به نام خدا

دانشکده ریاضی و آمار

علوم کامپیوتر
نیم‌سال دوم ۰۲-۰۳
مبانی منطق

اعضای گروه:

تمرینات سری ۶

.۱

$$\forall x\Big(A(x) \to B(x)\Big) \vdash \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$

جواب

(۱)	$\forall x\ (A(x) \to B(x)) \vdash \forall x\ A(x) \to \forall x\ B(x)$		ریشه
(۲)	$\neg(\forall x\ A(x) \to \forall x\ B(x))$		ریشه
(۳)	$\forall x\ A(x)$		۲ F $\to$
(۴)	$\neg\forall x\ B(x)$		۲ F $\to$
(۵)	$\neg B(a_1)$		$a_1 \in C$ جدید ، ۴ F $\forall$
(۶)	$A(a_1)$		From ۳) T $\forall$(
(۷)	$A(a_1) \to B(a_1)$		۱ T $\forall$
(۸)	$\neg A(a_1)$ $\otimes$ ۸ و ۶	$B(a_1)$ $\otimes$ ۸ و ۵	۷ F $\to$

.۲

$$\forall x\Big(p(x) \lor q(x)\Big) \nvdash \forall x\ p(x) \lor \forall x\ q(x)$$

جواب

برای اثبات این قسمت، از مدل نقض استفاده می‌کنیم. به همین منظور ابتدا با روش تابلو اطلاعاتی به دست آورده و سپس از آنها در ساخت مدل نقض بهره می‌جوییم.

(۱)	$\forall x\ (p(x) \lor q(x))$			ریشه
(۲)	$\neg(\forall x\ p(x) \lor q(x))$			ریشه
(۳)	$\neg p(a_1)$			۲ F $\forall$ و جدید $a_1 \in C$
(۴)	$\neg q(a_2)$			۲ F $\forall$ و جدید $a_2 \in C$
(۵)	$p(a_1) \lor p(a_1)$			۱ T $\forall$ $a_1 \in C$
(۶)	$p(a_1)$	$q(a_1)$		
(۷)	$\otimes$ ۶ و ۳	$p(a_2) \lor q(a_2)$		۱ T $\forall$ و $a_2 \in C$
(۸)		$p(a_2)$	$q(a_2)$ $\otimes$ ۸ و ۴	

به نظر می‌رسد که تابلو تا همین مرحله اطلاعات خوبی را در اختیار ما قرار داده باشد. حال به تشکیل مدل نقض برای تنها شاخه‌ی باز تابلو می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} \mathscr{I} &= (D, \{p^{\mathscr{I}}, q^{\mathscr{I}}\}) \\ D &= \{\alpha_1, \alpha_2\} \\ p^{\mathscr{I}} &= \{\alpha_2\} \\ q^{\mathscr{I}} &= \{\alpha_1\} \end{aligned}$$

حال باید ثابت کنیم هنگامی که مقدم صادق است ($\mathscr{I} \models \forall x(p(x) \vee q(x))$) تالی کاذب است ($\mathscr{I} \not\models \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$).

ابتدا با استفاده از صدق تارسکی بررسی می‌کنیم $\mathscr{I} \overset{?}{\models} \forall x\ (p(x) \vee q(x))$. صدق تارسکی بیان می‌کند که برای درست بودن این عبارت، لازم است تا نشان دهیم برای تک تک اعضای دامنه صادق است.

میدانیم که $\alpha_1 \in q^{\mathscr{I}}$ پس $\mathscr{I} \underset{\sigma[x\leftarrow\alpha_1]}{\models} p(x) \vee q(x)$.

میدانیم که $\alpha_2 \in p^{\mathscr{I}}$ پس $\mathscr{I} \underset{\sigma[x\leftarrow\alpha_2]}{\models} p(x) \vee q(x)$.

در نتیجه برای هر $\alpha_i \in D$ داریم $\mathscr{I} \underset{\sigma[x\leftarrow\alpha_i]}{\models} p(x) \vee q(x)$. پس بنابر صدق تارسکی $\mathscr{I} \underset{\sigma}{\models} \forall x\ (p(x) \vee q(x))$.

حال باید ثابت کنیم $\mathscr{I} \not\models \forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)$

میدانیم $\alpha_1 \notin p^{\mathscr{I}}$ پس $\mathscr{I} \underset{\sigma[x\leftarrow\alpha_1]}{\not\models} p(x)$.

میدانیم $\alpha_2 \notin q^{\mathscr{I}}$ پس $\mathscr{I} \underset{\sigma[x\leftarrow\alpha_2]}{\not\models} q(x)$.

