Chapitre 10 : Suites et séries de fonctions

Suites et séries de fonctions

10

Dans tout ce qui suit, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, munis de normes notées $\| \ \|$ et A est une partie non vide de E. Dans de nombreux cas pratiques, on aura $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{K}$.
On s'intéresse dans ce chapitre aux suites et séries de fonctions de A dans F, c'est-à-dire aux suites et séries à valeurs dans $\mathcal{F}(A, F)$.

I Modes de convergence des suites

Au chapitre 5 nous avons défini la convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé. En ce qui concerne les suites de fonctions, il existe plusieurs manières « naturelles » de définir la convergence. Ces modes de convergence ne sont pas en général définis directement en termes de normes et sont fondamentalement différents entre eux.
Dans toute cette section, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F.

1 Convergence simple

Définition 1

Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement vers f** si, pour tout $x \in A$, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** si elle converge simplement vers une fonction.

Remarques

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement si, et seulement si, pour tout $x \in A$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur $B \subset A$** si la suite $\big(f_{n|_B}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
- Il est clair qu'il y a unicité de la limite simple.

- *A priori* ces définitions dépendent de la norme sur F. Puisque F est de dimension finie et qu'en dimension finie les normes sont équivalentes, ces définitions sont de fait indépendantes de la norme choisie.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Pour $f : A \to F$ on note f_i les applications composantes de f dans cette base.
  Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur A à valeurs dans F converge simplement vers g si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ la suite $(f_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g_i. Il s'agit d'une conséquence immédiate du fait qu'une suite à valeurs dans F converge si, et seulement si, toutes les composantes convergent, ce qui est une propriété des espaces de dimension finie.

p.521 **Exercice 1** Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec :

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array}$$

p.521 **Exercice 2** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] ; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[. \end{cases}$$

Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Remarques

- Certaines propriétés algébriques « passent à la limite simple ».
  Par exemple si les suites de fonctions à valeurs scalaires $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g, alors la suite $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f+g$ et la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers fg.
- Beaucoup de propriétés analytiques ne passent pas « à la limite simple ». Par exemple, comme le montre l'exercice précédent,
  - ∗ une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.
  - ∗ une limite simple de fonctions bornées n'est pas nécessairement bornée.
- Certaines propriétés liées à l'ordre passent « à la limite simple ».
  Par exemple la limite simple d'une suite de fonctions croissantes est une fonction croissante. De même, la limite simple d'une suite de fonctions convexes est une fonction convexe. Pour le démontrer, il suffit de se ramener à la définition et passer à la limite dans les inégalités.

Attention La notion de convergence simple n'est pas stable par composition par une fonction continue. Par exemple, si f_n est la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\frac{1}{n}$ et φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = 1/x$, il est clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle, alors que la suite $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement.

2 Convergence uniforme

Dans la section qui suit, les résultats sont donnés dans le cadre général. En revanche, il est sans doute utile de traduire dans un premier temps ces résultats en se ramenant aux fonctions à valeurs réelles. C'est très souvent le cas dans la pratique et ce cadre favorise indéniablement l'intuition.

Norme de la convergence uniforme

- L'ensemble $\mathcal{B}(A,F)$ est l'espace des fonctions bornées définies sur A à valeurs dans F.
- Pour tout $f \in \mathcal{B}(A,F)$, on note $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup\limits_{x\in A} \|f(x)\|$.

  L'application $\mathcal{N}_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(A,F)$, dite de la **convergence uniforme** associée à la norme $\| \ \|$.

Remarque

- Puisque F est de dimension finie et que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, l'ensemble $\mathcal{B}(A,F)$ ne dépend pas du choix de la norme sur F.
- Si $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sont deux normes sur F, elles induisent deux normes de convergence uniforme $\mathcal{N}_\infty$ et $\mathcal{N}'_\infty$. Les deux normes $\mathcal{N}_\infty$ et $\mathcal{N}'_\infty$ sont équivalentes ; il s'agit d'une conséquence immédiate de l'équivalence des normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$.

Définitions, premiers exemples

Dire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f signifie :

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Il faut bien garder en mémoire que le « n_0 » dépend non seulement de ε, mais également de x. Lorsque l'on peut choisir n_0 indépendamment de x, on parle de convergence uniforme.

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$.

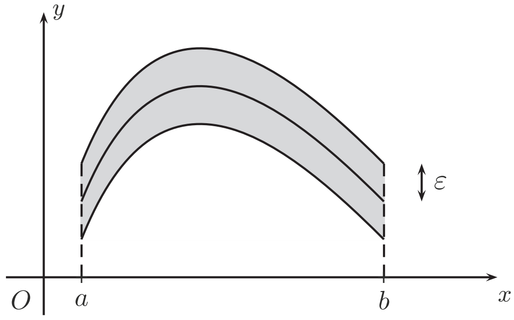
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers f** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

- On dit que la suite **converge uniformément** si elle converge uniformément vers une fonction.

Remarques

- Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{F}(A,F)$, si, et seulement s'il existe une suite de réels positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'à partir d'un certain rang :
$$\left(\forall x \in A \qquad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \alpha_n\right) \qquad \text{et} \qquad \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
- En d'autres termes, pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, il faut et il suffit qu'à partir d'un certain rang la fonction $f_n - f$ soit bornée et que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $F = \mathbb{R}$ et A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut associer à chaque fonction f_n son graphe dans le plan xOy. La convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel, le graphe de f_n est contenu dans la partie du plan xOy définie par :
$$x \in A \quad \text{et} \quad y \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon].$$



p.521 **Exercice 3** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Pour $f : A \to F$ on note f_i les applications composantes de f dans cette base.
Démontrer qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur A à valeurs dans F converge uniformément vers g si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ la suite $(f_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_i.

Proposition 1

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f.

Démonstration. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, pour n suffisamment grand, on a :
$$\forall x \in A \quad \big\|f_n(x) - f(x)\big\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
La conclusion est alors immédiate. □

Remarque Il y a donc unicité de la limite uniforme.

Point méthode

- Pour établir la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on commence par établir la convergence simple. Si elle converge effectivement simplement vers f, on cherche alors à montrer qu'elle converge uniformément vers f.
- Pour montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, on cherche à majorer à partir d'un certain rang $|f_n(x) - f(x)|$ indépendamment de $x \in A$ par un terme α_n tel que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que l'on ne trouve pas de majoration simple de $|f_n(x) - f(x)|$ indépendante de $x \in A$, on peut éventuellement faire une étude de fonction.

Exemples

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ pour tout entier naturel n, converge uniformément vers 0. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$
Puisque $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence uniformément vers la fonction nulle.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant f_n(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{1}{n}}} \leqslant \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Puisque $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence uniformément vers la fonction f.

p.521 **Exercice 4** On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction
$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(x + \frac{1}{n}\right). \end{array}$$
Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

p.522 **Exercice 5** Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où f_n est la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n(1 - x)$.

Attention Une suite qui converge simplement ne converge pas nécessairement uniformément.

Point méthode

Pour démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une fonction f ne converge pas uniformément, on peut :

- chercher à vérifier que la fonction $f_n - f$ n'est pas bornée pour une infinité d'entiers n,
- ou plus généralement chercher à exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que la suite $\Big(\big|f_n(x_n) - f(x_n)\big|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

p.522 **Exercice 6** Montrer que la suite étudiée à l'exercice 2 de la page 493 n'est pas uniformément convergente.

p.522 **Exercice 7** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \end{array}.$$

Étudier les convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

p.523 **Exercice 8** Étudier les convergences simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^2$;
2. $f_n(x) = \left(x + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^2$.

Linéarité de la convergence uniforme

La notion de convergence uniforme est stable par combinaison linéaire.

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies sur A à valeurs dans F convergeant uniformément respectivement vers f et g, ainsi que $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. La suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

Démonstration page 523

En revanche, la notion de convergence uniforme n'est pas en général stable par produit.

p.523 **Exercice 9** Donner un exemple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, convergeant toutes deux uniformément, telles que $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

Cas des fonctions bornées

Proposition 3

Supposons que les fonctions f_n soient bornées.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si, et seulement si, elle converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A,F)\,,\mathcal{N}_\infty)$.

Principe de démonstration. Démontrer que la limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Démonstration page 524

p.524 **Exercice 10** On pose $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x^4} \end{array}$.

1. Calculer $\mathcal{N}_\infty(f)$.
2. On pose $f_n : x \mapsto f(nx)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Que dire des convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous avons vu que le produit de suites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément n'est pas en général uniformément convergente (*cf.* l'exercice 9). En revanche, la notion de convergence uniforme est stable par produit lorsqu'il s'agit de suites de fonctions bornées.

p.524 **Exercice 11**

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$ convergeant uniformément respectivement vers f et g. Montrer que la suite $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers $f\,g$.
2. On suppose que F est muni d'une structure d'algèbre.
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathcal{B}(A,F)$ convergeant uniformément respectivement vers f et g. Montrer que la suite $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers $f\,g$.

3 Convergence uniforme sur une partie

Dans bien des cas, la convergence uniforme sur tout le domaine n'est pas vérifiée ou n'est pas simple à établir. En revanche, il arrive fréquemment que la convergence uniforme soit vérifiée localement. On le verra, la convergence uniforme locale permet d'établir d'autres propriétés locales : limite, continuité, dérivabilité, etc.

Définition 3

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur $\boldsymbol{B} \subset A$** si la suite $\left(f_{n|_B}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément au voisinage de $\boldsymbol{a}$**$\in A$ s'il existe un voisinage de a dans A sur lequel elle converge uniformément.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément au voisinage de tout point de $\boldsymbol{A}$** si elle converge uniformément au voisinage de a, pour tout $a \in A$.

Remarques

- S'il n'y a pas ambiguïté, on parle plus simplement de « convergence uniforme au voisinage de tout point ».
- Il est immédiat que la convergence uniforme implique la convergence uniforme au voisinage de tout point.
- Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément au voisinage de tout point, elle converge simplement.

Pratique de la convergence uniforme au voisinage de tout point

Pour établir la convergence uniforme au voisinage de tout point, on peut se restreindre à certains sous-ensemble de A.

Proposition 4 (Convergence uniforme sur tout segment)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Si pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la suite converge uniformément sur $[a,b]$, alors la suite converge uniformément au voisinage de tout point.
On parle alors de **convergence uniforme sur tout segment de $\boldsymbol{I}$**.

Démonstration page 525

Point méthode

Pour établir la convergence uniforme au voisinage de tout point de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit :

1. d'exhiber une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de A telle que pour tout $a\in A$, il existe $i\in I$ tel que A_i soit un voisinage de a,
2. puis d'établir la convergence uniforme sur tous les A_i.

Remarque

Il est souvent utile de prendre des parties A_i fermées, voire compactes.

p.525

Exercice 12 On pose, pour tout entier $n>0$, la fonction f_n définie par

$$f_n:\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx^2+1}{nx+1}. \end{array}$$

Étudier les convergences simple, uniforme, uniforme au voisinage de tout point.

II Convergence uniforme et limites

Dans toute cette section, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F.

1 Un exemple d'interversion de limites

p.526

Exercice 13 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A convergeant vers $x\in\overline{A}$.

1. Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et si f admet une limite finie ℓ en a, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
2. Le résultat précédent est-il encore vrai si l'on suppose seulement que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f ?

2 Convergence uniforme et continuité

On sait que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas en général une fonction continue (*cf.* l'exercice 2 de la page 493). Si la convergence est plus forte, par exemple si elle est uniforme ou uniforme au voisinage de tout point, alors f « hérite » de la continuité des fonctions f_n.

Lemme 5

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f et si les f_n sont continues en $a\in A$, alors f est continue en a.

Principe de démonstration.

Pour tout $\varepsilon>0$, fixer une fonction f_n telle que $\mathcal{N}_\infty(f_n-f)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$. Ensuite, remarquer que :

$$f(x)-f(a)=\big(f(x)-f_n(x)\big)+\big(f_n(x)-f_n(a)\big)+\big(f_n(a)-f(a)\big)$$

et conclure à l'aide de la continuité de f_n en a. Démonstration page 526

Proposition 6

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues converge uniformément sur A vers f, alors f est continue.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent. □

Théorème 7

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément au voisinage de a vers f et si les f_n sont continues en $a \in A$, alors f est continue en a.

Démonstration. Il existe un voisinage V de a sur lequel la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. Par caractère local de la continuité, il suffit d'appliquer le lemme 5 de la page précédente à la suite $\left(f_{n|V}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Théorème 8

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément au voisinage de tout point vers f, alors la fonction f est continue.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent. □

p.527

Exercice 14 On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

1. Démontrer que si les fonctions f_n sont k-lipschitziennes, alors f est k-lipschitzienne.
2. Démontrer que si les fonctions f_n sont lipschitziennes, alors f n'est pas nécessairement lipschitzienne.
3. Démontrer que si les fonctions f_n sont uniformément continues, alors f est uniformément continue.

3 Théorème de la double limite

On suppose ici que a est adhérent à A, c'est-à-dire (*cf.* page 260) que $a \in \overline{A}$ ou que $a = +\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée ou que $a = -\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$ non minorée.

Lemme 9 (d'interversion des limites)

Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n ait une limite finie $\ell_n \in F$ en a adhérent à A.

Si l'une des deux limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe dans F, alors l'autre existe et elles sont égales, *i.e.* :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Démonstration (non exigible) page 527

Théorème 10 (de la double limite)

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et si pour tout $n\in\mathbb{N}$ la fonction f_n a une limite fine en $a\in\overline{A}$ ou $a=\pm\infty$, alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la fonction f a une limite en a et l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Démonstration (non exigible) page 528

Remarque Pour ce résultat, une convergence uniforme au voisinage de a suffit évidemment.

Attention En revanche, il n'y a évidemment pas de version « convergence uniforme au voisinage de tout point » de ce théorème, comme le montre l'exercice suivant.

p.529

Exercice 15 Soit $A=[0,1[$. Donner un exemple de suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge uniformément au voisinage de tout point de A et telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to 1} f_n(x)\right)\neq\lim_{x\to 1}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$.

p.529

Exercice 16 Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double à valeurs dans F. On suppose :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \lim_{p\to+\infty} u_{n,p}=\alpha_n \qquad \text{et} \qquad \forall p\in\mathbb{N}\quad \lim_{n\to+\infty} u_{n,p}=\beta_p,$$

l'une de ces limites étant uniforme par rapport à l'autre variable.

Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent et que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim_{p\to+\infty}\beta_p.$$

Vérifier de plus que cette limite est aussi la limite de la suite $(u_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

III Intégration, dérivation d'une limite

Dans cette section, I est un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans F.

1 Intégration d'une limite

Théorème 11

On suppose que $I=[a,b]$ avec $a<b$ et que les fonctions f_n sont continues. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors :

$$\int_{[a,b]} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{[a,b]} f.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 529

Majorer $\left\|\displaystyle\int_{[a,b]}(f_n-f)\right\|$ à l'aide de $\displaystyle\int_{[a,b]}\|f_n-f\|$.

Remarques

- L'inégalité $\left\| \int_{[a,b]} (f_n - f) \right\| \leqslant (b-a)\mathcal{N}_\infty(f_n - f)$ est d'un usage courant.
- L'hypothèse de convergence uniforme est capitale.

p.530

Exercice 17

1. Calculer $I_n = \int_0^1 x^n(1-x)\,\mathrm{d}x$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner un exemple de suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues définies sur $[0,1]$ convergeant simplement vers 0 et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n = +\infty$.

Remarque On ne peut pas remplacer dans le théorème 11 de la page ci-contre l'hypothèse que les f_n sont continues par l'hypothèse que les f_n sont continues par morceaux. Cela tient au fait qu'une limite uniforme de fonctions continues par morceaux n'est pas continue par morceaux en général. En revanche, si la limite f est continue par morceaux, alors la conclusion du théorème 11 de la page précédente est vérifiée, comme le montre l'exercice suivant.

p.530

Exercice 18 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues par morceaux définies sur $[0,1]$ convergeant uniformément vers f.

1. Démontrer que si f est continue par morceaux, la conclusion du théorème 11 de la page ci-contre est vérifiée, *i.e.* $\int_{[0,1]} f = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n$.
2. La fonction g définie sur $[0,1]$ par :
$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^* \quad g\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\ ; \\ \forall x \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{k}\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\right\} \quad g(x) = 0 \end{cases}$$
est-elle continue par morceaux ?
3. Est-il vrai qu'en général $\int_{[0,1]} f = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n$?

2 Primitivation d'une limite

Le théorème suivant établit que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment de I vers f, alors, pour tout $(a,x) \in I^2$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t.$$

Théorème 12

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans F convergeant uniformément sur tout segment de I vers une fonction f continue. Soit $a\in I$. On note Φ et Φ_n, pour tout $n\in\mathbb{N}$, les applications définies sur I par :

$$\Phi_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors uniformément sur tout segment de I vers Φ.

Principe de démonstration. Pour tout segment $[\alpha,\beta]\subset I$, que l'on peut supposer contenir a, et pour $x\in[\alpha,\beta]$, majorer $\left\|\Phi_n(x)-\Phi(x)\right\|$ en fonction de $\mathcal{N}_\infty\big((f_n-f)_{|[\alpha,\beta]}\big)$.

Démonstration page 531

Remarque

L'hypothèse de convergence uniforme sur tout segment de I est capitale.

3 Dérivation d'une limite

Théorème 13

Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^1$.

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f et si la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors :

- la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
$$\forall x\in I \quad f'(x)=\lim_{n\to+\infty} f'_n(x)\ ;$$
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Principe de démonstration. Appliquer le théorème de primitivation de la limite d'une suite de fonctions continues (le théorème 12) à la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration page 531

Attention Une limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ n'est pas en général de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x)=\sqrt{x+\frac{1}{n}}$ converge uniformément vers la fonction $f : x\mapsto\sqrt{x}$ (*cf.* page 496).

On établit sans difficulté par récurrence le théorème suivant.

Théorème 14

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^p$. Si

- pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$ la suite $\big(f_n^{(k)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement ;
- la suite $\big(f_n^{(p)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $k\in[\![0,p]\!]$:

$$\forall x\in I \quad f^{(k)}(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Démonstration page 531

Point méthode

Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Si pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite $\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in I \quad f^{(p)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p)}(x).$$

IV Séries de fonctions

1 Les modes de convergence

Dans cette section, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans F.

Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement** si pour tout $x \in A$, la série $\sum u_n(x)$ converge et l'on note alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x). \end{array}$$

Remarques

- Souvent on parle de la série de fonctions $\sum e_n(x)$, où $e_n(x)$ est une expression qui dépend d'une variable x. Par exemple, on parlera de la série de fonctions $\sum e^{-n^2x}$ sur $\mathbb{R}$. Il s'agit bien évidemment d'un abus. Il faut entendre par « *série de fonctions* $\sum e^{-n^2x}$ *sur* $\mathbb{R}$ » : la série de fonctions $\sum u_n$, où, pour tout entier naturel n, la fonction u_n est définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = e^{-n^2x}$. Cela étant, cet abus est à la fois très répandu et très pratique.
- Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $\sum\limits_{n\geqslant a} u_n$ la série où l'indexation commence à a.
- L'étude des suites de fonctions montre que certaines propriétés vérifiées par les u_n ne « passent pas à la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ » en général. Par exemple, si les u_n sont continues, la somme n'est pas toujours continue. Cependant, on peut démontrer que si les u_n sont des fonctions croissantes, alors la somme est croissante. De même si les fonctions sont convexes.

Convergence uniforme

Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. En appliquant à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les définitions vues plus haut, on définit :

- la **convergence uniforme** de la série $\sum u_n$;
- la **convergence uniforme sur B** de la série $\sum u_n$;
- la **convergence uniforme au voisinage de $a \in A$** de la série $\sum u_n$;
- la **convergence uniforme au voisinage de tout point** de la série $\sum u_n$;
- la **convergence uniforme sur tout segment** de la série $\sum u_n$.

