à gauche en 0 avec $\varphi_g^{(n)}(0) = 0$.
  On a aussi $\varphi \in C^n(\mathbb{R}_+^*)$ avec $\varphi^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$ où :

  $$P_n(x) = x^2 P_{n-1}'(x) - (2n-2)x P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x).$$

  $\varphi^{(n-1)}$ étant continue le théorème 35 du cours assure que $\varphi^{(n-1)}$ est dérivable en 0 à droite avec $\varphi_d^{(n)}(0) = 0$.

Finalement on a montré $\mathcal{H}_n$.

b) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = 1 - x^2$.
On a $f = \varphi \circ \psi$. Les fonctions φ et ψ étant de classe C^∞, f est de classe C^∞.

16. On applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$x \mapsto \big(g(b)-g(a)\big)\big(f(x)-f(a)\big)-\big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big).$$

17. La fonction φ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ si } x \neq a \\ \varphi(a) = 0. \end{cases}$$

est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.
Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.
Or :

$$\varphi'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

18 Si $h=0$ le résultat est évident. Supposons donc $h \neq 0$.

On cherche à appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ entre 0 et h.
Pour ceci, on ajuste K de telle sorte que $\varphi(h)=0$ soit :

$$f(x)-2f(x+h)+f(x+2h)-Kh^2=0$$

ce qui détermine K.
K étant ainsi fixé, d'après le théorème de Rolle, il existe z_0 compris strictement entre 0 et h tel que $\varphi'(z_0)=0$, c'est-à-dire tel que :

$$-2f'(x+z_0)+2f'(x+2z_0)-2Kz_0=0$$

d'où :

$$K = \frac{f'(x+2z_0)-f'(x+z_0)}{z_0}.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f' entre $x+z_0$ et $x+2z_0$, il existe y_0 entre $x+2z_0$ et $x+z_0$ tel que :

$$K = \frac{f'(x+2z_0)-f'(x+z_0)}{z_0} = f''(y_0).$$

En remplaçant K par sa valeur on obtient :

$$f(x)-2f(x+h)+f(x+2h) = h^2 f''(y_0)$$

où y_0 est strictement compris entre x et $x+2h$ donc de la forme $x+2\theta h$ avec $0<\theta<1$.

19. Appliquons la formule de Leibniz avec $f(x) = x^n$ et $g(x) = (1-x)^n$.
On a :

$$f^{(n-p)}(x) = n(n-1)\dots(p+1)x^p = (n-p)!\binom{n}{n-p}x^p$$

et :

$$g^p(x) = (-1)^p n(n-1)\cdots(n-p+1)(1-x)^{n-p} = (-1)^p p!\binom{n}{p}(1-x)^{n-p}.$$

Le terme général de la formule de Leibniz est : $(-1)^p n!\binom{n}{p}^2 x^p(1-x)^{n-p}$.

La dérivée d'ordre n cherchée est donc :

$$n!\left(\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}^2(1-x)^{n-p}x^p\right).$$

Le coefficient du terme en x^n est $(-1)^n n!\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}^2$.

D'autre part, c'est le coefficient de la dérivée d'ordre n du terme en x^{2n} de $x^n(1-x)^n$, soit $(-1)^n x^{2n}$, dont la dérivée d'ordre n est $(-1)^n\dfrac{(2n)!}{n!}x^n$

On en déduit que la somme cherchée est $\binom{2n}{n}$.

20 Si a est égal à l'un de x_i la relation est évidente.
Sinon, on pose :

$$A = \frac{f(a)}{(a-x_1)(a-x_2)\dots(a-x_n)}$$

et la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - A(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

est n fois dérivable et s'annule $n+1$ fois. En appliquant n fois le théorème de Rolle, on montre que sa dérivée d'ordre n a au moins un zéro λ dans $]x_1, x_n[$.
Or :

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!A \quad \text{d'où} \quad A = \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}.$$

21. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
Montrons la formule par récurrence.
Pour $n = 0$, la dérivée de $e^{1/x}$ est bien $-\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$.
Supposons la formule vraie au rang $n-1$ avec $n \geqslant 1$.

Dérivons $n+1$ fois $x^n e^{1/x} = x(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})$ en utilisant la formule de Leibniz :

$$(x^n e^{\frac{1}{x}})^{(n+1)} = (x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n+1)}x + (n+1)(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}.$$

Puis, on utilise l'hypothèse de récurrence soit :

$$(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{1/x}$$

d'où :

$$(x^{n-1}e^{1/x})^{(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}}e^{1/x} + (-1)^{n+1}\frac{n+1}{x^{n+2}}e^{1/x}.$$

En utilisant ces deux relations, on montre la relation à l'ordre n.

22 **a)** Puisque $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, f est non strictement monotone. Or on sait (exercice 9 du chapitre 11) qu'une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone. On en déduit donc que f est non injective, il existe donc deux points de $[a, b]$ qui ont la même image par f. En appliquant le théorème de Rolle entre ces deux points, on conclut qu'il existe un point c entre a et b tel que $f'(c) = 0$.

b) Il suffit de montrer que $f'(I)$ est convexe. Soient a et b dans I tels que $f'(a) \neq f'(b)$.
Supposons par exemple $f'(a) < f'(b)$. Soit $k \in \mathbb{R}$, $f'(a) < k < f'(b)$ et soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - kx$. En appliquant le résultat de la première question à g, on déduit qu'il existe c entre a et b tel que $g'(c) = 0$, soit tel que $f'(c) = k$, ce qui montre que $k \in f'(I)$.

Autre solution n'utilisant pas l'exercice 9 du chapitre 11.
Soient a et b dans I avec $f'(a) \neq f'(b)$. Supposons par exemple $f'(a) < f'(b)$.
On définit deux fonctions φ et ψ sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \text{si } x \neq a \quad \text{et} \quad \varphi(a) = f'(a)$$

$$\psi(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}, \quad \text{si } x \neq b \quad \text{et} \quad \psi(b) = f'(b)$$

Ces deux fonctions sont continues sur $[a, b]$ d'où :

$$[\varphi(a), \varphi(b)] = \left[f'(a), \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] \subset \varphi([a, b])$$

et :

$$[\psi(a), \psi(b)] = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}, f'(b)\right] \subset \psi([a, b]).$$

Soit z dans $\left]f'(a), f'(b)\right[$, z appartient à l'un ou à l'autre des deux intervalles ci-dessus.
Supposons, par exemple qu'il appartienne à $[\varphi(a), \varphi(b)]$.
Il existe donc c dans $[a, b]$ tel que $\varphi(c) = z$ (avec nécessairement $c \neq a$), soit :

$$z = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

On applique alors le théorème des accroissements finis à f sur $[a, c]$, il existe d dans $]a, c[$ tel que :

$$z = f'(d)$$

ce qui prouve que $z \in f'(I)$.
La fonction f' vérifie donc la propriété des valeurs intermédiaires.

23. Supposons que f ne soit pas constante (cas évident). Il existe donc $x_0 \neq a$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$.
Il existe $A > 0$ tel que :

$$x \geqslant A \Longrightarrow f(x) < f(x_0).$$

La fonction f est continue donc majorée sur $[a, A]$ par le réel $n = \max\limits_{[a,A]} f$.

Ainsi f est majorée sur $[a, +\infty[$ par $\alpha = \max\big(m, f(x_0)\big)$ qui est atteint en un point x, et $x \in]a, +\infty[$ puisque $\alpha > f(a)$.

En ce point la derivée s'annule.

24. Soit $\varepsilon > 0$ il existe x_0. tel que :

$$x \geqslant x_0 \Longrightarrow |f'(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \geqslant x_0 \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|x - x_0|.$$

On a alors :

$$\forall x \geqslant x_0 \ , \ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left|1 - \frac{x_0}{x}\right| + \frac{1}{x}|f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{x}|f(x_0)|.$$

De plus, il existe x_1 tel que :

$$x \geqslant x_1 \Longrightarrow \frac{1}{x}|f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement :

$$x \geqslant \max(x_0, x_1) \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

ce qui montre le résultat demandé
D'autre part, puisque f' admet une limite en $+\infty$, elle est bornée au voisinage de $+\infty$, et l'inégalité des accroissements finis montre que f est lipschitzienne au voisinage de $+\infty$.

25. **a)** P_n est la dérivée d'ordre n d'un polynôme de degré $2n$ c'est donc un polynôme de degré n.
On remarque que la dérivée d'une fonction paire est impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est paire.
Le polynôme $(x^2-1)^n$ étant pair, P_n est pair si n est pair impair si n est impair.

b) Utilisons la formule de Leibniz avec $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$:

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k(x-1)^n}{dx^k} \frac{d^{(n-k)}(x+1)^n}{dx^{n-k}}.$$

Or :

$$\forall k < n\ ,\ \frac{d^k(x-1)^n}{dx^k}(1) = 0$$

donc :

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}(1)(1+1)^n = 1$$

En utilisant les propriétés de parité de P_n :

$$P_n(-1) = (-1)^n.$$

c) Pour montrer l'existence des n zeros distincts, appliquer n fois le théorème de Rolle en remarquant que -1 et 1 sont racines de $\dfrac{d^k(x^2-1)^n}{dx^k}$ pour tout $k < n$.

26. **a)** Solutions sur $\mathbb{R}_+^*$:

- Une solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $y(x) = \lambda \ln x + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, 1[$ et $y(x) = \mu \ln x + \dfrac{1}{x}$ sur $]1, +\infty[$.
La continuité de la solution en 1 entraîne $y(1) = 1$.
La dérivabilité de y en 1 entraîne $\lambda = \mu$.

- La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \lambda \ln x + \dfrac{1}{x}$ est alors bien solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$.
  La forme générale des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc :
$$\lambda \ln x + \frac{1}{x}\cdot$$

b) Pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, il faut tenter de recoller les solutions en 1. On trouve qu'il n'y a aucune solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Solutions sur $\mathbb{R}$:
On trouve que les solutions sont les fonctions $x \mapsto \cos x + \lambda \sin x$.

d) Solution sur $\mathbb{R}$:
Après recollement, on trouve que la seule solution sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{x^n}{2n+1}\cdot$

27. Après recollement on trouve que les seules solutions sur tout $\mathbb{R}$ sont les fonctions du type λx.

28. **a)** Prenons $I = [0,1]$, on a bien $f(I) \subset I$.
$x \mapsto \cos x$ est décroissante sur I. Comme $\cos 1 > 0$, (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante.
Les deux suites étant bornées, elles sont convergentes.
En étudiant $x \mapsto \cos(\cos x)$, on montre que l'équation $f \circ f(x) = x$ n'a qu'une seule solution ℓ dans I.
(u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent donc vers ℓ, ce qui prouve que (u_n) est convergente et converge vers ℓ qui est solution de l'équation $\cos(x) = x$ dans I.
Autre solution : La fonction $x \mapsto \cos x - x$ est continue sur $I = [0,1]$ et est positive en 0, négative en 1, donc $x \mapsto \cos x$ a au moins un point fixe dans I. Sa dérivée sur I étant bornée par $\sin 1$, on déduit que $x \mapsto \cos x$ est k-lipschitzienne sur I avec $k < 1$ et donc que la suite converge vers l'unique point fixe de $x \mapsto \cos x$ dans I.

b) On prend aussi $I = [0,1]$, f est décroissante sur I et $f(I) \subset I$. L'équation $f(x) = x$ a une seule solution dans I qui est $x_0 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, point en lequel $|f'(x_0)| > 1$, ce qui permet tout de suite de conclure que la suite n'est pas convergente. La fonction f étant décroissante sur I (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes.

L'équation $f \circ f(x) = x$ a trois solutions dans I qui sont 0, 1 et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot$
On montre que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante. Or,

puisque :

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$$

(u_{2n}) ne peut converger que vers 1.

De même, (u_{2n+1}) ne peut converger que vers 0.
Les deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, la suite est divergente.

c) Prenons $I = [0, \pi]$, on a bien $f(I) \subset I$, de plus :

$$\forall x \in I \ , \ f(x) \leqslant x.$$

La suite est donc décroissante minorée, donc convergente. L'équation $f(x) = x$ a une seule solution $x = 0$ dans I donc (u_n) converge vers 0.

d) Prenons $I =]1, +\infty[$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1} + 1$, on a $f(I) \subset I$. La fonction f étant décroissante sur I, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. En étudiant la fonction f, on montre que l'equation $f(x) = x$ admet une seule solution ℓ dans I. De plus $f \circ f$ est croissante et son étude montre que :

$$\forall x \in I \ , \ x < \ell \Longrightarrow f \circ f(x) < x$$

et :

$$\forall x \in I \ , \ x > \ell \Longrightarrow f \circ f(x) > x.$$

Si $u_0 < \ell$, alors la suite (u_{2n}) est décroissante, minorée (par 1) donc convergente.
Sa limite est dans $[1, \ell[$ mais pas dans $]1, \ell[$, c'est donc 1
La suite (u_{2n+1}) est croissante et $u_1 > \ell$, elle n'est donc pas majoree (si elle l'était, sa limite serait dans $[u_1, +\infty[$ et serait point fixe de f).
Elle diverge donc vers $+\infty$.
Si $u_0 > \ell$, alors $u_1 < \ell$ et l'on se ramène au cas prédédent.

29. Si $u_1 < u_0$, la suite est décroissante positive donc convergente (vers ℓ solution de $f(\ell) = \ell$).
Si $u_1 > u_0$, la suite est croissante, supposons qu elle ne soit pas majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ D'autre part, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} f(x) = k$, il existe un rang n_0, à partir duquel $u_{n+1} \leqslant k' u_n$ avec $k' < 1$.
On aurait alors pour $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} < u_n$, ce qui contredit la croissance de la suite.
La suite est donc croissante majorée donc convergente.
Si $u_1 = u_0$, la suite est constante égale à u_0.

Chapitre 13

1. Soient x et y dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$.
On a :

$$g\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

d'où, puisque f est croissante :

$$\begin{aligned} f \circ g\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &\leqslant f\big(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)\big) \\ &\leqslant \lambda f \circ g(x) + (1-\lambda) f \circ g(y) \end{aligned}$$

car f est convexe.

2. On utilise le résultat de l'exercice précédent avec $x \mapsto e^x$.
La réciproque est fausse : $x \mapsto x$ est convexe mais $x \mapsto \ln x$ ne l'est pas.

3. $x \mapsto e^x$ est convexe.

4. La fonction $\ln$ étant concave :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \quad \text{soit} \quad \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \ln ab.$$

La fonction $\exp$ étant croissante, cela entraîne l'inégalité demandée.

5 La fonction $x \mapsto \ln x$ étant concave , on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

d'où :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

On remplace ensuite x_k par $\dfrac{1}{x_k}$ pour avoir la première partie de l'inégalité.

6. En appliquant f^{-1} à l'inégalité de convexité :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall \lambda \in [0,1] \ , \ f\left(\lambda f^{-1}(x) + (1-\lambda) f^{-1}(y)\right) \leqslant \lambda x + (1-\lambda) y,$$

on prouve que f^{-1} est convexe si f est décroissante et concave si f est croissante.

7. Considérons l'application :

$$\varphi_1 \ : \ x \mapsto \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq f(1)$ (car f n'est pas constante).
De plus :

$$\forall x \in]x_0, +\infty] \ , \ \varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_0) > 0$$

d'où :

$$\forall x \in \left] \max(x_0, 1), +\infty \right[\ , \ f(x) \geqslant f(1) + \varphi_1(x_0)(x - 1)$$

ce qui prouve que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

8. **a)** Soit $a \in \mathbb{R}_+$, et $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pour $x > a$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_a(x) = 0$, φ_a étant croissante, elle est négative d'où :

$$x > a \Longrightarrow \varphi_a(x) \leqslant 0 \Longrightarrow f(x) \leqslant f(a).$$

La fonction f est donc décroissante et tend vers 0 en $+\infty$, elle est donc positive.

b) Soit $y = ax + b$ une équation de l'asymptote, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

et la fonction $x \mapsto f(x) - ax - b$ est convexe et tend vers 0 donc d'après ce qui précède est positive.
Le graphe de la fonction se situe donc au dessus de l'asymptote.

9. Soit φ la fonction affine telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$.
f étant convexe, on a :

$$\forall x \in [a, b] \ , \ f(x) \leqslant \varphi(x).$$

En intégrant entre a et b, on obtient la deuxième inégalité.
Remarquons que pour toute fonction affine φ :

$$\int_a^b \varphi(t)\, dt = (b - a)\varphi\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Pour montrer la deuxième inégalité, il suffit donc d'écrire que le graphe de la fonction f est au dessus de sa tangente en $\dfrac{a+b}{2}$.
Remarque : le résultat est vrai même si f n'est pas supposée de classe C^1
Il suffit pour l'inégalité de gauche d'écrire que pour tout $x \in [a, b]$, on a $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2} f(x) + \dfrac{1}{2} f(a + b - x)$ et d'intégrer cette inégalité entre a et b.

10 La fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est définie sur $]1, +\infty]$.
Elle y est dérivable et sa dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ est décroissante. On a donc :

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln x_1) + \frac{1}{2}\ln(\ln x_2).$$

En appliquant la fonction exponentielle à l'inégalité précédente on trouve le résultat demandé.

11 La fonction $x \mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ puisque $p > 1$.
On a pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right)^p \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

soit :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

On prend alors $\lambda_i = b_i^q$ et $x_i = a_i b_i^{-\frac{q}{p}}$, ce qui donne l'inégalité cherchée.

12. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons par récurrence la propriété suivante :

$$\mathcal{H}_n \ : \ \forall p \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}\ , \ f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie.
Supposons $\mathcal{H}_n$ $(n \geqslant 0)$ et soit $p \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1}\}$.
Si $p = 2k$, alors $\dfrac{p}{2^{n+1}} = \dfrac{k}{2^n}$, avec $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$ et :

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$$

d'après $\mathcal{H}_n$.

Si $p = 2k+1$, alors :

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right)\\
&\quad = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p-1}{2^{n+1}}\right)y + \frac{p+1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p+1}{2^{n+1}}\right)y\right)\right)\\
&\quad \leqslant \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{p-1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p-1}{2^{n+1}}\right)y\right) + f\left(\frac{p+1}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p+1}{2^{n+1}}\right)y\right)\right)\\
&\quad \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{p-1}{2^{n+1}}\right)f(y)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{p+1}{2^{n+1}}\right)f(y)\right)\\
&\quad = \frac{p}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)f(y),
\end{aligned}$$

ce qui montre $\mathcal{H}_{n+1}$.
Soit $\lambda \in [0,1]$, l'ensemble :

$$\left\{\frac{p}{2^n}\ \middle|\ n \in \mathbb{N}^*\ ,\ p \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leqslant p \leqslant 2^n\right\}$$

étant dense dans $[0,1]$ (voir l'exercice 28 du chapitre 9), il existe une suite de points de cet ensemble qui converge vers λ.
En utilisant la continuité de f , on montre alors que :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

13 Soient x et y deux réels avec $x < y$. Soit z tel que $x < y < z$, on a :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

En faisant tendre z vers $+\infty$, f étant majorée on obtient $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant 0$.
Soit maintenant z tel que $z < x < y$, on a :

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

En faisant tendre z vers $-\infty$, f étant majorée, on obtient $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.
Finalement $f(x) = f(y)$, ce qui montre que f est constante. Le résultat est faux sur $[A, +\infty[$ (prendre $x \mapsto e^{-x}$).
Supposons que :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \quad f''(t_1)f''(t_2) \geqslant 0.$$

Alors, f'' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, quitte à changer f en $-f$ on peut supposer que f'' est positive et donc que f est convexe majorée, ce qui prouve qu'elle est constante.

14. Soit $(x_0, x_1, x_2) \in]a, b[^3$, avec $x_0 < x_1 < x_2$.
Puisque φ_{x_1} est croissante, on a :

$$x < x_1 \Longrightarrow \varphi_{x_1}(x) \leqslant \varphi_{x_1}(x_2) \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x_1) + (x - x_1)\varphi_{x_1}(x_2)$$

or $x \mapsto f(x_1) + (x - x_1)\varphi_{x_1}(x_2)$ étant minorée sur $]a, b[$ f est minorée sur $]a, x_1[$.
En écrivant que φ_{x_0} est croissante, on obtient :

$$x \geqslant x_1 \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)\varphi_{x_0}(x_1)$$

donc f est minorée sur $[x_1, b[$.

15. La fonction φ_a definie sur $I \backslash \{a\}$ par $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante, donc :

$$\forall (x, y) \in I^2 \ , \ x < a < y \Longrightarrow \varphi_a(x) \leqslant \varphi_a(y).$$

Soit y tel que $y > a$ (il en existe puisque a n'est pas la borne supérieure de I).
La fonction $\varphi_{a|I \cap]-\infty, a[}$ est croissante majorée par $\varphi_a(y)$ donc possède une limite en a inférieure ou égale à $\varphi_a(y)$, ce qui entraîne que la fonction est dérivable à gauche en a et que :

$$\forall y \in I \ , \ y > a \Longrightarrow f'_g(a) \leqslant \varphi_a(y).$$

Alors, la fonction croissante $\varphi_{a|I \cap]a, +\infty[}$ est minorée par $f'_g(a)$. Elle admet donc une limite en a supérieure ou égale à $f'_g(a)$ ce qui entraîne que la fonction f est dérivable à droite en a et que $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.
Soit a un point qui n'est pas une extrémité de I, alors f est dérivable à droite et à gauche en a donc est continue à droite et à gauche en a.

Chapitre 14

1. $\displaystyle\int_m^n E(x)\, dx = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$.

2. $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\, dx = -\int_{-1}^0 x^2\, dx + \int_0^2 x^2\, dx = \int_1^2 x^2\, dx = \frac{7}{3}$.
$\displaystyle\int_{-1}^1 x|x|\, dx = 0$ (fonction impaire).

3. **a)** La fonction f étant continue sur $[a,b]$, l'image de $[a,b]$ par f est un segment $[m,M]$. Or la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ appartient à $[m,M]$, d'où l'existence de c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

b) Supposons que :

$$\forall x \in]a,b[\ ,\ f(x) \neq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

et soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

φ étant continue vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc :

$$\forall x \in]a,b[\ ,\ \varphi(x) > 0 \text{ ou } \forall x \in]a,b[\ ,\ \varphi(x) < 0.$$

Or $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$, ce qui entre en contradiction avec ce qui précède.

4 Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b \Big(|f(x)| - f(x)\Big)\,dx = 0$.
Or :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ \big|f(x)\big| - f(x) \geqslant 0$$

et l'application $x \mapsto \big|f(x)\big| - f(x)$ est continue, positive d'intégrale nulle donc est identiquement nulle sur $[a,b]$.
On en déduit que :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ f(x) = |f(x)| \geqslant 0$$

et donc que f est positive sur $[a,b]$.

On fait un raisonnement analogue si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$.

5. Soit $n \geqslant 1$ et $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n}$.
On considère la somme de Riemann :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1-\cos^2(\theta_k)}(\cos\theta_k - \cos\theta_{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\theta_k)(\cos\theta_k - \cos\theta_{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) = 0$$

d'où :

$$S_n = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

qui converge vers $\frac{\pi}{2}\cdot$
On a donc :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

6 **a)** On reconnaît une somme de Riemann :
$$u_n = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right]\cdot$$
La suite converge vers $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot$

b) $u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2} + \cdot \quad + \frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right)$

La suite converge vers $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot$

c) $u_n = \frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{0}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right]\cdot$

La suite converge vers $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\cdot$

d) On ecrit $u_n = e^{S_n}$ où $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$ converge vers $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$.
Calculons :
$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\cdot$$
La suite u_n converge donc vers $2e^{-2+\frac{\pi}{2}}$.

7. Notons $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $u_n = \left[\displaystyle\int_a^b f(x)^n\,dx\right]^{\frac{1}{n}}$.

On a :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant M$$

d'où :

$$\int_a^b f(x)^n\,dx \leqslant M^n(b-a)$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

f étant continue sur $[a,b]$, le réel M est atteint en un point c de $[a,b]$.
Fixons $\varepsilon > 0$, et posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M+1}\cdot$
Il existe un segment I, non réduit à un point, contenant c et inclus dans $[a,b]$ tel que :

$$\forall x \in I\ ,\ f(x) \geqslant M - \varepsilon'.$$

Soit η la longueur du segment I, alors, pour $n \geqslant n_2$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left[\int_a^b f(x)\,dx^n\right]^{\frac{1}{n}} \geqslant \eta^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon').$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta^{\frac{1}{n}} = 1$, donc il existe n_2 tel que $n \geqslant n_2 \Longrightarrow \eta^{\frac{1}{n}} \geqslant 1-\varepsilon'$, alors :

$$u_n \geqslant (1-\varepsilon')(M-\varepsilon') \geqslant M-(M+1)\varepsilon' = M-\varepsilon.$$

De plus, il existe n_1 tel que $n \geqslant n_1 \Longrightarrow M(b-a)^{\frac{1}{n}} \leqslant M+\varepsilon$.
Finalement :

$$n \geqslant \max(n_1,n_2) \Longrightarrow M-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant M+\varepsilon$$

ce qui prouve la convergence de la suite (u_n) vers M.

8. **a)** Soit $(a = x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, b = x_p)$ une subdivision adaptée à φ et ξ_i la valeur prise par φ sur $]x_i, x_{i+1}[$.

$$\int_a^b \varphi(x)\sin nx\,dx = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \xi_i \sin nx\,dx.$$

Or :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \xi_i \sin nx\,dx = \frac{\xi_i}{n}\left(\cos nx_i - \cos nx_{i+1}\right).$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \xi_i \sin nx\,dx = 0$.

u_n est une somme finie de termes tendant vers 0, donc tend vers 0.

b) Supposons φ continue par morceaux.
Soit $\varepsilon > 0$ il existe une fonction θ en escalier sur $[a,b]$ telle que :

$$\int_a^b |f(x)-\theta(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx - \int_a^b \theta(x)\sin nx\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-\theta(x)||\sin nx|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

De plus il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$n\geqslant N \Longrightarrow \left|\int_a^b \theta(x)\sin nx\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Finalement, pour $n\geqslant N$, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b \theta(x)\sin nx\,dx\right| + \left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx - \int_a^b \theta(x)\sin nx\,dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

9 On montre d'abord que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |\sin(nt)|\,dt = \frac{2(b-a)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_a^b dt$$

En effet, si k est la partie entière de $\dfrac{n(b-a)}{\pi}$:

$$\begin{aligned}\int_a^b |\sin nt|\,dt &= \sum_{l=0}^{k-1}\int_{a+l\frac{\pi}{n}}^{a+(l+1)\frac{\pi}{n}} |\sin nt|\,dt + \int_{a+k\frac{\pi}{n}}^{b} |\sin nt|\,dt\\ &= \frac{k}{n}\int_0^\pi |\sin t|\,dt + \int_{a+k\frac{\pi}{n}}^{b} |\sin nt|\,dt.\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers $\dfrac{2}{\pi}(b-a)$ et le second vers 0
On montre ensuite que si φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)|\sin nt|\,dt$ tend vers $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\,dt$.
On montre le même résultat pour une fonction continue par morceaux en l'encadrant par deux fonctions en escalier.

10. **a)** f étant continue sur $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$ et on peut poser $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Puisque g est positive :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

et l'on a :

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Il existe donc k avec $m \leqslant k \leqslant M$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = k\int_a^b g(x)\,dx.$$

(k est quelconque si l'intégrale de g est nulle).

La fonction f étant continue, il existe c entre a et b tel que $k = f(c)$ d'où le résultat.

b) Si f est constante sur $[a,b]$, le résultat est évident.

Sinon, on montre que la constante :

$$k = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

est nécessairement dans $]m,M[$.

En effet, si par exemple $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = m\int_a^b g(x)\,dx$ alors la fonction $x \mapsto f(x)g(x) - mg(x)$ est continue positive, d'intégrale nulle donc est nulle sur $[a,b]$, ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse que f n'est pas constante.

Enfin si $k \in]m,M[$, alors on montre qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = k$ en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre deux points où f atteint son minimun et son maximum.

11. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$1-\eta \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors :

$$\left|n\int_{1-\eta}^1 x^n f(x)\,dx\right| \leqslant n\,\frac{\varepsilon}{2}\int_{1-\eta}^1 x^n\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus f étant majorée sur $[0, 1-\eta]$ par M:

$$\left|n\int_0^{1-\eta} x^n f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{n}{n+1}M(1-\eta)^{n+1}.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc un rang n_0 tel que :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \frac{n}{n+1} M(1-\eta)^{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement pour $n \geqslant n_0$:

$$\left|n \int_0^1 x^n f(x)\, dx\right| \leqslant \left|n \int_0^{1-\eta} x^n f(x)\, dx\right| + \left|n \int_{1-\eta}^1 x^n f(x)\, dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

12. On a :

$$\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geqslant 0$$

ce qui assure l'existence de la borne inférieure
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geqslant \left(\int_a^b \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}}\, dx\right)^2 = (b-a)^2.$$

Il y a égalite si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{f} = \lambda \dfrac{1}{\sqrt{f}}$ c'est-à-dire si et seulement si, f est constante.

13. On a :

$$\int_a^b fg \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui est équivalent à :

$$\int_a^b (f+g)^2 \leqslant \int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 + 2\left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

soit :

$$\left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il y a égalité si et seulement si :

$$\int_a^b fg = \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

c'est-à-dire si et seulement si :

$$\int_a^b fg \geqslant 0 \text{ et } \left(\int_a^b fg\right)^2 = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Finalement, il y a égalité si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : g = \lambda f \text{ ou } f = 0.$$

14.

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est croissante et continue sur $[0,1[$.

On a donc pour tout k entre 1 et $n-1$ et pour tout $x \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

d'où :

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}}\,dx \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\,dx$$

puis :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}} \leqslant \int_0^{\frac{n-1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

soit :

$$u_n + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right) \leqslant \arcsin\frac{n-1}{n} \leqslant u_n.$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \arcsin\frac{n-1}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

15. Soit x_0 dans $[a,b]$, supposons $f(x_0) \neq 0$, par exemple $f(x_0) > 0$. La fonction f étant continue en x_0, il existe un segment I de longueur $\eta > 0$ inclus dans $[a,b]$ tel que :

$$\forall x \in I, f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$$

alors :

$$\int_I f(x)\,dx \geqslant \frac{\eta}{2} f(x_0) > 0$$

ce qui est impossible.

Solution plus simple qui utilise le théorème fondamental du chapitre 15 :

Si l'on note $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, on a :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ f(x) = F'(x) = 0.$$

16. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ x \leqslant \eta \Longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Or il existe n_0 tel que :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \frac{1}{n} \leqslant \eta.$$

On a alors :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}\ ,\ \frac{1}{n+pk} \leqslant \eta$$

d'où :

$$\left| f\left(\frac{1}{n+pk}\right) - \frac{1}{n+pk} f'(0) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{n+pk}$$

d'où pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+pk}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+pk}\right) f'(0) \right| \leqslant \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+pk}\right).$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+pk} = \int_0^1 \frac{1}{1+px}\,dx = \frac{\ln(1+p)}{p} < 1.$$

Il existe donc n_1 tel que :

$$n \geqslant n_1 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+pk} \leqslant 1.$$

Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+pk}\right) - f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+pk}\right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que u_n a la même limite que $f'(0)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+pk}$, soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lim u_n = f'(0)\frac{\ln(1+p)}{p}$.

Chapitre 15

1. **a)** Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$:

$$\int (2x^2+3x-5)\,dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + C^{te}.$$

b) Sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$:

$$\int (x-1)\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C^{te}.$$

c) Sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C^{te}$$

d) Sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$:

$$\int \left(\frac{x+3}{x+1}\right)dx = \int\left(1+\frac{2}{x+1}\right)dx = x + 2\ln|x+1| + C^{te}$$

2. F est dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ et $F'(t) = \dfrac{\operatorname{ch} t}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} + \sqrt{1+\tan^2 t} = 1 + \dfrac{1}{|\cos t|}$.

3. **a)** En intégrant par parties :

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C^{te}.$$

Remarquons que l'on peut aussi écrire :

$$x\sqrt{1+x} = (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

b) On intègre trois fois par parties :

$$\int x^3 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C^{te}.$$

Remarquons qu'il est aussi possible d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés.

c)

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C^{te}.$$

4. On fait le changement de variable $u = a + b - x$, ce qui donne :

$$\int_a^b x f(x)\, dx = -\int_b^a (a+b-u) f(u)\, du = \int_a^b (a+b-u) f(u)\, du$$

d'où le résultat.

5. **a)** On cherche une primitive sur un intervalle inclus dans $]0, 2[$.
On pose $x = 2\sin^2 u$, avec $u \in]0, \frac{\pi}{2}[$ d'où $dx = 2\sin u \cos u\, du$ et la primitive à calculer s'écrit :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{4\sin u \cos u}{\sqrt{2\sin^2 u(2 - 2\sin^2 u)}}\, du = \int 2\, du = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} + C^{te}.$$

b) Sur tout intervalle inclus dans $]-1, 1[$, avec $u \in]0, \pi[$:

$$\int \frac{x\, dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+\cos u} = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{u}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + C^{te}.$$

c) Sur tout intervalle inclus dans $[-1, 1[$, avec $u \in]0, \pi]$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx &= -2\int \cos^2\frac{u}{2}\, du \\ &= -\int (1+\cos u) du \\ &= -u - \sin u + C^{te} \\ &= -\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C^{te}.\end{aligned}$$

6. Intégrons par parties :

$$I_n = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx = x \ln^n x - n I_{n-1}$$

donc :

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k x \ln^{n-k} x + C^{te}.$$

7. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{2+\cos t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

Posons $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\cdot$

Sur tout intervalle de la forme $I_n = \left](2n-1)\pi, (2n+1)\pi\right[$, on a, après calculs :

$$\int \frac{dt}{2+\cos t} = \int \frac{2}{3+u^2}\, du = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) + C^{te}$$

Soit F une primitive de $\dfrac{1}{2+\cos t}$ sur $\mathbb{R}$ alors F restreinte à I_n est une primitive sur I_n, donc il existe une constante k_n telle que :

$$\forall x \in I_n \ , \ F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) + k_n.$$

En écrivant la continuité de F en $(2n+1)\pi$, on trouve :

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} + k_n = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + k_{n+1}$$

d'où :

$$k_{n+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + k_n$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ , \ k_n = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} n + k_0.$$

On en déduit la forme des primitives de la fonction sur $\mathbb{R}$

Puis :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = F(2\pi) - F(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot$$

8. Notons $f(x) = \ln(1+x)$.
On a :

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Puisque $x > 0$, on a

$$\forall t \in [0, x] \ , \ \left|f'''(t)\right| \leqslant 2,$$

l'inégalité de Taylor-Lagrange donne donc :

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{x^3}{3}.$$

Application : une valeur approchée à 10^{-8} près de $\ln(1,003)$ est $0,0029955$

9 Écrivons trois fois la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en x.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + h^3\varepsilon(h)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 4\frac{h^2}{2}f''(x) + 8\frac{h^3}{6}f'''(x) + 8h^3\varepsilon(2h)$$

$$f(x+3h) = f(x) + 3hf'(x) + 9\frac{h^2}{2}f''(x) + 27\frac{h^3}{6}f'''(x) + 27h^3\varepsilon(3h)$$

d'où :

$$\frac{1}{h^3}\big(f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)\big) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'''(x).$$

La limite cherchée est donc $f'''(x)$.

10 On considère φ la fonction affine de E (il y en a une et une seule).
Soit f quelconque dans E, appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f' et φ' :

$$\left(\int_a^b f'(t)\varphi'(t)dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f'^2(t)\, dt \int_a^b \varphi'^2(t)\, dt.$$

Or :

$$\int_a^b \varphi'^2(t)\, dt = \frac{(\beta-\alpha)^2}{b-a}$$

et :

$$\int_a^b f'(t)\varphi'(t)\, dt = \frac{\beta-\alpha}{b-a}\int_a^b f'(t)\, dt = \frac{(\beta-\alpha)^2}{b-a}.$$

D'où si $\beta \neq \alpha$:

$$\int_a^b f'^2(t)\, dt \geqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{b-a} = \int_a^b \varphi'^2(t)\, dt.$$

Le résultat subsiste si $\beta = \alpha$.

11. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, f^{-1} l'est également d'où l'existence de $\displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$.

D autre part $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable de dérivée f et $x \mapsto \displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$ est également dérivable comme composée de fonctions dérivables de dérivée $x \mapsto f'(x)f^{-1}\big(f(x)\big) = xf'(x)$.

On en déduit que la dérivée de F est :

$$f(x) + xf'(x) - xf'(x) - f(x) = 0.$$

Finalement F est constante sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F(x) = F(0) = 0.$$

Le terme $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ correspond à l'aire algébrique du domaine délimité par l'axe Ox , la courbe $y = f(x)$ et la droite d'équation $X = x$.

Le terme $\displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$ correspond à l'aire du domaine délimité par l axe Oy la courbe $y = f(x)$ et la droite d'équation $Y = f(x)$.

La somme de ces deux aires vaut bien $xf(x)$.

12. La fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$

De plus :

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = -\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} = -F(x)$$

ce qui prouve que F est impaire.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

qui est du signe de $-12x^4 + 3$.

Elle est donc croissante sur $\left[\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

Pour $x > 0$:

$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leqslant \frac{2x - x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

ce qui donne :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

et par imparité de F :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$$

13. Remarquons que $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t \ln t}$ étant bornée au voisinage de 1 (on vérifiera qu'elle admet une limite finie en 1), on a :

$$\lim_{x \to 1} \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt = 0.$$

De plus :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} \, dt = \ln \left(\ln x^2 \right) - \ln \left(\ln x \right) = \ln 2$$

La limite cherchée est donc $\ln 2$.

14 La fonction sin est concave sur $[0, \pi]$, donc pour x dans $[0, 1]$, on a :

$$\forall t \in [x^2, x] \ , \ \frac{\sin x}{x} t \leqslant \sin t \leqslant t$$

d'où :

$$\ln 3 \, \frac{\sin x}{x} \leqslant f(x) \leqslant \ln 3$$

ce qui assure que $\lim_{x \to 0} f(x) = \ln 3$.

15. Écrivons

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \min(x, t) f(t) \, dt + \int_x^1 \min(x, t) f(t) \, dt \\ &= \int_0^x t f(t) \, dt + x \int_x^1 f(t) \, dt. \end{aligned}$$

Comme f est continue, les applications $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t f(t) \, dt$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t) \, dt$ sont de classe C^1 de dérivées respectives $x \mapsto x f(x)$ et $x \mapsto -f(x)$.
La fonction F est donc de classe C^1 et sa dérivée est :

$$x \mapsto x f(x) + \int_x^1 f(t) \, dt - x f(x) = \int_x^1 f(t) \, dt$$

qui est elle-même C^1 ce qui assure que F est de classe C^2.
Donc :

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t) \, dt \right) du + F(0) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t) \, dt \right) du$$

16. L'équation s'écrit :

$$f(x) - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt = x^2.$$

On en déduit donc par récurrence que si f vérifie l'équation fonctionnelle, alors f est de classe C^∞.
En dérivant l'équation, on obtient :

$$f'(x) - xf(x) - \int_0^x f(t)\,dt + xf(x) = 2x$$

d'où à l'aide d'une deuxième dérivation :

$$f''(x) - f(x) = 2$$

dont les solutions sont du type :

$$\lambda e^x + \mu e^{-x} - 2.$$

De plus $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc on a :

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 2$$

qui est bien solution de l'équation.

17. La fonction nulle est solution.
Soit f une solution non nulle.
Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ .\ f(x) = \frac{1}{f(x_0)}\int_{x-x_0}^{x+x_0} f(t)\,dt.$$

On en déduit par récurrence que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
En dérivant la relation fonctionnelle par rapport à x :

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$$
$$f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y).$$

De même, en dérivant par rapport à y :

$$f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$$
$$f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y).$$

D'où :

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$$

donc :

$$f''(x) - \frac{f''(x_0)}{f(x_0)}f(x) = 0.$$

En remarquant de plus que $f(0) = 0$, les solutions sont de l'une des trois formes :

$$x \mapsto k \operatorname{sh} \omega x, \quad x \mapsto k \sin \omega x, \quad x \mapsto kx.$$

En cherchant, parmi les fonctions de ce type celles qui vérifient l'équation fonctionnelle, on trouve que les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{2}{\omega} \sin \omega x, \quad x \mapsto \frac{2}{\omega} \operatorname{sh} \omega x, \quad x \mapsto 2x \quad \text{et} \quad x \mapsto 0 \quad (\omega \in \mathbb{R}^*).$$

18. Soit $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$, G est de classe C^1 sur I et on peut donc écrire :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,dt.$$

Or G, continue sur le segment I, est bornée sur I de bornes inférieure et supérieure notées respectivement m et M.
On a :

$$\forall t \in I \ , \ m \leqslant G(t) \leqslant M \text{ et } f'(t) \leqslant 0$$

d'où :

$$\forall t \in I \ , \ Mf'(t) \leqslant f'(t)G(t) \leqslant mf'(t)$$

et :

$$M\big(f(b) - f(a)\big) \leqslant \int_a^b f'(t)G(t)\,dt \leqslant m\big(f(b) - f(a)\big)$$

puis :

$$\begin{aligned} mf(a) &\leqslant f(b)G(b) + m\big(f(a) - f(b)\big) \\ &\leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \\ &\leqslant M\big(f(a) - f(b)\big) + f(b)G(b) \\ &\leqslant Mf(a). \end{aligned}$$

Finalement si $f(a) \neq 0$:

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{f(a)} \leqslant M.$$

Or $G(I) = [m, M]$, d'où l'existence de c.
Si $f(a) = 0$ alors f étant positive décroissante, elle est nulle sur I et n'importe quel c dans I convient.

19. Soit F une primitive de f.
On montre facilement que F est egalement T-périodique et pour $\lambda \neq 0$:

$$\int_a^b f(\lambda x)\, dx = \frac{1}{\lambda}\big(F(b\lambda) - F(a\lambda)\big).$$

La fonction F étant continue et T-périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc on a bien le résultat annoncé.
Si $\displaystyle\int_0^T f(t)\, dt \neq 0$, soit g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ g(x) = f(x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

Alors le résultat précédent assure que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b g(\lambda x)\, dx = 0$$

donc :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(\lambda x)\, dx = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(t)\, dt.$$

20. F est dérivable de dérivée négative donc est décroissante sur $\mathbb{R}_+$
Or F étant positive, décroissante et vérifiant $F(0) = 0$, elle est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$, alors $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ est également nulle sur $\mathbb{R}_+$.
Par dérivation, on conclut que f est nulle.

21. Posons :

$$\varphi(x) = c + \int_0^x u(t)v(t)\, dt.$$

La fonction φ est dérivable et :

$$\varphi'(x) = u(x)v(x) \leqslant \varphi(x)v(x).$$

En multipliant par $\exp\left(-\displaystyle\int_0^x v(t)\, dt\right)$ on obtient :

$$\left[\varphi(x)\exp\left(-\int_0^x v(t)\, dt\right)\right]' \leqslant 0$$

donc :

$$\varphi(x)\exp\left(-\int_0^x v(t)\, dt\right) - \varphi(0) \leqslant 0$$

donc :

$$u(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant c\, \exp\left(\int_0^x v(t)\, dt\right).$$

22. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f.
Soit h un réel quelconque :

$$\left|f(x+h)-f(x)-hf'(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}M$$

d'où :

$$\forall h \in \mathbb{R}\ ,\ 0 \leqslant f(x+h) \leqslant f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}M.$$

Le trinôme du second degré en h :

$$h^2M+2hf'(x)+2f(x)$$

est toujours positif, donc son discriminant est négatif :

$$f'(x)^2-2f(x)M \leqslant 0$$

d'où puisque f et M sont positifs :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \left|f'(x)\right| \leqslant \sqrt{2Mf(x)}.$$

23. Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que f soit définie sur $[x_0, x_0+h]$.

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+h^n\varepsilon(h).$$

Pour h au voisinage de 0, $f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)$ est donc du signe de $\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$.
Si n est pair, la courbe reste toujours du même côté de la tangente au voisinage de x_0.
Si n est impair la courbe traverse la tangente : il y a un point d'inflexion.

