دانشگاه خلیج فارس بوشهر

پردازش سیگنال های دیجیتال

فصل ششم
ساختارهای سیستم‌های گسسته در زمان

ارایه شده توسط:

حجت قیمت گر

استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

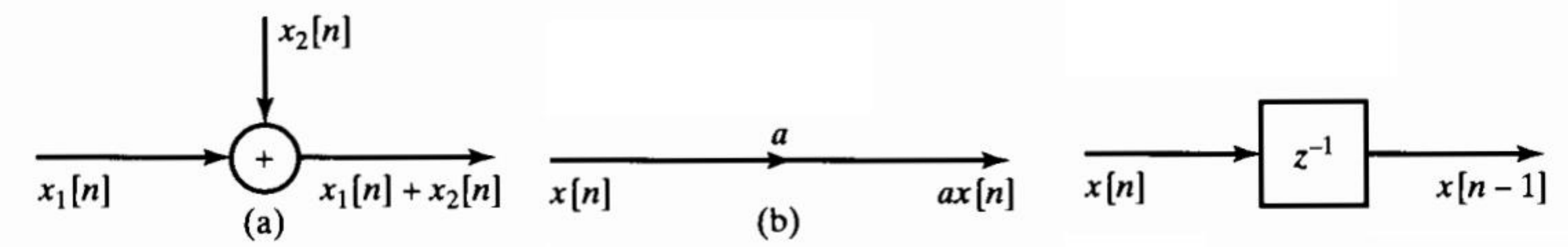
مطالب

- بلوک دیاگرام معادلات تفاضلی خطی
- ساختارهای اساسی فیلترهای IIR
- ساختار اساسی فیلترهای FIR
- اثر کوانتیزاسیون ضرایب فیلتر
- پیاده سازی فیلتر به کمک ساختار Lattice

سیستم‌هایی که رابطه ورودی و خروجی آنها با یک معادله تفاضلی مشخص می شود:

بلوک دیاگرام سیستم‌های LTI گسسته در زمان:

برای تحقق یک سیستم LTI به سه عنصر نیاز است:



می‌خواهیم با استفاده از این سه عنصر، سیستم‌های سببی با رابطه تفاضلی را پیاده سازی کنیم. رابطه کلی چنین سیستمی به صورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

دیدیم که اگر a_k ها به ازای $k \geq 1$ غیر صفر باشند، با یک سیستم IIR مواجه هستیم. طول سیستم IIR بینهایت است و بنابراین نمی‌توان این سیستم را به صورت دیجیتالی تولید و ذخیره کرد و نمی‌توان از عملگر کانولوشن استفاده کرد

با استفاده از ساختار بلوک دیاگرامی زیر می‌توان یک سیستم IIR را به طور دقیق پیاده سازی کرد.

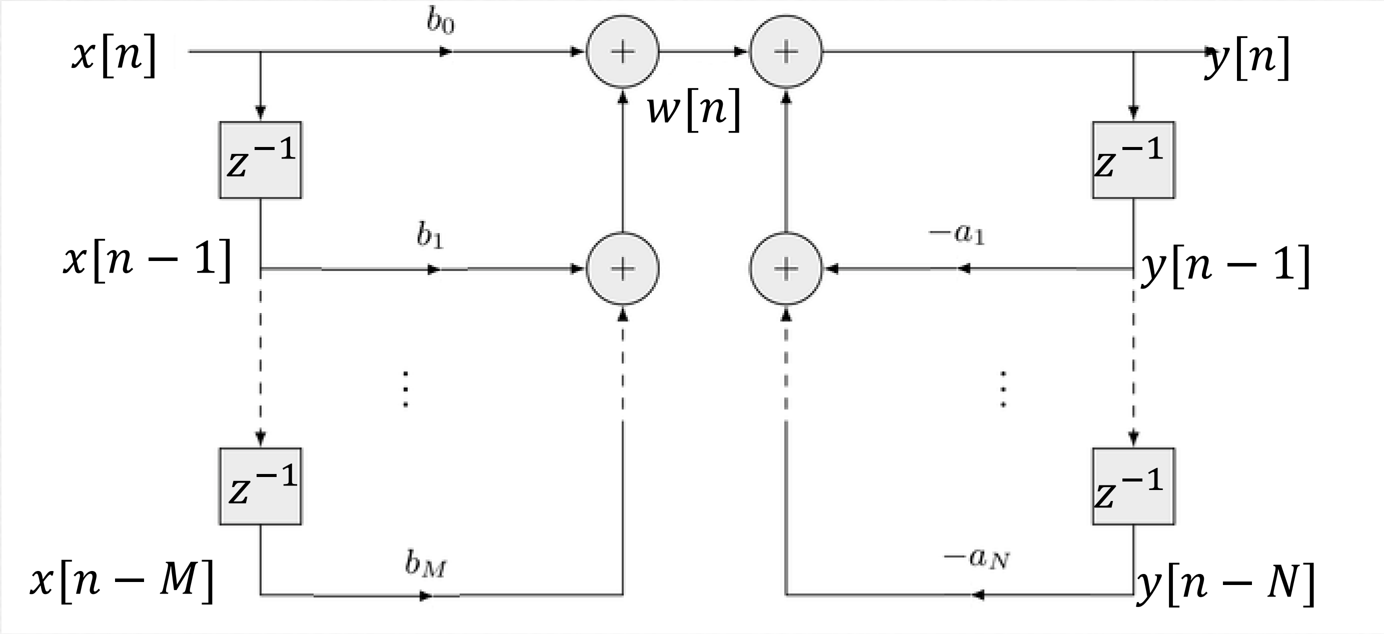
سیستم‌هایی که رابطه ورودی و خروجی آنها با یک معادله تفاضلی (دیفرانسیلی) مشخص می شود:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots b_M x[n-M]$$

با فرض $a_0 = 1$ داریم:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M] - a_1 y[n-1] - \cdots - a_N y[n-N]$$

Direct Form I

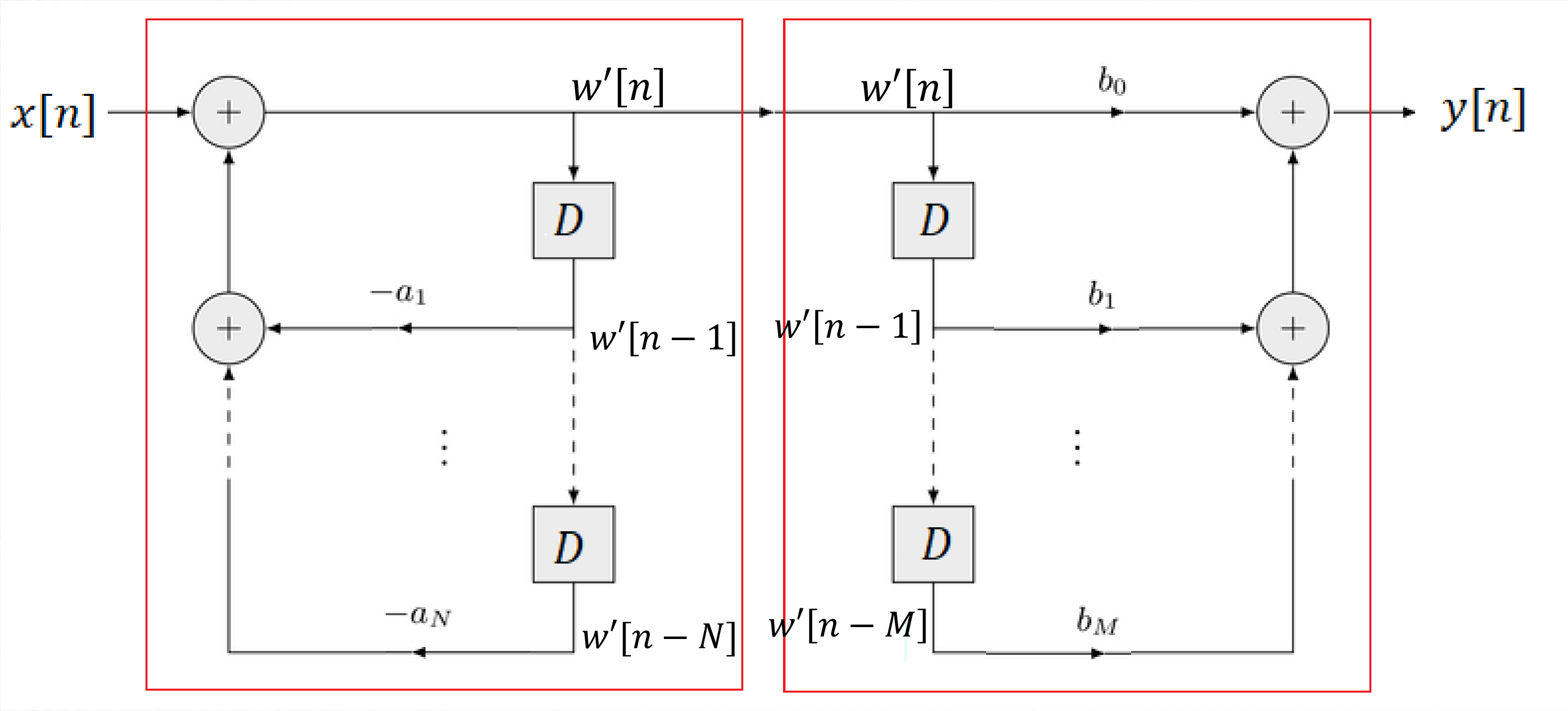


سیستم LTI اول سیستم LTI دوم

نکته: در ساختار ***Direct Form I*** به $N + M$ حافظه نیاز است.

سیستم‌هایی که رابطه ورودی و خروجی آنها با یک معادله تفاضلی (دیفرانسیلی) مشخص می شود:

از ویژگی‌های سیستم LTI می‌دانیم که می‌توان جای دو سیستم LTI را با هم عوض کرد. با تغییر جای دو سیستم LTI داریم:

