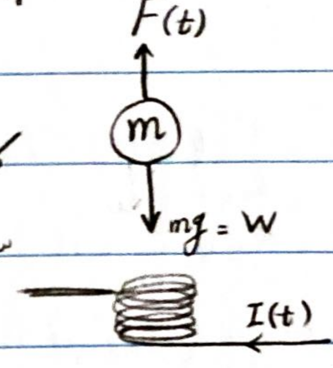
بسمه تعالی

Day Month Year Subject: Modern control - HW 2

محمدهادی قدم / محمدامین مشایخی

سوال 1) مدل کردن سیستم:

برای توپ شناور به سادگی داریم: قسمت مکانیکی:



که در این مدل $F(t)$ نیروی کنترلی متغیر با زمان وارد بر توپ از طریق سیم پیچ شناوری است (Levitation Coil)

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = mg - F(t)$$

قسمت الکتریکی: اگر ولتاژ اعمالی به سیم پیچ را با $E(t)$ نشان دهیم داریم

$$E(t) = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt}$$

قسمت الکترومغناطیسی: در قسمت مکانیکی $F(t)$ که به آن اشاره شد را می توان با رابطه زیر مدل کرد:

$$F(t) = \frac{(B(t))^2 S}{2\mu_0} \quad \bigstar$$

S: سطح مقطع مشترک بین شار مغناطیسی و توپ

برای محاسبه $B(t)$ سیم پیچی را فرض کنید که به صورت پیوسته از مرکز به بیرون پیچیده شده است:

حال می توان نوشت:

$$dB = \frac{\mu_0 \mu_r I(t)}{2r}\left(\frac{x^2}{r^2}+1\right)^{-\frac{3}{2}} n\, dx$$

با انتگرال گیری روی r_1 الی r_2 داریم: (l ارتفاع سیم پیچ است)

$$B = \frac{\mu_0\mu_r n^2 I}{2}\left((y+l)\sin^{-1}\left(\frac{r_2}{y+l}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{r_1}{y+l}\right) + y\left(\sin^{-1}\left(\frac{r_1}{y}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{r_2}{y}\right)\right)\right).$$

با جایگذاری B به دست آمده در $\bigstar$ داریم:

$$F = \frac{(\mu_0 \mu_r n^2)^2 S}{8\mu_0} I^2 \left((y+l)\sin^{-1}\left(\frac{r_2}{y+l}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{r_1}{y+l}\right) + y\left(\sin^{-1}\left(\frac{r_1}{y}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{r_2}{y}\right)\right)\right)^2$$

$x_1 = I$, $x_2 = y$, $x_3 = \dot{x}_2 = \dot{y}$ ، ورودی $\rightarrow E(t)$ خروجی $= x_3$

معادلات را بازنویسی می کنیم:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}\left(E(t) - R x_1\right)$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{m}\left(mg - \frac{(\mu_0 \mu_r n^2)^2 S}{8\mu_0} x_1^2 \left((x_2+l)\sin^{-1}\left(\frac{r_2}{x_2+l}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{r_1}{x_2+l}\right) + x_2\left(\sin^{-1}\left(\frac{r_1}{x_2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{r_2}{x_2}\right)\right)\right)^2\right)$$

با توجه به معادلات و آزمایشات عملی مقادیر نقطه تعادل به صورت زیر است (برای $m = 55g$)

$$[x_1^* \;\; x_2^* \;\; x_3^*] = [1 \;\; 0.048 \;\; 0] \quad , \quad E^* = 6.75$$

حال اطراف این نقاط خطی سازی می کنیم:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta E$$
$$\Delta Y = C \Delta x + D \Delta E$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_* \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial E} \\ \frac{\partial f_2}{\partial E} \\ \frac{\partial f_3}{\partial E} \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \;\; 0 \;\; 1] \quad , \quad D = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}_* \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{2x_1 (\mu_0 \mu_r n^2)^2 S}{8m\mu_0} \Big(\overbrace{(x_2+l)\sin^{-1}\left(\frac{r_2}{x_2+l}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{r_1}{x_2+l}\right) + x_2\left(\sin^{-1}\left(\frac{r_1}{x_2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{r_2}{x_2}\right)\right)}^{\Psi} \Big)^2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{(\mu_0 \mu_r n^2)^2 S}{\cancel{4}\mu_0 m} x_1^2 \left(\sin^{-1}\left(\frac{r_2}{x_2+l}\right) - \frac{r_1 \, \mathrm{sign}(x_2+l)}{\sqrt{x_2^2 + 2l x_2 + (r_2+l)(l-r_2)}} \right.$$ ادامه $\rightarrow$

$$-\frac{\pi \left|\frac{1}{x_2+l}\right|}{\sqrt{x_2^2+2lx_2+(r_1+l)(l-r_1)}} + \left|\frac{1}{x_2}\right| \times \left(\frac{r_2 x_2}{\sqrt{x_2^2-r_2^2}} - \frac{r_1 x_2}{\sqrt{x_2^2-r_1^2}}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{r_2}{x_2}\right) -$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{r_1}{x_2}\right)\Bigg)\psi$$

در $\frac{\partial f_3}{\partial x_1}$ و $\frac{\partial f_3}{\partial x_2}$ باید مقادیر * جاگذاری شود که چون به طور فیزیکی l ، r_1 و r_2 را نمی‌دانیم هنوز انجام این امر میسر نیست.