La proposition suivante est une simple reformulation de la définition de la convergence uniforme. Elle peut, bien entendu, s'adapter à tous les types, détaillés ci-dessus, de convergence uniforme sur des parties de A.

Proposition 15

La série $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si :

- la série converge simplement et
- la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Exemples

1. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}\, x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$. En effet, pour $x \in [0,1]$, la suite $\left(\frac{1}{n}\, x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}\, x^n$ est convergente. Toujours d'après ce théorème, en notant $R_n(x)$ le reste d'ordre n de la série :
$$\forall x \in [0,1] \quad \left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+1} x^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot$$
La convergence uniforme est ainsi démontrée.
2. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{x+n^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La série $\sum f_n$ converge simplement puisque, pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et que $\dfrac{1}{n^2}$ est le terme général positif d'une série convergente.
Montrons la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout entier naturel n, on a par définition :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 \leqslant R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x+k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$
et donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions bornées qui vérifie :
$$\mathcal{N}_\infty(R_n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
ce qui démontre l'assertion.

Convergence normale

La convergence normale, lorsqu'elle est vérifiée, fournit un moyen simple et efficace pour établir la convergence uniforme d'une série.

Définition 4

La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement** si

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est bornée et si
2. la série $\sum \mathcal{N}_\infty(u_n)$ est convergente.

Point méthode

Pour établir que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, il suffit d'exhiber une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que :

- la série $\sum \alpha_n$ converge ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in A \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \alpha_n.$$

Exemples

1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

   En effet, en notant f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$, cela pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

   Puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

2. La série $\sum\big(x(1-x)\big)^n$ converge normalement sur $[0,1]$.

   En effet la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ définie sur le segment $[0,1]$ est continue, positive. Une brève étude de f définie sur $[0,1]$ montre que son maximum est atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$. Par conséquent, pour tout entier n et $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant \big(x(1-x)\big)^n \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

   La convergence de la série géométrique $\sum \frac{1}{4^n}$ assure la convergence normale sur $[0,1]$ de la série $\sum f^n$.

p.532

Exercice 19

1. Étudier la convergence (simple/normale/uniforme) sur $\mathbb{R}$ de :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+x^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+x^2}.$$

2. Étudier la convergence (simple/uniforme) de $\sum x\, e^{-nx}$ (sur $\mathbb{R}_+$).

Définition 5

- La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement sur $B \subset A$** si la série de fonctions $\sum u_{n|_B}$ converge normalement.
- La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement au voisinage de $a \in A$** s'il existe une voisinage V de a tel que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur V.
- La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement au voisinage de tout point de A** si elle converge normalement au voisinage de a, pour tout $a \in A$.
- La série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement sur tout segment** si la série de fonctions $\sum u_{n|_{[a,b]}}$ converge normalement pour tout $[a,b]$ inclus dans A.

Exemples

1. La série géométrique complexe $\sum z^n$ converge simplement sur $D_O(0,1)$. La convergence est normale au voisinage de tout point. En effet, il est clair que pour tout $r \in [0,1[$, la convergence est normale sur $D_F(0,r)$, puisque $|z^n| \leqslant r^n$ pour tout $z \in D_F(0,r)$. De plus, pour tout $z \in D_O(0,1)$, le disque $D_F\left(0, \frac{1+|z|}{2}\right)$ est un voisinage de z, ce qui assure la conclusion.
2. La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{x+n^2}$ converge normalement au voisinage de tout point de $]0,+\infty[$.

   En effet, pour tout $x > 0$, l'intervalle $I_x = \left[\frac{x}{2}, +\infty\right[$ est un voisinage de x. De plus :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I_x \quad 0 \leqslant \frac{1}{t+n^2} \leqslant \frac{1}{x/2+n^2}.$$
   De la convergence de la série $\sum \frac{1}{x/2+n^n}$, qui est obtenue par comparaison aux séries de Riemann, on déduit la convergence normale de la série $\sum \frac{1}{n^2+t}$ sur I_x.

p.533 **Exercice 20** Fonction ζ de Riemann

Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^z}$ converge normalement au voisinage de tout point du demi-plan $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\right\}$

Convergence normale et convergence uniforme

Proposition 16

- Si la série $\sum u_n$ converge normalement sur A, alors, pour tout $a \in A$, la série $\sum u_n(a)$ est absolument convergente.
- Si la série $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de $a \in A$, alors la série $\sum u_n(a)$ est absolument convergente.

Principe de démonstration. Utiliser le théorème de comparaison. Démonstration page 533

Théorème 17

- Si la série $\sum u_n$ converge normalement sur A, alors elle converge uniformément sur A.
- Si la série $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de $a \in A$, alors elle converge uniformément au voisinage de a.

Démonstration page 533

Attention Une série de fonctions peut converger uniformément sur A sans pour autant converger normalement sur A.

Exemple La série $\sum \frac{(-1)}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (*cf.* page 506), mais elle ne converge pas normalement sur $[0,1]$. En effet, en notant, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} x^n$ définie sur $[0,1]$, on a $\mathcal{N}_\infty(u_n) = \frac{1}{n}$ et la série harmonique est divergente.

Point méthode

Pour démontrer la convergence uniforme d'une série, on commence par examiner la convergence normale.

p.534 **Exercice 21** Étudier les convergences simple, normale et uniforme sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum x^n(1-x)$.

Exemple Étudions la nature de la convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ sur l'intervalle $]0,2\pi[$.

Comme il est clair que $\sup\limits_{x\in]0,2\pi[} \left|\frac{\cos(nx)}{n}\right| = \frac{1}{n}$, la divergence de la série harmonique implique que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

Posons, pour $x \in]0,2\pi[$, la somme $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$. Puisque $\exp(ix) \neq 1$, le calcul donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(x) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0,2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|S_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot$

Par ailleurs, toujours pour $x \in]0, 2\pi[$ et $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(nx)}{n} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\big(S_n(x) - S_{n-1}(x)\big)\\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left(S_n(x)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) + \frac{S_N(x)}{N} - 1.\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons u_n la fonction définie sur $]0, 2\pi[$ par $u_n(x) = S_n(x)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, pour tout $\alpha \in]0, \pi[$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$ est décroissante sur $]0, \pi]$, par symétrie :

$$\forall x \in [\alpha, 2\pi - \alpha] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \big|S_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Il s'ensuit que :

$$\forall x \in [\alpha, 2\pi - \alpha] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \big|u_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Par ailleurs, la série télescopique $\sum \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente ; par théorème la série $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$. Par ailleurs, il est clair que la suite de fonctions $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$. Par suite la série de fonctions $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ converge uniformément sur tout segment de la forme $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ et donc elle converge uniformément au voisinage de tout point de $]0, 2\pi[$.

Point méthode

Pour démontrer que suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément, il est souvent pratique de démontrer que la série télescopique $\sum (f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément.

p.534 **Exercice 22** Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 1] \quad f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f vérifiant :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 Limite sous le signe $\sum$

Continuité

Proposition 18

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur A et si toutes les fonctions u_n sont continues sur A, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur A.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la proposition 6 de la page 501. □

Exemple La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

En effet, en notant u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n^2+1}.$$

Comme $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$, par comparaison aux séries de Riemann, la série numérique $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge et par conséquent la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Puisque les fonctions u_n sont continues, la proposition 18 permet d'affirmer que f est continue.

Théorème 19

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de $a \in A$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue en a, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue en a.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 7 de la page 501. □

Corollaire 20

Supposons que les fonctions u_n soient continues. Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de tout point, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue.

Exemple La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n}$ est définie sur $I =]0, 2\pi[$. Nous avons vu que la série $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n}$ converge uniformément au voisinage de tout point de $]0, 2\pi[$ (*cf.* page 509). Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{\cos(nx)}{n}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $]0, 2\pi[$.

p.535 **Exercice 23** Démontrer que la fonction $\zeta : H \to \mathbb{C}$ définie par $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^z}$ est continue sur $H = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\right\}$.

p.535 **Exercice 24** Démontrer que $\exp : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{M^k}{k!} \end{array}$ est continue.

p.536 **Exercice 25** Démontrer que $\exp : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ a & \longmapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^k}{k!} \end{array}$ est continue.

Interversion somme/limite

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 10 de la page 502.

Théorème 21

Si la série $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de a adhérent à A, et si pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n a une limite finie ℓ_n en a alors, la série $\sum \ell_n$ converge et :

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} u_n(x) \right)$$

Exemple Nous avons vu page 509 que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ ne convergeait pas normalement sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ mais qu'elle convergeait uniformément au voisinage de tout point de $]0, 2\pi[$.

Le théorème précédent montre qu'elle ne converge pas uniformément sur $]0, 2\pi[$, sinon elle convergerait uniformément au voisinage de 0 et, par passage à la limite, la série $\sum \frac{1}{n}$ convergerait.

p.537 **Exercice 26** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2 + n^2}$.

p.537 **Exercice 27** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x + n^2}$.

3 Intégration terme à terme sur un segment

Dans la suite de cette section, I est un intervalle d'intérieur non vide et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans F.

Théorème 22

Soit $a \in I$. Supposons que les fonctions u_n soient continues.
Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I, alors

$$\forall x \in I \quad \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t) \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 12 de la page 504. □

Corollaire 23

Supposons que les fonctions u_n soient continues sur le segment $[a,b]$. Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} u_n.$$

p.537 **Exercice 28** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum a_n$ soit convergente.

1. Démonter que l'application f définie sur $[0,2\pi]$ par $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \sin(kx)$ est continue.
2. Calculer $\displaystyle\int_{[0,2\pi]} f$.

p.537 **Exercice 29** Soit $(z,r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^*$, avec $r \neq |z|$.

1. Pour tout $t \in [0,2\pi]$, exprimer $\dfrac{1}{z - re^{it}}$ sous la forme de la somme d'une série géométrique.
2. Calculer $I(r,z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - re^{it}}$

4 Dérivation terme à terme

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 13 de la page 504.

Théorème 24 (dérivation terme à terme)

Supposons que les fonctions u_n soient de classe $\mathcal{C}^1$. Si

- la série $\sum u_n$ converge simplement,
- la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'.$$

Exemples

1. Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On a :

$$\forall x > 1 \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}\cdot$$

En effet, posons $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$. Nous savons que la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$. De plus, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$. Pour tout réel $a > 1$, démontrons la convergence normale de la série $\sum u_n'$ sur $[a,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant -u_n'(x) = \frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^a}\cdot$$

De plus, au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{\ln n}{n^a} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^b}\right)$ pour tout $a > b > 1$. En choisissant un tel réel b, par comparaison aux séries de Riemann, la série numérique $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ est convergente. Cela nous permet d'affirmer la convergence normale de la série $\sum u_n'$ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 1$, et donc qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de $]1,+\infty[$. La conclusion suit.

2. La fonction définie sur $]0,2\pi[$ par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,2\pi[$. En effet, en posant $u_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]0,2\pi[\quad |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

ce qui démontre, du fait de la convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, la convergence normale (et donc simple) de la série de fonctions $\sum u_n$.

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour $x \in]0,2\pi[$, on a $u_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$. Nous avons vu que la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]0,2\pi[$ (*cf.* page 509). Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,2\pi[$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \exp(tM) \end{array}$, où, rappelons le, la fonction exp est définie par :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{M^k}{k!} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, notons u_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u_k(t) = t^k \frac{M^k}{k!}$. Les fonctions u_k sont de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $u_k'(t) = Mu_{k-1}$ et $u_0' = 0$, ceci pour $t \in \mathbb{R}$. En notant $v_k : N \mapsto \frac{N^k}{k!}$, nous avons vu que la série $\sum v_k$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (*cf.* exercice 24 de la page 512). Il s'ensuit que la série $\sum u_k$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$. De même, en utilisant la continuité du produit matriciel, la série $\sum u_k' = \sum\limits_{k\geqslant 1} Mu_{k-1}$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = Mf$. On peut retenir ce résultat sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tM) = M \exp(tM).$$

Rappelons que E est un espace vectoriel de dimension finie. Comme à l'exercice 25 de la page 512, on déduit de ce qui précède que l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E), \\ t & \longmapsto & \exp(ta) \end{array}$ où $a \in \mathcal{L}(E)$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(ta) = a\,\exp(ta).$$

Le théorème 14 de la page 504 se traduit pour les séries comme suit.

Théorème 25 (dérivation terme à terme)

Supposons que les fonctions u_n soient de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p \geqslant 1$. Si :

- pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge simplement,
- la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment de I,

alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}.$$

Point méthode

Pour démontrer que la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut chercher à démontrer que :

- toutes les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément au voisinage de tout point.

Dans ce cas, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}.$$

Exemple La fonction $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $u_n(x) = \frac{1}{n^x}\cdot$ Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x > 1$ on a :

$$u_n^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^x}\cdot$$

Soit $1 < b < a$. Puisque $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \geqslant a \quad 0 \leqslant \frac{\ln^p n}{n^x} \leqslant \frac{\ln^p n}{n^a}\cdot$$

Par ailleurs, par croissance comparées, $\frac{\ln^p n}{n^a} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^b}\right)$.
La convergence de la série $\sum \frac{1}{n^b}$, donne par comparaison que la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Puisque tout $x \in]1, +\infty[$ a un voisinage de cette forme, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément au voisinage de tout point.
En conclusion, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]1, +\infty[\quad \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^x}.$$

En particulier, la fonction ζ est décroissante, convexe, mais ces deux propriétés peuvent être établies par des méthodes plus élémentaires (*cf.* page 505).

p.538
Exercice 30 Montrer que la fonction définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ est continue. Démontrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle dérivable en 0 ?

p.540
Exercice 31 Démontrer que la fonction définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5 Comportement asymptotique

Dans cette section, les fonctions u_n sont à valeurs réelles.
Notons $]\alpha, \beta[$ l'intérieur de I. Il est fréquent de chercher le comportement asymptotique de $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ au voisinage de α ou β (limites, équivalents, etc.) Il s'agit là de problèmes qui peuvent être extrêmement délicats. Il existe cependant quelques situations « typiques ».

Équivalent à l'aide d'une autre série

Une première méthode consiste à chercher un équivalent sous la forme de somme de séries.

Point méthode

S'il existe une suite de fonctions $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I telle que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \underset{\beta}{\sim} v_n$;
- la série $\sum v_n$ est convergente au voisinage de β et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ admet un équivalent « simple » g au voisinage de β,

on peut chercher à démontrer que $f \underset{\beta}{\sim} g$. Pour cela, on pourra revenir à la définition de l'équivalence et utiliser le théorème de la double limite, appliqué à la série de fonctions $\sum \frac{u_n}{g}$.

p.540 **Exercice 32** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x}\cdot$

Donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.

Comparaison série/intégrale

Une seconde méthode possible consiste à comparer avec une intégrale.

Rappelons que si $\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue par morceaux décroissante, alors la série $\sum \left(\varphi(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est convergente (*cf.* page 409). Détaillons à nouveau. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} (\varphi(n) - \varphi(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

La fonction φ étant décroissante positive, elle admet une limite en $+\infty$, celle-ci ne peut être que nulle. Par suite la série télescopique $\sum (\varphi(n) - \varphi(n+1))$ est convergente et :

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi(n) - \varphi(n+1)) = \varphi(0).$$

Supposons de plus que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente (voir le corollaire 13 de la page 409). Dans ces conditions, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{N+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

La convergence de la série $\sum \varphi(n)$ en découle et :

$$\boxed{0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n) - \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(0).}$$

Point méthode

Soit $u : I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \mapsto u(x,t)$ soit décroissante et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour obtenir un équivalent en β de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u(x,n)$ on pourra :

1. établir la majoration $\left|f(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant u(x,0)$;
2. démontrer que $u(x,0) = \mathrm{o}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t\right)$ au voisinage de β.

p.540

Exercice 33

Suite de l'exercice 32. Donner un équivalent simple de f au voisinage de 0.

V Approximation uniforme

Dans la suite a et b sont deux réels, avec $a < b$.
Nous présentons dans cette section deux théorèmes d'approximation uniforme.

Définition 6

Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{B}(I,F)$. On dit que $f \in \mathcal{B}(I,F)$ peut être **approchée uniformément** par des éléments de $\mathcal{F}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{N}_\infty(f-g) \leqslant \varepsilon$.

Proposition 26

Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{B}(I,F)$ et $f \in \mathcal{F}(I,F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) La fonction f peut être approchée uniformément par des éléments de $\mathcal{F}$.

(ii) La fonction f est la limite uniforme d'une suite à valeurs dans $\mathcal{F}$.

(iii) La fonction f est un élément de $\overline{\mathcal{F}}$.

Démonstration page 541

1 Approximation par des fonctions en escalier

Lors de la construction de l'intégrale des fonctions continues par morceaux en première année, il a été établi que toute fonction continue par morceaux à valeurs dans $\mathbb{K}$ peut être approchée par des fonctions en escalier. Nous allons le généraliser à des fonctions vectorielles.
En termes topologiques, ce résultat signifie que l'ensemble $\mathcal{E}([a,b],F)$ des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans F est dense dans $\big(\mathcal{CM}([a,b],F),\mathcal{N}_\infty\big)$.

Théorème 27

Soit f une fonction de $\mathcal{CM}([a,b],F)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $g \in \mathcal{E}([a,b],F)$ telle que $\mathcal{N}_\infty(f-g) \leqslant \varepsilon$.

Principe de démonstration. Dans le cas où f est continue, utiliser l'uniforme continuité pour construire une fonction g telle que $\mathcal{N}_\infty(f-g) \leqslant \varepsilon$.
Dans le cas où f est continue par morceaux, écrire $f = f_1 + \varphi$, avec f_1 continue et φ est en escalier.

Démonstration page 541

2 Approximation par des polynômes

Le théorème de Weierstrass établit que toute fonction continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie sur un segment peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales. On donne ici une démonstration, non exigible, due à Henri Lebesgue. D'autres sont proposées en exercice. La démonstration repose sur plusieurs lemmes donnés sous forme d'exercices.

Définition 7

Une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est **affine par morceaux** s'il existe une subdivision $\sigma = (u_0,\dots,u_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la restriction de f à $]u_i,u_{i+1}[$ soit une fonction affine. La subdivision σ est dite **adaptée** à f.

p.542 **Exercice 34** Démontrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ peut être approchée uniformément par des fonctions affines par morceaux continues.

p.543 **Exercice 35** On note, pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : t \mapsto |t-a|$ définie sur $[0,1]$. Démontrer que la famille $(f_a)_{a\in[0,1]}$ est génératrice de l'espace des fonctions continues affines par morceaux définies sur $[0,1]$.

p.543 **Exercice 36** Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ définies par

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1] \quad P_0(t) = 0 \\ \forall t \in [0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\big(P_n(t)^2 + t\big) \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
2. Démontrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
   Indication. Démontrer que les fonctions P_n et $P_{n+1} - P_n$ sont croissantes.
3. Démontrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$.

p.544 **Exercice 37** Démontrer que si l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dense dans $\big(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K}),\mathcal{N}_\infty\big)$, alors l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dense dans $\big(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\mathcal{N}_\infty\big)$.

Théorème 28 (de Weierstrass)

Soit a et b deux réels, avec $a < b$. Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Démonstration (non exigible) page 545

Remarque En d'autres termes, l'ensemble des fonctions polynomiale sur $[a, b]$ est dense dans l'espace vectoriel normé $\left(\mathcal{C}(a,b),\mathbb{R}),\mathcal{N}_\infty\right)$.

p.545

Exercice 38 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que f est la fonction nulle.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\ ; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f qui vaut 1 en 1 et qui est nulle sur $[0,1[$.