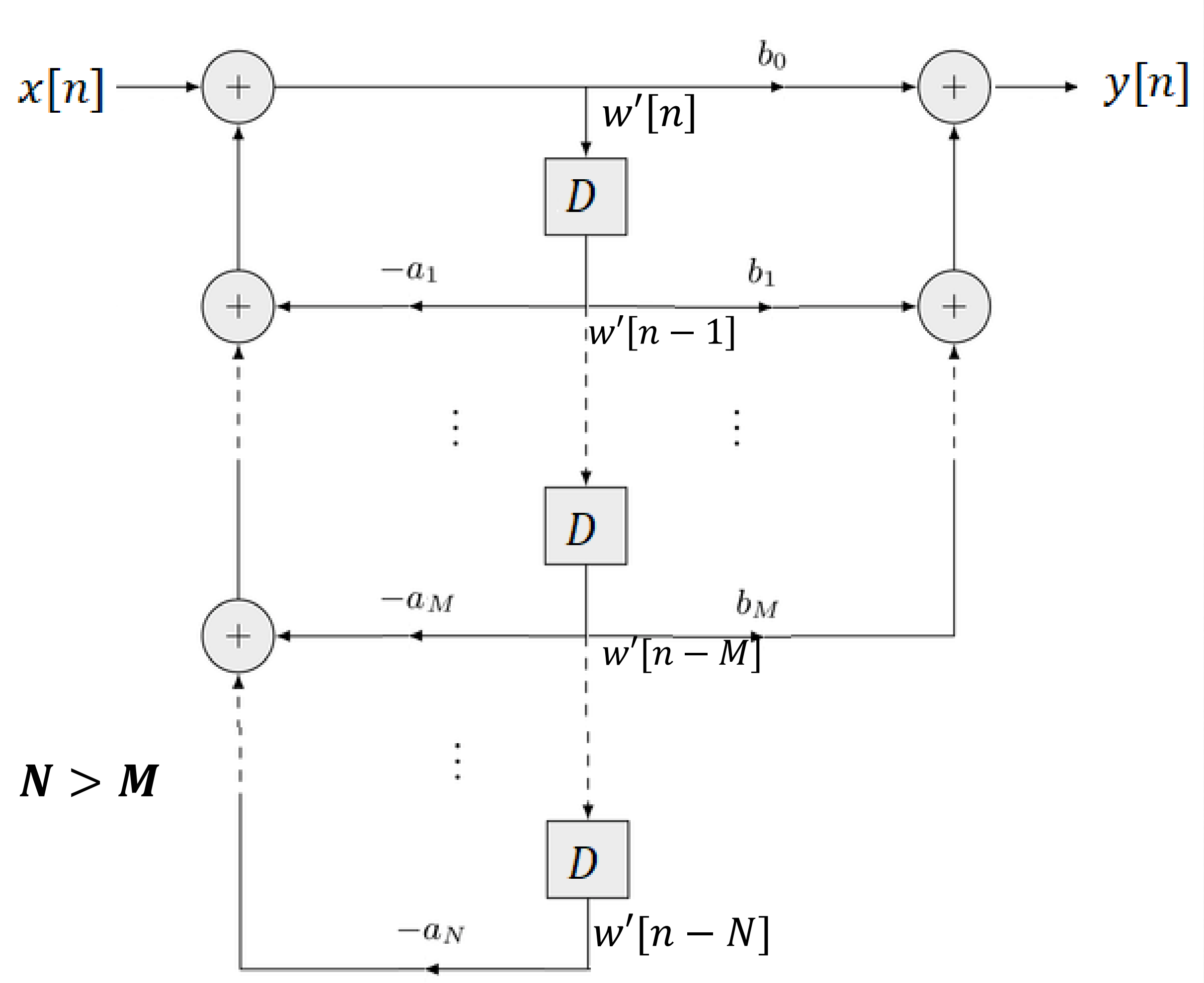


سیستم LTI دوم		سیستم LTI اول

نکته: در ساختار بالا نقاط میانی مشابه هم هستند، پس می‌توان یکی از شاخه‌های میانی را حذف کرد.

سیستم‌هایی که رابطه ورودی و خروجی آنها با یک معادله تفاضلی (دیفرانسیلی) مشخص می شود:

Direct Form II



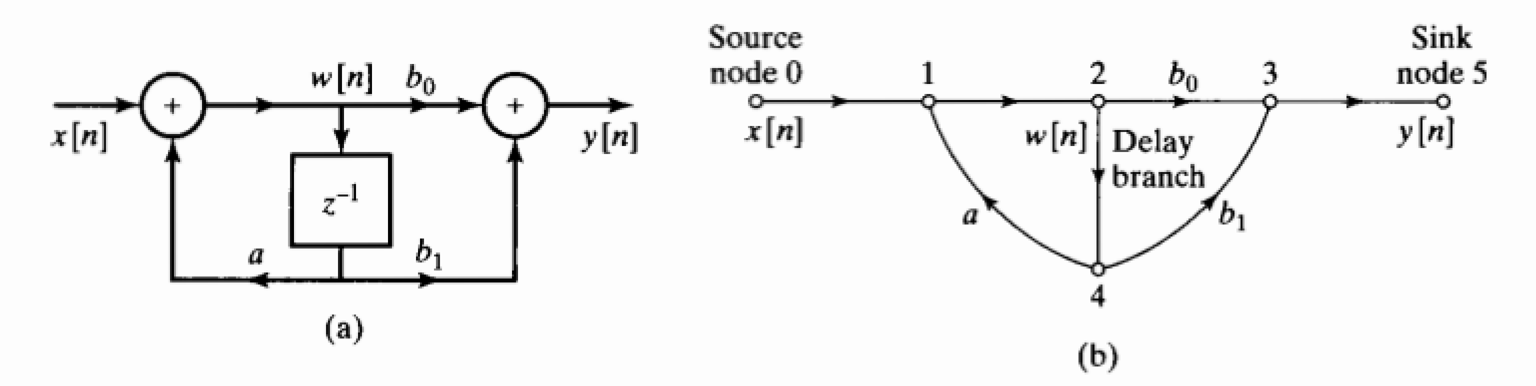
نکته: در ساختار ***Direct Form II*** به $\max(N,M)$ حافظه نیاز داریم که کمتر از ساختار ***Direct Form I*** است.

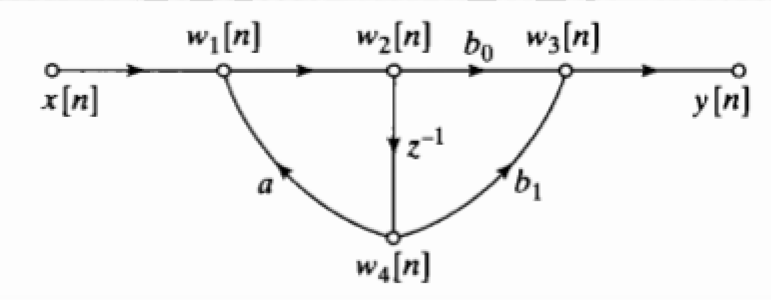
بلوک دیاگرام معادلات تفاضلی با ضرایب ثابت

❖ به منظور طرز نمایش آسان‌تر نسبت به طرز نمایش‌های معرفی شده از ساختار Flow Graph استفاده می‌شود.

❖ در این ساختار از گره به جای جمع شونده و از فلش به عنوان z^{-1} (تاخیر) استفاده می‌شود .

❖ برای مثال ساختارهای زیر با یکدیگر معادل هستند:

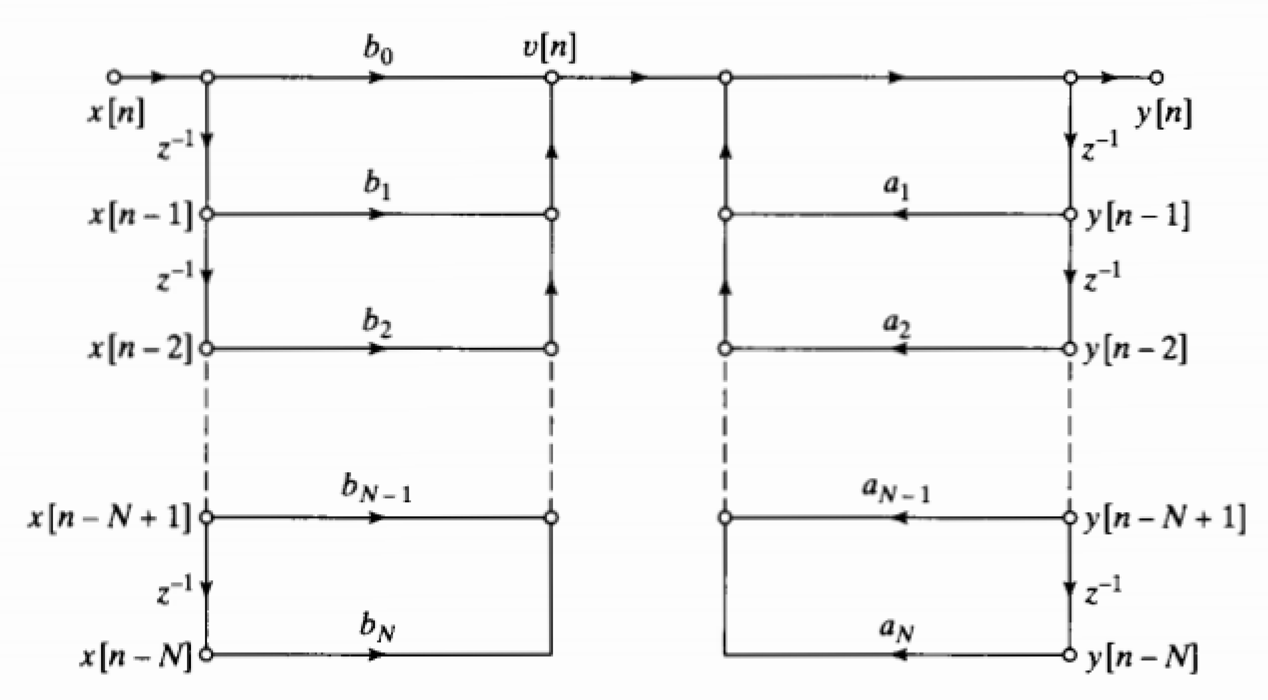




ساختار فیلترهای IIR

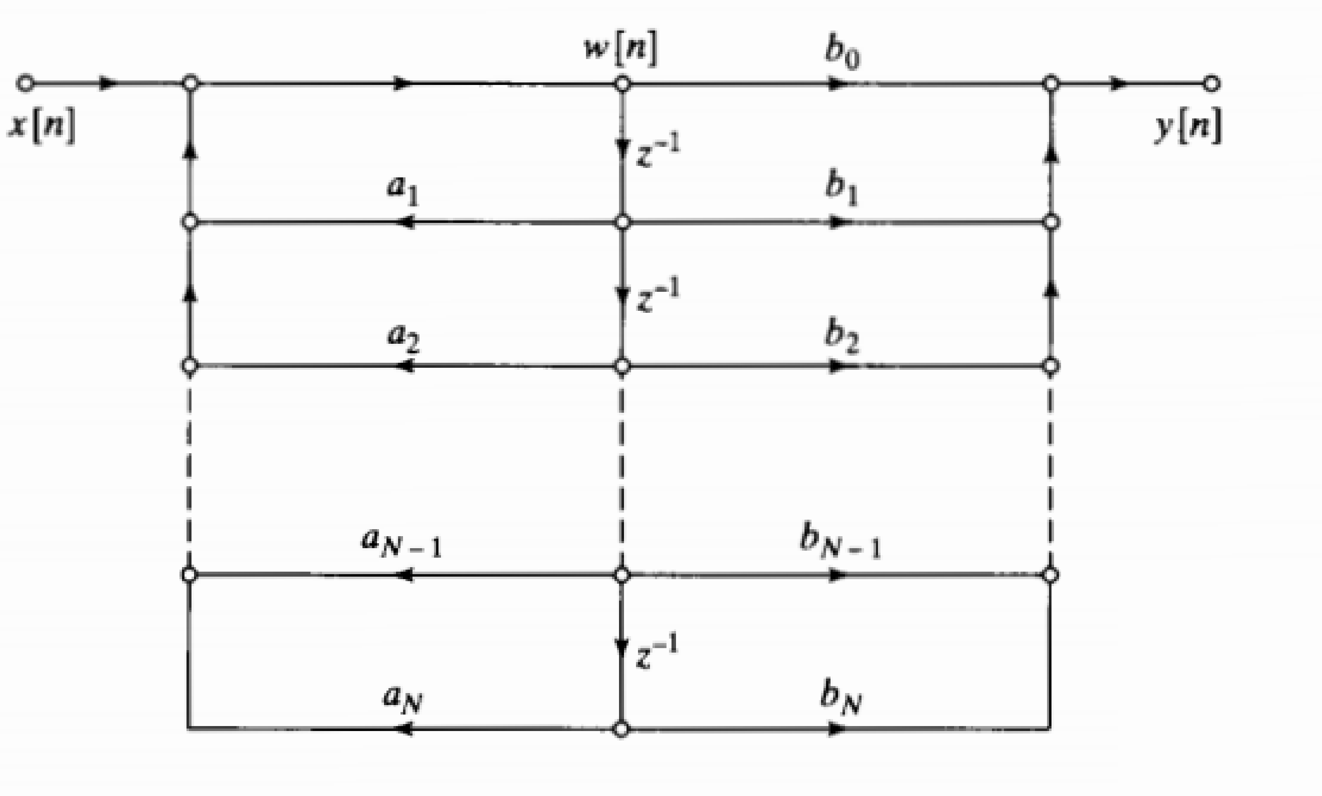
- ❖ می‌توان با استفاده از هر ساختارهای Direct Form I و Direct Form II تمام سیستم‌های IIR را پیاده‌سازی کرد.
- ❖ در این زیربخش این دو ساختار با طرز نمایش Flow Graph و دو ساختار سری و موازی برای پیاده سازی فیلترهای IIR معرفی می‌شود