24 **a)** La fonction f'' étant continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [x-\eta, x+\eta]\ ,\ f''(t) \neq 0.$$

Le théorème des accroissements finis assure l'existence de θ.
De plus, s'il existait deux nombres θ_1 et θ_2 satisfaisant à la condition, alors :

$$f'(x+\theta_1 h)=f'(x+\theta_2 h)$$

donc f'' s'annulerait entre $x+\theta_1 h$ et $x+\theta_2 h$, ce qui est impossible.
Cela montre l'unicité de θ dans $]0, 1[$.

b) Appliquons à f la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point x :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+h^2\varepsilon_1(h)$$

et à f' la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 au point x :

$$f'(x+k)=f'(x)+kf''(x)+k\varepsilon_2(k).$$

On a donc :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \theta_x(h)h^2 f''(x) + \theta_x(h)h^2\varepsilon_2(\theta_x(h)h).$$

On obtient :

$$\theta_x(h)f''(x) = \frac{1}{2}f''(x) + \varepsilon_1(h) - \theta_x(h)\varepsilon_2(\theta_x(h)h)$$

d'où :

$$\lim_{h\to 0} \theta_x(h) = \frac{1}{2}\cdot$$

25. Il est possible de trouver λ tel que $\varphi(a) = \varphi(b)$, c'est-à-dire tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\lambda$$

car $a \neq b$.
On peut alors appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ entre a et b :

$$\exists\, c \in]a,b[\;:\; \varphi'(c) = 0.$$

Après calcul , on trouve :

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}\left[f^{(n+1)}(x) - \lambda\right]$$

d'où :

$$\varphi'(c) = 0 \iff f^{(n+1)}(c) = \lambda$$

ce qui donne le résultat cherché.

26 Soit g la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ g(x) = f'(x) + f(x).$$

La fonction f, solution de l'équation différentielle $y' + y = g(x)$, s'écrit donc :

$$f(x) = e^{-x}\left(f(0) + \int_0^x e^t g(t)\,dt\right)$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}f(0) = 0$.

Il reste à étudier le terme $e^{-x}\left(\int_0^x e^t g(t)dt\right)$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que :

$$t \geqslant A \Longrightarrow |g(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et alors pour $x \geqslant A$:

$$\left|\int_0^x e^{-x+t} g(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_0^A e^{-x+t} g(t)\,dt\right| + \left|\int_A^x e^{-x+t} g(t)\,dt\right|$$

et :

$$\left|\int_A^x e^{-x+t} g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_A^x e^{-x+t}\,dt = \frac{\varepsilon}{2}\left[1-e^{A-x}\right] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

D autre part, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\displaystyle\int_0^A e^t g(t)\,dt = 0$ il existe $B > 0$ tel que :

$$x \geqslant B \Longrightarrow \left|\int_0^A e^{-x+t} g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement :

$$x \geqslant \max(A,B) \Longrightarrow \left|e^{-x}\int_0^x e^t g(t)dt\right| \leqslant \varepsilon.$$

Ce terme tend bien vers 0.

Chapitre 16

1. a)

$$\frac{\ln(1+2x)}{x\ln x} \sim \frac{2x}{x\ln x}$$

d'où :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x\ln x} = 0$$

donc :

$$\ln(1+2x) = \mathrm{o}(x\ln x).$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)}{x\ln x} = 2$ et $x \mapsto \sin x$ est bornée donc :

$$\sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)\sin x = \mathrm{O}(x\ln x)$$

au voisinage de $+\infty$.

c) On compare les deux fonctions au voisinage à gauche de -1.

On pose $x = -1-h$. On a $\lim\limits_{h\to 0^+} -h\ln\left(\dfrac{h}{1+h}\right) = 0$ donc :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

d)
$$\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{x}}} = x\frac{\ln x}{x}e^{\frac{\ln x}{x}}$$

et puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ et $\lim_{u\to -\infty} ue^u = 0$, on a :
$$\ln x = \mathrm{o}(x^{-\frac{1}{x}}).$$

2. Soit $x > 0$, on a :
$$\forall t \in [0, x]\ ,\ t^2 \leqslant tx$$

d'où :
$$0 \leqslant \int_0^x e^{t^2}\,dt \leqslant \int_0^x e^{tx}\,dt = \frac{1}{x}\left(e^{x^2} - 1\right)$$

donc :
$$\int_0^x e^{t^2}\,dt = \mathrm{o}(e^{x^2})$$

au voisinage de $+\infty$.

3 a)
$$x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}3x \sim 3\sqrt{3}.$$

La limite cherchée est $3\sqrt{3}$.

b)
$$\frac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x} \sim \frac{x^2}{2}\frac{x}{x^2} \sim \frac{x}{2}.$$

La limite cherchée est 0.

c)
$$\frac{x\ln(1+x)}{(\arcsin x)^2} \sim \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

La limite cherchée est 1.

d)
$$\frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4} \sim -\frac{xx^2}{6x^3} \sim -\frac{1}{6}.$$

La limite cherchée est $-\frac{1}{6}$.

e)
$$\ln\left((1+\sin x)^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}\ln(1+\sin x) \sim \frac{\sin x}{x} \sim 1.$$

La limite cherchée est e.

f)
$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$$

Or :
$$\frac{1}{x^2}\ln\cos x \sim \frac{1}{x^2}(\cos x - 1) \sim -\frac{1}{2}.$$

La limite cherchée est donc $e^{-\frac{1}{2}}$.

g) $$\ln x \ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right) = \ln x \ln\left(1 - \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) \sim -2e^{-2x}\ln x$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
La limite cherchée est donc 1

4. Non : $x + 2\sin x \sim x$ au voisinage de $+\infty$, or $x \mapsto x$ est croissante et $x \mapsto x + 2\sin x$ n'est pas monotone.

5. On a :

$$\begin{aligned} e^f \underset{a}{\sim} e^g &\iff \lim_a e^{f-g} = 1 \\ &\iff \lim_a (f-g) = 0. \end{aligned}$$

La proposition est fausse :

$$x \underset{+\infty}{\sim} x+1$$

mais e^{x+1} n'est pas équivalent à e^x en $+\infty$.

6. a) $\begin{pmatrix} n+r \\ r \end{pmatrix} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.

b)

$$\begin{aligned} \left(\ln(1+e^{-n^2})\right)^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{1}{n}\ln(\ln(1+e^{-n^2}))} \\ &= e^{\frac{1}{n}\ln(e^{-n^2}+o(e^{-n^2}))} \\ &= e^{\frac{1}{n}(\ln(e^{-n^2})+o(1))} \\ &= e^{-n}e^{o\left(\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

d'où :

$$\left(\ln(1+e^{-n^2})\right)^{\frac{1}{n}} \sim e^{-n}.$$

c) $$\left(\frac{e^n}{1+e^{-n}}\right)^n = e^{n^2}e^{-n\ln(1+e^{-n})} \sim e^{n^2}$$

car $n\ln(1+e^{-n}) \sim ne^{-n}$ qui tend vers 0.

7. Posons $v_n = u_n \ln n$, on a :

$$v_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

d'où :

$$u_n = \frac{1}{\ln n}\frac{n(n-1)}{2} \text{ si } n \neq 1$$

donc :

$$u_n \sim \frac{n^2}{2\ln n} \text{ si } n \neq 1$$

et :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

8.

$$\frac{\ln f}{\ln g} - 1 = \frac{\ln f - \ln g}{\ln g} = \frac{\ln\left(\frac{f}{g}\right)}{\ln g}$$

ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers a.

Le résultat n'est pas conservé si $\ell = 1$, en effet $1 + x \underset{0}{\sim} 1 + 2x$ mais $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$.

Application :

$$e^x - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^x \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

donc, d'après ce qui précède :

$$\ln(e^x - 1) \underset{+\infty}{\sim} x.$$

9. On a :

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}} = e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)}$$

or :

$$\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \sim \frac{x}{\sin x} - 1$$

d'où :

$$\frac{\sin x}{x - \sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \sim \frac{\sin x}{x - \sin x}\,\frac{x - \sin x}{\sin x} = 1.$$

La limite cherchée est donc e.

10. On a .

$$(1 + 3\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}} = e^{\frac{1}{x\sin x}\ln(1+3\tan^2 x)}.$$

Or :

$$\frac{1}{x\sin x}\ln(1 + 3\tan^2 x) \sim \frac{1}{x^2} 3\tan^2 x \sim 3.$$

On a donc :

$$\lim_{x\to 0}(1 + 3\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}} = e^3.$$

11. On pose $t = \dfrac{\pi}{4} + u$:

$$\begin{aligned}\tan(2t)\ln(\tan t) &= \tan\left(\frac{\pi}{2}+2u\right)\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+u\right)\right)\\ &= -\frac{\cos 2u}{\sin 2u}\ln\left(\frac{1+\tan u}{1-\tan u}\right)\\ &= -\frac{\cos 2u}{\sin 2u}\ln\left(1+\frac{2\tan u}{1-\tan u}\right)\\ &\sim \frac{-2\tan u}{1-\tan u}\frac{1}{\sin 2u}\sim -1.\end{aligned}$$

Donc la limite cherchée est $\dfrac{1}{e}\cdot$

12.
$$\begin{aligned}(t+a)^{1+\frac{1}{t}} - t^{1+\frac{1}{t+a}} &= e^{(1+\frac{1}{t})\ln(t+a)} - e^{\left(1+\frac{1}{t+a}\right)\ln t}\\ &= e^{\ln t+\frac{\ln t}{t}}\left(e^{\ln(1+\frac{a}{t})+\frac{1}{t}\ln(1+\frac{a}{t})} - e^{\frac{-a}{t(t+a)}\ln t}\right)\\ &= te^{\frac{\ln t}{t}}\left(\frac{a}{t}+\mathrm{o}\left(\frac{a}{t}\right)\right)\cdot\end{aligned}$$

La limite cherchée est donc a.

13. Après calcul, la dérivée de f_n est sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$:

$$f_n'(x) = n\cos^{n+1}x(1-n\tan^2 x).$$

Le maximum est atteint pour :

$$\tan x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot$$

On a alors $y_n = f_n(x_n)$.

Puisque $x_n = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$$

et :

$$x_n \sim \tan x_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot$$

De plus :

$$y_n = n\cos^n x_n \sin x_n = e^{n\ln(\cos x_n)}n\sin x_n$$

et :

$$n\ln(\cos x_n) \sim n(\cos x_n - 1)\sim n\left(-\frac{x_n^2}{2}\right)\sim -\frac{1}{2}$$

donc $\cos^n x_n$ converge vers $e^{-\frac{1}{2}}$ et :

$$y_n \sim \sqrt{\frac{n}{e}}.$$

14. Considérons :

$$\ln u_n = \ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

Or $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann qui converge vers :

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1.$$

On a donc :

$$\ln u_n = \ln n + 2\ln 2 - 1 + v_n$$

où v_n est une suite qui tend vers 0.

On conclut que $u_n \sim \frac{4}{e} n$.

15. **a)** On fait une intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx$$

qui conduit à la relation de récurrence :

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

soit :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

b) Montrons que $I_n \sim I_{n-1}$. En effet :

$$\forall n \geqslant 2\ ,\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]\ ,\ \cos^n x \leqslant \cos^{n-1} x \leqslant \cos^{n-2} x$$

d'où :

$$\forall n \geqslant 2\ ,\ I_n \leqslant I_{n-1} \leqslant I_{n-2}$$

or $I_n > 0$, donc :

$$1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1}$$

d'où :

$$I_{n-1} \sim I_n.$$

c) On a :

$$nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2} = \cdots = I_1I_0 = \frac{\pi}{2}\cdot$$

d) On en conclut $I_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ et :

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\cdot$$

16. On a :

$$-\frac{1}{n^3} \sim \cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$$

donc :

$$u_n^2 \sim \frac{2}{n^3} \quad \text{et} \quad u_n \sim \sqrt{2}n^{-\frac{3}{2}}.$$

17. Non : prendre $a_n = \ln n + n^2 i$ et $b_n = 1 + n^2 i$.
Montrons que si $x_n \sim x'_n$ et $y_n \sim y'_n$ alors $a_n \sim b_n$.
Remarquons que $\mathrm{o}(x_n) = \mathrm{o}(x_n + iy_n)$ et $\mathrm{o}(y_n) = \mathrm{o}(x_n + iy_n)$, en effet :

$$\left|\frac{x_n}{x_n + iy_n}\right| \leqslant 1$$

et :

$$\left|\frac{y_n}{x_n + iy_n}\right| \leqslant 1.$$

On a donc si $x'_n = x_n + \mathrm{o}(x_n)$ et $y'_n = y_n + \mathrm{o}(y_n)$

$$x_n + iy_n = x'_n + iy'_n + \mathrm{o}(x'_n) + i\mathrm{o}(y'_n) = x'_n + iy'_n + \mathrm{o}(x'_n + iy'_n)$$

ce qui montre que $a_n \sim b_n$.

18. On a, pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} k!}{n!} - 1 &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} k! \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k! \\ &\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}(n-2)!(n-2) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}\cdot \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} = 0$$

ce qui prouve le résultat demandé.

19. On a :

$$\ln u_n = \operatorname{th}\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 - \operatorname{th} n\right)$$

or :

$$1 - \operatorname{th} n = \frac{2e^{-2n}}{1 + e^{-2n}}$$

d'où :

$$\ln(1 - \operatorname{th} n) = -2n + \ln 2 - \ln(1 + e^{-2n}) \sim -2n.$$

De plus :

$$\operatorname{th}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

finalement :

$$\ln(u_n) \sim -2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-2}.$$

20. $$(n+1)^{\frac{n+1}{n}} = e^{\frac{n+1}{n}\ln(n+1)}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n}\ln(n+1) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \ln n + \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\end{aligned}$$

car :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

De même :

$$\frac{n-1}{n}\ln(n-1) = \ln n - \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

puis :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{e^{\ln n}}{n}\left(e^{\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)} - e^{-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}\right) \\ &= \frac{2\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &\sim \frac{2\ln n}{n}. \end{aligned}$$

21 La fonction $x \mapsto x - \ln x$ étant croissante sur $[1, +\infty[$, on montre facilement que la suite (u_n) est croissante.
Or :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n - \ln u_n = n.$$

La suite ne peut converger, elle diverge donc vers $+\infty$.
De plus :

$$u_n \sim u_n - \ln u_n = n.$$

On a $u_n - n = \ln u_n \sim \ln n$ puis :

$$u_n - n = \ln\left(n + \ln n + o(\ln n)\right)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_n - n &= \ln n + \ln\left(1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\ &= \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right). \end{aligned}$$

22 On montre que la suite est décroissante minorée puis qu'elle converge vers 0.
De plus $\ln u_n = u_n - n$ donc :

$$u_n = e^{u_n - n} \sim e^{-n}$$

et :

$$u_n - e^{-n} = e^{u_n - n} - e^{-n} = e^{-n}(e^{u_n} - 1) = e^{-n}\left(u_n + o(u_n)\right) \sim e^{-2n}.$$

23. On a :

$$f_n(\alpha n) = \frac{1}{\alpha n - 1} + \cdots + \frac{1}{\alpha n - n} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\alpha - \frac{1}{n}} + \cdots + \frac{1}{\alpha - \frac{n}{n}}\right]$$

qui converge vers :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\alpha - x} = \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right).$$

En étudiant la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$g(\alpha)=\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

on montre qu'il existe un unique α_0 tel que :

$$\ln\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0-1}\right)=\lambda.$$

Soit $\varepsilon>0$, on considère les deux suites :

$$\alpha_n=f_n\big(n(\alpha_0-\varepsilon)\big)\quad\text{et}\quad\beta_n=f_n\big(n(\alpha_0+\varepsilon)\big).$$

Puisque α_n converge vers $g(\alpha_0-\varepsilon)>\lambda$ (g est strictement décroissante) et β_n vers $g(\alpha_0+\varepsilon)<\lambda$, il existe N tel que :

$$n\geqslant N\Longrightarrow n(\alpha_0-\varepsilon)<x_n<n(\alpha_0+\varepsilon)$$

puisque f_n est strictement decroissante sur $]n,+\infty[$ soit :

$$\alpha_0-\varepsilon<\frac{x_n}{n}<\alpha_0+\varepsilon$$

ce qui montre que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=\alpha_0.$$

Finalement :

$$x_n\sim n\alpha_0\sim n\frac{e^\lambda}{e^\lambda-1}.$$

Chapitre 17

1. a)
$$\frac{1}{\sqrt{3-x}}=\frac{1}{\sqrt3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-\frac12}=\frac{\sqrt3}{3}+\frac{\sqrt3}{18}x+\frac{\sqrt3}{72}x^2+\mathrm{o}(x^2).$$

b) On pose $x=2+h$ puis :

$$\sqrt{2+h}=\sqrt2\sqrt{1+\frac{h}{2}}=\sqrt2\left(1+\frac12\frac{h}{2}-\frac18\left(\frac{h}{2}\right)^2+\frac1{16}\left(\frac{h}{2}\right)^3+\mathrm{o}(h^3)\right)$$
$$=\sqrt2+\frac{\sqrt2}{4}h-\frac{\sqrt2}{32}h^2+\frac{\sqrt2}{128}h^3+\mathrm{o}(h^3).$$

c) On pose $u=\dfrac1x\cdot$

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt x}=\sqrt{1+2u}=1+u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{2}+\mathrm{o}(u^3)$$

d'où :

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt x}=1+\frac1x-\frac1{2x^2}+\frac1{2x^3}+\mathrm{o}\left(\frac1{x^3}\right)\cdot$$

2. Non pour $n \geqslant 1$: elle n'est pas dérivable en 0.

3. Si n est pair, la fonction admet un développement limité d'ordre quelconque. Si n est impair, la fonction admet un développement limité d'ordre m avec $m < n$, mais pas d'ordre n, car son développement limité à droite $\big(x^n + \mathrm{o}(x^n)\big)$ est différent de son développement limité à gauche $\big(-x^n + \mathrm{o}(x^n)\big)$.

4. **a)**
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

d où :
$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{64}x^4 + \mathrm{o}(x^4).$$

b) Puisque $\ln(1+x) \sim x$, il suffit de faire un développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 :
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$$

d'où :
$$\big[\ln(1+x)\big]^2 = x^2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right)^2$$
$$= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4).$$

c)
$$\frac{x^2+1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\frac{1+x^2}{1+x+\frac{x^2}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}(1+x^2)\left(1 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + \mathrm{o}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3).$$

d)
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^4)$$
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$$

or :
$$\mathrm{o}\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)^2\right) = \mathrm{o}(x^4)$$

d'où :

$$-\ln(\cos x) = -\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)^2+\mathrm{o}(x^4)$$
$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\mathrm{o}(x^4).$$

e) On écrit que :

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}\left[\frac{-1}{2-x}-\frac{1}{1+x}\right]$$

(décomposition en éléments simples) puis :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\mathrm{o}(x^3)$$

et :

$$\frac{-1}{2-x}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\mathrm{o}(x^3)\right)$$

finalement :

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=-\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\mathrm{o}(x^3).$$

f)
$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x=\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

en posant $u=\dfrac{1}{x}$:

$$\ln\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}\right)$$

or :

$$\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}=\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{16}u^4+\mathrm{o}(u^4)$$
$$\ln\left(1+\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}\right)=\frac{u^2}{4}-\frac{3}{32}u^4+\mathrm{o}(u^4)$$

et :

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln x=\ln 2+\frac{1}{4x^2}-\frac{3}{32x^4}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

g) $\arccos\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$ a pour derivée :

$$-\frac{1}{(x+2)(\sqrt{2x+3})}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{(1+\frac{x}{2})\sqrt{1+\frac{2x}{3}}}.$$

Après calcul :

$$-\frac{1}{(x+2)(\sqrt{2x+3})} = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{36}x + \mathrm{o}(x),$$

d'où en intégrant :

$$\arccos\left(\frac{1+x}{2+x}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{5\sqrt{3}}{72}x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$

5.

$$f(x) = x\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}.$$

Posons $u = \dfrac{1}{x}$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{(1-2u^2)(1+3u)} = 1 + u - \frac{5}{3}u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

d'où :

$$f(x) = 1 + x - \frac{5}{3x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui prouve que la droite d'équation $y = 1 + x$ est asymptote au graphe et que la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$ en dessous au voisinage de $+\infty$.

6. On trouve au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$:

$$f(x) = 2 + 2x - \frac{2}{3x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

donc la droite $y = 2x + 2$ est asymptote à la courbe la courbe se trouvant sous l'asymptote.

7. **a)** On a :

$$f(-x) = -\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) = -\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^{-x}(e^x-1)}{x}\right) = 1 - f(x).$$

La courbe représentative est donc symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

b) On fait un développement limité de f au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{24} - \frac{x^3}{2880} + \mathrm{o}(x^3).$$

On en déduit que f peut être prolongée par continuité en 0 par $\frac{1}{2}$, le prolongement étant lui-même dérivable de nombre dérivé $\frac{1}{24}$.

Au voisinage de 0, $f(x) - \frac{1}{2} - \frac{x}{24}$ est du signe de $-x^3$, donc la courbe traverse la tangente : c'est un point d'inflexion

Remarque : la symétrie trouvée dans la questions a) indique que le développement limité ne pouvait pas être de la forme :

$$f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2) \qquad \text{avec} \qquad c \neq 0.$$

C'est pourquoi on a effectué un développement limité à l'ordre 3.

c) Posons :

$$\varphi(x) = x^2 f'(x) = -\ln \frac{e^x - 1}{x} + x\frac{e^x}{e^x - 1} - 1.$$

$\varphi'(x)$ est du signe de $x(2(\operatorname{ch} x - 1) - x^2)$.

On trouve que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

8. **a)**

$$e^{x \ln a} - e^{x \ln b} = 1 + x \ln a - 1 - x \ln b + o(x)$$

d'où :

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln a - \ln b.$$

b) On pose $h = x - \frac{\pi}{4}$ alors :

$$e^{\tan 2x \ln(\tan x)} = e^{\tan(\frac{\pi}{2}+2h) \ln(1+\frac{2\tan h}{1-\tan h})}$$

et :

$$-\frac{\cos 2h}{\sin 2h} \ln\left(1 + \frac{2\tan h}{1 - \tan h}\right) \sim -1.$$

La limite cherchée est donc e^{-1}

c) $\ln\left(\frac{1}{2}(e^{x \ln a} + e^{x \ln b})\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{2}(\ln a + \ln b) + o(x)\right) = x \ln \sqrt{ab} + o(x)$

La limite cherchée est donc $e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = \sqrt{ab}$.

d)

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)$$

d'où :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2} + o(1).$$

La limite cherchée est donc $-\frac{1}{2}$.

e)
$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

or :
$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$$

d'où :
$$(1+x)^{\frac{1}{x}} - e = e\left(e^{-\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)} - 1\right) \sim -\frac{ex}{2}\cdot$$

La limite cherchée est donc $-\dfrac{e}{2}\cdot$

9. On calcule les développements limités de $\cos\sqrt{-x}$ et de $\operatorname{ch}\sqrt{x}$ en 0 et l'on constate que ce sont les mêmes.
La fonction f admet donc un développement limité en 0 qui est :
$$f(x) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^n).$$

10. On a, au voisinage de 0 :
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{o}(x^{n+1})$$
d'où :
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{o}(x^{n+1})\right) \\ &= x + \ln\left(1 - e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{o}(x^{n+1})\right) \\ &= x - e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{o}(x^{n+1}). \end{aligned}$$
De plus, en écrivant que $e^{-x} = 1 + \mathrm{o}(1)$ on trouve :
$$f(x) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{o}(x^{n+1}).$$

11 La fonction f est dérivable de dérivée :
$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
dont le développement limité à l'ordre 3 est :
$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^3).$$
En intégrant :
$$f(x) = f(0) - x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^4) = -x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^4).$$

12. On a :

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 + b(b-a)x^4 + b^2(a-b)x^6 + \mathrm{o}(x^6)$$

$$\begin{cases} a - b = -\dfrac{1}{2} \\ b(b-a) = \dfrac{1}{24} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\dfrac{5}{12} \\ b = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

et pour ces valeurs de a et de b :

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+b^2} \sim \frac{1}{480}x^6.$$

13 f est strictement croissante et établit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
f étant de classe C^∞ et sa dérivée ne s'annulant pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, f^{-1} l'est également. De plus f étant impaire, f^{-1} est également impaire.
f^{-1} étant impaire et de classe C^∞, elle admet un développement limité à tout ordre ne présentant que des termes d'ordre impairs.
À l'ordre 6 :

$$f^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \mathrm{o}(x^6).$$

Le développement de f à l'ordre 6 est :

$$f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^6).$$

En écrivant $f^{-1} \circ f(x) = x$, on trouve :

$$a_1x + \left(\frac{2}{3}a_1 + a_3\right)x^3 + \left(\frac{4}{15}a_1 + 2a_3 + a_5\right)x^5 + \mathrm{o}(x^6) = x$$

d'où :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\dfrac{2}{3} \\ a_5 = \dfrac{16}{15}. \end{cases}$$

Le développement limité de f^{-1} en 0 est donc :

$$f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^6).$$

14. L'étude de la fonction $x \mapsto e^x + x$ prouve l'existence et l'unicité de la solution de l'équation.

De plus :

$$n = e^{u_n} + u_n \leqslant 2e^{u_n}$$

$(e^x \geqslant 1 + x)$.

Finalement :

$$\ln\left(\frac{n}{2}\right) \leqslant u_n$$

ce qui prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

$$n = e^{u_n} + u_n = e^{u_n} + \mathrm{o}(e^{u_n})$$

Donc $n \sim e^{u_n}$ soit $e^{u_n} = \mathrm{o}(n) = n\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)$ puis $u_n = \ln n + \mathrm{o}(1) \sim \ln n$. D'où :

$$u_n = \ln n + \mathrm{o}(1) \text{ et } u_n \sim \ln n.$$

On a :

$$n = e^{u_n} + u_n = ne^{v_n} + \ln n + v_n$$

soit :

$$n(e^{v_n} - 1) = -\ln n - v_n \sim -\ln n$$

car $v_n = \mathrm{o}(1)$ donc :

$$v_n \sim e^{v_n} - 1 \sim -\frac{\ln n}{n}.$$

Finalement :

$$u_n - \ln n = -\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

soit :

$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

On a obtenu un développement asymptotique de la suite u_n.

15. Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n-1}$$

ce qui donne en sommant :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \ln n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

donc :

$$\ln n + \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln n$$

ce qui prouve l'équivalence demandée.
De plus, la suite $v_n = u_n - \ln n$ est décroissante puisque :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$$

et de plus est minorée par 0 donc convergente : sa limite est la *constante d Euler* que l'on note γ.
On a donc :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

16. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ -\frac{\pi}{2} + n\pi \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2} + n\pi$$

et en divisant par n, on trouve que $x_n \sim n\pi$.
Posons $y_n = x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$\tan\left(y_n + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n \sim n\pi$$

d'où :

$$\tan y_n = \frac{-1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n} \sim -\frac{1}{n\pi} \quad \text{et} \quad y_n \sim -\frac{1}{n\pi}\cdot$$

Posons $w_n = y_n + \dfrac{1}{n\pi}\cdot$
On a $w_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et de plus :

$$-1 = \tan\left(w_n - \frac{1}{n\pi}\right)\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + w_n\right)$$

donc :

$$-1 = \left(-\frac{1}{n\pi} + w_n + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + w_n\right)$$

soit :

$$-1 + n\pi w_n - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = -1$$

c'est-à-dire :

$$n\pi w_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$w_n \sim \frac{1}{2n^2\pi}.$$

17 **a)** $n\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right) - u_n = n\left(\frac{u_n}{n} - \frac{u_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{u_n^2}{n^2}\right)\right) - u_n \sim -\frac{u_n^2}{2n}$ qui tend vers 0.

b) Montrons que si $u_n - \ln(1+u_n)$ converge vers 0, alors u_n converge également vers 0.

La fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ est strictement décroissante continue sur $]-1,0]$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, elle admet donc une application réciproque φ de $[0,+\infty[$ dans $]-1,0]$ continue.

De même, $x \mapsto x - \ln(1+x)$ est strictement croissante continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, elle admet donc une application réciproque ψ de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ continue.

Notons $v_n = u_n - \ln(1+u_n)$ alors on a :

$$u_n = \begin{cases} \psi(v_n) & \text{si} \quad u_n \geqslant 0 \\ \varphi(v_n) & \text{si} \quad u_n \leqslant 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas :

$$|u_n| \leqslant \left|\varphi(v_n)\right| + \left|\psi(v_n)\right|.$$

En utilisant la continuité des deux applications φ et ψ en 0 on montre le résultat annoncé.

Montrons à présent la réciproque.

Si $\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n \sim e^{u_n}$ alors $n\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right) - u_n$ converge vers 0 donc $\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right) - \frac{u_n}{n}$ converge vers 0 et $\frac{u_n}{n}$ converge vers 0.

Alors, puisque :

$$\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right) - \frac{u_n}{n} \sim -\frac{u_n^2}{2n}$$

$\frac{u_n^2}{2n}$ tend vers 0 et donc $\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ également.

18. **a)** Les équivalents $f(x) \sim x$ et $f(x) - x \sim ax^\alpha$ prouvent qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0.\eta] \ , \ 0 < f(x) < x.$$

Alors si $u_0 \in]0, \eta]$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n \in]0.\eta].$$

La suite est alors strictement décroissante minorée donc convergente. Notons ℓ sa limite, ℓ est dans $[0, \eta]$.
Si $\ell \neq 0$ alors $f(\ell) < \ell$ ce qui entre en contradiction avec la continuité de f en ℓ.
Finalement $\ell = 0$.

b)

$$\begin{aligned} x_n &= (u_n - au_n^\alpha + \mathrm{o}(u_n^\alpha))^{-\beta} - u_n^{-\beta} \\ &= u_n^{-\beta}\left(\left(1 - au_n^{\alpha-1} + \mathrm{o}(u_n^{\alpha-1})\right)^{-\beta} - 1\right) \\ &\sim a\beta u_n^{\alpha-\beta-1}. \end{aligned}$$

c) Pour $\beta = \alpha - 1$, on a $x_n \sim a(\alpha - 1)$. Or :

$$\frac{1}{n}(x_0 + x_1 + \cdots x_{n-1}) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^\beta} - \frac{1}{u_0^\beta}\right) \sim \frac{1}{n}\frac{1}{u_n^\beta}$$

car $\lim u_n = 0$, donc $\dfrac{1}{nu_n^\beta} \sim (\alpha - 1)$ et :

$$u_n \sim \left(\frac{1}{na(\alpha - 1)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

d) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$ donc $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

19. **a)** Supposons que y soit une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant un développement limité en 0 à tout ordre ainsi que ses dérivées.
Notons :

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \mathrm{o}(x^n)$$

alors :

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{n+1} i a_i x^{i-1} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$y''(x) = \sum_{i=2}^{n+2} i(i-1) a_i x^{i-2} + \mathrm{o}(x^n)$$

(on part du developpement limité de y'' que l'on intègre deux fois) On a donc :

$$2xy'' - y' + x^2y = -a_1 + 2a_2x + \sum_{i=2}^{n}\Big((i+1)(2i-1)a_{i+1} + a_{i-2}\Big)x^i = 0.$$

Par unicité du développement limité, on trouve donc :

$$a_1 = a_2 = 0$$

et pour $i \geqslant 2$:

$$a_{i+1} = -\frac{1}{(i+1)(2i-1)}a_{i-2}$$

Finalement pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+1} = a_{3p+2} = 0$ et :

$$a_{3p} = \frac{(-1)^p 2^p a_0}{9^p (2p)!}.$$

On constate que la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$ a un développement limité de cette forme et est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. En raisonnant de même sur $\mathbb{R}_-^*$, on trouve que $x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

b) Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $t = \frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}$ et $y(x) = z\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$
Alors z est solution de l'équation $z'' + z = 0$. On a donc :

$$y(x) = \lambda\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right).$$

Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$. On pose $y(x) = z\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right)$ L'équation vérifiée par z est alors $z'' - z = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont donc de la forme :

$$y(x) = \lambda\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right) + \mu\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right).$$

c) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors y est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda\cos\left(\tfrac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + \mu\sin\left(\tfrac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) && \text{si} \quad x > 0\,, \\ y(x) &= \lambda'\operatorname{ch}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right) + \mu'\operatorname{sh}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right) && \text{si} \quad x < 0.. \end{aligned}$$

Par continuité et double dérivabilité en 0, on trouve que $\lambda = \lambda'$ et $\mu = \mu' = 0$.
Réciproquement, les fonctions ainsi trouvées sont deux fois dérivables et vérifient l'équation sur $\mathbb{R}$.

20. • Domaine d'étude. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π périodiques. De plus x est impaire et y paire ce qui permet de faire l'étude sur $[0,\pi]$ et d'obtenir toute la courbe par une symétrie par rapport à Oy.

• Variations :

$$x'(t) = \cos t \qquad \text{et} \qquad y'(t) = -\frac{\sin t\,\cos t\,(4-\cos t)}{(2-\cos t)^2}.$$

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y(t)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

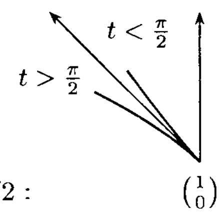
• Étude du point singulier. Au voisinage de $\pi/2$, en posant $t = \pi/2 + h$, on a :

$$x(t) = \cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)$$

$$y(t) = \frac{\sin^2 h}{2+\sin h} = \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{4} + o(h^3)$$

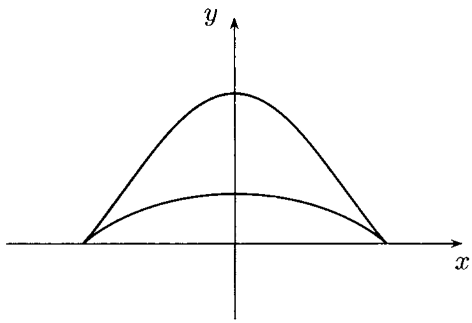
et donc :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{h^3}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(h^3).$$



On a ainsi l'allure de la courbe au voisinage de $t = \pi/2$:

• Courbe :



• Points d'inflexion : la tangente en $\pi/2$ passe par le point de paramètre 0, ce qui entraîne l'existence d'au moins un point d'inflexion entre 0 et $\pi/2$.

Sur $]0,\pi[\setminus\{\pi/2\}$ la pente de la tangente est :

$$p(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\sin t\,(4-\cos t)}{(2-\cos t)^2}\cdot$$

On a :

$$p'(t) = -\frac{9\cos t - 6}{(2-\cos t)^3}$$

ce qui prouve que le point d'inflexion sur $[0,\pi]$ a pour paramètre $\alpha = \arccos(2/3)$ et pour coordonnées :

$$x = \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\cos^2\alpha}{2-\cos\alpha} = \frac{1}{3}\cdot$$

Il se trouve par consequent sur la tangente (horizontale) au point de paramètre π.

21. • Variations :

$$x'(t) = 4t(3+3t+t^2) \qquad \text{et} \qquad y'(t) = 6t(1+t).$$

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$			$-$		0	$+$	
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• L origine est un point singulier et l on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3t^2+2t^3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t^4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

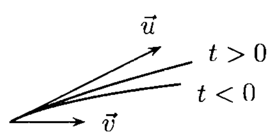
ce qui donne une tangente de pente $1/2$ et un point de rebroussement de deuxième espèce.

On peut étudier les positions relatives des deux branches :

en notant $X = 3t^2+2t^3$ et $Y = t^4$ les coordonnées du point $M(t)$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, avec $\vec{u}\,\big|_1^2$ et $\vec{v}\,\big|_0^1$, on a pour tout $t>0$:

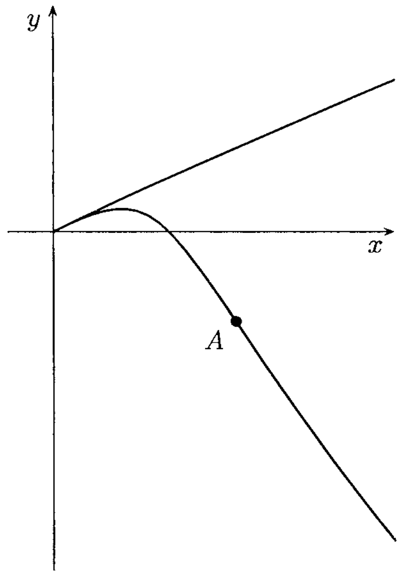
$$Y(-t) = Y(t) \qquad \text{et} \qquad X(-t) < X(t)$$

ce qui donne la position des deux branches l'une par rapport à l'autre :



• Étude à l'infini. On a $y/x \sim 3/t$ qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini. La courbe possède donc deux branches paraboliques de direction asymptotique Ox.

- Courbe :



- Point d'inflexion. On a :

$$x''(t) = 12(1+t)^2 \qquad \text{et} \qquad y''(t) = 6(1+2t)$$

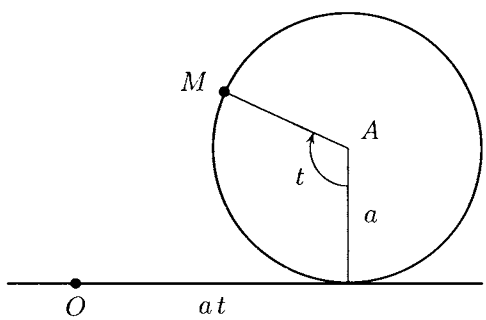
ce qui donne $x'\,y'' - x''\,y' = -24t^3(t+2)$.

Le point $A \left| {}^{\ 8}_{-4} \right.$ de paramètre -2 est un point d'inflexion puisque les vecteurs :

$$\begin{pmatrix} x'(-2) \\ y'(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x'''(-2) \\ y'''(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 12 \end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires.

22 Prenons un repère orthonormé dans lequel la droite a pour équation $y = 0$. Paramétrons la courbe par l'angle t dont le cercle a tourné depuis le point de départ où $M = O$. Comme le cercle roule sans glisser, l'abscisse de son centre est alors $a\,t$ où $a > 0$ est le rayon du cercle.



En écrivant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, on obtient les coordonnées du point M :

$$x = a\,(t - \sin t) \qquad \text{et} \qquad y = a\,(1 - \cos t).$$

- Domaine d'étude. Les relations :

$$x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi \qquad \text{et} \qquad y(t+2\pi) = y(t)$$

permettent de faire l'étude sur $[-\pi, \pi]$ et d'obtenir toute la courbe par des translations de vecteurs $2k\pi\,\vec{\imath}\,(k \in \mathbb{Z})$.

Par parité de y et imparité de x, on limite l'étude à $[0, \pi]$ et l'on effectue une symétrie par rapport à Oy.

- Variations :

$$x'(t) = a\,(1 - \cos t) \qquad \text{et} \qquad y'(t) = a\,\sin t.$$

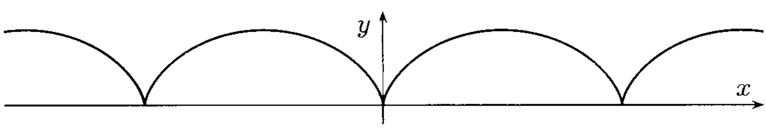
t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	
$y'(t)$	0	$+$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	πa
$y(t)$	0	$\nearrow$	$2a$

- Etude du point singulier. Au voisinage de 0, on a :

$$x(t) \sim a\,\frac{t^3}{6} \qquad \text{et} \qquad y(t) \sim a\,\frac{t^2}{2}$$

et donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$ ce qui prouve que la courbe admet à l'origine une tangente parallèle à Oy, la courbe étant à droite de sa tangente puisque x est positif.

- Courbe (appelée cycloïde) :



23.
- Domaine d'étude : $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 1/2\}$.
- Variations :

$$x'(t) = -2\frac{t\,(t^3 + t - 1)}{(t^2-1)^2\,(2t-1)^2}$$

$$y'(t) = -\frac{t^2\,(t^2 + 4t - 3)}{(t^2-1)^2\,(2t-1)^2}.$$

La fonction $q(t) = t^2 + 4t - 3$ admet deux racines réelles $\alpha = -2 - \sqrt{7}$ et $\beta = -2 + \sqrt{7}$.

La fonction polynomiale $p(t) = t^3 + t - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ Comme $p(1) = 1 > 0$ et $p(0) = -1 < 0$, elle admet une unique racine réelle γ, et l'on a $0 < \gamma < 1$.

En utilisant l'égalité $\beta^2 = 3 - 4\beta$, on trouve :

$$p(\beta) = 20\beta - 13 = -53 + 20\sqrt{7}$$

qui est strictement négatif puisque $53^2 = 2809 > 2800 = (20\sqrt{7})^2$ Donc $\beta < \gamma$.

t	$-\infty \quad \alpha \quad -1$	$-1 \quad 0 \quad \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \quad \beta \quad \gamma \quad 1$	$1 \quad +\infty$
$x'(t)$	$-$	$- \quad 0 \quad +$	$+ \quad 0 \quad -$	$-$
$y'(t)$	$- \quad 0 \quad +$	$+ \quad 0 \quad +$	$+ \quad 0 \quad -$	$-$
$x(t)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$
$y(t)$	$\frac{1}{2} \searrow \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow \searrow -\infty$	$+\infty \searrow \frac{1}{2}$

- Etude du point singulier : la relation $y = t\,x$ montre qu'il y a à l'origine une tangente parallèle à Ox.
- Branches infinies : de même, l'égalité $y = t\,x$ montre qu'en $t = -1$ $t = 1/2$ et $t = 1$ il y a des directions asymptotiques de pentes respectives -1 $1/2$ et 1.

  En $t = 1$, on a :

$$x(1+h) = \frac{(1+h)^2}{2h(1+\frac{h}{2})(1+2h)} = \frac{1}{2h}\left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right)$$

  et, puisque $y = t\,x$:

$$y - x = h\,x = \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + o(h)$$

  ce qui donne une asymptote d équation $y = x + 1/2$ et permet de positionner la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $t = 1$.

  On obtient de même les asymptotes en $t = -1$:

$$y + x = \frac{1}{6} - \frac{5}{36}(t+1) + o(t+1)$$

  et en $t = 1/2$:

$$y - \frac{x}{2} = -\frac{1}{6} - \frac{8}{9}\left(t - \frac{1}{2}\right) + o\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

- Etude du point limite : lorsque t tend vers l'infini, la courbe possède le point $(0,1/2)$ pour limite. En posant $h = 1/t$, on a :

$$y = \frac{1}{2(1-h^2)(1-h/2)} = \frac{1}{2} + \frac{h}{4} + \frac{5}{8}h^2 + \mathrm{o}(h^2)$$

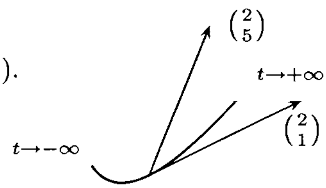
et :

$$x = hy = \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \mathrm{o}(h^2)$$

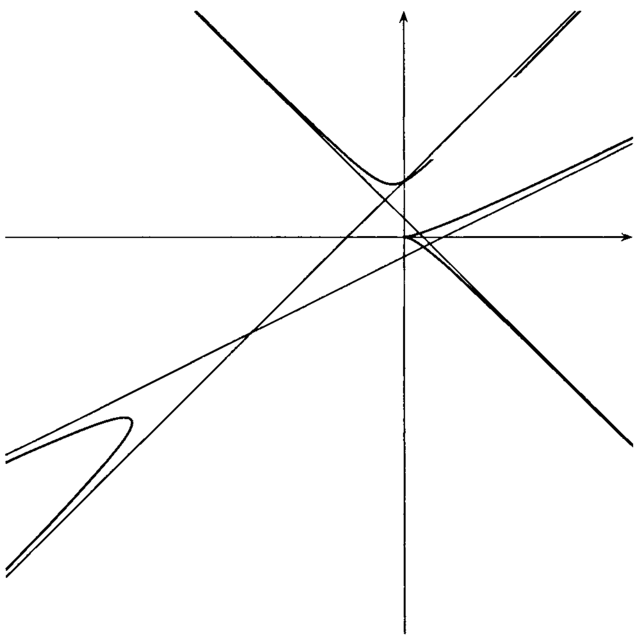
ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{h}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathrm{o}(h^2).$$

Il y a donc une tangente de pente $1/2$ avec l'allure suivante au voisinage du point $(0,1/2)$:



- Courbe :



24. **a)** • Domaine de définition : $\mathbb{R}^*$.

