پردازش سیگنال های دیجیتال

فصل دوم
مقدمه بر سیگنال و سیستم

ارایه شده توسط:

حجت قیمت گر

استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مطالب

سیگنال های گسسته در زمان

ویژگی سیستم ها

سیستم های LTI

تبدیل فوریه گسسته در زمان

مثال تبدیل فوریه

نمونه برداری و تغییر نرخ نمونه برداری

سیگنال ها

دسته بندی سیگنال‌ها بر اساس متغیر مستقل:

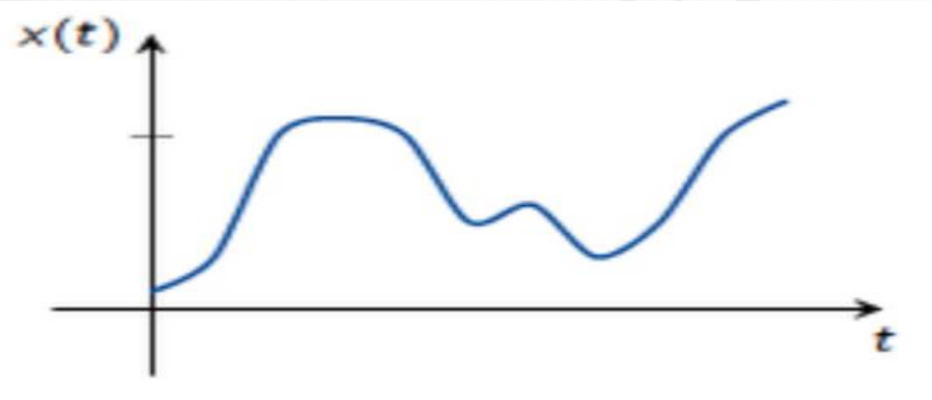
۱- پیوسته در زمان: متغیر مستقل همواره پیوسته است و برای تمام مقادیر پیوسته، تعریف می‌شوند. در این درس به صورت قراردادی این سیگنال‌ها را به صورت زیر نمایش می دهیم (متغیر مستقل درون پرانتز):

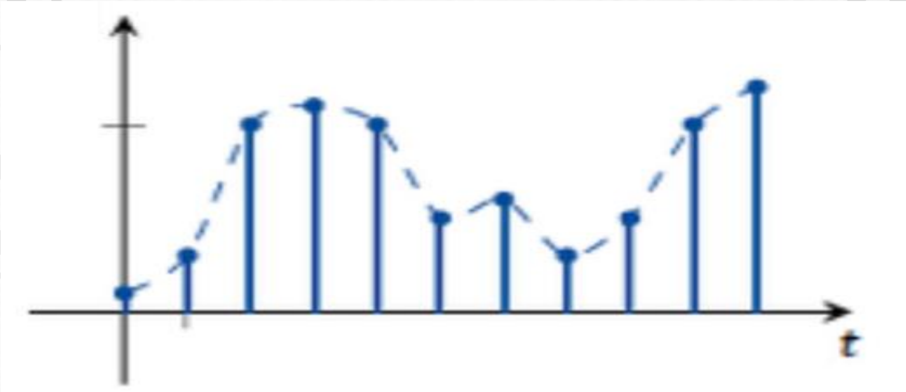
$$x(t) \quad , \qquad t \in R$$

۲- گسسته در زمان: این سیگنالها تنها در زمان های گسسته تعریف می شوند.

در این درس به صورت قراردادی این سیگنال‌ها را به صورت زیر نمایش می دهیم (متغیر مستقل درون کروشه):

$$x[n], \qquad n \in Z$$





سیگنال ها

دسته بندی سیگنال‌ها بر اساس متغیر وابسته:

۱- **آنالوگ:** دامنه سیگنال می‌تواند تمام اعداد حقیقی رو بگیرد. یعنی

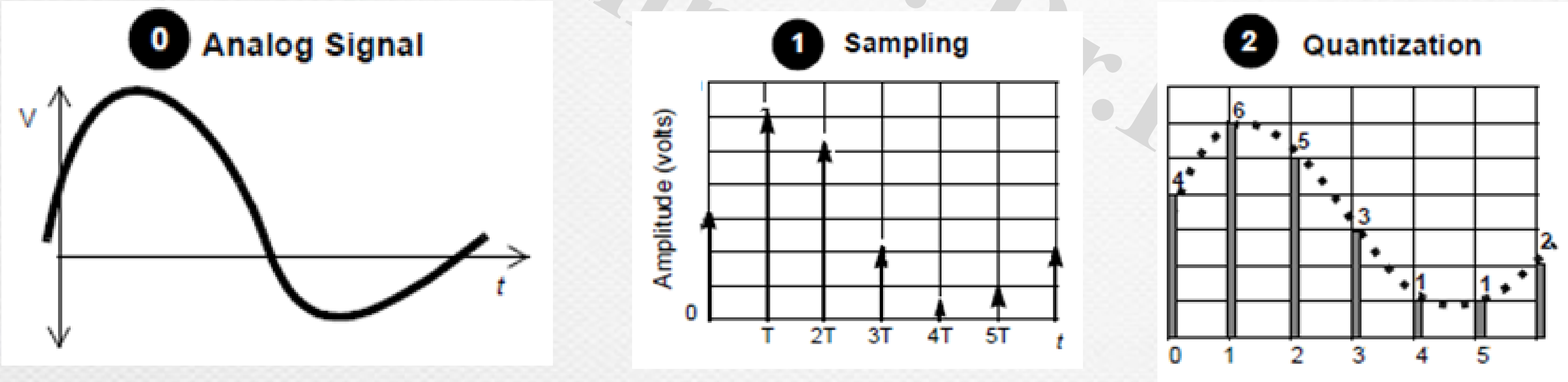
$$x(t) \in R$$

۲- **دیجیتال:** دامنه سیگنال تنها می‌تواند مقادیر محدود از قبل مشخص شده را بگیرد.