الف) ساختارهای Direct Form I



ساختار فیلترهای IIR

ب) ساختارهای Direct Form II



ساختار فیلترهای IIR

ج) ساختارهای سری Cascade

در ساختار سری، به جای استفاده از رابطه مستقیم، صورت و مخرج $H(z)$ به صورت حاصلضرب عوامل درجه اول نوشته می‌شود:

$$H(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=A\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

- ❖ که c_k ها و d_k ها به ترتیب صفر و قطب غیر صفر تابع $H(z)$ هستند که درحالت کلی می‌توانند مختلط باشند.
- ❖ با توجه به اینکه ضرایب چندجمله ای صورت و مخرج، حقیقی هستند پس اگر c_k (d_k) یک صفر (قطب) مختلط باشد، آنگاه قطعا c_k^* (d_k^*) هم صفر (قطب) تابع $H(z)$ است.
- ❖ بنابراین به منظور کاهش محاسبات و حذف ضرب و جمع مختلط می‌توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

$$H(z)=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-c_{1,k}z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-d_{1,k}z^{-1})}\frac{\prod_{k=1}^{M_2}(1-c_{2,k}z^{-1})(1-c_{2,k}^{*}z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N_2}(1-d_{2,k}z^{-1})(1-d_{2,k}^{*}z^{-1})}$$

که $M=M_1+2M_2$ و $N=N_1+2N_2$

بلوک دیاگرام معادلات تفاضلی

ساختار فیلترهای IIR

ساختار فیلترهای FIR

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

ساختارهای Lattice

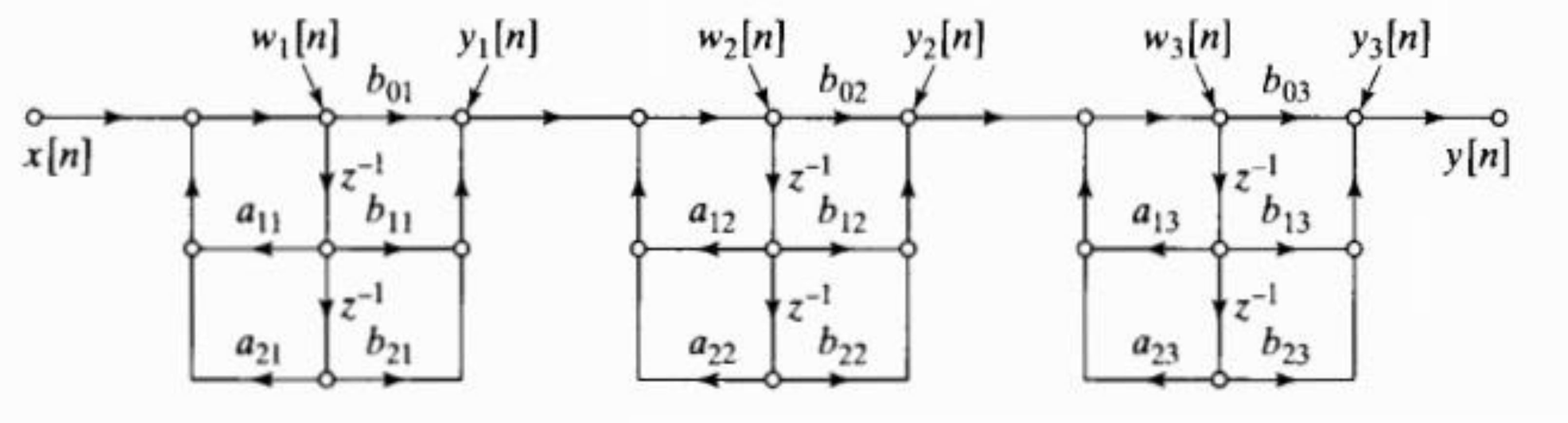
ساختار فیلترهای IIR

در ادامه می‌توان عبارتهای درجه ۲ زیر نوشت:

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-c_{1,k}z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-d_{1,k}z^{-1})}\frac{\prod_{k=1}^{M_2}(1-2Re\{c_{2,k}\}z^{-1}+|c_{2,k}|^2z^{-2})}{\prod_{n=1}^{N_2}(1-2Re\{d_{2,k}\}z^{-1}+|d_{2,k}|^2z^{-2})}$$

❖ در این صورت می‌توان از اتصال سری سیستم‌های درجه ۱ یا ۲ رابطه بالا را پیاده‌سازی کرد.

❖ برای مثال با فرض اینکه $M_2 = N_2 = 3$ باشد و ترم درجه ۱ وجود نداشته باشد داریم:



ساختار فیلترهای IIR

د) ساختارهای موازی Parallel

در ساختار موازی، به جای استفاده از رابطه مستقیم، صورت و مخرج $H(z)$ به صورت مجموع کسرهای درجه اول نوشته می‌شود:

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_p} \frac{A'_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

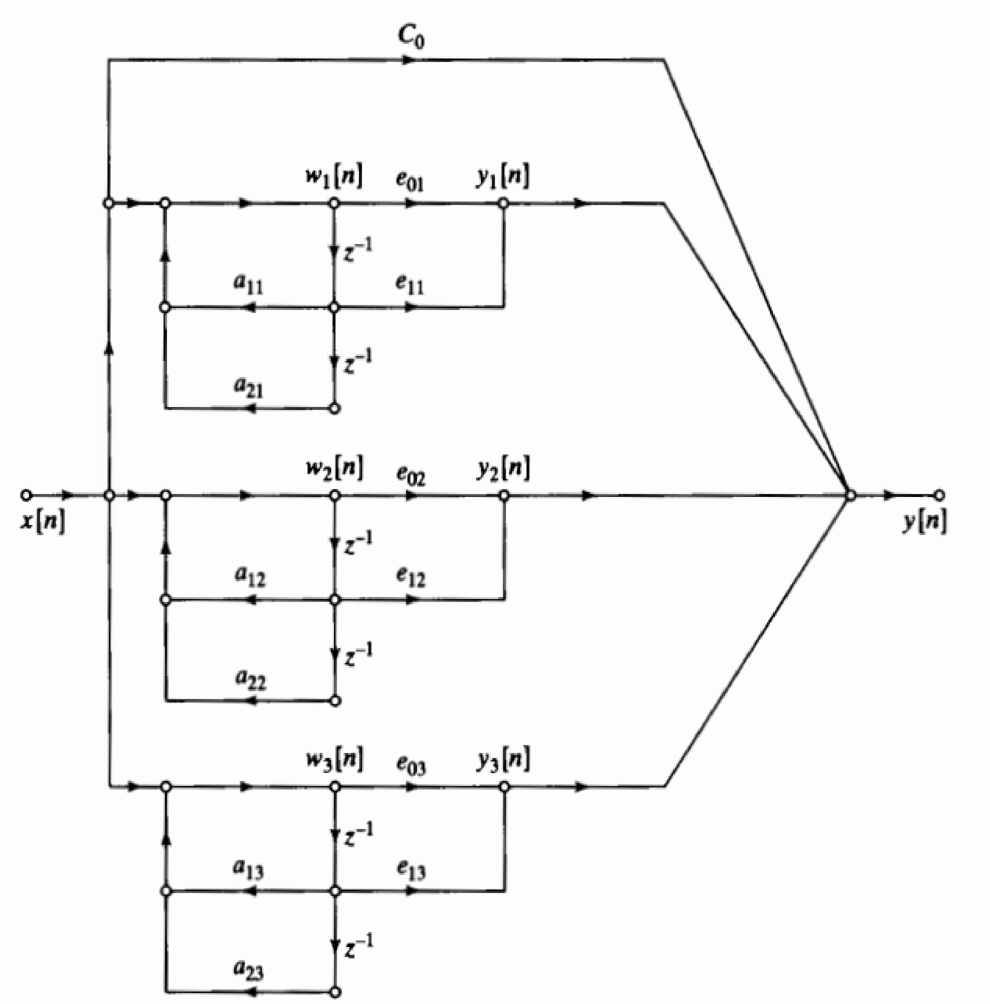
- که d_k ها به ترتیب قطب‌های غیر صفر تابع $H(z)$ هستند که درحالت کلی می‌توانند مختلط باشند.
- با توجه به اینکه ضرایب چندجمله ای صورت و مخرج، حقیقی هستند پس اگر c_k (d_k) یک صفر (قطب) مختلط باشد، آنگاه قطعا c_k^* (d_k^*) هم صفر (قطب) تابع $H(z)$ است.

- بنابراین به منظور کاهش محاسبات و حذف ضرب و جمع مختلط می‌توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

که $M \geq N$ و $N = N_1 + 2N_2$ است و $N_p = M - N$ می‌باشد.

ساختار فیلترهای IIR



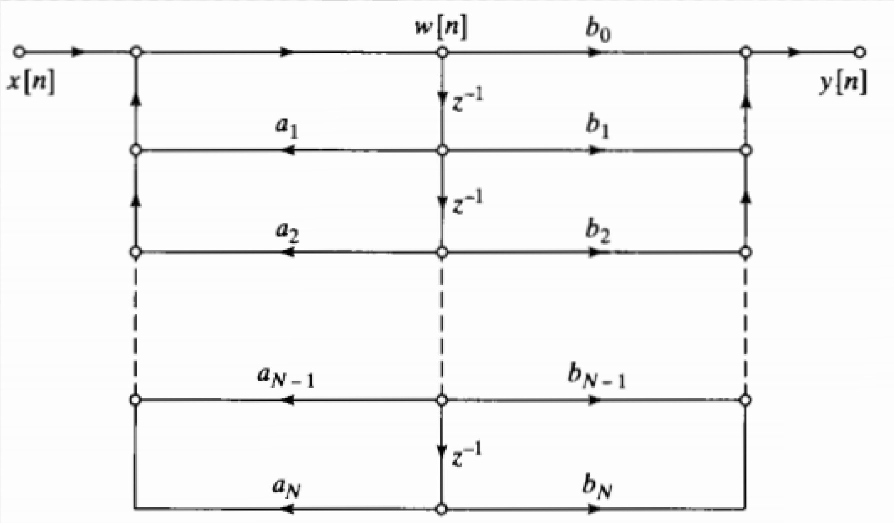
در ادامه می‌توان عبارتهای درجه ۱ و ۲ را به فرم کلی زیر نوشت:

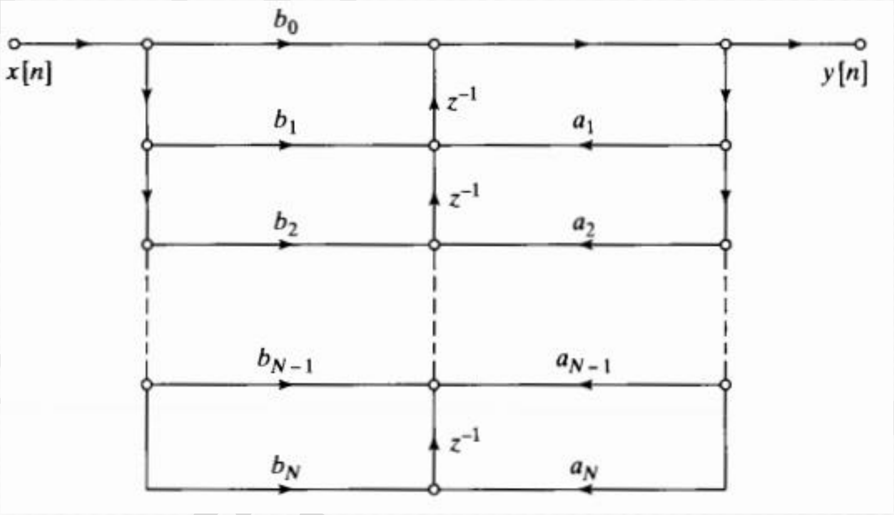
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1+N_2} \frac{e_{0,k} + e_{1,k} z^{-1}}{1 - a_{1,k} z^{-1} - a_{2,k} z^{-2}}$$

ساختار فیلترهای IIR

ساختارهای جا به جا شده

در تمام چهار ساختار بالا، می‌توان جهت تمام فلش‌ها و جای ورودی و خروجی را عوض کرد و ساختارهای معادلی بدست آورد..