• Variations :

$$x'(t) = \frac{2(t-1)(2t^3+t^2+t+1)}{t^3}$$

$$y'(t) = \frac{2(t^3-1)}{t^3}$$

La fonction polynomiale $p(t) = 2t^3 + t^2 + t + 1$ a pour dérivée $p'(t) = 6t^2 + 2t + 1$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc p s'annule en un unique $\alpha \in \mathbb{R}$, et l'on a $\alpha < 0$.

t	$-\infty$		α		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$y'(t)$			$+$		‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

- Etude du point singulier. Les développements limités :

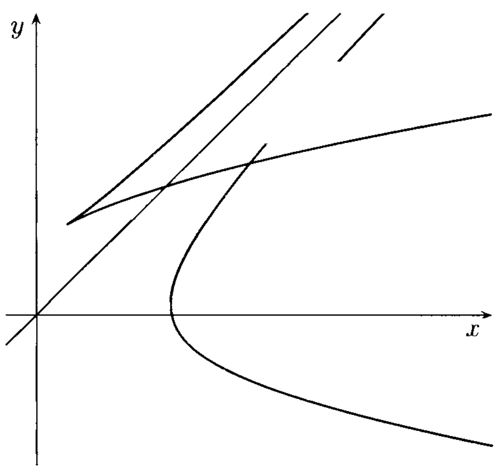
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (t-1)^2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - 4(t-1)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + o\left((t-1)^3\right)$$

montrent qu'il y a une tangente de pente $3/5$ et un point de rebroussement de première espèce.

- Branche infinie en $t = 0$: la relation $y - x = 4t - 2t^2$ montre que la première bissectrice est asymptote, la position par rapport à l'asymptote étant donnée, au voisinage de 0, par le signe de t.

- À l'infini, $y/x \sim 1/t$ tend vers 0 et il y a donc une branche parabolique de direction asymptotique Ox.

- Courbe :



b) On cherche deux réels distincts t et u tels que :

$$x(t) = x(u) \qquad \text{et} \qquad y(t) = y(u).$$

Comme $x - y = 2t^2 - 4t$, on doit donc avoir $t^2 - 2t = u^2 - 2u$ soit $(t-u)(t+u-2) = 0$. Donc $t + u = 2$.

De même, l'égalité de $x + y$ en t et u donne $(t-u)(t+u)(t^2 u^2 - 1) = 0$, c'est-à-dire $t^2 u^2 = 1$.

La somme de t et u vaut donc 2 et le produit ± 1, c'est-à-dire que t et u sont les deux racines de l'un des deux polynômes :

$$X^2 - 2X + 1 \qquad \text{ou} \qquad X^2 - 2X - 1.$$

Le premier n'a pas deux racines distinctes. Le point double correspond donc aux deux racines du deuxième, qui vérifient donc l'équation $t^2 = 2t + 1$. Ses coordonnées vérifient alors :

$$x - y = 2(t^2 - 2t) = 2$$

et :

$$x + y = 2\frac{t^4 + 1}{t^2} = 2\frac{(t^2-1)^2 + 2t^2}{t^2} = 12$$

puisque $(t^2 - 1)^2 = (2t)^2 = 4t^2$.

Le point double admet donc pour coordonnées $(7, 5)$.

c) On a :

$$y^2 = 4t^2 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^4}.$$

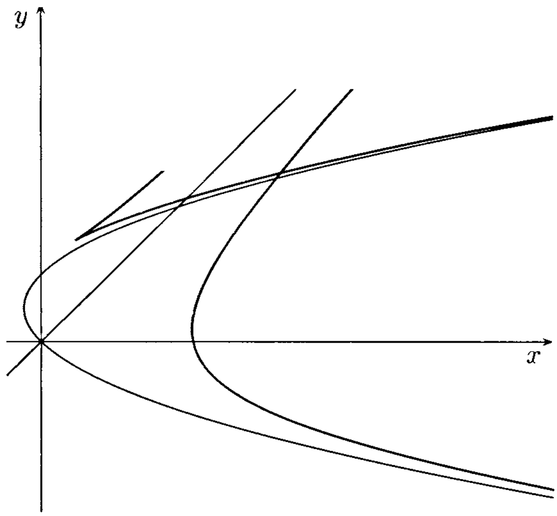
Pour éliminer les termes en t^2 calculons :

$$y^2 - 2x = 4t + \frac{4}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}$$

ce qui donne :

$$\lim_{t \to \pm\infty} (y^2 - 2x - 2y) = 0.$$

La courbe cherchee est donc la parabole d'équation $(y-1)^2 = 2x + 1$; elle a pour axe la droite d équation $y = 1$ et pour sommet le point de l axe d'abscisse $-1/2$.



Chapitre 18

1 **a)** $\left|\dfrac{n^2 i^n}{n^3+1}\right| = \dfrac{n^2}{n^3+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 i^n}{n^3+1} = 0$

b) La suite n'a pas de limite puisque sa partie imaginaire $(-1)^n$ diverge

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+3i} - \dfrac{ni}{n+1}\right) = 1 - i.$

d) Le terme général s'ecrit :

$$\frac{i - \frac{i}{n} + \frac{1-3i}{n^2}}{(2 + \frac{4i}{n} - \frac{3}{n})(1 - \frac{i}{n})}$$

donc la limite cherchée est $\dfrac{i}{2}\cdot$

2. Posons $u_n = x_n + \imath y_n$, les suites (x_n) et (y_n) vérifient les récurrences suivantes :

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n.$$

On a donc :

$$x_n = \frac{1}{3^n}x_0 \quad \text{et} \quad y_n = y_0$$

d'où :

$$u_n = \frac{x_0}{3^n} + iy_0$$

qui converge vers $i\,\mathrm{Im}(z_0)$.

3. Posons $z_n = x_n + iy_n$. La suite (z_n) vérifie $z_{n+1} = (\alpha + i\beta)z_n$.
On a donc :
$$z_n = (\alpha + i\beta)^n z_0.$$
Notons $x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ et $\alpha + i\beta = re^{i\theta}$.
Alors :
$$x_n = r_0 r^n \cos(n\theta + \theta_0) \quad \text{et} \quad y_n = r_0 r^n \sin(n\theta + \theta_0).$$
On en déduit le comportement des suites suivant les valeurs de r_0, r, θ et θ_0.

4 **a)** Lorsque $cx + d \neq 0$, l'equation $f(x) = x$ est équivalente à :
$$x(cx + d) = ax + b \qquad (*)$$
c'est-à-dire à :
$$cx^2 + (d - a)x - b = 0$$
équation qui a, dans $\mathbb{C}$, deux racines distinctes ou une seule racine.
Si une telle racine α vérifiait $c\alpha + d = 0$ alors $a\alpha + b = 0$ d'après $(*)$ ce qui contredirait l'hypothèse $ad - bc \neq 0$.

b) Il suffit de calculer $\dfrac{f(x) - f(\alpha)}{f(x) - f(\beta)}$.
Application : la fonction f a deux points fixes $1 + 2i$ et $1 - 2i$.
Considérons la suite :
$$w_n = \frac{z_n - (1 + 2i)}{z_n - (1 - 2i)}.$$
z_n est une suite géométrique de raison $k = \dfrac{1 - i}{1 + i}$.
On a donc :
$$w_n = \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^n w_0 = \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^n \frac{1 + i}{1 - 3i} = e^{-ni\frac{\pi}{2}} \frac{1 + i}{1 - 3i}.$$
La suite w_n est divergente car $w_{4k} = \dfrac{1 + i}{1 - 3i}$ et $w_{4k+1} = -i\dfrac{1 + i}{1 - 3i}$.
De plus :
$$z_n = \frac{-(1 + 2i) + (1 - 2i)w_n}{w_n - 1}.$$
On en déduit que la suite z_n est également divergente.
En effet, si $z_n \to 1 - 2i$ alors (w_n) est non bornée ce qui est absurde et si $z_n \to \ell \neq 1 - 2i$ alors (w_n) converge, ce qui est impossible.

c)
$$\frac{1}{f(x) - \alpha} - \frac{1}{x - \alpha} = \frac{x - f(x)}{(f(x) - f(\alpha))(x - \alpha)}$$
$$f(x) - f(\alpha) = \frac{(ad - bc)(x - \alpha)}{(cx + d)(c\alpha + d)}$$

$$x - f(x) = \frac{cx^2 + (d-a)x - b}{cx+d} = \frac{c(x-\alpha)^2}{cx+d}$$

puisque α est racine double.
D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{x - f(x)}{\big(f(x)-\alpha\big)(x-\alpha)} &= \frac{c(c\alpha+d)}{ad-bc} && (\neq 0 \text{ car } c\alpha + d \neq 0)\\
&= \frac{c(a+d)}{2(ad-bc)} && \text{car } c\alpha = \frac{a-d}{2}\\
&= \frac{2c}{a+d} && \text{car } 0 = \Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc)
\end{aligned}$$

Application : la fonction f a un unique point fixe $\alpha = 1$
Soit :

$$w_n = \frac{1}{z_n - 1}.$$

Cette suite est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$, donc :

$$w_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{z_0 - 1} = \frac{n}{2} + \frac{1}{-1+i}$$

et :

$$z_n = \frac{1}{w_n} + 1.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |w_n| = +\infty$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 1$.

5. En utilisant :

$$\big|\operatorname{Re}\big(f(x)\big) - \operatorname{Re}\big(f(y)\big)\big| \leqslant \big|f(x) - f(y)\big|$$

$$\big|\operatorname{Im}\big(f(x)\big) - \operatorname{Im}\big(f(y)\big)\big| \leqslant \big|f(x) - f(y)\big|,$$

on montre facilement que si f est uniformément continue alors $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.
Réciproquement, si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont uniformément continues alors l'inégalité :

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \big|\operatorname{Re}\big(f(x)\big) - \operatorname{Re}\big(f(y)\big)\big| + \big|\operatorname{Im}\big(f(x)\big) - \operatorname{Im}\big(f(y)\big)\big|$$

montre que f est uniformément continue. Si f est continue sur $[a,b]$, alors sa partie réelle et sa partie imaginaire sont continues sur $[a,b]$ donc sont uniformément continues, f est donc uniformément continue

6. Supposons que f admette une infinité de zéros. Il existe une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ distincts deux à deux telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ f(x_n) = 0.$$

La suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente. Notons ℓ sa limite.
La fonction f étant continue on a $f(\ell) = 0$.
Remarquons que, la suite $(x_{\varphi(n)})$ prenant au plus une fois la valeur ℓ, on peut supposer $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ x_{\varphi(n)} \neq \ell$. De plus d'après l'hypothèse faite sur f, on a donc $f'(\ell) \neq 0$.
Or :

$$f'(\ell) = \lim_{x \to \ell} \frac{f(x) - f(\ell)}{x - \ell}.$$

La suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers ℓ, $\dfrac{f(x_{\varphi(n)}) - f(\ell)}{x_{\varphi(n)} - \ell} = 0$ converge également vers $f'(\ell)$.
Cela est absurde, puisque $f'(\ell) \neq 0$.

7. Remarquons que :

$$f(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}_-$$

et :

$$z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad \Longrightarrow f(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

Si $z_0 \in \mathbb{R}_-$, alors $z_1 = 0$ et la suite est nulle à partir du rang 1.
Sinon, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ z_n \neq 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un unique couple $(r_n, \theta_n) \in \mathbb{R}_+ \times] - \pi, \pi[$ tel que $z_n = r_n e^{i\theta_n}$. La relation $z_{n+1} = f(z_n)$ conduit à :

$$r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \quad \text{et} \quad \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

Si l'on note $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, on a donc :

$$\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \quad \text{et} \quad r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta_0}{2^k}.$$

Or, on montre que si $\theta_0 \neq 0$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta_0}{2^k} = \frac{\sin\theta_0}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}.$$

Finalement :

$$z_n = r_0 \frac{\sin\theta_0}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)} e^{i\frac{\theta_0}{2^n}}.$$

Si $\theta_0 \neq 0$ la suite converge donc vers :

$$r_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}.$$

Si $\theta_0 = 0$ alors $z_n = r_0$ et la suite est constante.

8. Il existe un rang N tel que :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |z_n^2 - 1| \leqslant \frac{1}{4}.$$

À partir du rang N on a donc $|z_n - 1| \leqslant \frac{1}{2}$ ou $|z_n + 1| \leqslant \frac{1}{2}$.

Supposons que $|z_N - 1| \leqslant \frac{1}{2}$, alors, on montre par récurrence que :

$$\forall n \geqslant N \ , \ |z_n - 1| \leqslant \frac{1}{2}$$

puis :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |z_n + 1| \geqslant \frac{3}{2}$$

ce qui donne pour $n \geqslant N$:

$$|z_n - 1| \leqslant \frac{2}{3}|z_n^2 - 1|.$$

La suite (z_n) converge donc vers 1.

Si l'on suppose que $|z_N + 1| \leqslant \frac{1}{2}$, on montre alors que (z_n) converge vers -1.

9. **a)** Soit y dans $f(\mathbb{R})$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.
La partie A étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x.
La fonction f étant continue, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers y.
Il existe donc une suite d'éléments de $f(A)$ qui converge vers y.

b) Supposons x irrationnel et considérons le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z} + 2\pi x\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$.
Ce sous-groupe est donc, soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}^*$, soit dense (voir exercice 18 du chapitre 8).
S'il était de la forme $a\mathbb{Z}$, il existerait deux entiers relatifs m et n tels que $2\pi x = na$ et $2\pi = ma$ et donc x serait rationnel.
Donc $2\pi\mathbb{Z} + \pi x\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et son image par l'application continue $x \mapsto e^{ix}$ est dense dans le cercle unité.
Réciproquement, si x est rationnel, alors il s'écrit sous la forme $x = \dfrac{p}{q}$ avec $q > 0$. Alors :

$$\{e^{2in\pi x} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2ir\pi\frac{p}{q}} \mid r \in \mathbb{Z} \ , \ 0 \leqslant r < q\}.$$

Il s'agit donc d'un ensemble fini qui ne peut être dense dans le cercle unité.

10. Les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I et dérivables sur $I\setminus\{a\}$ avec $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{Re}(f)'(x) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{Im}(f)'(x) = \mathrm{Im}(\ell)$.
On sait alors (application du théorème des accroissements finis) que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a de dérivées respectives $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.
Donc f est dérivable en a de nombre dérivé ℓ.

11. Montrons le résultat par récurrence sur n.
On montre facilement que si f est C^1 alors g est continue.
Supposons le résultat vrai pour $n-1$ et f de classe C^n, alors g est de classe C^{n-2} sur $\mathbb{R}$ et de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}^*$.
De plus φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\varphi'(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)\right)$$

Pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} g^{(n-1)}(x) &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} f^{(i)}(x)(-1)^{n-1-i}(n-1-i)!x^{-n+i} \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\left(\varphi(x) + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)\right) \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\varphi(x) + \frac{1}{n}f^{(n)}(0). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ $f^{(n)}$ étant continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)\right| \leqslant \varepsilon$$

soit :

$$|x| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\varphi'(x)\right| \leqslant \varepsilon\frac{|x^{n-1}|}{(n-1)!}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |x| \leqslant \eta &\Longrightarrow \left|\varphi(x)\right| = \left|\varphi(x) - \varphi(0)\right| \leqslant \varepsilon\frac{|x|^n}{n!} \\ &\Longrightarrow \left|g^{(n-1)}(x) - \frac{1}{n}f^{(n)}(0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\lim_{x\to 0} g^{(n-1)}(x) = \frac{1}{n}f^{(n)}(0)$$

ce qui montre à l'aide du résultat de l'exercice précédent que g est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}$.

12. La condition est clairement suffisante
Montrons qu'elle est nécessaire.

Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que $\lambda \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}_+$.

On pose $f_1 = \lambda f$ et $\lambda = e^{-i\theta_0}$.
Si :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

alors :

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \left|\int_a^b f_1(x)\,dx\right| = \int_a^b |f_1(x)|\,dx.$$

Soient g_1 la partie réelle de f et h_1 la partie imaginaire de f_1.

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b g_1(x)\,dx = \int_a^b |f_1(x)|\,dx$$

donc :

$$\int_a^b \big(|f_1(x)| - g_1(x)\big)\,dx = 0.$$

Comme $|f_1| - g_1$ est une fonction continue positive ou nulle on a :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ |f_1(x)| = g_1(x)$$

donc f_1 est réelle positive ou nulle.
Dans ce cas $f_1 = |f_1| = |f|$ et l'on a bien :

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ f(x) = |f(x)|e^{i\theta_0}.$$

Chapitre 19

1. **a)**
$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x + C^{te}.$$

b)
$$\int \cos 3x \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C^{te}.$$

c)
$$\int \sqrt{1-\cos x}\,dx = \sqrt{2}\int \left|\sin\frac{1}{2}x\right|\,dx.$$

On a donc sur tout intervalle de la forme $]4k\pi, 2\pi + 4k\pi[$:

$$\int \sqrt{1-\cos x}\,dx = -2\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}x + C^{te}$$

et sur tout intervalle de la forme $]2\pi + 4k\pi, (4k+1)\pi[$:

$$\int \sqrt{1-\cos x}\, dx = 2\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}x + C^{te}.$$

d) Après intégration par parties :

$$\int \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C^{te}.$$

e) Sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = x\tan x + \ln|\cos x| + C^{te}$$

f) $\displaystyle\int \arctan x\, dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C^{te}$

2 On intègre par parties :

$$\int \frac{dx}{(1+x^3)^n} = \frac{x}{(1+x^3)^n} + 3n\int \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\, dx$$
$$= \frac{x}{(1+x^3)^n} + 3nI_n - 3nI_{n+1}$$

d'où la relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} :

$$3nI_{n+1} = (3n-1)I_n + \frac{x}{(x^3+1)^n}$$

et :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{x^3+1} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\, dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{te}. \end{aligned}$$

Intégration de fractions rationnelles

3. **a)**
$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

d'où, sur tout intervalle qui ne contient pas 0 :

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C^{te}.$$

On peut aussi écrire :

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{xdx}{x^2(x^2+1)}$$

puis poser $u = x^2$.

b) Sur tout intervalle qui ne contient pas -1 :

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+2x+1}\,dx &= \int \left(-\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= \frac{2}{(x+1)} + \ln|x+1| + C^{te}.\end{aligned}$$

c) Sur tout intervalle qui ne contient ni 2 ni -2 :

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-4)^2} = -\frac{1}{2(x^2-4)} + C^{te}.$$

où $u = x^2$.

d)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C^{te}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\frac{6x}{(x^2-x+1)^2} = &-\frac{2\sqrt{3}i}{3}\frac{1}{x-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}} + \frac{2\sqrt{3}i}{3}\frac{1}{x-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} \\ &- \frac{1+\sqrt{3}i}{(x-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{(x-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^2}\end{aligned}$$

d'où :

$$\int \frac{6x}{(x^2-x+1)^2}\,dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x-4}{x^2-x+1} + C^{te}$$

f)

$$\frac{x^4}{x^3-1} = x + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

d'où :

$$\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C^{te}$$

sur tout intervalle qui ne contient pas 1.

Intégration d'expressions polynomiales en sinus et cosinus

4. **a)** $\displaystyle\int \cos^{2p+1} x \sin^m x \, dx = \int (1-\sin^2 x)^p \sin^m x \cos x \, dx = \int (1-u^2)^p u^m \, du.$

b) Si m est impair, on pose $u = \cos x$.

c) Si m et n sont pairs, il faut linéariser l'expression.

d) • L'exposant de $\cos x$ est impair, on pose $u = \sin x$:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int u^2(1-u^2)\, du = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C^{te}.$$

• On pose $u = \cos x$:

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = -\int (1-u^2)u^4 \, du = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C^{te}.$$

• On pose $u = \cos x$:

$$\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx = -\int (1-u^2)u^5 \, du = \frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + C^{te}.$$

• On linéarise $\sin^4 x$:

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

d'où :

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + C^{te}.$$

• On linéarise $\cos^4 x \sin^2 x$:

$$\cos^4 x \sin^2 x = \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x$$

d'où :

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx = \frac{x}{16} + \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{192}\sin 6x + C^{te}.$$

Intégration d'expressions rationnelles en sinus et cosinus

5. **a)** On a :

$$dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$$

ainsi que :

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}.$$

L'expression à intégrer devient rationnelle.

b) En remplacant les $\sin^2 x$ par $1-\cos^2 x$, on peut écrire :

$$f(\cos x.\sin x) = \frac{P(\cos x)+Q(\cos x)\sin x}{R(\cos x)+S(\cos x)\sin x}$$

où P, Q, R et S dont des polynômes.
En divisant et multipliant par $R(\cos x) - S(\cos x)\sin x$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(\cos x, \sin x) &= \frac{\big(P(\cos x)+Q(\cos x)\sin x\big)\big(R(\cos x)-S(\cos x)\sin x\big)}{R(\cos x)^2 - S(\cos x)^2(1-\cos^2 x)} \\ &= F(\cos x) + G(\cos x)\sin x \end{aligned}$$

où F et G sont des fractions rationnelles.
On montre alors que $f(\cos x, \sin x)\,dx$ est invariante par le changement $x \mapsto -x$ si et seulement si $F = 0$.
Alors :

$$\int f(\cos x, \sin x)\,dx = \int G(\cos x)\sin x\,dx = -\int G(u)\,du.$$

c) • On pose $u = \cos x$.

$$\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x}\,dx = \int \frac{du}{(1-u^2)u^3} = \int \frac{udu}{(1-u^2)u^4}.$$

Puis, en posant $v = u^2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(1-u^2)u^3} &= \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)v^2} \\ &= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C^{te}. \end{aligned}$$

• Sur tout intervalle de la forme $]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, on pose $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
Alors :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\cos x} &= \frac{2}{3+u^2}\,du \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C^{te}. \end{aligned}$$

- On pose également $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x} &= \int \frac{du}{u(1+u)}\\ &= \ln|u| - \ln|1+u|\\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C^{te}.\end{aligned}$$

- On pose $u = \tan x$. Alors :

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{1+u}{u}\,du\\ &= \ln|u| + u + C^{te}\\ &= \ln|\tan x| + \tan x + C^{te}.\end{aligned}$$

- On pose $u = \cos x$. Alors :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x(1+3\cos x)}\,dx &= \int \frac{du}{(u^2-1)(1+3u)}\\ &= \int \left(\frac{1}{8}\frac{1}{u-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+u} - \frac{9}{8}\frac{1}{1+3u}\right) du\\ &= \frac{1}{8}\ln(1-\cos x) + \frac{1}{4}\ln(1+\cos x) - \frac{3}{8}\ln|1+3\cos x| + C^{te}\end{aligned}$$

- Le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ conduit à :

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{-t^2+2t+1}dt &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int\left(\frac{1}{t-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-1-\sqrt{2}}\right) dt\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\left|t-1+\sqrt{2}\right| - \ln\left|t-1-\sqrt{2}\right|\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1+\sqrt{2}\right| - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1-\sqrt{2}\right|\right) + C^{te}\end{aligned}$$

On peut aussi écrire :

$$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C^{te}$$

avec $t = \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Intégration de fonctions rationnelles en e^x

6. **a)** On pose $u = e^x$. Alors :

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1} e^x\, dx &= \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u^2 + 2u + 1}\, du \\ &= u - \frac{4}{1+u} - 4\ln(1+u) + C^{te} \\ &= e^x - \frac{4}{1+e^x} - 4\ln(1+e^x) + C^{te}.\end{aligned}$$

b) On pose $u = \operatorname{sh} x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{ch} x(1 + \operatorname{sh} x)}\, dx &= \int \frac{du}{(1+u^2)(1+u)} \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\arctan u + C^{te} \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{sh} x| - \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh} x) + C^{te}.\end{aligned}$$

c) On pose $u = e^x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x + 1} &= \int \frac{2e^x\, dx}{3(e^x)^2 + 2e^x - 1} \\ &= \int \frac{2du}{3u^2 + 2u - 1} \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1+u) + \frac{1}{2}\ln|3u - 1| + C^{te} \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1+e^x) + \frac{1}{2}\ln|3e^x - 1| + C^{t} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|1 + 2\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C^{te}\end{aligned}$$

sur tout intervalle qui ne contient pas $-\ln 3$.

Remarque : on peut également poser $u = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$.

d) On pose $u = \operatorname{th} x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \operatorname{th} x} &= \int \frac{du}{(1-u^2)(1+u)} \\ &= -\frac{1}{4}\ln|u - 1| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+u} + \frac{1}{4}\ln|1+u| + C^{te} \\ &= -\frac{1}{4}\ln|\operatorname{th} x - 1| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\operatorname{th} x} + \frac{1}{4}\ln|1+\operatorname{th} x| + C^{te}.\end{aligned}$$

e) On pose $u = \operatorname{ch} x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{th}^2 x}\,dx &= \int \frac{u^2}{2u^2-1}\,du \\ &= \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\sqrt{2}u+1\right| + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\sqrt{2}u-1\right| + C^{te} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{ch} x - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\sqrt{2}\operatorname{ch} x+1\right| + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\sqrt{2}\operatorname{ch} x-1\right| + C^{te}.\end{aligned}$$

7. **a)** On pose $\sqrt{2-x} = u$, d'où :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}} &= 2\int \frac{du}{u^2-2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|u-\sqrt{2}| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|u+\sqrt{2}| + C^{te} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C^{te} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}\right| + C^{te}.\end{aligned}$$

b) On pose $u = \sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{2u^2-2}{2u^2-1}\,du \\ &= u - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}u-1\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}u+1\right| + C^{te} \\ &= \sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\sqrt{x+1}-1\right| + C^{te} \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\sqrt{x+1}+1\right| + C^{te}.\end{aligned}$$

c) On pose $u = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx &= \int \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}\,du \\ &= -\frac{1}{u-1} + \ln|u-1| - \frac{1}{u+1} - \ln|1+u| + C^{te} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1} + \ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right| \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1} - \ln\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| + C^{te}.\end{aligned}$$

8. **a)**
$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_k)f'(a_k)\,dt\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2}f'(a_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(t)\,dt + \frac{(b-a)^2}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}f'(a_k).\end{aligned}$$

La fonction f' étant continue sur $[a.b]$, la suite $\dfrac{(b-a)^2}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f'(a_k)$ converge vers $\dfrac{b-a}{2}\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = \dfrac{b-a}{2}\big(f(b)-f(a)\big)$.

Montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(t)\,dt = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot$

Soit $\varepsilon > 0$.

La fonction f' étant continue sur $[a,b]$, elle y est uniformément continue Donc :
$$\exists\eta > 0\ :\ |x-y|\leqslant\eta \Longrightarrow \big|f'(x)-f'(y)\big| \leqslant \frac{2\varepsilon}{(b-a)^2}\cdot$$

Soit $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{N}\leqslant\eta$.

Alors si $n\geqslant N$, on a pour tout k dans $\{0,1\ldots,n-1\}$ et tout $x\in[a_k,a_{k+1}]$:
$$\big|g_k'(x)\big| = \big|f'(x)-f'(a_k)\big| \leqslant \frac{2\varepsilon}{(b-a)^2}$$
d'où :
$$\big|g_k(x)\big| \leqslant \frac{2\varepsilon}{(b-a)^2}(x-a_k)$$
et :
$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(t)\,dt\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{(b-a)^2}\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} = \frac{2\varepsilon}{(b-a)^2}\frac{(b-a)^2}{2n^2} = \frac{\varepsilon}{n^2}.$$
Finalement :
$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(t)\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$$
ce qui montre le résultat.

Remarque : l'inégalité de Taylor-Lagrange donne le résultat plus rapidement lorsque f est de classe C^2.

b) On procède comme précédemment. On pose :
$$h_k(x) = f(x) - f(a_k) - (x-a_k)f'(a_k) - \frac{(x-a_k)^2}{2}f''(a_k).$$

Alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} h_k(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_k)f'(a_k)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(t-a_k)^2}{2} f''(a_k)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} h_k(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(a_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{6n^3} f''(a_k).$$

On a déjà d'après ce qui précède :

$$S_n = \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec $\alpha = \dfrac{b-a}{2}\big(f(b)-f(a)\big)$.

$$\left(S_n - \frac{\alpha}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} h_k(t)\,dt + \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f'(a_k) - \int_a^b f'(t)\,dt\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{6n^3} f''(a_k).$$

Or $n^2 \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{6n^3} f''(a_k)$ converge vers :

$$\frac{(b-a)^2}{6} \int_a^b f''(t)\,dt = \frac{(b-a)^2}{6}\big(f'(b)-f'(a)\big).$$

De plus en appliquant le résultat précédent à f' (qui est bien C^1) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f'(a_k) - \int_a^b f'(t)\,dt = -\frac{b-a}{2n}\big(f'(b)-f'(a)\big) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc :

$$\frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f'(a_k) - \int_a^b f'(t)\,dt\right) = -\frac{(b-a)^2}{4n^2}\big(f'(b)-f'(a)\big) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrons que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} h_k(t)\,dt = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, la fonction f'' étant continue sur $[a,b]$, elle y est uniformément continue :

$$\exists \eta > 0 \ : \ |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f''(x) - f''(y)\right| \leqslant \frac{6\varepsilon}{(b-a)^3}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{N} \leqslant \eta$.
Alors si $n \geqslant N$, on a pour tout $k \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$ et pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$\left|h_k''(x)\right| = \left|f''(x) - f''(a_k)\right| \leqslant \frac{6\varepsilon}{(b-a)^3}$$

d'où :

$$\left|h_k(x)\right| \leqslant \frac{6\varepsilon}{(b-a)^3} \frac{(t-a_k)^2}{2}$$

et :

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} h_k(t)\, dt\right| \leqslant \frac{6\varepsilon}{(b-a)^3} \frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{6} = \frac{6\varepsilon}{(b-a)^3} \frac{(b-a)^3}{6n^3} = \frac{\varepsilon}{n^3}.$$

Finalement :

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} h_k(t)\, dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{n^2}$$

ce qui montre le résultat.
En conclusion, on a trouvé :

$$\alpha = \frac{b-a}{2}\big(f(b) - f(a)\big) \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{(b-a)^2}{12}\big(f'(b) - f'(a)\big).$$

Chapitre 20

1 La courbe est entièrement decrite sur $[-\pi, \pi]$, mais par symétries, il suffit de calculer le quart de sa longueur, ce qui correspond à l'intervalle $[0, \pi/2]$. On a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3a \sin t \, \cos t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

et donc $\left\|f'(t)\right\| = 3a \, \sin t \, \cos t = \dfrac{3a}{2} \sin 2t$ pour $t \in [0, \pi/2]$. On en déduit la longueur :

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{3a}{2} \sin 2t \, dt = [-3a \cos 2t]_0^{\pi/2} = 6a.$$

2. On a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = 2a\sin(t/2) \begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$$

et donc $\|f'(t)\| = 2a\sin(t/2)$ puisque $t \in [0, 2\pi]$. On en déduit la longueur :

$$L = \int_0^{2\pi} 2a\sin(t/2)\,dt = [-4a\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8a.$$

3. La courbe est entièrement décrite sur un intervalle de longueur 3π. On a $r' = -a\sin(\theta/3)\,\cos^2(\theta/3)$ et donc la longueur est :

$$L = \int_0^{3\pi} a\,\cos^2\frac{\theta}{3}\,d\theta = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1+\cos\frac{2\theta}{3}\right)d\theta = \frac{3a\pi}{2}\cdot$$

4. $s = \operatorname{sh} x + C^{te}$.

5. On trouve $y' = \sqrt{x^2-1}$ pour $x > 1$. Comme cette quantité tend vers 0 quand x tend vers 1 et que y est continue en 1, on en déduit que y est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ avec $y'(1) = 0$. On a alors :

$$s = \int_1^x \sqrt{1+y'^2(t)}\,dt = \int_1^x t\,dt = \frac{1}{2}(x^2-1).$$

La relation $x = \operatorname{ch} t$ définit un reparamétrage sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'on a :

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{ch} t\,\operatorname{sh} t - \frac{1}{2}\ln(e^t) = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t - \frac{t}{2}\cdot$$

Avec ce paramétrage :

$$x' = \operatorname{sh} t \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2t - 1) = \operatorname{sh}^2 t$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{sh}^4 t = \operatorname{sh}^2 t\,\operatorname{ch}^2 t$$

puis :

$$s = \int_0^t \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u\,du = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}^2 t - 1) = \frac{1}{2}(x^2-1).$$

6. Pour étudier la courbure en un point de l'axe focal, on peut paramétrer la conique en polaire par :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

et se limiter à $\theta = 0$.

La courbure est $\gamma = \dfrac{r^2 + 2r'^2 - r\,r''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$, ce qui donne $\gamma = \dfrac{1}{p}$ en 0 puisque :

$$r(0) = \frac{p}{1+e} \qquad r'(0) = 0 \qquad r''(0) = \frac{p\,e}{(1+e)^2}.$$

En un tel point, le rayon de courbure est donc égal au paramètre de la conique Par exemple, pour une parabole, le centre de courbure au sommet S est le symétrique de S par rapport au foyer.

Remarque : Si l'on connaît l'équation générale des coniques sous la forme $y^2 = 2px + qx^2$, on retrouve le résultat puisque p est la limite de $\dfrac{y^2}{2x}$ et donc celle de $\dfrac{x^2+y^2}{2x}$, quand x tend vers 0.

7. Un point P est lié à $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ si, et seulement si, ses coordonnées dans ce repère sont constantes. En les désignant par a et b on a donc $P = M + a\,\overrightarrow{T} + b\,\overrightarrow{N}$.

En paramétrant C par l'abscisse curviligne s de Γ, on obtient :

$$\frac{dP}{ds} = (1 - b\gamma)\,\overrightarrow{T} + a\,\gamma\,\overrightarrow{N}.$$

a) Le point P est singulier si, et seulement si, $a = 0$ et $b = \mathcal{R}$, c'est–à–dire lorsque P est confondu avec le centre de courbure de C en M.

b) Un vecteur normal à Γ en P est $\vec{u} = (1 - b\gamma)\,\overrightarrow{N} - a\,\gamma\,\overrightarrow{T}$ et l'on a :

$$P + \mathcal{R}\,\vec{u} = P - a\,\overrightarrow{T} + \mathcal{R}\,\overrightarrow{N} - b\,\overrightarrow{N} = M + \mathcal{R}\,\overrightarrow{N}$$

ce qui prouve le résultat.

c) (i) Le point P a une vitesse dirigée par $\overrightarrow{T}$ si, et seulement si $a\,\gamma = 0$ c'est–à–dire $a = 0$ puisque C est birégulière.

On a alors $\dfrac{dP}{ds} = (1 - b\,\gamma)\,\overrightarrow{T}$ ou, avec un paramétrage quelconque :

$$\frac{dP}{dt} = (1 - b\,\gamma)\,\frac{dM}{dt}. \qquad (*)$$

(ii) Soient I un intervalle sur lequel Γ est régulière et σ une abscisse curviligne de Γ. La quantité $1-b\gamma$ ne s annule pas, et comme elle est continue, elle garde un signe constant.

- Supposons $1-b\gamma>0$; la relation $\dfrac{dP}{ds}=(1-b\gamma)\,\overrightarrow{T}$ entraîne que le vecteur tangent à Γ est $\overrightarrow{T}$ et que $\dfrac{d\sigma}{ds}$ est égal à $1-b\gamma$. On a alors :
$$\frac{d\overrightarrow{T}}{d\sigma}=\frac{ds}{d\sigma}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}=\frac{\gamma}{1-b\gamma}\overrightarrow{N}$$
ce qui donne le rayon de courbure de Γ :
$$\rho=\frac{1-b\gamma}{\gamma}=\mathcal{R}-b.$$
Le centre de courbure est alors $P+\rho\,\overrightarrow{N}=M+\mathcal{R}\,\overrightarrow{N}$ qui est donc confondu avec le centre de courbure à $\mathcal{C}$ en M.
- Lorsque $1-b\gamma<0$, les calculs précédents sont encore valables à condition de changer l'orientation de Γ, ce qui ne modifie pas le centre de courbure.

(iii) Pour une parabole d'équation $y=\dfrac{x^2}{2p}$, on peut limiter l'étude à $\mathbb{R}_+$ grâce à une symétrie par rapport à Oy.

On a $\dfrac{ds}{dx}=\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}}{p}$ et :
$$\overrightarrow{T}=\frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}}\begin{pmatrix}p\\x\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{N}=\frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}}\begin{pmatrix}-x\\p\end{pmatrix}.$$
Donc $\tan\alpha=\dfrac{x}{p}$ et :
$$(1+\tan^2\alpha)\frac{d\alpha}{dx}=\frac{1}{p}$$
ce qui donne :
$$\gamma=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{p^2}{(x^2+p^2)^{3/2}}$$
ainsi que les coordonnées du centre de courbure :
$$x_C=-\frac{x^3}{p^2}\qquad\text{et}\qquad y_C=p+\frac{3x^2}{2p}\cdot$$
D autre part, les coordonnées de P sont :
$$X=x\left(1-\frac{b}{\sqrt{x^2+p^2}}\right)\qquad\text{et}\qquad Y=\frac{x^2}{2p}+\frac{bp}{\sqrt{x^2+p^2}}\cdot$$

La relation $(*)$ s'écrit :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1 - b\gamma}{p} \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}$$

et les variations de $\mathcal{R} = \dfrac{(x^2 + p^2)^{3/2}}{p^2}$ nous donnent les trois cas suivants.

- Si $b < p$, il n y a pas de point singulier et l on a les variations :

x	0		$+\infty$
X'		$+$	
Y'		$+$	
X	0	$\nearrow$	$+\infty$
Y	b	$\nearrow$	$+\infty$

- Si $b > p$, il y a un point singulier sur $\mathbb{R}_+$ en l'unique x_0 tel que $\mathcal{R} = b$ et l'on a les variations :

x	0		x_0		$+\infty$
X'		$-$	0	$+$	
Y'		$-$	0	$+$	
X	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
Y	b	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

La relation :

$$\frac{d^2P}{dx^2} = (1 - b\gamma)\frac{d\vec{T}}{dx} - b\frac{d\gamma}{dx}\vec{T}$$

montre qu'en ce point singulier la tangente est dirigée par $\vec{T}$ puisque $\dfrac{d\gamma}{dx}$ ne s'annule qu'en 0 alors que le vecteur :

$$\frac{d^3P}{dx^3} = (1 - b\gamma)\frac{d^2\vec{T}}{dx^2} - 2b\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\vec{T}}{dx} - b\frac{d^2\gamma}{dx^2}\vec{T}$$

n'est pas colinéaire à $\vec{T}$ ce qui prouve qu'il y a un point de rebroussement de première espèce.

- Si $b = p$, on a les variations :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
X'	0 $\quad$ $+$
Y'	0 $\quad$ $+$
X	$0 \nearrow +\infty$
Y	$p \nearrow +\infty$

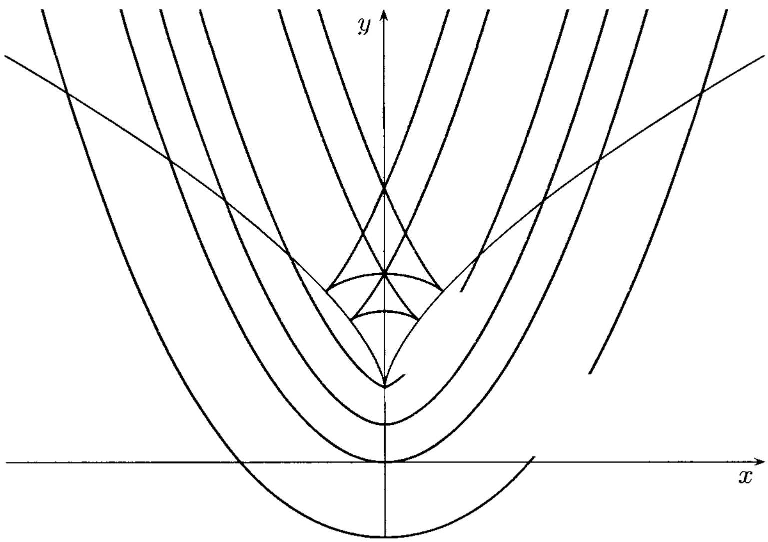
Au point singulier ($x = 0$), on a $\dfrac{d^2P}{dx^2} = 0$ et $\dfrac{d^3P}{dx^3} = -b\,\dfrac{d^2\gamma}{dx^2}\,\overrightarrow{T} \neq 0$.

La tangente est donc dirigée par $\overrightarrow{T}(0)$ c'est–à–dire horizontaale.

Il y a une branche parabolique de direction asymptotique Oy.

Les variations de x_C et y_C sont évidentes ; il y a un point singulier en 0 avec une tangente verticale et une branche parabolique de direction asymptotique Ox.

D'où les courbes :



8. On peut paramétrer la moitié droite de l'hyperbole par :

$$x(t) = a\,\mathrm{ch}\,t \quad \text{et} \quad y(t) = b\,\mathrm{sh}\,t \qquad \text{avec} \qquad t \in \mathbb{R}$$

l'autre moitié s'obtenant par symétrie par rapport à Oy.

Les calculs sont similaires à ceux de l'ellipse (voir exemple 2 page 583). On trouve :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2\,t + b^2\,\mathrm{ch}^2\,t}$$

$$\overrightarrow{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2\ \mathrm{sh}^2\, t + b^2\,\mathrm{ch}^2\, t}}\,(a\ \mathrm{sh}\, t, b\ \mathrm{ch}\, t)$$

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{a^2\ \mathrm{sh}^2\, t + b^2\,\mathrm{ch}^2\, t}}\,(-b\ \mathrm{ch}\, t, a\ \mathrm{sh}\, t)$$

$$\mathcal{R} = \frac{\left(a^2\,\mathrm{sh}^2\, t + b^2\,\mathrm{ch}^2\, t\right)^{\frac{3}{2}}}{a\,b}.$$

Par suite le centre de courbure C a pour coordonnées :

$$C = \left(\frac{a^2+b^2}{a}\,\mathrm{ch}^3\, t, -\frac{a^2+b^2}{b}\,\mathrm{sh}^3\, t\right).$$

9. Par symétrie par rapport à Oy, on peut se placer sur $\mathbb{R}_+^*$ (le point de paramètre 0 est singulier).

On a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{th}^2\, t \\ -\mathrm{sh}\, t/\,\mathrm{ch}^2\, t \end{pmatrix} = \mathrm{th}\, t \begin{pmatrix} \mathrm{th}\, t \\ -1/\,\mathrm{ch}\, t \end{pmatrix}$$

et l'on en déduit $\dfrac{ds}{dt} = \mathrm{th}\, t$ ainsi que :

$$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} \mathrm{th}\, t \\ -1/\,\mathrm{ch}\, t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1/\,\mathrm{ch}\, t \\ \mathrm{th}\, t \end{pmatrix}.$$

puis :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{1}{\mathrm{sh}\, t}\overrightarrow{N}.$$

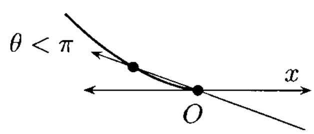
Le rayon de courbure est donc $\mathcal{R} = \mathrm{sh}\, t$ et la développee est paramétrée par :

$$X = t - \mathrm{th}\, t + \mathrm{th}\, t = t \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{1}{\mathrm{ch}\, t} + \frac{\mathrm{sh}^2\, t}{\mathrm{ch}\, t} = \mathrm{ch}\, t.$$

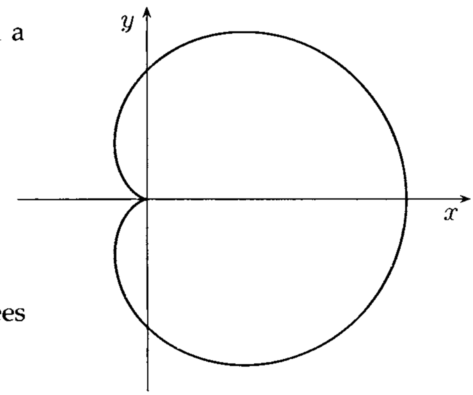
Il s'agit donc d'une chaînette.

10. Les relations $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$ et $r(-\theta) = r(\theta)$ permettent de limiter l'étude à $[0, \pi]$ puis d'obtenir toute la courbe en effectuant une symétrie par rapport à Ox.

À l origine ($\theta = \pi$) la courbe est tangente à la droite d'angle polaire π et la positivité de r nous donne l'allure suivante au voisinage de π :



En $\theta = 0$ on a $r' = 0$ et donc une tangente orthogonale à Ox.



D'après les calculs de la page 587 on a $\dfrac{ds}{d\theta} = 2a\cos\dfrac{\theta}{2}$, ainsi que :

$$\overrightarrow{N} = -\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u} - \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{v}$$

et :

$$\mathcal{R} = \frac{4a}{3}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les coordonnées du centre de courbure sont :

$$X = \frac{a}{3}(1 + \cos\theta)$$

$$Y = -\frac{2a}{3}\sin\theta$$

et dans le repère Oxy, on a donc :

$$x_C = \frac{a}{3}(2 + (1 - \cos\theta)\cos\theta)$$

$$y_C = \frac{a}{3}(1 - \cos\theta)\sin\theta$$

Pour retrouver l'équation de la cardioïde en polaire, il faut placer le pôle au point de rebroussement de la développee. Or ce point de rebroussement correspond à $\theta = 0$ et se trouve au point $A = (2a/3, 0)$. La représentation paramétrique précédente devient :

$$x_1 = \frac{a}{3}(1 - \cos\theta)\cos\theta$$

$$y_1 = \frac{a}{3}(1 - \cos\theta)\sin\theta$$

qui correspond à l'équation polaire $r = \dfrac{a}{3}(1 - \cos\theta)$ du symétrique par rapport à Ay de la cardioïde d équation polaire $r = \dfrac{a}{3}(1 + \cos\theta)$.