Exercice 2 Il est clair que $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. On constate que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. En effet, lorsque $n \geqslant \lceil \frac{1}{x} \rceil$, on a $x \geqslant \frac{1}{n}$ et donc $f_n(x) = \frac{1}{x}\cdot$
Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\ ; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Exercice 3 Puisque que la convergence uniforme ne dépend pas du choix de la norme sur E, on peut fixer arbitrairement une norme.

L'application $\|\ \|_\infty$ définie pour tout $x = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k e_k$ par $\|x\|_\infty = \max\limits_{i\in[\![1,p]\!]} \big\{|x_i|\big\}$ est une norme sur F. On considère la norme $\mathcal{N}_\infty$ sur $\mathcal{B}(A,F)$ associée à $\|\ \|_\infty$.

- Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g alors, il existe un rang à partir duquel la fonction $g - f_n$ est bornée. À partir d'un tel rang, pour $i \in [\![1,p]\!]$:

  $$\forall x \in A \quad \big|g_i(x) - f_{n,i}(x)\big| \leqslant \big\|g(x) - f_n(x)\big\|_\infty \leqslant \mathcal{N}_\infty(g - f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Par conséquent, les suites $(f_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers g_i.
- Supposons que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ la suite $(f_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_i. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, il existe un rang n_i tel que :

  $$\forall x \in A \quad \forall n \geqslant n_i \quad \big|f_{n,i}(x) - g_i(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

  Ainsi, en posant $n_0 = \max\{n_1,\ldots,n_p\}$, on a :

  $$\forall x \in A \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \big\|f_n(x) - g(x)\big\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

  Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g.

Exercice 4 Puisque $\sin' = \cos$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction sinus sur $\mathbb{R}$ donne :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\sin y - \sin x| \leqslant |y - x|.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \big|f_n(x) - \sin(x)\big| = \left|\sin\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - \sin(x)\right| \leqslant \frac{1}{n}\cdot$$

En conclusion : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $\sin$.

Exercice 5 Il est facile de vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in [0,1] \quad f_n'(x) = nx^{n-1}\left(1 - \frac{n+1}{n}\,x\right).$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0

On déduit du tableau de variations que :

$$\mathcal{N}_\infty(f_n) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Puisque $0 \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$, on a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant 1$ et donc :

$$0 \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 6 À l'exercice 2, nous avons démontré que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\ ; \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[, \end{cases}$$

converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1/x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) - f_n(x) = \begin{cases} \frac{1-n^2x^2}{x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0^+}\big(f(x) - f_n(x)\big) = +\infty$ et donc la fonction $f - f_n$ n'est pas bornée. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f.

Exercice 7

- Étudions la convergence simple.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = 0$ et donc $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, d'après les théorèmes généraux :

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx}{n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

- Étudions la convergence uniforme.
  En posant g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $f_n(x) = g(nx)$. En particulier :
  $$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = g(1) = \frac{1}{2}\cdot$$
  La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers 0.

Exercice 8

1. - Étudions la convergence simple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a selon les théorèmes généraux $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto x^2$.
   - On a $\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right|$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. En particulier :
     $$\left|f_n(n^2) - f(n^2)\right| = \left|2n + \frac{1}{n^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
     et donc la convergence n'est pas uniforme.
2. - Étudions la convergence simple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a selon les théorèmes généraux $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto x^2$.
   - On a $\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|2\frac{xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2}\right|$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
     L'étude de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g : x \mapsto x\,e^{-x}$ montre que
     $$0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-1}.$$
     Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
     $$\left|f_n(x) - f(x)\right| = 2\,\frac{xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2} \leqslant 2\,\frac{e^{-1}}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
     et donc la convergence est uniforme.

Proposition 2 Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de fonctions définies sur A à valeurs dans F convergeant uniformément respectivement vers f et g et si λ et μ sont deux scalaires, alors, pour tout $x \in A$ et n suffisamment grand :
$$\begin{aligned}\left\|\big(\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)\big) - \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\right\| &= \|\lambda\big(f_n(x) - f(x)\big) + \mu\big(g_n(x) - g(x)\big)\| \\ &\leqslant |\lambda|\,\|f_n(x) - f(x)\| + |\mu|\,\|g_n(x) - g(x)\| \\ &\leqslant |\lambda|\,\mathcal{N}_\infty(f_n - f) + |\mu|\,\mathcal{N}_\infty(g_n - g).\end{aligned}$$
Ainsi, pour n suffisamment grand, la fonction $(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)$ est bornée et :
$$\mathcal{N}_\infty\big((\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
En d'autres termes la suite $\big(\lambda f_n + \mu g_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

Exercice 9 Posons, pour tout entier n non nul, la fonction $f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Il est facile de justifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers l'identité de $\mathbb{R}$. En revanche la suite $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément d'après l'exercice 8.

Proposition 3 Supposons que les fonctions f_n soient bornées et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

On sait alors qu'il existe un entier n_0 tel que $f - f_{n_0}$ est bornée et donc, du fait que f_{n_0} est bornée, $f = (f - f_{n_0}) + f_{n_0}$ est bornée. Il vient alors immédiatement de la définition de la convergence uniforme que f est la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace vectoriel normé $\big(\mathcal{B}(A,F), \mathcal{N}_\infty\big)$.

Exercice 10

1. La fonction f est impaire, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit le tableau de variations ci-dessous.

x	0		$3^{-1/4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$3^{3/4}/4$	$\searrow$	0

Par conséquent $\mathcal{N}_\infty(f) = \frac{3^{3/4}}{4}\cdot$

2. • La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.

   En effet, puisque $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f_n(x) = f(nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Par ailleurs, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

   • Il est immédiat que $\mathcal{N}_\infty(f_n) = \mathcal{N}_\infty(f) = \frac{3^{3/4}}{4}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La convergence n'est donc pas uniforme.

Exercice 11

1. Si $(f,g) \in \mathcal{B}(A,\mathbb{K})$, alors :

$$\forall x \in A \quad \big|f(x)g(x)\big| = \big|f(x)\big|\,\big|g(x)\big| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)\mathcal{N}_\infty(g),$$

et donc fg est une fonction bornée et :

$$\mathcal{N}_\infty(f\,g) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)\mathcal{N}_\infty(g).$$

Par ailleurs, du fait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\big(\mathcal{B}(A,\mathbb{K}), \mathcal{N}_\infty\big)$, la suite $\big(\mathcal{N}_\infty(f_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante M.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f)$ et donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\infty(f_n g_n - fg) &\leqslant \mathcal{N}_\infty\big(f_n(g_n-g)\big) + \mathcal{N}_\infty\big(g(f_n-f)\big)\\ &\leqslant M\mathcal{N}_\infty(g_n - g) + \mathcal{N}_\infty(g)\mathcal{N}_\infty(f_n - f)\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{N}_\infty(g_n - g) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient :

$$0 \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n g_n - fg) \leqslant M\mathcal{N}_\infty(g_n - g) + \mathcal{N}_\infty(g)\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En conclusion, $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

2. Par définition d'une algèbre, le produit de F est bilinéaire. Ainsi, puisque F est de dimension finie, il existe $C > 0$ telle que :
$$\forall (y, y') \in F^2 \quad \|yy'\| \leqslant C\|y\|\,\|y'\|.$$
Quitte à remplacer la norme $\|\ \|$ par l'application $x \mapsto C\|x\|$, qui est également une norme sur F, on peut supposer $C = 1$. On en déduit que si $(f, g) \in \mathcal{B}(A, F)$, alors :
$$\mathcal{N}_\infty(f\,g) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f)\,\mathcal{N}_\infty(g).$$
On adapte alors le raisonnement ci-dessus pour démontrer que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

Proposition 4 Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur tout segment de I. Soit $x \in I$.

- Si $x \in \overset{\circ}{I}$, alors il existe $h > 0$ tel que $[x-h, x+h] \subset I$. Par suite, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[x-h, x+h]$, qui est un voisinage de x.
- Si x est l'extrémité gauche de I, puisque $x \in I$, il existe $h > 0$ tel que $[x, x+h] \subset I$, et donc la la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[x, x+h]$, qui est un voisinage de x dans I.
- Il en est de même dans l'éventualité où x est l'extrémité droite de I.

Exercice 12

- Étudions la convergence simple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après les théorèmes généraux :
$$f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^2}{nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} x.$$
Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$.
- Étudions la convergence uniforme. Pour cela, étudions, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto x - f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $g_n(x) = \frac{x-1}{nx+1}\cdot$
La fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n'(x) = \frac{n+1}{(nx+1)^2}\cdot$
On en déduit la tableau de variations de g_n.

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$	
g_n	-1	$1/n$

Il s'ensuit, pour tout entier $n > 0$, que g_n est bornée et que
$$\mathcal{N}_\infty(f_n - f) = \mathcal{N}_\infty(g_n) = 1.$$
La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrons qu'il y a convergence uniforme au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela, il suffit d'établir qu'il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En effet pour tout $x \in]0, +\infty[$ l'intervalle $\left[\frac{x}{2}, +\infty\right[$ est un voisinage de x.

Soit donc $a > 0$. L'étude précédente montre, pour tout entier $n > 0$, que g_n est bornée sur $I = [a, +\infty[$ et

$$\sup_{x \in [a,+\infty[} \big|g_n(x)\big| = \max\left\{\big|g_n(a)\big|, \frac{1}{n}\right\} = \max\left\{\frac{|a-1|}{na+1}, \frac{1}{n}\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En conclusion, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13

1. À partir d'un certain rang, la fonction $f - f_n$ est bornée. À partir d'un tel rang :

$$0 \leqslant \big\|f_n(x_n) - \ell\big\| = \big\|f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - \ell\big\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) + \big\|f(x_n) - \ell\big\|.$$

Par composition des limites, on a $\big\|f(x_n) - \ell\big\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, par convergence uniforme :

$$0 \leqslant \big\|f_n(x_n) - \ell\big\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) + \big\|f(x_n) - \ell\big\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La conclusion est alors immédiate.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ introduite à l'exercice 10 de la page 498 converge simplement vers la fonction nulle, mais pas uniformément. Toujours d'après l'étude menée lors de cet exercice :

$$f_n\left(\frac{1}{n\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{3^{3/4}}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n\sqrt[4]{3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En conclusion, l'hypothèse de convergence simple n'est pas suffisante pour établir le résultat de la question précédente.

Remarque On peut se passer de l'étude de la fonction pour établir le résultat. Il suffit de remarquer que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Lemme 5 Soit $\varepsilon > 0$. L'hypothèse de convergence uniforme donne l'existence d'un entier n tel que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Fixons un tel entier.

Par continuité de f_n en a, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ vérifiant $\|x - a\| \leqslant \eta$, on a $|f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Par conséquent, pour tout $x \in A$ vérifiant $\|x - a\| \leqslant \eta$, on a :

$$\begin{aligned}
\big\|f(x) - f(a)\big\| &= \big\|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)\big\| \\
&\leqslant \big\|f(x) - f_n(x)\big\| + \big\|f_n(x) - f_n(a)\big\| + \big\|f_n(a) - f(a)\big\| \\
&\qquad\qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \mathcal{N}_\infty(f - f_n) + \big\|f_n(x) - f_n(a)\big\| + \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

La continuité de f en a est donc démontrée.

Exercice 14

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in A$, on a :
$$\big\|f_n(x) - f_n(y)\big\| \leqslant k\|x-y\|.$$
En passant à la limite dans cette dernière inégalité, il vient que pour tout $(x,y) \in A$:
$$\big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant k\|x-y\|.$$
Par suite f est k-lipschitzienne.

Remarque La convergence simple suffit.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}}$. Nous avons vu que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$, qui n'est pas lipschitzienne. Cependant, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, elles sont lipschitziennes.
3. Soit $\varepsilon > 0$.
Par convergence uniforme, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
Fixons n_0. Puisque f_{n_0} est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que :
$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \Big(\|y-x\| \leqslant \eta \Longleftrightarrow \big|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\Big).$$
Par conséquent, pour tout $(x,y) \in A^2$ tel que $\|y-x\| \leqslant \eta$, on a :
$$\begin{aligned}\big\|f(x) - f(y)\big\| &\leqslant \big\|f(x) - f_{n_0}(x)\big\| + \big\|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\big\| + \big\|f_{n_0}(y - f(y)\big\|\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$
Par suite, f est uniformément continue.

Lemme 9 On peut illustrer la situation à l'aide du schéma ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, "n \to +\infty"] \arrow[d, "x \to a"'] & f(x) \arrow[d, dotted, "x \to a"] \\
\ell_n \arrow[r, dotted, "n \to +\infty"'] & \ell
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse les flèches pleines sont données et il s'agit de démontrer que si une flèche en pointillé est valable, alors l'autre l'est.

Afin d'unifier la démonstration, on dira que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[\alpha, +\infty[\, \subset V$. On définit de manière analogue un voisinage de $-\infty$.

- Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
  Pour n suffisamment grand, on a :
$$\forall x \in A \quad \big\|f_n(x) - f(x)\big\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f).$$

En faisant tendre x vers a dans cette inégalité à n fixé, il vient :

$$\left\|\ell_n - \ell\right\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f).$$

Par convergence uniforme, on a :

$$0 \leqslant \left\|\ell_n - \ell\right\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \ell$.

- Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \ell$.

  Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 tel que :

  $$\forall n \geqslant n_0 \quad \|\ell_n - \ell\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

  Par définition de la convergence uniforme, il existe un entier n_1 tel que :

  $$\forall n \geqslant n_1 \quad \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

  Posons $n = \max\{n_0, n_1\}$. Puisque $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \ell_n$, il existe un voisinage V de a tel que :

  $$\forall x \in V \cap A \quad \left\|f_n(x) - \ell_n\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

  Ainsi, pour $x \in V \cap A$, on a :

  $$\begin{aligned}\left\|f(x) - \ell\right\| &= \left\|\big(f(x) - f_n(x)\big) + \big(f_n(x) - \ell_n\big) + \big(\ell_n - \ell\big)\right\| \\ &\leqslant \mathcal{N}_\infty(f - f_n) + \left\|f_n(x) - \ell_n\right\| + \|\ell_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

  Par suite, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Théorème 10

- Montrons que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il existe n_0 tel que la fonction $f_n - f_{n_0}$ est bornée pour $n \geqslant n_0$.

  En faisant tendre x vers a dans l'inégalité $\left\|f_n(x) - f_{n_0}(x)\right\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f_{n_0})$, il vient que :

  $$\|\ell_n - \ell_{n_0}\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f_{n_0}).$$

  La suite $(\mathcal{N}_\infty(f_n - f_{n_0}))_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, donc bornée, $\big(\|\ell_n - \ell_{n_0}\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il s'ensuit que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne l'existence d'une extraction φ et d'un $\ell \in F$ tels que $\ell_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. En appliquant le lemme 9 de la page 501 à la suite $\big(f_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f, il vient que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
- Puisque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, le lemme 9 de la page 501 donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \ell$. Cela termine la démonstration.

Exercice 15 Posons, pour tout entier n, la fonction $f_n : \begin{array}{rcl} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array}$

Pour tout $a \in [0,1[$, on a $\sup\limits_{x\in[0,a]} \bigl|f(x)\bigr| = a^n$. Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément au voisinage de tout point vers la fonction nulle. Par ailleurs

- pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Bigl(\lim\limits_{x\to 1} f_n(x)\Bigr) = 1$;
- pour $x \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, et donc $\lim\limits_{x\to 1}\Bigl(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\Bigr) = 0$.

Exercice 16

- Supposons que $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p} = \alpha_n$ uniformément par rapport n. Cela signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_0 \geqslant 0 \quad \forall p \geqslant p_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n,p} - \alpha_n| \leqslant \varepsilon.$$

  En d'autres termes, en posant $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$ et en introduisant pour $p \in \mathbb{N}$ les applications :

$$f_p : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & F \\ n & \longmapsto & u_{n,p} \end{array} \qquad \text{et} \qquad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & F \\ n & \longmapsto & \alpha_n \end{array}$$

  les hypothèses que nous avons sont :
  * la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f ;
  * pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $f_p(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta_p$.

  Ainsi, d'après le théorème de la double limite, la suite $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\lim_{p\to+\infty} \beta_p = \lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n.$$

  Notons ℓ cette limite commune.

- Par convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$f_n(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} f(n),$$

  cf. l'exercice 13 de la page 500. En d'autres termes, $u_{n,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 11 Puisque les fonctions f_n sont continues et que la convergence est uniforme, la fonction f est continue (*cf.* le théorème 8 de la page 501). Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est définie.

Pour tout entier n on a, par convergence uniforme :

$$\left\| \int_{[a,b]} (f_n - f) \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f_n - f\| \leqslant \int_{[a,b]} \mathcal{N}_\infty(f_n - f) = (b-a)\,\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par conséquent :

$$\left\| \int_{[a,b]} f_n \int_{[a,b]} f \right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et la conclusion en découle.

Exercice 17

1. La fonction $x \mapsto x^n(1-x)$ est continue sur le segment $[0,1]$. Un calcul simple donne :
$$I_n = \int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$
et donc $I_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot$
2. Posons $f_n : x \mapsto n^3 x^n (1-x)$.
Les fonctions f_n sont continues. Pour tout $x \in]0,1[$, par croissances comparées, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus on a $f_n(0) = f_n(1) = 0$. Par conséquent la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. Cependant par linéarité :
$$\int_{[0,1]} f_n = \frac{n^3}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 18

1. Supposons que la fonction f soit continue par morceaux. Par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_{[0,1]} f$ est définie. Pour tout entier n on a :
$$0 \leqslant \left\| \int_{[0,1]} (f_n - f) \right\| \leqslant \int_{[0,1]} \|f_n - f\|.$$
Puisque la convergence est uniforme :
$$0 \leqslant \int_{[0,1]} \|f_n - f\| \leqslant \int_{[0,1]} \mathcal{N}_\infty(f_n - f) = \mathcal{N}_\infty(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
par conséquent :
$$\left\| \int_{[0,1]} (f_n - f) \right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
et la conclusion en découle.
2. Les $1/k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont des points de discontinuité pour g. Par conséquent, g ayant une infinité de points de discontinuité, la fonction g n'est pas continue par morceaux sur le segment $[0,1]$.
3. Posons $f = g$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :
$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]1/n, 1]\ ; \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1/n]. \end{cases}$$
Il est facile d'établir que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1/n$, pour tout $x \in [0,1/n]$. On en déduit, en distinguant les cas $x \leqslant 1/n$ et $x > 1/n$, que pour tout $x \in [0,1]$:
$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{n}\cdot$$
Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est en escalier, donc continue par morceaux.

En conclusion, lorsqu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{CM}\big([a,b]\,K\big)$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{F}\big([a,b]\,K\big)$, l'égalité $\displaystyle\int_{[0,1]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n$ n'a pas toujours de sens.

Théorème 12 Par convergence uniforme sur tout segment de I, la fonction f est continue (*cf.* le théorème 8 de la page 501). Soit $[\alpha,\beta]$ un segment inclus dans I. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a \in [\alpha,\beta]$. Pour tout entier n et $x \in [a,\beta]$:

$$\begin{aligned}\big\|\Phi_n(x) - \Phi(x)\big\| &= \left\|\int_a^x \big(f_n(t) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t\right\| \\ &\leqslant (x-a)\,\mathcal{N}_\infty\big((f_n - f)_{|[\alpha,\beta]}\big) \leqslant (\beta-\alpha)\,\mathcal{N}_\infty\big((f_n - f)_{|[\alpha,\beta]}\big)\end{aligned}$$

De même, pour $x \in [\alpha,a]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\|\Phi_n(x) - \Phi(x)\| \leqslant (\beta-\alpha)\,\mathcal{N}_\infty\big((f_n - f)_{|[\alpha,\beta]}\big)$. Ainsi :

$$\forall x \in [\alpha,\beta] \quad \big\|\Phi_n(x) - \Phi(x)\big\| \leqslant (\beta-\alpha)\,\mathcal{N}_\infty\big((f_n - f)_{|[\alpha,\beta]}\big),$$

ce qui établit la convergence uniforme sur tout segment de I de la suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers Φ.

