

Méthodes de Monte-Carlo et réduction de variance

TP 2

Exercice 1. On souhaite comparer l'efficacité de différentes méthodes de réduction de variance sur une option sur maximum discret de payoff

$$\left(\max_{t \in \{t_0, \dots, t_J\}} S_t - K S_T \right)_+$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots < T_J = T$ et T sa maturité.

Pour la valorisation, on se place dans un modèle de Black-Scholes de dimension 1 sous la probabilité risque neutre, de sorte que la dynamique du sous-jacent est donnée par

$$S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma W_t}$$

où W est un mouvement Brownien réel standard, $r > 0$ est le taux d'intérêt, $\sigma > 0$ est la volatilité et S_0 est la valeur initiale du sous-jacent, encore appelé prix spot.

Pour les tests numériques, on prendra :

S_0	K	r	σ	T	J
100	1.2	0.02	0.25	2	24

Avec ces valeurs, on trouve comme prix 11.37 pour un intervalle de confiance de demi-largeur 0.12.

Remarque : Dans toutes les questions utilisant une méthode de Monte-Carlo, on prendra soin de fournir un intervalle de confiance.

1. Ecrire une fonction de simulation du sous-jacent.
2. Ecrire une fonction qui, étant donnée une trajectoire du modèle, calcule le payoff de l'option.
3. Ecrire une fonction calculant le prix de l'option par une méthode de Monte-Carlo standard à M tirages.
4. Même question que précédemment avec une technique de variables antithétiques.
5. Même question que précédemment en utilisant une technique de variable de contrôle linéaire adaptative avec comme contrôle $-(S_T - S_0 e^{rT})$.
6. Comparer la précision des résultats obtenus par les 3 méthodes pour différents strikes. Pour ce faire, tracer le prix et l'intervalle de confiance en fonction de K pour chacune des méthodes.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de se familiariser avec la méthode de la fonction d'importance (*importance sampling*) sur un exemple jouet. On considère une option d'achat dans le modèle de Black-Scholes

$$S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma W_t}$$

où W est un mouvement Brownien standard réel. On prendra comme paramètres

$$S_0 = 100, r = 0.03, \sigma = 0.2, T = 2, K = 120.$$

Le prix avec ces paramètres est 6.57.

D'après les résultats vus en cours, le prix de l'option d'achat vérifie l'égalité

$$\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)_+] = \mathbb{E}\left[e^{-rT}\left(S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}(G+\theta)} - K\right)_+ e^{-\theta G - \theta^2/2}\right], \forall \theta \in \mathbb{R}$$

où G suit une loi normale centrée réduite. On introduit la fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(g) = e^{-rT}\left(S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}g} - K\right)_+.$$

Bien que le prix de l'option d'achat soit donné par une formule fermée, nous allons le calculer par une méthode de Monte Carlo. Dans ce cadre, nous cherchons à déterminer la valeur θ^* du paramètre θ qui minimise

$$v(\theta) = \mathbb{E}\left[\psi(G)^2 e^{-\theta G + \theta^2/2}\right].$$

La fonction v est fortement convexe et de classe C^∞ , de plus

$$v'(\theta) = \mathbb{E}\left[(\theta - G)\psi(G)^2 e^{-\theta G + \theta^2/2}\right].$$

On note $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$U(\theta, g) = (\theta - g)\psi(g)^2 e^{-\theta g + \theta^2/2}.$$

de sorte que $\mathbb{E}[U(\theta, G)] = v'(\theta)$.

On cherche à approcher $\theta^* = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}} v(\theta)$. Soit $\theta_0 = 0$ et $\alpha_0 = 1$, on définit les suites de variables aléatoires $(\theta_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} \theta_{n+\frac{1}{2}} = \theta_n - \gamma_{n+1}U(\theta_n, G_{n+1}), \\ \text{si } (\theta_{n+\frac{1}{2}})^2 \leq \log(\alpha_n + 1) & \theta_{n+1} = \theta_{n+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ \text{si } (\theta_{n+\frac{1}{2}})^2 > \log(\alpha_n + 1) & \theta_{n+1} = \theta_0 \quad \text{et} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n + 1. \end{cases} \quad (1)$$

$(G_n)_n$ est une suite i.i.d de loi normale centrée et réduite et $\gamma_n = \frac{\gamma}{(n+500)^\beta}$, avec $1/2 < \beta \leq 1$. La suite $(\theta_n)_n$ converge p.s. vers θ^* pour toute valeur initiale de θ_0 . En pratique, on pourra prendre $\beta = 0.75$.

Si vous désirez réaliser cet exercice en C++, vous pouvez utiliser le squelette mis à disposition mais il est tout à fait possible de le faire en Python par exemple.

1. Implémenter le calcul de la suite $(\theta_n)_n$.
2. Tracer l'évolution de la suite $(\theta_n)_n$ en fonction de n . On tracera plusieurs graphiques pour différentes valeurs de $\gamma = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$.
3. Implémenter une méthode de Monte Carlo utilisant l'approximation θ_n de θ^* .
4. Comparer la précision avec une méthode de Monte Carlo standard classique.
5. On considère une version moyennée de $(\theta_n)_n$ définie par

$$\bar{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \theta_\ell.$$

6. Tracer sur un même graphique, la convergence des méthodes de Monte-Carlo naïve et avec fonction d'importance utilisant $\bar{\theta}_n$.