

با محاسبه  $T(n)$  برای  $n$  های کوچک در می یابیم که  $T(n) = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2$ . برای اثبات این موضوع از استقرای ریاضی استفاده می کنیم:

$$T(2) = 2 + \max\{T(1) + T(1)\} = 2$$

حالت پایه این تساوی برقرار است بنابراین فرض می کنیم این تساوی برای  $k-1$  برقرار است آنگاه نشان می دهیم این تساوی برای  $k$  نیز برقرار است:

$$\begin{aligned} T(k) &= k + \max\{T(i) + T(j) : i + j = k, i, j > 0\} \\ &= k + \max\{T(1) + T(k-1), T(2) + T(k-2), \dots, T(k-1) + T(1)\} \end{aligned} \quad (۱)$$

از آنجایی که  $T(1) = 0$  کافی است نشان دهیم :

$$T(k-1) > T(i) + T(j); \quad i + j = k \quad \& \quad i, j < k-1$$

$$\begin{aligned} T(k-1) &= (k-1) + (k-2) + \dots + 2 \\ T(i) &= i + (i-1) + (i-2) + \dots + 2 \\ T(j) &= j + (j-1) + (j-2) + \dots + 2 \end{aligned} \quad (۲)$$

$$T(i) + T(j) = 2 \times (2 + 3 + \dots + \min(i, j)) + \min(i, j) + 1 + \dots + \max(i, j) \quad (۳)$$

$$T(k-1) - [T(i) + T(j)] = (\max(i, j) + 1) + \dots + (k-1) - (2 + 3 + \dots + \min(i, j)) \quad (۴)$$

با توجه به اینکه  $i + j = k$  بنابراین تعداد اعداد مثبت و منفی در این معادله برابر است و از آنجایی که هر عدد مثبت از هر عدد منفی بزرگتر است حکم ثابت شد و برای هر  $n$  بزرگتر از 1 داریم:

$$\begin{aligned} T(n) &= n + T(n-1) = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 = \frac{(n-1)(n+2)}{2} \\ &\rightarrow T(n) \in \theta(n^2) \end{aligned} \quad (۵)$$