

Woche 13 Aufgaben

Aufgabe 1

★★★a) Beweisen Sie für einen Federschwinger, der sich nach der Funktion

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

bewegt, dass zu jedem Zeitpunkt die Gesamtenergie konstant ist.

b) Wie groß ist diese Gesamtenergie, ausgedrückt durch x_0 und k ?

Hinweis 1

Woraus setzt sich die Energie zusammen?

Aus potentieller Energie der Feder und kinetischer Energie. Die potentielle Energie der Feder können Sie nachschlagen. Die kinetische Energie berechnen Sie mit Hilfe der Geschwindigkeit. Da sie den Ort als Funktion der Zeit kennen, können Sie mit Hilfe der Kinematik die Geschwindigkeit ausrechnen, alles als eine Funktion der Zeit.

Aufgabe 2

★★

- Eine Last der Masse 10 t hängt an einer Laufkatze und wird mit der Geschwindigkeit 1.0 m/s horizontal bewegt.
- Der Schwerpunktabstand der Last vom Aufhängepunkt beträgt 5.0 m.
- Beim plötzlichen Bremsen der Laufkatze beginnt die Last zu schwingen.

a) Wie hoch ist die höchste Beanspruchung (Zugkraft) des Seiles?

b) Mit welcher Amplitude schwingt die Last?

Hinweis 2

a) Betrachten Sie die Last: Welche Kräfte wirken auf sie, wenn sie anfängt zu schwingen? Um welche Bewegung handelt es sich?

Um eine Kreisbewegung.

b) Schauen Sie die Eigenfrequenz nach.

Schreiben Sie die Gleichung einer Schwingung auf, leiten Sie daraus die maximale Geschwindigkeit ab. Diese kennen Sie ja. Daraus sollten Sie dann die Amplitude der Schwingung (also max. Auslenkung) bestimmen können.

Aufgabe 3

★ Durch Anhängen einer Last der Masse $m_{\text{Last}} = 1050 \text{ kg}$ an einen Kranhaken der Masse $m_{\text{Haken}} = 60 \text{ kg}$ dehnt sich das Seil um die Strecke $\Delta L = 32 \text{ mm}$. Mit welcher Frequenz kann die Last vertikale Schwingungen ausführen?

Hinweis 3

Betrachten Sie das Seil wie eine Feder. Schlagen Sie die Formel für die Eigenfrequenz des Federschwingers nach.

Das benötigte k bestimmen Sie über das Hookesche Gesetz.

Aufgabe 4

★★ Ein Federschwinger führt eine harmonische (sinusförmige) Schwingung mit einer Amplitude von $A_0 = 4.0 \text{ cm}$ aus. Er ist zu einem bestimmten Zeitpunkt $x = 2.0 \text{ cm}$ von der Gleichgewichtslage entfernt. Welcher Bruchteil der Gesamtenergie ist hier potenzielle Energie?

Hinweis 4

Berechnen Sie das Verhältnis der potentiellen Energie der gespannten Feder an den beiden Positionen.

Aufgabe 5

★ Der Ort eines bestimmten Teilchens ist gegeben durch:

$$x(t) = 7.0 \text{ cm} \cdot \cos(6\pi (1/\text{s}) t),$$

wobei t in Sekunden einzusetzen ist. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- (a) Wie ist die Frequenz f ?
- (b) Wie ist die Schwingungsdauer T ?
- (c) Wie ist die Amplitude A_0 der Teilchenbewegung?
- (d) Wann befindet sich das Teilchen zum ersten Mal nach $t = 0$ in seiner Gleichgewichtslage (schwingt durch den Nullpunkt)?
- (e) In welche Richtung bewegt es sich zu diesem Zeitpunkt?

Hinweis 5

a-c ablesen

d: Suchen Sie die erste Bedingung für Auslenkung, also $x(t) = 0$.

e: Welche Grösse der Kinematik zeigt in Bewegungsrichtung? Bestimmen Sie diese und setzen den Zeitpunkt ein.

