Chapitre 30

Fonctions de deux variables

Sommaire

I CONTINUITÉ

1) Ouverts

On rappelle que $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni du produit scalaire canonique : si $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ alors $(u|v) = xx' + yy'$, la norme euclidienne est : $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, celle-ci ayant les propriétés suivantes :

- $\forall\ u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|u\| \geqslant 0$.
- $\forall\ u \in \mathbb{R}^2, \|u\| = 0 \iff u = 0$.
- $\forall\ u \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda|.\|u\|$.
- $\forall\ u, v \in \mathbb{R}^2, \|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 30.1

- *Distance : la distance de $u \in \mathbb{R}^2$ à $v \in \mathbb{R}^2$ est la norme de la différence :* $\mathrm{d}(u, v) = \|u - v\|$.
- *Partie bornée : une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite* ***bornée*** *lorsqu'il existe un réel M tel que :*

$$\forall x \in A, \|x\| \leqslant M.$$

- *Boule ouverte : soit $u \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre u et de rayon r est l'ensemble* $B(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^2 \ /\ \|u - v\| < r\}$. *De même on peut définir les boules fermées et les sphères.*

À retenir

Si $u = (x, y)$ alors le pavé ouvert $P =]x - \frac{r}{\sqrt{2}}; x + \frac{r}{\sqrt{2}}[\times]y - \frac{r}{\sqrt{2}}; y + \frac{r}{\sqrt{2}}[$ est inclus dans la boule ouverte $B(u, r)$.

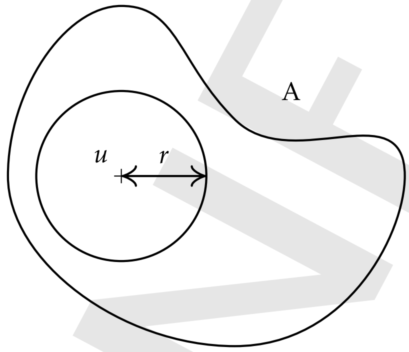
Théorème 30.1 (Ouverts de $\mathbb{R}^2$)

Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert lorsque A est une réunion (quelconque) de boules ouvertes. Ce qui équivaut à : $\forall u \in A, \exists r > 0, B(u, r) \subset A$. Par convention, $\emptyset$ est un ouvert.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Exemples :

☞**Exemples** :
- $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
- Une boule ouverte est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
- Un demi-plan ouvert (*i.e.* bord exclu) est une partie ouverte.
- Une réunion quelconque de parties ouvertes est une partie ouverte.
- Une intersection finie de parties ouvertes est une partie ouverte.
- Une boule fermée n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.



2) Fonctions de deux variables

Nous considérerons par la suite des fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

☞**Exemples** :
- $f\colon (x,y) \mapsto x^2+y^2$ est définie sur $A = \mathbb{R}^2$.
- $f\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2-y^2}$ est définie sur $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, \pm x)\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ (c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$).

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, l'ensemble des fonctions de A vers $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, il est facile de voir que pour les opérations usuelles sur les fonctions, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Définition 30.2 (représentation graphique)
*Soit $f\colon A \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, le graphe de la fonction est l'ensemble : $\{(x,y,f(x,y))\ /\ (x,y) \in A\}$. La représentation graphique de f est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x,y,f(x,y))$, cet ensemble est appelé **surface cartésienne** d'équation $z = f(x,y)$.*

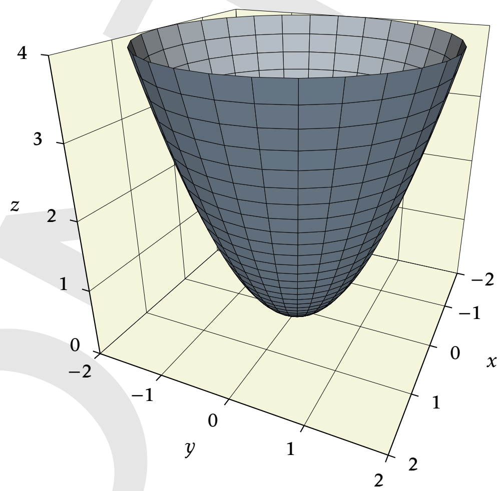


FIGURE 30.1 – Surface d'équation $z = x^2+y^2$ (tronquée à $z = 4$)

Définition 30.3 (applications partielles)
Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$, soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $a = (x_0, y_0) \in A$. La première application partielle de f en a est la fonction $f_{1,a} : t \mapsto f(t, y_0)$ (on fixe la deuxième variable à y_0), et la deuxième application partielle de f en a est la fonction $f_{2,a} : t \mapsto f(x_0, t)$ (on fixe la première variable à x_0).