11. **a)** On a :

$$\frac{dM}{dt} = a\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = 2a\sin\frac{t}{2}\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$$

et donc $\dfrac{ds}{dt} = 2a\sin\dfrac{t}{2}$ ce qui donne :

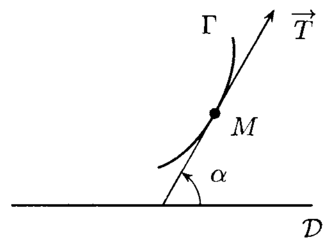
$$s = -4a\cos\frac{t}{2} + k \quad \text{et} \quad \overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'ordonnée de $M - \frac{s}{2}\overrightarrow{T}$ est :

$$a\left(1 - \cos t + 2\cos^2\frac{t}{2}\right) - \frac{k}{2}\cos\frac{t}{2} = 2a - \frac{k}{2}\cos\frac{t}{2}$$

et il est évident que $k = 0$ convient.

b) La relation $M - \frac{s}{2}\overrightarrow{T} \in Ox$ donne $\frac{1}{2}s\sin\alpha = y$ soit l'équation différentielle :



$$s\,\frac{dy}{ds} = 2y.$$

Sur tout intervalle ne contenant pas 0, on a donc $y = k\,s^2$, avec $k \in \mathbb{R}$. Pour $k = 0$, on a $\forall s$, $\frac{dy}{ds} = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons donc k non nul, et posons $k = \frac{1}{2p}$ avec $p \in \mathbb{R}^*$ ce qui donne $y = \frac{s^2}{2p}\cdot$

Alors $\sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{s}{p}$ ce qui donne $s = p\sin\alpha$ puis :

$$y = \frac{p\sin^2\alpha}{2} = \frac{p}{4}(1 - \cos 2\alpha).$$

On a ensuite :

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dx}{ds}\,\frac{ds}{d\alpha} = p\cos^2\alpha = \frac{p}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

soit :

$$x = \frac{p\,\alpha}{2} + \frac{p}{4}\sin 2\alpha = \frac{p}{4}(2\alpha + \sin 2\alpha).$$

On reconnaît une cycloïde en effectuant le changement de paramétrage $t = \pi - 2\alpha$ qui donne :

$$x = \frac{p}{4}(\pi - t + \sin t) = -\frac{p}{4}(t - \sin t) + \frac{p\pi}{4}$$
$$y = \frac{p}{4}(1 + \cos t) = -\frac{p}{4}(1 - \cos t) + \frac{p}{2}\cdot$$

12. **a)** On utilise le développement de Taylor–Young :

$$M(s) = M_0 + s\,\frac{dM}{ds}(0) + \frac{s^2}{2}\,\frac{d^2M}{ds^2}(0) + o(s^2)$$
$$= M_0 + s\overrightarrow{T}_0 + \frac{s^2}{2\mathcal{R}}\overrightarrow{N}_0 + o(s^2)$$

et donc les coordonnées (X, Y) de M vérifient :

$$X(s) = s + o(s^2) \qquad \text{et} \qquad Y(s) = \frac{s^2}{2\mathcal{R}} + o(s^2)$$

b) Notons (a, b) les coordonnées de A dans $(M_0, \overrightarrow{T}_0, \overrightarrow{N}_0)$. Le vecteur $\overrightarrow{AM(s)}$ a pour composantes $\left(s - a + o(s^2), \frac{s^2}{2\mathcal{R}} - b + o(s^2)\right)$ et donc :

$$d\big(A, M(s)\big)^2 = \big(a - s + o(s)\big)^2 + \big(b + o(s)\big)^2 = a^2 + b^2 - 2as + o(s)$$

ce qui donne :

$$d\big(A, M(s)\big) = \sqrt{a^2+b^2}\left(1 - \frac{as}{a^2+b^2} + o(s)\right)$$
$$= d(A, M_0) - \frac{as}{\sqrt{a^2+b^2}} + o(s).$$

On a donc $d\big(A, M(s)\big) = d(A, M_0) + o(s)$ si, et seulement si, $a = 0$, c'est–à–dire si, et seulement si, A est sur la normale à Γ en M_0 ; les tangentes en M_0 à $\mathcal{C}$ et Γ sont alors confondues.

c) Il faut donc avoir $a = 0$ et l'on a de même :

$$d\big(A, M(s)\big)^2 = b^2 + s^2\left(1 - \frac{b}{\mathcal{R}}\right) + o(s^2)$$

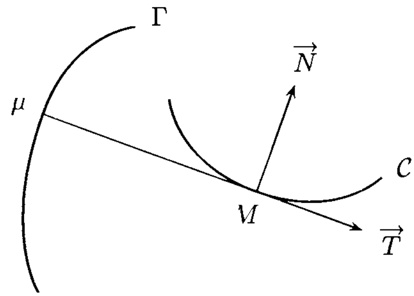
ce qui donne :

$$d\big(A, M(s)\big) = |b|\left(1 + \frac{s^2}{2b^2\mathcal{R}}(\mathcal{R} - b) + o(s^2)\right).$$

On a donc $d\big(A, M(s)\big) = d(A, M_0) + o(s^2)$ si, et seulement si, $b = \mathcal{R}$, c'est–à–dire si, et seulement si, A est le centre de courbure de Γ en M_0.

13 En dérivant la relation $I = M + \mathcal{R}\,\overrightarrow{N}$ on obtient $\dfrac{dI}{ds} = \dfrac{d\mathcal{R}}{ds}\overrightarrow{N}$, ce qui prouve que si I est un point régulier de Γ (c'est–à–dire si $\dfrac{d\mathcal{R}}{ds} \neq 0$) alors la tangente à Γ est dirigée par $\overrightarrow{N}$. Comme elle passe par M, c'est donc la droite $(M\ \overrightarrow{N})$.

14. **a)** Le point μ en lequel le centre de courbure de Γ est M se trouve sur la tangente à $\mathcal{C}$ en M, ce qui donne $\mu = M + \lambda \overrightarrow{T}$. D'autre part, la tangente en μ à Γ doit être orthogonale à $\overrightarrow{T}$. Or :



$$\frac{d\mu}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right) \overrightarrow{T} + \frac{\lambda}{\mathcal{R}} \overrightarrow{N}$$

où $\mathcal{R}$ est le rayon de courbure de $\mathcal{C}$ en M, ce qui donne bien $\dfrac{d\lambda}{ds} = -1$

b) On a alors $\lambda = s_0 - s$ qui ne s'annule qu'au point d'abscisse curviligne s_0, s'il existe, et puisque $\dfrac{d\mu}{ds} = \dfrac{\lambda}{\mathcal{R}} \overrightarrow{N}$, on en déduit que la courbe est régulière sur tout intervalle ne contenant pas s_0.

Soient σ une abscisse curviligne de Γ et $(\mu, \vec{\tau}, \vec{\nu})$ le repère de Frénet de Γ au point μ. Suivant le signe de $\lambda \mathcal{R}$, on a :

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\lambda}{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{\tau} = \overrightarrow{N} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\sigma}{ds} = -\frac{\lambda}{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{\tau} = -\overrightarrow{N}$$

mais quitte à changer l'orientation de Γ (ce qui ne change pas sa développée), on peut supposer être dans le premier cas. On a alors $\vec{\nu} = -\overrightarrow{T}$ et :

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma} \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \frac{\mathcal{R}}{\lambda} \left(-\frac{1}{\mathcal{R}} \overrightarrow{T}\right) = \frac{1}{\lambda} \vec{\nu}$$

ce qui prouve que la courbe est birégulière et a pour rayon de courbure $\rho = \lambda$.

Le centre de courbure est par conséquent :

$$C = \mu + \rho \vec{\nu} = M + \lambda \overrightarrow{T} - \lambda \overrightarrow{T} = M$$

ce qui prouve le résultat.

c) Paramétrons le cercle en polaire par $r = a$, avec $a > 0$ et prenons l axe polaire passant par le point d'abscisse curviligne s_0. On a alors dans le repère polaire $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

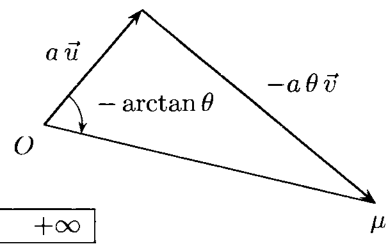
$$\frac{ds}{d\theta} = a \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{T} = \vec{v}$$

et donc $s - s_0 = a\,\theta$ ce qui donne :

$$\overrightarrow{O\mu} = a\,\vec{u} - a\,\theta\,\vec{v}.$$

Un couple de coordonnées polaires de μ est donc :

$r = a\sqrt{1+\theta^2}$ et $\varphi = \theta - \arctan\theta$.



Par symétrie par rapport à Ox, on peut se limiter à $\theta \in \mathbb{R}_+$. On a les variations :

θ	0 $\quad\nearrow\quad$ $+\infty$
φ	0 $\nearrow$ $+\infty$
r	a $\nearrow$ $+\infty$

Il y a un point singulier en $s = s_0$ c'est-à-dire pour $\theta = 0$. En dérivant la relation $\overrightarrow{O\mu} = a\,\vec{u}(\theta) - a\,\theta\,\vec{v}(\theta)$, on obtient :

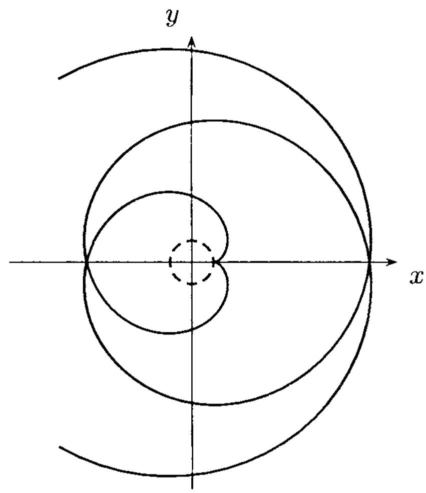
$$\frac{d\mu}{d\theta} = a\,\theta\,\vec{u} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\mu}{d\theta^2} = a\,\vec{u} + a\,\theta\,\vec{v}$$

ce qui donne :

$$\frac{d\mu}{d\theta}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\mu}{d\theta^2}(0) = a\,\vec{u}(0)$$

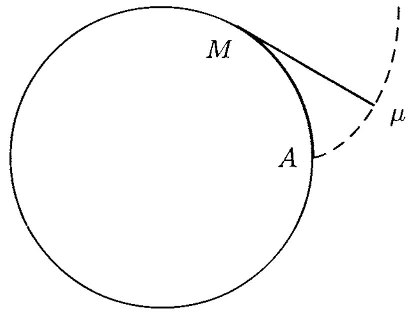
et donc une tangente portée par Ox.

Courbe :



Remarque

D'après l'étude précédente, le segment $[M\mu]$ a pour longueur $|s - s_0|$ c'est-à-dire la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM}$.



La courbe Γ peut donc s'obtenir en déroulant, tout en la laissant tendue, une ficelle initialement enroulée autour du cercle.

Chapitre 21

1. **a)**
$$\left|f(x,y)\right| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\left\|(x,y)\right\|$$

donc la limite est 0.

b) non : $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 1$

c) non : $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = +\infty$.

d)
$$\left|f(x,y)\right| \leqslant \frac{2\left\|(x,y)\right\|^3}{x^2+y^2} = 2\left\|(x,y)\right\|.$$

La limite cherchée est donc 0.

e) x^2+y^2-1 tend vers -1 et $\dfrac{\sin x}{x}$ vers 1.
La limite cherchée est donc -1.

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(e^{-\frac{1}{x}},x) = \dfrac{1}{e}\cdot$
Il n'y a donc pas de limite.

g)
$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin(y^2)}{y^2}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot$$

Chacun des deux termes de la somme tendant vers 0, la limite cherchée est 0.

2. On remarque que f est bien continue en tout point (x, y) avec $x \neq y$.
Soit (x_0, x_0) un point de la droite d'équation $y = x$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |\cos x - \cos x_0| \leqslant \varepsilon.$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq y$ tel que $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \eta$.
Le théorème des accroissements finis assure qu'il existe $z \in]x, y[$ tel que :

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos z.$$

Or $|x - x_0| \leqslant \eta$ et $|y - x_0| \leqslant \eta$ donc $|z - x_0| \leqslant \eta$ d'où :

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos x_0\right| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc :

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos x_0\right| \leqslant \varepsilon,$$

soit :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)\ x\neq y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos x_0.$$

En posant $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x, x) = \cos x$, on aura donc :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

car c'est alors évident lorsque $x = y$.

3. Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
  Si $(x_0, y_0) \in D_1$, D_1 étant ouvert, il existe une boule ouverte centrée en (x_0, y_0) incluse dans D_1, et dans cette boule, $f(x, y) = -\dfrac{1}{2}x^2$.
  La fonction f est donc continue en (x_0, y_0).
- Un raisonnement analogue montre que f est continue en tout point $(x_0\ y_0)$ de $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$.
- Soit (x_0, y_0) tel que $x_0^2 + y_0^2 = 1$ et $\varepsilon > 0$
  On a :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1\right) = -\frac{1}{2}x_0^2$$

  donc il existe $r_1 > 0$ tel que :

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant r_1 \Longrightarrow \left\|\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 + \frac{1}{2}x_0^2\right\| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \cap D_2 \ , \ \big\|(x,y)-(x_0,y_0)\big\| \leqslant r_1 \Longrightarrow \big\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\big\| \leqslant \varepsilon.$$

De même :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} -\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x_0^2,$$

donc il existe $r_2 > 0$ tel que :

$$\big\|(x,y)-(x_0,y_0)\big\| \leqslant r_2 \Longrightarrow \big\|-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_0^2\big\| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc, en posant $\overline{D_1} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \big| \ x^2+y^2 \leqslant 1\big\}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \cap \overline{D_1} \ , \ \big\|(x,y)-(x_0,y_0)\big\| \leqslant r_2 \Longrightarrow \big\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Finalement, pour $r_0 = \min(r_1, r_2) > 0$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \big\|(x,y)-(x_0,y_0)\big\| \leqslant r_0 \Longrightarrow \big\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\big\| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui montre la continuité de f en (x_0, y_0).

4. Supposons f dérivable en x_0, alors on peut écrire :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Alors :

$$f(x_0-k) = f(x_0) - kf'(x_0) - k\varepsilon(-k)$$

et :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k} = f'(x_0) + \frac{h\varepsilon(h)+k\varepsilon(-k)}{h+k}.$$

Or :

$$\left|\frac{h\varepsilon(h)-k\varepsilon(-k)}{h+k}\right| \leqslant \big|\varepsilon(h)\big| + \big|\varepsilon(-k)\big|$$

ce qui est bien un terme qui tend vers 0 lorsque (h,k) tend vers $(0,0)$.

Supposons que :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k} = \ell$$

alors l'application partielle $h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tend vers ℓ lorsque h tend vers 0^+, ce qui prouve que f est dérivable à droite en x_0 de nombre dérivé ℓ. En raisonnant avec la seconde application partielle en $(0,0)$, on montre que f est dérivable à gauche en x_0 de même nombre dérivé

5 La symétrie s de centre 0 est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Soit φ l'application définie sur le cercle C et à valeurs dans $\mathbb{R}$ definie par :

$$\forall (x,y) \in C\ ,\ \varphi(x,y) = f(x,y) - f \circ s(x,y).$$

Soit (x_0, y_0) un point de C. Si $\varphi\big((x_0,y_0)\big) = 0$ alors les points (x_0,y_0) et $s(x_0,y_0)$ conviennent. Sinon $\varphi(x_0,y_0)$ et $\varphi\big(s(x_0,y_0)\big)$ ont des signes opposés.
Soit g définie de $[0,2\pi[$ dans le cercle unité par :

$$\forall t \in [0.2\pi[\ ,\ g(t) = (\cos t. \sin t).$$

g est une application continue de $[0,2\pi[$ sur le cercle unité. De plus $\varphi \circ g$ est une application continue de $[0,2\pi[$ dans $\mathbb{R}$ qui prend une valeur positive et une négative. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc t_0 tel que :

$$\varphi(\cos t_0, \sin t_0) = 0.$$

Alors les points $(\cos t_0, \sin t_0)$ et $s(\cos t_0, \sin t_0)$ conviennent.

6. Il existe une suite (x_n) de points de A qui converge vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ est une suite de points de $f(A)$ qui converge vers $f(a)$ par continuité de f en a.

7. Soit $B(x_0, r)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. Cette boule se déduit de $B(0,r)$ par une translation qui est un homéomorphisme.
On peut donc se ramener au cas d'une boule centrée en 0; φ est bien une application continue (composée d'applications continues) de $\mathbb{R}^2$ dans $B(0,r)$.
On vérifie de plus qu'elle admet une application réciproque définie par :

$$\psi(x,y) = \frac{(x,y)}{r - \|(x,y)\|}$$

qui est également continue.

8. Soient x_0 et x deux points de $\mathbb{R}^2$ et a quelconque dans A :

$$d(x_0, A) \leqslant \|x_0 - a\| \leqslant \|x_0 - x\| + \|x - a\|$$

d'où :

$$\|x - a\| \geqslant d(x_0, A) - \|x_0 - x\|.$$

Cette relation étant vraie pour tout $a \in A$, on a :

$$d(x, A) \geqslant d(x_0, A) - \|x_0 - x\|$$

soit :

$$d(x_0) - d(x) \leqslant \|x - x_0\|.$$

De même, en échangeant x_0 et x, on obtient :

$$d(x) - d(x_0) \leqslant \|x - x_0\|$$

et finalement :

$$|d(x) - d(x_0)| \leqslant \|x - x_0\|$$

ce qui prouve que d est continue en x_0.
Si $d(x) = 0$ alors $\inf\limits_{a \in A} \|x - a\| = 0$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \exists x_n \in A \ : \ \|x - x_n\| \leqslant \frac{1}{n}\cdot$$

La suite (x_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers x donc x est adhérent à A.
Réciproquement, si x est adhérent à A alors il existe une suite (x_n) de points de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, puis :

$$d(x, A) \leqslant d(x, x_n)$$

d'où $d(x) = 0$.

9. Après étude des différents cas, on trouve les résultats suivants.
Notons :

$$D_1 = \left\{(x, y) \ | \ y \geqslant -x \text{ et } y \geqslant -\frac{x}{2}\right\}$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \ | \ x \leqslant 0 \text{ et } y \leqslant -x\right\}$$

$$D_3 = \left\{(x, y) \ | \ x \geqslant 0 \text{ et } y < -\frac{x}{2}\right\}.$$

- Si $(x, y) \in D_1$, alors $f(x, y) = x + y$.
- Si $(x, y) \in D_2$, alors $f(x, y) = 0$.
- Si $(x, y) \in D_3$, alors $f(x, y) = -\dfrac{x^2}{4y}\cdot$

On montre en étudiant les différents cas que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

10 Soient $f(x)$ et $f(y)$ deux points de $f(X)$, $(x, y) \in X^2$.
Soit φ à valeurs dans X définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0, 1] \quad \varphi(t) = tx + (1 - t)y.$$

La fonction $f \circ \varphi$ est définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et est continue sur $[0, 1]$. Elle vérifie donc le théorème des valeurs intermédiaires et prend toutes les valeurs entre $f \circ \varphi(0) = f(y)$ et $f \circ \varphi(1) = f(x)$.
Ceci montre que $[f(x), f(y)] \subset f(X)$, donc $f(X)$ est un intervalle.

11. **a)** On trouve que f admet des dérivées partielles en tout point (x_0, y_0) qui n'est pas sur l'une des droites d'équations $x = y$ et $x = -y$.
La fonction f n'admet pas de dérivées partielles en un point où $x_0 = y_0$ ou $x_0 = -y_0$, puisque :

$$f(x, y_0) = |y_0| \quad \text{pour } |x| \leqslant |y_0| \quad \text{et} \quad f(x, y_0) = |x| \quad \text{pour } |x| \geqslant |y_0|.$$

b) f admet une dérivée partielle suivant x en tout point (x_0, y_0) avec $x_0 \neq 0$.
f admet une dérivée partielle suivant y en tout point (x_0, y_0) tel que $y_0 \neq 0$.
f n'admet pas de dérivées partielles en un point où $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$, car la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

c) La première fonction partielle en (0.0) vaut :
$f_1(x) = \dfrac{\sin x^2}{|x|}$, si $x \neq 0$ et $f_1(0) = 0$.
On remarque qu'elle n'est pas dérivable en 0 donc f n'admet pas de dérivée partielle suivant x en (0.0).
Par symétrie, il en est de même pour la dérivée partielle suivant y.
D'après les théorèmes généraux f admet des dérivées partielles en tout point différent de $(0, 0)$.

12. **a)**

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x).$$

b)

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x).$$

c) En notant $h(x) = f(x, x)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = h'(x)\frac{\partial f}{\partial y}\big(y, h(x)\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(y, h(x))$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(y, h(x)\big).$$

d) Avec la même notation que précédemment :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, h(x)\big) + h'(x)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, h(x)\big) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)). \end{aligned}$$

13. Soit $u = (a, b)$ un vecteur non nul.

$$\frac{f(ha, hb) - f(0,0)}{h} = \frac{h^3 a^2 b}{h^4 a^4 + h^2 b^2} = \frac{h a^2 b}{h^2 a^4 + b^2}$$

qui admet 0 pour limite lorsque h tend vers 0.
Mais f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet :

$$\lim_{t \to 0} f(t, t^2) = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

14. On montre aisement que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (en $(0,0)$ utiliser l inégalité $|f(x,y)| \leqslant |x| + |y|$).
On montre que :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 1 \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}_-^* \,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -1.$$

La fonction f n'est donc pas C^1 puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ n' a pas de limite lorsque y tend vers 0.

15. La fonction est continue en (0.0) si et seulement si $\alpha > 1$.
En effet, si $\alpha > 1$, alors :

$$\left|f(x,y)\right| \leqslant \left\|(x,y)\right\|^{2\alpha - 2}$$

et donc :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Si $\alpha \leqslant 1$ alors pour $x > 0$, $f(x,x) = \dfrac{1}{2} x^{2\alpha - 2}$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.
De plus, si $\alpha > 1$, on montre aisément que f est continue en tout point différent de $(0,0)$ puisque $f(x,y) = \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2}$ lorsque $(x,y) \neq (0,0)$.
Finalement f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha > 1$
Supposons dans la suite $\alpha > 1$.
Les applications partielles en (0.0) étant nulles, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

En un point $(x, 0)$ avec $x \neq 0$, f étant nulle :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0.$$

De plus $\frac{1}{y}\big(f(x,y) - f(x,0)\big) = \frac{|y|^\alpha}{y}\frac{|x|^\alpha}{x^2+y^2}$ tend vers 0 pour $x \neq 0$ et y qui tend vers 0, donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0.$$

De même, on montre que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

En un point (x,y) avec $xy \neq 0$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varepsilon\frac{\alpha|x|^{\alpha-1}|y|^\alpha}{x^2+y^2} - 2\varepsilon\frac{|y|^\alpha|x|^{\alpha+1}}{(x^2+y^2)^2}$$

où $\varepsilon = 1$ si $x > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $x < 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varepsilon\frac{\alpha|y|^{\alpha-1}|x|^\alpha}{x^2+y^2} - 2\varepsilon\frac{|x|^\alpha|y|^{\alpha+1}}{(x^2+y^2)^2}$$

où $\varepsilon = 1$ si $y > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $y < 0$. On montre alors que les applications dérivées partielles sont continues en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > \frac{3}{2}$.

Si $\alpha > \frac{3}{2}$, alors ces applications sont également continues en tout point de $\mathbb{R}^2$.

La condition cherchée est donc $\alpha > \frac{3}{2}$.

16 La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2$.

On montre que f admet des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$ qui sont :

$$\forall (x,y) \neq (0,0)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\forall (x,y) \neq (0.0)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x - 0}$$

tend vers 1 lorsque x tend vers 0, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1

De même on montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut -1.

Ces deux dérivées partielles secondes étant distinctes, f n'est de classe C^2 dans aucun ouvert contenant l'origine.

17. **a)** Si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x)$$

alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(x,y) = \int_0^x h(t)\, dt + f(0,y) = H(x) + f(0,y)$$

où H est la primitive de h qui s'annule en 0.

Réciproquement si $y \mapsto g(y)$ est de classe C^1, la fonction $(x,y) \mapsto H(x) + g(y)$ est de classe C^1 et vérifie l'équation.

b) Si f vérifie l'équation, alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(x,y) = \int_0^x h(y)\, dt + f(0,y) = xh(y) + f(0,y)$$

Réciproquement, si $y \mapsto g(y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors $(x,y) \mapsto xh(y) + g(y)$ est de classe C^1 et vérifie l'équation.

c) En utilisant ce qui précède, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(y)$$

puis à l'aide du **b)** :

$$f(x,y) = xg(y) + h(x)$$

où g et h sont de classe C^2.

Réciproquement, tout fonction de cette forme est de classe C^2 et vérifie l'équation.

d) En utilisant ce qui précède, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g(y)$$

puis :

$$f(x,y) = G(y) + h(x)$$

où G et h sont de classe C^2.

18 Cherchons les solutions de classe C^1 sur $U_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ ou } x > 0\}$ alors F définie par $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe C^1 sur $U_p = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0 \text{ et } -\pi < \theta < \pi\}$.

a) L'équation est équivalente à :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0.$$

Les solutions sont donc de la forme $F(r,\theta) = \varphi(r)$, soit :

$$f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

où φ est de classe C^1.

b) L'équation devient :

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 1$$

dont les solutions sont :

$$F(r,\theta) = r + \varphi(\theta)$$

où φ est de classe C^1, soit :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi\left(2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right).$$

19. L'application φ définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk).$$

est de classe C^1 sur $[0,1]$. Le théorème des accroissements finis appliqué à φ entre 0 et 1 assure qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$. Or :

$$\varphi'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk),$$

ce qui montre le résultat.
Soit $f(x,y) = ye^x$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
Appliquons le résultat précédente entre les points $(0,0)$ et $(a,1)$.
Il existe donc θ tel que :

$$e^a = a\theta e^{\theta a} + e^{\theta a}$$

soit :

$$e^{a(1-\theta)} = a\theta + 1.$$

En remplaçant θ par $1-\theta$ on trouve le résultat cherché.

20. On a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}\ ,\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta\ ,\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\cdot$$

Puis :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}&\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)\cos\theta\\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\\ =&\left(\cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}\right)\cos\theta\\ &+\left(-\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right).\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}&\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)\sin\theta\\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\\ =&\left(\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}\right)\sin\theta\\ &+\left(\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\cos\theta}{r}\right).\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\cdot$$

21. Posons $u = \dfrac{y}{x}\cdot$

Alors :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}f'(u) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}f'(u)$$

puis :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y^2}{x^4}f''(u) + \frac{2y}{x^3}f'(u) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{x^2}f''(u).$$

L'équation devient :

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) f''(u) + 2\frac{y}{x}f'(u) = \frac{y}{x}$$

soit :

$$(u^2-1)f''(u) + 2uf'(u) = u.$$

Cette équation est équivalente à $\left[(u^2-1)f'\right]' = u$ soit :

$$f'(u) = \frac{u^2+2k}{2(u^2-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1+2k}{2(u^2-1)}.$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$f(u) = \frac{u}{2} - \lambda \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \mu.$$

Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ sont données par $f(u) = \dfrac{u}{2} + \mu$, soit $g(x,y) = \dfrac{y}{2x} + \mu$.

22. **a)** Soit $t > 0$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si l'on note $g(x,y) = f(tx,ty)$, alors :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty).$$

La relation $f(tx,ty) = t^r f(x,y)$, conduit donc à :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^{r-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

On fait de même avec la dérivée partielle suivant y.

b) Supposons f homogène de degré r.

En dérivant par rapport à t la relation $f(tx,ty) = t^r f(x,y)$, on obtient :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = rt^{r-1}f(tx,ty)$$

puis en prenant $t = 1$, on obtient la relation demandée appelée *relation d'Euler*.

Réciproquement, supposons que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y).$$

Soient $(x.y) \in \mathbb{R}^2$. L'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = f(tx.ty)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t > 0 \ , \ \varphi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \frac{r}{t}f(tx,ty) = \frac{r}{t}\varphi(t).$$

Donc la dérivée de l'application $t \mapsto t^{-r}\varphi(t)$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, celle-ci est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où :

$$\forall t > 0 \ , \ t^{-r}\varphi(t) = \varphi(1) = f(x,y).$$

Finalement, on a bien montré que f est homogène de degré r

c) En écrivant la relation d'Euler pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on obtient :

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (r-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

et :

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (r-1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Puis en appliquant la relation d'Euler à f on trouve la relation demandée

d) f est homogène de degré 1 donc :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

En dérivant par rapport à x :

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

En dérivant par rapport à y :

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

ce qui conduit au résultat.

23 **a)** Le seul point où les deux dérivées partielles sont nulles est $(0,0)$ qui n'est pas un extremum puisque f prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives au voisinage de 0.

b) Le seul point où les deux dérivées partielles sont nulles est $(0,0)$ et au voisinage de $(0,0)$:

$$x^2 + y^2 + \sin(x^2+y^2) = 2(x^2+y^2) + o(x^2+y^2)$$

donc $(0,0)$ est un minimum local. Il est même global puisque $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\sin t + t \geqslant 0$.

c) Le seul point où les deux dérivées partielles sont nulles est $(-1,2)$.
Posons $X = x+1$ et $Y = y-2$, alors :

$$f(x,y) = X^2 + 3Y^2 + 2XY - 3 = (X+Y)^2 + 2Y^2 - 3$$

ce qui montre que $(-1,2)$ est un minimum global.

d) Les points où les deux dérivées partielles sont nulles sont $\left(0, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$.

Posons $X = x$, $Y = y - \frac{\pi}{2} - n\pi$, alors :

$$f(x, y) = e^{(-1)^{n+1} X \sin Y} = 1 + (-1)^{n+1} X \sin Y + o(X \sin Y).$$

Au voisinage de $(0, 0)$, $(-1)^{n+1} X \sin Y$ est du signe de $(-1)^{n+1} XY$, donc f n'a pas d'extremum.

24 Un vecteur normal à l'ellipse au point (x_0, y_0) est $u = (2x_0, y_0)$ car la tangente a pour équation $2xx_0 + yy_0 = a^2$.
La dérivée de f dans la direction de u au point (x_0, y_0) est donc

$$D_u f(x_0, y_0) = 2x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{2x_0 y_0^2}{x_0^2} + \frac{2y_0^2}{x_0} = 0.$$

En un point d'intesection, les tangentes à l'ellipse et aux paraboles sont orthogonales.

Chapitre 22

1. **a)**

$$I = \int_1^a x e^x \, dx \int_1^b y e^y \, dy = (a-1)(b-1) e^{a+b}.$$

b)

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - 1 \right) dx = \frac{\pi - 2}{4}.$$

c)

$$I = \int_0^1 \left((y - e^y) \int_0^{1-y} x \, dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y - e^y)(1-y)^2 \, dy = \frac{61}{24} - e$$

d)

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x \frac{1}{x+y+1} \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\ln(1+2x) - \ln(1+x+x^2) \right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2x+1) \ln(2x+1) + x - x \ln(1+x+x^2) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \ln(1+x+x^2) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1) \right) \right]_0^1$$

$$\begin{aligned}I &= 1-\sqrt{3}\left(\arctan\sqrt{3}-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\ &= 1-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.\end{aligned}$$

e) $I=\displaystyle\int_0^3\left(e^x\int_1^2(x+y)e^y\,dy\right)dx=\int_0^3\left((e^2-e)x+e^2\right)e^x\,dx=3e^5-2e^4-e.$

f) On a nécessairement $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant 1$.
De plus :

$$\begin{cases}1-\sqrt{x}\leqslant\sqrt{y}\\ 1-\sqrt{1-x}\leqslant\sqrt{1-y}\end{cases}\iff\begin{cases}1-2\sqrt{x}+x\leqslant y\leqslant x-1+2\sqrt{1-x}\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$
$$\iff 1-2\sqrt{x}+x\leqslant y\leqslant x-1+2\sqrt{1-x}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1\left(x\int_{1-2\sqrt{x}+x}^{x-1+2\sqrt{1-x}}dy\right)dx\\ &= 2\int_0^1 x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}-1\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\end{aligned}$$

2. **a)** Soit :

$$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 0\leqslant x\leqslant a\ ,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$$

et :

$$D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqslant y\leqslant a\ ,\ y\leqslant x\leqslant a\}.$$

En faisant le changement de variables $u=y$, $v=x$ on obtient :

$$\iint_{D_1}f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D_2}f(u.v)\,du\,dv$$

donc :

$$I=2\iint_{D_1}(x-y)\,dx\,dy=2\int_0^a\left(\int_0^x(x-y)\,dy\right)dx=\frac{a^3}{3}\cdot$$

b) On fait le changement de variables $u=\dfrac{x}{a}$, $v=\dfrac{y}{b}$, alors :

$$\iint_D xy\,dx\,dy=(ab)^2\iint_{D'}uv\,du\,dv$$

où

$$D'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqslant x\ ,\ 0\leqslant y\ ,\ x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

En passant en coordonnées polaires, on trouve :

$$\begin{aligned} I &= (ab)^2 \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\theta \sin\theta \, dr \, d\theta \\ &= (ab)^2 \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \\ &= \frac{a^2b^2}{8}. \end{aligned}$$

c) En passant en coordonnées polaires, le domaine d'intégration devient :

$$\Delta = \left\{ (r,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta \ , \ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Delta r \sin 2\theta \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \left(\int_0^{2\sin\theta} r \, dr \right) d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta \\ &= 1. \end{aligned}$$

d) On pose $u = x + y$ et $v = x - y$, alors :

$$I = \iint_{D'} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{v}{u}\right) du \, dv$$

où :

$$D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant u \leqslant 1 \ , \ -u \leqslant v \leqslant u\}.$$

Donc :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-u}^{u} \exp\left(\frac{v}{u}\right) dv \right) du = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(e - \frac{1}{e}\right) u \, du = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

e) Soit :

$$D_1 = D \cap \{(x,y) \ : \ y \geqslant -x\}$$

À l'aide du changement de variable $u = -y$, $v = -x$, on montre que :

$$\begin{aligned} \iint_D |x+y| \, dx \, dy &= 2 \iint_{D_1} |x+y| \, dx \, dy \\ &= 2 \int_{-1}^{1} \left(\int_{-x}^{1} (x+y) \, dy \right) dx \\ &= 2 \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

3. **a)** En passant en coordonées polaires, on trouve :

$$\begin{aligned} I(X) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^X r\epsilon^{-r^2}\,dr\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}(1-e^{-X^2}). \end{aligned}$$

b) La fonction étant positive sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$I(X) \leqslant J(X) \leqslant I(\sqrt{2}X).$$

c)

$$J(X) = \left(\int_0^X e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

Donc :

$$I(X)^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_0^X e^{-x^2}\,dx \leqslant I(\sqrt{2}X)^{\frac{1}{2}}.$$

Les deux termes encadrant la fonction tendent vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'où :

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.

$$2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_{1-\frac{y^2}{3}}^{3-y^2} dx\right)dy = 4\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{y^2}{3}\right)dy = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

5.

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_a^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(\cos^2\theta + 2\cos\theta)\,d\theta \\ &= a^2\left(2+\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

6.

$$A = 2\int_0^2\left(\int_0^{x\sqrt{2-x}} dy\right)dx = 2\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx.$$

Posons $u = \sqrt{2-x}$:

$$I = 4\int_0^{\sqrt{2}}(2u^2-u^4)\,du = \frac{32\sqrt{2}}{15}.$$

7
$$I = \int_0^a xg(x)\,dx$$

où :

$$g(x) = \int_0^b y\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y)\,dy = \int_0^b y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right)(x,y)\,dy.$$

En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} g(x) &= b\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,b) - \int_0^b \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y)\,dy \\ &= b\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,b) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0). \end{aligned}$$

Puis :

$$\int_0^a xg(x)\,dx = b\int_0^a x\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,b)\,dx - \int_0^a x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,b)\,dx + \int_0^a x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0)\,dx$$

Or, à l'aide d'intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^a x\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,b)\,dx &= a\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,b) \\ \int_0^a x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,b)\,dx &= a\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - f(a,b) + f(0,b) \\ \int_0^a x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0)\,dx &= a\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) - f(a,0) + f(0,0). \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I = ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) &- b\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(0,b) \\ &- a\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + f(a,b) - f(0,b) \\ &+ a\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) - f(a,0) + f(0,0). \end{aligned}$$

8. Notons :

$$D_1 = \left\{(x,y) \mid 1 \leqslant x < \sqrt{b}\ ,\ \sqrt{x} \leqslant y \leqslant x\right\}$$

et :

$$D_2 = \left\{(x,y) \mid \sqrt{b} \leqslant x \leqslant b\ ,\ \sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{b}\right\}$$

On remarque que $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ et :

$$D = D_1 \cup D_2 = \left\{(x,y) \mid 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{b}\ ,\ y \leqslant x \leqslant y^2\right\}.$$

Donc :

$$I = \iint_D \cos\frac{\pi x}{2y}\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt{b}} \left(\int_y^{y^2} \cos\frac{\pi x}{2y}\,dx\right) dy$$

$$= \int_1^{\sqrt{b}} \left(\frac{2}{\pi} y \sin\frac{\pi y}{2} - \frac{2}{\pi} y\right) dy$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\sqrt{b}\cos\left(\frac{\pi\sqrt{b}}{2}\right) + \frac{8}{\pi^3}\sin\left(\frac{\pi\sqrt{b}}{2}\right) - \frac{8}{\pi^3} - \frac{1}{\pi}(b-1).$$

9. **a)** $I = \int_0^1 x^a \left(\int_0^1 y^b \left(\int_0^{xy} z^c\,dz\right) dy\right) dx$

$$= \frac{1}{1+c}\int_0^1 x^{a+c+1}\,dx \int_0^1 y^{b+c+1}\,dy = \frac{1}{(c+1)(b+c+2)(a+c+2)}.$$

b) $I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dz\right) dy\right) dx$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8}\right) dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2(1+x)}\right) dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.$$

c) $I = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{1-x+y}^{5} dz\right) dy\right) dx$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4+x-y)\,dy\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(4\sqrt{4-x^2} + x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}x^2 - 2\right) dx$$

$$= \left[2x\sqrt{4-x^2} + 8\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} - 2x + \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 4\pi.$$

10. **a)** Le changement de variable $u = -x$, $v = -y$, $w = z$ montre que $I = -I$ d'où $I = 0$.

b) En passant en coordonnées cylindriques :

$$I = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z^2\,dz$$

$$= \frac{\pi R^2 h^3}{3}.$$

c) Faisons le changement de variable affine $x = au,\ y = bv,\ z = cw$

$$I = abc \iiint_S (u^2 + v^2 + w^2)\, du\, dv\, dw$$

où :

$$S = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \ :\ u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1\}.$$

Puis on passe en coordonnées sphériques :

$$I = abc \int_0^1 r^4\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{5} abc.$$

d) On passe en coordonnées cylindriques :

$$I = \iiint_D r^3 |\cos 2\theta|\, dr\, d\theta\, dz$$

avec :

$$\Delta = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant r \leqslant z \leqslant 1\}$$

d'où :

$$I = \int_0^{2\pi} |\cos 2\theta|\, d\theta \int_0^1 \left(\int_0^z r^3\, dr\right) dz.$$

Or :

$$\int_0^{2\pi} |\cos 2\theta| d\theta = 4$$

et :

$$\int_0^1 \left(\int_0^z r^3\, dr\right) dz = \int_0^1 \frac{z^4}{4}\, dz = \frac{1}{20}\cdot$$

Finalement $I = \dfrac{1}{5}\cdot$

11. À l'aide du changement de variables affine $x = au \quad y = bv \quad z = cw$, on trouve :

$$V = abc \iiint_S du\, dv\, dw = \frac{4}{3}\pi abc$$

S étant la boule de rayon 1 et de centre O.

12. Soient σ la densité volumique, M la masse du solide et (x_G, y_G, z_G) les coordonnés du centre d'inertie.
Par symétrie $y_G = z_G = 0$.
De plus :

$$Mx_G = \iiint_S \sigma x dx\, dy\, dz.$$

En passant en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} Mx_G &= \sigma \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^R r^3\, dr \int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta \\ &= \frac{\sigma R^4 \pi \sin\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Calculons σ en fonction de M :

$$M = \sigma \iiint_S dx\, dy\, dz = \sigma \int_0^R r^2\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi = \frac{4\alpha R^3}{3}\sigma.$$

Finalement :

$$x_G = \frac{3\pi R \sin\alpha}{16\alpha}.$$

Chapitre 24

1. On a $n = 23q + q$ avec $0 \leqslant q < 23$. Il y a donc 23 nombres qui conviennent.

2. Entre 1 et n, il y a $E\left(\frac{n}{2}\right)$ nombres pairs, $E\left(\frac{n}{4}\right)$ multiples de 4, $E\left(\frac{n}{8}\right)$ multiples de 8 ...
Le nombre cherché est donc :

$$500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994.$$

3. Supposons que l'équation admette une solution rationnelle $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $q > 0$.
Dans ce cas, on aurait :

$$p^3 + p^2q + 2pq^2 + q^3 = 0$$

Puisque $q \mid p^2q + 2pq^2 + q^3$, on a $q \mid p^3$ et donc $q = 1$. Or l'équation ne peut admettre de solution entière.
En effet, quelle que soit la parité de x, $x^3 + x^2 + 2x + 1$ est un nombre impair donc non nul.

4. On a $2n + 1 - 2n = 1$ donc les deux nombres sont premiers entre eux et leur ppcm est $(2n + 1)n$.

5. Soit $n \geqslant 2$. On considère l'intervalle $[n! + 2, n! + n]$. Il est de longueur $n - 1$ et pour tout i entre 2 et n, $n! + i$ n'est pas premier car divisible par i.

6. **a)** On a :

$$p \,|\, k! \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p \wedge k! = 1.$$

D après le lemme de Gauss, on en déduit $p \,|\, \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.

b) On developpe $(a+b)^p$ par la formule du binôme puis l on utilise la propriété précédente.

c) On montre par récurrence sur m que si a_1, $a_2, \ldots a_m$ sont m entiers relatifs alors :

$$p \,|\, (a_1 + a_2 + \cdots a_m)^p - a_1^p - a_2^p - \cdots - a_m^p.$$

Puis l'on applique ce résultat avec $a_1 = a_2 = \ldots a_m = 1$, ce qui donne $p \,|\, m^p - m$.

d) p étant premier avec m, on a $p \,|\, m^{p-1} - 1$.

