پردازش سیگنال های دیجیتال پیشرفته

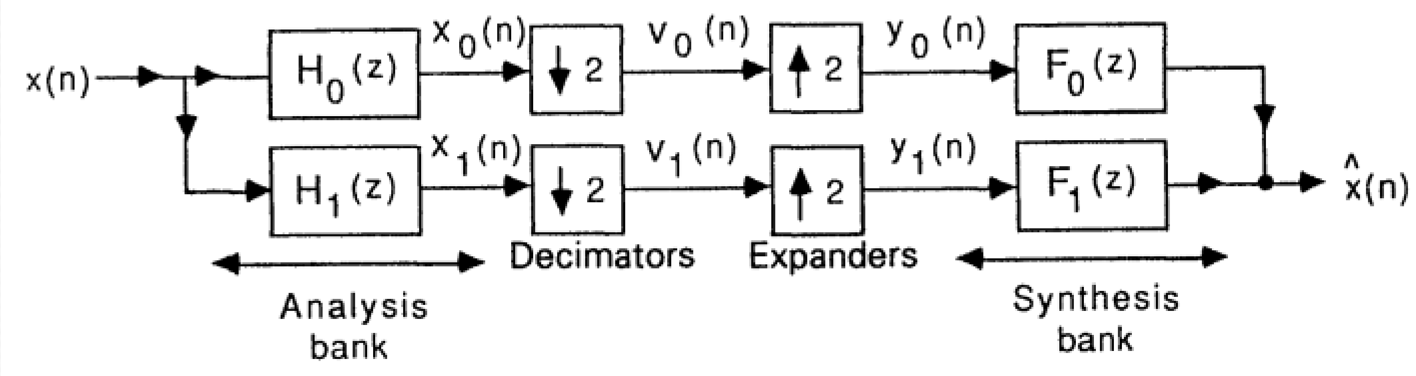
فصل پنجم
اساس طراحی فیلتر بانکها

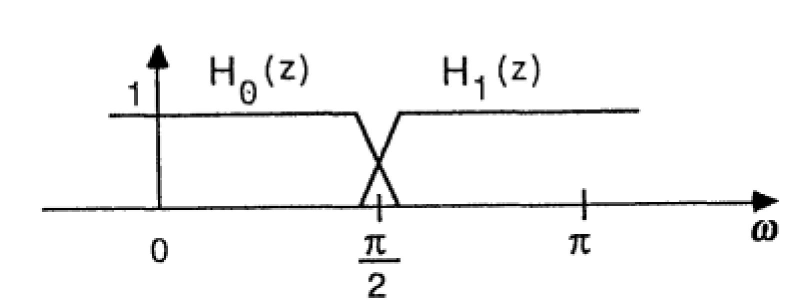
ارایه شده توسط:

حجت قیمت گر
استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مقدمه

❖ شکل زیر یک ساختار دو کاناله مشهور به فیلتر بانک آینه‌ای تربیعی QMF را نشان می‌دهد





❖ فیلترهای $H_0(z)$ و $H_1(z)$ به همراه دو decimator بعد از آنها، فیلتربانک آنالیز نامیده می‌شوند.

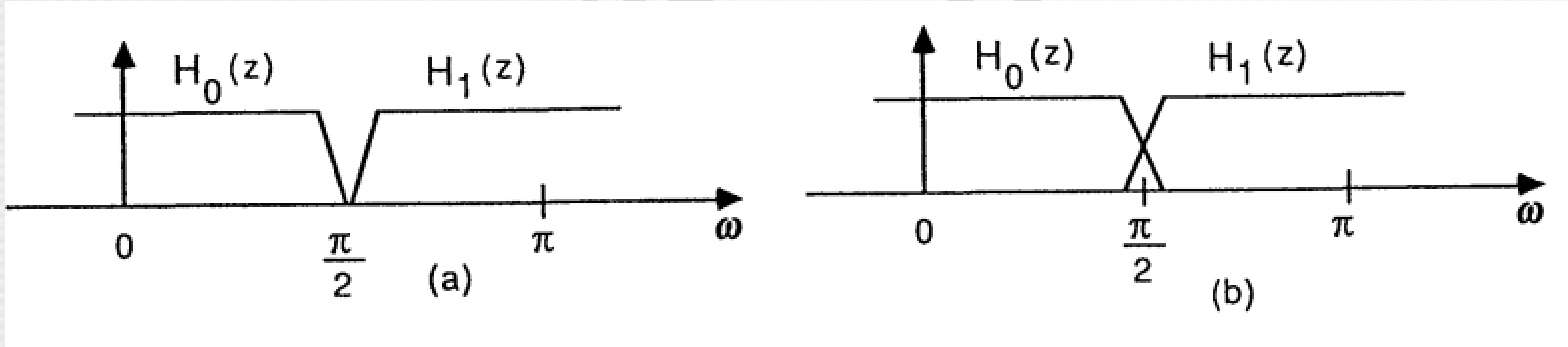
❖ فیلترهای $F_0(z)$ و $F_1(z)$ به همراه دو expander قبل از آنها، فیلتربانک سنتز نامیده می‌شوند.

خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF

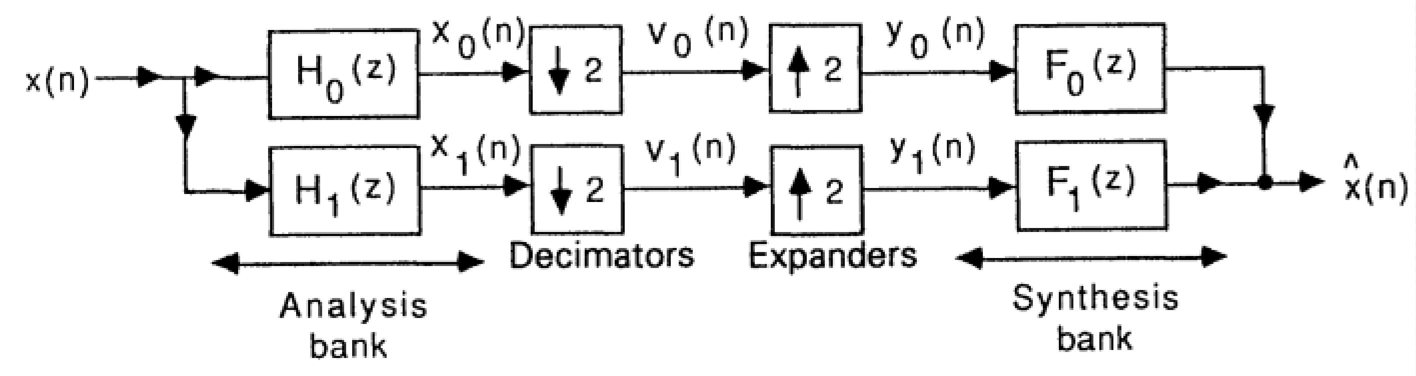
- سیگنال بازیابی شده $\hat{x}[n]$ لزوما مشابه $x[n]$ نیست که این اثر ناشی از تداخل فرکانسی، تضعیف دامنه یا اعوجاج فاز است.
- در این می‌خواهیم فیلترهایی طراحی کنیم که تا حد ممکن این مشکلات را حل کنند و سیگنال بازیابی شده $\hat{x}[n]$ مشابه با $x[n]$ شود.
- اثر کوانتیزاسیون ضرایب نیز منجر به اختلاف بین دو سیگنال است که این اثر قابل جبران نیست.

۱- تداخل فرکانسی:

- فیلترهای $H_0(z)$ و $H_1(z)$ فیلترهایی با پهنای گذر غیر صفر و گین باند توقف غیر صفر هستند.
- از طرفی سیگنال ورودی $x[n]$ نیز یک سیگنال با پهنای باند غیر محدود است. بنابراین تداخل فرکانسی رخ می‌دهد.



خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF



رابطه $\hat{X}(z)$ را از بلوک دیاگرام بالا محاسبه می‌کنیم. خروجی فیلتر بانک آنالیز برابر است با:

$$X_k(z) = X(z)H_k(z) \ \ , k = 0,1$$

با عبور از decimator داریم:

$$V_k(z) = \frac{1}{2}X_k\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}X_k\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \ , k = 0,1$$

با عبور از expander داریم:

$$Y_k(z) = V_k(z^2) = \frac{1}{2}X_k(z) + \frac{1}{2}X_k(-z), k = 0,1$$

خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF

با جایگذاری $X_k(z)$ از رابطه اول در $Y_k(z)$ داریم:

$$Y_k(z) = \frac{1}{2}X(z)H_k(z) + \frac{1}{2}X(-z)H_k(-z)\,, k = 0{,}1$$

و در نهایت، $\hat{X}(z)$ برابر است با:

$$\hat{X}(z) = F_0(z)Y_0(z) + F_1(z)Y_1(z) \quad \rightarrow$$

$$\hat{X}(z) = F_0(z)\left(\frac{1}{2}X(z)H_0(z) + \frac{1}{2}X(-z)H_0(-z)\right)$$
$$+F_1(z)\left(\frac{1}{2}X(z)H_1(z) + \frac{1}{2}X(-z)H_1(-z)\right)$$

با جداسازی ضرایب $X(z)$ و $X(-z)$ داریم:

$$\hat{X}(z) = X(z)\left(\frac{1}{2}F_0(z)H_0(z) + \frac{1}{2}F_1(z)H_1(z)\right)$$
$$+X(-z)\left(\frac{1}{2}F_0(z)H_0(-z) + \frac{1}{2}F_1(z)H_1(-z)\right) \qquad (۱)$$

خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF

فرم ماتریسی رابطه بالا به صورت زیر است:

$$2\hat{X}(z) = [X(z) \quad X(-z)] \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \end{bmatrix}$$

ماتریس H ، ماتریس مولفه تداخلی (AC) نامیده می‌شود.

❖ عبارت تداخلی $X(-z)$ بر روی دایره واحد به صورت $X(e^{j(\omega-\pi)})$ تعریف می‌شود که یک ورژن شیفت خورده به راست $X(e^{j\omega})$ به اندازه π است.

