Chapitre 12 : Intégration sur un intervalle quelconque

Intégration sur un intervalle quelconque

12

Dans ce chapitre, on cherche à étendre la notion d'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment au cas de certaines fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ considérés dans ce chapitre seront tous d'intérieur non vide.

Rappelons la définition d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle.

Définition 1

1. Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, s'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de ce segment telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ possède un prolongement continu sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$.
2. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, on note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ une primitive quelconque de f.

I Intégrale généralisée sur un intervalle $[a,+\infty[$

Dans cette section, on fixe $a \in \mathbb{R}$.

1 Généralités

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **converge**, si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **diverge**.

Point méthode

Prenons le cas où f est continue et notons F une primitive de f.

Puisque $\displaystyle\int_a^x f = [F]_a^x = F(x) - F(a)$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ équivaut à l'existence dans $\mathbb{K}$ de $\displaystyle\lim_{+\infty} F$ et, dans ce cas, l'on a :

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{+\infty} F - F(a).$$

Remarque Bien sûr, dans le point méthode précédent, la caractérisation de la convergence et, en cas de convergence, la valeur de l'intégrale ne dépendent pas de la primitive F choisie, puisque, si G est une autre primitive de f, il existe une constante $k \in \mathbb{K}$ telle que $G = F + k$.

Exemples

1. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$ diverge.

   La fonction $\cos$ est continue sur $[0,+\infty[$ et l'une de ses primitives est la fonction $\sin$, qui ne possède pas de limite en $+\infty$; d'où la conclusion.

2. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.

   La fonction $f : t \longmapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'une de ses primitives est $F = -f$. Comme $\displaystyle\lim_{+\infty} F$ existe et est nulle, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

   $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{+\infty} F - F(0) = 1.$$

   Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et l'on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.

p.685

Exercice 1 Déterminer la nature (convergente ou divergente) et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

p.685

Exercice 2
Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}} \mathrm{d}t$.

On peut noter un parallèle entre l'étude des intégrales généralisées sur un intervalle $[a,+\infty[$ et celle des séries numériques. Dans ce parallèle, l'analogue du terme général est la fonction f, dont on cherche à définir l'intégrale sur $[a,+\infty[$, et l'analogue des sommes partielles est la fonction définie sur $[a,+\infty[$ par $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$.

Dans le prochain exemple, nous allons constater une différence importante dans ce parallèle entre « séries numériques » et « intégrales généralisées ».

Attention

- Comme pour les séries numériques, le fait que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ n'entraîne pas que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

p.685

Exercice 3 Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{CM}\big([1,+\infty[,\mathbb{K}\big)$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ diverge.

- En revanche, contrairement à ce qui se passe pour les séries numériques, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ n'entraîne pas que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, ni même que f est bornée.

Exemple On définit la fonction f continue et affine par morceaux sur $[0,+\infty[$ de la façon suivante :

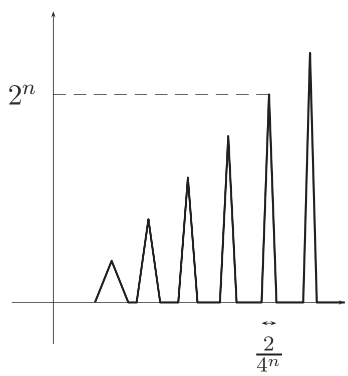
∗ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est affine sur les intervalles $[n-\frac{1}{4^n}, n]$ et $[n, n+\frac{1}{4^n}]$,

∗ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f\left(n-\frac{1}{4^n}\right) = f\left(n+\frac{1}{4^n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad f(n) = 2^n,$$

(ainsi f n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$),

∗ en dehors des intervalles $[n-\frac{1}{4^n}, n+\frac{1}{4^n}]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est nulle.



Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{4^n}}^{n+\frac{1}{4^n}} f$ est égale à l'aire d'un triangle dont l'un des côtés a pour longueur $\left(n+\frac{1}{4^n}\right)-\left(n-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{2}{4^n}$ et dont la hauteur orthogonale à ce côté a pour longueur 2^n ; on en déduit :

$$\int_{n-\frac{1}{4^n}}^{n+\frac{1}{4^n}} f = \frac{1}{2}\,\frac{2}{4^n}\,2^n = \frac{1}{2^n}\cdot$$

Comme la fonction f est positive, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$; pour conclure, il suffit donc, d'après le théorème de la limite monotone, d'établir que cette dernière fonction est majorée.
Or, pour tout $x \geqslant 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+\frac{1}{4^n} \geqslant x$; on a alors :

$$\int_0^x f \leqslant \int_0^{n+\frac{1}{4^n}} f = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^p} = 1-\frac{1}{2^n} \leqslant 1,$$

d'où la conclusion.

Proposition 1

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $b \in [a,+\infty[$.
Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux.

De plus, si elles convergent, on a l'égalité :

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 685

On utilise la relation de Chasles et la définition de la convergence d'une intégrale.

Remarque De cette proposition on déduit une idée-clé qui apparaîtra à plusieurs reprises dans ce chapitre : si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend que du comportement local de f au voisinage de $+\infty$.

Proposition 2

L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Démonstration page 686

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{C})$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}\,(f)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}\,(f)$ convergent, et l'on a alors :

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} \mathrm{Re}\,(f) + i\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}\,(f)\,.$$

Démonstration page 686

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction positive telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f \geqslant 0$.

Si de plus f est continue, on a $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Principe de démonstration.

Démonstration page 686

On utilise le fait que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ et les propriétés de l'intégrale sur un segment.

Proposition 5

Soit $f \in \mathcal{C}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. Alors la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée est égale à $-f$.

Démonstration page 686

2 Cas des fonctions positives

De la même façon que dans le chapitre « Séries numériques », on commence par étudier le cas des fonctions positives. La notion de convergence absolue permet ensuite de se ramener à ce cas.

Proposition 6

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction positive.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée sur $[a,+\infty[$ et l'on a alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \sup_{x\geqslant a}\int_a^x f$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge si, et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f = +\infty$.

Démonstration page 686

Remarque Les conclusions subsistent si f n'est positive qu'au voisinage de $+\infty$, car F est alors croissante au voisinage de $+\infty$.

Théorème 7 (de comparaison)

On considère deux fonctions f et g à valeurs dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ et positives.

1. On suppose l'existence de $b \geqslant a$ tel que $\forall t \geqslant b \quad f(t) \leqslant g(t)$.
   - Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.
   - Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge.
2. Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de $+\infty$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.
3. Si $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature.

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation de la convergence de l'intégrale d'une fonction positive de la proposition 6 et le caractère local de la convergence d'une intégrale (proposition 1 de la page 667). Démonstration page 686

Comme pour les séries numériques, nous disposerons d'un certain nombre d'exemples de référence qui permettront, par le théorème de comparaison, de déterminer la nature de beaucoup d'intégrales. Il est donc essentiel de connaître parfaitement ces exemples de référence.

Voici un premier exemple très utile, mais non explicitement au programme.

Proposition 8

Soit α un réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Démonstration page 687

Proposition 9 (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration page 687

Les théorèmes de comparaison appliqués au cas des intégrales de Riemann peuvent se résumer comme suit :

Point méthode

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction positive.

1. On suppose qu'il existe $k > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \sim \frac{k}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
2. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.
3. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ et $\lambda > 0$ tels que $f(t) \geqslant \frac{\lambda}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Remarque Le troisième cas est souvent obtenu en constatant que :

$$\lim_{t \to +\infty} t f(t) = +\infty.$$

p.687 **Exercice 4** Donner la nature, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} \mathrm{d}t$.

p.688 **Exercice 5** Soit $f : t \mapsto \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}$.

1. Montrer que f est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.
2. Justifier l'existence de $\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$.
3. Exprimer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ à l'aide de γ.

p.689 **Exercice 6** Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition et la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Dans les trois exercices suivants, on détermine la nature des *intégrales de Bertrand* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, selon $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Il est bon de retenir la méthode d'étude de ces intégrales de Bertrand, mais les résultats obtenus ne peuvent être utilisés directement, car hors programme.

p.689 **Exercice 7**

Établir la convergence pour $\alpha > 1$, en comparant à une intégrale de Riemann.

p.689 **Exercice 8** Établir la divergence pour $\alpha < 1$, en comparant à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}\cdot$

p.689 **Exercice 9** Faire l'étude pour $\alpha = 1$.

En conclusion l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si :

$$\alpha > 1 \quad \text{ou} \quad (\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1).$$

3 Intégrabilité

Définition 3

On dit que $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ est **intégrable** sur $[a,+\infty[$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **converge absolument**, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

Théorème 10

Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

Principe de démonstration. On étudie d'abord le cas des fonctions f à valeurs réelles, en utilisant les fonctions $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$, puis le cas des fonctions à valeurs complexes.

Démonstration page 690

Théorème 11 (de comparaison)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R})$, la fonction g étant positive et intégrable sur $[a,+\infty[$.

1. S'il existe $b \geqslant a$ tel que $\forall t \geqslant b \quad |f(t)| \leqslant g(t)$, alors la fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
2. Si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de $+\infty$, alors la fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
3. Si $|f| \sim g$ au voisinage de $+\infty$, alors la fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$.

Démonstration.
Cela résulte immédiatement de la définition de l'intégrabilité et du théorème 7 de la page 669. □

p.690 **Exercice 10** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t$?

p.690 **Exercice 11** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{\operatorname{ch} t}} \mathrm{d}t$?

II Généralisation aux autres types d'intervalles

Nous étudions maintenant la notion d'intégrale sur un intervalle non compact quelconque.

1 Cas d'un intervalle de la forme $]-\infty, a]$

Les définitions et les résultats obtenus dans le cas d'un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ s'étendent sans difficulté à ce cas. Nous ne les rappelons pas tous.

Définition 4

Soit $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^a f$ **converge**, si $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_{-\infty}^a f$ ou $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^a f$ **diverge**.

On a de même le résultat important qui suit.

Proposition 12

Soit $f :]-\infty, a] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $b \in]-\infty, a]$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^a f$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^b f$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux.

De plus, si elles convergent, on a l'égalité :

$$\int_{-\infty}^a f = \int_{-\infty}^b f + \int_b^a f.$$

Il faut bien sûr adapter l'étude des intégrales de Riemann de la façon suivante.

Proposition 13 (Intégrale de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration page 690

Définition 5

On dit que $f \in \mathcal{CM}(]-\infty, a], \mathbb{K})$ est **intégrable** sur $]-\infty, a]$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$ **converge absolument**, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} |f|$ converge.

Point méthode

Pour étudier la convergence de l'intégrale sur $]-\infty, a]$ d'une fonction positive, et donc aussi pour montrer une convergence absolue, on vérifie que cette fonction est continue par morceaux sur cet intervalle, puis on étudie son comportement asymptotique au voisinage de $-\infty$.

2 Cas d'un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$

On s'intéresse ici à des intervalles $[a, b[$ ou $]a, b]$, avec $-\infty < a < b < +\infty$.

La plupart des résultats s'étendent à cette situation, nous ne les rappelons pas tous. Voici une définition valable dans le cas d'un intervalle $[a, b[$; il est facile d'en fournir une valable dans le cas d'un intervalle $]a, b]$.

Définition 6

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$, avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **converge**, si $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **diverge**.

La seule modification concerne à nouveau les intégrales de Riemann.

Proposition 14 (Intégrale de Riemann)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration. En adaptant le calcul de primitives, la démonstration est la même que dans le cas de l'intervalle $[a, +\infty[$. □

Définition 7

On dit que $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ est **intégrable** sur $[a,b[$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **converge absolument**, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

Proposition 15

Soit a et b deux réels, avec $a < b$, et $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue.

Si f admet une limite finie en b, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration page 691

Remarques

1. Ici f est la restriction à $[a,b[$ d'une fonction f_1 continue sur $[a,b]$ et l'on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt$.
2. Supposons plus généralement $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux et **bornée** sur l'intervalle **borné** $[a,b[$.

   Si $M = \sup\limits_{[a,b[} |f|$, on a $|f| \leqslant M$ et, comme les fonctions constantes sont intégrables sur les intervalles **bornés**, f est intégrable sur $[a,b[$, par comparaison.
3. Le fait que l'intervalle d'intégration $[a,b[$ soit **borné** est évidemment essentiel. Ce type d'intégrales impropres « trivialement convergentes » n'existe pas lorsque l'intervalle d'intégration n'est pas borné, comme le montre l'exemple d'une fonction constante non nulle sur $[a,+\infty[$.

p.691 **Exercice 12** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$?

p.691 **Exercice 13** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \cos t\,|\ln t|^{\alpha}\,\mathrm{d}t$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$?

3 Cas d'un intervalle ouvert

On s'intéresse ici à des intervalles $]a,b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Proposition 16

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$.

S'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ **et** $\displaystyle\int_c^b f$ convergent, alors, pour tout réel $c' \in]a,b[$, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{c'} f$ et $\displaystyle\int_{c'}^b f$ convergent et $\displaystyle\int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Démonstration page 691

Définition 8

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **converge** s'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ **et** $\displaystyle\int_c^b f$ convergent. On pose alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **diverge**.

Proposition 17

Soit $f \in \mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$. On fixe $c \in]a,b[$ et l'on pose :

$$\forall x \in]a,b[\quad F(x) = \int_c^x f.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, F admet des limites dans $\mathbb{K}$ en a et b, et l'on a alors $\displaystyle\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F$.

Démonstration. Cela résulte de la définition précédente. □

p.691 **Exercice 14** Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t \, \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) \mathrm{d}t$?

p.692 **Exercice 15** Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}\, \ln t}{\sqrt{\operatorname{ch} t}} \,\mathrm{d}t$?

Remarque Lorsque a et b sont réels, la notation $\int_a^b f$ peut désigner :

- l'intégrale de f sur $[a, b]$, si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$,
- l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$, sous réserve que f soit continue par morceaux sur l'intervalle considéré.

Il faudra donc prendre garde à distinguer ces quatre cas.

Point méthode

Pour l'étude de la convergence de $\int_a^b f$, on commence par examiner sur quel intervalle d'extrémités a et b la fonction f est continue par morceaux.

Selon les cas, on fait ensuite une ou deux études (en général des études locales permettant d'utiliser les méthodes vues précédemment).

III Propriétés de l'intégrale

Les propositions suivantes étendent à des intervalles I quelconques des propriétés vraies sur un segment.
Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Convention Par extension, lorsque I est un segment et que f est continue par morceaux sur I, on dit encore que l'intégrale $\int_I f$ converge.

Comme $|f|$ est également continue par morceaux, on dit aussi que l'intégrale converge absolument ou que f est intégrable sur I.

Lorsque I, d'extrémités $a < b$, n'est pas un segment, on utilise parfois la notation $\int_I f$ au lieu de $\int_a^b f$.

1 Linéarité, positivité

La proposition 2 de la page 667 et la proposition 4 de la page 668 s'étendent facilement au cas d'un intervalle quelconque.

Proposition 18

L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telles que $\int_I f$ existe est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et l'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Proposition 19

L'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

Démonstration page 692

Proposition 20

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ une fonction positive telle que $\int_I f$ converge. On a alors $\int_I f \geqslant 0$.

Si de plus f est *continue*, on a $\int_I f = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Principe de démonstration. On utilise les propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment et la définition de l'intégrale sur un intervalle quelconque.

Démonstration page 692

Proposition 21

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable sur I. On a :

$$\left| \int_I f \right| \leqslant \int_I |f|.$$

Principe de démonstration. Le résultat est connu lorsque I est un segment. Lorsque I n'est pas un segment, on utilise ce premier cas et la définition de l'intégrale d'une fonction intégrable.

Démonstration page 693

2 Relation de Chasles

Proposition 22

Soit J un sous-intervalle d'intérieur non vide de I et f continue par morceaux sur I telle que $\int_I f$ converge. Alors $\int_J f$ converge.

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation de la convergence d'une intégrale à l'aide d'une primitive.

Démonstration page 693

Notation Soit $a < b$ les bornes (peut-être infinies) de I et $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge. Soit x et y vérifiant $a \leqslant x \leqslant b$ et $a \leqslant y \leqslant b$. Si $x \neq y$, l'intégrale de f sur tout intervalle d'extrémités x et y inclus dans I converge, en particulier sur $]x,y[$ si $x<y$ et $]y,x[$ si $x>y$. On peut donc poser :

$$\int_x^y f = \begin{cases} \displaystyle\int_{]x,y[} f & \text{si} \quad x<y \\ \displaystyle -\int_{]y,x[} f & \text{si} \quad x>y \\ 0 & \text{si} \quad x=y. \end{cases}$$

Proposition 23

Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ telle que $\displaystyle\int_I f$ converge et x, y, z trois points ou extrémités de I. Alors les intégrales $\displaystyle\int_x^y f$, $\displaystyle\int_x^z f$, $\displaystyle\int_z^y f$ convergent et l'on a la relation de Chasles : $\displaystyle\int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f$.

Démonstration page 693

IV Calcul d'intégrales

1 Intégration par parties

Notation Soit F une fonction continue sur l'intervalle I d'extrémités a et b, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
On note $[F]_a^b$ ou $[F(x)]_a^b$ ou encore $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$, en cas d'ambiguïté :
- $F(b) - F(a)$, si $I = [a,b]$,
- $F(b) - \lim\limits_a F$, lorsque cette limite existe, si $I =]a,b]$,
- $\lim\limits_b F - F(a)$, lorsque cette limite existe, si $I = [a,b[$,
- $\lim\limits_b F - \lim\limits_a F$, lorsque ces deux limites existent, si $I =]a,b[$.

Proposition 24

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I d'extrémités a et b, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

L'existence de deux termes parmi $\displaystyle\int_a^b f'g$, $[fg]_a^b$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ entraîne l'existence du troisième et l'on a alors la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Principe de démonstration. Si, par exemple, $I = [a,b[$, on intègre par parties sur $[a,x]$, avec $a<x<b$, et l'on fait tendre x vers b. Démonstration page 693

Point méthode

En pratique, on intègre par parties sur les primitives, puis on passe à la limite. Il y a deux buts possibles :

- justifier une convergence, comme on le verra dans l'exercice 22 de la page 681,
- effectuer un calcul, comme dans les deux exercices suivants.

p.694

Exercice 16

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ existe-t-elle ?
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} à l'aide de I_n, lorsque ces deux intégrales existent.
3. Calculer I_n.

p.694

Exercice 17 Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, puis la calculer à l'aide d'une intégration par parties.

2 Changement de variable

Proposition 25

Soit $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Principe de démonstration. Les hypothèses sur φ donnent $\lim\limits_{\alpha} \varphi = a$ et $\lim\limits_{\beta} \varphi = b$, ainsi que $\lim\limits_{a} \varphi^{-1} = \alpha$ et $\lim\limits_{b} \varphi^{-1} = \beta$.

Le théorème du changement de variable s'applique sur tout segment $[x,y] \subset]a,b[$. On fait tendre ensuite x vers a et y vers b.

Démonstration page 695

Remarque Dans le cas d'un intervalle $[a,b[$ ou $[a,+\infty[$, on pourra se ramener à la situation de la proposition 25, puisque si $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge, il en de même de $\displaystyle\int_{]a,b[} f$ et les deux intégrales sont égales.

p.696 **Exercice 18** Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$

Proposition 26

Soit $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Démonstration page 696

Remarque Comme φ' est de signe constant, en appliquant le théorème de changement de variable à $|f|$, on obtient que l'intégrabilité de f sur $]a,b[$ équivaut à celle de $(f\circ\varphi)\,\varphi'$ sur $]\alpha,\beta[$.

p.696 **Exercice 19** Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et la calculer à l'aide du changement de variable $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}$.

3 Étude d'intégrales semi-convergentes

Il se peut qu'une fonction $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{C})$ ne soit pas intégrable, mais que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. On dit alors que cette dernière intégrale est **semi-convergente**.

Comme pour les séries semi-convergentes, l'étude de la convergence d'une intégrale non absolument convergente ne peut pas se faire à l'aide des théorèmes de comparaison, puisque ces derniers ne concernent que des fonctions de signe constant et ne peuvent donc fournir que la convergence absolue, pas la semi-convergence. De plus, les théorèmes de convergence que nous verrons dans le chapitre suivant ne concernent que les fonctions intégrables.

Il va donc falloir transformer l'intégrale pour pouvoir étudier sa convergence. Un changement de variable ne sert à rien en général, puisque, d'après la remarque de la présente page, on ne pourra pas obtenir une intégrale absolument convergente en partant d'une intégrale semi-convergente.

L'outil principal est donc l'*intégration par parties* en vue, en général, de transformer l'intégrale en une intégrale absolument convergente.

Dans les trois exercices suivants, on étudie l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, où α est un réel. Pour certaines valeurs de α, cette intégrale est semi-convergente. Notons que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

p.697

Exercice 20 On suppose $\alpha \leqslant 0$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant 2$.

En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

p.697

Exercice 21 On suppose $\alpha > 1$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

p.697

Exercice 22 On suppose $0 < \alpha \leqslant 1$.

Établir, à l'aide d'une intégration par parties, la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \mathrm{d}t$ diverge. En déduire la semi-convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Remarque Pour l'étude de certaines intégrales non absolument convergentes, on pourra, comme pour les séries, effectuer de la fonction un développement asymptotique, le dernier terme écrit étant :
- ou bien une fonction intégrable,
- ou bien de signe constant (dans le cas où la fonction est à valeurs réelles).

p.698

Exercice 23 Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}t$.

Attention À la lumière de l'exercice précédent, il faut bien noter l'importance de l'hypothèse de positivité de la fonction de comparaison dans le théorème 7 de la page 669.

En effet, si $f(t) = \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$ et $g(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, on a $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, alors que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g$ converge.

V Intégration des relations de comparaison

Dans ce qui suit, les fonctions sont définies sur un intervalle $[a, b[$ et l'on fait une étude locale au voisinage de b. On procéderait de la même façon dans le cas d'un intervalle $]a, b]$, pour une étude au voisinage de a.

Proposition 27

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

On suppose φ **positive** et intégrable sur $[a, b[$.

- Si $f = \mathrm{O}(\varphi)$ au voisinage de b, alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f = \mathrm{O}\left(\int_x^b \varphi\right)$, quand $x \to b$.
- Si $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b, alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f = \mathrm{o}\left(\int_x^b \varphi\right)$, quand $x \to b$.

Principe de démonstration. Démonstration page 698

Comme φ est intégrable sur $[a, b[$, il en est de même de f, par comparaison. Il suffit ensuite d'exprimer, selon le cas, que $f = \mathrm{O}(\varphi)$ ou $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b.

Proposition 28

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

On suppose φ **positive** et non intégrable sur $[a, b[$.

- Si $f = \mathrm{O}(\varphi)$ au voisinage de b, alors $\displaystyle\int_a^x f = \mathrm{O}\left(\int_a^x \varphi\right)$, quand $x \to b$.
- Si $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b, alors $\displaystyle\int_a^x f = \mathrm{o}\left(\int_a^x \varphi\right)$, quand $x \to b$.

Principe de démonstration. Démonstration page 699

Comme la fonction φ est positive et n'est pas intégrable sur $[a, b[$, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x \varphi = +\infty$.
On exprime ensuite, selon le cas, que $f = \mathrm{O}(\varphi)$ ou $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b.

Attention La positivité de φ est essentielle.
Prenons, par exemple, $f(x) = |\sin x|$ et $\varphi(x) = \sin x$ sur $[0, +\infty[$. On a bien sûr $f = \mathrm{O}(\varphi)$, au voisinage de $+\infty$, avec φ non intégrable sur $[0, +\infty[$. Pourtant, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi = 1 - \cos x$ est bornée, alors que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$

ne l'est pas, puisque, par périodicité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{n\pi} |\sin x| \,\mathrm{d}x = n \int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 2n.$$

p.700

Exercice 24

1. Montrer que, quand $x \to +\infty$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} = \mathrm{o}\left(\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.
2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, quand $x \to +\infty$.

Proposition 29

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R})$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose f et g **positives** et $f \underset{b}{\sim} g$.

