همانند تمرین قبل، نشان می‌دهیم که همه‌ی گزاره‌های اتمی دارای خاصیت فوق هستند. در واقع در هر گزاره‌ی اتمی‌ای مثل $p \in \mathscr{P}$ خود p یک اتم است. پس حداقل یک اتم در گزاره‌های اتمی وجود دارد و حکم اول ثابت است.

حال اثبات می‌کنیم که اگر در فرمولی چون $A \in \mathscr{F}$ حداقل یک اتم رخ داده‌است، در $\neg A$ نیز همین‌گونه است. چگونه ثابت می‌کنیم؟ متاسفانه در زمان طرح سوال هنوز با مفهوم $Sub(A)$ آشنا نشده بودیم، ولیکن ابزاری است بس کارا در جهت اثبات گزاره‌ی فوق. امیدواریم تقلب محسوب نشود :)
فرض کنیم حداقل یک اتم در A وجود دارد. یعنی $p \in Sub(A)$. از طرفی داریم:

$$Sub(\neg A) = Sub(A) \cup \{\neg A\}$$

چون $p \in Sub(A)$ پس p در اجتماع $Sub(A)$ با مجموعه‌ای دیگر نیز حضور دارد، یعنی $p \in Sub(\neg A)$. در نتیجه در نقیض A نیز حداقل یک اتم وجود دارد.

صورت گزاره‌ی آخری که اثباتش حسن ختامی است بر اثبات ما، به شرح زیر است:
اگر A و B دو فرمول باشند که در هر کدام حداقل یک اتم وجود داشته باشد، آنگاه در فرمول $A * B$، $* \in \{\wedge, \vee, \uparrow, \downarrow, \oplus \ \rightarrow, \leftrightarrow\}$ نیز حداقل یک اتم وجود دارد.
خب، دست به کار شویم. می‌دانیم که حداقل یک اتم مانند $p \in \mathscr{P}$ وجود دارد به قسمی که $p \in Sub(A)$ و همچنین اتمی مانند $q \in \mathscr{P}$ وجود دارد به صورتی که $q \in Sub(B)$. البته در بدترین شرایط $p = q$ است و در هر دو فرمول، حداقل یک اتم مانند p وجود دارد. با توجه به فرضیات و اینکه $\mathbf{Sub(A * B) = Sub(A) \cup Sub(B) \cup \{A * B\}}$ داریم $p \in Sub(A * B)$ چرا که اتم p در حداقل یکی از زیرفرمول ها حضور دارد، پس در نتیجه در اجتماع آن زیرفرمول با دیگر مجموعه ها نیز حضور خواهد داشت. پس گزاره سوم اثبات شده و حکم کلی ثابت است.