حذف ترم تداخلی:

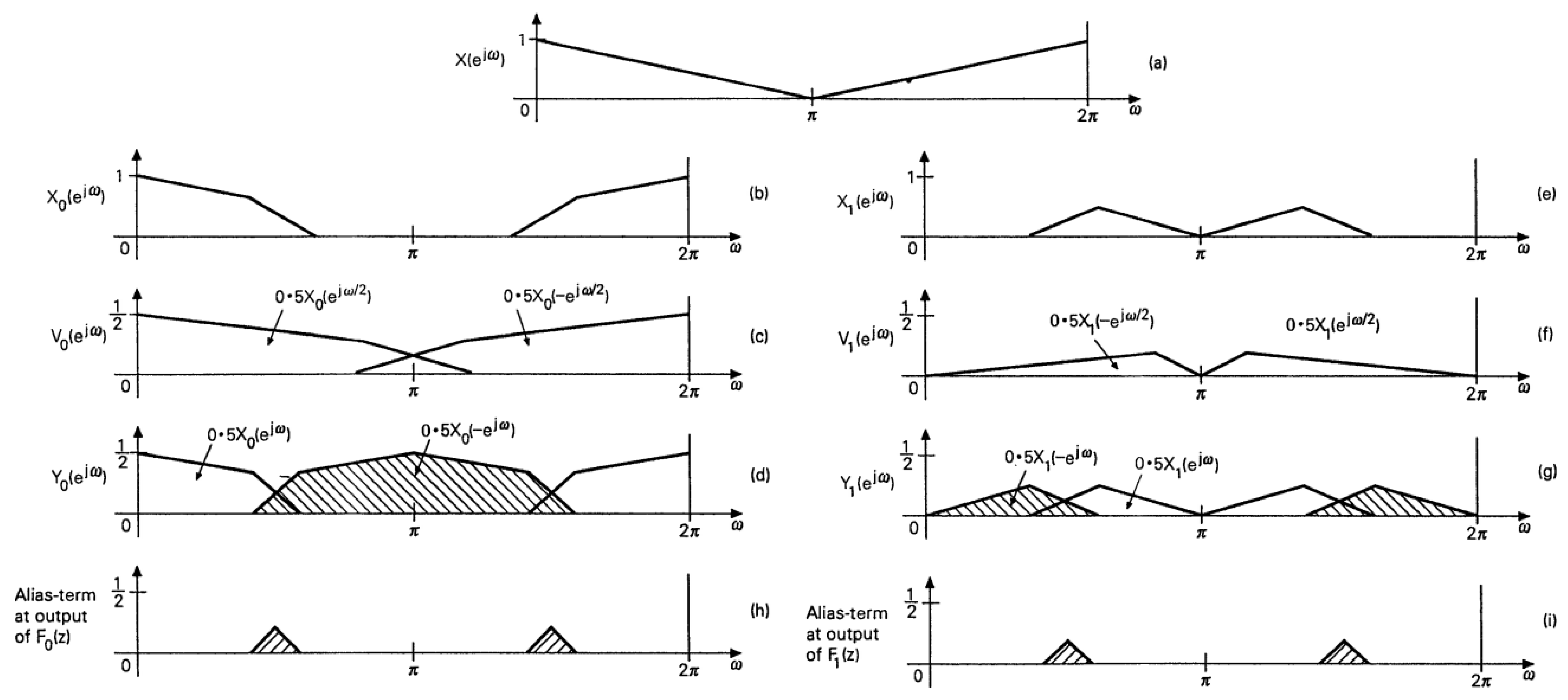
می‌خواهیم با طراحی فیلترهای سنتز، ترم تداخلی $X(-z)$ را حذف کنیم. برای این منظور باید ضریب این طیف صفر شود:

$$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0$$

اگر $F_0(z) = H_1(-z)$ و $F_1(z) = -H_0(-z)$ انتخاب شود در این صورت عبارت بالا صفر می‌شود.

نتیجه: اگر فیلترهای آنالیز پهنای باند غیرصفر داشته باشند، با انتخاب فیلترهای سنتز به صورت بالا، می‌توان به طور کامل تداخل فرکانسی را حذف کرد.

خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF



اگر $F_0(z) = H_1(-z)$ و $F_1(z) = -H_0(-z)$ انتخاب شود در این صورت دو ترم تداخلی ایجاد شده در شکل (h) و (i) همدیگر را حذف می‌کنند.

خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF

۲- اعوجاج دامنه و فاز:

دیدیم که با انتخاب $F_0(z)$ و $F_1(z)$ می‌توان تداخل فرکانسی در خروجی نهایی را حذف کرد. در این صورت رابطه (۱) اسلاید ۴ به صورت زیر می باشد:

$$\hat{X}(z) = X(z)\left(\frac{1}{2}H_0(z)H_1(-z) - \frac{1}{2}H_0(-z)H_1(z)\right)$$

اگر $T(z) = \frac{1}{2}\left(H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z)\right)$ تعریف شود، در این صورت $\hat{X}(z) = X(z)T(z)$ است که نشان می‌دهد یک اعوجاج دامنه و فاز رخ می‌دهد:

$$\hat{X}(z) = X(z)T(z) = |T(z)|e^{j<T(z)}X(z)$$

- در صورتی اعوجاج دامنه نداریم که $T(z)$ یک سیستم تمام گذر باشد.
- در صورتی اعوجاج فاز نداریم که $T(z)$ یک سیستم با فاز خطی باشد.
- به عبارت دیگر باید $T(z) = cz^{-n_0}$ باشد تا اعوجاجی در خروجی مشاهده نشود. در این صورت:

$$\hat{X}(z) = cz^{-n_0}X(z) \;\rightarrow\; \hat{x}[n] = cx[n-n_0]$$

خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF

یک مثال ساده

اگر $H_0(z)$ یک فیلتر پایین‌گذر باشد، آنگاه $T(z)$ در صورتی تمام گذر است که:

$$H_1(z) = H_0(-z)$$

در این صورت $H_1(z)$ یک فیلتر بالا گذر است.

از طرفی به منظور حذف اعوجاج فرکانسی دیدیم که :

$$F_0(z) = H_1(-z) = H_0(z) \quad , \qquad F_1(z) = -H_0(-z)$$

یعنی تمام فیلترها را می‌توان از فیلتر $H_0(z)$ اولیه محاسبه کرد.

با انتخاب فیلترها به صورت بالا، تابع انتقال $T(z)$ برابر است با:

$$T(z) = \frac{1}{2}\big(H_0(z)H_0(z) - H_0(-z)H_0(-z)\big)$$

$$T(z) = \frac{1}{2}\left(H_0^2(z) - {H_0}^2(-z)\right)$$

خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF

به منظور کاهش حجم محاسبات، بهتر است که فیلترها در ساختار چندفازی پیاده‌سازی شود. در این صورت:

$$H_0(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

بنابراین:

$$H_1(z) = H_0(-z) = E_0(z^2) - z^{-1}E_1(z^2)$$

پس زوج فیلتر بخش آنالیز را می‌توان به صورت ماتریسی نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0(z^2) \\ z^{-1}E_1(z^2) \end{bmatrix}$$

همچنین می‌توان گفت:

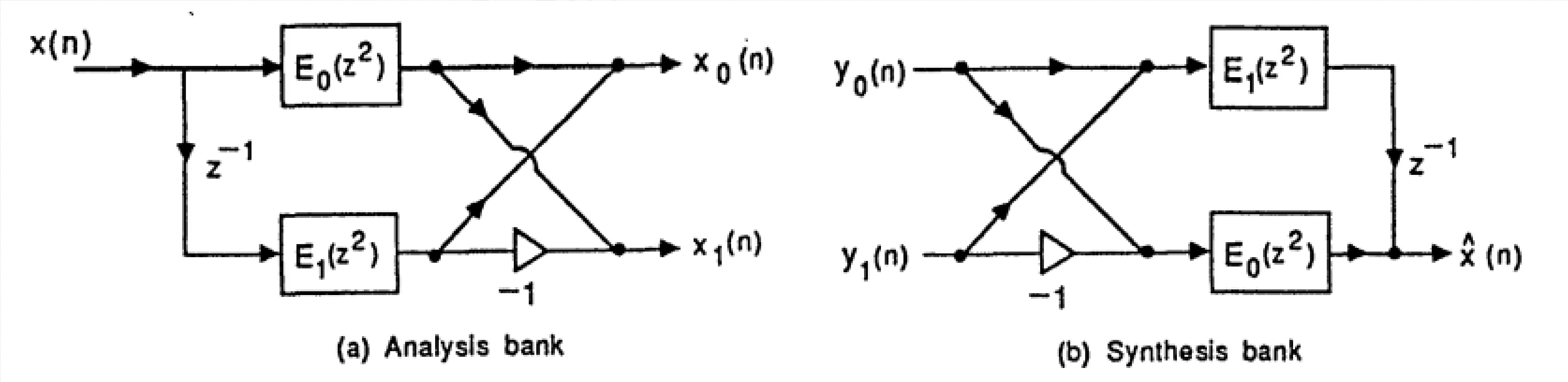
$$F_0(z) = H_0(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

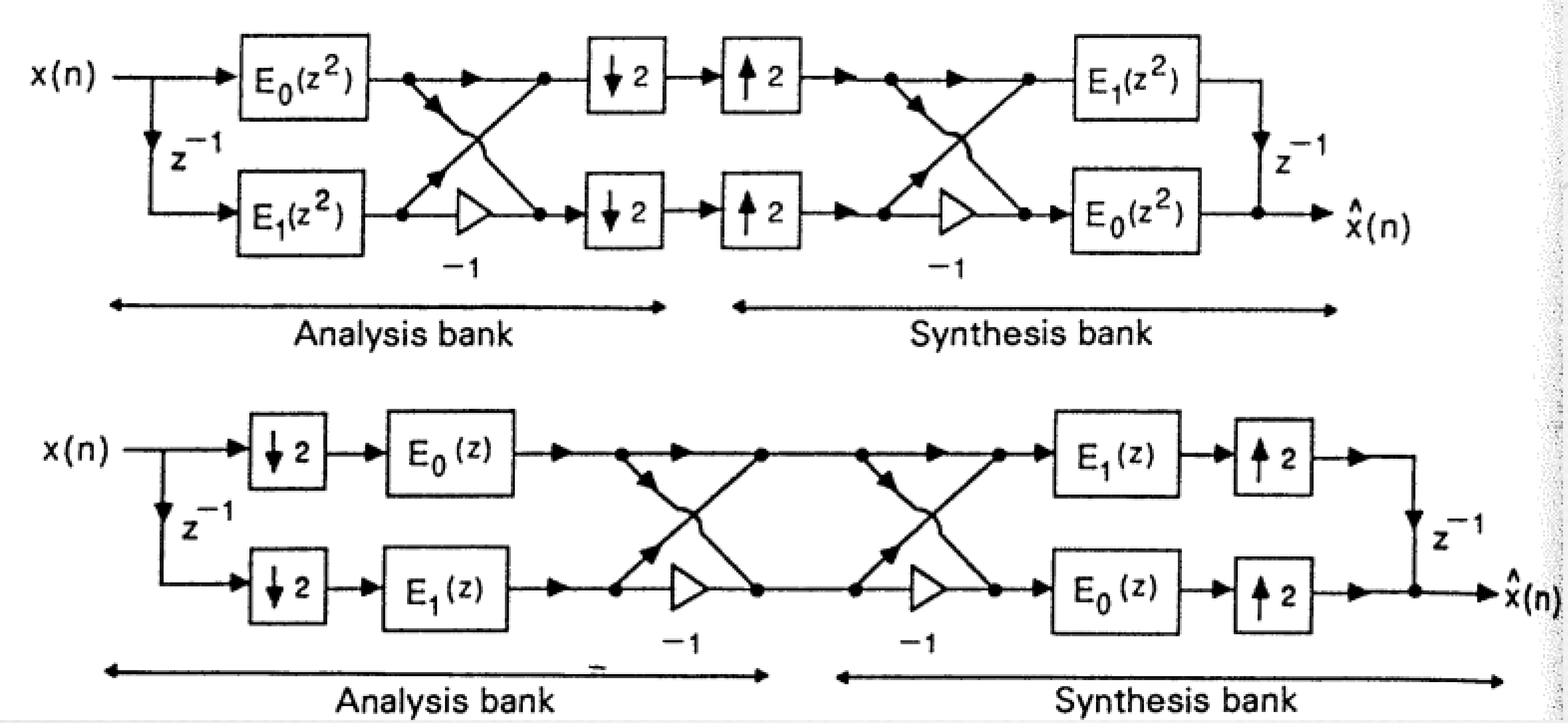
$$F_1(z) = -H_0(-z) = -E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

مشابها می‌توان نشان داد که زوج فیلتر بخش سنتز به صورت زیر طراحی می شوند

$$\begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1}E_1(z^2) & E_0(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF





خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF

یک محدودیت انتخاب بر روی فیلترها

دیدیم که

$$T(z) = \frac{1}{2}(H_0^2(z) - H_0(-z)^2)$$

با فرض $H_0(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$ داریم:

$$T(z) = 2z^{-1}E_0(z^2)E_1(z^2)$$

اگر بخواهیم $T(z) = cz^{-n}$ باشد، آنگاه باید $E_0(z) = c_0z^{-n_0}$ و $E_1(z) = c_1z^{-n_1}$ باشد. پس با جایگذاری در رابطه $H_0(z)$ و $H_1(z)$ داریم:

$$H_0(z) = c_0z^{-2n_0} + c_1z^{-(2n_1+1)}, \qquad H_1(z) = c_0z^{-2n_0} - c_1z^{-(2n_1+1)}$$

نتیجه: یعنی تحت شرایط حذف اعوجاج دامنه و فاز، فیلترهای بخش آنالیز (و همچنین بخش سنتز) دو نقطه ای هستند که این انتخاب سبب می‌شود فیلترهایی پایین‌گذر و بالاگذر خوبی در اختیار نداشته باشیم.