- Si g est intégrable sur $[a,b[$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et :
$$\int_x^b f \underset{b}{\sim} \int_x^b g.$$
- Si g n'est pas intégrable sur $[a,b[$, alors f n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et :
$$\int_a^x f \underset{b}{\sim} \int_a^x g.$$

Démonstration page 700

Remarques

1. Le résultat s'étend bien sûr aux fonctions négatives.
2. Il suffit que les fonctions f et g ne soient positives qu'au voisinage de b.
   En effet :
   - d'une part, les intégrabilités de f et de g sur $[a,b[$ équivalent aux intégrabilités de ces mêmes fonctions sur $[a',b[$, pour tout $a' \in]a,b[$,
   - d'autre part, pour le deuxième point, si f et g sont positives sur $[a',b[$ et ne sont pas intégrables sur $[a',b[$, on a $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_{a'}^b f = \lim_{x\to b}\int_{a'}^b g = +\infty$ donc :
   $$\int_a^{a'} f = \mathrm{o}\left(\int_{a'}^x f\right) \quad \text{et} \quad \int_a^{a'} g = \mathrm{o}\left(\int_{a'}^x g\right),$$
   d'où la conclusion.
3. En pratique, il suffit de vérifier la positivité au voisinage de b de l'une des fonctions, puisque de $f \underset{b}{\sim} g$ on déduit alors la positivité au voisinage de b de l'autre fonction.

Attention Le signe constant au voisinage de b des fonctions est essentiel. Prenons, par exemple, $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$, sur $[1,+\infty[$. On a $f \underset{+\infty}{\sim} g$ et l'on a vu dans l'exercice 22 de la page 681 que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$; par comparaison, g ne l'est pas non plus.

On a vu également dans l'exercice 22 de la page 681 que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge, donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f$ est bornée sur $[1,+\infty[$.

Un développement de g au voisinage de $+\infty$ donne :

$$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = f(x) - h(x) \quad \text{avec} \quad h(x) \sim \frac{\sin^2 x}{x}\cdot$$

On en déduit que h est positive au voisinage de $+\infty$ et que, par comparaison, h est intégrable sur $[1,+\infty[$ si, et seulement si, $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x}$ l'est. Or :

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge (intégrale de Riemann) alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge (même principe que dans l'exercice 22 de la page 681). Par suite, h n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ et, comme elle est positive au voisinage de $+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x h = +\infty$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x g = -\infty$, puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x g$ n'est donc pas bornée.

Cela prouve que les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f$ et $x \mapsto \displaystyle\int_1^x g$ ne sont pas équivalentes au voisinage de $+\infty$.

p.700 **Exercice 25** Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ln\big(\ln(1+t)\big)\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que f est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Donner un équivalent simple de f en 0.

Remarque On peut noter un parallèle entre les résultats de cette section sur les « intégrales partielles » et les « restes d'intégrales », et les résultats analogues sur les sommes partielles et restes de séries numériques.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1 La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$. Déterminons l'une de ses primitives à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+\int \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+2\operatorname{Arctan} t.\end{aligned}$$

Notons F la primitive obtenue. Comme $t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, on a $\lim\limits_{+\infty} F = \pi$; par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \lim_{+\infty} F - F(1) = \pi - \ln 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

Exercice 2 La fonction $f : t \mapsto \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}$ est continue sur $[\frac{2}{\pi},+\infty[$, comme composée de fonctions continues, car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur ce même intervalle et à valeurs dans $]0,\frac{\pi}{2}]$.

Pour $x \in [\frac{2}{\pi},+\infty[$, le changement de variable $t=\frac{1}{u}$ donne :

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{x} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\sin u}}\,\mathrm{d}u = \left[2\sqrt{\sin u}\right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[2\sqrt{\sin u}\right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\,\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\,\mathrm{d}t = 2.$$

Exercice 3 La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ convient, car :

$$\forall x \geqslant 1 \quad \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x.$$

On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$.

Proposition 1 En effet, en utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment, on obtient :

$$\forall x \in [b,+\infty[\quad \int_a^x f = \int_a^b f + \int_b^x f.$$

Il suffit alors d'appliquer la définition de la convergence d'une intégrale pour conclure.

S'il y a convergence, il suffit de faire tendre x vers $+\infty$ pour obtenir l'égalité annoncée.

Proposition 2 Cet ensemble contient la fonction nulle et, d'après les propriétés des limites, est stable par combinaisons linéaires.

La linéarité de l'intégrale provient de la même propriété sur l'espace des fonctions continues par morceaux sur un segment.

Proposition 3 Cela résulte immédiatement de la définition 2 de la page 665 et des propriétés des limites des fonctions à valeurs complexes.

Proposition 4 En effet, d'après les propriétés de l'intégrale sur un segment, c'est la limite en $+\infty$ d'une fonction positive.

Pour le deuxième point, par positivité et croissance de la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ sur $[a, +\infty[$, on déduit de l'hypothèse que :

$$\forall x > a \quad \int_a^x f = 0.$$

D'après les propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment, il en résulte que f est nulle sur $[a, x]$ pour tout $x > a$, c'est-à-dire sur $[a, +\infty[$.

Proposition 5 D'après la proposition 1 de la page 667, on peut écrire, pour tout $x \geqslant a$:

$$\int_x^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f - \int_a^x f.$$

La fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est dérivable, de dérivée f, d'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment ; d'où la conclusion.

Proposition 6 En effet, comme f est positive, la fonction $F : x \in [a, +\infty[\mapsto \int_a^x f$ est croissante, puisque, d'après la relation de Chasles :

$$\forall (x, y) \in [a, +\infty[^2 \quad x \leqslant y \Rightarrow \int_a^y f - \int_a^x f = \int_x^y f \geqslant 0.$$

On sait que deux cas se présentent :

- F est majorée et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ existe dans IR, égale à $\sup\limits_{x \geqslant a} F(x)$,
- F n'est pas majorée et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

Théorème 7 1. Posons $F(x) = \int_b^x f$ et $G(x) = \int_b^x g$. La majoration $f \leqslant g$ sur $[b, +\infty[$ et la positivité de l'intégrale entraînent $F \leqslant G$ sur $[b, +\infty[$.

Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_b^{+\infty} g$, d'après la proposition 1 de la page 667. On déduit de la proposition 6 que G est majorée sur $[b,+\infty[$. Il en est donc de même pour F. Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ converge, donc aussi l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Le deuxième point en résulte, par contraposition.

2. Les fonctions f et g étant positives, « $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de $+\infty$ » équivaut à l'existence de $k > 0$ et de $b \geqslant a$ tels que :
$$\forall t \in [b,+\infty[\quad f(t) \leqslant kg(t)\,.$$
Il va de soi que les intégrales $\displaystyle\int_b^{+\infty} g$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} kg$ sont de même nature, car $k \neq 0$. On conclut en utilisant la première partie du théorème.
3. Comme f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, on sait qu'alors $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{O}(f)$, au voisinage de $+\infty$. On conclut en utilisant la deuxième partie du théorème.

Proposition 8 La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Pour $\alpha \leqslant 0$ et $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x \mathrm{d}t = x$. Par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\alpha t}dt = +\infty$.

Pour $\alpha > 0$ et $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^x = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}\cdot$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$; d'où la conclusion.

Proposition 9 La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Pour $\alpha \neq 1$ et $x \in [1,+\infty[$, on a :
$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1-x^{1-\alpha}}{\alpha-1}\cdot$$

Par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = +\infty$ pour $\alpha < 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ pour $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 1$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = +\infty$. D'où la conclusion.

Exercice 4 La fonction $t \mapsto t^\alpha e^{-t}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$; on peut donc lui appliquer le théorème de comparaison.

Par croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha+2}e^{-t} = 0$, donc $t^\alpha e^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est donc convergente, par comparaison aux intégrales de Riemann (on utilise la proposition 9).

Exercice 5

1. • La fonction $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est en escalier, donc continue par morceaux, sur tout segment inclus dans $\left[1, +\infty\right[$; elle est donc continue par morceaux sur ce dernier intervalle. On en déduit que la fonction $t \mapsto t - \lfloor t \rfloor$ est continue par morceaux, puis que f est continue par morceaux sur $\left[1, +\infty\right[$, comme quotient de deux fonctions continues par morceaux.
   • On a, pour tout $t \geqslant 1$:
   $$0 \leqslant t - \lfloor t \rfloor \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$
   Par comparaison aux intégrales de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.
2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Pour établir que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite, montrons que la série $\sum u_n$, avec $u_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$, converge (on utilise le « lien suites-séries »).
   On a :
   $$u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   Par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge ; d'où la conclusion.
3. Calculons, pour tout entier $n \geqslant 2$:
   $$\begin{aligned}\int_1^n f &= \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2}\\ &= \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1}\\ &= \ln n - (n-1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\\ &= \ln n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\\ &= 1 - \gamma_n.\end{aligned}$$
   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} f = \lim_{n \to +\infty} \int_1^n f$.
   On peut donc conclure que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f = 1 - \gamma$.

Remarque Le réel γ est appelé **constante d'Euler**.

Exercice 6

1. La fonction $u : t \mapsto \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.

   Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) = 1$, on a $\ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \sim \frac{t^2+2}{t^2+1} - 1 = \frac{1}{t^2+1} \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t$ est donc convergente, par comparaison aux intégrales de Riemann (on utilise la proposition 9 de la page 669).

   D'après la proposition 5 de la page 668, la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue, sur $\mathbb{R}_+$. Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$; comme $f = g \circ h$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, comme composée de fonctions continues.

2. On a $f = g \circ h$, avec g et $h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

   Pour le calcul de f', on utilise la proposition 5 de la page 668 et le théorème de dérivation des fonctions composées :

   $$\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

3. On déduit de la question précédente que $\lim\limits_{0^+} f' = -\infty$. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de limite de la dérivée permet de conclure que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$. Par suite, f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7

Notons que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$; on peut donc lui appliquer le théorème de comparaison.

Soit $\gamma \in\,]1, \alpha[$. Comme $t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta}$ avec $\alpha - \gamma > 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\gamma f(t) = 0$, d'après les croissances comparées des fonctions puissances et logarithmes ; par suite, $f(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ au voisinage de $+\infty$. On en déduit que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ converge par comparaison aux intégrales de Riemann, puisque $\gamma > 1$.

Exercice 8 On a $tf(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta}$, avec $1 - \alpha > 0$; on en déduit $\lim\limits_{t\to+\infty} tf(t) = +\infty$. Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Exercice 9 Pour $\alpha = 1$ et $x > 2$, le changement de variable $t = e^u$ donne :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on déduit de l'étude des intégrales de Riemann que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\,(\ln t)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Théorème 10

1. *Cas des fonctions à valeurs réelles.*

   Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument. Introduisons les deux fonctions $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$; ces deux fonctions sont continues par morceaux et *positives* et, comme $|f| = f^+ + f^-$, on a les deux inégalités $f^+ \leqslant |f|$ et $f^- \leqslant |f|$.

   D'après le théorème de comparaison, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^+$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^-$ sont donc convergentes ; comme $f = f^+ - f^-$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ en résulte.

2. *Cas des fonctions à valeurs complexes.*

   Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument. De $|f| = \sqrt{\big(\mathrm{Re}\,(f)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}\,(f)\big)^2}$ on déduit les inégalités :

   $$\big|\mathrm{Re}\,(f)\big| \leqslant |f| \quad \text{et} \quad \big|\mathrm{Im}\,(f)\big| \leqslant |f|.$$

   D'après le théorème de comparaison, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}\,(f)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}\,(f)$ sont *absolument convergentes*, donc convergentes d'après le premier cas. La convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ résulte de la proposition 3 de la page 668.

Exercice 10 La fonction $t \mapsto \sin(t) \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

On conclut en utilisant l'exercice 6 de la page 670, puisque :

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \left|\sin(t) \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)\right| \leqslant \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right).$$

Exercice 11 La fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{\sqrt{\mathrm{ch}\, t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\left|\frac{e^{it}}{\sqrt{\mathrm{ch}\ t}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\ t}}$.

Or $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\ t}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^t+e^{-t}}} \sim \sqrt{2}e^{-t/2}$, au voisinage de $+\infty$. D'après la proposition 8 de la page 669, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{\mathrm{ch}\, t}}\, dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Proposition 13

On procède comme pour la proposition 9 de la page 669, au changement près de t en $-t$.

Proposition 15 La fonction f se prolonge en une fonction f_1 continue sur $[a,b]$. On sait qu'alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$; donc :

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est donc convergente.

Exercice 12 La fonction $f : t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0,1]$ et bornée sur cet intervalle borné. D'après la remarque précédente, f est intégrable sur $]0,1]$.

On notera bien qu'en revanche, f ne possède pas de prolongement continu sur le segment $[0,1]$.

Exercice 13 La fonction $f : t \mapsto \cos t\,|\ln t|^{\alpha}$ est continue sur $]0,\frac{1}{2}]$ et, par croissances comparées des fonctions puissances et logarithmes en 0, on a $|f(t)| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$ au voisinage de 0. Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f$ est absolument convergente, donc convergente.

Proposition 16 D'après la proposition 1 de la page 667 (même principe pour une borne finie ou infinie), les convergences de $\displaystyle\int_a^c f$ et de $\displaystyle\int_c^b f$ entraînent les convergences de $\displaystyle\int_a^{c'} f$ et de $\displaystyle\int_{c'}^b f$ et l'on a :

$$\int_a^{c'} f = \int_a^c f + \int_c^{c'} f \quad \text{et} \quad \int_{c'}^b f = -\int_c^{c'} f + \int_c^b f.$$

D'où l'égalité annoncée.

Exercice 14 La fonction $f : t \mapsto \sin(t)\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)$ est continue sur $]1,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall t > 1 \quad \big|f(t)\big| \leqslant g(t) \quad \text{avec} \quad g(t) = \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right).$$

Montrons la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$; cela établira, par comparaison, la convergence absolue, donc la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$.

- Au voisinage de 1, la fonction $t \mapsto \ln\left(\frac{t^2+1}{t+1}\right)$ est bornée et $\lim\limits_{t\to 1}\ln(t-1) = -\infty$; on a donc :

$$g(t) = \ln\left(\frac{t^2+1}{t+1}\right) - \ln(t-1) \sim -\ln(t-1) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right),$$

par croissances comparées. On en déduit la convergence de $\int_1^2 g$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- Comme $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2+1}{t^2-1} = 1$, on peut écrire, au voisinage de $+\infty$:

$$g(t) \sim \frac{t^2+1}{t^2-1} - 1 = \frac{2}{t^2-1} \sim \frac{2}{t^2}.$$

On en déduit la convergence de $\int_2^{+\infty} g$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

En conclusion, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ converge absolument, donc converge.

Exercice 15 La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{it} \ln t}{\sqrt{\operatorname{ch} t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Au voisinage de 0, on a :

$$\left|f(t)\right| = \frac{|\ln t|}{\operatorname{ch} t} \sim |\ln t| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

par croissances comparées. On en déduit la convergence absolue, donc la convergence, de $\int_0^1 f$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|f(t)\right| = \frac{|\ln t|}{\operatorname{ch} t} \sim \sqrt{2} e^{-\frac{t}{2}} \ln t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

par croissances comparées. On en déduit la convergence absolue, donc la convergence, de $\int_0^{+\infty} f$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge absolument, donc converge.

Proposition 19 Si l'on note E cet ensemble, E est inclus dans $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et contient la fonction nulle.

Montrons que E est stable par combinaisons linéaires, en ne considérant que le cas où I n'est pas un segment. Soit f, g deux fonctions de E et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$; on a :

$$|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda|\ |f| + |\mu|\ |g|.$$

La fonction majorante étant intégrable, on en déduit, par comparaison, l'intégrabilité de la fonction $\lambda f + \mu g$, d'où la conclusion.

Proposition 20

- Lorsque I est un segment, le résultat est connu. Lorsque I est de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$, on procède comme dans la proposition 4 de la page 668. Lorsque I est un intervalle ouvert, on utilise la proposition 16 de la page 675.

- Pour tout segment J d'intérieur non vide inclus dans I, comme f est positive, on a $\displaystyle\int_J f \leqslant \int_I f$ et donc $\displaystyle\int_J f = 0$. Comme f est continue, positive et d'intégrale nulle sur J, elle est nulle sur J. La fonction f, nulle sur tout segment inclus dans I, est nulle sur I.

Proposition 21 Le résultat est connu lorsque I est un segment.

Si I est de la forme $[a,b[$, on a :

$$\forall x \in \,]a,b[\qquad \left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^x |f|.$$

Le résultat s'en déduit, en faisant tendre x vers b.

Le cas où I est de la forme $]a,b]$ se traite de la même façon.

Si I est de la forme $]a,b[$, fixons $c \in \,]a,b[$ et utilisons la proposition 16 de la page 675 :

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^c f + \int_c^b f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \left|\int_c^b f\right|.$$

En utilisant le cas précédent, on obtient :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^c |f| + \int_c^b |f| = \int_a^b |f|,$$

d'où la conclusion.

Proposition 22 Nous rédigerons la démonstration dans un cas, les autres cas se traitant de manière analogue.

Démontrons, par exemple, le résultat lorsque $I = [a,b[$ et $J = \,]a,c[$, avec $a < c \leqslant b$, en utilisant la proposition 17 de la page 675. On note F une primitive de f.

Comme f est continue par morceaux sur $[a,b[$, la fonction F est continue sur $[a,b[$ et possède donc une limite en a.

Si $c < b$, par continuité de F sur $[a,b[$, la fonction F possède une limite à gauche en c.

Si $c = b$, par convergence de $\displaystyle\int_I f$, la fonction F possède une limite en b, d'après la proposition 17 de la page 675.

En conclusion, $\displaystyle\int_J f$ converge, d'après la proposition 17 de la page 675.

Proposition 23 Le résultat est connu lorsque I est un segment.

Dans les autres cas, cela résulte de la proposition 1 de la page 667 et de ses généralisations aux autres intervalles semi-ouverts, ou de la proposition 16 de la page 675.

Proposition 24 Traitons le cas où $I = [a,b[$; les autres cas se traitent de la même manière.

Pour $x \in [a,b[$, une intégration par parties sur $[a,x]$ donne :

$$\int_a^x f'g = [fg]_a^x - \int_a^x fg'.$$

L'existence de deux limites parmi $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f'g$, $\lim\limits_{x\to b}[fg]_a^x$ et $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x fg'$ entraîne donc celle de la troisième. On conclut en revenant à la définition de l'existence d'une intégrale généralisée et à la notation introduite avant cette proposition.

Exercice 16

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n : t\mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   Comme $f_0 = 1$, l'intégrale I_0 n'existe pas.

   Pour $n\geqslant 1$, on a $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}\cdot$

   On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'existence de I_n.

   En conclusion, I_n existe si, et seulement si, $n\geqslant 1$.
2. Pour $n\geqslant 1$, on écrit :
$$\int f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t,$$
   puis on intègre par parties la troisième intégrales :
$$\int f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int f_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{t}{2n(1+t^2)^n} - \frac{1}{2n}\int f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
   On en déduit :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\,I_n.$$
3. On a $I_1 = \frac{\pi}{2}$ et l'on déduit de la question précédente, par une récurrence facile :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_{n+1} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)\,2k}{(2k)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\,\pi.$$
   Le dernier résultat étant encore valable pour $n=0$, on a établi :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}\,\pi.$$

Exercice 17

- La fonction $f : t\mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0,1[$.

  Comme $\ln(1-t^2)\underset{0}{\sim} -t^2$, on a $\lim\limits_0 f = -1$, d'où l'intégrabilité de f sur $]0,\frac{1}{2}]\cdot$

  Au voisinage de 1, on a :
$$|f(t)| \sim -\ln(1-t^2) = -\ln(1-t) - \ln(1+t),$$
  d'où $|f(t)| \sim -\ln(1-t)$. Par suite, $|f(t)| = \mathrm{o}\Big((1-t)^{-\frac{1}{2}}\Big)$, par croissances comparées, d'où l'intégrabilité de f sur $[\frac{1}{2},1[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- Pour l'intégration par parties, choisissons comme primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ celle qui est nulle en 1, c'est-à-dire $t \mapsto 1 - \frac{1}{t}$, ce qui donne :

$$\int \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t-1}{t}\ln\left(1-t^2\right) - \int \left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{-2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On a $\frac{t-1}{t}\ln\left(1-t^2\right) \underset{0}{\sim} t$, de limite nulle en 0.

On a $\frac{t-1}{t}\ln\left(1-t^2\right) \underset{1}{\sim} (t-1)\ln(1-t)$, de limite nulle en 1.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et le crochet $\left[\frac{t-1}{t}\ln\left(1-t^2\right)\right]_0^1$ existent (ce dernier étant nul). On peut donc écrire :

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t-1}{t}\ln\left(1-t^2\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$

En conclusion $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\ln 2$.

Proposition 25 Comme φ est strictement croissante et bijective, on a :

$$\lim_{y\to\beta}\varphi(y) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y'\to b}\varphi^{-1}(y') = \beta.$$

- Fixons $x_0 \in \left]\alpha,\beta\right[$ et supposons l'intégrale $\displaystyle\int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

Pour $y \in \left]\alpha,\beta\right[$, le théorème du changement de variable sur un segment permet d'écrire :

$$\int_{x_0}^{y} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme $\displaystyle\lim_{y\to\beta}\varphi(y) = b$, on obtient, par composition de limites :

$$\lim_{y\to\beta}\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge et l'on a :

$$\int_{x_0}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On prouve de même que si $\displaystyle\int_{a}^{\varphi(x_0)} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_{\alpha}^{x_0} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge aussi et lui est égale.

En utilisant la relation de Chasles, on a donc établi que si $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge aussi et lui est égale.

- Supposons l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ convergente.

  Avec les notations précédentes, pour $y' \in]a, b[$, on a :
$$\int_{x_0}^{\varphi^{-1}(y')} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{y'} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
  Le même raisonnement de composition de limites que dans le premier point permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et qu'on a l'égalité :
$$\int_{x_0}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(x_0)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
  On termine la réciproque comme dans le premier point.

Exercice 18 La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Par croissances comparées, on a $e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$. On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Appliquons la proposition 25 de la page 679 sur $]0, +\infty[$, en utilisant le changement de variable $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0, +\infty[$ sur lui-même. On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ et l'égalité annoncée.

Proposition 26 Le principe est exactement le même que pour la proposition 25, en utilisant cette fois $\lim_\alpha \varphi = b$ et $\lim_\beta \varphi = a$, ainsi que $\lim_a \varphi^{-1} = \beta$ et $\lim_b \varphi^{-1} = \alpha$.

Exercice 19

- La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et :
  * quand $t \to 0$, on a $\big|f(t)\big| \sim |\ln t| = \mathrm{o}\Big(t^{-\frac{1}{2}}\Big)$; par comparaison aux intégrales de Riemann, f est intégrable sur $]0, 1]$;
  * quand $t \to +\infty$, on a $\big|f(t)\big| \sim \frac{\ln t}{t^2} = \mathrm{o}\Big(t^{-\frac{3}{2}}\Big)$; par comparaison aux intégrales de Riemann, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

  Par suite, f est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où l'existence de I.
- La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective de $]0, +\infty[$ sur lui-même. D'après la proposition 25 de la page 679 on peut écrire :
$$I = -\int_0^{+\infty} \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = -I.$$
  Par suite $I = 0$.

Exercice 20 Puisque $\alpha \leqslant 0$, on a : $\forall t \geqslant 1 \quad t^{\alpha} \leqslant 1$. La fonction sin étant positive sur $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2.$$

Or, si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ convergeait, par définition de la convergence d'une intégrale, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_1^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t - \int_1^{2n\pi} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \right) = 0.$$

D'où la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21 On a : $\forall t \geqslant 1 \quad \left|\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{t^{\alpha}}\cdot$

Comme $\alpha > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Exercice 22

- Pour $x > 1$, une intégration par parties donne :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t^{\alpha}} \right]_1^x - \alpha \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

  On déduit de $\alpha > 0$ que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[-\tfrac{\cos t}{t^{\alpha}}\right]_1^x = \cos 1$.

  Par ailleurs, on a : $\forall t \geqslant 1 \quad \left|\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \frac{1}{t^{\alpha+1}}\cdot$ Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$ converge absolument, donc converge ; par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ existe.

  On a montré que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ existe.

  Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge.

- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, car $\alpha > 0$; on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(n+1)^{\alpha}\,\pi^{\alpha}} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)^{\alpha}\,\pi^{\alpha}}\cdot$$

  La série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\right| \mathrm{d}t$ diverge par comparaison aux séries de Riemann, car $\alpha \leqslant 1$.

- Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t=+\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t=+\infty$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right|\mathrm{d}t$ diverge donc.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Exercice 23 La fonction $f : t\mapsto \ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$ est continue sur $[2,+\infty[$; effectuons de f un développement au voisinage de $+\infty$:

$$f(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}+g(t)\quad\text{avec}\quad g(t)\sim-\frac{\sin^2 t}{2t}\cdot$$

- D'après l'exercice 22 de la page 681, $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
- On peut écrire :

$$\forall t\geqslant 2\quad \frac{\sin^2 t}{2t}=\frac{1}{4t}-\frac{\cos(2t)}{4t}\cdot$$

  L'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{4t}\,\mathrm{d}t$ converge (même principe que dans l'exercice 22 de la page 681), alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{4t}$ diverge (c'est, à un facteur près, une intégrale de Riemann). Par suite $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{2t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Comme $g(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}-\frac{\sin^2 t}{2t}$ et que l'équivalent est de signe constant, on conclut, par comparaison, que l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} g$ diverge.

En conclusion $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f$ diverge, puisque f est la somme de deux fonctions, l'une d'intégrale convergente, l'autre d'intégrale divergente.

Proposition 27 Dans les deux cas, l'intégrabilité de f sur $[a,b[$ se déduit du théorème de comparaison.

- Si $f=\mathrm{O}(\varphi)$ au voisinage de b, il existe $K>0$ et $b'\in[a,b[$ tels que :

$$\forall t\in[b',b[\quad \left|f(t)\right|\leqslant K\varphi(t).$$

  On en déduit, pour $x\in[b',b[$:

$$\left|\int_x^b f\right|\leqslant\int_x^b|f|\leqslant K\int_x^b\varphi.$$

  On a donc établi que $\displaystyle\int_x^b f=\mathrm{O}\left(\int_x^b\varphi\right)$, quand $x\to b$.

- Supposons $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $b' \in [a, b[$ tel que :
$$\forall t \in [b', b[\quad \left|f(t)\right| \leqslant \varepsilon\varphi(t).$$
On en déduit, pour $x \in [b', b[$:
$$\left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant \varepsilon \int_x^b \varphi.$$
On a donc établi que $\displaystyle\int_x^b f = \mathrm{o}\left(\int_x^b \varphi\right)$, quand $x \to b$.

Proposition 28 Comme φ est positive et n'est pas intégrable sur $[a, b[$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \varphi = +\infty$.

- Si $f = \mathrm{O}(\varphi)$ au voisinage de b, il existe $K > 0$ et $b' \in [a, b[$ tels que :
$$\forall t \in [b', b[\quad \left|f(t)\right| \leqslant K\varphi(t).$$
On en déduit, pour $x \in [b', b[$:
$$\left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^x |f| \leqslant \int_a^{b'} |f| + K\int_{b'}^x \varphi \leqslant \int_a^{b'} |f| + K\int_a^x \varphi.$$
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \varphi = +\infty$, il existe $b'' \in [b', b[$ tel que :
$$\forall x \in [b'', b[\quad \int_a^{b'} |f| \leqslant K\int_a^x \varphi.$$
On a donc :
$$\forall x \in [b'', b[\quad \left|\int_x^b f\right| \leqslant 2K\int_a^x \varphi,$$
ce qui prouve que $\displaystyle\int_a^x f = \mathrm{O}\left(\int_a^x \varphi\right)$, quand $x \to b$.
- Supposons $f = \mathrm{o}(\varphi)$ au voisinage de b. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $b' \in [a, b[$ tel que :
$$\forall t \in [b', b[\quad \left|f(t)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t).$$
On en déduit, pour $x \in [b', b[$:
$$\left|\int_a^x f\right| \leqslant \int_a^x |f| \leqslant \int_a^{b'} |f| + \frac{\varepsilon}{2}\int_{b'}^x \varphi \leqslant \int_a^{b'} |f| + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x \varphi.$$
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \varphi = +\infty$, il existe $b'' \in [b', b[$ tel que :
$$\forall x \in [b'', b[\quad \int_a^{b'} |f| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x \varphi.$$

On a donc :

$$\forall x \in [b'', b[\quad \left| \int_a^x f \right| \leqslant \varepsilon \int_a^x \varphi,$$

ce qui prouve que $\displaystyle\int_a^x f = \mathrm{o}\left(\int_a^x \varphi\right)$, quand $x \to b$.

Exercice 24

1. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{t^2}$ est continue, positive et non intégrable sur $[1, +\infty[$ (on a, par exemple, $\varphi \geqslant 1$).

   Comme $\frac{e^{t^2}}{t^2} = \mathrm{o}\left(e^{t^2}\right)$, quand $t \to +\infty$, on conclut à l'aide de la proposition 28 de la page 682.
2. Une intégration par parties donne, pour $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^x e^{t^2} \mathrm{d}t &= \int_1^x 2te^{t^2} \frac{\mathrm{d}t}{2t} \\ &= \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_{t=1}^{t=x} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} \mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   D'après la première question, on a $\frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} \sim \displaystyle\int_1^x e^{t^2} \mathrm{d}t$, quand $x \to +\infty$, d'où l'on déduit $\displaystyle\int_1^x e^{t^2} \mathrm{d}t \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Proposition 29 On déduit du théorème de comparaison l'intégrabilité de f dans le premier cas, la non intégrabilité de f dans le deuxième cas.

Il suffit ensuite d'utiliser la proposition 27 ou la proposition 28, puisque $f - g = \mathrm{o}(g)$, au voisinage de b.

Exercice 25

1. Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est continue et strictement positive sur l'intervalle $]0, x]$, donc $u : t \mapsto \ln\big(\ln(1+t)\big)$ est continue sur $]0, x]$.

   On a, au voisinage de 0 :

$$u(t) = \ln\big(t + \mathrm{o}(t)\big) = \ln t + \ln\big(1 + \mathrm{o}(1)\big) \sim \ln t,$$

   puisque $\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$. On a donc, par croissances comparées :

$$\big|u(t)\big| \sim |\ln t| = \mathrm{o}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right).$$

   On en déduit, par comparaison, l'intégrabilité sur $]0, x]$ de u ; d'où la conclusion.
2. La fonction u est négative au voisinage de 0 et l'on a $u(t) \sim \ln t$. En appliquant la proposition 29, on obtient $f(x) \sim \displaystyle\int_0^x \ln t \, \mathrm{d}t$, au voisinage de 0.

   Comme $\displaystyle\int_0^x \ln t \, \mathrm{d}t = x \ln x - x \sim x \ln x$, on en déduit $f(x) \sim x \ln x$.

S'entraîner et approfondir

12.1 Pour quels réels a et b, la fonction $f : t \mapsto 3t - 1 - \frac{5}{6t} - \sqrt{9t^2 + at + b}$ est-elle intégrable sur un intervalle de la forme $[\gamma, +\infty[$?

12.2 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{t}\right)\ln t}{\sqrt{t} - \sin t}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(t^2 - t\right)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta - 1}\,\mathrm{d}t$ (on discutera suivant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$) ;
4. $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \left(\ln \frac{1}{t}\right)^\beta \mathrm{d}t$ (on discutera suivant les réels α et β).

12.3 Lorsqu'elles convergent, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\frac{1}{t} - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right))\mathrm{d}t$.

12.4 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\mathrm{d}t$ (on discutera suivant le réel α) ;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} - \sin t}\,\mathrm{d}t$.

12.5 *(Polytechnique 2015)*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'^2$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

12.6
1. Montrer qu'une fonction réelle uniformément continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace l'uniforme continuité par la continuité ? l'intégrabilité par la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$?
3. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.

12.7 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On suppose de plus que f est à valeurs réelles positives et décroissante. Montrer que $f(x) = \mathrm{o}(1/x)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Donner un exemple de fonction intégrable sur $[0,+\infty[$ telle que la fonction $x \mapsto xf(x)$ ne soit pas bornée.

12.8 Pour tout réel $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : x \mapsto x\,e^{-x^\alpha \sin^2 x}$.

1. Donner la nature, selon α, de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \displaystyle\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} f_\alpha$.
2. Pour quels $\alpha > 0$ la fonction f_α est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

12.9 Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[n_0,+\infty[$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que f' est intégrable sur $[n_0,+\infty[$.

1. Vérifier que la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est équivalente à la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est absolument convergente.

   On pourra intégrer par parties $\displaystyle\int_{n-1}^{n} (t-n+1)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$.

   Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et la série $\sum f(n)$?
3. Montrer que pour $0 < \alpha < 1$, la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$ converge.

12.10 Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bigl|f(t-x) - f(t)\bigr|\,\mathrm{d}t.$$

12.11 Soit f continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les limites suivantes existent ou n'existent pas dans $\mathbb{R}$ simultanément et qu'en cas d'existence, elles sont égales :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

12.12 Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1[\,,\ \mathbb{R})$.

On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = 0$.

12.13 1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Linéariser $\sin^3 t$, puis calculer I à l'aide de la première question.

12.14 Pour $x > 0$, on pose $\displaystyle f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de f.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \pi/2$.

12.15 *(Centrale 2015)*

Soit $\alpha \in \,]0,1[$.

1. Soit $\displaystyle f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$. Justifier la définition de f sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que cette fonction est positive.
2. Soit $\displaystyle R : x \mapsto \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u\right)^2 + \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u\right)^2$.

   Justifier la définition de R sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que cette fonction est décroissante.

12.16 1. Montrer que la fonction $f : \,]0,\pi] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$.

   Justifier l'existence de I_n. Calculer $I_{n+1} - I_n$ puis I_n.

3. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$.

4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et déduire des questions précédentes la valeur de I.

Solution des exercices

12.1 Choisissons $\gamma > 0$ assez grand pour que le trinôme $t \mapsto 9t^2 + at + b$ soit positif sur $[\gamma, +\infty[$ (possible, car cette fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$). La fonction f est alors continue sur cet intervalle. Faisons un développement de f au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(t) &= 3t - 1 - \frac{5}{6t} - 3t\left(1 + \frac{a}{9t} + \frac{b}{9t^2}\right)^{1/2} \\ &= 3t - 1 - \frac{5}{6t} - 3t\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{9t} + \frac{b}{9t^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{a}{9t}\right)^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) \\ &= -\frac{a+6}{6} + \frac{a^2 - 36(b+5)}{216\,t} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

- Pour $a \neq -6$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \left|f(t)\right| = \left|\frac{a+6}{6}\right| > 0$. Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge ; donc f n'est pas intégrable sur $[\gamma, +\infty[$.
- Pour $a = -6$ et $b \neq -4$, on a $\left|f(t)\right| \sim \frac{|b+4|}{6t}$ au voisinage de $+\infty$. On conclut, comme dans le premier cas, que l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge ; donc f n'est pas intégrable sur $[\gamma, +\infty[$.
- Pour $a = -6$ et $b = -4$, on a $\left|f(t)\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma^{+\infty} \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$ est convergente ; donc f est intégrable sur $[\gamma, +\infty[$.

12.2 Dans les exemples suivants, la fonction dont nous étudions l'intégrale sera toujours notée f.

1. Pour $t \in \,]0, 1]$, on a $\sqrt{t} \geqslant t$ et l'inégalité classique $\sin t < t$, vraie pour tout $t > 0$, donne $\sqrt{t} > \sin t$.
   On déduit de cela que f est définie et continue sur $]0, 1]$. Notons aussi qu'elle est négative.
   Comme $\sin t \sim t = \mathrm{o}\left(\sqrt{t}\right)$ et $\mathrm{sh}\left(\sqrt{t}\right) \sim \sqrt{t}$, on a, au voisinage de 0 :
   $$f(t) \sim \frac{\sqrt{t}\ln t}{\sqrt{t} - \sin t} \sim \frac{\sqrt{t}\ln t}{\sqrt{t}} = \ln t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$
   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison aux intégrales de Riemann.

2. La fonction f est continue sur $]1,+\infty[$.

   - Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme :
   $$\ln\left(t^2-t\right)=\ln t+\ln(t-1)\underset{t\to 1^+}{\sim}\ln(t-1)\,,$$
   on obtient, au voisinage de 1, l'équivalent $f(t)\sim\frac{\ln(t-1)}{4}$, d'où :
   $$\left|f(t)\right|=\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right),\qquad \text{par croissances comparées.}$$
   Par comparaison aux intégrales de Riemann, on en déduit la convergence absolue, donc la convergence, de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   - Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   On a, au voisinage de $+\infty$:
   $$\ln\left(t^2-t\right)=2\ln t+\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)=2\ln t+\mathrm{o}(1)\sim 2\ln t.$$
   D'où $f(t)\sim\frac{2\ln t}{t^2}\cdot$ et $\left|f(t)\right|=\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, par croissances comparées ; par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3. La fonction f est continue et de signe fixe sur $]1,+\infty[$.

   - Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Faisons une étude au voisinage de 1 en posant $t=1+u$:
   $$f(t)=\frac{\left(\ln(1+u)\right)^\alpha}{(1+u)^\beta-1}=\frac{\left(u+\mathrm{o}(u)\right)^\alpha}{\beta u+\mathrm{o}(u)}\sim\frac{u^{\alpha-1}}{\beta}\cdot$$
   On a donc $f(t)\sim\frac{(t-1)^{\alpha-1}}{\beta}$ et, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha>0$.
   - Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
     * Pour $\beta>0$, on a $f(t)\sim\frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta}$, quand $t\to+\infty$. Utilisons l'étude des *intégrales de Bertrand* faite dans les exercices de la page 671 (attention ce résultat serait à redémontrer, car hors programme). D'après le théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta>1$ ou $\beta=1$ et $\alpha<-1$.

* Pour $\beta < 0$, on a $f(t) \sim -(\ln t)^\alpha$. En procédant comme dans le premier cas, on voit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est toujours divergente.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

4. La fonction f est continue et positive sur $]0,1[$.

- Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

  * Pour $\alpha > -1$, posons $\alpha = -1+2h$. Par croissances comparées des fonctions puissances et logarithmes au voisinage de 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} t^h \left(\ln \frac{1}{t}\right)^\beta = 0$, car $h \in \mathbb{R}_+^*$.
    Comme $f(t) = t^{-1+h}\left(t^h\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\beta\right)$, on a, au voisinage de 0, $f(t) = \mathrm{o}\left(t^{-1+h}\right)$. Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
  * Pour $\alpha = -1$, le changement de variable $t = e^{-u}$ donne, pour $x \in]0,1/2[$:
    $$\int_x^{1/2}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\beta \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{\ln 2}^{\ln\frac{1}{x}} u^\beta \mathrm{d}u.$$
    Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\frac{1}{x} = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta < -1$, d'après l'étude des intégrales de Riemann.
  * Pour $\alpha < -1$, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} tf(t) = +\infty$, par croissances comparées des fonctions puissances et logarithmes, au voisinage de 0.
    Par suite, $\frac{1}{t} = \mathrm{o}\big(f(t)\big)$ et, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

- Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
  On a, au voisinage de 1 :
  $$f(t) \sim (-\ln t)^\beta \sim (1-t)^\beta.$$
  Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta > -1$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.

12.3 1. La fonction $f : t \mapsto \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

On a, au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim \frac{\ln t}{t^3} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\ln t\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\frac{\ln t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\ln t}{2\,(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\ln t}{2\,(1+t^2)} + \frac{\ln t}{2} - \frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right) \\
&= -\frac{\ln t}{2\,(1+t^2)} + \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right).
\end{aligned}$$

Notons F la primitive obtenue de f. On a $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} \sim -\frac{\ln x}{2x^2}$ au voisinage de $+\infty$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$, on déduit du calcul précédent que $\lim\limits_{+\infty} F = 0$. Par suite :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -F(1) = \frac{\ln 2}{4}\cdot$$

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$ et un développement, au voisinage de $+\infty$, donne :

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{6t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) \sim -\frac{1}{6t^3}\cdot$$

On en déduit que f est négative au voisinage de $+\infty$ $\big($en fait, f est négative sur $[1, +\infty[$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Une intégration par parties sur $]1, +\infty[$ donne :

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t &= t \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) + \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} \\
&= t \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) + \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}} \\
&= t \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) + \ln\left(t + \sqrt{t^2-1}\right).
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = -t \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) - \ln\left(1 + \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)\cdot$$

On a, au voisinage de $+\infty$, $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{1}{t}$; comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} = 1$, on déduit du calcul précédent, en faisant tendre t d'une part vers $+\infty$ et d'autre part vers 1 :

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1 - \ln 2.$$

12.4 Dans les exemples suivants, la fonction dont nous étudions l'intégrale sera toujours notée f.

1. La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$.

   • Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   On a, au voisinage de 1 :

   $$\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) = -\ln(t-1) + \ln(t+1) \sim -\ln(t-1).$$

   D'où $\left|f(t)\right| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)$. On en déduit que f est intégrable sur $]1, 2]$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   • Étudions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   On a, au voisinage de $+\infty$:

   $$\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

   ∗ Pour $\alpha > -1$, on a $f(t) = 2\,\frac{\sin t}{t^{\alpha+1}} + g(t)$ avec $g(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{\alpha+2}}\right)$, au voisinage de $+\infty$.

   Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.
   En utilisant l'étude faite dans l'exercice de la page 681 (*attention*, ce résultat serait à redémontrer, car hors programme), on établit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} 2\,\frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente car f est la somme de deux fonctions dont l'intégrale converge.

   ∗ Pour $\alpha \leqslant -1$, on a, au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{t^\alpha}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \sim \frac{2}{t^{\alpha+1}}$.

   On en déduit l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

   $$\forall t \geqslant 2n_0\pi \quad \frac{1}{t^\alpha}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \geqslant 1.$$

   On peut donc écrire, pour tout entier $n \geqslant n_0$:

   $$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\mathrm{d}t \geqslant \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2.$$

Si l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergeait et valait ℓ, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_2^{2n\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_2^{(2n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell,$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Cela contredit la minoration précédente.

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc divergente.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > -1$.

2. Pour $t \geqslant 1$, on a bien sûr $\sqrt{t} > \sin t$. Par suite, la fonction f est continue sur $[1,+\infty[$.

   On a, au voisinage de $+\infty$:

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{1-\frac{\sin t}{\sqrt{t}}} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \mathrm{o}\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\right) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + g(t),$$

   avec $g(t) \sim \frac{\sin^2 t}{t}$.

   Nous utiliserons, comme dans l'exercice précédent, les résultats obtenus dans l'exercice de la page 681.

   - L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, d'après l'exercice rappelé.
   - Comme $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t}$ est une fonction positive, on déduit de l'équivalent, au voisinage de $+\infty$, $g(t) \sim \frac{\sin^2 t}{t}$, que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
     Or $\dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{2t} - \dfrac{\cos 2t}{2t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ diverge, alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge, d'après l'exercice rappelé.

   On déduit de cette étude que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge, donc aussi $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

   Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, puisque f est la somme d'une fonction dont l'intégrale converge et d'une fonction dont l'intégrale diverge.

12.5 Notons $\displaystyle M = \sup_{x\geqslant 0}\int_x^{x+1} f'^2$.

Si l'on n'a pas $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall A \geqslant 0 \quad \exists x \geqslant A \quad \bigl|f(x)\bigr| \geqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel $\varepsilon > 0$ et donnons-nous $\alpha \in]0,1]$ tel que $\alpha \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4M}\cdot$
Pour $x \geqslant 0$ et $t \in [x, x+\alpha]$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned}\left|f(t) - f(x)\right| &= \left|\int_x^t f'\right| \\ &\leqslant \sqrt{\int_x^t 1}\sqrt{\int_x^t f'^2} \\ &\leqslant \sqrt{\alpha}\sqrt{\int_x^{x+1} f'^2} \\ &\leqslant \sqrt{\alpha}\sqrt{M} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot\end{aligned}$$

- Si l'on a $f(x) \geqslant \varepsilon$, on déduit de ce qui précède :

$$\forall t \in [x, x+\alpha] \quad f(t) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et donc} \quad \int_x^{x+\alpha} f \geqslant \frac{\alpha\varepsilon}{2}\cdot$$

- Si l'on a $f(x) \leqslant -\varepsilon$, on prouve de même que $\displaystyle\int_x^{x+\alpha} f \leqslant -\frac{\alpha\varepsilon}{2}\cdot$

On a donc établi :

$$\forall A \geqslant 0 \quad \exists x \geqslant A \quad \left|\int_x^{x+\alpha} f\right| \geqslant \frac{\alpha\varepsilon}{2}\cdot$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} f = 0$, puisque :

$$\forall x \geqslant 0 \quad \int_x^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} f - \int_0^x f \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f = \int_0^{+\infty} f.$$

On peut donc choisir $A \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \geqslant A \quad \left|\int_x^{+\infty} f\right| \leqslant \frac{\alpha\varepsilon}{8}\cdot$$

En utilisant la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\forall x \geqslant A \quad \left|\int_x^{x+\alpha} f\right| \leqslant \frac{\alpha\varepsilon}{4}\cdot$$

C'est une contradiction. On a donc montré que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

12.6 1. Par l'absurde, si f ne tend pas vers 0, on peut trouver une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|f(x_n)\right| \geqslant 2\varepsilon$.
Par uniforme continuité, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $|f| \geqslant \varepsilon$ sur $[x_n, x_n+\eta]$ et par suite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{[0,x_n+\eta]} |f| - \int_{[0,x_n]} |f| = \int_{[x_n,x_n+\eta]} |f| \geqslant \eta\,\varepsilon,$$

ce qui contredit l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \bigl|f(t)\bigr|\,\mathrm{d}t$ et donc l'intégrabilité de f.

2. La continuité ne suffit pas comme le prouve l'exemple de la page 666.

   En revanche, on peut remplacer l'intégrabilité par la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$. En reprenant la démonstration et les notations précédentes, la fonction f garde un signe constant sur $\bigl[x_n, x_n+\eta\bigr]$ et la contradiction provient de :

$$\left|\int_{[0,x_n+\eta]} f - \int_{[0,x_n]} f\right| = \left|\int_{[x_n,x_n+\eta]} f\right| \geqslant \eta\,\varepsilon,$$

   ce qui contredit l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz appliquée à f' et 1 :

$$\bigl|f(y)-f(x)\bigr| = \left|\int_x^y f'(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f'^2}\,\sqrt{|y-x|},$$

   ce qui prouve que f est uniformément continue. Comme elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$, elle tend vers 0 en $\pm\infty$ et, étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

12.7 1. On a, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x/2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$.

   Notant ℓ cette limite, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell-\ell = 0$.

2. Comme f est positive et décroissante, on peut écrire :

$$\forall x\geqslant 0\quad 0\leqslant \frac{x}{2}\,f(x)\leqslant \int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   On déduit de la première question que $\lim\limits_{x\to+\infty}\bigl(\frac{x}{2}f(x)\bigr)=0$, d'où :

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(xf(x)\bigr)=0.$$

   Cela signifie que $f(x)=\mathrm{o}\bigl(\frac{1}{x}\bigr)$, au voisinage de $+\infty$.

3. Il suffit de reprendre l'exemple de la page 666.

12.8 1. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} x\,e^{-x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t+n\pi)\,e^{-(t+n\pi)^\alpha\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

   Par concavité de la fonction sin sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\qquad \lambda t\leqslant \sin t\leqslant t\quad\text{avec}\quad \lambda=\frac{2}{\pi}\cdot$$

Par imparité de la même fonction, il vient :
$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \lambda\,|t| \leqslant |\sin t| \leqslant |t|\,.$$
On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$(n-1)\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\left((n+1)\pi\right)^{\alpha} t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant (n+1)\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\left((n-1)\pi\right)^{\alpha}\lambda^2 t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Or, lorsque $a > 0$ tend vers $+\infty$:
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\pi\sqrt{a}/2}^{\pi\sqrt{a}/2} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \sim \frac{I}{\sqrt{a}} \quad \text{avec} \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u > 0.$$
Donc les suites majorantes et minorantes sont équivalentes l'une à $\frac{\mu}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$, avec $\mu > 0$, l'autre à $\frac{\nu}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$, avec $\nu > 0$.

Par comparaison aux séries de Riemann, la série à termes positifs $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\dfrac{\alpha}{2} - 1 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 4$.

2. • Supposons $\alpha \leqslant 4$. La série à termes positifs $\sum u_n$ étant divergente, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} u_p = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} f_\alpha = +\infty$.
   La fonction f_α n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   • Supposons $\alpha > 4$. La série à termes positifs $\sum u_n$ converge ; posons $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.
   Pour tout réel $x > \frac{\pi}{2}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\pi}{2} + n\pi \geqslant x$; on a alors :
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f_\alpha \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} f_\alpha = \sum_{p=1}^{n} u_p \leqslant S.$$
   La fonction positive f_α est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, puisque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f_\alpha$ est majorée sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.

