# Chapitre 2 : Réduction des endomorphismes

# Réduction des endomorphismes

2

Dans ce chapitre, $E$ est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ (on se limite en pratique au cas où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $u$ est un endomorphisme de $E$.

## I Sous-espaces stables et endomorphismes induits

**Définition 1**

Un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est dit **stable** par $u$ si $u(F) \subset F$.

On dit aussi que $u$ **stabilise** $F$.

**Exemples**

1. Les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et $E$ sont stables par tout endomorphisme. Il existe des endomorphismes pour lesquels il n'y en a pas d'autres. Par exemple, une rotation vectorielle $r$ d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ du plan euclidien.

   En effet, pour tout vecteur $x$ non nul, la droite $\mathbb{R}x$ n'est pas stable car, comme $\theta$ n'est pas multiple entier de $\pi$, $r(x) \notin \operatorname{Vect}(x)$. Ainsi $r$ ne stabilise aucune droite.

2. À l'opposé, une homothétie stabilise tous les sous-espaces vectoriels de $E$.

   Il est évident qu'un endomorphisme stabilise tous les sous-espaces vectoriels de $E$ si, et seulement s'ilstabilise toutes les droites de $E$.

   L'exercice qui suit montre que, réciproquement, cette propriété caractérise les homothéties. Pour cela, on utilise un résultat classique sur les homothéties qui a déjà été vu en première année.

3. Tout sous-espace vectoriel inclus dans le noyau de $u$ ou contenant l'image de $u$ est stable par $u$.

4. L'intersection et la somme de sous-espaces vectoriels stables par $u$ sont stables par $u$.

p.107

**Exercice 1**

1. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que $u$ est une homothétie.
2. En déduire que les seuls endomorphismes stabilisant tous les sous-espaces vectoriels de $E$ sont les homothéties.

p.107

**Exercice 2** Soit $D$ la dérivation de $\mathbb{K}[X]$.

1. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par $D$ et contenant un polynôme $P$ non nul de degré $d$. Montrer que $\mathbb{K}_d[X] \subset F$.
2. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par $D$.

   **Indication** Si $F$ est stable par $D$, on pourra distinguer deux cas, selon que l'ensemble des degrés des polynômes de $F$ est majoré ou non.

**Proposition 1**

Si les endomorphismes $u$ et $v$ commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par $u$.

Démonstration page 108

**Proposition 2**

Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ engendré par une famille $(e_i)_{i\in I}$, alors $F$ est stable par $u$ si, et seulement si :

$$\forall i \in I \quad u(e_i) \in F.$$

Démonstration page 108

**Exemples**

1. Soit $x$ un vecteur non nul de $E$. La droite $\mathbb{K}x$ est donc stable par $u$ si, et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

   Dans ce cas, si $\lambda \neq 0$, c'est-à-dire si $x \notin \operatorname{Ker} u$, alors $u(\mathbb{K}x) = \mathbb{K}x$.
2. Soit $x$ un vecteur de $E$. Le sous-espace vectoriel :

$$\operatorname{Vect}\left\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$$

   est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $x$ et stable par $u$.

   En effet, ce sous-espace vectoriel contient $x$ (car $x = u^0(x)$) et est stable par $u$ (car pour tout entier $k$, $u\big(u^k(x)\big) = u^{k+1}(x)$). De plus, il est évidemment inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant $x$ et stable par $u$.

**Définition 2**

Soit $F$ un sous-espace vectoriel stable par $u$. On appelle **endomorphisme induit** par $u$ sur $F$ l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par :

$$\forall x \in F \quad u_F\,(x) = u\,(x)\,,$$

**Attention** On ne peut parler d'endomorphisme induit par $u$ sur un sous-espace vectoriel $F$ que dans la mesure où $F$ est *stable par* $u$.
Dans ce cas, on distinguera soigneusement l'endomorphisme induit $u_F$, qui est une application linéaire de $F$ vers $F$, de la restriction $u_{|F}$ qui est une application linéaire de $F$ vers $E$.

**Remarque** L'image de $u_F$ est égale à $u(F)$ et son noyau à $F \cap \operatorname{Ker} u$.

p.108

**Exercice 3**

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}_F(E)$ des endomorphismes stabilisant $F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

**Corollaire 3 (Traduction matricielle de la stabilité)**

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ adaptée à $F$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de $F$.
L'endomorphisme $u$ stabilise $F$ si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Dans ce cas, $A$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de l'endomorphisme induit $u_F$.

Démonstration page 108

**Remarques**

- Une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est dite **triangulaire par blocs**. On rappelle que son déterminant est égal au produit $\det A \times \det B$.
- Avec les notations précédentes, notons $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
  - ∗ Le sous-espace vectoriel $G$ est stable par $u$ si, et seulement si, $C = 0$. Dans ce cas $B$ s'interprète comme la matrice de l'endomorphisme induit par $u$ sur $G$ dans la base $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
  - ∗ Lorsque $G$ n'est pas stable par $u$, l'interprétation de $B$ est plus délicate. Notons $q \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur $G$ parallèlement à $F$ ; on peut interpréter $B$ comme la matrice dans la base $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de l'endomorphisme induit par $q \circ u$ sur $G$.

p.108

**Exercice 4** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $E_i = \operatorname{Vect}(e_i)$. Caractériser par leur matrice dans la base $\mathcal{B}$, les endomorphismes de $E$ qui stabilisent chaque $E_i$.
2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $F_i = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$. Caractériser, par leur matrice dans la base $\mathcal{B}$, les endomorphismes de $E$ qui stabilisent chaque $F_i$.

**Proposition 4**

Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ une base adaptée à une décomposition $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} E_i$.

L'endomorphisme $u$ stabilise chaque $E_i$ si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la matrice $A_i$ est carrée d'ordre $\dim E_i$.

Dans ce cas, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $A_i$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}_i$ de l'endomorphisme induit par $u$ sur $E_i$.

Démonstration page 108

# II Éléments propres

## 1 Définition des éléments propres d'un endomorphisme

**Définition 3**

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de $u$ s'il existe un vecteur *non nul* $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$, c'est-à-dire si l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ est non injectif.
2. On dit que $x \in E$ est **vecteur propre** de $u$ **associé à la valeur propre** $\lambda \in \mathbb{K}$ s'il est *non nul* et vérifie $u(x) = \lambda x$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u$, le **sous-espace propre** de $u$ **associé à la valeur propre** $\lambda$ est :

$$E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

**Remarque** Si un vecteur $x$ non nul vérifie $\lambda x = \mu x$, alors $\lambda = \mu$ ; ce qui explique que l'on parle de *la* valeur propre associée à un vecteur propre.

**Définition 4**

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.

**Remarques**

- L'endomorphisme $u$ admet $0$ pour valeur propre si, et seulement s'il n'est pas injectif. Dans ce cas $E_0(u) = \operatorname{Ker} u$.
- Une droite vectorielle est stable par $u$ si, et seulement si, elle est engendrée par un vecteur propre de $u$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u$, les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda$ sont les vecteurs *non nuls* de $E_\lambda(u)$.

- Soit $x$ un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ associé à une valeur propre $\lambda$ *non nulle*. On a alors $x = u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im} u$. Par suite, tout espace propre associé à une valeur propre *non nulle* est inclus dans $\operatorname{Im} u$.

  Par suite, toute somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres **non nulles** est incluse dans $\operatorname{Im} u$.

**Point méthode**

On recherche les éléments propres d'un endomorphisme (valeurs et sous-espaces associés) en étudiant l'équation $u(x) = \lambda x$.

**Exemples**

1. Homothétie. Tout vecteur non nul est vecteur propre de l'homothétie $\lambda \operatorname{Id}_E$ pour la valeur propre $\lambda$. Par suite cette homothétie admet $\lambda$ pour unique valeur propre et l'espace propre associé est $E$.
2. Rotation. Soit $E$ un plan vectoriel euclidien orienté et $u$ une rotation dont l'angle a pour mesure $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ (si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors $u$ est une homothétie).

   Pour tout vecteur $x$ non nul, l'angle $\left(\widehat{x, u(x)}\right)$ n'est pas multiple entier de $\pi$ ; par suite, $u(x) \notin \operatorname{Vect}(x)$. Ainsi $u$ n'a ni valeur propre, ni vecteur propre.
3. Projection. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur avec $p \neq 0$ et $p \neq \operatorname{Id}_E$ (sinon, $p$ est une homothétie).

   Soit $\lambda$ une valeur propre de $p$ et $x$ un vecteur propre associé. On a $p(x) = \lambda x$ puis $p(p(x)) = \lambda p(x)$ donc $p(x) = \lambda p(x)$. Ainsi, soit $p(x) = 0$ soit $\lambda = 1$. Les seules valeurs propres possibles de $p$ sont donc $0$ et $1$.

   Or $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker} p$ sont deux sous-espaces supplémentaires. L'hypothèse $p \neq 0$ et $p \neq \operatorname{Id}_E$ implique qu'ils ne sont pas réduits à $\{0\}$.

   En conclusion, $0$ et $1$ sont les deux valeurs propres de $p$ avec pour sous-espaces propres associés $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Im} p$.
4. Symétries. Soit $F$ et $G$ supplémentaires dans $E$ et $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

   Rappelons que, si $p$ est le projecteur d'image $F$ et de noyau $G$, on a $s = 2p - \operatorname{Id}_E$. Ainsi la relation $s(x) = \lambda x$ équivaut à $p(x) = \dfrac{\lambda+1}{2}\,x$.

   On déduit de ce qui a été prouvé sur les projections que, si $s \neq \pm \operatorname{Id}_E$ (ce qui correspond à $F \neq E$ et $F \neq \{0\}$), alors $s$ admet pour valeurs propres $1$ et $-1$ et que les sous-espaces propres associés sont respectivement $F$ et $G$.

p.109 **Exercice 5** Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathrm{IR}, \mathrm{IR})$ et $D \in \mathcal{L}(E)$ la dérivation.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $D$.

p.109 **Exercice 6** Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'espace des suites complexes.

On définit $\Delta \in \mathcal{L}(E)$ par $\Delta\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1}$.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\Delta$.

p.109 **Exercice 7** Soit $E = \mathbb{C}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(P) = XP$.

Déterminer les valeurs propres de $u$.

p.109 **Exercice 8** Soit $\varphi$ un isomorphisme de $E$ dans $F$ et $u$ un endomorphisme de $E$.

Déterminer les éléments propres de $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ en fonction de ceux de $u$.

**Proposition 5**

Si les endomorphismes $u$ et $v$ commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

**Démonstration.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ ; comme $u$ et $v$ commutent, il en est de même de $(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$ et $v$. D'après la proposition 1 de la page 65, $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par $v$. □

**Proposition 6**

- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de $u$, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

**Principe de démonstration.** Démonstration page 109

- On procède par récurrence sur l'entier $p$.
- On utilise le premier point.

**Exemples**

1. En reprenant l'exercice 5 de la page précédente, on voit que, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels deux à deux distincts, la famille de fonctions $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on a noté $e_\lambda$ la fonction définie par $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$).

   Ainsi, la famille $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre.
2. En reprenant l'exercice 6, on voit que, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des complexes deux à deux distincts, la famille de suites $\big((\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (\lambda_p^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

   Ainsi, la famille $\Big((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ est libre.

p.110 **Exercice 9** Soit $E = \mathcal{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}_{+}^{*}, \mathbb{R}\right)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$u(f) = g \qquad \text{où} \qquad \forall t > 0 \quad g(t) = t f'(t).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons $f_\alpha$ la fonction définie par $f_\alpha(t) = t^\alpha$.

Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

**Corollaire 7**

Si $E$ est de dimension finie et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de $u$, alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) \leqslant \dim E$$

**Corollaire 8**

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n$ a au plus $n$ valeurs propres distinctes.

Démonstration page 110

**Proposition 9**

Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, les valeurs propres de l'endomorphisme $u_F$ induit par $u$ sur $F$ sont les valeurs propres $\lambda$ de $u$ telles que $E_\lambda(u) \cap F \neq \{0\}$. On a alors :

$$E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F.$$

**Démonstration.** Par définition $E_\lambda(u_F) = \{x \in F \mid u_F(x) = \lambda x\}$ donc :

$$E_\lambda(u_F) = \{x \in F \mid u(x) = \lambda x\} = F \cap E_\lambda(u).$$ □

## 2 Rappels sur les matrices semblables

Dans cette partie, $E$ est supposé de dimension finie $n$.

Les résultats rappelés ont été vus en première année ; leurs démonstrations ne seront donc pas redonnées.

**Proposition 10**

Si $f$ est un endomorphisme de $E$ et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $E$, alors les matrices $M$ et $M'$ de $f$ respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont reliées par :

$$M' = P^{-1} M P,$$

où $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

**Définition 5**

Deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

**Proposition 11**

Deux matrices $M$ et $M'$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ c'est-à-dire s'il existe $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{K}^n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ telles que :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \qquad \text{et} \qquad M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f).$$

**Proposition 12**

Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant

p.110

**Exercice 10** Soit $M$ et $M'$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire telles qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $M' = P^{-1}MP$.

Montrer que $M$ et $M'$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $M' = Q^{-1}MQ$.

**Remarques**

- Soit $A$ la matrice représentant l'endomorphisme $u$ dans une base $\mathcal{B}$.

  Un vecteur $x$ de $E$, dont $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$, est un vecteur propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda$ si, et seulement si, $X$ est non nulle et vérifie $AX = \lambda X$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$, c'est-à-dire :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

  (on identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

  Un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda$ si, et seulement si, $X$ est non nul et vérifie $AX = \lambda X$.

Cela justifie les définitions qui suivent.

## 3 Éléments propres d'une matrice carrée

**Définition 6**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de $A$ s'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *non nulle* telle que $AX = \lambda X$.
2. On dit que la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est **vecteur propre** de $A$ **associé à la valeur propre** $\lambda \in \mathbb{K}$ si elle est *non nulle* et vérifie $AX = \lambda X$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $A$, le **sous-espace propre** de $A$ **associé à la valeur propre** $\lambda$ est :

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}$$

4. L'ensemble des valeurs propres de $A$ est appelé le **spectre** de $A$ et noté $\mathrm{sp}\,(A)$.

**Remarque** Le scalaire $\lambda$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $A - \lambda I_n$ est non inversible. De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim E_\lambda(A) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n).$$

p.111

**Exercice 11**

1. Déterminer les éléments propres propres de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
   Déterminer les éléments propres propres de la matrice $A = \alpha J + \beta I_n$.

**Remarque** En sciences industrielles, on utilise des matrices d'inductance qui relient flux magnétique et intensité.

Lorsque celle-ci est de la forme $\begin{pmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{pmatrix}$, elle admet, d'après l'exercice précédents, deux valeurs propres $L - M$ et $L + 2M$.

**Point méthode**

On peut rechercher les éléments propres d'une matrice en étudiant l'équation $AX = \lambda X$.

On verra, à l'aide du polynôme caractéristique, une méthode qui permet d'obtenir les valeurs propres d'une matrice sans résolution de systèmes.

**Remarque** Les éléments propres d'une matrice $A$ sont ceux de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui à une matrice colonne $X$ associe $AX$.

**Proposition 13**

Soit $A$ une matrice représentant l'endomorphisme $u$ dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$. On a alors $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(u)$ et, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E_\lambda(u) \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A).$$

**Démonstration.** On utilise l'exercice 8 de la page 69 avec :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

□

**Corollaire 14**

Deux matrices semblables ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension.

**Remarque** Plus précisément, si $A = P^{-1}BP$, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ :

$$E_\lambda(A) = \{P^{-1}X\ ;\ X \in E_\lambda(B)\}.$$

**Attention** Lorsque $A$ est une matrice à coefficients réels, on peut considérer que $A$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- On obtient dans le premier cas, les éléments propres réels, dans le second, les éléments propres complexes de $A$.
- On distinguera donc le spectre réel de $A$, noté $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et formé des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible, du spectre complexe, $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$, de cette matrice. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant inversible dans cette algèbre si, et seulement si, elle l'est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (grâce aux déterminants), on a :

$$\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{R}.$$

**Exemple** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$ mais on a :

$$\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}.$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

**Proposition 15**

Soit $\mathbb{K}'$ un sous-corps du corps $\mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$. Alors le spectre de $A$ dans $\mathbb{K}'$ est inclus dans le spectre de $A$ dans $\mathbb{K}$.

Démonstration page 111

**Proposition 16**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de $A$ et :

$$X \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow \overline{X} \in E_{\overline{\lambda}}(A)$$

Plus précisément, si $(X_1, \dots, X_k)$ est une base de $E_\lambda(A)$ alors $\left(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_k}\right)$ est une base de $E_{\overline{\lambda}}(A)$ donc $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$.

**Principe de démonstration.** On prouve que, si $(X_1, \dots, X_k)$ est une base de $E_\lambda(A)$, alors la famille $\left(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_k}\right)$ est libre et composée de vecteurs propres de $A$ pour la valeur propre $\overline{\lambda}$. On en déduit $\dim E_\lambda(A) \leqslant \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$ puis l'égalité.

Démonstration page 111

**Remarque**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

Si l'on considère $A$ comme une matrice réelle, alors le sous-espace propre associé est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E_\lambda^{\mathbb{R}}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

Si l'on considère $A$ comme une matrice complexe, alors le sous-espace propre associé est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_\lambda^{\mathbb{C}}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid AX = \lambda X\}$.

Dans les deux cas, le sous-espace propre est le noyau de l'application linéaire $X \mapsto (A - \lambda I_n) X$.

Le théorème du rang donne donc $\dim_{\mathbb{K}} E_\lambda^{\mathbb{K}}(A) = n - \mathrm{rg}_{\mathbb{K}}(A - \lambda I_n)$. Comme le rang d'une matrice réelle est le même qu'on la considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (il est caractérisé par la plus grande taille des matrices carrées extraites de déterminant non nul), on en déduit que la dimension du sous-espace propre ne change pas suivant que l'on considère $A$ comme une matrice réelle ou comme une matrice complexe.

## 4 Polynômes annulateurs

Dans le chapitre précédent, consacré en particulier à la structure d'algèbres, nous avons étudié la substitution polynomiale et les polynômes annulateurs (voir à partir de la page 31). Dans un souci d'unification des deux cas qui se

présentent ici, nous avons défini la substitution polynomiale et les polynômes annulateurs dans le cadre plus général d'une $\mathbb{K}$-algèbre. Étant donnée l'importance de ces notions dans le cas de ce chapitre consacré à la réduction, nous reprenons ici, intégralement, ces notions pour les endomorphismes et des matrices carrées.
On définit les itérés de $u \in \mathcal{L}(E)$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante : $u^0 = \mathrm{Id}_E$, puis, pour $k \geqslant 1$, $u^k = u^{k-1} \circ u$, c'est-à-dire :

$$u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$

On en déduit facilement (par récurrence) :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \quad u^k \circ u^\ell = u^\ell \circ u^k = u^{k+\ell}.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit de même les puissances de $A$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ : $A^0 = I_n$, puis, pour $k \geqslant 1$, $A^k = A^{k-1} \times A$, c'est-à-dire :

$$A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

On a également :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \quad A^k A^\ell = A^\ell A^k = A^{k+\ell}.$$

**Définition 7**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On note $P(u)$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit de même la matrice $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k.$$

On appelle polynôme en $u$ (respectivement en $A$) tout endomorphisme (respectivement toute matrice) de la forme $P(u)$ (respectivement $P(A)$) avec $P \in \mathbb{K}[X]$

**Notation** L'ensemble des polynômes en $u \in \mathcal{L}(E)$ est noté $\mathbb{K}[u]$.
L'ensemble des polynômes en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathbb{K}[A]$.

**Proposition 17**

Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

En particulier, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ sont des sous-espaces stables par $u$.

**Démonstration.** Le fait que pour tout couple d'entiers $(k,\ell)$, les endomorphismes $u^k$ et $u^\ell$ commutent, permet d'obtenir l'égalité $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

Il suffit alors d'appliquer la proposition 1 de la page 65 à $v = P(u)$ qui commute avec $u$. □

**Proposition 18**

1. Si $x \in E_\lambda(u)$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
2. En particulier, si $\lambda$ est valeur propre de $u$, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ et tout vecteur propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda$ est vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

Démonstration page 112

**Corollaire 19**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si $X \in E_\lambda(A)$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $P(A)X = P(\lambda)X$.
2. En particulier, si $\lambda$ est valeur propre de $A$, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$ et tout vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ est vecteur propre de $P(A)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

**Définition 8**

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un **polynôme annulateur** de $u$, s'il vérifie $P(u) = 0$.

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un **polynôme annulateur** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il vérifie $P(A) = 0$.

**Exemples**

1. Si $p$ est un projecteur, alors $p^2 = p$ donc le polynôme $X^2 - X$ annule $p$.
2. Si $s$ est une symétrie, alors $s^2 = \mathrm{Id}$ donc le polynôme $X^2 - 1$ annule $s$.

**Proposition 20**

Si $P$ est un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors toute valeur propre de $u$ est racine de $P$.

**Démonstration.** D'après la proposition 18, si $\lambda$ est valeur propre de $u$, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de l'endomorphisme nul $P(u)$ donc $P(\lambda) = 0$. □

**Exemple**
On retrouve le fait que si $p$ est un projecteur alors $\mathrm{sp}(p) \subset \{0,1\}$ et si $s$ est un symétrie alors $\mathrm{sp}(s) \subset \{-1,1\}$.

**Attention** Lorsqu'on dispose d'un polynôme annulateur $P$ de $u \in \mathcal{L}(E)$, on peut dire que toutes les valeurs propres de $u$ sont racines de $P$, mais certaines racines de $P$ peuvent ne pas être valeurs propres de $u$.
Ainsi, le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de $\mathrm{Id}_E$, alors que $0$ n'est pas valeur propre de $\mathrm{Id}_E$.

**Corollaire 21**
Si $P$ est un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors toute valeur propre de $A$ est racine de $P$.

**Corollaire 22**
Si $P$ est un polynôme annulateur de $u$ tel que $P(0) \neq 0$ et si $E$ est de dimension finie, alors $u$ est bijectif.

**Démonstration.** D'après la proposition précédente, $0$ n'est pas valeur propre de $u$. L'endomorphisme $u$ est donc injectif. Comme $E$ est de dimension finie, on en déduit que $u$ est bijectif. □

**Corollaire 23**
Si $P$ est un polynôme annulateur de $A$ et si $P(0) \neq 0$, alors $A$ est inversible.

**Exemple** Si $u$ vérifie $u^4 + u + \mathrm{Id} = 0$, alors $u$ est inversible. Plus précisément, on a $u^{-1} = -u^3 - \mathrm{Id}$ car $u \circ \left(-u^3 - \mathrm{Id}\right) = \mathrm{Id}$.
Plus généralement, soit $P$ est un polynôme annulateur de $u$. Il existe un polynôme $Q$ tel que $P - P(0) = XQ$. On a donc $u \circ Q(u) = Q(u) \circ u = -P(0)\,\mathrm{Id}$.
Ainsi, si $P(0) \neq 0$, alors $u^{-1} = \frac{-1}{P(0)} Q(u)$.

**Point méthode**

La connaissance d'un polynôme annulateur de $u$ permet aussi le calcul rapide des puissances de $u$.

