Méthodes de Monte Carlo imbriquées

1 Problématique

Dans ce TP, on se place dans le modèle de Black Scholes

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

On considère une portefeuille contenant une option asiatique de maturité T, sur ce sous-jacent et dont le payoff est donné par

$$\left(\frac{1}{T} A_T - K\right)_+ \quad \text{avec} \quad A_t = \int_0^t S_u du.$$

On discrétisera le processus A en utilisant la méthode des trapèzes pour approcher l'intégrale. Sur une grille régulière $(t_k)_{0\le k\le M}$ de pas T/M, la méthode des trapèzes s'écrit

$$\frac{T}{M}\left(\sum_{k=0}^{M} S_{t_k} - \frac{1}{2}(S_{t_0} + S_{t_M})\right).$$

La valeur du portefeuille à l'instant t est donnée par

$$V_t = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{T} A_T - K\right)_+ \Big| \mathcal{F}_t\right]$$

On souhaite calculer le prix d'une option d'achat de maturité $t = 1$ sur ce portefeuille

$$\mathrm{e}^{-rt}\,\mathbb{E}[(V_t - \alpha V_0)_+]$$

pour $\alpha \in (0, 1)$ fixé.

On remarquera que que l'espérance conditionnelle donnant le prix du portefeuille peut se réécrire

$$V_{t_k} = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{T} A_T - K\right)_+ \Big| (\Delta W_{t_1}, \dots, \Delta W_{t_k})\right]$$

où $\Delta W_{t_k} = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$.

2 Méthode de Monte Carlo imbriquée

Question 1 : Ecrire le problème sous la forme

$$I = \mathbb{E}\left[f\left(\mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]\right)\right]. \tag{1}$$

Préciser la définition de X, Y, φ et f.

Question 2 : Implémenter l'estimateur $I_{M,N}$ pour $M, N \ge 1$.

$$I_{M,N} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(X_{m,n}, Y_m)\right). \tag{2}$$

3 Méthode de Monte Carlo imbriquée multi-niveaux

Soit $L > 0$, $L \in \mathbb{N}$ le nombre de niveaux que nous allons utilisés. Pour chaque $\ell = 0, \ldots, L$,

— $(Y_{\ell,m})_{1\leq m\leq M_\ell}$ est iid selon la loi de Y.

— Pour chaque m, $(X_{\ell,m,n})_{1\leq n\leq n_\ell}$ est iid selon la loi Y

Pour $\ell \neq \ell'$, les variables aléatoires utilisées sont indépendantes. On définit l'estimateur

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^L_{M,n} = &\frac{1}{M_0}\sum_{m=1}^{M_0} f\left(\frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0}\varphi(X_{0,m,n}, Y_{\ell,m})\right)\\ &+\sum_{\ell=1}^{L}\frac{1}{M_\ell}\sum_{m=1}^{M_\ell}\left\{f\left(\frac{1}{n_\ell}\sum_{n=1}^{n_l}\varphi(X_{\ell,m,n}, Y_{\ell,m})\right) - f\left(\frac{1}{n_{\ell-1}}\sum_{n=1}^{n_{\ell-1}}\varphi(X_{\ell,m,n}, Y_{\ell,m})\right)\right\}\end{aligned}$$

Pour atteindre une précision $\varepsilon > 0$, les différents paramètres seront choisis de la manière suivante

$$n_\ell = \varepsilon^{-1}2^{-L+\ell};\quad L = \left\lceil\frac{-\log(n_0\varepsilon)}{\log(2)}\right\rceil;\quad M_\ell = L\varepsilon^{-1}2^{L-\ell}.$$

Question 3 : Implémenter l'estimateur $\mathcal{I}^L_{M,n}$.

Question 4 : Pour chacune de ces deux méthodes, faire varier les paramètres (nombres de tirages pour la méthode de Monte-Carlo imbriquée et nombre de niveaux L pour méthode de Monte Carlo imbriquée multi-niveaux) et tracer la précision en fonction du temps de calcul. On pourra tracer un graphique en échelle log-log.

A titre indicatif, on pourra prendre $r = 0.03$, $S_0 = 100$, $K = 110$, $T = 2$, $\sigma = 0.3$ et $t = 1$, $\alpha = 0.8$.