7. **a)** $n \,|\, a - r_1$ et $n \,|\, b - r_2$ donc $n \,|\, a + b - (r_1 + r_2)$. Soit r le reste de la division de $r_1 + r_2$ par n. On a $n \,|r_1 + r_2 - r$, donc $n \,|a + b - r$ et $0 \leqslant r < n$, ce qui montre le résultat.
De même $ab - r_1 r_2 = (a - r_1)b + r_1(b - r_2)$, donc $n \,|ab - r_1 r_2$.
De plus si r est le reste de $r_1 r_2$ dans la division euclidienne par n, on a $n \,|\, r_1 r_2 - r$, donc $n \,|\, ab - r$, ce qui montre le résultat annoncé.

b) Le reste de la division de 10^k par 9 est 1.
Si le nombre a est écrit en base 10 sous la forme $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$, alors le reste dans sa division euclidienne par n est le reste de la division euclidienne de la somme $\alpha_r + \alpha_{r-1} + \cdots + \alpha_0$.
Réaliser la preuve par 9 consiste donc à vérifier que la propriéte précédente est vraie pour $n = 9$.
Exemple :

$$r_{456} = r_{4+5+6} = 6$$

$$r_{236} = r_{2+3+6} = 2$$

$$r_{6\times 2} = 3$$

$$456 \times 236 = 107616$$

$$r_{107616} = r_{1+0+7+6+1+6} = 3.$$

c) Le reste dans la division euclidienne de 10^k par 11 est 1 si k est pair et -1 si k est impair.
Le reste de la division euclidienne de $\alpha_r\alpha_{r-1}\ldots\alpha_0$ est donc le reste dans la division de $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + (-1)^r\alpha_r$.
Réaliser la preuve par 11 consiste donc à vérifier que la propriété précedente est vraie pour $n = 11$.
Exemple :

$$r_{456} = r_{6-5+4} = 5$$

$$r_{236} = r_{6-3+2} = 5$$

$$r_{5\times 5} = r_{5-2} = 3$$

$$456 \times 236 = 107616$$

$$r_{49072896} = r_{6-1+6-7+0-1} = 3.$$

8. On remarque que le reste dans la division euclidienne de 10^{3p} par 1001 est 1 si p est pair, 1000 sinon.
Donc $10^{3p} - 1$ est un multiple de 1001 si p est pair et $10^{3p} + 1$ est un multiple de 1001 si p est impair. De plus :

$$\overline{a_pa_{p-1}\ldots a_1a_0} = \overline{a_2a_1a_0} + \overline{a_5a_4a_3} \times 10^3 + \overline{a_8a_7a_6} \times 10^6 + \cdots$$

On en déduit que :

$$\overline{a_pa_{p-1}\ldots a_1a_0} - \overline{a_2a_1a_0} + \overline{a_5a_4a_3} - \overline{a_8a_7a_6} + \cdots$$

est un multiple de 1001 donc de 13.
Pour étudier la divisibilité de $\overline{a_pa_{p-1}\ldots a_1a_0}$ par 13, il suffit donc de regarder celle de $\overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} + \cdots$
Le même raisonnement conduit à un critère de divisibilité par 7.
Exemple : 1117541763 est divisible par 13 si et seulement si $763 - 541 + 117 - 1 = 338$ l'est. Or $338 = 26 \times 13$.
Par contre 338 n'étant pas divisible par 7, le nombre 1117541763 n est pas un multiple de 7.

9 Effectuons la division euclidienne de a par b :

$$a = bq + r\ ,\ 0 \leqslant r < b.$$

Alors $E\left(\dfrac{a}{b}\right) = q$.
De plus $E\left(\dfrac{a+x}{b}\right) = E\left(\dfrac{a}{b}\right)$ si et seulement si :

$$0 \leqslant \frac{r+x}{b} < 1$$

soit :

$$-r \leqslant x < b - r.$$

De même $E\left(\dfrac{a+x}{b}\right) = E\left(\dfrac{a}{b}\right) + 1$ si et seulement si $b - r \leqslant x < 2b - r$.

Alors :

$$E\left(\frac{a}{b}\right) + E\left(\frac{a+1}{b}\right) + \cdots + E\left(\frac{a+b-1}{b}\right) = E\left(\frac{a}{b}\right) + \cdots + E\left(\frac{a+b-r-1}{b}\right)$$
$$+ E\left(\frac{a+b-r}{b}\right) + \cdots + E\left(\frac{a+b-1}{b}\right)$$
$$= (b-r)q + r(q+1) = bq + r = a$$

10. **a)** Les diviseurs positifs de n sont les nombres de la forme :

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$$

avec $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.
Le nombre de diviseurs positifs est alors $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_r + 1)$.

b) Si $r = 1$, alors :

$$S(n) = \sum_{i=0}^{\alpha_1} p_1^i = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}.$$

Montrons par récurrence sur r que la somme des diviseurs est :

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_{i+1}} - 1}{p_i - 1}.$$

Supposons le résultat vrai pour $r - 1$.
Soient $d_1, \ldots, d_N$ les diviseurs de $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_{r-1}^{\beta_{r-1}}$.
Les diviseurs de n sont alors :

$$d_i p_r^j \ , \ 1 \leqslant i \leqslant N \ , \ 0 \leqslant j \leqslant \alpha_r.$$

La somme cherchée est donc :

$$S(n) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{\alpha_r} d_i p_r^j = \sum_{i=1}^{N} d_i \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

ce qui montre le résultat à l'ordre r

c) On décompose m et n en produit de facteurs premiers. Le résultat précédent permet de montrer facilement le résultat.

11 Le produit des diviseurs s'écrit :

$$\prod_{0\leqslant i\leqslant p\,,\,0\leqslant j\leqslant q} 3^i5^j = 3^{\frac{p(q+1)(p+1)}{2}}5^{\frac{q(q+1)(p+1)}{2}}$$

Or $45^{42} = 3^{84}5^{42}$.
Donc $\dfrac{p(q+1)(p+1)}{2} = 84$ et $\dfrac{q(q+1)(p+1)}{2} = 42$ d'où $p = 2q$ puis $q = 3$ et $p = 6$.

12. L'application $k \mapsto r_k$ de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$ est non injective donc il existe k_1 et k_2 distincts tels que $r_{k_1} = r_{k_2} = r$. Posons $T = k_2 - k_1$ et montrons que la suite r_k est T-périodique.
$n \,|\, a^{k_1} - r$ et $n \,|\, a^{k_1+T} - r = (a^{k_1} - r)a^T - r + ra^T$ donc $n \,|\, r(a^T - 1)$.
Or $r \neq 0$ puisque n est premier avec a^{k_1} donc n est premier avec r et $n \,|\, a^T - 1$, ce qui montre que le reste de la division de a^T par n est 1.
On a :

$$n \,|\, a^k - r_k \text{ et } a^{T+k} - r_k = (a^T - 1)a^k + a^k - r_k$$

donc $n \,|\, a^{T+k} - r_k$, ce qui montre que le reste de la division par n de a^{T+k} est r_k.
On applique le résultat précédent : $r_0 = 1, r_1 = 3, r_2 = 4, r_3 = 2, r_4 = 1$, la suite est donc 4-périodique.
Le reste de la division euclidienne de 2003 par 4 est 3 donc le reste cherché est 2.
En utilisant ce qui précède, on trouve que le reste de la division de 3^{126} par 13 est 1 et le reste de la division de 5^{126} par 13 est 12, ce qui montre le résultat.

13. Soit d un diviseur de n alors $n = dp$ et :

$$2^{pd} - 1 = (2^d)^p - 1 = (2^d - 1)(1 + 2^d + 2^{2d} + \cdots + 2^{(p-1)d}).$$

$2^d - 1$ divise $2^n - 1$ d'où $d = 1$ ou $d = n$, ce qui montre que n est premier.

14. Supposons que m ne soit pas de la forme cherchée, alors il existe deux entiers p et q avec q impair distinct de 1 tel que $m = pq$.
Alors :

$$2^m + 1 = (2^p)^q + 1 = (2^p + 1)(2^{p(q-1)} - 2^{p(q-2)} + \cdots + 1)$$

et $2^p + 1$ divise $2^m + 1$ donc $p = m$ ce qui est impossible.

15. Soit d le PGCD de F_n et de F_m. Supposons $m > n$.
On a :

$$F_m - 2 = 2^{2^m} - 1 = (2^{2^n})^{2^{m-n}} - 1 = (-2^{2^n})^{2^{m-n}} - 1$$
$$= -(2^{2^n} + 1)\left(\sum_{i=0}^{m-n-1} (-2^{2^n})^i\right)$$
$$= -F_n\left(\sum_{i=0}^{m-n-1} (-2^{2^n})^i\right)$$

Supposons que d divise F_m et F_n, donc également 2.
F_n étant impair on a $d = 1$, ce qui montre que F_n et F_m sont premiers entre eux.

Remarque : on peut aussi utiliser l'égalité :

$$F_{k+1} = 2 + F_0F_1\ldots F_k$$

(immédiate par récurrence) et remarquer que F_n et F_m sont impairs.

16. **a)** $2^p - 1$ étant premier, le nombre $2^{p-1}(2^p-1)$ est directement décompose en produit de nombres premiers.
La somme de ses diviseurs est alors :

$$S\left(2^{p-1}(2^p-1)\right) = \frac{2^p-1}{2-1}2^p = 2^p(2^p-1) = 2n.$$

b) Soit n un nombre parfait pair, on peut écrire $n = 2^a b$ où b est un nombre impair et $a \geqslant 1$.
Alors :

$$S(n) = (2^{a+1}-1)S(b) = 2n = 2^{a+1}b.$$

Or $2^{a+1}-1$ et 2^{a+1} sont premiers entre eux donc $2^{a+1}-1$ divise b.
On a alors :

$$S(b) = b + \frac{b}{2^{a+1}-1}.$$

Les deux nombres b et $\dfrac{b}{2^{a+1}-1}$ sont deux diviseurs de b dont la somme est $S(b)$, ce sont donc les seuls. On en déduit que b est premier et que $b = 2^{a+1}-1$.

17. **a)** Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers de la forme $4k+3$ et considérons :

$$n = 3 \times 7 \times 11 \times 19\ldots$$

le produit de ces nombres.

Le nombre $m = 4n - 1$ ne possède que des diviseurs premiers de la forme $4k + 1$ (en effet aucun nombre premier de la forme $4k + 3$ ne divise m).
Donc :

$$m = p_1 p_2 \dots p_r$$

où tous les p_i ont pour reste 1 dans la division euclidienne par 4.
Le reste de la division euclidienne de m par 4 serait donc 1 ce qui est impossible.

b) On procède de manière analogue. On suppose qu'il y a un nombre fini de nombres premiers de la forme $6k + 5$.
Soit :

$$n = 5 \times 11 \times 17 \dots$$

le produit des ces nombres premiers.
Le nombre $6n - 1$ ne possède que des diviseurs premiers de la forme $6k + 1$ dont le reste dans la division euclidienne par 6 est 1. En effet, hormis 2 et 3 (qui ne divisent pas n) tous les nombres premiers sont de la forme $6k \pm 1$. Ceci entre en contradiction avec le fait que $6n - 1$ a pour reste 5 dans la division euclidiennne par 6.

18. **a)** Soit $a = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Un diviseur premier d de a est nécessairement strictement supérieur à p_n, donc :

$$p_{n+1} \leqslant d \leqslant a.$$

b) Montrons par récurrence sur n que $p_n \leqslant 2^{2^n}$.
Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons que le résultat soit vrai jusqu'à l'ordre n, alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} \leqslant p_1 p_2 \dots p_n + 1 &= 2^{2^1} 2^{2^2} \dots 2^{2^n} + 1 \\ &= 2^{2+4+\dots+2^n} + 1 \\ &= 2^{2^{n+1}-2} + 1 < 2^{2^{n+1}} + 1. \end{aligned}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ avec $e^{e^{n-1}} < x \leqslant e^{e^n}$
On vérifie de plus que pour $n \geqslant 3$, $e^{e^{n-1}} \geqslant 2^{2^n}$ Alors si $x > e^{e^2}$:

$$\pi(x) \geqslant \pi\left(e^{e^{n-1}}\right) \geqslant \pi\left(2^{2^n}\right) \geqslant n \geqslant \ln(\ln x).$$

On a de plus clairement $x \geqslant \pi(x)$.

Remarque : Un théorème célèbre dit que $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on montre par récurrence que si p est premier $d(p^n) = np^{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.

On montre par récurrence sur r que :

$$d\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{p_i}\right) n$$

Réciproquement, on montre que la fonction d ainsi définie vérifie les conditions données.

D'autre part $d(n) = n$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{p_i} = 1$. Or si $\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{p_i} = 1$ alors :

$$\frac{\alpha_1}{p_1} = 1 - \sum_{i=2}^{r} \frac{\alpha_i}{p_i}$$

et :

$$\alpha_1 \prod_{j=2}^{r} p_j = -p_1 k \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

donc :

$$p_1 \mid \alpha_1 \prod_{j=2}^{r} p_j$$

et par le lemme de Gauss

$$p_1 \mid \alpha_1.$$

Dans ce cas on a nécessairement :

$$\alpha_1 = p_1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \{2.\dots.r\} \ , \ \alpha_j = 0.$$

Finalement $n = p^p$ où p est un nombre premier.
Réciproquement, tout nombre de cette forme est bien solution.

20 **a)** Notons $D = a \wedge b$ et $M = a \vee b$.
On a $a = Da'$ et $b = Db'$ (avec a' et b' premiers entre eux) d'où :

$$a + b = D(a' + b').$$

De plus $DM = ab$, d'où $M = Da'b'$.
Pour montrer que D est le PGCD de $a + b$ et de M, il suffit de montrer que $a'b'$ et $a' + b'$ sont premiers entre eux.
a' est premier avec $a' + b'$, en effet un diviseur commun de a' et de $a' + b'$ est un diviseur commun de a' et de b'.
De même b' est premier avec $a' + b'$.
On conclut que $a'b'$ est premier avec $a' + b'$.

b) $D = a \wedge b = (a+b) \wedge M = 144 \wedge 420 = 12$ donc $a' + b' = 12$ et $a'b' = 35$. Les entiers a' et b' sont donc solutions de $X^2 - 12X + 35 = 0$, soit $\{a', b'\} = \{5, 7\}$, ce qui donne $\{a, b\} = \{60.84\}$.

21. Ecrivons les décompositions en facteurs premiers de x et de y :

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \text{ et } y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}.$$

avec $0 \leqslant \alpha_i$ et $0 \leqslant \beta_i$. La relation $x^y = y^x$ donne :

$$\forall i \in \{1, 2 \dots, r\}\ ,\ \alpha_i y = \beta_i x.$$

Si l'on suppose $x \leqslant y$, alors on a :

$$\forall i \in \{1, 2 \dots, r\}\ ,\ \alpha_i x \leqslant \beta_i x$$

donc $x \mid y$.
Soit m défini par $y = mx$, alors x est solution de l'équation :

$$x^{m-1} = m.$$

Recherchons les solutions de cette équation.
Remarquons que si $x \geqslant 2$ et $m > 2$, alors $x^{m-1} \geqslant 2^{m-1} > m$.
Si $x \geqslant 2$ est solution alors $m \leqslant 2$, on trouve pour solutions $x = 2$ et $m = 2$ $x \geqslant 2$ et $m = 1$.
Si $x < 2$, alors $m = 1$.
Finalement les solutions sont $(x, y) = (2.4)$ ou $(x, y) = (4.2)$ ou $x = y$.

Chapitre 25

1. Notons n le degré de P.
Si $n \leqslant 0$ alors P est un polynôme constant et $P(X+1) - P(X)$ est nul donc de degré $-\infty$.

Sinon, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$\deg\big(P(X+1) - P(X)\big) \leqslant \max\big[\deg\big(P(X+1), \deg(P(X))\big] = \deg P.$$

Or le coefficient du monôme de degré n est nul et le coefficient du monôme de degre $n-1$ est $na_n + a_{n-1} - a_{n-1} = na_n \neq 0$, ce qui prouve que $P(X+1) - P(X)$ est exactement de degré $n-1$.

2 On montre par recurrence sur n que P s'écrit :

$$P = \frac{(X+1)(X+2)\dots(X+n)}{n!}.$$

3. Si P vérifie la condition, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ .\ P(x) - x = 0$$

donc $P(X) = X$ puisque le polynôme $P(X) - X$ admet une infinité de racines. Or le polynôme X n'est pas solution du problème.

4. Le reste est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 donc de la forme $R(X) = aX + b$.
On a donc :

$$(\cos\theta + X\sin\theta)^n = (X^2+1)Q(X) + R(X).$$

En prenant les valeurs en i et en $-i$:

$$ai + b = e^{in\theta} \text{ et } -ai + b = e^{-in\theta}$$

d'où :

$$a = \sin n\theta \quad \text{et} \quad b = \cos n\theta.$$

5. Le polynôme :

$$(X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2}) = X^2 - 2X - 1$$

possède $1 + \sqrt{2}$ comme racine.
Le reste de la division euclidienne de $P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$ par $X^2 - 2X - 1$ est $X - 1$.
La valeur de P en $1 + \sqrt{2}$ est donc $\sqrt{2}$.

6. Soit P tel que :

$$\forall x \in \mathbb{K}\ ,\ P(x+T) = P(x)$$

alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ P(nT) = P(0).$$

Le polynôme $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines donc est nul.
P est donc constant.

7. Le polynôme $X^2 - X + 1$ admet deux racines distinctes $-j$ et $-j^2$ dans $\mathbb{C}$.
Il suffit donc de montrer que $-j$ et $-j^2$ sont racines de $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$
Or si α est l'une des racines de $X^2 - X + 1$

$$(\alpha - 1)^{n+2} + \alpha^{2n+1} = \alpha^{2n+4} + \alpha^{2n+1} = \alpha^{2n+1}(\alpha^3 + 1) = 0.$$

8. Puisque la somme des quatre racines vaut 0, le polynôme s'écrit sous la forme :

$$P(X) = (X^2 + 2X + a)(X^2 - 2X + b)$$

Par identification, on trouve $a = -1$, $b = 5$.
Il reste ensuite deux équations du second degré à résoudre.
On trouve les racines $-1 + \sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2}$, $1 + 2i$ et $1 - 2i$.

9. On a :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{\sigma_3}{\sigma_4} = -\frac{q}{r}$$

et :

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \frac{\sigma_3^2 - 2\sigma_4\sigma_2}{\sigma_4^2} = \frac{q^2 - 2rp}{r^2}.$$

10 On écrit la formule de Taylor en 2 :

$$P(X) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(X-2) + \frac{P''(2)}{2!}(X-2)^2 = 6 + (X-2) + 2(X-2)^2.$$

11. $X^{2n} + X^n + 1$ est divisible par $1 + X + X^2$ si et seulement si $j^{2n} + j^n + 1 = 0$ et $(j^2)^{2n} + (j^2)^n + 1 = 0$, ce qui est le cas si et seulement si $n \equiv 1\ [3]$ ou $n \equiv 2\ [3]$.

12. Une condition nécessaire et suffisante est $P(1) = P'(1) = 0$, c'est-à-dire :

$$a + b + 1 = 0 \quad \text{et} \quad (n+1)a + nb = 0$$

soit $a = n$ et $b = -n - 1$.

13. Le reste est du premier degré : $R(X) = aX + b$.
En prenant la valeur en -1, on obtient :

$$(-1)^n + n(-1)^{n-1} + 2 = -a + b.$$

En dérivant, puis en prenant la valeur en -1 :

$$n(-1)^{n-1} + n(n-1)(-1)^{n-2} - 2 = a$$

d'où les valeurs de a et de b.

14 À l'aide de l'algorithme d'Euclide, on trouve $X^2 + 1$.

15. **a)** $$X^4 + X^2 + 1 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$$

b) $$\begin{aligned} X^8 + X^4 + 1 &= (X^4 - X^2 + 1)(X^4 + X^2 + 1) \\ &= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1). \end{aligned}$$

c) $X^6 + 1 = (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1) = (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1).$

16. On a :

$$Q'(X) = (X-a)P''(X) - P'(X) + P'(a)$$

et :

$$Q''(X) = (X-a)P^{(3)}(X)$$
$$Q^{(3)}(X) = P^{(3)}(X) + (X-a)P^{(4)}(X).$$

a est racine de multiplicité exactement 3 de Q si et seulement si $P^{(3)}(a) \neq 0$.

17. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geqslant 1$ alors :

$$|z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1| \leqslant n|z|^n$$

et il ne peut y avoir égalité que si $1, z, z^2, , \ldots, z^{n-1}$ sont positivement proportionnels, ce qui conduit à $z = 1$.
Après calcul :

$$Q(X) = (X-1)P(X) = nX^{n+1} - (1+n)X^n + 1$$

et :

$$Q'(X) = n(n+1)X^{n-1}(X-1).$$

Q n'admet donc qu'une racine multiple : 1 qui est racine double.
Toutes les racines de P sont donc simples.

18. On écrit que :

$$P[P(X)] - X = P\big[P(X)\big] - P(X) + P(X) - X$$

Et si :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$$

alors :

$$P\big[P(X)\big] - P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k\big(P(X)^k - X^k\big)$$

or :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}\ ,\ P(X) - X \,\big|\, P(X)^k - X^k.$$

19. Il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$B(P(X)) = A(P(X))T(X).$$
La division euclidienne de B par A s'écrit :
$$B = AQ + R$$
d'où :
$$A(P(X))T(X) = B\big(P(X)\big) = A\big(P(X)\big)Q\big(P(X)\big) + R\big(P(X)\big).$$
Comme $\deg R\big(P(X)\big) < \deg A\big(P(X)\big)$, l'unicité de la division euclidienne nous donne $R\big(P(X)\big) = 0$ (et $T(X) = Q\big(P(X)\big)$), donc $R = 0$ ce qui prouve que B est divisible par A.

20. Notons $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$.
On a :
$$X^n - 1 = (X^p - 1)X^{n-p} + X^{n-p} - 1$$
donc :
$$Q_n(X) = X^{n-p} + Q_{n-p}(X) \ \text{ et } \ R_n(X) = R_{n-p}(X).$$
Faisons la division euclidienne de n par $p : n = pq + r$ avec $0 \leqslant r < p$.
Alors :
$$Q_n(X) = X^{n-p} + Q_{n-p}(X) = X^{n-p} + X^{n-2p} + \cdots + X^r + Q_r(X)$$
et :
$$R_n(X) = R_{n-p}(X) = \cdots = R_r(X).$$
Or $Q_r(X) = 0$ et $R_r(X) = X^r - 1$. Finalement le quotient cherché est :
$$X^{n-p} + X^{n-2p} + \cdots + X^r$$
et le reste :
$$X^r - 1.$$
$X^n - 1$ est donc divisible par $X^p - 1$ si et seulement si n est divisible par p.

21. Montrons que pour tout k entre 0 et n, $X^p - 1$ divise $X^k - X^{r_k}$:
si $k = pq + r_k$, alors :
$$X^k - X^{r_k} = X^{r_k}(X^{pq} - 1).$$
Or $X^p - 1$ divise $X^{pq} - 1$, donc divise $X^k - X^{r_k}$.
On montre alors facilement que $X^p - 1$ divise $P - R$, ce qui prouve le résultat puisque $\deg R < p$.

22. Supposons $n \geqslant p$.
Utilisons les résultats de l'exercice précédent.
D'après l'algorithme d'Euclide, le PGCD de $X^n - 1$ et de $X^p - 1$ est le PGCD de $X^p - 1$ et $X^r - 1$ où r est le reste de la division euclidienne de n par p.
En itérant, on obtient :

$$(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = (X^{n \wedge p} - 1) \wedge (0) = X^{n \wedge p} - 1.$$

23. Notons x_1, x_2 et x_3 les trois racines de P dans $\mathbb{C}$.
Supposons que :

$$x_1 = x_2 + x_3$$

alors :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2x_1 = -p$$

et $\dfrac{-p}{2}$ est racine du polynôme.
Montrons que cette condition est suffisante.
Supposons que l'une des racines soit égale à $\dfrac{-p}{2}$ alors, puisque :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p = 2x_1$$

on a $x_2 + x_3 = x_1$, ce qui prouve que l'une des racines est égale à la somme des deux autres.
Une condition nécessaire et suffisante est donc $P\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$, c'est-à-dire :

$$p^3 - 4pq + 8r = 0.$$

24 On cherche à calculer l'expression :

$$S = a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b$$

(qui est symétrique en a, b et c) en fonction des fonctions symétriques des racines.

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ac) &= S + a^2bc + b^2ac + c^2ab \\ &= S + abc(a + b + c) \\ &= S + \sigma_3\sigma_1.\end{aligned}$$

Or :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

donc :

$$S = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_2 - \sigma_3\sigma_1 = (p^2 - 2q)q - pr = qp^2 - 2q^2 - pr.$$

25. Les trois racines sont en progression arithmetique si et seulement s'il existe deux nombres complexes u et v tels que les trois racines soient $u-v$ u et $u+v$ c'est-à-dire si et seulement s'il existe u et v tels que :

$$\begin{cases} 3u = -a \\ 3u^2 - v^2 = b \\ u(u^2 - v^2) = -c \end{cases}$$

soit si et seulement si $-\dfrac{a}{3}$ est racine, ce qui est équivalent à :

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0.$$

26. **a)** Puisque $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, on cherche le polynôme dont les trois racines sont $-x_1$, $-x_2$ et $-x_3$.
Or $(-x_i)^3 - px_i = -x_i^3 - px_i = q$, le polynôme cherché est donc :

$$X^3 + pX - q.$$

b)

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = p$$

$$(x_1x_2)(x_2x_3) + (x_1x_3)(x_1x_2) + (x_2x_3)(x_1x_3) = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

$$(x_1x_2)(x_2x_3)(x_1x_3) = q^2.$$

Le polynôme cherché est donc :

$$X^3 - pX^2 - q^2.$$

27. Soit P un polynôme de degré 5.
P est solution du problème si et seulement si $P'(X)$ est divisible par $(X+b)^2$ et par $(X-b)^2$, b est racine de $P(X)+a$ et $-b$ est racine de $P(X)-a$, c'est-à-dire si et seulement si $P'(X)$ est divisible par $(X^2 - b^2)^2$, b est racine de $P(X) + a$ et $-b$ est racine de $P(X) - a$.
P est donc solution si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : P'(X) = \lambda(X^2 - b^2)^2 \quad \text{et} \quad P(b) - a = 0 \quad \text{et} \quad P(-b) + a = 0$$

soit, si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$P = \lambda\left(\frac{X^5}{5} - 2b^2\frac{X^3}{3} + b^4X\right) + \mu \quad \text{et} \quad P(b) - a = 0 \quad \text{et} \quad P(-b) + a = 0$$

Le polynôme $P = \lambda\left(\dfrac{X^5}{5} - 2b^2\dfrac{X^3}{3} + b^4X\right) + \mu$ est solution si et seulement si :

$$\lambda\left(\frac{b^5}{5} - 2b^2\frac{b^3}{3} + b^4b\right) + \mu - a = 0$$

et :

$$\lambda\left(\frac{-b^5}{5}+2b^2\frac{b^3}{3}-b^4b\right)+\mu+a=0$$

soit, si et seulement si :

$$\mu=0 \quad \text{et} \quad \lambda=\frac{15}{8b^5}a.$$

28 Remarquons que les racines de $P^2+\lambda^2$ ne sont pas réelles car :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ P(x)^2+\lambda^2>0$$

D'autre part, P' admet (application du théorème de Rolle) $n-1$ racines réelles. Or :

$$(P^2)'(x)=2P(x)P'(x).$$

Les racines de $(P^2)'(x)$ sont donc nécessairement réelles, ce qui prouve que $P^2+\lambda^2$ n' a pas de racine double.

29. Soient $z_1,z_2,\dots,z_r$, les zéros de P de multiplicités respectives $\lambda_1,\dots,\lambda_r$.
Le pôlynome P s'écrit donc :

$$P=\lambda(X-z_1)^{\lambda_1}\dots(X-z_r)^{\lambda_r}.$$

Soit z une racine de P'.
Si z est aussi racine de P, le résultat à montrer est évident.

Sinon :

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{1}{z-z_i}=0$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\overline{z-z_i}}{|z-z_i|^2}=0$$

soit, en prenant le conjugue de l'expression précédente :

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i}{|z-z_i|^2}(z-z_i)=0$$

ce qui prouve le résultat demandé, puisque :

$$\forall i\in\{1,\dots,r\}\ ,\ \frac{\lambda_i}{|z-z_i|^2}>0.$$

30. $(ii) \Longrightarrow (i)$ est évident
Montrons $(i) \Longrightarrow (ii)$.
On décompose P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = \lambda \prod_{i-1}^{r} (X - x_i)^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{q} (X^2 + b_i X + c_i)^{\mu_i}$$

où $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $x_i \in \mathbb{R}$.
On remarque que la fonction polynomiale associée à P change de signe chaque fois que la variable prise dans $\mathbb{R}$ traverse un zéro de multiplicité impaire.
D'après (i), la fonction gardant toujours le même signe, on en déduit que tous les λ_i sont pairs.
On remarque en outre que $\lambda \geqslant 0$.
Décomposons le terme $\prod_{i=1}^{q} (X^2 + b_i X + c_i)^{\mu_i}$ sur $\mathbb{C}[X]$.

$$\prod_{i=1}^{q} (X^2 + b_i X + c_i)^{\mu_i} = \prod_{i=1}^{q} (X - z_i)^{\mu_i} \prod_{i=1}^{q} (X - \overline{z_i})^{\mu_i}.$$

Or le polynôme $\prod_{i=1}^{q} (X - z_i)^{\mu_i}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\prod_{i=1}^{q} (X - z_i)^{\mu_i} = C + iD$$

avec $C \in \mathbb{R}[X]$ et $D \in \mathbb{R}[X]$.
Alors on a :

$$\prod_{i=1}^{q} (X - \overline{z_i})^{\mu_i} = C - iD$$

et :

$$\prod_{i=1}^{q} (X^2 + b_i X + c_i)^{\mu_i} = (C + iD)(C - iD) = C^2 + D^2$$

Finalement, on peut écrire :

$$P = \left(\sqrt{\lambda} \prod_{i-1}^{r} (X - x_i)^{\frac{\lambda_i}{2}} C \right)^2 + \left(\sqrt{\lambda} \prod_{i-1}^{r} (X - x_i)^{\frac{\lambda_i}{2}} D \right)^2$$

ce qui est de la forme cherchée

31. On remarque que si a est racine de P, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, a^{2^p} est aussi racine.
Le nombre de racines étant fini, on a nécessairement :

$$\exists p \in \mathbb{N}^* \ , \exists q \in \mathbb{N}^* \ : a^{2^p} = a^{2^q}$$

donc $|a| = 1$ ou $a = 0$.
De plus, on remarque aussi que si a est racine $(a-1)^2$ est également racine.
D'après ce qui précède on doit avoir $|a-1| = 1$ ou $a = 1$
On a donc $a \in \{0, 1, -j, -j^2\}$. Or $-j$ ne peut être racine car $(-j-1)^2 = j \notin \{0, 1, -j, -j^2\}$. De même $-j^2$ ne peut être racine car $(-j^2-1)^2 = j^2 \notin \{0, 1, -j, -j^2\}$. Les seules racines possibles de P sont par conséquent 1 et 0, donc P est de la forme $P(X) = \lambda X^p (X-1)^q$.
On écrivant avec un polynôme de cette forme la relation :

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0,$$

on trouve que nécéssairement $\lambda = -1$ et $p = q$.
Le seul polynôme vérifiant la condition donnée est donc $-X^p(X-1)^p$.

32 Supposons P et Q premiers entre eux, alors :

$$(P+Q) \wedge P = 1$$

et :

$$(P+Q) \wedge Q = 1.$$

On a donc :

$$(P+Q) \wedge PQ = 1.$$

Réciproquement, supposons que $P+Q$ et PQ sont premiers entre eux
Alors si D divise P et Q D divise $P+Q$ et PQ donc D est de degré 0.

33. Le polynôme C convient si et seulement s'il existe trois polynômes Q_1, Q_2 et Q_3 tels que $AB = Q_1 C$, $BC = Q_2 A$, $CA = Q_3 B$.
Notons D le PGCD de A et de B : $A = DA'$ et $B = DB'$ où A' et B' sont premiers entre eux.

Les trois relations de divisibilité s'écrivent alors :

$$A'B'D^2 = Q_1 C$$

$$B'DC = Q_2 DA'$$

$$CA'D = Q_3 B'D.$$

Si C convient alors A' divise C (lemme de Gauss)et B' divise C Donc le produit $A'B'$ divise C.
Il existe R tel que :

$$C = RA'B'.$$

De plus on a :

$$D^2 = Q_1 R$$

donc R divise D^2.
Réciproquement on montre facilement qu'un polynôme C de la forme $C = RA'B'$ où R divise D^2 convient.

34. **a)** On a :

$$P(X) = \lambda(X-\alpha_1)^{\lambda_1}(X-\alpha_2)^{\lambda_2}\dots(X-\alpha_k)^{\lambda_k}$$

alors :

$$P'(X) = (X-\alpha_1)^{\lambda_1-1}(X-\alpha_2)^{\lambda_2-1}\dots(X-\alpha_k)^{\lambda_k-1}R(X)$$

où $R(X)$ et $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_k)$ sont premiers entre eux donc :

$$P \wedge P' = (X-\alpha_1)^{\lambda_1-1}(X-\alpha_2)^{\lambda_2-1}\dots(X-\alpha_k)^{\lambda_k-1}$$

qui est de degré $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_k - k = n - k$.

b) Le résultat est faux dans $\mathbb{R}[X]$. Prendre, par exemple :

$$P(X) = (X-1)^2(X+1)(X^2+1)$$
$$P \wedge P' = X - 1$$

et P n'a que 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

c) Soit D le PGCD de P et de P'.
Si k est le nombre de racines distinctes de P alors D est de degré $n-k$.
Or si P' divise P alors D qui est associé à P' est de degré $n-1$
Donc P a une seule racine, qui est nécessairement 1, par suite P est de la forme $P = \lambda(X-1)^n$
La condition $P(0) = 1$ impose $\lambda = (-1)^n$.
Finalement, on a $P = (1-X)^n$ qui est le seul polynôme solution du problème.

35. **a)** Il suffit de remarquer que les polynômes $(1-X)^n$ et X^n sont premiers entre eux et d'utiliser la proposition 43 de la page 734.
On peut également écrire :

$$\begin{aligned}
1 &= (1-X+X)^{2n-1} \\
&= (1-X)^n \left(\binom{2n-1}{k} \sum_{k=0}^{n-1} (1-X)^{n-1-k} X^k \right) \\
&\quad + X^n \left(\binom{2n-1}{k} \sum_{k=n}^{2n-1} (1-X)^{2n-1-k} X^{k-n} \right)
\end{aligned}$$

b) On remplace X par $1-X$ dans $(1-X)^nP(X)+X^nQ(X)=1$ et l'on utilise l'unicité du couple (P, Q).

c) Par dérivation, on a :

$$(1-X)^{n-1}\big(-nP(X)+(1-X)P'(X)\big) = X^{n-1}\big(-nQ(X)-XQ'(X)\big)$$

Le polynôme $(1-X)^{n-1}\big(-nP(X)+(1-X)P'(X)\big)$ admet donc 1 et 0 comme racines d'ordre au moins $n-1$.
Or son degré est inférieur strictement à $2n-1$, donc :

$$(1-X)^{n-1}\big(-nP(X)+(1-X)P'(X)\big) = k(1-X)^{n-1}X^{n-1}.$$

Ce qui montre le résultat demandé.

d) On trouve :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n-1\}\ ,\ a_i = \binom{i-1+n}{n-1}a_0.$$

Or $P(0)=1$, donc $a_0=1$.

36. **a)** $$a_0+a_1\frac{p}{q}+a_2\frac{p^2}{q^2}+\cdots+a_n\frac{p^n}{q^n}=0 \Longrightarrow q^na_0+q^{n-1}a_1p+\cdots+a_np^n=0$$
$$\Longrightarrow q \mid a_np^n$$

donc $q \mid a_n$ (car q et p^n sont premiers entre eux).
De même $p \mid q^na_0$ et donc $p \mid a_0$.
Si $a_n=1$, alors P n'a pas de racine rationnelle non entière.

b) Soit $Q(X) = P(m+X)$. Le rationnel $\dfrac{p-mq}{q}$ est racine de Q avec $(p-mq)\wedge q=1$ donc $p-mq \,|\, Q(0)=P(m)$.

c)
- Le résultat précédent permet de montrer que nécessairement si P admet une racine rationnelle, alors cette racine est -1 ou 1. On vérifie que -1 et 1 ne sont pas racines. Le polynôme est de degré 3 et n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$: il est donc irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- si $\dfrac{p}{q}$ est racine alors $p \mid 5$ et $q \mid 3$. Les racines possibles sont :

  $$-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -5, 5, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, -1.$$

  Or $p+q \mid (-8)$ $\ p-q \mid (-6)$ et $p-2q \,|\, 7$ donc il ne reste plus que $\dfrac{5}{3}$ et -5.
  On trouve que seul $\dfrac{5}{3}$ est racine.

  $$3X^3-2X^2-2X-5 = 3\left(X-\frac{5}{3}\right)(X^2+X+1).$$

- On trouve de même que -3 et $\dfrac{1}{2}$ sont racines du polynôme.

  Sachant que la somme de toutes les racines est $-\dfrac{19}{6}$ et le produit 2, on trouve la somme et le produit des deux autres racines (dans $\mathbb{C}$).
  Finalement :
$$6X^4 + 19X^3 - 7X^2 - 26X + 12 = (X+3)(2X-1)(3X^2+2X-4)$$

d) Supposons que $|m_1 - m_2| > 2$ et que P possède une racine rationnelle $r = \dfrac{p}{q}$.
En prenant successivement $m = m_1$ puis $m = m_2$, on trouve que $p - m_1 q \mid 1$ et $p - m_2 q \mid 1$ donc $p - m_1 q = \pm 1$ et $p - m_2 q = \pm 1$.
Dans ce cas on a nécessairement $|m_1 - m_2| = 2$ ce qui contredit l'hypothèse.
Si $|m_1 - m_2| \leqslant 2$, alors si P a une racine rationnelle, d'après ce qui précède il existe ε avec $\varepsilon = \pm 1$ tel que $p = m_1 q + \varepsilon$ et $p = m_2 q - \varepsilon$ ce qui assure que $r = \dfrac{p}{q} = \dfrac{m_1 + m_2}{2}$.

Chapitre 26

1. Écrivons :
$$F_1 = E_1 + G_1 \ , \ F_2 = E_2 + G_2$$
avec $\deg G_1 < 0$ et $\deg G_2 < 0$. Alors :
$$F_1 + F_2 = E_1 + E_2 + G_1 + G_2.$$
Or $\deg(G_1 + G_2) < 0$, donc par unicité de la décomposition la partie entière de $F_1 + F_2$ est $E_1 + E_2$.

2. **a)** Il y a quatre pôles simples i, $-i$, 2 et -2.
On trouve :
$$F = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} + \frac{1}{X-2} + \frac{4}{X+2}.$$

b) La partie entière est 1, il y a quatre pôles simples : j, $-j$, j^2 et $-j^2$.
On trouve :
$$F = 1 + \frac{1}{6}\frac{2+j}{X-j} - \frac{1}{6}\frac{2+j}{X+j} - \frac{1}{6}\frac{j-1}{X-j^2} + \frac{1}{6}\frac{j-1}{X+j^2}.$$

c)
$$F = 1 + \frac{13}{X-3} - \frac{7}{X-2}.$$

d) La fraction a deux pôles j et j^2 d'ordre 2.
La décomposition a donc la forme suivante :

$$F = \frac{X^2}{(X^2+X+1)^2} = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{(X-j)^2} + \frac{c}{X-\overline{\jmath}} + \frac{d}{(X-\overline{\jmath})^2}.$$

On a :

$$b = \frac{j^2}{(j-\overline{\jmath}^2)^2} = -\frac{j^2}{3}.$$

La fraction étant à coefficients réels :

$$d = \overline{b} = -\frac{j}{3}.$$

En multipliant par X et en prenant la limite en $+\infty$, on a $a = -c$.
Puis en prenant la valeur en 0, on trouve :

$$\frac{2}{9}\frac{(1+2j)}{X-\overline{\jmath}} - \frac{1}{3}\frac{j}{(X-\overline{\jmath})^2} - \frac{2}{9}\frac{(1+2j)}{X-j} + \frac{1}{3}\frac{1+j}{(X-j)^2}.$$

e) $-\frac{1}{2}\frac{i}{X-i} + \frac{1}{2}\frac{i}{X+i} - \frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{X-\sqrt{2}} + \frac{3}{2}\frac{1}{(X-\sqrt{2})^2} + \frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{X+\sqrt{2}} + \frac{3}{2}\frac{1}{(X+\sqrt{2})^2}.$

3. **a)** On utilise la décomposition en éléments simples de :

$$F = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

et l'on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{n+1} + 1.$$

b) On décompose :

$$F = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$

en éléments simples.
On trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{4}.$$

4. **a)** On note ω_k les n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.
Alors :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{X - \omega_i}$$

avec :

$$a_i = \frac{1}{n\omega_i^{n-1}} = \frac{\omega_i}{n}.$$

b) Avec les mêmes notations que précédemment , on trouve :

$$a_i = \frac{\omega_i^{n-1}}{n\omega_i^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

c) La fraction admet 1 comme pôle double et $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ $1 \leqslant k \leqslant n-1$ comme pôles simples.
Or :

$$F = \frac{1}{(X-1)^2(1 + X + X^2 \cdots + X^{n-1})}.$$

Le coefficient de $\dfrac{1}{(X-1)^2}$ est donc $\dfrac{1}{n}$.
Le coefficient de $\dfrac{1}{X - \omega_k}$ est :

$$\frac{1}{(n+1)\omega_k^n - n\omega_k^{n-1} - 1} = \frac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)}.$$

Déterminons le coefficient de $\dfrac{1}{X-1}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(X-1)^2(1 + X + X^2 \cdots + X^{n-1})} - \frac{1}{n}\frac{1}{(X-1)^2} \\
&= \frac{n - (1 + X + X^2 \cdots + X^{n-1})}{n(X-1)^2(1 + X + X^2 \cdots + X^{n-1})} \\
&= -\frac{X - 1 + X^2 - 1 + \ldots + X^{n-1} - 1}{n(X-1)^2(1 + X + X^2 \cdots + X^{n-1})} \\
&= -\frac{1 + (1+X) + (1 + X + X^2) + \cdots + (1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-2})}{n(X-1)(1 + X + X^2 \cdots + X^{n-1})}
\end{aligned}$$

En multipliant par $X - 1$ et en prenant la valeur en 1, on trouve que le coefficient cherché est :

$$-\frac{1 + 2 + \cdots + n - 1}{n^2} = \frac{1-n}{2n}.$$

Finalement :

$$F = \frac{1-n}{2n}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{n(X-1)^2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\omega_k}{(\omega_k - 1)}\frac{1}{X-\omega_k}.$$

Remarque : on peut aussi trouver le coefficient de $\dfrac{1}{X-1}$ par dérivation de la fraction $\dfrac{1}{1+X+X^2+\ldots+X^{n-1}}$ (voir l'exercice 13).

5 Si la fraction est irréductible, c'est la décomposition en éléments simples de F. Si F n'est pas mise sous forme irréductible, alors la forme irréductible de F est de la forme $F = \dfrac{P_1}{Q_1}$ où :

$$Q_1 = (X - x_1)^{\lambda_1'} \ldots (X - x_n)^{\lambda_n'}$$

avec :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ ,\ 0 \leqslant \lambda_i' \leqslant \lambda_i.$$

On fait la décomposition en éléments simples de F et l'on pose :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ ,\ \forall j \in \{\lambda_i' + 1, \ldots, \lambda_i\}\ ,\ a_{i,j} = 0.$$

(ce qui revient à mettre des coefficients nuls pour les termes qui n'existent pas dans la décomposition en éléments simples de F).

Application : la décomposition s'écrit :

$$F = 1 + \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{X+1}$$

certains termes étant susceptibles d'être nuls.

En multipliant par $(X-1)^2$ et en prenant la valeur en 1, on trouve :

$$a_2 = \frac{1+a+b+c}{2}$$

terme qui est nul si 1 est racine de $X^3 + aX^2 + bX + c$, auquel cas 1 n'est plus un pôle double.

De même, on trouve :

$$a_3 = \frac{-1+a-b+c}{4}.$$

En prenant la valeur en 0, on trouve que $c = 1 - a_1 + a_2 + a_3$ d'où :

$$a_1 = \frac{5+3a+b-c}{4}$$

terme qui est bien nul si 1 est racine double de $X^3 + aX^2 + bX + c$ (le vérifier)

6. La décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{X-2} + \frac{a_3}{(X-1)^2} + \frac{a_4}{(X-2)^2}.$$

Remarquons que la forme subsiste, même si 1 ou 2 annule le polynôme $aX^2 + bX + c$.

Après calculs, on trouve :

$$\begin{aligned} a_1 &= 4a + 3b + 2c \\ a_2 &= -4a - 3b - 2c \\ a_3 &= a + b + c \\ a_4 &= 4a + 2b + c. \end{aligned}$$

La condition cherchée est $a_1 = a_2 = 0$, c'est-à-dire $4a + 3b + 2c = 0$.