مزیت: در ساختار Direct Form II ابتدا قطب‌ها و سپس صفرها پیاده‌سازی می‌شود ولی در ساختار جابه‌جا شده ابتدا صفرها و سپس قطب‌ها.

این ویژگی منجر به کاهش خطا در محاسبات دیجیتالی دقت محدود می‌شود (اثر کوانتیزاسیون در روند کردن قطب‌ها)

ساختار فیلترهای FIR

اگر $h[n]$ یک فیلتر LTI باشد، از کانولوشن می‌توان گفت:

$$y[n] = \sum_{k=\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

چون FIR و سببی باشد داریم:

$$h[n] = b_n \quad 0 \leq n \leq M \qquad \rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

یعنی، فیدبکی از خروجی به ورودی وجود ندارد.

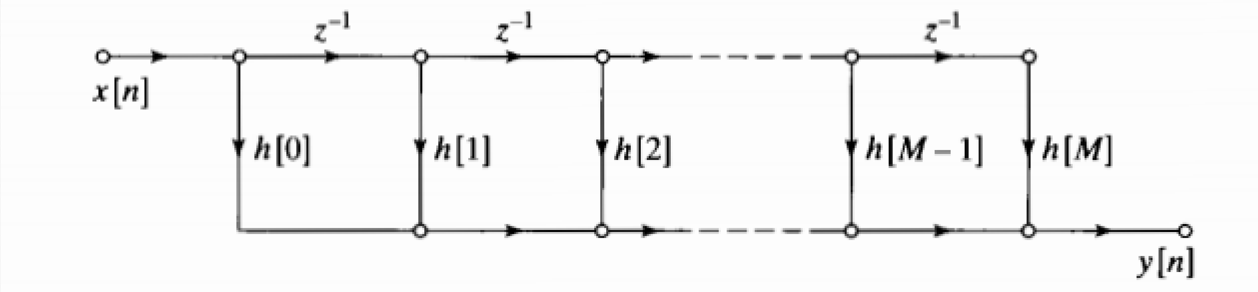
از تبدیل Z نیز می‌توان گفت:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M} \qquad (۱)$$

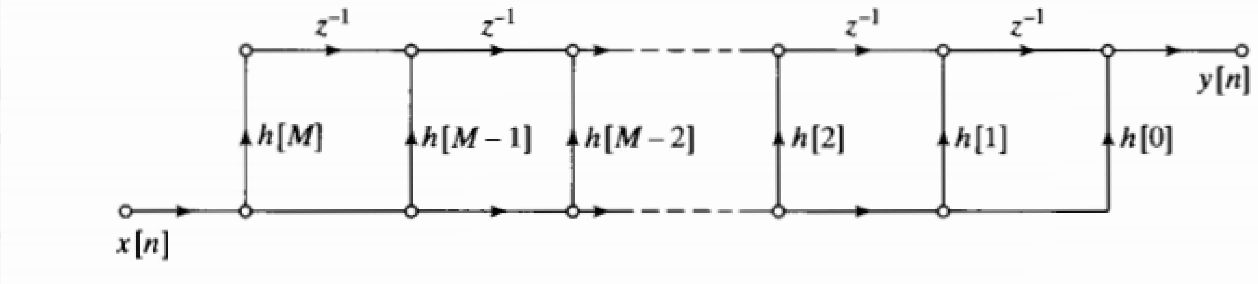
نکته مهم: این فیلترها فقط صفر دارند و تمامی قطب‌های آنها در $z=0$ است. از این رو، ساختارمستقیم ۱ و ۲ برای این سیستم‌ها یکسان است.

ساختار فیلترهای FIR

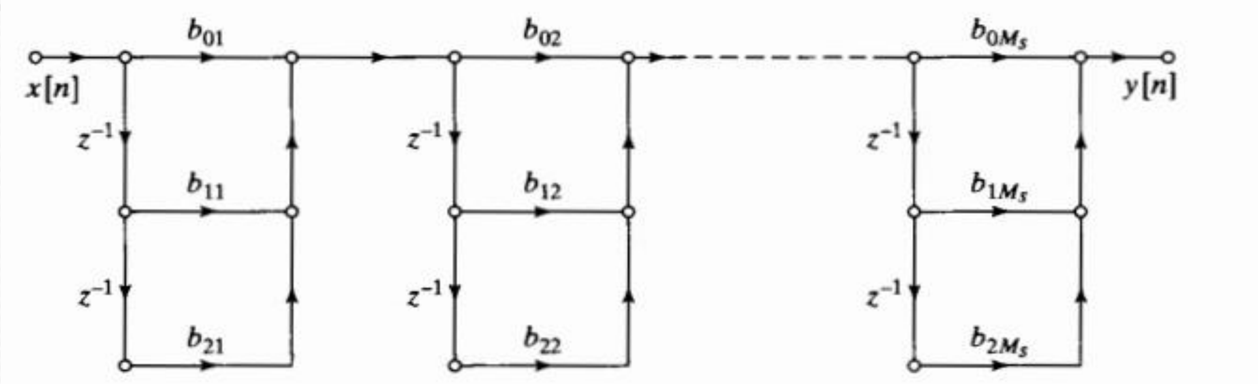
Direct Form



Transposed Form



Cascade Form



ساختار فیلترهای FIR

ساختار سیستم هایی با فاز خطی:

در انتهای فصل ۵ دیدیم که چهار نوع فیلتر FIR با فاز خطی داریم که هر چهار نوع، ویژگی تقارنی داشتند.
در این فصل میخواهیم از ویژگی تقارن استفاده کنیم و ساختارهایی بهینه طراحی کنیم.

نوع اول (type I):

دیدیم که در این ساختار M زوج و تقارن زوج حول $M/2$ داشتیم. یعنی:

$$h[n] = h[M-n] \quad n = 0,1,2,\dots M$$

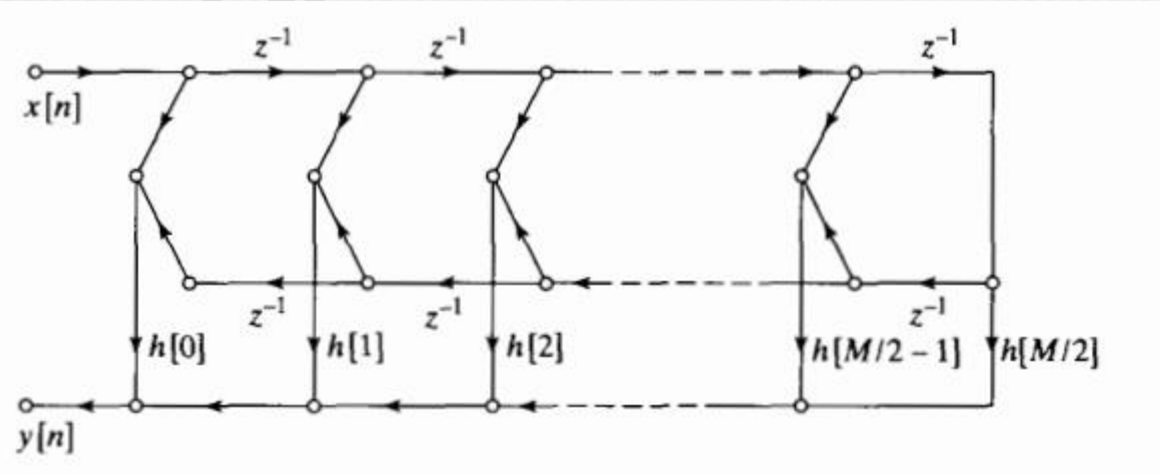
در این صورت با جایگذاری در رابطه (۱) اسلاید ۱۲ داریم:

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + \cdots h[M-1]z^{-(M-1)} + h[M]z^{-M}$$

$$= h[0](1+z^{-M}) + h[1]\left(z^{-1} + z^{-(M-1)}\right) + \cdots h\left[\frac{M}{2}\right]z^{-\frac{M}{2}}$$

یعنی می‌توان تعداد ضرب شونده‌ها را تقریبا نصف کرد.

ساختار فیلترهای FIR



نوع سوم (type III):

دیدیم که در این ساختار M زوج و تقارن فرد حول $M/2$ داشتیم. یعنی:

$$h[n] = -h[M-n] \quad n = 0,1,2,\dots M$$

در این صورت با جایگذاری در رابطه (۱) اسلاید ۱۲ داریم:

$$= h[0](1 - z^{-M}) + h[1]\left(z^{-1} - z^{-(M-1)}\right) + \cdots + h\left[\frac{M}{2}\right] z^{-\frac{M}{2}}$$

یعنی می‌توان تعداد ضرب شونده‌ها را تقریبا نصف کرد. (ساختار مشابه بالاست فقط از تفریق کننده استفاده میشود)

بلوک دیاگرام معادلات تفاضلی
ساختار فیلترهای IIR
ساختار فیلترهای FIR
اثر کوانتیزاسیون ضرایب
ساختارهای Lattice

ساختار فیلترهای FIR

نوع دوم (type II) (و مشابها type IV):

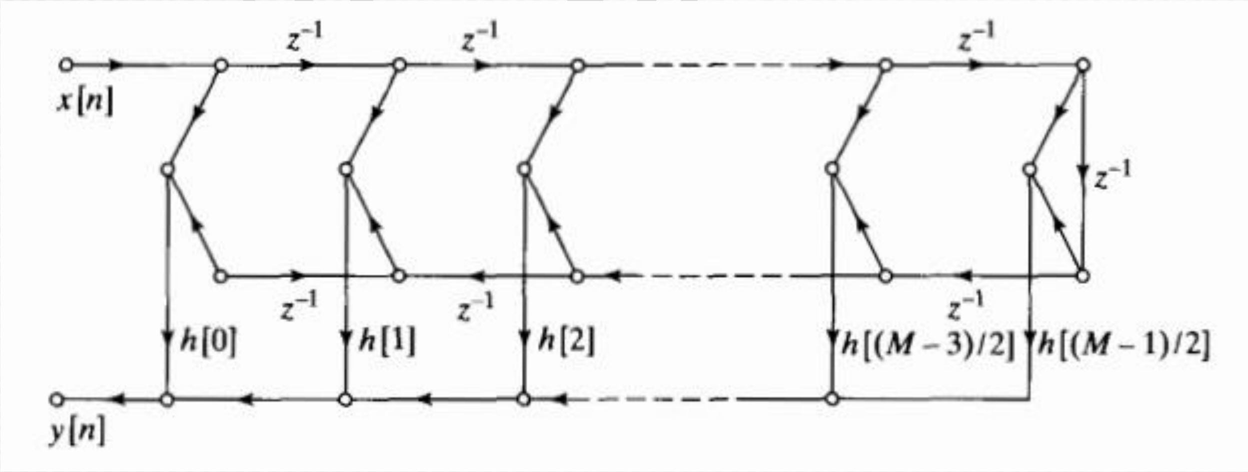
دیدیم که در این ساختار M فرد و تقارن زوج حول $M/2$ داشتیم. یعنی:

$$h[n] = h[M-n] \quad n = 0,1,2,\ldots M$$

در این صورت با جایگذاری در رابطه (۱) اسلاید ۱۲ داریم:

$$= h[0](1+z^{-M}) + h[1]\left(z^{-1}+z^{-(M-1)}\right) + \cdots h\left[\frac{M-1}{2}\right]\left(z^{-\frac{M-1}{2}}+z^{-\frac{M+1}{2}}\right)$$

یعنی می‌توان تعداد ضرب شونده‌ها را تقریبا نصف کرد.