Aufgabe 6

★★

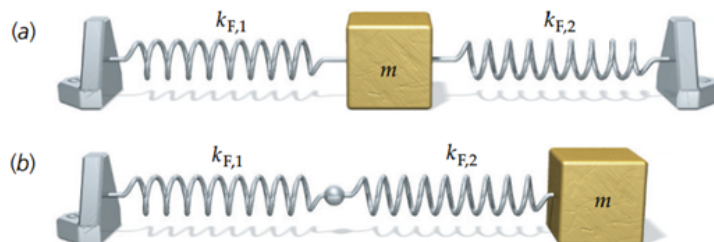
- Nach einer Spezifikation müssen elektronische Geräte Beschleunigungen bis zu $10g = 98.1 \text{ m/s}^2$ aushalten (g ist die Gravitationsfeldstärke der Erde).
- Um zu überprüfen, ob die Produkte Ihrer Firma diesen Anforderungen entsprechen, wollen Sie einen Rütteltisch verwenden, der ein Gerät bei verschiedenen Frequenzen und Amplituden einer sinusförmigen Beschleunigung aussetzt.
- Wie groß muss beim Test auf die Einhaltung der $10g$ -Spezifizierung die Frequenz sein, wenn die Schwingungsamplitude $A = 1.5 \text{ cm}$ beträgt?

Hinweis 6

Stellen Sie eine allgemeine Gleichung für $x(t)$ einer Schwingung auf und bestimmen Sie daraus die Beschleunigung. Suchen Sie danach die maximale Beschleunigung, die während der Schwingung auftritt. Damit können Sie die Frequenz bestimmen.

Aufgabe 7

★★Eine Masse m schwingt an zwei linearen Federn wie unten abgebildet. Die Masse m und die beiden Federkonstanten k_{F1} und k_{F2} sind bekannt. Berechnen Sie für beide Fälle die Kreisfrequenz ω der Schwingung und die effektive Federkonstante k_{eff} .



Hinweis 7

Parallel- oder Serienschaltung? Drücken Sie die Kraft in a) als Funktion der Auslenkung aus und in b) die Gesamtauslenkung als Funktion der Kraft. Aus dem effektiven k und m können Sie die Frequenz bestimmen.

Aufgabe 8

★★ Ein Holzklotz schwingt reibungsfrei an einer horizontalen Feder mit der Kreisfrequenz ω_0 . Auf ihm liegt eine Holzplatte, die von dem Klotz mitgeführt wird. Die Haftreibungszahl zwischen beiden Holzkörpern ist μ_H . Berechnen Sie die maximale Amplitude, bei der die aufliegende Holzplatte gerade noch nicht rutscht.

Hinweis 8

Machen Sie eine Skizze.

Was bedeutet "nicht rutschen" für die Kraft, die die Platte beschleunigt? Wie gross kann sie maximal sein?

Wie hängt diese Kraft mit der Schwingung zusammen? Stellen Sie die Gleichung für die Auslenkung auf und berechnen Sie die Beschleunigung des Klotzes. Suchen Sie die maximale Beschleunigung. Damit haben Sie auch die maximale Kraft, die nötig ist, um die Platte zu beschleunigen. Diese darf maximal so gross sein, dass die Platte nicht rutscht.

Aufgabe 9

★ Ein Gegenstand mit einer Masse von $m = 2\text{ kg}$ sei an einer horizontalen Feder mit der Federkonstanten $k = 5000\text{ N/m}$ befestigt. Die Feder wird um $x_0 = 10\text{ cm} = 0.1\text{ m}$ aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und losgelassen. Die Feder ist masselos. Bestimmen Sie:

- a) die Frequenz f ,
- b) die Kreisfrequenz ω ,
- c) die Schwingungsdauer T ,
- d) die Amplitude A ,
- e) die Maximalgeschwindigkeit v_{\max} ,
- f) die Maximalbeschleunigung a_{\max} ,
- g) wann der erste Durchgang durch die Ruhelage erfolgt und wie groß dann die Beschleunigung ist.