نتیجه: اگر $E_1(z) = 1/E_0(z)$ انتخاب شود، در این صورت باز شرایط حذف اعوجاج برقرار است اما فیلترهای طراحی شده دیگر FIR نیستند و IIR هستند.

خطای ایجاد شده در فیلتر بانک QMF

۱- حذف اعوجاج با طراحی فیلتر FIR

- اگر فیلتر $H_0(z)$ دارای فاز خطی باشد، آنگاه تمام فیلترهای فیلتربانک QMF فاز خطی دارند و علاوه بر این $T(z)$ نیز دارای فاز خطی است. در این صورت تنها مساله باقیمانده، بررسی اعوجاج دامنه است.

- اگر $h[n]$ یک فیلتر حقیقی FIR باشد، در صورتی فاز خطی دارد که $h[n] = \pm h[M-n]$.
- ثابت می‌شود که که تنها در صورتی یک فیلتر FIR با فاز خطی، پایین گذر است که $h[n] = h[M-n]$ باشد (بخش ۲.۴.۲). یعنی باید فیلتر از نوع I یا نوع II باشد.

در فصل ۲ دیدیم که پاسخ فرکانسی فیلترهای نوع اول و دوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_0(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N}{2}}R(\omega)$$

در این صورت با جایگذاری در رابطه $T(e^{j\omega})$ داریم:

$$T(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{2}\left[\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 - (-1)^N\left|H_0(e^{j(\pi-\omega)})\right|^2\right]$$

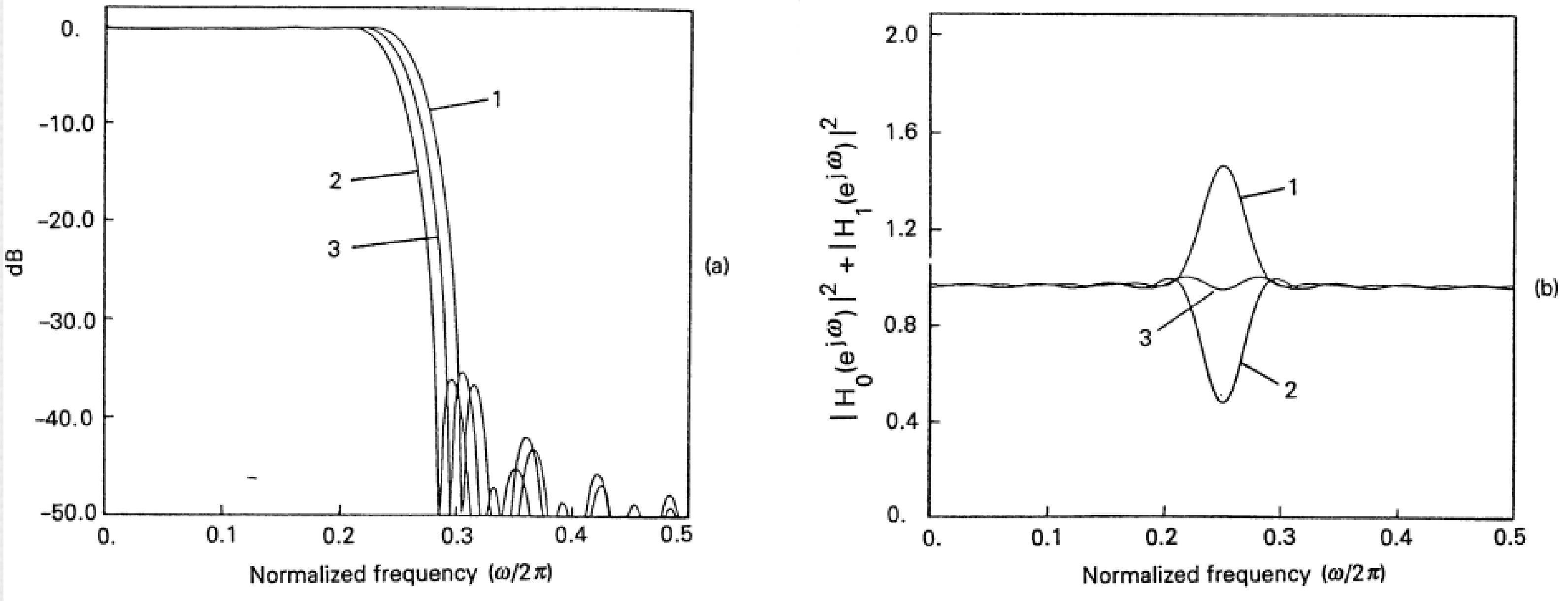
خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF

❖ اگر N زوج باشد، آنگاه یک صفر در $\omega = \pi/2$ ایجاد می‌شود که مطلوب نیست. پس باید N فرد باشد. پس:

$$T(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{2}\left[\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 + \left|H_0(e^{j(\pi-\omega)})\right|^2\right] \rightarrow T(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{2}\left[\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 + \left|H_1(e^{j\omega})\right|^2\right]$$

❖ با توجه به وجود پهنای باند گذر و همچنین اعوجاج باند عبور و باند گذر در $H_0(e^{j\omega})$، نمی‌توان یک ساختار اعوجاج دامنه را طراحی کرد. زیرا در ناحیه $\omega = \pi/2$ هم‌پوشانی فرکانسی رخ می‌دهد.

❖ با انتخاب مناسب فیلتر $H_0(e^{j\omega})$ می‌توان اعوجاج دامنه را به حداقل رساند.



خطای ایجاد شده در فیلتر بانک QMF

هدف: برقراری رابطه زیر به صورت تقریبی:

$$\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 + \left|H_1(e^{j\omega})\right|^2 \approx 1 \quad \forall\omega$$

به منظور طراحی فیلترFIR و برقراری تقریبی شرط بالا، از روش بهینه‌سازی جانسون استفاده می‌شود. در این روش دو پارامتر تضعیف باند عبور فیلتر $H_0(e^{j\omega})$ و برقراری رابطه بالا اهمیت دارند. هدف مینی‌مم سازی رابطه زیر است:

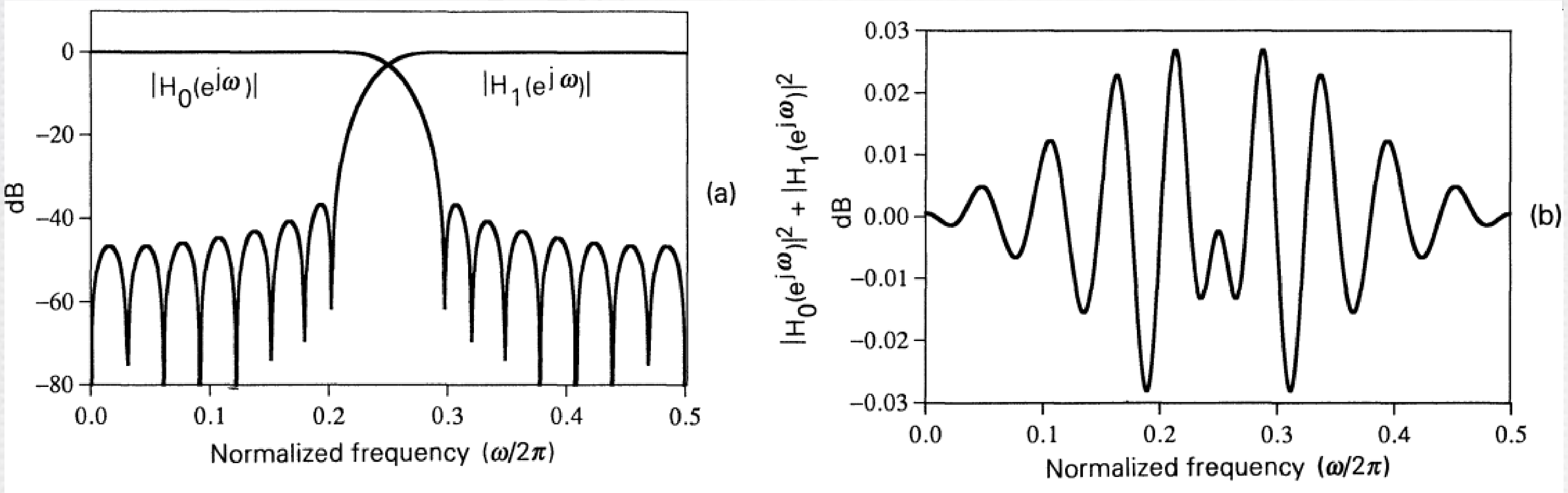
$$\phi = \alpha\phi_1 + (1-\alpha)\phi_2$$

که

$$\phi_1 = \int_{\omega_s}^{\pi}\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \ , \quad \phi_2 = \int_0^{\pi}\left(1-\left|H_0\left(e^{j\omega}\right)\right|^2-\left|H_1\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\right)^2 d\omega \ , \ 0 \le \alpha \le 1$$

هر چه ϕ_1 و ϕ_2 کوچک‌تر باشند، در این صورت فیلتر $H_0(e^{j\omega})$ و متعاقبا فیلتر $H_1(e^{j\omega})$ در باند عبور تقریبا ثابت و در باند توقف تقریبا صفر هستند و بنابراین اعوجاج به حداقل خود می‌رسد.

خطای ایجاد شده در فیلر بانک QMF



در این مثال که با روش جانسون طراحی شده است $N = 31$ بدست آمده است.

حداقل تضعیف باند توقف dB ۳۸ می باشد.

همچنین از شکل سمت راست می‌توان گفت که عبارت $\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 + \left|H_1(e^{j\omega})\right|^2$ به خوبی نزدیک dB ۰ است که همان گین ۱ است.

خطای ایجاد شده در فیلتر بانک QMF

۱- حذف اعوجاج با طراحی فیلتر IIR

با استفاده از فیلترهای IIR می‌توان، اعوجاج دامنه و تداخل فرکانسی را **به طور کامل** حذف کرد. برای این منظور کافی است در معادله زیر $T(z)$ تمام گذر تعریف شود:

$$T(z) = 2z^{-1}E_0(z^2)E_1(z^2)$$

دو انتخاب وجود دارد:

۱- $E_0(z)$ و $E_1(z)$ هر دو تمام گذر و هر دو IIR :

$$E_0(z) = \frac{a_0(z)}{2} \quad , E_1(z) = \frac{a_1(z)}{2}$$

که $a_1(z)$ و $a_2(z)$ تمام گذر هستند.

