Chapitre 13

Fonctions convexes

Sommaire

Dans ce chapitre on désigne par I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et toutes les fonctions considérées vont de I vers $\mathbb{R}$. On notera $\mathring{I}$ l'intervalle obtenu en ouvrant les crochets de I (intérieur de I).

I DÉFINITION

1) Paramétrage d'un segment

Dans $\mathbb{R}$.

Soient $a < b$ deux réels, la fonction $f\colon [0\,;1] \to [a\,;b]$ définie par $f(t) = (1-t)a + tb$, est une bijection (strictement croissante), on dit que f est un paramétrage du segment $[a\,;b]$, il en découle que $[a\,;b] = \{(1-t)a + tb \,/\, t \in [0\,;1]\}$.

Dans le plan muni d'un repère.

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan, on définit le segment $[A;B]$ en posant :

$$[A;B] = \left\{M(x,y) \Big/ \exists t \in [0\,;1],\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\right\}$$

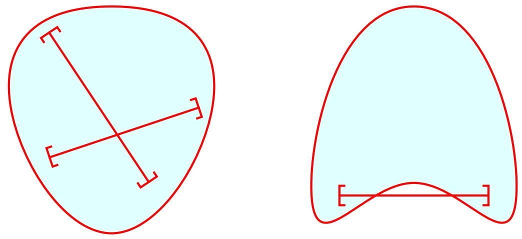
ce qui entraîne que $M(x,y) \in [A;B]$ si et seulement si il existe $t \in [0\,;1]$ tel que $\begin{cases} x - x_A & = t(x_B - x_A) \\ y - y_A & = t(y_B - y_A) \end{cases}$ ou encore :

$$\begin{cases} x & = (1-t)x_A + tx_B \\ y & = (1-t)y_A + ty_B \end{cases}$$

La fonction $f\colon [0\,;1] \to [A;B]$ définie par $f(t) = M((1-t)x_A + tx_B, (1-t)y_A + ty_B)$ est un paramétrage du segment $[A;B]$.

2) Définition de la convexité

On définit la notion de convexité pour les parties du plan $\mathbb{R}^2$: une partie $\mathcal{V}$ non vide de $\mathbb{R}^2$ est *convexe* lorsque pour tous points A et B de $\mathcal{V}$, le segment $[A, B]$ est inclus dans $\mathcal{V}$.



Ensemble convexe Ensemble non convexe

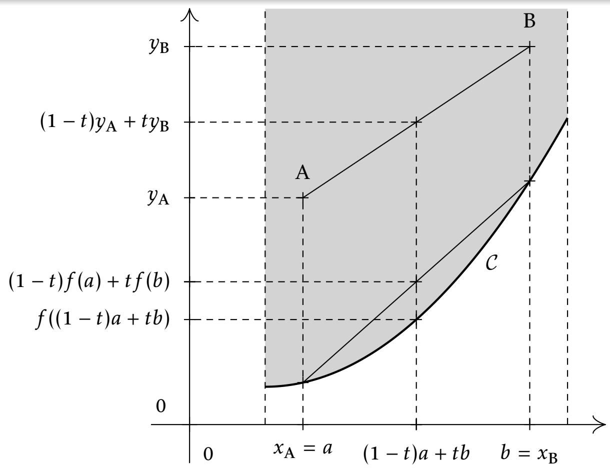
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dira que f est convexe sur I lorsque la partie du plan située **au-dessus de la courbe** est une partie convexe.

Définition 13.1

$f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque $\{(x, y) \ / \ x \in I$ et $y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. Ce qui revient à dire :
$f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout réels a, b de I et tout réel t de $[0; 1]$ on a :

$$f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b)$$

*Cette inégalité signifie que sur l'intervalle I, **chaque arc (de courbe) est sous sa corde**.*
On dira que f est concave sur I lorsque $-f$ est convexe.