Hinweis 9

Standard

Lösungen 1

Wir kennen die Bewegungsgleichung:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t), \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t)$$

Aus der Bewegungsgleichung erhalten wir die potenzielle und die kinetische Energie zu jedem Zeitpunkt t_0 . Dabei ist die potenzielle Energie die Arbeit, um die Feder gegen die Federkraft $F = -kx$ zu spannen:

$$E_{\text{kin}}(t_0) = \frac{1}{2}mv^2(t_0) = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \cos^2(\omega t_0)$$

$$E_{\text{pot}}(t_0) = \frac{1}{2}kx^2(t_0) = \frac{1}{2}kx_0^2 \sin^2(\omega t_0)$$

Die gesamte Energie ist die Summe der beiden:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \cos^2(\omega t_0) + \frac{1}{2}kx_0^2 \sin^2(\omega t_0)$$

Aus der Lösung der Schwingungsgleichung (siehe Vorlesung) kennen wir den Zusammenhang zwischen Federkonstante und Kreisfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Diesen Ausdruck für die Kreisfrequenz setzen wir bei der kinetischen Energie ein und erhalten schließlich:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}x_0^2k (\sin^2(\omega t_0) + \cos^2(\omega t_0)) = \frac{1}{2}kx_0^2$$

Am Schluss nutzen wir, dass $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Die Summe von kinetischer und potenzieller Energie ist konstant.

Lösungen 2

a) **Belastung** Gegeben:

$$m = 10 \text{ t} = 1 \cdot 10^4 \text{ kg}, \quad v = 1.0 \text{ m/s}, \quad R = 5.0 \text{ m}$$

Die Belastung F setzt sich aus der Gewichtskraft und der Radialkraft zusammen:

$$F = mg + m \frac{v^2}{R}$$

Einsetzen der Werte:

$$F = m \left(g + \frac{v^2}{R} \right) = 10^4 \left(9.81 + \frac{1.0^2}{5.0} \right) \text{ N}$$

Berechnung:

$$F = 10^4 \cdot 10.01 = 102'000 \text{ N}$$

Die Radialkraft, die erforderlich ist, um die Masse auf der Kreisbahn zu halten, addiert sich zur Gewichtskraft der Last.

b) Amplitude Die Last schwingt, und wir bezeichnen den Auslenkwinkel mit $\varphi(t)$. Die Kreisfrequenz des Fadenpendels ist gegeben durch:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9.81}{5.0}} = 1.41 \text{ s}^{-1}$$

Die Bewegung wird beschrieben durch:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0 t), \quad \omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$$

Die Tangentialgeschwindigkeit ergibt sich aus der Winkelgeschwindigkeit:

$$v_T = \omega(t)R = R\omega_0 \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$$

Die Amplitude der Geschwindigkeit ist:

$$v_0 = R\omega_0 \varphi_0$$

Aufgelöst nach der Winkelamplitude φ_0 :

$$\varphi_0 = \frac{v_0}{R\omega_0}$$

Einsetzen der Werte:

$$\varphi_0 = \frac{1.0}{5.0 \cdot 1.41} = 0.141 \text{ rad} = 8.1^\circ$$

Die maximale Auslenkung s ergibt sich zu:

$$s = R\varphi_0 = 5.0 \text{ m} \cdot 0.141 = 0.71 \text{ m}$$

Lösungen 3

Annahme: Das Seil dehnt sich linear, daher gilt Hooke's Gesetz:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x}$$

Einsetzen der Werte:

$$k = \frac{1050 \cdot 9.81}{32 \cdot 10^{-3}} = 32.8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Die Kreisfrequenz ω berechnet sich zu:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{xm}} = \sqrt{\frac{g}{x}}$$

Einsetzen der Werte:

$$\omega = \sqrt{\frac{9.81}{32 \cdot 10^{-3}}} = 17.7 \text{ s}^{-1}$$

Die Frequenz f ist:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{17.7}{2\pi} = 2.81 \text{ Hz}$$

Ergebnis: Die Last kann mit einer Frequenz von $f = 2.81 \text{ Hz}$ vertikale Schwingungen ausführen.

