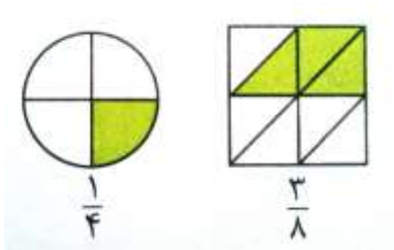
ریاضی ششم دبستان

فصل ۲– کسر

درس اول – جمع و تفریق کسرها

مفهوم کسر

به جزئی یا قسمتی از یک واحد کامل، کسری از آن واحد گفته می شود، بنابراین کسری از کل یعنی جزئی یا قسمتی از آن کل.



در شکل مقابل $\frac{۱}{۴}$ دایره و $\frac{۳}{۸}$ مربع رنگ شده است.

$\frac{۱}{۴}$ یعنی یک قسمت از ۴ قسمت مساوی.

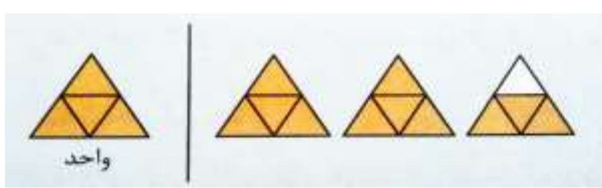
$\frac{۳}{۸}$ یعنی سه قسمت از ۸ قسمت مساوی.

عدد مخلوط

اگر صورت کسر بزرگ تر از واحدی، بر مخرجش بخش پذیر نباشد، آن کسر را می توان به صورت عدد مخلوط (ترکیبی از عدد صحیح و کسر) نوشت.

مثال: عدد مخلوط $۲\frac{۳}{۴}$ را به وسیله ی شکل نمایش دهید.

پاسخ:



عدد مخلوط $۲\frac{۳}{۴}$ با کسر $\frac{۱۱}{۴}$ برابر است.

نکته: شکل درست یک عدد مخلوط، این است که حتما کسر نوشته شده در عدد مخلوط، کوچک تر از واحد باشد.

مثال: شکل درست عدد مخلوط $۳\frac{۵}{۲}$ را بنویسید.

پاسخ:

$$\frac{۵}{۲} = ۲\frac{۱}{۲} \longrightarrow ۳\frac{۵}{۲} = ۳ + ۲\frac{۱}{۲} = ۵\frac{۱}{۲}$$

کسرهای مساوی

اگر صورت و مخرج کسری را در عدد طبیعی بزرگ تر از ۱ ضرب و یا بر عدد طبیعی بزرگ تر از یک تقسیم کنیم، کسری مساوی کسر اولیه به دست می آید.

$$\frac{۲}{۳} \overset{\times ۲}{=} \frac{۴}{۶} \qquad \frac{۲}{۳} \overset{\times ۳}{=} \frac{۶}{۹} \qquad \frac{۲}{۳} \overset{\times ۴}{=} \frac{۸}{۱۲}$$

کسر $\frac{۳}{۴}$ با کسر $\frac{۱۵}{۲۰}$ مساوی است.

$$\frac{۱۵}{۲۰} \overset{\div ۵}{=} \frac{۳}{۴}$$

برای هر کسر، بی شمار کسر مساوی می توان نوشت:

$$\frac{۳}{۴} \overset{\times ۲}{=} \frac{۶}{۸} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۱۲}{۱۶} = \frac{۱۵}{۲۰} = \frac{۱۸}{۲۴} = \frac{۲۱}{۲۸} = \cdots$$

کوچک ترین مخرج مشترک دو یا چند کسر

اگر دو یا چند کسر داشته باشیم و بزرگ ترین مخرج این کسرها، بر بقیه ی مخرج ها بخش پذیر باشد، همان مخرج بزرگ تر، کوچک ترین مخرج مشترک کسرها می شود.

مثال: کوچک ترین مخرج مشترک کسرهای $\frac{۵}{۴۲}$، $\frac{۱۱}{۲۱}$، $\frac{۳}{۱۴}$، $\frac{۶}{۷}$، $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۱}{۲}$ را بیابید.

پاسخ: چون ۴۲ بر تمامی مخرج ها بخش پذیر است، پس کوچک ترین مخرج مشترک این کسرها، عدد ۴۲ است.

اگر مخرج بزرگ تر بر بقیه ی مخرج ها بخش پذیر نبود، می توان با نوشتن کسرهای مساوی برای دو یا چند کسر داده شده، کوچک ترین مخرج مشترک آن ها را بیابیم.

مثال: کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۵}{۶}$ را بنویسید.

پاسخ:

$$\frac{۵}{۶}=\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۱۵}{۱۸}$$

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۸}=\frac{۹}{۱۲}=\frac{۱۲}{۱۶}$$

همان طور که می بینید، عدد ۱۲ کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر است.

روش بهتر برای یافتن کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر، این است که اگر بزرگ ترین مخرج بر دیگر مخرج ها بخش پذیر نبود، آن را در عددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ... به ترتیب ضرب کنیم تا جایی که بر مخرج یا مخرج های دیگر بخش پذیر شود.

مثال: کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر $\frac{۳}{۱۰}$ و $\frac{۴}{۱۵}$ را بیابید.

پاسخ: عدد ۳۰ بر ۱۰ بخش پذیر است، پس کوچک ترین مخرج مشترک $\frac{۳}{۱۰}$ و $\frac{۴}{۱۵}$ عدد ۳۰ است.

$$\longrightarrow ۱۵\times۲=۳۰$$

مقایسه ی کسرها

✓ الف: اگر دو کسر دارای مخرج های مساوی باشند، کسری بزرگ تر است که صورتش بزرگ تر باشد.

مثال: $\frac{۹}{۱۱} > \frac{۳}{۱۱}$ $\qquad$ $\frac{۲}{۷} < \frac{۵}{۷}$

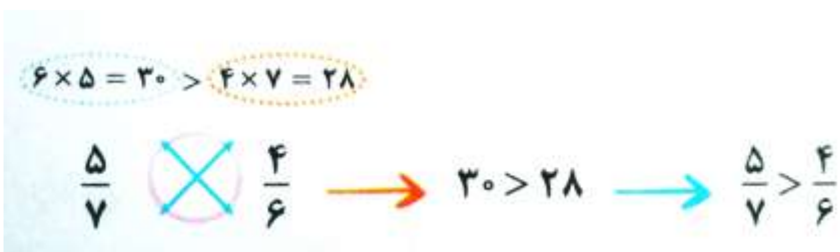
✓ ب: اگر دو کسر دارای صورت های مساوی باشند، کسری بزرگ تر است که مخرجش کوچک تر باشد.

مثال: $\frac{۹}{۲} > \frac{۹}{۵}$ $\qquad$ $\frac{۳}{۵} < \frac{۳}{۴}$

✓ ج: اگر دو کسر، نه صورت های برابر و نه مخرج های برابر داشته باشند، ابتدا دو کسر را هم مخرج و یا هم صورت می کنیم و سپس آن ها را مقایسه می کنیم.

مثال:

نکته: برای مقایسه ی دو کسر که صورت های آن ها برابر نباشند و مخرج های آن ها نیز برابر نباشند، از روش ساده تری به نام روش ضرب دری یا طرفین وسطین می توان استفاده کرد.

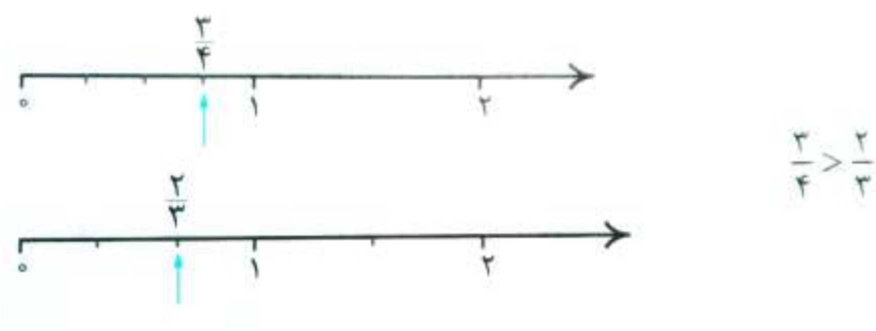


مقایسه ی کسرها توسط محور

در این روش دو محور رسم می کنیم که دقیقا واحدهای هم اندازه داشته باشند و صفرهای دو محور دقیقا زیر هم قرار گیرند.

