از سمت چپ این هم ارزی شروع می‌کنیم و نشان می‌دهیم اگر سمت چپ درست باشد، سمت راست این هم‌ارزی نیز درست خواهد بود. طبق صدق تارسکی داریم:

$$\mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} \exists x_1 \dots \exists x_n A \Longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \exists x_2 \dots \exists x_n A \ for\ some\ d_1, \sigma_1 := \sigma[x_1 \leftarrow d_1] \tag{1}$$

$$\mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \exists x_2 \dots \exists x_n A \Longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \exists x_3 \dots \exists x_n A \ for\ some\ d_2, \sigma_2 := \sigma_1[x_2 \leftarrow d_2] \tag{2}$$

با ادامه این روند می‌توانیم σ' را به صورت $\sigma'(x_i) = d_i$ تعریف کنیم و چون چنین d_i هایی وجود دارند می‌توانیم بگوییم:

$$\mathscr{I} \models \exists x_1 \dots \exists x_n A \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma'}{\models} A \tag{3}$$

حالا با برعکس کردن این روند می‌توانیم طرف دیگر این هم‌ارزی را اثبات کنیم:

$$\mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} A, d_n = \sigma(x_n) \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_n}{\models} A \ for\ d_n, \sigma_n := \sigma[x_n \leftarrow d_n] \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_n}{\models} \exists x_n A \tag{4}$$

با ادامه این روند نیز می‌تواینم نشان دهیم:

$$\mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} A \longleftrightarrow \mathscr{I} \models \exists x_1 \dots \exists x_n A \tag{5}$$

برای قسمت دوم تمرین نیز داریم:

$$\mathscr{I} \models \forall x_1 \dots \forall x_n A \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} A \tag{6}$$

با توجه به صدق تارسکی برای هر تخصیصی چون σ_1 داریم:

$$\mathscr{I} \models \forall x_1 \dots \forall x_n A \longleftrightarrow \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \forall x_2 \dots \forall x_n A,\ \sigma_1 := \sigma[x_1 \leftarrow d] \ for\ all\ d \in D \tag{7}$$

پس عضوی از D مانند d_1 را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و داریم:

$$d_1 \in D : \mathscr{I} \underset{\sigma_1}{\models} \forall x_2 \dots \forall x_n A \tag{8}$$

در مرحله بعدی خواهیم داشت:

$$d_1, d_2 \in D : \mathscr{I} \underset{\sigma_2}{\models} \forall x_3 \dots \forall x_n A \tag{9}$$

این عملیات را تا آخر ادامه می‌دهیم تا به $\mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} A$ برسیم. یعنی:

$$d_1, \dots, d_n \in D : \mathscr{I} \underset{\sigma_n}{\models} A \tag{10}$$

چون $d_1, \dots, d_n$ را به دلخواه انتخاب کردیم، این حکم برای هر σ ای برقرار است.

برای حل قسمت بازگشت این هم‌ارزی نیز، با توجه به اینکه تعبیر فوق برای هر تخصیصی برقرار است، در هر مرحله می‌توانیم به دلخواه یک عضو مانند $d_i \in D$ انتخاب کنیم. همچون قسمت قبل می‌توانیم این تخصیص را با صور عمومی نمایش دهیم. این کار را برای تمام متغیرهای موجود در فرمول A انجام می‌دهیم تا سرانجام همچون قسمت قبل به

$$\mathscr{I} \models \forall x_1 \dots \forall x_n A \tag{11}$$

دست یابیم.