Lösungen 4

Wenn der Federschwinger voll um A_0 ausgelenkt ist, dann besitzt er nur potenzielle Energie:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}kA_0^2.$$

Auf halbem Weg ist seine Energie:

$$E = \frac{1}{2}k\left(\frac{A_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}k\frac{A_0^2}{4}.$$

Das Verhältnis ist:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\frac{1}{2}k\frac{A_0^2}{4}}{\frac{1}{2}kA_0^2} = \frac{1}{4}.$$

Bei halber Auslenkung ist $\frac{1}{4}$ der Energie in potenzieller Energie gespeichert und $\frac{3}{4}$ in kinetischer Energie.

Lösungen 5

- (a) Die Frequenz f ergibt sich aus dem Argument des Kosinus, $6\pi \text{ (1/s)} = 2\pi f$.
Daraus folgt:

$$f = \frac{6\pi}{2\pi} = 3 \text{ Hz}.$$

- (b) Die Schwingungsdauer T ist der Kehrwert der Frequenz:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3} \text{ s} \approx 0.333 \text{ s}.$$

- (c) Die Amplitude A_0 ist der Vorfaktor des Kosinus in der Gleichung:

$$A_0 = 7.0 \text{ cm}.$$

- (d) Das Teilchen befindet sich in der Gleichgewichtslage, wenn $x(t) = 0$. Dies ist der Fall, wenn:

$$\cos(6\pi t) = 0.$$

Der Kosinus wird bei $(2n + 1)\pi/2$ für $n \in \mathbb{Z}$ gleich null. Für das erste Auftreten nach $t = 0$ setzen wir $n = 0$:

$$6\pi t = \frac{\pi}{2} \implies t = \frac{1}{12} \text{ s} \approx 0.083 \text{ s}.$$

- (e) Um die Bewegungsrichtung zu bestimmen, berechnen wir die Geschwindigkeit $v(t)$:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -7.0 \cdot 6\pi (1/\text{s}) \cdot \sin(6\pi t).$$

Zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{12} \text{ s}$, haben wir:

$$v\left(\frac{1}{12}\right) = -7.0 \cdot 6\pi \cdot \sin\left(6\pi \cdot \frac{1}{12}\right).$$

Da $\sin(\pi/2) = 1$, folgt:

$$v\left(\frac{1}{12}\right) = -7.0 \cdot 6\pi \approx -131.9 \text{ cm/s}.$$

Die Geschwindigkeit ist negativ, daher bewegt sich das Teilchen in negativer Richtung.

Ergebnis:

- (a) Frequenz: $f = 3 \text{ Hz}$
- (b) Schwingungsdauer: $T \approx 0.333 \text{ s}$
- (c) Amplitude: $A_0 = 7.0 \text{ cm}$
- (d) Zeit des ersten Durchgangs durch die Gleichgewichtslage: $t \approx 0.083 \text{ s}$
- (e) Bewegungsrichtung: negativ.

