دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده های مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین سری هشتم ریاضیات مهندسی

استاد علی اکبریان

اعداد مختلط

---

۱- مکان هندسی نقاط زیر را بر روی صفحه ی اعداد مختلط تعیین کنید.

$$\{z \in C: |z-2j| + |z+2j| \leq 10\}$$

۲- پیوستگی تابع "الف" را بررسی کرده و مشخص کنید که به ازای چه مقداری از $a$ تابع "ب" پیوسته است.

الف) $$g(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \frac{(Re(z))^2}{|z|}, & z \neq 0 \end{cases}$$

ب) $$f(z) = \begin{cases} \frac{z+Im(z)}{2\bar{z}+Re(z)}, & z \neq 0 \\ a, & z = 0 \end{cases}$$

۳- مشتق پذیری و تحلیلی بودن هر یک از توابع مختلط زیر را بررسی کنید.

الف) $W = sin^2y + jx$

ب) $g(z) = (1+j)(x+y)^2$

ج) $f(z) = z^2\bar{z}$

۴- اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد، آنگاه $\boldsymbol{v(r,\theta)}$ را به دست آورید.

$$f(z) = r^3\sin(3\theta) + \frac{3}{r}\cos(\theta) + j\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})$$

۵- نشان دهید که تابع زیر در معادلات کوشی-ریمان در مبدأ صدق می کند ولی در مبدأ مشتق ندارد. چرا در اینجا نمی‌توان از قضایای کوشی-ریمان استفاده کرد؟

$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$

۶- بدون استفاده از توابع معکوس مثلثاتی و با استفاده از تغییر متغیر $e^{jz}=p$ یک ریشه معادله $jsin(z)+(j-1)\cos(z)=2j$ را محاسبه کنید.

۷- تابع $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ را در نظر بگیرید به نحوی که $v(x,y)=\frac{ax+by}{x^2+y^2}$ و $a,b\in R$.

**(الف)** به ازای چه مقادیر $a$ و $b$ تابع $v(x,y)$ همساز است؟

**(ب)** اگر بدانیم $f(z)$ به جز در $z=0$ در سایر نقاط تحلیلی است، $f(z)$ را به صورت تابعی از $z$ بدست آورید. (راهنمایی: برای سادگی در این قسمت می‌توانید از فرم قطبی شرایط کوشی-ریمان استفاده کنید.)

۸- بررسی کنید توابع زیر در کدام نقاط مشتق‌پذیر و تحلیلی می‌باشند.

الف) $f(z)=z^2\bar{z}$

ب) $g(z)=x+\sin y$

ج) $h(z)=e^{-(y+ix)}$

۹- نشان دهید: $Arc\,tg\,z=\frac{i}{2}Ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$

۱۰- در معادله $(z+1)^6+(z-1)^6=0$ کلیه جواب‌های قابل قبول برای $z$ را بدست آورید.

۱۱- اگر $u=u(x,y)$ تابع همساز باشد، حاصل $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}$ را محاسبه نمایید. $(z=x+iy)$

۱۲- اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد، آن گاه $v(r,\theta)$ را بدست آورید. $(v(1,0)=1)$

$$f(z)=r^3\sin 3\theta+\frac{3}{r}\cos\theta+iv(r,\theta)$$