☞**Exemple** : Soit $f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2+y^2+1}$, la première application partielle de f en $a = (0,0)$ est $f_{1,a}(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$, et la deuxième application partielle de f en a est $f_{2,a}(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

Remarque 30.1 – *Les applications partielles permettent de se ramener aux fonctions d'une variable réelle.*

3) Continuité

Définition 30.4 (continuité)

Soit $f\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathrm{A}$, on dit que f est continue en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in \mathrm{A}, \|u - a\| < r \implies |f(u) - f(a)| < \varepsilon.$$

Si f est continue en tout point de A, on dit que f est continue sur A, l'ensemble des fonctions continues sur A est noté $\mathcal{C}^0(\mathrm{A}, \mathbb{R})$.

Théorème 30.2

- *Si f est continue en $a \in \mathrm{A}$, alors f est bornée au voisinage de a.*
- *Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$, alors au voisinage de a f ne s'annule pas.*
- *On retrouve les théorèmes généraux de la continuité (somme, produit, quotient). En particulier on en déduit que $\mathcal{C}^0(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.*
- *Si $f\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ est continue sur A, et si $g\colon \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ est continue sur J avec $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{J}$, alors $g \circ f$ est continue sur A.*

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

À retenir

Il en découle en particulier que toute fonction polynomiale ou rationnelle en x et y, est continue sur son ensemble de définition.

Théorème 30.3

Si f est continue en $a = (x_0, y_0) \in \mathrm{A}$, alors la première application partielle de f en a est continue en x_0, et la deuxième est continue en y_0. Mais la réciproque est fausse.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que $\forall\ u \in \mathrm{A}, \|u - a\| < r \implies |f(u) - f(a)| < \varepsilon$. Soit $t \in \mathbb{R}$, si $|t - x_0| < r$, alors $\|(t, y_0) - a\| = |t - x_0| < r$, donc $|f(t, y_0) - f(a)| < \varepsilon$, c'est à dire $|f_{1,a}(t) - f_{1,a}(x_0)| < \varepsilon$, ce qui prouve que $f_{1,a}$ est continue en x_0. Le raisonnement est similaire pour $f_{2,a}$.

Donnons un contre-exemple pour la réciproque : $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$. Les deux applications partielles de f en $(0, 0)$ sont continues en 0 car elles sont nulles. Par contre, on considérant les couples (x, x) non nuls, on a $f(x, x) = \frac{1}{2}$, donc on ne peut pas avoir par exemple $|f(x, x) - f(0, 0)| < \frac{1}{4}$ quand (x, x) est voisin de $(0, 0)$, donc f n'est pas continue en $(0, 0)$. □

4) Extension

Soit A un partie de $\mathbb{R}^2$ et $f\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}^2$, alors pour tout couple (x, y) de A, $f(x, y)$ est un couple de réels dont les deux composantes sont fonctions de x et y, par conséquent il existe deux fonctions : $f_1, f_2\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{A}, f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Par définition, les fonctions f_1 et f_2 sont les fonctions **composantes** de f.

Définition 30.5

*Une telle fonction f est dite **continue** en $a \in \mathrm{A}$ lorsque les **fonctions composantes sont continues en** a.*

Remarque 30.2 :

- *Cela s'applique aussi aux fonctions à valeurs complexes.*
- *Cette définition se généralise aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.*

II CALCUL DIFFÉRENTIEL

1) Dérivées partielles premières

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit $a = (x_0, y_0) \in \mathrm{U}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, \sqrt{2}\varepsilon) \subset \mathrm{A}$, par conséquent le pavé ouvert $]x_0 - \varepsilon\,; x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon\,; y_0 + \varepsilon[$ est inclus dans U, donc la première application partielle de f en a est définie au moins sur l'intervalle $]x_0 - \varepsilon\,; x_0 + \varepsilon[$, et la deuxième sur $]y_0 - \varepsilon\,; y_0 + \varepsilon[$.

