Woche 10 Aufgaben

Aufgabe 1

$\star\star$ Sie fahren mit dem Velo einen um $5°$ geneigten Hang herunter, ohne in die Pedale zu treten. Ihr Velo rollt nicht ideal, der Gleitreibungskoeffzient beträgt $\mu = 0.05$. Ausserdem bremst sie der Luftwiderstand mit turbulenter Reibung. Nehmen Sie Ihren Querschnitt als $A = 1\ m^2$ und den Widerstandsbeiwert $c_w = 0.5$ an. Die Dichte von Luft beträgt $\rho = 1.23\ kg/m^3$. Ihre Masse mit Velo ist $m = 70\ kg$, rechnen Sie mit $g = 10\ m/s^2$.
Skizzieren Sie die Situation.
Zeichnen Sie alle Kräfte ein, die unmittelbar auf Sie wirken.
Wenn eine Kraft nicht parallel zu den gewählten Koordinatenachsen ist, zerlegen Sie die Kraft in Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen und bezeichnen Sie die Komponenten.
Wie groß ist Ihre stationäre Endgeschwindigkeit? Folgen Sie zwingend dem Schema zur Lösung dynamischer Aufgaben, wie es in den Vorlesungsfolien dargestellt ist.
Setzen Sie erst ganz am Schluss Zahlen ein.

Hinweis 1

Welche Bedingung gilt für die Beschleunigung beim Erreichen derEndgeschwindigkeit?

Aufgabe 2

$\star\star\star$Ein kleiner Block mit der Masse m_1 liegt auf einem vertikal schwingenden Kolben, der eine harmonische Bewegung gemäß

$$x(t) = -x_m \sin(\omega t)$$

ausführt.

a) Zeigen Sie, dass der Block für $\omega^2 x_m > g$ abheben wird.

b) Bestimmen Sie, wann der Block abheben wird, wenn $\omega^2 x_m > 3g$ und $x_m = 15\,\mathrm{cm}$.

Hinweis 2

Was bedeutet "abheben"? Denken Sie an die Beschleunigung des Kolbens nach unten im Vergleich zur Beschleunigung des Blocks aufgrund der Gewichtskraft.

Aufgabe 3

$\star$Berechnen Sie die Gewichtskraft und somit das g eines Körpers der Masse m_2 an der Erdoberfläche mit dem Gravitationsgesetz.

Hinweis 3

Sie kennen das g nicht, aber das 2. Newton'sche Gesetz für die Beschleunigung und das Gravitationsgesetz für die Kraft.

Lösungen 1

1. Betrachten Velo.
2. Wählen Koordinatensystem: x parallel hangabwärts, y senkrecht zur Straße.
3. Kräfte:
   - Gewichtskraft, zerlegt in:
   $$F_N = F_G \cos\alpha, \quad F_\parallel = F_G \sin\alpha$$
   - Reibungskraft:
   $$F_R = F_N \mu = mg\cos\alpha\mu \quad \text{(in negativer } x\text{-Richtung)}$$
   - Luftwiderstand:
   $$F_L = \frac{1}{2} c_w A \rho v^2 \quad \text{(in negativer } x\text{-Richtung)}$$
4. Resultierende Kraft:
   - In y-Richtung: 0, Fahrrad bleibt auf der Straße.
   - In x-Richtung:
   $$F_{\text{Res}} = F_\parallel - F_R - F_L = mg\sin\alpha - mg\mu - \frac{1}{2} c_w A \rho v^2$$
5. Bewegungsgleichung:
   $$a = \frac{F_{\text{Res}}}{m} \stackrel{!}{=} 0$$
   Keine Beschleunigung, es wird die stationäre Endgeschwindigkeit gesucht.
6. Gleichung lösen:
   $$mg\sin\alpha - mg\mu - \frac{1}{2} c_w A \rho v^2 = 0$$
   $$v^2 = \frac{2mg(\sin\alpha - \cos\alpha\mu)}{c_w A \rho}$$
7. Plausibilität:
   - Bei $\alpha = 0$: Keine Hangabtriebskraft, $\sin(0) = 0$, $v = 0$, was sinnvoll ist.
   - Wenn α größer wird: $\sin\alpha$ nimmt zu und $\cos\alpha$ nimmt ab, v^2 wird größer, was plausibel ist.
   - Wenn A, ρ, c_w größer werden: Der Luftwiderstand steigt und v^2 wird kleiner, was ebenfalls sinnvoll ist.

8. Numerische Berechnung:

   - Gegeben:

$$\alpha = \frac{5}{180}\pi, \quad A = 1\,\mathrm{m}^2, \quad \rho = 1.23\,\mathrm{kg/m}^3, \quad c_w = 0.5, \quad \mu = 0.05,$$

$$m = 70\,\mathrm{kg}, \quad g = 10\,\mathrm{m/s}^2$$

   - Berechnung:

$$v^2 = \frac{2}{c_w A\rho} mg(\sin\alpha - \cos\alpha\mu)$$

$$v = \sqrt{v^2}$$

$$v = 9.22\,\mathrm{m/s}$$

Lösungen 2

a) Frequenz zum Abheben

Die Beschleunigung des Blocks wird durch zweimaliges Ableiten der harmonischen Bewegung gegeben:

$$\ddot{x} = \omega^2 x_m \sin(\omega t)$$

Der Block hebt ab, wenn die Beschleunigung abwärts größer als g wird. Die maximale Beschleunigung ist:

$$\ddot{x}_{\max} = \omega^2 x_m$$

Damit der Block abhebt:

$$\omega^2 x_m \geq g \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{x_m}}$$

b) Zeit, wenn Beschleunigung gegeben ist

Wann hebt der Block bei gegebener Amplitude der Beschleunigung ab? Die Beschleunigung ist am Anfang 0 und erreicht erst nach einer gewissen Zeit einen Wert größer als g.

Gegeben: $\omega^2 x_m = 3g$. Eingesetzt in den Ausdruck für die Beschleunigung:

$$a(t) = (\omega^2 x_m)\sin(\omega t)$$

$$3g\sin(\omega t) > g \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega t) > \frac{g}{3g} = \frac{1}{3}$$

Der Winkel aus dem Sinus mit dem Arkussinus ergibt:

$$\omega t > \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 0.3398$$

Damit ist die Zeit:

$$t > \frac{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}{\omega}$$

Berechnung der Zeit
Die Beschleunigung ist gegeben mit $\omega^2 x_m = 3g$. Daraus folgt:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{x_m}} = \sqrt{\frac{30}{0.15}} = 14\,\mathrm{s}^{-1}$$

Einsetzen in den Ausdruck für die Zeit:

$$t > \frac{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}{\omega} = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{\frac{x_m}{3g}}$$

Numerisch:

$$t > 24.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$$

Lösungen 3

Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz erhalten wir die Beschleunigung:

$$a = \frac{F}{m}$$

Dabei setzen wir für die Kraft F die Gravitationskraft ein. Mit m_1 als Masse der Erde und m_2 als Masse des Körpers ergibt sich:

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

Hierbei ist R der Erdradius ($R = 6370\,\mathrm{km}$). Die Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche berechnet sich dann als:

$$a = \frac{F_G}{m_2} = G\frac{m_1}{R^2}$$

Eingesetzt in die Formel (bitte nachrechnen), erhalten wir:

$$a = 9.824\,\mathrm{m/s}^2.$$