

برای اثبات این قسمت، از مدل نقض استفاده می‌کنیم. به همین منظور ابتدا با روش تابلو اطلاعاتی به دست آورده و سپس از آنها در ساخت مدل نقض بهره می‌جویم.

(۱)	$\forall x (p(x) \vee q(x))$	ریشه
(۲)	$\neg(\forall x p(x) \vee q(x))$	ریشه
(۳)	$\neg p(a_1)$	$a_1 \in C$ جدید و $\forall F$
(۴)	$\neg q(a_2)$	$a_2 \in C$ جدید و $\forall F$
(۵)	$p(a_1) \vee p(a_1)$	$\forall T \forall a_1 \in C$
(۶)	$p(a_1)$	
(۷)	$p(a_2) \vee q(a_2)$	$\forall T \forall a_2 \in C$
	$\otimes$ ۳ و ۶	
(۸)	$p(a_2)$	
	$q(a_2)$	
	$\otimes$ ۴ و ۸	

به نظر می‌رسد که تابلو تا همین مرحله اطلاعات خوبی را در اختیار ما قرار داده باشد. حال به تشکیل مدل نقض برای تنها شاخه‌ی باز تابلو می‌پردازیم.

$$\mathcal{I} = (D, \{p^{\mathcal{I}}, q^{\mathcal{I}}\})$$

$$D = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

$$p^{\mathcal{I}} = \{\alpha_2\}$$

$$q^{\mathcal{I}} = \{\alpha_1\}$$

حال باید ثابت کنیم هنگامی که مقدم صادق است ( $\mathcal{I} \models \forall x (p(x) \vee q(x))$ ) تالی کاذب است ( $\mathcal{I} \not\models \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$ ).

ابتدا با استفاده از صدق تارسکی بررسی می‌کنیم ( $\mathcal{I} \models \forall x (p(x) \vee q(x))$ )<sup>?</sup> صدق تارسکی بیان می‌کند که برای درست بودن این عبارت، لازم است تا نشان دهیم برای تک تک اعضای دامنه صادق است.

میدانیم که  $\alpha_1 \in q^{\mathcal{I}}$  پس  $\mathcal{I} \models p(x) \vee q(x)$   
 $\sigma[x \leftarrow \alpha_1]$

میدانیم که  $\alpha_2 \in p^{\mathcal{I}}$  پس  $\mathcal{I} \models p(x) \vee q(x)$   
 $\sigma[x \leftarrow \alpha_2]$

در نتیجه برای هر  $\alpha_i \in D$  داریم  $\mathcal{I} \models p(x) \vee q(x)$  پس بنابر صدق تارسکی  $\mathcal{I} \models_{\sigma} \forall x (p(x) \vee q(x))$

حال باید ثابت کنیم  $\mathcal{I} \not\models \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$

میدانیم  $\alpha_1 \notin p^{\mathcal{I}}$  پس  $\mathcal{I} \not\models p(x)$   
 $\sigma[x \leftarrow \alpha_1]$

میدانیم  $\alpha_2 \notin q^{\mathcal{I}}$  پس  $\mathcal{I} \not\models q(x)$   
 $\sigma[x \leftarrow \alpha_2]$

پس نتیجه می‌گیریم که عطف بالا صادق نیست و  $\mathcal{I} \not\models \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$  در نتیجه:

$$\forall x (p(x) \vee q(x)) \not\models \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$$