En effet, si $P$ annule $u$ et si $R$ est le reste de la division euclidienne de $X^p$ par $P$, alors $u^p = R(u)$.

L'utilisation de cette remarque nécessite de connaître un polynôme annulateur de $u$ suffisamment « simple » pour pouvoir déterminer $R$.

p.112 **Exercice 12** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 10 & -4 \\ -8 & 16 & -6 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme $P$ unitaire de degré 2 tel que $P(A) = 0$.
2. En déduire que $A$ est inversible.
3. Pour tout entier $n$ déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P$.
4. En déduire $A^n$, pour tout entier naturel $n$.

# 5 Polynôme caractéristique

## Polynôme caractéristique d'une matrice

Par définition, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, la matrice $A - \lambda I_n$ est non inversible donc si, et seulement si, $\det(\lambda I_n - A) = 0$. L'expression $\det(\lambda I_n - A)$ étant polynomiale en $\lambda$, on introduit le polynôme associé.

**Définition 9**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de $A$ et on note $\chi_A(X)$ l'unique polynôme tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \chi_\lambda(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Par abus, on note $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$

### Remarques

- Il s'agit d'un léger abus. En effet, on a défini uniquement le déterminant d'une matrice à coefficients dans le corps des complexes. Pour pouvoir parler du polynôme $\det(XI_n - A)$, il faudrait avoir défini le déterminant d'une matrice à coefficients dans le corps des fractions rationnelles (ce qui ne pose pas plus de difficultés).
- Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est identique que l'on considère $A$ comme une matrice réelle ou comme une matrice complexe.

**Théorème 24**

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A$ si, et seulement s'il est une racine du polynôme caractéristique de $A$.

**Démonstration.** Un scalaire $\lambda$ est valeur propre de $A$ si, et seulement si, $A - \lambda I_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ c'est-à-dire si, et seulement si, $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Comme $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$, on en déduit le résultat. $\square$

**Proposition 25**

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire de diagonale $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, alors son polynôme caractéristique est égal à $\prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$ et $\mathrm{sp}(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

**Point méthode**

Le théorème précédent montre l'importance pratique d'obtenir le polynôme caractéristique sous forme factorisée. On réalise dans les cas concrets cet objectif en calculant le déterminant $\det(XI_n - A)$ par opérations élémentaires afin de faire apparaître des facteurs communs dans les lignes ou les colonnes.

**Exemple** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de $A$ est donné par :

$$\chi_A(X) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3-X & 5 & -6 \\ 4 & 7-X & -9 \\ 3 & 6 & -7-X \end{vmatrix}.$$

La somme des coefficients des colonnes du déterminant ci-dessus étant $2 - X$, l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ montre qu'on a :

$$\chi_A(X) = -\begin{vmatrix} 2-X & 5 & -6 \\ 2-X & 7-X & -9 \\ 2-X & 6 & -7-X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 1 & 7-X & -9 \\ 1 & 6 & -7-X \end{vmatrix}.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ conduisent alors à :

$$\chi_A(X) = (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 2-X & -3 \\ 0 & 1 & -X-1 \end{vmatrix} = (X-2)\left(X^2 - X + 1\right).$$

Le spectre de $A$ est donc $\{2, -j, -j^2\}$ dans $\mathbb{C}$ et seulement $\{2\}$ dans $\mathbb{R}$.

p.112 **Exercice 13** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de $A$. Déterminer son spectre dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

**Remarque** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\chi_{\overline{A}} = \overline{\chi_A}$ donc on retrouve le résultat de la proposition 16 :

$$\lambda \in \mathrm{sp}\left(\overline{A}\right) \iff \overline{\lambda} \in \mathrm{sp}(A)$$

p.112 **Exercice 14** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A$ et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.

**Corollaire 26**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $A$ a au moins une valeur propre.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $n$ est impair, alors $A$ a au moins une valeur propre.

**Démonstration.** On utilise le résultat précédent et le fait :

- qu'un polynôme non constant à coefficients complexes possède au mois une racine complexe (théorème de d'Alembert-Gauss),
- qu'un polynôme à coefficient réel de degré impair possède au moins une racine (théorème des valeurs intermédiaires). □

**Attention** Comme le montre l'exemple de la page 74, une matrice réelle n'admet pas nécessairement de valeur propre réelle.

**Proposition 27**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son polynôme caractéristique $\chi_A$ est un polynôme unitaire de degré $n$ et l'on a :

$$\chi_A(X) = X^n - (\operatorname{Tr} A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A.$$

**Principe de démonstration.** On utilise le développement complet d'un déterminant.

Rappelons que, si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : Démonstration page 113

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

**Remarque** On retrouve le fait qu'une matrice carrée de taille $n$ a au plus $n$ valeurs propres distinctes.

**Exemples**

1. Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est :

$$X^2 - (\operatorname{Tr} A)\, X + \det A = X^2 - (\alpha + \delta)\, X + (\alpha\delta - \beta\gamma).$$

2. Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est :

$$X^3 - \operatorname{Tr}(A) X^2 + \big((\alpha\beta' - \alpha'\beta) + (\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma) + (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')\big) X - \det A.$$

On remarquera que le coefficient de $X$ est la trace de la comatrice de $A$.

3. Si $M$ est matrice triangulaire supérieure par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, alors son polynôme caractéristique est donné par :

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} XI_p - A & -C \\ 0 & XI_q - D \end{vmatrix} = \chi_A(X)\chi_D(X).$$

Ce résultat se généralise à toute matrice triangulaire par blocs.

p.113

**Exercice 15** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A$.

p.113

**Exercice 16** Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $C$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

est le produit des polynômes caractéristiques de $A+B$ et $A-B$.

p.113

**Exercice 17 Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon**

Soit $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$.

Montrer que $\chi_A(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

**Indication** En notant $L_0, \ldots, L_{p-1}$ les lignes de la matrice $XI_p - A$, on pourra effectuer l'opération $L_0 \leftarrow L_0 + XL_1 + \cdots + X^{p-1}L_{p-1}$.

### Remarques

- On peut également prouver ce résultat par récurrence en développant par rapport à la première ligne.
- La matrice $A$ de l'exercice précédent est appelée **matrice compagnon** du polynôme $P$. Elle intervient souvent dans les exercices et problèmes. Nous la retrouverons dans l'exercice 33 de la page 98.

## Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

On suppose dans ce paragraphe que $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle.

**Lemme 28**

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

**Démonstration.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. En utilisant les propriétés des déterminants, on a pour tout scalaire $\lambda$ :

$$\chi_{PAP^{-1}}(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - PAP^{-1}\right) = \det\left(P\left(\lambda I_n - A\right)P^{-1}\right) = \det\left(\lambda I_n - A\right) = \chi_A(\lambda). \quad \square$$

Le fait que deux matrices semblables aient le même polynôme caractéristique, c'est-à-dire que deux matrices représentant le même endomorphisme aient le même polynôme caractéristique, justifie la définition suivante.

**Définition 10**

On appelle **polynôme caractéristique** de l'endomorphisme $u$ et l'on note $\chi_u$, le polynôme caractéristique de toute matrice représentant $u$.

On a donc, pour tout scalaire $\lambda$, $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id}_E - u)$.

**Remarques**

- La notion de polynôme caractéristique d'un endomorphisme n'a donc aucun sens si $E$ n'est pas de dimension finie.
- Si $u$ est l'endomorphisme canoniquement associé à $A$, alors $\chi_u = \chi_A$.

**Proposition 29**

Le polynôme $\chi_u$ est unitaire, de degré $n$ et l'on a :

$$\chi_u(X) = X^n - (\operatorname{Tr} u)\ X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u.$$

p.114 **Exercice 18** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang $1$. Exprimer $\chi_u$ à l'aide de $\operatorname{Tr} u$.

**Indication** On pourra utiliser une base adaptée au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} u$.

**Théorème 30**

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $u$ si, et seulement si, c'est une racine du polynôme caractéristique de $u$.

**Démonstration.** Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre si, et seulement si, $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas inversible c'est-à-dire :

$$\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id}_E - u) = 0.$$ □

**Remarque** On retrouve le fait qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n$ a au plus $n$ valeurs propres distinctes.

**Corollaire 31**

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $u$ a au moins une valeur propre.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\dim E$ est impair, alors $u$ a au moins une valeur propre.

**Attention** Comme le montre l'exercice 7 de la page 69, en dimension infinie, un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel n'admet pas nécessairement de valeur propre.

**Proposition 32**

Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, alors le polynôme caractéristique, $\chi_{u_F}$, de l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$ divise $\chi_u$.

**Principe de démonstration.** Calculer le polynôme caractéristique de la matrice de $u$ dans une base adaptée à $F$ (base de $F$ complétée en une base de $E$).

Démonstration page 114

### Remarques

- En particulier, on a l'inclusion $\mathrm{sp}\,(u_F) \subset \mathrm{sp}\,u$.
- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u$ stabilisant les sous-espaces vectoriels d'une décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ est :

$$\chi_u(X) = \chi_{u_1}(X) \cdots \chi_{u_p}(X),$$

où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_i$ est l'endomorphisme induit par $u$ sur $E_i$.

En effet, si $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une base adaptée à la somme directe considérée, la matrice de $u$ dans cette base est une matrice diagonale par blocs dont le $i$-ème bloc diagonal est la matrice de $u_i$ dans la base $\mathcal{B}_i$ de $E_i$.

**Proposition 33**

Si le polynôme caractéristique de $u$ est scindé (respectivement scindé à racines simples), alors celui de l'endomorphisme induit par $u$ sur tout sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$ l'est aussi.

Démonstration page 114

### Ordre de multiplicité d'une valeur propre

**Définition 11**

On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre $\lambda$ de $u$ (respectivement de $A$), son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de $u$ (respectivement de $A$).

**Remarque** En particulier, une valeur propre de $u$ est dite simple, double, triple, ... si c'est une racine simple, double, triple, ... du polynôme caractéristique de $u$.

**Notation** L'ordre de multiplicité d'une valeur propre $\lambda$ sera noté $m(\lambda)$.

**Attention** La notion d'ordre de multiplicité, tout comme celle de polynôme caractéristique, n'a pas de sens en dimension infinie.

**Remarque** D'après la remarque de la page 74, la multiplicité d'une valeur propre réelle d'une matrice réelle ne change pas si l'on considère $A$ comme une matrice réelle ou comme une matrice complexe.

**Proposition 34**

Pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, on a :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda).$$

**Principe de démonstration.** On utilise la stabilité par $u$ de $E_\lambda(u)$ et la proposition 32 de la page précédente. Démonstration page 114

**Exemples**

1. Si $u$ est de rang $r$, le polynôme $\chi_u(X)$ est divisible par $X^{n-r}$, puisque le noyau $\mathrm{Ker}\, u = E_0(u)$ est de dimension $n - r$.
2. En particulier, si l'on considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix},$$

qui est de rang inférieur ou égal à $2$, il existe des scalaires $a$ et $b$ tels que :

$$\chi_A(X) = X^{n-2}\left(X^2 + aX + b\right).$$

Le coefficient $a$, égal à l'opposé de la trace de $A$, est nul.

Pour obtenir le coefficient $b$, on peut procéder par récurrence.

Pour $n = 2$, on obtient $b = -\alpha_1^2$.

Posons $\det \begin{vmatrix} X & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & X & -\alpha_1 \\ -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 & X \end{vmatrix} = X^{n-2}\left(X^2 + b_n\right)$ et :

$$\det \begin{vmatrix} X & \dots & 0 & -\alpha_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & X & -\alpha_1 \\ -\alpha_n & \dots & -\alpha_1 & X \end{vmatrix} = X^{n-1}\left(X^2 + b_{n+1}\right)$$

En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\det \begin{vmatrix} X & \dots & 0 & -\alpha_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & X & -\alpha_1 \\ -\alpha_n & \dots & -\alpha_1 & X \end{vmatrix} = X^{n-1}\left(X^2 + a_n X + b_n\right) - \alpha_n^2 X^{n-1}$$

donc $b_{n+1} = b_n - \alpha_n^2$.

On en déduit que pour tout entier $n$ $b_n = -\sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2$.

On peut également obtenir ce résultat en utilisant le développement complet du déterminant :

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma \quad \text{avec} \quad P_\sigma = \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(X\delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i}\right).$$

- Si $\sigma$ laisse invariants au plus $n-3$ entiers de $[\![1, n]\!]$, alors on a $\deg(P_\sigma) \leqslant n-3$.
- Si $\sigma$ laisse invariants au moins $n-1$ entiers de $[\![1, n]\!]$, alors, comme c'est une bijection, on a $\sigma = \mathrm{Id}$ et $P_\sigma = X^n$.
- Si $\sigma$ laisse invariants exactement $n-2$ entiers de $[\![1, n]\!]$, alors $\sigma$ est une transposition $\tau_{i,j}$ $(i \neq j)$ et $P_\sigma = -a_{j,i}a_{i,j}X^{n-2}$.
  Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$, on a $a_{j,i} = a_{i,j} = 0$, donc $P_\sigma = 0$.
  Pour $i = n$ et $j \leqslant n-1$, on obtient $P_\sigma = -\alpha_j^2 X^{n-2}$.

Il vient alors $b = -\sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2$. En conclusion $\chi_A(X) = X^n - X^{n-2}\sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2$.

**Corollaire 35**

Si $\lambda$ est valeur propre simple de $u$, alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate de la proposition 34 de la page ci-contre $\square$

**Remarque** Le spectre de $u$ est, par définition, l'ensemble des racines de $\chi_u$ dans $\mathbb{K}$. Comme dans le cas des polynômes, on distinguera soigneusement les notions d'ensemble et de liste des valeurs propres de $u$.

- L'ensemble des valeurs propres est le spectre de $u$. S'il est égal à $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ distincts deux à deux, alors on a :
$$\chi_u(X) = Q(X)\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m(\lambda_i)}$$
  où $Q \in \mathbb{K}[X]$ n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.
- Une liste des valeurs propres est une famille de scalaires répétant les valeurs propres avec leurs multiplicités. Une telle liste est unique à l'ordre près et si $(\mu_1, \ldots, \mu_s)$ est en est une, alors on a :
$$\chi_u(X) = Q(X)\prod_{i=1}^{s}(X-\mu_i)$$
  où $Q \in \mathbb{K}[X]$ n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.
- Bien sûr, la liste $(\mu_1, \ldots, \mu_s)$ est à l'ordre près formée des $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ répétés autant de fois que leur multiplicité, c'est-à-dire :
$$(\mu_1, \ldots, \mu_s) = (\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m(\lambda_1)\text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_p, \ldots, \lambda_p}_{m(\lambda_p)\text{ fois}}).$$
  On a donc :
$$s = m(\lambda_1) + \cdots + m(\lambda_p).$$
- Si $\chi_u$ est scindé, alors on a $s = n$ et :
$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m(\lambda_k)} = \prod_{i=1}^{n}(X-\mu_i).$$

**Proposition 36**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$, tel que $\chi_u$ soit scindé.

- Si $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est une liste de valeurs propres de $u$, alors :
$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$
- Si $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ distincts deux à deux, alors :
$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{p} m(\lambda_i)\, \lambda_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m(\lambda_i)}.$$

Démonstration page 114

**Exemples**

1. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie a un polynôme caractéristique scindé puisque tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ l'est.
2. Il existe des endomorphismes d'espace vectoriel réel de dimension finie dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé.

   Par exemple, la rotation d'angle $\theta \neq 0 \mod \pi$ du plan vectoriel euclidien orienté a pour matrice :
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
   dans une (toute) base orthonormée directe et a pour polynôme caractéristique :
$$X^2 - 2X\cos\theta + 1,$$
   qui n'est pas scindé.

# III Endomorphismes et matrices diagonalisables

On rappelle que $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle.

**Définition 12**

- Un endomorphisme $u$ est dit **diagonalisable** s'il existe une base de $E$ dans laquelle sa matrice est diagonale.
- Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

**Proposition 37**

Un endomorphisme $u$ de $E$ est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$.

Démonstration page 115

**Remarques**

- Une base dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale s'appelle une **base de diagonalisation** de $u$.
- Une base de diagonalisation de $u \in \mathcal{L}(E)$ est donc une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$.

p.115

**Exercice 19** Soit $D_n \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}_n[X]\right)$ avec $n \geqslant 1$, défini par $D_n\left(P\right) = P'$.

L'endomorphisme $D$ est-il diagonalisable ?

p.115

**Exercice 20** Soit $f \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)\big)$ défini par $f\left(A\right) = A + \operatorname{Tr}\left(A\right) I_n$.

L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

**Proposition 38**

Les projecteurs et les symétries de $E$ sont diagonalisables.

Démonstration page 115

**Remarque** On verra plus tard qu'il y a plus rapide. En effet, d'après le théorème 60 de la page 103, un endomorphisme annulant un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable.

**Proposition 39**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant un endomorphisme $u$.

La matrice $A$ est alors diagonalisable si, et seulement si, $u$ est diagonalisable.

**Démonstration.** C'est une conséquence directe de la définition 12 de la page ci-contre. □

**Corollaire 40**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

**Remarque** Soit $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ diagonalisable et $P \in \mathcal{GL}_n\left(\mathbb{K}\right)$ la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de $A$. D'après l'effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ dans la base $\mathcal{B}$ est égale à $P^{-1}AP$. Cette dernière matrice est donc diagonale.

**Point méthode**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $(E_1, \ldots, E_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de $A$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Si on pose $P = (E_1, \ldots, E_n)$, alors :

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

p.115 **Exercice 21** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Si c'est le cas, fournir une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

La proposition suivante permet de déterminer si un endomorphisme est diagonalisable sans déterminer explicitement ses espaces propres mais en en connaissant simplement la dimension.

**Proposition 41**

Si $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ distincts deux à deux, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(i)$ l'endomorphisme $u$ est diagonalisable,

$(ii)$ $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E$,

$(iii)$ $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E$.

Démonstration page 116

**Corollaire 42**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ distincts deux à deux. Il y a équivalence entre :

$(i)$ la matrice $A$ est diagonalisable,

$(ii)$ $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$(iii)$ $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(A) = n$.

**Exemples**

1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet $\lambda$ pour unique valeur propre, $u$ est diagonalisable si, et seulement si, le sous-espace propre associé est égal à $E$, c'est-à-dire si, et seulement si, $u = \lambda \,\mathrm{Id}_E$.

   De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet $\lambda$ pour unique valeur propre, elle est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est égal à $\lambda \,\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $A = \lambda I_n$.

2. En particulier un endomorphisme $u$ vérifiant $u^p = 0$ n'est diagonalisable que s'il est nul. En effet, d'après la proposition 20 de la page 76, il est annulé par le polynôme $X^p$ donc il admet au plus une valeur propre : 0. Un tel endomorphisme est dit **nilpotent**.

   L'étude de ces endomorphismes sera détaillée plus tard.
3. De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire de termes diagonaux tous égaux à $\lambda$, alors son polynôme caractéristique est égal à $(X - \lambda)^n$, d'après la proposition 25 de la page 79. La matrice $A$ admet donc $\lambda$ pour valeur propre d'ordre $n$ ; elle n'est donc diagonalisable que si $A = \lambda I_n$.

### Remarques

- Si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \subset \mathrm{sp}(u)$ et si $\sum\limits_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E$, alors

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} = \mathrm{sp}(u) \qquad \text{et} \qquad E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}.$$

- Supposons que $u$ soit diagonalisable de spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Nous avons alors la décomposition en somme directe :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(u).$$

  Si l'on note $(p_{\lambda_1}, \ldots, p_{\lambda_r})$ la famille des projecteurs associés ; alors les endomorphismes $u$ et $\lambda_1 p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r p_{\lambda_r}$ coïncident sur chaque $E_{\lambda_i}$ donc :

$$u = \lambda_1 p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r p_{\lambda_r}.$$

  Ainsi, dans toute base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe précédente, la matrice de $u$ est diagonale par blocs de la forme :

$$\mathrm{Diag}\,(D_1, \ldots, D_r)$$

  où $D_k$ est la matrice scalaire de dimension $\dim E_{\lambda_k}(u)$ de rapport $\lambda_k$.

**Exemple** Soit la matrice complexe :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que son polynôme caractéristique vaut $X^2(X^2 - kX - 3)$.
Comme $A$ est de rang 2, le sous espace-propre associé à $0$ est de dimension $2$.
Si $k$ vérifie $k^2 + 12 \neq 0$, le trinôme $X^2 - kX - 3$ à deux racines $\lambda_1$ et $\lambda_2$ distinctes non nulles. Les sous-espaces vectoriels propres associés étant de dimension supérieure ou égale à 1, la matrice $A$ est diagonalisable.

Si $k$ est égal à $\pm 2i\sqrt{3}$, le trinôme $X^2 - kX - 3$ à une seule racine $\lambda = \dfrac{k}{2}\cdot$
Le sous-espace propre associé est obtenu en résolvant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -\lambda x + y & = & 0 \\ x + \lambda y + z + t & = & 0 \\ y - \lambda z & = & 0 \\ y - \lambda t & = & 0 \end{array}\right.$$

Il est donc de dimension 1 engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La dimension de la somme des sous-espaces vectoriels propres valant 3, la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.

**Corollaire 43**

Si $u$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n$ et possède $n$ valeurs propres distinctes c'est-à-dire si $\chi_u$ est est scindé à racines simples, alors $u$ est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension $1$.

De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède $n$ valeurs propres distinctes alors $A$ est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension $1$ .

Démonstration page 117

p.117 **Exercice 22** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

**Attention** Il faut bien noter que le résultat précédent ne fournit qu'une condition *suffisante* pour que $u$ soit diagonalisable comme le montre l'exercice 20 de la page 87.
Le théorème qui suit donne une condition nécessaire et suffisante.

**Théorème 44**

Pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

- son polynôme caractéristique $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ ;
- pour toute valeur propre de $u$, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda).$$

**Principe de démonstration.** Utiliser les propositions 41 de la page 88 et 34 de la page 84.

Démonstration page 117

**Remarque**

Pour toute valeur propre simple $\lambda$, on a toujours $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$ car :

$$E_\lambda(u) \neq \{0\} \qquad \text{et} \qquad \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda) = 1.$$

**Corollaire 45**

Pour que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- son polynôme caractéristique $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$ ;
- pour toute valeur propre de $A$, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \operatorname{sp}(A) \quad \dim E_\lambda(A) = m(\lambda).$$

**Point méthode**

Pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

- son polynôme caractéristique $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ ;
- pour toute valeur propre *multiple* de $u$, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre.

On a un résultat similaire pour les matrices.

p.117 **Exercice 23** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ pour que la matrice $A$ soit diagonalisable.

**Remarque** Il n'est pas toujours nécessaire de calculer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme pour savoir s'il est diagonalisable comme le montre l'exercice 20 de la page 87 ou l'exemple suivant.

**Exemple** Soit $n$ un entier.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, $v \ : P \mapsto \left(1 - X^2\right) P' + nXP$.