Théorème 13 Soit $a \in I$. La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.

D'après le théorème 12 de la page 504, pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to+\infty} \big(f_n(x) - f_n(a)\big) \\ &= f(x) - f(a).\end{aligned}$$

En d'autres termes, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il s'ensuit, du fait que g est une fonction continue (d'après le théorème 8 de la page 501), que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f' = g$.

Théorème 14 Démontrons par récurrence l'assertion $\mathcal{H}_p$:

« Si les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ et

- *pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$ la suite $\big(f_n^{(k)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement ;*
- *la suite $\big(f_n^{(p)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,*

alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ on a : $\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x)$. »

Le cas $p = 1$ correspond au théorème 13 de la page 504.

Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que les fonctions f_n soient de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, que pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et que la suite $\left(f_n^{(p+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I. Le théorème 13 de la page 504 appliqué à la suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ donne que $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall x \in I \quad f_n^{(p+1)}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g'(x)$$

Puisque la suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, l'hypothèse de récurrence donne que la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ on a : $\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x)$. En particulier :

$$\forall x \in I \quad f^{(p)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p)}(x) = g(x).$$

Par conséquent, $f^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in I \quad f^{(p+1)}(x) = g'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p+1)}(x).$$

Cela termine la démonstration.

Exercice 19

1.
   - Posons $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}$. La fonction u_n est définie, bornée sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \geqslant 1$. De plus $\mathcal{N}_\infty(u) = \frac{1}{n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément et simplement.
   - La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^*$, car u_0 n'est pas bornée. La convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ montre que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes converge uniformément vers 0. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^*$, et donc simplement.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons v_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $v_n(x) = x\,e^{-nx}$.
   - Pour $x = 0$, la série $\sum v_n(0)$ est la série nulle et elle est convergente.
     Pour $x > 0$, puisque $0 \leqslant e^{-x} < 1$, la série géométrique $\sum (e^{-x})^n$ est convergente et donc la série $\sum v_n(x)$ est convergente.
     Ainsi, la série $\sum v_n$ converge simplement.
   - Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

     $$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x\,\left(e^{-x}\right)^k = \frac{x\,e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$$

     et il s'ensuit que la suite (R_n) ne peut pas converger uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, donc qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème 17 de la page 509 nous montrera que la convergence ne peut, *a fortiori*, par être normale, mais ici il est facile de le voir puisque :

$$\mathcal{N}_\infty(v_n) \geqslant v_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{en}$$

et que la série $\sum \frac{1}{en}$ diverge.

Exercice 20 Rappelons que si x est un réel strictement positif et si z est un nombre complexe, par définition $x^z = \exp(z \ln x)$. En particulier $|x^z| = x^{\operatorname{Re} z}$.

Il suffit d'établir la convergence normale de la série $\sum \frac{1}{n^z}$ sur tout demi-plan :

$$H_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geqslant a\},$$

avec $a > 1$. On constate que pour tout $z \in H_a$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}} \leqslant \frac{1}{n^a}.$$

La convergence normale sur H_a est alors une conséquence immédiate de la nature des séries de Riemann et du théorème de comparaison.

Proposition 16

- Supposons que la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement sur A. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$ on a :

$$\big\|u_n(x)\big\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(u_n)$$

  et puisque la série numérique de terme général positif $\sum \mathcal{N}_\infty(u_n)$ est convergente, par le théorème de comparaison, la série $\sum \big\|u_n(x)\big\|$ est convergente.
- Si la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement sur un voisinage V de a, on applique le premier point à la série de fonctions $\sum u_{n|V}$ pour établir que la série $\sum \big\|u_n(a)\big\|$ est convergente.

Théorème 17

- Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement.

  Soit $x \in A$. Puisque la série $\sum u_n$ converge normalement, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité :

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \big\|u_k(x)\big\|$$

  Ainsi, par définition de la norme de la convergence uniforme :

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathcal{N}_\infty\left(u_k\right).$$

  du fait que cette inégalité est valable pour tout $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, le reste R_n de la série est borné et

$$\mathcal{N}_\infty(R_n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathcal{N}_\infty(u_k).$$

  Il suffit pour conclure de remarquer que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathcal{N}_\infty(u_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur un voisinage V de a. En appliquant le premier point à la série $\sum u_{n|_V}$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur V.

Exercice 21 Notons $u_n(x) = x^n(1-x)$, pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Montrons que la série $\sum u_n$ converge simplement.

  Pour $x = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n(1) = 0$ et donc la série $\sum u_n(1)$ est convergente.

  Soit $x \in [0,1[$. La série $\sum u_n(x)$ est convergente, puisqu'il s'agit d'une série géométrie de raison x.

- La série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$. L'étude de la fonction u_n montre que :

$$\mathcal{N}_\infty(u_n) = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

  Puisque

$$\ln\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right) = n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n}{n+1} + \mathrm{o}(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1,$$

  on a $\mathcal{N}_\infty(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}$ et donc la série $\sum \mathcal{N}_\infty(u_n)$ diverge.

  En effet, pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = x^{n+1},$$

  et donc $\mathcal{N}_\infty(R_n) = 1$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On retrouve le fait que la série ne converge pas normalement.

  Remarque On peut également remarquer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f = \mathbb{1}_{[0,1[}$. Cette fonction étant discontinue et les fonctions u_n étant toutes continues, la convergence ne saurait être uniforme.

- En revanche, la série $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment $[0,a]$ de $[0,1[$, avec $a \in]0,1[$. En remarquant que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,a] \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant a^n,$$

  on obtient la convergence normale de $\sum u_n$ sur le segment $[0,a]$.

Exercice 22

- Il est clair que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) & \longrightarrow & \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) \\ f & \longmapsto & x \mapsto g(x) + \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

  est à valeurs dans $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Par conséquent la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et toutes les fonctions f_n sont continues.

- Par récurrence, démontrons que :
$$\forall x \in [0,1] \quad \forall n \in N \quad \bigl|f_{n+1}(x) - f_n(x)\bigr| \leqslant \frac{x^n}{n!}\mathcal{N}_\infty(g).$$
L'inégalité est immédiate pour $n = 0$ car $f_1 = g$.
Supposons l'inégalité vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :
$$\begin{aligned}\bigl|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)\bigr| &= \left|\int_0^x f_{n+1}(t) - f_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_0^x \bigl|f_{n+1}(t) - f_n(t)\bigr|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathcal{N}_\infty(g)\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathcal{N}_\infty(g),\end{aligned}$$
ce qui démontre le résultat par récurrence.
- Il s'ensuit que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_\infty(f_{n+1} - g_n) \leqslant \frac{\mathcal{N}_\infty(g)}{n!}$$
et, par comparaison, du fait que la série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente, la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[0,1]$. Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f. D'après le théorème 12 de la page 504 on a :
$$\forall x \in [0,1] \quad f_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$
ce qui implique que f vérifie :
$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 23 D'après l'exercice 20 de la page 508, la série $\sum \frac{1}{n^z}$ converge normalement et donc uniformément au voisinage de tout point. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $z \mapsto \frac{1}{n^z} = \exp(-z\ln n)$ est continue sur $\mathbb{C}$ et donc sur H. Le corollaire précédent permet de conclure.

Exercice 24 Pour $k \in \mathbb{N}$ posons :
$$\begin{array}{rccc} u_k : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ & M & \longmapsto & \dfrac{M^k}{k!}.\end{array}$$
Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série numérique $\sum \frac{x^k}{k!}$ est absolument convergente et que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la série à valeurs vectorielle $\sum \frac{M^k}{k!}$ est absolument convergente (*cf.* l'exercice 4 de la page 405). La fonction $\exp = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ est définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme $\| \ \|$ sous-multiplicative, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \|A\,B\| \leqslant \|A\|\,\|B\| \tag{$*$}$$

(*cf.* l'exercice 22 de la page 305).

Montrons que la série converge normalement au voisinage de tout point.
Soit $r > 0$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall M \in B_F(0,r) \quad \big\|u_k(M)\big\| \leqslant \frac{r^k}{k!}\cdot$$

Puisque la série numérique $\sum \frac{r^k}{k!}$ converge, la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $B_F(0,r)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En prenant $r = \|M\|+1$, on a $M \in B_O(0,r)$. Cette boule ouverte, et *a fortiori* $B_F(0,r)$, est donc un voisinage de M. On en conclut que la série $\sum u_k$ converge normalement au voisinage de tout point.
Par ailleurs les fonctions u_k sont polynomiales, donc continues. Par conséquent, la fonction exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 25

Première méthode On peut munir $\mathcal{L}(E)$ d'une norme $\| \ \|$ telle que :

$$\forall (a,b) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \|a\,b\| \leqslant \|a\|\,\|b\|, \tag{$*$}$$

(*cf.* l'exercice 22 de la page 305) et ainsi adapter le raisonnement de l'exercice précédent.

Seconde méthode Afin d'éviter les confusions, notons :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{M^k}{k!} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ a & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^k}{k!} \end{array}\cdot$$

Il a été vu à l'exercice précédent que f est bien définie et continue.
Fixons une base $\mathcal{B}$ de E. L'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ a & \longmapsto & M(a,\mathcal{B}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbre. Puisque E est de dimension fini, Φ et Φ^{-1}, qui sont linéaires, sont continues. Puisque, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathcal{L}(E)$:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!} = \Phi^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\big(\Phi(a)\big)^k}{k!}\right),$$

en faisant tendre N vers $+\infty$, on retrouve par continuité de Φ et Φ^{-1} la convergence de $\sum \frac{a^k}{k!}$ et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = \Phi^{-1}\Big(f\big(\Phi(a)\big)\Big).$$

Par conséquent, l'application $g = \Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ est continue. En d'autres termes, l'application exp définie sur $\mathcal{L}(E)$ est continue.

Exercice 26 Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^2+n^2}$ définie sur $[1,+\infty[$. Il est clair que :

$$\forall x \in [1,+\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2+1}\cdot$$

On déduit de la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est immédiat que $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème précédent :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = 0.$$

Exercice 27 Montrons que la série de fonctions $\sum \frac{x}{x+n^2}$ converge normalement sur $]0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{x}{x^2+n^2} \leqslant \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot$$

Ainsi, $\sum \frac{x}{x+n^2}$ est normalement convergente sur $[0,1]$. Par conséquent, du fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{x}{x+n^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0\,; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on déduit du théorème 21 de la page 512 que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{x+n^2}$ tend vers 1 en 0.

Exercice 28

1. Notons u_n l'application définie sur $[0,2\pi]$ par $u_n : x \mapsto a_n \sin(nx)$. Il est clair que u_n est bornée. Du fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{N}_\infty(u_n) \leqslant a_n$, on déduit que la série $\sum u_n$ converge normalement. De la continuité de tous les u_n et du corollaire 20 de la page 511, on conclut que la fonction f est continue.
2. Puisque la série $\sum u_n$ converge normalement, et puisque les fonctions u_n sont continues, on déduit du théorème 22 de la page 512 :

$$\begin{aligned} \int_{[0,2\pi]} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[0,2\pi]} u_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 29 Soit $(z,r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^*$. Notons $f(t) = \frac{1}{z-re^{it}}$ pour $t \in [0,2\pi]$. Nous traitons les deux questions en même temps.

- Supposons $r < |z|$. Puisque $\left|\frac{r}{z}e^{it}\right| = \frac{r}{|z|} < 1$, la série géométrique $\sum \left(\frac{r}{z}e^{it}\right)^n$ est convergente et :

$$\forall t \in [0,2\pi] \quad \frac{1}{z-re^{it}} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{r}{z}e^{it}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

où $u_n : t \mapsto \left(\frac{r}{z}e^{it}\right)^n$. Puisque la série $\sum \left|\frac{r}{z}\right|^n$ est convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Puisque les fonctions u_n sont continues, on peut intégrer terme à terme, ce qui donne :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, un calcul immédiat donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{2\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 2\pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{z}\cdot$$

- Supposons $|z| < r$. Alors :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad \frac{1}{z - re^{it}} = -\frac{1}{r}\frac{e^{-it}}{1 - \frac{z}{r}e^{-it}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t),$$

où $v_n(t) = \left(\frac{z}{r}\right)^n e^{-i(n+1)t}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2\pi]$. Il est immédiat que $|v_n(t)| = \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$. La série géométrique $\sum \left(\frac{|z|}{|r|}\right)^n$ étant convergente, la série de fonctions $\sum v_n$ converge donc normalement sur le segment $[0, 2\pi]$.
Puisque les fonctions v_n sont continues et que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, on peut intégrer terme à terme, ce qui donne :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} v_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, un calcul immédiat donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{2\pi} v_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Par conséquent :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\cdot$$

Exercice 30 Notons u_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}\cdot$

- Il est clair que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2+1}\cdot$$

La convergence de la série numérique $\sum \frac{1}{n^2+1}$ montre que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

- Les fonctions u_n sont continues. La convergence normale implique donc que f est continue.

- Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u_n^{(p)}(x) = (-1)^p \, \frac{n^p}{n^2+1} \, e^{-nx}.$$
Pour $x > 0$, par croissances comparées, on a $n^p e^{-nx} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Il s'ensuit que :
$$\frac{n^p}{n^2+1} \, e^{-nx} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
On en déduit la convergence simple de la série $\sum u_n^{(p)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $a > 0$. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a donc par décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-x}$:
$$\forall x \in [a, +\infty[\quad \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{n^p}{n^2+1} \, e^{-na}.$$
Puisque la série $\sum u_n^{(p)}(a)$ est absolument convergente, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$, ceci pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par suite, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction f n'est pas dérivable en 0.
Pour le démontrer, il suffit de démontrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$, le théorème de la limite de la dérivée assurant alors, du fait que f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.
Pour $x > 0$ on a $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} e^{-nx} > 0$.
Par conséquent, f' est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et f' admet une limite ℓ en 0 dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} \ell \leqslant f'(x) &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1} \, e^{-kx} && (f' \text{ décroissante}) \\ &\leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} \, e^{-kx} && (\text{terme général négatif}). \end{aligned}$$
En faisant tendre x vers 0 dans cette inégalité, on obtient :
$$\ell \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1}. \qquad (*)$$
D'autre part, la série $\sum \frac{k}{k^2+1}$ est divergente car son terme général est positif et équivalent à $\frac{1}{k}$.
Toujours du fait que le terme général est positif, on en déduit que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Par passage à la limite dans les inégalités, il vient de $(*)$ que $\ell = -\infty$. Par suite, f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 31 Notons u_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}\cdot$

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série $\sum u_n(x)$ est une série alternée vérifiant $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la suite $\big(|u_n(x)|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par suite la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad u_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p}\frac{p!}{(x+n)^{p+1}}\cdot$$
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. Pour $x \geqslant a$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| = \frac{p!}{(x+n)^{p+1}} \leqslant \frac{p!}{(a+n)^{p+1}}\cdot$$
Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{p+1}}$ est convergente, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 0$ et donc au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$.
- Puisque la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la série $\sum u_n'$ converge normalement au voisinage de tout point de $]0,+\infty[$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'$. Puisque toutes les séries dérivées de la série de fonction $\sum u_n'$ convergent normalement au voisinage de tout point de $]0,+\infty[$, la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, *i.e.* f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 32 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u_n : x \mapsto \frac{1}{1+n^2x}\cdot$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\,n^2}$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xu_n(x) = \frac{1}{n^2}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$0 \leqslant xu_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot$$
Il s'ensuit que la série de fonctions $\sum \frac{x}{1+n^2x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, le théorème 21 de la page 512 permet d'affirmer :
$$xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$
et donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot$

Exercice 33 Notons $u : (x,t) \mapsto \frac{1}{1+xt^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto \frac{1}{1+xt^2}$ est décroissante, positive. Calculons, pour $y > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}$. Pour cela, posons le changement de variable $t = \frac{u}{\sqrt{x}}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$. On a :
$$\int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{y\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\Big[\operatorname{Arctan} u\Big]_0^{y\sqrt{x}}.$$

Ainsi, en faisant tendre y vers $+\infty$, il vient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\pi}{2}\cdot$$

Par conséquent :

$$0 \leqslant f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2} \leqslant 1 \tag{$*$}$$

et donc :

$$0 \leqslant \sqrt{x} f(x) - \frac{\pi}{2} = \sqrt{x}\left(f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}\right) \leqslant \sqrt{x}.$$

Par suite $\sqrt{x} f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{x}}\cdot$$

Proposition 26

$(i) \Rightarrow (ii)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant \frac{1}{n+1}$ et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ C'est immédiat.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \varepsilon$.
Par conséquent, f peut être approchée uniformément par des éléments de $\mathcal{F}$.

Théorème 27

- Supposons que f soit continue. D'après le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur le segment $[\alpha, \beta]$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\bigl|f(y) - f(x)\bigr| \leqslant \varepsilon$ pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $|x - y| \leqslant \eta$. Fixons un tel η et considérons un entier $n > 0$ tel que $\frac{b-a}{n} \leqslant \eta$ et la subdivision régulière $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ définie par $a_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$. Posons la fonction en escalier g définie sur $[a, b]$ par :

  $$g(x) = \begin{cases} f(a_i) & \text{si } a_i \leqslant x < a_{i+1}\ ; \\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

  Soit $x \in [a, b[$. Il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $a_i \leqslant x < a_{i+1}$ et donc :

  $$\bigl|f(x) - g(x)\bigr| \leqslant \bigl|f(x) - f(a_i)\bigr| \leqslant \varepsilon$$

  et il est immédiat que $\bigl|f(b) - g(b)\bigr| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent $\mathcal{N}_\infty(f - g) \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre le résultat.
- Démontrons que toute fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$ est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier.
  Pour cela, on va raisonner par récurrence sur le nombre de points de discontinuité de f.

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a,b]$, discontinue en c. Supposons d'abord que $c \in \,]a,b[$. Puisque f est continue par morceaux, elle admet des limites à droite et à gauche en c ; notons :

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = \beta.$$

Posons alors φ la fonction en escalier définie sur $[a,b]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a,c[\ ; \\ f(c) - \alpha & \text{si } x = c\ ; \\ \beta - \alpha & \text{si } x \in \,]c,b]. \end{cases}$$

Il est alors facile de vérifier que $f - \varphi$ est continue en c, ainsi qu'en tous les points de continuité de f. En d'autres termes, $f - \varphi$ a exactement un point de discontinuité de moins que f. Si le point c est une extrémité de $[a,b]$, on adapte la construction précédente.

En se souvenant qu'une combinaison linéaire de fonctions en escalier est une fonction en escalier, il est maintenant aisé de démontrer par récurrence sur k l'assertion : « si $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],F\big)$ a exactement k points de discontinuité, alors il existe une fonction en escalier φ telle que $f - \varphi$ est continue ».

Exercice 34 Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$. Elle est donc uniformément continue. Il existe ainsi $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]$:

$$|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel η. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leqslant \eta$ et $\sigma = (u_0, \dots, u_n)$ la subdivision régulière de $[a,b]$ de pas $\delta = \frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire $u_i = a + i\delta$ pour $i \in [\![0,n]\!]$.

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction affine par morceaux qui interpole les valeurs $f(u_i)$. Plus précisément posons g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(u_i) & \text{si } x = u_i \text{ pour } i \in [\![0,n]\!]\ ; \\ f(u_i) + \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i}(x - u_i) & \text{si } u_i < x < u_{i+1} \text{ pour } i \in [\![0,n-1]\!]. \end{cases}$$

Il est clair que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$ et $x \in [u_i, u_{i+1}]$, on a :

$$g(x) = \left(1 - \frac{x - u_i}{u_{i+1} - u_i}\right) f(u_i) + \frac{x - u_i}{u_{i+1} - u_i} f(u_{i+1})$$

et donc g est une fonction affine par morceaux.