En conclusion, la fonction f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $\alpha > 4$.

12.9 1. • Les sommes partielles de cette série étant $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$, il suffit de montrer que la convergence de cette **suite** entraîne la convergence de l'intégrale de f c'est-à-dire l'existence d'une limite finie pour la **fonction** $x \mapsto \displaystyle\int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ (la réciproque est évidente).
   • Tout d'abord, remarquons que l'intégrabilité de f' entraîne l'existence d'une limite finie pour $x \mapsto \displaystyle\int_{n_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire d'une limite finie pour f en $+\infty$.
   Cette limite est alors nulle, puisque $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie.

- Pour $x \in [n, n+1]$, on a :

$$\left|f(x)\right| \leqslant \left|f(n)\right| + \int_n^x \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \left|f((n)\right| + \int_n^{n+1} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Ainsi, par intégration sur $\big[\lfloor x \rfloor, x\big]$:

$$\left|\int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|f\big(\lfloor x \rfloor\big)\right| + \int_{\lfloor x \rfloor}^{\lfloor x \rfloor + 1} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui prouve le résultat.

2. L'intégration par parties proposée dans l'énoncé donne :

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t)\ \mathrm{d}t - f(n) = -\int_{n-1}^n (t-n+1)\ f'(t)\ \mathrm{d}t$$

et donc $|w_n| \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^n \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$ qui est le terme général d'une série convergente par intégrabilité de f'.

On en déduit que les suites $\displaystyle\int_{n_0}^n f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\sum_{p=n_0+1}^n u_p$ sont de même nature. Donc, d'après la première question, l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si,la série $\sum u_n$ converge.

Remarque Pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème 12 de la page 409 est un cas particulier de ce résultat, puisque si f est réelle positive décroissante, elle admet une limite et donc $\displaystyle\int_{n_0}^n f' = f(n) - f(n_0)$ admet aussi une limite, ce qui prouve que la fonction **négative** f' est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.

3. Comme $f'(x) = \dfrac{\alpha\, x^{\alpha-1} \cos(x^\alpha)}{x} - \dfrac{\sin(x^\alpha)}{x^2} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^{2-\alpha}}\right)$, quand $x \to +\infty$, la fonction f', continue sur $[1, +\infty[$, est intégrable sur cet intervalle.

D'après la question précédente, il suffit donc de montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x}\ \mathrm{d}x$.

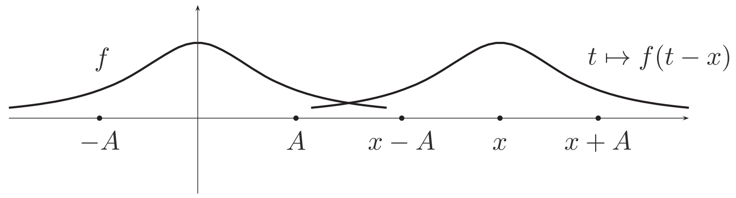
Par une intégration par parties, on a :

$$\int \frac{\sin(x^\alpha)}{x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{x^{\alpha-1} \sin(x^\alpha)}{x^\alpha}\ \mathrm{d}x = -\frac{\cos(x^\alpha)}{\alpha\, x^\alpha} - \int \frac{\cos(x^\alpha)}{x^{\alpha+1}}\ \mathrm{d}x$$

et cette primitive admet une limite en $+\infty$ puisque la fonction à intégrer est dominée par $1/x^{\alpha+1}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge et la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n^\alpha)}{n}$ converge.

12.10 Le schéma est le suivant :



et l'on peut deviner que la limite est $2\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|$ (c'est clair si f est nulle en dehors d'un segment).

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $A > 0$ tel que :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} |f| - \int_{[-A,A]} |f| \right| \leqslant \varepsilon$$

et $x \geqslant 2A$.

- L'inégalité triangulaire $\big|f(t) - f(t-x)\big| \leqslant \big|f(t)\big| + \big|f(t-x)\big|$ donne :

$$\int_{-\infty}^{-A} \big|f(t) - f(t-x)\big| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{-A} \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{-A-x} \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon$$

  et de même :

$$\int_{x+A}^{+\infty} \big|f(t) - f(t-x)\big| \,\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_{A}^{x-A} \big|f(t) - f(t-x)\big| \,\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon.$$

- D'autre part :

$$\left| \int_{-A}^{A} \big|f(t) - f(t-x)\big| \,\mathrm{d}t - \int_{-A}^{A} \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-A}^{A} \big|f(t-x)\big| \,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

  puisque $A - x \leqslant -A$, et de même :

$$\left| \int_{x-A}^{x+A} \big|f(t) - f(t-x)\big| \,\mathrm{d}t - \int_{x-A}^{x+A} \big|f(t-x)\big| \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{x-A}^{x+A} \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

- Enfin :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t - \int_{-A}^{+A} \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon$$

  et :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t - \int_{x-A}^{x+A} \big|f(t-x)\big| \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon$$

  ce qui donne :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t) - f(t-x)\big| \,\mathrm{d}t - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t \right| \leqslant 10\varepsilon.$$

12.11 La fonction $F : x \mapsto \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, car f est continue.

- Supposons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = \ell$.

  Commençons par prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Pour cela, montrons par une intégration par parties que les primitives admettent une limite en $+\infty$:
$$\int \frac{F'(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{F(t)}{t^2} + 2\int \frac{F(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$
  Puisque $t \mapsto F(t)/t$ admet une limite finie, d'une part $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)/t^2 = 0$ et d'autre part $F(t)/t^3 = \mathrm{O}(1/t^2)$, donc $t \mapsto F(t)/t^3$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui prouve l'existence d'une limite finie pour la primitive considérée.
  On en déduit :
$$A(x) = x\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{F(x)}{x} + 2x\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$
  Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{F(t)}{t} = \ell$, on a :
$$\frac{F(t)}{t^3} - \frac{\ell}{t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
  et par intégration des relations de comparaison (voir la proposition 27 de la page 682) :
$$\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t - \frac{\ell}{x} = \int_x^{+\infty} \left(\frac{F(t)}{t^3} - \frac{\ell}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$
  ce qui prouve :
$$\lim_{x\to+\infty} x\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t = \ell \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x\to+\infty} A(x) = \ell.$$

- Supposons $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,G(x) = \ell$ avec $G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

  Alors $f(x) = -x^2\,G'(x)$ et par une intégration par parties :
$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\left[-t^2\,G(t)\right]_1^x + \frac{2}{x}\int_1^x t\,G(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{G(1)}{x} - x\,G(x) + \frac{2}{x}\int_1^x t\,G(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
  Comme $t\,G(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on a :
$$\int_1^x t\,G(t)\,\mathrm{d}t - \ell\,(x-1) = \int_1^x \big(t\,G(t) - \ell\big)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(x),$$
  ce qui donne $\lim\limits_{x\to+\infty} B(x) = \ell$.

12.12 Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, on peut écrire, pour $0 < x < y < 1$:

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au couple de fonctions $(1, f')$, on obtient :

$$\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \sqrt{\int_x^y \mathrm{d}t}\sqrt{\int_x^y f'^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{y-x}\sqrt{\int_x^y f'^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

En faisant tendre y vers 1, on en déduit :

$$\left|f(x)\right| \leqslant \sqrt{1-x}\sqrt{\int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

On a, par définition de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\lim_{x \to 1^-} \int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\displaystyle\int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t$, il vient :

$$\lim_{x \to 1^-} \int_x^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On a ainsi démontré $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = 0$.

12.13 1. On a, au voisinage de 0, $\frac{\sin t - t}{t^2} \sim -\frac{t}{6}\cdot$ La fonction $t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2}$ possède donc un prolongement continu sur $\mathbb{R}$, que nous noterons f.
On peut écrire, pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{3x} f(t)\,\mathrm{d}t = \ln 3 + \int_x^{3x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après les propriétés de l'intégrale des fonctions continues, $x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$; on en déduit, en particulier, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^{3x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

En conclusion, on a $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 3$.

2. La fonction $t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et l'on a $\frac{\sin^3 t}{t^2} \sim t$, au voisinage de 0. Cette fonction possède donc un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $t > 0$, $\left|\frac{\sin^3 t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}\cdot$ On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et donc la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. On a :

$$\sin^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = -\frac{e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}}{8i}$$
$$= \frac{3}{4}\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} - \frac{1}{4}\frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} = \frac{3\sin t - \sin 3t}{4}\cdot$$

Pour $0 < x < y$, on peut écrire :

$$\int_x^y \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^y \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t - \int_x^y \frac{\sin 3t}{4t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $t = u/3$ dans la deuxième intégrale donne :

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_x^y \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t - \int_{3x}^{3y} \frac{3\sin u}{4u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_x^{3x} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{3x}^{3y} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{3y}^{y} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t\\ &\quad - \int_{3x}^{3y} \frac{3\sin u}{4u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_x^{3x} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t - \int_y^{3y} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a, pour tout $y > 0$:

$$\left|\int_y^{3y} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_y^{3y} \left|\frac{3\sin t}{4t^2}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_y^{3y} \frac{3}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{3}{4t}\right]_y^{3y}\cdot$$

On en déduit $\lim\limits_{y\to+\infty} \displaystyle\int_y^{3y} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t = 0$, d'où :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient, avec le résultat de la première question :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3\ln 3}{4}\cdot$$

12.14 1. Fixons $x > 0$. La fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}$ est continue, positive sur $[0, x[$ et l'on a, au voisinage de x :

$$\sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}} = \sqrt{\frac{1+t^2}{x+t}}\,\frac{1}{\sqrt{x-t}} \sim \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}}\,\frac{1}{\sqrt{x-t}}\cdot$$

On en déduit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

2. Pour tout $x > 0$, on peut écrire :
$$\forall t \in [0, x[\quad 1 \leqslant \sqrt{1+t^2} \leqslant \sqrt{1+x^2}.$$
D'où l'encadrement :
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{1+x^2} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}}.$$
On a, pour tout $u \in [0, x[$:
$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}} = \left[\operatorname{Arcsin}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{t=u} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{u}{x}\right)\cdot$$
On en déduit, en faisant tendre u vers x, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}} = \pi/2$. On a donc :
$$\forall x > 0 \quad \frac{\pi}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{1+x^2}.$$
Cet encadrement donne $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \pi/2$.

12.15 1. Soit $x \geqslant 0$. La fonction $g : t \mapsto \frac{\sin t}{(x+t)^{\alpha+1}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout $t > 0$, on a $\left|g(t)\right| \leqslant \frac{1}{t^{\alpha+1}}$; cela prouve, par comparaison aux intégrales de Riemann, la convergence absolue, donc la convergence, de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$.
- Pour $x > 0$, la fonction g a un prolongement continu en 0.
  Pour $x = 0$, on a $\left|g(t)\right| \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$; cela prouve, par comparaison aux intégrales de Riemann, la convergence absolue, donc la convergence, de $\displaystyle\int_0^1 g$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\displaystyle v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_n = \int_0^{(N+1)\pi} g$; on en déduit que la série $\sum v_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \int_0^{+\infty} g$.

Le changement de variable $t = n\pi + u$ donne $\displaystyle v_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin u}{(n\pi + x + u)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}u$.
La série $\sum v_n$ est donc alternée et, comme elle converge, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$; enfin, de l'inégalité valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in]0, \pi]$:
$$\frac{\sin u}{(n\pi + x + u)^{\alpha+1}} \geqslant \frac{\sin u}{\big((n+1)\pi + x + u\big)^{\alpha+1}},$$
on déduit la décroissance de la suite $\big(|v_n|\big)$.
La série $\sum v_n$ vérifie donc les hypothèses du critère des séries alternées. Par suite $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ a le signe de v_0, c'est-à-dire $f(x) \geqslant 0$.

2. • Les fonctions $u \mapsto \frac{\sin u}{u^\alpha}$ et $u \mapsto \frac{\cos u}{u^\alpha}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ a été établie dans l'exercice 22 de la page 681 (ce serait à redémontrer, car hors programme). On prouve de même la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$.

Quand $u \to 0^+$, on a :

$$\left|\frac{\sin u}{u^\alpha}\right| \sim \frac{1}{u^{\alpha-1}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\cos u}{u^\alpha}\right| \sim \frac{1}{u^\alpha}.$$

Ces équivalents prouvent, par comparaison aux intégrales de Riemann, la convergence absolues, donc la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ et de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$.

On a donc justifié la définition de R sur $\mathbb{R}_+$.

• D'après la proposition 5 de la page 668, les deux fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ces fonctions sont également continues en 0, par définition de la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u$.

Par suite, la fonction R est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} R'(x) &= -2\frac{\sin x}{x^\alpha}\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u - 2\frac{\cos x}{x^\alpha}\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{x^\alpha}\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u-x)}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = v + x$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant, donne :

$$R'(x) = -\frac{2}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\cos v}{(x+v)\,\alpha}\,\mathrm{d}v.$$

Effectuons une intégration par parties (crochet et intégrale existent de manière évidente) :

$$\begin{aligned} R'(x) &= -\frac{2}{x^\alpha}\left[\frac{\sin v}{(x+v)^\alpha}\right]_0^{+\infty} - \frac{2\alpha}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{(x+v)\,\alpha+1}\,\mathrm{d}v \\ &= -\frac{2\alpha}{x^\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{(x+v)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

D'après la première question, on a $R' \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme la fonction R est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $R' \leqslant 0$, on en déduit qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

12.16 1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. Pour conclure, il suffit, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, d'établir l'existence de $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et de $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

- Un développement au voisinage de 0 donne :

$$f(x) = \frac{2\sin(x/2) - x}{2x\sin(x/2)} = \frac{2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) - x}{2x\sin(x/2)} = \frac{-\dfrac{x^3}{24} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}{2x\sin(x/2)} \sim -\frac{x}{24}.$$

  On en déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

- On a, pour tout $x \in]0,\pi]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x/2)}{4\sin^2(x/2)} = \frac{x^2\cos(x/2) - 4\sin^2(x/2)}{4x^2\sin^2(x/2)}.$$

  En procédant comme au dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) - 4\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2}{4x^2\sin^2(x/2)} \\ &= \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) - 4\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)}{4x^2\sin^2(x/2)} \\ &= \frac{-\frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)}{4x^2\sin^2(x/2)} \sim \frac{-\frac{x^4}{24}}{x^4}. \end{aligned}$$

  On en déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -1/24$.

Le prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ de f ainsi obtenu sera encore noté f.

2. La fonction $t \mapsto \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est continue sur $]0,\pi]$ et comme, au voisinage de 0, $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sim \frac{\frac{2n+1}{2}t}{\frac{t}{2}}$, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 2n+1$.

   Cette fonction a donc un prolongement continu sur $[0,\pi]$, d'où l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(n+1)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^\pi \cos(n+1)t\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1}\right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = I_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \pi.$$

3. Une intégration par parties avec $\lambda > 0$ donne :

$$\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\,g(x)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \cos(\lambda x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{|g(b)|+|g(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \left|\cos(\lambda x)\,g'(x)\right|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{|g(b)|+|g(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \left|g'(x)\right|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$, puisque le majorant tend vers zéro.

4. Nous avons établi la semi-convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ dans un exercice de la page 681 (*attention*, la démonstration de ce résultat hors programme serait à refaire).

En appliquant à la fonction f de la première question le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t = 0.$$

Vu la définition de f, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{I_n}{2}\\ &= \int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}\cdot\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \frac{2u}{2n+1}$ donne :

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,t\right)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$ et l'on peut conclure que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Chapitre 13 : Convergence dominée et applications

Convergence dominée et applications

13

Dans ce chapitre, nous étudions des intégrales dépendant d'un paramètre qui peut être entier (suites de fonctions) ou réel. Dans les deux cas, nous nous intéresserons aux problèmes de convergence et dans le second cas à la continuité et à la dérivabilité. Pour la continuité, le paramètre pourra même plus généralement être pris dans un espace vectoriel de dimension finie. Les résultats de ce chapitre sont importants, mais certaines démonstrations sont hors programme. Il convient donc de lire avec attention les exemples et contre-exemples pour bien comprendre l'importance des hypothèses.
Dans tout le chapitre, les intervalles de $\mathbb{R}$ considérés seront d'intérieur non vide et les fonctions seront à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I Suites et séries d'intégrales

1 Le théorème de convergence dominée

Théorème 1 (de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On fait les hypothèses suivantes :

- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ *intégrable* sur I à valeurs réelles telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad \left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

(**hypothèse de domination**).

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Nous n'en ferons pas la démonstration qui est hors programme.
Une démonstration avec des hypothèses renforcées est proposée dans l'exercice 13.7 de la page 759.

Remarques

1. La fonction φ de l'hypothèse de domination est bien sûr, en particulier, continue par morceaux et à valeurs positives.
2. On n'oubliera pas de vérifier la continuité par morceaux de f. En effet, il existe des suites de fonctions continues par morceaux qui convergent simplement vers une fonction qui n'est pas continue par morceaux.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n\,e^{-t}}\cdot$

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ à l'aide du théorème de convergence dominée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n\,e^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour $t \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^2}\cdot$

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(1) = \frac{1}{2+e^{-1}}\cdot$

  Pour $t > 1$, on $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$.

  Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ \frac{1}{2+e^{-1}} & \text{si} \quad t = 1 \\ 0 & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

  La fonction f est continue sur $[0,1[$, possède une limite finie à droite et à gauche en 1, et est continue sur $]1,+\infty[$; elle est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left|f_n(t)\right| = f_n(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}\cdot$$

  La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\frac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann. Cela fournit l'hypothèse de domination.

En conclusion, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}\cdot$$

Attention

Constatons sur un exemple l'importance de l'hypothèse de domination.

Soit $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = n^2 t^{n-1}$. Pour $n \geqslant 1$, chaque f_n est continue et intégrable sur $[0,1[$, puisqu'elle a un prolongement continu sur $[0,1]$.
Pour tout $t \in [0,1[$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$, par comparaison des suites géométriques et puissances. Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle, continue et intégrable sur $[0,1[$, d'intégrale nulle sur $[0,1[$.
Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont donc vérifiées, en dehors de l'hypothèse de domination. Or $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = [t^n]_0^1 = n$.

On n'a donc pas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

p.744 **Exercice 1** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. À l'aide du changement de variable $t = u^{\frac{1}{n}}$, déterminer un équivalent simple de I_n. On ne cherchera pas à calculer l'intégrale obtenue.

p.744 **Exercice 2**

1. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^n)^{1/n}}$ est-elle définie ?
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Attention Il faut bien noter, dans l'énoncé du théorème de convergence dominée, que *l'intervalle d'intégration est fixe*. Nous allons voir, sur un exemple, comment on peut parfois contourner cette difficulté lorsque l'intervalle d'intégration dépend de n.

p.745 **Exercice 3** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction f_n continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ telle que $I_n = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} f_n$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ sous forme d'une intégrale.

2 Séries de fonctions intégrables

Intégration terme à terme d'une série de fonctions intégrables

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 2 (d'intégration terme à terme)

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions, avec $u_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

On fait les hypothèses suivantes :

- chaque u_n est intégrable sur I,
- la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I,
- la série $\sum \left(\int_I |u_n|\right)$ converge.

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et l'on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n\right).$$

Remarques

1. Chaque u_n est bien sûr supposée en particulier continue par morceaux.
2. Dans la plupart des exercices, on développe en série une fonction f continue par morceaux. La continuité par morceaux de la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, égale à f, est alors évidente.
3. Lorsque chaque u_n est continue et qu'on ne connaît pas d'expression simple de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, on peut s'assurer que c'est une fonction continue (donc continue par morceaux) par convergence uniforme, voire normale, sur tout segment.

Exemples

1. Établissons l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$

   Pour tout $t \in]0,1[$, la série géométrique $\sum t^n \ln t$ converge et l'on a :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t = \frac{\ln t}{1-t}\cdot$$

   Appliquons à la série de fonctions $\sum u_n$, avec $u_n(t) = -t^n \ln t$, le théorème 2 sur $]0,1[$.

- Chaque u_n est continue sur $]0,1[$ et l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall t \in]0,1[\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant |\ln t|.$$
On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par croissances comparées, $u_n(t) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, au voisinage de 0. Par suite, chaque u_n est intégrable sur $]0,1[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1[$, d'après l'étude initiale, et sa somme est la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$, continue sur $]0,1[$.
- Calculons $\displaystyle\int_0^1 \left|u_n(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n(-\ln t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrons par parties, en utilisant la proposition 24 de la page 678 (ici les trois termes existent de manière évidente) :
$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n(-\ln t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}(-\ln t)}{n+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^{n+1}(-\ln t)}{n+1} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$
La série $\displaystyle\sum \int_0^1 \left|u_n(t)\right| \mathrm{d}t$ est donc convergente.

En conclusion, la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ (ce qu'on peut facilement vérifier directement) et l'on a :
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n : t \mapsto \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}}$ et appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur $]0,+\infty[$.

- Chaque u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après la proposition 8 de la page 669.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, car, pour tout $t > 0$, la série $\sum u_n(t)$ est une série géométrique de raison $e^{-t} \in]0,1[$.
Montrons la continuité de la somme sur $]0,+\infty[$. Chaque u_n est continue sur $]0,+\infty[$. Il suffit donc d'établir la convergence normale sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
Soit $[a,b]$ un tel segment ($a < b$). Par positivité et décroissance de chaque u_n, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sup_{[a,b]} |u_n| = u_n(a)\ ;$$
d'où la conclusion, d'après l'étude de la convergence simple.

- Comme chaque u_n est positif, on a :

$$\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} u_n = \left[-\frac{e^{-nt}}{n^{\frac{3}{2}}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

  Par suite, la série $\sum \left(\int_I |u_n|\right)$ est une série de Riemann convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique donc et la formule annoncée s'en déduit, d'après le calcul précédent.

p.746 **Exercice 4** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Attention L'hypothèse de convergence de la série $\sum \left(\int_I |u_n|\right)$ est essentielle et la seule convergence, même absolue, de la série $\sum \left(\int_I u_n\right)$ ne suffit pas, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = t^{2n+1}$.

- Chaque u_n est bien sûr intégrable sur $]-1,1[$ et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{-1}^{1} u_n = \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

  En particulier, la série $\sum \int_{-1}^{1} u_n$ converge.

- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$, puisque, pour tout $t \in]-1,1[$, la série $\sum u_n(t)$ est une série géométrique de raison $t^2 \in [0,1[$.

  Sa somme $t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$ est continue sur $]-1,1[$, mais elle n'est pas intégrable, car l'une de ses primitives, $t \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right)$ n'a pas de limite finie en 1.

p.747 **Exercice 5** On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$u_n(t) = 2(n+1)\,te^{-(n+1)t^2} - 2nte^{-nt^2}.$$

Montrer que les u_n et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

Comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n\right)$.

Autres méthodes pour intégrer terme à terme

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et intégrables sur I qui converge simplement sur I. On suppose que la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I et l'on cherche des conditions suffisantes pour que $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I u_n\right)$. On se place dans le cas où la méthode précédente ne s'applique pas.

Une première condition à imposer est que l'intégrale $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ converge ; on supposera en fait que la fonction $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I. Si $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$ et $R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$, il s'agit de justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I S_n = \int_I S$ ou, de manière équivalente, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I R_n = 0$. En pratique, on pourra utiliser l'une des méthodes suivantes :

- établir directement, à l'aide de majorations, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I R_n = 0$,
- appliquer le théorème de convergence dominée à l'une des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, t^{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}\cdot$

Notons $u_n : t \mapsto (-1)^n\, t^{\sqrt{n}}$. Pour tout $t \in [0,1[$, la série $\sum u_n(t)$ converge, d'après le théorème des séries alternées (cette série est alternée, la suite $\big(|u_n(t)|\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît et tend vers 0, car $|u_n(t)| = t^{\sqrt{n}}$, avec $t \in [0,1[$) .

La fonction $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est donc définie sur $[0,1[$; justifions son intégrabilité sur cet intervalle.

- Montrons d'abord la continuité de f, en appliquant le théorème de continuité des séries de fonctions. Chaque fonction u_n est déjà continue sur $[0,1[$.

  Soit $a \in [0,1[$; le théorème des séries alternées permet d'écrire :
  $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0,a] \quad \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p(t)\right| \leqslant |u_{n+1}(t)| \leqslant a^{\sqrt{n+1}}.$$
  Comme la suite numérique $\left(a^{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, cela prouve la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur le segment $[0,a]$ et cela pour tout réel $a \in [0,1[$. La fonction f est donc continue sur $[0,1[$.