مثال: کسرهای $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۳}$ را روی محور مقایسه کنید.

پاسخ:

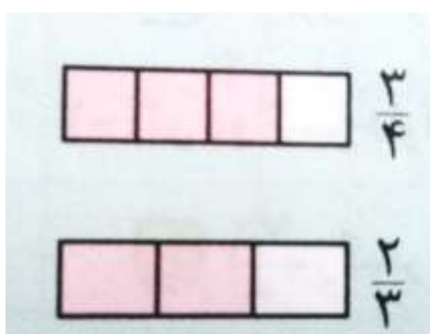


مقایسه ی دو کسر توسط شکل

در این روش دو واحد برابر انتخاب می کنیم و سپس با توجه به مخرج کسرها، آن ها را به قسمت های مساوی تقسیم کرده و سپس کسرها را روی شکل مشخص و مقایسه می کنیم.

مثال: کسرهای $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۳}$ را با شکل مقایسه کنید.

پاسخ: طبق شکل مقابل: $\frac{۲}{۳} < \frac{۳}{۴}$



جمع و تفریق کسرها

به طور کلی در جمع و تفریق کسرها، باید مخرج ها مساوی باشند و اگر مخرج ها مساوی نبودند، با استفاده از کوچک ترین مخرج مشترک آن ها، مخرج هایشان را مساوی می کنیم.

مثال: حاصل جمع و تفریق های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{۲}{۱۳}+\frac{۴}{۱۳}=$

ب) $\frac{۴}{۹}+\frac{۲}{۹}=$

ج) $\frac{۶}{۱۱}-\frac{۴}{۱۱}=$

الف) $\frac{۲}{۱۳}+\frac{۴}{۱۳}=\frac{۲+۴}{۱۳}=\frac{۶}{۱۳}$

ب) $\frac{۴}{۹}+\frac{۲}{۹}=\frac{۴+۲}{۹}=\frac{۶}{۹}$

ج) $\frac{۶}{۱۱}-\frac{۴}{۱۱}=\frac{۶-۴}{۱۱}=\frac{۲}{۱۱}$

مثال: حاصل عبارت های زیر را حساب کنید و به ساده ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۱۲}=$

ب) $\frac{۴}{۹}-\frac{۲}{۱۵}=$

پاسخ:

الف) $\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۱۲}=$

الف) $\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۱۲}=\frac{۸}{۱۲}+\frac{۳}{۱۲}+\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳}=۱\frac{۱}{۳}$

ب) $\frac{۴}{۹}-\frac{۲}{۱۵}=\frac{۲۰}{۴۵}-\frac{۶}{۴۵}=\frac{۲۰-۶}{۴۵}=\frac{۱۴}{۴۵}$

جمع اعداد مخلوط

برای جمع اعداد مخلوط، بهتر است عددهای صحیح را با هم و کسرها را نیز با هم جمع کنیم.

مثال: حاصل عبارت مقابل را حساب کنید.

$$۲\frac{۲}{۵}+۳\frac{۱}{۳}=$$

$$۲\frac{۲}{۵}+۳\frac{۱}{۳}=(۲+۳)+(\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳})=۵+\frac{۶}{۱۵}+\frac{۵}{۱۵}=۵\frac{۱۱}{۱۵}$$

تفریق اعداد مخلوط

مانند جمع اعداد مخلوط، بهتر است که در تفریق هم، عددهای صحیح را از هم کم کنیم و کسرها را نیز از هم تفریق کنیم.

مثال: حاصل عبارت های زیر را حساب کنید.

الف) $۵\frac{۳}{۴} - ۲\frac{۲}{۳} =$

ب) $۷\frac{۱}{۳} - ۴\frac{۳}{۴} =$

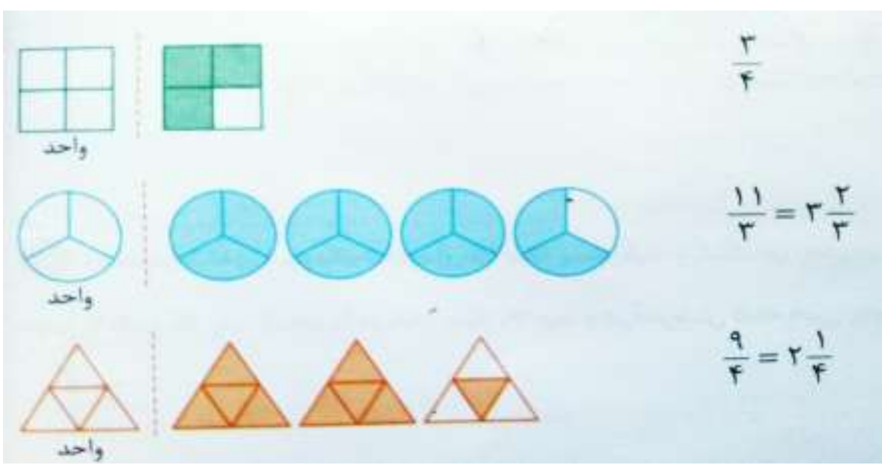
الف) $۵\frac{۳}{۴} - ۲\frac{۲}{۳} = (۵-۲) + (\frac{۳}{۴} - \frac{۲}{۳}) = ۳ + \frac{۹}{۱۲} - \frac{۸}{۱۲} = ۳\frac{۱}{۱۲}$

ب) $۷\frac{۱}{۳} - ۴\frac{۳}{۴} = (۷-۴) + (\frac{۱}{۳} - \frac{۳}{۴}) = ۳ + \frac{۱}{۳} - \frac{۳}{۴} = ۲ + \frac{۳}{۳} + \frac{۱}{۳} - \frac{۳}{۴} = ۲ + \frac{۴}{۳} - \frac{۳}{۴} = ۲ + \frac{۱۶}{۱۲} - \frac{۹}{۱۲} = ۲\frac{۷}{۱۲}$

جمع و تفریق کسرهای ۲

یادآوری

با مفهوم کسر در سال های گذشته آشنا شدید و آموختید که هرگاه جزئی از یک واحد مورد نظر باشد، آن را با کسر نشان می دهیم. به مثال های زیر دقت کنید.



نکته: کسری که صورت آن بر مخرجش بخش پذیر باشد، با یک عدد صحیح برابر است.

$\frac{۱۵}{۳} = ۵$ و $\frac{۲۴}{۴} = ۶$ و $\frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰$ و $\frac{۱۵۰}{۵} = ۳۰$

کسرهای مساوی

اگر صورت و مخرج کسری را در عددی طبیعی ضرب کنیم، کسری مساوی با آن به دست می آید. به این ترتیب می توانیم بی شمار کسر مساوی با یک کسر بنویسیم.

$$\frac{۵}{۷}=\frac{۱۰}{۱۴}=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۲۰}{۲۸}=\cdots=\frac{۴۵}{۶۳}=\cdots$$

جمع و تفریق عددهای کسری

برای انجام جمع و تفریق بین دو یا چند کسر، ابتدا باید آن ها را با استفاده از یکی از روش های زیر هم مخرج کنیم، بعد از هم مخرج کردن کسرها، یکی از مخرج ها را می نویسیم و صورت کسرها را با توجه به علامت بین کسرها، با هم جمع یا از هم کم می کنیم. دقت داشته باشید که گاهی اوقات یکی از مخرج ها بر دیگری بخش پذیر است، در این صورت به سادگی هر دو کسر هم مخرج می شوند. مانند:

$$\frac{۴}{۵}-\frac{۷}{۱۵}=\frac{۴\times۳}{۵\times۳}-\frac{۷}{۱۵}=\frac{۱۲}{۱۵}-\frac{۷}{۱۵}=\frac{۱۲-۷}{۱۵}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

هم مخرج کردن کسرها با استفاده از نوشتن کسرهای مساوی

در این روش از هم مخرج کردن دو کسر، باید کسرهای مساوی با هر یک از کسرها را بنویسیم، تا جایی که به کسرهای هم مخرج برسیم.

مثال ۱: به مثال های زیر توجه کنید.