بلوک دیاگرام معادلات تفاضلی
ساختار فیلترهای IIR
ساختار فیلترهای FIR
اثر کوانتیزاسیون ضرایب
ساختارهای Lattice

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

فرض کنید یک سیستم با معادله تفاضلی خطی و ضرایب ثابت به صورت زیر طراحی شده است:

$$H(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

هنگام پیاده‌سازی این سیستم در یک پردازشگر (مثلا یک کامپیوتر)، ضرایب b_k و a_k کوانتیزه می‌شوند و به صورت $\hat{b}_k$ و $\hat{a}_k$ ذخیره می‌شوند. یعنی

$$\hat{H}(z)=\frac{\hat{A}(z)}{\hat{B}(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} \hat{b}_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k z^{-k}} \quad , \qquad \hat{a}_k=a_k+\Delta a_k \, , \qquad \hat{b}_k=b_k+\Delta b_k$$

سوال: سوالی که مطرح می‌شود که این تغییرات در ضرایب صورت یا مخرج چه تاثیری بر روی پاسخ سیستم می‌گذارد؟

پاسخ: ما اثر کوانتیزاسیون a_k ها (مخرج) را بررسی می‌کنیم. ابتدا مخرج را به صورت حاصلضرب عوامل درجه اول می‌نویسیم:

$$B(z)=1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}=\prod_{n=1}^{N}(1-z_n z^{-1}) \qquad (۱)$$

اثرات اعداد دقت محدود

- دیدیم که یک فیلتر را می‌توان به روش‌های مختلفی پیاده‌سازی کرد.
- پیاده‌سازی این سیستم نیاز به محاسبات با دقت محدود دارد و نکته جالب اینکه رفتار هر یک از روش‌های پیاده‌سازی در این شرایط محاسباتی می‌تواند متفاوت باشد.

نمایش عددی

- در بیشتر سیستم‌های دیجیتالی، نمایش مکمل ۲ برای نمایش باینری اعداد حقیقی استفاده می شود.
- یک عدد حقیقی می‌توان با دقت **بینهایت** به صورت مکمل ۲ نمایش داده شود.

$$x = X_m\left(-b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}\right)$$

X_m یک مقیاس دلخواه

b_i ها بیت نمایشی به صورت ۰ یا ۱

b_0 علامت بیتی که $b=0$ برای اعداد $0 \le x \le X_m$ و $b_0 = 1$ برای اعداد $-X_m \le x \le 0$.

بلوک دیاگرام معادلات تفاضلی

ساختار فیلترهای IIR

ساختار فیلترهای FIR

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

ساختارهای Lattice

اثرات اعداد دقت محدود

اگر تنها $B+1$ بیت برای نمایش در اختیار باشد، رابطه بالا به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\hat{x} = Q_B[x] = X_m\left(-b_0 + \sum_{i=1}^{B} b_i 2^{-i}\right) = X_m \hat{x}_B$$

و $\hat{x}_B$ برابر است با:

$$\hat{x}_B = b_0 \diamond b_1 b_2 b_3 \dots b_B$$

که $\diamond$ ممیز باینری نامیده می شود.

تعریف ۱: دقت این نمایش (کوچکترین اختلاف بین دو عدد) به صورت زیر تعریف می‌شود:

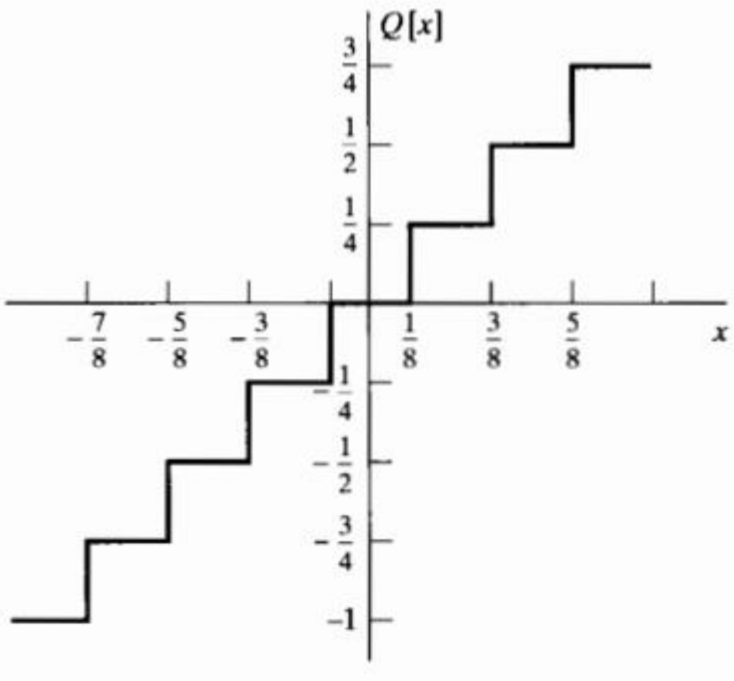
$$\Delta = X_m 2^{-B}$$

تعریف ۲: خطای کوانتیزاسیون به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e = Q_B[x] - x$$

اثرات اعداد دقت محدود

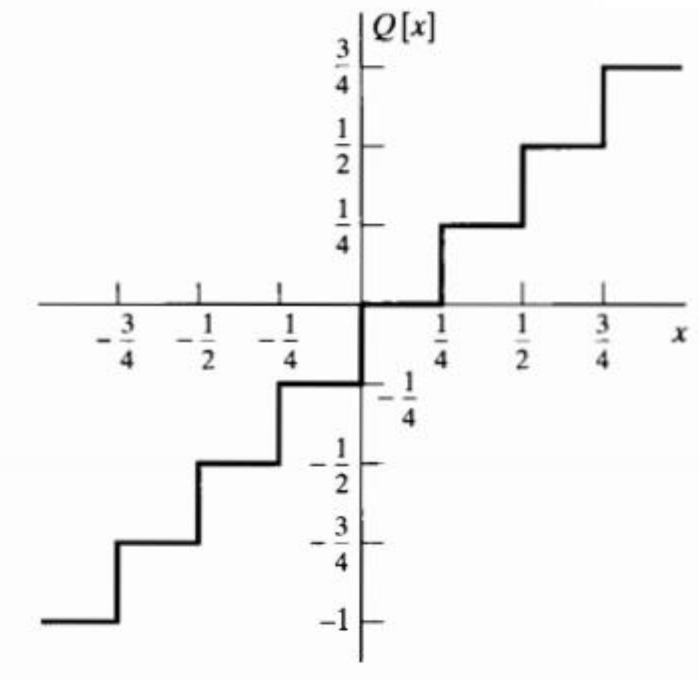
rounding (B=2)



(a)

$$-\frac{\Delta}{2} \leq e \leq \frac{\Delta}{2}$$

Truncation (B=2)



(b)

$$-\Delta \leq e \leq 0$$

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

هدف این است که اثر کوانتیزاسیون a_k ها بر روی یکی از قطب‌ها مثلا قطب z_i بررسی شود.

$$\Delta z_i=\frac{\partial z_i}{\partial a_1}\Delta a_1+\frac{\partial z_i}{\partial a_2}\Delta a_2+\cdots+\frac{\partial z_i}{\partial a_N}\Delta a_N=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial z_i}{\partial a_k}\Delta a_k$$

در رابطه (۱)، مشتق $\hat{B}(z)$ نسبت به a_k در نقطه $z=z_i$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial \hat{B}(z)}{\partial a_k}=-z^{-k}\ \rightarrow\ \left.\frac{\partial \hat{B}(z)}{\partial a_k}\right|_{z=z_i}=-z_i^{-k} \qquad (۲)$$

یک بار دیگر عبارت بالا را با استفاده از قاعده زنجیره‌ای محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial \hat{B}(z)}{\partial a_k}=\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial \hat{B}(z)}{\partial z_m}\frac{\partial z_m}{\partial a_k}=\sum_{m=1}^{N}\left(-z^{-1}\prod_{n=1,n\neq m}^{N}\left(1-z_n z^{-1}\right)\right)\frac{\partial z_m}{\partial a_k}$$

چون مشتق در $z=z_i$ مدنظر است پس تمام جملات سیگما بر روی m صفر است به جز حالت $m=i$ یعنی

$$\left.\frac{\partial \hat{B}(z)}{\partial a_k}\right|_{z=z_i}=-z_i^{-1}\prod_{n=1,n\neq i}^{N}\left(1-z_n z_i^{-1}\right)\left.\frac{\partial z_i}{\partial a_k}\right|_{z=z_i} \qquad (۳)$$

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

از (۲) و (۳) داریم:

$$-z_i^{-1}\prod_{n=1,n\neq i}^{N}\left(1-z_n z_i^{-1}\right)\frac{\partial z_i}{\partial a_k}\Big|_{z=z_i}=-z_i^{k}$$

پس

$$\frac{\partial z_i}{\partial a_k}\Big|_{z=z_i}=\frac{z_i^{k}}{z_i^{-1}\prod_{n=1,n\neq i}^{N}\left(1-z_n z_i^{-1}\right)}$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial a_k}\Big|_{z=z_i}=\frac{z_i^{N-k}}{\prod_{n=1,n\neq i}^{N}\left(z_i-z_n\right)}$$

نتیجه: اگر فاصله قطب‌ها کم باشد آنگاه (z_i-z_n) ها، عبارت بسیار کوچکی می‌شوند و بنابراین $\frac{\partial z_i}{\partial a_k}\Big|_{z=z_i}$ بزرگ می‌شود. بنابراین تغییرات قطب z_i ها $(i=1,2,\dots,N)$ نسبت به کوانتیزاسیون فقط یک ضریب a_k خیلی بزرگ می شود.

