بررسی روش بهینه سازی CVAR و کاربرد های آن در بهینه سازی سبد خرید سهام

پروژه تحقیق در عملیات 1404 (دکتر نوشکاران)

گروه 5:محمد امامی - عارف کاظمی - محمد امین امینی

چکیده:

در این پژوهش، ابتدا معیار ریسک CVaR و دو معیار مشابه آن به‌صورت مقدماتی معرفی شده و ویژگی‌ها و مزایای آن‌ها در مقایسه با معیارهای سنتی ریسک بررسی می‌شود. سپس روش خطی‌سازی مدل CVaR که در حالت کلی غیرخطی است مورد مطالعه قرار گرفته و جزئیات فنی این فرآیند تشریح می‌گردد. با توجه به اهمیت این معیار در مسائل مالی، کاربرد CVaR به‌طور ویژه در حوزه‌ی بهینه‌سازی سبد خرید سهام مورد توجه قرار گرفته و نقش آن در کنترل ریسک زیان‌های شدید و تصمیم‌گیری بهینه سرمایه‌گذاران تحلیل می‌شود. در ادامه، به‌منظور درک بهتر مفاهیم ارائه‌شده، یک مثال عددی ساده بیان می‌گردد. در پایان نیز خلاصه‌ای از یک مقاله پژوهشی مرتبط که کاربرد عملی این روش را در مسائل بهینه‌سازی بررسی کرده است ارائه می‌شود.

۱. تعاریف و فرمول‌ها

۱.۱ Value at Risk (VaR)

VaR در سطح اطمینان α برای یک متغیر تصادفی بازده (یا زیان) L به صورت کوانتیل تعریف می‌شود. به صورت نمادین می‌توان نوشت:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha)$$

این عبارت نشان‌دهنده مقداری است که احتمال دارد زیان از آن مقدار فراتر نرود (برای سطح اطمینان α).

۱.۲Expected Shortfall (ES)

Expected Shortfall که نام دیگر آن conditional value at risk (CVAR) و موضوع اصلی متن ما هست . معیار میانگین زیان‌ها در ناحیهٔ دم توزیع است که VaR را شکسته‌اند. دو بیان متداول آن عبارت‌اند از:

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_\gamma(L)\, d\gamma$$

و همچنین (برای توزیع‌های پیوسته):

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L \mid L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]$$

۱.۳ Entropic Value at Risk (EVaR)

EVaR مبتنی بر مفاهیم تئوری اطلاعات و تابع ممان (MGF / cumulant generating function) است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{EVaR}_\alpha(L) = \inf_{t>0} \left\{ \frac{1}{t} \left(\ln E[e^{tL}] - \ln \alpha \right) \right\}$$

این معیار یک حد بالایی محافظه‌کارانه برای زیان است و در شرایط عدم قطعیت توزیع، کاربرد دارد.

۲. خواص مهم و مقایسه

در جدول زیر خواص کلیدی و تفاوت‌های معنادار این معیارها فهرست شده‌اند:

- VaR: شهودی، ساده، ولی ممکن است خاصیت subadditivity را نقض کند (یعنی additivity برای تنوع پرتفوی صدق نکند).
- ES: یک معیار coherent است؛ نسبت به دم توزیع حساس بوده و میانگین زیان‌های شدید را نشان می‌دهد.
- EVaR: محافظه‌کارانه‌تر است؛ از حد بالایی مبتنی بر انتروپی استفاده می‌کند و برای توزیع‌های نامطمئن مناسب است.

نتیجه: برای گزارش روزمره معمولاً VaR به کار می‌رود؛ برای تحلیل‌های استرس و تصمیم‌گیری محافظه‌کارانه‌تر از ES و EVaR بهره می‌گیرند.

۳. مثال عددی و نمودارها

در این بخش یک مثال عددی با داده‌های شبیه‌سازی‌شده ارائه می‌شود تا تفاوت‌های عددی بین VaR، ES و EVaR روشن گردد. برای وضوح، زیان‌ها L به‌صورت نمونه‌های تصادفی از توزیع نرمال با میانگین 0 و انحراف معیار 1.5 شبیه‌سازی شده‌اند.

