به نام خدا

دانشکده ریاضی و آمار

علوم کامپیوتر
نیم‌سال دوم ۰۲-۰۳
مبانی منطق

اعضای گروه: محمد ملائی - داوود نصرتی امیرآبادی - حسنا سلطان‌الکتابی - فرزانه سلیمی - یگانه رستگاری

تمرینات سری ۵

تمرین ۱

فرض کنید A یک فرمول بسته باشد و $\mathscr{I}$ تعبیری برای A باشد و $\sigma_1 : \mathscr{V} \to \mathscr{D}$ و $\sigma_2 : \mathscr{V} \to \mathscr{D}$ دو تخصیص باشند، ثابت کنید:

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} A \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} A$$

جواب ابتدا پایه‌های استقرا را در نظر می‌گیریم:

- فرض کنید A یک فرمول اتمی بسته باشد و A' تنها متغیر آزادش x باشد به طوری که $A = \forall x\, A'(x)$. طبق تعریف صدق تارسکی :

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \forall x\, A'(x) \Longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1'}{\models} A' \textit{ for all } d \in D \,, \sigma_1' := \sigma_1[x \leftarrow d] \qquad (۱)$$

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} \forall x\, A'(x) \Longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_2'}{\models} A' \textit{ for all } d \in D \,, \sigma_2' := \sigma_2[x \leftarrow d] \qquad (۲)$$

از آنجایی که x تنها متغیر آزاد A' است و توسط σ' با d جایگزین می‌شود، مقدار این دو تابع در x یکسان است و از آنجا که میدانستیم σ_1 و σ_2 تنها در x می‌توانند تفاوت داشته باشند و چون طبق (1) و (2) نشان دادیم در x نیز مقدارشان یکسان است ، نتیجه می‌گیریم $\sigma_1 = \sigma_2$ و :

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} A \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} A$$

- اگر $A = \exists x A'(x)$ باشد، همانند قسمت قبل می‌توانیم درستی حکم را نشان دهیم.

حالا طبق استقرای ساختاری فرض می‌کنیم حکم برای A و B برقرار باشد نشان می‌دهیم برای $\neg A$ و $A * B$ نیز برقرار است:

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \neg A \leftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\not\models} A \leftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\not\models} A \leftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} \neg A \qquad (۳)$$

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} A * B \leftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} A * \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} B \leftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} A * \mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} B \leftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} A * B \qquad (۴)$$

حالا کافیست با استفاده از استقرا روی تعداد سورها حکم را ثابت کنیم تا اثبات به پایان برسد:

فرض می کنیم A یک فرمول بسته باشد و $\{x_1, \dots x_n\}$ متغیرهای آزاد A' باشند به طوری که : $A = \forall x_n \dots \forall x_1 A'(x_1, \dots, x_n)$
با فرض اینکه حکم برای $n-1$ سور برقرار است اثبات را انجام می‌دهیم:

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \forall x_n \dots \forall x_1 A' \Longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1'}{\models} \forall x_{n-1} \dots \forall x_1 A' \textit{ for all } d \in D \,, \sigma_1' := \sigma_1[x_n \leftarrow d] \qquad (۵)$$

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} \forall x_n \dots \forall x_1 A' \Longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_2'}{\models} \forall x_{n-1} \dots \forall x_1 A' \textit{ for all } d \in D \,, \sigma_2' := \sigma_2[x_n \leftarrow d] \qquad (۶)$$

این قسمت نیز به طور مشابه اثبات می‌شود چرا که اگر $\forall x_{n-1} \dots \forall x_1 A'$ را A'' بنامیم، داریم:

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \forall x_n A'' \Longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1'}{\models} A'' \textit{ for all } d \in D \,, \sigma_1' := \sigma_1[x_n \leftarrow d] \qquad (۷)$$

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} \forall x_n A'' \Longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_2'}{\models} A'' \textit{ for all } d \in D \,, \sigma_2' := \sigma_2[x_n \leftarrow d] \qquad (۸)$$

این بخش قبلا اثبات شده است بنابراین اثبات کامل و حکم همیشه برقرار است.

