Week 2 Questions

Question 1

Berechnen Sie die auf eine Rakete beim Start ausgeübte Kraft. Die Antriebsgase werden mit einer Geschwindigkeit von 50 000 m/s und einem Massestrom von 1200 kg/s ausgestossen.$\star$

Hint 1

Versuchen Sie über den Kraftstoss zu rechnen. Sie können den Fall für 1 s rechnen. Als Alternative schauen Sie auf der Folie "Messung der Austrittsgeschwindigkeit der Gase über die Schubkraft" nach.

Question 2

Eine zweistufige Rakete mit einer Masse von 900 kg bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $6.50 \cdot 103$ m/s von der Erde weg, als eine geplante Explosion die Rakete in zwei Teile mit glei-cher Masse teilt, die sich dann mit einer relativen Geschwindigkeit (relativ zueinander) von $2.80 \cdot 103$ m/s entlang der ursprünglichen Bewegungslinie bewegen. Wie gross ist die Geschwindigkeit jedes Teils und seine Richtung (relativ zur Erde) nach der Explosion?$\star\star$

Hint 2

Welche Grösse bleibt erhalten? Setzen Sie hierfür die Ausdrücke vor und nach der Trennung an und setzen Sie sie gleich. Übrigens: Am einfachsten lässt sich das Problem lösen, wenn Sie Ihr Innertialsystem mit der Rakete mitfliegen lassen.

Question 3

Ein Neutron (n) trifft mit der kinetischen Energie Tn elastisch und zentral auf ein ruhendes Deuteron. Ein Deuteron (D) ist der Kern eines schweren Wasserstoffatoms. Er besteht aus einem Proton und einem Neutron. (mD 2 mn).
a) Bestimmen Sie die kinetische Energie Tn des Neutrons nach diesem Stoss.
b) Welche Energie hätte das Neutron, wenn es zentral auf ein Proton treffen würde?
c) Warum schirmt man Neutronenquellen mit Paraffin und nicht mit Blei ab?$\star\star$

Hint 3

Um auf die kinetische Energie zu kommen, berechnen Sie die Geschwindigkeit nach dem Stoss als Funktion der Geschwindigkeit vor dem Stoss nach der Vorgehensweise zum elastischen Stoss. Danach berücksichtigen Sie, wie die Geschwindigkeit in die kinetische Energie eingeht.

Question 4

Beim spontanen Kernzerfall sendet ein U-238-Kern ein α-Teilchen (2 Protonen, 2 Neutronen) nach der Reaktionsgleichung:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\alpha$$

aus. Die Geschwindigkeit des α-Teilchens wird zu $1.4 \cdot 10^7$ m/s gemessen. Welches ist die Geschwindigkeit v_{Th} des Rückstoßkerns Thorium?$\star$

Hint 4

Das Massenverhältnis ist 234/4. Wie gross ist der Gesamtimpuls? Denken Sie an das Beispiel mit dem Gewehr.

Question 5

Albeiten

a) $f(x) = c$	b) $y(x) = 1$	c) $x(t) = x_0$
d) $y(x) = x$	e) $y(x) = x^3$	f) $y(x) = x^4$
g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$	h) $y(x) = \sqrt[5]{x^3}$	i) $y(\alpha) = \sin(\alpha)$
j) $y(\alpha) = \cos(\alpha)$		

Hint 5

Potenzen mit Exponent ausschreiben und dann Regeln anwenden.
Die Wahl der Variablennamen ist egal.

Question 6

Konstanter Faktor
Ein konstanter Faktor wird vor die Ableitung gezogen: $\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}(f(x))$

a) $f(x) = cx^{11}$ b) $x(t) = v_0 t$ c) $x(t) = \frac{a_0}{2}t^2$

Hint 6

Ein konstanter Faktor wird vor die Ableitung gezogen: $\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}(f(x))$

Question 7

Summenregel
Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen

a) $f(x) = x^2 + a \cdot x^9$ b) $x(t) = v_0 t + s_0$ c) $x(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t + s_0$

Hint 7

Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen, also die Summanden einzeln ableiten und addieren.