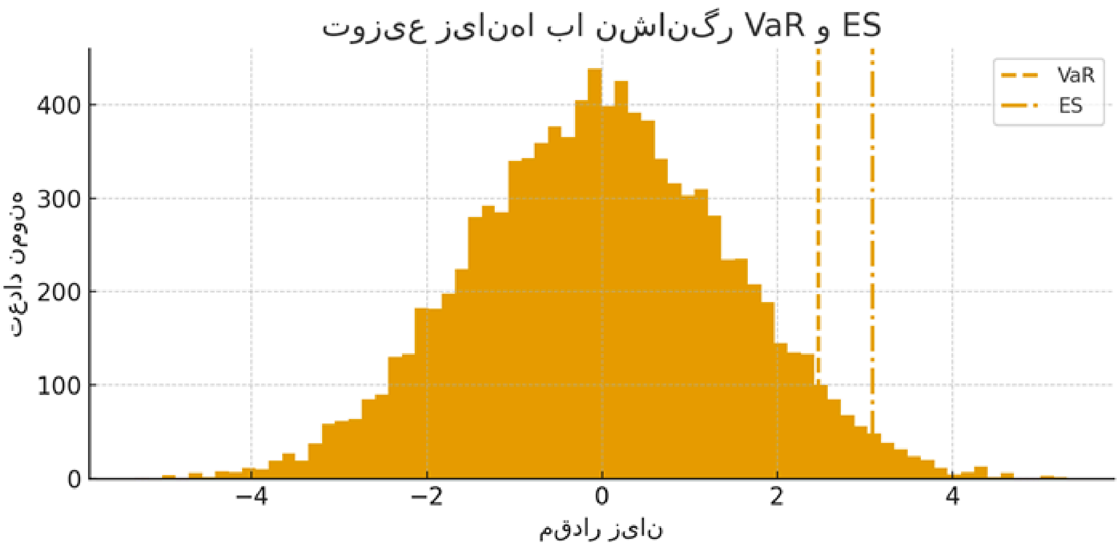
سطح اطمینان: 95٪

VaR (α=0.95): 2.4713

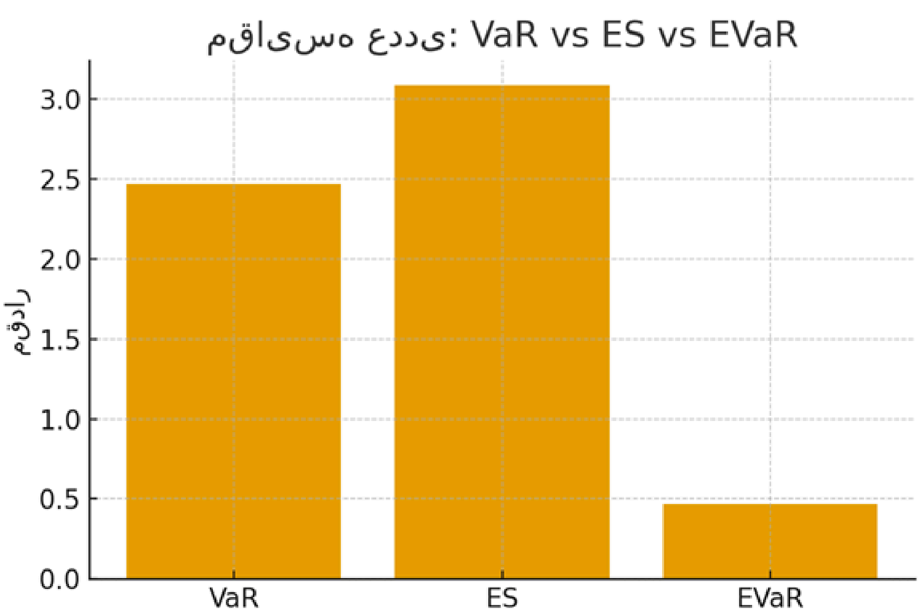
ES (α=0.95): 3.0862

EVaR (α=0.95): 0.4669 (بهینه t ≈ 0.2100)

نمودار ۱ — توزیع نمونه‌ای زیان‌ها و محل VaR و ES:



نمودار ۲ — مقایسه عددی سه معیار:



۴. توضیحات ریاضیاتی کوتاه

۱) رابطه بین ES و VaR: برای توزیع‌های پیوسته داریم:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F^{-1}(u)\,du$$

۲) تبیین EVaR: تعریف EVaR از نامساوی مارکوف/چبنوف و استفاده از ممان نمایی مشتق می‌شود؛ EVaR در واقع حد بالایی بر VaR و ES فراهم می‌کند که از طریق کمینه‌سازی روی پارامتر t به‌دست می‌آید.

۳) نکته عملی: محاسبه EVaR نیازمند محاسبه مقدار میانگین نمایی exp(tL) است که در عمل به داده‌ها و پایداری عددی حساس **است.**

توضیح روش و خطی کردن آن بر اساس ([این متن](#)):

<u>بهینه‌سازی ریسک‌گریز: پیاده‌سازی برنامه‌ریزی خطی CVaR</u>

Pierre Haessig، فوریهٔ ۲۰۲۵

<u>هدف</u>: این یادداشت فنی، پیاده‌سازی عملی یک بهینه‌سازی ریسک‌گریز مبتنی بر CVaR را توصیف می‌کند.

CVaR (مقدار در معرض ریسک شرطی) یک تابع هزینهٔ تصادفی را می‌توان با استفاده از یک پیاده‌سازی برنامه‌ریزی خطی (LP) کمینه کرد. این روش، ساده‌سازی‌ای از ایده‌هایی است که در مقالهٔ اصلی بهینه‌سازی CVaR توسط Rockafellar و Uryasev در سال ۲۰۰۰ معرفی شده‌اند.

<u>نمادگذاری و تعاریف</u>

فرض کنید یک تابع هزینهٔ تصادفی باشد:

- x : متغیر تصمیم (اینجا و اکنون، یعنی قطعی)
- θ :متغیر تصادفی با توزیع معلوم

▪ که در عمل با استفاده از نمونه‌ها با احتمال برای نمایش داده می‌شود

<u>یادآوری بهینه‌سازی تحت عدم قطعیت</u>

برای اینکه «آمادهٔ بهینه‌سازی» باشد، هزینهٔ تصادفی باید به یک مقدار اسکالر نگاشت شود (نگاشت $R.V. \to |R$). ساده‌ترین نگاشت آماری، امید ریاضی است:

$$\mathbb{E}_\theta(J(x,\theta)) = \sum_i p_i \,.\, J(x,\theta_i)$$

و کمینه‌سازی امید ریاضی، خنثی نسبت به ریسک نامیده می‌شود، به این معنا که مقادیر کمتر و بیشتر فرض می‌شود به‌صورت متقارن و به‌واسطهٔ قانون اعداد بزرگ یکدیگر را جبران کنند.در اینجا، در عوض، به نگاشت ریسک‌گریز CVaR (مقدار در معرض ریسک شرطی) علاقه‌مند هستیم.

<u>تعریف "پایه‌ای CVaR ("تعریف آماری)</u>

تعریف : CVaRα با سطح ریسک $\alpha \in [0\,,1]$ (که احتمالاً نزدیک به یک است، مثلاً ۹۰٪) داریم:

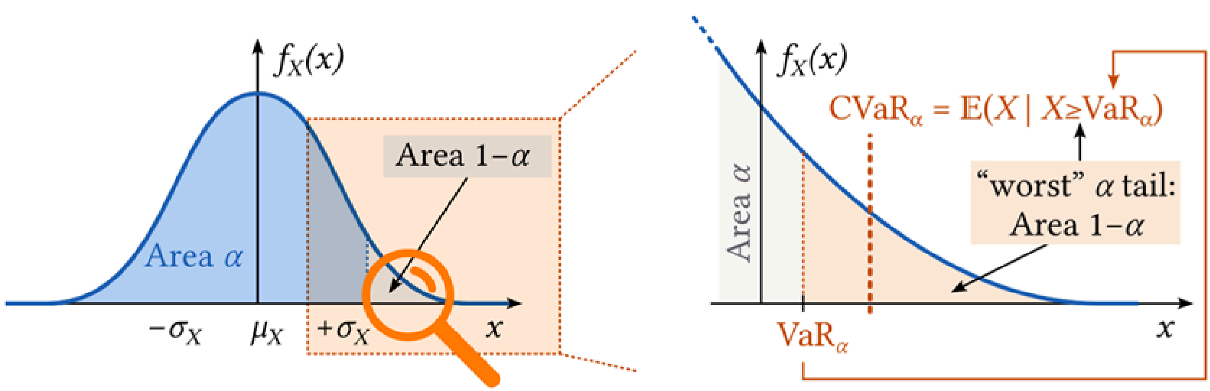
CVaRα(J(x,θ)) = Eθ[J(x,θ)|J(x,θ) ≥ VaRα(J(x,θ))]

یعنی، امید ریاضی شرطی مقادیر بالاتر از با همان سطح ریسک است،

که در آن VaRα مقدار در معرض ریسک است، که مترادف با α-کوانتایل می‌باشد، یعنی مقداری به‌گونه‌ای که:

Pθ [J(x,θ) ≤ VaRα(J(x,θ))] = α

در اینجا یک نمایش گرافیکی با استفاده از تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی X(که در اینجا لنقش هزینهٔ تصادفی را ایفا می‌کند، بابت ناهماهنگی نمادگذاری عذرخواهی می‌شود) ارائه شده است.



نکته ۱:

به (Rockafellar & Uryasev, 2000) و اسلایدهای Uryasev برای برخی ظرافت‌ها در تعریف VaR، زمانی که توزیع تجمعی پیوسته نیست (در حضور جرم‌های احتمال گسسته)، مراجعه کنید.

