به نام خدا

دانشکده ریاضی و آمار

علوم کامپیوتر
نیم‌سال دوم ۰۲-۰۳
مبانی منطق

اعضای گروه: محمد ملائی - داوود نصرتی امیرآبادی - حسنا سلطان‌الکتابی - فرزانه سلیمی - یگانه رستگاری

تمرین ۱

با استفاده از استقرای ساختاری ثابت کنید:

۱. در همه فرمول‌ها دنباله‌ای از نمادها به صورت $\wedge\wedge$ ظاهر نمی‌شود.

۲. در همه‌ی فرمول‌ها حداقل یک اتم رخ داده است.

جواب

۱:

در ابتدا این خاصیت را برای گزاره‌های اتمی ثابت می‌کنیم. به عبارت دیگر باید نشان دهیم هیچ گزاره‌ای چون $p \in \mathscr{P}$ وجود ندارد که دنباله‌ای چون $\wedge\wedge$ در آن ظاهر شود.
در واقع چون $\wedge$ عملگر بولی است، باید در طرفین آن گزاره های اتمی (یا فرمول ها) قرار گیرند. به دیگر سخن، در نمایش گرافی این فرمول، عملگر $\wedge$ ریشه درخت (یا زیردرختی) است که فرزندان راست و چپ آن گزاره‌ها (یا فرمول‌ها) هستند.
مشخص است که به ازای هیچ گزاره‌ی اتمی‌ای چون $p \in \mathscr{P}$ ، عبارت $p \wedge\wedge$ این شرط را دارا نیست و در دو طرف آن گزاره‌های اتمی (یا فرمول‌ها) قرار نگرفته اند. پس حکم درباره‌ی گزاره‌های اتمی ثابت است. حال گزاره‌ی ذیل را ثابت می‌کنیم:
اگر $A \in \mathscr{F}$ یک فرمول باشد که در آن $\wedge\wedge$ ظاهر نشده است، در $\neg A$ نیز ظاهر نخواهد شد.
در واقع با توجه به اینکه علامت نقیض صرفا در ریشه فرمول ظاهر می‌شود، تغییری در سلسله مراتب ادات ایجاد نکرده و منجر به ظاهر شدن $\wedge\wedge$ در فرمول $\neg A$ نمی‌شود.
در نهایت گزاره‌ی « اگر $\wedge\wedge$ در فرمول A و فرمول B ظاهر نشود، آنگاه در فرمول $A * B$ که $* \in \{\wedge, \vee, \uparrow, \downarrow, \oplus \ \rightarrow, \leftrightarrow\}$ نیز ظاهر نخواهد » را اثبات می‌کنیم.
از آنجایی که این خاصیت در هیچ‌کدام از گزاره‌های A و B ظاهر نشده، تنها حالت ممکن این است که فرمول ما به صورت $A \wedge B$ باشد و در گراف مربوط به هر فرمول، یا در سمت چپ ترین برگ B عملگر $\wedge$ یا در سمت راست ترین برگ A عملگر $\wedge$ جای خوش کرده باشد. که البته مثل روز روشن است که اولا $\wedge$ علمگری بولی است و محتاج دو فرزند، و دوما در برگ های یک درخت فقط گزاره‌ها قرار می‌گیرند و نه ادات بولی. پس این فرض نیز باطل و حکم ثابت است.
در نهایت با اثبات سه گزاره‌ی فوق به این نتیجه می‌رسیم که $\wedge\wedge$ در هیچ فرمولی در منطق گزاره‌ای پدیدار نخواهد شد. کسی چه می‌داند؟ شاید منطقی وجود دارد که $\wedge\wedge$ در آن چشمک می‌زند.

۲:

همانند تمرین قبل، نشان می‌دهیم که همه‌ی گزاره‌های اتمی دارای خاصیت فوق هستند. در واقع در هر گزاره‌ی اتمی‌ای مثل $p \in \mathscr{P}$ خود p یک اتم است. پس حداقل یک اتم در گزاره‌های اتمی وجود دارد و حکم اول ثابت است.
حال اثبات می‌کنیم که اگر در فرمولی چون $A \in \mathscr{F}$ حداقل یک اتم رخ داده‌است، در $\neg A$ نیز همین‌گونه است. چگونه ثابت می‌کنیم؟ متاسفانه در زمان طرح سوال هنوز با مفهوم $Sub(A)$ آشنا نشده بودیم، ولیکن ابزاری است بس کارا در جهت اثبات گزاره‌ی

فوق. امیدواریم تقلب محسوب نشود :)
فرض کنیم حداقل یک اتم در A وجود دارد. یعنی $p \in Sub(A)$. از طرفی داریم:

$$Sub(\neg A) = Sub(A) \cup \{\neg A\}$$

چون $p \in Sub(A)$ پس p در اجتماع $Sub(A)$ با مجموعه‌ای دیگر نیز حضور دارد، یعنی $p \in Sub(\neg A)$. در نتیجه در نقیض A نیز حداقل یک اتم وجود دارد.