نکته ۱: تمام سیگنال‌های پیوسته در زمان حتما آنالوگ هستند.

نکته ۲: سیگنال‌های گسسته در زمان می‌توانند دیجیتال یا آنالوگ باشند

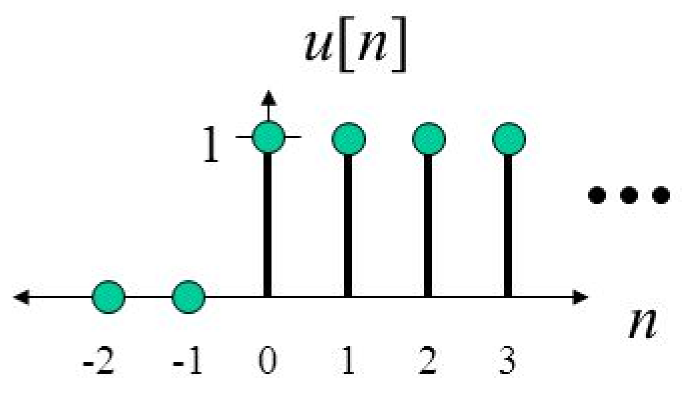
نکته ۳: اگر از یک سیگنال پیوسته در زمان، نمونه برداری شود یک سیگنال گسسته در زمان حاصل می شود. حال اگر دامنه نمونه های بدست آمده به اعداد مشخصی گرد شود، یک سیگنال دیجیتال بدست می آید.



سیگنال های پله واحد و ضربه واحد:

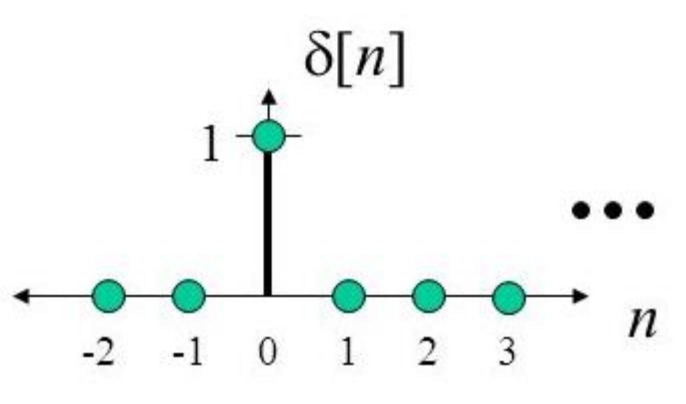
۴- پله واحد گسسته: سیگنال پله واحد گسسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



۵- ضربه واحد گسسته: سیگنال ضربه واحد پیوسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$



سیگنال های گسسته مشهور

مثال ۳-۱: آیا سیگنال $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ متناوب است؟ در صورت متناوب بودن دوره تناوب را بیابید.

پاسخ: طبق تعریف تناوب داریم:

$$x[n+N_0] = e^{j\omega_0(n+N_0)} = e^{j\omega_0 n}e^{j\omega_0 N_0}$$

اگر عبارت بالا بخواهد برابر با $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ باشد، باید $e^{j\omega_0 N_0} = 1$ شود پس:

$$e^{j\omega_0 N_0} = 1 \ \rightarrow \omega_0 N_0 = 2\pi k \ \ \rightarrow \ \ N_0 = \frac{2\pi k}{\omega_0} \quad k \in N$$

چون N_0 باید عدد صحیح مثبتی باشد، رابطه بالا لزوما به ازای هر مقدار ω_0 **برقرار نیست**. برای مثال اگر ω_0 یک عدد صحیح باشد (مثلا ۲)، به ازای هیچ مقدار $k \in N$ ، N_0 یک عدد صحیح نمی شود.

تنها در صورتی $x[n]$ بالا متناوب است که ω_0 کسر گویایی از π باشد. یعنی $\omega_o = \frac{M}{N}\pi$ باشد که $\gcd(M,N) = 1$ است. در این صورت داریم:

$$N_0 = \frac{2\pi k}{\frac{M}{N}\pi} = \frac{2N}{M}k \quad , \qquad \text{if } k = M \ \rightarrow \ \ N_0 = 2N$$

سیگنال های پیوسته مشهور

سه تفاوت اساسی نمایی پیوسته با نمایی گسسته:

۱- نمایی متناوب پیوسته به ازای هر مقدار ω_0 متناوب است، در حالیکه سیگنال نمایی گسسته به شرطی متناوب است که ω_0 مضرب گویایی از π باشد.

۲- در سیگنال نمایی متناوب پیوسته، هر چه ω_0 بیشتر شود، سیگنال نوسانهای بیشتری دارد. در حالت گسسته، به ازای مقادیر $0 < \omega_0 < \pi$ نوسان سیگنال افزایشی و به ازای $\pi < \omega_0 < 2\pi$ نوسان سیگنال کاهشی است.

۳-در سیگنال نمایی متناوب، ω_0 می تواند هر مقداری داشته باشد اما در حالت گسسته ω_0 تنها می تواند مقادیر بین $0 < \omega_0 < 2\pi$ را بگیرید.

اثبات ۳: نشان می دهیم که اگر ω_0 به اندازه 2π تغییر کند، باز به همان سیگنال با فرکانس ω_0 می رسیم.

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n}$$

واضحا به ازای ..... , $\omega_0 + 6\pi$,$\omega_0 + 4\pi$,$\omega_0 + 2\pi$ نیز رابطه بالا برقرار است.

