

HW3

سؤال اول

الگوریتم محاسبه ضریب دوجمله‌ای را با استفاده از رویکردهای تقسیم و حل و برنامه‌ریزی پویا پیاده‌سازی و با استفاده از ورودی‌های مختلف (حداقل ۵ ورودی)، عملکرد هر دو الگوریتم را از نظر مصرف زمان و حافظه با یکدیگر مقایسه کنید.

توجه: لازم است تا کدهای خود را به همراه گزارش خواسته شده به پیوست ارسال کنید.

سؤال دوم

مسائل ۱۱، ۱۲، ۱۹، ۲۰، ۲۶ و ۲۸ را از فصل سوم کتاب *Foundations of Algorithms* حل کنید.

سؤال سوم

رابطه بازگشتی زیر را برای n ‌های بیشتر از یک در نظر بگیرید.

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(i-1)$$

$$T(1) = T(0) = 2$$

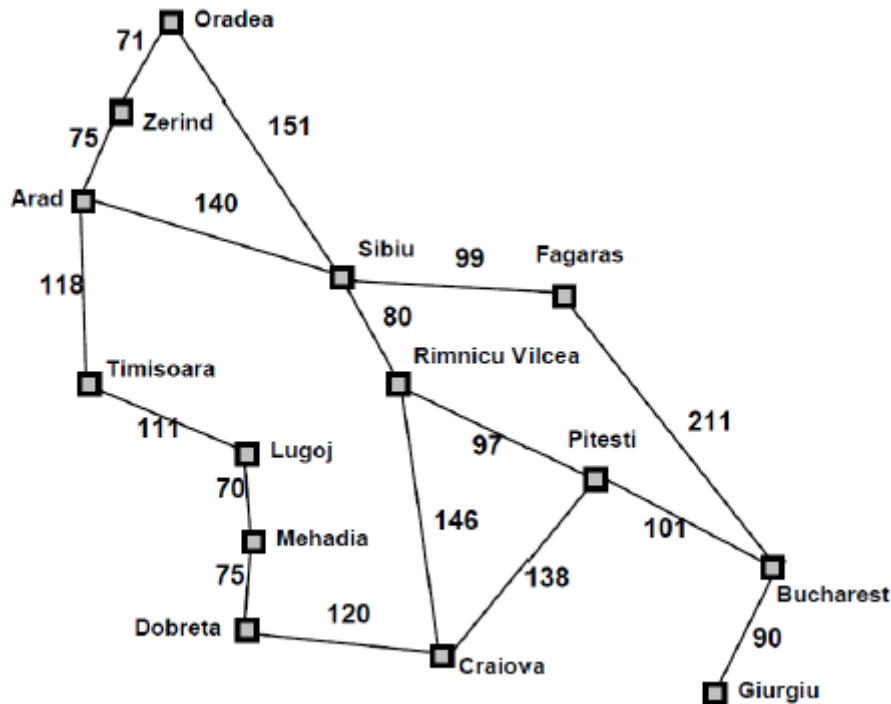
۱. نشان دهید در الگوریتمی که مستقیماً به‌صورت بازگشتی رابطه فوق را محاسبه می‌کند، تعداد عملیات ریاضی نمایی بر حسب n است.

۲. الگوریتمی برای این مسئله ارائه دهید که در آن تعداد عملیات ریاضی تنها $O(n)$ باشد.

سؤال چهارم

الگوریتم فلوید را برای محاسبه و ایجاد کوتاه‌ترین مسیرها در گراف‌های وزن‌دار جهت‌دار پیاده‌سازی کنید. سپس ماتریس مجاورت گراف زیر را ایجاد کرده و به عنوان ورودی به الگوریتم خود بدهید. در نهایت کوتاه‌ترین مسیر را از شهر Arad به شهر Bucharest چاپ کنید.

توجه: لازم است تا کدهای خود را به همراه گزارش خواسته شده به پیوست ارسال کنید.



سؤال پنجم

یک مجموعه از اعداد صحیح $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ و عدد صحیح مثبت L موجود است. الگوریتمی با رویکرد برنامه‌ریزی پویا طراحی کنید که زیرمجموعه‌ای از x_i ها را به‌دست آورد به‌نحوی که مجموع آن‌ها برابر با L باشد. در صورت عدم وجود چنین زیرمجموعه‌ای، پیغامی که بیانگر این موضوع باشد را چاپ کنید. پیچیدگی زمانی الگوریتم خود را با الگوریتم بدیهی برای این سؤال مقایسه کنید.

سؤال ششم

در یک مسأله کوله پشتی صفر و یک، ظرفیت کوله پشتی برابر با ۹ بوده و تعداد ۴ شی با وزنهای $w_1 = 2, w_2 = 3, w_3 = 4, w_4 = 5$ و ارزشهای $p_1 = 1, p_2 = 4, p_3 = 3, p_4 = 4$ در نظر گرفته می‌شود. مراحل پر شدن آرایه توسط الگوریتم برنامه‌ریزی پویا با رویکرد ماتریسی، مقدار سود بیشینه حاصل در انتها و اشیاء انتخاب شده به‌عنوان پاسخ را بنویسید.

سؤال هفتم

تعداد n بازه $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) بر روی محور اعداد حقیقی داده شده است. الگوریتمی از نوع برنامه‌ریزی پویا ارائه کنید که یک زیرمجموعه از بازه‌های غیرهم‌پوشان (S)، به‌نحوی که مجموع طول بازه‌های موجود در S بیشینه باشد، پیدا کند.

سؤال هشتم

برای شش کلید زیر می‌خواهیم یک درخت جست‌وجوی دودویی بهینه که میانگین زمان جست‌وجو را حداقل کند، به‌دست آوریم. اگر از روش برنامه‌ریزی پویا برای این منظور استفاده کنیم، با فرض این‌که کلید مورد جست‌وجو در درخت وجود داشته و احتمال برابر بودن آن با هریک از کلیدها به‌صورت زیر باشد؛ مراحل پر شدن آرایه‌ها، زمان میانگین جست‌وجوی بهینه و درخت بهینه حاصل را تعیین کنید.

کلید	احتمال
GAT	0.03
BBN	0.07
BP	0.15
GAN	0.2
DT	0.25
DNN	0.3

سؤال نهم

یک دنباله از اعداد صحیح به صورت $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ داده شده است. الگوریتمی با رویکرد برنامه‌ریزی پویا ارائه کنید که طولانی‌ترین زیردنباله (نه الزاماً پیوسته) افزایشی (صعودی) از X را پیدا کند.

ورودی نمونه

$X = 1, 4, 7, 19, 8, 5, 11$

خروجی نمونه

1, 4, 7, 8, 11

سؤال دهم

می‌دانیم رویکرد ماتریسی در حل مسئله کوله پشتی با رویکرد برنامه‌ریزی پویا تنها محدود به مسائلی است که در آن‌ها وزن اشیاء (w_1, \dots, w_n) و ظرفیت کوله پشتی (M) اعدادی صحیح باشند. اگر این فرض برقرار نباشد می‌توان از رویکرد تابعی به صورت زیر استفاده کرد:

• سود بیشینه حاصل از مسئله $f_i(x) = \text{knap}(1, i, x)$

• جواب نهایی $f_n(M)$

در این‌جا، $\text{knap}(1, i, x)$ عبارت از مسئله کوله پشتی با i شیء اول و ظرفیت موجود x درون کوله پشتی می‌باشد. با استفاده از یک رابطه بازگشتی، به ترتیب نمودارهای $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ را (هر یک از روی قبلی) رسم می‌کنیم. پاسخ نهایی مقدار $f_n(M)$ در نمودار آخر خواهد بود. شرایط مرزی زیر را نیز در نظر می‌گیریم:

- $f_i(x) = -\infty$
- $0 \leq i \leq n$
- $f_0(x) = 0$

- $x \geq 0$

۱. رابطه بازگشتی موردنظر را به دست آورید.

۲. این الگوریتم را برای مثال زیر از آغاز تا رسیدن به پاسخ دنبال (trace) کنید.

$$n = 3, M = 7.2, w_1 = 2, w_2 = 3, w_3 = 4, p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 5$$

سؤال یازدهم

مثلث‌بندی برای یک چندضلعی محدب عبارت است از یک مجموعه از قطرها که چندضلعی را به مثلث‌های متمایز افزایش می‌کند. شکل زیر دو نمونه از مثلث‌بندی‌های ممکن را برای یک هفت ضلعی محدب نشان می‌دهد. تعداد مثلث‌بندی‌های ممکن برای یک $n + 2$ ضلعی محدب برابر با جمله n ام دنباله کاتالان است (چرا؟). اندازه محیط هر مثلث را به عنوان وزن آن مثلث تعریف می‌کنیم. هدف، یافتن مثلث‌بندی بهینه یک چندضلعی محدب است که در آن مجموع وزن‌های مثلث‌های حاصل کمینه باشد. با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی پویا الگوریتمی ارائه دهید که با دریافت تعداد و مختصات رئوس یک چندضلعی محدب (به ترتیب خلاف چرخش عقربه‌های ساعت)، مثلث‌بندی بهینه آن را به دست آورد. پیچیدگی زمانی الگوریتم خود را با الگوریتم بدیهی مقایسه کنید.