- Chaque u_n a un prolongement continu sur le segment $[0,1]$, donc est intégrable sur $[0,1[$.

  Le théorème des séries alternées permet d'écrire $|f| \leqslant |u_1| \leqslant 1$. Comme la fonction continue f est bornée sur l'intervalle borné $[0,1[$, elle est intégrable sur ce dernier intervalle.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} u_p$ et $R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$. En utilisant le théorème des séries alternées, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left|\int_0^1 R_n\right| \leqslant \int_0^1 |R_n| \leqslant \int_0^1 |u_{n+1}| = \frac{1}{1+\sqrt{n+1}}.$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 R_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n = \int_0^1 f$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}} = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, t^{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}t.$$

p.747 **Exercice 6** Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4n+2}{(2n+1)^2+x^2}.$$

On pourra écrire, pour tout $t>0$, $\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}}$.

Remarque On peut vérifier *a posteriori* de deux façons que le théorème d'intégration terme à terme (page 727) ne s'applique pas.

- On a $\left|\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{4n+2}{(2n+1)^2+x^2} \sim \frac{1}{n}$; comme :

$$\left|\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\mathrm{d}t,$$

  la série $\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\mathrm{d}t$ diverge, par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum \frac{1}{n}$ (série harmonique).

- La série de fonctions $\sum |u_n|$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\forall t>0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(t)| = |\cos(tx)| e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt} = \frac{|\cos(tx)| e^{-t}}{1-e^{-2t}}.$$

  La fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si le théorème d'intégration terme à terme s'appliquait à la série $\sum u_n$, il s'appliquerait donc aussi à la série $\sum |u_n|$, l'une des conclusions étant l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. Comme, au voisinage de 0, $\frac{|\cos(tx)|e^{-t}}{1-e^{-2t}} \sim \frac{1}{2t}$, cette fonction n'est pas intégrable sur $]0,1]$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

p.749 **Exercice 7** Établir par deux méthodes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

On pourra écrire, pour tout $t > 0$, $\frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{2e^{-t}}{1-e^{-2t}}$.

1. En appliquant le théorème d'intégration terme à terme.
   On pourra utiliser l'inégalité $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$, valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. En appliquant le théorème de convergence dominée.

II Intégrales à paramètre

1 Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 3

Soit A une partie non vide d'un espace normé E de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A,
- pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ *intégrable* sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t),$$

(**hypothèse de domination**).

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité et le théorème de convergence dominée. Démonstration page 751

Remarque La fonction φ de l'hypothèse de domination est bien sûr en particulier continue par morceaux et à valeurs positives.

Exemple Montrons que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Appliquons le théorème 3 de la page ci-contre en notant $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\cdot$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, on a :

$$\bigl|f(x,t)\bigr| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}\cdot$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$; d'où l'intégrabilité de φ sur $[0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Cela fournit donc l'hypothèse de domination.

En conclusion, la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Attention

Montrons sur un exemple que l'hypothèse de domination est essentielle.

Prenons $A = \mathbb{R}$, $I =]0,1]$ et $f : A \times I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{x}{x^2+t^2}\cdot$

On vérifie sans difficulté les deux premières hypothèses.

Calculons $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$. On a $g(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$:

$$g(x) = \bigl[\operatorname{Arctan}(t/x)\bigr]_{t=0}^{t=1} = \operatorname{Arctan}(1/x)\,.$$

Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\pi/2$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\pi/2$; g n'est donc pas continue en 0.

Point méthode

La conclusion du théorème 3 de la page précédente subsiste si l'on remplace l'hypothèse de domination par la suivante :

- pour tout point a de A, il existe un voisinage V de a dans A et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in V \times I \quad \bigl|f(x,t)\bigr| \leqslant \varphi(t)\,,$$

(hypothèse de domination au voisinage de tout point)

En effet, en appliquant, pour tout $a \in A$, le théorème à la restriction de f à $V \times I$, où V est un voisinage de a dans A sur lequel l'hypothèse précédente est vérifiée, on prouve que g est définie et continue au voisinage de tout point de A, donc sur A.

Exemple Soit $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que, pour tout $p \in H$, la fonction $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ soit intégrable sur $[0, +\infty[$.
On définit la **transformée de Laplace** $Lf : H \to \mathbb{C}$ de f par :

$$\forall p \in H \quad Lf(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrons que Lf est continue sur H, en appliquant le point méthode précédent.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $p \mapsto e^{-pt} f(t)$ est continue sur H.
- Pour tout $p \in H$, la fonction $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Soit $p_0 \in H$ et $a = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(p_0)$. Notons V le disque ouvert de centre p_0 et de rayon a ; c'est un voisinage de p_0 et l'on a :

  $$\forall p \in V \quad \mathrm{Re}\,(p) \geqslant \mathrm{Re}\,(p_0) - a = a.$$

  On en déduit, pour tout $(p, t) \in V \times \mathbb{R}_+$:

  $$\left|e^{-pt} f(t)\right| = e^{-\mathrm{Re}(p)t}\left|f(t)\right| \leqslant e^{-at}\left|f(t)\right|.$$

  Comme a est strictement positif, la fonction $t \mapsto e^{-at}\left|f(t)\right|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a établi l'hypothèse de domination au voisinage de tout point.

D'après le point méthode précédent, la fonction Lf est continue sur H.

Point méthode

La conclusion du théorème 3 de la page 732 subsiste, lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$, si l'on remplace l'hypothèse de domination par la suivante :

- pour tout segment $[a, b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I \quad \left|f(x, t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

(hypothèse de domination sur tout segment)

En effet, comme tout point de A admet un voisinage dans A qui est un segment, il suffit d'appliquer le point méthode précédent.

p.752 **Exercice 8** Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est continue.

2 Limites d'intégrales

Le but de cette partie est d'étendre le théorème de convergence dominée à une famille de fonctions indexées par un paramètre décrivant un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 4

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : J \times I \to \mathbb{K}$ et λ_0 un point adhérent à J. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $\lambda \in J$, la fonction $t \mapsto f(\lambda, t)$ est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction $F \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que pour tout $t \in I$, on ait $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} f(\lambda, t) = F(t)$,
- il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (\lambda, t) \in J \times I \quad \left|f(\lambda, t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

(**hypothèse de domination**).

Alors, pour tout $\lambda \in J$, la fonction $t \mapsto f(\lambda, t)$ est intégrable sur I, la fonction F est intégrable sur I et l'on a :

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_I f(\lambda, t)\,\mathrm{d}t = \int_I F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Principe de démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

Démonstration page 752

Remarques

1. Ce résultat sert surtout lorsque $\lambda_0 = \pm\infty$ car, pour $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, quitte à prolonger par continuité les fonctions, on pourra le plus souvent appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
2. En pratique, il suffit d'établir une domination locale au voisinage de λ_0.

   Ainsi, dans le cas où $\lambda_0 = +\infty$, une domination sur un intervalle quelconque $J_0 = [a, +\infty[\subset J$ suffit, car $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int_I f(\lambda, t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \lambda \in J_0}} \int_I f(\lambda, t)\,\mathrm{d}t$ existent simultanément et sont égales, en cas d'existence.

Reformulons le théorème précédent en termes de familles de fonctions.

Corollaire 5

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur I et λ_0 un point adhérent à J. On fait les hypothèses suivantes :

- il existe une fonction $F \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que pour tout $t \in I$, on ait $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(t) = F(t)$,
- il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :
$$\forall\lambda \in J \quad \forall t \in I \quad \left|f_\lambda(t)\right| \leqslant \varphi(t)$$
(**hypothèse de domination**).

Alors les fonctions f_λ et F sont intégrables sur I et $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \displaystyle\int_I f_\lambda = \int_I F$.

Exemple On reprend les notations du dernier exemple (transformée de Laplace) de la page 734.

On note $\ell_0 = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$, on suppose l'existence de $\ell_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ et l'on considère la restriction de Lf à $\mathbb{R}_+^*$. Établissons les deux résultats suivants.

- Théorème de la valeur initiale : $\lim\limits_{p\to+\infty} p\,Lf(p) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \ell_0$.
- Théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{p\to 0^+} p\,Lf(p) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell_\infty$.

En effectuant dans l'intégrale définissant $Lf(p)$ le changement de variable $t = \frac{u}{p}$ (on applique la proposition 25 de la page 679 : la fonction $u \mapsto \frac{u}{p}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient :

$$\forall p > 0 \quad pLf(p) = \int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) \mathrm{d}u.$$

Appliquons le théorème 4 de la page précédente.

- Pour tout $p > 0$, la fonction $u \mapsto e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $u > 0$, on a :
$$\lim_{p\to+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) = e^{-u}\ell_0 \quad \text{et} \quad \lim_{p\to 0} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) = e^{-u}\ell_\infty.$$

  Les fonctions $u \mapsto e^{-u}\ell_0$ et $u \mapsto e^{-u}\ell_\infty$ sont continues sur $]0, +\infty[$.

- Comme f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et possède une limite en $+\infty$, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$; notons $M = \sup_{\mathbb{R}_+^*} |f|$ et $\varphi : u \mapsto Me^{-u}$. On a :

$$\forall p \in]0, +\infty[\quad \forall u \in]0, +\infty[\quad \left| e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) \right| \leqslant \varphi(u),$$

  ce qui fournit l'hypothèse de domination.

D'après le théorème 4 de la page 735, on peut conclure, que :

$$\lim_{p \to +\infty} p\, Lf(p) = \int_0^{+\infty} \ell_0 e^{-u} \mathrm{d}u = \ell_0$$

$$\lim_{p \to 0} p\, Lf(p) = \int_0^{+\infty} \ell_\infty e^{-u} \mathrm{d}u = \ell_\infty.$$

C'est le résultat annoncé.

p.753 **Exercice 9** Pour tout $\lambda > 0$, on définit f_λ sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geqslant 0 \quad f_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{\lambda^2+t^2}}.$$

Justifier l'existence, pour tout $\lambda > 0$ de $\int_{\mathbb{R}_+} f_\lambda$ et déterminer $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_\lambda$.

p.753 **Exercice 10** Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x} \mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de g.
2. Déterminer la limite et un équivalent simple de $g(x)$, quand x tend vers $+\infty$.

3 Dérivation d'une intégrale à paramètre

Rappel Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $(x_0, t_0) \in J \times I$.
Lorsqu'elle existe, la dérivée en x_0 de la fonction $x \mapsto f(x, t_0)$ est appelée dérivée partielle par rapport à x en (x_0, t_0) de f et est notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0)$.

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{x^2}{x^2+t^2}$.
Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, dont la deuxième ne s'annule pas. Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2x}{x^2+t^2} + x^2 \frac{-2x}{(x^2+t^2)^2} = \frac{2xt^2}{(x^2+t^2)^2}.$$

Théorème 6

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in J \times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

(**hypothèse de domination pour** $\frac{\partial f}{\partial x}$).

Alors la fonction $g : J \mapsto \mathbb{K}$, définie par $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et l'on a : $\forall x \in J \quad g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Principe de démonstration. Pour tout $x_0 \in J$, on forme les taux d'accroissement de g en x_0 et l'on applique le théorème 3 de la page 732. Démonstration page 754

Exemple Montrons que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Appliquons le théorème 6.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x,t) = \frac{e^{ixt}}{1+t^3}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{it\,e^{ixt}}{1+t^3}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\left|f(x,t)\right| = \frac{1}{1+t^3}$.

  La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et, comme on a $\frac{1}{1+t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{1+t^3}.$$

  La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et, comme $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Cela fournit l'hypothèse de domination.

On déduit du théorème 6 de la page précédente que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{it\, e^{ixt}}{1+t^3}\, \mathrm{d}t.$$

Attention

Montrons sur un exemple que l'hypothèse de domination de $\frac{\partial f}{\partial x}$ est essentielle.

Prenons $J = \mathbb{R}$, $I =]0, +\infty[$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{x^2}{x^2+t^2}\cdot$

Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont la seconde ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{x^2}{x^2+t^2}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et comme, au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) \sim \frac{x^2}{t^2}$, f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

On a vu dans l'exemple de la page 737 que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2xt^2}{(x^2+t^2)^2}$ et l'on prouve de même que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ a un prolongement continu sur $[0, +\infty[$.

Ainsi les trois premières hypothèses du théorème 3 de la page 732 sont vérifiées.

Bien sûr $g(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, on a $g(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(x \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2}|x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $g(x) = \frac{\pi}{2}|x|$. Par suite g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car non dérivable en 0 .

Point méthode

La conclusion du théorème 6 de la page ci-contre subsiste si l'on remplace l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ par la suivante :

- pour *tout segment* $[a,b] \subset J$, il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

(**hypothèse de domination sur tout segment pour** $\frac{\partial f}{\partial x}$)$\cdot$

En effet, en appliquant pour tout segment $[a,b] \subset J$ le théorème 6 de la page précédente à la restriction de f à $[a,b] \times I$, on prouve que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, \mathrm{d}t$.

Par suite g est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de tout point, donc sur J, et le calcul de g' est valable sur J.

Exemple Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

- Montrons que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$, en appliquant le théorème 3 de la page 732. On note $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}$.
  - Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
  - On a :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \geqslant 0 \quad \left|f(x,t)\right| = f(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$
  La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$, quand $t \to +\infty$; d'où l'intégrabilité de cette fonction sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann. Cela fournit l'hypothèse de domination.

  D'après le théorème 3 de la page 732, g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrons que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (par parité de g, elle l'est également sur $\mathbb{R}_-^*$), en appliquant le point méthode précédent.
  - Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :
  $$\forall x > 0 \quad \forall t \geqslant 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2\left(1+t^2\right)}.$$
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, comme on l'a vu dans l'étude de définition de g.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
  - Soit $[a,b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :
  $$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-a^2\left(1+t^2\right)}.$$
  La fonction $\varphi : t \mapsto 2be^{-a^2\left(1+t^2\right)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a :
  $$\varphi(t) = 2be^{-a^2}e^{-a^2t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{quand} \quad t \to +\infty,$$
  par croissances comparées ; d'où l'intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

  On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :
  $$\forall x > 0 \quad g'(x) = -\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t.$$

- Déduisons de ce qui précède la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

  Notons que I existe, car la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann, puisque $e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$.

  En effectuant dans l'intégrale donnant g' le changement de variable $t = \frac{u}{x}$ (on applique la proposition 25 de la page 679 : la fonction $u \mapsto \frac{u}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient :

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = -2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{-u^2}\mathrm{d}u = -2Ie^{-x^2}.$$

  D'où l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = -2I\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + C.$$

  On a, par ailleurs :

$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant g(x) = e^{-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant e^{-x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}e^{-x^2}.$$

  Par encadrement, on en déduit $\lim\limits_{+\infty} g = 0$, puis $C = 2I^2$.

  On a, de plus :

$$g(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{0^+} g = C = 2I^2.$$

  La continuité de g en 0 permet de conclure que $2I^2 = \frac{\pi}{2}$ et donc que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

p.755 **Exercice 11** Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer g', puis g.

Corollaire 7

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J,
- pour tout $x \in J$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- pour *tout segment* $[a,b] \subset J$, il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t),$$

(**hypothèse de domination sur tout segment pour** $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$).

Alors la fonction $g : J \mapsto \mathbb{K}$, définie par $g(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et l'on a, pour tout $p \in [\![1,k]\!]$: $\forall x \in J \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration page 756

Exemple Montrons que $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-itx} \mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Appliquons le corollaire 7. On note $f : (x,t) \mapsto e^{-t^2} e^{-itx}$ et l'on fixe $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall p \in [\![0,k]\!] \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (-it)^p e^{-t^2} e^{-itx}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

  On a, quand $|t| \to +\infty$:

$$\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| = |t|^p e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

  par croissances comparées.

  Cela assure l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$, par comparaison aux intégrales de Riemann, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |t|^k e^{-t^2}.$$

La fonction $t \mapsto |t|^k e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (même raison que dans le point précédent). Cela assure l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

D'après le corollaire 7 de la page ci-contre, on peut conclure que g est définie et de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^k e^{-t^2} e^{-itx} \mathrm{d}t.$$

p.756 **Exercice 12** On conserve la notation de l'exemple précédent.

Former une équation différentielle vérifiée par g et en déduire g.

p.757 **Exercice 13** Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de Γ.
2. Démonter que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. On pourrait utiliser le théorème de convergence dominée, mais ici une méthode directe est plus simple.

   On déduit de la concavité de la fonction $\ln$ l'inégalité classique suivante :
   $$\forall u > -1 \quad \ln(1+u) \leqslant u.$$
   On a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$
   et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u \mapsto u^{\frac{1}{n}}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur lui-même ; en utilisant la proposition 25 de la page 679, on obtient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u.$$
   Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $J_n = nI_n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}\, u^{\frac{1}{n}}$ est continue sur $]0,1]$.
   - La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction continue f définie par : $\forall u \in]0,1] \quad \varphi(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}$.
   - On a :
     $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in]0,1] \quad \left|f_n(u)\right| = f_n(u) \leqslant \varphi(u),$$
     avec $\varphi(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}$.

     La fonction φ est intégrable sur $]0,1]$, car prolongeable par continuité sur $[0,1]$, puisque $\lim\limits_{0} \varphi = 1$.

   On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$ et, comme la fonction f est continue et strictement positive sur $[0,1]$, on a $\int_0^1 f > 0$. On peut donc écrire :
   $$I_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u\cdot$$

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1-t^n)^{1/n}}$ est continue sur $[0,1[$.

   On a, au voisinage de 1 :
   $$1 - t^n = 1 - \big(1 + (t-1)\big)^n = 1 - \big(1 + n(t-1) + \mathrm{o}(t-1)\big).$$
   On en déduit $1 - t^n \sim n(1-t)$, puis $f_n(t) \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}(1-t)^{\frac{1}{n}}}\cdot$

   Par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrale I_n est définie si, et seulement si, $\frac{1}{n} < 1$, c'est-à-dire $n \geqslant 2$, puisque $n \in \mathbb{N}^*$.

2. • Soit $t \in [0,1[$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-t^n) = 1$; comme $\ln\big(f_n(t)\big) = -\frac{1}{n}\ln(1-t^n)$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\big(f_n(t)\big) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 1$.
Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction f constante (donc continue !) égale à 1.
• Pour $n \geqslant 2$ et $t \in [0,1[$, on a :

$$1-t^n \geqslant 1-t^2 \quad \text{donc} \quad (1-t^n)^{\frac{1}{n}} \geqslant \big(1-t^2\big)^{\frac{1}{n}}.$$

Comme $1-t^2 \leqslant 1$, on a $\big(1-t^2\big)^{\frac{1}{n}} \geqslant \big(1-t^2\big)^{\frac{1}{2}}$.
On en déduit, pour tout $n \geqslant 2$, $|f_n| = f_n \leqslant f_2$, ce qui fournit l'hypothèse de domination, puisque, d'après la première question, f_2 est intégrable.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f = 1.$$

Exercice 3

1. Notons $\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,\sqrt{n}]$ sur $\mathbb{R}_+$ et définissons f_n sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall t \geqslant 0 \quad f_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t).$$

La fonction f_n est continue sur $[0,\sqrt{n}]$ et nulle sur $]\sqrt{n},+\infty[$, donc continue par morceaux (et même continue).

Comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x |f_n|$ est constante sur $]\sqrt{n},+\infty[$, la fonction f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{\sqrt{n}} f_n = I_n$.

2. • Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour $n > t^2$, qui équivaut à $1-\frac{t^2}{n} > 0$, on a $f_n(t) > 0$. On peut écrire, quand $n \to +\infty$:

$$\ln\big(f_n(t)\big) = n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \sim -n\,\frac{t^2}{n}\cdot$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t^2}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction continue $f : t \mapsto e^{-t^2}$.
• Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on a, si $n > t^2$:

$$\big|f_n(t)\big| = e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} \leqslant e^{-t^2},$$

en utilisant la même inégalité qu'à la page 744.
Comme, pour $n \leqslant t^2$, on a $f_n(t) = 0$, on peut écrire :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \quad \big|f_n(t)\big| \leqslant e^{-t^2}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}_+$; elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, quand $t \to +\infty$, par croissances comparées.
Cela fournit l'hypothèse de domination.

On peut conclure, d'après le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 Soit $f : x \mapsto \frac{x^2}{e^x-1}$; pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2e^{-nx} \quad \text{car} \quad e^{-x} \in]0,1[.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \mapsto x^2e^{-nx}$ et appliquons à la série $\sum u_n$ le théorème d'intégration terme à terme sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $u_n(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$, par croissances comparées ; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de Riemann.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} u_n$, procédons à une double intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-nx}\mathrm{d}x &= -\frac{x^2e^{-nx}}{n} + \frac{2}{n}\int xe^{-nx}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{x^2e^{-nx}}{n} - \frac{2xe^{-nx}}{n^2} + \frac{2}{n^2}\int e^{-nx}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{x^2e^{-nx}}{n} - \frac{2xe^{-nx}}{n^2} - \frac{2e^{-nx}}{n^3}.\end{aligned}$$

  Notant v_n la primitive obtenue de u_n, on a :

$$v_n(0) = -\frac{2}{n^3} \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} v_n = 0.$$

  On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} u_n = \frac{2}{n^3}$, ce qui prouve la convergence de la série $\displaystyle\sum\left(\int_0^{+\infty}|u_n|\right)$ (série de Riemann).

En conclusion, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Exercice 5

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $v_n : t \mapsto 2nte^{-nt^2}$ est continue positive et l'on a, pour tout $A > 0$:
$$\int_0^A v_n(t)\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-nt^2}\right]_0^A.$$
En faisant tendre A vers $+\infty$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Comme la fonction v_n est positive, elle est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc aussi $u_n = v_{n+1} - v_n$ et l'on a :
$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} v_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
Ainsi la série $\sum\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} u_n\right)$ converge absolument.

- Par ailleurs, on a, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k(t) &= \sum_{k=1}^n \big(v_{k+1}(t) - v_k(t)\big)\\ &= v_{n+1}(t) - v_1(t) = 2(n+1)te^{-(n+1)t^2} - 2te^{-t^2}.\end{aligned}$$
Pour $t > 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2(n+1)te^{-(n+1)t^2}\right) = 0$, par croissances comparées ; comme $u_k(0) = 0$, on peut conclure que la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = -2te^{-t^2}.$$
On en déduit que la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que :
$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(-2te^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\left[e^{-t^2}\right]_0^A = -1.$$
On n'a donc pas $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ puisque cette dernière somme est nulle.

Exercice 6 Fixons $t \in \mathbb{R}_+^*$; on a :
$$\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} = \frac{2\cos(xt)}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^{-t}\cos(xt)}{1 + e^{-2t}}.$$

La série géométrique $\sum 2e^{-t}\cos(xt)\left(-e^{-2t}\right)^n$, de raison $\left(-e^{-2t}\right) \in \left]0,1\right[$, converge et l'on peut écrire :

$$\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} = \frac{2e^{-t}\cos(xt)}{1+e^{-2t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2e^{-t}\cos(xt)\left(-e^{-2t}\right)^n.$$

Posons $u_n(t) = 2(-1)^n \cos(xt)\, e^{-(2n+1)t}$.