Question 8

Kettenregel
Zusammengesetzte Funktionen werden von aussen nach innen abgeleitet, die Ableitungen werden miteinander multipliziert

a) $y(x) = \sin(ax)$ b) $y(x) = \cos(ax)$ c) $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$
d) $y(x) = \sin(ax^2)$ e) $y(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x^3}\right)$

Hint 8

Zusammengesetzte Funktionen werden von aussen nach innen abgeleitet, die Ableitungen werden miteinander multipliziert.

Solution 1

Die während einer Sekunde ausgestoßenen Gase haben einen Impuls von $|\vec{p}| = 1{,}2 \times 10^3\ \text{kg} \cdot 50 \times 10^3\ \text{m/s} = 60 \times 10^6\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$. Die Rakete erhält den genau gleichen Impuls in Gegenrichtung.
Die erzeugte Kraft ist:

$$|\vec{F}| = \frac{|\vec{p}|}{\Delta t} = \frac{60 \cdot 10^6\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{1\ \text{s}} = 60 \cdot 10^6\ \text{N}$$

–Offenbar erhalten wir die Kraft direkt durch Multiplikation des Massestroms mit der Geschwindigkeit.

Solution 2

Der Impuls bleibt erhalten, weil keine äußeren Kräfte wirken. Von der Gravitation sehen wir ab, weil die Explosion sehr schnell erfolgt. Der Impuls vor der Explosion ist:

$$\vec{p}_{\text{vor}} = (m + m)\vec{v}_{\text{vor}} \quad \text{(die Massen sind gleich)}$$

Der Impuls nach der Explosion ist:

$$\vec{p}_{\text{nach}} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

Die beiden Impulse sind gleich:

$$(m + m)\vec{v}_{\text{vor}} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2).$$

Die Masse kürzt sich heraus, es bleibt:

$$2\vec{v}_{\text{vor}} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Wir kennen zusätzlich die Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Massen:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Damit können wir $\vec{v}_2$ durch $\vec{v}_1$ ausdrücken:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \Delta\vec{v}$$

und oben einsetzen:

$$2\vec{v}_{\text{vor}} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 - \Delta\vec{v}) = 2\vec{v}_1 - \Delta\vec{v}.$$

Daraus erhalten wir $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_1 = \frac{2\vec{v}_{\text{vor}} + \Delta\vec{v}}{2} = \vec{v}_{\text{vor}} + \frac{\Delta\vec{v}}{2}.$$

Mit Zahlen:

$$\vec{v}_1 = 6.5 \cdot 10^3 \,\text{m/s} + 0.8 \cdot 10^3 \,\frac{\text{m/s}}{2} = 7.9 \cdot 10^3 \,\text{m/s}.$$

Und:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \Delta\vec{v} = 7.9 \cdot 10^3 \,\text{m/s} - 0.8 \cdot 10^3 \,\text{m/s} = 7.1 \cdot 10^3 \,\text{m/s}.$$

Beide Geschwindigkeiten sind positiv, beide Bruchstücke fliegen von der Erde aus gesehen weiterhin vorwärts.
Die Lösung lässt sich drastisch vereinfachen: Wie fliegen mit der Rakete mit, dann bleibt sie von uns aus gesehen stehen.
Bei der Explosion fliegen beide Bruchstücke nach vorn und nach hinten weg mit gleicher Geschwindigkeit $\frac{\Delta v}{2}$
Um die Sache wieder von der Erde aus anzuschauen, addieren wir die ursprüngliche Geschwindigkeit dazu.

Solution 3

Stoss mit Deuteron
Es handelt sich um einen elastischer^n Stoß. Die Überlegungen hängen nicht von der Grösse der Stosspartner ab (ein Proton ist 1E-15 m gross).
Energie und Impuls bleiben erhalten.
Die Art der Kräfte (hier: starke Kernkraft) ist NICHT relevant – actio=reactio gilt auch dort.
Das Deuteron hat keine Anfangsgeschwindigkeit, v2=0.