Définition 30.6

Si la première (respectivement la deuxième) application partielle de f en a est dérivable en x_0 (respectivement y_0), on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x (respectivement par rapport à y) en a, on la note : $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ (respectivement $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$). Si f admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point de U, alors on définit la fonction : $\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array}$, (même chose par rapport à y).

Remarque 30.3 – *Les applications partielles sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut donc utiliser les théorèmes généraux pour étudier leur dérivabilité, et les règles de dérivation usuelles pour les calculs.*

☞**Exemple** : Soit $f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2+y^2+1}$ et soit $a = (x,y)$, on a $f_{1,a}(t) = \frac{t^2+y}{t^2+y^2+1}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{2x(y^2-y+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$; d'autre part $f_{2,a}(t) = \frac{x^2+t}{x^2+t^2+1}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{x^2(1-2y)-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$.

2) Extremum

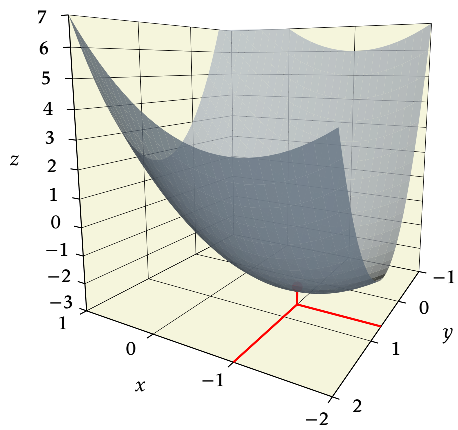
Définition 30.7

Soit $f \colon \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On dit que :
- *f admet un maximum global en $a = (x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ lorsque $\forall u \in \mathrm{U}, f(u) \leqslant f(a)$.*
- *f admet un minimum global en $a = (x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ lorsque $\forall u \in \mathrm{U}, f(a) \leqslant f(u)$.*
- *f admet un maximum local en $a = (x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ lorsque $\exists r > 0, \forall u \in \mathrm{U} \cap \mathrm{B}(a,r), f(u) \leqslant f(a)$.*
- *f admet un minimum local en $a = (x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ lorsque $\exists r > 0, \forall u \in \mathrm{U} \cap \mathrm{B}(a,r), f(a) \leqslant f(u)$.*

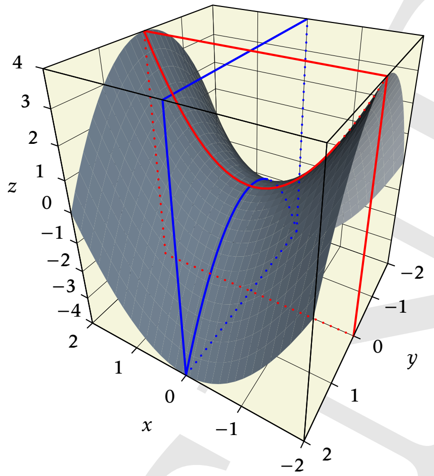
Théorème 30.4 (condition nécessaire pour un extremum)

Si $f \colon \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en $a = (x_0, y_0) \in \mathrm{U}$, et si f admet ses deux dérivées partielles en a, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, mais la réciproque est fausse.

Preuve : Supposons que a soit un maximum local, il existe donc $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{U}$ et $\forall\, u \in \mathrm{B}(a,r), f(u) \leqslant f(a)$, par conséquent $\forall\, t \in]x_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}; x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}[, f(t, y_0) \leqslant f(a)$, c'est à dire $f_{1,a}(t) \leqslant f_{1,a}(x_0)$, or la fonction $f_{1,a}(t)$ est dérivable en x_0 et x_0 est à 'intérieur de l'intervalle $]x_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}; x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}[$, d'où $f'_{1,a}(x_0) = 0$, c'est à dire $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$, le raisonnement est le même pour la deuxième variable. □



$z = x^2 + 3y^2 + 2x - 4y$
minimum en $(-1, \frac{2}{3})$



$z = x^2 - y^2$,
pas d'extrêmum en $(0,0)$ (point col)

☞**Exemples :**

- Soit $f(x,y) = x^2+3y^2+2x-4y$, f admet ses deux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$, qui sont $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y-4$, ces deux fonctions s'annulent pour $x=-1$ et $y=\frac{2}{3}$, donc le seul point où il peut y avoir un extremum est $a = (-1, \frac{2}{3})$. On a $f(x,y) = (x+1)^2 + 3(y-\frac{2}{3})^2 - \frac{7}{3}$, or $f(-1,\frac{2}{3}) = -\frac{7}{3}$, on voit donc que $f(x,y) \geqslant f(a)$, f présente donc un minimum global en a.
- Soit $f(x,y) = x^2-y^2$, f admet ses deux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$, donc le seul point où f peut présenter un extremum est $a = (0,0)$, on a $f(a) = 0$, or si $t > 0$, on a $f(t,0) = t^2 > 0$ et $f(0,t) = -t^2 < 0$, donc f ne présente pas d'extremum en a (ce qui fournit un contre-exemple pour la réciproque du théorème).