Remarque 13.1 :

– *f est convexe sur I si et seulement si :*
$$\forall (a, b) \in I^2, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ si } a \leqslant x \leqslant b, \text{ alors } f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b).$$
– *f est concave sur I si et seulement si :*
$$\forall x, y \in I, \ \forall t \in [0; 1], \ f((1-t)a + tb) \geqslant (1-t)f(a) + tf(b),$$
ou encore :
$$\forall (a, b) \in I^2, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ si } a \leqslant x \leqslant b, \text{ alors } f(x) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b).$$
– *La convexité est une notion globale, une fonction peut être convexe sur un intervalle et pas sur un autre. De même, une fonction peut être ni concave ni convexe sur un intervalle.*

★**Exercice 13.1**

1/ *Montrer que les fonctions affines sur $\mathbb{R}$ sont convexes.*
2/ *Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*

II PROPRIÉTÉS

1) Inégalité de Jensen

Théorème 13.1 (inégalité de Jensen)
Si $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est convexe sur l'intervalle I, alors pour tous réels $a_1, \dots, a_n$ de I et tous réels $t_1, \dots, t_n$ de $[0;1]$ tels que $t_1 + \cdots + t_n = 1$, on a :
$$t_1a_1 + \cdots t_na_n \in \mathrm{I} \text{ et } f(t_1a_1 + \cdots t_na_n) \leqslant t_1f(a_1) + \cdots + t_nf(a_n)$$

Preuve : Soit $m = \min\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathrm{I}$ et $\mathrm{M} = \max\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathrm{I}$, alors pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, $t_im \leqslant t_ia_i \leqslant \mathrm{M}a_i$, en sommant on obtient $m \leqslant t_1a_1 + \cdots t_na_n \leqslant \mathrm{M}$ et donc $t_1a_1 + \cdots t_na_n \in \mathrm{I}$.

Pour l'inégalité, on procède par récurrence sur n, c'est vrai pour $n = 2$. Supposons le théorème établi pour un entier $n \geqslant 2$. Soient $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ éléments de I et $t_1, \dots, t_n, t_{n+1}$ éléments de $[0;1]$ tels que $t_1 + \cdots + t_n + t_{n+1} = 1$, posons $s = t_1 + \cdots + t_n$, alors $s \in [0\,;1]$ et $f(t_1a_1 + \cdots t_{n+1}a_{n+1}) = f(su + t_{n+1}a_{n+1})$ en posant $u = \frac{t_1}{s}a_1 + \cdots \frac{t_n}{s}a_n$, comme $s + t_{n+1} = 1$ et que f est convexe, on a $f(su + t_{n+1}a_{n+1}) \leqslant sf(u) + t_{n+1}f(a_{n+1})$, d'autre part on a $f(u) = f(\frac{t_1}{s}a_1 + \cdots \frac{t_n}{s}a_n) \leqslant \frac{t_1}{s}f(a_1) + \cdots \frac{t_n}{s}f(a_n)$ en appliquant l'hypothèse de récurrence, car les réels $\frac{t_i}{s}$ pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, sont dans $[0\,;1]$ et de somme égale à 1. En reportant dans l'inégalité précédente, s étant positif ou nul, on obtient $f(t_1a_1 + \cdots t_{n+1}a_{n+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_if(a_i)$. □

2) Convexité et pentes

Théorème 13.2
$f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in \mathrm{I}$, la fonction $t_a\colon x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

Preuve : Si f est convexe sur I, soit $a \in \mathrm{I}$, envisageons plusieurs cas :

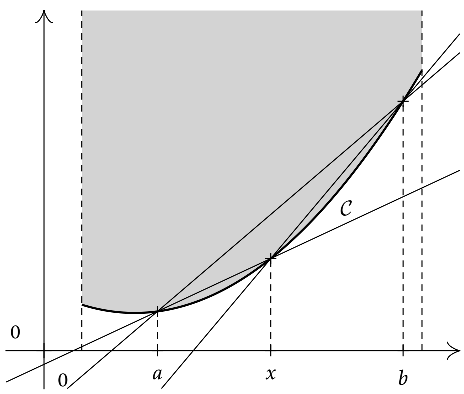
- Si $a < x < y$ sont dans I, l'arc sur $[a;y]$ est sous la corde, donc $f(x) \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}(x-a) + f(a)$ ce qui entraîne $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$ car $x - a > 0$.
- Si $x < y < a$ sont dans I, on a $f(y) \leqslant \frac{f(x)-f(x)}{x-a}(y-a) + f(a)$ ce qui entraîne $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ car $y - a < 0$.
- Si $x < a < y$ sont dans I alors $f(a) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(a-x)+f(x)$ d'où $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ car $a-x > 0$. Mais on a aussi $f(a) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(a-y)+f(y)$ d'où $\frac{f(a)-f(y)}{a-y} \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ car $a-y < 0$. Par conséquent $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$.