Il stabilise le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, $v(1) = nX$, $v(X^n) = nX^{n-1}$ et, pour tout $k$ de $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$$v(X^k) = (n-k)\, X^{k+1} + kX^{k-1} \in \mathbb{R}_n[X].$$

Considérons alors l'endomorphisme $u$ induit par $v$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

La matrice de $u$ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique ne paraissant pas facile à calculer, on peut rechercher les valeurs propres de $u$ directement.
Un polynôme $P$ non nul de $\mathbb{R}_n[X]$ est un vecteur propre de $u$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left(1 - X^2\right) P' + nXP = \lambda P,$$

soit :

$$\frac{P'}{P} = \frac{nX - \lambda}{X^2 - 1} = \frac{n - \lambda}{2\,(X-1)} + \frac{n+\lambda}{2\,(X+1)}$$

dans $\mathbb{R}(X)$. Si la factorisation de $P$ sur $\mathbb{C}$ est $C \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{n_k}$, on a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{X - \alpha_k}.$$

Ainsi, si $P$ est un vecteur propre associé à un réel $\lambda$, alors, par unicité de la décomposition en éléments simples, $\frac{n-\lambda}{2}$ et $\frac{n+\lambda}{2}$ sont des entiers naturels et :

$$P = C(X-1)^{\frac{n-\lambda}{2}}(X+1)^{\frac{n+\lambda}{2}}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose donc $P_k = (X-1)^k\,(X+1)^{n-k}$. On vérifie alors que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad u(P_k) = (n - 2k)\,P_k.$$

Comme les nombres réels $(n-2k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont deux à deux distincts, $u$ possède $n+1$ valeurs propres distinctes ; il est donc diagonalisable et la famille $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de vecteurs propres de $u$.

# IV Endomorphismes et matrices trigonalisables

On suppose dans ce paragraphe que $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle.

**Définition 13**

- L'endomorphisme $u$ est dit **trigonalisable** s'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

**Remarque** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. La matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure si, et seulement si :
$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad e_i \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_i)\,.$$

**Proposition 46**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant un endomorphisme $u$.

La matrice $A$ est alors trigonalisable si, et seulement si, $u$ est trigonalisable.

**Démonstration.** C'est une conséquence directe de la définition 13. □

**Corollaire 47**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.

**Remarque** On aurait pu aussi choisir la forme triangulaire inférieure. En effet, il est facile de vérifier que, si la matrice d'un endomorphisme $u$ dans une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est triangulaire supérieure, alors sa matrice dans la base $(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$ est triangulaire inférieure.

p.118 **Exercice 24** Soit $A$ la matrice de $u$ dans une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $B$ celle de $u$ dans la base $(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$. Quelle est la relation entre $A$ et $B$ ?

**Théorème 48**

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

**Principe de démonstration.** Le sens direct découle de la proposition 25 de la page 79. La réciproque se prouve par récurrence. Démonstration page 118

**Corollaire 49**

Un matrice est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

p.118 **Exercice 25** Soit $u$ trigonalisable et $F$ un sous-espace vectoriel stable par $u$.

Montrer que l'endomorphisme induit $u_F$ est aussi trigonalisable.

**Corollaire 50**

Si $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors tout endomorphisme de $E$ est trigonalisable.

Toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable.

**Démonstration.** Conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss. □

**Remarque** Il existe des endomorphismes d'espace vectoriel réel de dimension finie non trigonalisable.

Par exemple, une rotation du plan euclidien d'angle $\theta \neq 0 \mod \pi$ a un polynôme caractéristique non scindé donc n'est pas trigonalisable.

**Exemples**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre double $\lambda$. Deux cas se présentent :
   (a) $A$ est diagonalisable et, d'après l'exemple 1 de la page 88, on a $A = \lambda I_2$.
   (b) $A$ n'est pas diagonalisable et le sous-espace propre pour la valeur propre $\lambda$ est alors de dimension $1$.
   Soit $u$ un vecteur propre associé à cette valeur propre qu'on complète en une base $(u, v)$ de $\mathbb{K}^2$. Si $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^2$ à cette base, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq 0$, car $A$ n'est pas diagonalisable. Comme $\lambda$ est la seule valeur propre de $A$, on a $\beta = \lambda$.
   En prenant comme base $(\alpha u, v)$ à la place de $(u, v)$, on remarque que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre simple $\lambda$ et une valeur propre double $\mu$. Supposons $A$ non diagonalisable, c'est-à-dire $\dim E_\mu(A) = 1$.
   Soit $u$ un vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $\lambda$ et $v$ un vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $\mu$. Complétons $(u, v)$ en une base $(u, v, w)$ de $\mathbb{K}^3$ et notons $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ à cette base.
   On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \mu & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Tr}(A) = \lambda + 2\mu$ donne $\gamma = \mu$.
   On peut encore faire mieux comme le montre l'exercice suivant.

p.118 **Exercice 26** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ ayant une valeur propre simple $\lambda$ et une valeur propre double $\mu$. On suppose $A$ non diagonalisable, c'est-à-dire que $\dim E_\mu(A) = 1$.

Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

**Indication :** on pourra modifier le troisième vecteur d'une base de trigonalisation.

p.119 **Exercice 27** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$.

1. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que $A$ est trigonalisable et déterminer $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ et $T$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

p.120

**Exercice 28**

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
2. Montrer que la matrice $A$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Corollaire 51**

Soit $u$ est un endomorphisme trigonalisable.

- Si $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ est une liste de valeurs propres de $u$, on a :

$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$

- Si $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, on a alors :

$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{p} m(\lambda_i)\, \lambda_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m(\lambda_i)}.$$

**Démonstration.**

C'est une conséquence immédiate de la proposition 36 et du théorème 48 de la page 93. □

**Remarque** Recherche de la valeur propre de plus grand module.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , de multiplicités respectives $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_p)$, vérifient :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_p|.$$

Ainsi $\lambda_1$ est l'unique valeur propre de module maximal.
Pour tout entier $k$, on a $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} m(\lambda_i)\, \lambda_i^k \underset{k\to+\infty}{\sim} m(\lambda_1)\, \lambda_1^k$ donc :

$$\lambda_1 = \lim_{k\to+\infty} \frac{\operatorname{Tr}\left(A^{k+1}\right)}{\operatorname{Tr}\left(A^k\right)}.$$

On a déjà prouvé qu'un endomorphisme (respectivement une matrice) est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
L'exercice suivant prouve qu'un endomorphisme (respectivement une matrice) est trigonalisable si, et seulement s'il possède un polynôme annulateur scindé.

p.121

**Exercice 29** (Approfondissement)

On veut montrer qu'un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement s'il est annulé par un polynôme scindé.

1. Montrer par récurrence sur la dimension de $E$ que si un endomorphisme $u$ de $E$ est annulé par un polynôme scindé, alors il est trigonalisable.
2. Montrer que si $u$ est un endomorphisme trigonalisable de $E$, alors $\chi_u$ annule $u$.
3. Conclure.

**Remarque** En fait, pour tout endomorphisme $u$, on a $\chi_u(u) = 0$.
Il s'agit du théorème de Cayley-Hamilton qui sera démontré dans la section suivante.

# V Utilisations des polynômes annulateurs

## 1 Polynôme minimal

**Proposition 52**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des polynômes $P$ tels que $P(u) = 0$ est un idéal appelé **idéal annulateur de $u$**.

**Corollaire 53**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des polynômes $P$ tels que $P(A) = 0$ est un idéal appelé **idéal annulateur de $A$**.

**Remarque** Comme le montre l'exercice suivant, il peut arriver, en dimension infinie, que l'idéal annulateur soit réduit au polynôme nul.
Nous verrons dans la section suivante que c'est impossible en dimension finie.

p.122

**Exercice 30** On note $D$ la dérivation de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $e_\lambda$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R} \quad e_\lambda(t) = \exp(\lambda t)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $P(D)(e_\lambda)$.
2. En déduire l'idéal annulateur de $D$.

**Proposition 54**

1. Si $E$ de dimension finie, alors l'idéal annulateur de tout endomorphisme de $E$ est non réduit à $\{0\}$.
2. L'idéal annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Démonstration page 122

**Remarque** D'après le théorème 21 de la page 16, si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit au polynôme nul, alors il existe un unique polynôme unitaire $P$, appelé générateur unitaire de $\mathcal{I}$, tel que $\mathcal{I} = P\mathbb{K}[X]$.

**Définition 14**

Soit $E$ de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le générateur unitaire de l'idéal annulateur de $u$ est appelé **polynôme minimal** de $u$ ; on le note $\pi_u$.

On a la même définition pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Dans la suite on supposera $E$ de dimension finie non nulle, ce qui assure l'existence d'un polynôme minimal pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$.**

**Remarques**

- Comme $\dim E \neq 0$, on a $\deg(\pi_u) \geqslant 1$, car si $P = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a $P(u) = \lambda \operatorname{Id}_E \neq 0$.
- Le polynôme minimal $\pi_u$ est de degré 1 si, et seulement si, $u$ est une homothétie.

  En effet, si $u = \lambda \operatorname{Id}$ alors $\pi_u$ divise $X - \lambda$. Comme $\pi_u$ est unitaire et de degré supérieur ou égal à 1, on en déduit que $\pi_u = X - \lambda$.

  Réciproquement, si $\pi_u = X - \lambda$, alors $0 = \pi(u) = u - \lambda \operatorname{Id}$ donc $u = \lambda \operatorname{Id}$.

p.122

**Exercice 31**

1. Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur $p$ de $E$.
2. Déterminer le polynôme minimal d'une symétrie $s$ de $E$.

p.123

**Exercice 32** Montrer que l'ensemble des racines du polynôme minimal $\pi_u$ est égal au spectre de $u$.

**Proposition 55**

Si $d = \deg(\pi_u)$, alors la famille $\left(u^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ et l'on a donc $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u)$.

On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Principe de démonstration.** Démonstration page 123

On utilise la division euclidienne par le polynôme minimal $\pi_u$.

**Point méthode**

La démonstration de la proposition précédente fournit une méthode pratique de décomposition de $v \in \mathbb{K}[u]$ dans la base $\left(u^k\right)_{k \in [\![0,d-1]\!]}$ de $\mathbb{K}[u]$ :

si $v = P(u)$, avec $P \in \mathbb{K}[X]$, on détermine le reste de la division euclidienne de $P$ par le polynôme minimal de $u$.

Ainsi, pour calculer les puissances successives de $u$, on détermine le reste de la division euclidienne de $X^p$, avec $p \in \mathbb{N}$, par le polynôme minimal de $u$.

## 2 Théorème de Cayley-Hamilton

On a vu l'intérêt d'obtenir des polynômes annulateurs dans la recherche de valeurs propres d'un endomorphisme et l'on a prouvé leur existence en dimension finie.

Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u$ est un polynôme annulateur de $u$.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible.

Nous proposons ici une démonstration en plusieurs étapes s'appuyant sur les matrices compagnons, notion hors-programme mais qui fait l'objet de nombreux sujets de concours.

p.123 **Exercice 33 Polynôme minimal d'une matrice compagnon**

Soit $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

On note $(E_0, \ldots, E_{p-1})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et l'on pose :

$$P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots a_1 X + a_0.$$

1. Calculer $A^k E_0$, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$. En déduire que $\deg(\pi_A) \geqslant p$.
2. Calculer $AE_{p-1}$, puis $P(A)E_0$. En déduire que $\pi_A = P$.

**Remarque** Combiné avec l'exercice 17 de la page 81, ce résultat prouve que si $A$ est une matrice compagnon, alors $\pi_A = \chi_A$.

p.124 **Exercice 34** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x$ un vecteur non nul de $E$.

1. Montrer qu'il existe un plus petit sous-espace vectoriel de $E$, noté $F_x$, stable par $u$ et contenant $x$.
2. Prouver que, si $F_x$ est de dimension $p$, alors $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est une base de $F_x$.

**Théorème 56 (Théorème de Cayley-Hamilton)**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $E$ de dimension finie.

Le polynôme caractéristique de $u \in$ annule $u$, c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$.

**Principe de démonstration.** On utilise le lemme précédent, puis les exercices 17 de la page 81 et 33 de la page précédente sur les matrices compagnons.

Démonstration (non exigible) page 124

**Attention** Comme il fait intervenir le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$, le théorème de Cayley-Hamilton n'a de sens que si $E$ est de dimension **finie**.

**Corollaire 57 (Théorème de Cayley-Hamilton)**

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$.

p.124 **Exercice 35** On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ de l'exemple page 79.

Montrer que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$ en fonction de $I_3$, $A$ et $A^2$.

## 3 Lemme de décomposition des noyaux

**Théorème 58 (Lemme de décomposition des noyaux)**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $(P_1, \ldots, P_r) \in \mathbb{K}[X]^r$ une famille finie de polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \ldots P_r$ leur produit.

On a alors la décomposition en somme directe :

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u).$$

**Principe de démonstration.** On utilise la relation de Bézout pour $n = 2$ puis on procède par récurrence sur $r$.

Démonstration page 125

**Corollaire 59**

Soit $(P_1,\dots,P_r)\in \mathbb{K}[X]^r$ une famille finie de polynômes deux à deux premiers entre eux, $P$ leur produit et $u\in\mathcal{L}(E)$.

Si $P$ est un polynôme annulateur de $u$, on a alors :

$$E=\bigoplus_{k=1}^{r}\operatorname{Ker}P_k\,(u)\,.$$

Démonstration page 125

### Remarque

On retrouve le fait que si $p$ est un projecteur alors $\operatorname{Ker}p$ et $\operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id})$ sont supplémentaires et que, si $p$ est une symétrie alors $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(s+\mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

p.125 **Exercice 36** Soit $(P_1,\dots,P_r)\in\mathbb{K}[X]^r$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux et $P$ leur produit. On suppose que $P(u)=0$.

Montrer que les projecteurs associés à la décomposition en somme directe :

$$E=\bigoplus_{k=1}^{r}\operatorname{Ker}P_k(u).$$

sont des polynômes en $u$.

### Exemples

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{K}^2$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites $u$ telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$$

est le noyau de l'endomorphisme $Q(T)$, avec :

$$Q=X^2-aX-b\quad\text{et}\quad T:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}^{\mathbb{N}}&\longrightarrow&\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\\ u&\longmapsto&(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\end{array}.$$

Si le polynôme $Q$ a deux racines distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$, alors le lemme des noyaux donne :

$$\mathcal{S}=\operatorname{Ker}(T-\lambda_1\,\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}(T-\lambda_2\,\mathrm{Id})=\left\{(A\lambda_1^n+B\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ (A,B)\in\mathbb{K}^2\right\}.$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu en première année.

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{K}^2$. Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f''=af'+bf$. Il est aisé de montrer que tout élément de $\mathcal{S}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est le noyau de l'endomorphisme $Q(D)$, avec :

$$Q=X^2-aX-b\ \text{et}\ D:\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})&\longrightarrow&\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})\\ f&\longmapsto&f'\end{array}.$$

Si le polynôme $Q$ a deux racines distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$, alors le lemme des noyaux donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \operatorname{Ker}(D-\lambda_1\operatorname{Id})\oplus\operatorname{Ker}(D-\lambda_2\operatorname{Id})\\ &= \left\{x\mapsto A\,e^{\lambda_1 x}+B\,e^{\lambda_2 x}\,;\ (A,B)\in\mathbb{K}^2\right\}.\end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat obtenu en première année.

Nous allons généraliser ces deux résultats.

### Application aux équations différentielles linéaires à coefficients constants

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre $p$ :

$$f^{(p)}+\alpha_{p-1}f^{(p-1)}+\cdots+\alpha_1 f'+\alpha_0 f=0 \qquad \text{(ED)}$$

où $(\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-1})\in\mathbb{C}^p$ d'inconnue $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
On appelle polynôme caractéristique de (ED) le polynôme :

$$C(X)=X^p+\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k X^k.$$

Sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ sera notée $C(X)=\prod\limits_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{p_k}$ (les $\lambda_k$ sont deux à deux distincts et les $p_k>0$).
Si $D$ désigne l'endomorphisme de dérivation de $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (ED) est le noyau de l'endomorphisme $C(D)$. Le lemme des noyaux nous fournit alors la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{S}=\bigoplus_{k=1}^{r}\operatorname{Ker}(D-\lambda_k\operatorname{Id}_E)^{p_k}.$$

Pour tout complexe $\lambda$, on note $e_\lambda$, la fonction $x\mapsto e^{\lambda x}$.
On prouve alors par récurrence sur $p$ la relation suivante :

$$(D-\lambda_k\operatorname{Id}_E)^p(f\times e_{\lambda_k})=e_{\lambda_k}\times D^p(f)$$

pour tout $(k,f)\in[\![1,r]\!]\times\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On en déduit :

$$\operatorname{Ker}(D-\lambda_k\operatorname{Id}_E)^{p_k}=\left\{x\mapsto P(x)e^{\lambda_k x}\,;\ P\in\mathbb{C}_{p_k-1}[X]\right\}.$$

Ainsi, tout élément $f$ de $\mathcal{S}$ s'écrit sous la forme :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{r}P_k(x)e^{\lambda_k x}$$

pour une unique famille $(P_k)\in\prod\limits_{k=1}^{r}\mathbb{C}_{p_k-1}[X]$ et l'espace $\mathcal{S}$ est de dimension $p$.
Lorsque $p=1$ ou $2$, ce dernier point est également une conséquence du théorème de Cauchy sur les équations linéaires à coefficients constants d'ordre $1$ ou $2$.

### Application aux suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Soit l'équation récurrente linéaire à coefficients constants d'ordre $p$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} + \alpha_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = 0 \qquad \text{(ER)}$$

avec $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, avec $\alpha_0 \neq 0$, d'inconnue $u \in E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On appelle polynôme caractéristique de (ER) le polynôme :

$$C(X) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k.$$

Sa factorisation dans $\mathbb{C}$ sera notée :

$$C(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{p_k}$$

(les $\lambda_k$ sont deux à deux distincts et les $p_k > 0$).
Désignons alors par $T$ l'endomorphisme de translation de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ défini par :

$$T\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (ER) est le noyau de l'endomorphisme $C(T)$.
Comme une suite de $\mathcal{S}$ est déterminée par ses $p$ premiers termes, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ u & \longmapsto & (u_0, \ldots, u_{p-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme et la dimension de $\mathcal{S}$ est égale à $p$. De plus, le lemme des noyaux nous fournit la décomposition en somme directe :

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}(T - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}\,.$$

Il s'agit maintenant de déterminer pour tout $k$, le noyau de $(T - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}$.
Nous venons de voir que cet espace est de dimension $p_k$ puisque l'équation $(T - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}(u) = 0$ est une relation de récurrence linéaire d'ordre $p_k$.

- Si $\lambda_k = 0$, il s'agit du noyau de $T^{p_k}$. C'est évidemment l'espace vectoriel de suites $u$ telle que $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant p_k$. On retrouve le fait qu'il est de dimension $p_k$.
- Supposons $\lambda_k \neq 0$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, un simple calcul montre que la suite image de $\left(\lambda_k^n P(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T - \lambda_k \operatorname{Id}_E$ est :

  $$\left(\lambda_k^{n+1} Q(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

  où $Q(X)$ est le polynôme $P(X+1) - P(X)$. Le degré de $Q$ étant inférieur ou égal à $\deg P - 1$, on voit par itération que $\operatorname{Ker}(T - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}$ contient l'ensemble :

  $$\left\{\left(\lambda_k^n P(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\,;\ P \in \mathbb{K}_{p_k-1}[X]\right\}.$$

Comme d'un autre côté, c'est un sous-espace vectoriel de dimension $p_k$ puisqu'il est l'image de $\mathbb{K}_{p_k-1}[X]$ par l'application linéaire injective $P \mapsto \left(\lambda_k^n P(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (l'injectivité découlant du fait qu'un polynôme ayant une infinité de racines est nul), il vient :

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k} = \left\{\left(\lambda_k^n P(n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \,;\; P \in \mathbb{K}_{p_k-1}[X]\right\}$$

puisque le noyau de $(T - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}$ est aussi de dimension $p_k$.

Comme $\alpha_0 \neq 0$, tous les $\lambda_k$ sont non nuls donc toute solution $u$ de (ER) s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^n Q_k(n)$$

pour une unique famille $(Q_k) \in \prod_{k=1}^{r} \mathbb{K}_{p_k-1}[X]$.

On retrouve le fait que l'espace $\mathcal{S}$ est de dimension $p$.

## 4 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

On a déjà prouvé que si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (respectivement d'une matrice) est scindé à racines simples, alors l'endomorphisme (respectivement la matrice) est diagonalisable mais qu'il ne s'agit que d'une condition *suffisante*.

Le théorème suivant prolonge ce résultat et donne une condition nécessaire et suffisante pour être diagonalisable.

**Théorème 60**

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $u$ est diagonalisable ;

$(ii)$ $u$ possède un polynôme annulateur scindé à racines simples ;

$(iii)$ le polynôme minimal de $u$ est scindé à racines simples.

On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Principe de démonstration.** Démonstration page 126

- Pour prouver $(i) \Longrightarrow (ii)$, on utilise la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, où $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, puis la proposition 18 de la page 76.
- Pour prouver $(iii) \Longrightarrow (i)$, on utilise le lemme de décomposition des noyaux.

**Remarque** L'exercice 29 de la page 96 permet d'énoncer un résultat similaire pour les endomorphismes trigonalisables.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $u$ est trigonalisable ;

$(ii)$ $u$ possède un polynôme annulateur scindé ;

$(iii)$ le polynôme minimal de $u$ est scindé.

**Corollaire 61**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$. L'endomorphisme induit par $u$ sur $F$ est alors diagonalisable.

Démonstration page 127

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes de $E$ est *simultanément diagonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle les matrices des $u_i$ sont diagonales.
Une telle base s'appelle alors une base de *diagonalisation simultanée*.

p.127

**Exercice 37** Montrer qu'une famille d'endomorphismes de $E$ est simultanément diagonalisable si, et seulement si, elle est composée d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.

**Remarque** En adaptant cet exercice et en utilisant l'exercice 25 de la page 93, on obtient qu'une famille d'endomorphismes de $E$ trigonalisables commutant deux à deux est simultanément trigonalisable.

## 5 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

On s'intéresse dans cette section aux endomorphismes annulés par un monôme c'est-à-dire par un polynôme de la forme $X^k$.

**Définition 15**

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent** s'il existe un entier $k$ tel que $u^k = 0$.

Le plus petit entier $r$ tel que $u^r = 0$ s'appelle l'**indice de nilpotence** de $u$.

**Remarques**

- L'indice de nilpotence d'un endomorphisme $u$ nilpotent est bien défini car l'ensemble des entiers $k$ tels que $u^k = 0$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, elle admet donc un plus petit élément.
- Comme $u^0 = \mathrm{Id}$, l'indice de nilpotence est un entier non nul.
- L'endomorphisme de nilpotence est égal à 1 si, et seulement si, l'endomorphisme est nul.
- Un endomorphisme nilpotent est non injectif. En effet, si $u$ est nilpotent d'indice $r$, alors $u^{r-1} \neq 0$ donc il existe un vecteur $x$ tel que $u^{r-1}(x)$ soit un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} u$.
- La seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est nulle. En effet, d'après le point précédent, 0 est valeur propre et, grâce à la proposition 20 de la page 76, c'est la seule.

**Définition 16**

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** s'il existe un entier $k$ tel que $A^k = 0$.

Le plus petit entier $r$ tel que $A^r = 0$ s'appelle l'**indice de nilpotence** de $A$.

**Remarques**

- Une matrice $A$ est nilpotente si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est nilpotent.