سوال دوم)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Rank(A) = 2$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$RANK(B) = 2$

محاسبه فضای پوچی

$$[A \vdots b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \; (I)$

$3x_3 + x_4 = 0 \; (II)$

$(I), (II) \longrightarrow x_3 = \frac{1}{3}x_1 + x_2$

$\longrightarrow$ $x_1 = free$

$x_2 = free$

$x_3 = \frac{1}{3}x_1 + x_2$

$x_4 = -x_1 - 3x_2$

$$[B \vdots b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_2 + (-5x_3) = 0$

$\longrightarrow$ $x_1 = free$

$x_2 = -x_1$

$x_3 = -\frac{1}{5}x_1$

بعد فضای پوچی

$N_R(A) = 4 - 2 = 2$

$N_R(B) = 3 - 2 = 1$

سوال سوم)

$$r_2 m_2 g \sin(\theta) - r_1 m_1 g \sin(\theta) - F r_2 = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\ddot{\theta}$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \psi$$

Day. Month. Year. Subject.

$$r_2 m_2 g \sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) - r_1 m_1 g \sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)(-\ddot{\psi}) + F r_2$$

اگر ورودی را F در نظر بگیریم، خروجی مطلوب در $0 = \psi^*$ اتفاق می افتد $\longleftrightarrow$ $\cos\psi = 1 - \frac{\psi^2}{2}$

$$r_2 m_2 g (\cos\psi) - r_1 m_1 g (\cos\psi) = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)(-\ddot{\psi}) + F r_2$$

$$r_2 m_2 g \left(1 - \frac{\psi^2}{2}\right) - r_1 m_1 g \left(1 - \frac{\psi^2}{2}\right) = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)(-\ddot{\psi}) + F r_2$$

اگر متغیرهای حالت را به صورت مقابل بگیریم داریم: $x_1 = \psi \;،\; x_2 = \dot{x}_1$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{r_1 m_1 g}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2} - \frac{r_1 m_1 g}{2(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)} x_1^2 - \frac{r_2 m_2 g}{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)} + \frac{r_2 m_2 g}{2(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)} x_1^2 + \frac{F r_2}{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)}$$

$$y = \psi$$

با مرتب کردن عبارات بالا داریم:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{r_1 m_1 g - r_2 m_2 g}{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)} + \frac{r_2 m_2 g - r_1 m_1 g}{2(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)} x_1^2 + \frac{F r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

$$y = \psi$$

ادامه سوال سوم

برای خطی سازی حول $x^* = [\psi \quad \dot{\psi}] = [0 \quad 0]$ داریم:

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta F$$
$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta F$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{r_2 m_2 g - r_1 m_1 g}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2} x_1 & 0 \end{bmatrix}_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial F} \\ \frac{\partial f_2}{\partial F} \end{bmatrix}_* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2} \end{bmatrix} \quad , \quad C = [1 \quad 0] \quad , \quad D = 0$$

سوال چهار) با توجه به معادلات داده شده در سوال داریم:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m_1}\left(u - K\dot{x}|\dot{x}| - m_2 g \sin\theta + m_1 g \sin\theta\right)$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan(\dot{\theta}) = \dot{\theta}\left(1+\tan^2(\theta)\right) = x^2 - x \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{1+\tan^2(\theta)}\left(x^2 - x\right)$$

$x_1 = x$ ، $x_2 = \dot{x}_1$ ، $x_3 = \theta$ اگر متغیر حالت را به این صورت انتخاب کنیم:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}\left(u - K x_2|x_2| - m_2 g \sin(x_3) + m_1 g \sin(x_3)\right)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{1+\tan^2(x_3)}\left(x_1^2 - x_1\right)$$

برای خطی سازی چون نقطه تعادل را به صورت $\theta = 2K\pi$ در نظر گرفتیم و با توجه به تقریب ذکر شده در صورت سوال می توان نوشت:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}\left(u - K x_2|x_2| - m_2 g x_3 + m_1 g x_3\right)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{1+x_3^2}\left(x_1^2 - x_1\right)$$

$$y = x_1$$

حال با توجه به $\Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$ ، $\Delta y = C\Delta x + D\Delta u$ برای محاسبه ماتریس A داریم

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2K|x_2|}{m_1} & -\frac{m_2}{m_1} g + g \\ \frac{2x_1 - 1}{1 + x_3^2} & 0 & \frac{-2x_3(x_1^2 - x_1)}{(1+x_3^2)^2} \end{bmatrix}_*$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری نقطه تعادل}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_2}{m_1} g + g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix}_* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} ، \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ، \quad D = 0$$

سوال پنجم) در سیستم هیدرولیکی

$$q_{out} = a\sqrt{2gh}$$

$$A\frac{dh}{dt} = q_{in} - q_{out}$$

فلوتانک بالا : q_U ، فلوتانک پایینی : q_L

$$q_L = \gamma q \quad , \quad q_U = (1-\gamma) q \quad , \quad 0 < \gamma < 1$$

$$\dot{h}_1 = \frac{-a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_a}{A_1} q_a$$

$$\dot{h}_2 = \frac{-a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_b}{A_2} q_b$$

$$\dot{h}_3 = \frac{-a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3} + \frac{(1-q_b)}{A_3} q_b$$

$$\dot{h}_4 = \frac{-a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_a)}{A_4} q_a$$

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_4} \end{bmatrix} H + \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2}{A_2} \\ 0 & \frac{1-\gamma_2}{A_3} \\ \frac{1-\gamma_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} H$$

$$G(S) = C(SI - A)^{-1} B + D$$

$$G(S) = \begin{bmatrix} \dfrac{y_1 T_1}{A_1 (1+ST_1)} & \dfrac{(1-y_2) T_1}{(1+ST_3)(1+ST_1) A_1} \\ \dfrac{(1-y_1) T_2}{(1+ST_4)(1+ST_2) A_2} & \dfrac{y_2 T_2}{(1+ST_2) A_2} \end{bmatrix}$$