نکته ۲:در معادلات بالا و معادلات بعدی، ما همواره وابستگی به متغیر تصمیم را به‌طور صریح می‌نویسیم تا یادآوری کنیم که هدف نهایی، بهینه‌سازی یک تابع اسکالر از X است (امید ریاضی: یا $x \mapsto E_\theta (J(x,\theta))$ or CVaR: $x \mapsto CVaR_\alpha (J(x,\theta)))$). با این حال، در تمام این تغییرات X ، وابستگی به‌صورت شفاف در نگاشت‌ها منتقل می‌شود، به‌گونه‌ای که شما آزاد هستید تابع هزینهٔ تصادفی $J(x,\theta)$را به‌عنوان یک متغیر تصادفی ساده‌تر$J(\theta)$ در نظر بگیرید که برای «یک مقدار مشخص» از x محاسبه شده است.

<u>پیاده‌سازی برنامه‌ریزی خطی CVaR</u>

<u>تعریف جایگزین) CVaR تعریف مبتنی بر بهینه‌سازی(</u>

تعریف پایه‌ای CVaR ممکن است در یک چارچوب بهینه‌سازی برای بخش امید ریاضی ساده به نظر برسد، اما دشوار است، زیرا شرط به VaR وابسته است که خود باید محاسبه شود. با این حال، می‌توان با استفاده از یک تعریف جایگزین CVaR از این مشکل عبور کرد که، به‌طور عجیب، صریح نیست بلکه نتیجهٔ مسئلهٔ بهینه‌سازی جزئی زیر می‌باشد:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(J(x,\theta)) = \min_v \Phi_\alpha^J(x,v)$$

با متغیر کمینه‌سازی$v \in R$ و با تابعی که باید کمینه Φ^J_αشود:

$$\Phi_\alpha^J(x,v) = v + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}_\theta|J(x,\theta)-v|_+$$

که $|\cdot|_+ = \max(0,\cdot)$ در آن نماد کوتاه‌شدهٔ بخش مثبت است. با استفاده از n نمونه‌های عدم قطعیت θ_i ، این تابع به‌صورت زیر پیاده‌سازی می‌شود:

$$\Phi_\alpha^J(x,v) = v + \frac{1}{1-\alpha}\sum_i p_i.\,|J(x,\theta_i)-v|_+$$

تفسیر ارگمان v^*

ویژگی: آرگومان v^* مربوط به بهینه‌سازی جزئیِ

$v \mapsto \Phi_\alpha^J(x,v)$ is in fact $\mathrm{VaR}_\alpha(J(x,\theta))$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(J(x,\theta)) = v^*$$

چرا این روش کار می‌کند

اگرچه این واقعیت بدیهی نیست (حداقل برای من)، اما پس از دانستن آن، به‌سادگی می‌توان دید که $\Phi_\alpha^J(x, v = \mathrm{VaR}_\alpha)$ به CVaR بازمی‌گردد (در ادامه نمادگذاری را کوتاه می‌کنیم $\mathrm{VaR}_\alpha = \mathrm{VaR}_\alpha(J(x,\theta))$):

$$\Phi_\alpha^J(x, \mathrm{VaR}_\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}_\theta|J(x,\theta) - \mathrm{VaR}_\alpha|_+$$

در واقع، برای محاسبهٔ E در جملهٔ دوم، تنها دو حالت برای مقدار بخش مثبت وجود دارد که به علامت اختلاف $J(x,\theta) - \mathrm{VaR}\alpha$ بستگی دارد. طبق تعریف :

- با احتمال α ، داریم $J(x,\theta) < \mathrm{VaR}\alpha$ و بنابراین بخش مثبت صفر است

- با احتمال $1-\alpha$ ، حالت معکوس برقرار است و بنابراین بخش مثبت برابر با $J(x,\theta) - \mathrm{VaR}\alpha$ است

بنابراین، با استفاده از قانون امید ریاضی کل:

$$\mathbb{E}_\theta|J(x,\theta) - \mathrm{VaR}_\alpha|_+ = \alpha \times \mathbb{E}_\theta\left[0|J(x,\theta) < \mathrm{VaR}_\alpha\right] + (1-\alpha) \times \mathbb{E}_\theta\left[J(x,\theta) - \mathrm{VaR}_\alpha|J(x,\theta) \geq \mathrm{V}\right.$$

و کمیت $\mathbb{E}_\theta [J(x,\theta) - \mathrm{VaR}\alpha|J(x,\theta) \geq \mathrm{VaR}\alpha]$ همان تعریف اولیهٔ CVaR است، اما با انتقال به اندازهٔ $\mathrm{VaR}\alpha$ - . بنابراین:

$$\mathbb{E}_\theta|J(x,\theta) - \mathrm{VaR}_\alpha|_+ = (1-\alpha)(\mathrm{CVaR}_\alpha - \mathrm{VaR}_\alpha)$$

در نهایت

$$\Phi_\alpha^J(x, \mathrm{VaR}_\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha}(\mathrm{CVaR}_\alpha - \mathrm{VaR}_\alpha) = \mathrm{CVaR}_\alpha$$

برای اثبات کامل اینکه VaR و CVaR به‌ترتیب ارگمان و مینیمم تابع $v \mapsto \Phi_\alpha^J(x, v)$ هستند، به (Rockafellar & Uryasev, 2000) مراجعه کنید؛ جایی که ابتدا کوژ بودن این تابع اثبات می‌شود و سپس مشتق نسبت به محاسبه و برای حل می‌شود.

کمینه‌سازی CVaR

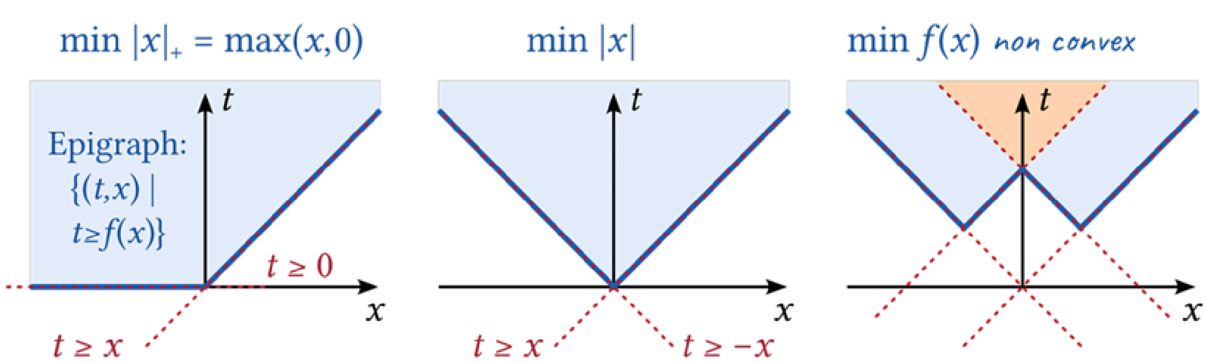
ما تعریف جایگزین CVaR را یک مسئلهٔ بهینه‌سازی جزئی نامیدیم، به این معنا که نتیجهٔ کمینه‌سازی $\Phi^J{}_\alpha(x, v)$ نسبت به v همچنان تابعی از متغیر تصمیم X است. این تابع ضمنی CVaR(x) برای بهینه‌سازی بیشتر باقی می‌ماند. با این حال، خبر خوب این است که مسئلهٔ بهینه‌سازی کامل min_x CVaRα(J(x,θ)) می‌تواند به‌صورت بهینه‌سازی مشترک طبیعی فرموله $\Phi^J{}_\alpha$ شود:

$$\min_x \mathrm{CVaR}_\alpha(J(x,\theta)) = \min_{x,v} \Phi_\alpha^J(x, v)$$

اثبات: به قضیهٔ ۲ در (Rockafellar & Uryasev, 2000) مراجعه کنید.