الف) $\frac{۵}{۴}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱۵}{۱۲}+\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱۵+۲}{۱۲}=\frac{۱۷}{۱۲}$

$\frac{۵}{۴}=\frac{۱۰}{۸}=\boxed{\frac{۱۵}{۱۲}}$ $\qquad$ $\frac{۱}{۶}=\boxed{\frac{۲}{۱۲}}$

$\frac{۵}{۴}+\frac{۱}{۶}=\frac{۳۰}{۲۴}+\frac{۴}{۲۴}=\frac{۳۴}{۲۴}=\frac{۱۷}{۱۲}$

$\frac{۵}{۴}=\boxed{\frac{۳۰}{۲۴}}$ $\qquad$ $\frac{۱}{۶}=\boxed{\frac{۴}{۲۴}}$

اگر نوشتن کسرهای مساوی را ادامه دهیم، به کسرهای هم مخرج $\frac{۳۰}{۲۴}$ **و** $\frac{۴}{۲۴}$ می رسیم که با جمع این دو کسر و ساده کردن جواب جمع، مجددا به همان جواب قبلی می رسیم.

در مثال بالا، عددهای ۱۲ و ۲۴ مخرج های مشترک دو کسر $\frac{۵}{۴}$ و $\frac{۱}{۶}$ هستند ولی به عدد ۱۲، کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر هم گفته می شود که استفاده از این عدد باعث ساده تر شدن محاسبات می گردد.

ب) $\frac{۷}{۱۲} - \frac{۵}{۱۸} = \frac{۲۱}{۳۶} - \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۱۱}{۳۶}$

$\frac{۷}{۱۲} = \frac{۱۴}{۲۴} = \frac{۲۱}{۳۶}$ $\qquad$ $\frac{۵}{۱۸} = \frac{۱۰}{۳۶}$

بنابراین برای انجام جمع و تفریق دو کسر با مخرج های نابرابر، بهتر است ابتدا کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر را بیابیم، سپس جمع یا تفریق را انجام دهیم.

نوشتن مضرب های هر یک از مخرج ها

در این روش ابتدا مضرب های هر یک از مخرج ها را می نویسیم. اولین مضرب مشترک بین آن ها، همان کوچک ترین مخرج مشترک کسرها خواهد شد.

مثال ۲: به مثال های زیر دقت کنید.

الف) $\frac{۵}{۹} + \frac{۷}{۶}$

مضرب‌های ۹ : ۹ ,۱۸ ,۲۷ ,۳۶ ,...

مضرب‌های ۶ : ۶ ,۱۲ ,۱۸ ,۲۴ ,...

$\Rightarrow$ عدد ۱۸ کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر است.

محاسبه‌ی جمع : $\frac{۵\times۲}{۹\times۲} + \frac{۷\times۳}{۶\times۳} = \frac{۱۰}{۱۸} + \frac{۲۱}{۱۸} = \frac{۳۱}{۱۸}$

ب) $\frac{۲}{۱۵} - \frac{۳}{۲۵}$

مضرب‌های ۱۵ : ۱۵,۳۰,۴۵,۶۰,۷۵,...
مضرب‌های ۲۵ : ۲۵,۵۰,۷۵,۱۰۰,...
$\Rightarrow$ ۷۵ کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر است.

محاسبه‌ی تفریق : $\frac{۲\times۵}{۱۵\times۵} - \frac{۳\times۳}{۲۵\times۳} = \frac{۱۰}{۷۵} - \frac{۹}{۷۵} = \frac{۱}{۷۵}$

جمع و تفریق عددهای مخلوط

برای انجام جمع یا تفریق دو عدد مخلوط، ابتدا قسمت صحیح هر دو عدد را با توجه به علامت بین عددها، با هم جمع، یا از هم کم می کنیم، سپس قسمت های کسری را پس از هم مخرج کردن آن ها، با توجه به علامت بین عددها، با هم جمع، یا از هم کم می کنیم.

مثال ۳: به مثال های زیر دقت کنید.

الف) $۲\frac{۳}{۸} + ۳\frac{۵}{۶} = ۵\frac{۳\times۳}{۸\times۳} + \frac{۵\times۴}{۶\times۴} = ۵\frac{۹}{۲۴} + \frac{۲۰}{۲۴} = ۵\frac{۲۹}{۲۴}$

۲+۳

مضرب‌های ۸ : ۸,۱۶,۲۴,۳۲,...
مضرب‌های ۶ : ۶,۱۲,۱۸,۲۴,...
$\Rightarrow$ ۲۴ کوچک‌ترین مخرج مشترک بین دو کسر است.

$۵\frac{۲۹}{۲۴} = ۵+۱\frac{۵}{۲۴} = ۶\frac{۵}{۲۴}$

نکته: اگر در جمع اعداد مخلوط، قسمت کسری حاصل جمع، عددی بزرگ تر از واحد شود، باید آن کسر را نیز به عدد مخلوط تبدیل، و با قسمت صحیح قبلی جمع کنیم.

$$\text{ب)}\quad 3\frac{1}{24}-2\frac{3}{16}=\overset{3-2}{1}\frac{1\times 2}{24\times 2}-\frac{3\times 3}{16\times 3}=1\frac{2}{48}-\frac{9}{48}=\frac{50}{48}-\frac{9}{48}=\frac{41}{48}$$

تبدیل به کسر

مضرب‌های ۲۴: ۲۴، ۴۸، ۷۲، ...

مضرب‌های ۱۶: ۱۶، ۳۲، ۴۸، ...

$\Rightarrow$ ۴۸ کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر است.

همان طور که ملاحظه نمودید، گاهی اوقات در تفریق دو عدد مخلوط، بعد از تفریق قسمت صحیح آن ها، قسمت کسری اولین عدد از قسمت کسری دومین عدد کوچک تر می شود و به این ترتیب، تفریق امکان پذیر نمی باشد. در چنین مواقعی یک از روش های تفریق این است که مانند مثال بالا، عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنیم، سپس عملیات تفریق را انجام دهیم.

درس دوم – ضرب کسرها

ضرب کسرها

در ضرب دو یا چند کسر، باید صورت ها را در هم ضرب کنیم و در صورت کسر حاصل ضرب قرار دهیم و مخرج ها را نیز در هم ضرب کنیم و در مخرج کسر حاصل ضرب قرار دهیم.

مثال: حاصل ضرب های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{4}{7}\times\frac{5}{11}=$

ب) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=$

الف) $\frac{4}{7}\times\frac{5}{11}=\frac{4\times 5}{7\times 11}=\frac{20}{77}$

ب) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=\frac{2\times 4\times 6}{3\times 5\times 7}=\frac{48}{105}$

نکته: در ضرب کسرها، اگر بتوانیم صورت کسرها را با مخرج آن ها ساده کنیم، بهتر است که ابتدا این کار را انجام دهیم و سپس حاصل ضرب را حساب کنیم. این کار سرعت و دقت محاسبه را افزایش می دهد و نیازی به ساده کردن کسر حاصل نیز نمی باشد.

مثال: حاصل ضرب های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{12}{15} \times \frac{25}{18} =$

ب) $\frac{14}{55} \times \frac{22}{35} =$

الف) $\frac{\cancel{12}^{\,2}}{\cancel{15}_{\,3}} \times \frac{\cancel{25}^{\,5}}{\cancel{18}_{\,3}} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$

ب) $\frac{\cancel{14}^{\,2}}{\cancel{55}_{\,5}} \times \frac{\cancel{22}^{\,2}}{\cancel{35}_{\,5}} = \frac{2 \times 2}{5 \times 5} = \frac{4}{25}$

ضرب عددهای مخلوط

برای ضرب اعداد مخلوط از راه محاسبه، ابتدا اعداد مخلوط را به کسر تبدیل می کنیم و سپس کسرها را در هم ضرب می کنیم و حاصل را به دست می آوریم.

