پردازش سیگنال های دیجیتال پیشرفته

فصل دوم

مقدمه بر سیگنال و سیستم

ارایه شده توسط:

حجت قیمت گر

استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مطالب

- سیگنال های گسسته در زمان
- ویژگی سیستم ها
- سیستم های LTI
- تبدیل فوریه گسسته در زمان
- نمونه برداری
- نمونه برداری و تغییر نرخ نمونه برداری

سیگنال ها

دسته بندی سیگنال‌ها بر اساس متغیر مستقل:

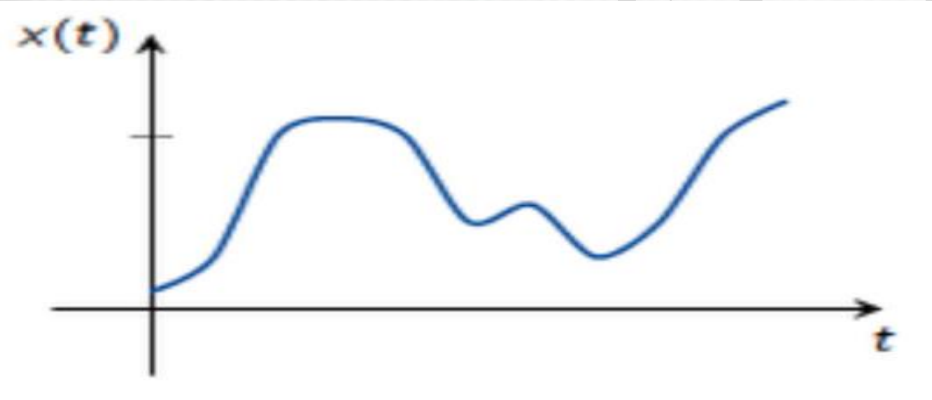
۱- پیوسته در زمان: متغیر مستقل همواره پیوسته است و برای تمام مقادیر پیوسته، تعریف می‌شوند. در این درس به صورت قراردادی این سیگنال‌ها را به صورت زیر نمایش می دهیم (متغیر مستقل درون پرانتز):

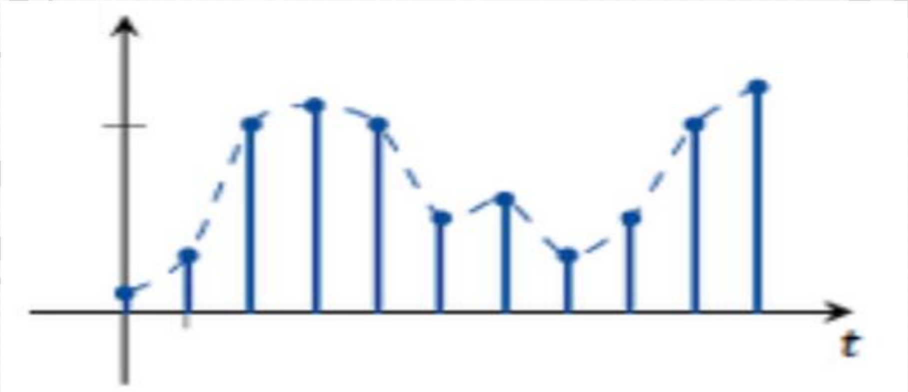
$$x(t) \quad , \qquad t \in R$$

۲- گسسته در زمان: این سیگنالها تنها در زمان های گسسته تعریف می شوند.

در این درس به صورت قراردادی این سیگنال‌ها را به صورت زیر نمایش می دهیم (متغیر مستقل درون کروشه):

$$x[n], \qquad n \in Z$$





سیگنال ها

دسته بندی سیگنال‌ها بر اساس متغیر وابسته:

۱- آنالوگ: دامنه سیگنال می‌تواند تمام اعداد حقیقی رو بگیرد. یعنی

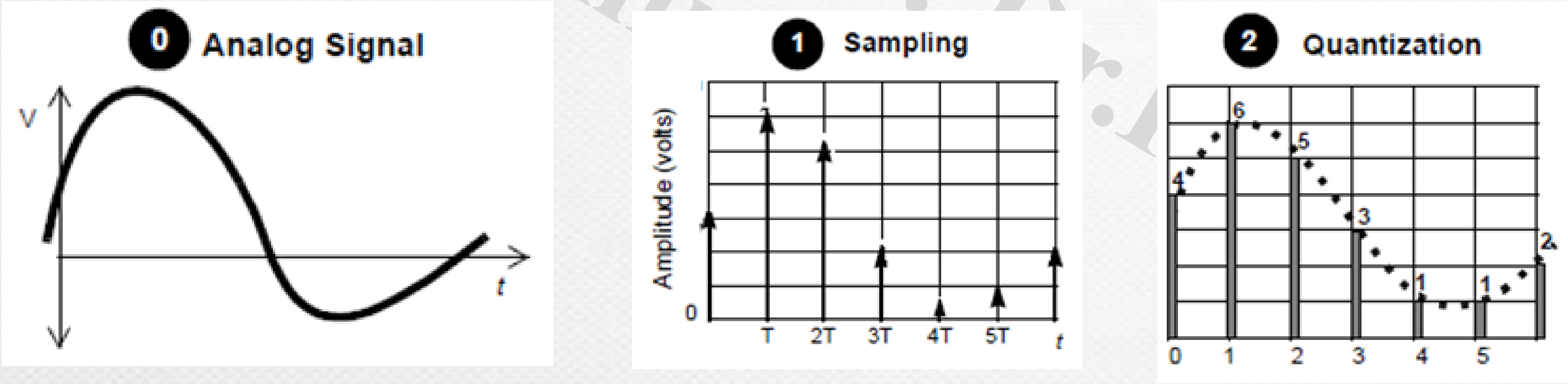
$$x(t) \in R$$

۲- دیجیتال: دامنه سیگنال تنها می‌تواند مقادیر محدود از قبل مشخص شده را بگیرد.

نکته ۱: اکثر سیگنال‌های پیوسته در زمان آنالوگ هستند.

نکته ۲: سیگنال‌های گسسته در زمان می‌توانند دیجیتال یا آنالوگ باشند

نکته ۳: اگر از یک سیگنال پیوسته در زمان، نمونه برداری شود یک سیگنال گسسته در زمان حاصل می شود. حال اگر دامنه نمونه های بدست آمده به اعداد مشخصی گرد شود، یک سیگنال دیجیتال بدست می آید.

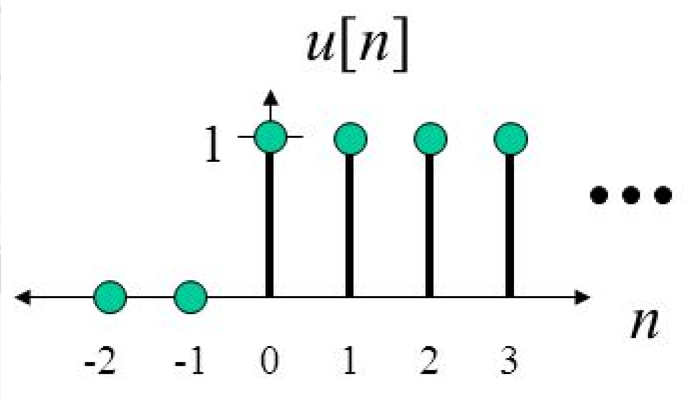


سیگنال ها
سیستم ها
سیستم های LTI
تبدیل فوریه گسسته در زمان
نمونه برداری
تبدیل Z

سیگنال های پله واحد و ضربه واحد:

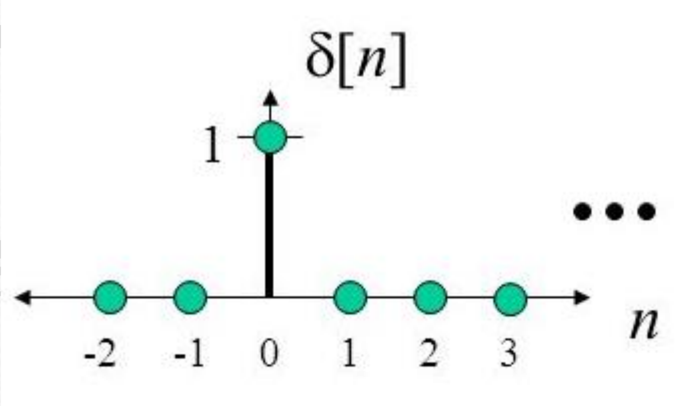
۱- پله واحد گسسته: سیگنال پله واحد گسسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



۲- ضربه واحد گسسته: سیگنال ضربه واحد پیوسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$



