

# فیلتر و سنتز

## فصل پنجم تقریب فیلترها

ارایه شده توسط:  
**حجت قیمت گر**  
استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

# مطالب

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

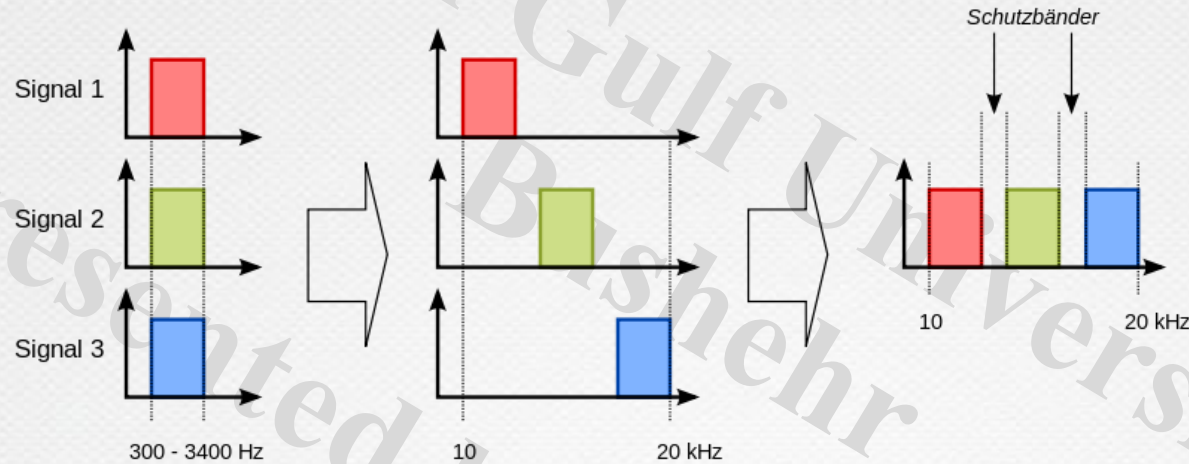
فیلتر چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلتر نرمالیزه پایین گذر به دیگر فیلترها

## مقدمه

در مخابرات (رادیو، تلویزیون، موبایل و ...) چندین مشترک به طور همزمان از کانال هوا استفاده می کنند. در گیرنده برای دریافت یک کانال از بین هم کانالها نیاز به فیلتر کردن است.



**سوال:** چرا به مساله تقریب نیاز است؟

**پاسخ:** برای پیاده سازی یک تابع تبدیل به صورت ایده آل به بینهایت المان مداری نیاز است.

**تقریب:** پیاده سازی تابع تبدیلی به دو شرط:

۱- شرایط تحقق پذیری فراهم باشد

۲- تابع تقریب به خوبی با مشخصه تابع اولیه منطبق باشد.

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



## مقدمه

پارامترهای مدنظر در مساله تقريـب فـيلـترها

۱- اعوجاج در باند عبور

$$0.95A \leq |H(j\omega)|^2 \leq 1.05A \quad \omega_{cL} \leq \omega \leq \omega_{cH}$$

۲- تضعيف در باند توقف

$$|H(j\omega)|^2 \leq 0.01A \quad \omega_{sH} \leq \omega$$

۳- پهنای باند گذر

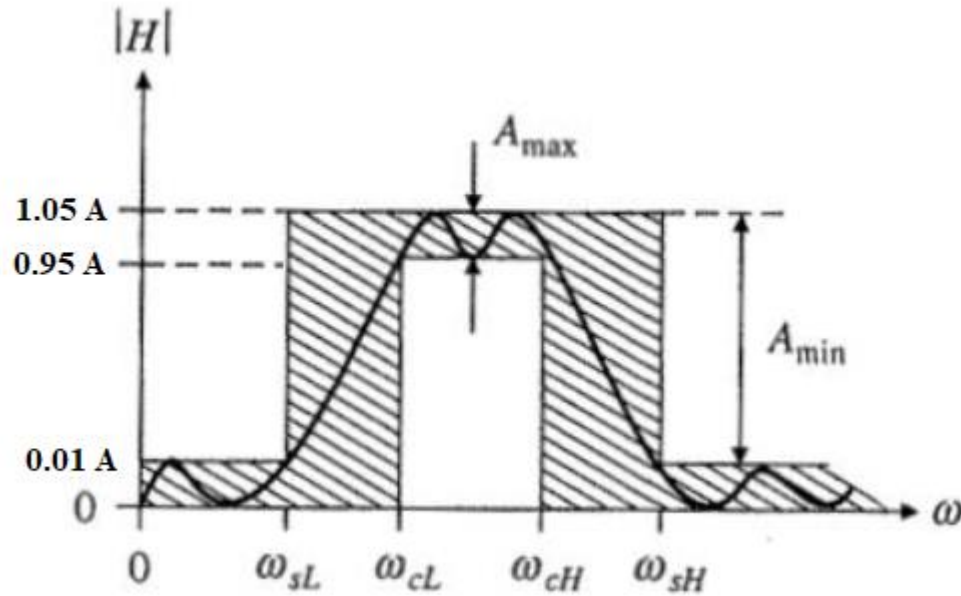
$$B_1 = \omega_{cL} - \omega_{sL} \quad , \quad B_2 = \omega_{sH} - \omega_{cH}$$

۴- پهنای باند

$$BW = \omega_{cH} - \omega_{cL}$$

نکته : معمولاً پارامترهای  $\omega_{sL}$ ,  $\omega_{sH}$  به صورت زیر انتخاب می شوند:

$$\omega_{sL} = \omega_{cL} - \frac{\omega_{cH} - \omega_{cL}}{10} \quad , \quad \omega_{sH} = \omega_{cH} + \frac{\omega_{cH} - \omega_{cL}}{10}$$



مقدمه

فيلتر باترورث

فيلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فيلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

## مقدمه

### هدف:

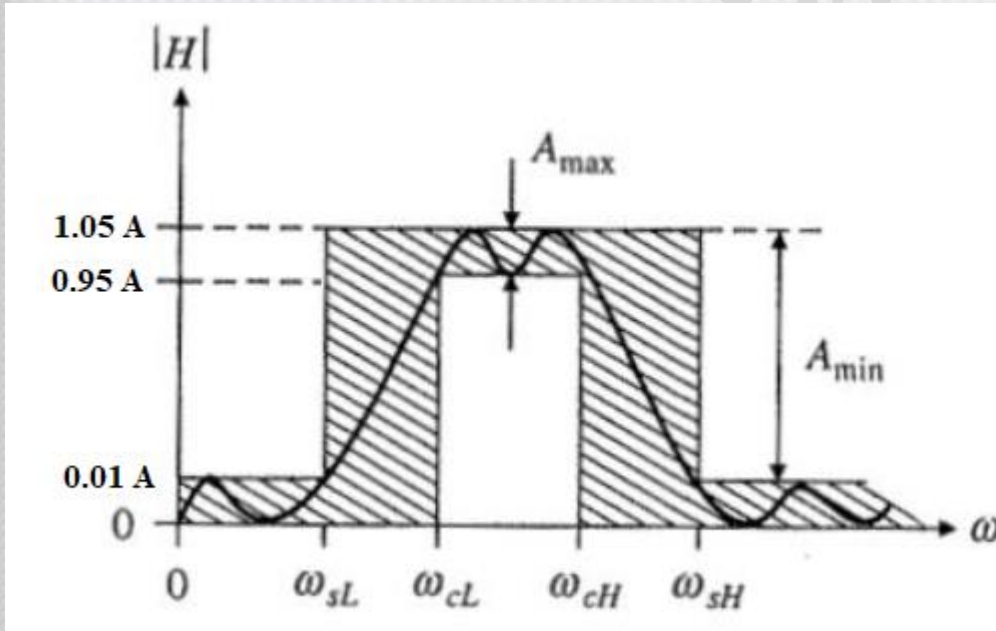
تابع تبدیلی تقریبی باید تابعی باشد که در محدوده هاشور قرار داشته باشد.

در ادامه این تابع تبدیل با یکی از روشهای مطرح شده در فصل چهارم پیاده سازی می شود.