  De même, si une matrice représente un endomorphisme, alors elle est nilpotente si, et seulement si, cet endomorphisme l'est.

  Les propriétés énoncées sur les endomorphismes nilpotents sont donc transposables aux matrices nilpotentes.

- Toute matrice semblable à une matrice nilpotente est donc nilpotente.

**On suppose désormais que $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$** (non nulle car $E \neq \{0\}$.)

**Proposition 62**

Les trois points suivants sont équivalents :

$(i)$ $u$ est nilpotent,

$(ii)$ le polynôme caractéristique de $u$ est $X^n$,

$(iii)$ il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure stricte.

Démonstration page 127

**Corollaire 63**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les trois points suivants sont équivalents :

$(i)$ $A$ est nilpotente,

$(ii)$ le polynôme caractéristique de $A$ est $X^n$,

$(iii)$ $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

**Corollaire 64**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

$(i)$ $A$ est nilpotente,

$(ii)$ $A$ est trigonalisable avec pour seule valeur propre $0$.

**Corollaire 65**

Soit $u$ un endomorphisme de $E$. Il y a équivalence entre :

$(i)$ $u$ est nilpotent,

$(ii)$ $u$ est trigonalisable avec pour seule valeur propre $0$.

**Corollaire 66**

Soit $u$ un endomorphisme nilpotent.

Son indice de nilpotence est majoré par la dimension de $E$.

**Démonstration.** En effet, son polynôme caractéristique est $X^n$ et il est annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton. □

**Corollaire 67**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A$ est nilpotente, alors $A^n = 0$.

p.128 **Exercice 38** Soit $u$ un endomorphisme nilpotent d'indice $r$ et $x_0 \notin \operatorname{Ker} u^{r-1}$. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{r-1}(x_0))$ est libre.

p.128 **Exercice 39** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$ nilpotent et d'indice $n$.

1. Soit $x_0$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. Montrer que $\big(u^k(x_0)\big)_{0\leqslant k<n}$ est une base de $E$.
2. Montrer que, pour tout $k$ de $[\![0,n]\!]$, le sous-espace $\operatorname{Ker} u^k$ est de dimension $k$.
3. Montrer que, pour tout $k$ de $[\![0,n]\!]$, $\operatorname{Ker} u^k$ est le seul sous-espace stable de dimension $k$ stable par $u$.

p.128 **Exercice 40** Montrer que pour toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de $n$ endomorphismes nilpotents, commutant deux à deux, d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, on a :

$$u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0.$$

**Théorème 68**

Lorsqu'il existe un polynôme scindé annulant $u$, c'est-à-dire lorsque le polynôme minimal de $u$ est scindé, alors $E$ peut se décomposer en une somme directe de sous-espaces stables par $u$ sur chacun desquels $u$ induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Démonstration page 129

**Remarque** Matriciellement, si l'on prend une base adaptée à une telle décomposition, on obtient une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p I_{n_p} + N_p \end{pmatrix} \qquad \text{où } N_1, \dots, N_p \text{ sont nilpotentes.}$$

On peut même trigonaliser chaque matrice nilpotente $N_k$ de façon à ce que chaque bloc diagonal soit triangulaire supérieur.
On obtient ainsi une forme triangulaire particulière que l'on a, par exemple, obtenue dans l'exercice 26 de la page 94.

# Démonstrations et solutions des exercices du cours

**Exercice 1**

1. Par hypothèse, pour tout $x \in E$, il existe un scalaire $\lambda_x$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Si le vecteur $x$ est non nul, alors le scalaire $\lambda_x$ est unique, sinon tous les scalaires $\lambda$ conviennent.

   Soit $x$ et $y$ deux vecteurs non nuls de $E$. Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.

   - Si $x$ est proportionnel à $y$, alors il existe un scalaire $\mu$ tel que $x = \mu y$. Ainsi :
     $$u(x) = \lambda_x x = \lambda_x \mu y = u(\mu y) = \mu \lambda_y y$$
     Comme le vecteur $y$ est non nul, on en déduit que $\lambda_x \mu = \lambda_y \mu$. Le scalaire $\mu$ étant non nul (car $x \neq 0$), on en déduit que $\lambda_x = \lambda_y$.
   - Si la famille $(x, y)$ est libre, alors l'égalité :
     $$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$
     implique que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

   Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$ non nul, $u(x) = \lambda x$. Cette égalité étant trivialement vraie pour $x = 0$, cela prouve que $u$ est une homothétie.

2. Il est clair qu'une homothétie stabilise tous les sous-espaces vectoriels de $E$.

   Réciproquement, soit $u$ un endomorphisme stabilisant toutes les sous-espaces vectoriels de $E$. Pour tout vecteur $x$ non nul, $\mathbb{K}x$ est stable par $u$ donc $u(x) \in \mathbb{K}x$, ce qui implique que la famille $(x, u(x))$ est liée. On en déduit, grâce à la question précédente, que $u$ est une homothétie.

   Ainsi, les seuls endomorphismes stabilisant tous les sous-espaces vectoriels de $E$ sont les homothéties.

**Exercice 2**

1. Comme $P \in F$, avec $F$ stable par $D$, on a :
   $$\forall k \in [\![0, d]\!] \quad P^{(k)} = D^k(P) \in F.$$
   La famille $\left(P^{(k)}\right)_{0 \leqslant k \leqslant d}$ est libre, car échelonnée en degré ; comme c'est une famille de polynômes de $\mathbb{K}_d[X]$ comportant $d+1 = \dim \mathbb{K}_d[X]$, c'en est une base. On a montré que $\mathbb{K}_d[X] \subset F$.

2. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par $D$ ; notons $A$ l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de $F$. Il s'agit donc d'une partie de $\mathbb{N}$ non vide.

   - Si $A$ est majoré, alors $A$ admet un plus grand élément, que l'on note $d$.
     Par suite, $F \subset \mathbb{K}_d[X]$ et il existe $P \in F$ de degré $d$ donc, d'après la première question, on a $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ puis $F = \mathbb{K}_d[X]$.
   - Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P \in A$ tel que $d := \deg P \geqslant n$. D'après la première question, on a $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_d[X] \subset F$. Comme cette inclusion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F = \mathbb{K}[X]$.

   Réciproquement, pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ est stable par $D$.

   En conclusion, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par $D$ sont $\{0\}$, $\mathbb{K}[X]$ et les $\mathbb{K}_d[X]$, avec $d \in \mathbb{N}$.

**Proposition 1**

- Soit $x \in \operatorname{Ker} v$ ; on a $v\big(u(x)\big) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(0) = 0$ donc $u(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} v$. Ainsi, $\operatorname{Ker} v$ est stable par $u$.
- Soit $y \in \operatorname{Im} v$ ; il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$.

  Par suite $u(y) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) \in \operatorname{Im} v$ ; donc $\operatorname{Im} v$ est stable par $u$.

**Proposition 2**

- Supposons $F$ stable par $u$. Pour tout $i \in I$, comme $e_i \in F$ et $F$ est stable par $u$, on a $u(e_i) \in F$.
- Réciproquement, supposons que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) \in F$ et montrons que $F$ est stable par $u$. Soit $x \in F$, il existe une famille de scalaires presque nulle, $(\lambda_i)_{i\in I}$, telle que $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i$. Par linéarité de $u$, on a $u(x) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i u(e_i)$ donc $u(x) \in F$. Par suite, $F$ est stable par $u$.

**Exercice 3** Il est évident que $\mathcal{L}_F(E)$ est inclus dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ et contient $\mathrm{Id}_E$.

Soit $(u,v) \in \mathcal{L}_F(E)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout $x \in F$, on a $u(x) \in F$, $v(x) \in F$ et par suite $(\alpha u + \beta v)(x) \in F$. L'application $\alpha u + \beta v$ appartient donc à $\mathcal{L}_F(E)$.

De plus, pour tout $x \in F$, on a $(u \circ v)(x) = u\big(\underbrace{v(x)}_{\in F}\big) \in F$ et, par conséquent l'application $u \circ v$ appartient à $\mathcal{L}_F(E)$.

Ainsi, $\mathcal{L}_F(E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

**Corollaire 3** Comme $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de $F$, l'espace vectoriel $F$ est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, $\forall j \in [\![1,p]\!] \quad u(e_j) \in F$ c'est-à-dire si, et seulement si, les $p$ premières colonnes de la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$ ont leurs $n-p$ derniers coefficients nuls, c'est-à-dire si, et seulement si, cette matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

L'interprétation de $A$ est alors claire.

**Exercice 4**

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le sous-espace $E_i$ est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement s'il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Les endomorphismes cherchés sont donc ceux dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.
2. Les espaces $F_i$ sont stables par $u$ si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $u(e_i) \in F_i$. Les endomorphismes cherchés sont donc ceux dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.

**Proposition 4** Le sous-espace $E_i$ est stable par $u$ si, et seulement si, les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ ont pour image par $u$ un vecteur de $E_i$, c'est-à-dire une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}_i$. On en déduit facilement l'équivalence annoncée et l'interprétation des matrices $A_i$.

**Exercice 5** Un réel $\lambda$ est valeur propre de $D$ si, et seulement si, l'équation $f' = \lambda f$ a une solution non nulle dans $E$. Or les solutions de cette équation différentielle sont les multiples de la fonction non nulle $e_\lambda : t \mapsto \exp(\lambda t)$.

En conclusion, tout réel $\lambda$ est valeur propre de $D$ et $E_\lambda(D) = \operatorname{Vect}(e_\lambda)$.

**Exercice 6** Un complexe $\lambda$ est valeur propre de $\Delta$ si, et seulement si, l'équation $\Delta(u) = \lambda u$ a une solution non nulle dans $E$. Or $\Delta(u) = \lambda u$ équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \lambda u_n,$$

ou encore, par une récurrence évidente, à :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 \lambda^n.$$

En conclusion, tout complexe $\lambda$ est valeur propre de $\Delta$, le sous-espace propre associé étant la droite vectorielle engendrée par la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $\lambda$.

Rappelons que pour $\lambda = 0$, on a $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} = (\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 0, \ldots)$.

**Exercice 7**

Un complexe $\lambda$ est valeur propre de $u$ si, et seulement si, l'équation $XP = \lambda P$ a une solution non nulle dans $E$.

Or, pour $P \neq 0$, on a :

$$\deg(XP) = 1 + \deg(P) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si} \quad \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \lambda = 0, \end{cases}$$

ce qui rend l'égalité $XP = \lambda P$ impossible puisque $\deg(\lambda P) < \deg(XP)$.

En conclusion, $u$ n'a pas de valeur propre.

**Exercice 8** Comme $\varphi$ est un isomorphisme, pour tout vecteur $x$ de $E$ et pour tout scalaire $\lambda$, on a :

$$u(x) = \lambda x \iff u \circ \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = \lambda x \iff \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = \lambda \varphi(x),$$

c'est-à-dire :

$$x \in E_\lambda(u) \iff \varphi(x) \in E_\lambda(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}).$$

Comme $\varphi$ est un isomorphisme, on en déduit que les endomorphismes $u$ et $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ ont les mêmes valeurs propres et leurs sous-espaces propres sont reliés par :

$$E_\lambda(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) = \varphi\big(E_\lambda(u)\big).$$

**Proposition 6**

- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $H(p)$ : « Si $u$ admet $p$ valeurs propres distinctes, alors les espaces propres associés sont en somme directe. »

  Pour $p = 1$, il n'y a rien à prouver.

  Supposons la proposition vraie pour un certain rang $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ des valeurs propres distinctes de $u$ et $(x_1, \ldots, x_{p+1}) \in \prod_{i=1}^{p+1} E_{\lambda_i}(u)$ vérifiant $\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0$.

On a donc $u\left(\sum\limits_{i=1}^{p+1} x_i\right) = 0 = \sum\limits_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i$ puis :

$$0 = u\left(\sum_{i=1}^{p+1} x_i\right) - \lambda_{p+1}\sum_{i=1}^{p+1} x_i = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_{p+1} x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{p+1} (\lambda_i - \lambda_{p+1})\, x_i = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_{p+1})\, x_i}_{\in E_{\lambda_i}(u)}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad (\lambda_i - \lambda_{p+1})\, x_i = 0.$$

Or, les valeurs propres étant deux à deux distinctes, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i \neq \lambda_{p+1}$ donc $x_i = 0$. L'égalité $\sum\limits_{i=1}^{p+1} x_i = 0$ donne enfin $x_{p+1} = 0$ ; ce qui prouve $H(p+1)$.

- Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs propres de $u$ associés aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$.

  Comme $(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_p x_p) \in \prod\limits_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, l'on déduit de la première partie de la proposition que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\alpha_i x_i = 0$.
  Comme chaque $x_i$ est non nul, car vecteur propre de $u$, on peut conclure que :

  $$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad \alpha_i = 0.$$

  Par suite, la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

**Exercice 9** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$, on a $u(f_\alpha)(t) = t\left(\alpha t^{\alpha-1}\right) = \alpha t^\alpha$ donc $u(f_\alpha) = \alpha f_\alpha$ et la fonction non nulle $f_\alpha$ est vecteur propre de $u$ pour la valeur propre $\alpha$.

Par suite, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des réels deux à deux distincts, la famille de fonctions $(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

Ainsi, la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

**Corollaire 8** D'après la proposition 6 de la page 69, à toute famille de $p$ valeurs propres deux à deux distinctes on peut associer une famille libre de $p$ vecteurs propres, donc $p \leqslant n$.

**Exercice 10** Soit $P_1$ et $P_2$ deux matrices *réelles* telles que $P = P_1 + iP_2$.

On a $(P_1 + iP_2)\, M' = M\,(P_1 + iP_2)$, c'est-à-dire $P_1 M' = M P_1$ et $P_2 M' = M P_2$.

Ainsi, pour tout réel $\lambda$, on a $(P_1 + \lambda P_2)\, M' = M\,(P_1 + \lambda P_2)$. Il reste à prouver l'existence d'un réel $\lambda$ tel que $P_1 + \lambda P_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

Or, la fonction $\lambda \mapsto \det(P_1 + \lambda P_2)$ est polynomiale et non nulle car $P(i) \neq 0$.

Elle admet donc un nombre fini de racines, ce qui assure l'existence d'un réel $\lambda$ tel que $P_1 + \lambda P_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 11**

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Un vecteur $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ vérifie $AX = \lambda X$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & + \cdots + x_n & = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 & + \cdots + x_n & = \lambda x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 + x_2 & + \cdots + x_n & = \lambda x_n \end{cases}$$

   Si $\lambda \neq 0$, on en déduit que $x_1 = \cdots = x_n$ puis que $\lambda x_1 = n x_1$. Ainsi, $n$ est l'unique valeur propre non nulle de $J$ et le sous-espace propre associé est la droite engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Si $\lambda = 0$, alors le système devient $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$. Ainsi, $0$ est valeur propre de $J$ et le sous-espace propre associé est l'hyperplan d'équation $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $AX = \lambda X$ si, et seulement si, $\alpha J X = (\lambda - \beta) X$.

   Si $\alpha = 0$, alors $A = \beta I_n$ donc la seule valeur propre de $A$ est $\beta$ et le sous-espace propre associé est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

   Sinon, $\lambda$ est valeur propre de $A$ si, et seulement si, $\frac{\lambda - \beta}{\alpha} \in \operatorname{sp}(J) = \{0, n\}$.

   Ainsi, $\operatorname{sp}(A) = \{\beta, \alpha n + \beta\}$ et les sous-espaces propres associés sont respectivement $E_0(J)$ et $E_n(J)$.

**Proposition 15** Soit $\lambda \in \mathbb{K}'$ une valeur propre de $A$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}')$ un vecteur propre associé. Comme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}') \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\lambda$ est aussi valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d'où l'inclusion annoncée.

**Proposition 16**

- Soit $X$ un vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $\lambda$. On a donc $AX = \lambda X$ et, en utilisant les propriétés de la conjugaison, on en déduit facilement :

$$\overline{A}\,\overline{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda}\,\overline{X},$$

  soit $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, puisque $A$ est à coefficients réels. D'où $\overline{\lambda} \in \operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A)$ car $\overline{X} \neq 0$.
- Soit $(X_1, \ldots, X_k)$ une base de $E_\lambda(A)$.

  D'après le point précédent, les vecteurs $\overline{X_1}$, …, $\overline{X_k}$ appartiennent à $E_{\overline{\lambda}}(A)$.

  Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ une famille de scalaires telle que $\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \overline{X_j} = 0$.

  On a alors $\overline{\sum\limits_{j=1}^{k} \overline{\alpha_j} X_j} = 0$ puis $\sum\limits_{j=1}^{k} \overline{\alpha_j} X_j = 0$. La famille $(X_1, \ldots, X_k)$ étant libre, on en déduit que $\overline{\alpha_1} = \cdots = \overline{\alpha_k} = 0$, d'où $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Par suite la famille $\left(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_k}\right)$ est libre et la dimension du sous-espace propre de $A$ pour la valeur propre $\overline{\lambda}$ est supérieure ou égale à $k$ ; d'où $\dim E_\lambda(A) \leqslant \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$.
Comme $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de $A$, on en déduit que :

$$\dim E_{\overline{\lambda}}(A) \leqslant \dim E_{\overline{\overline{\lambda}}}(A) = \dim E_\lambda(A)$$

puis que $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$.

**Proposition 18** Si $u(x) = \lambda x$, on établit, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(x) = \lambda^k x.$$

Si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$, on en déduit $P(u)(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k u^k(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k \lambda^k x = P(\lambda)\, x$.

Ainsi, si $x$ est vecteur propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda$, alors $x$ est vecteur propre de $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

**Exercice 12**

1. On vérifie que $A^2 = 3A - 2I_3$. Le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ convient donc.
2. On a $A(3I_3 - A) = 2I_3$.

   On en déduit que $A$ est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(3I_3 - A)$.
3. Soit $n$ un entier. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe deux réels $a$ et $b$, ainsi qu'un polynôme $Q$ tels que :

   $$X^n = PQ + aX + b = (X-1)(X-2)Q + aX + b.$$

   Les réels $a$ et $b$ vérifient le système $\left\{\begin{array}{ll} 1^n & = a+b \\ 2^n & = 2a+b \end{array}\right.$.

   Par conséquent, le reste de la division Euclidienne de $X^n$ par $P$ est $(2^n - 1)X + 2 - 2^n$.
4. Soit $n$ un entier. D'après la question précédent, il existe un polynôme $Q$ tel que :

   $$A^n = P(A)Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n) I_n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n) I_n;$$

   donc :

   $$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2(2^n - 1) & 1 - 2^n \\ 4(1 - 2^n) & 9 \cdot 2^n - 8 & 4(1 - 2^n) \\ 8(1 - 2^n) & 16(2^n - 1) & -7 \cdot 2^n + 8 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13**

En développant $\det(XI_3 - A)$ par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\chi_A(X) = (X-1)\left((X - \cos\theta)^2 + \sin\theta^2\right) = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\theta X + 1\right).$$

Ainsi, $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\}$ et $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$ ou $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 1\}$ (si $\theta \equiv \pi[2\pi]$).

**Exercice 14** On a $\chi_{{}^tA} = \det\left(XI_n - {}^tA\right) = \det\left({}^t(XI_n - A)\right) = \chi_A$.

**Proposition 27** Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. La matrice $(XI_n-A)$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$. Son déterminant, donné par :

$$\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\left(\lambda\delta_{\sigma(1),1}-a_{\sigma(1),1}\right)\dots\left(\lambda\delta_{\sigma(n),n}-a_{\sigma(n),n}\right)$$

est une expression polynomiale en $\lambda$ de degré inférieur ou égal à $n$.

Soit $\sigma\in S_n$ différente de l'identité. il existe alors au moins deux éléments distincts $i$ et $j$ de $[\![1,n]\!]$ tels que $\delta_{\sigma(i),i}$ et $\delta_{\sigma(j),j}$ soient nuls et le terme :

$$\varepsilon(\sigma)\left(\lambda\delta_{\sigma(1),1}-\alpha_{\sigma(1),1}\right)\dots\left(\lambda\delta_{\sigma(n),n}-\alpha_{\sigma(n),n}\right)$$

est de degré inférieur ou égal à $n-2$. Les termes de degré $n$ et $n-1$ de $\chi_A(\lambda)$ sont donc ceux du produit :

$$(\lambda-\alpha_{1,1})\dots(\lambda-\alpha_{n,n}),$$

soit $\lambda^n$ et $-(\alpha_{1,1}+\dots+\alpha_{n,n})\,\lambda^{n-1}$ respectivement.

On obtient finalement le terme constant de $\chi_A$ en évaluant en $0$.

**Exercice 15** Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Si $\lambda\neq 0$, alors, l'opération élémentaire par blocs $C_2\leftarrow C_2+\lambda^{-1}AC_1$ donne :

$$\chi_B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda I_n & -A\\ -A & \lambda I_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}I_n & \lambda^{-1}A\\ 0 & I_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I_n & 0\\ -A & \lambda I_n-\lambda^{-1}A^2\end{vmatrix}$$

et, par conséquent :

$$\chi_B(\lambda)=\det\left(\lambda^2I_n-A^2\right)=\det(\lambda I_n-A)\det(\lambda I_n+A)=\chi_A(\lambda)(-1)^n\chi_A(-\lambda).$$

Si $\lambda=0$, on a le même résultat. Ainsi $\chi_B(X)=(-1)^n\chi_A(X)\chi_A(-X)$.

**Exercice 16** Pour tout complexe $\lambda$, on a :

$$\chi_C(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda I_n-A & -B\\ -B & \lambda I_n-A\end{vmatrix}.$$

Les opérations $C_1\leftarrow C_1+C_2$ puis $L_2\leftarrow L_2-L_1$ donnent :

$$\chi_C(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda I_n-A-B & -B\\ \lambda I_n-A-B & \lambda I_n-A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I_n-A-B & -B\\ 0 & \lambda I_n-A+B\end{vmatrix}$$

donc $\chi_C(\lambda)=\chi_{A+B}(\lambda)\chi_{A-B}(\lambda)$. puis $\chi_C(X)=\chi_{A+B}(X)\chi_{A-B}(X)$.

**Exercice 17** Par l'opération $L_0\leftarrow L_0+XL_1+\dots+X^{p-1}L_{p-1}$, la matrice $XI_p-A$ se transforme en :

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & \dots & 0 & P(X)\\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1\\ 0 & -1 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -1 & X & a_{p-2}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & X+a_{p-1}\end{pmatrix}$$

avec $P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Un développement suivant la première ligne donne alors :

$$\chi_A(X) = (-1)^{p+1} P(X)(-1)^{p-1} = P(X).$$

**Exercice 18** Dans une base adaptée au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} u$, la matrice de $u$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donc $X^{n-1}(X - \alpha_{1,1})$. Comme $\alpha_{1,1}$ est la trace de $u$, on obtient :

$$\chi_u(X) = X^{n-1}(X - \operatorname{Tr} u).$$

**Proposition 32** Soit $p$ la dimension de $F$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ adaptée à $F$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de $F$.

La matrice de $u$ dans $\mathcal{B}$ est alors de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où $A$ est la matrice de $u_F$ dans la base $\mathcal{B}_F$. Le polynôme caractéristique de $u$, égal à $\chi_A(X)\chi_D(X)$ est donc divisible par le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de $u_F$.