۲- $E_0(z)$ و $E_1(z)$ معکوس یکدیگر باشند که حاصلضرب $E_0(z^2)E_1(z^2)$ تمام گذر شود. مثلا انتخابهای زیر:

$$E_0(z) = 0.5 + z^{-1} \quad , \qquad E_1(z) = \frac{1}{0.5 + z^{-1}}$$

خطای ایجاد شده در فیلتر بانک QMF

در این صورت:

$$H_0(z) = \frac{a_0(z^2) + z^{-1}a_1(z^2)}{2}$$

از طرفی چون $H_1(z) = H_0(-z)$ است پس $H_1(z) = \frac{a_0(z^2) - z^{-1}a_1(z^2)}{2}$ است و داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(z)} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0(z^2) \\ z^{-1}a_1(z^2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}(z)} \qquad (۱)$$

و معادلا، برای فیلترهای بخش سنتز می‌توان نوشت:

$$[F_0(z) \quad F_1(z)] = [z^{-1}E_1(z^2) \quad E_0(z^2)]\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = a^T(z)R$$

فیلتر بانک QMF متقارن توان

می‌خواهیم ویژگی‌های طراحی بالا را بررسی کنیم:

۱- ویژگی تقارن توان

از رابطه (۱) می‌توان به سادگی گفت که اگر بخواهیم $\tilde{h}(z)h(z) = 1$ باشد آنگاه باید:

$$\tilde{a}(z)a(z) = 2 \qquad\qquad (R^*)'R = 0.5$$

همچنین می‌دانیم که در انتخاب $H_1(z)$ دو محدودیت داریم:

۱- انتخاب به صورت $H_1(z) = H_0(-z)$

۲- برقراری شرط مکمل توان

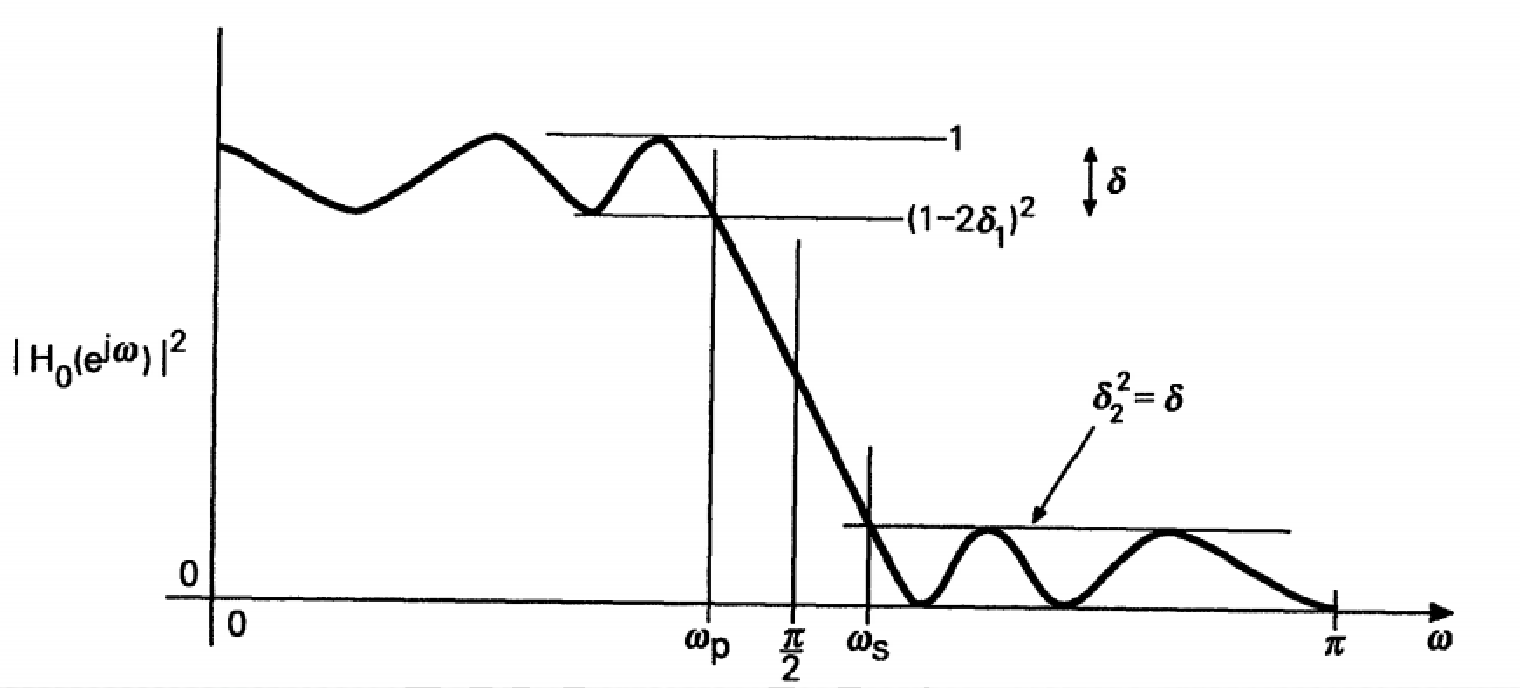
با اعمال این دو شرط به رابطه مکمل توان داریم:

$$\widetilde{H}_0(z)H_0(z) + \widetilde{H}_0(-z)H_0(-z) = 1$$

بر روی دایره واحد $z = e^{j\omega}$ است و از طرفی اگر ضرایب فیلتر حقیقی باشند تقارن حول $\pi/2$ برقرار است یعنی:

$$\left|H\left(e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\right)\right|^2 + \left|H\left(e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right)\right|^2 = 1 \quad \forall\theta$$

فیلتر بانک QMF متقارن توان



- ❖ به فیلتری که تقارن فرد حول $\omega = \pi/2$ برقرار باشد فیلترهای متقارن توان گفته می شود.
- ❖ در واقع، طراحی متقارن توان فیلتر در باند عبور و باند گذر، سبب می شود که انتخاب $H_1(z) = H_0(-z)$ به طور مناسبی منجر به حذف اعوجاج گردد.

فیلتر بانک QMF متقارن توان

۲- ویژگی تقارن ضرایب صورت

از بحث توابع تبدیل تمام گذر می‌دانیم که اگر $a_0(z)$ و $a_1(z)$ تمام گذر باشند داریم:

$$a_0(z) = c_0 z^{-k_0} \frac{\widetilde{d_0}(z)}{d_0(z)} \quad , a_1(z) = c_1 z^{-k_1} \frac{\widetilde{d_1}(z)}{d_1(z)}$$

با جایگذاری در رابطه $2H_0(z) = a_0(z^2) + z^{-1} a_1(z^2)$ داریم:

$$H_0(z) = \frac{0.5\left(c_0 z^{-2k_0} \tilde{d}_0(z^2) d_1(z^2) + c_1 z^{-2k_1} \tilde{d}_1(z^2) d_0(z^2)\right)}{d_0(z^2) d_1(z^2)}$$

اگر $H_0(z) = P_0(z)/d_0(z^2)d_1(z^2)$ باشد آنگاه ثابت می‌شود که:

$$P_0(z^{-1}) = z^{-N} P_0(z)$$

یا معادلا

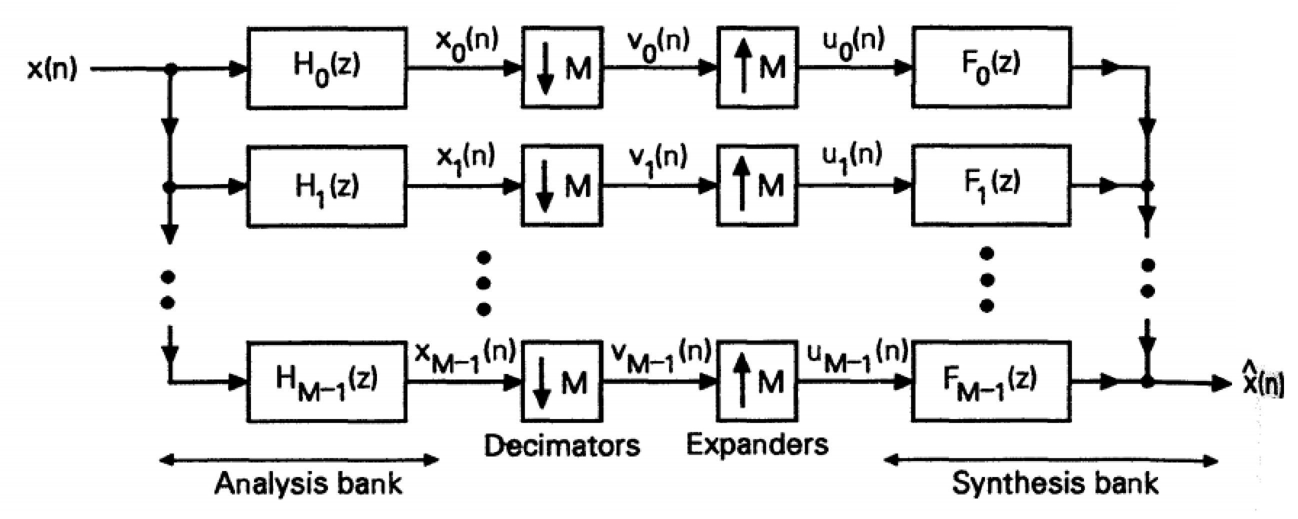
$$p_0[n] = p_0[N-n]$$

یعنی، ضرایب صورت نسبت به هم متقارن هستند.

فیلتربانک M کاناله

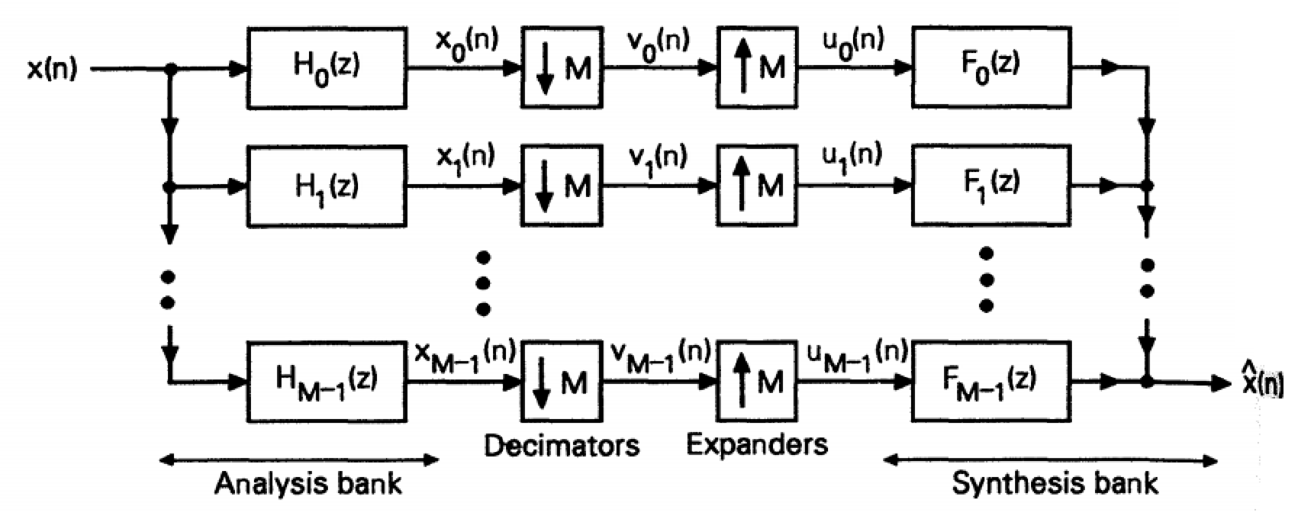
❖ تا اینجا نحوه طراحی یک فیلتربانک QFM دو کاناله با یک فیلتر $H_0(z)$ و خواص این فیلتربانک را بررسی کردیم.