7 **a)** • Si $a \neq b$ alors la décomposition en éléments simples de f est :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{a-b} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1}{b-a} = -\alpha.$$

La dérivée d'ordre n de f est alors :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{a-b}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x-b)^{n+1}}\right).$$

• Si $a = b$, alors :

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$$

et :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-a)^{n+2}}.$$

b) La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{C}$ est :

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

donc la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de f est :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[\frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}\right]. \end{aligned}$$

c) On traite à part les cas où $\cos a = \pm 1$ auxquel cas ± 1 est pôle double de la fraction.
En posant $\alpha = e^{ia}$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})}$$

et on utilise le résultat de la question a).

d) On procède comme dans la question précédente. Si $a \neq 0$ alors :

$$f(x) = \frac{1}{(x-e^{a})(x-e^{-a})}.$$

8. La fraction admet $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ comme pôles simples.Le dénominateur Q peut donc se mettre sous la forme :

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\omega_i) = X^n - 1.$$

La partie entière de la fraction étant nulle puisque $n \geqslant 2$, le degré de P est strictement inférieur à n.
De plus, la forme de la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$ assure que :

$$\omega_i^2 = \frac{P(\omega_i)}{n\omega_i^{n-1}}$$

donc :

$$P(\omega_i) = n\omega_i.$$

Le polynôme $P(X) - nX$ a donc n racines et son degré est inférieur ou égal à $n-1$; il est donc nul.
On en déduit :

$$F = \frac{nX}{X^n - 1}.$$

9.

$$\begin{aligned}\cos nx &= \mathrm{Re}(\cos x + i\sin x)^n \\ &= \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2 x)^k \cos^{n-2k} x \\ &= P(\cos x)\end{aligned}$$

où $P = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k}$.
Montrons l'unicité d'un tel polynôme.

Soient P et Q deux polynômes satisfaisant à la condition, alors tout élément de $[-1,1]$ est racine de $P-Q$. Le polynôme $P-Q$ possède une infinité de racines donc est nul.

Les réels $x_i = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}\right)$ avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$ sont n racines distinctes de P. Le polynôme P étant de degré inférieur ou égale à n, ce sont les n racines de P.

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P}$ est donc :

$$\frac{1}{P}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{P'(x_i)(X-x_i)}.$$

En dérivant la relation $P(\cos x)=\cos(nx)$, on obtient :

$$\sin x P'(\cos x) = n\sin(nx)$$

d'où :

$$P'(x_i)=\frac{(-1)^k n}{\sin(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n})}.$$

10

$$F(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{X-x_i}+\frac{b_i}{(X-x_i)^2}\right).$$

Posons :

$$P_i(X)=(X-x_1)\dots(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\dots(X-x_n).$$

En multipliant la fraction par $(X-x_i)^2$ et en prenant la valeur en x_i on trouve :

$$b_i=\frac{1}{P_i(x_i)^2}.$$

En multipliant la fraction par $(X-x_i)^2$ puis en dérivant et en prenant la valeur en x_i, on trouve :

$$a_i=-2\frac{P_i'(x_i)}{P_i^3(x_i)}.$$

Il reste à calculer $P_i(x_i)$ et $P_i'(x_i)$.

La relation $P(X)=(X-x_i)P_i(X)$ donne $P'(X)=P_i'(X)(X-x_i)+P_i(X)$.

En prenant la valeur en x_i, on trouve $P_i(x_i)=P'(x_i)$.

En dérivant deux fois :

$$P''(X)=2P_i'(X)+P_i''(X)(X-x_i)$$

d'où :

$$P_i'(x_i)=\frac{1}{2}P''(x_i).$$

En reportant dans les expressions des a_i et des b_i, on trouve :

$$b_i = \frac{1}{P'(x_i)^2} \qquad \text{et} \qquad a_i = -\frac{P''(x_i)}{P'(x_i)^3}.$$

11. Notons :

$$F_p = \frac{p!}{X(X+1)\dots(X+p)}.$$

Tous les pôles de F_p sont simples, on a donc :

$$F_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{a_{k,p}}{X+k}$$

avec :

$$a_{k,p} = \frac{(-1)^k p!}{k!(p-k)!} = (-1)^k \binom{p}{k}$$

La décomposition en éléments simples de F est donc :

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{X+k}$$

avec :

$$b_k = \sum_{p=k}^{n} a_{k,p} = \sum_{p=k}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} = (-1)^k \binom{n+1}{k+1}.$$

12 **a)** $$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!} x^j + \mathrm{o}(x^{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j-1}{j} x^j + \mathrm{o}(x^{n-1}).$$

b) La décomposition en éléments simples est de la forme :

$$F(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{(X-1)^k}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{(X-1)^n} = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{n-k} + X^n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{(X-1)^k} \right).$$

Soit :

$$\frac{1}{(x-1)^n} = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} + \mathrm{o}(x^{n-1})$$

au voisinage de 0.

D'où par unicité du développement limité :

$$a_k = (-1)^n \binom{2n-k-1}{n-k}.$$

En utilisant la relation $F(1-X) = F(X)$, on trouve :

$$b_k = (-1)^k a_k.$$

c) On se ramène au cas précédent en posant :

$$G(X) = F(a + (b-a)X).$$

d) En utilisant $1 = X^n(X-1)^n F(X)$, on trouve une solution :

$$\begin{aligned} U_0(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} X^k \\ V_0(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} (1-X)^k \end{aligned}$$

13 La partie polaire relative au pôle a est de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(X-a)^k}.$$

La fraction s'écrit donc :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(X-a)^k} + F_1(X)$$

où la fraction F_1 ne possède pas a pour pôle. Donc :

$$F(X)(X-a)^n = \sum_{k=1}^{n} a_k (X-a)^{n-k} + (X-a)^n F_1(X).$$

En derivant $n-k$ fois cette relation et en prenant la valeur en a, on obtient :

$$G^{(n-k)}(a) = (n-k)! a_k$$

d'où :

$$a_k = \frac{G^{(n-k)}(a)}{(n-k)!}.$$

14. La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\frac{1}{(X^3-1)^3} = \frac{1}{(X-1)^3(X^2+X+1)^3}.$$

On utilise l exercice précédent pour calculer la partie polaire relative au pôle 1. Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de $\dfrac{1}{(1+x+x^2)^3}$ est :

$$\frac{1}{(++x+x^2)^3} = \frac{1}{27} - \frac{1}{9}(x-1) + \frac{5}{27}(x-1)^2 + \mathrm{o}((x-1)^3)$$

La partie polaire relative au pôle 1 est donc :

$$\frac{1}{27}\frac{1}{(X-1)^3}-\frac{1}{9}\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{5}{27}\frac{1}{(X-1)}.$$

En utilisant $F(jX)=F(j^2X)=F(X)$, on trouve :

$$\begin{aligned}F=&\frac{1}{27}\frac{1}{(X-1)^3}-\frac{1}{9}\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{5}{27}\frac{1}{(X-1)}\\&+\frac{1}{27}\frac{1}{(X-j)^3}-\frac{j^2}{9}\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{5j}{27}\frac{1}{(X-j)}\\&+\frac{1}{27}\frac{1}{(X-j^2)^3}-\frac{j}{9}\frac{1}{(X-j^2)^2}+\frac{5j^2}{27}\frac{1}{(X-j^2)}.\end{aligned}$$

15. On a

$$-\left[\frac{P'(X)}{P(X)}\right]'=\frac{P'(X)^2-P(X)P''(X)}{P^2(X)}=\frac{Q(X)}{P^2(X)}.$$

Or, si l'on note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les racines de P :

$$\frac{P'(X)}{P(X)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-x_k}$$

donc :

$$-\left[\frac{P'(X)}{P(X)}\right]'=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(X-x_k)^2}$$

puis :

$$Q(X)=P^2(X)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(X-x_k)^2}$$

et enfin :

$$\forall x\notin\{x_1,x_2,\dots,x_k\},\ Q(x)>0.$$

Et si x est égal à l'une des racines de P, alors :

$$Q(x)=P'^2(x)>0$$

puisque x n'est pas racine de P'.

Ainsi Q n' a donc aucune racine réelle

16. On a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - a_i}.$$

Écrivons :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - a_i) = (X - a_i) Q_i(X)$$

alors puisque P' a pour racines les b_i et a pour coefficient dominant $n\lambda$:

$$P'(X) = \lambda n \prod_{i=1}^{n-1} (X - b_i).$$

Le coefficient de $\dfrac{1}{X - a_i}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ est $\dfrac{P'(a_i)}{Q_i(a_i)}$, donc :

$$1 = \frac{n \prod_{j=1}^{n-1} (a_i - b_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{j=n} (a_i - a_j)} \qquad (*)$$

d'où :

$$\frac{1}{n} = \frac{a_i - b_i}{a_i - a_{i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{a_i - b_j}{a_i - a_j} \prod_{j=i+1}^{n-1} \frac{a_i - b_j}{a_i - a_{j+1}}.$$

Or, pour $1 \leqslant j \leqslant i - 1$, on a $a_j < b_j < a_{j+1} \leqslant a_i$ donc $\dfrac{a_i - b_j}{a_i - a_j} < 1$

et pour $i + 1 \leqslant j \leqslant n - 1$, on a $a_i < a_{i+1} \leqslant a_j < b_j < a_{j+1}$ donc $\dfrac{a_i - b_j}{a_i - a_{j+1}} < 1$.

Finalement :

$$\frac{a_i - b_i}{a_i - a_{i+1}} > \frac{1}{n},$$

ce qui constitue le première partie de l'inégalité à démontrer.
En écrivant $(*)$ pour $i + 1$ et en procédant de la même manière, on montre la deuxième partie de l'inégalité.

17 Considérons la fraction :

$$F = \frac{x_1}{a_1 + X} + \frac{x_2}{a_2 + X} + \cdots + \frac{x_n}{a_n + X} - 1.$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est solution du système si et seulement si F admet α_1, α_2, $\dots$, α_n comme racines, c'est-à-dire, si et seulement si F s'écrit :

$$F = -\frac{(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)}{(a_1+X)(a_2+X)\cdots(a_n+X)}.$$

La décomposition de cette fraction en éléments simples donne les valeurs des x_i :

$$x_i = (-1)^{n+1} \prod_{j=1, j\neq i}^{j=n} \frac{a_i+\alpha_j}{a_j-a_i}.$$

18. Considérons la fraction :

$$F = \frac{X^2}{(X-a)(X-b)(X-c)}.$$

Sa décomposition en éléments simples est :

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\frac{1}{X-a} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)}\frac{1}{X-b} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\frac{1}{X-c}.$$

En prenant la valeur de cette fraction en $\dfrac{a+b+c}{2}$, on trouve :

$$A = \frac{(a+b+c)^2}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

19. Soit P un polynôme qui convient alors la fraction :

$$F = \frac{P}{(X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_n)}$$

a pour décomposition en éléments simples :

$$F = Q + \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{Q_i(x_i)}\frac{1}{X-x_i} = Q + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{Q_i(x_i)}\frac{1}{X-x_i}$$

donc P est de la forme cherchée.
(Si $y_i = 0$, x_i n'est pas un pôle de la fraction, mais la décomposition reste la même , le terme correspondant s annulant.)
Réciproquement, on vérifie que tout polynôme de cette forme convient.
On remarque qu'il y a un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui convient. Ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange prenant les valeurs $y_1, \dots, y_n$ aux points $x_1, \dots, x_n$.

Chapitre 27

1. Si E n'est pas réduit à $\{0\}$, l'ensemble $(E,+,\star)$ n'est pas un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, en effet si $x \neq 0$, alors $i \star (i \star x) \neq (i^2) \star x$.

2. Seul le premier ensemble a une structure de sous-espace vectoriel.

3. Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors on a $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$ qui sont bien des sous-espaces vectoriels.
Supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E et que $F \not\subset G$, alors :
$$\exists y \in F \ : y \notin G.$$
Soit $x \in G$. Puisque $x \in F \cup G$ et $y \in F \cup G$ on a $x + y \in F \cup G$, or $x + y \in G$ est impossible (on aurait $y \in G$) donc $x + y \in F$, ce qui conduit à $x = (x + y) - y \in F$.
Finalement, on a montré $G \subset F$.

4. On écrit :
$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz = (x - y + z)^2 + z^2.$$
On a donc, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
$$(x-y+z)^2 + z^2 = 0 \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
C est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a :
$$(x-y+z)^2 + z^2 = 0 \iff \begin{cases} x - y + z = iz \\ \text{ou} \\ x - y + z = -iz. \end{cases}$$
Ce n'est pas un sous-espace vectoriel, car il contient $(1, 0. i)$ et $(1, 0, -i)$ et pas leur somme $(2, 0, 0)$.

5. Supposons $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, alors $A \in \mathcal{G}$ et :
$$F = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{F}\} \subset \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{G}\} = G.$$
De plus $\mathcal{G} = B + G = A + G$ donc $\overrightarrow{AB} \in G$
Réciproquement supposons que $F \subset G$ et $\overrightarrow{AB} \in G$ alors :
$$A + F \subset A + G = B + \overrightarrow{BA} + G = B + G$$
donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

6. On a :

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \text{ et } 3\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}.$$

Par différence, on obtient le résultat.

7. **a)** L'intersection de toutes les parties convexes qui contiennent A (il y en a ne serait-ce que E) est bien une partie convexe de E qui contient A et elle est incluse dans toute partie convexe qui contient A.

b) Soit S l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des n points.
Montrons que S est convexe :
Soient A et B dans S :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \text{ et } B = \sum_{i=1}^{n} \mu_i A_i$$

avec :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 \text{ et } \forall i \in \{1, 2 \ldots, n\} \text{ , } \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \mu_i \geqslant 0.$$

Soit $x \in [0, 1]$, alors :

$$xA + (1-x)B = \sum_{i=1}^{n} (x\lambda_i + (1-x)\mu_i) \, A_i$$

avec :

$$\forall i \in \{1, 2 \ldots, n\} \text{ , } x\lambda_i + (1-x)\mu_i \geqslant 0$$

et :

$$\sum_{i=1}^{n} (x\lambda_i + (1-x)\mu_i) = 1$$

ce qui prouve que le point $xA + (1-x)B$ est dans S.
Montrons que S est inclus dans toute partie convexe qui contient les n points.
Pour cela nous allons montrer par récurrence sur n, que si C est une partie convexe, alors C contient tout barycentre à coefficients positifs de n points de C.
La propriété est vraie pour $n = 2$: c'est la définition d'une partie convexe.

Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et soit $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ avec :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ et } \forall i \in \{1, 2 \ldots, n\} \text{ , } \lambda_i \geqslant 0$$

où les points A_i sont dans C. Il existe i_0 tel que $\sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \lambda_i \neq 0$; notons G_{n-1} le barycentre des A_i , $i \neq i_0$ affectés des λ_i. Le point G_{n-1} est dans C en vertu de l'hypothèse de récurrence. D'après l'associativité du barycentre, A est barycentre du point A_{i_0} affecté du coefficient λ_{i_0} et de G_{n-1} affecté de $\sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \lambda_i$. Il est donc dans C.

8.
- Soit $x \in E$, alors $x \in f^{-1}(\operatorname{Ker} g)$ si et seulement si $f(x) \in \operatorname{Ker} g$, soit si et seulement si $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
- Si $x \in \operatorname{Ker} g$, alors $g(f(x)) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
- Soit $x \in \operatorname{Im}(g \circ f)$ alors il existe $y \in E$ tel que $x = g \circ f(y) = g(f(y))$ donc $x \in \operatorname{Im} g$.

9.
- Soit $y \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $x \in E$ avec $y = f(x)$. Alors :
$$g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f,$$
ce qui montre que $\operatorname{Im} f$ est stable par g.
- Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(g(x)) = g(f(x)) = 0$ donc $g(x) \in \operatorname{Ker} f$, ce qui montre que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

10. Supposons que $f \neq 0$ et $g \neq 0$, alors il existe $(x,y) \in E^2$ avec $f(x) \neq 0$ et $g(y) \neq 0$. Or $f(x)g(x) = f(y)g(y) = 0$ donc $f(y) = 0$ et $g(x) = 0$, puis $f(x+y) = f(x) + f(y) \neq 0$ et $g(x+y) = g(x) + g(y) \neq 0$, ce qui est impossible.

Remarque : on a en fait montré que $\operatorname{Ker} f \cup \operatorname{Ker} g$ ne pouvait pas être un sous–espace vectoriel, donc *a fortiori* pas égal à E.

11. **a)** Il suffit d'utiliser le fait que $(x,y) \mapsto x \wedge y$ est bilinéaire.

b) Si $u = 0$, alors $f = 0$ qui est non injective.
Si $u \neq 0$ alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u) \neq \{0\}$.

c)
$$f^2(x) = (x \wedge u) \wedge u = (x.u)u - (u.u)x$$
et :
$$f^3(x) = \big((x.u)u - (u.u)x\big) \wedge u = -\|u\|^2 f(x)$$
d'où :
$$f^3 = -\|u\|^2 f.$$

12. On remarque que l'on a toujours $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

- Montrons :
$$\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}.$$
Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ alors :
$$\exists x \in E \ : y = f(x)$$
et :
$$f^2(x) = f(y) = 0$$
donc :
$$x \in \operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f.$$
Finalement :
$$y = f(x) = 0$$
ce qui montre que :
$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

- Montrons :
$$(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}) \Longrightarrow (\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f)$$
Soit $x \in \operatorname{Ker} f^2$ alors :
$$f(x) \in \operatorname{Ker} f \quad \text{et} \quad f(x) \in \operatorname{Im} f$$
On a donc :
$$f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$$
d'où $f(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} f$.

13. On vérifie que si $f \in E$; alors $\varphi(f) \in E$ et que φ est bien linéaire.
Soit $f \in E$; $f \in \operatorname{Ker} \varphi$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\, dt = 0$, ce qui est équivalent à $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f(x) = 0$ (en utilisant la dérivabilité de g). Ceci entraîne $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$ puis par continuité de f en 0, $f = 0$. Le noyau de φ est réduit à $\{0\}$, donc φ est injective.
On remarque que si $f \in E$, alors $\varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que φ n'est pas surjective.

14. Le noyau de U est l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle :

$$y' - 2xy = 0$$

dont les solutions sont de la forme λe^{x^2}, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit f une fonction de E. Posons $g(x) = f(x)e^{-x^2}$.
On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ U^n(f) = e^{x^2} g^{(n)}(x)$$

donc $f \in \operatorname{Ker} U^n$ si et seulement si $g^{(n)} = 0$, soit si et seulement si $g \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Le noyau de U^n est donc :

$$\operatorname{Ker} U^n = \left\{ e^{x^2} P(x) \;\middle|\; P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}.$$

15. On vérifie facilement que φ_g est linéaire.
Supposons g nilpotent et soit $p \in \mathbb{N}$ avec $g^p = 0$. On montre d abord par récurrence que si $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$(\varphi_g)^n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} g^k f g^{n-k}$$

puis $\varphi_g^{2p-1} = 0$, ce qui montre que φ_g est nilpotent.

16. $f \circ h \circ f^{-1}$ est une transformation affine comme composée de transformations affines.
De plus :

$$\overrightarrow{f \circ h \circ f^{-1}} = k\vec{f} \circ \overrightarrow{f^{-1}} = k\,\mathrm{Id}$$

donc $f \circ h \circ f^{-1}$ est une homothétie de rapport k.
Le centre Ω de cette homothétie est donné par :

$$f \circ h \circ f^{-1}(\Omega) = \Omega.$$

Il est evident que $\Omega = f(A)$ est solution.

17. Soit $\vec{u} \in E$. Une application affine f commute avec $t_{\vec{u}}$ si et seulement si pour tout point M :

$$f(O) + \vec{u} + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = f(M) + \vec{f}(\vec{u}) = f(O) + \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$$

soit si et seulement si $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$. Finalement f commute avec toute translation si et seulement si $\vec{f} = \mathrm{Id}$ c'est-à-dire, si et seulement si f est une translation.

18. Supposons que l'ensemble des points invariants ne soit pas vide. Soit A un point invariant par f, alors un point M est invariant par f si et seulement si $f(M) = M$, soit :

$$A + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = M$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AM} \in \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}).$$

Finalement l'ensemble des points invariants est :

$$A + \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}).$$

19. On a :

$$\overrightarrow{h_1 \circ h_2} = \overrightarrow{h_2 \circ h_1} = \operatorname{Id}$$

ce qui prouve que $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont des translations.

De plus, $h_1 \circ h_2(\Omega_2) = h_1(\Omega_2)$ défini par :

$$h_1(\Omega_2) = \Omega_1 + k\,\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}.$$

Le vecteur associé à la translation est donc $(k-1)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$. Les deux homothéties commutent donc si et seulement si elles ont le même centre ou $k = 1$.

20. On sait déjà que si f est affine alors f conserve le barycentre.
Réciproquement, supposons que f conserve le barycentre.
Soit A un point de E et φ défini par :

$$\forall \vec{u} \in E\ ,\ \varphi(\vec{u}) = f(A + \vec{u}) - f(A).$$

Montrons que φ est linéaire.
Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
le point $A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est barycentre des points A, $A + \vec{u}$ et $A + \vec{v}$ affectés respectivement des coefficients $1 - \lambda - \mu$, λ et μ.
Donc :

$$f(A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = (1 - \lambda - \mu) f(A) + \lambda f(A + \vec{u}) + \mu f(A + \vec{v})$$

et :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= (1 - \lambda - \mu) f(A) + \lambda f(A + \vec{u}) + \mu f(A + \vec{v}) - f(A) \\
&= (1 - \lambda - \mu)\big(f(A) - f(A)\big) + \lambda\big(f(A + \vec{u}) - f(A)\big) \\
&\qquad + \mu\big(f(A + \vec{v}) - f(A)\big) \\
&= \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v})
\end{aligned}$$

Chapitre 28

1.

$$(x,y,z) \in \mathrm{Vect}(u,v) \iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ : \begin{cases} x = \lambda + 3\mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases}$$

$$\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ : \begin{cases} -x + y + z = 4\lambda \\ x + y - z = 4\mu \\ x = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

$$\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ : \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4}(-x + y + z) \\ \mu = \frac{1}{4}(x + y - z) \\ x = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

$$\iff x - 2y + z = 0.$$

2. On a :

$$F \cap G \subset F \cap (G+H) \qquad \text{et} \qquad F \cap H \subset F \cap (G+H)$$

donc :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G+H).$$

En général $F \cap (G+H)$ n'est pas inclus dans $(F \cap G) + (F \cap H)$: prendre trois droites vectorielles dans $\mathbb{R}^2$ deux à deux distinctes.

3. On vérifie aisément que F est un sous-espace vectoriel.
De plus si f est un élément quelconque de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt\right) + \int_0^1 f(t)\,dt.$$

On a donc, si l'on note G le sous-espace vectoriel constitué des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F + G.$$

De plus, on montre facilement que :

$$F \cap G = \{0\},$$

ce qui prouve que l'ensemble des fonctions constantes est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F.

4. • Montrons que $F' \cap G = \{0\}$.
Soit $x \in F' \cap G$ alors $x \in F' \cap (F \cap G)$ donc $x = 0$

• Montrons que : $F' + G = E$.
Soit $x \in E$.
$$\exists (y, z) \in F \times G \, : x = y + z$$
de plus :
$$\exists (y', y'') \in F' \times F \cap G \, : y = y' + y''$$
alors $x = y' + y'' + z$ avec $y' \in F'$ et $y'' + z \in G$, ce qui prouve que $F' + G = E$.

5. Supposons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$ et soit $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, alors :
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \in F + G.$$
Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} \in F + G$, alors il existe $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement dans F et G tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$ d'où :
$$A + \vec{u} = B + \vec{v} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$$
ce qui prouve que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$.

6. Dans les trois cas, la famille est libre.

7. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :
$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots \lambda_n P_n = 0.$$
Si $\lambda_n \neq 0$, alors le polynôme $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots \lambda_n P_n$ est de degré $\deg P_n \neq -\infty$ ce qui est impossible. On a donc $\lambda_n = 0$.
En itérant le raisonnement, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_n = 0$.

8. **a)** Supposons que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, w)$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$w = au + bv$$
et il existe $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$v = cu + dw.$$
Si $(b. d) \neq (0. 0)$, on a bien la condition cherchée.
Si $b = d = 0$, alors $v + w = (a + c)u$, on a également la condition cherchée.
Réciproquement supposons :
$$\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3 \ , \ \beta\gamma \neq 0 \ : \ \alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$
Alors, puisque $\gamma \neq 0$, $w \in \mathrm{Vect}(u, v)$ donc $\mathrm{Vect}(u, w) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$
De même, en utilisant $\beta \neq 0$, on montre $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(u, w)$.

b) Supposons que $F+\mathbb{K}v = F+\mathbb{K}w$. Alors, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in F^2$ tels que :

$$w = y + \alpha v \quad \text{et} \quad v = x + \beta w.$$

Si $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, la condition est bien réalisée.
Si $\alpha = \beta = 0$, alors $v + w = x + y \in F$, la condition est également réalisée.
Réciproquement, on montre facilement que si $u+\alpha v+\beta w = 0$ avec $\alpha\beta \neq 0$, alors $F + \mathbb{K}v = F + \mathbb{K}w$.

9. Un vecteur quelconque de cet espace peut s'écrire :

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) &= (x,y,z,-x-y-z)\\ &= x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1)\end{aligned}$$

ce qui prouve que la famille $\big((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\big)$ est une famille génératrice de ce sous-espace.
Cette famille est de plus libre, puisque :

$$\alpha(1,0,0,-1) + \beta(0,1,0,-1) + \gamma(0,0,1,-1) = (\alpha,\beta,\gamma,\dots)$$

ne peut être nul que si $\alpha = \beta = \gamma == 0$.
Elle constitue donc une base du sous-espace.

10. On a :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}z \\[2mm] y = -\dfrac{1}{3}z. \end{cases}$$

Tout vecteur de ce sous-espace s'écrit donc sous la forme $\dfrac{z}{3}(-2,-1.3)$, ce qui prouve que la famille $\big((-2,-1,3)\big)$ est une famille genératrice de ce sous-espace. Elle est évidemment libre donc en constitue une base.

11.

$$\mathrm{Vect}(u,v) = \Big\{(\lambda+\mu,\lambda+2\mu,\lambda-\mu,\lambda+3\mu) \;\Big|\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\Big\}.$$

Or :

$$\begin{aligned}&\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z,t) = (\lambda+\mu,\lambda+2\mu,\lambda-\mu,\lambda+3\mu)\\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \lambda = (x+z)/2 \\ \mu = (x-z)/2 \\ y = \lambda+2\mu \\ t = \lambda+3\mu \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ 2x-z-t=0. \end{cases}\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 &\iff \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ \lambda_1(-x+y+z) \\ &\qquad\qquad + \lambda_2(2x-y-z) + \lambda_3(x+2y+z) = 0 \\ &\iff \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ (-\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)x \\ &\qquad\qquad + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)y + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)z = 0 \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\end{aligned}$$

ce qui prouve que la famille est libre.

13. On montre facilement que l'ensemble considéré est un sous-espace vectoriel. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 qui admettent a et b comme racines est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 divisibles par $(X-a)(X-b)$, ce sont donc les polynômes qui s'écrivent :

$$(X-a)(X-b)(\alpha + \beta X + \gamma X^2)\,,\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3.$$

La famille :

$$\Big((X-a)(X-b), (X-a)(X-b)X, (X-a)(X-b)X^2\Big)$$

est donc une famille génératrice de cet espace.
Elle est de plus libre car échelonnée en degré.
Elle constitue donc une base du sous-espace consideré.

14. On montre le résultat par récurrence sur n:
Le résultat est vrai si $n = 1$.
Soit $n \geqslant 2$, montrons que $H_{n-1} \Longrightarrow H_n$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n réels tels que :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$$

alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \sin 2x + \cdots + \lambda_n \sin nx = 0.$$

En dérivant deux fois :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ -\lambda_1 \sin x - 4\lambda_2 \sin 2x + \cdots - n^2 \lambda_n \sin nx = 0$$

En multipliant la première équation par n^2 et en l'additionnant à la deuxième :

$$(n^2-1)\lambda_1 f_1 + (n^2-4)\lambda_2 f_2 + \cdots + \Big((n^2 - (n-1)^2\Big)\lambda_{n-1} f_{n-1} = 0.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}\ ,\ (n^2 - k^2)\lambda_k = 0$$

d'où :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}\ ,\ \lambda_k = 0.$$

Puis, en reportant dans l'équation initiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda_n \sin nx = 0$$

qui conduit à $\lambda_n = 0$.

15. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{a_n x} = 0$$

alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda_1 e^{(a_1 - a_n)x} + \lambda_2 e^{(a_2 - a_n)x} + \cdots + \lambda_{n-1} e^{(a_{n-1} - a_n)x} + \lambda_n = 0.$$

En prenant la limite en $+\infty$, on trouve $\lambda_n = 0$

En procédant de la même manière, on trouve successivement :

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_1 = 0.$$

16. • Supposons que $p \circ f = f \circ p$.
Soit $x \in \operatorname{Im} p$, alors :

$$p\big(f(x)\big) = f\big(p(x)\big) = f(x)$$

ce qui prouve que :

$$f(x) \in \operatorname{Im} p.$$

Soit $x \in \operatorname{Ker} p$, alors :

$$p\big(f(x)\big) = f\big(p(x)\big) = f(0) = 0$$

donc $f(x) \in \operatorname{Ker} p$.

Supposons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ soient stables par f.
Soit $x \in \operatorname{Ker} p$. Puisque $f(x) \in \operatorname{Ker} p$ on a bien :

$$f\big(p(x)\big) = 0 = p\big(f(x)\big).$$

Soit $x \in \operatorname{Im} p$ puisque $f(x) \in \operatorname{Im} p$, on a bien :

$$f\big(p(x)\big) = f(x) = p\big(f(x)\big).$$

Finalement, soit $x \in E$ alors :

$$\exists (y, z) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p\ :\ x = y + z$$

et l'on a bien :

$$(p \circ f)(y + z) = (f \circ p)(y + z).$$

17. On a :

$$(p+q)\circ(p+q) = p+q \Longrightarrow p\circ q = -q\circ p.$$

De plus :

$$p\circ q = p\circ p\circ q = -p\circ q\circ p$$

et :

$$q\circ p = q\circ p\circ p = -p\circ q\circ p$$

d'où :

$$p\circ q = q\circ p$$

et finalement :

$$p\circ q = q\circ p = 0.$$

On a clairement :

$$\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q.$$

Montrons :

$$\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im}(p+q).$$

Soit z dans $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$; alors :

$$\exists (x,y)\in E^2 \ : z = p(x) + q(y)$$

puis $(p+q)(z) = p\big(p(x)\big) + q\big(q(y)\big) = z$ donc $z \in \operatorname{Im}(p+q)$.

On montre de plus que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}\cdot$

En effet si $x = p(y) = q(z)$ alors :

$$p(x) = p\circ q(z) = 0 = p^2(y) = p(y) = x.$$

On a clairement

$$\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p+q).$$

Montrons que :

$$\operatorname{Ker}(p+q) \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q.$$

Soit x dans $\operatorname{Ker}(p+q)$. Alors :

$$p(x) = (p^2 + p\circ q)(x) = 0 \quad \text{et} \quad q(x) = (q^2 + q\circ p)(x) = 0$$

d'où $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

18. Soit x_0 un vecteur non nul de E, il existe λ_0 tel que :

$$f(x_0) = \lambda_0 x_0.$$

Soit y un vecteur quelconque de E.
Si la famille (y, x_0) est liée alors il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x_0$ et :

$$f(y) = \mu f(x_0) = \lambda_0 y.$$

Sinon, la famille (x_0, y) est libre et il existe $\lambda_y \in \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que :

$$f(y) = \lambda_y y \qquad \text{et} \qquad f(x_0 + y) = \lambda(x_0 + y).$$

Or :

$$f(x_0 + y) = \lambda(x_0 + y) = f(x_0) + f(y) = \lambda_0 x_0 + \lambda_y y$$

donc :

$$\lambda_0 = \lambda = \lambda_y \qquad \text{et} \qquad f(y) = \lambda_0 y.$$

Finalement nous avons montré que f est l'homothétie de rapport λ_0.

19. Soient $F = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id})$, $G = \operatorname{Ker}(\vec{f} + \mathrm{Id})$, Ω un point fixe de f et $\mathcal{F} = \Omega + F$.
Soit s la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G.
Les applications affines f et s coïncident sur Ω et ont même partie linéaire, donc $f = s$.

20. On a :

$$\overrightarrow{s_1 \circ s_2} = \vec{s_1} \circ \vec{s_2} = -\mathrm{Id}$$

donc $s_1 \circ s_2$ est une homothétie de rapport -1 c'est-à-dire une symétrie centrale.
D'autre part, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduit à un seul point Ω qui est invariant par $s_1 \circ s_2$; c'est donc le centre de cette symétrie centrale.
De plus $s_2 \circ s_1 = s_1 \circ s_2$, puisque $s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$ ont la même partie linéaire et coïncident en Ω.

21 Dans chacun des cas, on remarque que l'application linéaire associée est *respectivement* Id, $-\mathrm{Id}$ et $(-1)^n \mathrm{Id}$.

a) Soient s_1 et s_2 deux symétries centrales respectivement de centres Ω_1 et Ω_2.
La composee $s_1 \circ s_2$ est une translation dont le vecteur associé est $2\,\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$.

b) Soit s_1 une symétrie centrale de centre Ω_1 et t une translation de vecteur $\vec{u}$.
$s_1 \circ t$ est une symétrie centrale dont le centre est donné par $s_1 \circ t(M) = M$ soit $M = \Omega - \dfrac{1}{2}\vec{u}$.
De même , on montre que $t \circ s_1$ est une symétrie centrale de centre le point M défini par $M = \Omega + \dfrac{1}{2}\vec{u}$.

c) Si n est pair, l'application linéaire associée à la composée est Id donc c'est une translation.
Si n est impair, il s'agit d'une symétrie centrale

22. **a)** Soit s_i la symétrie centrale de centre A_i. Alors, le problème est équivalent à la recherche de n points B_i vérifiant pour tout i :

$$s_i(B_i) = B_{i+1}$$

ce qui est équivalent à :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \ , \ s_i(B_i) = B_{i+1} \text{ et } s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_1(B_1) = B_1.$$

Le problème se ramène donc à la recherche d'un point fixe de :

$$s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_1.$$

b)
- Si n est impair, alors $s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_1$ est une symétrie centrale donc admet un unique point fixe.
  En écrivant $s_{2p+1} \circ s_{2p} \circ \cdots \circ s_1(B_1) = B_1$, on trouve :
  $$B_1 = A_1 + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_4A_5} + \cdots + \overrightarrow{A_{2p}A_{2p+1}}.$$
  Une fois B_1 construit, les autres points se déduisent par des symétries centrales.
- Si n est pair ($n = 2p$), alors $s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_1$ est une translation de vecteur :
  $$\vec{u} = \overrightarrow{A_1(s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_1)(A_1)}.$$
  Après calculs, on trouve que :
  $$\vec{u} = 2(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}}).$$
  Le problème n'a donc pas de solution si $\vec{u} \neq 0$.
  Si $\vec{u} = 0$, il y a une infinité de solutions : il suffit de choisir B_1 puis de construire les autres points à l'aide de symétries centrales.

23
- Montrons l'unicité.
  Supposons que (t, s) soit un couple qui convienne, alors :
  $$f \circ f = t \circ s \circ s \circ t = t^2.$$
  Or $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{u}$, donc $t = t_{\vec{u}/2}$ et $s = f \circ t^{-1}$.
- Montrons l'existence.
  D'après ce qui précède, posons :
  $$t = t_{\vec{u}/2} \text{ et } s = f \circ t^{-1}.$$
  Montrons que $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$. Soit A un point de E.
  $$\vec{f}(\vec{u}) = \vec{f}(\overrightarrow{Af \circ f(A)}) = \overrightarrow{f(A)f^2(f(A))} = \vec{u}$$

Soit alors M quelconque dans E.

En posant $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{2}$, on a :

$$f \circ t^{-1}(M) = f\,(M - \vec{v}) = f(M) - \vec{v} = t^{-1} \circ f(M)$$

ce qui montre que $f \circ t^{-1} = t^{-1} \circ f$ puis :

$$s \circ s = \mathrm{Id}\,.$$

Donc s est une symétrie affine qui vérifie $f = s \circ t = t \circ s$.

Chapitre 29

1. On remarque que :

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(u+w)\ ,\ (0,1,0) = \frac{1}{2}(u+v)\ ,\ (0,0,1) = \frac{1}{2}(v+w)$$

ce qui prouve que la famille est génératrice.
On a :

$$(2,1,3) = 2 \times (1,0,0) + (0,1,0) + 3 \times (0,0,1) = \frac{3}{2}u + 2v + \frac{5}{2}w.$$

2. Il s'agit d'une famille libre à $n+1$ éléments dans un espace de dimension $n+1$.
On écrit :

$$X^p = (X-a+a)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a^{p-i}(X-a)^i.$$

Les coordonnées de X^p sont donc $\left(\binom{p}{0}a^p, \binom{p}{1}a^{p-1}, \ldots, \binom{p}{p}, 0, \ldots, 0\right)$.

Si P est non nul, la formule de Taylor en a donne :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

3. $$\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim(F+G) \geqslant 6 - 5 = 1.$$

4. **a)** Le rang est 3 puisque $(-1,-1,1,0) = -(1,1,0,0) + \dfrac{1}{2}(0,0,2,0)$ et que la famille $\big((1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,0,2,0)\big)$ est libre.

b) Le rang est 3 puisque $2X = X^2 + 3X + 1 - (X^2 + X + 1)$ et que la famille $\big(X^2+X+1, X^2+3X+1, X^3+3\big)$ est libre.

c) Le rang est 4 (la famille est libre) .

5. Soient F_1 le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}_1$ et F_2 le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}_2$. Alors $F_1 + F_2$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.
On a clairement :

$$F_1 \subset F_1 + F_2 \quad \text{et} \quad F_2 \subset F_1 + F_2$$

ce qui montre l'inégalité de gauche.
De plus si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de F_1 et $(f_1, f_2, \dots, f_q)$ une base de F_2 alors $(e_1, e_2, \dots. e_p, f_1, f_2, \dots, f_q)$ est une famille génératrice de $F_1 + F_2$, donc :

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \dim(F_1 + F_2) \leqslant p + q = \operatorname{rg}(\mathcal{F}_1) + \operatorname{rg}(\mathcal{F}_2).$$

6

$$(x, y, z, t) \in \operatorname{Vect}(u, v) \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = 2\lambda - \mu \\ y = \lambda - 2\mu \\ z = 3\mu \\ t = 2\lambda + \mu \end{cases}$$

$$\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \lambda = \dfrac{x + t}{4} \\ \mu = \dfrac{z}{3} \\ x = 2\lambda - \mu \\ y = \lambda - 2\mu \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + 2z - 3t = 0 \\ 3x - 12y - 8z + 3t = 0. \end{cases}$$

7. Soit $(e_1, e_2, \dots. e_{n-1})$ une base de H ; alors $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, u)$ est une base de E.
Une forme linéaire φ répond au problème posé si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \ , \ \varphi(e_i) = 0 \text{ et } \varphi(u) = 1$$

ce qui définit entièrement la forme linéaire φ.

8. Supposons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ et montrons que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

En écrivant le théorème du rang pour f et pour f^2, on obtient :

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2.$$

Or :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$$

on a donc :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2.$$

Soit $y \in \operatorname{Im} f$, $\exists x \in E : y = f(x)$ et :

$$f(y) = 0 \Longrightarrow x \in \operatorname{Ker} f^2 \Longrightarrow x \in \operatorname{Ker} f \Longrightarrow y = 0$$

ce qui prouve que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ (ce résultat intermédiaire a déjà été montré dans l'exercice 12 du chapitre 27).
De plus :

$$\dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$$

donc $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

- Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$.
  On a clairement $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
  Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
  Or x s'écrit $x = z + t$ avec $z \in \operatorname{Im} f$ et $t \in \operatorname{Ker} f$ et $y = f(x) = f(z) \in \operatorname{Im} f^2$ ce qui prouve que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$.

- D'autre part, puisque $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$, on a :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2 \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2$$

  (théorème du rang) et puisque $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$:

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

9. Soit $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} f$ que l'on complète en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.
Soit f_i ($i \in \{1, \ldots p\}$) l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \ , \ f_i(e_j) = \delta_{ij} f(e_i)$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Les endomorphismes f_i sont de rang 1 et leur somme est f puisque $f_1 + f_2 + \cdots + f_p$ et f coincident sur la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

10
- On cherche des solutions sous la forme r^n, avec $r \in \mathbb{C}$
  Le complexe r doit être solution de l'équation $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont les solutions sont $1 + i$ et $1 - i$.
  Les deux suites $\big((1+i)^n\big)$ et $\big((1-i)^n\big)$ forment une famille libre de l'espace $S_{\mathbb{C}}$ des solutions.
  D'autre part l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{C}} &\to \mathbb{C}^2 \\ (u_n) &\mapsto (u_0, u_1) \end{aligned}$$

  est un isomorphisme entre $S_{\mathbb{C}}$ et $\mathbb{C}^2$, donc $S_{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2, ce qui assure que la famille $(1+i)^n, (1-i)^n$ (qui est une famille libre à deux éléments) constitue une base de $S_{\mathbb{C}}$.

- Cherchons une base de $S_{\mathbb{R}}$.
  Comme precédemment, on montre à l'aide de l'isomorphisme φ que $S_{\mathbb{R}}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
  Les deux suites :
  $$\mathrm{Re}(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$
  et :
  $$\mathrm{Im}(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$
  sont deux suites de $S_{\mathbb{R}}$ qui forment une famille libre donc une base de $S_{\mathbb{R}}$.

11 On cherche des solutions sous la forme r^n, avec $r \in \mathbb{C}$.
Le complexe r doit être solution de l'équation $r^3 - 2r^2 - r + 2$ dont les solutions sont 1 ,-1 et 2.
On montre que les trois suites 1 et $(-1)^n$ et 2^n forment une famille libre de l'espace $S_{\mathbb{C}}$ des solutions.
D'autre part l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} &S_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^3 \\ &(u_n) \mapsto (u_0, u_1, u_2) \end{aligned}$$

est un isomorphisme entre l'espace des solutions S et $\mathbb{C}^3$ donc S est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, ce qui assure que la famille précédente constitue une base de S.

12. E^* étant de dimension $n+1$ et la famille ayant $n+1$ éléments, il suffit de montrer qu'elle est libre.
Soient $(\lambda_0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $n+1$ réels tels que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0.$$

Alors :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P^{(k)}(0) = 0.$$

En prenant successivement $P = \dfrac{1}{n!}X^n$, $P = \dfrac{1}{(n-1)!}X^{n-1}$ $\ldots$,$P = X$, $P = 1$, on montre que les λ_i sont tous nuls.

13. Soit $f|_{\operatorname{Ker} g\circ f}$ la restriction de f au sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} g \circ f$.
Écrivons la formule du rang :

$$\dim \operatorname{Ker} g \circ f = \dim \operatorname{Im} f|_{\operatorname{Ker} g\circ f} + \dim \operatorname{Ker} f|_{\operatorname{Ker} g\circ f}.$$

Or $\operatorname{Ker} f|_{\operatorname{Ker} g\circ f} \subset \operatorname{Ker} f$ donc $\dim \operatorname{Ker} f|_{\operatorname{Ker} g\circ f} \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$.
De plus $\operatorname{Im} f|_{\operatorname{Ker} g\circ f} \subset \operatorname{Ker} g$ donc $\dim \operatorname{Im} f|_{\operatorname{Ker} g\circ f} \leqslant \dim \operatorname{Ker} g$. Les deux inégalités trouvées sur les dimensions conduisent à la relation cherchée

14. On a :

$$\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v.$$

Or :

$$\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$$

donc :

$$\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

On applique ensuite cette relation avec $u+v$ et $-v$:

$$\operatorname{rg}(u+v-v) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg} v$$

puis avec $u+v$ et $-u$:

$$\operatorname{rg}(u+v-u) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg} u$$

ce qui donne la première partie de l'inégalité.
$u+v$ étant inversible, on a $\dim E = \dim F = n$ et $\operatorname{rg}(u+v) = n$ et l'inegalité précédente donne :

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \geqslant n$$

puis :

$$u \circ v = 0 \Longrightarrow \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

soit :

$$\operatorname{rg} v \leqslant \dim \operatorname{Ker} u = n - \operatorname{rg} u$$

finalement :

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n.$$

15. Soient F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$ et F' le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}'$. On a :

$$\dim F' = s' \quad \text{et} \quad \dim F = s.$$

Le sous-espace vectoriel engendré par la famille obtenue en ajoutant à la famille $\mathcal{F}'$ les $n-r$ vecteurs restants de la famille $\mathcal{F}$ est de dimension au plus égale à $s'+n-r$, or sa dimension est exactement s. On a donc :

$$s' + n - r \geqslant s$$

ce qui est l'inégalité à démontrer.

16. • Supposons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.
Soit $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f$ d'où $f^2(x) = 0$
On a donc $f^2 = 0$.
De plus :

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = \frac{n}{2}.$$

• Supposons $f^2 = 0$ et $\operatorname{rg} f = \dfrac{n}{2}$.

$$f^2 = 0 \Longrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$$

de plus :

$$\frac{n}{2} = \dim \operatorname{Im} f = n - \dim \operatorname{Ker} f$$

donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$, puis $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ (car on a déjà $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$).

