



دانشکده مهندسی صنایع و سیستم ها
گروه فناوری اطلاعات

دانشجو:

محمد رضا صبی پور

تمرین ۷- همبستگی درجه

استاد:

دکتر بابک تیمورپور

۱۴۰۴/۲/۳۱

- ۱ شرح تمرین ۳
- ۲ پاسخ تمرین ۳
- ۱-۲ نمودار مربوط به ماتریس e_{ij} را ترسیم کنید. ۵
- ۲-۲ منحنی knn بر حسب k را بکشید. خط خنثی knn را ترسیم کنید. مقدار structural cut off را نیز محاسبه کنید و ضریب همبستگی را بدست آورید. ۷
- ۳-۲ تحلیل نتایج ۱۰
- ۳ استفاده از هوش مصنوعی ۱۰
-
- شکل ۱-۲ نمودار توزیع درجات در مقیاس Log-Log ۴
- شکل ۲-۲ نمودار ماتریس e_{ij} ۶
- شکل ۲-۳ نمودار میانگین درجه همسایه‌ها بر حسب درجه ۸

۱ شرح تمرین

برای شبکه کلوپ کاراته زاخاری، توزیع درجه را بکشید (مقیاس لگ لگ).

الف) نمودار مربوط به ماتریس A_{ij} را ترسیم کنید.

ب) منحنی knn بر حسب k را بکشید. خط خنثی knn را ترسیم کنید. مقدار structural cut off را نیز

محاسبه کنید.

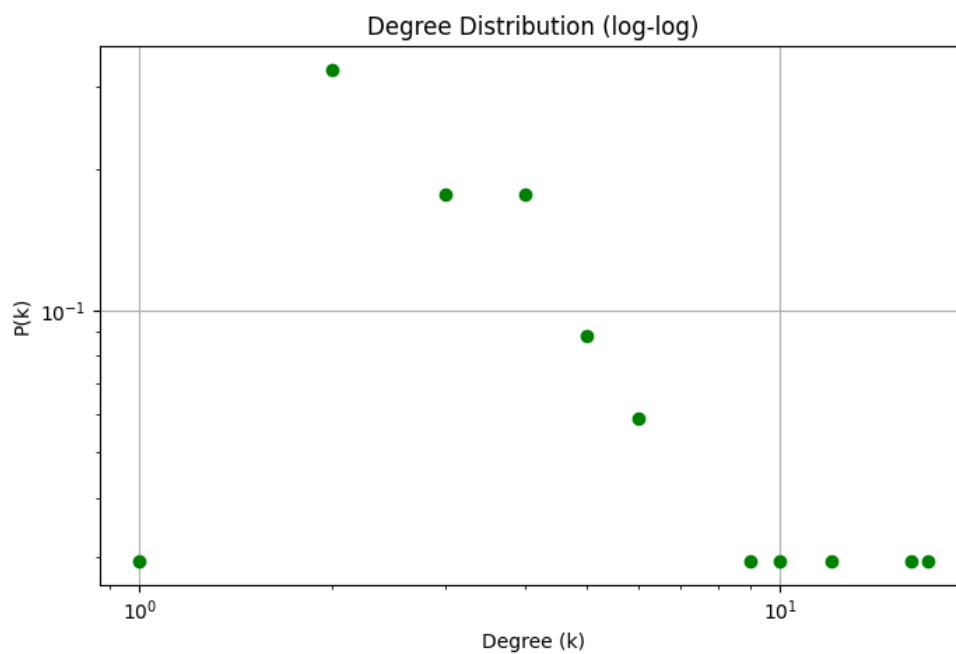
ج) ضریب همبستگی را محاسبه کنید.

د) نتایج را تفسیر کنید

۲ پاسخ تمرین

در ابتدا با استفاده از کتابخانه `igraph`، گراف کلوپ کاراته زاخاری را تشکیل می‌دهیم. سپس با استخراج اطلاعات مورد نیاز از جمله درجه گره‌ها، نمودار توزیع درجه را در مقیاس `Log-Log` ترسیم می‌کنیم. نمودار توزیع درجه در شکل ۱-۲ ترسیم شده است.