یادآوری:

فرض کنید تابع تبدیل  $H(s)$  باشد. در این صورت میتوان گفت:

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= H(j\omega)H^*(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) \\ &= H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega} \end{aligned}$$



## مقدمه

## فیلتر باترورث

## فیلتر چبی شف

## چبی شف معکوس

## فیلتر بیضوی

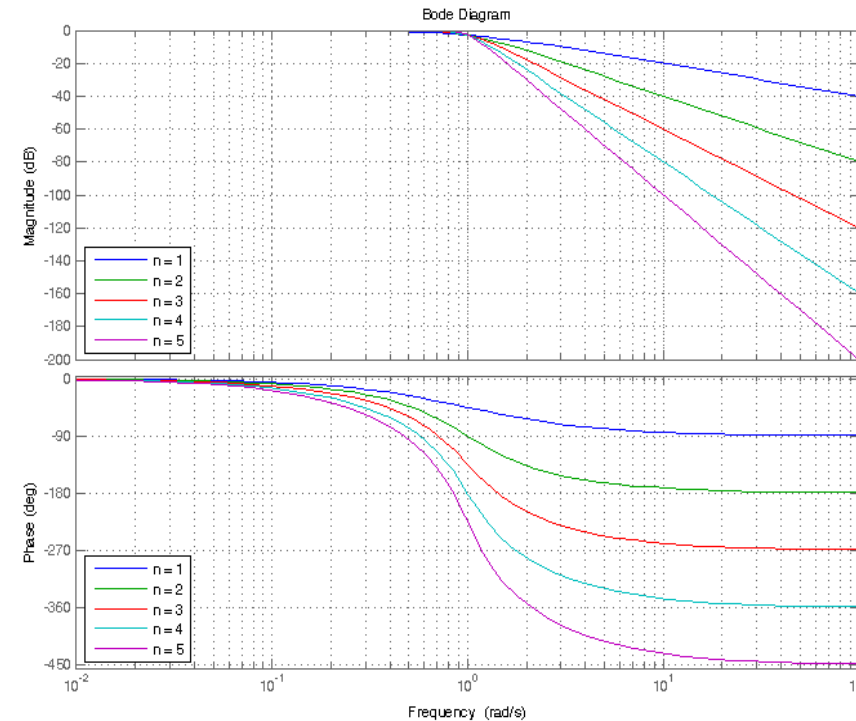
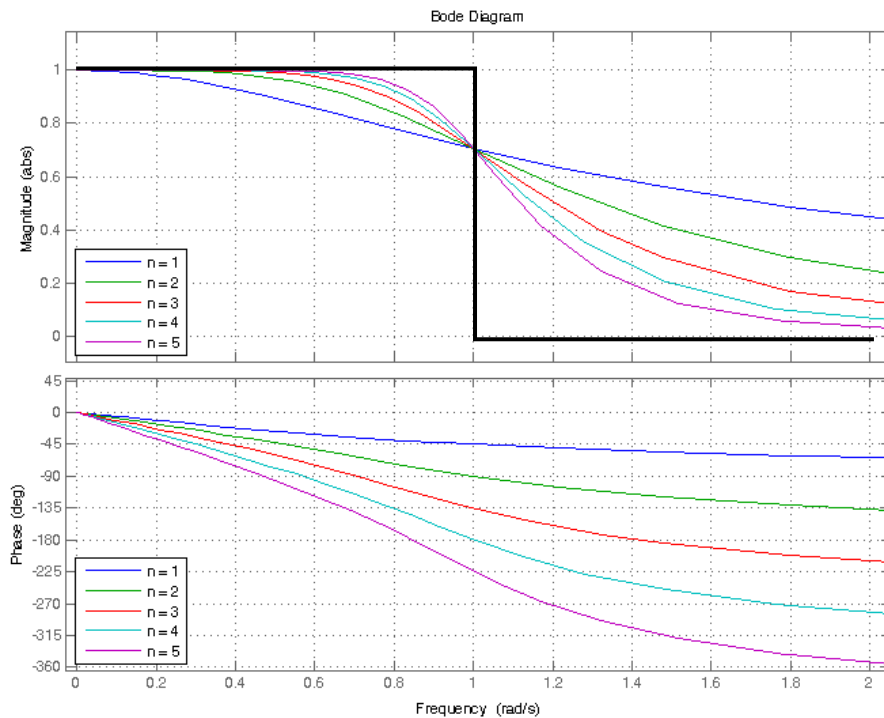
## تبدیل فیلترها

# فیلتر باترورث

تعریف: فیلتر باترورث مرتبه  $n$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$

$n$ : مرتبه فیلتر نامیده می شود. هر چه  $n$  بزرگتر باشد فیلتر به حالت ایده آل نزدیکتر می شود.



مقدمه

فیلتر باترورث  
(تعریف)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



## خواص فیلتر باترورث

**خاصیت ۱:** اگر درجه فیلتر برابر با  $n$  باشد آنگاه:

$$|H(j0)|^2 = 1, \quad |H(j1)|^2 = \frac{1}{2}, \quad |H(j\infty)|^2 = 0$$

**اثبات:** به سادگی با جایگذاری در ضابطه فیلتر داریم:

$$|H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$|H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2},$$

$$|H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=\infty} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

مقدمه

فیلتر باترورث  
(خواص فیلتر)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

## خواص فیلتر باترورث

**خاصیت ۲:** تابع تبدیل فیلتر باترورث یک تابع نزولی بر حسب فرکانس است و در  $\omega = 0$  مقدار ماکزیمم دارد.

**اثبات:** با مشتق گیری از تابع دامنه باترورث داریم:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \rightarrow \frac{d|H(j\omega)|^2}{d\omega} = -2n\omega^{2n-1}(1 + \omega^{2n})^{-2}$$

$$\frac{d|H(j\omega)|^2}{d\omega} = 2H(j\omega) \frac{d}{d\omega} |H(j\omega)|$$

$$2H(j\omega) \frac{d}{d\omega} |H(j\omega)| = -2n\omega^{2n-1}(1 + \omega^{2n})^{-2}$$

$$\frac{d}{d\omega} |H(j\omega)| = -\frac{2n\omega^{2n-1}(1 + \omega^{2n})^{-2}}{2(1 + \omega^{2n})^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{n\omega^{2n-1}}{(1 + \omega^{2n})^{\frac{3}{2}}}$$

چون  $\omega > 0$  است پس رابطه بالا همواره منفی است و تابع نزولی است. با مساوی صفر قرار دادن ماکزیمم پیدا می شود:

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega = 0$$

مقدمه

فیلتر باترورث  
(خواص فیلتر)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



## خواص فیلتر باترورث

**خاصیت ۳:** کلیه مشتقات تابع باترورث در  $\omega = 0$  صفر است. از اینرو گفته می شود فیلتر ماکزیمم صافی را در باند

عبور

**اثبات:** تمرین

**خاصیت ۴:** به ازای فرکانسهای بالا، شیب افت فیلتر  $20n \text{ db/decade}$  است. یعنی به ازای ۱۰ برابر شدن فرکانس، دامنه به اندازه 20 افت می کند.

**اثبات:** با گرفتن لگاریتم از اندازه تابع تبدیل داریم :

$$10 \log_{10} |H(j\omega)|^2 = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \right) = 10 \log_{10} (1 + \omega^{2n})^{-1}$$

با فرض اینکه  $\omega \rightarrow \infty$  می توان گفت:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (10 \log_{10} (1 + \omega^{2n})^{-1}) = 10 \log_{10} (\omega^{2n})^{-1} = -20n \log_{10} (\omega)$$

مقدمه

فیلتر باترورث  
(خواص فیلتر)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