پس نتیجه می‌گیریم که عطف بالا صادق نیست و $\mathscr{I} \not\models \forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)$ در نتیجه:

$$\forall x\ (p(x) \vee q(x)) \not\models \forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)$$

۳.

$$\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x) \not\vdash \exists x \left(p(x) \wedge q(x)\right)$$

جواب

مانند قسمت قبل تابلو را تا حد قابل قبولی جلو می‌بریم:

ریشه	$\exists x\, p(x)$		(۱)
ریشه	$\exists x\, q(x)$		(۲)
ریشه	$\neg\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$		(۳)
$a_1 \in C$ و جدید $\exists$ T ۱	$p(a_1)$		(۴)
$a_2 \in C$ و جدید $\exists$ T ۲	$q(a_2)$		(۵)
$a_1 \in C$ و $\exists$ F ۳	$\neg(p(a_1) \wedge \neg q(a_1))$		(۶)
۶	$\neg p(a_1) \vee q(a_1)$		(۷)
	$\neg q(a_1)$	$\neg p(a_1)$	(۸)
$a_2 \in C$ و $\exists$ F ۳	$\neg(p(a_2) \wedge q(a_2))$	$\otimes$	(۹)
۹	$\neg p(a_2) \vee \neg q(a_2)$	۴ و ۸	(۱۰)
۱۰	$\neg p(a_2)$ | $\neg q(a_2)$ $\otimes$ ۱۱ و ۵		(۱۱)

به نظر می‌رسد که تابلو تا همین مرحله اطلاعات خوبی را در اختیار ما قرار داده باشد. حال به تشکیل مدل نقض برای تنها شاخه‌ی باز تابلو می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} \mathscr{I} &= (D, \{p^{\mathscr{I}}, q^{\mathscr{I}}\}) \\ D &= \{\alpha_1, \alpha_2\} \\ p^{\mathscr{I}} &= \{\alpha_1\} \\ q^{\mathscr{I}} &= \{\alpha_2\} \end{aligned}$$

اکنون ثابت می‌کنیم اگر مقدم صادق باشد ($\mathscr{I} \models \exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$) تالی کاذب خواهد بود ($\mathscr{I} \not\models \exists x\ (p(x) \wedge q(x))$).

ابتدا با استفاده از صدق تارسکی نتیجه می‌گیریم $\mathscr{I} \models \exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$. صدق تارسکی بیان می‌دارد که برای اثبات درستی این عبارت، باید حداقل یک عضو از دامنه وجود داشته باشد که عبارت مذکور در آن صدق کند.

می‌دانیم $\alpha_1 \in p^{\mathscr{I}}$ پس $\mathscr{I} \underset{\sigma[x\leftarrow\alpha_1]}{\models} p(x)$

می‌دانیم $\alpha_2 \in q^{\mathscr{I}}$ پس $\mathscr{I} \underset{\sigma[x\leftarrow\alpha_2]}{\models} q(x)$

در نتیجه داریم $\mathscr{I} \underset{\sigma[x\leftarrow\alpha_i]}{\models} p(x) \wedge q(x)$

حال باید تحقیق کنیم $\mathscr{I} \not\models \exists x\, (p(x) \wedge q(x))$

می‌دانیم $\alpha_1 \notin p^{\mathscr{I}}$ پس $\mathscr{I} \underset{\sigma[x\leftarrow\alpha_1]}{\not\models} (p(x) \wedge q(x))$

می‌دانیم $\alpha_2 \notin q^{\mathscr{I}}$ پس $\mathscr{I} \underset{\sigma[x\leftarrow\alpha_2]}{\not\models} (p(x) \wedge q(x))$

در نتیجه هیچ عضوی از دامنه وجود ندارد که برای آن تالی صادق باشد. پس به یک مدل نقض رسیدیم و داریم:

$$\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x) \not\models \exists x\, (p(x) \wedge q(x))$$

۴.

$$\vdash \exists x\, \exists y\, p(x,y) \longleftrightarrow \exists y\, \exists x\, p(x,y)$$

جواب

(۱)	$\neg(\exists x \exists y\, p(x,y)) \longleftrightarrow \exists y \exists x\, p(x,y)$		ریشه
(۲)	$\exists x \exists y\, p(x,y)$	$\neg \exists x \exists y\, p(x,y)$	
(۳)	$\neg(\exists x \exists y p(x,y))$	$\exists y \exists x\, p(x,y)$	
(۴)	$\exists y\, p(a_1,y)$	$\exists x\, p(x,a_2)$	$a_2 \in C$ جدید و $\exists$ T ۳؛ $a_1 \in C$ جدید و $\exists$ T ۲
(۵)	$p(a_1,a_2)$	$p(a_1,a_2)$	$a_1 \in C$ جدید و $\exists$ T ۴؛ $a_2 \in C$ جدید و $\exists$ T ۴
(۶)	$\neg \exists x\, p(x,a_2)$	$\neg \exists p(a_1,y)$	$\exists$ F ۲؛ $\exists$ F ۳
(۷)	$\neg p(a_1,a_2)$	$\neg p(a_1,a_2)$	$\exists$ F ۶
	$\otimes$	$\otimes$	
	۵ و ۷	۵ و ۷	

