هو العلیم



|  |
| --- |
| **ساختمان داده‌ها و الگوریتم­ها** |
| **نیمسال اول سال تحصیلی 1403 – 1402** |
| **تمرینات 3** |
|  |

**1.** این الگوریتم را برای مسأله تولید تمام جایگشت‌ عنصر در نظر بگیرید:

**الف)** درستی الگوریتم را ثابت کنید؛ یعنی ثابت کنید که الگوریتم جایگشت متفاوت با هم تولید می‌کند.

**ب)** کارایی زمانی الگوریتم را تعیین کنید.

**جواب**:

**مراجع**:

**2.** پلیس شهر رایانستان، همه خیابان­های شهر را یک طرفه کرده است. با وجود این، شهردار رایانستان ادعا می‌کند که هنوز راهی برای رانندگی قانونی از هر تقاطعی در شهر به هر تقاطع دیگر در آن، وجود دارد. چون مخالفان شهردار قانع نمی­شوند و شهر هم بسیار بزرگ است، برای تعیین درستی یا نادرستی ادعای شهردار، برنامه‌ای رایانه­ای لازم است. از آنجا که انتخابات شورای شهر به زودی برگزار خواهد شد، شهردار خدمتگزار، که نگران از دست دادن فرصت عظیم خدمت به شهروندان است، برای حل مسأله‌اش به سراغ شما آمده است. شما می­دانید که با توجه به بزرگی شهر و زمان اندکی که شهردار دارد، تنها باید به دنبال الگوریتمی خطی برای اثبات درستی ادعای شهردار بود.

**الف)** مسأله شهردار را به شکل یک مسأله گراف بیان کنید و آنگاه الگوریتمی برای حل آن ارائه کنید که زمان اجرای آن (برحسب تعداد رأس‌ها و تعداد یال‌های گراف ورودی) خطی باشد. الگوریتم خود را با شبه­کد توصیف کنید.

**ب)** شهردار باهوش رایانستان، به این هم فکر کرده است که در صورتی که با الگوریتم شما، نادرستی ادعای او مشخص شد، ادعای ضعیف­تری را طرح کند: اینکه اگر شما از ساختمان شهرداری رانندگی را شروع کنید، خیابان‌های یک طرفه را بپیمایید و به هر جایی که ممکن بود برسید، باز همیشه راهی برای آنکه به طور قانونی رانندگی کنید تا به ساختمان شهرداری برگردید، خواهید داشت.

این ادعای ضعیف­تر شهردار را هم به شکل یک مسأله گراف بیان کنید و باز الگوریتمی خطی ارائه کنید که با آن بتوان درستی یا نادرستی ادعای او را تحقیق کرد. الگوریتم خود را با شبه­کد توصیف کنید.

**جواب**:

**مراجع:**

**3.** آرایه شامل «عنصر غالب» است، اگر بیشتر از عنصر در آن، یکسان باشند. الگوریتمی کارا طراحی کنید که آرایه­ای را به عنوان ورودی بگیرد و مشخص کند که آیا آرایه، عنصر غالب دارد یا خیر، و در صورت وجود عنصر غالب، آن را تعیین کند. در حالت کلی، عناصر آرایه، لزوماً اشیاء ترتیب­پذیر مانند اعداد صحیح نیستند و به همین دلیل، نمی­توانید برای حل مسأله، از مقایسه­هایی به شکل «آیا است؟» استفاده کنید. (مثلاً تصور کنید که عناصر آرایه، فایل­های تصویری GIF باشند.) اما شما می­توانید در الگوریتم از پرسش­هایی به شکل «آیا است؟» استفاده کنید.

**الف)** الگوریتمی ساده­اندیشانه برای این مسأله طراحی کنید و آن را با شبه­کد توصیف کنید. کارایی زمانی الگوریتم‌تان باید باشد و کارایی فضایی آن .

**ب)** الگوریتمی تقلیل­وحل برای این مسأله طراحی کنید و آن را با شبه­کد توصیف کنید. کارایی زمانی الگوریتم‌تان باید باشد و کارایی فضایی آن .

**جواب**:

**مراجع**:

**4. الف)** تصور کنید که آرایه‌ای داریم به نام و به طول . و اینکه ما می‌دانیم که از ابتدای آرایه تا جایی (که ما نمی‌دانیم کجاست!) اعداد صحیح به ترتیب صعودی قرار گرفته‌اند و از آنجا به بعد تا انتهای آرایه، اعداد صحیح به ترتیب نزولی قرار گرفته‌اند. (در حالات خاص، ممکن است آرایه قسمت صعودی یا قسمت نزولی نداشته باشد.)