سیگنال های گسسته

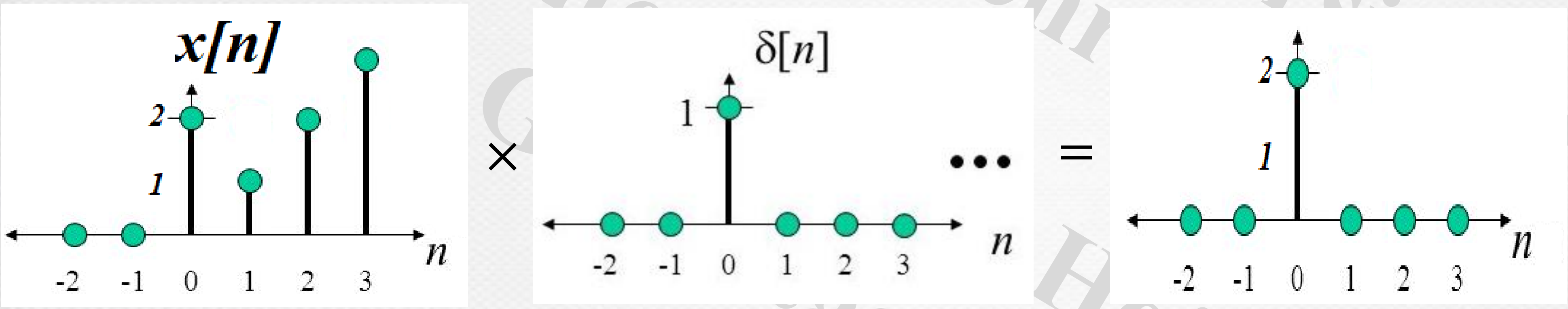
نکته مهم: سه ویژگی مهم و بسیار کاربردی تابع ضربه واحد گسسته:

ویژگی ۱: مجموع کل تابع ضربه برابر با ۱ است یعنی $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1$

ویژگی ۲: حاصل ضرب تابع ضربه در هر تابع دلخواه، در همه جا صفر است به جز نقطه که تابع ضربه غیر صفر است:

$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

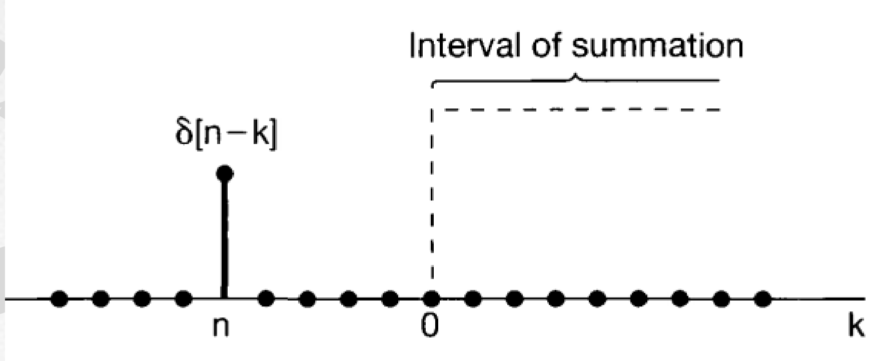


ویژگی ۳: کانولوشن تابع ضربه با یک تابع دلخواه:

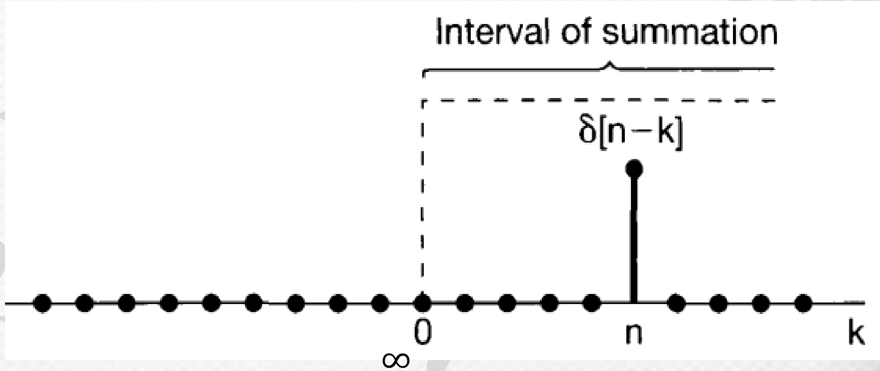
$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

ارتباط ضربه و پله واحد گسسته در زمان

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

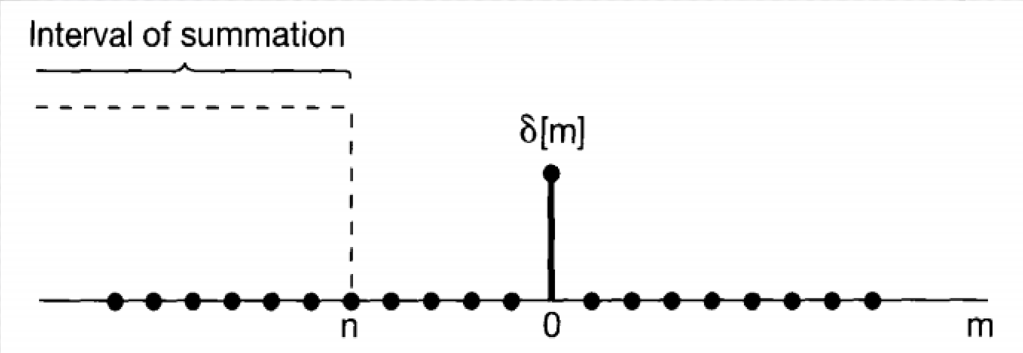


$$n < 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = 0$$

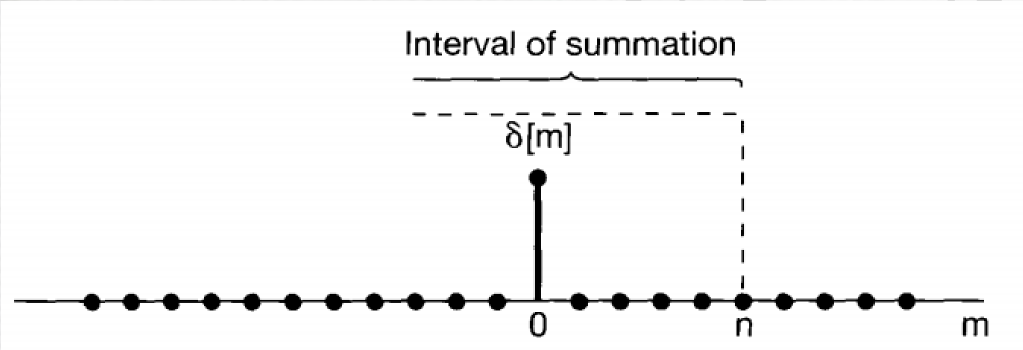


$$n \geq 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = 1$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$



$$n < 0 \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] = 0$$



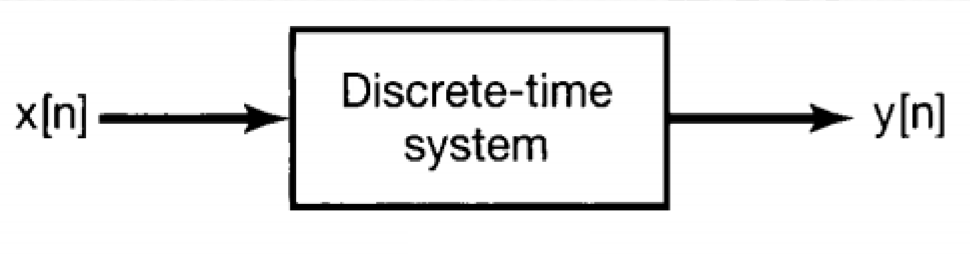
$$n \geq 0 \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] = 1$$

سیستم ها

❖ تعریف سیستم:

هر پردازشی بر روی سیگنال را سیستم گویند.

نمایش سیستم گسسته در زمان



- برای مثال تقویت یک سیگنال یک سیستم ساده است: $y[n] = kx[n]$
- توان دوم یا دیگر توان های سیگنال، یک سیستم است: $y[n] = x^2[n]$ یا $y[n] = x^3[n]$ و ....
- انتگرال، تاخیر، توابع نمایی و ... نیز به عنوان یک سیستم شناخته می شوند:

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{n} x[m]$$

$$y[n] = y[n - n_0]$$

$$y[n] = \exp(-x[n])$$

ویژگی سیستم ها

۱- حافظه دار بودن:

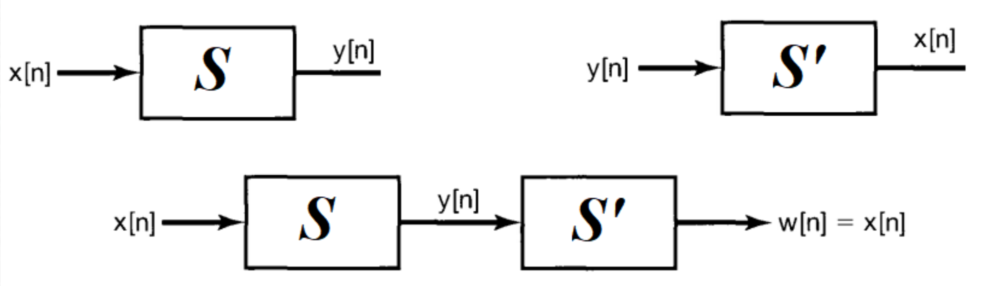
❖ **تعریف:** یک سیستم بدون حافظه $(memoryless)$ است، اگر خروجی در هر لحظه تنها به ورودی در همان لحظه نیاز داشته باشند.

- برای مثال سیستم زیر یک سیستم بدون حافظه است:

$$y[n] = x[n] - x^2[n]$$

۲- معکوس پذیری:

❖ **تعریف:** یک سیستم معکوس پذیر $(invertible)$ است، اگر به ازای ورودی‌های متمایز، خروجی‌های متمایز بدهد.