17 Soient x et y dans E α et β deux scalaires :

$$g(\alpha x + \beta y)u = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \big(\alpha g(x) + \beta g(y)\big)u$$

et u étant non nul, on a :

$$g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y).$$

Donc g est linéaire de E dans $\mathbf{K}$: c'est bien une forme linéaire sur E.
De plus pour x dans E :

$$f^2(x) = f(g(x)u) = g(x)f(u) = g(x)g(u)u = g(u)g(x)u = g(u)f(x).$$

Le scalaire λ cherché est donc $g(u)$.

18. Il suffit de prendre x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.
En effet si :

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$$

en appliquant successivement f^{n-1}, f^{n-2} ,…, f^2,f à la relation précédente, on trouve :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0.$$

La famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ à n éléments est libre donc constitue une base de E.

19. Il existe e_1 tel que $f^2(e_1) \neq 0$, alors on montre (voir l'exercice précédent) que la famille $\big(e_1, e_2 = f(e_1), e_3 = f^2(e_1)\big)$ est libre et constitue donc une base de E. L'endomorphisme de E commute avec f si et seulement si $f \circ g(e_1) = g \circ f(e_1)$, $f \circ g(e_2) = g \circ f(e_2)$ et $f \circ g(e_3) = g \circ f(e_3)$
Supposons que :

$$g(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3.$$

Alors en écrivant $f(g(e_1)) = g(f(e_1))$ on conclut que nécessairement :

$$g(e_2) = f(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = \alpha e_2 + \beta e_3 = \alpha e_2 + \beta f(e_2) + \gamma f^2(e_2).$$

Il reste à considérer la relation $f\big(g(e_2)\big) = g\big(f(e_2)\big)$.
Elle donne :

$$g(e_3) = f(\alpha e_2 + \beta e_3) = \alpha e_3 = \alpha e_3 + \beta f(e_3) + \gamma f^2(e_3).$$

On vérifie alors que la troisième relation $f(g(e_3)) = g(f(e_3))$ est bien réalisée.
Finalement, les endomorphismes g qui commutent avec f sont ceux de la forme :

$$g = \alpha \operatorname{Id}_E + \beta f + \gamma f^2 \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{K}^3.$$

20. **a)** On vérifie facilement que $(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

b) Supposons que $P \mid Q$ alors :

$$\exists R \in \mathbf{K}[X] \ : Q = PR$$

et :

$$Q(f) = PR(f) = P(f) \circ R(f) = R(f) \circ P(f).$$

On a donc facilement :

$$\operatorname{Ker} P(f) \subset \operatorname{Ker} Q(f) \text{ et } \operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Im} P(f).$$

c) D divise P et Q donc d'après ce qui précède :

$$\operatorname{Ker} D(f) \subset \operatorname{Ker} P(f) \text{ et } \operatorname{Ker} D(f) \subset \operatorname{Ker} Q(f)$$

donc :

$$\operatorname{Ker} D(f) \subset \operatorname{Ker} Q(f) \cap \operatorname{Ker} P(f)$$

De même, on a :

$$\operatorname{Im} P(f) \subset \operatorname{Im} D(f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Im} D(f)$$

donc :

$$\operatorname{Im} P(f) + \operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Im} D(f)$$

Montrons les autres inclusions.
Il existe U et V dans $\mathbf{K}[X]$ tels que :

$$PU + QV = D$$

donc :

$$P(f) \circ U(f) + Q(f) \circ V(f) = U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = D(f)$$

La première égalité assure que :

$$\operatorname{Im} D(f) \subset \operatorname{Im} P(f) + \operatorname{Im} Q(f)$$

et la deuxième égalité, que :

$$\operatorname{Ker} Q(f) \cap \operatorname{Ker} P(f) \subset \operatorname{Ker} D(f).$$

21. On remarque que :

$$u^2 + 3u + 2\,\mathrm{Id} = 0 \Longleftrightarrow v \circ v = v.$$

L'endomorphisme u s'écrit donc $u = v - 2\,\mathrm{Id}$ où v est un projecteur de E.
Il existe donc deux sous-espaces vectoriels F et G tels que $F \oplus G = E$ avec :

$$\forall x \in F \;,\; u(x) = x - 2x = -x$$

et :

$$\forall x \in G \;,\; u(x) = -2x.$$

22. **a)** Soit $x \in K_p$ alors :

$$f^p(x) = 0 \Longrightarrow f\big(f^p(x)\big) = 0 \Longrightarrow x \in K_{p+1}.$$

Soit $y \in I_{p+1}$ alors :

$$\exists x \in E \;:\; y = f^{p+1}(x) = f^p\big(f(x)\big)$$

donc $y \in I_p$.

b) Supposons que :

$$\forall r \in \{0, 1, \ldots, n\} \;,\; K_r \neq K_{r+1}$$

alors, on aurait :

$$0 = \dim K_0 < \dim K_1 < \cdots < \dim K_p < \cdots < \dim K_n < \dim K_{n+1}$$

dans ce cas on aurait :

$$\dim K_{n+1} \geqslant n + 1$$

ce qui est impossible.
L'ensemble :

$$\{p \in \mathbb{N} \mid p \leqslant n \quad \text{et} \quad K_p = K_{p+1}\}$$

est donc non vide.
On note r son plus petit élément.

c) Le théorème du rang assure que :

$$\dim I_r = \dim I_{r+1}$$

puisque de plus :

$$I_{r+1} \subset I_r$$

on a bien :

$$I_r = I_{r+1}.$$

d) Montrons par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \ , \ K_r = K_{r+p}.$$

La propriété est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$.
De plus, supposons $K_{r+p} = K_r$ et soit $x \in K_{r+p+1}$ (avec $p \geqslant 1$) alors :

$$\begin{aligned} f^{r+p+1}(x) = 0 &\Longrightarrow f^{r+1}\big(f^p(x)\big) = 0 \\ &\Longrightarrow f^r\big(f^p(x)\big) = 0 \quad \text{puisque } K_{n+1} = K_r \\ &\Longrightarrow x \in K_{p+r} \\ &\Longrightarrow x \in K_r. \end{aligned}$$

On a donc :

$$K_{r+p+1} \subset K_r$$

d'où :

$$K_{r+p+1} = K_r.$$

En utilisant le theorème du rang , on montre que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \ , \ I_p = I_{r+p}.$$

e) Pour montrer que :

$$E = K_r \oplus I_r$$

il suffit, d'après le théorème du rang, de montrer que $K_r \cap I_r = \{0\}$.
Soit $y \in K_r \cap I_r$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^r(x)$. Or :

$$f^r(y) = 0 \Longrightarrow f^{r+r}(x) = 0 \Longrightarrow f^r(x) = 0 \Longrightarrow y = 0$$

car $K_{2r} = K_r$.

Chapitre 30

1. Le noyau de f est représenté dans la base canonique par le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y-2z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+4y=0 \\ 3y-z=0 \end{cases}$$

donc $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle de vecteur directeur $u=(-4,1,3)$.
Le théorème du rang assure que $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel.
Les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ formant clairement un système libre, ils constituent une base de $\operatorname{Im} f$.

2. Notons (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
(x,y,z,t) appartient au noyau si et seulement si :

$$\begin{cases} x=-7z-t \\ y=-11z-2t. \end{cases}$$

$(-e_1-2e_2+e_4, -7e_1-11e_2+e_3)$ est une base du noyau qui est donc de dimension 2.
Le rang de A est d'après le théorème du rang égal à 2
Une base de l'image de f est par exemple $\big(f(e_1), f(e_2)\big)$.
(x,y,z) appartient à $\operatorname{Im} f$ si et seulement si il existe λ et μ tels que :

$$\begin{cases} x=-11\lambda+7\mu \\ y=\mu \\ z=\lambda \end{cases}$$

soit si et seulement si :

$$x-7y+11z=0$$

ce qui constitue une équation de l'image.

3. La matrice est la suivante:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
On a :

$$P(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)=P(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)^{-1}P(\mathcal{B},\mathcal{B}_2)$$

puisque :

$$P(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)=M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathrm{Id})=P(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)^{-1}M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})P(\mathcal{B},\mathcal{B}_2).$$

Or :

$$P(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}$$

Le calcul de $P(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)^{-1}$ donne :

$$P(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)=\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

La matrice cherchée est donc :

$$\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&3&-1\\4&2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27&-59&10\\9&17&0\\4&10&-3\end{pmatrix}.$$

5. $\begin{pmatrix}4&-1&-2\\-2&3&-4\\-1&-1&3\end{pmatrix}.$

6. Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
$\operatorname{Ker} f$ est le plan d'équation $x+y-z=0$ dont une base est (e_2+e_3,e_1+e_3).
$\operatorname{Im} f$ est la droite vectorielle dirigée par $e_1-3e_2-2e_3$.
On remarque que $f(e_1)=e_1-3e_2-2e_3$ appartient au noyau.
La famille $\mathcal{B}=(e_1-3e_2-2e_3,e_2+e_3,e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice :

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

qui a bien un seul terme non nul.
Notons P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
On a $A^2=0$ donc :

$$\forall n\geqslant 2\ ,\ A^n=0$$

d'où :

$$\forall n\geqslant 2\ ,\ M^n=PA^nP^{-1}=0.$$

7. **a)** Notons $a_{m,p}$ le terme d'indice (m,p) de la matrice $E_{i,j}E_{k,l}$ alors :

$$a_{m,p} = \sum_{q=1}^{n} \delta_{m,i}\delta_{j,q}\delta_{k,q}\delta_{l,p} = \delta_{m,i}\delta_{j,k}\delta_{l,p}.$$

On a donc :

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}.$$

b) Soit $(a_{i,j})$ une matrice commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $(a_{i,j})$ commute avec $E_{k.l}$ soit :

$$\sum_{(i,j)} a_{i,j}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{(i,j)} a_{i,j}E_{k,l}E_{i,j}$$

donc :

$$\sum_{(i,j)} a_{i,j}\delta_{j,k}E_{i,l} = \sum_{(i,j)} a_{i,j}\delta_{l,i}E_{k,j}$$

soit :

$$\sum_{i} a_{i.k}E_{i.l} = \sum_{j} a_{l,j}E_{k,j}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{cases} \forall i \neq k\,, a_{i,k} = 0 \\ \forall j \neq l\,, a_{l,j} = 0 \\ a_{ll} = a_{kk}. \end{cases}$$

En faisant varier l et k, on conclut que A est une matrice diagonale avec tous les termes diagonaux égaux, c'est-à-dire de la forme λI_n qui est bien une matrice répondant à la condition donnée.

c) Soit $(a_{i,j})$ une matrice commutant avec toutes les matrices diagonales : alors $(a_{i,j})$ commute avec $E_{k,k}$ soit :

$$\sum_{(i,j)} a_{i,j}E_{i,j}E_{k,k} = \sum_{(i,j)} a_{i,j}E_{k,k}E_{i,j}$$

donc :

$$\sum_{(i,j)} a_{i,j}\delta_{j,k}E_{i,k} = \sum_{(i,j)} a_{i,j}\delta_{k,i}E_{k,j}$$

soit :

$$\sum_{i} a_{i,k}E_{i,k} = \sum_{j} a_{k,j}E_{k,j}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{cases} \forall i \neq k\,.\, a_{i,k} = 0 \\ \forall j \neq k\,, a_{k,j} = 0. \end{cases}$$

Donc A est une matrice diagonale.

Les matrices diagonales répondent bien au problème. L'ensemble cherché est donc l'ensemble des matrices diagonales.

d) Soit $(a_{i,j})$ une matrice commutant avec toutes les matrices triangulaires supérieures. Alors $(a_{i,j})$ commute avec toutes les matrices diagonales donc est d'après la question précédente une matrice diagonale. Soient $l \geqslant k$:

$$\sum_i a_{i,i} E_{i,i} E_{k,l} = \sum_i a_{i,i} E_{k,l} E_{i,i}$$

donc :

$$\sum_i a_{i,i} \delta_{i,k} E_{i,l} = \sum_i a_{i,i} \delta_{l,i} E_{k,i}$$

soit :

$$a_{k,k} E_{k,l} = a_{l,l} E_{k,l}.$$

On a donc pour tout couple (k,l) avec $l \geqslant k$:

$$a_{k,k} = a_{l,l}.$$

En prenant $k = 1$ et en faisant varier l de 2 à n on conclut que A est une matrice diagonale avec tous les termes diagonaux égaux, c'est-à-dire de la forme λI_n qui est bien une matrice répondant à la condition donnée.

8. Soit f l'application linéaire dont la matrice est A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$. On a :

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_3)\big) = \dim \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3) = 3$$

donc $\operatorname{rg}(A) = 3$.

De plus :

$$f^2(e_1) = 0$$

$$f^2(e_2) = f(e_1) = 0$$

$$f^2(e_3) = f(e_2) = e_1$$

$$f^2(e_4) = f(e_3) = e_2$$

d'où :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\operatorname{rg} A^2 = 2$.

De même, on montre que :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\operatorname{rg} A^3 = 1$.

On a de plus $\forall n \geqslant 4\ ,\ A^n = 0$ donc :

$$\forall n \geqslant 4\ ,\ \mathrm{rg}A^n = 0.$$

9. Il existe $Q \in GL_n(\mathbf{K})$ et $P \in GL_p(\mathbf{K})$ telles que :

$$A = QJ_rP.$$

Or :

$$J_r = E_{1,1} + E_{2,2} + \ldots + E_{r,r}$$

d'où :

$$A = \sum_{i=1}^{r} QE_{i,i}P$$

chaque matrice $QE_{i,i}P$ étant de rang 1

10. On a :

$$P(A) = \mathrm{diag}\big(P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)\big)$$

donc $P(A) = 0$ si et seulement si P admet $a_1, a_2, \ldots a_n$ comme racines.

Or il existe un tel polynôme de degré k si et seulement si :

$$\mathrm{card}\,\{a_1, a_2, .\ ., a_n\} \leqslant k.$$

11. Soit $X = (x_i)$ tel que $AX = 0$ et soit x_{i_0} tel que :

$$|x_{i_0}| = \max\big\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\big\}.$$

Supposons $|x_{i_0}| \neq 0$ (c'est-à-dire $X \neq 0$) alors puisque $AX = 0$ on a :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = 0$$

d'où :

$$a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}x_j$$

donc :

$$|a_{i_0,i_0}x_{i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}||x_{i_0}|$$

donc, puisque $|x_{i_0}| \neq 0$:

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$$

ce qui entre en contradiction avec la condition sur la matrice.
Finalement $|x_{i_0}| = 0$ et $X = 0$.

12. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est A.
On a alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \ , \ f(e_i) = e_{n+1-i}$$

donc :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \ , \ f^2(e_i) = e_{n+1-(n+1-i)} = e_i$$

ce qui prouve que $A^2 = I_n$ donc A est inversible et $A^{-1} = A$

13 Soit J la matrice définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de J^2 conduit à $J^2 = nJ$.
Écrivons :

$$A = \alpha \left(\frac{J}{n} \right) + \beta \left(I - \frac{J}{n} \right)$$

avec :

$$\alpha = b + (n-1)a$$
$$\beta = b - a.$$

Alors puisque $\left(\frac{J}{n}\right)\left(\frac{J}{n}\right) = \left(\frac{J}{n}\right)$, $\left(I - \frac{J}{n}\right)\left(I - \frac{J}{n}\right) = \left(I - \frac{J}{n}\right)$ et $\frac{J}{n}\left(I - \frac{J}{n}\right) = \left(I - \frac{J}{n}\right)\frac{J}{n} = 0$, on a :

$$A^m = \alpha^m \left(\frac{J}{n} \right) + \beta^m \left(I - \frac{J}{n} \right).$$

En particulier :

$$A^2 = (b-a)^2 I + (2ab - 2a^2 + na^2) J$$

donc :

$$A\big(A - (2b - 2a + na)I\big) = (b-a)(a-b-na)I.$$

On conclut que A est inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a - b - na \neq 0$ et que dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{(b-a)(a-b-na)} \big(A - (2b - 2a + na)I\big).$$

14. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Puisque $f^{n-1} \neq 0$, il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0$.
Alors la famille $\big(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ à n éléments donc constitue une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ (voir exercice 20 du chapitre 29).
La matrice de f dans cette nouvelle base est B, et P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$.

15. On vérifie que $(E, +)$ est un sous-groupe que E est stable pour la multiplication et que $I_3 \in E$.
Ce sous-anneau n'est pas commutatif.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce sous-anneau n est donc pas intègre.

$$E = \mathrm{Vect}(E_{1,1} + E_{2,2}, E_{1,3}, E_{2,3}, E_{3,3})$$

d'où :

$$\dim E = 4.$$

16 **a)** $\operatorname{tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k} = \operatorname{tr}(BA).$

b) Soient A la matrice de f relativement à une base $\mathcal{B}$ de E et B sa matrice relativement à une base $\mathcal{B}'$ de E. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ ê $\mathcal{B}'$, alors :

$$B = P^{-1}AP$$

et :

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr}(A).$$

c) Soit $(e_1, e_2 \dots . e_r)$ une base de $\operatorname{Im} p$ et $(e_{r+1}, \dots . e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} p$, alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de p est

$$A = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r}, 0, \dots 0).$$

On a alors clairement que :

$$\operatorname{tr} A = r = \operatorname{rg} A.$$

17
- Si A est inversible alors en multipliant à gauche par A^{-1}, on trouve que $BC = 0$. On a alors nécessairement B et C non inversibles. On a bien trouvé deux matrices non inversibles.
- Si C est inversible alors en multipliant à droite par C^{-1}, on trouve par un raisonnement analogue que A et B ne sont pas inversibles.
- Si ni A, ni C ne sont inversibles, on a bien trouvé deux matrices non inversibles.

18. Soit :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis pour $n \geqslant 4$, $J^n = 0$.
Puisque I et J commutent :

$$A^n = (aI + bJ)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k.$$

Si $n \geqslant 3$ alors :

$$\begin{aligned} (aI + bJ)^n &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k \\ &= a^n I + na^{n-1} J + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 J^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 J^3. \end{aligned}$$

19. Supposons que $M^n \neq 0$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tel que $M^n X \neq 0$.
La famille $\big(X, MX, M^2X, \ldots, M^nX\big)$ serait alors une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ (voir l'exercice 20 du chapitre 29) ce qui est impossible puisque $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est un espace de dimension n.

20. Notons C_1, $C_2, \ldots, C_n$ les matrices colonnes de M.
La famille $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ engendre une droite vectorielle dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Soit A une base de cette droite vectorielle, il existe b_1, $b_2, \ldots, b_n$ tels que :

$$C_1 = b_1 A, \ \ C_2 = b_2 A, \ldots, \ \ C_n = b_n A.$$

Posons :

$$B = (b_1 \ b_2 \ , \ldots \ b_n)$$

on a bien $M = AB$.
Application :
Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est M. On a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
Soit k le rang de f, alors $k \leqslant 3 - k$ d'où $k = 0$ ou $k = 1$.
Donc si $f \neq 0$ alors f est de rang 1.
La matrice M est de rang 1, donc il existe $A \in \mathcal{M}_{n\ 1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = AB$
Puis :

$$(AB)(AB) = A(BA)B = (BA)M = 0$$

car $BA \in \mathbb{K}$. Par conséquent, si $M \neq 0$, $M^2 = 0$ si et seulement si $BA = 0$.
Les matrices cherchées sont donc de la forme :

$$(a_i b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = 0.$$

21. Supposons qu'il y ait deux éléments non nuls dans une rangée.
Quitte à raisonner sur ${}^tA$, on peut supposer que deux éléments d'une ligne sont non nuls.
Soient i, l et k avec $l \neq k$ tels que :

$$a_{i,k} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a_{i,l} \neq 0.$$

Or, pour tout $j \neq i$, on a :

$$\sum_{m=1}^{n} a_{i,m} b_{m,j} = 0.$$

Comme tous les termes de cette somme sont positifs, on a nécessairement :

$$\forall j \neq i \ , \ b_{k,j} = b_{lj} = 0.$$

Les lignes k et l de A^{-1} seraient donc colinéaires ce qui est impossible.

22. Soit $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ avec $i \neq j$, alors :
$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0) = 0.$$
De plus, posons $\lambda = f(E_{1,1})$.
Alors, soit $i \in \{1,\dots,n\}$ il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que :
$$E_{i,i} = P^{-1}E_{1,1}P$$
d'où :
$$f(E_{i,i}) = f(P^{-1}E_{1,1}P) = f(E_{1,1}) = \lambda.$$
Finalement :
$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2\ ,\ f(E_{i,j}) = \lambda \mathrm{tr}(E_{i,j}).$$

23. Le calcul de A^2 donne :
$$A^2 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1a_1 & a_2a_1 & \dots & a_na_1 \\ 0 & a_1a_2 & a_2a_2 & \dots & a_na_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_1a_n & a_2a_n & \dots & a_na_n \end{pmatrix}$$
Notons C la colonne :
$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$
On remarque que pour $i \geqslant 2$, en notant C_i la $i^{ème}$ colonne de A :
$$C_i = a_{i-1}C.$$
On a donc :
$$\mathrm{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n) = \mathrm{Vect}(C_1, C).$$

- Si $(a_1, a_2, \dots a_n) = (0, 0, \dots, 0)$ alors A^2 est nulle.
- Si $(a_1, a_2, \dots a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ et $\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$, alors A^2 est de rang 2.
- Si $(a_1, a_2, \dots a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ et $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$ (cas impossible avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) alors A^2 est de rang 1.

24. **a)** M est la matrice de passage de la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ à la base $(1, (1+X), (1+X)^2, \ldots, (1+X)^n)$.
Pour déterminer M^{-1}, on écrit :

$$X^j = (X+1-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}(X+1)^i.$$

La matrice M^{-1} s'écrit donc :

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \binom{j}{i}(-1)^{j-i} \text{ si } 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

b) On a $A_n = {}^tMB_n$ d'où $B_n = {}^t(M^{-1})A_n$ donc :

$$b_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^{n-p} a_p.$$

c) • Supposons $m \geqslant n$ (sinon, le nombre de surjections est nul).
Notons b_p le nombre de surjections d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à p éléments ($p \leqslant m$). En particulier, on a $b_0 = 0$.
On a :

$$n^m = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} b_p.$$

D'où :

$$b_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^{n-p} p^m.$$

• Notons b_p le nombre de permutations sans points fixes de $\{1, 2 \ldots, p\}$.
Notons A_i l ensemble des permutations de $\{1, 2 \ldots, n\}$ ayant exactement i points fixes. Alors :

$$\operatorname{card}(A_i) = \binom{n}{i} b_i$$

et l'ensemble des permutations de $\{1, 2 \ldots, n\}$ étant égal à la réunion disjointe des A_i, on a :

$$n! = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} b_p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} b_p$$

d'où :

$$b_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^{n-p} p!.$$

Chapitre 31

1. **a)** $$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 0 & -2-m & 1+m^2 \\ 0 & -m-2 & 1+2m \end{pmatrix}$$
$$= 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2+m & 1+m^2 \\ 2+m & 1+2m \end{pmatrix}.$$

- Si $m = -2$ alors :
$$\operatorname{rg}(A) = 2.$$
- Si $m \neq -2$:
$$\operatorname{rg}(A) = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1+m^2 \\ 1 & 1+2m \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1+m^2 \\ 0 & 2m-m^2 \end{pmatrix}.$$

Finalement :
- si $m = 0$ ou $m = 2$ ou $m = -2$ alors $\operatorname{rg}(A) = 2$
- sinon, $\operatorname{rg}(A) = 3$.

b) On procède comme dans la question précédente et l'on trouve :
- si $m^2 + 1 = 0$ ou $m = 0$ ou $m^2 = 1$ alors $\operatorname{rg}(A) = 2$
- sinon $\operatorname{rg}(A) = 3$.

c)
- Si $m = 1$ alors $\operatorname{rg}(A) = 1$,
- si $m = -3$ alors $\operatorname{rg}(A) = 3$,
- sinon, $\operatorname{rg}(A) = 4$.

2 **a)** On cherche à résoudre le système :
$$\begin{cases} x = X \\ -ax + y = Y \\ -ay + z = Z \\ -az + t = T \end{cases}$$
qui est équivalent à :
$$\begin{cases} x = X \\ y = aX + Y \\ z = a^2X + aY + Z \\ t = a^3X + a^2Y + aZ + T. \end{cases}$$
La matrice est donc inversible d'inverse :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} a_1 x_n = X_1 \\ a_2 x_{n-1} = X_2 \\ \dots \\ a_n x_1 = X_n. \end{cases}$$

La matrice inverse existe si et seulement si $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ et vaut alors :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & \dots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_1} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda x = X \\ \lambda y + z = Y \\ -y + \lambda z = Z. \end{cases}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda x = X \\ (1+\lambda^2) z = Y + \lambda Z \\ -y + \lambda z = Z. \end{cases}$$

La matrice est donc inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$
Dans ce cas :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{1+\lambda^2} & -\frac{1}{1+\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{1+\lambda^2} & \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \end{pmatrix}.$$

3. On considère le système :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \dots + x_n = y_1 \\ x_1 + x_3 + \dots + x_n = y_2 \\ \dots \\ x_1 + x_3 + \dots + x_{n-1} = y_n. \end{cases}$$

Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est solution, en additionnant toutes les équations, on trouve :

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = (n-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

donc on a pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$x_i = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - y_i = \frac{1}{n-1}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) - y_i.$$

Le système a donc au maximum une solution ce qui prouve que la matrice A est inversible et que, si l'on note $A^{-1} = (b_{i,j})$:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\ ,\ b_{i,i} = \frac{2-n}{n-1}$$

et :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ i \neq j \implies b_{i,j} = \frac{1}{n-1}.$$

Autre solution :
Soit J la matrice dont tous les éléments sont des 1 alors $A = J - I_n$ et $(A + I_n)^2 = J^2 = n(A + I_n)$ soit $A^2 + (2-n)A = (n-1)I_n$ donc $A\Big(A + (2-n)I_n\Big) = (n-1)I_n$, on en déduit puisque $n \neq 1$ que A est inversible et que :

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}\Big(A + (2-n)I_n\Big).$$

4. Si $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $b \neq 0$, on trouve que le système est de Cramer et que l'unique solution est :

$$x = \frac{a-b}{a^2+a-2}$$
$$y = \frac{ab-2+b}{(a^2+a-2)b}$$
$$z = \frac{a-b}{a^2+a-2}.$$

Si $b = 0$, il n'y a pas de solution.
Si $a = 1$ et $b \neq 1$, alors $S = \varnothing$.
Si $a = b = 1$ alors $S = \Big\{(x, y, 1-x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{C}^2\Big\}$.
Si $a = -2$ et $b \neq -2$ alors $S = \varnothing$.
Si $a = b = -2$ alors $S = \Big\{(-1-2y, y, -1-2y) \mid y \in \mathbb{C}\Big\}$.

5 Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x + my + (m-1)z = m+1 \\ (2-3m)y + (-2m+3)z = -3m \\ m(2-m)y + m(3-m)z = m - m^2. \end{cases}$$

Or :

$$\begin{vmatrix} 2-3m & -2m+3 \\ 2m-m^2 & 3m-m^2 \end{vmatrix} = m^2(m-4).$$

- Si $m \neq 4$ et $m \neq 0$ alors le système a une unique solution :

$$x = -2\frac{m-1}{m(m-4)}$$

$$y = \frac{m^2-4m-3}{m(m-4)}$$

$$z = \frac{m+2}{m(m-4)}.$$

Le rang du système est donc 3.

- Si $m = 0$ alors le système devient :

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

dont l'ensemble des solutions est :

$$\Big\{(x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(2,-3,2) \mid \lambda \in \mathbf{K}\Big\}.$$

Le rang est 2.

- Si $m = 4$ alors le système devient :

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 5 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \\ 3x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x = 5 + 2y \\ z = -2y \\ 15 = 3. \end{cases}$$

C'est un système de rang 2 qui n'a aucune solution.

6. On fait $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$.

- Si $a \neq b$ et $c \neq b$, on trouve que système est équivalent à :

$$\begin{cases} x + cy + (1+c)z = -1 \\ x + ay + (1+a)z = -1 \\ (a+b)x + aby + (1+a)(1+b)z = c \end{cases}$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ donne :

$$\begin{cases} (c-a)y + (c-a)z = 0 \\ x + ay + (1+a)z = -1 \\ (a+b)x + aby + (1+a)(1+b)z = c \end{cases}$$

Si l'on suppose de plus $c \neq a$ on trouve que le système a une unique solution :

$$\begin{cases} x = -1 - a - b - c \\ y = -a - b - c \\ z = a + b + c. \end{cases}$$

- Si deux des nombres a, b et c sont égaux, par exemple $a = b$, alors le système est équivalent à :

$$\begin{cases} (c+a)x + acy + (1+c)(1+a)z = a \\ 2ax + a^2y + (1+a)^2z = c \end{cases}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} (c-a)x + a(c-a)y + (1+a)(c-a)z = a - c \\ 2ax + a^2y + (1+a)^2z = c. \end{cases}$$

- Si $a = b$ et $c \neq a$ alors le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x + ay + (1+a)z = -1 \\ 2ax + a^2y + (1+a)^2z = c. \end{cases}$$

Si de plus $a \neq 0$, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ \left(\frac{c+a}{a} - \frac{a+1}{a}z, -\frac{2a+c}{a^2} + \frac{1-a^2}{a^2}z, z \right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$$

Le rang du système est 2.

► Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ (-1-c, y, c) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le système est de rang 2.

- Si $a = b = c$, le système est équivalent à $2ax + a^2y + (1+a)^2z = a$. Il est de rang 1.

7. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0. \end{cases}$$

La résolution du système dépend de la classe de congruence de n modulo 3 Remarquons que pour $p \in \mathbb{N}^*$ les solutions du système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{3p-3} + x_{3p-2} + x_{3p-1} = 0 \\ x_{3p-2} + x_{3p-1} + x_{3p} = 0 \end{cases}$$

sont les éléments de la forme $(x_1, -x_1, 0, \dots, x_1, -x_1, 0)$.

- Si $n = 3p$, alors le système à résoudre est équivalent à

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_1 \\ \dots \\ x_{3p-2} = x_1 \\ x_{3p-1} = -x_1 \\ x_{3p} = 0 \\ x_{3p-1} + x_{3p} = 0. \end{cases}$$

  On trouve alors la seule solution $(0, 0, \dots, 0)$.

- On procède de même si $n \equiv 1 \quad [3]$, on trouve également que la seule solution est $(0, 0, \dots, 0)$.

- Si $n \equiv 2 \quad [3]$, alors les solutions sont de la forme $(x_1, -x_1, 0, \dots, x_1, -x_1)$.

Le rang du système est donc égal à 3 si $n \equiv 0 \quad [3]$ ou $n \equiv 1 \quad [3]$. Il est égal à $n - 1$ si $n \equiv 2 \quad [3]$.

8. **a)** Le système admet (x, y, z) comme solution si et seulement si le polynôme $x + yX + zX^2$ admet a, b et c comme racines c'est-à-dire si et seulement si $x = y = z = 0$ car ce polynôme est de degré inférieur ou égal à 2.

b) (x, y, z) est solution du système si et seulement si a, b et c sont racines du polynôme P, c'est-à-dire si et seulement si :

$$P = X^4 - zX^2 - yX - x = (X - a)(X - b)(X - c)(X + a + b + c)$$

(la somme des racines du polynôme est nulle).
Compte tenu des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme, on trouve que (x, y, z) est solution du système si et seulement si $x = \sigma_1\sigma_3$, $y = \sigma_3 - \sigma_1\sigma_2$ et $z = \sigma_1^2 - \sigma_2$ où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires de a b et c.

9. (x, y, z, t) est solution du système si et seulement si le polynôme $P = x + yX + zX^2 + tX^3$ vérifie $P(a) = P(b) = 0$ et $P'(a) = P'(b) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$P(X) = (X - a)(X - b)Q(X)$$

avec :

$$Q(a) = \frac{1}{a - b}$$

et :

$$Q(b) = \frac{1}{b-a},$$

soit, puisque Q est de degré inférieur ou égal à 1 :

$$P(X) = \frac{1}{(a-b)^2}(X-a)(X-b)\Big(2X-(a+b)\Big)$$

Finalement, le système a une unique solution :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{ab(a+b)}{(a-b)^2} \\ y = \dfrac{a^2+4ab+b^2}{(a-b)^2} \\ z = -\dfrac{3(a+b)}{(a-b)^2} \\ t = \dfrac{2}{(a-b)^2}. \end{cases}$$

10. **a)** Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n. \end{cases}$$

Le système vérifié par les deuxièmes coordonnées est analogue.

b) • Pour $n = 3$, on trouve :

$$\begin{cases} x_1 = a_1 - a_2 + a_3 \\ x_2 = a_1 + a_2 - a_3 \\ x_3 = -a_1 + a_2 + a_3. \end{cases}$$

Le problème géométrique a une unique solution donnée par :

$$B_1 = A_1 + \overrightarrow{A_2A_3} \quad B_2 = A_2 + \overrightarrow{A_3A_1} \quad B_3 = A_3 + \overrightarrow{A_1A_2}.$$

Si les trois points ne sont pas alignes, B_1 est sur la droite passant par A_1 et parallèle à (A_2A_3), il est de plus sur la droite passant par A_3 et B_3 c'est-à-dire la droite passant par A_3 et parallèle à (A_1A_2). B_1 est donc le point d'intersection de ces deux droites, ce qui permet de le construire simplement. On construit de même B_2 et B_3.

• Pour $n = 4$, on trouve :

$$\begin{cases} x_2 = 2a_1 - x_1 \\ x_3 = 2a_2 - 2a_1 + x_1 \\ x_4 = 2a_3 - 2a_2 + 2a_1 - x_1 \\ a_1 + a_3 = a_2 + a_4. \end{cases}$$

Le problème géométrique a donc au moins une solution si et seulement si les points A_1, A_2, A_3 et A_4 forment un parallélogramme.
Dans ce cas, il y a une infinité de solutions de la forme :

$$B_2 = B_1 + 2\overrightarrow{B_1A_1}$$

$$B_3 = B_1 + 2\overrightarrow{A_1A_2}$$

$$B_4 = B_1 + 2\overrightarrow{A_2A_3} + 2\overrightarrow{B_1A_1}.$$

c) • Si n est pair, $n = 2p$:

$$\begin{cases} x_2 = 2a_1 - x_1 \\ x_3 = 2a_2 - 2a_1 + x_1 \\ \dots \\ x_{2p} = 2a_{2p-1} - 2a_{2p-2} + \cdots + 2a_1 - x_1 \\ a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2p} = 0. \end{cases}$$

Le système admet donc au moins une solution si et seulement si :

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2p} = 0.$$

Le problème geométrique admet au moins une solution si et seulement si :

$$\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_4A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{2p}A_{2p-1}} = 0$$

c'est–à–dire si, et seulement si, les isobarycentres de $(A_1, A_3, \dots, A_{2p-1})$ et $(A_2, A_4, \dots, A_{2p})$ sont égaux.
Dans ce cas, il y a une infinité de solutions au problème données par B_1 quelconque, puis B_2 symétrique de B_1 par rapport à A_1, B_3 symétrique de B_2 par rapport à A_3, ...

$$B_2 = B_1 + 2\overrightarrow{B_1A_1}$$

$$B_3 = B_1 + 2\overrightarrow{A_1A_2}$$

$$\dots$$

$$B_{2k} = B_1 + 2\overrightarrow{B_1A_1} + 2\overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + 2\overrightarrow{A_{2k-2}A_{2k-1}}$$

$$B_{2k+1} = B_1 + 2\overrightarrow{A_1A_2} + 2\overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + 2\overrightarrow{A_{2k-1}A_{2k}}$$

$$\dots$$

$$B_{2p} = B_1 + 2\overrightarrow{B_1A_1} + 2\overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + 2\overrightarrow{A_{2p-2}A_{2p-1}}.$$

• Si n est impair, $n = 2p+1$:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 + E_2 + \cdots + E_n \\ E_1 + E_3 + \cdots + E_n \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 - a_2 + \cdots - a_{2p} + a_{2p+1} \\ x_2 = a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2p} - a_{2p+1} \\ \dots \\ x_{2p+1} = -a_1 + a_2 - \cdots + a_{2p} + a_{2p+1}. \end{cases}$$

Le système admet toujours une unique solution.
Les points B_i solutions du problème sont :

$$B_1 = A_1 + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_4A_5} + \cdots + \overrightarrow{A_{2p}A_{2p+1}}$$

$$B_2 = A_2 + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_5A_6} + \cdots + \overrightarrow{A_{2p+1}A_1}$$

$$\ldots$$

$$B_{2p+1} = A_{2p+1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}}.$$

d) La matrice est inversible lorsque n est impair, et la resolution du système montre que son inverse a pour première ligne :

$$L_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1,\ldots,-1,1)$$

les lignes suivantes étant obtenues par permutation circulaire de L_1.

Si n est pair, la forme des solutions montre que l'ensemble des solutions du système homogène associé est $\mathbb{R}(1,-1,\ldots,-1)$. Le système est donc de rang $n-1$.

11. **a)** Les valeurs de λ pour lesquelles $A-\lambda I$ n'est pas inversible sont 0, $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.

Le système $AX=0$ a pour ensemble de solutions :

$$\mathrm{Vect}(1,-2,1).$$

Le système $AX=\sqrt{6}X$ a pour ensemble de solutions :

$$\mathrm{Vect}(-5+2\sqrt{6}, \sqrt{6}-2, 1).$$

Le système $AX=-\sqrt{6}X$ a pour ensemble de solutions :

$$\mathrm{Vect}(-5-2\sqrt{6}, -\sqrt{6}-2, 1).$$

b) $D = \mathrm{diag}(0,\sqrt{6},-\sqrt{6})$ et :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -5+2\sqrt{6} & -5-2\sqrt{6} \\ -2 & \sqrt{6}-2 & -\sqrt{6}-2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12 **a)** Les valeurs de λ pour lesquelles $A-\lambda I$ n'est pas inversible sont -3 et 1
Le système $AX=-3X$ a pour solution $\mathrm{Vect}(-1,1,1,1)$.
Le système $AX=X$ a pour solution $\mathrm{Vect}\Big((1,1,0,0),(1,0,0,1),(1,0,1,0)\Big)$.

b) $D = \operatorname{diag}(-3, 1, 1, 1)$ et

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 32

1. Soit (i, j) une transposition quelconque $(i \neq j)$ on écrit :

$$(i, j) = (1, i) \circ (1, j) \circ (1, i).$$

Toute permutation pouvant s'écrire comme produit de transpositions on en déduit le résultat annoncé.

2. Soit (i, j) une transposition quelconque.
On peut supposer $j > i$.
Alors :

$$(i, j) = (i, i+1)(i+1, i+2) \cdots (j-1, j)(j-2, j-1) \cdots (i, i+1).$$

3. On vérifie que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-2\} \ , \ \sigma^i \circ \tau \circ \sigma^{-i} = (i+1, i+2).$$

Toute transposition de la forme $(i, i+1)$ s'écrit donc comme un produit des permutations τ et σ. On conclut avec l'exercice précédent.

4. Soit σ une permutation paire, alors σ peut s'écrire comme le produit d'un nombre pair de transpositions.
Montrons que le produit de deux transpositions distinctes peut s'écrire comme le produit de cycles d'ordre 3.
Soient $a, b, c \in \{1 \ldots, n\}$ trois éléments distincts. On a :

$$(a, b) \circ (b, c) = (a, b, c)$$

qui est un cycle d 'ordre 3.
Soient $a, b, c, d \in \{1 \ldots, n\}$ quatre éléments distincts. On a :

$$(a, b) \circ (c, d) = (a, b) \circ (b, c) \circ (b, c) \circ (c, d) = (a, b, c) \circ (b, c, d)$$

qui est le produit de deux cycles.

5. On remarque d'abord que si σ est une permutation de $\mathcal{S}_n$, alors :

$$\sigma \circ (a, b, c) \circ \sigma^{-1} = \big(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\big).$$

Soit σ dans $\mathcal{S}_n$ telle que :

$$\sigma(a) = a' \ , \ \sigma(b) = b' \ , \ \sigma(c) = c'.$$

Si σ est paire, on a trouvé une permutation repondant au problème.
Sinon, puisque $n \geqslant 5$, il est possible de trouver une transposition τ laissant a', b' et c' fixes, la permutation $\tau\sigma$ convient (elle est paire).

6. Soit σ commutant avec toutes les permutations et soit $\tau = (i, j)$ une transposition quelconque.
Soit x avec $x \neq i$ et $x \neq j$, alors :

$$\sigma(x) = \sigma \circ \tau(x) = \tau\big(\sigma(x)\big)$$

donc $\sigma(x) \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$ et σ étant une bijection, on a $\sigma(\{i, j\}) = \{i, j\}$.
En raisonnant de même avec une transposition (i, k), on trouve que :

$$\sigma(\{i, k\}) = \{i, k\}.$$

Finalement $\sigma(i) = i$ et σ est égale à l'identité.

7. Notons $\tau = (i, j)$ et $\tau' = (k, l)$.
Si $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \varnothing$ alors on trouve que :

$$(\tau\tau')^2 = \mathrm{Id}\,.$$

Si $\{i, j\} \cap \{k, l\}$ a un seul élément, alors :

$$(\tau\tau')^3 = \mathrm{Id}\,.$$

Si $\{i, j\} \cap \{k, l\}$ a deux éléments, c'est-à-dire $\tau = \tau'$ alors :

$$\tau\tau' = \mathrm{Id}\,.$$

8. Soit σ une permutation de $\mathcal{S}_n$.
Considérons :

$$\{\sigma^k(1) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Cet ensemble non vide est fini.
Il existe donc $p < q$ tels que $\sigma^p(1) = \sigma^q(1)$ et donc $k = q - p > 0$ tel que :

$$\sigma^k(1) = 1.$$

Notons k_1 le plus petit k satisfaisant à cette condition.
Soit γ_1 le cycle $\gamma_1 = \big(1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{k_1-1}(1)\big)$, la permutation $\gamma_1^{-1}\sigma$ laisse fixes les points de l'ensemble $\big\{1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{k_1-1}(1)\big\}$ soit k_1 points fixes

On recommence en prenant un point i_2 qui n'appartient pas à cet ensemble. Notons γ_2 le cycle $\gamma_2 = \big(i_2, \sigma(i_2), \sigma^2(i_2)\dots, \sigma^{k_2-1}(i_2)\big)$
La permutation $\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\sigma$ laisse $k_1 + k_2$ points fixes.
Au bout d'au plus n opérations de ce type, on trouve une permutation laissant tous les points fixes, c'est-à-dire d'identité.On trouve :

$$\sigma = (1.7,4) \circ (2.6.8.10) \circ (3.9.5)$$

Cette permutation est d'ordre $3 \times 4 = 12$ puisque :

$$\sigma^k = (1,7,4)^k (2,6,8,10)^k (3,9,5)^k.$$

9. **a)** $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & c-a \\ ab & a(c-b) & b(c-a) \end{vmatrix} \\
&= (c-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 1 \\ ab & a & b \end{vmatrix} \\
&= (c-b)(c-a)(b-a).
\end{aligned}$$

b) $L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2aL_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2bL_3$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a-b-c \\ 0 & -a-b-c & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(a+b+c)^3
\end{aligned}$$

c) $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} &= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & -1 & a & c \\ -1 & 0 & c & a \end{vmatrix} \\
&= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & c & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 0 & a+b & 2c \\ 0 & 0 & 2c & a+b \end{vmatrix} \\
&= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & 2c \\ 2c & a+b \end{vmatrix} \\
&= (a-b)^2(a+b-2c)(a+b+2c)
\end{aligned}$$

10. a) $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ conduit à :

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & b-c-a & 0 \\ 0 & c+a-b & c-a-b \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}.$$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_2 - C_1$ donne :

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & b-c-a & 2a-2b \\ 0 & c+a-b & -2a \\ a^2 & b^2 & 2ab \end{vmatrix}$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & -2b \\ 0 & c+a-b & -2a \\ a^2 & b^2 & 2ab \end{vmatrix}$$

puis en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} D &= (a+b+c)^2\big(2ba^2(c+a-b) + 2ab^2(b+c-a) \\ &\qquad + 2ab(b+c-a)(c+a-b)\big) \\ &= 2abc(a+b+c)^3. \end{aligned}$$

b) $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ donne :

$$\begin{aligned} D &= 2 \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

soit :

$$D = 2abc(b-a)(c-b)(c-a).$$

c)

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ 0 & a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2b^2 & a^2-c^2-b^2 & b^2 \\ a^2-b^2-c^2 & -2c^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc) \\ &= (a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c) \end{aligned}$$

11.
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6+5\times 10+1\times 100 \\ 2 & 6 & 0+6\times 10+2\times 100 \\ 3 & 2 & 5+2\times 10+3\times 100 \end{vmatrix}$$
$$= 13 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 2 & 6 & 20 \\ 3 & 2 & 25 \end{vmatrix}.$$

De même 312, 256 et 560 sont divisibles par 8 et en opérant de manière analogue sur les lignes, on montre que le déterminant est divisible par 8.