پیاده‌سازی برنامه‌ریزی خطی

تعریف جایگزین CVaR (به‌عنوان کمینهٔ) را می‌توان به‌کمک «بازنویسی اپی‌گراف» به‌صورت یک برنامه‌ریزی خطی (LP) پیاده‌سازی کرد؛ این یک ترفند کلاسیک مدل‌سازی LP است که می‌تواند هر عبارت کوژِ خطیِ قطعه‌ای (PWL) را به مجموعه‌ای از نامساوی‌ها تبدیل کند (بخش 4.1.3 «مسائل معادل» در کتاب (Boyd & Vandenberghe, 2004) را ببینید). توجه داشته باشید که این روش تنها زمانی کار می‌کند که عبارت PWL قرار باشد کمینه شود.



مثال‌ها:

کمینه‌سازی قدر مطلق:

مسئلهٔ غیرخطی (اما کوژِ خطیِ قطعه‌ای):

$$\min_{x} |x|$$

به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\min_{t,x} t$$

با دو قید نامساوی $t \geq x$ و $t \geq -x$. سپس، در نقطهٔ بهینه، چون در حال کمینه‌شدن است، یکی از دو نامساوی تنگ (فعال)

$t^* = +x^*$ یا $t^* = -x^*$ خواهد بود، یعنی یا ، بسته به اینکه کدام‌یک بزرگ‌تر است، یعنی $t^* = |x^*|$:

کمینه‌سازی بخش مثبت:

مسئلهٔ غیرخطی (اما کوژِ خطیِ قطعه‌ای):

$$\min_{x} |x|$$

به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\min_{t,x} t$$

با دو قید نامساوی $t \geq x$ و $t \geq 0$. سپس، در نقطهٔ بهینه، چون در حال کمینه‌شدن است، یکی از دو نامساوی تنگ (فعال)

$t^* = x^*$ یا $t = 0$ خواهد بود، یعنی یا ، بسته به اینکه کدام‌یک بزرگ‌تر است، یعنی $t^* = \max(x^*,0) = |x^*|_+$:

و در نتیجه:

و این الگوی آخر می‌تواند برای بازنویسی $\Phi^J_\alpha(x, v)$ (که باید کمینه شود تا CVaR به‌دست آید) به‌کار رود:

$$\Phi_\alpha^J(x,v) = v + \frac{1}{1-\alpha}\sum_i p_i.\,|J(x,\theta_i) - v|_+$$

اما از آنجا n...1= iکه نمونه از بخش مثبت |·|+ = (·,max (0 وجود دارد، لازم است متغیر اضافی n ایجاد کنیم:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(J(x,\theta)) = \min_v v + \frac{1}{1-\alpha}\sum_i p_i.\,t_i$$

متغیرهای اضافی t_i

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(J(x,\theta)) = \min_v v + \frac{1}{1-\alpha}\sum_i p_i.\,t_i$$

با قیود t≥ 0 و :

$$t_i \geq J(x,\theta_i) - v \text{ for } i = 1...n$$

بنابراین، در نهایت، تنها در همین مجموعهٔ آخر از قیود است که مشخص می‌کنیم روی کدام کمیت تصادفی (در اینجا J(x,θ) می‌خواهیم CVaR را محاسبه کنیم...

<u>نگاشت نمادگذاری به (Rockafellar & Uryasev, 2000)</u>

این سند از استدلال‌های (Rockafellar & Uryasev, 2000) پیروی می‌کند، هرچند با نمادگذاری متفاوت، تا با سایر درس‌ها سازگار باشد:

- متغیر(های) تصمیم: Xبرای هر دو!
- پارامتر(های) تصادفی: در اینجا θ، yبرای R&U

- سطح ریسک برای تعریف VaR و CVaR: در اینجا، برای R&U

- CVaR: CVaR_α here, ϕ_β for R&U

• تابعی که کمینهٔ آن CVaR است:

$$\Phi_\alpha^J(x,v) \text{ here, } F_\beta(x,\alpha) \text{ for R\&U}$$

یک مثال عددی ساده

هدف ما پوشش (hedge) یک بدهی تصادفی H با استفاده از سرمایه‌گذاری در سه سهم است.

مقدار سرمایه‌گذاری در هر سهم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(فرض می‌کنیم فروش استقراضی مجاز نیست.)

۵ سناریوی اقتصادی در نظر گرفته شده است. در هر سناریو، بازده هر سهم و مقدار بدهی مشخص است.

Scenario i	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	H_i
1	1.00	0.90	1.10	1.20
2	0.80	1.20	1.00	1.00
3	1.30	0.70	0.90	1.50
4	0.95	1.05	1.15	1.10
5	0.70	1.40	0.60	0.90

(I)

احتمال هر سناریو برابر است:

$$p_i = \frac{1}{5} = 0.2,$$

(II)

سطح اطمینان CVaR:

(Ⅲ) $\alpha = 0.8.$

بازده سبد در سناریوی i برابر است با:

$$x_1 P_{i1} + x_2 P_{i2} + x_3 P_{i3},$$

بنابراین زیان پوشش ریسک در سناریوی i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_i = H_i - (x_1 P_{i1} + x_2 P_{i2} + x_3 P_{i3}).$$

(Ⅳ)

برای کمیه کردن CVAR با بازه اطمینان α:

$$\eta \quad \text{(VaR auxiliary variable)}, \qquad u_i \geq 0 \quad \text{(excess loss variables)}.$$

تابع هدف CVaR:

$$\min \ \eta + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^{5} p_i u_i.$$

(V)

و چون :

$$\frac{1}{1-\alpha} = 5, \qquad p_i = 0.2,$$

پس:

$$\frac{1}{1-\alpha} p_i = 1,$$

در نتیجه:

$$\min\ \eta + \sum_{i=1}^{5} u_i.$$

(Ⅵ)

برای کمینه‌سازی CVaR (Conditional Value-at-Risk) از فرمول‌بندی خطی استاندارد استفاده می‌کنیم:

$$u_i \geq H_i - (x_1 P_{i1} + x_2 P_{i2} + x_3 P_{i3}) - \eta, \qquad i = 1, \dots, 5.$$