بلوک دیاگرام معادلات تفاضلی

ساختار فیلترهای IIR

ساختار فیلترهای FIR

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

ساختارهای Lattice

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

مثال ۶-۱: یک فیلتر IIR با مشخصات زیر مد نظر است :

$$0.99 \le \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 1.01\,, \qquad 0.3\pi \le \omega \le 0.4\pi$$
$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 0.01\,, \qquad \omega \le 0.29\pi$$
$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 0.01\,, \qquad \omega \ge 0.41\pi$$

طراحی فیلتری با این مشخصات (نحوه طراحی در فصل بعد گفته می‌شود)، منجر به فیلتری از مرتبه ۱۲ می‌شود که پیاده‌سازی این فیلتر با روش سری (cascade) به صورت زیر می‌باشد:

ضرایب فیلتر بدون کوانتیزاسیون

TABLE 6.1 UNQUANTIZED CASCADE-FORM COEFFICIENTS FOR A 12TH-ORDER ELLIPTIC FILTER

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	0.738409	−0.850835	0.135843	0.026265	0.135843
2	0.960374	−0.860000	0.278901	−0.444500	0.278901
3	0.629449	−0.931460	0.535773	−0.249249	0.535773
4	1.116458	−0.940429	0.697447	−0.891543	0.697447
5	0.605182	−0.983693	0.773093	−0.425920	0.773093
6	1.173078	−0.986166	0.917937	−1.122226	0.917937

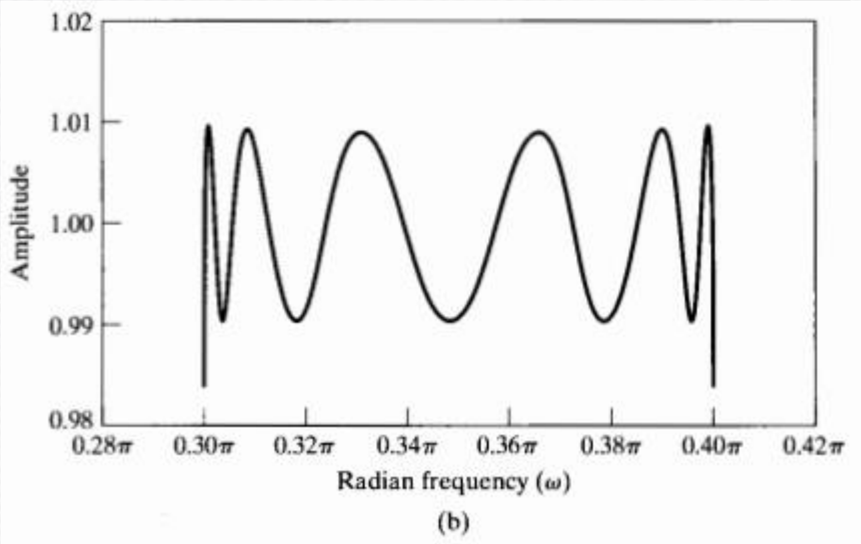
ضرایب با کوانتیزاسیون ۱۶ بیتی

TABLE 6.2 SIXTEEN-BIT QUANTIZED CASCADE-FORM COEFFICIENTS FOR A 12TH-ORDER ELLIPTIC FILTER

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	24196×2^{-15}	-27880×2^{-15}	17805×2^{-17}	3443×2^{-17}	17805×2^{-17}
2	31470×2^{-15}	-28180×2^{-15}	18278×2^{-16}	-29131×2^{-16}	18278×2^{-16}
3	20626×2^{-15}	-30522×2^{-15}	17556×2^{-15}	-8167×2^{-15}	17556×2^{-15}
4	18292×2^{-14}	-30816×2^{-15}	22854×2^{-15}	-29214×2^{-15}	22854×2^{-15}
5	19831×2^{-15}	-32234×2^{-15}	25333×2^{-15}	-13957×2^{-15}	25333×2^{-15}
6	19220×2^{-14}	-32315×2^{-15}	15039×2^{-14}	-18387×2^{-14}	15039×2^{-14}

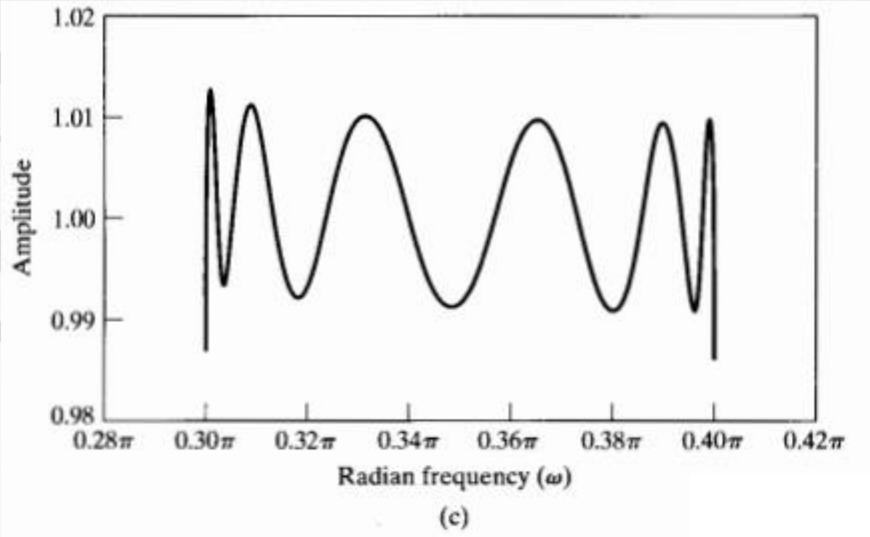
اثر کوانتیزاسیون ضرایب

باند عبور بدون کوانتیزاسیون



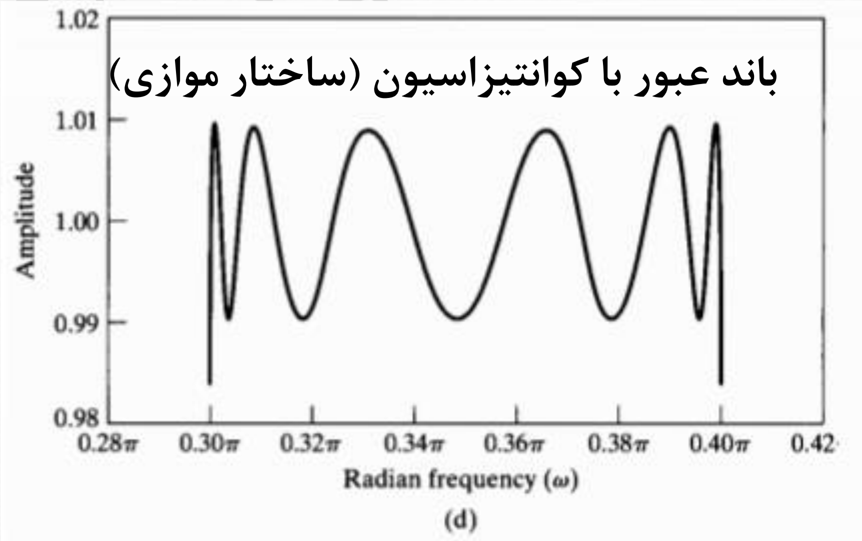
(b)

باند عبور با کوانتیزاسیون (ساختار سری)



(c)

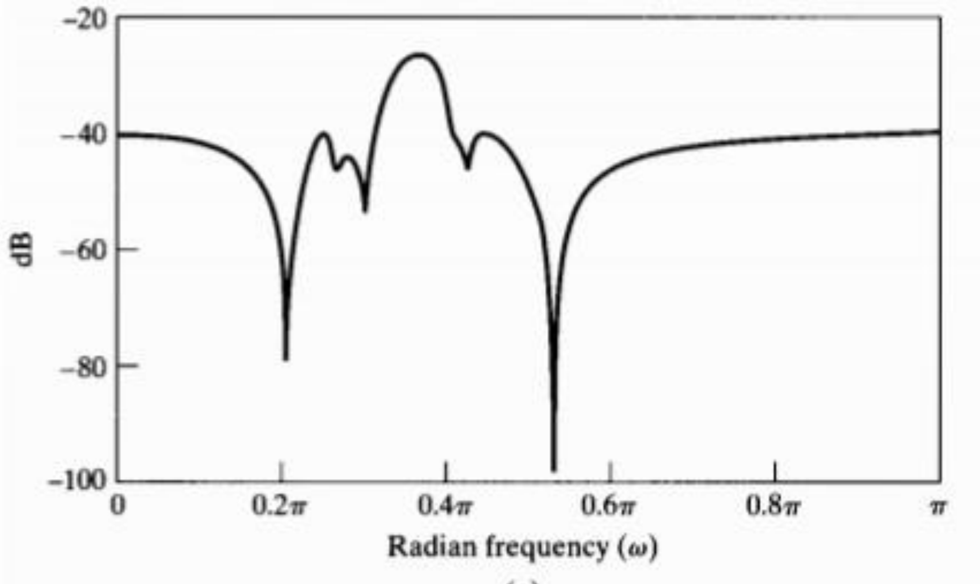
باند عبور با کوانتیزاسیون (ساختار موازی)



(d)

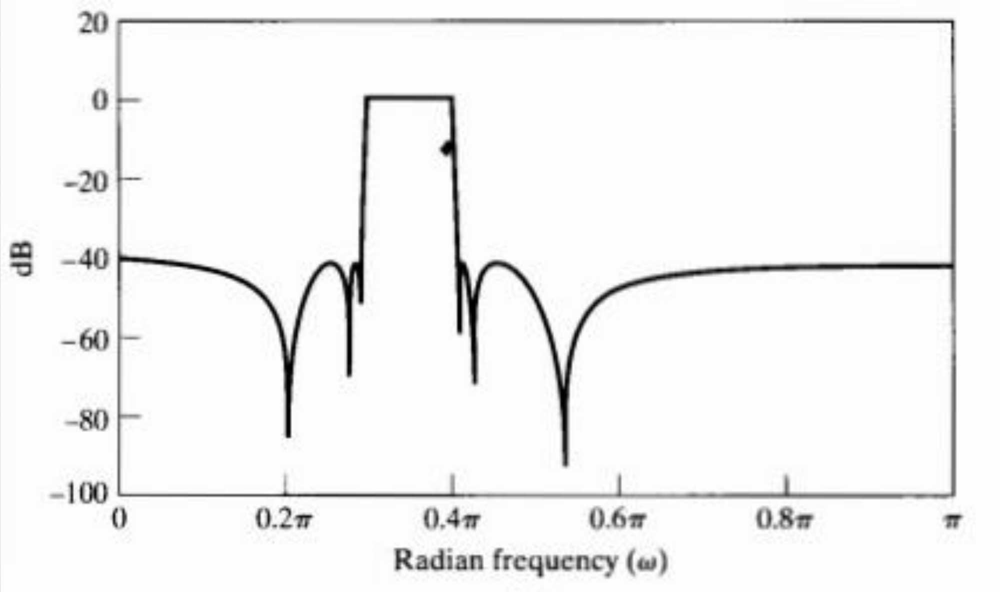
اثر کوانتیزاسیون ضرایب

لگاریتم دامنه با پیاده سازی Direct Form و
کوانتیزاسیون ۱۶ بیتی



(e)

لگاریتم دامنه بدون کوانتیزاسیون

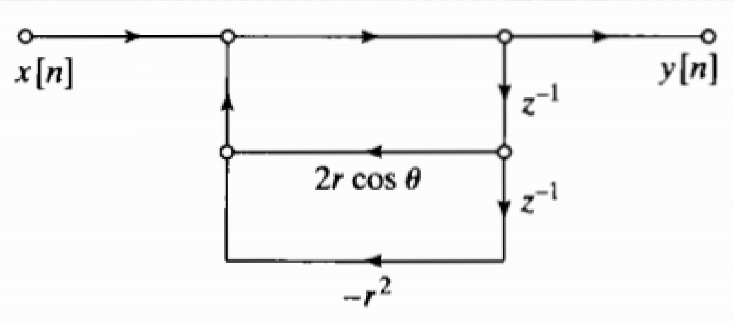


(a)

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

مثال ۶-۲: پیاده‌سازی یک فیلتر مرتبه دوم IIR.