۳- علیت (سببیت):

❖ **تعریف:** یک سیستم سببی $(causal)$ است، اگر خروجی در هر لحظه، تنها به مقادیر ورودی در **همان لحظه و لحظات قبل** وابسته باشد.

❖ برای مثال سیستم $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$ سببی است

ویژگی سیستم ها

۴- پایداری:

❖ تعریف: یک سیستم در صورتی پایدار (*stable*) است، به ازای ورودی با دامنه محدود، خروجی با دامنه محدود را نتیجه دهد.

به عبارت دیگر از ورودی سیستم کراندار باشد، خروجی آن نیز باید کراندار باشد.

۵- تغییر ناپذیری با زمان:

❖ تعریف: سیستمی تغییر ناپذیر با زمان (*time invariant*) است، که رفتار آن با زمان تغییر نکند.

❖ تعریف دوم به این صورت است که اگر ورودی به اندازه t_0 (n_0) شیفت خورد، آنگاه خروجی هم به اندازه t_0 (n_0) شیفت بخورد.

$$\text{If} \qquad x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$

$$\text{Then} \qquad x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = y_1[n-n_0]$$

۶- خطی بودن:

❖ تعریف: سیستمی خطی (*linear*) است، که ویژگی مهم جمع آثار را داشته باشد

❖ اگر ورودی به صورت مجموع وزندار چند سیگنال باشد، خروجی جمع وزندار پاسخ‌های سیستم به هر یک از ورودی‌ها است.

$$\text{If} \qquad x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$

$$\text{Then} \qquad x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \rightarrow y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

سیگنال ها

سیستم ها

سیستم های LTI

تبدیل فوریه گسسته در زمان

نمونه برداری

تبدیل Z

سیستم های LTI

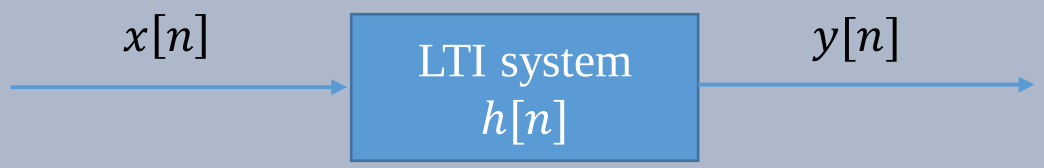
❖ **تعریف سیستم LTI:**

سیستمی LTI است که هم ویژگی خطی (L) و هم ویژگی تغییر ناپذیر با زمان (TI) را داشته باشد.

* سیستم های LTI، دسته بسیار مهمی از سیستمها را تشکیل می دهند.

مهمترین ویژگی سیستم LTI:

مهمترین ویژگی سیستم های LTI ، این است که می‌توان از روی پاسخ ضربه این سیستم، پاسخ سیستم به هر ورودی دیگر را یافت:



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

که عملگر کانولوشن به صورت زیر اعمال می شود:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

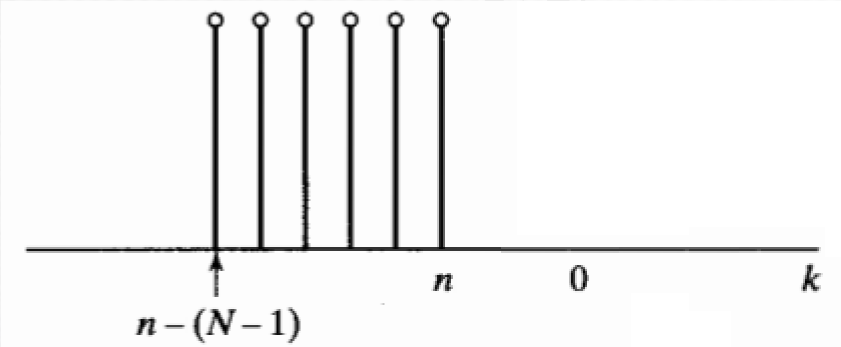
سیستم های LTI

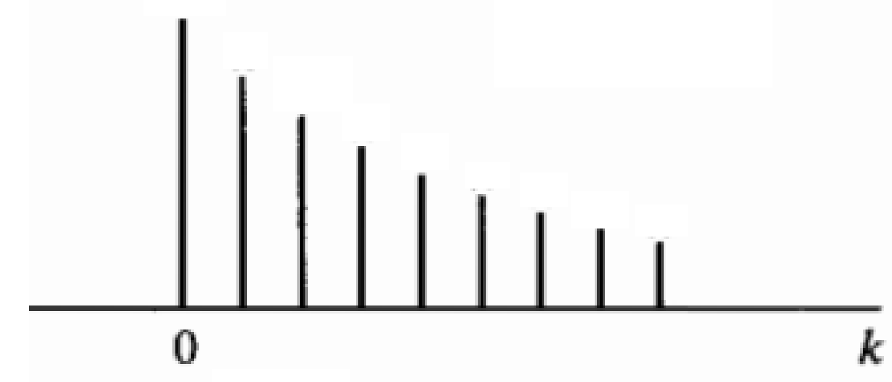
مثال ۲-۱: پاسخ سیستم LTI زیر را به ورودی $x[n] = a^n u[n]$ را بیابید.

$$h[n] = u[n] - u[n-N]$$

حل: ابتدا باید دو سیگنال $h[n-k]$ و $x[k]$ را تشکیل دهیم. توجه کنید که متغیر مستقل باید k باشد نه n

$h[n-k]$ $x[k]$





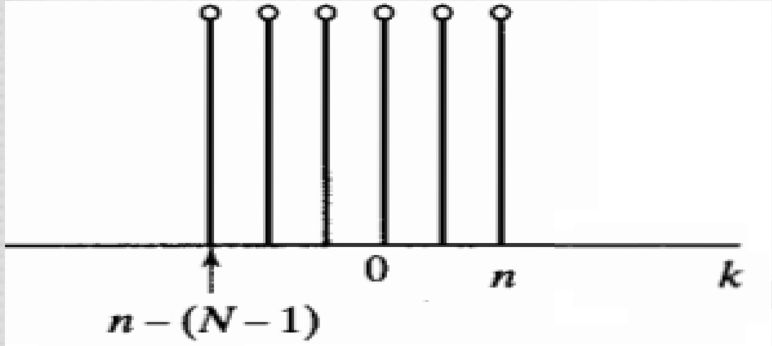
به ازای $n < 0$، دو سیگنال بالا همپوشانی ندارند، پس حاصل کانولوشن صفر است.

$$y[n] = 0 \qquad \forall n < 0$$

سیستم های LTI

به ازای $0 \leq n < N-1$، بخشی از دو سیگنال بالا همپوشانی دارند و بخشی همپوشانی ندارند:

$h[n-k]$



$x[k]$

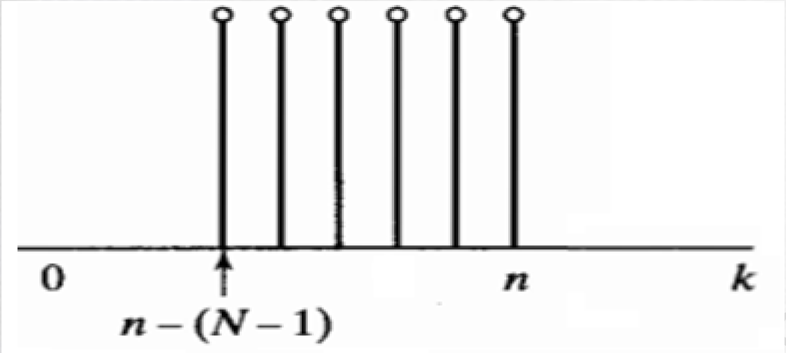
در این حالت داریم:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad \forall \quad 0 \leq n < N-1$$

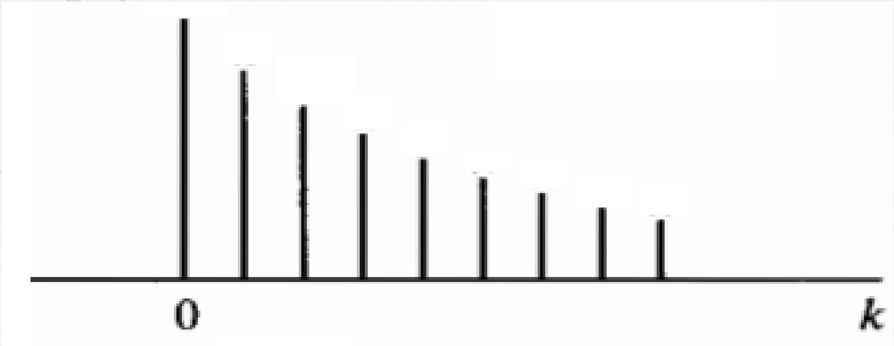
سیستم های LTI

به ازای $n \geq N-1$، تمام نمونه های دو سیگنال همپوشانی دارند :

