Woche 6 Aufgaben

Aufgabe 1

⋆⋆Nennen Sie ein Beispiel aus dem Alltag für eine eindimensionale Bewegung, bei der
(a) die Geschwindigkeit von Osten nach Westen und die Beschleunigung von Westen nach Osten gerichtet ist,
(b) sowohl die Geschwindigkeit als auch die Beschleunigung von Süden nach Norden gerichtet sind,
(c) Die Geschwindigkeit nach oben und die Beschleunigung nach unten zeigt.

Hinweis 1

Aufgabe 2

⋆a) Wie ist die mittlere Geschwindigkeit definiert?
b) Geben Sie die Definitionsgleichung der mittleren Geschwindigkeit an.
c) In welcher Einheit wird die Geschwindigkeit gemessen?

Hinweis 2

Aufgabe 3

⋆⋆a) Wodurch ist die geradlinig gleichförmige Bewegung gekennzeichnet?
b) Wie lauten r-t-Funktion und v-t-Funktion der geradlinig gleichförmigen Bewegung?
c) Unter welcher Voraussetzung lässt sich die Geschwindigkeit mit der Gleichung v=(x-x0)/t berechnen?

Hinweis 3

Beschleunigung ist 0.

Aufgabe 4

⋆⋆Eine Lokomotive der Masse $m_L = 100$ Tonnen zieht 5 Wagen mit einer Gesamtmasse von $m_w = 200$ Tonnen.
Die Zugkraft der Lokomotive erhöht sich aus dem Stand langsam und linear während 20 Sekunden von null auf 400 kN.
Welche Geschwindigkeit hat der Zug nach den 20 Sekunden erreicht?
Wie nimmt die Geschwindigkeit danach (t > 20 s) zu?

Hinweis 4

Gehen Sie nach dem Schema zur Lösung dynamischer Probleme vor. Zunächst definieren Sie eine lineare Funktion für die Kraft, die beschreibt, dass sie von

0 auf 400 kN innerhalb von 20 s anwächst. Danach bestimmen Sie daraus die Beschleunigung und gelangen über Integration zur Geschwindigkeit.

Aufgabe 5

$\star$Ein Auto beschleunigt 15 Sekunden lang mit 1.5 m/s^2 von v_0 =20 km/h auf die Endgeschwindigkeit v_E. Wie gross ist v_E?

Hinweis 5

Aufgabe 6

$\star$Ein Zug verringert in 2 min 30 s seine Geschwindigkeit von 120 km/h auf 35 km/h. Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung in m/s^2.

Hinweis 6

Arbeiten Sie mit der Definition der mittleren Beschleunigung.

Aufgabe 7

Die Funktionsgleichung $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ beschreibt die Bewegung (Positions als Funktion der Zeit) eines Körpers, wobei B = 0.3 m/s, C = 0.14 m/s^2, D = 0.01 m/s^3 ist.
a) Wie gross ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in der ersten, zweiten und dritten Sekunde seiner Bewegung?
b) Wie gross sind die momentanen Geschwindigkeiten nach einer, zwei und drei Sekunden?
c) Die Ergebnisse aus a) und b) sind zu vergleichen und zu diskutieren

Hinweis 7

$\star$a) Nehmen Sie die Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit und wenden Sie sie für Sekunde 1, 2, 3 an.
b) Bilden Sie die Ableitung und setzen Sie die gewünschte Zeit ein.

Aufgabe 8

$\star$Gegeben ist die Funktionsgleichung $x(t) = At + Bt^2 + Ct^3$ mit A=-0.3 m/s, B=0.14 m/s^2, C=0.01m/s^3. Bis zu welcher Zeit bewegt sich der Körper rückwärts, also entgegengesetzt zur Richtung der Koordinatenachse?

Hinweis 8

Was passiert mit der Geschwindigkeit, wenn sich die Bewegungsrichtung ändert? Bestimmen Sie also zuerst die Geschwindigkeit und suchen dort den Zeitpunkt der Richtungsänderung.

Aufgabe 9

⋆⋆⋆⋆ In einem würfelförmigen Kasten der Seitenlänge L bewegen sich N Moleküle der Masse mM völlig ungeordnet. Wir nehmen vereinfachend an, dass Sie alle die gleiche Schnelligkeit v haben.
a) Berechnen Sie den Druck p durch das ständige Prasseln der Moleküle auf die Kastenwände.
b) Schätzen Sie mit dem Ergebnis die Geschwindigkeit der Luftmoleküle unter Normalbedingungen ab.