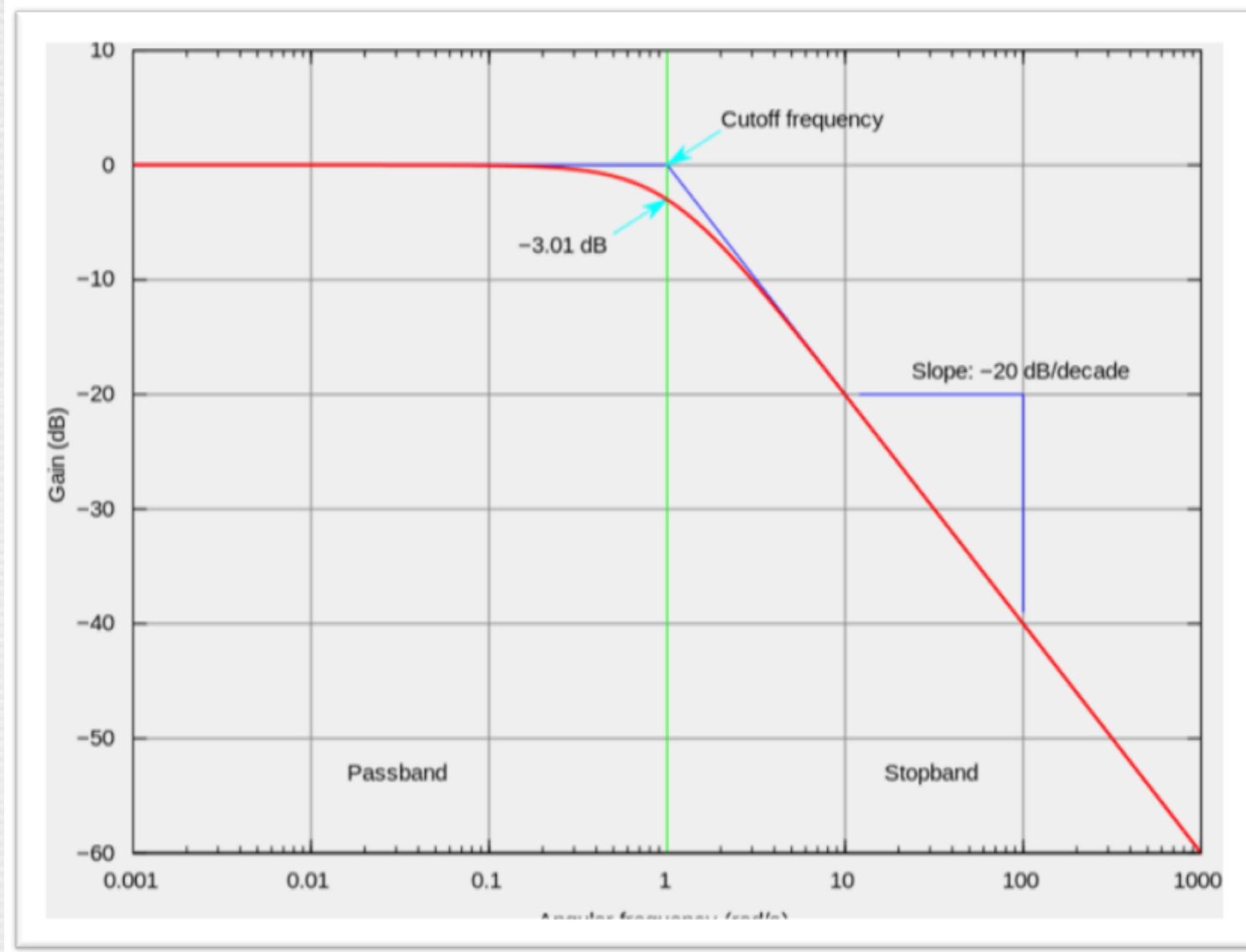
فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



دانشگاه خلیج فارس بوشهر

## خواص فیلتر باترورث



مقدمه

فیلتر باترورث  
(خواص فیلتر)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

## تابع تبدیل باترورث:

تابع تبدیل فیلتر  $H(s)$  بر اساس متغیر فرکانسی  $s$  تعریف می شود. بنابراین داریم:

$$H(s)H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n}} = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}$$

محل قطبهای تابع اندازه باترورث بر روی صفحه فرکانسی:

$$1 + (-1)^n s^{2n} = 0 \rightarrow s^{2n} = -1 \rightarrow s^{2n} = e^{-j\pi} \quad \text{به ازای } n \text{ زوج داریم:}$$

$$\hat{s}_k = e^{j\frac{(2k-1)}{2n}\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

پس می توان گفت:

$$\hat{s}_k = \cos \frac{(2k-1)}{2n}\pi + j \sin \frac{(2k-1)}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

$$\hat{s}_k = \cos \hat{\theta}_k + j \sin \hat{\theta}_k, \quad \hat{\theta}_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

مقدمه

فیلتر باترورث  
(محل قطبها)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

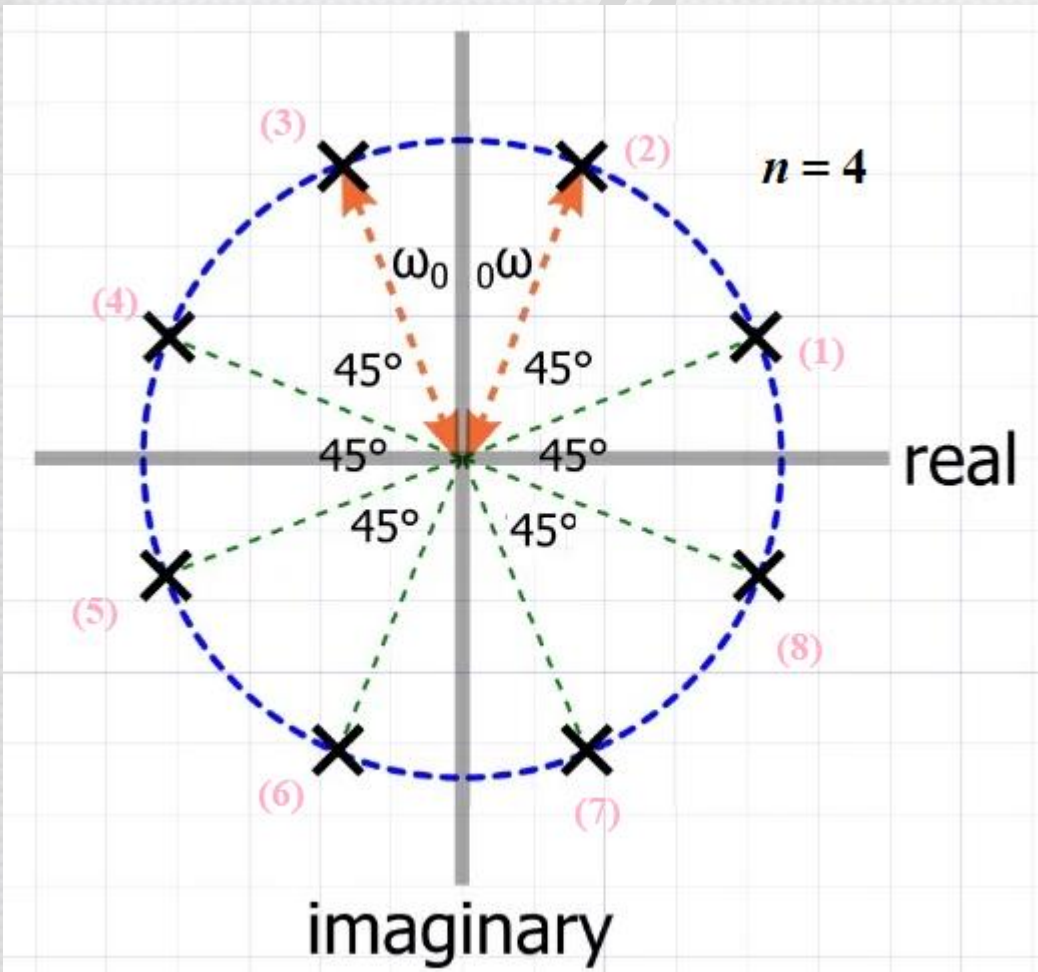


باید قطبهای سمت چپ را به  $H(s)$  و قطبهای سمت راست را به  $H(-s)$  تخصیص دهیم. پس قطبهای (۳) و (۴) و (۵) و (۶) باید به  $H(s)$  تخصیص داده شوند.