La fonction $t_a\colon x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est donc croissante sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

Réciproquement, si la fonction $t_a\colon x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ pour tout $a \in \mathrm{I}$. Soit $a < x < b$ dans I, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ donc $f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$, ce qui signifie que sur $[a;b]$, l'arc est sous la corde, f est donc convexe. □

Remarque 13.2 :

- *La fonction t_a est la fonction taux d'accroissement de f en a.*
- *Si f est convexe sur I et si $a < x < b$ sont dans I, alors $t_a(x) \leqslant t_a(b) = t_b(a) \leqslant t_b(x)$ (inégalité des trois pentes).*



☞**Exemple** : Sachant que la fonction ln est concave sur $]0\,;+\infty[$, on peut affirmer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$ est décroissante sur son ensemble de définition, car c'est le taux d'accroissement en 1 de la fonction ln.

★**Exercice 13.2** *Si f est convexe sur I et admet un minimum local en a, montrer que c'est un minimum global.*

3) Convexité des fonctions dérivables

Théorème 13.3 (Caractérisation de la convexité pour les fonctions dérivables)
Si $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I et dérivable sur $\mathring{\mathrm{I}}$, alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur $\mathring{\mathrm{I}}$.

Preuve : Si f est convexe, soient $x_0 < x < x_1$ dans $\mathring{\mathrm{I}}$, alors on a $t_{x_0}(x) \leqslant t_{x_0}(x_1) = t_{x_1}(x_0) \leqslant t_{x_1}(x)$, en faisant tendre x vers x_0 par la droite on obtient $f'(x_0) \leqslant t_{x_0}(x_1)$ et si on fait tendre x vers x_1 par la gauche, on obtient $t_{x_0}(x_1) \leqslant f'(x_1)$, par conséquent $f'(x_0) \leqslant f'(x_1)$, donc f' est croissante.

Si f' est croissante sur $\mathring{\mathrm{I}}$, soient $a < b$ dans I et $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$, alors g est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, or il existe $c \in\ ]a\,;b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ (IAF), on en déduit que g est décroissante sur $[a;c]$ puis croissante sur $[c;b]$, or $g(a) = g(b) = 0$, donc $g \leqslant 0$ sur $[a\,;b]$, ce qui montre que f est convexe sur I.

x	a		c		b
g'		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	$g(c)$	$\nearrow$	0

□

Remarque 13.3 – *Il en découle qu'une fonction f continue sur l'intervalle I et deux fois dérivable sur $\mathring{\mathrm{I}}$ est convexe si et seulement si sa dérivée seconde et positive sur $\mathring{\mathrm{I}}$ (et concave si et seulement si $f'' \leqslant 0$ sur $\mathring{\mathrm{I}}$).*

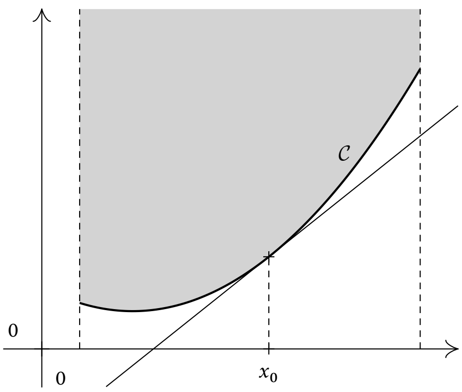
☞**Exemples** :
- La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$.
- La fonction sin est convexe sur $[-\pi;0]$ et concave sur $[0;\pi]$.
- La fonction $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est convexe sur $\mathbb{R}$ lorsque n est pair, sur $[0\,;+\infty[$ seulement si n est impair.