**Proposition 33** En effet, si $F$ est stable par $u$, alors $\chi_{u_F}$ divise le polynôme scindé $\chi_u$, d'après la proposition 32 de la page 83, donc est scindé.

**Proposition 34** Notons $n(\lambda)$ la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$.

Comme $E_\lambda(u)$ est non réduit à $\{0\}$, on a $1 \leqslant n(\lambda)$. De plus, $E_\lambda(u)$ est stable par $u$ et l'endomorphisme induit par $u$ sur $E_\lambda(u)$ est l'homothétie $\lambda \operatorname{Id}_{E_\lambda(u)}$ ; son polynôme caractéristique vaut donc $(X - \lambda)^{n(\lambda)}$. D'après la proposition 32, il divise $\chi_u(X)$, ce qui donne $n(\lambda) \leqslant m(\lambda)$.

**Proposition 36** D'après la définition 10 de la page 82, on a :

$$\chi_u(X) = X^n - (\operatorname{Tr} u)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u.$$

D'après les hypothèses, on a aussi $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i)$. En utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé, on obtient :

$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Comme, à l'ordre près, on a l'égalité :

$$(\mu_1, \dots, \mu_n) = (\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m(\lambda_1) \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m(\lambda_p) \text{ fois}})$$

on obtient :

$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{p} m(\lambda_i)\, \lambda_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m(\lambda_i)}.$$

**Proposition 37** S'il existe une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$, alors la matrice de $u$ dans cette base est diagonale donc $u$ est diagonalisable.

Réciproquement, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que la matrice de $u$ dans cette base soit diagonale, alors la base $\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres de $u$.

**Exercice 19** Pour $P \neq 0$, on a $\deg(P') < \deg(P)$ ; par suite $P' = D_n(P) = \lambda P$ est impossible avec $\lambda \neq 0$. Ainsi, $\operatorname{sp} D_n \subset \{0\}$.

Comme $\operatorname{Ker}(D_n) = \mathbb{K}_0[X]$, les vecteurs propres de $D_n$ sont de degré nul donc il n'existe pas de base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de $D_n$.

Par suite, $D_n$ n'est pas diagonalisable.

**Exercice 20** Une matrice $A$ non nulle est vecteur propre de $f$ pour la valeur propre $\lambda$ si, et seulement si, $f(A) = \lambda A$, c'est-à-dire si, et seulement si, $(\lambda - 1)A = \operatorname{Tr}(A)\, I_n$. Deux cas se présentent :

- $\lambda = 1$. Dans ce cas $f(A) = A$ équivaut à $\operatorname{Tr}(A) = 0$. Ainsi 1 est valeur propre de $f$ et le sous-espace propre associé est égal à l'ensemble des matrices de trace nulle. Il s'agit du noyau de la forme linéaire non nulle $\operatorname{Tr}$ donc d'un hyperplan.
- $\lambda \neq 1$. Dans ce cas $f(A) = \lambda A$ entraîne $A \in \operatorname{Vect}(I_n)$.
  Comme $f(I_n) = (n+1)\, I_n$, on en déduit que $n+1$ est valeur propre de $f$, de sous-espace propre associé $\operatorname{Vect}(I_n)$.

Comme $I_n \notin \mathcal{H}$ et que $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on sait qu'alors :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{H} \oplus \operatorname{Vect}(I_n).$$

Ainsi, en réunissant une base de $\mathcal{H}$ et une base de $\operatorname{Vect}(I_n)$, on obtient une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $f$.

En conclusion, $f$ est diagonalisable.

**Proposition 38**

- Soit $p$ un projecteur de $E$. On a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$. Donc, si l'on réunit une base de $\operatorname{Ker} p$ et une base de $\operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$, on obtient une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $p$. Ainsi $p$ est diagonalisable.
  On peut même préciser que le spectre de $p$ est $\{0, 1\}$ sauf si $p = 0$ (auquel cas $\operatorname{sp}(p) = \{0\}$) ou $p = \operatorname{Id}_E$ (auquel cas $\operatorname{sp}(p) = \{1\}$).
- Soit $s$ une symétrie de $E$. On a $E = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$. Donc, si l'on réunit une base de $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ et une base de $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$, on obtient une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $s$. Ainsi, $s$ est diagonalisable.
  On peut même préciser que son spectre est $\{-1, 1\}$ sauf si $s = \operatorname{Id}$ (auquel cas $\operatorname{sp}(s) = \{1\}$) ou $s = -\operatorname{Id}_E$ (auquel cas $\operatorname{sp}(s) = \{-1\}$).

**Exercice 21**

- Pour le calcul de $\chi_A(X)$, notons $C_1$, $C_2$ et $C_3$ les colonnes de la matrice $XI_3 - A$. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3$ donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -3 & -2 \\ X-1 & X-5 & -2 \\ 1-X & 3 & X \end{vmatrix}.$$

En notant cette fois $L_1$, $L_2$ et $L_3$ les lignes du nouveau déterminant, les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donnent :

$$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2.$$

Ainsi, $\mathrm{sp}(A) = \{1, 2\}$.

- On obtient le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 en résolvant le système $AX = X$ soit :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0. \end{cases}$$

Notons $E_1$, $E_2$ et $E_3$ les équations de ce système. En effectuant les opérations $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$ et $E_3 \leftarrow E_3 + E_1$, on montre que ce système est équivalent à $x = y = -z$. Ainsi $E_1(A) = \mathbb{K}v_1$, où :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 conduit au système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0, \end{cases}$$

équivalent à $2x - 3y - 2z = 0$. On obtient $E_2(A) = \mathbb{K}v_2 \oplus \mathbb{K}v_3$ où :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Comme les sous-espaces propres sont en somme directe d'après la proposition 6 de la page 69, $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une famille libre donc une base de vecteurs propres. Ainsi, la matrice $A$ est diagonalisable.
  La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{C}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Proposition 41** D'après la proposition 6 de la page 69, la somme $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ est directe.

- Supposons $(i)$. Puisqu'il existe une base de vecteurs propres de $u$, la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ contient $E$, ce qui implique $(ii)$.

- La somme $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ étant directe, on a :
$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u).$$
On en déduit que $(ii) \Rightarrow (iii)$.
- Supposons $(iii)$. En réunissant des bases de chaque sous-espace propre de $u$, on obtient, d'après la proposition 6 de la page 69, une famille libre de $n$ vecteurs propres de $u$ ; ce qui prouve $(i)$.

**Corollaire 43** Comme $\deg(\chi_u) = n$, l'endomorphisme $u$ possède $n$ valeurs distinctes si, et seulement si, $\chi_u$ est scindé à racines simples.

D'après le corollaire 35 de la page 85, chaque sous-espace propre est alors de dimension $1$.

Si $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, on a donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(u) = n = \dim E$. On conclut avec la proposition 41 de la page 88.

**Exercice 22** Le polynôme caractéristique de $A$, $(X-1)(X-4)(X-6)$ est scindé simple donc $A$ est diagonalisable.

**Théorème 44** On pose $F = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u)$.

D'après la proposition 41, $u$ est diagonalisable si, et seulement si, $F = E$ donc si, et seulement si, $\dim F = \dim E$. Or, d'après la proposition 34, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, on a $\dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$. Ainsi, :
$$\dim F = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} m(\lambda) \leqslant \deg(\chi_u) = \dim E.$$
Par suite, $u$ est diagonalisable si, et seulement si :
$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} m(\lambda) = \deg(\chi_u);$$
c'est-à-dire si, et seulement si :
$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \chi_u \text{ est scindé.}$$

**Exercice 23** On a $\chi_A = (X-1)^2(X+1)$ ; ainsi $\chi_A$ est scindé, $-1$ est valeur propre simple et $1$ est valeur propre double.

D'après le corollaire 35 de la page 85, on a $\dim E_{-1}(A) = 1$. D'après le corollaire 45 de la page 91, la matrice $A$ est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_1(A) = 2$.

En appliquant le théorème du rang, cela équivaut à :
$$\mathrm{rg}(A - I) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \dim E_1(A) = 1.$$
Comme $A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{rg}(A-I) = 1$ si, et seulement si, la deuxième colonne est proportionnelle à la dernière, ce qui équivaut à $a = 0$.

**Exercice 24** En revenant à la définition, on a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad B_{i,j} = A_{n+1-i,n+1-j}$.
On passe donc de $A$ à $B$ par une « symétrie centrale ».

**Théorème 48** D'après la proposition 46 de la page 93, il est équivalent d'établir le résultat pour les matrices ou pour les endomorphismes.

- Si un endomorphisme $u$ est trigonalisable, alors son polynôme caractéristique est égal à celui d'une matrice triangulaire supérieure ; il est donc scindé sur $\mathbb{K}$, d'après la proposition 25 de la page 79.
- Montrons la réciproque par récurrence.

  Pour $n = 1$ il n'y a rien à prouver.

  Supposons le résultat vrai au rang $n \geqslant 1$ et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\dim E = n+1$ et $\chi_u$ soit scindé.

  Comme $\chi_u$ est scindé il possède une racine. Par conséquent, il existe $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$ et $x$ un vecteur propre associé. Complétons $x$ en une base $\mathcal{B}$ de $E$ de sorte que :
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix},$$
  où le bloc nul est une colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  En développant le polynôme caractéristique de $u$ par rapport à la première colonne, on obtient $\chi_u(X) = (X-\lambda)\,\chi_A(X)$. Comme $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$, on en déduit que $\chi_A$ l'est également. D'après l'hypothèse de récurrence, l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ est trigonalisable, il existe donc $P_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P_n^{-1}AP_n$ soit triangulaire supérieure.

  Notons $P_{n+1}$ la matrice par blocs $P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}$. Il s'agit d'une matrice inversible d'inverse $P_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{pmatrix}$.

  Un produit par blocs donne alors :
$$\begin{aligned} P_{n+1}^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\, P_{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & P_n^{-1}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & LP_n \\ 0 & P_n^{-1}AP_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
  Ainsi $P_{n+1}^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\, P_{n+1}$ est triangulaire supérieure, ce qui permet de conclure que $u$ est trigonalisable.

**Exercice 25** Le polynôme caractéristique de $u_F$ divise celui de $u$ qui est scindé. Ainsi, le polynôme caractéristique de $u_F$ est scindé donc $u_F$ est trigonalisable.

**Exercice 26** Comme cela a été fait en remarque, il existe une base $(u,v,w)$ telle que, en notant $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^3$ à cette base, on ait :
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \mu & \beta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ et $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.

On pose $w' = au + bv + cw$ avec $c$ non nul de sorte que la famille $(u,v,w')$ soit une base.

On a alors :

$f(w') = a\lambda u + b\mu v + c(\alpha u + \beta v + \mu w) = (a\lambda + c\alpha - a\mu)\,u + (b\mu + c\beta - b\mu)\,v + \mu w'$.

Ainsi, on prend $a = \frac{c\alpha}{\mu-\lambda}$, de sorte que la matrice de $f$ dans la base $(u,v,w')$ soit égale à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & c\beta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$. Le condition que lambda != mue

Comme $\dim E_\mu(f) = 1$, on a $\beta \neq 0$ et l'on prend $c = 1/\beta$ pour obtenir la forme annoncée.

ou est le relation

**Exercice 27**

1. Pour le calcul de $\chi_A(X)$, notons $C_1$, $C_2$ et $C_3$ les colonnes de la matrice $XI_3 - A$. L'opération $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 - C_3$ donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 2X & -3 \\ 1 & X & -6 \\ -2 & -X & X+10 \end{vmatrix}.$$

En notant cette fois $L_1$, $L_2$ et $L_3$ les lignes du nouveau déterminant, les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donnent : Ce passage

$$\chi_A(X) = X \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & X+4 \end{vmatrix} = X(X+1)^2.$$

Une liste de valeurs propres de $A$ est donc $(0,-1,-1)$. Comme la matrice :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix}$$

n'est pas de rang $1$, on a $\dim E_{-1}(A) \neq 2$.

D'après le corollaire 45 de la page 91, la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.

2. Comme $\chi_A$ est scindé, la matrice $A$ est trigonalisable, d'après le théorème 48 de la page 93. En étudiant les systèmes $AX = 0$ et $AX = -X$, on obtient facilement que :

- $E_0(A) = \mathrm{Vect}(u)$, avec $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(v)$, avec $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On peut compléter $(u, v)$ en une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ à l'aide de $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ à la base $(u, v, w)$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tel que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

On peut soit calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ et obtenir, par un simple calcul matriciel, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On peut aussi obtenir $Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u - v - w$ par résolution d'un système ; on en déduit que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 28**

1. On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-14 & -18 & -18 \\ 6 & X+7 & 9 \\ 2 & 3 & X+1 \end{vmatrix}$. En retranchant la deuxième colonne de la troisième, il vient :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-14 & -18 & 0 \\ 6 & X+7 & -X+2 \\ 2 & 3 & X-2 \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la dernière ligne à la deuxième, puis en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-14 & -18 & 0 \\ 8 & X+10 & 0 \\ 2 & 3 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X-14 & -18 \\ 8 & X+10 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)\left(X^2 - 4X + 4\right) = (X-2)^3. \end{aligned}$$

Ainsi $\chi_A$ est scindé et admet 2 pour racine triple. Comme $A \neq 2I_3$, $A$ n'est pas diagonalisable, d'après l'exemple 1 de la page 88.

Comme $\chi_A$ est scindé, la matrice $A$ est trigonalisable.

2. On cherche une base $(U, V, W)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$(\star) \quad \begin{cases} (A - 2I_3)\,U &= 0 \\ (A - 2I_3)\,V &= 0 \\ (A - 2I_3)\,W &= V. \end{cases}$$

Les vecteurs $U$ et $V$ sont donc à chercher dans le sous-espace propre de $A$ pour la valeur propre $2$. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 18 \\ -6 & -9 & -9 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ est de rang $1$, l'espace propre $E_2(A)$ est le plan de $\mathbb{K}^3$ d'équation $2x + 3y + 3z = 0$.

De plus, le vecteur $V$ doit appartenir à $\operatorname{Im}(A - 2I_3) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Prenons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, puis $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $U$ et $V$ forment une base du plan $E_2(A)$ d'équation $2x+3y+3z = 0$ et $W \notin E_2(A)$ donc la famille $(U, V, W)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $(\star)$.

Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, alors $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ et :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 29** n'est pas immediate pour moi

1. Le résultat est immédiat si $E$ est de dimension $1$.

   Supposons désormais le résultat vrai pour tout espace vectoriel de dimension $\dim E - 1$ et considérons un endomorphisme $u$ annulé par un polynôme scindé $P(X) = \prod_{k=1}^{m} (X - \beta_k)$. La relation $(u - \beta_1 \operatorname{Id}_E) \circ \cdots \circ (u - \beta_m \operatorname{Id}_E) = 0$ implique alors qu'il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $(u - \beta_i \operatorname{Id}_E)$ soit non inversible. L'endomorphisme non injectif $(u - \beta_i \operatorname{Id}_E)$ est alors d'image $F$ strictement contenue dans $E$. Choisissons alors un hyperplan $H$ de $E$ contenant $F$.

   Comme $F = \operatorname{Im}(u - \beta_i \operatorname{Id}_E) \subset H$, l'hyperplan $H$ est stable par $(u - \beta_i \operatorname{Id}_E)$ et donc par $u$. L'endomorphisme induit $u_H$ vérifie $P(u_H) = 0$ ; il est donc annulé par un polynôme scindé et, par hypothèse de récurrence, trigonalisable.

   Il existe donc une base $\mathcal{B}'$ de $H$ dans laquelle la matrice de $u_H$ est triangulaire supérieure. Dans toute base $\mathcal{B}$ de $E$, obtenue en complétant $\mathcal{B}'$ par un seul vecteur, la matrice de $u$ est triangulaire supérieure ; ce qui conclut la récurrence.

2. Supposons que la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ soit de la forme :
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$
Notons alors $F_i$ le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. Les relations
$$(u - \alpha_i \operatorname{Id}_E)(e_i) \in F_{i-1} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1, i-1]\!] \quad u(e_k) \in F_{i-1}$$
montrent que l'on a $(u - \alpha_i \operatorname{Id}_E)(F_i) \subset F_{i-1}$ pour tout $i$. Le sous-espace vectoriel :
$$(u - \alpha_1 \operatorname{Id}_E) \circ \cdots \circ (u - \alpha_n \operatorname{Id}_E)(F_n)$$
est donc contenu dans :
$$(u - \alpha_1 \operatorname{Id}_E) \circ \cdots \circ (u - \alpha_{n-1} \operatorname{Id}_E)(F_{n-1})$$
et par itération dans $(u - \alpha_1 \operatorname{Id}_E)(F_1)$ qui est réduit à $\{0\}$. On a donc $\chi_u(u) = 0$.
3. D'après la question précédente et le théorème 48 de la page 93, si $u$ est un endomorphisme trigonalisable de $E$, alors il est annulé par un polynôme scindé. La réciproque ayant été montrée à la première question, l'équivalence est prouvée.

**Exercice 30**

1. Comme $e_\lambda$ est vecteur propre de $D$ pour la valeur propre $\lambda$, en appliquant la proposition 18, on obtient :
$$P\big(D\big)(e_\lambda) = P(\lambda)\, e_\lambda.$$
2. Soit $P$ un polynôme annulateur de $D$. Comme les fonctions $e_\lambda$ sont toutes non nulles, on a, d'après la première question :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad P(\lambda) = 0.$$
Le polynôme $P$, ayant une infinité de racines, est donc nul.
Par conséquent, l'idéal annulateur de $D$ soit réduit au polynôme nul.

**Proposition 54**

1. On considère $\varphi_u$ l'application linéaire qui à tout polynôme $P$ associe $P(u)$.
Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie (égale à $n^2$ si $\dim E = n$), le théorème du rang implique la non injectivité de $\varphi_u$ puisque $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.
2. Il suffit d'appliquer ce qui précède à l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.

**Exercice 31**

1. • Si $p = 0$, on a $\pi_p = X$.
   • Si $p = \operatorname{Id}_E$, on a $\pi_p = X - 1$.
   • Dans les autres cas, comme $p$ n'est pas une homothétie et vérifie $p^2 = p$, on a $\pi_p = X^2 - X$.
2. • Si $s = \operatorname{Id}_E$, on a $\pi_s = X - 1$.
   • Si $s = -\operatorname{Id}_E$, on a $\pi_s = X + 1$.
   • Dans les autres cas, comme $s$ n'est pas une homothétie et vérifie $s^2 = \operatorname{Id}_E$, on a $\pi_s = X^2 - 1$.

**Exercice 32**

- On sait, d'après la proposition 20, que toute valeur propre de $u$ est racine de $\pi_u$.
- Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde. Soit $\mu$ une racine de $\pi_u$ non valeur propre de $u$. On peut écrire : $\pi_u = (X - \mu)\, P$, avec $\deg(P) < \deg(\pi_u)$.

  Comme $\mu \notin \operatorname{sp}(u)$, on a $(u - \mu\,\mathrm{Id}_E) \in \mathcal{GL}(E)$. On déduit alors de :
  $$(u - \mu\,\mathrm{Id}_E) \circ P\,(u) = \pi_u(u) = 0$$
  que $P\,(u) = 0$. Comme $\pi_u$ est non nul, $P$ non plus car $\mathbb{K}[X]$ est intègre. Or $\deg(P) < \deg(\pi_u)$, ce qui contredit le caractère minimal de $\pi_u$.

  En conclusion, toute racine de $\pi_u$ est valeur propre de $u$.

**Proposition 55** La famille $\mathcal{F} = \left(u^k\right)_{k \in [\![0,d-1]\!]}$ est bien sûr une famille d'endomorphismes de $\mathbb{K}\,[u]$.

- Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}) \in \mathbb{K}^d \setminus \big\{(0,\ldots,0)\big\}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k = 0$.

  Le polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{d-1} \lambda_k X^k$ est alors un polynôme annulateur non nul de $u$, de degré strictement plus petit que $d = \deg \pi_u$, ce qui contredit la définition du polynôme minimal $\pi_u$. La famille $\mathcal{F}$ est donc libre.
- Soit $v \in \mathbb{K}[u]$ ; il existe donc $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P\,(u)$. La division euclidienne de $P$ par $\pi_u$ s'écrit :
  $$P = Q\pi_u + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < d.$$
  En appliquant le morphisme d'algèbres $\varphi_u$, on obtient :
  $$v = P\,(u) = Q\,(u) \circ \pi_u\,(u) + R\,(u) = R\,(u),$$
  puisque $\pi_u\,(u) = 0$. Comme $\deg(R) < d$, on a $v \in \operatorname{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{d-1}\right)$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}\,[u]$.

En conclusion, la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}\,[u]$.

**Exercice 33**

1. - On a immédiatement :
     $$\forall k \in [\![0, p-2]\!] \quad AE_k = E_{k+1},$$
     d'où l'on déduit par récurrence :
     $$\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad A^k E_0 = E_k.$$
   - La famille $\left(A^k E_0\right)_{k \in [\![0,p-1]\!]}$ est donc libre. Par suite, si $Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ est un polynôme non nul, on a $Q\,(A)\, E_0 \neq 0$ et donc $Q\,(A) \neq 0$.

     Comme il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de $A$ de degré inférieur ou égal à $p-1$, on a $\deg(\pi_A) \geqslant p$.
2. - On a $AE_{p-1} = -\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k E_k$, c'est-à-dire :
     $$A^p E_0 = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k A^k E_0.$$
     Par suite, $P\,(A)\, E_0 = 0$.

- Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $P(A) E_k = P(A) A^k E_0 = A^k P(A) E_0 = 0$, en utilisant la commutativité de $\mathbb{K}[A]$.
  Comme $(E_0, \ldots, E_{p-1})$ est une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on en déduit $P(A) = 0$. Le polynôme $P$ est un polynôme unitaire de degré $p$, annulateur de $A$. D'après la première question, on a $\pi_A = P$.

**Exercice 34** Notons $F_x = \mathrm{Vect}\Big(\big(u^k(x)\big)_{k \in \mathbb{N}}\Big)$.

- Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$ et contenant $x$, on a :
  $$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(x) \in F,$$
  donc $F_x \subset F$. Comme $F_x$ est stable par $u$ et contient $x$, $F_x$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$ et contenant $x$.
- La famille de $F_x$, $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p}$, contient $p$ éléments, il suffit donc de montrer qu'elle est génératrice pour conclure.
  Soit $y \in F_x$. Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$.
  Par ailleurs, la famille à $p+1$ éléments, $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p}$, est liée donc il existe $T \in \mathbb{K}_p[X]$ non nul tel que $T(u)(x) = 0$.
  On effectue la division euclidienne de $P$ par $T$ :
  $$P = QT + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < p.$$
  On en déduit $y = P(u)(x) = Q(u) \circ T(u)(x) + R(u)(x)$. Comme $T(u)(x) = 0$ et $\deg(R) < p - 1$, on a alors $y \in \mathrm{Vect}\Big(\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}\Big)$.
  En conclusion, la famille $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ engendre $F_x$, c'est est donc une base.

**Théorème 56** Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et $F_x$ le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$ et contenant $x$ dont on note $p$ la dimension. D'après le lemme précédent, $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est une base de $F_x$ donc il existe $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $u^p(x) = -\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$. Il en résulte que la matrice de l'endomorphisme induit $u_{F_x}$ par $u$ sur $F_x$ dans la base $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est une matrice compagnon.