(Ⅶ)

قیود به‌صورت صریح:

$$\begin{aligned}
u_1 &\geq 1.20 - (1.00x_1 + 0.90x_2 + 1.10x_3) - \eta,\\
u_2 &\geq 1.00 - (0.80x_1 + 1.20x_2 + 1.00x_3) - \eta,\\
u_3 &\geq 1.50 - (1.30x_1 + 0.70x_2 + 0.90x_3) - \eta,\\
u_4 &\geq 1.10 - (0.95x_1 + 1.05x_2 + 1.15x_3) - \eta,\\
u_5 &\geq 0.90 - (0.70x_1 + 1.40x_2 + 0.60x_3) - \eta.
\end{aligned}$$

قیود نامنفی بودن:

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5, \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(Ⅷ)

قید بودجه (اختیاری):

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq B.$$

(Ⅸ)

مدل نهایی:

$$\boxed{\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2,x_3,\eta,\,u_1,\dots,u_5} \quad & \eta + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5\\
\text{s.t.} \quad & u_1 \geq 1.20 - (1.00x_1 + 0.90x_2 + 1.10x_3) - \eta,\\
& u_2 \geq 1.00 - (0.80x_1 + 1.20x_2 + 1.00x_3) - \eta,\\
& u_3 \geq 1.50 - (1.30x_1 + 0.70x_2 + 0.90x_3) - \eta,\\
& u_4 \geq 1.10 - (0.95x_1 + 1.05x_2 + 1.15x_3) - \eta,\\
& u_5 \geq 0.90 - (0.70x_1 + 1.40x_2 + 0.60x_3) - \eta,\\
& u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5,\\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0,\\
& (x_1 + x_2 + x_3 \leq B \text{ optional}).
\end{aligned}}$$

حل با mathlab:

```
%==========================================
=======
% CVaR Hedging Model
% z = [x1 x2 x3 eta u1 u2 u3 u4 u5]'
%==========================================
=======

nScen = 5;

%------------------------------------------
-------
% (I) Scenario data (Table 1)
%------------------------------------------
-------
P = [ 1.00 0.90 1.10;
      0.80 1.20 1.00;
      1.30 0.70 0.90;
      0.95 1.05 1.15;
      0.70 1.40 0.60 ];

H = [1.20; 1.00; 1.50; 1.10; 0.90];

%------------------------------------------
-------
% (II) Equal scenario probabilities
%------------------------------------------
-------
p = ones(nScen,1)/nScen;

%------------------------------------------
-------
% (III) CVaR confidence level
%------------------------------------------
-------
alpha = 0.8;

%------------------------------------------
-------
% (VI) Simplified CVaR objective:
% min eta + sum(u_i)
%------------------------------------------
-------
f = [0 0 0 1 ones(1,nScen)]';

%------------------------------------------
-------
% (VII) CVaR constraints:
% u_i >= H_i - (P_i x) - eta
% Standard LP form:
% -P_i x - eta - u_i <= -H_i
%------------------------------------------
-------
A = zeros(nScen,3+1+nScen);
b = -H;

for i = 1:nScen
    A(i,1:3) = -P(i,:);
    A(i,4)   = -1;
    A(i,4+i) = -1;
end

%------------------------------------------
-------
% (VIII) Non-negativity constraints
% x_j >= 0, u_i >= 0, eta free
%------------------------------------------
-------
lb = [0 0 0 -Inf zeros(1,nScen)]';
ub = [];


%------------------------------------------
-------
% (IX) Optional budget constraint
% x1 + x2 + x3 <= B
%------------------------------------------
A_budget = zeros(1,9);
A_budget(1,1:3) = 1; b_budget = 1; A = [A;
A_budget]; b = [b; b_budget];

%------------------------------------------
-------
% Solve the linear program
%------------------------------------------
-------
options =
optimoptions('linprog','Display','none');
[z,fval] =
linprog(f,A,b,[],[],lb,ub,options);

%------------------------------------------
-------
% Extract and display results
%------------------------------------------
-------
x_opt   = z(1:3);
eta_opt = z(4);
u_opt   = z(5:end);

fprintf('Optimal hedge positions:\n');
fprintf('x1 = %.4f, x2 = %.4f, x3 = %.4f\n',
x_opt);

fprintf('VaR (eta) = %.4f\n', eta_opt);
fprintf('CVaR value = %.4f\n', fval);
```

جواب:

```
,LP preprocessing removed 0 inequalities, 0 equalities
.variables, and added 0 non-zero elements 0

Iter      Time            Fval  Primal Infeas    Dual Infeas
0.000000e+00   2.590367e+00   1.000000e+00    0.011     0
1.000067e-01   5.385165e-01   0.000000e+00    0.012     2
2.000000e-01   0.000000e+00   0.000000e+00    0.012     3

.Optimal solution found

= Optimal hedge x
0     0     1

= Optimal VaR eta
0.2000

= Optimal CVaR value
0.2000
```

خلاصه یک نمونه مقاله

مقدمه:

در این بخش، مقاله‌ای (لینک مقاله) که به بررسی **مدل‌های CVaR** در بهینه‌سازی سبد خرید سهام می‌پردازد، به‌طور خلاصه مرور می‌شود. بخش‌های ابتدایی مقاله به معرفی مفاهیم پایه و تشریح روش CVaR اختصاص دارد که توضیحات آن پیش‌تر ارائه شده و از تکرار آن خودداری می‌شود. تمرکز این قسمت بر نحوه‌ی **به‌کارگیری روش CVaR در مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری** است.

بهینه‌سازی سبد خرید یک‌دوره‌ای با هزینه‌های معامله

بهینه‌سازی سبد خرید در یک دوره زمانی شامل تصمیم‌گیری در مورد تخصیص سرمایه بین چند دارایی برای حداکثر کردن بازده مورد انتظار و در عین حال کنترل ریسک است. در عمل، این مسئله پیچیده‌تر از انتخاب ساده دارایی‌های با بازده بالا است؛ زیرا باید هزینه‌های معامله، محدودیت‌های ریسک، نقدینگی و الزامات تنوع سرمایه‌گذاری را نیز در نظر گرفت. در این مقاله، یک چارچوب کامل و شهودی برای بهینه‌سازی سبد خرید یک‌دوره‌ای ارائه می‌شود که این ملاحظات دنیای واقعی را در بر می‌گیرد.

ما یک سبد خرید شامل n دارایی را در نظر می‌گیریم که شامل یک دارایی بدون ریسک مانند پول نقد نیز هست. در ابتدای دوره، سبد خرید دارای $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ واحد از هر دارایی است و قیمت‌های متناظر آن‌ها $q = (q_1, \ldots, q_n)$ می‌باشد. مسئله تصمیم‌گیری، تعیین موقعیت‌های جدید $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در انتهای دوره است، با توجه به اینکه قیمت‌های آینده $y = (y_1, \ldots, y_n)$ وابسته به سناریو هستند.
$x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ واحد از هر دارایی است و قیمت‌های متناظر آن‌ها $q = (q_1, \ldots, q_n)$ می‌باشد. مسئله تصمیم‌گیری، تعیین موقعیت‌های جدید $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در انتهای دوره است، با توجه به اینکه قیمت‌های آینده $y = (y_1, \ldots, y_n)$ وابسته به سناریو هستند.

