

این مسئله بسیار به مسئله جریان بیشینه شبیه است و با استفاده از تکنیک تبدیل مسئله می‌توان آن را حل کرد. روند تبدیل این مسئله بدین صورت است که به جای هر راس این گراف دو راس در گراف جدید قرار می‌دهیم به طوری که تمام یال‌هایی که به راس v وارد می‌شوند را به v_{in} وارد می‌کنیم و تمام راس‌هایی که از v خارج می‌شوند را از v_{out} خارج می‌کنیم و یک یال بین این دو راس قرار می‌دهیم که ظرفیت آن برابر با ظرفیت v است و با حل مسئله جدید، جواب مسئله اصلی را پیدا می‌کنیم.

ابتدا نحوه نمایش گراف را بصورتی انتخاب می‌کنیم که روند حل مسئله را برای ما راحت‌تر کند. اگر برای نمایش گراف از ماتریس استفاده کنیم، پس از تبدیل درایه‌های بسیار زیادی از ماتریس صفر خواهند بود که سرعت برنامه را کاهش خواهد و تبدیل مسئله و تبدیل نتیجه الگوریتم به جواب را سخت‌تر خواهد کرد بنابراین استفاده از لیست مجاورت و ذخیره اطلاعاتی اضافی در آن بسیار آسان‌تر خواهد بود البته در اینجا برای سادگی کار و ذخیره این اطلاعات اضافی از *dictionary* استفاده شده است. ساختار نمونه‌ای از یک گراف در *python* به صورت زیر خواهد بود:

```
g = {
    1: {"n": {2: (2, 0), 4: (3, 0)}, "f": (4, 0)},
    2: {"n": {3: (5, 0), 5: (3, 0)}, "f": (10, 0)},
    3: {"n": {6: (2, 0)}, "f": (3, 0)},
    4: {"n": {3: (1, 0)}, "f": (2, 0)},
    5: {"n": {6: (4, 0)}, "f": (3, 0)},
    6: {"n": {}, "f": (12, 0)},
}
```

در اینجا به هر راس همسایه‌های آن (n) و جریانی که از آن راس می‌گذرد (f) را نسبت می‌دهیم. هر یک از این دوتایی‌ها به صورت (*capacity, flow*) هستند. برای پیدا کردن جریان بیشینه یک گراف از الگوریتم *ford – fulkerson* استفاده می‌کنیم. پیاده‌سازی این الگوریتم با در نظر گرفتن ساختار گراف به صورت زیر خواهد بود:

```
def ford_fulkerson(graph, source, destination):
    while (path := bfs_path(graph, source, destination)) is not None:
        path_flow = math.inf
        for i in range(0, len(path) - 1):
            capacity, flow = graph[path[i]]["n"][path[i + 1]]
            path_flow = min(path_flow, capacity - flow)
        for i in range(0, len(path) - 1):
            u, v = path[i], path[i + 1]
            capacity, flow = graph[u]["n"][v]
            graph[u]["n"][v] = (capacity, flow + path_flow)
            capacity, flow = graph[v]["n"].get(u, (0, 0))
            graph[v]["n"][u] = (capacity, flow - path_flow)
        for node in graph.keys():
            for key, value in list(graph[node]["n"].items()):
                if value[1] < 0:
                    del graph[node]["n"][key]
```

الگوریتم بدین صورت عمل خواهد کرد که در صورت وجود مسیری جریان‌افزا که آن را از *bfs_path* می‌گیرد مقداری جریانی می‌تواند از این مسیر عبور کند را که برابر است با کم ظرفیت‌ترین یال یا خط ارتباطی (با در نظر گرفتن جریانی که در حال حاضر دارند) را پیدا می‌کند و جریان گذرنده از این یال را بروز می‌کند. ذکر این نکته ضروری است که در این الگوریتم اگر از یک یال جهتدار جریانی عبور دهیم، می‌توانیم به همین مقدار از آن کم کنیم و جریان را برگردانیم به همین دلیل مقدار جریان یال برگشتی را از مقدار جریان کم می‌کنیم و اگر وجود نداشته باشد آن را ایجاد می‌کنیم. در انتها یال‌هایی که جریان گذرنده از آن‌ها منفی است را حذف می‌کنیم تا خروجی الگوریتم درست باشد.

در اینجا به الگوریتم *bfs_path* احتیاج داشتیم که پیاده سازی آن بدین صورت خواهد بود:

```

def bfs_path(graph, source, destination):
    queue = deque([source])
    predecessors = {source: None}
    visited = set([source])

    while queue:
        node = queue.popleft()
        if node == destination:
            path = []
            while node is not None:
                path.append(node)
                node = predecessors[node]
            path.reverse()
            return path
        for neighbor in graph[node]["n"]:
            capacity, flow = graph[node]["n"][neighbor]
            if neighbor not in visited and flow < capacity:
                visited.add(neighbor)
                predecessors[neighbor] = node
                queue.append(neighbor)

    return None

```

در اینجا الگوریتم همانند پیمایش سطحی عمل می‌کند با این تفاوت که علاوه بر شرط دیده نشدن راس، این که جریان گذرنده از یال کمتر از ظرفیت آن باشد را نیز بررسی می‌کند. برای اینکه مسیر پیدا شده توسط این الگوریتم را بیابیم، پدر یا راسی که از آن به راس دیگر رفته‌ایم را ذخیره می‌کنیم تا بتوانیم از روی آن‌ها مسیر را برگردانیم. حال پس از پیاده‌سازی الگوریتم‌های اصلی، الگوریتم‌های تبدیل را طراحی می‌کنیم:

```

def transfer_graph(graph):
    i = 0
    new_graph = {}
    for node in graph:
        i += 1
        in_node = {"n": {i: graph[node]["f"]}, "out": i, "in": True}
        out_node = {"n": graph[node]["n"]}
        new_graph[node] = in_node
        new_graph[i] = out_node
    return new_graph, i

```

برای تبدیل گراف اصلی به گراف دلخواه به ازای هر راس دوراس جدید ایجاد می‌کنیم. نام یکی از آنها را که راس v_{in} است با نام راس اصلی یکسان قرار می‌دهیم تا مشکلی برای پیمایش گراف به وجود نیاید چرا که در صورت ایجاد تغییر یا قراردادن نامی دلخواه باید تمام همسایه‌ها را در همه‌ی راس‌ها تغییر دهیم. این راس تنها به یک راس متصل است که آن راس v_{out} خواهد بود که تمام همسایه‌های راس اصلی را به آن نسبت می‌دهیم. برای برگرداندن این گراف به گراف اصلی، یکی از این راس‌ها را علامتگذاری می‌کنیم و نام راس دیگر را به این راس می‌دهیم. البته باید توجه کنیم که نام راس‌های v_{out} از منفی ۱ شروع می‌شود و نباید گراف اصلی از اعداد منفی برای نام گذاری راس‌های اصلی استفاده کرده باشد. در انتها گراف جدید و نام آخرین راس آن را برمی‌گردانیم.

```

def revert_graph_transform(graph):
    og_graph = {}

```

```

for node in graph:
    if graph[node].get("in", False):
        out_node = graph[node]["out"]
        og_graph[node] = {
            "n": graph[out_node]["n"],
            "f": graph[node]["n"][out_node],
        }
return og_graph

```

پس از اجرای الگوریتم، با استفاده از این تابع جواب نهایی مسئله اصلی را پیدا می‌کنیم.