Toujours pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$ et $x \in [u_i, u_{i+1}]$, on a :

$$g(x) - f(x) = \left(1 - \frac{x - u_i}{u_{i+1} - u_i}\right) \big(f(u_i) - f(x)\big) + \frac{x - u_i}{u_{i+1} - u_i} \big(f(u_{i+1}) - f(x)\big).$$

Puisque $0 \leqslant \frac{x - u_i}{u_{i+1} - u_i} \leqslant 1$, on a :

$$\big|g(x) - f(x)\big| \leqslant \left(1 - \frac{x - u_i}{u_{i+1} - u_i}\right) \big|f(u_i) - f(x)\big| + \frac{x - u_i}{u_{i+1} - u_i} \big|f(u_{i+1}) - f(x)\big|,$$

et, du fait que $|x-u_i| \leqslant |u_{i+1}-u_i| \leqslant \eta$ et $|x-u_{i+1}| \leqslant |u_{i+1}-u_i| \leqslant \eta$, il vient :

$$\big|g(x)-f(x)\big| \leqslant \left(1-\frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i}\right)\varepsilon + \frac{x-u_i}{u_{i+1}-u_i}\,\varepsilon = \varepsilon.$$

Par conséquent f peut être approchée uniformément par des fonctions affines par morceaux.

Exercice 35 Soit f une fonction affine par morceaux et $\sigma(a_0,\dots,a_n)$ une subdivision adaptée à f.

La fonction f est entièrement déterminée les pentes $\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}$, avec $i \in [\![0,n-1]\!]$ et par $f(a_0)$.

Soit $g = \lambda_0 f_{a_0} + \cdots + \lambda_n f_{a_n}$, avec $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La fonction g est affine par morceaux et la subdivision σ lui est adaptée. On aura $f = g$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda_1 f_{a_1}(a_0) + \cdots + \lambda_n f_{a_n}(a_0) &= f(a_0) & L_0\\ \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n-1} - \lambda_n &= \frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0} & L_1\\ \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n-1} - \lambda_n &= \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} & L_2\\ \qquad\vdots & \quad\vdots & \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} - \lambda_n &= \frac{f(a_n)-f(a_{n-1})}{a_n-a_{n-1}} & L_n \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 f_{a_1}(a_0) + \cdots + \lambda_n f_{a_n}(a_0) &= f(a_0) & L_0\\ \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n-1} - \lambda_n &= \frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0} & L_1\\ 2\,\lambda_1 &= \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} - \frac{f(a_1)-f(a_0)}{a_1-a_0} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ \vdots & \quad\vdots & \\ 2\lambda_{n-1} &= \frac{f(a_n)-f(a_{n-1})}{a_n-a_{n-1}} - \frac{f(a_{n-1})-f(a_{n-2})}{a_{n-1}-a_{n-2}} & L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} \end{cases}$$

Puisque $f_{a_0}(a_n) \neq 0$, la ligne L_0 donne λ_n, puis la ligne L_1 donne λ_0. Le système initial a donc une solution et pour cette solution, on a $g = f$.

Exercice 36

1. Soit $t \in [0,1]$. La fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \frac{s^2+t}{2} \end{array}$$

est croissante. Ainsi la fonction φ est à valeurs dans $\left[\frac{t}{2}, \frac{1+t}{2}\right] \subset [0,1]$. Par conséquent la suite $\big(P_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,1]$. De plus, du fait que φ est croissante et $P_0(t) = 0 \leqslant t/2 = P_1(t)$, il est facile de vérifier par récurrence que $P_n(t) \leqslant P_{n+1}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite réelle $\big(P_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est convergente. Sa limite L vérifie :

$$L = \frac{t+L^2}{2}$$

c'est-à-dire $L^2 - 2L + t = 0$. Puisque par passage à la limite L est positive, on a $L = 1 - \sqrt{1-t}$.
En conclusion, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & 1 - \sqrt{1-t}. \end{array}$$

2. • Soit $(t,s) \in [0,1]^2$ tel que $s \leqslant t$. Il est facile de vérifier par récurrence, à l'aide de la croissance de φ, que $P_n(s) \leqslant P_n(t)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction P_n est croissante.
   • Montrons par récurrence que la fonction $P_{n+1} - P_n$ est croissante. C'est immédiat pour $n = 0$, car $P_1 - P_0 : t \mapsto \frac{t}{2}\cdot$ Supposons le résultat établi pour un $n \in \mathbb{N}$. Remarquons, la suite $\bigl(P_n(t)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante pour tout t, que :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant P_{n+2} - P_{n+1} &= \frac{P_{n+1}^2 - P_n^2}{2} \\ &= \frac{(P_{n+1} - P_n)(P_{n+1} + P_n)}{2} \end{aligned}$$

   La fonction $P_{n+1} - P_n$ est positive et d'après l'hypothèse de récurrence elle est croissante. D'après le premier point P_n et P_{n+1} sont croissantes et donc la fonction $P_{n+1} + P_n$ l'est également. Cette dernière est à valeurs positives d'après la première question. Par conséquent la fonction $P_{n+2} - P_{n+1}$ est croissante, ce qui achève la démonstration.
   • Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant P_{n+k}(t) - P_n(t) \leqslant P_{n+k}(1) - P_n(1).$$

   En faisant tendre k vers $+\infty$ dans ces inégalités, on obtient :

$$0 \leqslant f(t) - P_n(t) \leqslant f(1) - P_n(1).$$

   Par suite, comme $P_n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$, on déduit en la convergence uniforme de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Puisque la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [-1,1] \quad Q_n(t) = 1 - P_n(1-t^2)$$

   converge uniformément vers g, où

$$\forall x \in [-1,1] \quad g(t) = 1 - f(1-t^2) = 1 - \Bigl(1 - \sqrt{1-(1-t^2)}\Bigr) = \sqrt{t^2} = |t|.$$

   Il est clair que les fonctions P_n sont polynomiales et donc les Q_n également. La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ répond donc à la question.

Exercice 37 Supposons que l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dense dans $\bigl(\mathcal{C}\bigl([0,1],\mathbb{K}\bigr),\mathcal{N}_\infty\bigr)$.
Soit $f \in \mathcal{C}\bigl([a,b],\mathbb{K}\bigr)$ et $\varepsilon > 0$. Posons $u : x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$, qui définit une bijection de $[a,b]$ sur $[0,1]$. Puisque $u^{-1} : t \mapsto a + t(b-a)$, la fonction $g = f \circ u^{-1}$ est continue, définie

sur $[0,1]$. Par hypothèse, il existe une fonction polynomiale telle que $\big|g(t)-P(t)\big| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$. Par conséquent, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\big|f(x) - P\big(u(x)\big)\big| = \big|g\big(u(x)\big) - P\big(u(x)\big)\big| \leqslant \varepsilon.$$

La conclusion vient en remarquant que $Q : x \mapsto P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ est une fonction polynomiale.

Théorème 28 D'après l'exercice précédent on peut sans perte de généralité supposer que $[a,b] = [0,1]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

- D'après l'exercice 34 de la page 519, il existe une fonction affine par morceaux g telle que $\mathcal{N}_\infty(f-g) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons g, qui est de la forme $g : x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i |x - a_i|$ d'après l'exercice 35 de la page 519.
- Avec les notations de l'exercice 36 de la page 519, pour tout $a \in [0,1]$, la suite de fonctions polynomiales $(R_{n,a})_{n\in\mathbb{N}}$, où $R_{n,a}(x) = Q_n(x-a)$, converge uniformément vers f_a.

  En effet, pour tout $x \in [0,1]$, on a $x - a \in [-a, 1-a] \subset [-1,1]$ et l'exercice 36 permet alors de conclure.
- Par combinaisons linéaires, d'après l'exercice 36, la suite $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i R_{n,a_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\mathcal{N}_\infty(g-Q) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
- En conclusion, $\mathcal{N}_\infty(f-Q) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f-g) + \mathcal{N}_\infty(g-Q) \leqslant \varepsilon$ et la fonction f peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales.

Exercice 38 Par linéarité, on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \int_0^1 P(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ qui converge uniformément vers P. Puisque la fonction f est bornée, car continue sur un segment, la suite $(P_n\, f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2. Par conséquent :

$$0 = \int_0^1 P_n(x) f(x)\, \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Puisque f^2 est une fonction positive continue d'intégrale nulle, la fonction f^2 est nulle, et donc f est nulle.

S'entraîner et approfondir

10.1 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues, définies sur intervalle I, à valeurs dans un intervalle J, convergeant uniformément, et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur J. Est-il vrai que la suite $\big(\varphi\circ f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?

2. Qu'en est-il si l'on suppose de plus que J est un segment ?

10.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = n\left(\text{Arctan}\left((x + \frac{1}{n}\right) - \text{Arctan}\left(x - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Étudier les convergences simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⋆ **10.3** Soit K un compact d'un espace vectoriel de dimension finie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante à valeurs dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.
Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, alors la convergence est uniforme (*premier théorème de Dini*).

⋆ **10.4** 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b$, convergeant simplement vers une fonction f *continue* sur $[a,b]$. On suppose que les fonctions f_n sont toutes croissantes (mais on n'exige pas leur continuité). Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (*deuxième théorème de Dini*).

2. Soit I un intervalle ouvert, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur I convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ contenu dans I. La convergence uniforme est-elle assurée sur I tout entier ?

10.5 *(Polytechnique 2015)*
On fixe un réel x.

1. Démontrer qu'il existe une unique fonction $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall t \in]-1,1[\quad y(t) = x + t\sin\big(y(t)\big)$$
2. On admet que y est de classe $\mathcal{C}^2$. Donner le développement limité de y en 0 à l'ordre 2.
3. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $]-1,1[$ en posant $y_0 = x$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in]-1,1[\quad y_{n+1}(t) = x + t\sin\big(y_n(t)\big).$$
Démontrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers y.
4. Démontrer que f y est lipschitzienne au voisinage de tout point.
5. Démontrer que y est dérivable.

10.6 Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.

1. Démontrer que $S(x)$ est bien définie et que l'application S est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Donner une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
3. Équivalents de S en 0 et en $+\infty$?

10.7 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction :

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$?
Trouver la limite et un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers -1.
Trouver la limite et un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
On cherchera à exprimer $f'(x)$ sous forme d'intégrale.
Calculer $f(1)$.

10.8 *(Centrale 2015)*

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor} - \frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{(n\pi - 1)^2}$$

2. On pose :

$$fs \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}\right).$$

   Démontrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
3. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10.9 On pose $u_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ln n}{1 + xn^2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
2. Sa somme f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^*$? Sur $\mathbb{R}_+$?
   Indication. On pourra minorer $f(1/n^2)$.
3. Donner un équivalent de la somme au voisinage de 0^+.

10.10 On pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n(1 + nx^2)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Déterminer le domaine de définition $D \subset \mathbb{R}_+$ de $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.
   Étudier la continuité de f sur D.
2. Déterminer les limites et des équivalents simples de f aux bornes de D.

10.11 *(Centrale 2015)*
On pose $u_n(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$ et $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.
2. Calculer $f(x+1) - f(x)$ pour tout $x \in D$.

10.12 Soit $\varphi\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Déterminer toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x+1) - f(x) = \varphi(x). \tag{1}$$
2. On suppose φ positive décroissante, de limite L en $+\infty$.
Montrer que la série de fonctions $\sum \big(\varphi(n) - \varphi(x+n)\big)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et que sa somme S est une fonction continue.
Montrer que la fonction $f : x \mapsto xL + S(x)$ vérifie la relation (1).

10.13 On pose : $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [0, 2\pi] \quad S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(kx)$.

On rappelle l'encadrement $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Calculer $S_n(x)$ et vérifier que $\left|S_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}}$ pour tout $x \in \,]0, 2\pi[$.
2. On considère dans la suite de l'exercice une suite décroissante de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0.
Démontrer la convergence simple de la série $\sum a_n \sin(nx)$.
Indication. Écrire $\sin(nx) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$
3. En considérant $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)$, démontrer que si la convergence est uniforme sur $[0, 2\pi]$, alors $na_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. On suppose que $na_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que la série $\sum a_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$. *Indication. On montrera que* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

10.14 Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, où $f_n(x) = \sum\limits_{j=-n}^{n} \dfrac{1}{x+j}\cdot$

1. Montrer que f est bien définie. Montrer que, pour tout x tel que $2x$ ne soit pas entier, on a :
$$f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot$$
2. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $g(x) = f(x) - \pi \operatorname{cotan} \pi x$. Montrer que g est continue, prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Notant encore g ce prolongement, montrer que $g = 0$. Pour cela, on introduira $A \geqslant 1$, $M_A = \sup\limits_{t\in[0,A]} \left|g(t)\right|$ et $x_0 = \inf\left\{x \in \,]0, A] \;\middle|\; |g(x)| = M_A\right\}$.

10.15 Étudier la convergence sur $\mathbb{R}_+$ de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}}\cdot$

Sa somme f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $\mathbb{R}_+$?

Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

10.16 Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right)$.

1. Quelle est le domaine de définition.
2. La fonction f est-elle continue ?
3. Donner un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$ et en 0.

10.17 On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,b]$ par $f_0 \in \mathcal{C}^0\big([0,b],\mathbb{R}\big)$ et :

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Étudier la série $\sum f_n$. Quelle est sa somme ?

10.18 1. Soit F une fonction dérivable en x. Montrer que, pour toute suite (a_n) tendant vers x en croissant et toute suite (b_n) tendant vers x en décroissant, telles que, pour tout n, $b_n - a_n > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = F'(x).$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x) = d(x,\mathbb{Z})$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.
On pose alors :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-n} f(10^n x).$$

Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, continue et périodique, mais n'est nulle part dérivable.
La fonction F est un exemple dû à Van Der Waerden de fonction continue nulle part dérivable.

10.19 On note $A = \Big\{ f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}^2\big) \;\big|\; f\big([0,1]\big) \subset [0,1]^2 \text{ et } f(0) = (0,0),\ f(1) = (1,0) \Big\}$.

On considère l'application $\Phi : A \to \mathcal{F}\big([0,1],\mathbb{R}^2\big)$ définie de la manière suivante. Pour tout $f \in A$, en notant $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, on a :

$$\forall t \in [0,1] \quad \Phi(f)(t) = \begin{cases} \left(\frac{y(4t)}{2}, \frac{x(4t)}{2}\right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \left(\frac{x(4t-1)}{2}, \frac{y(4t-1)+1}{2}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \left(\frac{x(4t-2)+1}{2}, \frac{y(4t-2)+1}{2}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \left(1 - \frac{y(4t-3)}{2}, \frac{1-x(4t-3)}{2}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

1. On pose $g_0 : t \mapsto \Big(t, 3\big(1 - 3|2t-1|\big)/4\Big)$.
Tracer le graphe de g_0, puis celui de $g_1 = \Phi(g_0)$, puis celui de $g_2 = \Phi(g_1)$.
2. Démontrer que Φ laisse stable A et que Φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne pour la norme $\mathcal{N}_\infty$ de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}^2\big)$ associée à la norme $\| \ \|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$.

3. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :
$$f_0 \in A \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+1} = \Phi(f_n).$$
Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue f. *La fonction f est dite une fonction de Peano.*
4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$C_n = \left\{ \left(\frac{2i+1}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n}\right) \; ; \; 0 \leqslant i < 2^{n-1}, \; 0 \leqslant j < 2^{n-1} \right\} \subset f_n\big([0,1]\big).$$
5. En déduire que $f\big([0,1]\big) = [0,1]^2$.

10.20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, on pose :
$$P_n(x) = \left(1-x^2\right)^n \quad ; \quad a_n = \int_{[-1,1]} P_n \quad ; \quad Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_n}\cdot$$

1. (a) Démontrer que $a_n \geqslant \frac{2}{n+1}\cdot$
   (b) Soit $\alpha \in]0,1[$. Démontrer que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha,1]$.
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'extérieur de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t) Q_n(t)\,\mathrm{d}t$$
   (a) Démontrer que la restriction de f_n à $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ est une fonction polynomiale.
   (b) Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.
   Indication. Remarquer que $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x) Q_n(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.

10.21 Soit f une fonction réelle continue définie $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $a \geqslant 0$ tel que la fonction $t \mapsto e^{-at} f(t)$ soit bornée.

1. Démontrer que $L : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $]a,+\infty[$.
2. Démontrer que si $L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est nulle pour tout $x > a$, alors f est la fonction nulle.

10.22 Soit φ l'application de $[0,1]$ dans lui-même définie par $\varphi(t) = 2t(1-t)$.

1. Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b < 1$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est la limite uniforme d'une suite d'applications polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Solution des exercices

10.1 1. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où f_n est la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\frac{1}{n}$ et

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & 1/x.\end{array}$$

Il est clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle et que la suite $\big(\varphi\circ f_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas simplement, *a fortiori* elle ne converge pas uniformément.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathcal{F}(I,J)$ convergeant uniformément vers f. Puisque J est fermé, pour tout $x\in I$, on a $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)\in J$.

D'après le théorème de Heine, la fonction φ est uniformément continue.
Soit $\varepsilon>0$. Il existe donc $\eta>0$ tel que :

$$\forall (x,y)\in J^2\quad \Big(|x-y|\leqslant\eta\Longrightarrow \big|\varphi(x)-\varphi(y)\big|\leqslant\varepsilon\Big)$$

Il existe n_0 tel que $\mathcal{N}_\infty(f_n-f)\leqslant\eta$ pour tout $n\geqslant n_0$. Ainsi, toujours pour $n\geqslant n_0$:

$$\forall x\in I\quad \Big|\varphi\big(f_n(x)\big)-\varphi\big(f(x)\big)\Big|\leqslant\varepsilon.$$

Par conséquent, la suite $\big(\varphi\circ f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi\circ f$.

10.2 La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^2$ et :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \operatorname{Arctan}''(t)=-\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Puisque Arctan'' est continue et que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{Arctan}''(x)=0$, la fonction Arctan'' est bornée. Notons $M_2=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\big|\operatorname{Arctan}''(t)\big|$.

Ainsi, pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction Arctan entre x et h donne :

$$\left|\operatorname{Arctan}(x+h)-\operatorname{Arctan}(x)-\frac{h}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{h^2}{2}M_2.$$

Par conséquent $\left|\operatorname{Arctan}(x+h)-\operatorname{Arctan}(x-h)-\dfrac{2h}{x^2+1}\right|$

$$\begin{aligned}&=\left|\operatorname{Arctan}(x+h)-\operatorname{Arctan}(x)-\frac{h}{x^2+1}\right.\\&\qquad\left.-\left(\operatorname{Arctan}(x-h)-\operatorname{Arctan}(x)+\frac{h}{x^2+1}\right)\right|\\&\leqslant\left|\operatorname{Arctan}(x+h)-\operatorname{Arctan}(x)-\frac{h}{x^2+1}\right|\\&\qquad+\left|\operatorname{Arctan}(x-h)-\operatorname{Arctan}(x)+\frac{h}{x^2+1}\right|\\&\leqslant h^2M_2.\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| f_n(x) - \frac{2}{1+x^2} \right| \leqslant \frac{M_2}{n}.$$

Il s'ensuit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

10.3 Posons $g_n = f - f_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions g_n sont continues et positives, car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente, et que les fonctions f_n et f sont continues. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante de fonctions continues positives convergeant simplement vers la fonction nulle. Démontrons par l'absurde qu'elle converge uniformément vers 0.

Supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe un entier $n_k \geqslant k$ et un $x_k \in K$ vérifiant $g_{n_k}(x_k) > \varepsilon$.