برای سادگی میتوان مبدا زاویه ای را تغییر داد:

$$s_k = \hat{s}_{k+\frac{n}{2}}$$

$$\theta_k = \hat{\theta}_{k+\frac{n}{2}} - \frac{\pi}{2}$$



$$s_k = \hat{s}_{k+\frac{n}{2}} = \cos \hat{\theta}_{k+\frac{n}{2}} + j \sin \hat{\theta}_{k+\frac{n}{2}}$$

$$s_k = \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi + \frac{\pi}{2} \right) + j \sin \left( \frac{2k-1}{2n} \pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$s_k = -\sin \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right) + j \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right)$$

با این طرز نمایش، کافی است که قطبهای  $s_k$   $k = 1, 2, \dots, n$  را به  $H(s)$  تخصیص دهیم

$$s_k = -\sin \theta_k + j \cos \theta_k \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi$$



## تابع تبدیل باترورث

با تخصیص قطبهای سمت چپ محور به تابع  $H(s)$  داریم:

$$H(s) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{s - s_k} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{s - (-\sin \theta_k + j \cos \theta_k)}$$

نتیجه ۱: تابع تبدیل تنها یک قطب حقیقی در  $s = -1$  دارد که این قطب تنها به ازای  $n$  فرد حاصل می شود.

نتیجه ۲: قطبها روی یک دایره واحد قرار دارند زیرا

$$|s_k|^2 = \sin^2 \theta_k + \cos^2 \theta_k = 1$$

نتیجه ۳: چون تابع اندازه تقارن چهارگانه دارد پس اگر  $s_k$  قطب تابع تبدیل باشد حتماً  $s_k^*$  هم قطب است. پس ترمهای مختلط به صورت زیر هستند:

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\operatorname{Re}\{s_k\}s + |s_k|^2 = s^2 + 2\sin \theta_k s + 1$$

مقدمه

فیلتر باترورث  
(تابع تبدیل)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



## تابع تبدیل باترورث

$$H(s) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{s^2 + 2 \sin \theta_k s + 1}, & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{s+1} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{s^2 + 2 \sin \theta_k s + 1}, & n \text{ فرد} \end{cases}$$

برای مثال

$$n = 2 \rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)s + 1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$$n = 3 \rightarrow H(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s^2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)s + 1} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

مقدمه

فیلتر باترورث  
(تابع تبدیل)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

## پیاده سازی فیلتر باترورث

- ۱- چند جمله ای مخرج یک چند جمله ای هرویتز است.
- ۲- تمام صفرهای انتقال در مخرج قرار دارد و روش سنتز کائور ۱ می باشد. چون روش سنتز کائور ۱ است پس سلفها در شاخه سری و خازن ها در شاخه موازی قرار دارند. با استفاده از ساختار دارلینگتون سه حالت رخ می دهد: ( $n$  درجه فیلتر)

$$\tilde{C}_{\nu m-1} \tilde{L}_{\nu m} \{\hat{L}_{\nu m-1} \hat{C}_{\nu m}\} = \frac{\alpha_{\nu m-2} \alpha_{\nu m-1}}{1 - \lambda \beta_{\nu m-2} + \lambda^2}$$

$$\tilde{C}_{\nu m+1} \tilde{L}_{\nu m} \{\hat{L}_{\nu m+1} \hat{C}_{\nu m}\} = \frac{\alpha_{\nu m-1} \alpha_{\nu m+1}}{1 - \lambda \beta_{\nu m} + \lambda^2}$$

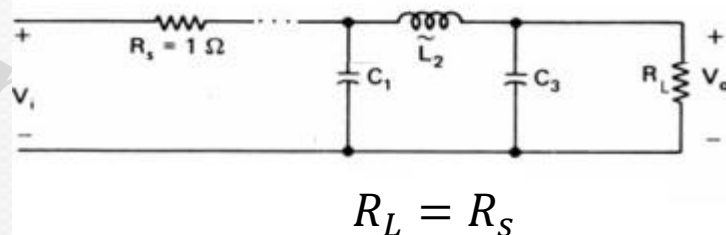
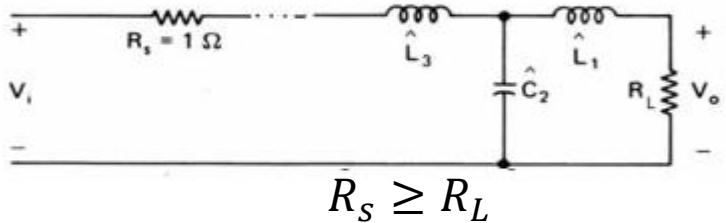
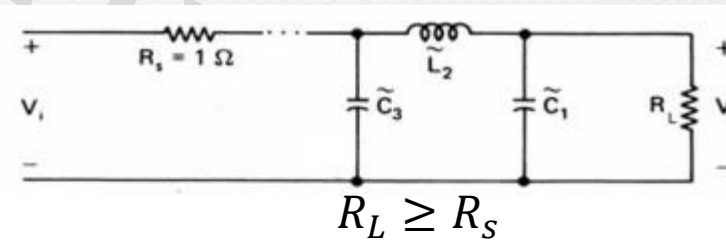
$$\lambda = \left| \frac{R_L - 1}{R_L + 1} \right|^{\frac{1}{n}}$$

$$\alpha_i = \nu \sin \frac{\pi i}{\nu n} \quad \tilde{C}_1 = \frac{\alpha_1}{R_L (1 - \lambda)}$$

$$\beta_i = \nu \cos \frac{\pi i}{\nu n} \quad \hat{L}_1 = \frac{\alpha_1 R_L}{1 - \lambda}$$

$$C_m = \nu \sin \frac{(\nu m - 1)\pi}{\nu n}$$

$$L_m = \nu \sin \frac{(\nu m - 1)\pi}{\nu n}$$



مقدمه

فیلتر باترورث  
(پیاده سازی)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



**مثال:** یک فیلتر نرمالیزه پایین گذر باترورث با مشخصات زیر طراحی کنید.

الف) در باند عبور  $|H(j0.5)|^2 > 0.9$

ب) در باند توقف  $|H(j2)|^2 < 0.01$

ب) مقاومت ورودی و خروجی به ترتیب  $R_L = 1$  و  $R_S = 1$

**حل:** ابتدا باید درجه فیلتر را بیابیم. درجه فیلتر بر اساس مشخصه باند عبور و باند توقف بدست می آید:

$$(1): |H(j0.5)|^2 > 0.9 \rightarrow \frac{1}{1 + 0.5^{2n}} > 0.9 \rightarrow 1 + 0.5^{2n} < \frac{1}{0.9} = 1.11$$

$$\rightarrow 0.5^{2n} < 0.11 \rightarrow \log_{0.5} 0.5^{2n} < \log_{0.5} 0.11$$

$$\rightarrow 2n > 3.18 \rightarrow n > 1.59 \rightarrow n = 2$$

$$\rightarrow n = 4$$

$$(2): |H(j2)|^2 < 0.01 \rightarrow \frac{1}{1 + 2^{2n}} < 0.01 \rightarrow 1 + 2^{2n} > \frac{1}{0.01} = 100$$

$$\rightarrow 2^{2n} > 99 \rightarrow \log_2 2^{2n} > \log_2 99$$

$$\rightarrow 2n > 6.62 \rightarrow n > 3.31 \rightarrow n = 4$$



چون هر دو مقاومت ورودی و خروجی ۱ هستند و با هم برابر هستند از هر سه ساختار میتوان استفاده کرد.