Lösungen 6

Die maximale Beschleunigung eines harmonischen Oszillators ergibt sich aus:

$$a_{\max} = \omega^2 A,$$

wobei ω die Kreisfrequenz und A die Schwingungsamplitude ist. Für ω gilt:

$$\omega = 2\pi f,$$

wobei f die Frequenz ist. Einsetzen von $\omega = 2\pi f$ in die Beschleunigungsformel ergibt:

$$a_{\max} = (2\pi f)^2 A = 4\pi^2 f^2 A.$$

Um f zu bestimmen, lösen wir die Gleichung nach f auf:

$$f = \sqrt{\frac{a_{\max}}{4\pi^2 A}}.$$

Einsetzen der Werte:

$$a_{\max} = 98.1 \text{ m/s}^2, \quad A = 1.5 \text{ cm} = 0.015 \text{ m}.$$

$$f = \sqrt{\frac{98.1}{4\pi^2 \cdot 0.015}}.$$

Berechnung:

$$f = \sqrt{\frac{98.1}{0.592}} = \sqrt{165.7} \approx 12.9 \text{ Hz}.$$

Ergebnis: Die Frequenz muss beim Test auf die Einhaltung der 10 g-Spezifizierung

$f \approx 12.9 \text{ Hz}$ betragen.

Lösungen 7

Fall (a)

1. **Systembeschreibung:** Zwei Federn mit Federkonstanten k_{F1} und k_{F2} sind parallel mit einer Masse m verbunden. 2. **Effektive Federkonstante:**

$$k_{\text{eff}} = k_{F1} + k_{F2}$$

3. **Kreisfrequenz:**

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \sqrt{\frac{k_{F1} + k_{F2}}{m}}$$

Fall (b)

1. **Systembeschreibung:** Zwei Federn mit Federkonstanten k_{F1} und k_{F2} sind in Reihe mit einer Masse m verbunden. Eine kleine Kugel (vernachlässigbare Masse) verbindet die beiden Federn. 2. **Effektive Federkonstante:**

$$\frac{1}{k_{\text{eff}}} = \frac{1}{k_{F1}} + \frac{1}{k_{F2}}$$

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_{F1} \cdot k_{F2}}{k_{F1} + k_{F2}}$$

3. **Kreisfrequenz:**

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \sqrt{\frac{k_{F1} \cdot k_{F2}}{k_{F1} + k_{F2} \cdot m}}$$

Lösungen 8

Die maximale Haftreibungskraft ist:

$$F_H = F_N \mu_H,$$

wobei F_N die Normalkraft und μ_H der Haftreibungskoeffizient ist. Die Beschleunigung ist gegeben durch:

$$a = \ddot{x} = x_0 \omega^2 \sin(\omega t) = a_0 \sin(\omega t) \implies a_0 = x_0 \omega^2.$$

Die maximale Trägheitskraft ist:

$$F_{\text{amax}} = m a_0 = m x_0 \omega^2.$$

Damit die Haftreibungskraft ausreicht, gilt:

$$F_{\text{amax}} < F_H \implies m x_0 \omega^2 < m g \mu_H.$$

Auflösen nach x_0 :

$$x_0 < \frac{g \mu_H}{\omega^2}.$$

Daraus folgt: Wenn ω wächst, wird x_0 immer kleiner.

Lösungen 9

(a) Aus der Lösung der Differenzialgleichung wissen wir:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 50 \text{ s}^{-1}.$$

(b), (c) Aufgelöst nach f und T :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 7.96 \text{ Hz}, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 0.13 \text{ s}.$$

(d) Die Amplitude ist die Anfangsauslenkung:

$$A = 10 \text{ cm}.$$

(e) Die Geschwindigkeit erhalten wir durch Ableiten der Ortsfunktion. Sie erreicht ihr Maximum, wenn der Sinus gleich -1 ist:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t), \quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -x_0 \omega \sin(\omega t).$$

Damit:

$$v_0 = x_0 \omega = 5 \text{ m/s}.$$

(f) Die maximale Beschleunigung erhalten wir durch nochmaliges Ableiten:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t), \quad a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t).$$

Damit:

$$a_0 = x_0 \omega^2 = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

(g) Der erste Durchgang durch die Ruhelage erfolgt nach einer Viertelperiode:

$$T/4 = 0.031 \text{ s}.$$

Der Phasenwinkel ist dort $\omega t = 90^\circ$. Die Geschwindigkeit ist maximal und die Beschleunigung gleich null.