تمرین ۲

فرض کنید $FV(A) = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $\mathscr{I}$ تعبیری برای A باشد. ثابت کنید:

- برای تخصیص σ : $\mathscr{I} \models \exists x_1 \dots \exists x_n A \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} A$
- برای هر تخصیص σ : $\mathscr{I} \models \forall x_1 \dots \forall x_n A \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} A$

جواب از سمت چپ این هم ارزی شروع می‌کنیم و نشان می‌دهیم اگر سمت چپ درست باشد، سمت راست این هم‌ارزی نیز درست خواهد بود. طبق صدق تارسکی داریم:

$$\mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} \exists x_1 \dots \exists x_n A \Longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \exists x_2 \dots \exists x_n A \; for\ some\ d_1, \sigma_1 := \sigma[x_1 \leftarrow d_1] \tag{۹}$$

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \exists x_2 \dots \exists x_n A \Longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \exists x_3 \dots \exists x_n A \; for\ some\ d_2, \sigma_2 := \sigma_1[x_2 \leftarrow d_2] \tag{۱۰}$$

با ادامه این روند می‌توانیم σ' را به صورت $\sigma'(x_i) = d_i$ تعریف کنیم و چون چنین d_i هایی وجود دارند می‌توانیم بگوییم:

$$\mathscr{I} \models \exists x_1 \dots \exists x_n A \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma'}{\models} A \tag{۱۱}$$

حالا با برعکس کردن این روند می‌توانیم طرف دیگر این هم‌ارزی را اثبات کنیم:

$$\mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} A, d_n = \sigma(x_n) \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_n}{\models} A \; for\ d_n, \sigma_n := \sigma[x_n \leftarrow d_n] \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_n}{\models} \exists x_n A \tag{۱۲}$$

با ادامه این روند نیز می‌تواینم نشان دهیم:

$$\mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} A \longleftrightarrow \mathscr{I} \models \exists x_1 \dots \exists x_n A \tag{۱۳}$$

برای قسمت دوم تمرین نیز داریم:

$$\mathscr{I} \models \forall x_1 \dots \forall x_n A \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} A \tag{۱۴}$$

با توجه به صدق تارسکی برای هر تخصیصی چون σ_1 داریم:

$$\mathscr{I} \models \forall x_1 \dots \forall x_n A \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \forall x_2 \dots \forall x_n A,\ \sigma_1 := \sigma[x_1 \leftarrow d] \; for\ all\ d \in D \tag{۱۵}$$

پس عضوی از D مانند d_1 را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و داریم:

$$d_1 \in D : \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \forall x_2 \dots \forall x_n A \tag{۱۶}$$

در مرحله بعدی خواهیم داشت:

$$d_1, d_2 \in D : \mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} \forall x_3 \dots \forall x_n A \tag{۱۷}$$

این عملیات را تا آخر ادامه می‌دهیم تا به $\mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} A$ برسیم. یعنی:

$$d_1, \dots, d_n \in D : \mathscr{I} \underset{\sigma_n}{\models} A \tag{۱۸}$$

چون $d_1, \dots, d_n$ را به دلخواه انتخاب کردیم، این حکم برای هر σ ای برقرار است.
برای حل قسمت بازگشت این هم‌ارزی نیز، با توجه به اینکه تعبیر فوق برای هر تخصیصی برقرار است، در هر مرحله می‌توانیم به دلخواه یک عضو مانند $d_i \in D$ انتخاب کنیم. همچون قسمت قبل می‌توانیم این تخصیص را با صور عمومی نمایش دهیم. این کار را برای تمام متغیرهای موجود در فرمول A انجام می‌دهیم تا سرانجام همچون قسمت قبل به

$$\mathscr{I} \models \forall x_1 \dots \forall x_n A \tag{۱۹}$$

دست یابیم.