Elastischer Stoss allgemein
Die Geschwindigkeit des ersten Körpers nach dem Stoss ist:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2$$

Eingesetzt mit $m_2 = 2m_1$ und $v_2 = 0$:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 = -\frac{1}{3}\vec{v}_1$$

Das Neutron fliegt mit einem Drittel seiner ursprünglichen Geschwindigkeit zurück.

Die kinetische Energie geht mit der Geschwindigkeit im Quadrat und beträgt noch $\frac{1}{9}$ der ursprünglichen kinetischen Energie.
Das Neutron verliert viel Energie, was in einer Abschirmung erwünscht ist.

Stoß mit Proton allein
Zentraler Stoß mit Proton allein, die Massen sind jetzt gleich.
Das Proton übernimmt den Impuls des Neutrons. Das Neutron hat keinen Impuls und damit auch keine Energie mehr (das ist erwünscht in einer Abschirmung).
$u_1 = 0$, weil $(m_1 - m_2) = 0$.
Das Neutron verliert alle Energie, was in einer Abschirmung ideal ist.

Stoß mit Proton allein
Zentraler Stoß mit Proton allein, die Massen sind jetzt gleich.
Das Proton übernimmt den Impuls des Neutrons.
Das Neutron hat keinen Impuls und damit auch keine Energie mehr (das ist erwünscht in einer Abschirmung).
$u_1 = 0$, weil $(m_1 - m_2) = 0$.
Das Neutron verliert alle Energie, was in einer Abschirmung ideal ist.

Weshalb Paraffin (Kerzenwachs) statt Blei für Neutronen?
Die Geschwindigkeit u1 nach dem Stoss ist betragsmässig am Kleinsten, wenn die Massen der stossenden Teilchen gleich sind.
Möglichst viele Wasserstoffatome nehmen am meisten Energie auf. Blei ist sehr schwer, das Neutron würde reflektiert und nur sehr wenig Energie verlieren.

Solution 4

Es geht um einen Vorgang aus der Kernphysik. Die Impulserhaltung gilt aber auch dort und wir können rechnen, ohne die Kräfte zu verstehen.
Annahme: Das Alphateilchen fliegt mit 1.4·107 m/s nach rechts.
Der Gesamtimpuls ist am Anfang null und bleibt erhalten, weil keine äusseren Kräfte wirken (oder nur ganz schwach, wie z.B. die Gravitation).

$$\vec{p} = 0 = m_{\text{th}}\vec{v}_{\text{th}} + m_\alpha \vec{v}_\alpha$$
$$\vec{v}_{\text{th}} = -\frac{m_\alpha}{m_{\text{th}}}\vec{v}_\alpha = -2.4 \times 10^5\,\text{m/s}$$

Die Geschwindigkeiten teilen sich umgekehrt proportional zu den Massen auf.
Der Thorium-Kern fliegt in die entgegengesetzte Richtung des Alpha-Teilchens.

Solution 5

Verschiedene Potenzfunktionen + Trigo + Logarithmen.
Potenzen mit Exponent ausschreiben und dann Regeln anwenden.

Die Wahl der Variablennamen ist egal.

a) 0	b) 0	c) 0
d) 1	e) $3x^2$	f) $4x^3$
g) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$	h) $\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$	i) $\cos(\alpha)$
j) $-\sin(\alpha)$		

Solution 6

a) $11 \cdot c \cdot x^{10}$ b) v_0 c) $a_0 t$

Solution 7

a) $2x + 9 \cdot a \cdot x^8$ b) v_0 c) $a_0 t + v_0$

Solution 8

a) $a\cos(ax)$	b) $-a\sin(ax)$	c) $x_0\omega\cos(\omega t)$
d) $2ax\cos(ax^2)$	e) $\frac{3}{5\sqrt[3]{x^2}}\cos\left(\sqrt[5]{x^3}\right)$	