تغییر ارزش سبد خرید در یک سناریوی خاص با **تابع زیان** نشان داده می‌شود:

$$f(x, y; x_0, q) = y^\top x - q^\top x_0 \, f(x, y; x_0, q) = y^\top x - q^\top x_0$$

این مقدار تفاوت بین ارزش آینده سبد خرید و ارزش اولیه آن را اندازه‌گیری می‌کند. از این، **بازده مورد انتظار** یا ارزش مورد انتظار سبد خرید در انتهای دوره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(x) = \mathbb{E}[y^\top x] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[y_i] x_i \, R(x) = \mathbb{E}[y^\top x] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[y_i] x_i$$

که خطی نسبت به متغیرهای تصمیم x است. بازده مورد انتظار با زیان مورد انتظار رابطه دارد:

$$R(x) = \mathbb{E}[f(x, y)] + q^\top x_0 \, R(x) = \mathbb{E}[f(x, y)] + q^\top x_0$$

که نشان می‌دهد حداکثر کردن بازده مورد انتظار سبد خرید معادل کمینه کردن زیان مورد انتظار است.

مثال شهودی:
اگر انتظار می‌رود یک سهم در طول دوره ۱۰٪ رشد کند و شما ۱۰ واحد از آن را با قیمت اولیه ۵۰ دلار در سبد خرید خود داشته باشید، سهم آن دارایی در بازده مورد انتظار برابر 0.1×50×10=50 خواهد بود.

کنترل ریسک با CVaR

در مدیریت واقعی سبد خرید، محدود کردن زیان‌های احتمالی اهمیت زیادی دارد. **CVaR** ابزاری برای کنترل ریسک است که میانگین زیان‌ها در بدترین سناریوها را محدود می‌کند. این محدودیت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(x) \le \alpha\, q^\top x_0\, \mathrm{CVaR}_\beta(x) \le \alpha\, q^\top x_0$$

که در آن β سطح اطمینان و α بیشترین کسری از ارزش اولیه سبد خرید است که می‌تواند در معرض ریسک قرار گیرد. با استفاده از J سناریو y_j، این محدودیت به شکل خطی قابل فرموله‌کردن است:

$$t + \frac{1}{(1-\beta)J}\sum_{j=1}^{J} z_j \le \alpha\, q^\top x_0$$

$$t + \frac{1}{(1-\beta)J}\sum_{j=1}^{J} z_j \le \alpha\, q^\top x_0 \quad z_j \ge y_j^\top x - q^\top x_0 - t$$

$$z_j \ge y_j^\top x - q^\top x_0 - t$$

$$z_j \ge 0$$

در اینجا t یک آستانه زیان و z_j میزان زیان اضافی فراتر از آن آستانه را نشان می‌دهد. برای مثال، اگر ارزش اولیه سبد خرید ۱۰۰ دلار باشد و α=0.05، آنگاه میانگین زیان در بدترین سناریوها حداکثر ۵ دلار خواهد بود.$z_j \ge 0$

در اینجا t یک آستانه زیان و z_j میزان زیان اضافی فراتر از آن آستانه را نشان می‌دهد. برای مثال، اگر ارزش اولیه سبد خرید ۱۰۰ دلار باشد و α=0.05، آنگاه میانگین زیان در بدترین سناریوها حداکثر ۵ دلار خواهد بود.

در نظر گرفتن هزینه‌های معامله

تغییر ترکیب سبد خرید با **هزینه‌های معامله** همراه است که معمولاً به صورت هزینه نسبتی c_i برای هر دارایی i مدل می‌شود. تغییر موقعیت هر دارایی به صورت زیر تجزیه می‌شود:c_i برای هر دارایی i مدل می‌شود. تغییر موقعیت هر دارایی به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$x_i - x_{0i} = u_i^+ - u_i^- \, x_i - x_{0i} = u_i^+ - u_i^-$$

که در آن u_i^+ نشان‌دهنده خرید و u_i^- نشان‌دهنده فروش است و هر دو نامنفی هستند. قید تراز سبد خرید با لحاظ هزینه‌های معامله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i x_{0i} = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i (u_i^+ + u_i^-) + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i \sum_{i=1}^{n} q_i x_{0i} = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i (u_i^+ + u_i^-) + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$$

فرض می‌شود که پول نقد هزینه معامله ندارد. به عنوان نمونه، خرید ۱۰ واحد سهم با قیمت ۲۰ دلار و کارمزد ۱٪، هزینه‌ای معادل 10 دلار خواهد داشت.

$10 \cdot 20 \cdot 1.01 = 202$

محدودیت‌های تنوع و نقدشوندگی

برای جلوگیری از تمرکز بیش از حد سرمایه در یک دارایی، می‌توان سهم هر دارایی از ارزش کل سبد خرید را محدود کرد:

$$q_i x_i \leq \gamma_i \sum_{k=1}^{n} q_k x_k \, q_i x_i \leq \gamma_i \sum_{k=1}^{n} q_k x_k$$

در این رابطه، γ_i بیشترین کسری از ارزش کل سبد خرید است که مجاز است در دارایی i سرمایه‌گذاری شود. برای مثال، اگر ارزش کل سبد خرید ۱۰۰۰ دلار باشد و $\gamma_i = 0.3$، آنگاه ارزش هیچ دارایی‌ای نباید از ۳۰۰ دلار بیشتر شود.$\gamma_i = 0.3$، آنگاه ارزش هیچ دارایی‌ای نباید از ۳۰۰ دلار بیشتر شود.

همچنین محدودیت‌های نقدشوندگی می‌توانند اندازه معاملات و موقعیت‌های نهایی سبد خرید را کنترل کنند:

$$0 \leq u_i^+ \leq \bar{u}_i^+, \quad 0 \leq u_i^- \leq \bar{u}_i^- \, , \, 0 \leq u_i^+ \leq \bar{u}_i^+, \quad 0 \leq u_i^- \leq \bar{u}_i^-$$

این محدودیت‌ها مانع از معاملات غیر واقعی یا بیش از حد بزرگ می‌شوند.