$$C_m = 2 \sin \frac{(2m-1)\pi}{2n}$$

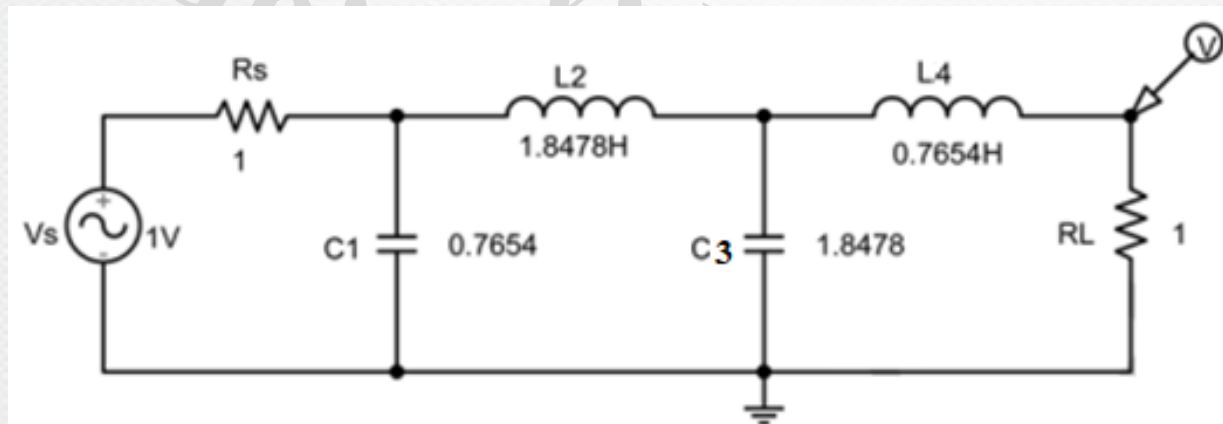
$$L_m = 2 \sin \frac{(2m-1)\pi}{2n}$$

$$C_1 = 2 \sin \frac{2 \times 1 - 1}{2 \times 4} \pi = 2 \sin \frac{\pi}{8} = 0.7654$$

$$L_2 = 2 \sin \frac{2 \times 2 - 1}{2 \times 4} \pi = 2 \sin \frac{3\pi}{8} = 1.8478$$

$$C_3 = 2 \sin \frac{2 \times 3 - 1}{2 \times 4} \pi = 2 \sin \frac{5\pi}{8} = 1.8478$$

$$L_4 = 2 \sin \frac{2 \times 4 - 1}{2 \times 4} \pi = 2 \sin \frac{7\pi}{8} = 0.7654$$



مقدمه

فیلتر باترورث  
(پیاده سازی)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

**مثال:** یک فیلتر نرمالیزه پایین گذر باترورث طراحی کنید که در باند عبور با ازای  $\omega < 0.5 \text{ rad/sec}$  حداکثر تضعیف ۰.۵ dB و در باند توقف به ازای  $\omega > 4 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف ۲۰ dB باشد.

الف) به ازای  $R_L = 2 R_S$

ب) به ازای  $R_L = 0.5 R_S$

**حل:** ابتدا باید درجه فیلتر را بیابیم. درجه فیلتر بر اساس مشخصه باندعبور و باند توقف بدست می آید:

$$(1): -10 \log_{10} |H(j0.5)|^2 < 0.5 \rightarrow 1 + 0.5^{2n} < 10^{\frac{0.5}{10}} \rightarrow 1 + 0.5^{2n} < 1.1220$$

$$\rightarrow 0.5^{2n} < 0.1220 \rightarrow \log_{0.5} 0.5^{2n} > \log_{0.5} 0.1220$$

$$\rightarrow 2n > 3.0350 \rightarrow n > 1.5175 \rightarrow n = 2$$

$$\rightarrow n = 2$$

$$(2): -10 \log_{10} |H(j4)|^2 > 20 \rightarrow 1 + 4^{2n} > 10^{\frac{20}{10}} \rightarrow 1 + 4^{2n} > 100$$

$$\rightarrow 4^{2n} > 99 \rightarrow \log_2 4^{2n} > \log_2 99$$

$$\rightarrow 4n > 6.62 \rightarrow n > 1.657 \rightarrow n = 2$$

مقدمه

فیلتر باترورث  
(پایاده سازی)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

(الف) چون  $R_L = 2R_S$  است پس باید از ساختار اول ( $R_L \geq R_S$ ) استفاده کرد (مقادیر  $\tilde{C}$  و  $\tilde{L}$ ). با فرض  $R_S = 1$  داریم:

$$\lambda = \left| \frac{R_L - 1}{R_L + 1} \right|^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{2 - 1}{2 + 1} \right|^{\frac{1}{2}} = 0.58$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{\alpha_1}{R_L(1 - \lambda)} = \frac{2 \sin \frac{\pi \times 1}{2 \times 2}}{R_L(1 - \lambda)} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4}}{2(1 - 0.58)} = 1.67 \text{ F}$$

$$m = 1 \rightarrow \tilde{C}_1 \tilde{L}_2 = \frac{\alpha_{4 \times 1 - 3} \alpha_{4 \times 1 - 1}}{1 - \lambda \beta_{4 \times 1 - 2} + \lambda^2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\gamma m - 1} \tilde{L}_{\gamma m} \{ \hat{L}_{\gamma m - 1} \hat{C}_{\gamma m} \} &= \frac{\alpha_{\gamma m - 3} \alpha_{\gamma m - 1}}{1 - \lambda \beta_{\gamma m - 2} + \lambda^2} \\ \tilde{C}_{\gamma m + 1} \tilde{L}_{\gamma m} \{ \hat{L}_{\gamma m + 1} \hat{C}_{\gamma m} \} &= \frac{\alpha_{\gamma m - 1} \alpha_{\gamma m + 1}}{1 - \lambda \beta_{\gamma m} + \lambda^2} \\ \lambda &= \left| \frac{R_L - 1}{R_L + 1} \right|^{\frac{1}{n}} \\ \alpha_i &= \gamma \sin \frac{\pi i}{\gamma n} & \tilde{C}_1 &= \frac{\alpha_1}{R_L(1 - \lambda)} \\ \beta_i &= \gamma \cos \frac{\pi i}{\gamma n} & \hat{L}_1 &= \frac{\alpha_1 R_L}{1 - \lambda} \end{aligned}$$

برای محاسبه مقدار سلف به مقادیر  $\alpha_1$ ،  $\alpha_3$  و  $\beta_2$  نیاز داریم:

$$\alpha_1 = 2 \sin \frac{\pi}{2 \times 2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha_3 = 2 \sin \frac{\pi \times 3}{2 \times 2} = \sqrt{2}$$

$$\beta_2 = 2 \cos \frac{\pi \times 2}{2 \times 2} = 0$$

مقدمه

فیلتر باترورث  
(پیاده سازی)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

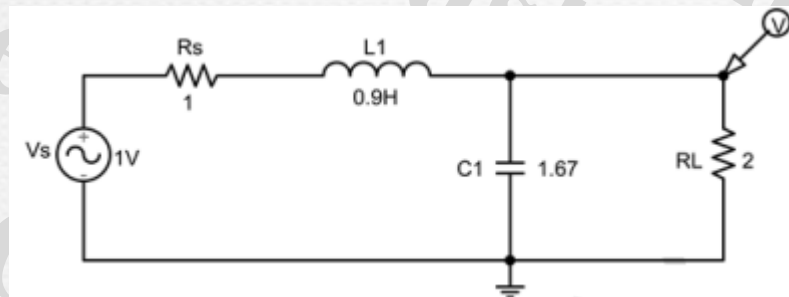
تبدیل فیلترها



با جایگذاری مقادیر در رابطه مرتبط با سلف داریم:

$$\tilde{C}_1 \tilde{L}_2 = \frac{\alpha_{4 \times 1-3} \alpha_{4 \times 1-1}}{1 - \lambda \beta_{4 \times 1-2} + \lambda^2} \rightarrow \tilde{C}_1 \tilde{L}_2 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1 - 0.58 \times 0 + 0.58^2}$$

$$\tilde{L}_2 = \frac{1}{1.67} \frac{2}{1 + 0.58^2} = 0.9 \text{ H}$$



مقدمه

فیلتر باترورث  
(پیاده سازی)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

(ب) چون  $R_L = 0.5R_S$  است پس باید از ساختار دوم ( $R_L \leq R_S$ ) استفاده کرد (مقادیر  $\hat{C}$ ). با فرض  $R_S = 1$  داریم:

$$\lambda = \left| \frac{R_L - 1}{R_L + 1} \right|^2 = \left| \frac{0.5 - 1}{0.5 + 1} \right|^2 = 0.58$$

$$\hat{L}_1 = \frac{\alpha_1 R_L}{(1 - \lambda)} = 0.5 \frac{2 \sin \frac{\pi \times 1}{2 \times 2}}{(1 - \lambda)} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{4}}{(1 - 0.58)} = 1.67 \text{ H}$$

$$m = 1 \rightarrow \hat{L}_1 \hat{C}_2 = \frac{\alpha_{4 \times 1 - 3} \alpha_{4 \times 1 - 1}}{1 - \lambda \beta_{4 \times 1 - 2} + \lambda^2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\gamma m-1} \tilde{L}_{\gamma m} \{\hat{L}_{\gamma m-1} \hat{C}_{\gamma m}\} &= \frac{\alpha_{\gamma m-3} \alpha_{\gamma m-1}}{1 - \lambda \beta_{\gamma m-2} + \lambda^2} \\ \tilde{C}_{\gamma m+1} \tilde{L}_{\gamma m} \{\hat{L}_{\gamma m+1} \hat{C}_{\gamma m}\} &= \frac{\alpha_{\gamma m-1} \alpha_{\gamma m+1}}{1 - \lambda \beta_{\gamma m} + \lambda^2} \\ \lambda &= \left| \frac{R_L - 1}{R_L + 1} \right|^{\frac{1}{n}} \\ \alpha_i &= 2 \sin \frac{\pi i}{\gamma n} & \tilde{C}_1 &= \frac{\alpha_1}{R_L (1 - \lambda)} \\ \beta_i &= 2 \cos \frac{\pi i}{\gamma n} & \hat{L}_1 &= \frac{\alpha_1 R_L}{1 - \lambda} \end{aligned}$$