$h[n-k]$

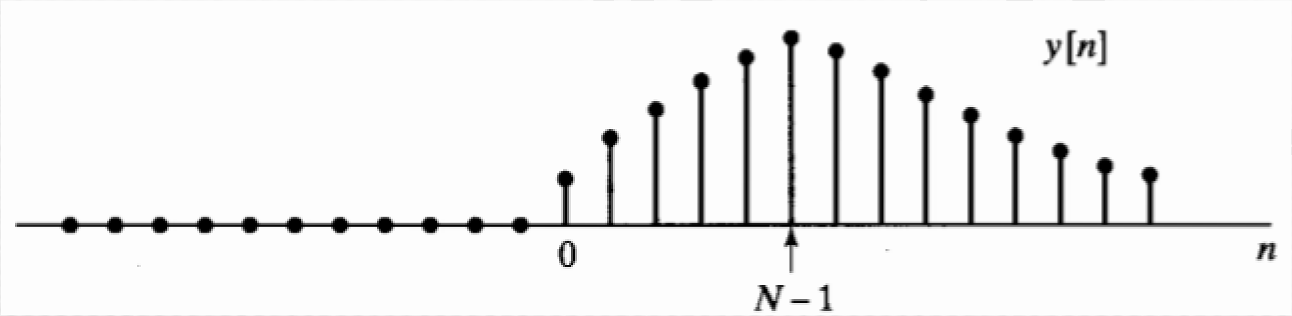


$x[k]$

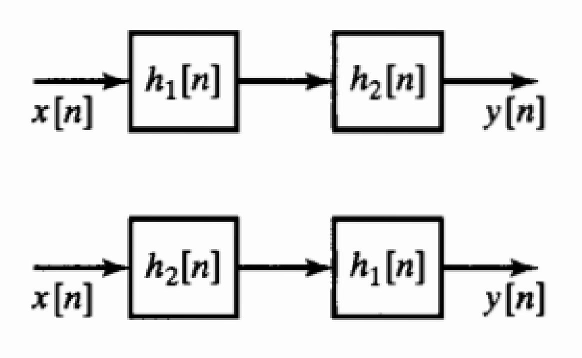


در این حالت داریم:

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k = a^{n-N+1}\frac{1-a^N}{1-a} \qquad \forall n \geq N-1$$



سیستم های LTI



نکته ۱: می توان جای دو سیستم LTI سری را با هم عوض کرد.

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$$
$$= x[n] * h_2[n] * h_1[n]$$

نکته ۲: اگر سیستم LTI باشد، تمام اطلاعات سیستم در پاسخ ضربه آن نهفته است.

می‌توان از روی پاسخ ضربه سیستم LTI تمام ویژگی‌های دیگر را بررسی کرد

حافظه دار بودن: تنها سیستم LTI بدون حافظه به فرم کلی $h[n] = k\delta[n]$ است و مابقی سیستمهای LTI حافظه دار هستند.

علی بودن: یک سیستم LTI در صورتی علی است که پاسخ ضربه آن به ازای $n < 0$ صفر باشد یعنی: $h[n] = 0, \forall n < 0$.

پایداری: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI این است که $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

تبدیل فوریه گسسته در زمان

سیگنال ویژه:

اگر پاسخ یک سیستم به ورودی $x[n]$ به صورت $y[n] = kx[n]$ باشد، در این صورت $x[n]$ سیگنال ویژه آن سیستم است.

سیگنال ویژه سیستم های LTI:

سیگنال نمایی $x[n] = e^{j\omega n}$ سیگنال ویژه تمام سیستم‌های LTI است.

اثبات:

فرض کنید $h[n]$ یک سیستم LTI باشد که ورودی $x[n] = e^{j\omega n}$ به آن اعمال می شود. از کانولوشن داریم:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\omega(n-m)}h[m]$$

$$= e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega m}h[m] = H(e^{j\omega})x[n]$$

$H(j\omega)$ را پاسخ فرکانسی سیستم $h[n]$ گویند.

تبدیل فوریه گسسته در زمان

تبدیل فوریه:

- ❖ نمایش حوزه فرکانس یک سیگنال زمانی (سیستم) را تبدیل فوریه سیگنال (سیستم) گویند.
- ❖ نمایش تبدیل فوریه، بسط سیگنال (سیستم) بر اساس مولفه‌های نمایی است.
- ❖ تبدیل فوریه به صورت زیر تعریف می شود:

گسسته در زمان

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

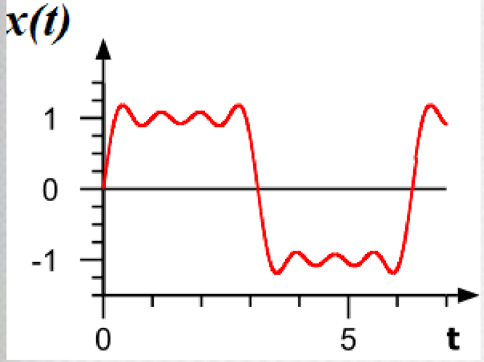
پیوسته در زمان

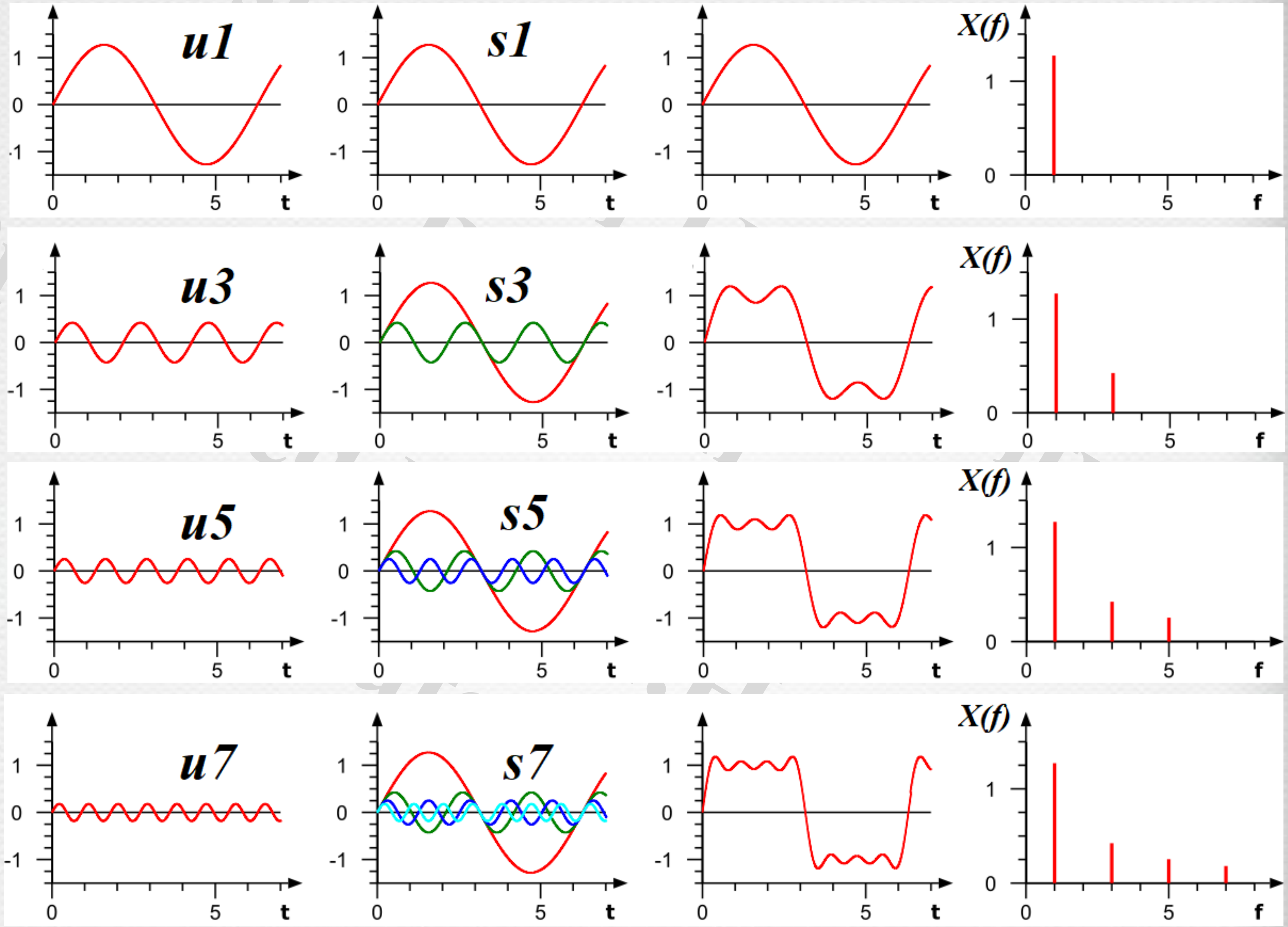
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

- ❖ دامنه طیف تبدیل فوریه در یک مولفه فرکانسی، بیانگر قدرت حضور یک سینوسی متناسب با آن فرکانس در سیگنال زمانی است.

نکته مهم: تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان، صرف نظر از سیگنال مورد پردازش، همواره متناوب با دوره 2π می باشد.

