



دانشگاه اصفهان  
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

## Design and Analysis of Algorithms

طراحی و تحلیل الگوریتم ها

محمد ملائی

عنوان:

تمرینات ۱

نیم سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۳

نام استاد درس

جعفر الماسی زاده

## تمرین ۱

مسئله کوله پشتی را در نظر بگیرید:  $n$  عنصر با وزن های معلوم  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  و ارزش های معلوم  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  و یک کوله پشتی با ظرفیت  $W$ ، داده شده اند؛ با ارزش ترین زیرمجموعه ای از این عناصر را پیدا کنید که بتوان آن ها را درون کوله پشتی جا داد.

(الف) با تحلیلی ریاضی، کارایی زمانی الگوریتم جستجوی کامل برای مسئله کوله پشتی را با نماد مجانبی بیان کنید.

(ب) برنامه های برای پیاده سازی الگوریتم جستجوی کامل بنویسید. و بزرگترین مقداری از  $n$  را که به ازای آن، رایانه در کمتر از ۱ دقیقه قادر به اجرای برنامه باشد، پیدا کنید.

جواب

مراجع

## تمرین ۲

هر یک از این رابطه‌های بازگشتی را (که در تحلیل کارایی زمانی الگوریتم‌های بازگشتی پیش می‌آیند) با هر روشی که می‌دانید، حل کنید. تعیین مرتبه رشد توابع جواب کافی است.

(الف)

$$T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + d \text{ for } n > 0, \quad T(0) = c$$

(ب)

$$T(n) = n + \max_{1 \leq k \leq n-1} [T(k) + T(n - k)], \text{ for } n > 1, \quad T(1) = 0$$

(پ)

$$T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log n$$

(ت)

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

جواب

مراجع

### تمرین ۳

الف) فرض کنید  $A$  و  $B$ ، دو مجموعه ای باشند هر یک متشکل از  $n$  عدد صحیح که هر یک از آنها در محدوده 1 تا  $2n$  واقع باشد. الگوریتمی را با کارایی زمانی  $O(n)$  توصیف کنید که دو مجموعه  $A$  و  $B$  را به عنوان ورودی بگیرد و تعیین کند که آیا دو مجموعه  $A$  و  $B$  با هم برابر هستند یا خیر؛ یعنی آیا شامل عناصر کاملاً یکسانی (گرچه با ترتیب متفاوت) هستند یا خیر. برنامه‌ای برای پیاده‌سازی الگوریتم بنویسید و با درج شمارنده‌ای (یا شمارنده‌هایی) در آن، تعداد عملیات پایه‌ای الگوریتم را به عنوان تابعی از اندازه دو مجموعه  $A$  و  $B$  محاسبه کنید. با هر یک از مقادیر  $n = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$  آزمایش کنید.

ب) فرض کنید  $A$  و  $B$ ، دو مجموعه‌های باشند هر یک متشکل از  $n$  عدد صحیح که هر یک از آنها در محدوده‌ی 1 تا  $n^4$  واقع باشد. الگوریتمی را با کارایی زمانی  $O(n)$  توصیف کنید که دو مجموعه  $A$  و  $B$  و عدد صحیح  $x$  را به عنوان ورودی بگیرد و تعیین کند که آیا عدد صحیح  $a$  در مجموعه  $A$  و عدد صحیح  $b$  در مجموعه  $B$  وجود دارند که رابطه  $a + b = x$  برقرار باشد یا خیر.

برنامه‌ای برای پیاده‌سازی الگوریتم بنویسید و با درج شمارنده‌ای (یا شمارنده‌ایی) در آن، تعداد عملیات پایه‌ای الگوریتم را به عنوان تابعی از اندازه دو مجموعه  $A$  و  $B$  محاسبه کنید. با هر یک از مقادیر  $n = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$  آزمایش کنید.

جواب

مراجع

## تمرین ۴

الف) با تحلیل ریاضی، مشخص شده است که اگر اندازه یک جدول درهم‌سازی بسته  $n$  باشد و اگر تعداد کلیدها  $m$  باشد و اگر  $\alpha = \frac{n}{m}$  باشد، آنگاه میانگین تعداد مقایسه‌های لازم برای جستجوهای ناموفق (یا درجها) در چنین جدولی با راهبرد کاوش خطی، تقریباً  $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2})$  خواهد بود.

برنامه‌ای بنویسید که با آن بتوان یک جدول درهم‌سازی بسته با اندازه  $n$  ساخت و سپس با راهبرد کاوش خطی  $\frac{n}{2}$  عدد صحیح (کلید) تصادفی را در جدول درج کرد. سپس شمارنده‌ای (یا شمارنده‌هایی) را در برنامه درج کنید و با آن، میانگین تعداد مقایسه‌هایی را که برای جستجوهای ناموفق (درجها) در جدول لازم است محاسبه کنید. آزمایش را با هر یک از مقادیر  $n = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$  انجام دهید و نتایج تجربی را با نتایج نظری مقایسه کنید.

ب) این فرضیه مطرح شده است که تعداد مقایسه‌های لازم برای درج  $m$  کلید تصادفی با راهبرد کاوش خطی در یک جدول درهم‌سازی بسته با اندازه  $m$ ، تقریباً برابر با  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}(m^{\frac{3}{2}})$  است. با نوشتن برنامه‌ای، درستی این ادعا را تحقیق کنید.

جواب

مراجع

## تمرین ۵

فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای بزرگ از  $n$  عنصر باشد؛ آنقدر بزرگ که نتوان آن را به طور کامل در حافظه اصلی نگهداری کرد و لازم باشد که آن را روی دیسک نگهداری کرد. یک راه برای مرتب کردن چنین مجموعه‌ای، طراحی گونه‌ای از الگوریتم مرتبسازی ادغامی است: مجموعه  $A$  را به  $k$  مجموعه کوچک‌تر  $A_1, A_2, \dots, A_k$  تقسیم کنید، هر یک از آن مجموعه‌ها را به طور بازگشتی مرتب کنید و سپس همه مجموعه‌های مرتب را با هم ادغام کنید تا مجموعه مرتب اصلی تشکیل شود.

**الف)** فرض کنید اندازه هر صفحه دیسک  $b$  باشد و اندازه حافظه اصلی  $m$  باشد. با یک مثال توضیح دهید که مقدار  $k$  (برحسب  $b$  و  $m$ ) چند باشد تا بتوان با  $O(\frac{n}{b})$  عملیات انتقال صفحه (خواندن یک صفحه از دیسک یا نوشتن یک صفحه روی دیسک)،  $k$  مجموعه مرتب را با هم ادغام کرد.

**ب)** با تشکیل و حل یک رابطه بازگشتی برای تعداد عملیات انتقال صفحه، ثابت کنید که الگوریتم مرتبسازی ادغامی مجموعه  $A$  را با  $O((\frac{n}{b}) \frac{\log(\frac{n}{b})}{\log(\frac{m}{b})})$  عملیات انتقال صفحه مرتب میکند.

جواب

مراجع