همانطور که از شکل مشخص است، این شبکه از توزیع درجه نمایی پیروی می‌کند و یک شبکه `scale-free` نمی‌باشد زیرا در شبکه‌های `scale-free` توزیع درجات در مقیاس `Log-Log` به صورت خطی خواهد بود.



شکل ۱-۲ نمودار توزیع درجات در مقیاس Log-Log

مراحل بالا با استفاده از قطعه کد زیر انجام شده‌اند. در قسمت بالایی کد، کتابخانه‌های مورد نیاز فرخوانده شده‌اند، سپس گراف کلپ کاراته زاخاری را تشکیل می‌دهیم و بعد با استفاده از کتابخانه matplotlib و تابع loglog نمودار توزیع درجات را ترسیم می‌کنیم.

```

import igraph as ig
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import numpy as np

g = ig.Graph.Famous('Zachary')
degree = g.degree()
unique_degree, counts = np.unique(degree, return_counts=True)
prob = counts / len(degree)

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.loglog(unique_degree, prob, 'go', base=10)
plt.xlabel('Degree (k)')
plt.ylabel('P(k)')
plt.title('Degree Distribution (log-log)')
plt.grid(True)
plt.show()

```

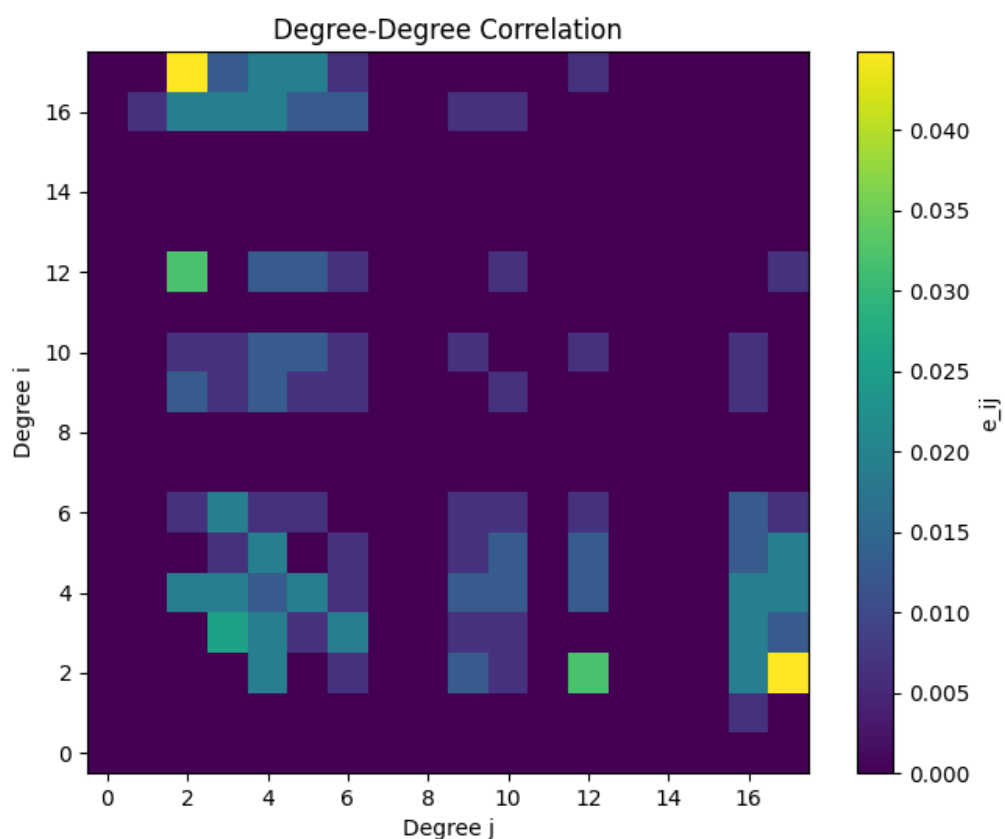
۱-۲ نمودار مربوط به ماتریس e_{ij} را ترسیم کنید.