تبدیل فوریه گسسته در زمان





تبدیل فوریه گسسته در زمان

❖ ویژگی‌های تبدیل فوریه

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

Sequence $x[n]$ $y[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
2. $x[n-n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Parseval's theorem:

8. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega$$

9. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y^*[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

سیگنال ها

سیستم ها

سیستم های LTI

تبدیل فوریه گسسته در زمان

نمونه برداری

تبدیل Z

تبدیل فوریه گسسته در زمان

❖ ویژگی های تبدیل فوریه

TABLE 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
The following properties apply only when $x[n]$ is real:	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$\|X(e^{j\omega})\| = \|X(e^{-j\omega})\|$ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\sphericalangle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

تبدیل فوریه گسسته در زمان

❖ تبدیل فوریه سیگنال های مشهور

TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\|a\|<1)$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\|a\|<1)$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
7. $\dfrac{r^n \sin\omega_p(n+1)}{\sin\omega_p} u[n] \quad (\|r\|<1)$	$\dfrac{1}{1-2r\cos\omega_p e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
8. $\dfrac{\sin\omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \|\omega\|<\omega_c, \\ 0, & \omega_c<\|\omega\|\le\pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0\le n\le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

$$\cos(\omega_0 n+\phi) = \frac{e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

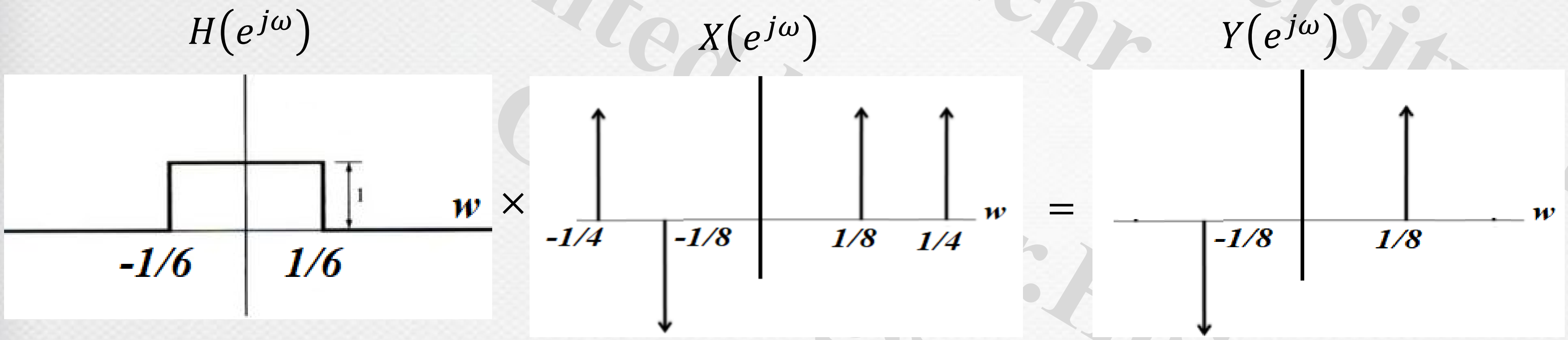
کاربردهای تبدیل فوریه گسسته در زمان

مثال ۳-۱: پاسخ سیستم LTI $h[n]=\frac{\sin\frac{n}{6}}{\pi n}$ به ورودی $x[n]=\sin\left(\frac{n}{8}\right)+\cos\left(\frac{n}{4}\right)$ را بیابید.

حل: اگر از رابطه مستقیم کانولوشن حل کنیم به یک رابطه پیچیده می رسیم:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{k}{8}\right)+\cos\left(\frac{k}{4}\right)\right)\frac{\sin\frac{(n-k)}{6}}{(n-k)}$$

حال از ویژگی کانولوشن استفاده می کنیم:



با گرفتن عکس تبدیل فوریه از $Y(e^{j\omega})$ داریم:

$$y[n]=\sin\left(\frac{n}{8}\right)$$

تبدیل فوریه گسسته در زمان

❖ ارتباط تبدیلات

TRANSFORM	TIME-DOMAIN (Analysis)	FREQUENCY-DOMAIN (Synthesis)
Fourier Series (FS)	$x(t)$ continuous periodic $X_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi nt/T}dt$	X_n discrete aperiodic $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi nt/T}$
Fourier Transform (FT)	$x(t)$ continuous aperiodic $X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$ (or in f where $\Omega = 2\pi f$)	$X(\Omega)$ continuous aperiodic $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$
Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)	$x[n]$ discrete aperiodic $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$	$X(\omega)$ continuous periodic $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$
Discrete Fourier Transform (DFT)	$x[n]$ discrete periodic $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}$ (where $W_N^{kn} = e^{-j2\pi kn/N}$)	$X[k]$ discrete periodic $x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}$

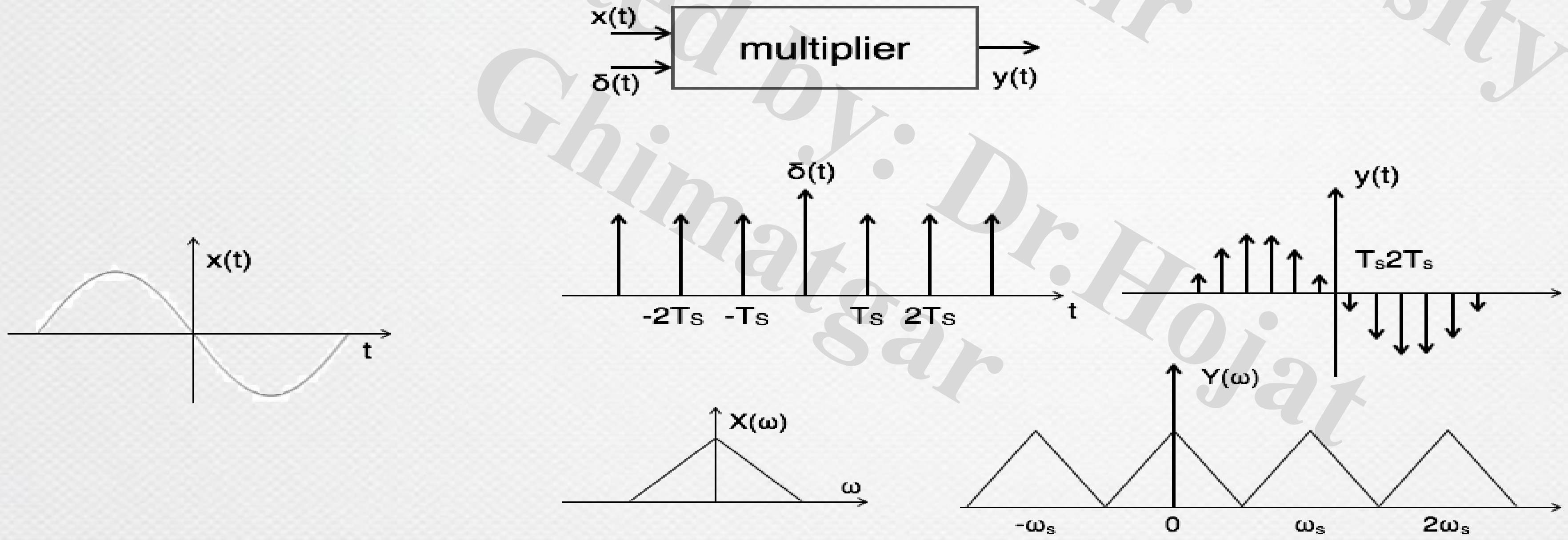
نمونه برداری

قضیه نمونه برداری نایکویست

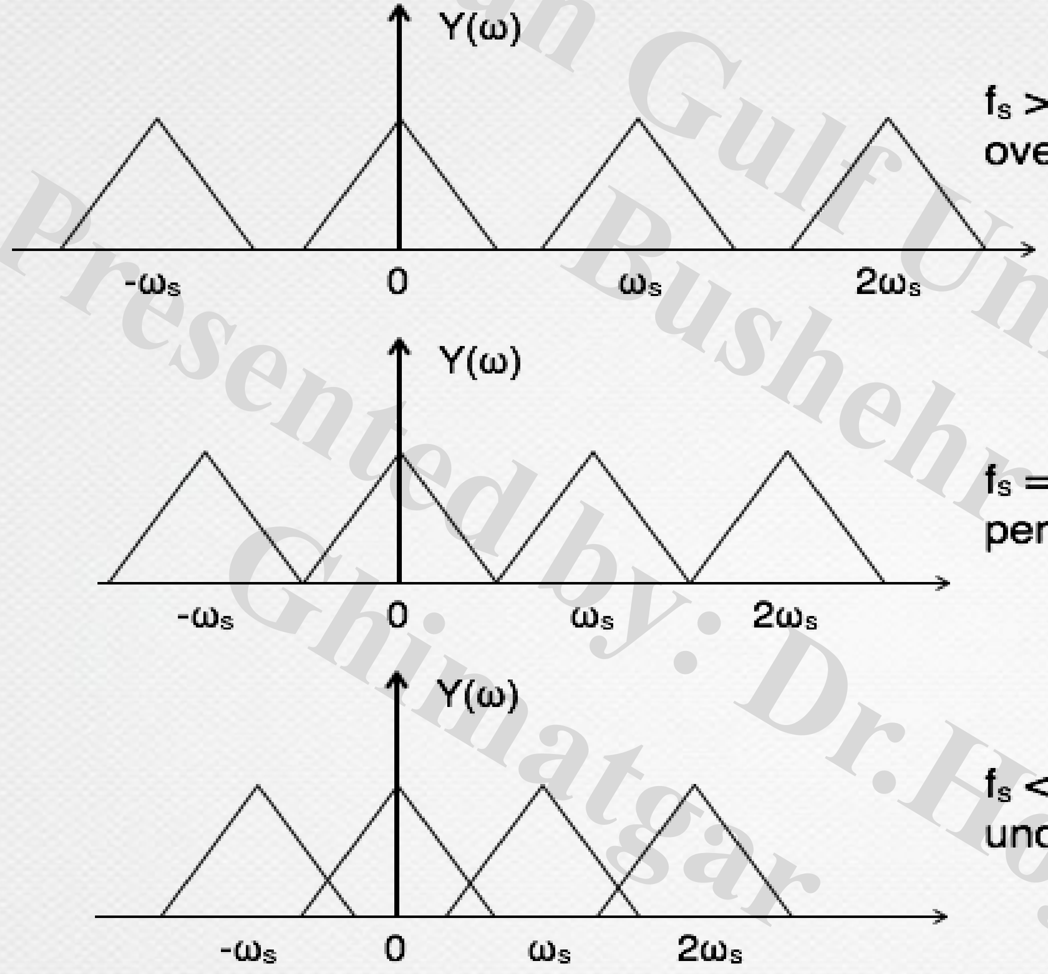
فرض کنید $x(t)$ سیگنالی باند محدود باشد یعنی $|\omega|>\omega_M$، $|X(j\omega)|=0$. در این صورت می‌توان $x(t)$ را به طور یکتا و کامل از روی نمونه‌های $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$، $x(nT)$ بازسازی کرد اگر و تنها اگر:

$$T<\frac{\pi}{\omega_M} \quad \text{یا} \quad \omega_s=\frac{2\pi}{T}>2\omega_M$$

یعنی در هر ثانیه، حداقل به اندازه دو برابر پهنای باند نمونه گیری کنیم.