Hinweis 9

Dies ist keine Aufgabe, die sich für eine Prüfung eignet. Sie hat aber viel mit richtiger Physik zu tun. Die Aufgabe schätzt eine Grösse (die mittlere Geschwindigkeit von Luftmolekülen), für die man kein Gefühl hat. Mit einigen vernünftigen Annahmen und dem Wissen über den Impulsaustausch gelangt man zu erstaunlich vernünftigen Resultaten. Benutzen Sie bei der Abschätzung nur Daten für Luft, die Sie kennen und nicht in Büchern nachschlagen müssen.

Lösungen 1

(a) Zug fährt von Zürich nach Bern mit konstanter Geschwindigkeit und bremst ab.
(b) Zug fährt in Bellinzona aus dem Bahnhof und beschleunigt Richtung Gotthard.
(c) Ball gleich nach dem Hochwerfen, solange er noch steigt.

Lösungen 2

(a) Die Mittlere Geschwindigkeit ist das Verhältnis von Wegänderung zur Zeit. Sie bezieht sich immer auf ein endliches Zeitintverall (z.B. 1 Stunde oder 1 Mikrosekunde).
(b) $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.
(c) Geschwindigkeit wird in Länge/Zeit gemessen, z.B. m/s

Lösungen 3

a) Geschwindigkeit (Vektor) bleibt konstant, in Betrag und Richtung
Dann ist Schnelligkeit auch konstant
Umgekehrt gilt das nicht: Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist die Schnelligkeit konstant, nicht aber die Geschwindigkeit (Vektor)
(b) $\vec{r}(t) = \vec{v_0}t + \vec{r_0}, \vec{v}(t) = \text{konst.}$
c) Nur wenn die Geschwindigkeit konstant ist ($\vec{v}(t) = \text{konst.}$), ist die Durchschnittsgeschwindigkeit auch gleich der (Momentan-)Geschwindigkeit.
Nur dann.
Gehen Sie immer vom allgemeinen Fall einer veränderlichen Geschwindigkeit aus, dann machen Sie nie etwas falsch.

Lösungen 4

Die Kraft ist zwischen 0 und 20 Sekunden zeitabhängig:

$$F(t) = \frac{t}{20\,\mathrm{s}} \cdot 400 \text{ kN}.$$

Bei $t = 0$ ist die Kraft 0, bei $t = 20$ ist die Kraft 400 kN.
Die zu beschleunigende Masse ist:

$$m = m_L + m_w = 300 \text{ To}.$$

Die Beschleunigung nimmt mit der Zeit zu:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\frac{t}{20\,\mathrm{s}} \cdot 400 \text{ kN}}{300 \text{ To}} = 0.067 \cdot \frac{t}{20\,\mathrm{s}} \text{ m/s}^2.$$

Die Geschwindigkeit nach 20 Sekunden ist das Integral über die Beschleunigung. Der Zug steht am Anfang still, also $v_0 = 0$.

$$v(t) = \int_0^{20} 0.067t\,dt = \left[\frac{0.067t^2}{2}\right]_0^{20} = 13.4\,\mathrm{m/s}$$

Nach 20 Sekunden fährt der Zug mit 13.4 m/s oder 48.2 km/h.
Jetzt liegt eine konstante Kraft von 400 kN an, und der Zug wird weiterhin schneller.
Die Beschleunigung ist jetzt:

$$a(t > 20) = \frac{400 \text{ kN}}{300 \text{ To}} = 1.33\,\mathrm{m/s}^2.$$

Die Geschwindigkeit nimmt jede Sekunde um 1.33 m/s zu.