سیگنال ها

سیستم ها

سیستم های LTI

تبدیل فوریه گسسته در زمان

مثال تبدیل فوریه

نمونه برداری

سیگنال های گسسته مشهور

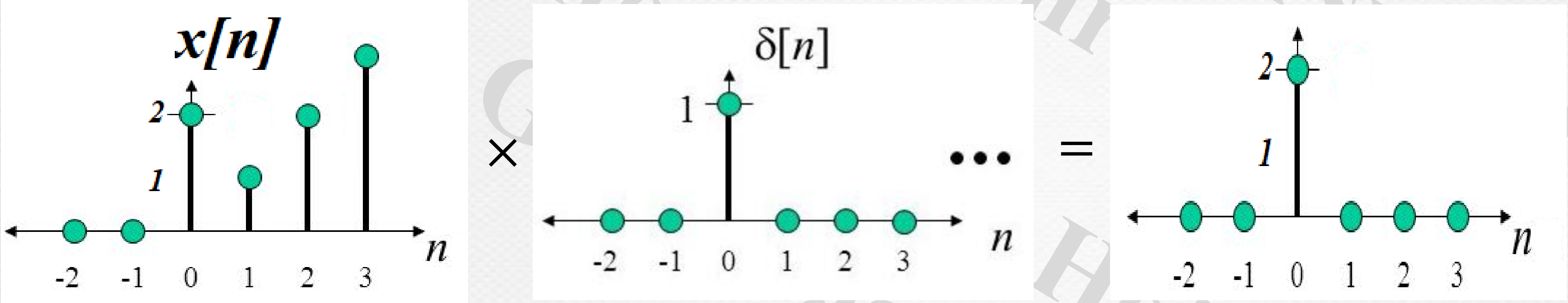
نکته مهم: سه ویژگی مهم و بسیار کاربردی تابع ضربه واحد گسسته:

ویژگی ۱: مجموع کل تابع ضربه برابر با ۱ است یعنی $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1$

ویژگی ۲: حاصل ضرب تابع ضربه در هر تابع دلخواه، در همه جا صفر است به جز نقطه که تابع ضربه غیر صفر است:

$$x[n]\,\delta[n] = x[n]\,\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$



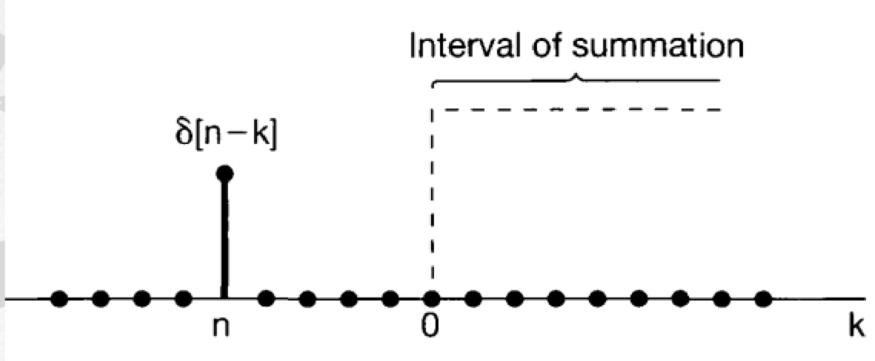
ویژگی ۳: کانولوشن تابع ضربه با یک تابع دلخواه:

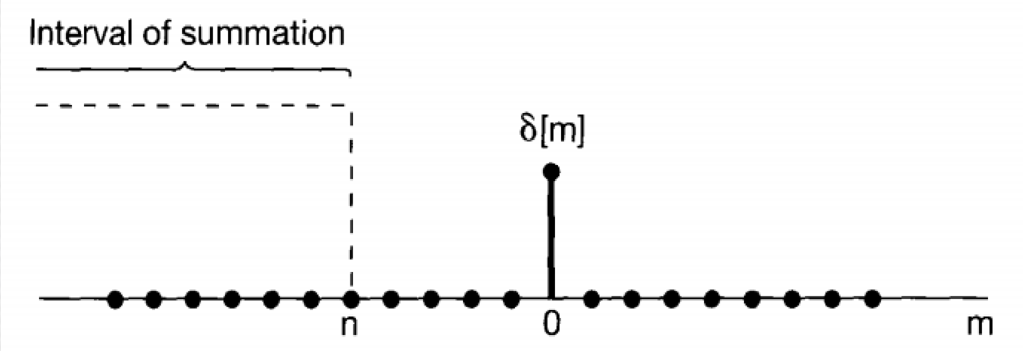
$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

ارتباط ضربه و پله واحد گسسته در زمان

$$u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

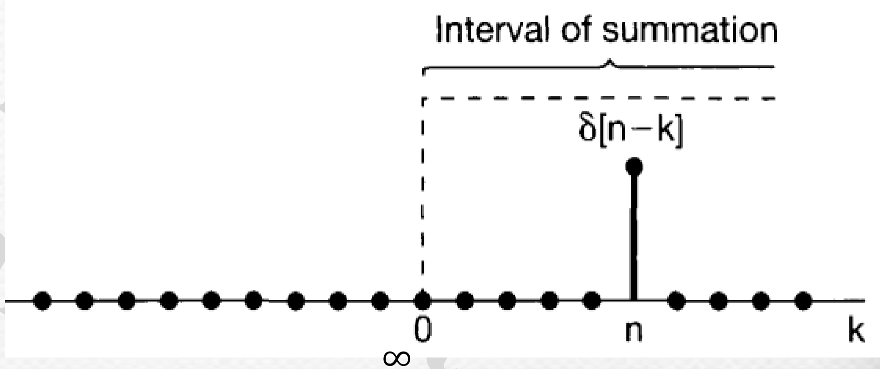
$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