مثال:

الف) $3\frac{3}{5} \times 2\frac{2}{9} = \frac{\cancel{18}^{\,2}}{\cancel{5}_{\,1}} \times \frac{\cancel{20}^{\,4}}{\cancel{9}_{\,1}} = \frac{8}{1} = 8$

ب) $2\frac{3}{4} \times 5\frac{7}{11} = \frac{\cancel{11}^{\,1}}{\cancel{4}_{\,2}} \times \frac{\cancel{62}^{\,31}}{\cancel{11}_{\,1}} = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}$

هرگاه حاصل ضرب دو عدد مساوی ۱ باشد، آن دو عدد را «معکوس» یکدیگر می گویند. همه ی عددها به جز صفر، معکوس دارند.

برای مشخص کردن معکوس یک کسر، باید جای صورت و مخرج آن را عوض کنیم.

مثال:

$\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{3}{1} = 3 \qquad 3 \times \frac{1}{3} = 1$

$\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{4}{3} \qquad \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$

$\frac{5}{9} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{9}{5} \qquad \frac{5}{9} \times \frac{9}{5} = 1$

اگر بخواهیم معکوس یک عدد مخلوط را مشخص کنیم، ابتدا باید آن را به شکل کسر در آوریم و سپس کسر را معکوس کنیم.

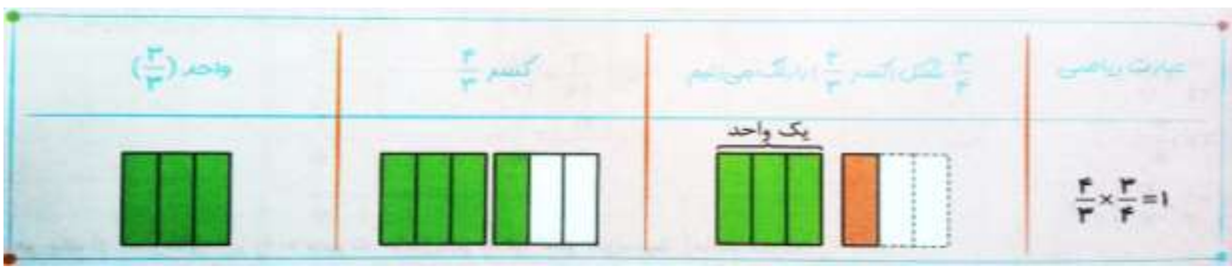
مثال: معکوس عدد $۳\frac{۱}{۴}$ را بنویسید.

پاسخ:

$$۳\frac{۱}{۴}=\frac{۱۳}{۴}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۴}{۱۳}$$

مثال: با استفاده از شکل، تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۳}=?$$



نصف یک عدد، یعنی آن عدد ضرب در $\frac{۱}{۲}$.

مثال: نصف $\frac{۵}{۶}$ یعنی:

$$\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

$\frac{۳}{۴}$ از $\frac{۲}{۳}$ یعنی $\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}$ که برابر است با: $\frac{۱}{۲}$

$$\frac{\cancel{۳}}{\cancel{۴}_{۲}}\times\frac{\cancel{۲}^{۱}}{\cancel{۳}_{۱}}=\frac{۱}{۲}$$

ربع یک عدد یعنی آن عدد ضرب در $\frac{۱}{۴}$.

مثال: ربع عدد ۸ یعنی: $۸\times\frac{۱}{۴}=۲$

ضرب کسرهای ۲

یادآوری

در سال قبل با سه روش محاسبه ی ضرب کسرها آشنا شدید که عبارت اند از:

۱- رسم شکل

۲- رسم محور

۳- محاسبات ریاضی

با توجه به این که روش محاسباتی، سریع ترین و ساده ترین روش نسبت به دو روش دیگر است، لذا در سال ششم بیش تر از این روش استفاده می کنیم. در این روش برای محاسبه ی حاصل ضرب دو کسر، ابتدا صورت های دو کسر را در همدیگر و مخرج های دو کسر را نیز در همدیگر ضرب می کنیم و به عنوان صورت و مخرج جدید می نویسیم. بهتر است قبل از انجام ضرب، صورت ها را با مخرج ها ساده کنیم. دقت داشته باشید که در ضرب کسرها، نیازی به هم مخرج کردن کسرها نیست.

مثال ۱: به مثال های زیر دقت کنید.

الف) $\frac{8}{21} \times \frac{14}{40} = \frac{\overset{1}{\cancel{8}} \times \overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{21}} \times \underset{5}{\cancel{40}}} = \frac{2}{15}$

عددهای ۸ و ۴۰ را به ۸ ساده کردیم و عددهای ۱۴ و ۲۱ را نیز به ۷ ساده کردیم و در آخر ساده شده ی عددها را در یک دیگر ضرب کردیم.

ب) $\frac{27}{36} \times \frac{28}{21} = \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{27}} \times \overset{\overset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{28}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{36}} \times \underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{21}}} = \frac{1}{1} = 1$

در ابتدا عددهای ۲۷ و ۳۶ را به ۹ و عددهای ۲۸ و ۲۱ را نیز به ۷ ساده می کنیم و این عمل را مجددا برای ساده شده ی عددها تکرار می کنیم.

$$\text{ج)}\ \frac{۲۶}{۳۹}\times\frac{۲۸}{۳۲}=\frac{\overset{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۲۶}}\times\overset{۷}{\cancel{۲۸}}}{\underset{۳}{\cancel{۳۹}}\times\underset{\underset{۴}{\cancel{۸}}}{\cancel{۳۲}}}=\frac{۷}{۱۲}$$

ابتدا عددهای ۲۶ و ۳۹ را به ۱۳ و عددهای ۲۸ و ۳۲ را به ۴ ساده می کنیم و این عمل را برای ساده شده ی عددها تکرار می کنیم.

$$\text{د)}\ \frac{۱۵}{۱۶}\times\frac{۱۸}{۲۵}\times\frac{۲۰}{۱۲}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۱۵}}\times\overset{۳}{\cancel{۱۸}}\times\overset{\overset{۱}{\cancel{۵}}}{\cancel{۲۰}}}{\underset{۴}{\cancel{۱۶}}\times\underset{\underset{۱}{\cancel{۵}}}{\cancel{۲۵}}\times\underset{۲}{\cancel{۱۲}}}=\frac{۹}{۸}$$

ضرب عددهای مخلوط

برای انجام ضرب عددهای مخلوط، ابتدا باید آن ها را به عدد کسری تبدیل، سپس مثل ضرب کسرها عمل کنیم.

مثال ۲: به مثال های زیر دقت کنید.

$$\text{الف)}\ ۳\frac{۳}{۷}\times۲\frac{۵}{۸}=\frac{۲۴}{۷}\times\frac{۲۱}{۸}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۲۴}}\times\overset{۳}{\cancel{۲۱}}}{\underset{۱}{\cancel{۷}}\times\underset{۱}{\cancel{۸}}}=\frac{۹}{۱}=۹$$

$$\text{ب)}\ ۲\frac{۱}{۶}\times۱\frac{۲}{۱۳}=\frac{۱۳}{۶}\times\frac{۱۵}{۱۳}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۳}}\times\overset{۵}{\cancel{۱۵}}}{\underset{۲}{\cancel{۶}}\times\underset{۱}{\cancel{۱۳}}}=\frac{۵}{۲}=۲\frac{۱}{۲}$$

معکوس یک کسر

اگر جای صورت و مخرج یک کسر را تغییر دهیم، معکوس آن کسر به دست می آید.

$$۵=\frac{۵}{۱}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۱}{۵}\qquad\frac{۴}{۳}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۳}{۴}\qquad\frac{۷}{۲}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۲}{۷}\qquad\frac{۳}{۵}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۵}{۳}$$

نکته:

۱- همه ی اعداد به غیر از صفر، معکوس دارند.

۲- برای تعیین معکوس یک عدد مخلوط، ابتدا باید آن عدد را به کسر تبدیل، و سپس معکوس کنیم.

