



(۱) معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت زیر بیان می شود.

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < a$$

$$u(a, \theta) = g(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

با کمک روش تفکیک متغیرها نشان دهید فرم کلی جواب به صورت زیر است.

$$u = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^\lambda + b_n r^{-\lambda})(c_n \cos(\lambda\theta) + d_n \sin(\lambda\theta))$$

(۲) معادله لاپلاس را برای داخل کره ای با شعاع ۱ و با شرایط کرانه ای $u(1, \theta, \varphi) = \cos 2\theta$ حل کنید

و $u(r, \theta, \varphi)$ را که در واقع به فرم $u(r, \theta)$ است، بدست آورید.

(۳) جواب معادله لاپلاس بین دو کره هم مرکز به شعاع های $r_1 = 2$ و $r_2 = 4$ که به ترتیب در پتانسیل های $u_1 = 220$ و $u_2 = 140$ قرار گرفته اند را بدست آورید.

راهنمایی:

معادله لاپلاس در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

(۴) دو کره هم مرکز به شعاع های R_1 و R_2 به ترتیب در پتانسیل های ثابت U_1 و U_2 قرار گرفته اند و پتانسیل نقاط با فاصله بینهایت از این کره ها برابر صفر است. پاسخ معادله لاپلاس را در تمامی نقاط فضا بدست آورید.

راهنمایی: معادله لاپلاس در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

۵) تابع $u(x, y)$ حل معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ در کانال چهارگوش به ابعاد $a \times b$ با شرایط

$$\text{مرزی } u(0, y) = u(a, y) = 0, u(x, 0) = 0, u(x, b) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{ برابر است با؟}$$

۶) هرگاه پتانسیل الکترواستاتیکی موجود در روی بدنه دو استوانه هم محور و به شعاع‌های قاعده ۱ و

$$e \text{ به ترتیب برابر } 110 \text{ و } 220 \text{ ولت باشند و معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

باشد، آنگاه پتانسیل موجود بین دو استوانه برابر است با:

۷) می‌دانیم که پاسخ معادله لاپلاس (پتانسیل) در هر نقطه (r, θ, ϕ) داخل یک کره (در حالت تقارن

نسبت به ϕ) در مختصات کروی به صورت زیر است

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$$

که $P_n(\cos \theta)$ توابع لژاندار هستند. اگر پتانسیل روی سطح کره یک (کره به شعاع واحد) با

$$\text{عبارت } u(1, \theta) = 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{ بیان شود، } u(r, \theta) \text{ داخل کره عبارت است از؟}$$

$$8) \text{ جواب معادله لاپلاس } \begin{cases} \nabla^2 T = 0, & 1 \leq r \leq e, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ T(1, \theta) = 2, & T(e, \theta) = 3 \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

$$9) \text{ در مساله } \begin{cases} \nabla^2 T = 0, & 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ T(R, \theta) = \begin{cases} 0 & -\pi < \theta < 0 \\ \theta & 0 < \theta < \pi \end{cases} \end{cases} \text{ حاصل } T(r, \theta) \text{ کدام است؟}$$

$$10) \text{ جواب معادله لاپلاس } \begin{cases} \nabla^2 T = 0, & x \leq 0, y \geq 0 \\ T(0, y) = 1, & T(x, 0) = 2 \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

(۱۱) پتانسیل موجود بین دو استوانه هم محور با شعاع های ۵ و ۱۰ را بیابید. در صورتی که اختلاف پتانسیل موجود بر این استوانه ها به ترتیب، ۱۱۰ و ۲۲۰ ولت باشد.

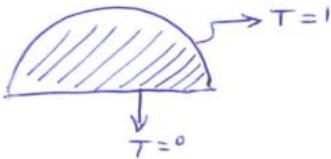
(۱۲) مطلوبست حل مسئله ی زیر

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= x + 2y & ; & & 0 < x < \pi & , & & 0 < y < \pi \\ u(x, 0) &= x & ; & & 0 \leq x \leq \pi \\ u(x, \pi) &= 2 & ; & & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, y) &= y & ; & & 0 \leq y \leq \pi \\ u(\pi, y) &= \cos y & ; & & 0 \leq y \leq \pi \end{aligned}$$

(۱۳) با تغییر متغیر $u(x, y+3) = v(x, y)$ شکل جدید معادله لاپلاس زیر را بیابید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 ; 0 < x < \pi , y > 3$$

$$u(0, y) = 0 , \quad u(\pi, y) = e^{-2y} , \quad u_y(x, 3) = 0$$



(۱۴) یک میله نیم دایره ای به طول بینهایت از سطح صاف، در دمای $T=0$ قرار گرفته است و روی سطح $x^2 + y^2 = 1$ در دمای $T=1 (y>0)$. دمای حالت ماندگار در مقطع لوله را بیابید. (۱۵) معادله ی زیر را حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 , 0 < x < l , t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), 0 \leq x \leq l ; u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq l ;$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 , 0 \leq x \leq l$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l, t) = 0 , t > 0$$

(۱۶) معادله ی زیر را حل کنید.

$$\nabla^2 u = 0 , \quad 1 < r < 2 , \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(1, \theta) = \sin \theta , \quad u(2, \theta) = 0 , \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$u(r, 0) = 0 , \quad u(r, \pi) = 0 , \quad 1 \leq r \leq 2$$