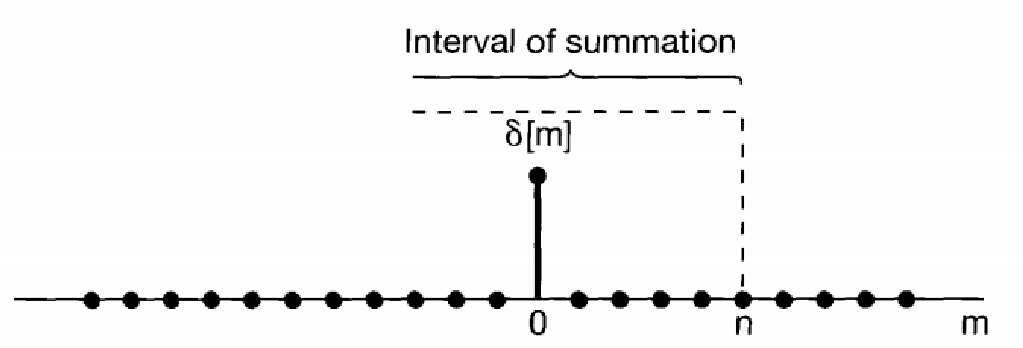




$$n<0\rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=0$$

$$n<0\rightarrow\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]=0$$





$$n\geq 0\rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=1$$

$$n\geq 0\rightarrow\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]=1$$

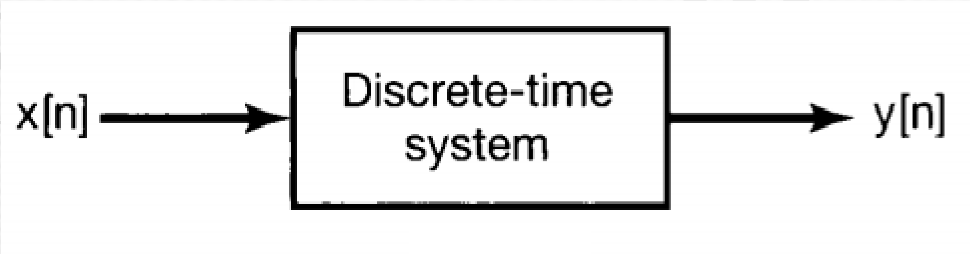
سیگنال ها
سیستم ها
سیستم های LTI
تبدیل فوریه گسسته در زمان
مثال تبدیل فوریه
نمونه برداری

سیستم ها

❖ تعریف سیستم:

هر پردازشی بر روی سیگنال را سیستم گویند.

نمایش سیستم گسسته در زمان



- برای مثال تقویت یک سیگنال یک سیستم ساده است: $y[n] = kx[n]$
- توان دوم یا دیگر توان های سیگنال، یک سیستم است: $y[n] = x^2[n]$ یا $y[n] = x^3[n]$ و ....
- انتگرال، تاخیر، توابع نمایی و ... نیز به عنوان یک سیستم شناخته می شوند:

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{n} x[m]$$
$$y[n] = y[n - n_0]$$
$$y[n] = \exp(-x[n])$$

ویژگی سیستم ها

۱- حافظه دار بودن:

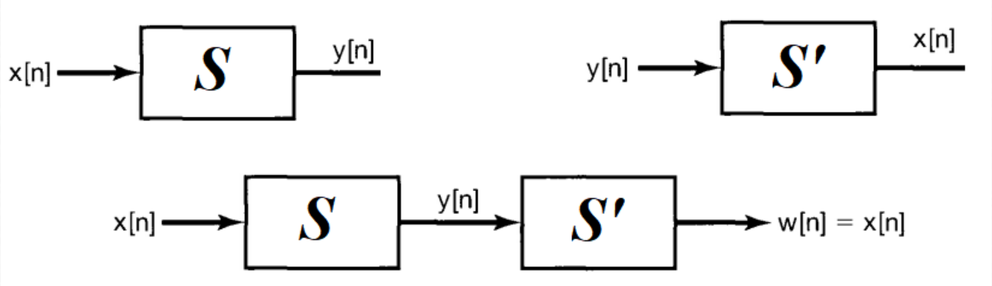
❖ **تعریف:** یک سیستم بدون حافظه $(memoryless)$ است، اگر خروجی در هر لحظه تنها لحظه تنها به ورودی در همان لحظه نیاز داشته باشند.

- برای مثال سیستم زیر یک سیستم بدون حافظه است:

$$y[n] = x[n] - x^2[n]$$

۲- معکوس پذیری:

❖ **تعریف:** یک سیستم معکوس پذیر $(invertible)$ است، اگر به ازای ورودی‌های متمایز، خروجی‌های متمایز بدهد.



۳- علیت (سببیت):

❖ **تعریف:** یک سیستم سببی $(causal)$ است، اگر خروجی در هر لحظه، تنها به مقادیر ورودی در **همان لحظه و لحظات قبل** وابسته باشد.

❖ برای مثال سیستم $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$ سببی است

ویژگی سیستم ها

۴- پایداری:

❖ **تعریف:** یک سیستم در صورتی پایدار ($stable$) است، به ازای ورودی با دامنه محدود، خروجی با دامنه محدود را نتیجه دهد.

به عبارت دیگر از ورودی سیستم کراندار باشد، خروجی آن نیز باید کراندار باشد.

۵- تغییر ناپذیری با زمان:

❖ **تعریف:** سیستمی تغییر ناپذیر با زمان ($time\ invariant$) است، که رفتار آن با زمان تغییر نکند.