❖ در حالت کلی، سیگنال ورودی توسط فیلتربانک آنالیز M تایی، به M زیرباند مجزا تفکیک می‌شود و در خروجی یک فیلتربانک آنالیز M تایی، سیگنال را بازیابی می‌کند.



$$\underbrace{\mathbf{h}(z)=\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix}}_{\text{Analysis bank}}, \quad \underbrace{\mathbf{f}(z)=\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix}}_{\text{Transposed synthesis bank}}, \quad \underbrace{\mathbf{e}(z)=\begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{bmatrix}}_{\text{Delay chain}}$$

فیلتربانک M کاناله



محاسبه طیف سیگنال بازیابی شده:

خروجی فیلترهای بخش آنالیز به صورت زیر هستند:

$$X_k(z) = H_k(z)X(z) \quad k = 0,1,2,\dots,M-1$$

پس از عبور از decimator های داریم:

$$V_k(z) = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} X_k\left(z^{1/M}W^l\right) = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} H_k\left(z^{1/M}W^l\right)X\left(z^{1/M}W^l\right)$$

فیلتربانک M کاناله

با عبور از expander ها داریم: $U_k(z) = V_k(z^M)$ پس:

$$U_k(z) = V_k(z^M) = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} H_k(zW^l)X(zW^l)$$

پس سیگنال بازیابی شده برابر است با:

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z)U_k(z) = \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z)\left(\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} H_k(zW^l)X(zW^l)\right)$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} X(zW^l)\sum_{k=0}^{M-1} H_k(zW^l)F_k(z)$$

اگر $A_l(z) = \sum_{k=0}^{M-1} H_k(zW^l)F_k(z)$ تعریف شود آنگاه داریم:

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} A_l(z)X(zW^l)$$

خطای ایجاد شده در فیلتر بانک M کاناله

همانند فیلتربانک دو کاناله QMF، سیگنال بازیابی شده $\hat{x}[n]$ لزوما مشابه $x[n]$ نیست. این تفاوت، ناشی از تداخل فرکانسی، تضعیف دامنه یا اعوجاج فاز است

۱- تداخل فرکانسی و تصویر فرکانسی:

- ❖ تداخل فرکانسی ناشی از نمونه‌های شیفت خورده $X(zW^l)$ به ازای $l = 1,2,\dots,M-1$ است.
- ❖ اثر این نمونه شیفت خورده به صورت $A_l(z), l = 1,2,\dots,M-1$ مشاهده می‌شود.
- ❖ واضحا برای داشتن یک فیلتر بانک بدون تداخل فرکانسی باید شرط زیر برقرار باشد:

$$A_l(z) = 0 \quad l = 1,2,\dots,M-1$$

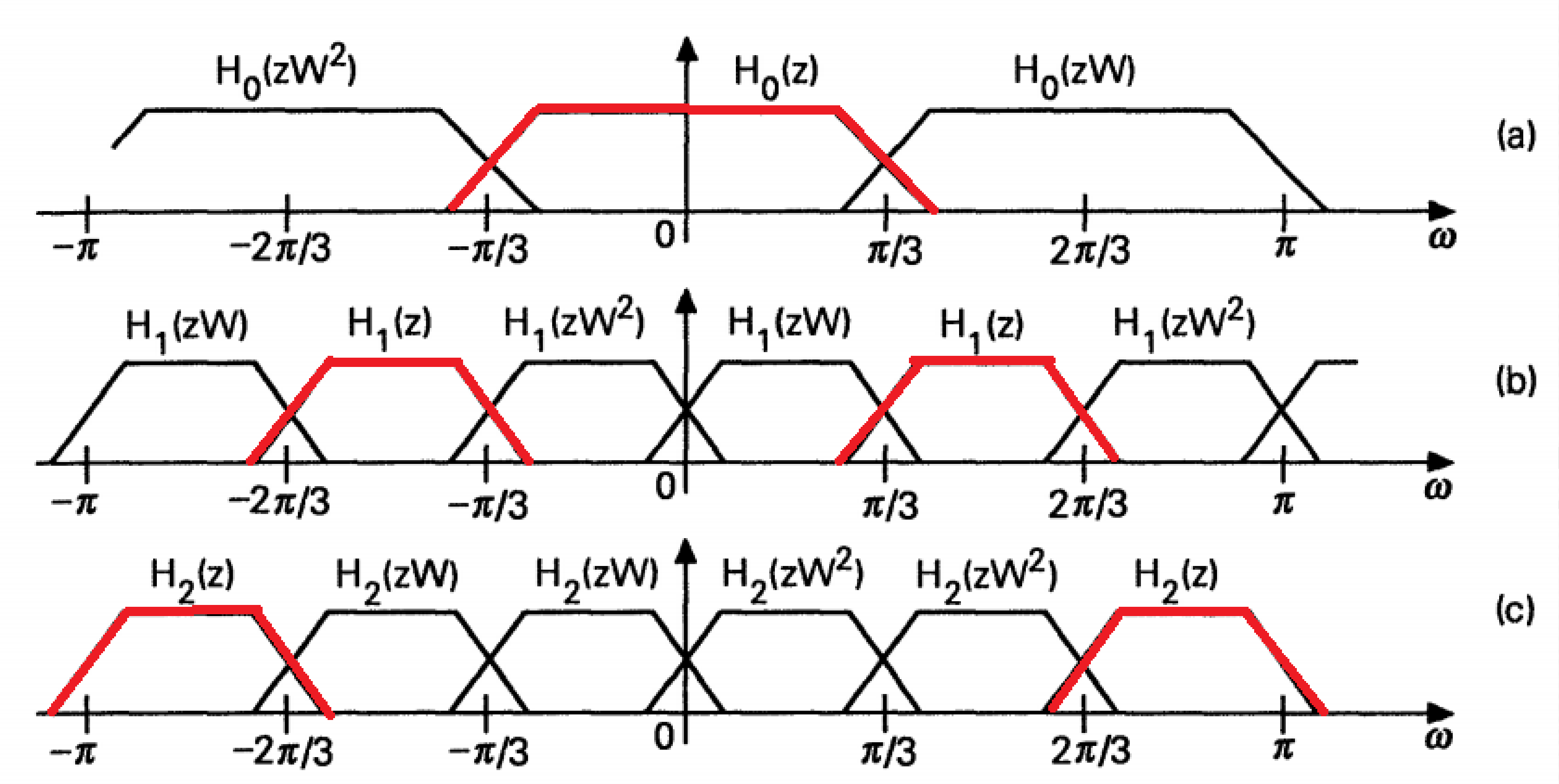
مثال (حالت $M = 3$):

دو ترم تداخل فرکانسی $A_1(z)$ و $A_2(z)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$l = 1 \qquad \rightarrow A_1(z) = H_0(zW)F_0(z) + H_1(zW)F_1(z) + H_2(zW)F_2(z) = 0$$

$$l = 2 \qquad \rightarrow A_2(z) = H_0(zW^2)F_0(z) + H_1(zW^2)F_1(z) + H_2(zW^2)F_2(z) = 0$$

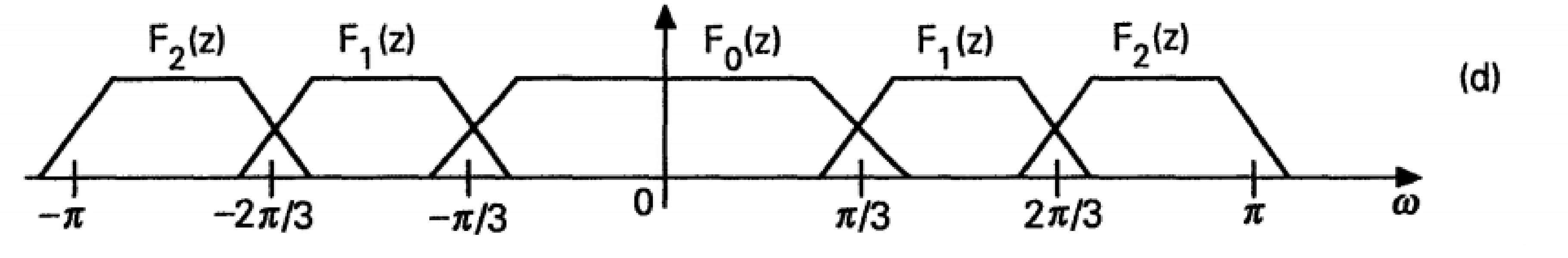
خطای ایجاد شده در فیلتر بانک M کاناله



خطای ایجاد شده در فیلتر بانک M کاناله

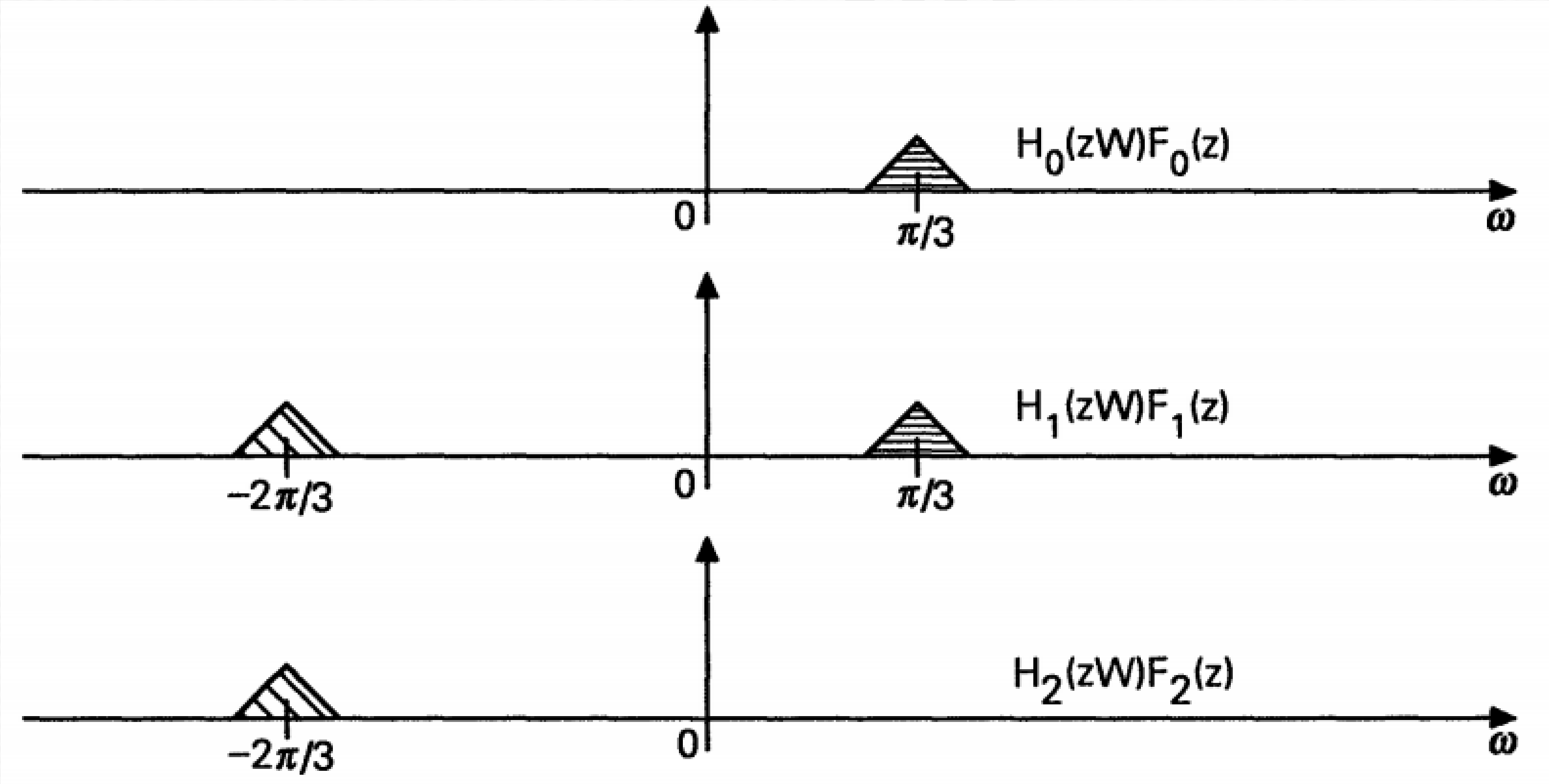
- ورودی فیلتر $F_0(z)$ عبارتهای $H_0(z)X(z)$، $H_0(zW)X(zW)$ و $H_0(zW^2)X(zW^2)$ است.
- هدف طراحی $F_0(z)$ حذف فرکانس‌های تصویر شامل مولفه‌های $X(zW)$ و $X(zW^2)$ و حفظ $X(z)$ است.
- برای این منظور، یک انتخاب مناسب این است که $|F_0(e^{j\omega})|$ مشابه با $|H_0(e^{j\omega})|$ باشد.
- مشابها همین مباحث رو میتوان به $F_1(z)$ و $F_2(z)$ بسط داد. با فرض ایده‌آل بودن فیلترها داریم:

$$H_k(e^{j\omega}) = H_k(e^{j\omega}) = \begin{cases} \sqrt{M}, & \text{bandpass} \\ 0, & \text{bandstop} \end{cases}$$



خطای ایجاد شده در فیلتر بانک M کاناله

اگر فیلترها ایده آل باشند با انتخاب $F_k(z)$ ها به صورت بالا، $\hat{x}[n] = x[n]$ است. اما در عمل فیلترها ایده آل نیستند و در باند توقف، تداخل فرکانسی رخ می‌دهد:



خطای ایجاد شده در فیلتر بانک M کاناله

۲- اعوجاج دامنه و فاز

❖ فرض کنید مولفه‌های تداخلی کاملا حذف شده‌اند. در این صورت $A_l(z)=0\ \ ,l=1,2,\dots M-1$ و داریم:

$$\hat{X}(z)=T(z)X(z)$$

که

$$T(z)=\frac{1}{M}A_0(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}H_k(z)F_k(z)$$

شرط بازیابی کامل:

اگر $H_k(z)$ ها و $F_k(z)$ ها به گونه طراحی شوند که هیچگونه تداخل فرکانسی رخ ندهد و تابع $T(z)$، یک تابع تمام گذر با فاز خطی باشد در این صورت

$$\hat{x}[n]=cx[n-n_0]$$

و می‌گوییم سیستم شرط بازیابی کامل را برآورده می‌کند.

خطای ایجاد شده در فیلتر بانک M کاناله

۲- اعوجاج دامنه و فاز

❖ فرض کنید مولفه‌های تداخلی کاملا حذف شده‌اند. در این صورت $A_l(z) = 0\ \ ,l = 1,2, \ldots M-1$ و داریم:

$$\hat{X}(z) = T(z)X(z)$$

که

$$T(z) = A_0(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)F_k(z)$$

شرط بازیابی کامل:

اگر $H_k(z)$ ها و $F_k(z)$ ها به گونه طراحی شوند که هیچگونه تداخل فرکانسی رخ ندهد و تابع $T(z)$، یک تابع تمام گذر با فاز خطی باشد در این صورت

$$\hat{x}[n] = cx[n-n_0]$$

و می‌گوییم سیستم شرط بازیابی کامل را برآورده می‌کند.

خطای ایجاد شده در فیلتر بانک M کاناله

به منظور راحتی محاسبات از تعاریف ماتریسی استفاده می‌کنیم. معادله $A_l(z)$ ها را می‌توان به فرم ماتریسی نوشت:

$$A_l(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H_k(zW^l)F_k(z)$$

$$M\underbrace{\begin{bmatrix} A_0(z) \\ A_1(z) \\ \vdots \\ A_{M-1}(z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(z)} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) & \cdots & H_{M-1}(z) \\ H_0(zW) & H_1(zW) & \cdots & H_{M-1}(zW) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0(zW^{M-1}) & H_1(zW^{M-1}) & \cdots & H_{M-1}(zW^{M-1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}(z)} \underbrace{\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(z)},$$

شرط بازیابی کامل می‌گویند تمام $A_l(z)$ ها به ازای $l > 0$ باید صفر شوند پس:

$$\mathbf{H}(z)\mathbf{f}(z) = \mathbf{t}(z) \quad \text{where} \quad \mathbf{t}(z) = \begin{bmatrix} MA_0(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MT(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

خطای ایجاد شده در فیلتر بانک M کاناله

به ماتریس $\boldsymbol{H}(z)$ ، ماتریس مولفه تداخل (AC) گویند.

با ترکیب فرم ماتریس بالا و معادله بازیابی کامل داریم:

$$\widehat{X}(z) = \boldsymbol{A}^T(z)\boldsymbol{x}(z) = \frac{1}{M}\boldsymbol{f}^T(z)\boldsymbol{H}^T(z)\boldsymbol{x}(z)$$

که

$$\mathbf{x}(z) = \begin{bmatrix} X(z) \\ X(zW) \\ \vdots \\ X(zW^{M-1}) \end{bmatrix}$$

واضحا برای حذف تداخلات فرکانسی باید ماتریس $\boldsymbol{f}(z)$ به صورت زیر انتخاب شود:

$$\boldsymbol{H}(z)\boldsymbol{f}(z) = \boldsymbol{t}(z) \rightarrow \boldsymbol{f}(z) = \boldsymbol{H}^{-1}(z)\boldsymbol{t}(z)$$

که به منظور حذف اعوجاج دامنه و فاز باید داشته باشیم:

$$\boldsymbol{t}(z) = \begin{bmatrix} z^{-n_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

پیاده سازی بهینه با ساختار چندفازی

در فصل چهارم دیدیم که هر فیلتر را می‌توان به فرم چندفازی زیر نوشت. اگر فیلترهای آنالیز به فرم چند فازی نوع اول نوشته شوند داریم

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_{lk}(z^M)\,, \qquad k = 0,1,2,\dots,M-1$$

و در فرم ماتریسی می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{00}(z^M) & E_{01}(z^M) & \cdots & E_{0,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z^M) & E_{M-1,1}(z^M) & \cdots & E_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{h}(z) = \boldsymbol{E}(z^M)\boldsymbol{e}(z)$$

پیاده سازی بهینه با ساختار چندفازی

مشابه می‌توان تمام فیلترهای سنتز را به فرم چند فازی نوع دوم نوشت:

$$F_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)} R_{lk}(z^M)$$

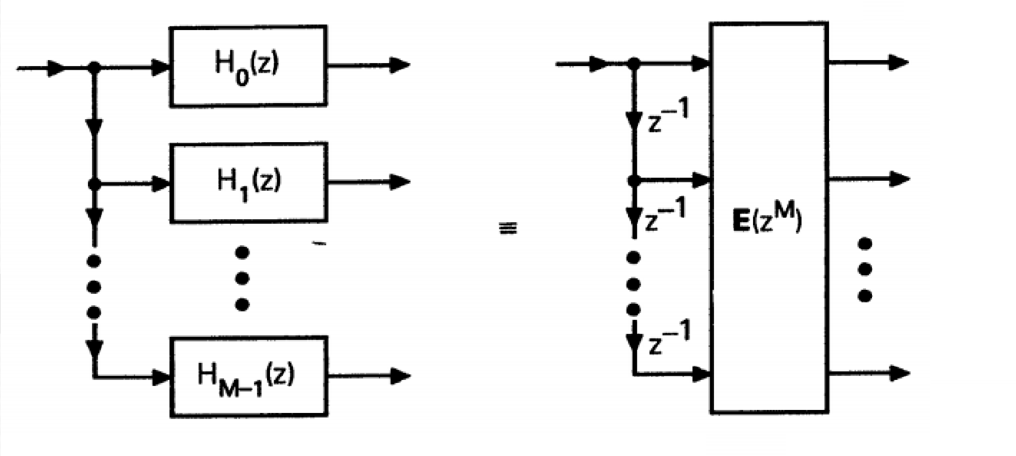
و در فرم ماتریسی می‌توان نوشت:

$$[F_0(z) \quad \dots \quad F_{M-1}(z)] = [z^{-(M-1)} \quad z^{-(M-2)} \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} R_{00}(z^M) & \dots & R_{0,M-1}(z^M) \\ R_{10}(z^M) & \dots & R_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-1,0}(z^M) & \dots & R_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix}$$

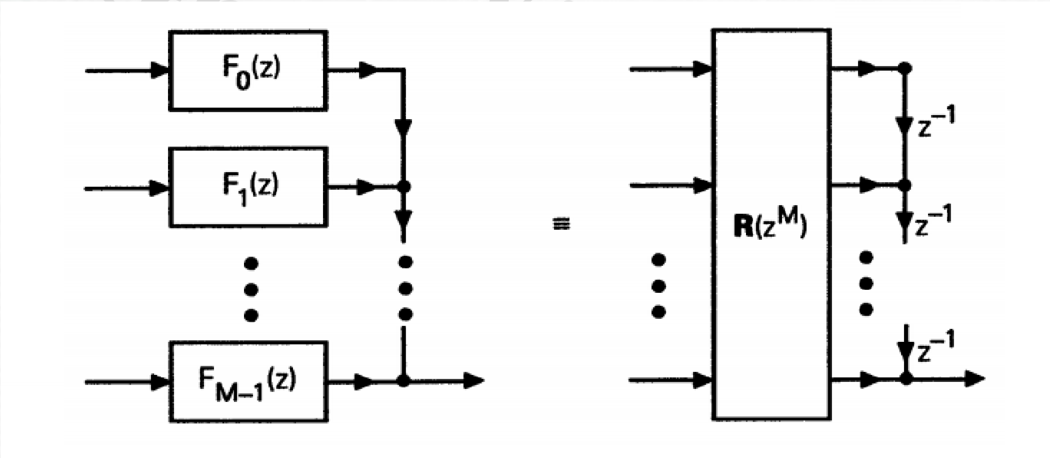
$$\mathbf{f}^T(z) = z^{-M-1}\, \tilde{\boldsymbol{e}}(z) \boldsymbol{R}(z^M)$$