مسئله نهایی بهینه‌سازی

با کنار هم قرار دادن تمام این اجزا، مسئله بهینه‌سازی سبد خرید به صورت حداکثرسازی بازده مورد انتظار بیان می‌شود:

$$\min_x -R(x) = -\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[y_i] x_i$$

که تحت قیود CVaR، تراز هزینه‌های معامله، تغییر موقعیت‌ها، کران‌های موقعیت و قیود تنوع حل می‌شود. حل این مسئله منجر به سبد خرید بهینه x^* ، مقدار Value at Risk برابر با t، و بیشترین بازده مورد انتظار متناظر با سطح ریسک α می‌شود. با تغییر α ، می‌توان **مرز کارای بازده–CVaR** سبد خرید را استخراج کرد که مبادله بین بازده و ریسک نزولی را نشان می‌دهد.

$$\min_x -R(x) = -\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[y_i] x_i$$

که تحت قیود CVaR، تراز هزینه‌های معامله، تغییر موقعیت‌ها، کران‌های موقعیت و قیود تنوع حل می‌شود. حل این مسئله منجر به سبد خرید بهینه x^* ، مقدار Value at Risk برابر با t، و بیشترین بازده مورد انتظار متناظر با سطح ریسک α می‌شود. با تغییر α ، می‌توان مرز کارای بازده–CVaR سبد خرید را استخراج کرد که مبادله بین بازده و ریسک نزولی را نشان می‌دهد.

برآورد مبتنی بر سناریو

برای محاسبه CVaR و امید ریاضی بازده‌ها، معمولاً از سناریوهای تاریخی یا شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده می‌شود:

$$y_{ij} = q_i \cdot (\text{historical return over the period})$$

$$y_{ij} = q_i \cdot (\text{historical return over the period})$$

و با فرض وزن‌های مساوی برای سناریوها داریم:

$$\mathbb{E}[y_i] = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} y_{ij}$$

$$\mathbb{E}[y_i] = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} y_{ij}$$

به عنوان مثال، اگر قیمت یک سهم ۱۰۰ دلار باشد و بازده‌های تاریخی آن ۵٪، ۲٪- و ۳٪ باشند، قیمت‌های سناریویی برابر با ۱۰۵، ۹۸ و ۱۰۳ دلار خواهند بود و مقدار مورد انتظار برابر ۱۰۲ دلار می‌شود.

مطالعه موردی: بهینه‌سازی سبد خرید S&P 100

این مطالعه به بهینه‌سازی یک سبد خرید شامل سهام S&P 100 در تاریخ ۱ سپتامبر ۱۹۹۹ می‌پردازد که شش سهم به دلیل عدم دسترسی به داده‌ها حذف شده‌اند. سبد خرید اولیه فقط شامل وجه نقد است و افق سرمایه‌گذاری دو هفته‌ای (۱۰ روز کاری) در نظر گرفته شده است. تولید سناریو بر اساس بازده تاریخی در ۵۰۰ دوره‌ی هم‌پوشان دو هفته‌ای از ۱ ژوئیه ۱۹۹۷ تا ۸ ژوئیه ۱۹۹۹ انجام شده است:

$$y_{ij} = q_i p_{t_j} + \Delta t_i p_{t_j}, \quad \Delta t = 10$$ $$y_{ij} = q_i p_{t_j} + \Delta t_i p_{t_j}, \quad \Delta t = 10$$

بازده بدون ریسک وجه نقد برای دو هفته ۰.۱۶٪ است. محدودیت‌های سبد خرید به شرح زیر هستند:

- فقط موقعیت‌های خرید: $x_i \geq 0$
- حداکثر سهم هر دارایی: ۲۰٪ از کل سبد خرید
- هیچ محدودیتی برای تغییرات فردی موقعیت‌ها: $u_i^+, u_i^- = \infty$
- پارامتر α ،CVaR، برای بررسی سطوح مختلف تحمل ریسک تغییر می‌کند.

محدودیت‌های CVaR برای کنترل زیان‌های انتهایی سبد خرید اعمال می‌شوند:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(x) \leq \alpha\, q^\top x_0$$

مقدار بالاتر α نشان‌دهنده تحمل ریسک بیشتر و بازده مورد انتظار بالاتر است. بیشینه بازده دو هفته‌ای قابل دستیابی تحت این محدودیت‌ها ۲.۹۶٪ است. محدودیت‌های بسیار سخت‌گیرانه‌ی ریسک می‌توانند مسئله را غیرقابل حل کنند. میزان تنوع سبد خرید با سطح ریسک تغییر می‌کند؛ سبدهای کم‌ریسک شامل تعداد بیشتری از دارایی‌ها هستند (بیش از ۱۵ ابزار به همراه وجه نقد)، در حالی که سبدهای پرریسک روی تعداد کمتری از سهام با سودآوری بالاتر متمرکز می‌شوند. هزینه‌های معاملاتی $c = 0\%,\ 0.25\%,\ 1\%$, به‌صورت غیرخطی بازده مورد انتظار را کاهش داده و ترکیب سبد خرید را تحت تأثیر قرار می‌دهند. $c = 0\%,\ 0.25\%,\ 1\%$, به‌صورت غیرخطی بازده مورد انتظار را کاهش داده و ترکیب سبد خرید را تحت تأثیر قرار می‌دهند.

برای مقایسه، بهینه‌سازی میانگین–واریانس (MV) به‌صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\min_x \sum_{i,k} x_i \sigma_{ik} x_k$$ $$\min_x \sum_{i,k} x_i \sigma_{ik} x_k$$

با محدودیت‌های

$$\sum_i x_i = 1$$

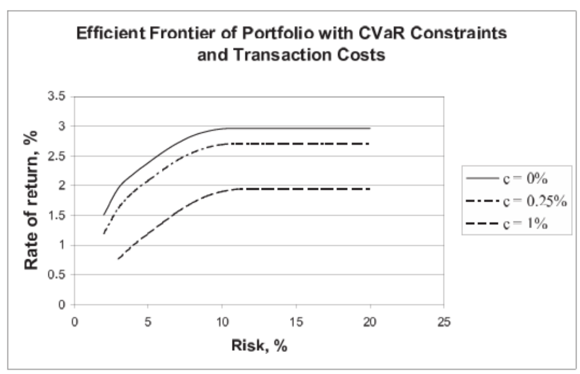
$$\sum_i x_i = 1 \sum_i \mathbb{E}[r_i]x_i = r_p$$

$$\sum_i \mathbb{E}[r_i]x_i = r_p$$

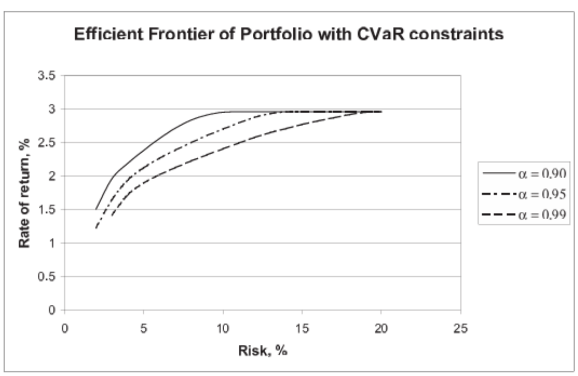
$$0 \leq x_i \leq \gamma_i \text{ , } 0 \leq x_i \leq \gamma_i$$

تفاوت اصلی این دو رویکرد در معیار ریسک آن‌هاست: CVaR بر زیان‌های انتهایی تمرکز دارد، در حالی که MV واریانس کل توزیع بازده را در نظر می‌گیرد. برای بازده‌های تاریخی نزدیک به توزیع نرمال، سبدهای خرید حاصل از CVaR و MV از دید یکدیگر تقریباً بهینه هستند. با افزایش سطح اطمینان CVaR، اختلاف بین راه‌حل‌های CVaR و MV بیشتر می‌شود. CVaR برای بازده‌های چولگی‌دار یا غیرنرمال، ابزارهای مشتقه و ریسک اعتباری مناسب‌تر است.