الگوریتمی با کارایی برای یافتن بزرگ‌ترین عدد صحیح در آرایه بیابید.

**ب)** تصور کنید که آرایه‌ای بسیار طولانی داریم به نام و به طول . و اینکه ما می‌دانیم که از ابتدای آرایه تا جایی (که ما نمی‌دانیم کجاست!) اعداد صحیح به ترتیب صعودی قرار گرفته‌اند و از آنجا به بعد تا انتهای آرایه، که قسمت اعظم آرایه است، نمادهای در آرایه ذخیره شده‌اند.

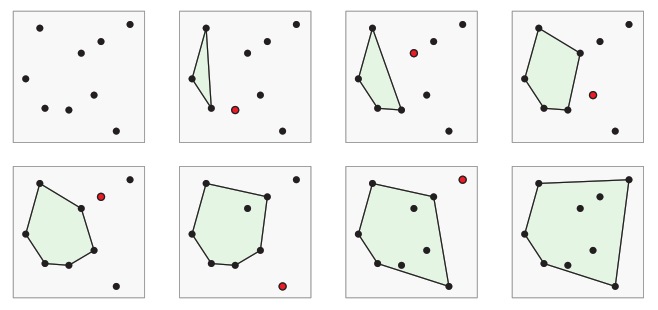
فرض کنید که می‌خواهیم کلید را که عددی صحیح است در آرایه جستجو کنیم. اگر (که مقدار آن برای ما معلوم نیست) طول قسمت کوچکی از ابتدای آرایه باشد که اعداد صحیح در آن قسمت ذخیره شده باشند، الگوریتمی با کارایی برای جستجوی کلید طراحی کنید. (توجه کنید که حتی اگر آرایه را بی‌انتها تصور کنیم باز می‌توان الگوریتمی با کارایی طراحی کرد.)

**جواب**:

**مراجع:**

**5.** فرض کنید مجموعه‌ای ‌از نقطه در صفحه باشد با این قید که دو یا بیشتر از دو نقطه از آن نقاط روی یک خط عمودی قرار نداشته باشند و سه یا بیشتر از سه نقطه از آن نقاط روی یک خط قرار نداشته باشند. با این فرض، **ا**ین توصیف متنی از الگوریتمی برای ساخت پوسته‌ محدب مجموعه را در نظر بگیرید:

* مجموعه نقاط را به ترتیب صعودی مؤلفه آنها مرتب کنید تا مجموعه مرتب به دست آید.
* پوسته محدب سه نقطه اول در مجموعه مرتب را که یک مثلث است، بسازید.
* این عملیات را تا زمانی که تمام نقاط مجموعه پردازش شوند تکرار کنید: نقطه بعدی در مجموعه را به پوسته محدب فعلی اضافه کنید تا پوسته محدب بزرگ‌تری ایجاد شود. (با اضافه کردن یک نقطه به پوسته فعلی، ممکن است نقاطی که رأسی از پوسته بوده‌اند درون پوسته بعدی قرار گیرند.)



مثالی تصویری از اجرای مرحله به مرحله الگوریتم

**الف)** الگوریتم را با شبه‌کد آنقدر دقیق توصیف کنید که بتوان به راحتی مبتنی بر آن شبه‌کد، برنامه‌ای برای پیاده‌سازی الگوریتم نوشت. توصیف دقیق الگوریتم، مستلزم آن است که مشخص کنیم در هر مرحله، نقطه بعدی در لیست مرتب نقاط به کدام یک از دو نقطه پوسته محدب فعلی وصل می‌شود.

**ب)** الگوریتم را چگونه باید غنی کرد تا در حالاتی هم که دو یا بیشتر از دو نقطه روی یک خط عمودی قرار داشته باشند، درست کار کند؟ الگوریتم را چگونه باید غنی کرد تا در حالاتی هم که سه یا بیشتر از سه نقطه روی یک خط قرار داشته باشند، درست کار کند؟

**پ)** ثابت کنید که می‌توان کارایی زمانی الگوریتم برای ساخت پوسته محدب هر مجموعه نقطه‌ای را به صورت بیان کرد.

**جواب**:

**مراجع**: