سوال 2:

الف)

روش اول: در حالت کلی نه اما در حالتی که به ازای n های بزرگ داشته باشیم $f(n) \geq 1$ طبق اثبات زیر برقرار:

$$f(n) = O(f(n)^2) \rightarrow \{f(n): \exists\, c > 0 \wedge n_0 > 0 \mid 0 \leq f(n) \leq cf(n)^2,\ \ \forall n \geq n_0\}$$

کافیست یک c و یک n_0 پیدا کنیم که در تعریف صدق کند.

$$0 \leq f(n) \leq cf(n)^2 \xrightarrow[\div f(n)]{f(n)>0} 0 \leq 1 \leq cf(n) \xrightarrow[\div c]{c>0} 0 \leq \frac{1}{c} \leq f(n)$$

حال اگر $c = 1$ داریم: $1 \leq f(n)$ اگر ریشه معادله $1 = f(n)$ را n_0 در نظر بگیریم داریم که به ازای هر $n \geq n_0$ این نامعادله برقرار است. و مرز بالا برقرار است. $0 \leq f(n) \leq f(n)^2$

اما اگر $0 \leq f(n) \leq 1$ به ازای n های بزرگ به وضوح داریم که $0 \leq f(n)^2 \leq f(n)$ که متناقض با شرط موجود در تعریف است.

روش دوم:

از آنجا که میدانیم اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ آنگاه داریم $f(n) = O(g(n))$ این حد را برای این سوال برسی میکنیم.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} \begin{cases} f(n)\, is\ an\ increa.\sin.g\ \ function \rightarrow = 0 \\ f(n)\, is\ a\ decrea.\sin.g\ \ function \rightarrow = 1 \end{cases}$$

پس میتوان گفت به ازای تمام توابع صعودی f این رابطه برقرار است و به ازای همه توابع نزولی f این رابطه برقرار نیست

ب)

خیر برقرار نیست چرا که:

$$if\ \ f(n) = 2n\ \ \wedge\ \ if\ \ \ g(n) = n\ \ \rightarrow 2n = O(n)$$

پس شرط $f(n) = O(g(n))$ برقرار است. حال با همین مثال داریم: $2^{2n} \notin O(2^n)$ چرا که باید داشته باشیم:

$$0 \leq 2^{2n} = (2^n)^2 = (2^n).(2^n) \leq c2^n \xrightarrow[\div 2^n]{2^n>0} 0 \leq 2^n \leq c$$

که وضوح ممکن نیست چرا که ممکن نیست به ازای مقادیر بزرگ n ضریب ثابتی مانند c پیدا شود که تابع نمایی همواره از آن کمتر باشد.

به دلیل وجود مثال نقض این گزاره برقرار نیست.

ج)

بله برقرار است چرا که:

$$\max(f(n),g(n))=\Theta(f(n)+g(n))\xrightarrow{f(n)=\Theta(g(n))\Leftrightarrow g(n)=\Theta(f(n))} f(n)+g(n)=\Theta(\max(f(n),g(n)))$$
$$\xrightarrow[g(n)=o(f(n))]{f(n)=f(n)} f(n)+o(f(n))=\Theta(\max(f(n),o(f(n))))\xrightarrow{\max(f(n),o(f(n)))=f(n)} f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$$