Théorème 13.4 (Caractérisation géométrique avec les tangentes)
Si $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I et dérivable sur $\mathring{\mathrm{I}}$, alors f est convexe sur I si et seulement si $\forall x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$, la courbe de f est au-dessus de la tangente au point d'abscisse x_0, ce qui se traduit par :

$$\forall x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}, \forall x \in \mathrm{I}, f(x) \geqslant f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

Preuve : Si f est convexe, soit $x_0 < x_1 \in \mathring{\mathrm{I}}$, on pose pour $x \in \mathrm{I}$, $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x-x_0) - f(x_0)$, g est dérivable sur $\mathring{\mathrm{I}}$ et $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, comme f' est croissante sur $\mathring{\mathrm{I}}$, on a g décroissante à gauche de x_0 et croissante à droite, or $g(x_0) = 0$, donc g est positive sur I, la courbe de f est bien au-dessus de la tangente au point d'abscisse x_0.

Réciproquement : soit $x_0 < x_1 \in \mathring{\mathrm{I}}$, on a $f(x_0) \geqslant f'(x_1)(x_0-x_1)+f(x_1)$, d'où $t_{x_0}(x_1) \leqslant f'(x_1)$ car $x_0-x_1 < 0$. D'autre part, on a $f(x_1) \geqslant f'(x_0)(x_1-x_0) + f(x_0)$, d'où $t_{x_0}(x_1) \geqslant f'(x_0)$ car $x_1 - x_0 > 0$, on a donc $f'(x) \leqslant t_{x_0}(x_1) \leqslant f'(x_1)$, f' donc croissante sur $\mathring{\mathrm{I}}$ et donc f est convexe sur I. □



4) Régularité des fonctions convexes

Théorème 13.5

Soit f une fonction convexe sur I et $a \in \mathring{\mathrm{I}}$, alors f est dérivable à gauche et à droite en a. De plus, si $x < a < y$ alors :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant f_g'(a) \leqslant f_d'(a) \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}.$$

En particulier, si $a < b$ sont dans $\mathring{\mathrm{I}}$, alors $f_d'(a) \leqslant f_g'(b)$.

Preuve : La fonction t_a est croissante sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ donc elle majorée sur $\mathrm{I}\cap]-\infty;a[$ par $t_a(y)$, par conséquent elle admet une limite finie à gauche en a qui est $\sup\limits_{x<a} t_a(x)$, cela signifie que f est dérivable à gauche en a et $f_g'(a) = \sup\limits_{x<a} t_a(x) \leqslant t_a(y)$.

Sur $\mathrm{I} \cap]a;+\infty[$ la fonction t_a est croissante minorée par $f_g'(a)$, elle admet une limite finie à droite en a qui est $\inf\limits_{x>a} t_a(x)$, cela signifie que f est dérivable à droite en a et $f_g'(a) \leqslant f_d'(a) = \inf\limits_{x>a} t_a(x) \leqslant t_a(y)$. □

Remarque 13.4 –

- *La fonction f n'a aucune raison d'être dérivable aux bornes* I, *par exemple, la fonction* arcsin *est convexe sur* $[0;1]$ *mais non dérivable à gauche en* 1.
- *Le théorème ne dit pas que f est dérivable en a ! Considérer par exemple $f(t) = |t|$ sur $[-1;1]$, elle est convexe mais non dérivable en* 0.

Application – Si f une fonction convexe sur I et $a \in \mathring{\mathrm{I}}$, alors :

- sur $\mathrm{I}\cap]-\infty;a[$ la courbe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = f_g'(a)(x-a)+f(a)$ (tangente à la courbe à gauche au point d'abscisse c). En effet, pour $x < a$, l'inégalité $t_a(x) \leqslant f_g'(a)$ équivaut à $f(x) \geqslant f_g'(a)(x-a)+f(a)$.
- sur $\mathrm{I} \cap]a;+\infty[$ la courbe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = f_d'(a)(x-a)+f(a)$ (tangente à la courbe à droite au point d'abscisse c). En effet, pour $x > a$, l'inégalité $f_d'(a) \leqslant t_a(x)$ équivaut à $f(x) \geqslant f_d'(a)(x-a)+f(a)$.
- si f est dérivable en a alors on retrouve que la courbe de f est au-dessus de la tangente au point d'abscisse a.