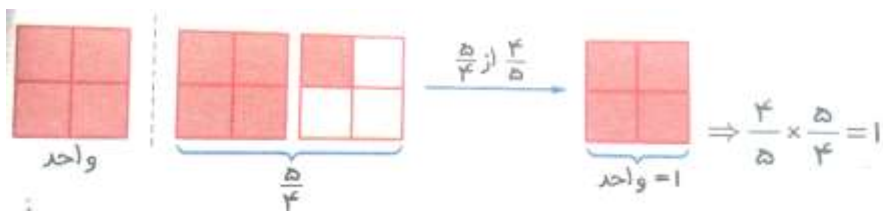
$$۵\frac{۳}{۸}=\frac{۴۳}{۸}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۸}{۴۳}\qquad ۲\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۳}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۳}{۷}$$

۳- هرگاه حاصل ضرب دو عدد برابر یک شود، آن دو عدد معکوس یک دیگر هستند. به عبارت دیگر، حاصل ضرب هر عددی در معکوسش، همیشه مساوی یک می شود.

$$5 \times \frac{1}{5} = 1 \qquad 2\frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{7}{3} \times \frac{3}{7} = 1 \qquad \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$$

مثال ۳: با رسم شکل نشان دهید که $\frac{4}{5}$ و $\frac{5}{4}$ ، معکوس یک دیگر هستند.

کافی است که نشان دهیم حاصل ضرب این دو کسر، برابر یک است. در ابتدا شکل $\frac{5}{4}$ را رسم می کنیم، حالا برای مشخص کردن $\frac{4}{5}$ از $\frac{5}{4}$ ، باید ۴ خانه ی رنگ شده از شکل $\frac{5}{4}$ را انتخاب کنیم. به این ترتیب ملاحظه می کنید که حاصل برابر یک واحد شد، چون $\frac{4}{5}$ از $\frac{5}{4}$ شکل، مساوی واحد شد، پس ضرب این دو کسر (یعنی $\frac{5}{4} \times \frac{4}{5}$) مساوی یک است. لذا طبق نکته ی بالا، این دو کسر معکوس یک دیگر هستند.



نکته: معکوس معکوس هر عددی برابر خود آن عدد است.

$$\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{5}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{3}{5}$$

پیدا کردن مقدار نامعلوم در تساوی ها

مثال ۴: در تساوی $\frac{۱۵}{؟}=\frac{۳}{۵}$، به جای علامت سؤال چه عددی باید نوشت؟

همان طور که ملاحظه می کنید، عدد ۳، پنج برابر شده است، پس باید ۵ هم، پنج برابر شود.

$$\frac{۳}{۵}\overset{\times ۵}{=}\frac{۱۵}{\square}$$

به عبارت دیگر، اول ۱۵ را بر ۳ تقسیم می کنیم تا بفهمیم که ۳ چند برابر شده است و سپس ۵ را هم در همان عدد ضرب می کنیم، برای حل این گونه سؤالات به روش زیر عمل می کنیم:

$$\frac{۳}{۵}=\frac{۱۵}{\square}\rightarrow \square=۵\times\frac{۱۵}{۳}=\frac{۵\times\cancel{۱۵}^{۵}}{\cancel{۳}_{۱}}=۲۵$$

نکته: به طور کلی در تساوی دو کسر مانند $\frac{\triangle}{\square}=\frac{؟}{\bigcirc}$، برای پیدا کردن مقدار ؟ از رابطه ی زیر استفاده می کنیم.

$$؟=\frac{\triangle\times\bigcirc}{\square}$$

مثال ۵: در هر قسمت مقدار ؟ را پیدا کنید.

الف) $\frac{۱۵}{۴۵}=\frac{\boxed{؟}}{۱۸}\Rightarrow\boxed{؟}=\frac{\cancel{۱۵}^{۳}\times\cancel{۱۸}^{۲}}{\cancel{۴۵}_{\cancel{۹}_{۱}}}=\frac{۶}{۱}=۶$

ب) $\frac{\boxed{؟}}{۲۰}=\frac{۲۱}{۳۵}\Rightarrow\boxed{؟}=\frac{\cancel{۲۱}^{۳}\times\cancel{۲۰}^{۴}}{\cancel{۳۵}_{\cancel{۵}_{۱}}}=\frac{۱۲}{۱}=۱۲$

حل چند مسئله

مثال ۶: در زنگ ورزش یک کلاس ۳۰ نفری، $\frac{2}{5}$ از دانش آموزان فوتبال، $\frac{1}{3}$ والیبال و بقیه ی آن ها تنیس روی میز بازی می کنند. چند نفر فوتبال بازی می کنند؟

$$\frac{2}{5}\times 30=\frac{2\times \cancel{30}^{6}}{\cancel{5}_{1}}=12$$ ۱۲ نفر فوتبال بازی می‌کنند.

چند نفر والیبال بازی می کنند؟

$$\frac{1}{3}\times 30=\frac{1\times \cancel{30}^{10}}{\cancel{3}_{1}}=10$$ ۱۰ نفر والیبال بازی می‌کنند.

چند نفر تنیس روی میز بازی می کنند؟

$$30-(10+12)=30-22=8$$ ۸ نفر تنیس روی میز بازی می‌کنند.

مثال ۷: کشاورزی $\frac{1}{2}$ از مزرعه ی خود را هندوانه و $\frac{3}{5}$ از باقی مانده ی مزرعه را خربزه و در بقیه ی زمین گوجه فرنگی کاشته است. اگر کل مزرعه ی او ۴ هکتار باشد:

الف) در چند متر مربع هندوانه کاشته است؟

۴ هکتار $=4\times 10000=40000$ متر مربع $\Rightarrow$ مساحت زیر کشت هندوانه $=\frac{1}{2}\times 40000=20000$ متر مربع

ب) در چند متر مربع خربزه کاشته است؟

$40000-20000=20000$ غیر از هندوانه کاشته $\Rightarrow$ مساحت زیر کشت خربزه $=\frac{3}{5}\times 20000=12000$ متر مربع

ج) در چند متر مربع گوجه فرنگی کاشته است؟

مساحت زیر کشت گوجه‌فرنگی $=\begin{cases} 20000-12000=8000 \text{ مترمربع} \\ \text{یا} \\ 40000-(20000+12000)=40000-32000=8000 \end{cases}$

درس سوم – تقسیم کسرها

تقسیم کسرها

برای محاسبه ی تقسیم کسرها از راه محاسبه یک روش کلی وجود دارد، به این ترتیب که کسر اول را می نویسیم، عمل تقسیم را به ضرب تبدیل می کنیم و کسر دوم را معکوس می کنیم (یعنی جای صورت و مخرج را عوض می کنیم) و سپس مانند ضرب کسرها، حاصل را به دست می آوریم.

مثال:

$$\frac{۴}{۵} \div \frac{۲}{۷} = \frac{\cancel{۴}^{۲}}{۵} \times \frac{۷}{\cancel{۲}_{۱}} = \frac{۱۴}{۵} = ۲\frac{۴}{۵}$$

نکته: اگر در تقسیم کسرها، صورت کسر سمت چپ بر صورت کسر سمت راست بخش پذیر باشد و مخرج کسر سمت چپ بر مخرج کسر سمت راست بخش پذیر باشد، می توانیم آن ها را بر هم تقسیم کنیم و به سادگی جواب را به دست آوریم.

مثال:

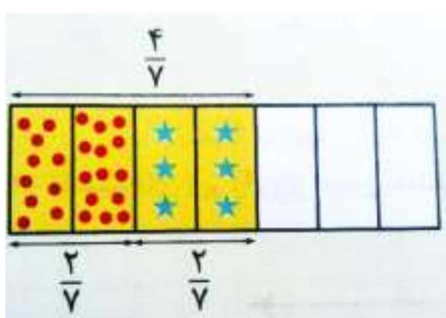
$$\frac{۱۴}{۱۵} \div \frac{۷}{۳} = \frac{۱۴ \div ۷}{۱۵ \div ۳} = \frac{۲}{۵}$$

$$\frac{۱۶}{۱۱} \div \frac{۲}{۱۱} = \frac{۱۶ \div ۲}{۱۱ \div ۱۱} = \frac{۸}{۱} = ۸$$

تقسیم کسرها به کمک شکل

می خواهیم حاصل $\frac{۴}{۷} \div \frac{۲}{۷}$ را به کمک شکل محاسبه کنیم.

