Réduction de variance pour les options exotiques

On se place dans le modèle de Black-Scholes

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x$$

où W est un mouvement Brownien standard réel.

Exercice 1 (Variable de contrôle pour les options asiatiques)**.** On cherche à calculer le prix d'une option asiatique donné par

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-rT}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K\right)_+\right].$$

1. Simuler $\frac{1}{T}\int_0^T S_u du$ en approchant l'intégrale par la méthode des trapèzes à J pas de temps.
2. Calculer le prix de l'option asiatique par une méthode de Monte Carlo en utilisant l'approximation précédente.
3. On considère la variable de contrôle

   $$Y = \mathrm{e}^{\frac{1}{T}\int_0^T \log(S_u)du}.$$

   En appliquant la formule d'Itô au processus $(H_t = tW_t, t \geq 0)$, montrer que $\frac{1}{T}\int_0^T W_u du$ suit une loi normale centrée de variance $\frac{T}{3}$ et en déduire que

   $$\mathbb{E}(Y) = x\,\mathrm{e}^{(r-\sigma^2/2)\frac{T}{2}}\,\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{T}\int_0^T W_u du}) = x\,\mathrm{e}^{rT/2-\sigma^2 T/12}.$$

   Utiliser Y comme variable de contrôle pour calculer le prix de l'option asiatique. Comparer la variance obtenue avec la cas sans variable de contrôle.
4. On considère maintenant la nouvelle variable de contrôle

   $$Z = \mathrm{e}^{-rT}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{T}\int_0^T \log(S_u)du} - K\right)_+.$$

   En reliant $\mathbb{E}(Z)$ au prix d'un call dans le modèle de Black-Scholes dont on précisera la maturité et le spot, montrer que $\mathbb{E}(Z)$ est donnée par

   $$\mathbb{E}(Z) = \mathrm{e}^{-rT}\left(-K\mathcal{N}(-d) + x\,\mathrm{e}^{(r-\sigma^2/6)\frac{T}{2}}\,\mathcal{N}\left(-d + \sigma\sqrt{\frac{T}{3}}\right)\right)$$

   avec $d = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{3}{T}}\left(\ln(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{2}\right)$. Utiliser cette nouvelle variable de contrôle pour calculer le prix de l'option asiatique et comparer la variance aux deux cas précédents. On pourra utiliser la fonction `cdf_nor` de la librairie PNL.

On pourra prendre $T = 1$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.095$, $x = 100$, $K = 100$. Le prix vaut alors 6.91.

Exercice 2 (Méthode de ponts Browniens pour les options barrière)**.** On souhaite calculer le prix d'une option barrière de payoff

$$(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{\forall\, t \leq T\,:\, S_t \geq L\}}$$

où L est une barrière basse.

S_0	K	r	σ	T	L
100	105	0.02	0.25	1	90

Avec ces valeurs, le prix de l'option barrière à monitoring **continu** est 6.57.

1. Ecrire une fonction calculant le prix d'une telle option par une méthode de Monte-Carlo à N tirages et J pas de discrétisation pour vérifier la condition $\mathbf{1}_{\{\forall\, t \leq T\,:\, S_t \geq L\}}$.
2. Pour $N = 50000$, étudier numériquement la convergence du prix en fonction de J.
3. Le biais que l'on observe numériquement provient de la discrétisation de la condition de sortie. En conditionnant par la valeur du sous-jacent aux instants de discrétisation, montrez que l'on a

$$\mathbb{E}\left((S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{\inf_{u\in[0,T]} S_u \geq L\}}\right) = \mathbb{E}\left((S_T - K)_+ \prod_{i=1}^{J} \mathbb{P}\left(\inf_{u\in[t_{i-1},t_i]} S_u \geq L \middle| S_{t_{i-1}}, S_{t_i}\right)\right)$$

   pour toute grille $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_J = T$.
   Il resterait alors à calculer ces probabilités conditionnelles dont on donne l'expression pour tout $s < t$, $L > 0$ et $L < x$ et $L < y$:

$$\mathbb{P}\left(\inf_{s\leq u\leq t} S_u < L \middle| S_s = x, S_t = y\right) = \exp\left(-\frac{2\log\frac{L}{x}\log\frac{L}{y}}{\sigma^2(t-s)}\right).$$

4. Utiliser le résultat précédent pour mettre en œuvre une méthode de Monte-Carlo améliorée calculant le prix de l'option barrière. La convergence de cette méthode de Monte-Carlo corrigée dépend elle de J.
5. Tracer sur un même graphique l'évolution des prix calculés obtenus aux questions 1. et 3. en fonction de J. On prendra garde à utiliser les mêmes tirages pour chacun des 2 calculs.