یک فیلتر مرتبه دوم با دو قطب $re^{j\theta}$ و $re^{-j\theta}$ در نظر بگیرید. این فیلتر به صورت روبرو پیاده‌سازی می شود:

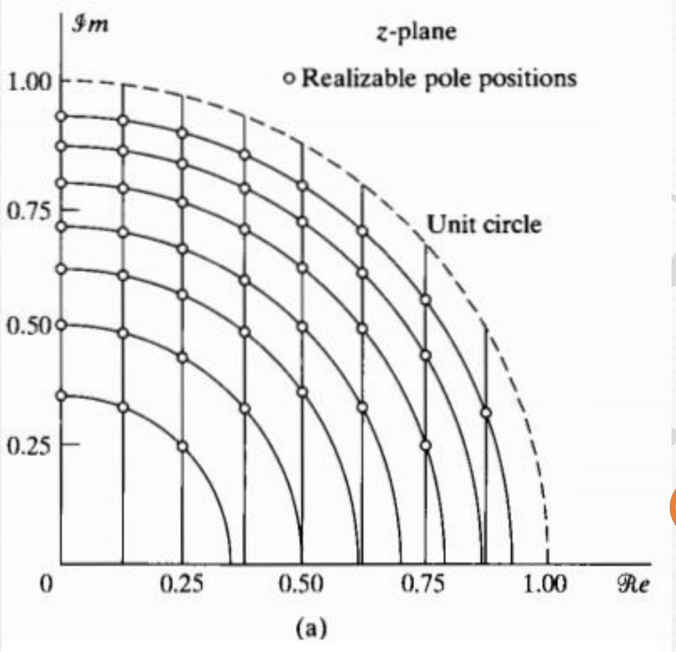


مکان هندسی ضرایب کوانتیزه شده $-r^2$ و $2r\cos\theta$ به صورت زیر می‌باشد:

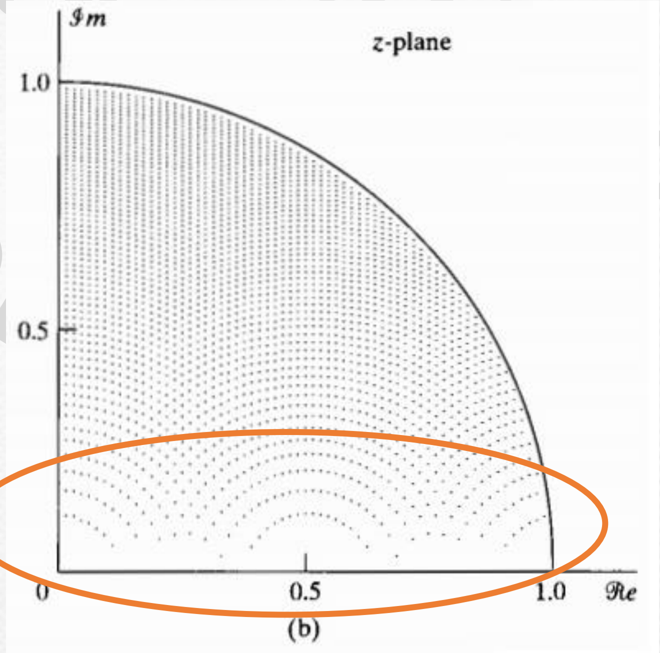
$$r_i^2 = \{0\,,\frac{1}{8},\frac{2}{8},\frac{3}{8}\dots,\frac{7}{8}\}$$

$$r_i = \{0,0.35,0.5,0.61,\dots\}$$

مکان ضرایب با کوانتیزاسیون ۴ بیتی



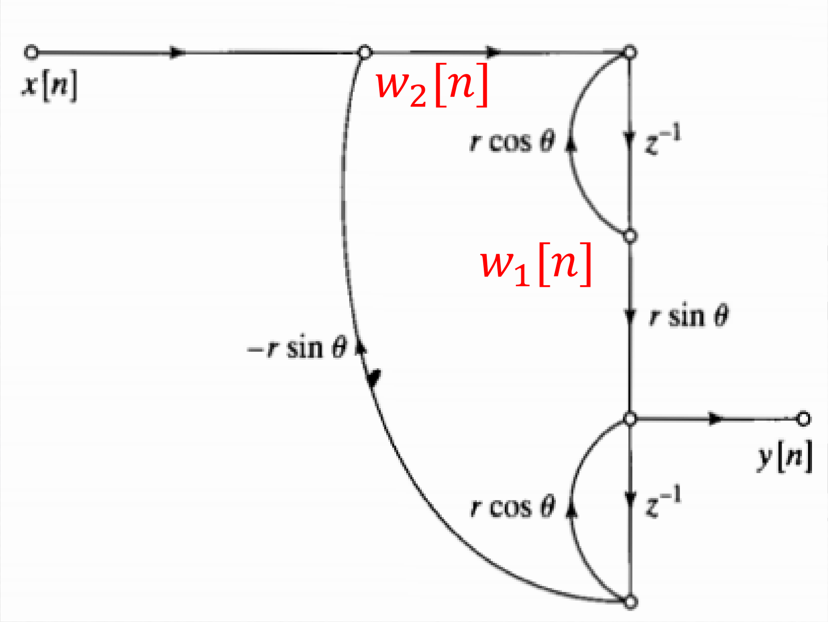
مکان ضرایب با کوانتیزاسیون ۷ بیتی



اثر کوانتیزاسیون ضرایب

نکته: در پیاده‌سازی به فرم مستقیم، مکان کوانیزاسیون در نزدیک محور حقیقی تنک و در نزدیک دایره واحد فشرده است. یعنی خطای کوانتیزاسیون برای قطب‌هایی با $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ به مراتب بزرگتر است.

راه حل: می‌توان از یک ساختار جایگزین به صورت زیر استفاده کرد:



$$w_2[n] = x[n] - r\sin\theta\, y[n-1] \qquad (1)$$

$$w_1[n] = w_2[n-1] - r\cos\theta\, w_1[n-1] \qquad (2)$$

$$y[n] = r\sin\theta\, w_1[n] + r\cos\theta\, y[n-1] \qquad (3)$$

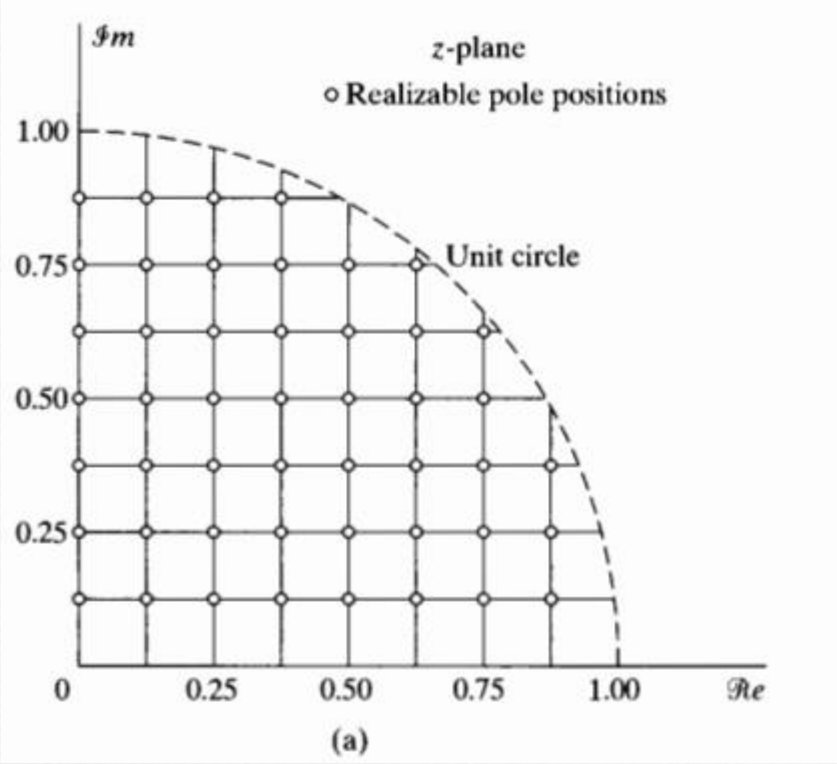
تمرین: با حل سه معادله بالا رابطه $y[n]$ با $x[n]$ را بیابید و نشان دهید که قطب‌ها به صورت $z_{1,2} = re^{\pm j\theta}$ هستند.

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

در ساختار بالا ضرایب به صورت $r\cos\theta$ و $r\sin\theta$ هستند که این دو کمیت معادل با محورهای افقی و عمودی هستند.

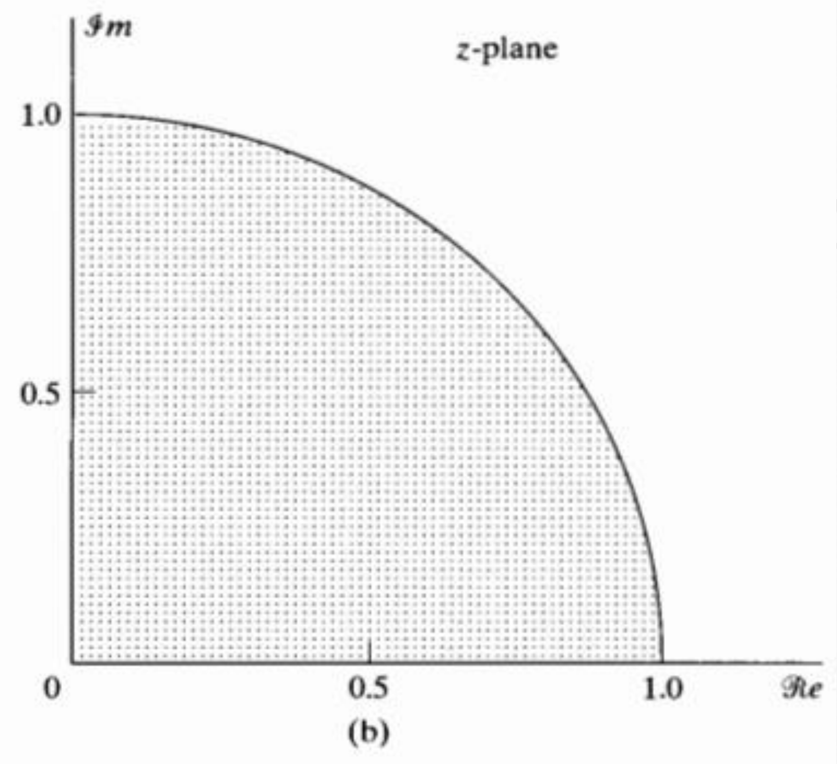
مکان هندسی ضرایب کوانتیزه شده به صورت $r\cos\theta$ و $r\sin\theta$ با فاصله یکسان می باشد:

مکان ضرایب با کوانتیزاسیون ۴ بیتی



(a)

مکان ضرایب با کوانتیزاسیون ۷ بیتی



(b)

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

کوانتیزاسیون در فیلترهای FIR:

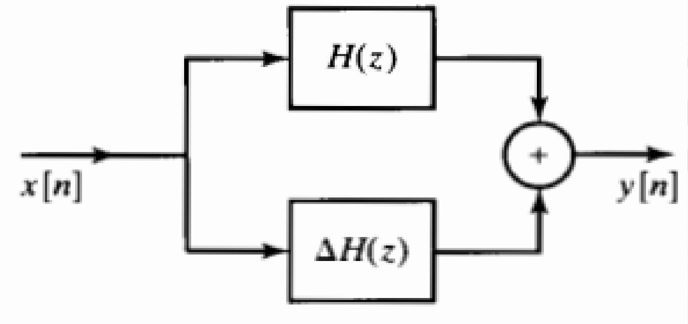
- بر خلاف فیلترهای IIR مرتبه بالاتر که در پیاده‌سازی فرم مستقیم مناسب نبودند، فیلترهای FIR عموما در این دو ساختار Direct Form I و Direct Form II پیاده‌سازی می‌شوند.
- یک فیلتر سببی FIR به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} h[n]z^{-n}$$

پس از کوانتیزه کردن ضرایب $h[n]$ به صورت $\hat{h}[n] = h[n] + \Delta h[n]$ داریم:

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^{N} (h[n] + \Delta h[n])z^{-n} = \sum_{n=0}^{N} h[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{N} \Delta h[n]z^{-n}$$

$$\hat{H}(z) = H(z) + \Delta H(z)$$



بلوک دیاگرام معادلات تفاضلی
ساختار فیلترهای IIR
ساختار فیلترهای FIR
اثر کوانتیزاسیون ضرایب
ساختارهای Lattice

اثر کوانتیزاسیون ضرایب

❖ فیلترهای FIR فقط صفر دارند و همه قطب‌ها در مبدا هستند. اگر فاصله صفرها از هم کم باشد، کوانتیزاسیون به شدت بر روی عملکرد فیلتر تاثیر می‌گذارد.