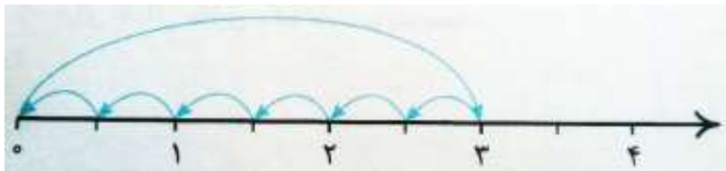
ابتدا یک مستطیل را به عنوان واحد رسم می کنیم و آن را به ۷ قسمت مساوی تقسیم می کنیم ابتدا یک مستطیل را به عنوان واحد رسم می کنیم و ۴ قسمت آن را رنگ می کنیم. اکنون هر دو قسمت آن را با رنگ های متفاوت مشخص می کنیم. دو تا $\frac{۲}{۷}$ روی شکل مشخص می شود، پس حاصل می شود ۲؛ یعنی $\frac{۴}{۷} \div \frac{۲}{۷} = ۲$.



تقسیم کسرها به کمک محور اعداد

می خواهیم حاصل $\frac{۱}{۲} \div ۳$ را به کمک محور حساب کنیم. ابتدا محور را رسم می کنیم و ۳ واحد را روی آن مشخص می کنیم. چون مخرج کسر ۲ است، هر واحد را به ۲ قسمت تقسیم می کنیم. اکنون باید ببینیم که در ۳ واحد، چندتا $\frac{۱}{۲}$ هست.

همان طور که روی محور می بینیم در ۳ واحد، ۶ تا $\frac{۱}{۲}$ داریم، پس $\mathbf{۳ \div \frac{۱}{۲} = ۶}$.



مثال: برای تقسیم اعداد مخلوط، ابتدا باید آن ها را به کسر تبدیل کنیم و سپس عمل تقسیم را انجام دهیم.

مثال: حاصل عبارت $\mathbf{۳\frac{۱}{۵} \div ۲\frac{۲}{۳}}$ را حساب کنید.

پاسخ:

$$۳\frac{۱}{۵} \div ۲\frac{۲}{۳} = \frac{۱۶}{۵} \div \frac{۸}{۳} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۱۶}}}{۵} \times \frac{۳}{\underset{۱}{\cancel{۸}}} = \frac{۶}{۵} = ۱\frac{۱}{۵}$$

تقسیم کسرهای ۲

یادآوری

اگر بخواهیم چهار کلوچه را بین سه نفر تقسیم کنیم، می توانیم در ابتدا هر کلوچه را به سه قسمت تقسیم کنیم و سپس به هر نفر ۴ تا $\frac{۱}{۳}$ کلوچه بدهیم؛ به این ترتیب سهم هر نفر $\frac{۴}{۳}$ کلوچه می شود.

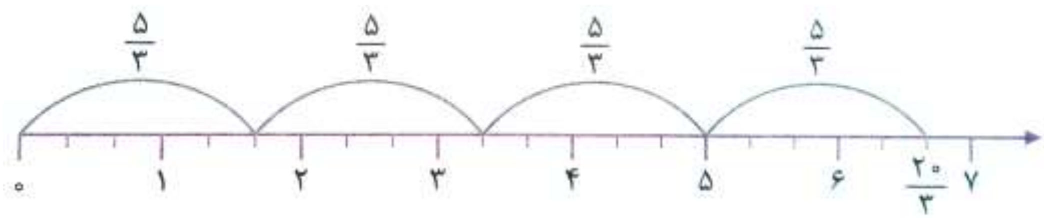
به عبارت دیگر:

$$۴ \div ۳ = ۴ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

با توجه به عبارت بالا، برای تقسیم دو عدد صحیح برهم، کافی است که اولین عدد را در معکوس دومین عدد ضرب کنیم، سپس حاصل ضرب را به دست آوریم.

مثال ۱: حاصل هر یک از تقسیم های زیر را به دست آورید.

الف) $۷ \div ۴ = ۷ \times \frac{۱}{۴} = \frac{۷}{۴}$ ب) $۲۰ \div ۹ = ۲۰ \times \frac{۱}{۹} = \frac{۲۰}{۹}$ ج) $۳۵ \div ۸ = ۳۵ \times \frac{۱}{۸} = \frac{۳۵}{۸}$



در محور بالا، در $\frac{۲۰}{۳}$ چهار تا $\frac{۵}{۳}$ قرار دارد. به عبارت دیگر:

$$\frac{۲۰}{۳} \div \frac{۵}{۳} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

با توجه به عبارت بالا، برای تقسیم دو کسر با مخرج های برابر، کافی است که صورت اولین کسر را بر صورت دومین کسر تقسیم کنیم.

نکته: برای تقسیم دو عدد مخلوط بر یک دیگر، ابتدا آن ها را به صورت کسری می نویسیم، سپس حاصل تقسیم را به دست می آوریم.

مثال ۲: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{۲۰}{۷} \div \frac{۲}{۷} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$ ب) $۳\frac{۳}{۷} \div ۲\frac{۴}{۷} = \frac{۲۴}{۷} \div \frac{۱۸}{۷} = \frac{۲۴}{۱۸} = \frac{۴}{۳}$ ج) $\frac{۸}{۹} \div ۱\frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹} \div \frac{۱۰}{۹} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$

اگر دو کسر هم مخرج باشند، حاصل تقسیم آن ها به سادگی قابل محاسبه است؛ پس از این خاصیت می توانیم برای تقسیم کسرهایی که مخرج آن ها برابر نمی باشد هم استفاده کنیم، به این ترتیب که ابتدا دو کسر را هم مخرج کنیم و سپس به روش بالا عمل کنیم.

مثال ۳: حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{9}{14} \div \frac{1}{2} = \frac{9}{14} \div \frac{1\times 7}{2\times 7} = \frac{9}{14} \div \frac{7}{14} = \frac{9}{7}$

ب) $\frac{20}{9} \div \frac{5}{6} = \frac{20\times 2}{9\times 2} \div \frac{5\times 3}{6\times 3} = \frac{40}{18} \div \frac{15}{18} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$ ($\div 5$)

مضرب‌های ۹: ۹ ، ۱۸ ، ۲۷ ، ۳۶ ، ...

مضرب‌های ۶: ۶ ، ۱۲ ، ۱۸ ، ۲۴ ، ۳۰ ، ...

ج) $2\frac{1}{7} \div 3\frac{1}{2} = \frac{15}{7} \div \frac{7}{2} = \frac{30}{14} \div \frac{49}{14} = \frac{30}{49}$

روش کلی محاسبه ی حاصل تقسیم دو عدد

کافی است که اولین عدد را در معکوس دومین عدد ضرب کنیم و حاصل ضرب را پس از ساده کردن صورت ها با مخرج ها، به دست آوریم.

مثال ۴: به مثال های زیر دقت کنید.

الف) $\frac{9}{4} \div \boxed{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{9}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{9 \times \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}} \times 1} = \frac{9}{7}$

ب) $\frac{20}{9} \div \boxed{\frac{5}{6}} = \frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{8}{3}$

ج) $2\frac{1}{7} \div 3\frac{1}{2} = \frac{15}{7} \div \boxed{\frac{7}{2}} = \frac{15}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{30}{49}$

مثال ۵: حاصل عبارت $\left(2\frac{1}{8} - 1\frac{5}{6}\right) \div 2\frac{5}{12}$ را به دست آورید.

ابتدا حاصل عبارت داخل پرانتز را به دست می آوریم، سپس جواب آن را بر عدد مخلوط تقسیم می کنیم.

عبارت داخل پرانتز: $2\frac{1}{8} - 1\frac{5}{6} = 1\frac{1\times 3}{8\times 3} - \frac{5\times 4}{6\times 4} = 1\frac{3}{24} - \frac{20}{24} = \frac{27}{24} - \frac{20}{24} = \frac{7}{24}$

$\left(2\frac{1}{8} - 1\frac{5}{6}\right) \div 2\frac{5}{12} = \frac{7}{24} \div \frac{29}{12} = \frac{7}{24} \times \frac{12}{29} = \frac{7}{58}$

مثال ۶: پدر یک خانواده ی پنج نفره دو عدد نان سنگک خرید. او و همسرش $\frac{۱}{۳}$ نان ها را خوردند و بقیه ی نان ها را بین سه فرزند خود به طور مساوی تقسیم کردند. سهم هر یک از فرزندان چه کسری از یک نان است؟

برای فرزندان باقی مانده است $\frac{۳}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$ سهم هر فرزند $\frac{۲}{۳}\div ۳=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹}$

مثال ۷: $\frac{۳}{۵}$ گنجایش ظرفی ۷۵ لیتر است. گنجایش باقی مانده ی ظرف چه قدر است؟

گنجایش باقی‌ماندهٔ ظرف $۵۰=۷۵-۱۲۵ \Leftarrow$ گنجایش کلّ ظرف $۷۵\div\frac{۳}{۵}=\frac{\cancel{۷۵}^{۲۵}}{۱}\times\frac{۵}{\cancel{۳}_{۱}}=۱۲۵$

درس چهارم: محاسبات با کسر

برای محاسبه ی حاصل کسرهایی که صورت و مخرج آن ها دارای عملیات ریاضی است، مانند مثال زیر عمل می کنیم:

مثال: حاصل عبارت مقابل را حساب کنید.

$$\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}=$$

پاسخ:

$$\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۸}{۱۲}-\frac{۳}{۱۲}}{\frac{۳}{۶}+\frac{۲}{۶}}=\frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۵}{۶}}=\frac{۵}{۱۲}\div\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

مثال: حاصل $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}$ را به سه روش حساب کنید.