❖ تعریف دوم به این صورت است که اگر ورودی به اندازه t_0 (n_0) شیفت خورد، آنگاه خروجی هم به اندازه t_0 (n_0) شیفت بخورد.

$$\text{If} \qquad x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$

$$\text{Then} \qquad x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = y_1[n-n_0]$$

۶- خطی بودن:

❖ **تعریف:** سیستمی خطی ($time\ invariant$) است، که ویژگی مهم جمع آثار را داشته باشد

❖ اگر ورودی به صورت مجموع وزندار چند سیگنال باشد، خروجی جمع وزندار پاسخ‌های سیستم به هر یک از ورودی‌ها است.

$$\text{If} \qquad x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$

$$\text{Then} \qquad x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \rightarrow y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

سیستم های LTI

❖ تعریف سیستم LTI:

سیستمی LTI است که هم ویژگی خطی (L) و هم ویژگی تغییر ناپذیر با زمان (TI) را داشته باشد.

* سیستم های LTI، دسته بسیار مهمی از سیستمها را تشکیل می دهند.

مهمترین ویژگی سیستم LTI:

مهمترین ویژگی سیستم های LTI ، این است که می‌توان از روی پاسخ ضربه این سیستم، پاسخ سیستم به هر ورودی دیگر را یافت:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI system}\\ h[n]\end{matrix}} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

که عملگر کانولوشن به صورت زیر اعمال می شود:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

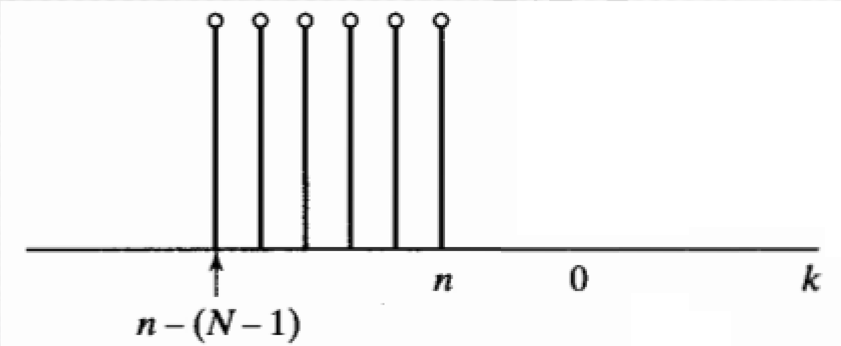
سیستم های LTI

مثال ۲-۱: پاسخ سیستم LTI زیر را به ورودی $|a| < 1$,$x[n] = a^n u[n]$ را بیابید.

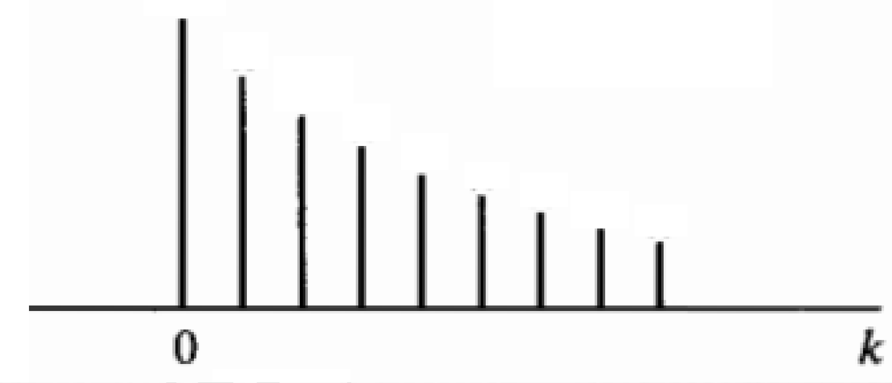
$$h[n] = u[n] - u[n-N]$$

حل: ابتدا باید دو سیگنال $h[n-k]$ و $x[k]$ را تشکیل دهیم. توجه کنید که متغیر مستقل باید k باشد نه n

$h[n-k]$



$x[k]$



به ازای $n < 0$، دو سیگنال بالا همپوشانی ندارند، پس حاصل کانولوشن صفر است.

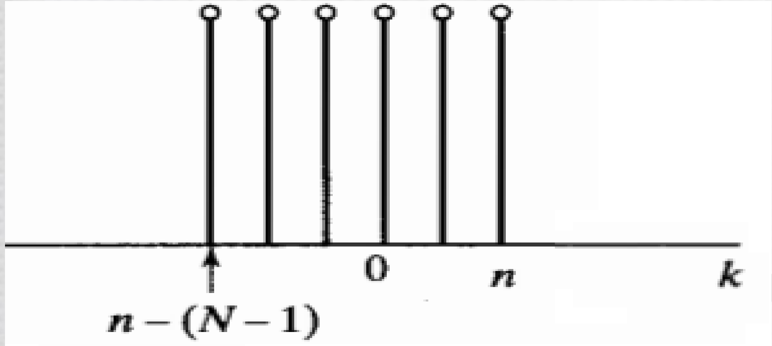
$$y[n] = 0 \qquad \forall n < 0$$

سیگنال ها
سیستم ها
سیستم های LTI
تبدیل فوریه گسسته در زمان
مثال تبدیل فوریه
نمونه برداری

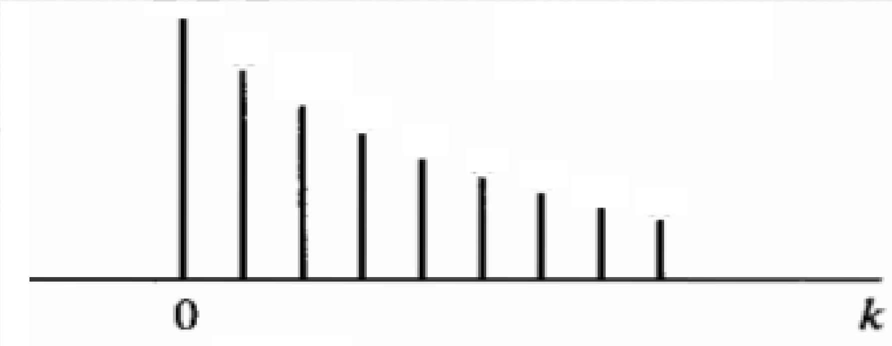
سیستم های LTI

به ازای $0 \leq n < N-1$، بخشی از دو سیگنال بالا همپوشانی دارند و بخشی همپوشانی ندارند:

$h[n-k]$



$x[k]$



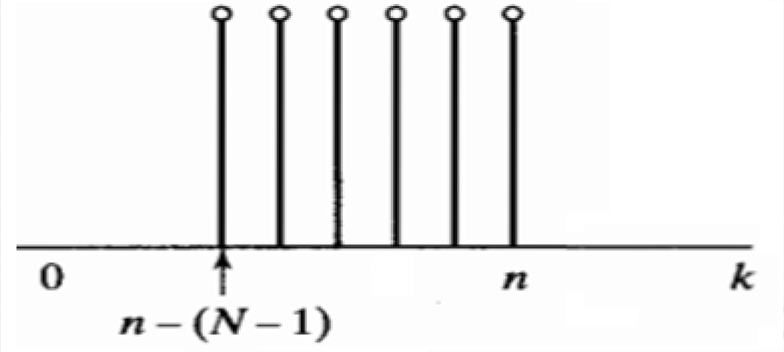
در این حالت داریم:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad \forall \;\; 0 \leq n < N-1$$

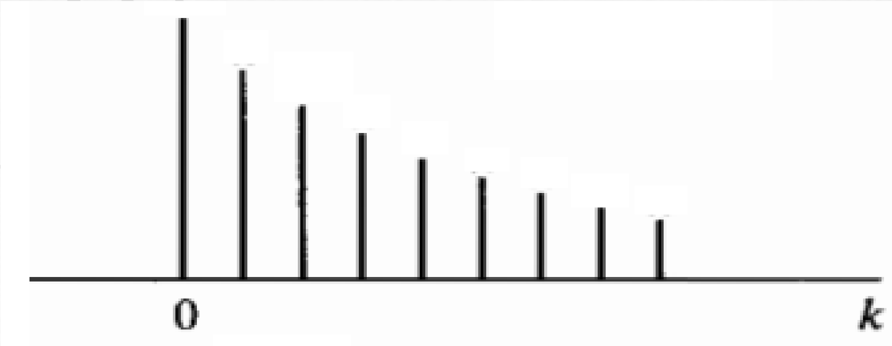
سیستم های LTI

به ازای $n \geq N-1$، تمام نمونه های دو سیگنال همپوشانی دارند :

$h[n-k]$

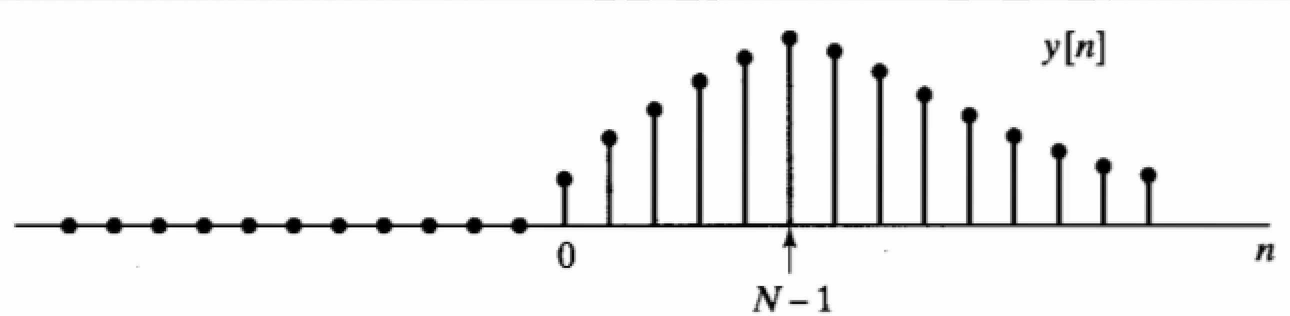


$x[k]$



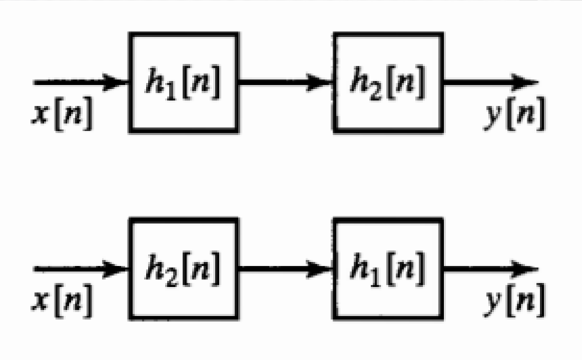
در این حالت داریم:

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k = a^{n-N+1}\frac{1-a^N}{1-a} \qquad \forall n \geq N-1$$



سیستم های LTI

نکته ۱: می توان جای دو سیستم LTI سری را با هم عوض کرد.



$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$$
$$= x[n] * h_2[n] * h_1[n]$$

نکته ۲: اگر سیستم LTI باشد، تمام اطلاعات سیستم در پاسخ ضربه آن نهفته است.

می‌توان از روی پاسخ ضربه سیستم LTI تمام ویژگی‌های دیگر را بررسی کرد

حافظه دار بودن: تنها سیستم LTI بدون حافظه به فرم کلی $h[n] = k\delta[n]$ است و مابقی سیستمهای LTI حافظه دار هستند.

علی بودن: یک سیستم LTI در صورتی علی است که پاسخ ضربه آن به ازای $n < 0$ صفر باشد یعنی: $h[n] = 0, \forall n < 0$.

پایداری: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI این است که $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

تبدیل فوریه گسسته در زمان

سیگنال ویژه:

اگر پاسخ سیستم $h[n]$ به ورودی $x[n]$ به صورت $y[n] = kx[n]$ باشد، در این صورت $x[n]$ سیگنال ویژه سیستم $h[n]$ است.

سیگنال ویژه سیستم های LTI:

سیگنال نمایی $x[n] = e^{j\omega n}$ سیگنال ویژه تمام سیستم‌های LTI است.

اثبات:

فرض کنید $h[n]$ یک سیستم LTI باشد که ورودی $x[n] = e^{j\omega n}$ به آن اعمال می شود. از کانولوشن داریم:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\omega(n-m)}h[m]$$

$$= e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega m}h[m] = H(j\omega)x[n]$$

$H(j\omega)$ را پاسخ فرکانسی سیستم $h[n]$ گویند.

سیگنال ها

سیستم ها

سیستم های LTI

تبدیل فوریه گسسته در زمان

مثال تبدیل فوریه

نمونه برداری

تبدیل فوریه گسسته در زمان

تبدیل فوریه:

❖ نمایش حوزه فرکانس یک سیگنال زمانی (سیستم) را تبدیل فوریه سیگنال (سیستم) گویند.

❖ نمایش تبدیل فوریه، بسط سیگنال (سیستم) بر اساس مولفه‌های نمایی است.

❖ تبدیل فوریه به صورت زیر تعریف می شود:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$ گسسته در زمان

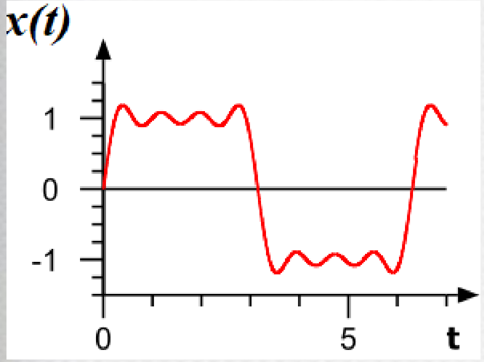
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$ پیوسته در زمان

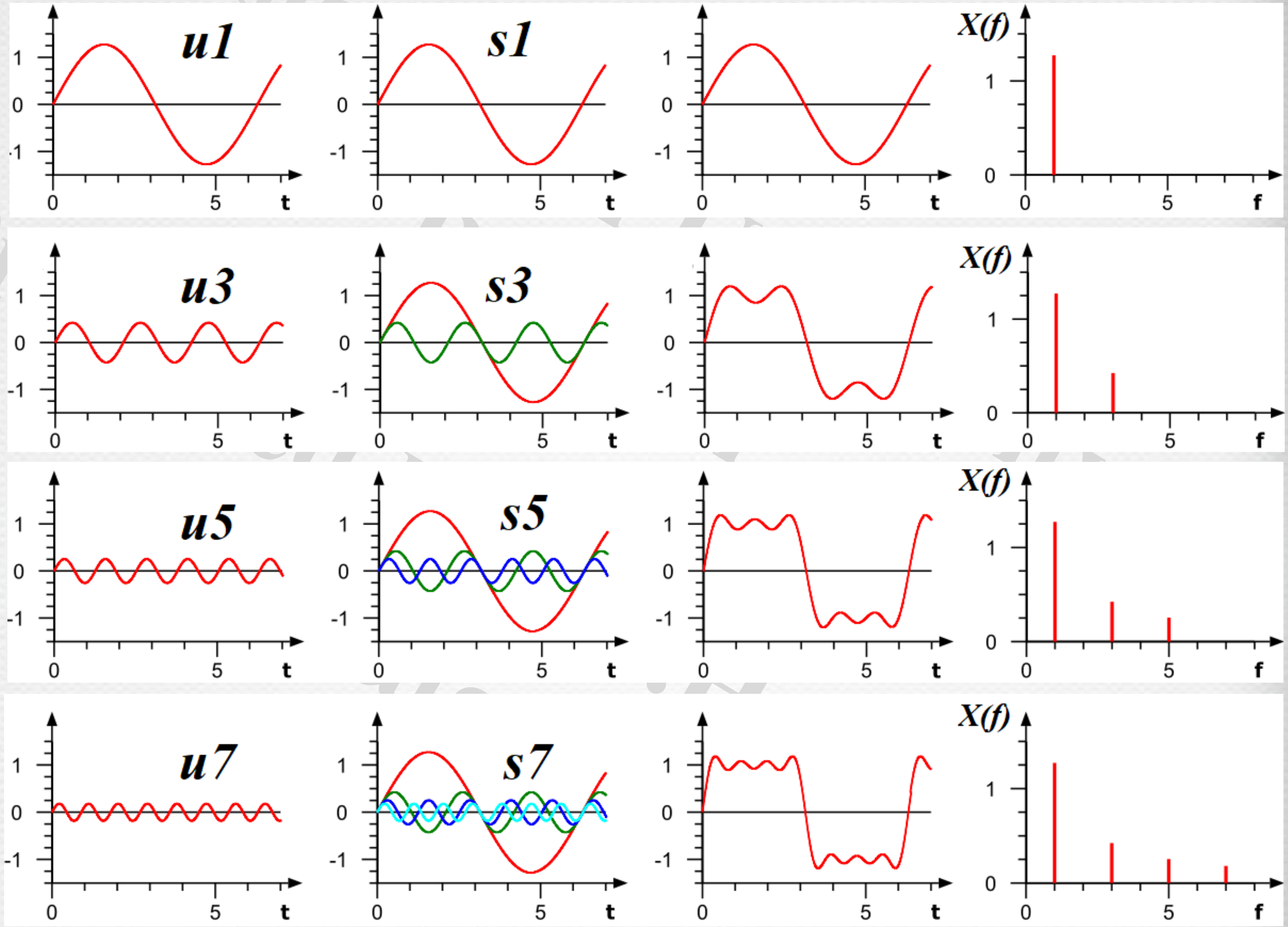
❖ دامنه طیف تبدیل فوریه در یک مولفه فرکانسی، بیانگر قدرت حضور یک سینوسی متناسب با آن فرکانس در سیگنال زمانی است.

❖ **نکته مهم:** تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان، همواره متناوب با دوره 2π هست.

دانشگاه خلیج فارس بوشهر

تبدیل فوریه گسسته در زمان





تبدیل فوریه گسسته در زمان

❖ ویژگی های تبدیل فوریه

TABLE 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
The following properties apply only when $x[n]$ is real:	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\sphericalangle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

تبدیل فوریه گسسته در زمان

❖ ویژگی‌های تبدیل فوریه

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

Sequence $x[n]$ $y[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Parseval's theorem:

8. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

9. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

تبدیل فوریه گسسته در زمان

❖ تبدیل فوریه سیگنال های مشهور

TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\|a\| < 1)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\|a\| < 1)$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin\omega_p(n+1)}{\sin\omega_p} u[n] \quad (\|r\| < 1)$	$\frac{1}{1-2r\cos\omega_p e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \|\omega\| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \|\omega\| \le \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\omega} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مثال تبدیل فوریه گسسته در زمان

۱- پاسخ سیستم های LTI:

دیدیم که اگر یک سیستم LTI باشد، در این صورت پاسخ سیستم را میتوان با کانوالو کردن ورودی در خروجی یافت:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

با توجه به خاصیت کانولوشن میتوان گفت:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

واضحا کار کردن با عملگر ضرب/تقسیم به مراتب راحت تر از عملگر کانولوشن هست.

گام اول: گرفتن تبدیل فوریه ورودی $X(e^{j\omega})$ و تبدیل فوریه فیلتر $H(e^{j\omega})$

گام دوم: ضرب تبدیل فوریه ورودی در تبدیل فوریه فیلتر $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

گام سوم: گرفتن عکس تبدیل فوریه از رابطه بدست آمده در گام دوم $\mathrm{y[n]} = \mathrm{IDTFT}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\}$

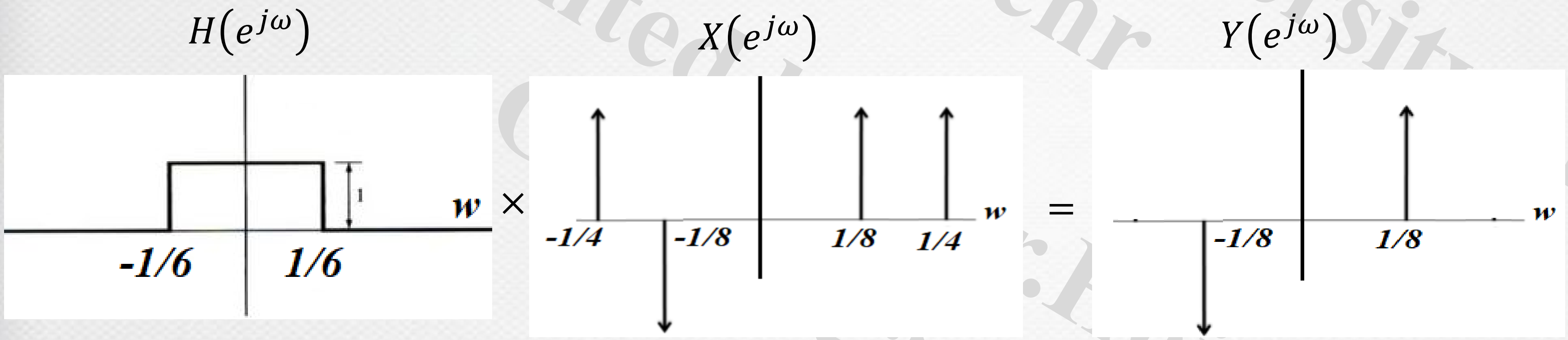
کاربردهای تبدیل فوریه گسسته در زمان

مثال ۳-۱: پاسخ سیستم $h[n] = \sin\frac{\frac{n}{6}}{\pi n}$ به ورودی $x[n] = \sin\left(\frac{n}{8}\right) + \cos\left(\frac{n}{4}\right)$ را بیابید.

حل: اگر از رابطه مستقیم کانولوشن حل کنیم به یک رابطه پیچیده می رسیم:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{k}{8}\right) - \cos\left(\frac{k}{4}\right)\right) * \sin\frac{\frac{(n-k)}{6}}{(n-k)}$$

حال از ویژگی کانولوشن استفاده می کنیم:



با گرفتن عکس تبدیل فوریه از $Y(e^{j\omega})$ داریم:

$$y[n] = \sin\left(\frac{n}{8}\right)$$

کاربردهای تبدیل فوریه گسسته در زمان

۲- حل معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت:

یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

که b_k و a_k ضرایب ثابت هستند.

با فرض LTI بودن سیستم و استفاده از ویژگی کانولوشن میدانیم که:

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \rightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

پس

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

یعنی نسبت تبدیل فوریه خروجی به تبدیل فوریه ورودی برابر با پاسخ فرکانسی فیلتر $h[n]$ می شود.

کابردهای تبدیل فوریه گسسته در زمان

حال از رابطه تفاضلی تبدیل فوریه می گیریم. با استفاده از رابطه خطی و شیفت زمانی داریم:

$$Y(e^{j\omega})\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega})\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} \quad \rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

مثال ۴-۱: سیستم LTI توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را بیابید.

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \ , |a| < 1$$

حل: مطابق با رابطه بالا داریم $(a_0 = 1 , a_1 = -a , b_0 = 1)$:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} , \qquad |a| < 1$$

چون $|a| < 1$ است پس می‌توان گفت:

$$h[n] = a^n u[n]$$

End of Chapter 2