برای محاسبه مقدار سلف به مقادیر  $\alpha_1$ ،  $\alpha_3$  و  $\beta_2$  نیاز داریم:

$$\alpha_1 = 2 \sin \frac{\pi}{2 \times 2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha_3 = 2 \sin \frac{\pi \times 2}{2 \times 2} = \sqrt{2}$$

$$\beta_2 = 2 \cos \frac{\pi \times 2}{2 \times 2} = 0$$

مقدمه

فیلتر باترورث  
(پیاده سازی)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

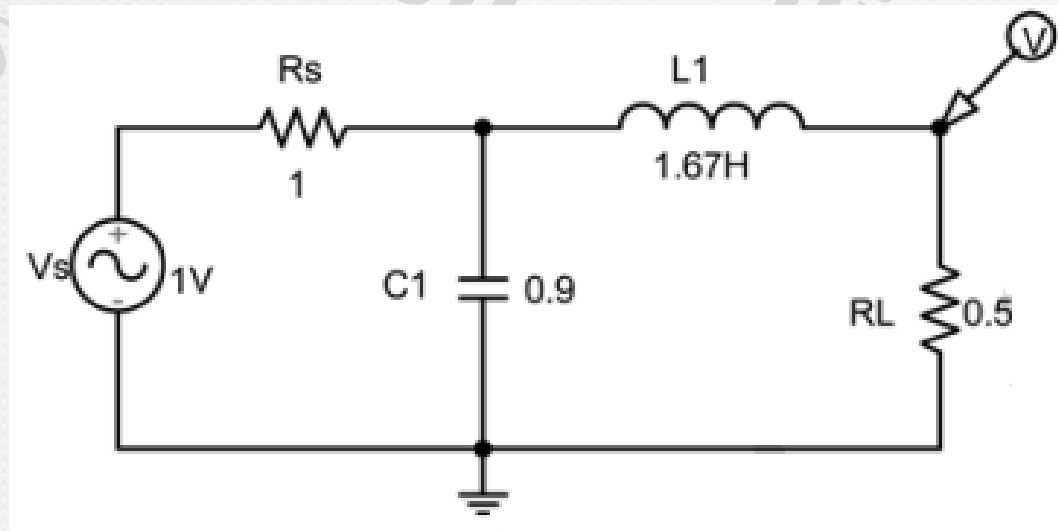
تبدیل فیلترها



با جایگذاری مقادیر در رابطه مرتبط با سلف داریم:

$$\hat{L}_1 \hat{C}_2 = \frac{\alpha_{4 \times 1-3} \alpha_{4 \times 1-1}}{1 - \lambda \beta_{4 \times 1-2} + \lambda^2} \rightarrow \hat{L}_1 \hat{C}_2 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1 - 0.58 \times 0 + 0.58^2}$$

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{1.67} \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1 + 0.58^2} = 0.9 \text{ F}$$



مقدمه

فیلتر باترورث  
(پیاده سازی)

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

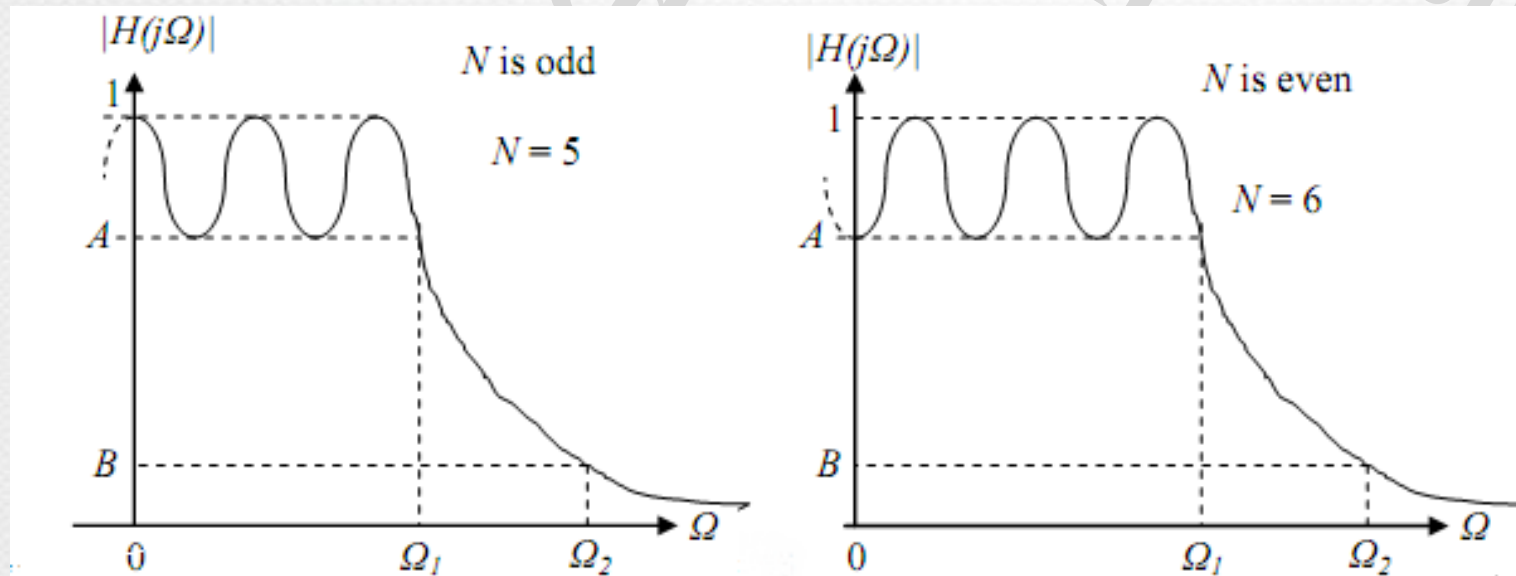
فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

## فیلتر چبی شف

- ❖ همان طور که مطرح شد، فیلتر باتروث ماکزیمم صافی را در باند عبور دارد.
- ❖ اما این فیلتر شیب افت مناسبی ندارد، به عبارت دیگر، باند گذر این فیلتر چندان باریک نیست.
- ❖ در فیلتر چبی شف افت از باند عبور به باند توقف **خیلی سریع تر از باتروث** است ولی در باند عبور رایپل هایی مشاهده می شود.
- ❖ تعداد رایپل ها در باند عبور برابر با درجه فیلتر است.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)}$$



مقدمه

فیلتر باتروث

فیلتر چبی شف  
(تعریف)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



## چند جمله ای چبی شف

تعریف: یک چند جمله ای درجه  $n$  چبی شف به صورت زیر تعریف می شود:

$$T_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega)$$

ثابت می کنیم که  $T_n(\omega)$  یک چند جمله ای بر حسب  $\omega$  است. فرض کنید  $x = \cos^{-1} \omega$  پس  $T_n(\omega) = \cos(nx)$

$$n = 0 \quad \rightarrow nx = 0 \rightarrow T_0(\omega) = \cos(0) = 1$$

$$n = 1 \quad \rightarrow nx = \cos^{-1} \omega \quad T_1(\omega) = \cos(x) = \cos(\cos^{-1} \omega) = \omega$$

$$n = 2 \quad \rightarrow nx = 2\cos^{-1} \omega \quad T_2(\omega) = \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 2\omega^2 - 1$$

$$n = 3 \quad \rightarrow nx = 3\cos^{-1} \omega \quad T_3(\omega) = \cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\omega^3 - 3\omega$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(چند جمله ای)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

## خواص چند جمله ای چبی شف

با توجه به تبدیل  $\cos((n+1)x) = 2 \cos nx \cos x - \cos(n-1)x$  میتوان یک رابطه بازگشتی به صورت زیر پیشنهاد داد

$$T_{n+1}(\omega) = 2\omega T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)$$

با داشتن  $T_0(x) = 1$  و  $T_1(x) = \omega$  میتوان بقیه جملات را یافت

۱- به ازای فرکانس های بزرگتر و یا کوچکتر از ۱ داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq T_n(\omega) \leq 1 & 0 \leq |\omega| \leq 1 \\ T_n(\omega) > 1 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

۲- به ازای  $\omega > 1$  چند جمله ای چبی شف به ازای تمام درجات  $n$  یک تابع افزایشی است.