نمونه برداری

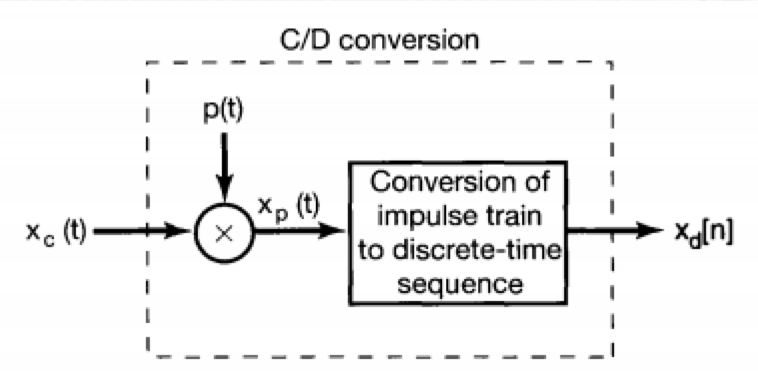


$f_s > 2f_m$
over sampling

$f_s = 2f_m$
perfect sampling

$f_s < 2f_m$
under sampling

نمونه برداری



تبدیل پیوسته به گسسته C/D:

با استفاده از ساختار روبرو میتوان یک سیگنال پیوسته را به یک سیگنال گسسته معادل تبدیل کرد.

با فرض اینکه $p(t)$ یک قطار ضربه باشد، ارتباط طیفی بین ورودی و خروجی را می یابیم.

حل: می دانیم که:

$$x_p(t) = x_c(t)p(t) = x_c(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

تبدیل فوریه سیگنال بالا را به دو روش محاسبه می کنیم:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \quad \rightarrow \quad X_p(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-j\Omega kT} \qquad (1)$$

نمونه برداری

با استفاده از ویژگی ضرب میتوان گفت::

$$X_p(j\Omega) = X_c(j\Omega) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \qquad (2)$$

طبق رابطه تبدیل فوریه گسسته میتوان گفت:

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k]e^{-j\omega k} \qquad (3)$$

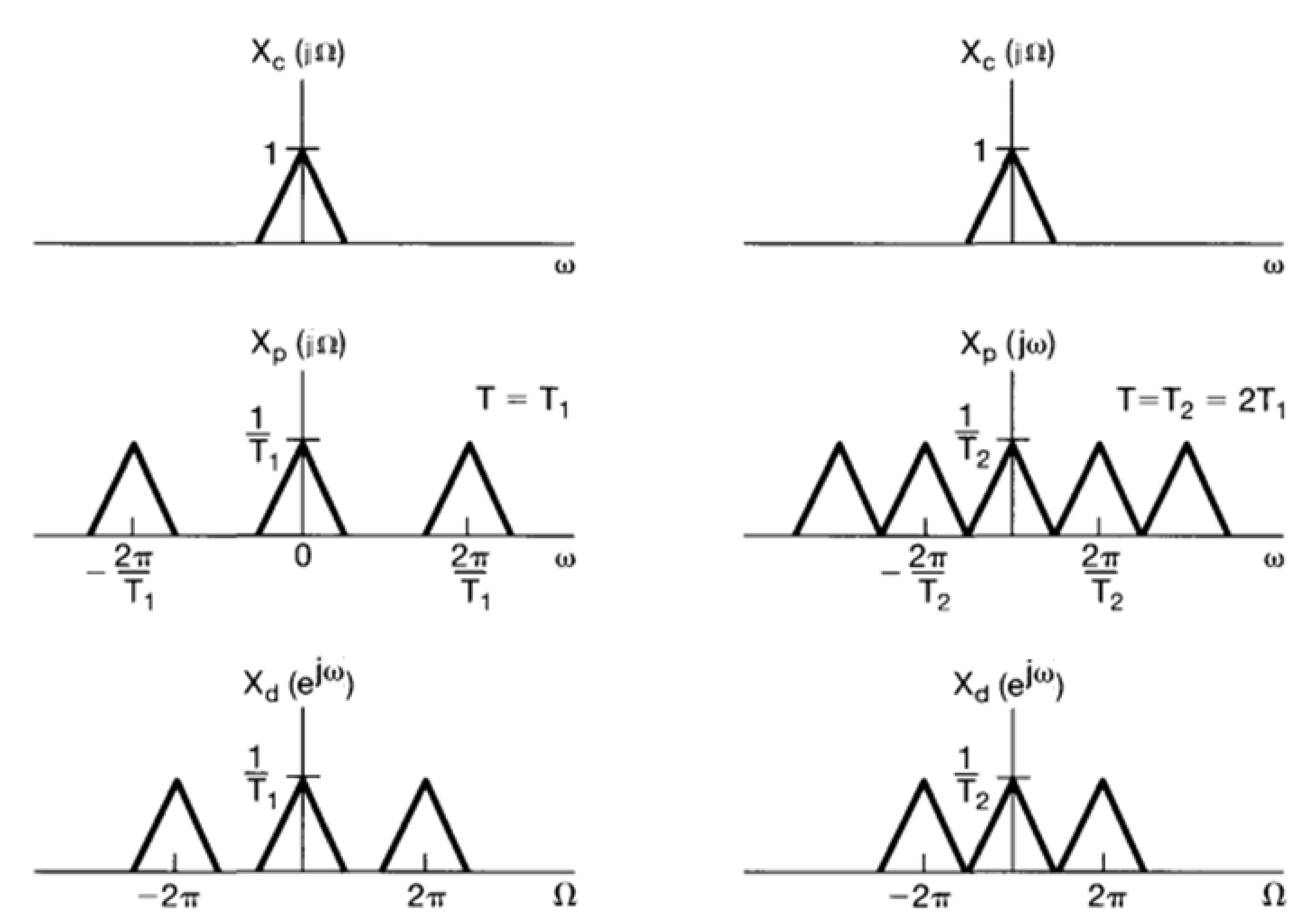
چون $x(kT) = x_d[k]$ است بنابراین از رابطه (۱) و (۳) میتوان گفت:

$$X_d(e^{j\omega}) = X_p\left(j\frac{\omega}{T}\right) \qquad (4)$$

از رابطه (۲) و (۴) ارتباط طیف گسسته با طیف پیوسته بدست می آید:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