۵.

$$\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \vdash \forall x\, (p(x) \vee q(x))$$

جواب

(۱)	$\forall x\, p(x)$	ریشه
(۲)	$\forall x\, q(x)$	ریشه
(۳)	$\neg \forall x\, (p(x) \vee q(x))$	ریشه
(۴)	$\neg(p(a_1) \vee q(a_1))$	$a_1 \in C$ جدید و $\forall$ F ۳
(۵)	$\neg p(a_1)$	۴
(۶)	$\neg q(a_1)$	۴
(۷)	$p(a_1)$	$\forall$ T ۱
	$\otimes$	
	۵ و ۷	

۶.

$$\vdash \forall x\, \exists y\, (x \approx y)$$

جواب

(۱)	$\neg \forall x \exists y\, (x \approx y)$	ریشه
(۲)	$\neg \exists y\, (a_1 \approx y)$	$a_1 \in C$ جدید و $\forall$ F ۱
(۳)	$\neg(a_1 \approx a_1)$	$\exists$ F ۲
(۴)	$a_1 \approx a_2$	Id_1
	$\otimes$	
	۳ و ۴	

۷.

$$\forall x(x \approx c \to A(c)) \vdash A(c),\ \ c \in \mathscr{A}$$

جواب

(۱)	$\forall x\ (x \approx c \to A(c))$		ریشه
(۲)	$\neg A(c)$		ریشه
(۳)	$(c \approx c \to A(c))$		$\forall$ T ۱
(۴)	$\neg(c \approx c)$	$A(c)$	$\to$ T ۳
(۵)	$c \approx c$	$\otimes$ ۴ و ۲	Id_1
	$\otimes$ ۵ و ۴		

۸.

$$\forall y\, \exists x\, (f(x) \approx y),\ \forall y\, \exists x\, (g(x) \approx y)$$

جواب

(۱)	$\forall y \exists x\ (f(x) \approx y)$	ریشه
(۲)	$\forall y \exists x\ (g(x) \approx y)$	ریشه
(۳)	$\neg \forall y \exists x\ (f(g(x)) \approx y)$	ریشه
(۴)	$\neg \exists x\ (f(g(x)) \approx a_1)$	$a_1 \in C$ جدید و $\forall$ F ۳
(۵)	$\exists x\ f(x) \approx a_1$	$\forall$ T ۱
(۶)	$f(a_3) = a_1$	$a_3 \in C$ و $\exists$ T ۵
(۷)	$\exists x\ g(x) \approx a_3$	$\forall$ T ۲
(۸)	$g(a_4) \approx a_3$	$a_4 \in C$ و $\exists$ T ۷
(۹)	$\neg f(g(a_4)) \approx a_1$	$\exists$ F ۴
(۱۰)	$\neg f(a_3) \approx a_1$	Id_2 و ۸ و ۹
(۱۱)	$\neg a_1 \approx a_1$	Id_2 و ۶ و ۱۰
(۱۲)	$a_1 \approx a_1$	Id_1
	$\otimes$ ۱۲ و ۱۱	

۹.

$$\forall y \exists x\Big(f(x) \approx y\Big), \forall y \exists x\Big(g(x) \approx y\Big) \vdash \forall y \exists x\Big(f(g(x)) \approx y\Big)$$

جواب

(۱)	$\forall x \forall y\ (f(x) \approx f(y) \to x \approx y)$			ریشه
(۲)	$\forall x \forall y\ (g(x) \approx g(y) \to x \approx y)$			ریشه
(۳)	$\neg \forall x \forall y\ f(g(x)) \approx f(g(y) \to x \approx y)$			ریشه
(۴)	$\neg \forall y (f(g(a_1)) \approx f(g(y)) \to a_1 \approx y)$			$a_1 \in C$ جدید و $\forall$ F ۳
(۵)	$\neg(f(g(a_1)) \approx f(g(a_2)) \to a_1 \approx a_2)$			$a_2 \in C$ جدید و $\forall$ F ۴
(۶)	$f(g(a_1)) \approx f(g(a_2))$			$\to$ F ۵
(۷)	$\neg(a_1 \approx a_2)$			$\to$ F ۵
(۸)	$\forall(g(a_1) \approx g(y) \to a_1 \approx y)$			$\forall$ T ۱۰
(۹)	$g(a_1) \approx g(a_2) \to a_1 \approx a_2$			$\forall$ T ۸
(۱۰)	$\forall y\ (f(g(a_1)) \approx f(y) \to g(a_1) \approx y)$			$g(a_1) \in C$ و $\forall$ T ۱
(۱۱)	$f(g(a_1)) \approx f(g(a_2)) \to g(a_1) \approx g(a_2)$			$g(a_2) \in C$ و $\forall$ T ۱۰
(۱۲)	$\neg(f(g(a_1)) \approx f(g(a_2)))$	$g(a_1) \approx g(a_2)$		$\to$ T ۹؛ $\to$ T ۱۱
(۱۳)	$\otimes$ ۶ و ۱۲	$\neg(g(a_1) \approx g(a_2))$	$a_1 \approx a_2$	$\forall$ T ۹
		$\otimes$ ۱۳ و ۱۲	$\otimes$ ۱۳ و ۷	