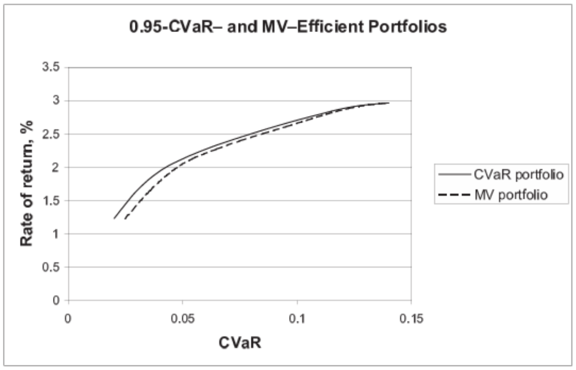
بهینه‌سازی مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی CVaR روشی پایدار، کارآمد و مقیاس‌پذیر است. محدودیت‌های خطی‌شده‌ی CVaR امکان کنترل درصد مشخصی از توزیع زیان را فراهم می‌کنند و مرز کارایی را به‌دست می‌دهند که مبادله بین بازده مورد انتظار و ریسک انتهایی سبد خرید را نشان می‌دهد. این روش برای استفاده در مدل‌های سرمایه‌گذاری چندمرحله‌ای همراه با روش‌های پیشرفته تولید سناریو مناسب است



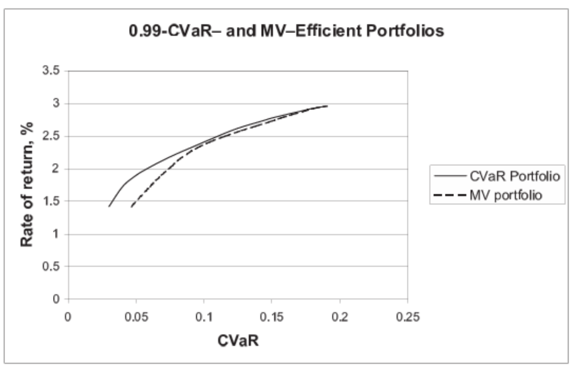
شکل ۲: مرز کارا سبد خرید بهینه با قیود CVaR در حضور هزینه‌های معامله c نرخ بازده، بازده مورد انتظار سبد خرید بهینه در یک دوره دو هفته‌ای را نشان می‌دهد. محور ریسک، سطح تحمل ریسک ω در قید ریسک (α=0.90) را به‌صورت درصدی از ارزش اولیه سبد خرید نمایش می‌دهد.



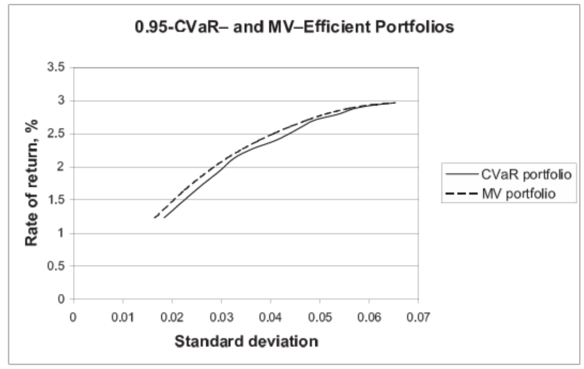
شکل ۱: مرز کارا (بهینه‌سازی با قیود CVaR). نرخ بازده، بازده مورد انتظار سبد خرید بهینه در یک دوره دو هفته‌ای را نشان می‌دهد. محور ریسک، سطح تحمل ریسک ω در قید ریسک CVaR را به‌صورت درصدی از ارزش اولیه سبد خرید نمایش می‌دهد.



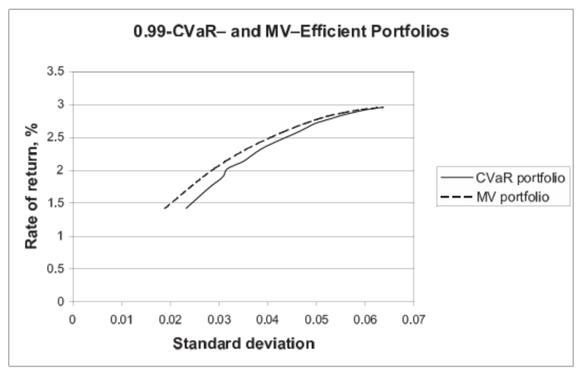
شکل ۳: مرزهای کارای سبدهای خرید بهینه CVaR و MV. سبد خرید بهینه CVaR با حداکثر کردن بازده مورد انتظار تحت محدودیت CVaR سبد خرید با سطح اطمینان ۹۵٪ (α=0.95) به‌دست آمده است. مقیاس‌های افقی و عمودی به‌ترتیب CVaR و نرخ بازده مورد انتظار سبد خرید در یک دوره دو هفته‌ای را نشان می‌دهند.



شکل ۴: مرزهای کارای سبدهای خرید بهینه CVaR و MV. سبد خرید بهینه CVaR با حداکثر کردن بازده مورد انتظار تحت محدودیت CVaR سبد خرید با سطح اطمینان ۹۹٪ (α=0.99) به‌دست آمده است. مقیاس‌های افقی و عمودی به‌ترتیب CVaR و نرخ بازده مورد انتظار سبد خرید در یک دوره دو هفته‌ای را نشان می‌دهند.



شکل ۵: مرزهای کارای سبدهای خرید بهینه CVaR و MV. سبد خرید بهینه CVaR با حداکثر کردن بازده مورد انتظار تحت محدودیت CVaR سبد خرید با سطح اطمینان ۹۵٪ (α=0.95) به‌دست آمده است. مقیاس‌های افقی و عمودی به‌ترتیب انحراف معیار و نرخ بازده مورد انتظار سبد خرید در یک دوره دو هفته‌ای را نشان می‌دهند.



شکل ۶: مرزهای کارای سبدهای خرید بهینه CVaR و MV. سبد خرید بهینه CVaR با حداکثر کردن بازده مورد انتظار تحت محدودیت CVaR سبد خرید با سطح اطمینان ۹۹٪ (α=0.99) به‌دست آمده است. مقیاس‌های افقی و عمودی به‌ترتیب انحراف معیار و نرخ بازده مورد انتظار سبد خرید در یک دوره دو هفته‌ای را نشان می‌دهند.