Or, d'après les exercices 17 et 33, si $A$ est une matrice compagnon, alors $\pi_A = \chi_A$. Par conséquent, $\pi_{u_{F_x}} = \chi_{u_{F_x}}$ D'après la proposition 32, $\chi_{u_x}$ divise $\chi_u$ donc $\chi_u(u_x) = 0$. Comme $x \in E_x$, on peut écrire :
$$\chi_u(u)(x) = \chi_u(u_x)(x) = 0.$$
Cette dernière égalité a été établie pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. On en déduit que $\chi_u(u) = 0$.

**Exercice 35** On a vu que $\chi_A(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient $A^3 - 3A^2 + 3A - 2I_3 = 0$. On en déduit :
$$A\left(\frac{A^2}{2} - \frac{3A}{2} + \frac{3I_3}{2}\right) = I_3.$$
Par suite, $A$ est inversible et l'on a $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\left(A^2 - 3A + 3I_3\right)$.

**Théorème 58** On procède par récurrence sur $r \geqslant 2$.

- Montrons le résultat pour $r = 2$.

  Soit $P_1, P_2$ deux polynômes premiers entre eux et $P = P_1 P_2$.

  $*$ Comme $P(u) = P_1(u) \circ P_2(u)$, on a $\operatorname{Ker} P_2(u) \subset \operatorname{Ker} P(u)$. Par commutativité de $\mathbb{K}[u]$, on a aussi $P(u) = P_2(u) \circ P_1(u)$ puis $\operatorname{Ker} P_1(u) \subset \operatorname{Ker} P(u)$.
  Par suite, $\operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u) \subset \operatorname{Ker} P(u)$.

  $*$ D'après le théorème de Bézout, il existe $(U_1, U_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P_1 U_1 + P_2 U_2 = 1$ ; on a donc $P_1(u) \circ U_1(u) + P_2(u) \circ U_2(u) = \operatorname{Id}_E$. Soit $x \in \operatorname{Ker} P(u)$ ; posons :

  $$x_1 = P_2(u) \circ U_2(u)(x) \quad \text{et} \quad x_2 = P_1(u) \circ U_1(u)(x).$$

  On a alors $x = x_1 + x_2$ et :

  $$\begin{aligned} P_1(u)(x_1) &= P_1(u) \circ P_2(u) \circ U_2(u)(x) = U_2(u) \circ P_1(u) \circ P_2(u)(x) \\ &= U_2(u) \circ P(u)(x) = 0. \end{aligned}$$

  donc $x_1 \in \operatorname{Ker} P_1(u)$ et, de même $x_2 \in \operatorname{Ker} P_2(u)$. On a donc établi l'inclusion :

  $$\operatorname{Ker} P(u) \subset \operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u)$$

  et, avec le point précédent, l'égalité $\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) + \operatorname{Ker} P_2(u)$.

  $*$ Si $x \in \operatorname{Ker} P_1(u) \cap \operatorname{Ker} P_2(u)$, l'égalité $x = U_1(u) \circ P_1(u)(x) + U_2(u) \circ P_2(u)(x)$ montre que $x = 0$. Par suite, $\operatorname{Ker} P_1(u) \cap \operatorname{Ker} P_2(u) = \{0\}$.

  On a donc prouvé $\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \operatorname{Ker} P_2(u)$.

- Soit $r \geqslant 3$ tel que le résultat soit vrai au rang $r-1$. Considérons $(P_1, \ldots, P_r)$, une famille de $r$ polynômes deux à deux premiers entre eux, et $P = \prod_{k=1}^{r} P_k$.

  Posons $Q = \prod_{k=1}^{r-1} P_k$ ; les polynômes $Q$ et $P_r$ sont premiers entre eux, car si un polynôme irréductible divise $Q$ et $P_r$, il divise l'un des $P_k$, avec $k \in [\![1, r-1]\!]$, et $P_r$, ce qui est contraire aux hypothèses.

  D'après le premier point, on a $\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} Q(u) \oplus \operatorname{Ker} P_r(u)$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\operatorname{Ker} Q(u) = \bigoplus_{k=1}^{r-1} \operatorname{Ker} P_k(u)$.

  On en déduit $\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u)$, ce qui achève la récurrence.

**Corollaire 59** C'est une conséquence immédiate du lemme des noyaux.

**Exercice 36**

- Commençons par le montrer pour $r = 2$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(U_1, U_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P_1 U_1 + P_2 U_2 = 1$.

  On a donc $P_1(u) \circ U_1(u) + P_2(u) \circ U_2(u) = \operatorname{Id}_E$ ce qui, pour tout $x \in E$ donne :

  $$x = \underbrace{P_2(u) \circ U_2(u)(x)}_{\in \operatorname{Ker} P_1(u)} + \underbrace{P_1(u) \circ U_1(u)(x)}_{\in \operatorname{Ker} P_2(u)}.$$

Ainsi, les projections associées à la décomposition :

$$\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \operatorname{Ker} P_2(u)$$

sont les endomorphismes $(U_1 P_1)(u)$ et $(U_2 P_2)(u)$.

- Soit $r \geqslant 3$ tel que le résultat soit vrai au rang $r-1$. Considérons $(P_1, \dots, P_r)$, une famille de $r$ polynômes deux à deux premiers entre eux, et $P = \prod_{k=1}^{r} P_k$ tel que $P(u) = 0$.

  On pose alors $Q = \prod_{k=1}^{r-1} P_k$ ; les polynômes $Q$ et $P_r$ sont premiers entre eux (car si un polynôme irréductible divise $Q$ et $P_r$, il divise l'un des $P_k$, avec $k \in [\![1, r-1]\!]$, et $P_r$, ce qui est contraire aux hypothèses).

  D'après le premier point, on a $E = \operatorname{Ker} Q(u) \oplus \operatorname{Ker} P_r(u)$ et il existe des polynômes $Q_1$ et $Q_2$ tels que $Q_1(u)$ soit la projection sur $\operatorname{Ker} Q(u)$ et $Q_2(u)$, celle sur $\operatorname{Ker} P_r(u)$.

  Si l'on considère $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit pas $u$ sur $\operatorname{Ker} Q(u)$, alors $Q(\tilde{u}) = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\operatorname{Ker} Q(\tilde{u}) = \bigoplus_{k=1}^{r-1} \operatorname{Ker} P_k(\tilde{u})$ et, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe un polynôme $R_i$ tel que , $R_i(\tilde{u})$ soit la projection sur $\operatorname{Ker} P_i(\tilde{u})$.

  Soit $x \in E$. Considérons sa décomposition $x = x_1 + \cdots + x_r$ dans la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k(u)$. Le vecteur $x' = x_1 + \cdots + x_{r-1}$ appartient à $\operatorname{Ker} Q(\tilde{u}) = \operatorname{Ker} Q(u)$. De plus, pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$, $x_i$ appartient à $\operatorname{Ker} P_i(u) = \operatorname{Ker} P_i(\tilde{u})$ (car $\operatorname{Ker} P_i(\tilde{u}) = \operatorname{Ker} P_i(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$) donc :

$$x_i = R_i(\tilde{u})(x') = R_i(u)(x') = R_i(u)\left(Q_1(u)\right).$$

  Par conséquent, pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$, la projection sur $\operatorname{Ker} P_i(u)$ est $R_i Q(u)$ ; c'est donc un polynôme en $u$. Celle sur $\operatorname{Ker} P_r(u)$ étant égale à $Q_2(u)$, cela achève la récurrence.

**Théorème 60**

- Supposons $(i)$ et prouvons $(ii)$. Comme $u$ est diagonalisable, on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) \quad \text{avec} \quad \operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}.$$

  Considérons le polynôme scindé à racines simples $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$. L'endomorphisme $P(u)$ coïncide avec l'endomorphisme nul sur tous les $E_{\lambda_i}(u)$ ; ils sont donc égaux ; ce qui prouve que $P$ est un polynôme annulateur de $u$.

  Ainsi, l'endomorphisme $u$ est annulé par le polynôme $P$ qui est scindé simple.

- L'implication $(ii) \Longrightarrow (iii)$ est évidente, puisque tout diviseur d'un polynôme scindé à racines simples est scindé à racines simples et que le polynôme minimal de $u$ divise tout polynôme annulateur de $u$.

- Supposons $(iii)$ et prouvons $(i)$. Soit $\pi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ le polynôme minimal de $u$ ; on a vu dans l'exercice 32 de la page 97 que $\mathrm{sp}\,(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

  Comme les $\lambda_i$ sont deux à deux distincts, les polynômes $X - \lambda_i$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme des noyaux, on a $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E$ ; par suite, $u$ est diagonalisable, ce qui établit $(i)$.

**Corollaire 61** En effet, d'après le théorème 60 le polynôme minimal $\pi_u$ de $u$ est scindé à racines simples et, comme $\pi_u(u_F) = 0$, on déduit du même théorème que $u_F$ est diagonalisable.

**Exercice 37** Le sens direct est clair puisque dans une base de diagonalisation simultanée, les matrices des endomorphismes sont diagonales donc commutent deux à deux.

Montrons la réciproque par récurrence sur la dimension de $E$.

Elle est évidente si $E$ est de dimension $1$.

Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat démontré sur tout espace vectoriel de dimension strictement inférieur à $n$ et considérons un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ ainsi qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes de $E$ diagonalisables et commutant deux à deux.

- Si tous les $u_i$ sont des homothéties, n'importe quelle base de $E$ est une base de diagonalisation commune aux $u_i$.
- Sinon, il existe $i_0 \in I$ tel que $u_{i_0}$ ne soit pas une homothétie. On peut alors écrire $E = F \oplus G$ où $F$ est un sous-espace vectoriel propre de $u_{i_0}$ et $G$ la somme non réduite à $\{0\}$ des autres sous-espaces vectoriels propres de cet endomorphisme. Ces sous-espaces vectoriels sont stables par $u_i$ pour tout $i$ par hypothèse de commutation. Les familles $(u'_i)_{i\in I}$ et $(u''_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes induits sur $F$ et $G$ sont alors formées d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Les dimensions de $F$ et $G$ étant strictement inférieures à celle de $E$, elles possèdent des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ de diagonalisation simultanée. La réunion $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ fournit une base de diagonalisation simultanée des $(u_i)_{i\in I}$.

**Proposition 62**

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $r$. Montrons, par récurrence sur $n$, que son polynôme caractéristique est $X^n$.

  Si $n = 1$, alors, comme $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$, $u = 0$ puis $\chi_u = X$.

  Supposons le résultat vérifié pour les espaces vectoriels de dimension strictement inférieure à celle de $E$.

  Comme $u$ n'est pas injectif, il existe un vecteur $x$ non nul appartenant au noyau de $u$. Complétons $x$ en une base $\mathcal{B}$ de $E$, de sorte que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

  où $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathrm{I\!K})$ et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathrm{I\!K})$.

On vérifie alors que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^r) = \begin{pmatrix} 0 & L' \\ 0 & A^r \end{pmatrix}$. Ainsi $A^r = 0$ donc l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ est nilpotent. Par hypothèse de récurrence, on a $\chi_A = X^{n-1}$, ce qui permet de conclure car $\chi_u = X \times \chi_A(X)$.

- Si $\chi_u$ est égal à $X^n$, l'endomorphisme $u$ est scindé donc il existe une base dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure. Comme la diagonale de cette matrice est formée de la liste des valeurs propres de $u$, cette matrice est triangulaire supérieure stricte.
- Supposons qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ dans laquelle la matrice $A$ de $u$ est triangulaire supérieure stricte. Ainsi, $u(e_1) = 0$ et :
$$\forall i \in [\![2, n]\!] \quad u(e_i) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{i-1}).$$
Par suite, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $u^{i-1}(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1)$ puis $u^i(e_i) = 0$. On en déduit que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u^n(e_i) = 0$, et donc que $u^n = 0$.

**Exercice 38** Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k u^k(x_0) = 0$.

On a alors $u^{r-1}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k u^k(x_0)\right) = \alpha_0 u^{r-1}(x_0) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$. En appliquant alors $u^{r-2}$, il vient $\alpha_1 u^{r-1}(x_0) = 0$ et donc $\alpha_1 = 0$.

On montre ainsi que $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$ et donc que la famille $\left(u^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$ est libre.

**Exercice 39**

1. D'après l'exercice précédent, la famille $\left(u^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre. Cette famille comportant $n$ éléments, c'est une base de $E$.
2. Soit $x = \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \alpha_l u^l(x_0)$. On a :
$$u^k(x) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell u^{k+\ell}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-k-1} \alpha_l u^{k+l}(x_0).$$
Donc $x \in \mathrm{Ker}\, u^k$ si, et seulement si, pour tout $i \in [\![0, n-k-1]\!]$, le scalaire $\alpha_i$ est nul. Le sous-espace $\mathrm{Ker}\, u^k$ est donc engendré par la famille libre $\left(u^\ell(x_0)\right)_{\ell \geqslant n-k}$, ce qui prouve qu'il est de dimension $k$.
3. Soit $F$ un sous-espace vectoriel stable par $u$ de dimension $k \in [\![0, n]\!]$. L'endomorphisme $u_F$ induit par $u$ est alors nilpotent donc vérifie $u_F^k = 0$. Par conséquent, $F$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(u^k)$.
Pour des raisons de dimension, on a donc $F = \mathrm{Ker}\, u^k$.

**Exercice 40** Prouvons cette assertion par récurrence sur $n$.

Elle est évidente si $n = 1$ puisque, dans ce cas, $\mathcal{L}(E) = \mathbb{K}\,\mathrm{Id}_E$ donc tout endomorphisme nilpotent est nul.

Supposons-la acquise pour toute dimension strictement inférieure à $n$. L'espace $F = \operatorname{Im} u_n$ est de dimension $r < n$ puisque $u_n$ n'est pas bijective et est stable par $u_i$ pour tout $i$. La famille $(u'_1, \ldots, u'_r)$ des endomorphismes induits vérifiant les mêmes hypothèses, il vient donc $u'_1 \circ \cdots \circ u'_r = 0$. Cela implique $u'_1 \circ \cdots \circ u'_{n-1} = 0$ et, vu la définition de $F$ :

$$u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0.$$

**Théorème 68** Si $u$ est annulé par un polynôme scindé $\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont distincts deux à deux, alors le lemme des noyaux permet d'écrire :

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} (u - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}.$$

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, le sous-espace vectoriel $E_i = \operatorname{Ker} (u - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}$ est stable par $u$ et l'endomorphisme $u_i$ induit par $u$ sur $E_i$ vérifie $(u_i - \lambda_i \operatorname{Id}_{E_i})^{\alpha_i} = 0$. Ainsi, l'endomorphisme $n_i = u_i - \lambda_i \operatorname{Id}_{E_i}$ est nilpotent et $u_i$ est la somme de l'homothétie $\lambda_i \operatorname{Id}_{E_i}$ et d'un endomorphismes nilpotent.

L'endomorphisme induit $u_i$ est donc la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

# S'entraîner et approfondir

**2.1** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $E$ de dimension finie.
Prouver que si $\operatorname{Ker} u$ possède un supplémentaire $F$ stable par $u$, alors $F = \operatorname{Im} u$.

**2.2** Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les endomorphismes :

$$u_\sigma : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big)$$

avec $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

**2.3** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie.
Déterminer les endomorphismes stabilisant tous les hyperplans de $E$.

**2.4** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $\mathcal{L}_F(E)$ l'ensemble des endomorphismes stabilisant $F$.

1. Montrer que l'application $\varphi : u \mapsto u_F$ un morphisme d'algèbres de $\mathcal{L}_F(E)$ vers $\mathcal{L}(F)$.
2. On suppose $F$ de dimension finie. Montrer que l'inverse de tout élément inversible $u$ de $\mathcal{L}_F(E)$ stabilise aussi $F$ et que l'on a :
$$(u^{-1})_F = (u_F)^{-1}.$$
3. En considérant l'endomorphisme de $\mathbb{K}(X)$ qui à $P$ associe $XP$, prouver que le résultat de la question précédente est faux si $F$ n'est pas de dimension finie.
4. On suppose que $F$ possède un supplémentaire.
Montrer que le morphisme $u \mapsto u_F$ de $\mathcal{L}_F(E)$ vers $\mathcal{L}(F)$ est surjectif.

⋆ **2.5** Soit $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie tels que $v$ soit nilpotent et vérifie $u \circ v = v \circ u$. Montrer que l'on a :

$$\det(u + v) = \det u.$$

**2.6** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Déterminer le polynôme minimal de $A$.

**2.7** Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. La matrice $B$ est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le polynôme minimal de la matrice $B$.
3. Montrer que matrice $B$ est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**2.8** Diagonaliser la matrice réelle de taille $n$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(les éléments d'indices $(i, j)$ avec $|i - j| = 1$ valent 1, les autres sont nuls).

**Indication :** Il s'agit d'un exercice classique où il est difficile d'obtenir le polynôme caractéristique de $A$ sous forme factorisé. On déterminera donc les éléments propres par la résolution de systèmes.

**2.9** Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A(A^2 + A + I_n) = 0$. Montrer que le rang de $A$ est pair.

**2.10** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^3 - 3A - 5I_n = 0$$

Montrer que $A$ est de déterminant strictement positif.

**2.11** *(Polytechnique 2015)*

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**2.12** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
On suppose qu'il existe un entier naturel non nul $p$ tel que $A^p = I_2$.
Montrer que $A^{12} = I_2$.

⋆ **2.13** Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $u^2 + u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = 0$.

1. Soit $F$ un sous-espace stable par $u$ et $x \notin F$. Montrer que $\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan, stable par $u$ et en somme directe avec $F$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale par blocs de blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et, qu'en particulier, $n$ est pair.

**2.14** On dit qu'un nombre complexe $\alpha$ est algébrique s'il est racine d'un polynôme unitaire (donc non nul) $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer qu'un nombre complexe est algébrique si, et seulement s'il est valeur propre d'une matrice à coefficients rationnels.
2. En déduire que si un nombre complexe $\alpha$ est algébrique, alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, le nombre complexe $\alpha^r$ est aussi algébrique.

*On pourra utiliser le résultat sur les matrices compagnons de l'exercice 17.*

**2.15** 1. Montrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

2. Déterminer une telle famille.

*On pourra utiliser l'endomorphisme* $P(X) \mapsto P(X+1)$ *de* $\mathbb{K}[X]$

**2.16** Déterminer les sous-espaces stables par l'endomorphisme $u$ canoniquement associé à la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**2.17** Soit $a$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie $E$. On considère les endomorphismes $M_a : u \mapsto a \circ u$ et $ad(a) : u \mapsto a \circ u - u \circ a$ de $\mathcal{L}(E)$.

1. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $M_a$ en fonction de ceux de $a$. En déduire que l'endomorphisme $M_a$ est diagonalisable, si, et seulement si, $a$ l'est.
2. Montrer que si $a$ est diagonalisable, alors l'endomorphisme $ad(a)$ l'est aussi et préciser ses valeurs propres en fonction de celles de $a$.
3. Montrer que si $a$ est nilpotent, alors $M_a$ et $ad(a)$ le sont également.

**2.18** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$ et $\lambda$ une valeur propre de $u$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^2$,

$(ii)$ $E_\lambda(u) \oplus \operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = E$,

$(iii)$ $E_\lambda(u)$ possède un supplémentaire stable par $u$,

$(iv)$ la dimension de $E_\lambda(u)$ est égale à la multiplicité de $\lambda$ dans le polynôme caractéristique de $u$,

$(v)$ $\lambda$ est une racine simple du polynôme minimal de $u$.

**2.19** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $B$ en fonction de celui de $A$.
2. Discuter la diagonalisabilité de $B$ en fonction de celle de $A$.

**2.20** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

est diagonalisable si, et seulement si, $A$ l'est.

**2.21** Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose $A$ inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Prouver que $\chi_{J_rB} = \chi_{BJ_r}$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que l'on a toujours $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

**2.22** Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $A$ et $B$ ont une valeur propre commune si, et seulement s'il existe une matrice $U$ non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AU = UB$.

**2.23** *(Polytechnique 2015)*

Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que s'il existe une matrice $U$ de rang $r$ tel que $AU = UB$, alors les polynômes caractéristiques de $A$ et $B$ ont un facteur commun de degré $r$

**2.24** Soit $u$ et $v$ deux endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fine..

1. On suppose que $u$ et $v$ commutent. Montrer que $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun.
2. On suppose que $u \circ v - v \circ u = \alpha u$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $u$ est nilpotent et que $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun.
3. En déduire que si $u \circ v - v \circ u \in \mathrm{Vect}(u, v)$, alors $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun.

**2.25** *(Polytechnique 2015)*

Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer qu'elles sont simultanément trigonalisables.

**2.26** Soit $A$ et $B$ deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = BA$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

soit diagonalisable.

**2.27** Montrer qu'un endomorphisme $u$ est nilpotent si, et seulement s'il vérifie $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

**2.28** *(Centrale 2015)*

Soit $G$ un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que $G$ est fini.
   (a) Montrer que pour tout $g \in G$, il existe un entier $N_g$ tel que $g^{N_g} = I_n$.
   (b) Montrer que tous les éléments de $G$ sont diagonalisables et que $\{\mathrm{Tr}\, g\,;\ g \in G\}$ est fini.
2. Établir la réciproque. *Indication : considérer une base* $(A_1, \ldots, A_p)$ *de* $\mathrm{Vect}(G)$ *et* $f\ :\ X \in G \mapsto (\mathrm{Tr}(A_1X), \ldots, \mathrm{Tr}(A_pX))$.

# Solution des exercices

**2.1** Supposons que $E = F \oplus \operatorname{Ker} u$, avec $F$ stable par $u$. Grâce au théorème du rang, on a $\dim F = \dim \operatorname{Im} u$.

Soit $x \in \operatorname{Im} u$. Par définition, il existe $t \in E$ tel que $x = u(t)$. Comme $F \oplus \operatorname{Ker} u$, il existe $(t_1, t_2) \in F \times \operatorname{Ker} u$ tel que $t = t_1 + t_2$. On en déduit que $x = u(t_2) \in F$ car $F$ est stable par $u$. Par suite, $\operatorname{Im} u \subset F$ puis $\operatorname{Im} u = F$.

**2.2** Il est clair que $\{0_E\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite $D = \mathbb{R}(1, \ldots, 1)$ et l'hyperplan $H$ d'équation :

$$x_1 + \cdots + x_n = 0$$

sont stables par les $u_\sigma$.

Réciproquement, soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par les $u_\sigma$. S'il est inclus dans $D$, alors il est égal à $\{0\}$ ou $D$. Sinon, il contient un vecteur $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ayant deux composantes $x_r \neq x_s$, avec $r < s$. Notons $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si l'on considère la transposition $\tau = (r, s)$, la stabilité de $F$ implique que :

$$(x_r - x_s)\,(e_r - e_s) = x - u_\tau(x) \in F$$

puis que $e_r - e_s \in F$.