Remarque 30.4 – *Soit $f\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x - y + 1$ avec $\mathrm{A} = \mathrm{B}'(0,1)$, alors en notant $u = (x,y)$ et $n = (2,-1)$ on a $f(x,y) = \langle u \mid n\rangle + 1$ et donc $1 - \|u\| \times \|n\| \leqslant f(u) \leqslant 1 + \|u\| \times \|n\|$, c'est à dire $1-\sqrt{5} \leqslant f(u) \leqslant 1+\sqrt{5}$, f est donc bornée, mais on voit que les bornes sont atteintes lorsque $u = \pm\frac{n}{\|n\|}$, f a donc un maximum et un minimum sur U. Mais si on observe les deux dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$, ont voit qu'elles ne s'annulent jamais,* ***le théorème ne s'applique donc pas sur U, car ici, U n'est pas un ouvert****. Par contre, le théorème s'applique sur la boule ouverte $\mathrm{B}(0,1)$ et permet de dire que f ne présente pas d'extremum local sur la boule ouverte.*

3) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 30.8

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit $f\colon \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U lorsque f admet ses deux dérivées partielles en tout point de U, et que celles-ci sont toutes deux continues sur U. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est noté $\mathcal{C}^1(\mathrm{U},\mathbb{R})$.

À retenir

Toute fraction rationnelle en x et y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Théorème 30.5 (DL1)

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{U},\mathbb{R})$, alors f admet un développement limité d'ordre 1 en tout point $a \in \mathrm{U}$, qui s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|h\|\varepsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Preuve : On a (avec $a = (x, y)$ et $h = (h_1, h_2)$) :

$$
\begin{aligned}
f(x+h_1, y+h_2) - f(a) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) \\
&= f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2) + f(x, y+h_2) - f(a) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) \\
&= h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h_1, y+h_2) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta' h_2) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) \text{ avec } \theta, \theta' \in]0;1[
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
|f(x+h_1, y+h_2) - f(a) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)| \\
&\leqslant |h_1||\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)| + |h_2||\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta' h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)| \\
&\leqslant \|h\|\left(|\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)| + |\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta' h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)|\right)
\end{aligned}
$$

les deux dérivées partielles étant continues, le terme entre parenthèses tend vers 0 lorsque h tend vers $(0,0)$, ce qui termine la preuve. □

Définition 30.9 (gradient de f)

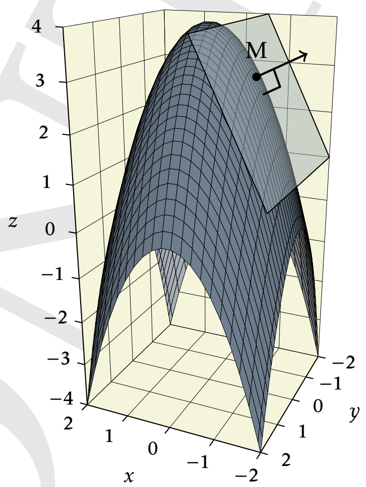
*Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors on pose pour $a \in$ U : $\text{Grad}_f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$, c'est le **gradient de f en a**. En prenant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$, le développement limité d'ordre 1 de f en a s'écrit : $f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \underset{0}{o}(h)$.*

Définition 30.10 (plan tangent)

Si $f \in \mathcal{C}^1(\text{U}, \mathbb{R})$, alors pour tout $a = (x_0, y_0) \in$ U, le plan d'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

est appelé plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $\text{M}(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Remarque 30.5 – *Le plan tangent en $a = (x_0, y_0)$ a donc pour équation :*

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

un vecteur normal à ce plan est $(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), -1)$.

☞**Exemple** : $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ avec $x^2 + y^2 \leqslant 1$, (demi-sphère de centre O de rayon 1).