۳- به ازای  $n$  فرد (زوج) چند جمله ای چبی شف یک تابع فرد (زوج) بر حسب  $\omega$  است.

۴- چند جمله ای چبی شف در فرکانس  $\omega = 0$  به ازای  $n$  های مختلف برابر است با:

$$|T_n(0)| = \begin{cases} 0 & n \text{ odd} \\ 1 & n \text{ even} \end{cases}$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(چند جمله ای)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

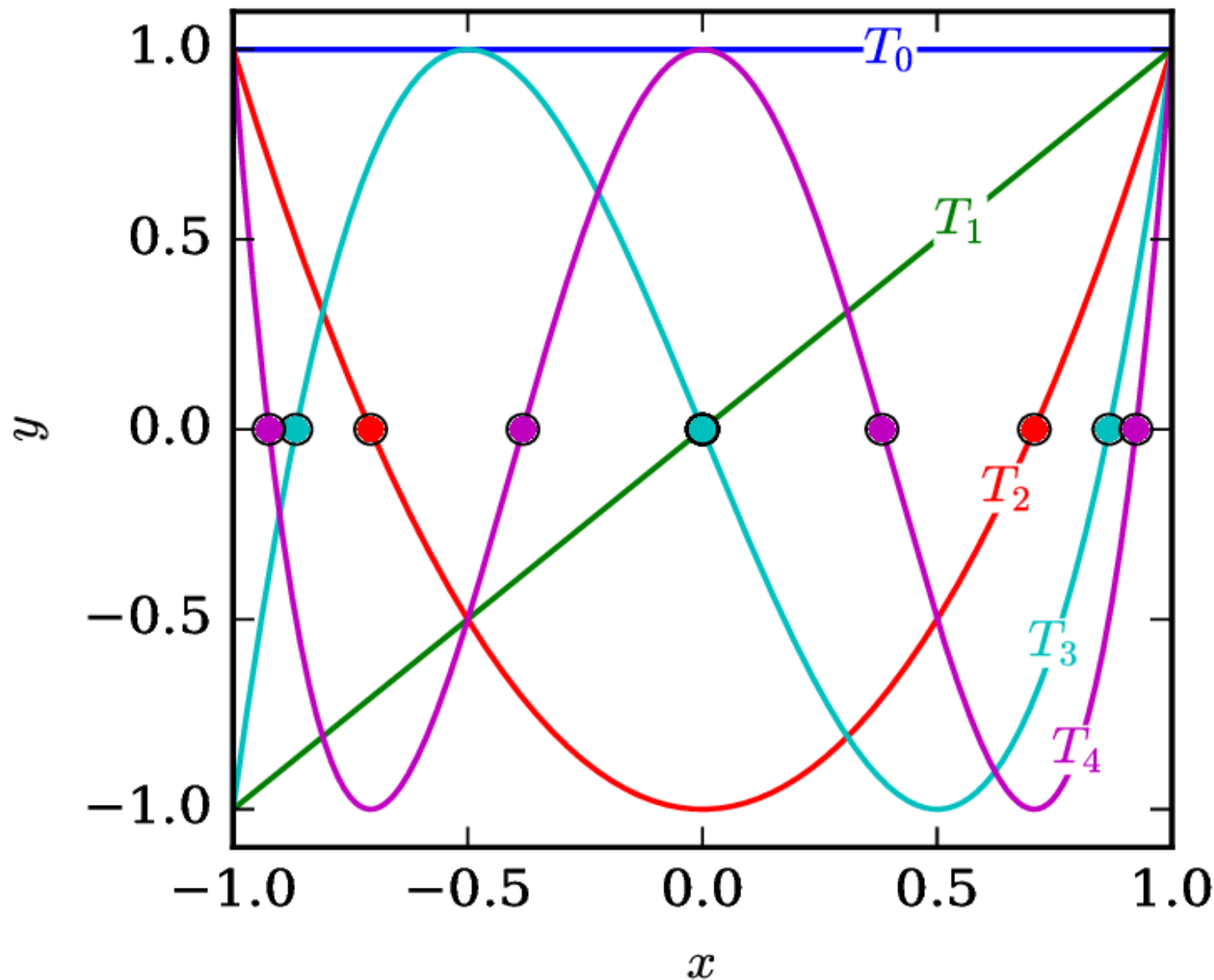
تبدیل فیلترها





دانشگاه خلیج فارس بوشهر

## خواص چند جمله ای چبی شف



مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(چند جمله ای)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



## خواص فیلتر چبی شف

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

**خاصیت ۱:** به ازای فرکانس های  $|\omega| \leq 1$ ،  $|H(j\omega)|^2$  بین دو مقدار ۱ و  $\frac{1}{1+\epsilon^2}$  تغییر می کند.

**خاصیت ۲:** به ازای فرکانس های  $|\omega| > 1$ ،  $|H(j\omega)|^2$  یک تابع نزولی است و به ازای فرکانس های  $\omega \gg 1$  شیب افت فیلتر  $20n$  dB/decade است.

**خاصیت ۳:** تابع مربع فیلتر چبی شف خواص زیر را دارد:

$$|H(j1)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(1)} = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

$$|H(j0)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(0)} = \begin{cases} 1 & n \text{ odd} \\ \frac{1}{1 + \epsilon^2} & n \text{ even} \end{cases}$$

**خاصیت ۴:** پارامتر  $\epsilon$  بر حسب ماکزیمم دامنه رایپل در باند عبور برابر است با:

$$A_{max} = -\log_{10} \frac{1}{1 + \epsilon^2} = 10 \log_{10} 1 + \epsilon^2 \rightarrow \epsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(خواص)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



**مثال:** درجه یک فیلتر نرمالیزه پایین گذر چبی شف را بیابید به طوری که در باند توقف به ازای  $\omega > 4 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف ۴۰ dB باشد و رایپل مجاز در محدوده باند عبور 1 dB باشد.

**حل:** ابتدا باید درجه فیلتر را بیابیم. درجه فیلتر بر اساس رایپل باند عبور و باند توقف بدست می آید:

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1} = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} = 0.5088$$

$$-10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(4)} \right) \geq 40 \rightarrow 10^{\frac{40}{10}} \leq 1 + \epsilon^2 T_n^2(4) = 1 + \epsilon^2 \cos^2(n \cos^{-1} 4)$$

$$1 + \epsilon^2 \cos^2(n \cos^{-1} 4) \geq 10^4 \rightarrow \cos^2(n \cos^{-1}(4)) \geq \frac{10^4 - 1}{0.5088^2} = 386278.45$$

$$\cos(n \cos^{-1}(4)) \geq 196.53 \rightarrow n \geq \frac{\cos^{-1}(196.95)}{\cos^{-1}(4)} \rightarrow n \geq 2.90 \rightarrow n = 3$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(مثال)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

**مثال:** حداقل درجه یک فیلتر نرمالیزه پایین گذر را بیابید به طوری که به ازای فرکانس  $\omega \geq 1/16$  لااقل ۴۰ دسی بل تضعیف داشته باشیم:

(الف) پیاده سازی با ساختار باترورث

(ب) پیاده سازی با ساختار چبی شف با رایپل ۳ dB در باند عبور

**حل (الف):** در فیلتر باترورث داریم:

$$-10 \log_{10} \frac{1}{1 + (1/16)^{2n}} \geq 40 \rightarrow 1 + (1/16)^{2n} \geq 10^{\frac{40}{10}} = 10000$$

$$\rightarrow (1/16)^n \geq 9999 \rightarrow 2n \geq \log_{1/16} 9999 \rightarrow n \geq 31.03$$

حداقل درجه فیلتر در ساختار باترورث باید  $n = 32$  باشد

**حل (ب):** در فیلتر چبی شف داریم:

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1} \approx 1 \quad n \geq \frac{\cos^{-1}(10^{\frac{\alpha}{10}} - 1)}{\cos^{-1}(1/16)} = 9.48$$

حداقل درجه فیلتر در ساختار چبی شف باید  $n = 10$  باشد

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(مثال)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



## تابع تبدیل چبی شف

- تابع تبدیل فیلتر چبی شف نیز مانند تابع تبدیل فیلتر باترورث تمام قطب است.
- قطبهای فیلتر چبی شف بر روی یک بیضی به مرکزیت مبدا فرکانسی قرار دارند.
- هر چه بیضی به محور موهومی نزدیک تر شود، دامنه نوسانات در باند عبور بیشتر می شود و بیضی باریک تر می شود.

