Méthode de réduction de variance par “importance sampling”

Dans ce TP, on souhaite tester l’efficacité de la méthode de réduction de variance par fonction d’importance. Pour des raisons de facilité de mise en œuvre, on se place dans le modèle de Black-Scholes

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x$$

où W est un mouvement Brownien standard réel. On considère une option d’achat barrière à monitoring discret de payoff

$$(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{\forall 0 \leq j \leq J,\, S_{t_j} \geq L\}} \tag{1}$$

L est une barrière basse et J le nombre de dates de constatation que l’on supposera uniformément réparties, ie $t_j = \frac{jT}{J}$. On prendra comme valeurs numériques

S_0	K	r	σ	T	L	J
100	110	0.05	0.2	2	80	24

L’estimateur du prix est 11.2 ± 0.17.

1. Montrer que pour toute fonction $f : C([0,T]) \to \mathbb{R}$ positive,

$$\mathbb{E}[f((W_t, t \leq T))] = \mathbb{E}\left[f((W_t + \lambda t, t \leq T))\, \mathrm{e}^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2 T}{2}}\right].$$

2. Montrer que la variance de $\mathrm{e}^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2 T}{2}} f(W_t + \lambda t, t \leq T)$ s’écrit $v(\lambda) - \mathbb{E}\left[f(W)\right]^2$ avec

$$v(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda \cdot W_T + \frac{\lambda^2}{2}T} f^2(W_t, t \leq T)\right].$$

   On rappelle que

$$\begin{aligned} v'(\lambda) &= \mathbb{E}\left[(\lambda T - W_T)e^{-\lambda \cdot W_T + \frac{\lambda^2}{2}T} f^2((W_t, t \leq T))\right] \\ v''(\lambda) &= \mathbb{E}\left[(T + (\lambda T - W_T)^2)e^{-\lambda \cdot W_T + \frac{\lambda^2}{2}T} f^2((W_t, t \leq T))\right]. \end{aligned}$$

3. Utiliser les questions précédentes pour proposer une méthode de fonction d’importance pour le calcul du prix de l’option barrière à monitoring discret.
4. Soit $\lambda^\star = \arg\min_{\lambda \in \mathbb{R}} v(\lambda)$. On sait que $\lambda^\star$ est solution de $v'(\lambda^\star) = 0$. Montrer que $\lambda^\star$ est également solution de $u'(\lambda^\star) = 0$ avec

$$u(\lambda) = \frac{|\lambda|^2 T}{2} + \log \mathbb{E}\left[e^{-\lambda W_T} f^2((W_t, t \leq T))\right].$$

   Montrer que u est fortement convexe et que $u''(\lambda) \geq T$.
5. Implémenter un estimateur de $\lambda^\star$ par la méthode *Sample Average Approximation* combiné avec l’algorithme de Newton que l’on résume ici.
   (a) Tirer $W^1, \ldots, W^n$ n réalisations du mouvement brownien W et les stocker.
   (b) Pour $i = 1, \ldots, n$, calculer $f^2((W^i_t, t \leq T))$ et les stocker.

(c) Implémenter le calcul des dérivées première et seconde de

$$u_n(\lambda) = \frac{|\lambda|^2 T}{2} + \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda \cdot W_T^i} f^2((W_t^i, t \leq T)).$$

(d) Implémenter la suite $(\lambda_p)_{p \geq 0}$ définie par $\lambda_0 = 0$ puis

$$\lambda_{p+1} = \lambda_p - u_n'(\lambda_p)/u_n''(\lambda_p)$$

qui converge vers λ^*. La convergence est très rapide, on pourra se contenter de prendre $p = 5$

6. Utiliser la question précédente pour construire une méthode de Monte Carlo de variance réduite. Comparer avec la variance de la méthode de Monte Carlo naïve.