Par compacité en dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass donne l'existence d'un $x \in [a,b]$ et d'une extraction φ telle que $x_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$. En posant $\psi(k) = n_{\varphi(k)}$, on a $\psi(k) \geqslant \varphi(k) \geqslant k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et donc $\psi(k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par convergence simple de la suite $(g_k)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $g_{\psi(k)}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il existe donc un entier k_0 tel que $g_{\psi(k_0)}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par continuité de $g_{\psi(k_0)}$, il existe $\eta > 0$ tel que $g_{\psi(k_0)}(y) \leqslant \varepsilon$ pour tout $y \in [a,b]$ vérifiant $|x-y| \leqslant \eta$. Puisque $x_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x$ il existe un entier $k \geqslant k_0$ tel que $|x_{\varphi(k)} - x| \leqslant \eta$. On a alors :

$$\varepsilon < g_{\psi(k)}(x_{\varphi(k)}) \leqslant g_{\psi(k_0)}(x_{\varphi(k)}) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est impossible. Par conséquent la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

10.4 1. Par passage à la limite simple, la fonction f est croissante. De plus, comme elle est continue sur le compact $[a,b]$, elle est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (u,t) \in [a,b]^2 \quad |t-u| \leqslant \eta \Rightarrow \big| f(t) - f(u) \big| \leqslant \varepsilon.$$

Fixons N tel que $\dfrac{b-a}{N} \leqslant \eta$ et, pour $k \in [\![0,N]\!]$, notons $t_k = a + k\dfrac{b-a}{N}$.

La convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne sa convergence uniforme sur l'ensemble fini A_N des t_k. Il existe donc $N' \geqslant N$ tel que, pour tout $n \geqslant N'$, on a :

$$\forall k \in [\![0,N]\!] \quad \big| f(t_k) - f_n(t_k) \big| \leqslant \varepsilon.$$

Mais alors, pour tout $t \in [a,b]$, il existe k tel que $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$. Toujours pour $n \geqslant N'$, en utilisant d'abord la croissance de f_n, puis la continuité uniforme de f et la convergence uniforme de (f_n) sur A_N, on a :

$$\begin{aligned} f(t) - f_n(t) &\leqslant f(t) - f_n(t_k) \\ &\leqslant f(t) - f(t_k) + f(t_k) - f_n(t_k) \\ &\leqslant \big| f(t) - f(t_k) \big| + \big| f(t_k) - f_n(t_k) \big| \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} f_n(t) - f(t) &\leqslant f_n(t_{k+1}) - f(t) \\ &\leqslant f_n(t_{k+1}) - f(t_{k+1}) + f(t_{k+1}) - f(t) \\ &\leqslant \left|f_n(t_{k+1}) - f(t_{k+1})\right| + \left|f(t_{k+1}) - f(t)\right| \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \geqslant N'$ et tout $t \in [a,b]$, on a $\left|f(t) - f_n(t)\right| \leqslant 2\varepsilon$; d'où la convergence uniforme désirée.

2. La limite *simple* f d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions convexes est convexe. En effet, soient $(x,y) \in I^2$ et $t \in [0,1]$; en passant à la limite dans l'inégalité de convexité de f_n :
$$f_n(tx + (1-t)y) \leqslant t f_n(x) + (1-t) f_n(y),$$
on obtient l'inégalité de convexité de f :
$$f\bigl(tx + (1-t)y\bigr) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y).$$
Par ailleurs, la fonction f, convexe sur l'intervalle *ouvert* I, est nécessairement continue. En effet, soit $x \in I$, montrons la continuité de f en x. On fixe arbitrairement t, u dans I tels que $t < x < u$. Alors, si $y \in]x,u[$ (donc $y - x > 0$) :
$$(y-x)\,\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \leqslant f(y) - f(x) \leqslant (y-x)\,\frac{f(u) - f(x)}{u - x},$$
ce qui, en faisant tendre y vers x, prouve la continuité de f à droite de x. Un encadrement analogue prouve la continuité à gauche. Ainsi la fonction f limite des f_n est continue (sur son domaine I ouvert).
Fixons un segment $[a,b] \subset I$. Comme a n'est pas la borne inférieure de I, fixons $\alpha < a$ dans I.
Pour tout n, la fonction g_n définie sur $[a,b]$ par $g_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(\alpha)}{x - \alpha}$ est croissante sur $[a,b]$, par convexité de f_n. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g définie par $g(x) = \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$.
Ainsi la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du second théorème de Dini (la question précédente) et converge donc uniformément sur $[a,b]$ vers g. Cela entraîne la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[a,b]$, car $x \mapsto x - \alpha$ est borné sur $[a,b]$ et $f_n(x) = (x-\alpha) g_n(x) + f_n(\alpha)$.
L'exemple de $f_n(x) = x^n$ sur $]0,1[$ montre que la convergence n'est pas en général uniforme sur tout I.

10.5 1. Fixons $t \in]-1,1[$ et posons la fonction $\varphi : s \mapsto x + t\sin(s) - s$ définie sur $\mathbb{R}$. Il s'agit de démontrer que φ s'annule une seule fois.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a $\varphi'(s) = t\cos(s) - 1 < 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que φ est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})$. Il est clair que $\lim\limits_{+\infty} = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} = +\infty$.
Ainsi $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et la conclusion suit.

2. On a $y(0) = x$. D'après la formule de Taylor-Young, il existe deux réels a et b tels qu'au voisinage de 0 :
$$y(t) = x + at + bt^2 + \mathrm{o}(t^2)$$
Par conséquent au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned} y(t) &= x + t\sin\big(x + at + bt^2 + \mathrm{o}(t^2)\big)\\ &= x + t\sin(x)\cos\big(at + bt^2 + \mathrm{o}(t^2)\big) + t\cos(x)\sin\big(at + bt^2 + \mathrm{o}(t^2)\big)\\ &= x + t\sin(x)\big(1 + \mathrm{o}(t)\big) + t\cos(x)\big(at + \mathrm{o}(t)\big)\\ &= x + t\sin x + a\cos(x)\, t^2 + \mathrm{o}(t^2). \end{aligned}$$
Par unicité du développement limité , on en déduit :
$$y(t) = x + \sin(x)\, t + \frac{\sin(2x)}{2}\, t^2 + \mathrm{o}(t^2).$$
3. Fixons $t \in \left]-1,1\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) - y(t) &= x + t\sin\big(y_n(t)\big) - y(t)\\ &= x + t\sin\big(y_n(t)\big) - \Big(x + t\sin\big(y(t)\big)\Big)\\ &= t\Big(\sin\big(y_n(t)\big) - \sin\big(y(t)\big)\Big). \end{aligned}$$
Puisque $\sin' = \cos$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\sin$ donne $|\sin a - \sin b| \leqslant |b - a|$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\big|y_{n+1}(t) - y(t)\big| = |t|\,\Big|\sin\big(y_n(t)\big) - \sin\big(y(t)\big)\Big| \leqslant |t|\,\big|y_n(t) - y(t)\big|$$
Il s'ensuit par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big|y_n(t) - y(t)\big| \leqslant |t|^n\,\big|x - y(t)\big|.$$
Puisque $|t| < 1$, on en déduit :
$$\big|y_n(t) - y(t)\big| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Cela étant vrai pour tout $t \in \left]-1,1\right[$, on a la convergence simple de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers y.
4. Fixons $a \in \left]0,1\right[$. Démontrons par récurrence que la fonction y_n est lipschitzienne sur $[-a,a]$. Cela démontrera que f est lipschitzienne au voisinage de tout point. Cela est immédiat lorsque $n = 0$, car la fonction y_0 est constante.
Supposons que y_n soit k_n-lipschitzienne sur $[-a,a]$ pour un entier n. Alors, pour tout $(t,t') \in [-a,a]^2$, on a :
$$\begin{aligned} \big|y_{n+1}(t') - y_{n+1}(t)\big| &= \Big|t\Big(\sin\big(y_n(t)\big) - \sin\big(y_n(t')\big)\Big) + \sin\big(y_n(t')\big)(t - t')\Big|\\ &\leqslant |t|\Big|\sin\big(y_n(t)\big) - \sin\big(y_n(t')\big)\Big| + |t - t'|\,\Big|\sin\big(y_n(t')\big)\Big| \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la fonction sin est 1-lipschitzienne et qu'elle est à valeurs dans $[-1,1$, il vient alors :

$$\begin{aligned}\left|y_{n+1}(t')-y_{n+1}(t)\right| &\leqslant a\left|y_n(t)-y_n(t')\right|+|t-t'|\\ &\leqslant (a\,k_n+1)|t-t'|\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction y_{n+1} est k_{n+1}-lipschitzienne, avec $k_{n+1}=a\,k_n+1$. Cela démontre l'assertion par récurrence.

Puisque l'équation $c=ac+1$ a pour solution $c=\frac{1}{1-a}$, il est facile de démontrer par récurrence que y_n est c-lipschitzienne sur $[-a,a]$, pour tout n.

Ainsi, puisque pour tout $(t,t')\in[-a,a]^2$ et $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$\left|y_n(t)-y_n(t')\right|\leqslant c\,|t-a|,$$

on conclut par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ que y est c-lipschitzienne sur $[-a,a]$. Il s'ensuit que f est lipschitzienne au voisinage de tout point de $]-1,1[$.

5. Soit $t\in\,]-1,1[$. Puisque la fonction f y est lipschitzienne au voisinage de t, elle est continue en t et, utilisant le développement limité de la fonction sin au voisinage de $y(t)$, il vient que pour h suffisamment petit :

$$\sin\bigl(y(t+h)\bigr)=\sin\bigl(y(t)\bigr)+\bigl(y(t+h)-y(t)\bigr)\cos\bigl(y(t)\bigr)+\mathrm{o}\bigl(y(t+h)-y(t)\bigr).$$

Puisque f y est lipschitzienne au voisinage de t :

$$\sin\bigl(y(t+h)\bigr)-\sin\bigl(y(t)\bigr)=\bigl(y(t+h)-y(t)\bigr)\cos\bigl(y(t)\bigr)+\mathrm{o}(h).$$

Par conséquent, lorsque h tend vers 0 :

$$\begin{aligned}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}&=\frac{(t+h)\sin\bigl(y(t+h)\bigr)-t\sin\bigl(y(t)\bigr)}{h}\\ &=t\,\frac{\sin\bigl(y(t+h)\bigr)-\sin\bigl(y(t)\bigr)}{h}+\sin\bigl(y(t+h)\bigr)\\ &=t\,\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\cos\bigl(y(t)\bigr)+\sin\bigl(y(t+h)\bigr)+\mathrm{o}(1).\end{aligned}$$

Par suite, puisque $t\,\cos\bigl(y(t)\bigr)\neq 1$:

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h}=\frac{\sin\bigl(y(t+h)\bigr)+\mathrm{o}(1)}{1-t\,\cos\bigl(y(t)\bigr)}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\frac{\sin\bigl(y(t)\bigr)}{1-t\,\cos\bigl(y(t)\bigr)}.$$

On a ainsi démontré que la fonction y est dérivable sur $]-1,1[$.

10.6 Pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$, notons $u_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. • Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{n+x}{n+1+x}\,\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. La fonction S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Montrons que S est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, puisque la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, démontrons que la série dérivée $\sum u_n'$ converge normalement au voisinage de tout point, les fonctions u_n étant toutes de classe $\mathcal{C}^1$. Pour cela, il suffit de démonter la convergence normale de la série $\sum u_n'$ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a>0$.
  Soit $a>0$. Pour tout $x\in[a,+\infty[$:
  $$\left|u_n'(x)\right| = \left|\frac{1}{n!(x+n)^2}\right| \leqslant \frac{1}{n!\,(a+n)^2} \leqslant \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{n!}\cdot$$
  La convergence de la série $\sum \frac{1}{n!}$ garantit la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n'$ sur $[a,+\infty[$. La conclusion suit.

2. Soit $x>0$. On a :
$$\begin{aligned}
S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n+1)}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left(1-\frac{x}{x+n}\right)\\
&= (1-e^{-1}) + x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \qquad \text{(deux séries convergentes)}\\
&= (1-e^{-1}) + x\left(S(x)-\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$
En d'autres termes :
$$S(x+1) = xS(x) - e^{-1}. \tag{$*$}$$

3. - Équivalent en 0.
     On a $S(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 1-e^{-1}.$
     Puisque S est continue (elle est de classe $\mathcal{C}^1$), la relation $(*)$ donne :
     $$xS(x)-e^{-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} S(1) = 1-e^{-1}.$$
     On en déduit $S(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}\cdot$
   - Équivalent en $+\infty$.
     Pour tout $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n(x)=xu_n(x)$. On a :
     $$\left|v_n(x)\right| = \frac{1}{n!}\,\frac{x}{x+n} \leqslant \frac{1}{n!}\cdot$$
     La convergence de la série numérique $\sum\frac{1}{n!}$ assure la convergence normale, donc uniforme, de la série $\sum v_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, pour $n\in\mathbb{N}$ on a :
     $$v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{(-1)^n}{n!}\cdot$$

Ainsi, le théorème de la double limite donne :

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

Par suite $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{x}\cdot$

10.7 Notons $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

- Le domaine de définition de u_n est $]-n,+\infty[$, donc $\mathcal{D} \subset \,]-1,+\infty[$.
  D'autre part, pour x fixé dans $]-1,+\infty[$, on a $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
  La série $\sum (-1)^n \dfrac{x}{n}$ converge d'après le théorème des séries alternées et la série $\sum \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, donc la série $\sum u_n(x)$ converge.
  Par suite $\mathcal{D} = \,]-1,+\infty[$.
- Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
  * Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et :
  $$\forall x \in \,]-1,+\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}\cdot$$
  * La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ d'après ce qui précède.
  * La série $\sum u_n'$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$ car, d'après le théorème des séries alternées, en notant R_n son reste d'indice n, on a :
  $$\left|R_n(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}'(x)\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x}\right| \leqslant \frac{1}{n},$$
  donc $\sup\limits_{x>-1} \left|R_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x>-1} \left|R_n(x)\right| = 0$.

  D'après le théorème précité, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et :
  $$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}\cdot$$

  Remarque La classe $\mathcal{C}^1$ de f est plus facile à démontrer que sa continuité.

- Équivalent en $x = -1$.

  Pour $x > -1$, on peut écrire $f(x) = -\ln(1+x) + g(x)$ avec $g(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.
  Par un raisonnement identique à celui fait pour f, on montre que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2,+\infty[$. La fonction g est en particulier continue donc bornée au voisinage de -1, ce qui entraîne que $f(x) \sim -\ln(1+x)$ quand x tend vers -1^+.

- Équivalent en $+\infty$.
  Pour $x \geqslant 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n+x} = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} (-1)^n\, t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{-t^x\left(1-(-t)^N\right)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

  Or, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{x+N}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+N+1} \underset{N\to+infty}{\longrightarrow} 0$.
  En faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$f'(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

  En intégrant par parties, il vient :

$$f'(x) = \left[\frac{-t^{x+1}}{(x+1)(1+t)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(x+1)(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2(x+1)} - R(x)$$

  avec $0 \leqslant R(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(x+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.
  On en déduit pour $x > 0$:

$$f(x) = f(0) - \int_0^x \frac{1}{2(t+1)}\,\mathrm{d}t - \int_0^x R(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x+1)}{2} - \int_0^x R(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Or $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x R(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \ln\frac{x+1}{x+2} + \ln 2$, d'où :

$$f(x) = -\frac{\ln(x+1)}{2} + \mathrm{O}(1) = -\frac{\ln x}{2} + \mathrm{o}(\ln x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{2}.$$

- Calcul de $f(1)$.
  La série étant convergente, on a $f(1) = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
  D'autre part, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) - \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (\ln(2k+1) + \ln(2k-1)) - 2\sum_{k=1}^{p} \ln(2k)$$

$$= \ln(2p+1) + 2\ln\left(\frac{(2p-1)\cdots 1}{(2p)\cdots 2}\right)$$

$$= \ln(2p+1) + 2\ln\left(\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\right) = 2\ln\left(\sqrt{2p+1}\,\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\right).$$

D'après l'équivalent de Stirling :

$$(2p)! \underset{+\infty}{\sim} 2^{2p+1}\sqrt{\pi}p^{2p+1/2}e^{-2p} \quad \text{et} \quad 2^{2p}p!^2 \underset{+\infty}{\sim} 2^{2p+1}\pi p^{2p+1}e^{-2p}.$$

Par suite $\sqrt{2p+1}\,\dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\dfrac{2p+1}{p}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot$

On en déduit que $f(1) = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)\cdot$

10.8 1. Par définition de la partie entière, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n\pi - 1 < \lfloor n\pi \rfloor \leqslant n\pi.$$

Puisque ces trois réels sont strictement positifs, on a :

$$\frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor} < \frac{1}{n\pi - 1}\cdot$$

Par suite $0 \leqslant \dfrac{1}{\lfloor n\pi \rfloor} - \dfrac{1}{n\pi} \leqslant \dfrac{1}{n\pi - 1} - \dfrac{1}{n\pi} = \dfrac{1}{n\pi(n\pi-1)} \leqslant \dfrac{1}{(n\pi-1)^2}\cdot$

2. • Démontrons la convergence simple sur $]0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n(s) = \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}\cdot$ De la même manière qu'à la question précédente, puisque $s > 0$, on a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s} \leqslant \frac{1}{(n\pi-1)^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}\cdot \qquad (*)$$

Par ailleurs, $n\pi - 1 \geqslant n\pi - \pi$. On en déduit alors de l'inégalité $(*)$, pour $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s} \leqslant \frac{1}{((n-1)\pi)^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}\cdot$$

La série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{((n-1)\pi)^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}$ est convergente, car, du fait que $s > 0$, on a $\frac{1}{(n\pi)^s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par comparaison, les termes généraux étant positifs, la série $\sum u_n(t)$ est convergente.

• Démontrons la convergence uniforme au voisinage de tout point de $]0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum u_n$. Fixons $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \geqslant a$, on a :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(s) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{((k-1)\pi)^s} - \frac{1}{(k\pi)^s}\right) = \frac{1}{nk\pi)^s} \leqslant \frac{1}{(n\pi)^a}\cdot$$

Puisque $\frac{1}{(n\pi)^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

• Les fonctions u_n étant continues, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrons que f est de classe $\mathcal{C}^p$.

• On remarque que par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$ l'on a :

$$u_n^{(k)}(s) = (-1)^k\left(\frac{\ln^k(\lfloor n\pi \rfloor))}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{\ln^k(n\pi)}{(np)^s}\right).$$

- Soit $k \in [\![0,p]\!]$. La fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $\varphi_k(s) = \frac{\ln^k t}{t^s}$ est décroissante sur un intervalle $[\alpha_k, +\infty[$, comme peut le montrer une étude de fonction, et $\varphi_k(s) \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparées. Il s'ensuit que pour tout $n \geqslant \alpha_k + 1$ et $s > 0$, on a :
$$0 \leqslant (-1)^k u_n^{(k)} \leqslant \frac{\ln^k\big((n-1)\pi\big)}{\big((n-1)p\big)^s} - \frac{\ln^k(n\pi)}{(np)^s}.$$
Par suite, la série télescopique $\sum \left(\frac{\ln^k\big((n-1)\pi\big)}{\big((n-1)p\big)^s} - \frac{\ln^k(n\pi)}{(np)^s} \right)$ étant convergente, par comparaison, la série $\sum u_k^{(k)}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. Cela pour tout $k \in [\![0,p]\!]$.
- Fixons $a > 0$. Pour $n \geqslant \alpha_p + 1$, et $s \geqslant a$ on a :
$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k^{(p)}(s) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\ln^p((k-1)\pi)}{((k-1)\pi)^s} - \frac{\ln^p(k\pi)}{(k\pi)^s} \right) = \frac{\ln^p(n\pi)}{(n\pi)^s} \leqslant \frac{\ln^p(n\pi)}{(n\pi)^a}.$$
Puisque $\frac{\ln^p(n\pi)}{(n\pi)^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit la convergence uniforme de la série $\sum u_n^{(p)}$ sur $[a,+\infty[$. Par théorème f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,+\infty[$. Cela étant vérifié pour tout $a > 0$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10.9 1. La série $\sum u_n(0)$ converge car $u_n(0) = 0$. Pour $x > 0$, on a :
$$u_n(x) \sim \frac{\ln n}{n^2\sqrt{x}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$
donc la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour $x \geqslant a > 0$, on a :
$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{\sqrt{x}\ln n}{xn^2} = \frac{\ln n}{\sqrt{x}n^2} \leqslant \frac{\ln n}{\sqrt{a}n^2} \;;$$
ce majorant indépendant de $x \geqslant a$ est le terme général d'une série convergente, d'après ce qui précède, donc la série converge normalement sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Par conséquent, les fonctions u_n étant continues par opérations sur les fonctions continues, la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Mais pour $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, la série étant à terme général positif, on a, en reconnaissant une somme de Riemann :
$$f(x_n) \geqslant \sum_{p=n+1}^{2n} u_p(x_n) \geqslant \frac{\ln n}{n} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{1+(p/n)^2} \sim \ln n \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$
Par conséquent :
$$f\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
et donc f n'est pas continue à droite de 0.