پیاده سازی بهینه با ساختار چندفازی

پیاده سازی فیلتربانک آنالیز با ساختار چندفازی نوع اول

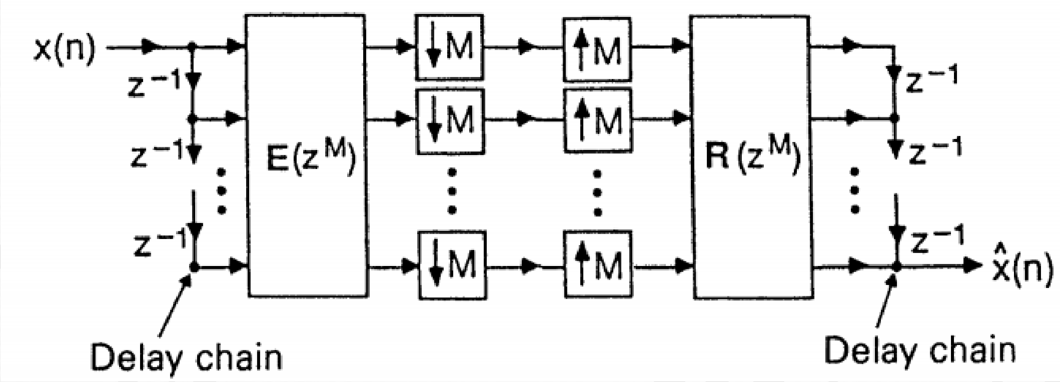


پیاده سازی فیلتربانک سنتز با ساختار چندفازی نوع دوم

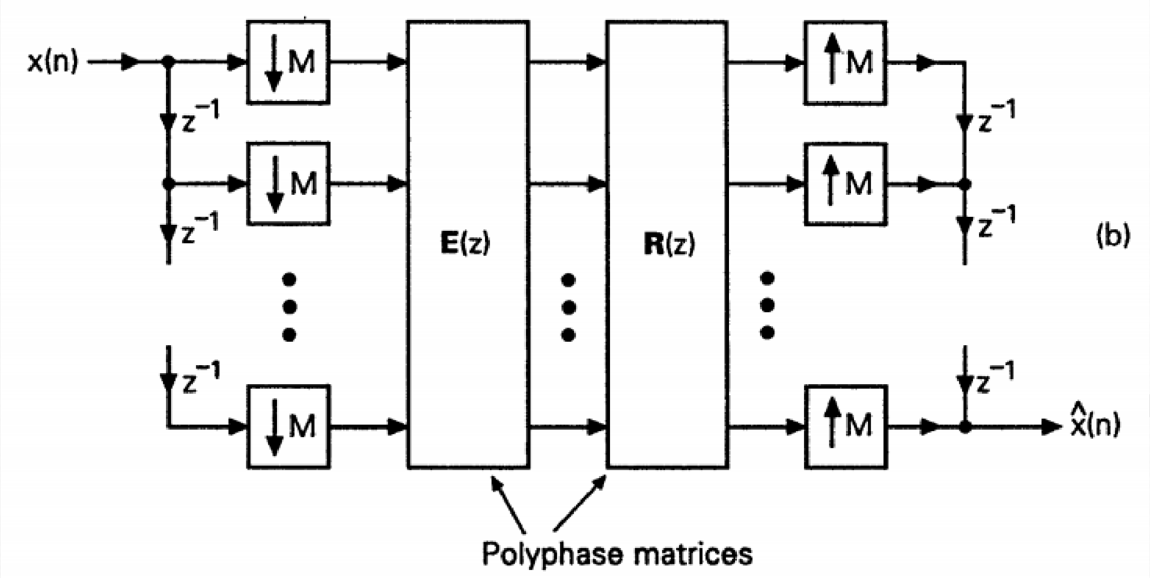


پیاده سازی بهینه با ساختار چندفازی

پیاده سازی فیلتربانک M باند با ساختار چندفازی



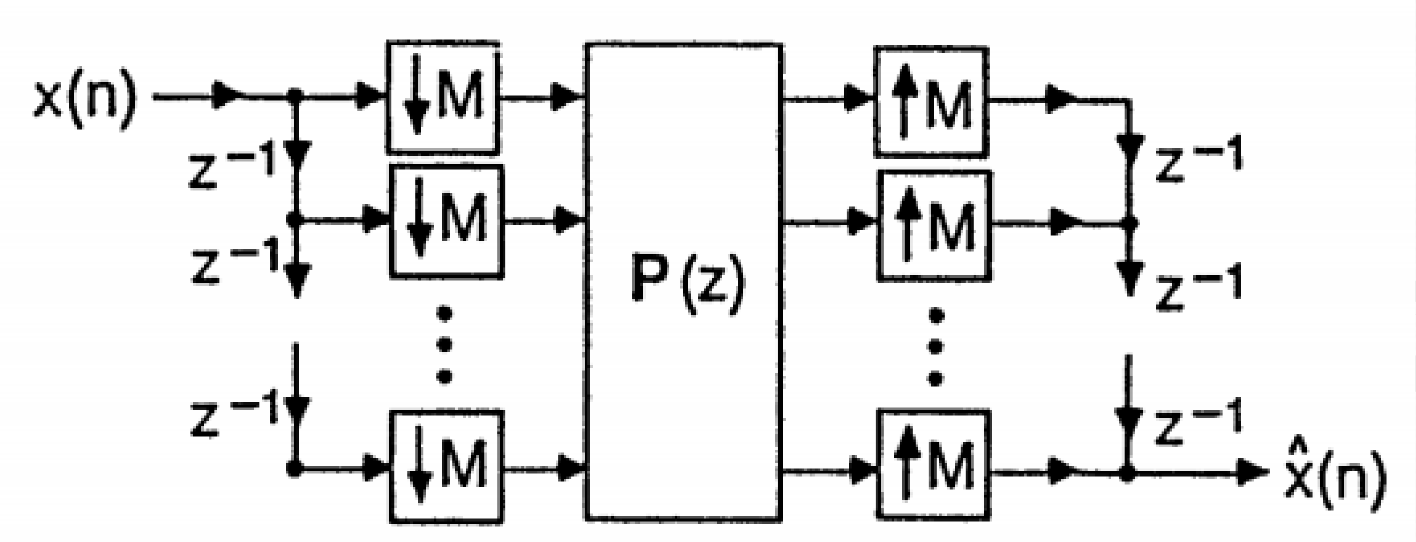
پیاده سازی فیلتربانک M بند با ساختار چندفازی بهینه



پیاده سازی بهینه با ساختار چندفازی

می‌توان ماتریس‌های $\boldsymbol{E}(z)$ و $\boldsymbol{R}(z)$ را با هم ادغام کرد و یک ماتریس واحد را جایگیزین کرد:

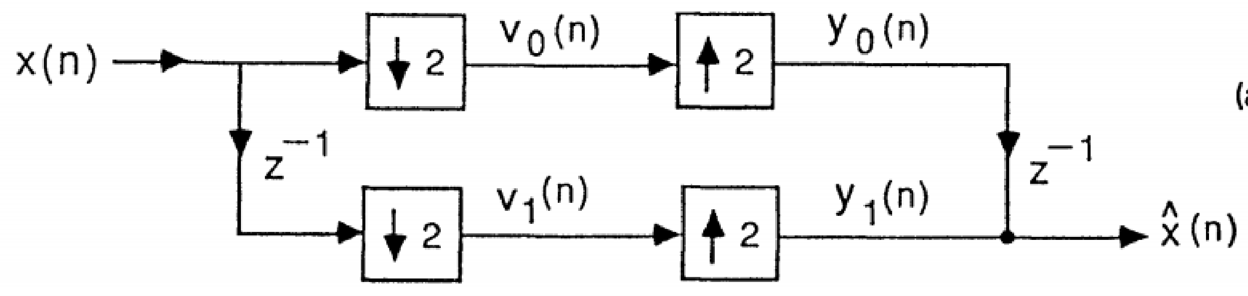
$$\boldsymbol{P}(z) = \boldsymbol{E}(z)\boldsymbol{R}(z)$$



سیستم بازیابی کامل

۱- سیستم بازیابی کامل با فیلترهای تاخیر دهنده

فرض کنید $H_0(z) = 1$، $H_1(z) = z^{-1}$، $F_0(z) = z^{-1}$ و $F_1(z) = 1$ باشد. در این صورت داریم:



(a)

رابطه ورودی-خروجی ساختار بالا با جایگذاری در معادله $\hat{X}(z)$ (اسلاید ۴) به صورت $\hat{X}(z) = z^{-1}X(z)$ است. یعنی تنها تغییر یک شیفت به اندازه یک واحد است. پس $T(z) = z^{-1}$ و شرط بازیابی کامل برقرار است.

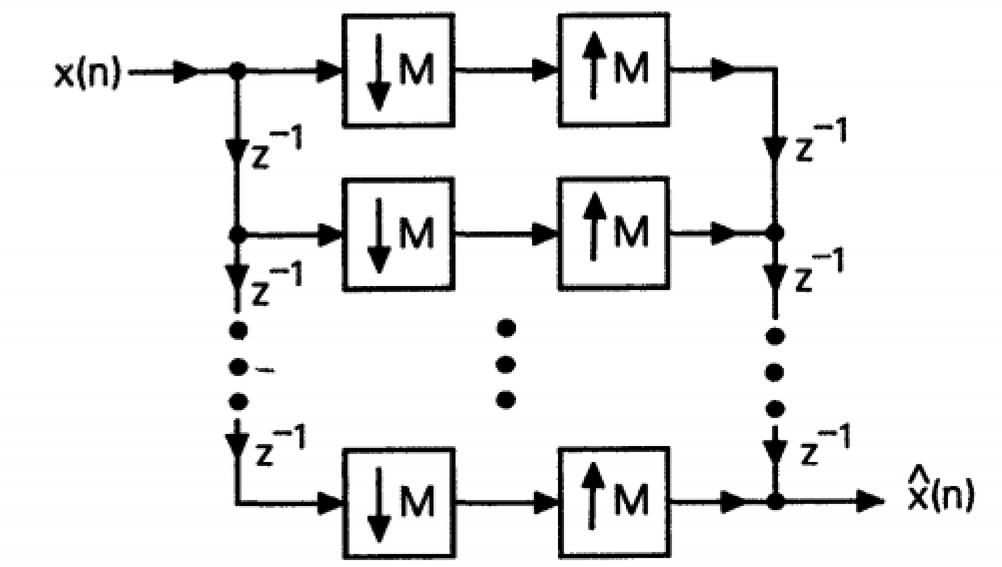
$x(n)$:	x(0)	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	x(6)	..
$v_0(n)$:	x(0)		x(2)		x(4)		x(6)	..
$v_1(n)$:	x(-1)		x(1)		x(3)		x(5)	..
$y_0(n)$:	x(0)	0	x(2)	0	x(4)	0	x(6)	...
$y_1(n)$:	x(-1)	0	x(1)	0	x(3)	0	x(5)	...
$\hat{x}(n)$:	x(-1)	x(0)	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	x(6)..

(b)

سیستم بازیابی کامل

در حالت M کاناله می‌توان فیلترها را به صورت زیر فرض کرد:

$$H_k(z) = z^{-k} \quad , F_k(z) = z^{-(M-1-k)} \quad , \qquad 0 \le k \le M-1$$



رابطه ورودی-خروجی ساختار بالا با جایگذاری در معادله $\hat{X}(z)$ (اسلاید ۲۲) به صورت $\hat{X}(z) = z^{-(M-1)}X(z)$ است. یعنی تنها تغییر یک شیفت به اندازه $M-1$ واحد رخ می‌دهد.