Lösungen 5

Bei konstanter Beschleunigung (und nur dann) ist

$$v_E = a\Delta t + v_0 = 1.5 \cdot 15 + \frac{20}{3.6} = 20\,\frac{m}{s} = 101\,\frac{km}{h}$$

Lösungen 6

Die mittlere Beschleunigung ist die Geschwindigkeitsänderung dividiert durch die Zeit
Die Geschwindigkeitsänderung ist die Geschwindigkeit nachher minus die Geschwindigkeit vorher
Wir rechnen die Geschwindigkeit in m/s um (alternativ könnten wir die Zeit in Stunden umrechnen)
Die mittlere Beschleunigung beträgt damit:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{nacher} - v_{vorher}}{\Delta t} = \frac{35 - 120(\mathrm{km/h})}{150(\mathrm{s})} = \frac{-23.6(\mathrm{m/s})}{150(\mathrm{s})} = -0.16\mathrm{m/s}^2$$

Der Wert der Beschleunigung ist negativ und zeigt somit entgegen der ursprünglichen Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit wird kleiner.

Lösungen 7

a) Berechnen Sie x von t=0,1,2,3 s, nehmen Sie die Differenz und dividieren Sie durch 1 Sekunde. Der Summand A (=x(0), Anfangsposition) wird nicht benötigt, er fällt bei der Differenz heraus.
Lösung in Matlab:
B=0.3;C=0.14;D=0.01;
t=[0 1 2 3]; $x = B * t + C * t.^2 + D * t.^3$
Ort zur Zeit t=0, 1, 2, 3: x = 0 0.4500 1.2400 2.4300
diff(x) = Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Elementen
Durchschnittsgeschwindigkeit nach 1, 2, 3 s: v=0.4500, 0.7900, 1.1900 m/s

b) Momentane Geschwindigkeiten
Ableiten nach t: $v(t) = B + 2Ct + 3Dt^2$ und einsetzen
v=[0.30 0.61 0.98 1.41 1.90] bei t=[0 1 2 3 4] Sekunden

c) Vergleich
Die Momentangeschwindigkeiten liegen zwischen den Durchschnittsgeschwindigkeiten, weil die Geschwindigkeit monoton steigend ist.
Am anschaulichsten ist eine Graphik, in der man die Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeiten einzeichnet.

Lösungen 8

Wir kennen den Weg und erhalten die Geschwindigkeit durch Ableiten des Weges nach der Zeit.
Danach bestimmen wir die Nullstellen der Geschwindigkeit, weil sich dort die Bewegungsrichtung ändert.
Bestimmen Geschwindigkeit aus dem Weg $v(t) = \frac{dx}{dt} = A + 2Bt + 3Ct^2$
Nullstellen suchen: t=[-10.3, +0.971] s
Es ist v(t=0)=A=-0.3 m/s, negativ
Verlauf ist deshalb: Positiv, Nullstelle, Negativ, Nullstelle, Positiv.
Die erste Nullstelle befindet sich bei negativer Zeit. Daher ist die gesuchte Zeit 0.971 s.

$$\text{solve}(A + 2 * B * t + 3 * C * t^2, t)$$

$$\begin{cases} \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 3AC}}{3C} & \text{if } C \neq 0 \\ \frac{-A}{2B} & \text{if } B \neq 0 \wedge C = 0 \\ C & \text{if } A = 0 \wedge B = 0 \wedge C = 0 \\ \emptyset & \text{if } A \neq 0 \wedge B = 0 \wedge C = 0 \end{cases}$$

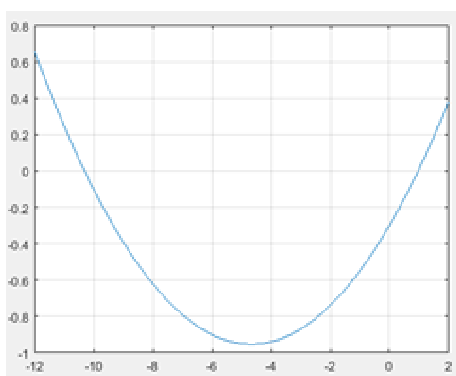

Figure 1: v-t Diagramm

Lösungen 9

Impulserhaltung Welche Kräfte als innere und äussere Kräfte betrachtet werden, hängt von den Systemgrenzen ab.
Wenn wir die Systemgrenze ausserhalb des Kastens setzen, dann wirken keine äusseren Kräfte, der Impuls bleibt erhalten. Das ist aber nicht, was uns interessiert.
Wir setzen die Systemgrenze auf der Innenfläche des Würfels. Der Impuls im Gas bleibt damit NICHT erhalten, es wirken die äusseren Kräfte der Wände auf das Gas. Wir betrachten die Wand als unendlich schwer – damit kehrt sich der Impuls der Moleküle beim Stoss um.

