به نام خدا

علوم کامپیوتر
نیم‌سال دوم ۰۲-۰۳
مبانی منطق

دانشکده ریاضی و آمار

اعضای گروه: محمد ملائی - داوود نصرتی امیرآبادی - حسنا سلطان‌الکتابی - فرزانه سلیمی - یگانه رستگاری

تمرین ۱

ثابت کنید:

۱. اگر $A \equiv B$ آنگاه $\neg A \equiv \neg B$

۲. اگر $A \equiv A'$ و $B \equiv B'$ آنگاه $A * B \equiv A' * B'$ که در آن $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

۳. تعریفی استقرایی برای جانشینی $B\{A \leftarrow A'\}$ ارائه دهید. (با استقرا روی فرمول B)

جواب

۱:

میدانیم که $A \equiv B$ نمادی است در فرازبان و معادل با این است که عبارت زیر به ازای هر تعبیری همچون $\mathscr{I}$ برقرار باشد:

$$v_{\mathscr{I}}(A) = v_{\mathscr{I}}(B)$$

از طرفی میدانیم که به ازای هر تعبیر داریم:

$$v_{\mathscr{I}}(\neg A) = 1 - v_{\mathscr{I}}(A)$$
$$v_{\mathscr{I}}(\neg B) = 1 - v_{\mathscr{I}}(B)$$

و چون طبق فرض داریم $v_{\mathscr{I}}(A) = v_{\mathscr{I}}(B)$ پس دو عبارت فوق برابرند و $v_{\mathscr{I}}(\neg A) = v_{\mathscr{I}}(\neg B)$ یا

$$\neg A = \neg B$$

۲:

طبق فرض مسئله داریم $A \equiv A'$ و $B \equiv B'$ که یعنی:

$$v_{\mathscr{I}}(A) = v_{\mathscr{I}}(A')$$
$$v_{\mathscr{I}}(B) = v_{\mathscr{I}}(B')$$

- برای $\wedge$ داریم:

$$\begin{aligned} v_{\mathscr{I}}(A \wedge B) &= v_{\mathscr{I}}(A) \cdot v_{\mathscr{I}}(B) \\ &= v_{\mathscr{I}}(A') \cdot v_{\mathscr{I}}(B') \\ &= v_{\mathscr{I}}(A' \wedge B') \end{aligned}$$

در نتیجه ثابت شد که $A \wedge B \equiv A' \wedge B'$ و حکم ثابت است.

- برای $\vee$ داریم:

$$
\begin{aligned}
v_{\mathscr{I}}(A \vee B) &= v_{\mathscr{I}}(A) + v_{\mathscr{I}}(B) - v_{\mathscr{I}}(A) \cdot v_{\mathscr{I}}(B) \\
&= v_{\mathscr{I}}(A') + v_{\mathscr{I}}(B') - v_{\mathscr{I}}(A') \cdot v_{\mathscr{I}}(B') \\
&= v_{\mathscr{I}}(A' \vee B')
\end{aligned}
$$

که یعنی $A \vee B \equiv A' \vee B'$ و حکم ثابت است.

- برای $\rightarrow$ داریم:

$$
\begin{aligned}
v_{\mathscr{I}}(A \rightarrow B) &= v_{\mathscr{I}}(\neg A \vee B) \\
&= 1 - v_{\mathscr{I}}(A) + v_{\mathscr{I}}(B) - (1 - v_{\mathscr{I}}(A)) \cdot v_{\mathscr{I}}(B) \\
&= 1 - v_{\mathscr{I}}(A') + v_{\mathscr{I}}(B') - (1 - v_{\mathscr{I}}(A')) \cdot v_{\mathscr{I}}(B') \\
&= v_{\mathscr{I}}(\neg A' \vee B') \\
&= v_{\mathscr{I}}(A' \rightarrow B')
\end{aligned}
$$

پس در نتیجه $A \rightarrow B \equiv A' \rightarrow B'$ و حکم ثابت است.

پس در نتیجه حکم به صورت کلی برای سه عملگر فوق ثابت میباشد.