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, il existe une permutation $\sigma_i$ qui transforme $r$ en $i$ et $s$ en $i+1$ donc :

$$e_i - e_{i+1} =_u \sigma_i(e_r - e_s) \in F.$$

Comme les vecteurs $e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n$ sont indépendants, ils engendrent un hyperplan, et cet hyperplan est inclus dans $H$, puis égal à $H$ pour des raisons de dimension. On en déduit que $F$ contient $H$ ; il est donc égal à $H$ ou $\mathbb{R}^n$.

Par conséquent, les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les endomorphismes $u_\sigma$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, $D = \mathbb{R}(1, \ldots, 1)$ et $H$.

**2.3** Il est clair que les homothéties stabilisent les hyperplans.

Réciproquement, soit $u$ un endomorphisme stabilisant tous les hyperplans, on va prouver qu'il s'agit d'une homothétie en établissant que, pour tout vecteur $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée (voir l'exercice 1 de la page 65).

Supposons par l'absurde, qu'il existe un vecteur $x$ non nul tel que $u(x)$ n'appartienne pas à $\mathbb{K}x$. La famille $\big(x, u(x)\big)$ est alors libre, on peut donc la compléter en une base $(x, u(x), e_3, \ldots, e_n)$ de $E$. L'endomorphisme $u$ ne stabilise donc pas l'hyperplan $\operatorname{Vect}(x, e_3, \ldots, e_n)$, ce qui est absurde.

Ainsi, si $u$ stabilise les hyperplans, alors $u$ est une homothétie.

**2.4** 1. Il est évident que $\mathrm{Id}_E$ appartient à $\mathcal{L}_F(E)$ et que l'on a $\varphi(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_F$.

Soit $(u,v) \in \mathcal{L}_F(E)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

Pour tout $x \in F$, on a $u(x) \in F$, $v(x) \in F$ et par suite $(\alpha u + \beta v)(x) \in F$. L'application $\alpha u + \beta v$ appartient donc à $\mathcal{L}_F(E)$ et $(\alpha u + \beta v)_F = \alpha u_F + \beta v_F$. Ainsi, $\mathcal{L}_F(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et $\varphi$ est linéaire.

Soit $(u,v) \in \mathcal{L}_F(E)^2$.

Pour tout $x \in F$, on a $v(x) \in F$ puis $u\big(v(x)\big) \in F$. Ainsi $u \circ v$ appartient à $\mathcal{L}_F(E)$ et $(u \circ v)(x) = u_F\big(v_F(x)\big)$, donc $(u \circ v)_F = u_F \circ v_F$.

Par suite, $\mathcal{L}_F(E)$ est une algèbre et $\varphi$ est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{L}_F(E)$ vers $\mathcal{L}(F)$.

2. Soit $u$ appartenant à $\mathcal{L}_F(E) \cap \mathcal{GL}(E)$. L'endomorphisme induit $u_F$ est injectif (car $\operatorname{Ker} u_F = F \cap \operatorname{Ker} u$). Comme $F$ est de dimension finie, le théorème du rang s'applique et implique la surjectivité et donc la bijectivité de $u_F$.

Pour tout $x$ de $F$, l'unique antécédent $u^{-1}(x)$ de $x$ par $u$ appartient donc à $F$. Ainsi, $u^{-1}$ appartient à $\mathcal{L}_F(E)$. La relation $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E$ entraîne :

$$u_F \circ (u^{-1})_F = (u^{-1})_F \circ u_F = \mathrm{Id}_F,$$

puis $(u^{-1})_F = (u_F)^{-1}$.

3. L'endomorphisme $u : Q \mapsto XQ$, de l'espace des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$, est inversible et stabilise $F = \mathbb{K}[X]$ mais l'endomorphisme induit $u_F$ n'est pas surjectif car l'unité $1$ n'appartient pas à l'image de $\mathbb{K}[X]$ par $u$. Le résultat de la question précédente n'est donc pas vrai si $F$ n'est pas de dimension finie.

4. Supposons que le sous-espace vectoriel $F$ possède un supplémentaire que l'on notera $G$ et notons $p$ la projection de $E$ sur $F$ parallèlement à $G$.

Soit $v \in \mathcal{L}(F)$. L'application $u : E \to E,\ x \mapsto v \circ p(x)$ est un élément de $\mathcal{L}_F(E)$ et $u_F = v$ ; ce qui prouve la surjectivité de $\varphi$.

**2.5** Montrons le résultat par récurrence forte sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$ de $E$.

Si $n = 1$, alors l'endomorphisme $v$ est nul et la proposition est évidente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition soit vraie pour toute dimension strictement inférieure à $n$.

Considérons $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$, avec $\dim E = n$, tels que $u$ et $v$ commutent et $v$ soit nilpotent.

Comme $v$ est nilpotent, l'endomorphisme $v$ n'est pas inversible et la dimension $r$ du sous-espace $F = \operatorname{Im} v$ appartient à $[\![0, n-1]\!]$. Si $v = 0$, alors le résultat est évident. On supposera donc désormais $v$ non nul et donc que $r > 0$.

Choisissons alors une base $\mathcal{B}$ de $E$ adaptée à $F$. Comme $F = \operatorname{Im} v$ est stable par $u$ et $v$, les matrices de $u$ et $v$ dans $\mathcal{B}$ sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $(U_{1,1}, V_{1,1}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})^2$.

Comme $u$ et $v$ commutent, les endomorphismes $u_F$ et $v_F$ induits par $u$ et $v$ sur $F$ aussi. De même, $v_F$ est nilpotent. La dimension de $F$ étant strictement inférieure à $n$, l'hypothèse de récurrence donne :

$$\det(u_F + v_F) = \det u_F$$

soit, en termes de matrices :

$$\det\left(U_{1,1} + V_{1,1}\right) = \det U_{1,1}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} U_{1,1}+V_{1,1} & U_{1,2}+V_{1,2} \\ 0 & U_{2,2}\end{pmatrix} &= \det\left(U_{1,1}+V_{1,1}\right)\det U_{2,2} \\ &= \det U_{1,1}\det U_{2,2}\end{aligned}$$

donc $\det(u+v) = \det u$.

**2.6** 1. L'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 2 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -2 & -2 & X+3 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & -2 & X+3 \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première ligne aux deux autres, on a alors :

$$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)\left(X+1\right)^2.$$

Les valeurs propres de $A$ sont donc $1$ de multiplicité $1$ et $-1$ de multiplicité $2$.

On détermine le sous-espace propre $E_1$ en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y-2z &=& 0 \\ 2x \qquad -2z &=& 0 \\ 2x+2y-4z &=& 0 \end{array}\right.$$

qui est équivalent à $x=y=z$. On a donc $E_1 = \mathbb{R}f_1$ avec $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On détermine le sous-espace propre $E_{-1}$ en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-2z &=& 0 \\ 2x+2y-2z &=& 0 \\ 2x+2y-2z &=& 0 \end{array}\right.$$

qui est équivalent à $2x+2y-2z=0$ donc :

$$E_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (y,z)\in\mathbb{K}^2\right\}.$$

Ainsi $E_{-1} = \mathbb{R}f_2 \oplus \mathbb{R}f_3$ avec $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puisque $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 3$, la matrice $A$ est diagonalisable et $(f_1, f_2, f_3)$ est une base de diagonalisation. Par conséquent :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Puisque $A$ est diagonalisable de spectre $\{-1, 1\}$, le polynôme minimal de $A$ est :

$$\pi_A(X) = (X-1)(X+1).$$

**2.7** 1. En développant par rapport à la deuxième colonne, il vient $\chi_B(X) = (X+1)^3$. La matrice $B$ n'a donc qu'une valeur propre : $-1$. Si elle était diagonalisable, alors elle serait égale à la matrice $-I_3$ ce qui n'est pas le cas. La matrice $B$ n'est donc pas diagonalisable.

2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal de $B$ est un diviseur de $(X+1)^3$.

Posons alors $C = B + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. On a $C \neq 0$ et $C^2 = 0$. Le polynôme minimal de $B$ est donc $\pi_B(X) = (X+1)^2$.

3. On cherche une base $(f_1, f_2, f_3)$ telle que $f_1$ et $f_2$ soit des vecteurs propres de $B$ et que $Bf_3 = f_2 - f_3$ c'est-à-dire $Cf_3 = f_2$.

Si l'on prend un vecteur $f_3$ non nul, alors comme $C^2 = 0$, $Cf_3$, s'il est non nul, est un vecteur propre de $B$. Il suffit de ne pas prendre $f_3$ dans $E_{-1}$ puis de compléter $f_2 = Cf_3$ en une base $(f_1, f_2)$ de $E_{-1}$ pour conclure.

On détermine $E_{-1}$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} 4x + 8z &= 0 \\ 3x + 6z &= 0 \\ -2x - 4z &= 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à $x + 2z = 0$.

Ainsi, le vecteur $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $E_{-1}$. Comme les vecteurs :

$$f_2 = Cf_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $E_{-1}$, la famille $(f_1, f_2, f_3)$ est une base dans laquelle l'endomorphisme $u_B$ canoniquement associé à $B$ est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $B$ est donc semblable à la matrice annoncée.

Plus précisément, on a $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

**2.8** Il s'agit d'un exercice classique où il est difficile d'obtenir le polynôme caractéristique de $A$ sous forme factorisé. On détermine donc ses éléments propres par la résolution de systèmes.

Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur propre de $A$ associé au scalaire $\lambda$. Il est donc non nul et vérifie le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -\lambda x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 & = & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ x_{n-2} - \lambda x_{n-1} + x_n & = & 0 \\ x_{n-1} - \lambda x_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

Si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, la suite $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est le début d'une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre deux :

$$x_{k-2} - \lambda x_{k-1} + x_k = 0.$$

L'équation caractéristique associée est $X^2 - \lambda X + 1$ de discriminant $\Delta = \lambda^2 - 4$.

On étudie les différents cas suivant le signe de $\Delta$.

- Si $\Delta = 0$ c'est-à-dire si $\lambda = \pm 2$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $\varepsilon = \pm 1$ et il existe des scalaires $\alpha$ et $\beta$ tels que :

  $$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = \alpha\varepsilon^k + \beta k\varepsilon^k.$$

  Comme $x_0 = x_{n+1} = 0$, on obtient $\alpha = \beta = 0$ ce qui contredit la non nullité de $X$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2 = 1/r_1$ et il existe des scalaires $\alpha$ et $\beta$ tels que :

  $$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k.$$

  Comme $x_0 = x_{n+1} = 0$, on obtient $\alpha = -\beta$ et $\frac{\alpha}{r_1^{n+1}}\left(r_1^{2n+2} - 1\right) = 0$, ce qui est impossible car $r_1 \neq 1$ et $X \neq 0$.

Par conséquent, si $\lambda$ est valeur propre, alors $\Delta < 0$. Il existe donc $\theta \in ]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$. Les racines de $X^2 - \lambda X + 1$ étant $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, il existe des scalaires $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}.$$

La relation $x_0 = 0$ entraîne $\alpha + \beta = 0$ et :

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = 2\alpha i \sin(k\theta).$$

La relation $x_{n+1} = 0$ et la non nullité de $X$ implique que $\sin\big((n+1)\theta\big) = 0$, c'est-à-dire que $\theta$ est de la forme $\dfrac{\ell\pi}{n+1}$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Il suffit alors de remonter les calculs, pour prouver que, pour tout $l$ de $[\![1,n]\!]$, le vecteur :

$$X_l = \left(\sin\frac{k\ell\pi}{n+1}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$$

est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda_\ell = 2\cos\dfrac{\ell\pi}{n+1}\cdot$

Les réels $\lambda_\ell$, $\ell \in [\![1,n]\!]$, étant deux à deux distincts du fait de l'injectivité de la fonction cos sur $[0,\pi]$, la matrice $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ de spectre :

$$\operatorname{sp}(A) = \left\{2\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) ;\ \ell \in [\![1,n]\!]\right\}$$

et la famille $(X_\ell)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ est une base de diagonalisation.

En fait, la matrice $A$ est symétrique réelle et le théorème spectral (voir le chapitre 14 « Endomorphismes des espaces euclidiens ») prouve *a priori* qu'elle est diagonalisable et que la base $(X_\ell)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ dont les vecteurs sont associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est orthogonale. Nous allons redémontrer cette propriété.

Notons $\varphi = \dfrac{\pi}{n+1}\cdot$ Pour tous $\ell$ et $\ell'$ de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}(X_\ell \mid X_{\ell'}) &= \sum_{k=1}^{n} \sin(k\ell\varphi)\sin(k\ell'\varphi)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\left((\ell-\ell')k\varphi\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\left((\ell+\ell')k\varphi\right).\end{aligned}$$

Pour $x \not\equiv 0[2\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\frac{e^{inx/2}\sin((nx/2)}{e^{ix/2}\sin(x/2)}\right)\\ &= \frac{\cos((n+1)x/2)\sin((nx/2)}{\sin(x/2)}\cdot\end{aligned}$$

En particulier, si $p$ est un entier non multiple de $2(n+1)$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(pk\varphi)$ est nul si $p$ est pair et égal à $-1$ sinon.

Comme $\ell$ et $\ell'$ ont la même parité et appartiennent à $[\![1,n]\!]$, il vient :

$$(X_\ell \mid X_{\ell'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq \ell' \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{sinon}\end{cases}$$

Finalement, la famille $\left(\sqrt{\dfrac{2}{n+1}}X_\ell\right)_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ est une base orthonormée de diagonalisation de $A$.

La matrice de passage $P$ correspondante est donc orthogonale et $P^{-1} = {}^tP$.

**2.9** Comme $A$ est annulée par le polynôme $X(X^2{+}X{+}1)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et la dimension de son noyau est égal à la multiplicité de 0 dans $\chi_A$ De plus, ses valeurs propres appartiennent à $\{0, j, j^2\}$ donc il existe des entiers $p$ et $q$ tels que Son polynôme caractéristique $\chi_A$ soit égal à :

$$\chi_A(X) = X^{n-p-q}\,(X-j)^p\,\left(X-j^2\right)^q.$$

La matrice $A$ étant réelle, son polynôme caractéristique aussi, donc $p=q$. Le théorème du rang donne alors $\operatorname{rg} A = 2p$.

**2.10** La matrice $A$ est annulée par le polynôme $P = X^3 - 3X - 5$. L'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^3 - 3x - 5$ montre que $P$ a une unique racine réelle $\alpha$ strictement positive. Ses deux autres racines dans $\mathbb{C}$ sont donc complexes conjuguées. Il existe donc $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que :

$$P = (X-\alpha)(X-\omega)(X-\overline{\omega})$$

Puisque $P$ annule $A$ ses valeurs propres appartiennent à $\{\alpha, \omega, \overline{\omega}\}$ donc il existe des entiers $p$ et $q$ tels que

$$\chi_A(X) = (X-\alpha)^{n-p-q}(X-\omega)^p(X-\overline{\omega})^q.$$

Comme $A$ est une matrice réelle, le polynôme $\chi_A$ aussi, d'où $p=q$. Par conséquent :

$$\det A = (-1)^n \chi_A(0) = \alpha^{n-2p}\,|\omega|^{2p} > 0.$$

**2.11** Raisonnons par analyse-synthèse.

- Considérons une matrice $M$ solution.

  La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est annulée par son polynôme caractéristique $X(X-2)$.

  Le polynôme $(X^2+X)(X^2+X-2) = X(X+1)(X-1)(X+2)$ annule donc $M$. Comme ce polynôme est scindé à racines simples, on en déduit que $M$ est diagonalisable.

  Soit $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

  On a alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha^2+\alpha & 0 \\ 0 & \beta^2+\beta \end{pmatrix}$

  La matrice $M$ a donc comme polynôme caractéristique (et donc annulateur) un des quatre polynômes suivants : $X(X-1)$, $X(X+2)$, $(X+1)(X-1)$ ou $(X+1)(X+2)$.

  ∗ Dans le premier cas, les relations $M^2+M=A$ et $M^2-M=0$ donnent $M = \frac{1}{2}A$ ;

  ∗ dans le deuxième cas, les relations $M^2+M=A$ et $M^2+2M=0$ donnent $M=-A$ ;

  ∗ dans le troisième cas, les relations $M^2+M=A$ et $M^2-I_n=0$ donnent $M = A - I_n$ ;

  ∗ dans le dernier cas, les relations $M^2+M=A$ et $M^2+3M+2I_n=0$ donnent $M = -\frac{1}{2}A - I_n$.

- On vérifie que les quatre matrices conviennent.

Par conséquent $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

**2.12** La matrice $A$ annule le polynôme $X^p - 1$ dont les racines complexes sont simples. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres sont des racines $p$-ièmes de l'unité. Ainsi, $A$ est semblable, à une matrice diagonale $\operatorname{Diag}(\alpha, \beta)$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des racines $p$-ième de l'unité.

D'un autre côté, le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + aX + b$ de $A$ est à coefficients entiers. La relation $a = -\operatorname{Tr} A = -(\alpha + \beta)$ montre, du fait de l'inégalité triangulaire, que $a$ est un entier de module inférieur ou égal à 2 et que $b = \det A = \alpha\beta$ est un entier de module 1 c'est-à-dire $b = \pm 1$.

- Si $A$ possède un valeur propre réelle, alors comme $a$ est réel, l'autre valeur propre est également réelle. Comme $\alpha$ et $\beta$ sont des racines $p$-ièmes de l'unité, la matrice $A$ est alors semblable à $\operatorname{Diag}(1,1)$, $\operatorname{Diag}(1,-1)$ ou $\operatorname{Diag}(-1,-1)$ et $A^2 = I_2$.
- Si $A$ possède une valeur propre non réelle, $e^{i\theta}$ avec $\theta \not\equiv 0[\pi]$, alors l'autre est conjuguée et leur produit $b$ vaut 1. On en déduit que $a = -2\cos\theta \in \{-1, 0, 1\}$ car $a$ est un entier et $\theta \not\equiv 0[\pi]$. Le polynôme caractéristique est alors égal à $X^2 + X + 1$, $X^2 - X + 1$ ou $X^2 + 1$. La matrice $A$ est semblable à :
  - ∗ $\operatorname{Diag}(j, j^2)$ et dans ce cas $A^3 = I_2$ ;
  - ∗ $\operatorname{Diag}(-j^2, -j)$ et dans ce cas $A^6 = I_2$
  - ∗ ou $\operatorname{Diag}(i, -i)$ et dans ce cas $A^4 = I_2$.

Dans tous les cas, $A^{12} = I_2$ et 12 est le plus petit entier convenable.

**2.13** 1. Supposons par l'absurde que $\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ ne soit pas un plan. Comme le vecteur $x$ est non nul, il existe donc un réel $\lambda$ tel que $u(x) = \lambda x$. Le réel $\lambda$ étant une valeur propre de $u$, c'est une racine du polynôme annulateur $X^2+X+1$, ce qui est absurde car ce polynôme n'a pas de racine réelle. Par conséquent, $\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan.

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$u\left(\lambda x + \mu u(x)\right) = -\mu x + (\lambda - \mu)u(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, u(x)\right)$$

donc $\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est stable par $u$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $y$ non nul dans $F \cap \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$. Comme cette intersection est stable par $u$, elle contient $\operatorname{Vect}\big(y, u(y)\big)$, qui, d'après ce qui précède, est un plan. Pour des raisons de dimensions, on a donc :

$$F \cap \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big) = \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big),$$

puis $\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big) \subset F$, ce qui n'est pas possible car $x \notin F$.

Ainsi, $F$ et $\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ sont en somme directe.

2. Commençons par remarquer que si la matrice de $u$ dans une base $(e_1, \cdots, e_n)$ est de la forme annoncée, alors $n$ est pair et pour tout $k \in [\![1, n/2]\!]$, $u(e_{2k-1}) = e_{2k}$.

Réciproquement, s'il existe une base de la forme $\big(e_1, u(e_1), \ldots, e_{n/2}, u(e_{n/2})\big)$, alors pour tout $k \in [\![1, n/2]\!]$ :

$$u(e_{2k}) = u^2(e_{2k-1}) = -u((e_{2k-1})) - (e_{2k-1}) = -e_{2k} - e_{2k-1}$$

donc la matrice de $u$ dans cette base est de la forme annoncée.

On considère donc l'ensemble $A$ des entiers $k$ tels qu'il existe $x_1, \ldots, x_k$ de $\mathbb{R}^n$ avec $\big(x_1, u(x_1), \ldots, x_k, u(x_k)\big)$ libre.

En utilisant la question précédente avec $F = \{0\}$, on montre que $A$ est non vide. Elle est également bornée puisqu'une famille libre est de cardinal inférieur ou égal à $n$. Elle admet donc un maximum que nous noterons $p$. Il existe alors des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\big(x_1, u(x_1), \ldots, x_p, u(x_p)\big)$ soit libre. Le sous-espace :

$$F = \operatorname{Vect}\big(x_1, u(x_1), \ldots, x_p, u(x_p)\big) = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}\big(x_k, u(x_k)\big)$$

est stable par $u$. S'il n'est pas égal à $\mathbb{R}^n$, alors il existe $x_{p+1} \notin F$ et, d'après la question précédente, $\operatorname{Vect}\big(x_{p+1}, u(x_{p+1})\big)$ est en somme directe avec $F$. La famille $\big(x_1, u(x_1), \ldots, x_{p+1}, u(x_{p+1})\big)$ est alors libre ce qui contredit la définition de $p$. On a donc $F = \mathbb{R}^n$, et par conséquent $\big(x_1, u(x_1), \ldots, x_p, u(x_p)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de $u$ est de la forme désirée. On a aussi $n = 2p$.

**2.14** 1. Si un nombre complexe $\alpha$ est valeur propre d'une matrice à coefficients rationnels, alors, il est racine de son polynôme caractéristique qui est unitaire et à coefficient rationnels, donc $\alpha$ est algébrique.

Réciproquement, si un nombre complexe $\alpha$ est algébrique, alors il est racine d'un polynôme unitaire $P(X) = X^p + r_1 X^{p-1} + \cdots + r_p$ de $\mathbb{Q}[X]$. La matrice compagnon :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -r_p \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & -r_1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_p(\mathbb{Q})$ étant de polynôme caractéristique $P$, $\alpha$ est valeur propre de $C$.

2. Soit $\alpha$ un nombre complexe algébrique. Il est alors valeur propre d'une matrice $M$ à coefficient rationnels. Pour tout entier $r$, $\alpha^r$ est alors valeur propre de $M^r$ qui est à coefficients rationnels, ce qui prouve que $\alpha^r$ est algébrique.

**2.15** 1. L'endomorphisme $P(X) \mapsto P(X+1)$ de $\mathbb{K}[X]$ induit un endomorphisme $u$ de $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Notons :

$$\chi(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

son polynôme caractéristique. Puisque $u^k(P)$ est égal à $P(X+k)$, on a d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

2. L'endomorphisme $\Delta = u - \mathrm{Id}_E$ est nilpotent et vérifie $\Delta^n = 0$ puisque, pour $P$ non constant, $\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$. On a donc :
$$0 = (u - \mathrm{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k$$
et :
$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k) = 0.$$
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $a_k = (-1)^{k-n}\binom{n}{k}$ de sorte que :
$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

**2.16** Le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A(X) = (X-1)^2(X+1)$ et les sous espaces propres sont $E_1 = \mathbb{R}e_1$ et $E_{-1} = \mathbb{R}e_{-1}$ avec :
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Soit $F$ un sous-espaces stable par l'endomorphisme $u$.