.۱۰

$$\forall x\Big(x \approx a \vee x \approx b \vee x \approx c\Big) \vdash \forall x A(x) \longleftrightarrow A(a) \wedge A(b) \wedge A(c)$$

جواب

(۱)			$\forall x\ (x \approx a \vee x \approx b \vee x \approx c)$			ریشه
(۲)			$\neg(\forall x\ A(x) \longleftrightarrow A(a) \wedge A(b) \wedge A(c))$			ریشه
(۳)		$\forall x\ A(x)$		$\neg\forall x\ A(x)$		$\longleftrightarrow$ F ۲
(۴)	$\neg A(a)$	$\neg A(b)$	$\neg A(c)$			$\longleftrightarrow$ F ۲
(۵)	$A(a)$	$A(b)$	$A(c)$			$\forall$ T ۳
(۶)	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$A(a)$		$\longleftrightarrow$ F ۲
(۷)	۵ و ۴	۵ و ۴	۵ و ۴	$A(b)$		$\longleftrightarrow$ F ۲
(۸)				$A(c)$		$\longleftrightarrow$ F ۲
(۹)				$\neg A(a_1)$		$a_1 \in C$ جدید و $\forall$ F ۳
(۱۰)			$a_1 \approx a$	$a_1 \approx b$	$a_1 \approx c$	$\forall$ T ۱
(۱۱)			$\neg A(a)$	$\neg A(b)$	$\neg A(c)$	۱۰ و ۹ و Id_2
			$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	
			۱۱ و ۶	۱۱ و ۷	۱۱ و ۸	

.۱۱

$$\forall x\Big(x \approx a \vee x \approx b \vee x \approx c\Big) \vdash \exists x A(x) \longleftrightarrow A(a) \vee A(b) \vee A(c)$$

جواب

(۱)			$\forall x\ (x \approx a \vee x \approx b \vee x \approx c)$			ریشه
(۲)			$\neg(\exists A(x) \longleftrightarrow A(a) \vee A(b) \vee A(c))$			ریشه
(۳)		$\neg\exists x\ A(x)$		$\exists x\ A(x)$		$\longleftrightarrow$ F ۲
(۴)	$A(a)$	$A(b)$	$A(c)$			$\longleftrightarrow$ F ۲
(۵)	$\neg A(a)$	$\neg A(b)$	$\neg A(c)$			$\exists$ F ۳
(۶)	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\neg A(a)$		$\longleftrightarrow$ F ۲
(۷)	۵ و ۴	۵ و ۴	۵ و ۴	$\neg A(b)$		$\longleftrightarrow$ F ۲
(۸)				$\neg A(c)$		$\longleftrightarrow$ F ۲
(۹)				$A(a_1)$		$\exists$ T ۳
(۱۰)			$a_1 \approx a$	$a_1 \approx b$	$a_1 \approx c$	$\forall$ T ۱
(۱۱)			$A(a)$	$A(b)$	$A(c)$	۸ و ۷ و Id_2
			$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	
			۱۱ و ۶	۱۱ و ۷	۱۱ و ۸	

۱۲.

$$\forall x\Big(A(x) \to B(x)\Big) \vdash \Big(\exists x\, A(x) \to \exists x\, B(x)\Big)$$

جواب

(۱)	$\forall x\ (A(x) \to B(x))$		ریشه
(۲)	$\neg(\exists x\ A(x) \to \exists x B(x))$		ریشه
(۳)	$\exists x\ A(x)$		$\to$ F ۲
(۴)	$\neg \exists x B(x)$		$\to$ F ۲
(۵)	$A(a_1)$		$a_1 \in C$ و جدید $\exists$ T ۳
(۶)	$\neg B(a_1)$		$a_1 \in C$ و $\exists$ F ۴
(۷)	$A(a_1) \to B(a_1)$		$a_1 \in C$ و $\forall$ T ۱
(۸)	$\neg A(a_1)$	$B(a_1)$	
	$\otimes$	$\otimes$	
	۸ و ۵	۸ و ۶	