12. $\det {}^tA = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. Donc $\det A = 0$.

13. Notons D_n le déterminant à calculer.
En développant par rapport à la première ligne :
$$D_n = aD_{n-1} - D_{n-2}$$
de plus :
$$D_1 = a \quad \text{et} \quad D_2 = a^2 - 1.$$
On peut poser $D_0 = 1$ (la relation de récurrence est alors vérifiée pour $n \geqslant 2$).
Si $X^2 - aX + 1 = (X-r)(X-s)$, alors on trouve :

- si $r \neq s$ (c'est-à-dire $a^2 \neq 4$), $D_n = \dfrac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r-s}$,
- si $r = s$, alors $D_n = (1+n)r^n$.

14 En ajoutant à la première colonne les autres colonnes, on obtient :
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
en retranchant la première colonne aux autres, on obtient :
$$D_n = (n-1)(-1)^{n-1}.$$

15. Pour $i \in \{2,\ldots,p\}$ retranchons la $(i-1)^{ème}$ ligne à la $i^{ème}$:

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ 0 & \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-2}{0} & \cdots & \binom{n+p-2}{p-2} \end{vmatrix}$$

ce qui en développant par rapport à la première colonne, donne :

$$\Delta_{n,p} = \Delta_{n,p-1}.$$

D'où :

$$\Delta_{n,p} = \Delta_{n,1} = 1.$$

16 On retranche la première ligne aux autres, alors :

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & \ldots & \ldots & s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 & \ldots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & s_2 - s_1 & \ldots & s_n - s_1 \end{vmatrix}$$

$$= s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \ldots & s_2 - s_1 \\ \vdots & & \vdots \\ s_2 - s_1 & \ldots & s_n - s_1 \end{vmatrix}$$

donc par récurrence :

$$D = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\ldots(s_n - s_{n-1}).$$

17. En écrivant $\cos(a_i + kb) = \cos a_i \cos(kb) - \sin(a_i)\sin(kb)$ et en utilisant la multilinéarité du déterminant, on trouve que :

$$D = \begin{vmatrix} \cos a_0 & -\sin a_0 \sin b & \ldots & -\sin a_0 \sin(nb) \\ \cos a_1 & -\sin a_1 \sin b & \ldots & -\sin a_1 \sin(nb) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos a_n & -\sin a_n \sin b & \ldots & -\sin a_n \sin(nb) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \sin b \sin 2b \ldots \sin nb \begin{vmatrix} \cos a_0 & \sin a_0 & \ldots & \sin a_0 \\ \cos a_1 & \sin a_1 & & \sin a_1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \cos a_n & \sin a_n & \ldots & \sin a_n \end{vmatrix}.$$

Donc :

- si $n \geqslant 2$ alors $D = 0$
- si $n = 1$ alors $D = -\sin b \sin(a_1 - a_0)$.

18.

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & .. & P(n) \\ P(2) & P(3) & .. & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & .. & P(2n-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(1) & \Delta P(2) & \dots & \Delta P(n) \\ P(2) & \Delta P(3) & \dots & \Delta P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & \Delta P(n+1) & .. & \Delta P(2n-1) \end{vmatrix}.$$

En itérant le procédé $n-1$ fois , on trouve :

$$D = \begin{vmatrix} P(1) & \Delta P(2) & .. & \Delta^p(k+1) & \dots & \Delta^{n-1}P(n) \\ P(2) & \Delta P(3) & .. & \Delta^p(k+2) & .\,. & \Delta^{n-1}P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P(n) & \Delta P(n+1) & .. & \Delta^p(k+n) & \dots & \Delta^{n-1}P(2n-1) \end{vmatrix}.$$

Or $\Delta^{n-1}P = 0$ puisque $n-1 \geqslant k+1$.
La dernière colonne du déterminant étant nulle, celui-ci est nul.

19. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives est A et g l'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives est B.
Alors AB est la matrice de $f \circ g$.
Or, f étant non surjective, $f \circ g$ est non inversible et donc $\det(AB) = 0$

20. • Si A n'est pas inversible, alors ${}^t(\mathrm{com}A)$ ne l'est pas non plus puisque sinon la relation $A({}^t\mathrm{com}A) = 0$ entraînerait $A = 0$ puis ${}^t\mathrm{com}A = 0$, ce qui est contradictoire. Donc

$$\det(\mathrm{com}A) = 0 = (\det A)^{n-1}.$$

• Si A est inversible, alors la relation $A^t(\mathrm{com}A) = (\det A)I_n$ donne :

$$\det A \det\big(\mathrm{com}A\big) = \big(\det A\big)^n \qquad \text{soit} \qquad \det\big(\mathrm{com}A\big) = \big(\det A\big)^{n-1}$$

21. Supposons que X soit solution, alors nécessairement X est inversible, en effet :

$$\mathrm{com}(X)^tX = \det X I_n$$

donc si $\det X = 0$ alors $A^tX = 0$ donc ${}^tX = 0$ et $X = 0$ ce qui impossible car $A = \mathrm{com}(X)$ est inversible.
Alors :

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X}{}^tA$$

donc :
$$\det X^{-1} = \frac{1}{\det X} = \frac{1}{(\det X)^n} \det A$$
d'où :
$$(\det X)^{n-1} = \det A$$
donc $\det X$ est solution de l'équation $x^{n-1} = \det A$ $(*)$.

- Si n est impair et $\det A < 0$, il n'y a aucune solution au problème.
- Si n est impair et $\det A > 0$, l'équation $(*)$ a deux solutions.
- Si n est pair, l'équation $(*)$ a une seule solution.

Supposons que l'on soit dans l'un des deux cas où l'équation $(*)$ admet au moins une solution.

Alors les solutions du problème, si elle existent sont de la forme $X = x\,{}^tA^{-1}$ ou x est solution de $(*)$.

Vérifions que ce sont bien des solutions :
$$\mathrm{com}X = \mathrm{com}\, x{}^tA^{-1} = x^{n-1}\mathrm{com}({}^tA^{-1}) = x^{n-1}\det(A^{-1})A = A.$$
En conclusion :

- si n est impair et $\det A < 0$, il n y a aucune solution au problème
- si n est impair et $\det A > 0$, il y a deux solutions,
- si n est pair, il y a une seule solution.

22. $\mathbb{C}_n[X]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.
$$(X - z_i)^n = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} z_i^{n-j} X^j.$$
Le déterminant de la famille dans la base $(1, X, X^2 \ldots, X^n)$ est donc :
$$\Delta = \begin{vmatrix} \binom{n}{0}(-z_0)^n & \binom{n}{0}(-z_1)^n & .. & \binom{n}{0}(-z_n)^n \\ \binom{n}{1}(-z_0)^{n-1} & \binom{n}{1}(-z_1)^{n-1} & .. & \binom{n}{1}(-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & .. & \binom{n}{n} \end{vmatrix}$$
$$= \binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n} \begin{vmatrix} (-z_0)^n & (-z_1)^n & .. & (-z_n)^n \\ (-z_0)^{n-1} & (-z_1)^{n-1} & .. & (-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & .. & 1 \end{vmatrix}$$
On reconnaît un déterminant de Vandermonde qui est non nul, puisque les z_i sont supposés distincts.

23. Rappelons que :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On remarque que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$, donc φ est une symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Si $(e_1, e_2, \ldots, e_{\frac{n(n+1)}{2}})$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_{\frac{n(n-1)}{2}})$ une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$(e_1, e_2, \ldots, e_{\frac{n(n+1)}{2}}, f_1, f_2, \ldots, f_{\frac{n(n-1)}{2}})$$

est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans laquelle la matrice de φ est :

$$\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$$

de déterminant $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

24. Si $A \notin G\ell_n(\mathbb{K})$ alors $\det M = 0$.

Sinon par des opérations élémentaires sur les lignes de M, on transforme A en matrice triangulaire supérieure, dont on note $\lambda_1 \ldots \lambda_p$ les éléments diagonaus.

On a alors

$$\det M = \lambda_1 \ldots \lambda_p \det B = \det A \det B.$$

25. On trouve que la $k^{\text{ème}}$ colonne de AM est égale à la $k^{\text{ème}}$ colonne de M multipliée par $(a_1 + a_2\omega^{k-1} + \cdots + a_n\omega^{(k-1)(n-1)})$, d'où :

$$\begin{aligned}\det(AM) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)&(a_1 + a_2\omega + \cdots + a_n\omega^{n-1})\\ &\ldots(a_1 + a_2\omega^k + \cdots + a_n\omega^{k(n-1)})\ldots\\ &\ldots(a_1 + a_2\omega^{n-1} + \cdots + a_n\omega^{(n-1)(n-1)})\det(M)\end{aligned}$$

$\det M$ étant non nul (déterminant de Van der Monde), on a :

$$\begin{aligned}\det(A) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)&(a_1 + a_2\omega + \cdots + a_n\omega^{n-1})\\ &\ldots(a_1 + a_2\omega^k + \cdots + a_n\omega^{k(n-1)})\ldots\\ &\ldots(a_1 + a_2\omega^{n-1} + \cdots + a_n\omega^{(n-1)(n-1)}).\end{aligned}$$

26.

$$(R + iS)B = A(R + iS) \Longrightarrow RB = AR \quad \text{et} \quad SB = AS$$

donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ (R + tS)B = A(R + tS).$$

Supposons que pour tout t dans $\mathbb{R}$ la matrice $R + tS$ soit non inversible
Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \det(R + tS) = 0.$$

Or $\det(R+tS)$ est un polynôme en t qui s'annule sur $\mathbb{R}$ il est donc identiquement nul.
Comme $\det(R+iS) \neq 0$ l'hypothèse est fausse.
Il existe donc $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q = R + t_0 S$ soit inversible.
On a alors $B = Q^{-1}AQ$ avec $Q \in Gl_n(\mathbb{R})$.

27. Le point de coordonnées (x, y) est dans $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ si et seulement s'il vérifie le système :

$$\begin{cases} u_1 x + v_1 y + h_1 = 0 \\ u_2 x + v_2 y + h_2 = 0 \\ u_3 x + v_3 y + h_3 = 0 \end{cases}$$

soit si et seulement si le triplet $(x, y, 1)$ est solution de :

$$\begin{cases} u_1 x + v_1 y + h_1 z = 0 \\ u_2 x + v_2 y + h_2 z = 0 \\ u_3 x + v_3 y + h_3 z = 0. \end{cases}$$

Une condition nécéssaire est donc que :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Montrons que c'est une condition suffisante.
Les trois formes linéaires φ_i définies par :

$$\varphi_i(x, y, z) = u_i x + v_i y + h_i z.$$

forment une famille liée. Or au moins deux d'entre elles forment une famille libre : supposons que ce sont φ_1 et φ_2.
Alors φ_3 est combinaison linéaire de φ_1 et de φ_2, donc :

$$\operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi_2 \cap \operatorname{Ker}\varphi_3 = \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi_2.$$

Le système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} u_1 x + v_1 y + h_1 z = 0 \\ u_2 x + v_2 y + h_2 z = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

donc il existe au moins une solution de la forme $(x, y, 1)$.

28 Le développement du déterminant montre que $\det(A-\lambda I_n)$ est une expression polynomiale en λ de degré n.
D'autre part :

$$\det(A-\lambda I_n)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1}\alpha_{\sigma(2),2}\cdots\alpha_{\sigma(n),n}$$

où :

$$\alpha_{i,j}=a_{i,j}-\delta_{i,j}\lambda.$$

Pour toute permutation $\sigma\neq\mathrm{Id}$, le terme :

$$\varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1}\alpha_{\sigma(2),2}\cdots\alpha_{\sigma(n),n}$$

est de degré au plus $n-2$ en λ.

Le terme correspondant à $\sigma=\mathrm{Id}$ est :

$$(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{n,n}-\lambda).$$

Le coefficient de λ^n est donc $(-1)^n$ et le coefficient du terme en λ^{n-1} est :

$$(-1)^{n-1}(a_{1,1}+a_{2,2}+\cdots a_{n,n}).$$

Le terme constant de $\det(A-\lambda I_n)$ est la valeur obtenue pour $\lambda=0$ soit $\det A$.

29 On peut supposer $a_i+b_i+c_i=1$ $(i=1,2,3)$. Or dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, du plan (ABC), on a :

$$\det(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3})=\begin{vmatrix} b_2-b_1 & b_3-b_1\\ c_2-c_1 & c_3-c_1\end{vmatrix}.$$

Par opération sur les lignes et les colonnes, on montre que cette condition est équivalente à :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0.$$

30. • Supposons tout d'abord que les droites portant les points A_1, A_2 et A_3 ainsi que B_1, B_2 et B_3, se coupent. Il existe alors un repère du plan dans lequel les coordonnées des points A_i et B_i sont respectivement $(a_i,0)$ et $(0,b_i)$. On suppose que les a_i et b_i sont non nuls. Les droites A_2B_3 et A_3B_2 admettent alors pour équations :

$$a_2^{-1}X+b_3^{-1}Y-1=0 \quad\text{et}\quad a_3^{-1}X+b_2^{-1}Y-1=0.$$

Les coordonnées de C_1 sont donc :

$$\left(\frac{b_3^{-1}-b_2^{-1}}{a_3^{-1}b_3^{-1}-a_2^{-1}b_2^{-1}},\frac{a_3^{-1}-a_2^{-1}}{a_3^{-1}b_3^{-1}-a_2^{-1}b_2^{-1}}\right).$$

On obtient celles de C_2 et C_3 par permutation circulaire. Calculons alors le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{b_3^{-1}-b_2^{-1}}{a_3^{-1}b_3^{-1}-a_2^{-1}b_2^{-1}} & \dfrac{b_1^{-1}-b_3^{-1}}{a_1^{-1}b_1^{-1}-a_3^{-1}b_3^{-1}} & \dfrac{b_2^{-1}-b_1^{-1}}{a_2^{-1}b_2^{-1}-a_1^{-1}b_1^{-1}} \\ \dfrac{a_3^{-1}-a_2^{-1}}{a_3^{-1}b_3^{-1}-a_2^{-1}b_2^{-1}} & \dfrac{a_1^{-1}-a_3^{-1}}{a_1^{-1}b_1^{-1}-a_3^{-1}b_3^{-1}} & \dfrac{a_3^{-1}-a_2^{-1}}{a_2^{-1}b_2^{-1}-a_1^{-1}b_1^{-1}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Après multiplication des colonnes par les facteurs $a_3^{-1}b_3^{-1} - a_2^{-1}b_2^{-1}$, $a_1^{-1}b_1^{-1} - a_3^{-1}b_3^{-1}$ et $a_2^{-1}b_2^{-1} - a_1^{-1}b_1^{-1}$ (non nuls puisque les points existent), ce déterminant devient :

$$\begin{vmatrix} b_3^{-1}-b_2^{-1} & b_1^{-1}-b_3^{-1} & b_2^{-1}-b_1^{-1} \\ a_3^{-1}-a_2^{-1} & a_1^{-1}-a_3^{-1} & a_3^{-1}-a_2^{-1} \\ a_3^{-1}b_3^{-1}-a_2^{-1}b_2^{-1} & a_1^{-1}b_1^{-1}-a_3^{-1}b_3^{-1} & a_2^{-1}b_2^{-1}-a_1^{-1}b_1^{-1} \end{vmatrix}.$$

Il est nul puisque la somme de ses colonnes est nulle.

- Supposons maintenant que les droites portant les points A_1, A_2 et A_3 ainsi que B_1. B_2 et B_3 soient parallèles. Il existe alors un repère du plan dans lequel les coordonnées des points A_i et B_i sont $(a_i, 0)$ et $(b_i, 1)$ On suppose que les a_i et b_i sont non nuls. Les droites A_2B_3 et A_3B_2 admettent pour équations :

$$X - (b_3 - a_2)Y - a_2 = 0 \quad \text{et} \quad X - (b_2 - a_3)Y - a_3 = 0.$$

Les coordonnées de C_1 sont donc :

$$\left(\frac{a_2b_2 - a_3b_3}{a_2 + b_2 - a_3 - b_3}, \frac{a_2 - a_3}{a_2 + b_2 - a_3 - b_3}\right)$$

On obtient celles de C_2 et C_3 par permutation circulaire. Calculons alors le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_2b_2-a_3b_3}{a_2+b_2-a_3-b_3} & \dfrac{a_3b_3-a_1b_1}{a_3+b_3-a_1-b_1} & \dfrac{a_1b_1-a_2b_2}{a_1+b_1-a_2-b_2} \\ \dfrac{a_2-a_3}{a_2+b_2-a_3-b_3} & \dfrac{a_3-a_1}{a_3+b_3-a_1-b_1} & \dfrac{a_1-a_2}{a_1+b_1-a_2-b_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Après multiplication des colonnes, ce déterminant devient :

$$\begin{vmatrix} a_2b_2-a_3b_3 & a_3b_3-a_1b_1 & a_1b_1-a_2b_2 \\ a_2-a_3 & a_3-a_1 & a_1-a_2 \\ a_2+b_2-a_3-b_3 & a_3+b_3-a_1-b_1 & a_1+b_1-a_2-b_2 \end{vmatrix}$$

Il est nul puisque la somme de ses colonnes vaut 0.

Chapitre 33

1. Si la famille $(x_1, x_2, \dots x_n)$ est liee, alors $[x_1, x_2, \dots, x_n] = 0$ et l'on a bien le résultat.
Si la famille est libre, par le procédé de Schmidt, on obtient une base $(e_1, e_2, \dots e_n)$ orthonormée. Le déterminant dans cette base de la famille $(x_1, x_2, \dots x_n)$ est triangulaire supérieure et les éléments diagonaux sont $(x_i | e_i)$.
De plus :
$$\left|\prod_{i=1}^{n}(x_i|e_i)\right| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\|x_i\|\,\|e_i\| = \prod_{i=1}^{n}\|x_i\|,$$
ce qui montre le résultat.

2. Il suffit d'écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique avec les deux vecteurs $u = (1, 1, \dots, 1)$ et $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
Il y a égalité si et seulement si v est de la forme $v = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. On montre facilement que :
$$A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp.$$

- Puisque $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, on a donc :
$$(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp.$$
Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Tout élément $z \in (F+G)$ s'écrit $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in F$ et $z_2 \in G$. Alors :
$$(\, x \mid z\,) = (\, x \mid z_1\,) + (\, x \mid z_2\,) = 0$$
ce qui montre que :
$$F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$$

- Puisque $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$ on a $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ d'où :
$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$
Pour montrer l'autre inclusion, comparons les dimensions des deux sous-espaces :
$$\begin{aligned}\dim\left(F^\perp + G^\perp\right) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim\left(F^\perp \cap G^\perp\right)\\ &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim\,(F+G)^\perp\\ &= \dim E - \dim\,(F \cap G)\\ &= \dim\left(F \cap G^\perp\right).\end{aligned}$$

4. $F = \mathrm{Vect}\Big((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\Big)$. Soit (x_1,x_2,x_3,x_4) un élément de $\mathbb{R}^4$ et (X_1, X_2, X_3, X_4) sa projection orthogonale sur F

Alors :

$$\begin{cases} X_1+X_2+X_3+X_4=0\\ X_1-X_2+X_3-X_4=0\\ X_1-x_1+x_3-X_3=0\\ X_2-x_2+x_4-X_4=0\end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} X_1=\dfrac{x_1-x_3}{2}\\ X_2=\dfrac{x_2-x_4}{2}\\ X_3=\dfrac{-x_1+x_3}{2}\\ X_4=\dfrac{-x_2+x_4}{2}.\end{cases}$$

La matrice de la projection est donc :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5 Si p est une projection orthogonale sur F alors on a bien $p\circ p = p$. De plus si x est un vecteur de E, x se décompose de manière unique sous la forme $x = p(x) + z$ avec $z \in F^{\perp}$, alors :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2.$$

Réciproquement si p vérifie les deux conditions, alors p est une projection sur F parallèlement à un sous-espace vectoriel G et x se décompose de manière unique sous la forme $x = p(x) + z$ avec $z \in G$, alors :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|z\|^2 + 2\,(\,p(x)\mid z\,)$$

La deuxième condition entraîne donc :

$$\forall (y,z)\in F\times G\ ,\ \|y\|^2 + 2\,(\,y\mid z\,)\geqslant 0.$$

Alors, en posant $z = \lambda u$:

$$\forall (y,u)\in F\times G\ ,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\ ,\ \|y\|^2 + 2\lambda\,(\,y\mid u\,)\geqslant 0$$

d'où :

$$\forall (y,u)\in F\times G\ ,\ (\,y\mid u\,) = 0$$

ce qui montre que $G = F^{\perp}$.

6. **a)** On montre aisément que S est une forme bilinéaire symétrique qui vérifie :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ S(P,P) \geqslant 0.$$

De plus :

$$S(P,P) = 0 \Longrightarrow \int_0^1 P(t)^2\,dt = 0$$

et les fonctions polynomiales étant continues, on a :

$$\forall t \in [0,1]\ ,\ P(t) = 0$$

d'où $P = 0$.

b) Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base :

$$(e_1, e_2, e_3) = (1, X, X^2) \quad \text{de} \quad \mathbb{R}_2[X] :$$

$$f_1 = \frac{e_1}{S(e_1,e_1)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

puis :

$$g_2 = X + \lambda$$

avec :

$$S(g_2, f_1) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

et :

$$f_2 = \frac{g_2}{S(g_2,g_2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right).$$

Ensuite :

$$g_3 = X^2 + \lambda\sqrt{12}(X - \frac{1}{2}) + \mu$$

avec :

$$\mu = -S(X^2, 1) = -\frac{1}{3} \ \text{ et } \ \lambda = -S(X^2, f_2) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

puis :

$$f_3 = \frac{g_3}{S(g_3,g_3)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{5}\left(6X^2 - 6X + 1\right).$$

c) On cherche le carré de la distance de X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$. Cherchons le projeté orthogonal de X^2 sur $\text{Vect}(1, X) = \text{Vect}(f_1, f_2)$:

$$p(X^2) = S(X^2, f_1)f_1 + S(X^2, f_2)f_2 = X - \frac{1}{6}$$

et $S\big(X^2 - P(X^2), X^2 - P(X^2)\big) = \dfrac{1}{180}$.

7. Soient A et B respectivement les matrices de f et g dans $\mathcal{B}$ et x un vecteur de E dont on note X la matrice colonne des composantes dans $\mathcal{B}$.

$$(\, f(x) \mid g(x) \,) = {}^t(AX)(BX) = {}^tX\,{}^tABX = {}^tXABX.$$

De même :

$$(\, g(x) \mid f(x) \,) = -{}^tXBAX = -{}^tXABX$$

donc :

$$(\, f(x) \mid g(x) \,) = -(\, g(x) \mid f(x) \,) = 0.$$

En écrivant le théorème de Pythagore :

$$\left\|(f-g)(x)\right\|^2 = \left\|f(x)\right\|^2 + \left\|g(x)\right\|^2 = \left\|(f+g)(x)\right\|^2.$$

8. Déterminons le noyau de f.
On a $(\, f(x) \mid x \,) = (\, x \mid a \,)^2$.
Donc :

$$f(x) = 0 \Longrightarrow (\, x \mid a \,) = 0$$

Puis :

$$f(x) = 0 \Longrightarrow b \wedge x = 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}b$$

Finalement :

$$\operatorname{Ker} f \subset (\mathbb{R}a)^\perp \cap \mathbb{R}b.$$

On vérifie aisément que $(\mathbb{R}a)^\perp \cap \mathbb{R}b \subset \operatorname{Ker} f$.

- Si $b \in (\mathbb{R}a)^\perp$, alors le rang de f est 1.
- Si $b \notin (\mathbb{R}a)^\perp$, le rang est 3.

9. **a)** Soit C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice G.
Supposons $\det G = 0$, alors la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ est liée.
Donc, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = 0.$$

Alors :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, p\}\ ,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \perp x_j.$$

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$$

ce qui montre que la famille est liée

On montrera aisément la réciproque puisqu'une relation linéaire entre $x_1, \dots, x_p$ entraîne la même relation entre les colonnes de $G(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

b) • Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F et $(i, k) \in \{1, 2, \dots, p\}^2$:

$$(x_i \mid x_k) = (\sum_{j=1}^{p} (x_i \mid e_j) e_j | \sum_{l=1}^{p} (x_k \mid e_l) e_l)$$
$$= \sum_{j=1}^{p} (x_i \mid e_j) (x_k \mid e_j).$$

Donc si A est la matrice de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ dans $(e_1, e_2, \dots, e_p)$, alors $G = {}^tAA$, d'où $\det G = [x_1, x_2, \dots, x_p]_F^2 > 0$.

• Remarquons que pour toute famille $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$:

$$\det G(x, x_1, x_2, \dots, x_p) = \det G(x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Quitte à remplacer x par $x - p(x)$ où $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur F, on peut donc considérer que $x \perp F$.

Alors :

$$G(x, x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} (x|x) & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & G(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{pmatrix}.$$

On a bien :

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 = \frac{\det G(x, x_1, x_2 \dots, x_p)}{\det G(x_1, x_2 \dots, x_p)}.$$

Chapitre 34

1. • Considérons le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$(AX \mid X) \leqslant \|AX\| \|X\|$$

soit :

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant \|x\|^2 = n$$

puisque $\|AX\| = \|X\|$.

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$ muni du produit scalaire usuel donne :

$$\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|\right)^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_i, j|^2$$

soit :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

2. On vérifie facilement que f est linéaire, puis si $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &= \Big\|u\big(p(x)\big)\Big\| + \Big\|v\big(x - p(x)\big)\Big\| = \|p(x)\| + \|x - p(x)\| \\ &= \big\|p(x) + x - p(x)\big\|.\end{aligned}$$

3. Notons s_x la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}x$ $(x \neq 0)$.
Si f vérifie la condition, alors $f \circ s_x = s_x \circ f$ donc $s_x\big(f(x)\big) = f(x)$, ce qui montre que $f(x) \in \mathbb{R}x$.
Pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée donc f est une homothétie (voir exercice 18 du chapitre 28).
Les endomorphismes commutant avec tous les endomorphismes orthogonaux sont donc les homothéties.

4. On vérifie que f est bien linéaire.
L'endomorphisme f est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2\,,\ (\ f(x)\ \mid\ f(y)\ )\ =\ (\ x\ \mid\ y\ )$$

soit, si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2\,,\ 2\lambda\,(\ y \mid u\ )\,(\ x \mid u\ ) + \lambda^2\,(\ x \mid u\ )\,(\ y \mid u\ )\,\|u\|^2 = 0$$

soit, si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2\,,\ \lambda\,(\ x \mid u\ )\,(\ y \mid u\ )\,\left(2 + \lambda\|u\|^2\right) = 0$$

Donc f est une isometrie si et seulement si $\lambda = 0$ ou $u = 0$ ou $2 + \lambda\|u\|^2 = 0$.
Si $\lambda = 0$ ou $u = 0$, alors f est l'application identité.
Si $2 + \lambda\|u\|^2 = 0$, alors on a :

$$\forall x \in E\,,\ f(x) = x - 2\,\frac{(\ x \mid u\ )}{\|u\|^2}u.$$

On remarque que :

- si $x \in \mathbb{R}u^\perp$ alors $f(x) = x$

- si $x \in \mathbb{R}u$ alors $f(x) = -x$.

Donc f est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}u^{\perp}$

5. Soit f une isométrie de E. L'application linéaire $\vec{f}$ est un automorphisme orthogonal de E, donc $\vec{f} = \mathrm{Id}$ ou $\vec{f} = -\,\mathrm{Id}$.
- Si $\vec{f} = \mathrm{Id}$, alors f est une translation.
- Si $\vec{f} = -\,\mathrm{Id}$, alors f est une symétrie centrale.

6. On trouve $A^2 = 9I$.
L'endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est $B = \dfrac{1}{3}A$ vérifie $g \circ g = \mathrm{Id}$. De plus A étant symétrique, on a $B^tB = I$, ce qui prouve que g est un automorphisme orthogonal involutif. Or $\det B = 1$ donc g est un demi-tour (ou rotation d'angle π) .
L'axe de la rotation est l'ensemble des vecteurs invariants, on trouve que l'axe est la droite :

$$\begin{cases} x = z \\ y = 2x \end{cases}$$

dont un vecteur directeur est $(1, 2, 1)$.
L'application f est donc la composée d'un demi-tour et d'une homothétie de rapport 3.

7. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée et $(a_{i,j})$ la matrice de f dans cette base.
On a :

$$a_{i,j} = (\, f(e_j) \mid e_i\,) = (\, e_j \mid f(e_i)\,) = a_{j,i}$$

ce qui prouve que la matrice de f est symétrique.
Soient $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormale, B la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ et P la matrice (orthogonale) de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors :

$$B = P^{-1}AP = {}^tPAP$$

et :

$${}^tB = {}^tP{}^tAP = B$$

ce qui prouve que B est également symétrique.

Soient x et y deux vecteurs de E. Si X et Y sont les matrices colonnes de leurs composantes dans $\mathcal{B}$, on a :

$$(\, f(x) \mid y\,) = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tXAY = (\, x \mid f(y)\,)$$

8. Soient $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormale B la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors :
$$B = P^{-1}AP = {}^tPAP$$
et :
$${}^tB = {}^tP\,{}^tAP = -B$$
ce qui prouve que B est également antisymétrique.
Soient x et y deux vecteurs de E. Si X et Y sont les matrices colonnes de leurs composantes dans $\mathcal{B}$.
$$(\, f(x) \mid y\,) = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = -{}^tXAY = -(\, x \mid f(y)\,).$$

9. f étant bijective, on a $f(F) = F$ pour des raisons de dimension.
De plus pour $x \in F^{\perp}$ et $y \in F$ on a :
$$(\, f(x) \mid y\,) = (\, x \mid f^{-1}(y)\,) = 0$$
car $f^{-1}(y) \in F$.
On a donc $f(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$ d'où $f(F^{\perp}) = F^{\perp}$.

10. Soit $\vec{x} \in E$, $\vec{x}$ s'écrit $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$ avec $\vec{x}' \in \mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $(\, \vec{x}'' \mid \vec{u}\,) = 0$
On a :
$$\vec{x}' = (\, \vec{x} \mid \vec{u}\,)\vec{u} \text{ et } r(\vec{x}'') = \cos\theta\, \vec{x}'' + \sin\theta\,(\vec{u} \wedge \vec{x})$$
d'où :
$$\begin{aligned} r(\vec{x}) &= (\, \vec{x} \mid \vec{u}\,)\vec{u} + \cos\theta\Big(\vec{x} - (\, \vec{x} \mid \vec{u}\,)\vec{u}\Big) + \sin\theta(\vec{u} \wedge \vec{x}) \\ &= \cos\theta\, \vec{x} + \sin\theta(\vec{u} \wedge \vec{x}) + 2\,(\, \vec{u} \mid \vec{x}\,)\, \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u}. \end{aligned}$$

11. **a)** Soit p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}\vec{u}$ et s la réflexion par rapport $\mathbb{R}\vec{u}^{\perp}$.
On a :
$$s(\vec{x}) = \vec{x} - 2p(\vec{x}) = \vec{x} - 2\,(\, \vec{x} \mid \vec{u}\,)\vec{u}.$$
La matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est donc :
$$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ca \\ -2ab & 1-2b^2 & -2cb \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}.$$
b)
$$r(\vec{x}) = (\, \vec{u} \mid \vec{x}\,)\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{x}.$$
La matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est donc :
$$\begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}.$$

12 Soit $\vec{u}$ un vecteur vérifiant la condition et A un point $\mathcal{F}_1$. Soit $p(A)$ la projection orthogonale de A sur $\mathcal{F}_2$. On a $t_{\vec{u}}(A) \in \mathcal{F}_2$ et $\overrightarrow{At_{\vec{u}}(A)}$ est orthogonal à la direction de $\mathcal{F}_2$, donc $t_{\vec{u}}(A) = p(A)$.

On a donc :

$$\vec{u} = \overrightarrow{Ap(A)}$$

ce qui montre l'unicité de $\vec{u}$.
De plus $t_{\vec{u}}(\mathcal{F}_1)$ passe par $p(A)$ et est parallèle à $\mathcal{F}_2$, c'est donc $\mathcal{F}_2$, ce qui montre que $\vec{u} = \overrightarrow{Ap(A)}$ convient.

13. Soient D_1 et D_2 les axes respectifs de f et de g et $\vec{u}_1$ un vecteur de D_1. Si f et g commutent alors $f\Big(g(\vec{u}_1)\Big) = g\Big(f(\vec{u}_1)\Big) = g(\vec{u}_1)$ donc $g(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$ ou $g(\vec{u}_1) = -\vec{u}_1$. Le deuxième cas étant impossible, on en déduit que $\vec{u}_1 \in D_2$ donc que $D_1 = D_2$.
Réciproquement, il est clair que deux rotations de même axe commutent.

14. On vérifie facilement que si D_1 et D_2 sont orthogonales, alors les deux retournements commutent en écrivant leurs matrices dans une base orthonormée directe $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ où $\vec{e_1}$ dirige D_1 et $\vec{e_2}$ dirige D_2.

Réciproquement, supposons que les deux retournements commutent. Soient respectivement $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ des vecteurs directeurs normés de D_1 et D_2. Alors :

$$f_1 \circ f_2(\vec{u}_1) = f_2 \circ f_1(\vec{u}_1) = f_2(\vec{u}_1)$$

donc $f_2(\vec{u}_1)$ est invariant par f_1, ce qui prouve qu'il est sur la droite D_1.
Puisque $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont normés, on a soit $f_2(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$, soit $f_2(\vec{u}_1) = -\vec{u}_1$. Le premier cas est impossible car on aurait $D_1 = D_2$.
On a donc $f_2(\vec{u}_1) = -\vec{u}_1$ donc $\vec{u}_1 \in (\mathbb{R}\vec{u}_2)^{\perp}$. Dans ce cas, D_1 et D_2 sont orthogonales.

15. Soient r_1 la rotation de centre Ω_1 et l'angle θ_1 et r_2 la rotation de centre Ω_2 et d'angle θ_2.
Si $\Omega_1 = \Omega_2$ alors la composée $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ et de centre Ω_1.

Si Ω_1 et Ω_2 sont distincts, on décompose les deux rotations en produit de deux réflexions dont une est d'axe $(\Omega_1\Omega_2)$:

$$r_2 = s_{D_2} \circ s_{(\Omega_1\Omega_2)}$$

$$r_1 = s_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{D_1}.$$

Alors :

$$r_2 \circ r_1 = s_{D_2} \circ s_{D_1}.$$

De plus :

$$\left(\widehat{D_2, (\Omega_1\Omega_2)}\right) = -\frac{\theta_2}{2} \quad [\pi] \qquad \text{et} \qquad \left(\widehat{D_1, (\Omega_1\Omega_2)}\right) = +\frac{\theta_1}{2} [\pi].$$

Si D_1 et D_2 sont parallèles, c'est-à-dire $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \quad [\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est une translation dont le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à la direction commune des deux droites. Sinon, $r_2 \circ r_1$ est une rotation dont le centre est le point d'intersection de D_1 et de D_2 et l'angle $\theta_1 + \theta_2$.

16. La partie linéaire $\vec{f}$ de f est une réflexion par rapport à une droite vectorielle D.

a) Si f admet un point fixe A, désignons par s la réflexion par rapport à $A+D$. Les applications affines f et s coincident en A et ont même partie linéaire donc sont égales.

b) $f(D^\perp)$ est une droite affine parallèle à $D^\perp$. On montre facilement qu'il existe un unique vecteur $\vec{u}$ de D tel que $t_{\vec{u}}(D^\perp) = f(D^\perp)$.

L'application $g = t_{-\vec{u}} \circ f$ est un antidéplacement du plan qui laisse $D^\perp$ globalement invariante. Sa restriction à $D^\perp$ est donc une isométrie d'un espace vectoriel de dimension 1 dont la partie linéaire est $-\mathrm{Id}$ il s'agit donc d'une symétrie centrale ; soit Ω le point fixe de cette symétrie.

Soit s la réflexion par rapport à $\Omega + D$. Les applications affines s et g coïncident en Ω et ont même partie linéaire donc $s = g$ et $f = t_{\vec{u}} \circ s$.

$t \circ s$ et $s \circ t$ ont même partie linéaire et coincident sur les points de l'axe donc sont égales.

Montrons l'unicité du couple (t, s).

On a $f \circ f = t_{2\vec{u}}$ d'où l'unicité de $\vec{u}$, puis celle de $s = t_{-\vec{u}} \circ f$.

17 L'application $-f$ est une rotation dont la matrice dans une base adéquate est :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de f dans cette même base est donc :

$$\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\pi) & -\sin(\theta+\pi) & 0 \\ \sin(\theta+\pi) & \cos(\theta+\pi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

f est donc la composée commutative d'une rotation et d'une réflexion

18. **a)** L'ensemble des points invariants d'une application affine est, s'il n'est pas vide, un espace affine dont la direction est l'ensemble des vecteurs invariants par la partie linéaire.

La partie linéaire de f est un endomorphisme indirect de l'espace. D'après les résultats de l'exercice précedent, l'ensemble des vecteurs invariants de $\vec{f}$ est de dimension 0 ou 2.

b) Soit s la réflexion par rapport au plan des points invariants; s et f coincident en tout point de ce plan et ont même partie linéaire donc sont égales.

c) $\vec{f}$ est une réflexion par rapport à un plan P. (En effet, si $\vec{f}$ est la composée d'une rotation d'angle non nul et d'une réflexion par rapport au plan de la rotation, alors l'ensemble de ses vecteurs invariants est de dimension 0 et on montre alors que f a un unique point fixe). Soit $D = P^{\perp}$. La droite $f(D)$ est parallèle à D, il existe donc $\vec{u} \in P$ tel que $t_{\vec{u}}(D) = f(D)$.

Alors $t_{-\vec{u}} \circ f(D) = D$, $t_{-\vec{u}} \circ f$ restreinte à D est une symétrie centrale donc admet un point fixe Ω.

Alors si $\mathcal{P} = \Omega + P$, et la réflexion par rapport à $\mathcal{P}$ $t_{-\vec{u}} \circ f$ coincident en Ω et ont même partie linéaire donc sont égales.

On montre facilement que $t_{+\vec{u}}$ et la réflexion par rapport à $\mathcal{P}$ commutent.

Pour montrer l'unicité de la décomposition, il suffit de remarquer que $f \circ f = t_{2\vec{u}}$ ce qui montre l'unicité de $\vec{u}$, puis celle de la réflexion.

d) Soit A l'unique point fixe, alors :

$$f(M) = A + \vec{f}(\overrightarrow{AM}).$$

$\vec{f}$ étant la composée d'une rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{u}$ avec une réflexion par rapport à $\mathbb{R}\vec{u}^{\perp}$. L'application f est donc la composée d'une rotation d'axe $A + \mathbb{R}\vec{u}$ et de la réflexion par rapport à $A + \mathbb{R}\vec{u}^{\perp}$.
On montre aisément que ces deux applications commutent.

19. Soit A_1 le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}_1$ et A_2 le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}_2$.
Soient $\mathcal{D}_2'$ la droite parallèle à $\mathcal{D}_2$ et passant par A_1 et f_2' le retournement d'axe $\mathcal{D}_2'$. L'application $f_2 \circ f_2'$ est une translation de vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$.
De plus $t_{-\vec{u}} \circ f_2 \circ f_1 = f_2' \circ f_1$ est une rotation r d'axe $\mathcal{D}$.
Donc $f_2 \circ f_1 = t_{\vec{u}} \circ r$ est un vissage d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle $2(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2})$

20. Remarquons que l'ensemble des isométries laissant le carré $ABCD$ globalement invariant forme un groupe G.

Soit f une isométrie satisfaisant à la condition. Alors f admet l'isobarycentre O des quatre points comme point fixe. Soient s_1, s_2, s_3 et s_4 les réflexions par rapport respectivement aux diagonales (AC) et (BD) et par rapport respectivement aux médiatrices de (A, B) et de (B, C).

Soit s_0 la symétrie centrale de centre O et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Les applications Id, s_1, s_2, s_3 et s_4, s_O, r et r^{-1} sont des isométries qui conviennent.

On vérifie que $\{\mathrm{Id}, s_1, s_2, s_3, s_4, s_O, r, r^{-1}\}$ est stable par composition et passage à l'inverse. C'est donc un sous-groupe de G.

Montrons qu'il est égal à G.

Soit $f \in G$, en composant par r^i pour un certain $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $r^i \circ f(A) = A$, de plus $r^i \circ f(O) = O$.
On a donc, soit $r^i \circ f = \mathrm{Id}$, soit $r^i \circ f = s_1$, ce qui montre que $f \in G$. Finalement, les huit isométries précédentes sont exactement celles qui conservent le carré.

21 Remarquons que puisque $P_1^\perp \subset P_2$, on a $P_1 + P_2 = E$ donc $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un sous-espace affine non vide de direction $P_1 \cap P_2$ qui est une droite vectorielle. Soit e_3 un vecteur normé de la direction de $\mathcal{D}$. On choisit ensuite un vecteur normé e_1 orthogonal à e_3 dans P_1 et un vecteur normé e_2 orthogonal à e_3 dans P_2. Soit A un point de $\mathcal{D}$.
Dans la base (e_1, e_2, e_3), la partie linéaire de $s_2 \circ s_1$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de la réflexion par rapport à D. Finalement, A étant invariant par $s_2 \circ s_1$, cette application est la réflexion d'axe $\mathcal{D}$.

22. Soient A et B deux points de E. Si I est le milieu de A et de B alors $f(I)$ est le milieu de $f(A)$ et de $f(B)$. Soit J le milieu de $f(A)$ et de B. D'après le théorème de Thalès :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{Af(A)} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{Jf(I)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{Bf(B)}.$$

Or :

$$k = \| \overrightarrow{If(I)} \| \leqslant \| \overrightarrow{IJ} \| + \| \overrightarrow{Jf(I)} \| = 2\frac{k}{2} = k$$

donc les points I, J et $f(I)$ sont alignés et J est sur la médiatrice de $[I, f(I)]$. Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{Jf(I)}$ puis $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)}$ ce qui montre que f est une translation.

23. Soit H le milieu de MN. Le vecteur $\overrightarrow{HL}$ est obtenu à partir de $\overrightarrow{MN}$ par la similitude composée de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de l'homothétie de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme les composantes de $\overrightarrow{MN}$ sont $(-1, x)$, celles de $\overrightarrow{HL}$ sont :

$$\begin{pmatrix} -x \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -x \end{pmatrix}.$$

L'ordonnée de H est donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$, son abscisse étant évidemment $1/2$.

Index

J'INTÈGRE
Série E. Ramis

j'intègre

sous la direction de
Claude Deschamps • André Warusfel

2e édition

MATHÉMATIQUES
TOUT-EN-UN • 1re année
Cours et exercices corrigés

Cet ouvrage couvre, en un seul volume, la totalité du nouveau programme de mathématiques de 1re année des filières MPSI et PCSI.

Conçu spécialement pour tous ceux qui souhaitent avoir une vision globale du cours dans le strict respect du programme, l'ouvrage se compose de 37 chapitres s articulant autour de trois grands thèmes :

- Analyse réelle et complexe
- Algèbre et géométrie
- Analyse et géométrie

Chaque chapitre est suivi de nombreux exercices d'entraînement et de synthèse, dont toutes les solutions sont données en fin de volume. Conformément à l'esprit du nouveau programme, les premiers chapitres de l ouvrage regroupent les notions étudiées en début d'année. Définitions et notions de base sont proposées en fin d'ouvrage.

Le cours, rédigé par François Moulin et Jean François Ruaud, se veut clair et concis. Les exercices, quant à eux ont été conçus par Anne Miquel et Jean-Claude Sifre de manière que tout étudiant puisse les aborder sereinement et y trouver une source d'apprentissage adaptée à son niveau.

Par ses qualités scientifiques et pédagogiques, ce livre s'avère le digne successeur de la célèbre série dirigée par Edmond Ramis.

CLAUDE DESCHAMPS
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, est professeur de Mathématiques Spéciales MP* au lycee Louis-le-Grand.

ANDRE WARUSFEL
Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de Mathématiques Spéciales MP* au lycee Louis-le-Grand et Inspecteur Général de mathématiques.

MATHEMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

9 782100 079445

ISBN 2 10 007944 1

http://www.dunod.com

DUNOD