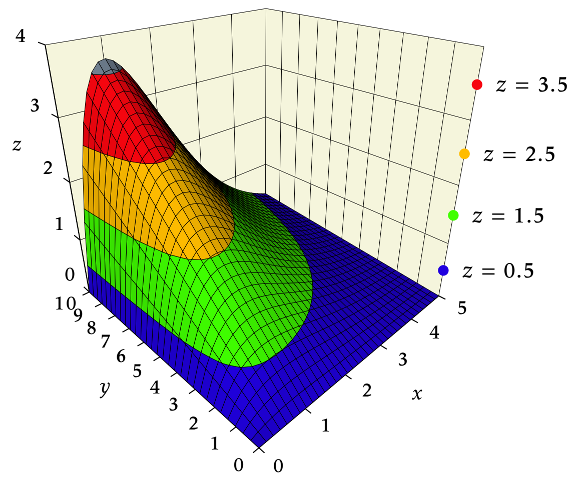
Soit $a = (x_0, y_0) \in \text{B}(0,1)$ et $z_0 = f(a)$, le plan tangent à la surface en $\text{M} = (x_0, y_0, z_0)$ a pour équation $(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a) = z - z_0$, ce qui donne $xx_0 + yy_0 + zz_0 = 0$, on remarque que le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ est normal au plan tangent.

Définition 30.11 (courbe de niveau)

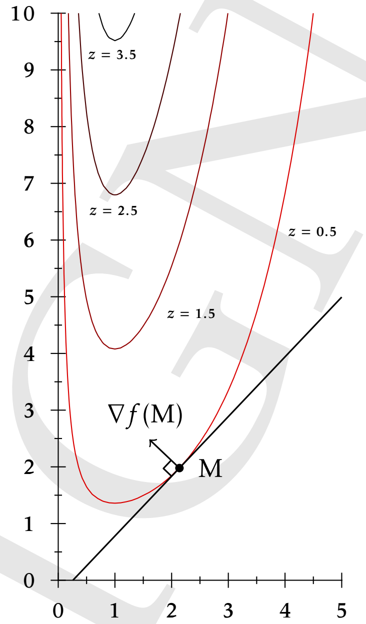
Soit $f\colon \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle courbe de niveau d'équation $f(x,y) = \lambda$, l'ensemble :

$$\mathrm{C}_\lambda = \{(x,y,z) \,/\, z = f(x,y) = \lambda\}.$$

C'est l'intersection de la surface d'équation $z = f(x,y)$ avec le plan d'équation $z = \lambda$.



$z = f(x,y) = xye^{-x}$
courbes de niveau



même chose dans le plan xOy

À retenir

Sur une courbe de niveau de f ($f(x,y) = \lambda$) le DL1 devient $(\nabla f(a) | \frac{h}{\|h\|}) = \underset{0}{o}(1)$ ce qui entraîne que dans le plan $z = \lambda$, la tangente à cette courbe « au point a » est la droite **orthogonale au vecteur gradient**.

4) Propriétés des fonctions $\mathcal{C}^1$

Théorème 30.6

- *Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U.*
- *$\mathcal{C}^1(\mathrm{U},\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre pour les lois usuelles sur les fonctions, c'est en fait une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(\mathrm{U},\mathbb{R})$.*

Preuve : Soit $f\colon \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $a \in \mathrm{U}$, on peut écrire pour h voisin de $(0,0)$: $f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|h\|\varepsilon(h)$, on voit que $\lim\limits_{h \to (0,0)} f(a+h) = f(a)$, *i.e.* f est continue en a.

Montrons par exemple la stabilité pour l'addition : si f, g sont $\mathcal{C}^1$ sur U, soit $a = (x,y) \in \mathrm{U}$, la première application partielle de $f+g$ en a est $f_{1,a} + g_{1,a}\colon t \mapsto f(t,y) + g(t,y)$ or ces deux fonctions sont dérivables en x, donc $f+g$ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable et $\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)$, or ces deux fonctions sont continues sur U et donc $\frac{\partial(g+h)}{\partial x}$ est continue sur U. Le raisonnement est le même pour la deuxième variable, finalement les deux dérivées partielles de $f+g$ sont continues sur U, donc $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. □

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit $a \in \mathrm{U}$, soit $f\colon \mathrm{U} \to \mathbb{R}$, et soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ non nul, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{U}$, comme $\lim\limits_{t \to 0} a + th = a$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t \in]-\varepsilon\,;\varepsilon[\implies a + th \in \mathrm{B}(a,r)$ et donc $a + th \in \mathrm{U}$, on peut alors considérer la fonction $g_{h,a}\colon t \mapsto f(a+th)$, c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au moins sur $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$ (voisinage de 0).

