



۱- بسط تیلور تابع $f(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2}$ را حول $z = 1+i$ بدست آورید و شعاع همگرایی آن را تعیین کنید.

۲- انتگرال های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx$

(ب) $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta$

۳- تمام سری های لوران تابع $\frac{1}{z^3 - z^4}$ به مرکز صفر را بنویسید.

۴- مطلوبست محاسبه مانده:

(الف) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ در $z = 0$

(ب) $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$ در $z = -2$

(ج) $f(z) = \cos(z) \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ در $z = 0$

۵- مطلوبست محاسبه انتگرال های زیر به کمک قضیه مانده ها:

(الف) $I = \oint_c \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z + z^3} dz$ که c دایره $|z - i| = \frac{3}{2}$ می باشد.

(ب) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$

۶- بسط لوران تابع $f(z) = \frac{e^z}{z+1}$ را تعیین کنید.

۷- حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx \quad \text{ب) } \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

۸- انتگرال حقیقی زیر را به محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)(9+x^2)(25+x^2)} dx$$

۹- حاصل انتگرال زیر را با روش مانده ها به دست آورید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx, \quad a > b > 0$$

۱۰- تابع $f(z) = \frac{4}{z^2 - 2iz + 3}$ را برای ناحیه $1 < |z| < 3$ به سری لوران بسط دهید.

۱۱- تابع $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3iz - 2}$ را برای ناحیه $1 < |z| < 2$ به سری لوران بسط دهید.

۱۲- تابع $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ را حول $z=1$ به سری تیلور بسط داده و شعاع همگرایی آن را تعیین کنید.

۱۳- تابع $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ را در نظر بگیرید که در آن $u(x, y) = \frac{2x - 4y}{x^2 + y^2}$ است.

الف) نشان دهید $u(x, y)$ همساز است.

ب) مزدوج همساز $u(x, y)$ را به دست آورید.

راهنمایی: در این قسمت می‌توانید از شرایط کوشی ریمان در نختصات قطبی استفاده کنید: $u_r = \frac{1}{r} v_\theta$ و $v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$

پ) تابع $f(z)$ را بر حسب z تعیین کنید.

۱۴- نقطه منفرد (تکین) تابع $f(z) = (3z + 12) \sin\left(\frac{1}{z+3}\right)$ را به دست آورید و مرتبه آن را با استدلال مشخص کنید. سپس مانده متناظر با آن نقطه تکین را تعیین کنید.

۱۵- مقدار انتگرال حقیقی زیر را با استفاده از روش مانده ها به دست آورید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 1} dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

۱۶- انتگرال‌های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{9 - 8 \cos^2 \theta}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

۱۷- انتگرال‌های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(4-x^2)} dx$$

۱۸- بسط تابع $f(z) = \text{Log}(1-z)$ حول $z=i$ را به دست آورده و شعاع همگرایی آن را تعیین کنید.

۱۹- حاصل انتگرال زیر را به کمک روش مانده‌ها به دست آورید.

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\alpha + \beta \cos(\theta)} \quad : \quad \alpha > \beta > 0$$

α و β اعداد ثابتی هستند.

۲۰- انتگرال حقیقی زیر را به کمک روش مانده‌ها محاسبه کنید.

$$I = \oint_c \frac{1}{z \sin(z)} dz \quad c : |z| = 1$$

۲۱- مقدار انتگرال‌های حقیقی زیر را با استفاده از روش مانده‌ها به دست آورید.

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx \quad : a, b > 0, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\cos(4x)}{x^2 + 1} dx$$

شاد و پیروز باشید