3. Encadrons $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ par des intégrales.

   Pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$, on a :
$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2} \leqslant \frac{1}{1+xn^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}$$
   et donc :
$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t-1)}{1+xt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln n}{1+xn^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t+1)}{1+xt^2}\,\mathrm{d}t,$$
   Par suite, en sommant :
$$\sqrt{x}\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t-1)}{1+xt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \sqrt{x}\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{1+xt^2}\,\mathrm{d}t.$$
   En effectuant le changement de variable $v = \sqrt{x}t$ dans les deux intégrales, il vient :
$$\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(v-\sqrt{x})}{1+v^2}\,\mathrm{d}v - \int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$$
$$\leqslant f(x) \leqslant \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(v+\sqrt{x})}{1+v^2}\,\mathrm{d}v - \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v.$$
   Or en posant le changement de variable $u = v - \sqrt{x}$:
$$\left|\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(v-\sqrt{x})}{1+v^2}\,\mathrm{d}v\right| = \left|\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln u}{1+(u+\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\ln u|}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$
   De même, en posant le changement de variable $u = v + \sqrt{x}$:
$$\left|\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln(v+\sqrt{x})}{1+v^2}\,\mathrm{d}v\right| = \left|\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln u}{1+(u-\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\ln u|}{1+u^2/4}\mathrm{d}u$$
   Ainsi, quand x tend vers 0^+ :
$$f(x) \sim -\int_{2\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{1+v^2}\,\mathrm{d}v \sim -\frac{\ln x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = -\frac{\pi}{4}\ln x.$$

10.10 1. La série diverge pour $x = 0$, puisque $u_n(0) = \frac{1}{n}\cdot$

   Pour tout $x > 0$, on a $u_n(x) \sim \frac{1}{n^2x^2}$; d'où la convergence de la série $\sum u_n(x)$, par comparaison aux séries de Riemann.

   La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sup\limits_{x \geqslant a} |u_n(x)| = u_n(a)$, car u_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, la série $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout intervalle $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$; comme chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. • Pour l'étude en $+\infty$, appliquons à la série $\sum v_n$, avec $v_n(x) = x^2 u_n(x)$, le théorème de la double limite.

   $*$ On a $\forall (x,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant v_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2}\cdot$

   Par suite, la série $\sum v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.

   $*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^2}\cdot$

   On peut donc conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

   Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(x) \sim \frac{\pi^2}{6x^2}\cdot$

   • Pour l'étude en 0, nous utiliserons un encadrement par l'intégrale. Fixons $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx^2)}$ est continue, positive et décroissante. Comme la série $\sum u_n(x)$ converge, cette fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$ et l'on peut écrire :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n(x) \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)}$$
$$\forall n \geqslant 2 \quad u_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)}\cdot$$

   On en déduit, par sommation :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)}\cdot$$

   Comme :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}\right)\mathrm{d}t = \ln \frac{t}{1+tx^2},$$

   il vient $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, avec :

$$u(x) = -2\ln x + \ln\left(1+x^2\right)$$
$$v(x) = -2\ln x + \ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{1+x^2}\cdot$$

   Comme $u(x) \sim -2\ln x$ et $v(x) \sim -2\ln x$, au voisinage de 0^+, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et que $f(x) \sim -2\ln x$.

10.11 1. • Le domaine de définition de u_n est $]-n,+\infty[$, donc $\mathcal{D} \subset]-1,+\infty[$. D'autre part, pour x fixé dans $]-1,+\infty[$, on a :

$$u_n(x) = x\left(\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

   donc $\sum u_n(x)$ converge absolument, d'où $\mathcal{D} =]-1,+\infty[$.

   • Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. Nous allons montrer que f est de classe $\mathcal{C}^p$ en utilisant le théorème du cours sur les séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, ce qui prouvera que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$. Commençons par remarquer que les fonctions u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$.

∗ La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ d'après ce qui précède.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}$:
$$u'_n(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
donc la série $\sum u'_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$.
Pour $k \in [\![2, p-1]\!]$, $u_n^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{(k-1)!}{(n+x)^k} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$, donc la série $\sum u_n^{(k)}$ converge simplement sur $\mathcal{D}$.

∗ Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathcal{D}$:
$$\sup_{x\in[a,b]} \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{(p-1)!}{(n+a)^p} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^p}\right),$$
donc la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

Ces hypothèses entraînent la classe $\mathcal{C}^p$ de f sur $\mathcal{D}$.

2. Pour $x \in \mathcal{D}$, on a $f(x+1) - f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$ avec :
$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{k+x}{k}\right) - \ln\left(\frac{k+1+x}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+1) - \ln k\big) + \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+x) - \ln(k+1+x)\big) \\ &= \ln(n+1) + \ln(1+x) - \ln(n+1+x) \\ &= \ln(1+x) - \ln\left(\frac{n+1+x}{n+1}\right), \end{aligned}$$
donc $f(x+1) - f(x) = \ln(1+x)$.

10.12 1. Nous allons montrer que les fonctions f qui vérifient la relation sont entièrement déterminées, par leur restriction f_0 à $[0, 1[$ qui est une fonction ayant pour seules contraintes d'être continue sur $[0, 1[$ et d'avoir pour limite $f_0(0) + \varphi(0)$ à gauche en 1.

- Si f est une solution et si f_0 désigne sa restriction à $[0, 1[$, on a facilement par récurrence sur n, que, pour $x \in [n, n+1[$, et $y = x - n \in [0, 1[$:
$$f(x) = f_0(y) + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(y+k).$$
La fonction f étant continue en $x = 1$, on a $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ c'est-à-dire, en utilisant l'égalité précédente :
$$\lim_{x\to1^+}\big(f_0(x-1) + \varphi(x-1)\big) = \lim_{x\to1^-} f_0(x),$$
donc :
$$f_0(0) + \varphi(0) = \lim_{x\to1^-} f_0(x).$$

- Réciproquement, soit f_0 une fonction continue sur $[0,1[$ admettant $f_0(0)+\varphi(0)$ comme limite en 1^- et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [n, n+1[\quad f(x) = f_0(x-n) + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x-n+k),$$

ce qui donne en particulier $\forall x \in [0,1[\quad f(x) = f_0(x)$.
Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [n, n+1[$, on a $x+1 \in [n+1, n+2[$ donc :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f_0\big(x+1-(n+1)\big) + \sum_{k=0}^{n} \varphi\big(x+1-(n+1)+k\big) \\ &= f_0(x-n) + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x-n+k) + \varphi(x) = f(x) + \varphi(x). \end{aligned}$$

D'autre part f est évidemment continue sur chaque intervalle $[n, n+1[$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to n^-} f(x) &= \lim_{x \to n^-} f_0\big(x-(n-1)\big) + \sum_{k=0}^{n-2} \varphi\big(x-(n-1)+k\big) \\ &= \lim_{z \to 1^-} f_0(z) + \sum_{k=0}^{n-2} \varphi(1+k), \end{aligned}$$

et en utilisant l'hypothèse $\lim\limits_{z \to 1^-} f_0(z) = f_0(0) + \varphi(0)$:

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = f_0(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k) = f(n),$$

donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrons que la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n(x) = \varphi(n) - \varphi(x+n)$, converge normalement sur tout intervalle de la forme $[0,k]$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, ce qui assurera la continuité de la somme.
Pour $x \in [0,k]$, on a : $0 \leqslant \varphi(n) - \varphi(x+n) \leqslant \varphi(n) - \varphi(k+n)$; de plus pour $N \geqslant k$:

$$\sum_{n=0}^{N} \big(\varphi(n) - \varphi(k+n)\big) = \sum_{n=0}^{k-1} \varphi(n) - \sum_{n=N+1}^{N+k} \varphi(n) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{k-1} \varphi(n) - kL,$$

ce qui prouve la convergence normale de $\sum u_n$ sur $[0,k]$.
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} S(x) - S(x+1) &= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \big(\varphi(k) - \varphi(x+k) - \varphi(k) + \varphi(x+k+1)\big) \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \big(\varphi(x+k+1) - \varphi(x+k)\big) \\ &= \lim_{N \to \infty} \big(\varphi(x+N+1) - \varphi(x)\big) = L - \varphi(x). \end{aligned}$$

Cela entraîne facilement que f vérifie la relation de l'énoncé.

10.13 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que $S_n(0) = S_n(2\pi) = 0$. Pour $x \in]0, 2\pi[$ on a classiquement, par exemple en considérant $\operatorname{Im}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$:

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

L'inégalité demandée est alors immédiate.

2. La convergence de la série $\sum a_n \sin(nx)$ est immédiate si $x = 0$ ou $x = 2\pi$. Pour $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n} a_k\big(S_k(x) - S_{k-1}(x)\big)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})S_k(x) + a_n S_n(x)\end{aligned}$$

Fixons x. On a :

$$\big|(a_k - a_{k+1})S_k(x)\big| \leqslant (a_k - a_{k+1})\,\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} = \mathrm{O}\left(a_k - a_{k+1}\right).$$

La série télescopique à terme général positif $\sum(a_k - a_{k+1})$ étant convergente, par le théorème de comparaison, la série $\sum(a_k - a_{k+1})S_k(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Puisque la suite $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $a_n S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})S_k(x) + a_n S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Par suite, la série $\sum a_n \sin(nx)$ est convergente.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $\frac{k\pi}{4n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par conséquent les $\sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$ sont positifs. On a donc :

$$\begin{aligned}R_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) - R_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) &= \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)\\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right) && ((a_k)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante})\\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n}\frac{2}{\pi}\,\frac{k\pi}{4n} && (\text{inégalité de convexité})\\ &= \frac{a_{2n}}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} k = a_{2n}\,\frac{3n+1}{4} \geqslant 0\end{aligned}$$

La convergence uniforme de la série donne

$$0 \leqslant a_{2n}\,\frac{3n+1}{4} \leqslant R_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) - R_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) \leqslant \mathcal{N}_\infty(R_n - R_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc $2na_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela implique, puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, que pour tout n :

$$0 \leqslant (2n+1)a_{2n+1} \leqslant (2n+1)a_{2n} = 2n\,a_{2n} + a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La conclusion est alors immédiate.

4. Par symétrie, on peut se restreindre à $]0,\pi]$.

À l'aide de la question 2, pour $x \in]0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, nous disposons de la relation :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})S_k(x).$$

On en déduit l'inégalité :

$$\begin{aligned}
\left|R_n(x)\right| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})\left|S_k(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} && \text{(question 1)} \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})\frac{\pi}{x} && \text{(inégalité de convexité)} \\
&= a_{n+1}\,\frac{\pi}{x}\cdot && (\star)
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout entier $p > n$ et $x \in]0,\pi]$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k \sin(kx)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} a_k\left|\sin(kx)\right| \leqslant x \sum_{k=n+1}^{p} ka_k \qquad (\star\star)$$

En combinant, pour tous les entiers n et p vérifiant $p > n > 0$ et $x \in]0,\pi]$, on obtient :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k \sin(kx) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})S_k(x)$$

et donc les inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$ donnent :

$$\begin{aligned}
\left|R_n(x)\right| &\leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k \sin(kx)\right| + \left|\sum_{k=p+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})S_k(x)\right| \\
&\leqslant x \sum_{k=n+1}^{p} k\,a_k + \frac{\pi}{x}\,a_{p+1} && (\star\star\star)
\end{aligned}$$

L'inégalité $(\star\star\star)$ est vérifiée même si $p \leqslant n$, car alors $\sum\limits_{k=n+1}^{p} a_k k = 0$ et d'après $(\star)$ on a $\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{\pi}{x}a_{n+1} \leqslant \frac{\pi}{x}\,a_{p+1}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in]0, \pi]$, en posant $p = \left\lfloor \frac{1}{x\varepsilon} \right\rfloor$, on obtient :

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon p} \sum_{k=n+1}^{p} a_k k + \varepsilon(p+1)a_{p+1}.$$

L'hypothèse $\lim\limits_{nto+\infty} n\,a_n = 0$ s'écrit $n\,a_n = \mathrm{o}(1)$ et comme 1 est le terme général positif d'une série divergente, par sommation des relations de comparaison, on en déduit $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,a_k = \mathrm{o}(n)$.

Il existe donc n_0 tel que pour tout $p > n_0$ on ait :

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} ka_k \leqslant \varepsilon^2$$

et donc pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{ll} 0 \leqslant \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=n+1}^{p} ka_k \leqslant \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{p} ka_k \leqslant \varepsilon^2 & \text{si } p > n \\ 0 \leqslant \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=n+1}^{p} ka_k = 0 \leqslant \varepsilon^2 & \text{si } p \leqslant n \end{array}$$

Par ailleurs, la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc majorée. Soit M un majorant de cette suite. Alors, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in]0, \pi] \quad \left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} + M\varepsilon = (M+1)\varepsilon$$

On en déduit la convergence uniforme de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

10.14 1. • Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ on a, $f_n(x) = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{2x}{x^2 - p^2}\cdot$

Puisque $\dfrac{2x}{x^2-p^2} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{p^2}\right)$, la série $\sum \dfrac{2x}{x^2-p^2}$ converge absolument, donc converge et $f(x)$ est bien défini.

• Si $2x$ n'est pas entier, alors x et $x + \dfrac{1}{2}$ ne le sont pas et l'on peut écrire :

$$f_n(x) + f_n\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-2n}^{2n+1} \frac{2}{2x+k} = 2f_{2n}(2x) + \frac{2}{2x+2n+1}\cdot$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot$$

• Remarquons que l'égalité $f_n(x+1) = f_n(x) + \dfrac{1}{x+1+n} - \dfrac{1}{x-n}$ entraîne, par passage à la limite, la 1-périodicité de f.

2. • On vérifie facilement que la fonction $x \mapsto h(x) = \pi \operatorname{cotan} \pi x$ est également 1-périodique, donc $g = f - h$ l'est aussi.

- Montrons que la fonction $\gamma : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{x} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2-k^2}$ est continue sur $]-1,1[$ en utilisant le théorème de continuité des séries de fonctions. Notons que les fonctions $x \mapsto \frac{2x}{x^2-k^2}$ sont continues sur $]-1,1[$.
  Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in[-a,a]} \left|\dfrac{2x}{x^2-k^2}\right| \leqslant \dfrac{2a}{k^2-a^2}$, ce qui prouve la convergence normale sur $[-a,a]$ de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{2x}{x^2-k^2}$, donc la continuité de sa somme sur $[-a,a]$, puis sur $]-1,1[$.
- La fonction $g = f - h$ est donc continue sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et pour $x \in]-1,1[$:
  $$h(x) = \pi\frac{1+\mathrm{o}(x)}{\pi x + \mathrm{o}(x^2)} = \frac{1}{x}(1+\mathrm{o}(x)) = \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1),$$
  donc $x \mapsto g(x) = \gamma(x) + \mathrm{o}(1)$ est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,1[$ en posant $g(0)=0$. Par 1-périodicité, g est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. La fonction h vérifie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ la même relation fonctionnelle que f car si $2x$ n'est pas entier, on a :
$$\begin{aligned} h(x) + h\left(x+\frac{1}{2}\right) &= \pi\,\mathrm{cotan}(\pi x) - \pi\tan\pi x \\ &= \pi\frac{\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)}{\cos(\pi x)\sin(\pi x)} = 2h(2x). \end{aligned}$$
La fonction $g = f - h$ vérifie la même relation fonctionnelle que f et h sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Par continuité, elle vérifie également cette relation sur $\mathbb{R}$.
Comme la fonction $|g|$ est continue sur le segment $[0,A]$, elle atteint sa borne supérieure sur ce segment, donc l'ensemble $T = \left\{x \in [0,A] \;\middle|\; |g(x)| = M_A\right\}$ est non vide et c'est un fermé de $\mathbb{R}$ car égal à $[0,A] \cap |g|^{-1}\left(\{M_A\}\right)$, donc il contient sa borne inférieure, d'où l'existence de x_0.
Mais $x_0 \leqslant 2A-1$, donc $\dfrac{x_0}{2} + \dfrac{1}{2} \leqslant A$, d'où :
$$\left|g\left(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant M_A, \quad \text{et} \quad M_A = |g(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|g\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| + M_A\right),$$
par suite $\left|g\left(\dfrac{x_0}{2}\right)\right| \geqslant M_A$. Ce n'est possible que si $x_0 = 0$, autrement dit :
$$M_A = |g(0)| = 0.$$
Donc $g = 0$ sur $[0,A]$ puis sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.

10.15 On pose $u_n(x) = \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \geqslant 0$, on a $|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$. Par comparaison aux séries de Riemann, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions u_n étant continues, la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, par croissances comparées, pour tout $x<0$, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La série $\sum u_n(x)$ diverge alors grossièrement. En conclusion, $f=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et elle est continue.

- Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x\geqslant 0$ et $n\geqslant 1$:

$$u_n'(x)=-\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}\cdot$$

Soit $a>0$. Par croissance de la fonction exponentielle, on a pour tout $x\geqslant a$ et $n\geqslant 1$:

$$-u_n'(x)=\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}\leqslant\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n}$$

et par croissances comparées :

$$0\leqslant -u_n'(x)\leqslant\frac{e^{-a\sqrt{n}}}{n}=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum u_n'$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x>0$ et $n\geqslant 1$, on a $\frac{u_n(x)-u_n(0)}{x}\leqslant 0$. Par conséquent :

$$\forall n\in\mathbb{N}^2\quad\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad\frac{f(x)-f(0)}{x}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-x\sqrt{k}}-1}{x}\cdot$$

Soit $M\in\mathbb{R}_+$. La série $\sum\frac{1}{\sqrt{k}}$ étant divergente, il existe un entier n tel que $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geqslant 2M$. Fixons n. Par ailleurs

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-x\sqrt{k}}-1}{x}\underset{x\to+0}{\longrightarrow}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}},$$

et donc il existe $\eta>0$ tel que :

$$\forall x\in\,]0,\eta]\quad\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-x\sqrt{k}}-1}{x}\leqslant-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}+M,$$

ce qui implique :

$$\forall x\in\,]0,\eta]\quad\frac{f(x)-f(0)}{x}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-x\sqrt{n}}-1}{x}\leqslant -M,$$

en d'autres termes, $\frac{f(x)-f(0)}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\infty$. Par suite, f n'est pas dérivable en 0.

- On a, pour tout $x>0$:

$$0\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(x)\leqslant e^{-x\sqrt{2}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\cdot$$

Donc, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)=e^{-x}+\mathrm{o}\left(e^{-x}\right)$, c'est-à-dire $f(x)\underset{+\infty}{\sim}e^{-x}$.

10.16 Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right)$. Il est clair que u_n est définie sur $\mathbb{R}^*$ et continue. Par parité de u_n, on peut restreindre l'étude de à $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $\frac{1}{n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}\cdot$$

Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum u_n(x)$ est convergente. On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

2. Démontrons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela il suffit d'établir la convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Soit donc $a > 0$. Par croissance de la fonction $\ln$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant a$:

$$0 \leqslant u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n^2a^2}\right).$$

La convergence de la série numérique $\sum u_n(a)$ assure la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[a, +\infty[$. Par conséquent, les fonctions u_n étant continues, la fonction f est continue.