ماتریس e_{ij} ، یک توزیع احتمال توأم^۱ از درجات گره‌های دو سر یال است. این ماتریس یک ماتریس مربعی است که بعد آن برابر با حداکثر درجه در شبکه است. مقدار درایه‌های این ماتریس برابر با نسبت تعداد یال‌هایی که گره با درجه i را به گره با درجه j متصل می‌کنند به کل یال‌های گراف است. مقادیر این ماتریس از طریق فرمول زیر بدست می‌آید.

$$e_{i,j} = \frac{\text{\# of edges connecting nodes with degree } i \text{ and } j}{\text{total number of edges}}$$

¹ Joint Probability Distribution

برای مصورسازی این ماتریس، از نمودار heatmap استفاده می‌شود. در شکل ۲-۲ نمودار heatmap مربوط به ماتریس e_{ij} ترسیم شده است.



شکل ۲-۲ نمودار ماتریس e_{ij}

نقاطی که رنگ‌های روشن‌تری دارند، نشان‌دهنده اتصالات بیشتر بین گره‌های با درجات مشخص (i,j) هستند و نقاطی که رنگ‌های تاریک‌تری دارند، نشان‌دهنده اتصالات کمتر بین گره‌های با درجات مشخص هستند. همچنین واضح است که نقاط روشن بیشتر در مناطقی قرار دارند که $i=j$ و یا به هم نزدیک هستند. این موضوع نشان می‌دهد که شبکه disassortative است. یعنی گره‌های با درجه‌های بالا به گره‌های با درجه‌های پایین

متصل هستند. بنابراین مشخص است که گراف کلپ کاراته زاخاری دارای خاصیت disassortativity است.

برای انجام محاسبات و ترسیم نمودارهای این بخش، از قطعه کد زیر استفاده شده است.

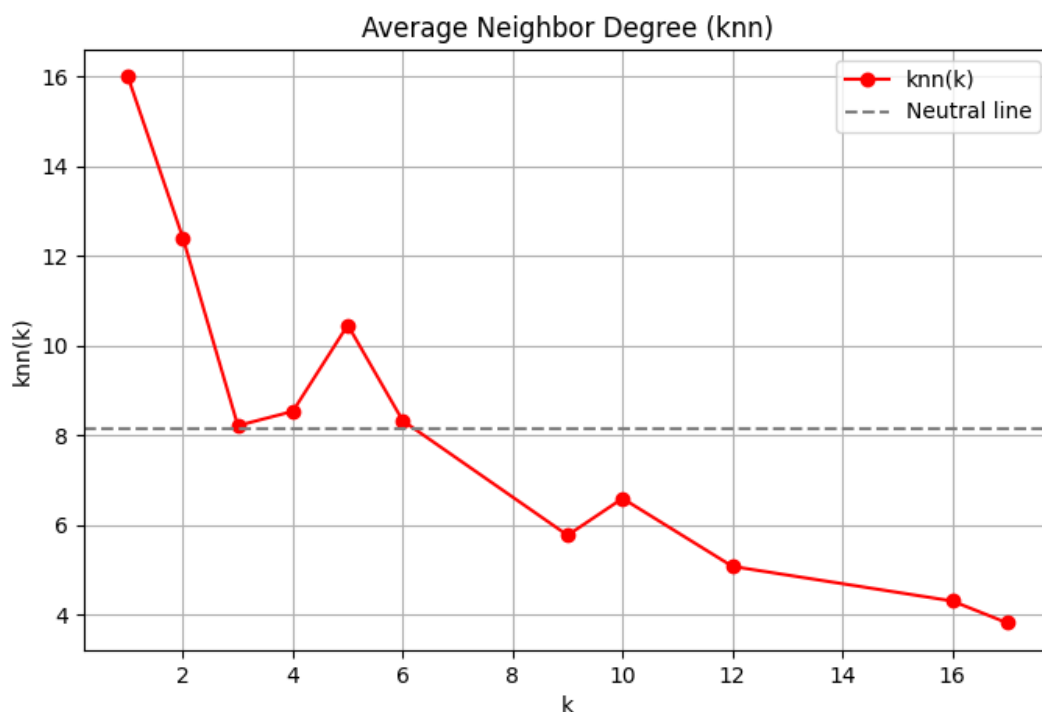
```
edges = g.get_edgelist()
max_degree = max(degree)
e_ij = np.zeros((max_degree + 1, max_degree + 1))
for u, v in edges:
    d_u = degrees[u]
    d_v = degrees[v]
    e_ij[d_u][d_v] += 1
    e_ij[d_v][d_u] += 1
num_edges = len(edges)
e_ij /= (2 * num_edges)
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.imshow(e_ij, cmap='viridis', origin='lower')
plt.colorbar(label='e_ij')
plt.title('Degree-Degree Correlation')
plt.xlabel('Degree j')
plt.ylabel('Degree i')
plt.grid(False)
plt.show()
```

۲-۲ منحنی knn بر حسب k را بکشید. خط خنثی knn را ترسیم کنید. مقدار structural cut off

را نیز محاسبه کنید و ضریب همبستگی را بدست آورید.