❖ اگر فیلتر با فازخطی باشد، آنگاه فاصله صفرها، معمولا زیاد است و بنابراین ساختارهای Direct Forms مفید هستند.

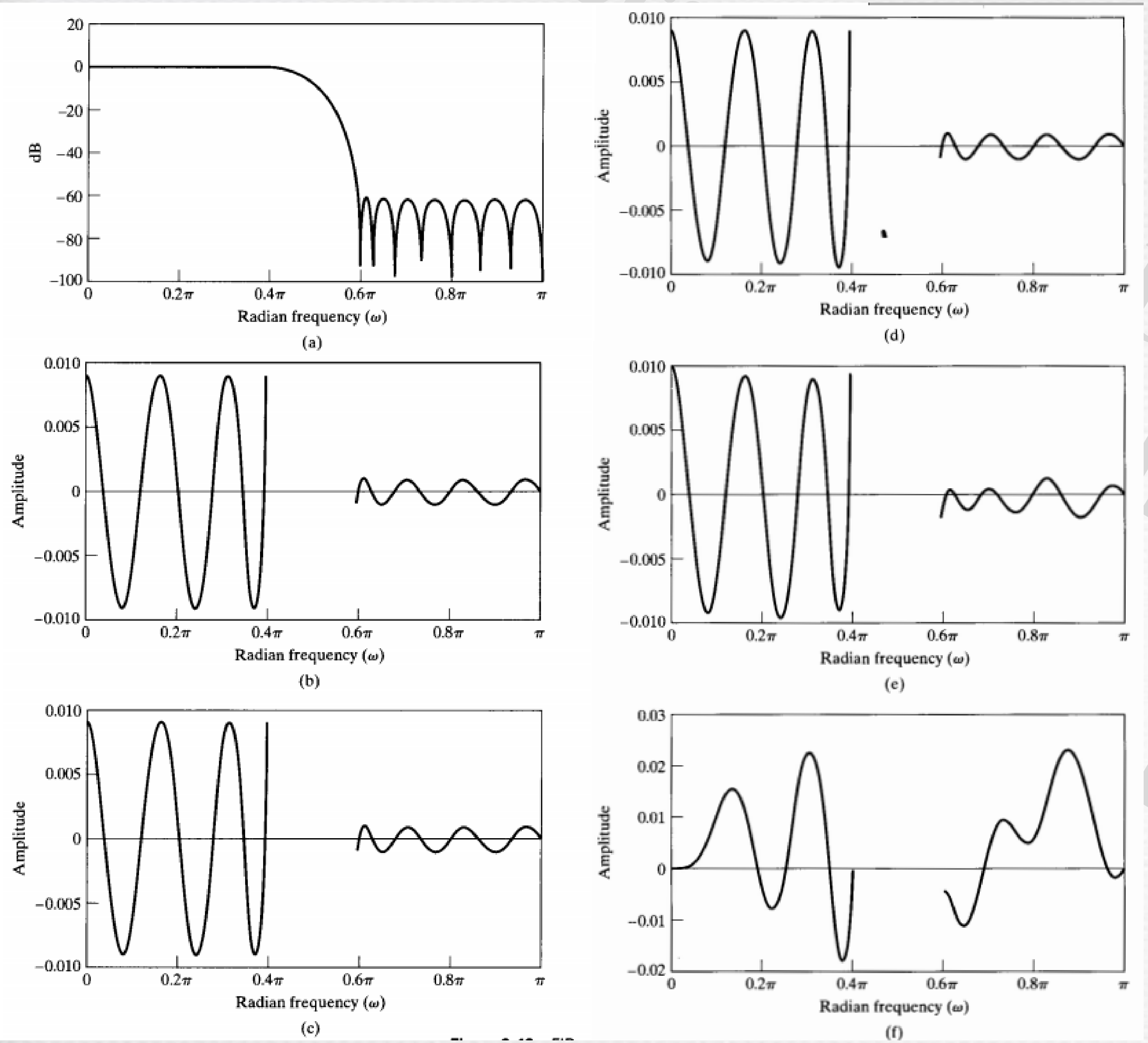
مثال ۶-۳: یک فیلتر FIR با مشخصات زیر مد نظر است :

$$0.99 \le |H(e^{j\omega})| \le 1.01\,, \qquad 0 \le |\omega| \le 0.4\pi$$
$$|H(e^{j\omega})| \le 0.001\,, \qquad 0.6\pi \le |\omega| \le \pi$$

TABLE 6.3 UNQUANTIZED AND QUANTIZED COEFFICIENTS FOR AN OPTIMUM FIR LOWPASS FILTER ($M = 27$)

Coefficient	Unquantized	16 bits	14 bits	13 bits	8 bits
$h[0] = h[27]$	1.359657×10^{-3}	45×2^{-15}	11×2^{-13}	6×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[1] = h[26]$	-1.616993×10^{-3}	-53×2^{-15}	-13×2^{-13}	-7×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[2] = h[25]$	-7.738032×10^{-3}	-254×2^{-15}	-63×2^{-13}	-32×2^{-12}	-1×2^{-7}
$h[3] = h[24]$	-2.686841×10^{-3}	-88×2^{-15}	-22×2^{-13}	-11×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[4] = h[23]$	1.255246×10^{-2}	411×2^{-15}	103×2^{-13}	51×2^{-12}	2×2^{-7}
$h[5] = h[22]$	6.591530×10^{-3}	216×2^{-15}	54×2^{-13}	27×2^{-12}	1×2^{-7}
$h[6] = h[21]$	-2.217952×10^{-2}	-727×2^{-15}	-182×2^{-13}	-91×2^{-12}	-3×2^{-7}
$h[7] = h[20]$	-1.524663×10^{-2}	-500×2^{-15}	-125×2^{-13}	-62×2^{-12}	-2×2^{-7}
$h[8] = h[19]$	3.720668×10^{-2}	1219×2^{-15}	305×2^{-13}	152×2^{-12}	5×2^{-7}
$h[9] = h[18]$	3.233332×10^{-2}	1059×2^{-15}	265×2^{-13}	132×2^{-12}	4×2^{-7}
$h[10] = h[17]$	-6.537057×10^{-2}	-2142×2^{-15}	-536×2^{-13}	-268×2^{-12}	-8×2^{-7}
$h[11] = h[16]$	-7.528754×10^{-2}	-2467×2^{-15}	-617×2^{-13}	-308×2^{-12}	-10×2^{-7}
$h[12] = h[15]$	1.560970×10^{-1}	5115×2^{-15}	1279×2^{-13}	639×2^{-12}	20×2^{-7}
$h[13] = h[14]$	4.394094×10^{-1}	14399×2^{-15}	3600×2^{-13}	1800×2^{-12}	56×2^{-7}

اثر کوانتیزاسیون ضرایب



(a) لگاریتم پاسخ فرکانسی بدون کوانتیزاسیون

(b) خطای باند عبور و باند توقف در حالت بدون کوانتیزاسیون

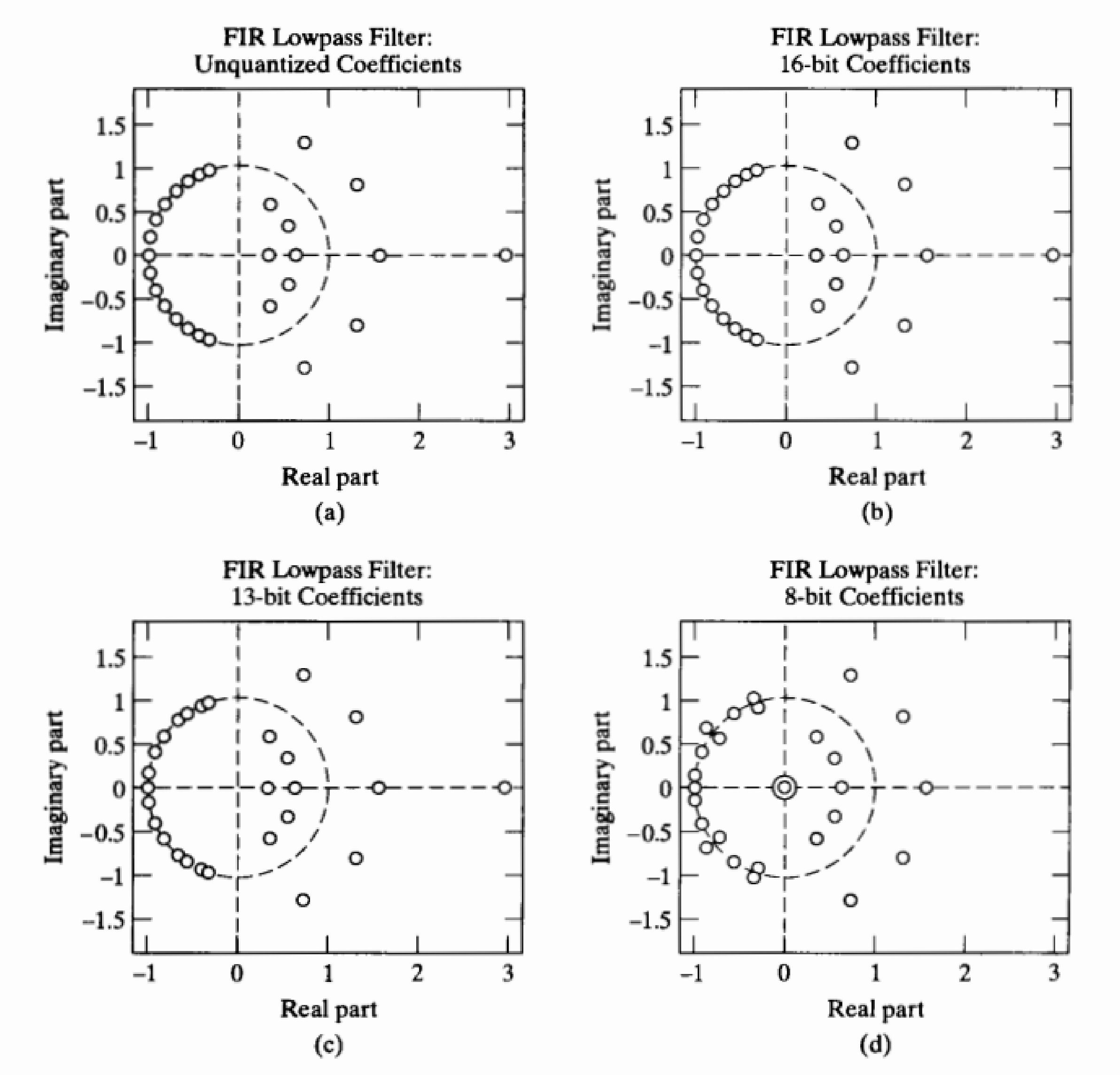
(c) خطای باند عبور و باند توقف در حالت کوانتیزاسیون ۱۶ بیتی

(d) خطای باند عبور و باند توقف در حالت کوانتیزاسیون ۱۴ بیتی

(e) خطای باند عبور و باند توقف در حالت کوانتیزاسیون ۱۳ بیتی

(f) خطای باند عبور و باند توقف در حالت کوانتیزاسیون ۸ بیتی

اثر کوانتیزاسیون ضرایب



End of Chapter 6

دانشگاه خلیج فارس بوشهر