Il découle du théorème précédent :

Théorème 13.6

Si f est convexe sur I *alors f est continue en tout point **intérieur** à* I.

Remarque 13.5 – *La fonction f n'a aucune raison d'être continue aux bornes* I, *par exemple, la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(t) = 0$ si $t \in [0;1[$ et $f(1) = 1$ est convexe mais discontinue en* 1.

★**Exercice 13.3** *Une fonction f **convexe** sur un **segment** $[a;b]$ admet un maximum global en a ou en b. Si ce maximum global est également atteint à l'intérieur de $[a;b]$, alors f est constante.*

III INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ

1) Tangentes ou sécantes

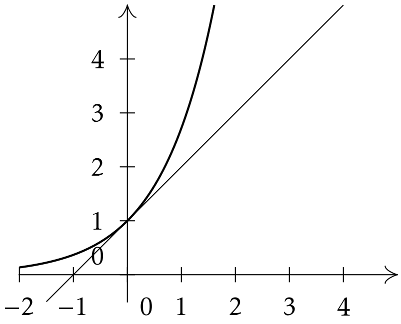
Lorsqu'une fonction f est dérivable et convexe sur I, on sait que la courbe est au-dessus chacune de ses tangentes :

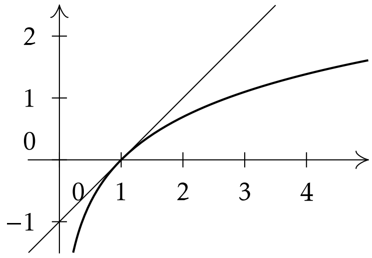
$$\forall a,\ x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$$

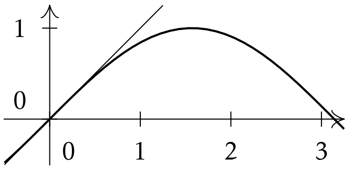
Pour les fonctions concaves, l'inégalité est inversée.

☞**Exemples** :

- La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ donc $\forall a,\ x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant e^a(x-a)+e^a$. En particulier avec $a = 0$ on retrouve l'inégalité classique : $e^x \geqslant x+1$.
- La fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$ donc $\forall a,\ x \in]0;+\infty[,\ \ln(x) \leqslant \frac{x-a}{a} + \ln(a)$. En particulier avec $a = 1$ on retrouve l'inégalité classique : $\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x-1$.
- La fonction sin est concave sur $[0;\pi]$ donc $\forall a,\ x \in [0;\pi],\ \sin(x) \leqslant \cos(a)(x-a)+\sin(a)$. En particulier avec $a = 0$ on retrouve l'inégalité classique : $\forall x \in [0;\pi],\ \sin(x) \leqslant x$.
- $\cdots$







$e^x \geqslant x+1$ $\ln(x) \leqslant x-1$ $\sin(x) \leqslant x$

Lorsqu'une fonction f est convexe sur I, on sait que sur tout segment $[a;b] \subset$ I l'arc est sous la corde :

$$\forall x \in [a;b],\ f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

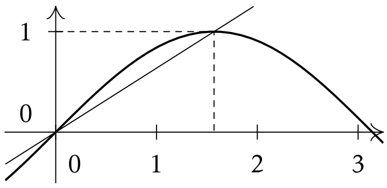
Pour les fonctions concaves, l'inégalité est inversée.

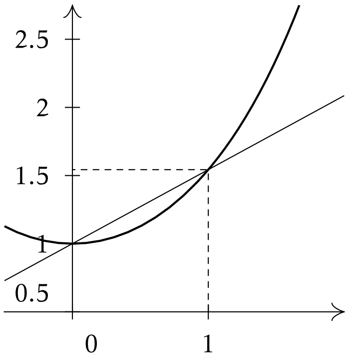
☞**Exemples** :

– La fonction sin est concave sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}],\ \sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}$.