Définition 30.12 (dérivée suivant un vecteur h)
*Si la fonction $g_{h,a}$ ci-dessus est dérivable en 0, on dit que f **admet une dérivée en a suivant le vecteur** h, et on pose $g'_{h,a}(0) = \mathrm{D}_h(f)(a)$.*

Exemple : Soit $f(x,y) = \sin(xy) + x - y$, soit $a = (0,0)$, et soit $h = (1,-2)$, on a alors $g_{h,a}(t) = f(t,-2t) = -\sin(2t^2) + 3t$, cette fonction est dérivable en 0 et $g'_{h,a}(0) = 3$, donc f admet une dérivée en a suivant le vecteur h et $\mathrm{D}_h(f)(a) = 3$.

Cas particuliers :

- f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en $a = (x_0, y_0)$ si et seulement si f admet une dérivée en a suivant le vecteur $(1,0)$.
  Preuve : On a $g_{h,t} = f(x_0 + t, y_0) = f_{1,a}(x_0 + t)$, donc $g_{h,a}$ et dérivable en 0 ssi $f_{1,a}$ est dérivable en x_0. Si c'est le cas, alors $\mathrm{D}_h(f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. □
- f admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable en $a = (x_0, y_0)$ ssi f admet une dérivée en a suivant le vecteur $(0,1)$.
  Preuve : On a $g_{h,t} = f(x_0, y_0 + t) = f_{2,a}(y_0 + t)$, donc $g_{h,a}$ et dérivable en 0 ssi $f_{2,a}$ est dérivable en y_0. Si c'est le cas, alors $\mathrm{D}_h(f)(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$. □

Théorème 30.7 (dérivée d'une composée : règle de la chaîne)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\varphi\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (u_1(t), u_2(t))$ où u_1 et u_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{U}$, et soit $f\colon \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors la fonction $f \circ \varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall\, t \in \mathrm{I}, (f \circ \varphi)'(t) = u_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + u_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))$$

Preuve : $f \circ \varphi(t) = f(u_1(t), u_2(t))$, soit $t_0 \in \mathrm{I}$:

$$f[\varphi(t)] - f[\varphi(t_0)] = [u_1(t) - u_1(t_0)]\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t_0)) + [u_2(t) - u_2(t_0)]\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t_0)) + \mathrm{N}(\varphi(t) - \varphi(t_0))\varepsilon(\varphi(t) - \varphi(t_0)).$$

On divise tout par $t - t_0$, il est clair que la somme des deux premiers termes va tendre vers $u_1'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t_0)) + u_2'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t_0))$, et c'est une fonction continue de t_0, quant au reste, il devient : $\frac{|t-t_0|}{t-t_0}\left\|\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right\|\varepsilon(\varphi(t) - \varphi(t_0))$, il est facile de voir que cette expression a pour limite 0 lorsque t tend vers t_0, ce qui termine la preuve. □

★**Exercice 30.1** *La formule d'Euler. Soit $f\colon \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U homogène de rapport $\alpha > 0$, i.e. $\forall\, a \in \mathrm{U}, f(ta) = t^\alpha f(a)$. On a alors : $x\frac{\partial f}{\partial x}(a) + y\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \alpha f(a)$.*

Théorème 30.8
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, soit $\varphi\colon \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ définie par $\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$ où φ_1 et φ_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles, soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors la fonction $f \circ \varphi\colon \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et $\forall\, a \in \mathrm{V}$:

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x}(a) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(a) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(a)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(a) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(a))$$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial y}(a) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(a) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(a)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(a) \times \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(a))$$

Preuve : La première application partielle de $f \circ \varphi$ en $a = (x,y) \in \mathrm{V}$ est $(f \circ \varphi)_{1,a}(t) = f(\varphi_1(t,y), \varphi_2(t,y))$, il suffit alors d'appliquer le théorème précédent en prenant $u_1(t) = \varphi_1(t,y)$ et $u_2(t) = \varphi_2(t,y)$. □