Abschätzungen
Die Aufgabe lässt sich mit unseren Mitteln nicht exakt lösen – aber das gilt für fast alle Aufgaben. Wir schätzen deshalb die wichtigen Grössen ab.
Wir betrachten nur eine der drei Raumdimensionen, z.B. die vertikale Richtung. Nur 1/3 der Moleküle fliegt entlang diese Richtung.
Die Impulsänderung von N/3 Molekülen bei Reflexion an einer Wand ist:$\Delta p = 2 \cdot Nmv \cdot \frac{1}{3}$. Der Faktor 2 kommt daher, dass der Impuls umgekehrt wird.
Der Faktor 1/3 ist eine statistische Abschätzung, so viele Moleküle bewegen sich auf diese Wand zu. Die Zeit zwischen zwei Stössen schätzen wir aus den Gehäusedimensionen und wählen den Weg als hin und zurück:$\Delta t = 2\frac{L}{v}$
Das Molekül erfährt einen Kraftstoss mit einer sehr grossen Kraft in einer sehr kurzen Zeit. Wir ersetzen die Zeit durch die Zeit zwischen zwei Stössen und erhalten damit eine mittlere Kraft. Das ist sinnvoll, weil uns das Verhalten aller N Moleküle interessiert und nicht ein einzelner Stoss.

Rechnung
Mit diesen abgeschätzten Grössen können wir jetzt exakt rechnen
Kraft aus Impulsänderung

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{(2Nmv)v}{3 \cdot 2L} = \frac{1}{3}\frac{Nmv^2}{L}$$

Es ist die Dichte = Masse / Volumen$\frac{Nm}{L^3}$
Der Druck ist Kraft pro Fläche

$$p = \frac{F}{L^2} = \frac{1}{3}\frac{Nmv^2}{L}\frac{1}{L^2} = \frac{1}{3}\frac{Nm}{L^3}v^2 = \frac{1}{3}\rho_{\text{Luft}}v^2 \left(\frac{kg \cdot m^2}{s^2 m^3} = \frac{kg}{s^2 m} = \text{Pa}\right)$$

Der Kasten war vorher offen, im Innern herrscht deshalb der normaleAtmosphärendruck
Luftdruck $p = 10^5 Pa,\ Dichte \rho = 1\frac{kg}{m^3}$
Daraus erhalten wir die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 550\,\frac{m}{s}$$

Vergleich mit korrekter Rechnung
Die Teilchen in einem Gas bewegen sich nicht alle mit gleicher Geschwindigkeit, manche sind schneller, manche langsamer als die mittlere Geschwindigkeit.
Die Verteilung der Geschwindigkeiten folgt einer sogenannten Maxwell-Verteilung und ist proportional zu $\exp(-v^2)$

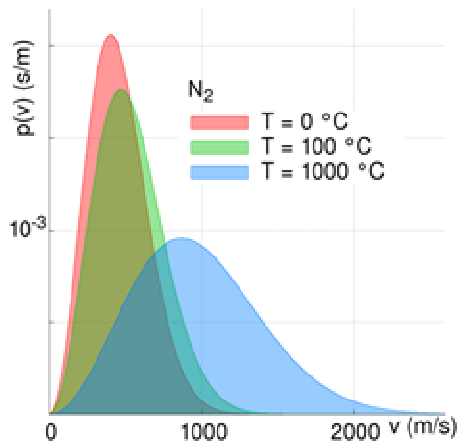

Figure 2: Verteilung der Geschwindigkeiten von Luftmolekülen (Stickstoff N2) für verschiedene Temperaturen.

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit (Spitze der Verteilung) ist $\bar{v} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_M}}$.
Eingesetzt: Boltzmannkonstante $k_B = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K, Temperatur $T = 300$ K, Masse eines Stickstoffmoleküls $m_M = 2.3 \times 10^{-26}$ kg, so wird $\bar{v} = 600\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Unsere grobe Abschätzung liefert mit 550 m/s einen Wert, der nahe beim statistisch korrekten Wert liegt.
Eine Grösse wie der Druck oder die Masse ist eine makroskopische Vereinfachung von unüber-schaubar vielen mikroskopischen Vorgängen.
Diese werden sichtbar z.B. in der brownschen Bewegung oder immer dann, wenn relativ wenige Teilchen beteiligt sind.