– La fonction ch est convexe sur $[0;a]$ $(a>0)$ donc $\forall x \in [0;a],\ \mathrm{ch}(x) \leqslant \frac{\mathrm{ch}(a)-1}{a}x+1$.

– ...





$\sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ $\mathrm{ch}(x) \leqslant \frac{\mathrm{ch}(a)-1}{a}x+1$ sur $[0;1]$

2) Inégalités de moyennes

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs, la fonction ln étant concave, on a :

$$\ln\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \geqslant \frac{\ln(x_1)+\cdots \ln(x_n)}{n} = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$$

en passant à l'exponentielle on obtient une inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{x_1+\cdots x_n}{n}$$

en remplaçant x_i par son inverse, inégalité entre la moyenne harmonique et la moyenne géométrique :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

et finalement :

$$\boxed{\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{x_1+\cdots x_n}{n}}$$

3) Inégalités de Hölder et Minkowski

Soient u, v, p et q strictement positifs avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors la concavité de la fonction ln permet d'écrire : $\ln(\frac{1}{p}u^p+\frac{1}{q}v^q) \geqslant \frac{1}{p}\ln(u^p)+\frac{1}{a}\ln(v^q)=\ln(uv)$, en passant à l'expoentielle on obtient :

$$\boxed{uv \leqslant \frac{1}{p}u^p+\frac{1}{q}v^q}$$

Soient $a_i,\dots,a_n,\ b_1,\dots,b_n$ strictement positifs, $p,\ q>0$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Soit $\mathrm{A}=\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}$ et $\mathrm{B}=\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$, on a $\frac{a_i}{\mathrm{A}}\frac{b_i}{\mathrm{B}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\mathrm{A}^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\mathrm{B}^q}$, en sommant de 1 à n on obtient : $\frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\mathrm{AB}} \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, d'où $\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \mathrm{AB}$, c'est à dire :

$$\boxed{\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q} \quad \text{(inégalité de Hölder)}}$$

Soient $a_i,\dots,a_n,\ b_1,\dots,b_n$ strictement positifs, $p>1$, on pose $q=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p}{p-1}$ de tel sorte que $q>0$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. L'inégalité de Hölder donne $\sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$, de même, on a $\sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$, en ajoutant ces deux inégalités, obtient $\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p \leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p \leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1-1/p}$$

d'où :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p} \quad \text{(inégalité de Minkowski)}}$$

IV SOLUTION DES EXERCICES

Solution 13.1

1/ *Si $f(x)=ax+b$, alors pour u, v, réels et $t\in[0\,;1]$, $f(tu+(1-t)v)=a(tu+(1-t)v)+v=t[au+b]+(1-t)[av+b]=t(u)+(1-t)f(v)$, on a donc bien $f(tu+(1-t)v)\leqslant t(u)+(1-t)f(v)$.*

2/ *Soient a,b réels et $t\in[0\,;1]$, on étudie $g(t)=(ta+(1-t)b)^2-ta^2-(1-t)b^2$ sur $[0\,;1]$, on a $g'(t)=-(a-b)^2(1-2t)$, g est décroissante puis croissante avec un minimum pour $t=\frac{1}{2}$, et $g(0)=g(1)=0$, ce qui entraîne que $g\leqslant 0$.*

Solution 13.2 *Au voisinage à gauche de a la fonction t_a est négative, comme cette fonction est croissante on en déduit que pour $x<a$ on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$ et donc $f(x)\geqslant f(a)$.*

Au voisinage à droite de a la fonction t_a est positive, comme cette fonction est croissante on en déduit que pour $x>a$ on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$ et donc $f(x)\geqslant f(a)$.

Solution 13.3 *$f(ta+(1-t)b)\leqslant tf(a)(1-t)f(b)\leqslant \mathrm{M}$ où $\mathrm{M}=\max(f(a),f(b))$. Si $\mathrm{M}=f(c)$ avec $c\in]a;b[$, à gauche de c on a $t_c(x)\geqslant 0$, alors qu'à droite de c on a $t_c(x)\leqslant 0$, or la fonction t_c est croissante sur $[a;b]\setminus\{c\}$, par conséquent la fonction t_c est nulle, ce qui signifie que f est constante.*