صورت گزاره‌ی آخری که اثباتش حسن ختامی است بر اثبات ما، به شرح زیر است:
اگر A و B دو فرمول باشند که در هر کدام حداقل یک اتم وجود داشته باشد، آنگاه در فرمول $A * B$، $* \in \{\wedge, \vee, \uparrow, \downarrow, \oplus \ \rightarrow, \leftrightarrow\}$ نیز حداقل یک اتم وجود دارد.
خب، دست به کار شویم. می‌دانیم که حداقل یک اتم مانند $p \in \mathscr{P}$ وجود دارد به قسمی که $p \in Sub(A)$ و همچنین اتمی مانند $q \in \mathscr{P}$ وجود دارد به صورتی که $q \in Sub(B)$. البته در بدترین شرایط $p = q$ است و در هر دو فرمول، حداقل یک اتم مانند p وجود دارد. با توجه به فرضیات و اینکه $\mathbf{Sub(A * B) = Sub(A) \cup Sub(B) \cup \{A * B\}}$ داریم $p \in Sub(A * B)$ چرا که اتم p در حداقل یکی از زیرفرمول ها حضور دارد، پس در نتیجه در اجتماع آن زیرفرمول با دیگر مجموعه ها نیز حضور خواهد داشت. پس گزاره سوم اثبات شده و حکم کلی ثابت است.

تمرین ۲

در فرمول‌های زیر تا جایی که ابهام نباشد پرانتزها را حذف کنید:

۱. $((p \oplus q) \uparrow (\neg p)) \leftrightarrow (\neg(r \rightarrow (\neg p)))$

۲. $(((\neg(\neg p)) \vee p) \wedge (\neg p))$

جواب

الف

قوانین پرانتزگذاری به صورت زیرند:

۱. حذف پرانتزهای بیرونی فرمول

۲. حذف پرانتزهای بیرونی فرمول شامل نقیض

۳. قواعد چسبندگی: $\neg > \wedge, \uparrow > \vee, \downarrow > \rightarrow > \leftrightarrow, \oplus$

۱:

$$\begin{aligned}((p \oplus q) \uparrow (\neg p)) \leftrightarrow (\neg(r \rightarrow (\neg p))) &\overset{(1)}{\equiv} (p \oplus q) \uparrow (\neg p) \leftrightarrow \neg(r \rightarrow (\neg p)) \\ &\overset{(2)}{\equiv} (p \oplus q) \uparrow \neg p \leftrightarrow \neg(r \rightarrow \neg p)\end{aligned}$$

۲:

$$\begin{aligned}(((\neg(\neg p)) \vee p) \wedge (\neg p)) &\overset{(1)}{\equiv} ((\neg(\neg p)) \vee p) \wedge (\neg p) \\ &\overset{(2)}{\equiv} (\neg\neg p \vee p) \wedge \neg p\end{aligned}$$

تمرین ۳

ثابت کنید برای هر فرمول مانند $A \in \mathscr{F}$ داریم: $Sub(A)$ متناهی است.

جواب

در ابتدا ثابت می‌کنیم که خاصیت فوق برای هر گزاره‌ی اتمی صادق است. اگر p گزاره‌ای اتمی باشد، می‌دانیم $Sub(p) = \{p\}$. پس در نتیجه تعداد اعضای این زیرفرمول متناهی است. یعنی $|Sub(A)| = |\{p\}| = 1$

اکنون باید تحقیق کنیم که به ازای فرمولی چون $A \in \mathscr{F}$ ، اگر $Sub(A)$ متناهی باشد، آنگاه $Sub(\neg A)$ نیز متناهی است. فرضا تعداد زیرفرمول های A متناهی است. یعنی $|Sub(A)| = n, n \in \mathbb{N}$. حال داریم:

$$Sub(\neg A) = Sub(A) \cup \{\neg A\}$$

. پس

$$|Sub(\neg A)| = n + 1$$

که عددی است متناهی. در نتیجه حکم دوم نیز ثابت است.

حال به اثبات حکم سوم می‌پردازیم: اگر $A, B \in \mathscr{F}$ فرمول هایی باشند که زیرفرمول‌های آنها متناهی باشد، آنگاه

$$Sub(A * B) = Sub(A) \cup Sub(B) \cup \{A * B\}$$

نیز متناهی است.
فرض کنیم

$$|Sub(A)| = n$$

$$|Sub(B)| = m$$

به صورتی که $m, n \in \mathbb{N}$. در نتیجه

$$|Sub(A * B)| \leq |n| + |m| + |1|$$

چرا که در بدترین حالت، A و B هیچ اشتراکی ندارند و تعداد اعضای اجتماع آنها برابر با مجموع اعضای تک‌تک آنهاست. از آنجایی که $m + n + 1$ نیز متناهی است، پس $Sub(A * B)$ نیز متناهی خواهد بود و حکم ثابت است.

پس صورت کلی صادق و به ازای هر فرمول $A \in \mathscr{F}$ داریم: $Sub(A)$ متناهی است.