- Si $F$ est de dimension $0$ ou $3$, il est respectivement égal à $\{0\}$ ou $\mathbb{R}^3$.
- Si $F$ est de dimension $1$, alors $F$ est une droite engendrée par un vecteur propre de $A$ c'est-à-dire $F = \mathbb{R}e_1$ ou $F = \mathbb{R}e_{-1}$.
- Si $F$ est de dimension 2, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit est un polynôme de degré deux divisant $\chi_A$.

  Il vaut donc $(X-1)^2$ ou $(X-1)(X+1)$.

  Dans le premier cas, $F$ est contenu dans le noyau de $(A - I_3)^2$ qui est égal au plan d'équation $2x - 2y - z = 0$.

  Dans le second cas, $F$ contient un vecteur propre associé à 1 et un vecteur propre associé à $-1$. Il est donc égal à $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_{-1}$.

Ainsi, les sous-espaces stables par $u$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}e_{-1}$, $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_{-1}$ et le plan d'équation $2x - 2y - z = 0$.

**2.17** 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :
$$a \circ u = \lambda u \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, u \subset E_\lambda(a).$$
Ainsi, $E_\lambda(M_a) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\, u \subset E_\lambda(a)\}$. En particulier,
$$E_\lambda(M_a) \simeq \mathcal{L}(E, E_\lambda(a)),$$
ce qui prouve que $M_a$ et $a$ ont les mêmes valeurs propres. De plus, pour tout scalaire $\lambda$, $\dim E_\lambda(M_a) = \dim E \times \dim E_\lambda(a)$. Comme $\dim \mathcal{L}(E) = \dim E \times \dim E$, on en déduit que $M_a$ est diagonalisable si, et seulement si, $a$ l'est.

2. Supposons $a$ diagonalisable et considérons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de diagonalisation de $a$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées

   Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $u_{i,j}$ l'endomorphisme de $E$ défini par :
$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i.$$
   La famille $(u_{i,j})_{1 \leqslant i,jn}$ est alors une base de diagonalisation de $ad(a)$. En effet, pour tout $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, on a :
$$\begin{aligned} ad\,(u_{i,j})\,(e_k) &= a\big(u_{i,j}(e_k)\big) - u_{i,j}\big(a(e_k)\big) = \lambda_i u_{i,j}(e_k) - u_{i,j}\,(\lambda_k e_k) \\ &= \lambda_i u_{i,j}(e_k) - \lambda_k \delta_{j,k} e_i = \lambda_i u_{i,j}(e_k) - \lambda_j \delta_{j,k} e_i \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)\, u_{i,j}(e_k) \end{aligned}$$
   donc $ad(a)(u_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)\, u_{i,j}$.

   Par conséquent, $ad(a)$ est diagonalisable et $\operatorname{sp}(ad(a)) = \{\lambda_i - \lambda_j \;;\; (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$.
3. Supposons $a$ nilpotent. Il existe donc un entier $p$ tel que $a^p = 0$. On a alors :
$$\big(M_a\big)^p(u) = a^p \circ u = 0$$
   soit $(M_a)^p = 0$. Ainsi l'endomorphisme $M_a$ est nilpotent.

   Notons $N_a$ l'endomorphisme $u \mapsto u \circ a$ de $\mathcal{L}(E)$. On a de même $(N_a)^p = 0$. Comme $M_a$ et $N_a$ commutent, la formule du binôme fournit :
$$\big(ad(a)\big)^{2p-1} = (M_a - N_a)^{2p-1} = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k \binom{2p-1}{k} (M_a)^{2p-1-k} \circ (N_a)^k.$$
   Pour tout $k$ de $[\![0, p-1]\!]$, on a $2p-1-k \geqslant p$ donc $(M_a)^{2p-1-k} = 0$ puis $(M_a)^{2p-1-k} \circ (N_a)^k = 0$. De même, pour tout $k$ de $[\![p, 2p-1]\!]$, on a $(N_a)^k = 0$ puis $(M_a)^{2p-1-k} \circ (N_a)^k = 0$.

   Ainsi $ad(a)^{2p-1} = 0$, ce qui prouve que $ad(a)$ est nilpotent.

**2.18** On peut, quitte à remplacer $u$ par $u - \lambda \operatorname{Id}_E$, supposer que la valeur propre $\lambda$ est nulle.

- Supposons $(i)$ et montrons $(ii)$. Grâce au théorème du rang, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont en somme directe. Soit $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$. Par définition, $u(x) = 0$ et il existe $t$ tel que $x = u(t)$. Ainsi, $u^2(t) = 0$ donc $t \in \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ puis $x = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$.
- Supposons $(ii)$ et montrons $(iii)$. Comme $\operatorname{Im} u$ est stable par $u$, l'implication est évidente.
- Supposons $(iii)$ et montrons $(iv)$. On a $E = \operatorname{Ker} u \oplus F$ avec $F$ stable par $u$. On peut donc définir $u'$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$. Comme $\operatorname{Ker} u$ et $F$ sont stables par $u$, un déterminant par blocs donne :
$$\chi_u(X) = \chi_{u'}(X) X^d,$$
  où $d = \dim \operatorname{Ker} u$. Comme $F$ et $\operatorname{Ker} u$ sont en somme directe, 0 n'est pas valeur propre de $\chi_{u'}$, la multiplicité de 0 dans $\chi_u$ est égale à $d$.

- Supposons $(iv)$ et montrons $(v)$. Par hypothèse, $\chi_u(X) = X^d P(X)$ où $d = \dim \operatorname{Ker} u$ et $P$ est un polynôme tel que $P(0) \neq 0$. Les polynômes $P$ et $X^d$ étant premiers entre eux, le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton donne :
$$E = \operatorname{Ker} u^d \oplus \operatorname{Ker} P(u).$$
Si l'on note, $u'$ et $u''$ les endomorphismes respectivement induits par $u$ sur $\operatorname{Ker} u^d$ et $\operatorname{Ker} P(u)$, alors $\chi_u(X) = \chi_{u'}(X)\chi_{u''}(X) = X^{d'}\chi_{u''}(X)$ avec $d' = \dim \operatorname{Ker} u^k$. L'endomorphisme $u''$ étant annulé par $P$ donc il n'admet pas 0 comme valeur propre. Par conséquent, $d' = d$. Comme $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^d$, on en déduit que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^k$ puis que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} P(u)$. Le polynôme $XP(X)$ annule donc $u$, ce qui prouve que 0 est racine simple du polynôme minimal de $u$.
- Supposons $(v)$ et montrons $(i)$. Comme $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$, il suffit de prouver que $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$. Par hypothèse, le polynôme minimal de $u$ est de la forme $XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$ donc, d'après le lemme des noyaux, on a $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$. Il existe donc $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker} Q(u)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Comme $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} Q(u)$ sont stables par $u$ et en somme directe, l'égalité $u^2(x) = u^2(x_1) + u^2(x_2) = 0$ donne $x_2 \in \operatorname{Ker} Q(u) \cap \operatorname{Ker} u^2$. Les polynômes, $X^2$ et $Q$ étant en somme directe, on en déduit que $x_2 = 0$ puis que $x = x_1 \in \operatorname{Ker} u$.

**2.19** 1. Les opérations élémentaires $C_{i+n} \leftarrow C_{i+n} + XC_i$ puis $C_i \leftrightarrow C_{i+n}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ donnent :
$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n & -A + X^2 I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -A + X^2 I_n & XI_n \\ 0 & -I_n \end{vmatrix}.$$
Ainsi, $\chi_B(X) = (-1)^{2n} \det\left(X^2 I_n - A\right) = \chi_A(X^2)$.

2. Comme $\chi_B(X) = \chi_A(X^2)$, un nombre complexe $\lambda$ est valeur propre de $B$ si, et seulement si, $\lambda^2$ est valeur propre de $A$. Si l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres distinctes de $A$ et $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_d}$ leurs multiplicité dans $\chi_A$, alors :
$$\chi_B(X) = \prod_{i=1}^{d} \left(X^2 - \lambda_i\right)^{m_{\lambda_i}} = \prod_{i=1}^{d} (X - \mu_i)^{m_{\lambda_i}} (X + \mu_i)^{m_{\lambda_i}},$$
où, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $\mu_i$ est une racine carrée de $\lambda_i$.

On en déduit tout valeur propre $\mu$ non nulle de $B$, a une multiplicité dans $\chi_B$ égale à $m_{\mu^2}$ si $\mu$ est non nul et $2m_0$ sinon.

Déterminons la dimension des espaces propres de $B$ en fonction de ceux de $A$.

Soit $\mu$ une valeur propre de $B$. Un vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ appartient au sous-espace propre $E_\lambda(B)$ si, et seulement si, on a :
$$\begin{cases} AY = \mu X \\ X = \mu Y \end{cases}$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $Y \in E_{\mu^2}(A)$ et $X = \mu Y$. L'application :

$$\begin{array}{rcl} E_{\mu^2}(A) & \longrightarrow & E_\mu(A) \\ Y & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mu Y \\ Y \end{pmatrix} \end{array}$$

est donc un isomorphisme d'où $\dim E_\mu(B) = \dim E_{\mu^2}(A)$ pour tout $\mu \in \operatorname{sp} B$.

Comme $B$ est diagonalisable si, et seulement si, pour tout $\mu \in \operatorname{sp}(B)$ la dimension de $E_\mu(B)$ est égale à la multiplicité de $\mu$ dans $\chi_B$, on en déduit que :

- si 0 n'est pas valeur propre de $A$, alors $B$ est diagonalisable si, et seulement si, $A$ l'est ;
- si 0 est valeur propre de $A$, alors $B$ n'est pas diagonalisable.

**2.20** On étudie la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique, $X^2 - 3X + 2$, est scindé simple de racines 1 et 2, donc la matrice $U$ est diagonalisable. Plus précisément, on a :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que :

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$$

et que :

$$\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix};$$

ce qui prouve que la matrice $B$ est semblable à $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.

- Si $B$ est diagonalisable, alors la matrice $C$ aussi donc il existe un polynôme $P$ scindé à racines simples tel que $P(C) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(2A) \end{pmatrix} = 0$ donc la matrice $A$ est diagonalisable.
- Si $A$ est diagonalisable, alors il existe une matrice $P$ inversible et une matrice diagonale $D$ telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ainsi, $C$ est diagonalisable donc $B$ aussi.

**2.21** 1. Comme la matrice $A$ est inversible, alors $AB = A\,(BA)\,A^{-1}$ donc les matrices $AB$ et $BA$ sont semblables. En particulier, $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.

2. En écrivant $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $B_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$, on obtient :

$$J_r B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B J_r = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\chi_{J_r B} = \chi_{BJ_r} = X^{n-r}\chi_{B_1}(X)$.

3. La matrice $A$ est équivalente à la matrice $J_r$ où $r = \operatorname{rg} A$ .Il existe donc deux matrices inversibles $P$ et $Q$ telles que $A = PJ_rQ$. Comme $P$ est inversible, on a :

$$\chi_{AB}(X) = \chi_{PJ_rQB}(X) = \chi_{J_rQBP}(X)$$

donc, d'après la question précédente, $\chi_{AB}(X) = \chi_{QBPJ_r}(X)$. La matrice $Q$ étant inversible, on en déduit que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BPJ_rQ}(X) = \chi_{BA}(X)$.

**2.22** Supposons qu'il existe une matrice $U$ non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AU = UB$. Pour tout scalaire $\lambda$, on a $(A - \lambda I_n)\,U = U\,(B - \lambda I_n)$. Comme $\chi_B$ est scindé dans $\mathbb{C}$, on en déduit que $\chi_B(A)U = U\chi_B(B) = 0$ d'après le théorème de Cayley Hamilton. La matrice $\chi_B(A)$ est donc non inversible. Si l'on pose $\chi_B(X) = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \lambda_i)$, alors le produit des matrices $A - \lambda_i I_n$ est non inversible donc il existe une valeur propre de $B$ telle que $A - \lambda I_n$ soit non inversible, c'est-à-dire une valeur propre commune.

Réciproquement, supposons que les matrices $A$ et $B$ possède une valeur propre commune $\lambda$, alors $\lambda$ est aussi valeur propre de ${}^tB$ puisqu'une matrice et sa transposée ont le même spectre. Il existe donc deux vecteurs colonnes non nuls $X$ et $Y$ tels que l'on a ait $AX = \lambda X$ et ${}^tBY = \lambda Y$. La matrice $U = X\,{}^tY$ vérifie alors :

$$AU = AX\,{}^tY = \lambda X\,{}^tY \qquad \text{et} \qquad UB = X\,{}^tYB = X\,{}^t\big({}^tBY\big) = \lambda X\,{}^tY.$$

Comme les vecteurs $X$ et $Y$ sont non nuls, la matrice $U$ est non nulle car il existe un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $U_{i,j} = X_iY_j \neq 0$.

**2.23** Supposons qu'il existe une matrice $U$ de rang $r$ tel que $AU = UB$. Il existe alors deux matrices inversibles $P$ et $Q$ telles que $U = PJ_rQ$. La relation $APJ_rQ = PJ_rQB$ donne alors $A'J_r = J_rB'$ avec $A' = P^{-1}AP$ et $B' = QBQ^{-1}$.

Si l'on écrit $A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ A'_3 & A'_4 \end{pmatrix}$, avec $A'_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $A'_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ et, de même, $B' = \begin{pmatrix} B'_1 & B'_2 \\ B'_3 & B'_4 \end{pmatrix}$, avec $B'_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $B'_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$, alors on a :

$$A'J_r = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 \\ A'_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J_rB' = \begin{pmatrix} B'_1 & B'_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A'_1 = B'_1$, $A'_3 = 0$ et $B'_2 = 0$.

Par suite, $\chi_A = \chi_{A'} = \chi_{A'_1}(X)\chi_{A'_4}(X)$ et $\chi_B(X) = \chi_B(X) = \chi_{B'_1}(X)\chi_{B'_4}(X)$. Ainsi, $\chi_A(X)$ et $\chi_B(X)$ ont un facteur de degré $r$ en commun : $\chi_{A'_1}(X)$.

**2.24** 1. Comme $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $u$ possède une valeur propre $\lambda$. Le sous-espace propre associé est stable par $v$ car $u$ et $v$ commutent. L'endomorphisme $v'$ induit par $v$ sur $E_\lambda(u)$ possède alors un vecteur propre $x$ qui est un vecteur propre de $v$ car $v(x) = v'(x)$ et un vecteur propre de $u$ puisque $x \in E_\lambda(u)$.

2. Pour tout entier $k$, on a $u^{k+1} \circ v - v \circ u^{k+1} = u \circ \big(u^k \circ v - v \circ u^k\big) + (u \circ v - v \circ u) \circ u^k$, ce qui permet de prouver par récurrence que, pour tout entier $k$, on a :

$$u^k \circ v - v \circ u^k = \alpha k u^k.$$

Ainsi, pour tout polynôme $P$, on a $P(u) \circ v - v \circ P(u) = \alpha u \circ P'(u)$. Comme $E$ est de dimension finie, on peut considérer $\pi_u$ le polynôme minimal de $u$. Comme $\alpha \neq 0$, le polynôme $X\pi_u'(X)$ annule $u$. Pour des raisons de degré, il existe donc un scalaire $C$ non nul tel que :

$$\pi_u = CX\pi_u'(X).$$

Si l'on considère une racine non nulle $z$ de $\pi_u$ de multiplicité $m$, alors $z$ est une racine de $X\pi_u'(X)$ de multiplicité $m-1$ ce qui est absurde. Par conséquent, $\pi_u$ n'a que 0 comme racine, ce qui prouve qu'il est de la forme $X^d$ et donc que $u$ est nilpotent.

En particulier, $\operatorname{Ker} u$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et est stable par $v$ car si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $u\,(v(x)) = v \circ u(x) + \alpha u(x) = 0$. L'endomorphisme $v'$ induit par $v$ sur $\operatorname{Ker} u$ possède alors un vecteur propre qui est un vecteur propre commun à $u$ et $v$.

3. Supposons qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u \circ v - v \circ u = \alpha u + \beta v$.

Si $\beta = 0$, alors on conclut grâce à la question précédente. Sinon, l'endomorphisme $w = u \circ v - v \circ u$ vérifie alors $u \circ w - w \circ u = \beta w$ et la question précédente implique que les endomorphismes $u$ et $w$ possèdent un vecteur propre $x$ commun. Il existe donc deux nombres complexes $\lambda$ et $\mu$ tels que $u(x) = \lambda x$ et $w(x) = \mu x$. Comme $\beta$ est non nul, on en déduit que $v(x) = \dfrac{\mu - \alpha\lambda}{\beta} x$. Le vecteur $x$ est donc un vecteur propre commun à $u$ et $v$.

**2.25** Si $B$ est la matrice nulle alors le résultat est évident.

On suppose donc désormais que $B$ est non nul.

Démontrons le résultat par récurrence sur $n$.

Si $n = 1$ alors le résultat est évident.

Soit $n \geqslant 2$ tel que le résultat soit vrai pour des matrices de taille $n-1$.

Notons $a$ et $b$ les endomorphismes canoniquement associés aux matrices $A$ et $B$.

Comme $B$ est non nul, l'image de $b$ est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et stable par $b$. L'endomorphisme induit par $b$ sur $\operatorname{Im} b$ possède alors un vecteur propre $x$ car le corps de base est $\mathbb{C}$. Le vecteur $x$ est alors un vecteur propre de $b$. De plus, il appartient à l'image de $b$ donc au noyau de $a$ car la relation $AB = 0$ donne $a \circ b = 0$. Par conséquent, $a$ et $b$ possèdent un vecteur propre commun.

Soit $\mathcal{B}$ une base de premier vecteur $x$. Les matrices de $a$ et $b$ dans $\mathcal{B}$ sont alors de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} \mu & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec $A''$ et $B''$ de taille $n-1$. Il suffit alors de montrer que les matrices $A'$ et $B'$ sont simultanément trigonalisables pour conclure.

Comme $a \circ b = 0$, on a $A''B'' = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc $P \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}A''P$ et $P^{-1}B''P$ soient triangulaires supérieures.

Considérons la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Un calcul matriciel par blocs permet de vérifier que $Q$ est inversible d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et que les matrices $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ soient triangulaires supérieures ; ce qui conclut la récurrence.

**2.26** Comme $A$ et $B$ commutent, on prouve par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout polynôme $P$ :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

En particulier, si $M$ est diagonalisable, alors il existe un polynôme $P$ scindé à racines simples qui annule $M$. On en déduit, que $P(A) = 0$ puis que $A$ est diagonalisable. De plus, $P'$ est premier avec $P$. Il existe donc des polynômes $U$ et $V$ tels que :

$$UP + VP' = 1.$$

Par suite $B = U(A)P(A)B + V(A)P'(A)B = 0$.

Réciproquement, si $A$ est diagonalisable et $B = 0$, alors il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

et prouve que $M$ est diagonalisable.

Par conséquent, $M$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice $A$ est diagonalisable et la matrice $B$ est nulle.

**2.27** Si $u$ est nilpotent, il existe une base dans laquelle la matrice $A$ de $u$ est triangulaire supérieure stricte. Les matrices $A^k$ étant triangulaires supérieures strictes pour tout $k > 0$, on a $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k > 0$.

Nous prouverons la réciproque par récurrence sur $n$. Elle est évidente pour $n = 1$. Supposons le résultat acquis en dimension strictement inférieure à $n$.

Soit $u$ vérifiant $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Le théorème de Cayley-Hamilton donne :

$$\chi(u) = u^n + \alpha_1 u^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} u + (-1)^n \det u \,\mathrm{Id}_E = 0$$

puis :

$$\mathrm{Tr}(u^n) + \alpha_1 \mathrm{Tr}(u^{n-1}) + \cdots + \alpha_{n-1} \mathrm{Tr}(u) + (-1)^n \det u \,\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_E) = 0,$$

c'est-à-dire $\det u = 0$ puisque $\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_E) = n \neq 0$. L'endomorphisme $u$ n'est donc pas inversible. D'après le théorème du rang, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension strictement inférieure à $n$.

Dans une base adaptée à $\mathrm{Im}\, u$, la matrice de $u^k$ est :

$$\begin{pmatrix} B^k & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $B$ est la matrice de $v$, l'endomorphisme induit par $u$ sur $\mathrm{Im}\, u$.

On en déduit que $\mathrm{Tr}(v^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, \mathrm{rg}\, u]\!]$ et, par hypothèse de récurrence, que $v$ est nilpotent. On a donc, en posant $r = \mathrm{rg}\, u$, $v^r = 0$.

Ainsi, pour tout $y \in \mathrm{Im}\, u$, on a $u^r(y) = 0$. Par conséquent, pour tout $x \in E$, on a :

$$u^{r+1}(x) = u^r\left(u(x)\right) = 0$$

donc $u^{r+1} = 0$ ; ce qui conclut la récurrence.

**2.28** 1. (a) Comme $G$ est fini, tout élément $g$ de $G$ est d'ordre fini et il existe par conséquent $N_g \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{N_g} = I_n$.

(b) Comme $G$ est fini, $\{\mathrm{Tr}\, g\,;\ g \in G\}$ aussi.
Pour tout $g \in G$, le polynôme $X^{N_g} - 1$ est scindé à racines simples et annule $g$, donc $g$ est diagonalisable.

2. Supposons que tous les éléments de $G$ soient diagonalisables et que $\{\mathrm{Tr}\, g\,;\ g \in G\}$ soit fini et montrons que $G$ est fini.

L'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(G)$ est de dimension finie car inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De la partie génératrice $G$, on peut donc extraire une base $(A_1, \ldots, A_p)$. Comme $\{\mathrm{Tr}\, g\,;\ g \in G\}$ est fini, l'application $f : X \in G \mapsto (\mathrm{Tr}(A_1 X), \ldots, \mathrm{Tr}(A_p X))$ est à valeurs dans un ensemble fini. Il suffit donc de prouver que $f$ est injective pour conclure.

Soit $(g, g') \in G^2$ tel que $f(g) = f(g')$. Par linéarité de la trace, on a donc $\mathrm{Tr}(hg) = \mathrm{Tr}(hg')$ pour tout $h \in \mathrm{Vect}(G)$. Pour tout $h \in G$, $hg^{-1} \in G$ donc $\mathrm{Tr}(hg^{-1}g) = \mathrm{Tr}(hg^{-1}g')$ puis $\mathrm{Tr}\left(h\left(g^{-1}g' - I_n\right)\right) = 0$. Par linéarité de la trace, on a donc :

$$\forall h \in \mathrm{Vect}(G) \quad \mathrm{Tr}\left(h\left(g^{-1}g' - I_n\right)\right) = 0.$$

En particulier, comme $g^{-1}g' - I_n \in \mathrm{Vect}(G)$, pour tout entier $k$, on a :

$$\mathrm{Tr}\left(\left(g^{-1}g' - I_n\right)^k\right) = 0.$$

En utilisant l'exercice 2.27, on en déduit que $g^{-1}g' - I_n$ est nilpotent. Or, $g^{-1}g'$ appartient à $G$ donc il est diagonalisable. Par conséquent, $g^{-1}g' - I_n$ aussi et, comme il est nilpotent, il s'agit de l'endomorphisme nul d'où $g = g'$, ce qui achève la démonstration.