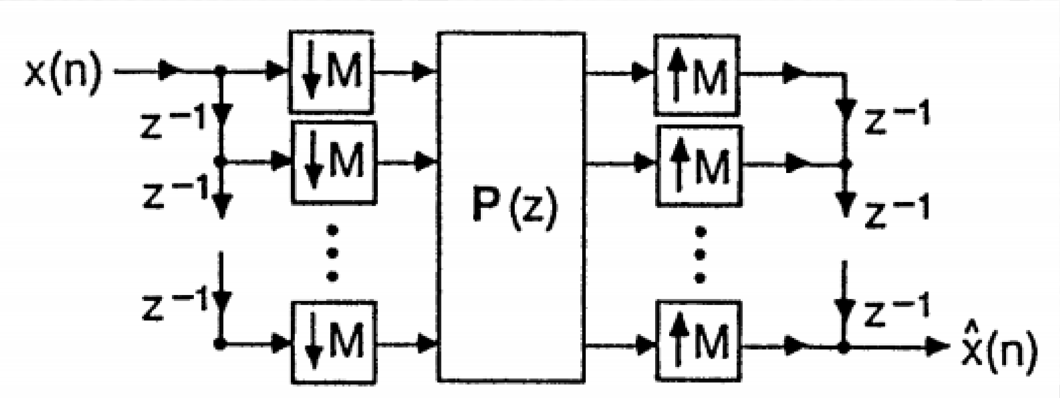
پس $T(z) = z^{-(M-1)}$ و شرط بازیابی کامل برقرار است.

سیستم بازیابی کامل

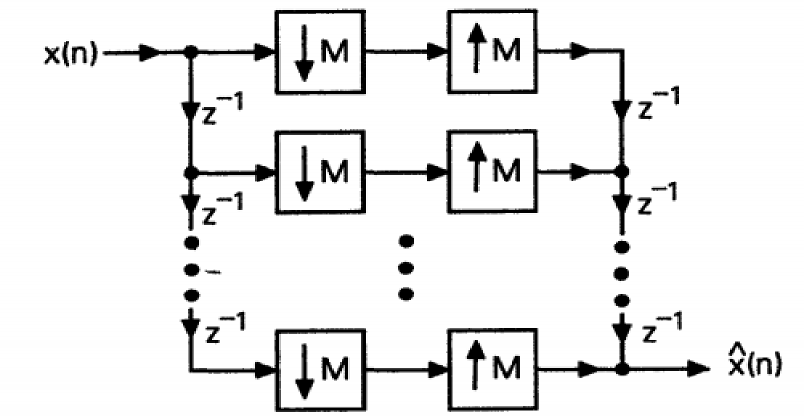
۲- سیستم بازیابی کامل در حالت کلی

شکل اسلاید ۳۵ و ۳۷ را با هم مقایسه می‌کنیم:

پیاده سازی فیلتربانک M باند در حالت کلی



پیاده سازی فیلتربانک M باند با فیلترهای تاخیر دهنده



- ❖ دیدیم که ساختار سمت راست شرط بازیابی کامل را بر آورده می‌کند.
- ❖ بنابراین اگر ساختار سمت چپ بخواهد شرایط بازیابی کامل را برآورده کند باید:

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{R}(z) = \mathbf{I}$$

که $\mathbf{I}$ یک ماتریس همانی $M \times M$ است.

سیستم بازیابی کامل

روند طراحی:

مرحله ۱: طراحی فیلترهای آنالیز $H_k(z) \;\; ,k = 0,1,2,\dots,M-1$

مرحله ۲: محاسبه ماتریس $\mathbf{E}(z)$ با تجزیه چندفازی نوع اول $H_k(z)$ ها

مرحله ۳: محاسبه ماتریس $\mathbf{R}(z)$ از شرط بازیابی کامل $\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = \mathbf{I}$

مرحله ۴: محاسبه فیلترهای سنتز $F_k(z) \;\; ,k = 0,1,2,\dots,M-1$ بر اساس ساختار چندفازی نوع دوم

تعریف ۲: اگر در معادله بازیابی کامل، معادله به صورت زیر باشد، باز هم شرایط بازیابی کامل برقرار است:

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{R}(z) = cz^{-m_0}\mathbf{I}$$

در این صورت میزان $\hat{x}[n] = cx[n-n_0]$ است که $n_0 = Mm_0 + M - 1$ است.

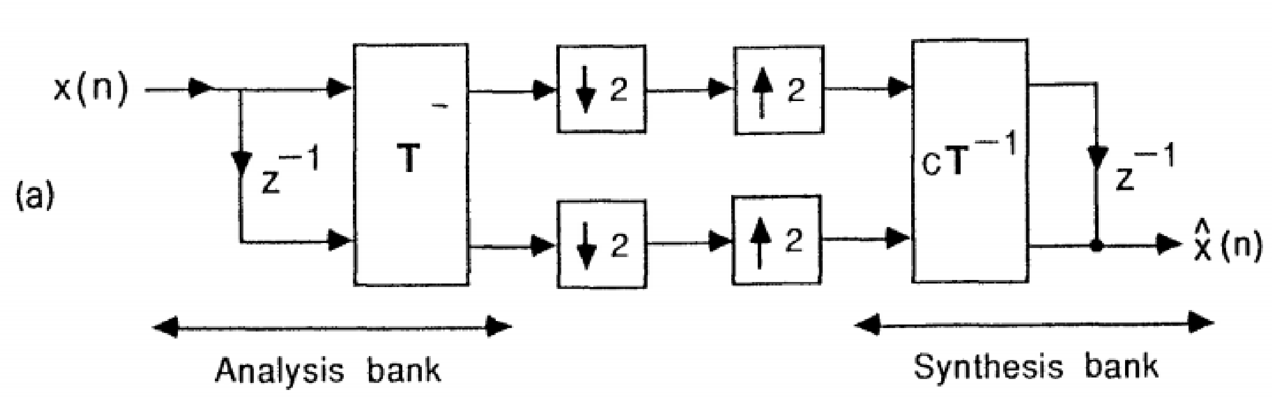
تعریف ۳: معادله بازیابی کامل تعمیم یافته، به صورت زیر است:

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{R}(z) = cz^{-m_0}\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{M_r} \\ z^{-1}\mathbf{I}_r & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت میزان $\hat{x}[n] = cx[n-n_0]$ است که $n_0 = Mm_0 + r + M - 1$ است.

سیستم بازیابی کامل

مثال: فیلتربانک دو کاناله زیر را در نظر بگیرید. برای این فیلتر بانک شرط بازیابی برقرار است زیرا:



$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{T} \quad , \qquad \mathbf{R}(z) = c\mathbf{T}^{-1} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{R}(z) = c\mathbf{I}$$

در این صورت $\hat{x}[n] = cx[n-1]$ است است.

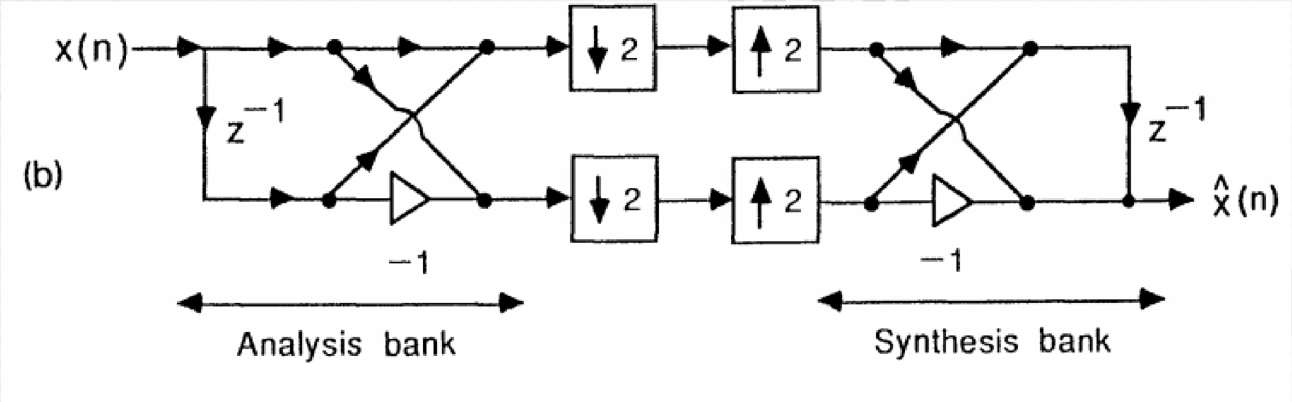
محاسبه فیلترهای آنالیز و سنتز:

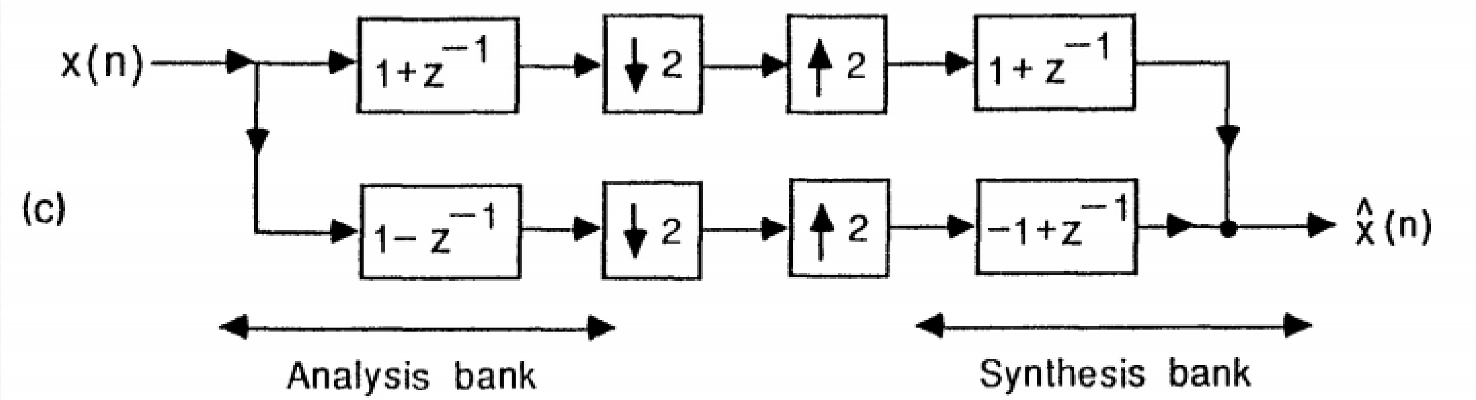
$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \mathbf{E}(z^2)\begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} \ , [F_0(z) \quad F_1(z)] = [Z^{-1} \quad 1]\boldsymbol{R}(z^2)$$

سیستم بازیابی کامل

اگر $c = 2$ و T به صورت زیر باشد داریم:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow cT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{T}$$





سیستم بازیابی کامل

اگر $c = 1$ و T به صورت زیر باشد داریم:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow cT^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

در این حالت:

$$H_0(z) = 2 + z^{-1} \quad , \quad H_1(z) = 3 + 2z^{-1}$$
$$F_0(z) = -3 + 2z^{-1} \quad , \quad F_1(z) = 2 - z^{-1}$$

- این سیستم نیز شرایط بازیابی کامل را دارد و $\hat{x}[n] = x[n-1]$ است اما در این سیستم شروط اعمالی برای انتخاب فیلتر $H_1(z)$ و دیگر فیلترها در ابتدای فصل برقرار نیست.
- به عبارت دیگر شرط $H_1(z) = H_0(-z)$ تنها شرط لازم و کافی برای برقراری شرایط بازیابی کامل **نیست** و می‌توان سیستم‌های متنوعی طراحی کرد.

End of Chapter 5