ارتباط طیف گسسته با طیف پیوسته نمونه برداری شده

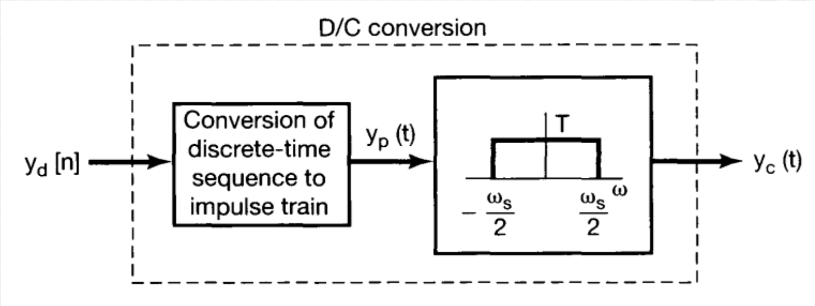


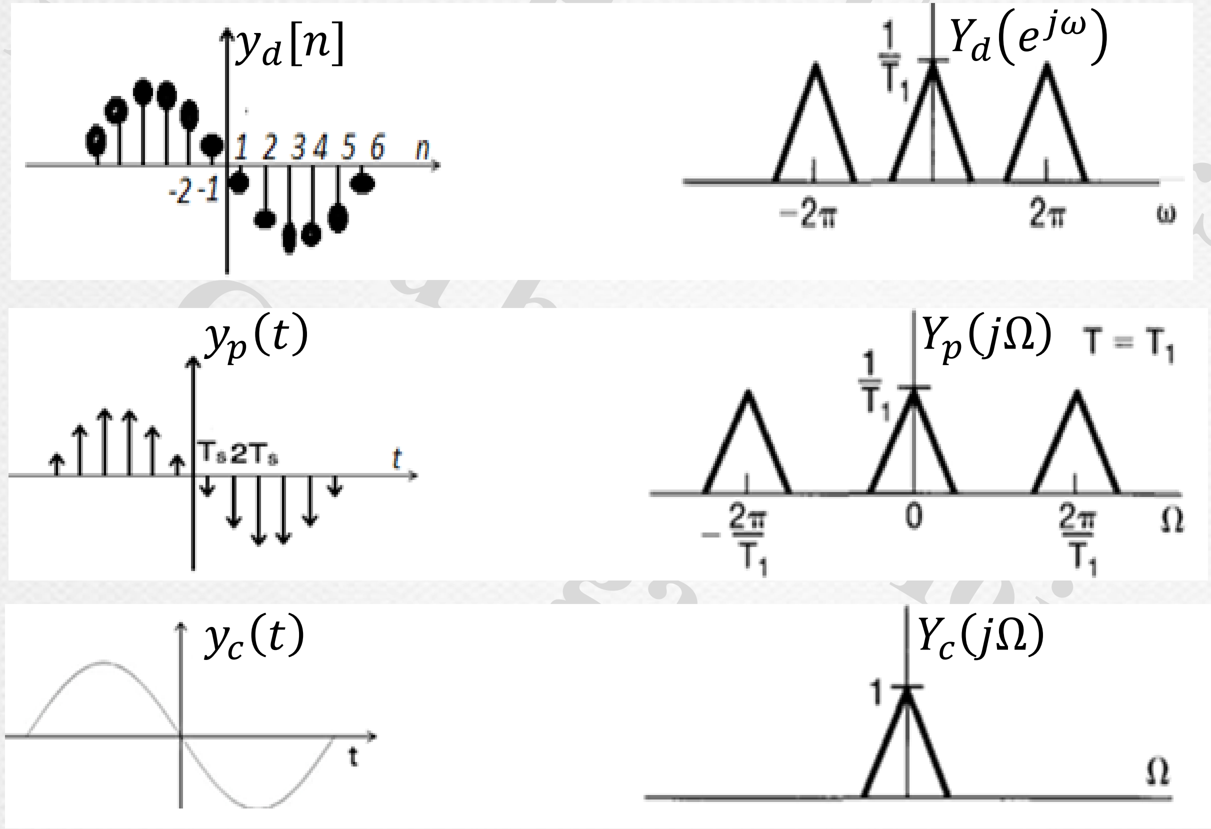
سیگنال ها
سیستم ها
سیستم های LTI
تبدیل فوریه گسسته در زمان
نمونه برداری
تبدیل Z

نمونه برداری

تبدیل گسسته به پیوسته D/C:

با استفاده از ساختار روبرو میتوان یک سیگنال گسسته را به یک سیگنال پیوسته تبدیل کرد.





تبدیل Z

تبدیل Z سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

تبدیل Z تنها با رابطه بالا مشخص نمی شود و باید حتما ناحیه همگرایی هم مشخص شود.

مثال ۳-۱: تبدیل Z سیگنال های زیر را بیابید:

الف) $x_1[n] = a^n u[n]$

ب) $x_2[n] = -a^n u[-n-1]$

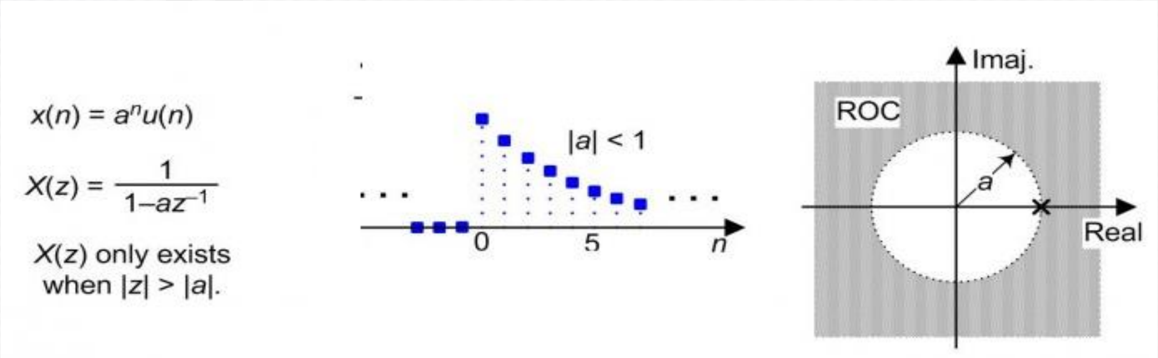
حل (الف):

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

به شرطی که $|az^{-1}| < 1$ باشد یا $|z| > |a|$ باشد.

سیگنال ها
سیستم ها
سیستم های LTI
تبدیل فوریه گسسته در زمان
نمونه برداری
تبدیل Z

تبدیل Z

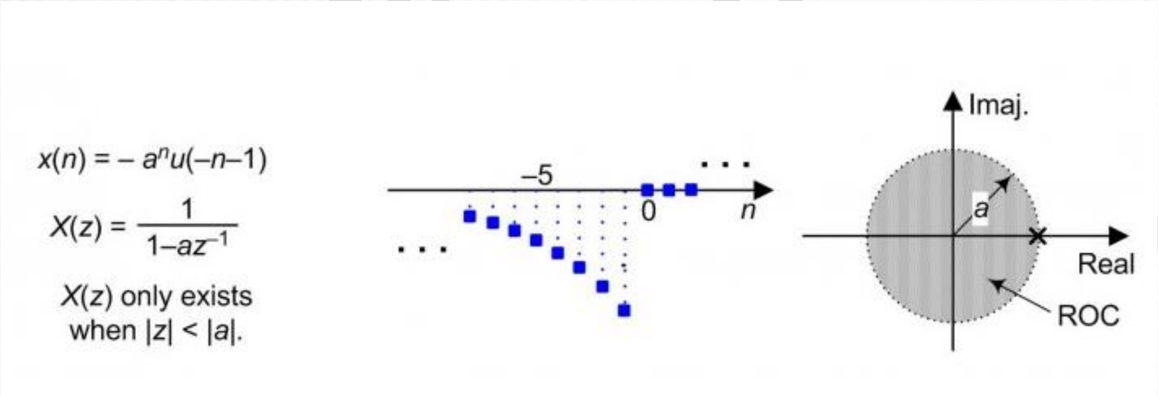


حل (ب):

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^nz^{-n}=-\sum_{m=1}^{\infty}(a^{-1}z)^m=-a^{-1}z\frac{1}{1-a^{-1}z}$$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

به شرطی که $|a^{-1}z|<1$ باشد یا $|z|<|a|$ باشد.



تبدیل Z

تبدیل Z سیگنال های مشهور

Signal $x[n]$	z-Transform $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$n\,u[n]$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert>1$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$na^n\,u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$-na^n\,u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$(\cos\omega_o n)u[n]$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_o}{1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$(\sin\omega_o n)u[n]$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_o}{1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$(a^n\cos\omega_o n)u[n]$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_o}{1-2az^{-1}\cos\omega_o+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$(a^n\sin\omega_o n)u[n]$	$\dfrac{az^{-1}\sin\omega_o}{1-2az^{-1}\cos\omega_o+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$

تبدیل Z

سببت بر اساس تبدیل Z:

در اسلاید (۱۳) دیدیم که یک سیستم (فیلتر) LTI در صورتی سببی است که:

$$h[n] = 0 \quad , \qquad \forall\, n < 0$$

این شرط معادل این است که ROC تبدیل Z بیرون یک دایره تعریف شود و بینهایت در ROC باشد.

توجیه:

فرض می کنیم سیستم سببی است، نشان میدهیم ROC در ناحیه همگرایی است:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + \cdots$$

به ازای $n \geq 0$، هیچ توان مثبتی از z موجود نیست. پس ROC شامل بینهایت است و بنابراین ROC بیرون یک دایره تعریف شده است.

تبدیل Z

پایداری بر اساس تبدیل Z:

در اسلاید (۱۳) دیدیم که یک سیستم (فیلتر) LTI در صورتی پایدار است که مطلقا جمع پذیر باشد:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

این شرط معادل این است که ROC تبدیل Z شامل دایره واحد شود.

توجیه: فرض: پایداری حکم: دایره واحد جز ROC

بر روی دایره واحد $z = e^{j\omega}$ است. بنابراین داریم:

$$|H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}\right|_{z=e^{j\omega}} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]||e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$$

شرط پایداری این است که $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| < \infty$ شود. پس

$$|H(z)|_{z=e^{j\omega}} < \infty$$

یعنی ROC شامل دایره واحد است.

سیگنال ها
سیستم ها
سیستم های LTI
تبدیل فوریه گسسته در زمان
نمونه برداری
تبدیل Z

تبدیل Z

مثال ۲-۳: تبدیل Z سیگنال های زیر را بیابید:

الف) $x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

ب) $x_2[n]=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

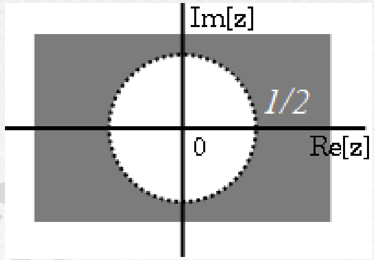
پ) $x_3[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

حل:

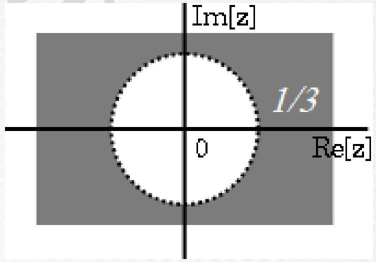
در هر سه مثال بالا ابتدا تبدیل Z و ناحیه همگرایی هر ترم را جداگانه حساب می کنیم. **اگر** ناحیه همگرایی مشترک داشتند آنگاه تبدیل Z نهایی را محاسبه میکنیم.