- Chaque u_n est continue sur $\left]0,+\infty\right[$ et l'on a :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \left]0,+\infty\right[\quad \left|u_n(t)\right| \leqslant 2e^{-(2n+1)t} \leqslant 2e^{-t}.$$

  Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\left]0,+\infty\right|$, on en déduit que chaque u_n est intégrable sur $\left]0,+\infty\right|$, par comparaison.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\left]0,+\infty\right|$, d'après l'étude initiale, et sa somme S est la fonction $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}$, continue sur $\left]0,+\infty\right|$.
  On a :

$$\forall t > 0 \quad \left|S(t)\right| = \left|\frac{2\cos(xt)}{e^t + e^{-t}}\right| \leqslant 2e^{-t}.$$

  On en déduit que S, comme chaque u_n, est intégrable sur $\left]0,+\infty\right|$.
  Notons qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction R_n est intégrable sur $\left]0,+\infty\right|$, comme somme de fonctions intégrables, puisque $R_n = S - S_n$.
- Pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times \left]0,+\infty\right|$, on a :

$$\left|R_n(t)\right| = 2e^{-t}\left|\cos(xt)\right| \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \left(-e^{-2t}\right)^p\right| = 2e^{-t}\left|\cos(xt)\right| \left|\frac{\left(-e^{-2t}\right)^{n+1}}{1+e^{-2t}}\right|.$$

  On en déduit $\left|R_n(t)\right| \leqslant 2e^{-2(n+1)t}$.
  La fonction $t \mapsto 2e^{-2(n+1)t}$ est intégrable sur $\left]0,+\infty\right|$ et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} 2e^{-2(n+1)t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{2e^{-2(n+1)t}}{2n+2}\right]_0^A = \frac{1}{n+1}.$$

  Comme :

$$\left|\int_0^{+\infty} R_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|R_n(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} 2e^{-2(n+1)t}\mathrm{d}t,$$

  on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} R_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$. On en déduit l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

- Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$.
  Remarquons que $u_n(t) = \operatorname{Re}\left(2(-1)^n e^{(ix-2n-1)t}\right)$. Comme :

$$\left|2e^{(ix-2n-1)t}\right| = 2e^{-(2n+1)t} \leqslant 2e^{-t},$$

la fonction $t \mapsto 2e^{(ix-2n-1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et l'on peut écrire :

$$(-1)^n \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} 2e^{(ix-2n-1)t}\mathrm{d}t\right).$$

Or, pour tout $A \in]0,+\infty[$, on a :

$$\int_0^A 2e^{(ix-2n-1)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{2e^{(ix-2n-1)t}}{ix-2n-1}\right]_0^A.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on en déduit :

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t &= \mathrm{Re}\left(\frac{2}{2n+1-ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2(2n+1+ix)}{(2n+1)^2+x^2}\right)\\ &= \frac{4n+2}{(2n+1)^2+x^2}\cdot\end{aligned}$$

En conclusion, nous avons établi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4n+2}{(2n+1)^2+x^2}\cdot$$

Exercice 7

1. Fixons $t \in \mathbb{R}_+^*$; on a :

$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{sh}\,t} = \frac{2\sin(xt)}{e^t - e^{-t}} = \frac{2e^{-t}\sin(xt)}{1-e^{-2t}}\cdot$$

La série géométrique $\sum 2e^{-t}\sin(xt)\,e^{-2nt}$, de raison $e^{-2t} \in]0,1[$, converge et l'on peut écrire :

$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{sh}\,t} = \frac{2e^{-t}\sin(xt)}{1-e^{-2t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2e^{-t}\sin(xt)\,e^{-2nt}.$$

Appliquons à la série $\sum u_n$, avec $u_n(t) = 2\sin(xt)\,e^{-(2n+1)t}$, le théorème d'intégration terme à terme sur $]0,+\infty[$.

- Chaque u_n est continue sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times]0,+\infty[\quad |u_n(t)| \leqslant 2e^{-(2n+1)t} \leqslant 2e^{-t}.$$

  Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on en déduit que chaque u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison.
- La série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, d'après l'étude initiale, et sa somme est la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\mathrm{sh}\,t}$, continue sur $]0,+\infty[$.
- En utilisant l'inégalité classique $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times]0,+\infty[\quad |u_n(t)| \leqslant 2\,|x|\,te^{-(2n+1)t}.$$

Soit $A \in]0,+\infty[$; une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_0^A 2\,|x|\, te^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t &= \frac{2\,|x|}{2n+1}\Big[-\,te^{-(2n+1)t}\Big]_0^A + \frac{2\,|x|}{2n+1}\int_0^A e^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{2\,|x|}{2n+1}\left[-\,te^{-(2n+1)t} - \frac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1}\right]_0^A.\end{aligned}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ et en utilisant les croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles, on obtient l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto 2\,|x|\, te^{-(2n+1)t}$ sur $[0,+\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} 2\,|x|\, te^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{2\,|x|}{(2n+1)^2}\cdot$$

On peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} \big|u_n(t)\big|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} 2\,|x|\, te^{-(2n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{2\,|x|}{(2n+1)^2}\cdot$$

Comme $\frac{2|x|}{(2n+1)^2} \sim \frac{|x|}{2n^2}$, la série $\sum \frac{2|x|}{(2n+1)^2}$ converge, par comparaison aux séries de Riemann, donc aussi la série $\sum \left(\int_0^{+\infty} \big|u_n(t)\big|\mathrm{d}t\right)$.

On peut donc conclure que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (ce que l'on peut facilement vérifier directement) et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

- Calculons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

  Notons que $u_n(t) = \operatorname{Im}\left(2e^{(ix-2n-1)t}\right)$.
  Comme $\left|2e^{(ix-2n-1)t}\right| = 2e^{-(2n+1)t} \leqslant 2e^{-t}$, la fonction $t \mapsto 2e^{(ix-2n-1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et l'on peut écrire :

  $$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} 2e^{(ix-2n-1)t}\mathrm{d}t\right).$$

  Pour tout $A \in]0,+\infty[$, on a :

  $$\int_0^A 2e^{(ix-2n-1)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{2e^{(ix-2n-1)t}}{ix-2n-1}\right]_0^A.$$

  En faisant tendre A vers $+\infty$, on en déduit :

  $$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left(\frac{2}{2n+1-ix}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{2\,(2n+1+ix)}{(2n+1)^2+x^2}\right) = \frac{2x}{(2n+1)^2+x^2}\cdot$$

En conclusion, nous avons établi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$ et appliquons à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le théorème de convergence dominée. Comme les autres hypothèses ont été établies dans la première méthode, vérifions seulement l'hypothèse de domination.

   Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|S_n(t)\right| = \left|2e^{-t} \sin(xt) \, \frac{1 - e^{-(2n+2)t}}{1 - e^{-2t}}\right| \leqslant \frac{2e^{-t}\,|xt|}{1 - e^{-2t}} = \frac{|xt|}{\operatorname{sh} t},$$

   en utilisant l'inégalité classique $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$, valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

   La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{|xt|}{\operatorname{sh} t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et a un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$; elle est donc intégrable sur $]0, 1]$. De plus, quand $t \to +\infty$, on a :

$$\frac{|xt|}{\operatorname{sh} t} \sim 2\,|xt|\,e^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

   par croissances comparées.

   Cela prouve l'intégrabilité de la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de Riemann et fournit l'hypothèse de domination. On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t} \, \mathrm{d}t.$$

Théorème 3 Utilisons la *caractérisation séquentielle de la continuité*.

Fixons $a \in A$ et donnons-nous une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Notons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur I par $f_n(t) = f(x_n, t)$ et appliquons-lui le théorème de convergence dominée.

D'après la deuxième hypothèse, chaque f_n est continue par morceaux sur I.

Pour tout $t \in I$ fixé, d'après la première hypothèse et par *composition des limites* appliquée à la fonction $x \mapsto f(x, t)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, t) = f(a, t)$.

Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $t \mapsto f(a, t)$, continue par morceaux sur I d'après la deuxième hypothèse.

Pour tous $t \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la troisième hypothèse, $\left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t)$, avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant vérifiées, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(a)$. Cela étant vrai pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A de limite a, on en déduit que g est continue en a, pour tout $a \in A$, c'est-à-dire sur A.

Exercice 8

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   Pour $x > 0$, on a :

   $$\forall t \in [0,+\infty[\quad 0 \leqslant \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \leqslant e^{-xt}.$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \mathrm{d}t$ converge, par comparaison de fonctions positives, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \mathrm{d}t$ converge.

   Pour $x \leqslant 0$, on a :

   $$\forall t \in [0,+\infty[\quad \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{t+1}}\cdot$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \mathrm{d}t$ diverge, par comparaison aux exemples de Riemann, car $\frac{1}{\sqrt{t+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de $+\infty$.

   En conclusion, g est définie sur $J =]0,+\infty[$.

2. Soit $I = [0,+\infty[$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\cdot$

   Appliquons à f le point méthode précédent.

   - Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$ est continue sur J.
   - Pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$ est continue sur I.
   - Soit $[a,b]$ un segment inclus dans J et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \frac{e^{-at}}{\sqrt{t+1}}\cdot$ La fonction φ est continue et intégrable sur I d'après l'étude initiale, car a est strictement positif. Pour tout $(x,t) \in [a,b] \times I$, on a :

     $$\left|f(x,t)\right| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \leqslant \frac{e^{-at}}{\sqrt{t+1}} = \varphi(t).$$

   La fonction g est donc continue sur J, d'après le point méthode précédent.

Théorème 4 L'intégrabilité de chaque fonction $t \mapsto f(\lambda, t)$ se déduit de l'hypothèse de domination et du théorème de comparaison.

Utilisons la caractérisation séquentielle de la limite.

Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de J de limite λ_0. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

$$\forall t \in I \quad f_n(t) = f(\mu_n, t).$$

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement sur I vers la fonction continue par morceaux F.
- On a l'hypothèse de domination.

Par suite, F est intégrable sur I et l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I F,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f(\mu_n, t)\,\mathrm{d}t = \int_I F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme ce résultat est établi pour toute suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de J de limite λ_0, on déduit de la caractérisation séquentielle de la limite que $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\int_I f(\lambda,t)\,\mathrm{d}t = \int_I F(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 Pour tout $\lambda > 0$, la fonction f_λ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, quand $t \to +\infty$, on a $f_\lambda(t) \sim \frac{1}{t^2}$; d'où l'intégrabilité de chaque f_λ sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Appliquons le corollaire 5 de la page 736.

- Pour tout $t \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f_\lambda(t) = 0$.
- Il suffit d'établir la domination au voisinage de $+\infty$, par exemple sur $[1,+\infty[$:

$$\forall \lambda \in [1,+\infty[\quad \forall t \in [0,+\infty[\quad \left|f_\lambda(t)\right| = f_\lambda(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$, quand $t \to +\infty$. On en déduit l'intégrabilité de cette fonction sur $[0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann. Cela fournit l'hypothèse de domination.

D'après le corollaire 5 de la page 736, on peut conclure, que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+} f_\lambda = 0$.

Exercice 10

1. Pour tout $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, quand $t \to +\infty$, on a $f_x(t) = \mathrm{o}(e^{-t})$, ce qui assure l'intégrabilité de f_x sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison. Cela justifie la définition de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Appliquons le corollaire 5 de la page 736, pour déterminer $\lim\limits_{+\infty} g$.
   - Pour tout $t \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_x(t) = 0$.
   - Il suffit d'établir la domination au voisinage de $+\infty$, par exemple sur $[1,+\infty[$:

   $$\forall x \in [1,+\infty[\quad \forall t \in [0,+\infty[\quad \left|f_x(t)\right| = f_x(t) \leqslant \frac{e^{-t}}{t+1} = f_1(t).$$

   Comme f_1 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cela fournit l'hypothèse de domination.

   D'après le corollaire 5 de la page 736, on peut conclure, que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+} f_x = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{+\infty} g = 0$.

Appliquons le corollaire 5 de la page 736, pour déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} xg(x)$, ce qui permettra d'obtenir un équivalent simple de $g(x)$, quand x tend vers $+\infty$.

- Pour tout $t \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} xf_x(t) = e^{-t}$. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- On a :
$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[\quad \forall t \in \left[0, +\infty\right[\quad \left|xf_x(t)\right| = xf_x(t) \leqslant e^{-t}.$$
La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cela fournit l'hypothèse de domination.

D'après le corollaire 5 de la page 736, on peut conclure, que :
$$\lim_{x \to +\infty} x \int_0^{+\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1.$$
On a établi que $\lim\limits_{x \to +\infty} xg(x) = 1$, c'est-à-dire $g(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}\cdot$

Théorème 6 Fixons $x_0 \in J$ et appliquons le théorème 3 de la page 732 à la fonction $f_1 : J \times I \to \mathbb{K}$ définie par $f_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$

- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f_1(x,t)$ est continue en tout $x \in J \setminus \{x_0\}$, d'après la première hypothèse, et en x_0, par définition de $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot$
- La classe $\mathcal{C}^1$ sur J, pour tout $t \in I$, de la fonction $x \mapsto f(x,t)$ permet de lui appliquer l'inégalité des accroissements finis ; on en déduit, d'après l'hypothèse de domination :
$$\forall (x,t) \in J \times I \quad \left|f_1(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$
D'après les hypothèses, la fonction $t \mapsto f_1(x,t)$ est continue par morceaux sur I, pour tout $x \in J$.
L'inégalité précédente fournit l'hypothèse de domination. On peut ainsi conclure que la fonction $g_1 : x \mapsto \displaystyle\int_I f_1(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur J ; on a donc, en particulier, $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = g_1(x_0) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$

Comme, pour $x \neq x_0$, $g_1(x) = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$, on a établi que g est dérivable en x_0 avec :
$$g'(x_0) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$$
Le résultat précédent étant vrai pour tout $x_0 \in J$, g est dérivable sur J.

Une nouvelle application du théorème 3 de la page 732 permet de prouver que g' est continue sur J : les première, troisième et quatrième hypothèses fournissent les hypothèses concernant $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour ce théorème, d'où la conclusion.

Exercice 11

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   La fonction h_1 étant nulle, le domaine de définition de g contient 1. Supposons donc $x \neq 1$.

   Un développement limité à l'ordre 1 du numérateur donne $\lim\limits_{t\to 0} h_x(t) = x - 1$; ayant un prolongement continu en 0, la fonction h_x est intégrable sur $]0,1]$.

   Quand $t \to +\infty$, on a :

$$h_x(t) \sim \begin{cases} \dfrac{e^{-t}}{t} & \text{si } x > 1 \\ -\dfrac{e^{-xt}}{t} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

   Pour $x \leqslant 0$, la fonction h_x est négative et, vu l'équivalent obtenu, $\frac{1}{t} = \mathrm{O}\big(h_x(t)\big)$; par comparaison aux intégrales de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_x$ est donc divergente.

   Pour $x > 0$, l'équivalent obtenu montre que $\big|h_x(t)\big| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, par croissances comparées ; cela prouve l'intégrabilité de h_x sur $[1,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   En conclusion, le domaine de définition de g est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Appliquons le point méthode précédent, pour établir la classe $\mathcal{C}^1$ de g.

   Notons $f : (x,t) \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\cdot$

   - Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-xt}.$$

   - Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la première question.
   - Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Soit $[a,b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-at}.$$

     La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

     Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

   On déduit du point méthode précédent que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\cdot$$

   Comme $g(1) = 0$, on déduit de ce qui précède que :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = \ln x.$$

Corollaire 7 Fixons un segment $[a,b] \subset J$ et établissons la classe $\mathcal{C}^k$ de g sur $[a,b]$, avec hypothèse de domination sur $[a,b]$ pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$, par récurrence sur k.

- Pour $k=1$, il s'agit du théorème 6 de la page 738.
- Supposons le résultat prouvé au rang $k-1$ avec $k \geqslant 2$ et prouvons-le au rang k. La classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, pour tout $t \in I$, de la fonction $x \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)$ permet de lui appliquer, pour tout $x \in [a,b]$, l'inégalité des accroissements finis sur le segment $[a,x]$; on obtient :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t) - \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a,t) \right| \leqslant (x-a)\,\varphi(t) \leqslant (b-a)\,\varphi(t).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I \quad \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t) \right| \leqslant \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a,t) \right| + (b-a)\,\varphi(t) = \psi(t).$$

La fonction ψ est continue par morceaux, positive et intégrable sur I, d'après les deuxième et quatrième hypothèses.

L'hypothèse de domination étant vérifiée pour $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}$, on déduit de l'hypothèse de récurrence que g est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $[a,b]$ et que :

$$\forall p \in [\![1,k-1]\!] \quad \forall x \in [a,b] \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier $g^{(k-1)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)\,\mathrm{d}t$. Appliquons le théorème 6 de la page 738 à cette intégrale :

* pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$,
* pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x,t)$ est intégrable sur I,
* pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
* on a l'hypothèse l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

Par suite $g^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$; g est donc de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$, d'où la conclusion.

Nous avons établi la classe $\mathcal{C}^k$ de g sur tout segment inclus dans J, donc sur J.

Exercice 12 On a vu que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)\,e^{-t^2} e^{-itx}\mathrm{d}t.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et intégrons par parties, en utilisant la proposition 24 de la page 678 (ici les trois termes existent de manière évidente) :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2te^{-t^2}\right)e^{-itx}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{i}{2}\,e^{-t^2}e^{-itx}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-itx}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x}{2}\,g(x)\,. \end{aligned}$$

On a établi :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x) = -\frac{x}{2}\,g(x)\,.$$

La solution générale de cette équation différentielle est $x\mapsto C\exp\left(-\int_0^x \frac{t}{2}\,dt\right)$, avec $C\in\mathbb{C}$. D'après l'exemple de la page 740, on a $g(0)=\sqrt{\pi}$; on en déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-itx}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Exercice 13

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $g_x : t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - La fonction g_x est positive et l'on a $g_x(t)\sim t^{x-1}$, quand $t\to 0$. On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que $\int_0^1 g_x$ converge si, et seulement si, $x>0$.
   - Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $g_x(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, quand $t\to+\infty$, ce qui assure l'intégrabilité de g_x sur $[1,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   En conclusion, le domaine de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrons que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en appliquant le corollaire 7 de la page 742.

   On note $f : (x,t)\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ et l'on fixe $k\in\mathbb{N}^*$.
   - Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

     $$\forall p\in[\![0,k]\!]\quad \forall(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\quad \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (\ln t)^p\,t^{x-1}e^{-t}.$$
   - Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $p\in[\![0,k-1]\!]$.
     On a, quand $t\to 0$:

     $$\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| = |\ln t|^p\,t^{x-1}e^{-t}\sim|\ln t|^p\,t^{x-1} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),$$

     par croissances comparées.
     Cela assure l'intégrabilité sur $]0,1]$ de $t\mapsto\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

On a, quand $|t| \to +\infty$:

$$\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| = |\ln t|^p\, t^{x-1} e^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

par croissances comparées. Par comparaison aux intégrales de Riemann, cela assure l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$.
Notons que, puisque p est quelconque, nous avons établi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $[a,b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \,]0,1] \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k\, t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln t|^k\, t^{a-1} e^{-t}$$

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \,]1,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k\, t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln t|^k\, t^{b-1} e^{-t}.$$

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(t) = |\ln t|^k\, t^{a-1} e^{-t} + |\ln t|^k\, t^{b-1} e^{-t} = \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(b,t)\right|.$$

Cette fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le deuxième point, et l'on a :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \,]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

Cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ pour la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

D'après le corollaire 7 de la page 742, on peut conclure que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

S'entraîner et approfondir

13.1 Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\operatorname{Arctan}(nx)e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right)\big(1-\operatorname{th}(x^n)\big)\,\mathrm{d}x$.

13.2 Étudier l'existence de $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et un équivalent simple de I_n.

13.3 Étudier l'existence de $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}x^{-\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

13.4 Montrer que pour tout $x>0$, on a :

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,\mathrm{d}t,$$

où Γ est la fonction définie dans l'exercice 13 de la page 743.

13.5 Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$, avec :

$$I_n=n^2\int_0^1(1-x)^n\,\sin(\pi\,x)\,\mathrm{d}x.$$

13.6 1. Justifier l'existence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, de $I_n=\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln t\,\mathrm{d}t$ et montrer que $I_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

On pourra poser $u=1-\frac{t}{n}\cdot$

2. En déduire que l'intégrale $\gamma=-\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\gamma=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right).$$

13.7 Démontrer le théorème de convergence dominée de la page 724 en supposant en outre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers f.

13.8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum a_n\,n!$ converge absolument. Montrer :

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,n!.$$

13.9 Soit p et q deux réels strictement positifs. Montrer :

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,q+p}\cdot$$

13.10 Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,\mathrm{d}x.$$

13.11 On note $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x > 1 \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\cdot$$

Montrer que :

$$\forall x > 1 \quad \Gamma(x)\,\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t,$$

où Γ est la fonction définie dans l'exercice 13 de la page 743.

13.12 1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ une série de fonctions, avec $u_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction *positive*, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On fait les hypothèses suivantes :

- chaque u_n est intégrable sur I,
- la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I.

Montrer que la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I si, et seulement si, la série $\sum \int_I u_n$ converge et que l'on a alors :

$$\int_I \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I u_n.$$

2. En déduire le *théorème de convergence monotone*, dont l'énoncé suit.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions à valeurs réelles, intégrables sur l'intervalle I et convergeant simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
Montrer que f est intégrable sur I si, et seulement si, la suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et que l'on a alors :

$$\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n.$$

13.13 *(Centrale 2015)*

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan t)}{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Calculer F.
3. En déduire les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

13.14 *(Centrale 2015)*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle :

$$x^2y' + y = x. \tag{E}$$

3. Montrer qu'il existe une unique solution g de (E) telle que $\lim\limits_{0^+} g = 0$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle R telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x) = R(x).$$

13.15 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ avec $f(x,t) = \dfrac{\ln\left(x+t^2\right)}{1+t^2}\cdot$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de g.
2. Montrer que g est continue sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Calculer g' sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$.
4. Calculer $g(0)$ à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}\cdot$
   En déduire $g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

13.16 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{K})$.

1. Soit g la fonction définie sur $J \setminus \{0\}$ par $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot$ Montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{0\} \quad g(x) = \int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t.$$

   En déduire que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.
2. Montrer plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h, définie sur $J\setminus\{0\}$ par $h(x) = \dfrac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\dfrac{x^k}{k!}}{x^{n+1}}$, se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\tan x}{\operatorname{sh} x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

13.17 *Théorème de Fubini*
Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$ une application continue. En utilisant les applications H et G définies sur $[a,b]$ par :

$$H(x) = \int_a^x \left(\int_c^d f(t,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(t,y)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y,$$

établir :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

13.18 Soit, pour $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}.$$

1. Justifier la définition de F.
2. Prouver que F tend vers $+\infty$ en 0.
3. Soit $\alpha > 0$. Calculer :
$$I_\alpha(x) = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+x^2}}$$
et en donner un équivalent lorsque x tend vers 0.
4. En déduire un équivalent de F en 0.
5. Par un changement de variable, donner un équivalent de F en $+\infty$.

13.19 Étudier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer à l'aide d'une dérivation par rapport au paramètre qu'on justifiera :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\,\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\,\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$.

13.20 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_g$ puis calculer g'.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis calculer g.

13.21 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}\,dt$.

1. Montrer que : $\forall x \geqslant 0 \quad g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

13.22 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2tx)\, \mathrm{d}t = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t.$$

13.23 Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+$. Transformer $g(x)$, pour $x > 0$, à l'aide du changement de variable $t = u - x$. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de la même équation différentielle que f.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\, \mathrm{d}t$.
   En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les limites de f et g en $+\infty$. Conclure que $f = g$ sur $\mathbb{R}_+$.
   En déduire en particulier la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$.

Solution des exercices

13.1 1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $\mathbb{R}_+$, définies par :

$$\forall x \geqslant 0 \quad f_n(x) = \operatorname{Arctan}(nx)e^{-x^n},$$

converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f égale à $\pi/2$ sur $]0,1[$, égale à $\pi/2e$ en 1 et nulle ailleurs.

De plus, elle est dominée par la fonction intégrable :

$$x \mapsto \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi e^{-x}/2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La limite est donc $\pi/2$.

2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $\mathbb{R}_+^*$, définies par :

$$\forall x > 0 \quad f_n(x) = \left(1 + \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right)\big(1 - \operatorname{th}(x^n)\big),$$

converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (sauf en 1) vers la fonction caractéristique de $]0,1]$. La limite est donc égale à 1 puisqu'il y a domination par la fonction :

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 2(1 - \operatorname{th} x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et que φ est intégrable d'après les équivalents suivants :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 4e^{-2x}.$$

13.2 • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par $f_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

* $*$ On a $f_n(t) \sim \frac{t/n}{t}$, au voisinage de 0, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f_n(t) = 1/n$.
La fonction f_n est intégrable sur $]0,1]$, puisqu'elle a un prolongement continu sur $[0,1]$.
* $*$ On a, pour tout $t > 0$:

$$\left|f_n(t)\right| \leqslant \frac{1}{t(1+t^2)}.$$

Comme on a $\frac{1}{t(1+t^2)} \sim \frac{1}{t^3}$, au voisinage de $+\infty$, la fonction f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

• Posons $g_n = nf_n$ et appliquons à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée.

* $*$ Chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
* $*$ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\sin\left(\frac{t}{n}\right)\right) = t$, pour tout $t > 0$.
On en déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux g définie par $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

* En utilisant l'inégalité classique $|\sin u| \leqslant |u|$, vraie pour tout $u \in \mathbb{R}$, on obtient :
$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \big|g_n(t)\big| \leqslant \frac{1}{1+t^2}\cdot$$
La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$, au voisinage de $+\infty$; cette fonction est donc intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

On peut donc conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

On a, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} x$.