۱- با مخرج مشترک گرفتن
۲- با محور
۳- با رسم شکل

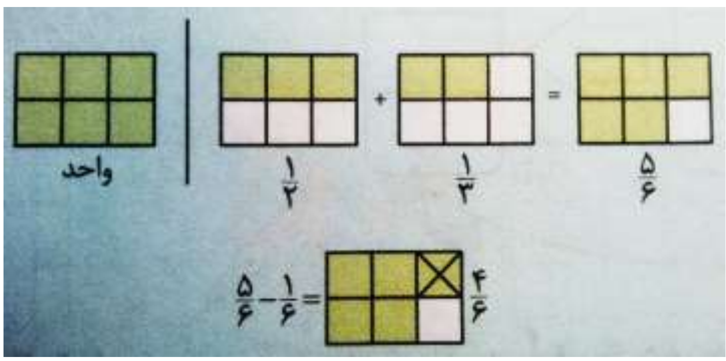
پاسخ:

۱- با مخرج مشترک گرفتن

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}=\frac{۳}{۶}+\frac{۲}{۶}-\frac{۱}{۶}=\frac{۴}{۶}$$

۲- با محور

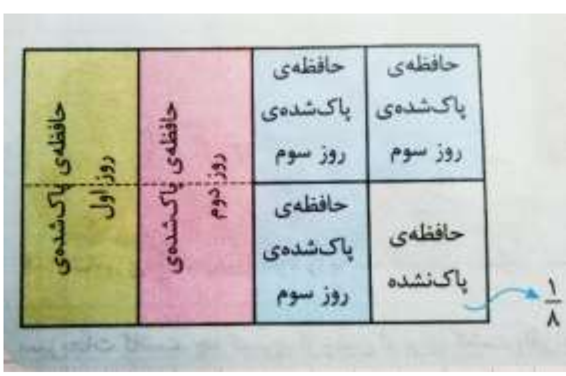
۳- با رسم شکل: (می دانیم: $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$)



گاهی اوقات مسئله های مربوط به کسرها، با رسم شکل ساده تر حل می شوند. به مثال زیر دقت کنید:

مثال: یک ویروس رایانه، حافظه ی رایانه ای را پاک می کند. این ویروس روز اول $\frac{۱}{۴}$ حافظه و روز دوم $\frac{۱}{۳}$ حافظه ی باقی مانده از روز اول و روز سوم $\frac{۳}{۴}$ باقی مانده از روزهای قبل را پاک می کند. حساب کنید پس از ۳ روز هنوز چه کسری از حافظه پاک نشده است؟

پاسخ:



هنوز $\frac{۱}{۸}$ حافظه پاک نشده است.

محاسبات با کسر ۲

در انجام عملیات ریاضی باید به ترتیب و اولویت عملیات داده شده دقت کنیم. به طور کلی در یک عبارت محاسباتی، باید به ترتیب زیر عمل کنیم:

۱- محاسبه ی پرانتز ها از داخلی ترین آن ها
۲- انجام ضرب یا تقسیم، هر کدام که از چپ به راست عبارت، زودتر دیده شد.
۳- انجام جمع یا تفریق، هر کدام که از چپ به راست عبارت، زودتر دیده شد.

مثال ۱: به مثال های زیر دقت کنید.

$$\text{الف)}\quad \left(۳\frac{۳}{۵}-۲\frac{۱۱}{۱۵}\right)\div ۱\frac{۳}{۱۰}=$$

در ابتدا، حاصل عبارت داخل پرانتز را حساب کرده و عدد به دست آمده را بر $۱\frac{۳}{۱۰}$ تقسیم می کنیم.

$$\text{محاسبه‌ی داخل پرانتز :}\quad ۳\frac{۳}{۵}-۲\frac{۱۱}{۱۵}=۱\frac{۳\times۳}{۵\times۳}-\frac{۱۱}{۱۵}=۱\frac{۹}{۱۵}-\frac{۱۱}{۱۵}=\frac{۲۴}{۱۵}-\frac{۱۱}{۱۵}=\frac{۱۳}{۱۵}$$

$$\text{محاسبه‌ی کلّ عبارت :}\quad \overbrace{\cancel{\left(۳\frac{۳}{۵}-۲\frac{۱۱}{۱۵}\right)}}^{\frac{۱۳}{۱۵}}\div ۱\frac{۳}{۱۰}=\frac{۱۳}{۱۵}\div\frac{۱۳}{۱۰}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۳}}}{\underset{۳}{\cancel{۱۵}}}\times\frac{\overset{۲}{\cancel{۱۰}}}{\underset{۱}{\cancel{۱۳}}}=\frac{۲}{۳}$$

$$\text{ب)}\quad \frac{۹}{۱۱}-\frac{۹}{۱۱}\div\frac{۱۵}{۲۲}=$$

در این عبارت، در ابتدا باید حاصل تقسیم $\frac{۹}{۱۱}$ بر $\frac{۱۵}{۲۲}$ را به دست آوریم. دقت داشته باشید که در هر عبارت محاسباتی، باید حاصل ضرب و تقسیم را زودتر از جمع و تفریق به دست آوریم.

$$\text{محاسبه‌ی کلّ عبارت :}\quad \frac{۹}{۱۱}-\frac{\overset{۱}{\cancel{۹}}}{\underset{۱}{\cancel{۱۱}}}\times\frac{\overset{۲}{\cancel{۲۲}}}{\underset{۳}{\cancel{۲۷}}}=\frac{۹\times۳}{۱۱\times۳}-\frac{۲\times۱۱}{۳\times۱۱}=\frac{۲۷}{۳۳}-\frac{۲۲}{۳۳}=\frac{۵}{۳۳}$$

نکته: برای محاسبه ی عبارت هایی مانند $\dfrac{\dfrac{\bigcirc}{\square}}{\dfrac{\triangle}{\diamond}}$ کافی است حاصل تقسیم $\dfrac{\bigcirc}{\square} \div \dfrac{\triangle}{\diamond}$ را به دست آوریم.

$$\text{ج)}\quad \frac{\frac{9}{20}}{\frac{3}{25}} = \frac{9}{20} \div \frac{3}{25} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{20}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{15}{4}$$

برای حل چنین سؤالاتی، ابتدا باید عبارت های موجود در صورت و مخرج کسر را به طور جداگانه محاسبه کنیم، سپس با استفاده از نکته ی قبل، حاصل کل عبارت را به دست آوریم.

$$\text{د)}\quad \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{14}}{\frac{13}{14} - \frac{5}{7}} =$$

محاسبه‌ی کل عبارت: $\dfrac{\frac{1\times2}{7\times2} + \frac{3}{14}}{\frac{13}{14} - \frac{5\times2}{7\times2}} = \dfrac{\frac{2}{14} + \frac{3}{14}}{\frac{13}{14} - \frac{10}{14}} = \dfrac{\frac{5}{14}}{\frac{3}{14}} = \dfrac{5}{14} \div \dfrac{3}{14} = \dfrac{5}{\underset{1}{\cancel{14}}} \times \dfrac{\overset{1}{\cancel{14}}}{3} = \dfrac{5}{3}$

$$\text{ه)}\quad \frac{5\frac{1}{12} - 3\frac{14}{15}}{4\frac{2}{15} - 3\frac{3}{20}} = \frac{2\frac{1\times5}{12\times5} - \frac{14\times4}{15\times4}}{1\frac{2\times4}{15\times4} - \frac{3\times3}{20\times3}} = \frac{2\frac{5}{60} - \frac{56}{60}}{1\frac{8}{60} - \frac{9}{60}} = \frac{\frac{125}{60} - \frac{56}{60}}{\frac{68}{60} - \frac{9}{60}} = \frac{\frac{69}{60}}{\frac{59}{60}} = \frac{69}{60} \div \frac{59}{60} = \frac{69}{59} = 1\frac{10}{59}$$

مقایسه ی کسرها

در مقایسه ی کسرها، سه حالت زیر اتفاق می افتد:

حالت اول: در کسرهایی که مخرج آن ها مساوی است، کسری بزرگ تر است که صورت آن بزرگ تر باشد.

$\frac{۱۲}{۱۳} > \frac{۹}{۱۳}$ $\qquad$ $\frac{۳}{۷} < \frac{۵}{۷}$

حالت دوم: در کسرهایی که صورت آن ها مساوی است، کسری بزرگ تر است که مخرج آن کوچک تر باشد.

$\frac{۱۵}{۷} > \frac{۱۵}{۲۰}$ $\qquad$ $\frac{۳}{۵} < \frac{۳}{۲}$

حالت سوم: برای مقایسه ی کسرهایی که نه صورت و نه مخرج های برابر دارند، ابتدا هر دو کسر را هم مخرج یا هم صورت می کنیم، سپس کسرها را مانند حالت اول یا دوم مقایسه می کنیم.

مثال ۲:

الف) $\frac{۲۵}{۱۸} \bigcirc \frac{۱۷}{۱۲} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{۲۵\times۲}{۱۸\times۲} \bigcirc \frac{۱۷\times۳}{۱۲\times۳} \rightarrow \frac{۵۰}{۳۶} < \frac{۵۱}{۳۶}$

مضرب‌های ۱۸: ۱۸ , ۳۶ , ۵۴ , ... $\qquad$ مضرب‌های ۱۲: ۱۲ , ۲۴ , ۳۶ , ۴۸ , ...

ب) $\frac{۶}{۱۷} \bigcirc \frac{۴}{۱۳} \xrightarrow{\text{صورت مشترک}} \frac{۶\times۲}{۱۷\times۲} \bigcirc \frac{۴\times۳}{۱۳\times۳} \rightarrow \frac{۱۲}{۳۴} > \frac{۱۲}{۳۹}$

در این مثال، صورت مشترک گیری ساده تر از مخرج مشترک گیری است، لذا با نوشتن مضرب های ۶ و ۴، کوچک ترین مضرب مشترک آن ها را تعیین می کنیم و بین دو کسر، صورت مشترک می گیریم.

نکته: در مقایسه ی عددهای مخلوط، ابتدا قسمت های صحیح، سپس قسمت های کسری که کوچک تر از واحد هستند را با هم مقایسه می کنیم.

$۷\frac{۳}{۸} < ۷\frac{۳}{۴}$ $\qquad$ $۲\frac{۷}{۱۰} < ۳\frac{۱}{۱۰}$ $\qquad$ $۳\frac{۴}{۵} > ۳\frac{۳}{۵}$

گاهی برای مقایسه ی بعضی از کسرها مانند $\frac{۵}{۱۲}$ و $\frac{۷}{۱۳}$ بهتر است هر کسر را با نصف واحد کامل همان کسر مقایسه کنیم.

در کسر $\frac{۵}{۱۲}$ ، واحد کامل همان $\frac{۱۲}{۱۲}$ است که نصف آن $\frac{۶}{۱۲}$ می شود. عدد $\frac{۵}{۱۲}$ از نصف واحد کامل (یعنی $\frac{۶}{۱۲}$)کوچک تر است. در کسر $\frac{۷}{۱۳}$ ، واحد کامل همان $\frac{۱۳}{۱۳}$ است که نصف آن $\frac{۶/۵}{۱۳}$ می شود. عدد $\frac{۷}{۱۳}$ از نصف واحد کامل (یعنی $\frac{۶/۵}{۱۳}$) بزرگ تر است. چون $\frac{۷}{۱۳}$ از نصف واحد کامل، بزرگ تر و $\frac{۵}{۱۲}$ از نصف واحد کامل، کوچک تر است، پس:

$$\frac{۷}{۱۳} > \frac{۵}{۱۲}$$

مثال ۳: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{۴}{۷} \text{ و } \frac{۷}{۲} \text{ و } \frac{۱۱}{۶} \text{ و } ۱ \text{ و } \frac{۵}{۴} \text{ و } \frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{۳}{۵} \text{ و } ۳\frac{۱}{۳}$$

برای حل چنین سؤالاتی بهتر است در ابتدا عددهای کوچک تر از واحد را جداگانه و عددهای بزرگ تر از واحد را نیز جداگانه مقایسه کنیم.

عددهای کوچک‌تر از واحد: $\frac{۳}{۵},\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۷} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{۳\times۲۱}{۵\times۲۱},\frac{۲\times۳۵}{۳\times۳۵},\frac{۴\times۱۵}{۷\times۱۵} \rightarrow \frac{۶۳}{۱۰۵},\frac{۷۰}{۱۰۵},\frac{۶۰}{۱۰۵}$

$$\frac{۶۰}{۱۰۵} < \frac{۶۳}{۱۰۵} < \frac{۷۰}{۱۰۵} \Rightarrow \frac{۴}{۷} < \frac{۳}{۵} < \frac{۲}{۳}$$

عددهای بزرگ‌تر از واحد: $\cancel{۳\frac{۱}{۳}}\ \frac{۱۰}{۳},\frac{۵}{۴},\frac{۱۱}{۶},\frac{۷}{۲} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{۱۰\times۴}{۳\times۴},\frac{۵\times۳}{۴\times۳},\frac{۱۱\times۲}{۶\times۲},\frac{۷\times۶}{۲\times۶}$

$$\rightarrow \frac{۴۰}{۱۲},\frac{۱۵}{۱۲},\frac{۲۲}{۱۲},\frac{۴۲}{۱۲} \rightarrow \frac{۱۵}{۱۲} < \frac{۲۲}{۱۲} < \frac{۴۰}{۱۲} < \frac{۴۲}{۱۲} \rightarrow \frac{۵}{۴} < \frac{۱۱}{۶} < \frac{۱۰}{۳} < \frac{۷}{۲}$$

بنابراین عددها به ترتیب مقابل هستند.

$$\frac{۴}{۷} < \frac{۳}{۵} < \frac{۲}{۳} < ۱ < \frac{۵}{۴} < \frac{۱۱}{۶} < ۳\frac{۱}{۳} < \frac{۷}{۲}$$

مثال ۴: ایلیا با $\frac{۱}{۳}$ پول خود یک هدیه برای دوستش و با $\frac{۳}{۴}$ باقی مانده ی پولش یک کتاب داستان برای خودش خرید. اگر پس از خرید کتاب و هدیه، ۱۵۰۰ تومان برایش باقی مانده باشد، پول ایلیا چه قدر بوده است؟

روش اول:

باقی‌مانده‌ی پول ایلیا پس از خرید هدیه $۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$

کسری از پولش که برای خرید کتاب هزینه کرد $\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۲}$

کسری از پول که خرج شد $\frac{۳}{۳}-(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۳}-(\frac{۲}{۶}+\frac{۳}{۶})=\frac{۳}{۳}-\frac{۵}{۶}=\frac{۶}{۶}-\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۶}$

پول ایلیا در ابتدا ۹۰۰۰ تومان بوده است. $۱۵۰۰\div\frac{۱}{۶}=۱۵۰۰\times\frac{۶}{۱}=۹۰۰۰$

روش دوم: برای حل این گونه سؤالات بهتر است از روش رسم شکل استفاده کنیم. برای درک بهتر این روش مراحل رسم شکل را به طور جداگانه انجام می دهیم.

کل شکل به ۶ قسمت مساوی تقسیم شد؛ در نتیجه کل پول ایلیا در ابتدا ۹۰۰۰ = ۱۵۰۰ × ۶ تومان بوده است.