۳:

پایه استقرا: فرمول B گزاره اتمی است، پس A همان B است. در این صورت B' همان A' است. از آنجایی که $A \equiv A'$ پس $B \equiv B'$.
گام استقرا: فرض کنید $B = \neg C$. از اینکه $A \in sub(B)$ نتیجه میشود یا A همان B است و یا $A \in sub(C)$. در حالت اول B' همان A' است و در نتیجه به وضوح $B \equiv B'$. در حالت دوم بنا بر فرض استقرا $C' \equiv C\{A \leftarrow A'\}$ پس بنابر تمرین ۱ که در بالا حل شد:

$$\neg C' \equiv \neg C\{A \leftarrow A'\}$$

در نتیجه $B' \equiv B\{A \leftarrow A'\}$

فرض کنید $B \equiv C * D$. مسئله به سه دسته تقسیم میشود:

- $A \in sub(C)$
دیدیم که $C' \equiv C\{A \leftarrow A'\}$ و میدانیم $D \equiv D$ پس بنابر تمرین ۲ که اثبات شد، داریم: $C * D \equiv C' * D$ پس $B' \equiv B$

- $A \in sub(D)$
دیدیم که $D' \equiv D\{A \leftarrow A'\}$ و میدانیم $C \equiv C$ پس بنابر تمرین ۲ که اثبات شد، داریم: $C * D \equiv C * D'$ پس $B' \equiv B$

- $A \equiv C * D$
در این حالت B' همان A' است و در نتیجه اثبات میشود $B \equiv B'$.

تمرین ۲

اگر $U \subseteq \mathscr{F}$ اثبات کنید:

۱. اگر U صدق پذیر باشد و $A \in U$ آنگاه $U - \{A\}$ نیز صدق پذیر است.

۲. اگر U صدق پذیر باشد و B معتبر باشد آنگاه $U \cup \{B\}$ نیز صدق پذیر است.

۳. اگر U صدق ناپذیر باشد آنگاه برای هر فرمول B مجموعه $U \cup B$ نیز صدق ناپذیر است.

۴. اگر U ناپذیر باشد و فرمول $A \in U$ معتبر باشد آنگاه $U - \{A\}$ نیز صدق ناپذیر است.

جواب

۱

داریم:

$$U = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$$
$$v_{\mathscr{I}}(A_i) = \top, i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

از آنجا که مجموعه U صدق پذیر است پس تعبیری همچون $\mathscr{I}$ وجود دارد که تمامی اعضای U بر اساس آن تعبیر ارزشی معادل با $\top$ دارند.

چون ارزش تمام فرمول های موجود در U درست است، اگر یکی از اعضای این مجموعه را حذف کنیم، مابقی اعضا همچنان ارزشی برابر با $\top$ خواهند داشت. فرض کنیم یکی از اعضای مجموعه U مانند A_j را انتخاب و از مجموعه حذف کنیم:

$$U - A_j = \{A_1, A_2, \cdots, A_{j-1}, A_{j+1}, \cdots, A_n\}$$

ارزش تمام A_i های باقی مانده در تعبیر مشخص $\mathscr{I}$ ها درست است پس $U - \{A_j\}$ نیز صدق پذیر خواهد بود.

۲

داریم $\models B$ در نتیجه B برای هر تعبیر $\mathscr{I}$ بدین صورت خواهد بود: $v_{\mathscr{I}}(B) = \top$. فرض میکنیم $U = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ و $U \cup \{B\}$ را تشکیل میدهیم:

$$U \cup \{B\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, B\}$$

طبق فرض، تعبیر $\mathscr{I}$ وجود دارد به قسمی که تمام A_i که $i = 1, 2, \ldots, n$ صادق اند: $v_{\mathscr{I}}(A_i) = \top$

چون B معتبر است و برای هر تعبیر $\mathscr{I}$ درست خواهد بود، در نتیجه همه اعضای مجموعه $U \cup \{B\}$ برای تعبیر $\mathscr{I}$ درست خواهند بود و این مجموعه صدق پذیر است.

۳

طبق فرض برای هر تعبیر $\mathscr{I}$ فرمول A_i که $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ وجود دارد که $v_{\mathscr{I}}(A_i) = F$. در این صورت اگر فرمول B را به U اضافه کنیم فارغ از اینکه B برای تعبیر $\mathscr{I}$ درست یا غلط است، همچنان A_i وجود دارد که به ازای آن $v_{\mathscr{I}}(A_i) = F$ است و در نتیجه $U \cup \{B\}$ صدق ناپذیر است.

۴

داریم $A \in U$ که $\models A$ یعنی برای هر تعبیری $v_{\mathscr{I}}(A) = \top$. از طرفی فرمولی چون A_i که $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ وجود دارد که در تعبیر ارزش نادرست دارد. چون A برای هر تعبیر $\mathscr{I}$ ارزش درست دارد، پس A معادل با A_i نیست. در نتیجه اگر $U - A$ را به دست آوریم، هنوز هم فرمول A_i وجود دارد که ارزش آن نادرست است و باعث میشود تا U هنوز هم صدق ناپذیر باقی بماند.