(الف) از مثال ۳-۱ (الف) و (ب) می دانیم که:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}} \;, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

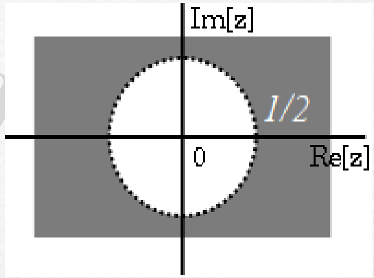


$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} \;, \qquad |z| > \frac{1}{3}$$



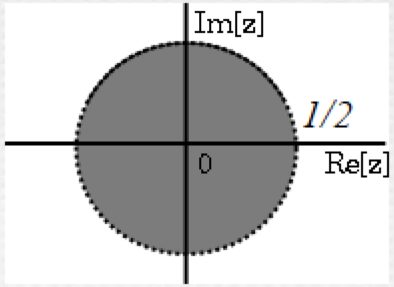
ناحیه مشترک به ازای $|z| > \frac{1}{2}$ بدست می‌آید پس تبدیل Z نهایی برابر است با:

$$X_1(z) = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}} + \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} = \frac{2-\frac{1}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}} \;, |z| > \frac{1}{2}$$

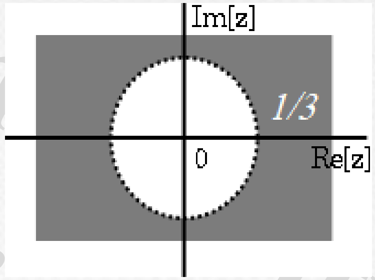


(ب) از مثال ۳-۱ (الف) و (ب) می دانیم که:

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)z^{-1}} \;, \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

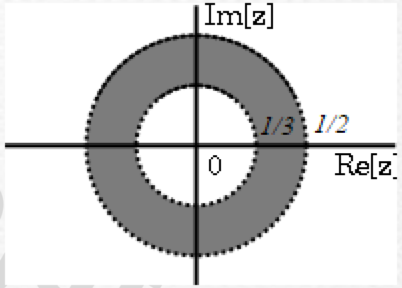


$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} \;, \qquad |z| > \frac{1}{3}$$



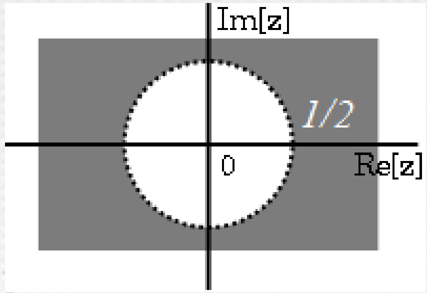
ناحیه مشترک به ازای $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$ بدست می‌آید پس تبدیل Z نهایی برابر است با:

$$X_2(z) = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)z^{-1}} + \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} = \frac{2+\frac{5}{6}z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} \;, \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

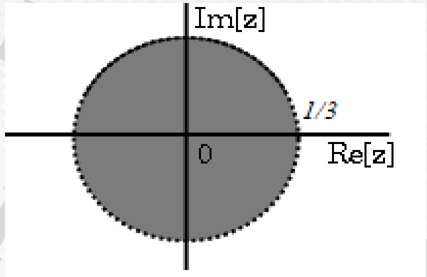


(پ) از مثال ۳-۱ (الف) و (ب) می دانیم که:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}} \;, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$



$$-\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} \;, \qquad |z| < \frac{1}{3}$$



ناحیه مشترکی بین $|z| > \frac{1}{2}$ و $|z| < \frac{1}{3}$ تعریف نمی‌شود. بنابراین $x_3[n]$ تبدیل Z ندارد.

ویژگی های ناحیه همگرایی ROC

هشت ویژگی ناحیه همگرایی عبارتند از

ویژگی ۱: ناحیه همگرایی تبدیل Z به صورت ناحیه بیرون دایره، ناحیه درون ناحیه، یا ناحیه بین دو دایره تعریف می شود.

$$0 \leq r_R \leq |z| \leq r_L \leq \infty$$

ویژگی ۲: تبدیل فوریه دنباله $x[n]$ مطلقا همگرا است اگر و تنها اگر ناحیه ROC شامل دایره واحد شود..

ویژگی ۳: ناحیه همگرایی ROC نمی‌تواند شامل قطب باشد.

ویژگی ۴: اگر $x[n]$ یک دنباله با طول محدود باشد، آنگاه ناحیه همگرایی آن کل صفحه z را شامل میشود به جز نقاط $z = 0$ و $z = \infty$ که باید جداگانه بررسی شوند.

ویژگی ۵: اگر $x[n]$ یک دنباله دست راستی باشد و $|z| = r_0$ جز ناحیه همگرایی باشد آنگاه تمام مقادیر $|z| > r_0$ هم جز ناحیه همگرایی است.

به عبارت دیگر اگر $x[n]$ دست راستی باشد، ROC به صورت خارج یک دایره تعریف می شود.

ویژگی های ناحیه همگرایی ROC

ویژگی ۶: اگر $x[n]$ یک دنباله دست چپی باشد و $|z| = r_0$ جز ناحیه همگرایی باشد آنگاه تمام مقادیر $|z| < r_0$ هم جز ناحیه همگرایی است.

به عبارت دیگر اگر $x[n]$ دست چپی باشد، ROC به صورت داخل یک دایره تعریف می شود.

ویژگی ۷: اگر $x[n]$ یک دنباله دو طرفه با طول نامحدود باشد یعنی $x[n], -\infty \leq n \leq \infty$ باشد، ROC به صورت ناحیه بین یک دایره تعریف می شود که البته شامل هیچ قطبی نمی باشد

ویژگی ۸: ناحیه همگرایی همواره همبند است.

سوال ۳-۳: آیا اگر $x[n]$ دست راستی باشد (ویژگی ۵)، ناحیه همگرایی شامل بینهایت می شود؟

مشابها اگر $x[n]$ دست چپی باشد، آیا ناحیه همگرایی شامل صفر می شود؟

سیگنال ها
سیستم ها
سیستم های LTI
تبدیل فوریه گسسته در زمان
نمونه برداری
تبدیل Z

تبدیل Z

توابع تبدیل کسری (Rational Transfer Functions):

فرض کنید یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به صورت زیر داریم:

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} a_k x[n-k]$$

با گرفتن تبدیل Z از رابطه بالا داریم:

$$\sum_{k=0}^{N} b_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} a_k X(z) z^{-k}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

معمولا $N > M$ است و N مرتبه سیستم نامیده می شود.

صفرها و قطبهای توابع تبدیل کسری:

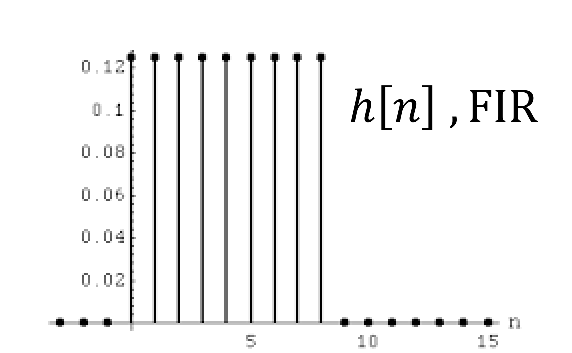
واضحا صفرهای $A(z)$ برابر با صفرهای تابع تبدیل و صفرهای $B(z)$ برابر با قطبهای تابع تبدیل است.

$$zeros: \quad A(z) = 0$$

$$poles: \quad B(z) = 0$$

تبدیل Z

فیلتر FIR:



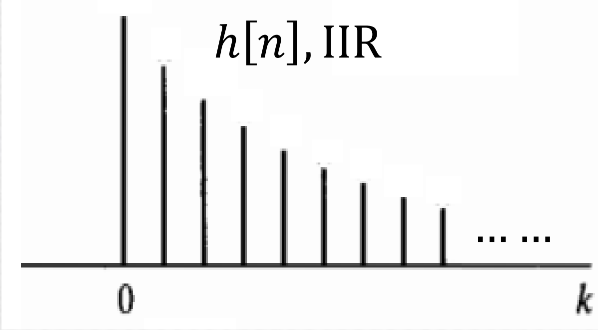
❖ فیلتری FIR است که طول پاسخ ضربه آن محدود باشد.

❖ مطابق با رابطه بدست آمده برای توابع تبدیل کسری، میتوان گفت فیلتری FIR است که تمام ضرایب b_n به جز یکی از آنها صفر باشد.

❖ برای مثال اگر $b_0 = 1$ و $n = 1,2,..,N$، $b_n = 0$ داریم:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} a_n z^{-k}$$

در این صورت میتوان گفت که $a_n = h[n]$ است و طول فیلتر برابر با $M + 1$ است



فیلتر IIR:

❖ فیلتری که FIR نباشد IIR است. مثل فیلتر $h[n] = a^n u[n]$.

End of Chapter 2