3. • Équivalent en $+\infty$.
On constate que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$. Il est alors naturel de supposer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$
On sait que l'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$ est valable pour tout $t > -1$. En notant $v_n : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right)$, il s'ensuit :

$$0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot$$

Par conséquent, la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, il a été remarqué que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^2}\cdot$
D'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$$

En d'autres termes, $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, *i.e.* :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$$

• Équivalent en 0.
La technique utilisée plus haut est inopérante, car $u_n(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -2\ln x$ et, pour x fixé, la série $\sum(-2\ln x)$ est grossièrement divergente.

Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2t^2}\right)$ est continue, décroissante. Puisque la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente, par comparaison série/intégrale, cette dernière fonction est intégrable. On en déduit l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2t^2}\right) \mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2t^2}\right) \mathrm{d}t + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right). \quad (*)$$

Calculons $I(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2t^2}\right)$. Le changement de variable linéaire $t = \frac{u}{x}$ donne :

$$I(x) = \frac{1}{x} \underbrace{\int_x^{+\infty} \big(\ln(1+u^2) - 2\ln u\big)\, \mathrm{d}u}_{J(x)}.$$

Les fonctions $U : u \mapsto \ln(1+u^2) - 2\ln u$ et $V : u \mapsto u$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$U(u)V(u) = u \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \underset{u\to+\infty}{\sim} u\,\frac{1}{u^2} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} J(x) &= -x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= -x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)\right). \end{aligned}$$

Puisque $2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pi$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -2\ln x$, on a par croissances comparées :

$$J(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \pi \qquad \text{et} \qquad I(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{x}\cdot$$

Toujours par croissances comparées, au voisinage de 0 on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{0}{\sim} -2\ln x = \mathrm{o}\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

L'encadrement $(*)$ donne alors :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{x}\cdot$$

10.17 On établit facilement, par récurrence sur n, que la fonction f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et qu'elle vérifie :

$$f_{n+1}^{(n+1)} = f_0 \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(0) = f'_{n+1}(0) = \cdots = f_{n+1}^{(n)}(0) = 0.$$

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, on en déduit :

$$\forall x \in [0,b] \quad \big|f_{n+1}(x)\big| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_0)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot$$

Par suite $\mathcal{N}_\infty(f_{n+1}) \leqslant \dfrac{b^{n+1}}{(n+1)!}\mathcal{N}_\infty(f_0)$, ce qui prouve la convergence normale sur $[0,b]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

Posons $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Il s'agit d'une série simplement convergente sur $[0, b]$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, dont la série dérivée converge normalement sur $[0, b]$. D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a :

$$f' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = f_0 + f.$$

Comme $f(0) = 0$, la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est l'unique solution sur $[0, b]$ de l'équation différentielle $y' - y = f_0$, avec $y(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0, b] \quad f(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

10.18 1. En effet, soit :

$$A_n = \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{F(b_n) - F(x) + F(x) - F(a_n)}{b_n - x + x - a_n}$$
$$= \frac{(b_n - x)\tau_{b_n(x)} + (x - a_n)\tau_{a_n}(x)}{b_n - x + x - a_n},$$

où $\tau_a(x) = \dfrac{F(x) - F(a)}{x - a}$ si $x \neq a$ et $F'(x)$ si $x = a$.

Ainsi A_n est un barycentre à masses positives de deux suites réelles de même limite $F'(x)$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = F'(x)$.

2. La fonction f est de période 1 et :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1 - x & \text{si } x \in]1/2, 1]. \end{cases}$$

On en déduit que f est continue et à valeurs dans $[0, 1/2]$.
La série de fonctions $\sum u_n$, avec $u_n(x) = 10^{-n} f(10^n x)$, est une série de fonctions continues qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant 10^{-n} f(10^n x) \leqslant 10^{-n}/2.$$

La somme F est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$; elle est, comme f, de période 1.

Soit alors $x \in [0, 1[$, de développement décimal *propre* $x = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{x_p}{10^p}$, où tous les x_p sont dans $[\![0, 9]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{x_p}{10^p} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n + \frac{1}{10^n}\cdot$$

Nous allons montrer que $\dfrac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = 10^n \big(F(b_n) - F(a_n)\big)$ n'a pas de limite lorsque n tend vers l'infini.

Pour $k \geqslant n$, $10^k a_n = \sum\limits_{p=1}^{n} 10^{k-p} x_p \in \mathbb{Z}$; de même $10^k b_n \in \mathbb{Z}$, donc :

$$f(10^k a_n) = f(10^k b_n) = 0.$$

Pour $k < n$, on a :

$$10^k a_n = \sum_{p=1}^{n} 10^{k-p} x_p = \lfloor 10^k a_n \rfloor + \sum_{p=k+1}^{n} 10^{k-p} x_p.$$

- Si $x_{k+1} \in [\![0,4]\!]$, on a :

  $$10^k a_n - \lfloor 10^k a_n \rfloor \in [0,1/2] \qquad \text{et} \qquad 10^k a_n - \lfloor 10^k a_n \rfloor + 10^{k-n} \in [0,1/2].$$

  On en déduit :

  $$f\left(10^k a_n\right) = \sum_{p=k+1}^{n} 10^{k-p} x_p$$
  $$f\left(10^k b_n\right) = \sum_{p=k+1}^{n} 10^{k-p} x_p + 10^{k-n},$$

  d'où $10^{-k}\Big(f\big(10^k b_n\big) - f\big(10^k a_n\big)\Big) = 10^{-n} = b_n - a_n$.
- Si $x_{k+1} \in [\![5,9]\!]$, on a :

  $$10^k a_n - \lfloor 10^k a_n \rfloor \in [1/2,1] \qquad \text{et} \qquad 10^k a_n - \lfloor 10^k a_n \rfloor + 10^{k-n} \in [1/2,1].$$

  On en déduit :

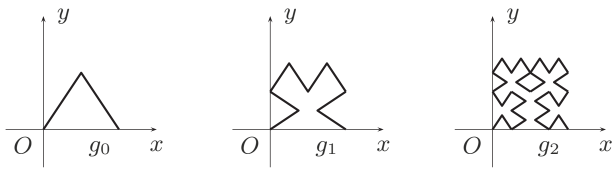
  $$f\left(10^k a_n\right) = 1 - \sum_{p=k+1}^{n} 10^{k-p} x_p$$
  $$f\left(10^k b_n\right) = 1 - \sum_{p=k+1}^{n} 10^{k-p} x_p - 10^{k-n},$$

  d'où $10^{-k}\Big(f\big(10^k b_n\big) - f\big(10^k a_n\big)\Big) = -10^{-n} = -\left(b_n - a_n\right)$

Finalement, $\frac{F(b_n)-F(a_n)}{b_n-a_n} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k$, avec $\varepsilon_k \in \{-1,1\}$. La série $\sum \varepsilon_k$ diverge, car son terme général ne tend pas vers 0 ; la suite $\left(\frac{F(b_n)-F(a_n)}{b_n-a_n}\right)$ n'a donc pas de limite et, d'après la première question, F n'est pas dérivable en x.

10.19 Notons $I_0 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $I_1 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ et $I_3 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

1. On obtient les graphes suivants



2. • Il y a *a priori* ambiguïté sur la définition de f en $1/4$, $1/2$ et $3/4$. Il est facile de vérifier pour chacun de ces points que les deux expressions données ont la même valeur.
   • Soit $f : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ un élément de A.
     * Pour tout $t \in I_0$, on a $\Phi(f)(t) \in \big[0, \frac{1}{2}\big]^2$.
     * Pour tout $t \in I_1$, on a $\Phi(f)(t) \in \big[0, \frac{1}{2}\big] \times \big[\frac{1}{2}, 1\big]$.
     * Pour tout $t \in I_2$ on a $\Phi(f)(t) \in \big[\frac{1}{2}, 1\big] \times \big[\frac{1}{2}, 1\big]$.
     * Pour tout $t \in I_3$ on a $\Phi(f)(t) \in \big[\frac{1}{2}, 1\big] \times \big[0, \frac{1}{2}\big]$.

   Par conséquent $\Phi(f)$ est à valeurs dans $[0,1]^2$. De plus :
$$\Phi(f)(0) = \left(\frac{y(0)}{2}, \frac{x(0)}{2}\right) = (0,0) \quad \text{et} \quad \Phi(f)(1) = \left(1 - \frac{y(1)}{2}, \frac{1 - x(1)}{2}\right) = (1,0).$$
   Les restrictions de $\Phi(f)$ à I_0 et I_1 sont continues. Par suite la fonction $\Phi(f)$ est continue à gauche et à droite en $1/4$, donc elle est continue. On vérifie de même la continuité en $1/2$ et $3/4$. Il s'ensuit que l'application $\Phi(f)$ est continue.
   • Soit f_1 et f_2 deux éléments de A. Pour tout $t \in I_0$:
$$\big\|\Phi(f)(t) - \Phi(g)(t)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\,\big\|\big(x_2(4t) - x_1(4t), y_2(4t) - y_1(4t)\big)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{N}_\infty(f_1 - f_2)$$
   On démontre de même que $\big\|\Phi(f_1)(t) - \Phi(f_2)(t)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{N}_\infty(f_1 - f_2)$ sur les intervalles I_i avec $i \in [\![1,3]\!]$. Il s'ensuit que :
$$\mathcal{N}_\infty\big(\Phi(f_1) - \Phi(f_2)\big) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{N}_\infty(f_1 - f_2).$$
3. Montrons que la série $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, du fait que Φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, on a :
$$\mathcal{N}_\infty(f_{n+2} - f_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{N}_\infty(f_{n+1} - f_n)$$
   et par une récurrence immédiate :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_\infty(f_{n+1} - f_n) \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{N}_\infty(f_1 - f_0).$$
   La convergence de la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ permet de conclure. Par suite la série $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f. Puisque les fonctions f_n sont continues et que la convergence est uniforme, la fonction f est continue.
4. Démontrons l'assertion par récurrence.
   Puisque :
$$f_1(1/2) = \left(\frac{x(4(1/2) - 1)}{2}, \frac{y(4(1/2) - 1) + 1}{2}\right) = \left(\frac{x(1)}{2}, \frac{y(1) + 1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
   l'assertion est vérifiée au rang 1.

   Supposons l'assertion vraie pour un entier n. Soit $\left(\dfrac{2i+1}{2^{n+1}}, \dfrac{2j+1}{2^{n+1}}\right) \in C_{n+1}$.

   Distinguons quatre cas.

- Supposons $0 \leqslant i < 2^n$ et $0 \leqslant j < 2^n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $t \in [0,1]$ tel que $f_n(t) = \left(\frac{2j+1}{2^n}, \frac{2i+1}{2^n}\right)$. Par conséquent,
$$f_{n+1}\left(\frac{t}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2i+1}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n}\right).$$
- Supposons $0 \leqslant i < 2^n$ et $2^n \leqslant j < 2^{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, puisque $0 \leqslant \underbrace{j - 2^n}_{j'} < 2^n$, il existe $t \in [0,1]$ tel que $f_n(t) = \left(\frac{2i+1}{2^n}, \frac{2j'+1}{2^n}\right)$. Par conséquent, puisque $\frac{t+1}{4} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$:
$$f_{n+1}\left(\frac{t+1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2i+1}{2^n}, 1 + \frac{2j'+1}{2^n}\right) = \left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}, \frac{2j+1}{2^{n+1}}\right).$$
- Les cas $2^n \leqslant i < 2^{n+1}$ et $2^n \leqslant j < 2^{n+1}$, et $2^n \leqslant i < 2^{n+1}$ et $0 \leqslant j < 2^n$ se traitent de manière analogue.

5. Démontrons que $[0,1]^2 \subset \overline{f\big([0,1]\big)}$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et $(x,y) \in [0,1]^2$.

   Commençons par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_n, y_n) \in C_n$ tel que $|x - x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $|y - x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$, *i.e.* tel que $\big\|(x,y) - (x_n, y_n)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $t_n \in [0,1]$ tel que $f_n(t_n) = (x_n, y_n)$. Par convergence uniforme :
$$\begin{aligned} 0 \leqslant \big\|f(t_n) - (x,y)\big\|_\infty &\leqslant \big\|f(t_n) - f_n(t_n)\big\|_\infty + \big\|f_n(t_n) - (x,y)\big\|_\infty \\ &\leqslant \mathcal{N}_\infty(f_n - f) + \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$
   ce qui démontre que $(x,y) \in \overline{f\big([0,1]\big)}$.

   Puisque f est continue et que $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$, l'ensemble $f\big([0,1]\big)$ est un compact de $\mathbb{R}^2$, en particulier il est fermé. Par conséquent, $[0,1]^2 \subset f\big([0,1]\big)$. Puisque $f_n\big([0,1]\big) \subset [0,1]^2$ pour tout n, on obtient par passage à la limite dans les inégalités que $f\big([0,1]\big) \subset [0,1]^2$ et donc que $f\big([0,1]\big) = [0,1]^2$.

10.20 1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$ on a $\big(1-t^2\big)^n \geqslant (1-t)^n$. Par conséquent :
$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \geqslant 2\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{2}{n+1}.$$

(b) Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall t \in [\alpha, 1] \quad 0 \leqslant Q_n(t) \leqslant \frac{(1-\alpha^2)^n}{a_n} \leqslant \frac{n+1}{2}(1-\alpha^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ainsi, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha, 1]$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et notons $Q_n = \sum\limits_{k=0}^{2n} \alpha_k X^k$.

Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En posant le changement de variable $t = x - u$, il vient, en remarquant que f est nulle à l'extérieur de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{-1}^{1} f(x-t) Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x+1} f(u) Q_n(x-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\max\{x-1,-\frac{1}{2}\}}^{\min\{x+1,\frac{1}{2}\}} f(u) Q_n(x-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u) Q_n(x-u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Il s'ensuit par linéarité et la formule du binôme :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u)(x-u)^k\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{k} x^i \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \alpha_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u) u^{k-i}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Cela démontre que la restriction de f_n à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ est une fonction polynomiale.

(b) La fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet elle l'est sur le segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Elle l'est également sur $\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Enfin la continuité de f en $\pm\frac{1}{2}$ permet de conclure.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout (x,y) vérifiant $|x-y| \leqslant \alpha$.

Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Puisque $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - f_n(x) &= \int_{-1}^{1} f(x) Q_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} f(x-t) Q_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \big(f(x) - f(x-t)\big) Q_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \big(f(x) - f(x-t)\big) Q_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{-\alpha} \big(f(x) - f(x-t)\big) Q_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{\alpha}^{1} \big(f(x) - f(x-t)\big) Q_n(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction Q_n étant à valeurs positives et la fonction f bornée :

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f_n(x)\right| &\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha}\left|f(x)-f(x-t)\right|Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{-\alpha}\left|f(x)-f(x-t)\right|Q_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_{\alpha}^{1}\left|f(x)-f(x-t)\right|Q_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \varepsilon\int_{-\alpha}^{\alpha}Q_n(t)\,\mathrm{d}t+2\mathcal{N}_\infty(f)\left(\int_{-1}^{-\alpha}Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{1}Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &\leqslant \varepsilon+2\mathcal{N}_\infty(f)\left(\int_{-1}^{-\alpha}Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{1}Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Puisque la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[\alpha,1]$ et par parité sur $[-1,-\alpha]$, on a :

$$\int_{-1}^{-\alpha}Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{1}Q_n(t)\,\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Par suite, il existe n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$ on a :

$$2\mathcal{N}_\infty(f)\left(\int_{-1}^{-\alpha}Q_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\alpha}^{1}Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\varepsilon.$$

Par conséquent :

$$\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\quad \left|f(x)-f_n(x)\right|\leqslant 2\varepsilon$$

ce qui donne la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

3. Soit $f:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, on peut prolonger f à $\mathbb{R}$ en une fonction continue nulle à l'extérieur de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. L'étude précédente montre que f est limite uniforme sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ d'une suite de fonctions polynomiales.
De manière générale, la fonction :
$$g:x\mapsto f(x)-f(-1/2)-\big(f(1/2)-f(-1/2)\big)(x+1/2)$$
est une fonction continue, nulle en $1/2$ et $-1/2$. Par suite g est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales et puisque f et g diffèrent d'une fonction polynomiale, f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
Dans le cas général, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, la fonction
$$\begin{array}{rccl} g: & \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & f\left(\frac{a+b}{2}+(b-a)t\right)\end{array}$$
est une fonction continue sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Elle est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, la fonction f est limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall x\in[a,n]\quad f_n(x)=g_n\left(\frac{2x-a-b}{2(b-a)}\right).$$

10.21 1. Soit M un majorant de la fonction $t \mapsto e^{-at}\left|f(t)\right|$. Pour tout $x > a$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left|f(t)e^{-xt}\right| = \left|f(t)e^{-xt+at-at}\right| \leqslant Me^{-(x-a)t}.$$

Il s'ensuit que L est bien définie sur $]a, +\infty[$ et que

$$g(t) = f(t)e^{-(a+1)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Posons le changement de variable $t = -\ln(u)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$0 = L(a+x+2) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-(x+1)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{g(-\ln u)}_{h(u)}u^x\,\mathrm{d}u.$$

Puisque $g(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $h(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$. La fonction h se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 = \int_0^1 h(u)\,u^n\,\mathrm{d}u,$$

et par linéarité :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad 0 = \int_0^1 h(u)\,P(u)\,\mathrm{d}u.$$

D'après le théorème de Weierstrass, Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers h. Ainsi :

$$0 = \int_0^1 h(u)P_n(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 h^2(u)\,\mathrm{d}u$$

La fonction h^2 étant continue, positive et d'intégrale nulle sur un intervalle, elle est nulle. Par suite h, puis f sont nulles.

10.22 1. La suite (φ_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = 1/2 \text{ si } x \in]0,1[.$$

En effet, soit $x_0 \in [0,1]$; notons $x_n = \varphi_n(x_0)$.

- Si $x_0 \in]0,1/2]$, on a $x_n \in]0,1/2]$, pour tout n. On vérifie facilement que la suite (x_n) est croissante et majorée par $1/2$; donc elle converge et c'est nécessairement vers un point fixe de f. Le seul candidat possible est dans ce cas $1/2$.
- Si $x_0 \in]1/2,1[$, alors $x_1 \in]0,1/2]$ et l'on est ramené au cas précédent.
- Si $x_0 = 0$ ou 1, on a $x_n = 0$, pour $n \geqslant 1$.

La convergence n'est pas uniforme, car la fonction limite n'est pas continue. Montrons qu'en revanche, la convergence est uniforme sur $[a, 1-a]$, pour tout $a \in]0,1/2[$. On a, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$, $\varphi_n(1-x) = \varphi_n(x)$ et φ_n est croissante sur $[0,1/2]$; on en déduit :

$$\sup_{x\in[a,1-a]} \left|\varphi_n(x) - 1/2\right| = \sup_{x\in[a,1/2]} \big(1/2 - \varphi_n(x)\big) = 1/2 - \varphi_n(a)$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, d'après l'étude de la convergence simple.

Il y a *a fortiori* convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subset]0,1[$.

2. Notons A l'anneau des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Il est clair que $\varphi_n \in A$. Donc la fonction constante $1/2$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions dans A . Par produit, pour tout entier $k \geqslant 1$, la constante $1/2^k$ sur $[a,b]$ est elle-même limite uniforme d'applications toutes dans A. De même, pour $p \in \mathbb{Z}$, la constante $p/2^k$ est limite uniforme sur $[a,b]$ de fonctions de A. La fonction $x \mapsto x^q$ étant bornée sur $[a,b]$, pour tout $q \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{px^q}{2^k}$ est aussi limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions dans A. Par densité dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des réels de la forme $\frac{p}{2^k}$, avec $(p,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, on en déduit que toute fonction de la forme $x \mapsto \lambda x^q$, avec $(\lambda, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions de A.

   L'adhérence de A contient les polynômes donc $\mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$, d'après le théorème de Weierstrass.