دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده های مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین سری چهارم ریاضیات مهندسی

استاد علی اکبریان

معادلات موج و حرارت

۱) جواب معادله‌ی $u_{tt} = 4\pi u_{xx}$ با شرایط اولیه‌ی $u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$ و $u(x,0) = sinx$ را محاسبه کنید.

۲) برای مساله‌ی مقدار اولیه–کرانه‌ای زیر، مقدار $u(\frac{L}{3},\frac{11L}{4})$ را پیدا کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \ 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = x(L-x) \ , \qquad u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t), \qquad t > 0 \end{cases}$$

۳) مسئله مقدار اولیه –مرزی (کرانه ای) زیر را در نظر می گیریم ، با چه شرطی حرکت نسبت به زمان همواره متناوب خواهد بود ؟

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u = 0 \ , \ 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \ , \qquad \forall t > 0 \\ u(x,0) = g(x), u_t(x,0) = h(x), \qquad 0 < x < L \end{cases}$$

۴) مطلوبست حل مسئله‌ی زیر.

$$\begin{aligned} & u_{tt} - u_{xx} = t \ ; && 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ & u(x,0) = x \ ; && 0 \le x \le 1 \\ & u_t(x,0) = 2 \ ; && 0 \le x \le 1 \\ & u(0,t) = 2t \ ; && t \ge 0 \\ & u(1,t) = t \ ; && t \ge 0 \end{aligned}$$

۵) درجه حرارت در یک میله‌ی نامتناهی را بیابید در صورتی که:

$$u(x,0) = \begin{cases} x \ ; & |x| \le 1 \\ 0 \ ; & |x| > 1 \end{cases}$$

۶)   مطلوبست حل مسئله زیر:

$$u_t - u_{xx} = x \; ; \qquad 0 < x < 1 \qquad , t > 0$$

$$u(x,0) = 2x \; ; \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_x(0,t) = t \; ; \qquad u(1,t) = t^2 \qquad , t \geq 0$$

۷)   مطلوبست حل مسئله زیر:

$$u_t - 9u_{xx} = x \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 1 - \cos \pi x \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0$$

$$u(1,t) = 2 \quad ; \quad t \geq 0$$

۸)   مسئله‌ی دیفرانسل جزئی زیر را حل کنید:

$$u_t = u_{xx} + 2u \,,\, 0 < x < \pi \,,\, t > 0$$

$$u(x,0) = 0 \,,\, 0 \leq x \leq \pi$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 2\sin t \,,\, t \geq 0 \\ u_x(\pi,t) = 2\cos t \,,\, t \geq 0 \end{cases}$$

$|u|$ وقتی که $t \to \infty$، کراندار است.

۹)   مسئله‌ی مقدار مرزی اولیه حرارت زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} u_t = k\, u_{xx} & 0 < x < l \;\; , \;\; t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{حرارت اولیه :} \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$$

۱۰) مسئله‌ی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l \ , \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \le x \le l \\ u_x(0,t) = 0 \quad t \ge 0 & \\ u_x(l,t) = 0 \quad t \ge 0 & \end{cases}$$