در این بخش ابتدا مقادیر مورد نیاز را محاسبه کرده و سپس به ترسیم و تحلیل نمودار knn می‌پردازیم.

در شکل ۲-۳ نمودار میانگین درجه همسایه‌ها بر حسب درجه رسم شده است.



شکل ۲-۳ نمودار میانگین درجه همسایه‌ها بر حسب درجه

شکل ۲-۳ نشان می‌دهد که منحنی $knn(k)$ به‌طور کلی نزولی است و مقادیر $knn(k)$ در ابتدا بسیار بالا هستند و سپس به‌طور کلی کاهش می‌یابند. خط خنثی ثابت است و نشان‌دهنده مقدار مورد انتظار $knn(k)$ در یک شبکه بدون همبستگی درجه است. همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر $knn(k)$ در بیشتر نقاط زیر منحنی خط خنثی می‌باشد. این الگو نشان می‌دهد که گره‌های با درجات بالا به گره‌های با درجات پایین متصل هستند. همچنین همبستگی شبکه منفی ۰/۴۷۶ بدست آمده است که همبستگی منفی نامیده می‌شود.

به‌طور کلی نتیجه می‌شود که شبکه کلپ کاراته زاخاری یک شبکه از نوع $disassortative$ است. همچنین همبستگی به‌دست آمده نیز بر این موضوع دلالت دارد.

همچنین مقدار Structural Cutoff برابر ۳۴/۸۱ بدست آمده است.


```

knn_dict = { }
for i in range(g.vcount()):
    neighbors = g.neighbors(i)
    if not neighbors:
        continue
    neighbor_degrees = [degrees[n] for n in neighbors]
    avg_deg = sum(neighbor_degrees) / len(neighbor_degrees)
    k_i = degrees[i]
    if k_i not in knn_dict:
        knn_dict[k_i] = []
    knn_dict[k_i].append(avg_deg)

avg_knn = {k: sum(v)/len(v) for k, v in knn_dict.items()}

ks = list(avg_knn.keys())
knn_values = list(avg_knn.values())

sorted_indices = np.argsort(ks)
ks_sorted = np.array(ks)[sorted_indices]
knn_sorted = np.array(knn_values)[sorted_indices]

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(ks_sorted, knn_sorted, 'ro-', label='knn(k)')
neutral_line = np.mean(knn_sorted)
plt.axhline(neutral_line, color='gray', linestyle='--', label='Neutral line')
plt.xlabel('k')
plt.ylabel('knn(k)')
plt.legend()
plt.title('Average Neighbor Degree (knn)')
plt.grid(True)
plt.show()
N = g.vcount()
L = g.ecount()
degrees = np.array(g.degree())

k_mean = np.mean(degrees)
k_sq_mean = np.mean(degrees**2)

structural_cutoff = np.sqrt(k_sq_mean * N)
print(f"Structural Cutoff: {structural_cutoff:.2f}")
assortativity = g.assortativity_degree(directed=False)
print(f"Assortativity Degree: {assortativity:.3f}")

```

۲-۳ تحلیل نتایج

به طور کلی و با توجه به نمودارها و مقدار همبستگی، نتیجه می‌گیریم که شبکه کلوپ کاراته زاخاری یک شبکه disassortative زیرا مقادیر بزرگ ماتریس e_{ij} در بیرون قطر اصلی دیده می‌شوند. همچنین ضریب همبستگی بدست آمده نیز بر این موضوع دلالت دارد.

۳ استفاده از هوش مصنوعی

در نوشتن کدهای پایتون، دیباگ کردن و ترسیم درست نمودارها از مدل زبانی qwen استفاده شده است.