On en déduit, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, en faisant tendre x vers $+\infty$.

On a donc établi que $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n) = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $I_n \sim \dfrac{\pi}{2n}\cdot$

13.3 • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

* On a $f_n(x) \sim x^{-1/n}$, au voisinage de 0.
Par comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction f_n est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $n > 1$.
* On a $f_n(x) \sim \frac{x^{-n-\frac{1}{n}}}{n^{-n}}$, au voisinage de $+\infty$.
Par comparaison aux intégrales de Riemann, la fonction f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ si, et seulement si, $n + \frac{1}{n} > 1$, ce qui est toujours vrai.

En conclusion, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $n \geqslant 2$.

• Appliquons à la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ le théorème de convergence dominée sur $]0,+\infty[$.

* Chaque f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
* Fixons $x > 0$. Un développement, quand n tend vers l'infini, donne :
$$\ln f_n(x) = -n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{\ln x}{n} = -n\left(\frac{x}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{\ln x}{n},$$
d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln f_n(x) = -x$.
On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux f définie par $f(x) = e^{-x}$.
* Définissons la fonction $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ \frac{4}{x^2} & \text{si} \quad x \in]1,+\infty[. \end{cases}$$
La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après l'étude des intégrales de Riemann.

Pour $n \geqslant 2$ et $x \in]0,1]$, on a :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^{-1/n} \leqslant x^{-1/2} = \varphi(x).$$

Pour $n \geqslant 2$ et $x > 1$, on a :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{\binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2}} = \frac{2n}{n-1}\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{4}{x^2} = \varphi(x),$$

car $\frac{2n}{n-1} \leqslant 4$ équivaut à $2n \geqslant 4$.

Cela fournit l'hypothèse de domination.

On a ainsi établi que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

13.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n. \end{cases}$$

La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a $f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, ce qui assure l'intégrabilité de f_n sur $]0,1]$, par comparaison aux intégrales de Riemann ; comme, de plus, f_n est nulle sur $[n,+\infty[$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a bien sûr :

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Appliquons à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée.

- Soit $t > 0$; pour $n > t$, on peut écrire :

  $$f_n(t) = t^{x-1}e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}.$$

  Quand $n \to +\infty$, on a $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \sim -\frac{t}{n}$, d'où l'on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

  La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction continue par morceaux $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
- On déduit de la concavité de la fonction ln l'inégalité :

  $$\forall u > -1 \quad \ln(1+u) \leqslant u.$$

  Par suite, pour $n > t > 0$, on a :

  $$|f_n(t)| = f_n(t) = t^{x-1}e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = t^{x-1}e^{-t}.$$

  L'inégalité $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ est bien sûr valable pour $n \leqslant t$.

  La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme a :

  $$\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} \qquad \varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

  elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Cela fournit l'hypothèse de domination.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que :

$$\forall x > 0 \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

13.5 Par le changement de variable $u = n\,x$, on obtient :

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n n \sin\left(\frac{\pi u}{n}\right) \mathrm{d}u.$$

Définissons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(u) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n n \sin\left(\frac{\pi u}{n}\right) & \text{si} \quad u \in [0, n[\\ 0 & \text{si} \quad u \geqslant n. \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et, comme elle est nulle sur $[n, +\infty[$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$; on a bien sûr :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u.$$

Appliquons à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée.

- Soit $u \in \mathbb{R}_+$; pour $n > u$, on peut écrire :

  $$f_n(u) = e^{n \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right)} n \sin\left(\frac{\pi u}{n}\right) \cdot$$

  Comme, pour $u \geqslant 0$, on a lorsque n tend vers $+\infty$:

  $$\sin\left(\frac{\pi\,u}{n}\right) \sim \frac{\pi\,u}{n} \qquad \text{et} \qquad \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right) \sim -\frac{u}{n},$$

  la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction continue par morceaux $f : u \mapsto \pi\,e^{-u}\,u$.
- On déduit de la concavité de la fonction $\ln$ l'inégalité :

  $$\forall t > -1 \quad \ln(1+t) \leqslant t.$$

  Par suite, pour $n > u \geqslant 0$, on a :

  $$\left|f_n(u)\right| = f_n(u) = e^{n \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right)} n \sin\left(\frac{\pi u}{n}\right) \leqslant \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \pi\,e^{-u}\,u,$$

  en utilisant l'inégalité classique $|\sin t| \leqslant |t|$, valable pour tout $t \in \mathbb{R}$ (elle peut se déduire de la concavité de la fonction $\sin$ sur $[0, \pi/2]$).

  L'inégalité $\left|f_n(u)\right| \leqslant \varphi(u)$ est bien sûr valable pour $n \leqslant u$.

  La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et, comme on a $\varphi(u) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{u^2}\right)$ quand $u \to +\infty$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

  Cela fournit l'hypothèse de domination.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \pi \int_0^{+\infty} u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Une intégration par parties donne :

$$\int ue^{-u}\mathrm{d}u = -ue^{-u} + \int e^{-u}\mathrm{d}u = -ue^{-u} - e^{-u}.$$

On en déduit facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \pi$.

13.6 1. • Vérifions d'abord l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de l'intégrale I_n.

La fonction $f_n : t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t$ est continue sur $]0,n]$ et, au voisinage de 0, on a $\left|f_n(t)\right| \sim |\ln t| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot$

On en déduit l'intégrabilité de f_n sur $]0,n]$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

• La fonction $\psi :]0,1[\to]0,n[$, définie par $\psi(u) = n(1-u)$, étant une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire, d'après la proposition 26 de la page 680 :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 f_n\big(\psi(u)\big)\psi'(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 nu^{n-1}\ln\big(n(1-u)\big)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 nu^{n-1}\big(\ln n + \ln(1-u)\big)\mathrm{d}u \\
&= \ln n + \int_0^1 nu^{n-1}\ln(1-u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Pour $x \in [0,1[$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^x nu^{n-1}\ln(1-u)\,\mathrm{d}u &= \Big[(u^n-1)\ln(1-u)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{u^n-1}{u-1}\,\mathrm{d}u \\
&= (x^n-1)\ln(1-x) - \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n u^{k-1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)(x-1)\ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}\cdot
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)\ln(1-x) = 0$, il vient, en faisant tendre x vers 1 :

$$I_n = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\cdot$$

2. Soit $g_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_n(t) = f_n(t)\,\mathbb{1}_{]0,n]}(t)$ où $\mathbb{1}_{]0,n]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $]0,n]$. Appliquons à la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le théorème de convergence dominée sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

• Chaque g_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

• Fixons $t > 0$. On a, pour $n > t$:

$$g_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln t = e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\ln t.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{t}{n}\right)=0$, on peut écrire le développement :

$$g_n(t)=e^{(n-1)\left(-\frac{t}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\ln t=e^{-t+\mathrm{o}(1)}\ln t.$$

On en déduit que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux g définie par $g(t)=e^{-t}\ln t$.

- En utilisant l'inégalité classique $\ln(1+u)\leqslant u$, vraie pour $u>-1$, on obtient, pour $(n,t)\in\mathbb{N}^*\times\,]0,n[$:

$$\begin{aligned}\left|g_n(t)\right|&=e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\left|\ln t\right|\\&\leqslant e^{(n-1)\left(-\frac{t}{n}\right)}\left|\ln t\right|=e^{-t+\frac{t}{n}}\left|\ln t\right|\leqslant e^{-t+1}\left|\ln t\right|.\end{aligned}$$

Soit $\varphi:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}_+$ la fonction définie par $\varphi(t)=e^{1-t}\left|\ln t\right|$.
La fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$.
On a $\varphi(t)\sim e\left|\ln t\right|$, au voisinage de 0. La fonction $\ln$ étant intégrable sur $]0,1]$, d'après la première question, on en déduit, par comparaison, l'intégrabilité de φ sur $]0,1]$.
Par croissances comparées, on a $\varphi(t)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$. On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Ainsi φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Comme g_n est nulle sur $[n,+\infty[$, on a établi :

$$\forall(n,t)\in\mathbb{N}^*\times\,]0,+\infty[\quad\left|g_n(t)\right|\leqslant\varphi(t),$$

d'où l'hypothèse de domination.

En conclusion, on a démontré que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\gamma=-\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

13.7 • L'intégrabilité de chaque f_n se déduit de l'hypothèse de domination et du théorème de comparaison.
Par convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, on a également $|f|\leqslant\varphi$; on en déduit de même l'intégrabilité de f.

- Soit $\varepsilon>0$. Notons $\alpha<\beta$ les bornes de I ; comme φ est intégrable sur I, il existe deux réels $a<b$ dans I tels que :

$$\int_\alpha^a\varphi\leqslant\frac{\varepsilon}{5}\quad\text{et}\quad\int_b^\beta\varphi\leqslant\frac{\varepsilon}{5}.$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geqslant n_0\quad\left|\int_{[a,b]}f_n-\int_{[a,b]}f\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{5}.$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_I f_n - \int_I f\right| &\leqslant \int_\alpha^a |f| + \int_\alpha^a |f_n| + \int_b^\beta |f| + \int_b^\beta |f_n| + \left|\int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} f\right| \\ &\leqslant 2\int_\alpha^a \varphi + 2\int_b^\beta \varphi + \left|\int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} \varphi\right| \\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

On a donc établi que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I f_n = \int_I f$.

13.8 La série $\sum a_n\, x^n$ converge normalement sur tout segment $[0,R]$ puisque :

$$|a_n|\; R^n = |a_n|\; n!\, \frac{R^n}{n!} = \mathrm{o}\big(|a_n|\; n!\big),$$

ce qui assure la convergence de $\sum |a_n| R^n$. Sa somme est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Chaque fonction $u_n : x \mapsto e^{-x}\, a_n\, x^n$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann, car $\big|u_n\,(x)\big| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$. On a de plus :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |u_n| = |a_n| \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^n\, \mathrm{d}x = n!|a_n|,$$

ce dernier résultat se démontrant facilement par récurrence. Par suite, la série de terme général $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} |u_n|$ converge.

D'où le résultat, d'après le théorème 2 de la page 727.

13.9 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^{p-1}}{1+x^q}$ est continue sur $]0,1]$ et $f(x) \sim x^{p-1}$ au voisinage de 0 avec $p-1 > -1$. Donc f est intégrable sur $]0,1]$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Pour $x \in]0,1]$, on a $x^q \in]0,1]$ et donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, u_n(x) \qquad \text{avec} \qquad u_n(x) = x^{p+nq-1}.$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles. Le reste étant évident, vérifions seulement l'hypothèse de domination ; pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,1]$, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k(x)\right| = \left|\frac{x^{p-1} - (-1)^{n+1}\, x^{p+(n+1)q-1}}{1+x^q}\right| \leqslant \frac{2x^{p-1}}{1+x^q} = 2f(x)$$

ce qui fournit l'hypothèse de domination, puisque f est intégrable sur $]0,1]$. D'où la conclusion.

Remarques

- Comme $\displaystyle\int_{]0,1]} |u_n| = \frac{1}{n\,q+p}$ n'est pas le terme général d'une série convergente, le théorème 2 de la page 727 ne s'applique pas directement.
- En revanche, en regroupant les termes deux par deux, on obtient une série convergente et le théorème peut s'appliquer.
- On peut aussi remarquer que $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante tendant vers 0, et que par le théorème des séries alternées :
$$\forall\,(x,n)\in\,]0,1]\times\mathbb{N}\qquad \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leqslant u_{n+1}(x)$$
dont l'intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
- Cette majoration peut d'ailleurs être obtenue directement à l'aide de l'égalité :
$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,x^{p+kq-1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{p+(n+1)q-1}}{1+x^q}\cdot$$

13.10 • Pour tout $x>0$, la série géométrique $\sum xe^{-ax}\left(e^{-bx}\right)^n$, de raison $e^{-bx}\in\,]0,1[$, converge et l'on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-ax}\left(e^{-bx}\right)^n = \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\cdot$$
Définissons $u_n :]0,1[\,\to\mathbb{R}$ par $u_n(x) = xe^{-ax}\left(e^{-bx}\right)^n$ et appliquons à la série de fonctions $\sum u_n$ le théorème 2 de la page 727 sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

• ∗ Chaque u_n se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et l'on a :
$$\forall x>0\quad 0\leqslant u_n(x)\leqslant xe^{-ax}.$$
Par croissances comparées, on a :
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3e^{-ax}\right)=0,$$
donc $u_n(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Par suite, chaque fonction u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

∗ La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et la fonction somme, $x\to\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$, est continue sur $]0,+\infty[$.

∗ Soit $n\in\mathbb{N}$.
Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|u_n(x)\right|\mathrm{d}x$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^{+\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x$, puisque u_n est positive.
Intégrons par parties :
$$\int xe^{-(a+bn)x}\mathrm{d}x = -\frac{xe^{-(a+bn)x}}{a+bn}+\frac{1}{a+bn}\int e^{-(a+bn)x}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{xe^{-(a+bn)x}}{a+bn}-\frac{e^{-(a+bn)x}}{(a+bn)^2}\cdot$$

On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \left| u_n(x) \right| \mathrm{d}x = \frac{1}{(a+bn)^2}\cdot$$

Comme $\frac{1}{(a+bn)^2} \sim \frac{1}{b^2n^2}$, la série $\sum \left(\int_0^{+\infty} \left| u_n(x) \right| \mathrm{d}x \right)$ converge, par comparaison aux séries de Riemann.

On a donc, d'après le théorème 2 de la page 727 (intégration terme à terme) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(x)\, \mathrm{d}x \right) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x,$$

$$\text{c'est-à-dire :} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\, \mathrm{d}x.$$

13.11 Fixons $x > 1$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$; on peut écrire :

$$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\cdot$$

La série géométrique $\sum t^{x-1}e^{-nt}$, de raison $e^{-t} \in]0,1[$, converge et l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt} = \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\cdot$$

Définissons $u_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $u_n(t) = t^{x-1}e^{-nt}$ et appliquons à la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ le théorème d'intégration terme à terme sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; la fonction u_n est continue sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

  $$\forall t > 0 \quad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant t^{x-1}e^{-t}.$$

  La fonction u_n est donc intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison, en reprenant l'étude de la fonction Γ
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme, $t \mapsto \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; comme u_n est positive, on a :

  $$\int_0^{+\infty} \left| u_n(t) \right| \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt} \mathrm{d}t.$$

  L'application $\theta : u \mapsto u/n$ étant une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur lui-même, on peut écrire, d'après la proposition 25 de la page 679 :

  $$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt} \mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \left(\theta(u)\right)^{x-1} e^{-n\theta(u)} \theta'(u)\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u} \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(x)}{n^x}\cdot \end{aligned}$$

  La série $\sum \left(\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\, \mathrm{d}t \right)$ est convergente, puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge.

D'après théorème d'intégration terme à terme, on peut donc écrire :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(x)}{n^x} = \Gamma(x)\,\zeta(x).$$

13.12 1. Posons $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} u_p$.

- Supposons la série $\sum \int_I u_n$ convergente. Comme les u_n sont positifs, il suffit d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme de la page 727.
- Supposons la fonction S intégrable sur I. Comme les u_n sont positifs, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{n}\int_I u_n = \int_I S_n \leqslant \int_I S.$$

  Par suite, la série à termes positifs $\sum \int_I u_n$ converge, puisque ses sommes partielles sont majorées ; d'où la conclusion.

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f_n - f_{n-1}$ et appliquons à la série $\sum u_n$ le résultat établi à la première question.

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, chaque u_n est positif. Les f_n étant intégrables, chaque u_n est intégrable.
  Par télescopage, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{n} u_p = f_n - f_0.$$

  Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f continue par morceaux, la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = f - f_0$ est continue par morceaux.
- L'intégrabilité sur I de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = f - f_0$ équivaut à celle de f, puisque f_0 est intégrable.
- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{n}\int_I u_p = \int_I \sum_{p=1}^{n} u_p = \int_I f_n - \int_I f_0.$$

  La série à termes positifs $\sum \int_I u_n$ converge si, et seulement si, ses sommes partielles sont majorées, c'est-à-dire ici si, et seulement si, la suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

- Dans ce cas, la suite croissante $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et l'on a :
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n.$$
Enfin, d'après la première question, on a alors $\displaystyle\int_I \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I u_n$, *i.e.* :
$$\int_I f - \int_I f_0 = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n - \int_I f_0.$$
D'où l'égalité annoncée.

13.13 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g : t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan t)}{\tan t}$ est continue sur $]0,\pi/2[$. Comme elle nulle pour $x = 0$, nous ne ferons d'étude que pour $x \neq 0$.

- Quand $t \to 0$, on a $g(t) \sim \frac{x\tan t}{\tan t} \sim x$. La fonction g ayant un prolongement continu en 0, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} g$ converge.
- On a $\displaystyle\lim_{t\to(\pi/2)^-} \operatorname{Arctan}(x\tan t) = \varepsilon\pi/2$, où l'on note ε le signe de x.
Comme $\displaystyle\lim_{t\to(\pi/2)^-} \tan t = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to(\pi/2)^-} g(t) = 0$. La fonction g ayant un prolongement continu en $\pi/2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} g$ converge.

En conclusion, la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Comme F est impaire, nous calculerons d'abord F sur $\mathbb{R}_+$. Pour cela, nous allons établir que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer F', en appliquant le théorème 6 de la page 738. Notons $f : (x,t) \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan t)}{\tan t}$.

- Pour tout $t \in]0,\pi/2[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times]0,\pi/2[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+x^2\tan^2 t}.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,\pi/2[$, puisqu'elle a un prolongement continu sur $[0,\pi/2]$, d'après la première question.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,\pi/2[$.
- On a :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times]0,\pi/2[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1.$$
La fonction constante égale à 1 est intégrable sur l'**intervalle borné** $]0,\pi/2[$. Cela fournit l'hypothèse de domination.

D'après le théorème précité, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2\tan^2 t}.$$
La fonction $u \mapsto \operatorname{Arctan} u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0,\pi/2[$. Le théorème du changement de variable permet alors d'écrire :
$$\forall x \geqslant 0 \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+x^2u^2)}.$$

Pour $u \geqslant 0$ et $x \neq 1$, on en déduit, par décomposition en éléments simples :
$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{x^2}{1+x^2u^2}\right)\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{1-x^2}\big[\operatorname{Arctan} u - x\operatorname{Arctan}(xu)\big]_0^{+\infty}\\
&= \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2}-x\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+x}\cdot
\end{aligned}$$
La fonction F' étant continue sur $\mathbb{R}_+$, ce dernier résultat reste valable pour $x=1$. Comme $F(0)=0$ et que F est impaire, il vient :
$$\forall x \geqslant 0 \quad F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) \quad \text{ et } \quad \forall x \leqslant 0 \quad F(x) = -\frac{\pi}{2}\ln(1-x)\,.$$

3. Comme :
$$\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\quad \operatorname{Arctan}(\tan t) = t,$$
on a :
$$\int_0^{\pi/2}\frac{t}{\tan t}\mathrm{d}t = F(1) = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$
Intégrons par parties :
$$\int t\,\frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \big[t\ln(\sin t)\big] - \int \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t.$$
Quand $t\to 0^+$, on a $t\ln(\sin t)\sim \sin t\ln(\sin t)$ et donc $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(\sin t)=0$. Par suite, le crochet $\big[t\ln(\sin t)\big]_0^{\pi/2}$ existe et vaut 0. D'après le théorème d'intégration par parties (proposition 24 de la page 678) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ converge et l'on a :
$$\int_0^{\pi/2} t\,\frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \big[t\ln(\sin t)\big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t,$$
d'où $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2\,.$

13.14 1. Appliquons directement le théorème de dérivation des intégrales à paramètre (corollaire 7 de la page 742) ; la définition de f s'en déduira.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$; notons $h:(x,t)\to\frac{e^{-t}}{1+xt}\cdot$

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la fonction $x\mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+$ et :
$$\forall p\in[\![0,k]\!] \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t) = \frac{(-1)^p\,p!\,t^p e^{-t}}{(1+xt)^{p+1}}\cdot$$
- Soit $x\in\mathbb{R}_+$ et $p\in[\![0,k-1]\!]$. La fonction $t\mapsto\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a :
$$\forall t\geqslant 0 \quad \left|\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant p!\,t^p e^{-t}.$$

Comme, par croissances comparées, $p!\,t^p e^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant k!\,t^k e^{-t}.$$

Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ (on prouve comme dans le deuxième point l'intégrabilité de la fonction dominante).

On déduit du corollaire précité que f est définie et de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}_+$, avec :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \geqslant 0 \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k\,k! \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-t}}{(1+xt)^{k+1}}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit $x \geqslant 0$; on a :

$$x^2 f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2 t e^{-t}}{(1+xt)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Intégrons par parties (crochet et intégrale existent de façon évidente) :

$$\begin{aligned} x^2 f'(x) &= \left[\frac{x}{1+xt}\,te^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{x(1-t)\,e^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{xt-x}{1+xt}\,e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{1+xt}\,e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= 1-(x+1)\,f(x). \end{aligned}$$

Notons $g : x \mapsto xf(x)$. On déduit de ce qui précède que, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} x^2 g'(x) + g(x) &= x^3 f'(x) + x^2 f(x) + xf(x) \\ &= x - x(x+1)\,f(x) + x^2 f(x) + xf(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Cela prouve que g est solution sur $\mathbb{R}_+$ de (E).

3. La solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène associée à (E) est :

$$x \mapsto Ce^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}} = Ce^{1/x} \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si u est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x > 0 \quad u(x) = g(x) + Ce^{1/x}.$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{0^+} g = 0$. Par suite $\lim\limits_{0^+} u = 0$ équivaut à $C = 0$. En conclusion, g est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{0^+} g = 0$.

4. Supposons l'existence de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall x \geqslant 0 \quad g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

   En exprimant que g est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :
$$\forall x \geqslant 0 \quad x^2 (P'Q - PQ')(x) + (PQ)(x) = xQ^2(x).$$
   Donc le polynôme $X^2(P'Q - PQ') + PQ - XQ^2$ est nul, puisqu'il possède une infinité de racines. Posons $n = \deg P$ et $m = \deg Q$. On a $n \geqslant 1$, car si P est constant, il est nul puisque $g(0) = 0$; or la fonction nulle n'est pas solution de (E).

   Supposons $n \neq m$. On a $\deg(P'Q - PQ') \leqslant n + m - 1$ et, en examinant le coefficient de X^{n+m-1}, on constate que $\deg(P'Q - PQ') = n + m - 1$.

   Ainsi $\deg\big(X^2(P'Q - PQ')\big) = n + m + 1$ et, comme $\deg(PQ) = n + m$, on a :
$$\deg\big(X^2(P'Q - PQ') - PQ\big) = n + m + 1 \quad \text{et} \quad \deg\left(XQ^2\right) = 2m + 1.$$
   On en déduit $n = m$, ce qui contredit $n \neq m$! Donc $n = m$. On vérifie alors que le coefficient de X^{2n-1} de $P'Q - PQ'$ est nul et, par suite, $\deg(P'Q - PQ') \leqslant 2n-2$. On a donc :
$$\deg\big(X^2(P'Q - PQ') - PQ\big) \leqslant 2n \quad \text{et} \quad \deg\left(XQ^2\right) = 2n + 1.$$
   C'est une contradiction, d'où la conclusion.

13.15 1. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est définie sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si :
$$\forall t > 0 \quad x + t^2 > 0.$$
Cela équivaut à $x \geqslant 0$.

Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ a un prolongement continu sur $[0, +\infty[$.

Pour $x = 0$, cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$ et, au voisinage de 0, on a $\left|\dfrac{\ln\left(t^2\right)}{1+t^2}\right| \sim \ln\left(t^2\right) = 2\ln t = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$; par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(t^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente, par comparaison aux intégrales de Riemann.

On a $\ln\left(x+t^2\right) = 2\ln t + \ln\left(1 + \frac{x}{t^2}\right) \sim 2\ln t$, au voisinage de $+\infty$. On en déduit :
$$\left|\frac{\ln\left(x+t^2\right)}{1+t^2}\right| \sim \frac{2\ln t}{t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right),$$
par croissances comparées ; par suite l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(x+t^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente, par comparaison aux intégrales de Riemann.

En conclusion g est définie sur $[0, +\infty[$.

Notons que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. Montrons, à l'aide du point méthode de la page 734, que g est continue sur $[0, +\infty[$.

   - Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\ln\left(x+t^2\right)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- Pour tout tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln\left(x+t^2\right)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Soit $[a, b]$, avec $0 \leqslant a < b$, un segment inclus dans $[0, +\infty[$. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \ln\left(x + t^2\right)$ est croissante sur $[a, b]$; on en déduit, pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}\left|f(x,t)\right| &= \frac{\left|\ln\left(x+t^2\right)\right|}{1+t^2}\\ &\leqslant \frac{1}{1+t^2}\sup\left(\left|\ln\left(a+t^2\right)\right|, \left|\ln\left(b+t^2\right)\right|\right)\\ &\leqslant \frac{\left|\ln\left(a+t^2\right)\right| + \left|\ln\left(b+t^2\right)\right|}{1+t^2} = \varphi(t).\end{aligned}$$

  La fonction φ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ car :

$$\varphi(t) = \left|f(a,t)\right| + \left|f(b,t)\right|,$$

  avec a et b positifs. En effet, nous avons établi dans la première question l'intégrabilité, pour tout $x \geqslant 0$, de la fonction $t \mapsto f(x,t)$ sur $]0, +\infty[$.

D'où la continuité de g sur $[0, +\infty[$, d'après le point méthode de la page 739.

3. - Établissons la classe $\mathcal{C}^1$ de g sur $]0, +\infty[$ à l'aide du point méthode de la page 739.

     * Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)}.$$

     * Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'après l'étude faite à la première question.
     * Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
     * Soit $[a, b]$, avec $0 < a < b$, un segment inclus dans $]0, +\infty[$. On a, pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{(a+t^2)(1+t^2)} = \varphi(t).$$

       La fonction φ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$, car elle est prolongeable par continuité en 0 et, en $+\infty$, on a $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^4}$.

   Les hypothèses du point méthode de la page 739 étant vérifiées, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)(1+t^2)}.$$

- Calculons $g'(x)$ pour $x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$.

  On a $\frac{1}{(x+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x+t^2}\right)$; on en déduit, pour tout $Y > 0$:
$$\int_0^Y \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x-1}\left[\operatorname{Arctan} t - \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right]_{t=0}^{t=Y}$$
$$= \frac{1}{x-1}\left(\operatorname{Arctan} Y - \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{Y}{\sqrt{x}}\right)\right).$$
  D'où : $g'(x) = \lim\limits_{Y\to+\infty}\int_0^Y \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}}\right)$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}.$$
  Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0,+\infty\right[$, l'égalité $g'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ est vraie pour $x = 1$, par continuité de g' en 1.

- $*$ La fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left]0,+\infty\right[$ sur lui-même ; le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans l'intégrale définissant $g(0)$ donne alors :
$$g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(t^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(u^2\right)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -g(0).$$
  Par suite, $g(0) = 0$.

  $*$ Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\displaystyle\int \frac{\pi}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}\,\mathrm{d}x = \pi\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$; il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x > 0 \quad g(x) = \pi\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$$
  La continuité de g en 0 donne $g(0) = \lim\limits_{x\to0} g(x) = C$.

  On en déduit $C = g(0) = 0$. En conclusion :
$$\forall x \geqslant 0 \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(x+t^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi\ln\left(1+\sqrt{x}\right).$$

13.16 1. On a immédiatement, pour tout $x \in J\setminus\{0\}$:
$$\int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(tx)}{x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = g(x).$$
Notons g_1 la fonction définie sur J par :
$$\forall x \in J \quad g_1(x) = \int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$$
et appliquons à g_1 le corollaire 7 de la page 742. Notons $\varphi : (x,t) \mapsto f'(tx)$ et fixons $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et l'on a :
$$\forall p \in [\![1,k]\!] \quad \forall (x,t) \in J\times[0,1] \quad \frac{\partial^p\varphi}{\partial x^p}(x,t) = t^p f^{(p+1)}(tx)$$

- Pour tout $x \in J$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction :
$$t \mapsto \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = t^p f^{(p+1)}(tx)\,,$$
est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur ce segment.
- Pour tout $x \in J$, la fonction :
$$t \mapsto \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t) = t^k f^{(k+1)}(tx)\,,$$
est continue par morceaux sur $[0,1]$.
- Fixons un segment $[a,b]$ de J contenant 0. La fonction $f^{(k+1)}$ est continue sur ce segment, donc bornée sur ce segment ; posons $M = \sup\limits_{u\in[a,b]} \left|f^{(k+1)}(u)\right|$.

  On a :
$$\forall (x,t) \in [a,b]\times[0,1] \qquad \left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| = \left|t^k f^{(k+1)}(tx)\right| \leqslant M,$$
ce qui fournit l'hypothèse de domination.

On peut donc conclure, d'après le corollaire précité, que g_1 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J, pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J, avec pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in J \quad g_1^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(tx)\,\mathrm{d}t.$$
Il est clair que g_1 fournit un prolongement de g.

2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à la fonction f sur le segment $[0,x]$, on obtient :
$$\forall x \in J\setminus\{0\} \quad h(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Le changement de variable $t = ux$ donne :
$$\forall x \in J\setminus\{0\} \quad h(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)\,\mathrm{d}u.$$
En procédant comme à la première question, on établit que h se prolonge en une fonction h_1 de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J, avec pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in J \quad h_1^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} u^k f^{(n+k+1)}(ux)\,\mathrm{d}u.$$

3. D'après la première question, les fonctions $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$ et $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ se prolongent en des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   La deuxième fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, puisque la fonction sh ne s'y annule pas ; en 0 elle vaut $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right) = 1$.

   Par suite, le quotient de ces deux prolongements est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Cela veut dire que la fonction $x \mapsto \frac{\tan x}{\operatorname{sh} x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

13.17 Notons que la fonction f, continue sur le compact $R = [a,b] \times [c,d]$, est bornée ; posons $M = \sup_R |f|$.

- Montrons que H est de classe $\mathcal{C}^1$.

  Pour cela, établissons la continuité sur $[a,b]$ de l'application $t \mapsto \int_c^d f(t,y)\,\mathrm{d}y$, en appliquant le théorème 3 de la page 732. Les deux premières hypothèses sont facilement vérifiées, par continuité de f, et l'on utilise la fonction constante égale à M comme fonction de domination.

  D'après les propriétés de l'intégrale fonction d'une de ses bornes, on en déduit que H est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall x \in [a,b] \quad H'(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

- Montrons que G est de classe $\mathcal{C}^1$, en appliquant le théorème 6 de la page 738.

  Définissons $g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$ par :

$$\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \quad g(x,y) = \int_a^x f(t,y)\,\mathrm{d}t.$$

  * Pour tout $y \in [c,d]$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, d'après les propriétés de l'intégrale fonction d'une de ses bornes, et l'on a :

$$\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y).$$

  * Pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est intégrable sur $[c,d]$, car continue sur ce segment (comme pour l'étude de H, on utilise le théorème 3 de la page 732).
  * Pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ est continue par morceaux sur $[c,d]$, car f est continue.
  * On utilise de même la fonction constante égale à M pour l'hypothèse de domination.

  On en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall x \in [a,b] \quad G'(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Les fonctions H et G sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $H' = G'$; comme, de plus, $H(a) = G(a) = 0$, on a $H = G$ et, en particulier, $H(b) = G(b)$, c'est-à-dire :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

13.18 1. Pour $x > 0$, la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente en $+\infty$ à t^{-2}, donc est intégrable, par comparaison aux intégrales de Riemann.

2. On a, pour tout $t > 0$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} = \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\cdot$$
Comme $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$, cette fonction positive φ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, par comparaison aux intégrales de Riemann.
Soit $A \in \mathbb{R}$; on peut donc trouver $\beta > \alpha > 0$ tels que :
$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t \geqslant A+1.$$
Par continuité sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}$ pour $t \in [\alpha,\beta]$ et domination par φ intégrable sur $[\alpha,\beta]$, on déduit du théorème 3 de la page 732 :
$$\lim_{x\to 0} \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$
On a donc, au voisinage de 0 :
$$F(x) \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \geqslant A.$$
On en déduit que $F(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.
3. On trouve :
$$I_\alpha(x) = \Big[\ln\Big(t+\sqrt{t^2+x^2}\Big)\Big]_0^\alpha = \ln\Big(\alpha+\sqrt{\alpha^2+x^2}\Big) - \ln x$$
ce qui donne $I_\alpha(x) \sim -\ln x$ lorsque x tend vers 0.
4. Intuitivement, c'est la présence de 0 dans l'intervalle d'intégration qui commande tout. Nous allons donc couper l'intégrale en deux morceaux $F(x) = G(x) + H(x)$ avec :
$$G(x) = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \quad \text{et} \quad H(x) = \int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}\cdot$$
On a immédiatement :
$$H(x) = \int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \leqslant \int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{\alpha}\cdot$$
D'autre part :
$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, I_\alpha(x) \leqslant G(x) \leqslant I_\alpha(x).$$
Soit $\varepsilon > 0$. En prenant $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \geqslant 1-\varepsilon$, la fonction G est minorée par une fonction équivalente à $-(1-\varepsilon)\ln x$ et majorée par une fonction équivalente à $-\ln x$.
Il existe donc $\eta \in\,]0,1[$ tel que pour $x \in\,]0,\eta]$, on ait :
$$1-2\varepsilon \leqslant \frac{G(x)}{-\ln x} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = -\infty$, on peut choisir $\eta > 0$ tel que $\dfrac{1}{-\alpha \ln \eta} \leqslant \varepsilon$; on obtient pour $x \in \,]0,\eta]$:

$$1 - 2\varepsilon \leqslant \frac{F(x)}{-\ln x} \leqslant 1 + 2\varepsilon,$$

ce qui prouve que $F(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.

5. Par le changement de variable $t = u\,x$ (on applique la proposition 25 de la page 679 : $u \mapsto u\,x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x}\,F(1/x)\,,$$

ce qui donne $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}\cdot$

13.19 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $u_x : t \mapsto e^{-t}\frac{\sin(tx)}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Comme $u_x(t) \sim \frac{tx}{t}$, au voisinage de 0, la fonction u_x a un prolongement continu sur $[0,+\infty[$ et est donc intégrable sur $]0,1]$.

On a $\left|u_x(t)\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$, pour tout $t \geqslant 1$. On en déduit, par comparaison, l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$, puisque la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur cet intervalle.

Par suite, la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Posons $f(x,t) = e^{-t}\frac{\sin(tx)}{t}$ et appliquons le théorème 6 de la page 738.

- Pour tout $t \in \,]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \,]0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cos(tx)\,.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'après l'étude initiale.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
- On a :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \,]0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}.$$
Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot$

On peut donc conclure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(tx)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(e^{(ix-1)t}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $\left|e^{(ix-1)t}\right| = e^{-t}$, la fonction $t \mapsto e^{(ix-1)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(e^{(ix-1)t}\right) \mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} \mathrm{d}t\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_0^{+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right)\cdot$$

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}\cdot$$

Comme $g(0) = 0$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(tx)}{t} \, \mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}\, x.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $u_x : t \mapsto \frac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\, t}{t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

   Comme $u_x(t) \sim \frac{t}{t}\cdot$, au voisinage de 0, la fonction u_x a un prolongement continu sur $[0, +\infty[$ et est donc intégrable sur $]0, 1]$.

   On a $u_x(t) \sim \frac{e^{(1-x)t}}{2t}$, au voisinage de $+\infty$.

   - Pour $x > 1$, on en déduit, $u_x(t) = \mathrm{o}\left(e^{(1-x)t}\right)$.
     Comme la fonction $t \mapsto e^{(1-x)t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, il en est de même de u_x par comparaison.
   - Pour $x \leqslant 1$ et $t \geqslant 1$, on a $u_x(t) \geqslant \frac{1}{2t} \geqslant 0$.
     L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{\mathrm{sh}\, t}{t} \, \mathrm{d}t$ est donc divergente, par comparaison aux intégrales de Riemann.

   Par suite, la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\mathrm{sh}\, t}{t} \, \mathrm{d}t$ est définie sur $]1, +\infty[$.

   Posons $f(x,t) = e^{-xt} \frac{\mathrm{sh}\, t}{t}$ et appliquons le point méthode de la page 739.

   - Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et l'on a :

   $$\forall (x,t) \in]1, +\infty[\times]0, +\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\,\mathrm{sh}\, t.$$

   - Pour tout $x \in]1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = e^{-xt} \frac{\mathrm{sh}\, t}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, d'après l'étude initiale.
   - Pour tout $x \in]1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\,\mathrm{sh}\, t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$
   - Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $]1, +\infty[$. On a :

   $$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0, +\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}\,\mathrm{sh}\, t \leqslant e^{-at}\,\mathrm{sh}\, t.$$

La fonction $t \mapsto e^{-at}\operatorname{sh} t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après l'étude initiale ; cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

On peut donc conclure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ avec :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit, pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{(1-x)t} - e^{-(1+x)t}}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{(1-x)t}}{2(1-x)} + \frac{e^{-(1+x)t}}{2(1+x)}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}. \end{aligned}$$

D'où l'existence d'un réel C tel que :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C.$$

Par suite, $C = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Pour déterminer cette limite, appliquons le théorème 4 de la page 735 avec domination au voisinage de $+\infty$.

- Pour tout $t > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t) = 0$.
- On a :

$$\forall (x,t) \in [2,+\infty[\times]0,+\infty[\quad \bigl|f(x,t)\bigr| = f(x,t) \leqslant f(2,t).$$

Cela fournit l'hypothèse de domination sur $[2,+\infty[$, d'après l'étude initiale.

Par suite $C = 0$ et l'on peut conclure que :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

13.20 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $u_x : t \mapsto t^x \frac{t-1}{\ln t}$ est continue et positive sur $]0,1[$.

Comme $u_x(t) \sim \frac{t-1}{t-1}$, au voisinage de 1, la fonction u_x a un prolongement continu sur $]0,1]$, donc est intégrable sur $[1/2,1[$.

On a $u_x(t) \sim -\frac{t^x}{\ln t}$, au voisinage de 0.

- Pour $x > -1$, on a $-\frac{t^x}{\ln t} = \mathrm{o}(t^x)$, au voisinage de 0 ; on en déduit, par comparaison, l'intégrabilité de u_x sur $]0,1/2]$.
- Pour $x = -1$, on a, pour tout $a \in]0,1/2]$:

$$\int_a^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Bigl[\ln|\ln t|\Bigr]_a^{1/2} = \ln\left(\frac{\ln 2}{-\ln a}\right).$$

On en déduit que $\lim\limits_{a\to 0^+} \displaystyle\int_a^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{-t\ln t} = +\infty$. Par comparaison, $\displaystyle\int_0^{1/2} u_x(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

- Pour $x < -1$, on a $-\frac{1}{t\ln t} = \mathrm{o}\left(-\frac{t^x}{\ln t}\right)$, au voisinage de 0. D'après le cas précédent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} u_x(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, par comparaison de fonctions de signe constant.

En conclusion, $\mathcal{D}_g =]-1,+\infty[$.

2. Posons $f(x,t) = t^x\frac{t-1}{\ln t}$ et appliquons le point méthode de la page 739.
   - Pour tout $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et :
   $$\forall (x,t) \in]-1,+\infty[\times]0,1[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^x(t-1).$$
   - Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = t^x\frac{t-1}{\ln t}$ est intégrable sur $]0,1[$, d'après l'étude initiale.
   - Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
   - Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]-1,+\infty[$. On a :
   $$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,1[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = t^x(1-t) \leqslant t^a(1-t) \leqslant t^a.$$
   La fonction $t \mapsto t^a$ est continue, positive et intégrable sur $]0,1[$, d'après l'étude des intégrales de Riemann, puisque $a > -1$. Cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

   On peut donc conclure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ avec :
   $$\begin{aligned}\forall x \in]-1,+\infty[\quad g'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 t^x(t-1)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\cdot\end{aligned}$$
3. D'après la question précédente, il existe un réel C tel que :
   $$\forall x \in]-1,+\infty[\quad g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C.$$
   Par suite $C = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Pour déterminer cette limite, appliquons le théorème 4 de la page 735, avec domination au voisinage de $+\infty$.
   - Pour tout $t \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t) = 0$.
   - On a :
   $$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,1[\quad \left|f(x,t)\right| = f(x,t) \leqslant f(0,t).$$
   Cela fournit l'hypothèse de domination sur $[0,+\infty[$, d'après l'étude initiale.

   On en déduit $C = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et, par suite :
   $$\forall x \in]-1,+\infty[\quad g(x) = \int_0^1 t^x\frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\cdot$$

13.21 1. Pour $x \geqslant 0$ et $t > 0$, posons $f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ et appliquons le théorème 6 de la page 738.

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et l'on a :
$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\cdot$$
- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Étudions son intégrabilité sur cet intervalle.
  * Au voisinage de 0, on a $\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \sim \frac{xt}{t}$; on a donc un prolongement continu sur $[0,1]$, d'où l'intégrabilité sur $]0,1]$.
  * On a, pour tout $t \geqslant 1$:
  $$\left|f(x,t)\right| = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \leqslant \frac{\pi/2}{t^2}\cdot$$
  On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de $t \mapsto f(x,t)$, pour tout $x \geqslant 0$.
- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
- On a :
$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}\cdot$$
La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue, positive et intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, puisque $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ existe et vaut $\pi/2$; par suite, cette fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$. Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot$

On en déduit que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ avec :
$$\forall x \in [0,+\infty[\quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\cdot$$
Calculons $g'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$. On a, pour tout $t \geqslant 0$:
$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)\cdot$$
On en déduit :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} &= \frac{1}{1-x^2}\Big[\operatorname{Arctan} t - x\operatorname{Arctan}(xt)\Big]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - x\,\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x+1}\cdot\end{aligned}$$

Comme g' est continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut conclure que :

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad g'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x+1}\cdot$$

Puisque $g(0) = 0$, il vient :

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)\,.$$

2. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \big(\operatorname{Arctan} t\big)^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$; une intégration par parties donne :

$$\int \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = -\frac{1}{t}\big(\operatorname{Arctan} t\big)^2 + 2\int \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Appliquons la proposition 24 de la page 678.

- Le crochet $\Big[-\frac{1}{t}\big(\operatorname{Arctan} t\big)^2\Big]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0, car :

$$-\frac{1}{t}\big(\operatorname{Arctan} t\big)^2 \underset{0}{\sim} t \quad \text{et} \quad \forall t>0 \quad \left|-\frac{1}{t}\,(\operatorname{Arctan} t)^2\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4t^2}\cdot$$

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $g(1)$.

D'après la proposition 24 de la page 678, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{t}\big(\operatorname{Arctan} t\big)^2\Big]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc établi :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = 2g(1) = \pi \ln 2.$$

13.22 • Posons $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t$ et montrons que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à l'aide du théorème 6 de la page 738. On note $f : (x,t) \mapsto e^{-t^2}\sin(2tx)$.

- ∗ Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 2te^{-t^2}\cos(2tx)\,.$$

- ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t) = e^{-t^2}\sin(2tx)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, on a $\left|e^{-t^2}\sin(2tx)\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$; cette fonction est donc intégrable sur $[0,+\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par comparaison aux intégrales de Riemann.
- ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

∗ On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2te^{-t^2}.$$

La fonction $t \mapsto 2te^{-t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $2te^{-t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$.
Cela fournit l'hypothèse de domination pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Par suite, g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\cos(2tx)\,\mathrm{d}t.$$

- Formons une équation différentielle dont g soit solution. Fixons $x \in \mathbb{R}$.
Les fonctions $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto \cos(2tx)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$; une intégration par parties donne :

$$\int 2te^{-t^2}\cos(2tx)\,\mathrm{d}t = -e^{-t^2}\cos(2tx) - 2x\int e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t.$$

Le crochet $\Big[-e^{-t^2}\cos(2tx)\Big]_0^{+\infty}$ existe et vaut 1. On a donc établi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 1 - 2xg(x).$$

- Posons $h(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$. D'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = e^{-x^2}e^{x^2} - 2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t = 1 - 2xh(x).$$

Comme $g(0) = h(0) = 0$, les fonctions g et h sont solutions sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y' + 2xy &=& 1 \\ y(0) &=& 0. \end{array}\right.$$

D'après le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires du premier ordre (voir cours de première année), on en déduit que les fonctions g et h sont égales. On a donc établi que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(2tx)\,\mathrm{d}t = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t.$$

13.23 1. • Appliquons le théorème 3 de la page 732.

∗ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

* On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}\cdot$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ existe et vaut $\pi/2$.

Cela fournit l'hypothèse de domination.

On en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Notons $\varphi : (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ et appliquons le corollaire 7 de la page 742, pour établir que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

* Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\cdot$$

* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in [\![0,1]\!]$.

La fonction $t \mapsto \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x,t) = \frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Comme, au voisinage de $+\infty$, $\left|\frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2}\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, elle est intégrable sur cet intervalle, par comparaison aux intégrales de Riemann.

* La fonction $t \mapsto \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

* Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^* \qquad \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$; d'où l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\cdot$

Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}\cdot$$

On peut donc conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}\cdot$$

2. - Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Pour $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ car, au voisinage de 0, $\sin t \sim t$.

Cela assure, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{x+t}\, dt$.
Fixons $x \geqslant 0$. Une intégration par parties donne :

$$\int \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos t}{t+x} - \int \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

* On a $\lim\limits_{A\to+\infty} \left[-\frac{\cos t}{t+x}\right]_{t=1}^{t=A} = \frac{\cos 1}{1+x}$, puisque $\left|\frac{\cos A}{A+x}\right| \leqslant \frac{1}{A}\cdot$
* On a, pour tout $t \geqslant 1$:

$$\left|\frac{\cos t}{(t+x)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1}{t^2}\cdot$$

  On en déduit la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$, par comparaison aux intégrales de Riemann.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x > 0$, la fonction $\psi :]x,+\infty[\to]0,+\infty[$, définie par $\psi(u) = u - x$, est une bijection strictement décroissante, de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la proposition 26 de la page 680, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin\big(\psi(u)\big)}{x+\psi(u)}\,\psi'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\cos x \sin u - \sin x \cos u}{u}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

En procédant comme dans l'étude précédente, on établit la convergence des intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$. On peut donc écrire :

$$g(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme les fonctions $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ et $u \mapsto \frac{\cos u}{u}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit (*cf.* la proposition 5 de la page 668) que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \\ &\quad - \frac{\cos x \sin x}{x} + \frac{\sin x \cos x}{x} \\ &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

La fonction g' est de même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \\ &\quad + \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x} \\ &= -g(x) + \frac{1}{x}\cdot \end{aligned}$$

La fonction g est donc solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la même équation différentielle que f :

$$y'' + y = \frac{1}{x}\cdot$$

3. • Fixons $x \geqslant 0$. Une intégration par parties donne :

$$\int \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos t}{t+x} + \int \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

De $\left|\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon+x}\right| \leqslant \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$, on tire $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon+x}\right) = 0$ car, au voisinage de 0, $\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \sim \frac{\varepsilon^2/2}{\varepsilon}$.

De $\left|\frac{1-\cos A}{A+x}\right| \leqslant \frac{2}{A}$ pour $A > 0$, on tire $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{1-\cos A}{A+x}\right) = 0$.

Par suite, le crochet $\left[\frac{1-\cos t}{t+x}\right]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0. On déduit alors de la proposition 24 de la page 678 la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$ et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

• Appliquons le théorème le théorème 3 de la page 732.

  ∗ Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

  ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{(t+x)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

  ∗ On a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \qquad \left|\frac{1-\cos t}{(t+x)^2}\right| = \frac{1-\cos t}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2}\cdot$$

  La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Comme $\frac{1-\cos t}{t^2} \sim \frac{t^2/2}{t^2}$, au voisinage de 0, la fonction φ a un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$, donc est intégrable sur $]0,1]$.

  On a $\varphi(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, au voisinage de $+\infty$; on en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, l'intégrabilité de φ sur $[1,+\infty[$.

  Ainsi φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela fournit l'hypothèse de domination.

On peut donc conclure que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. • Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt} \mathrm{d}t = 1/x.$$

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On a par ailleurs :

$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2}{(t+x)^2} \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{t+x} \right]_0^{+\infty} = 2/x.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

• Posons $h = f - g$. D'après les questions précédentes, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0.$$

On en déduit l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0 \quad h(x) = a \cos x + b \sin x.$$

D'après l'étude précédente, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Il en résulte en particulier que les suites $\Big(h(2n\pi)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\Big(h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0 ; comme $h(2n\pi) = a$ et $h\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = b$, il vient $a = b = 0$, d'où $h = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_+$, par continuité en 0.

On a donc établi que les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi/2$, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = g(0) = \frac{\pi}{2}\cdot$$