محل قطبهای تابع اندازه باترورث بر روی صفحه فرکانسی:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cos^2(ncos^{-1} \omega)}$$

$$H(s)H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cos^2 \left( nc \cos^{-1} \frac{s}{j} \right)}$$

پس قطبهای تابع تبدیل از مساوی صفر قرار دادن مخرج عبارت بالا و تخصیص ریشه های سمت چپ محور  $j\omega$  به  $H(s)$  حاصل می شود.

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(تابع تبدیل)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(تابع تبدیل)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

$$1 + \epsilon^2 \cos^2 \left( n \cos^{-1} \frac{s}{j} \right) = 0 \rightarrow$$

$$s_k = \underbrace{-\sin \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right) \sinh^{-1} \left( \frac{1}{n} \sinh^{-1} 1/\epsilon \right)}_{\sigma_k} + j \underbrace{\left( -\cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right) \cosh^{-1} \left( \frac{1}{n} \sinh^{-1} 1/\epsilon \right) \right)}_{\omega_k}$$

با توجه به اینکه  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  است پس داریم:

$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^{-1} \left( \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right)^2} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^{-1} \left( \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right)^2} = \sin^2 \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right) + \cos^2 \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right) = 1$$

اگر  $a = \sinh^{-1} \left( \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right)$  و  $b = \cosh^{-1} \left( \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right)$  داریم:

$$\frac{\sigma_k^2}{a^2} + \frac{\omega_k^2}{b^2} = 1$$

معادله یک بیضی به مرکز مبدا و شعاع های  $a, b$





دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مقدمه

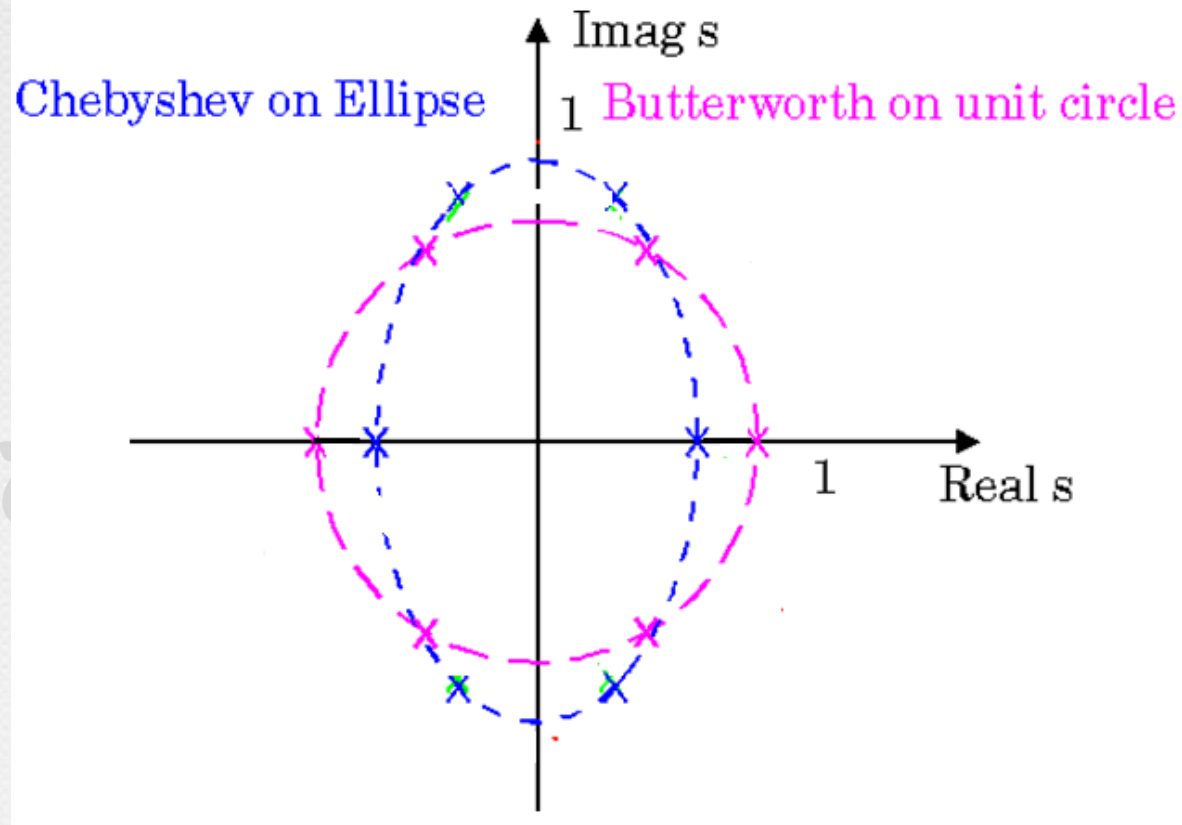
فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(تابع تبدیل)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

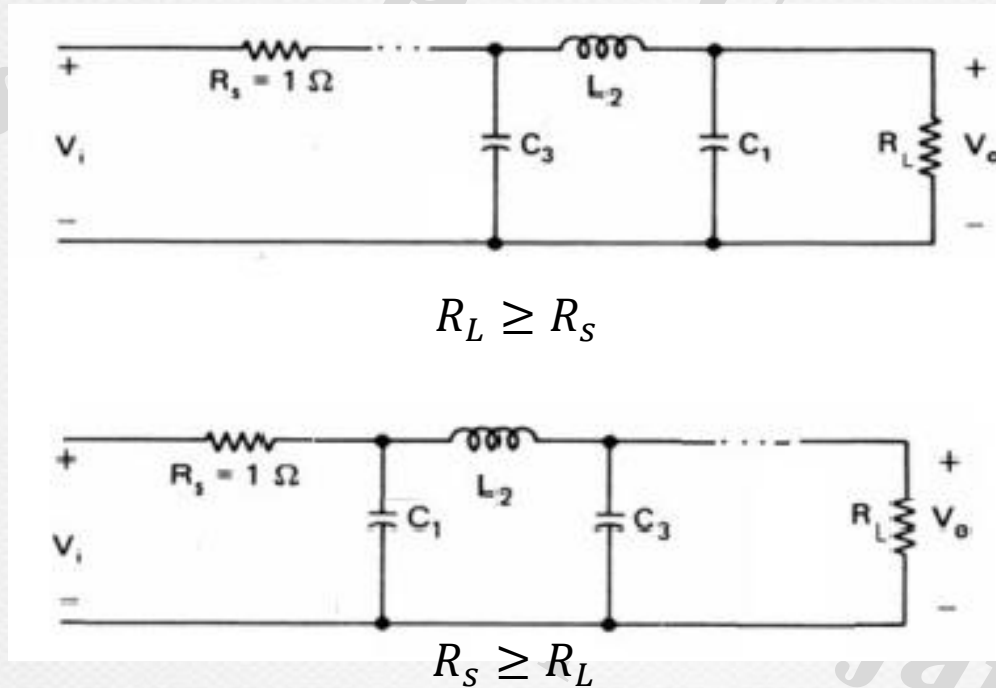


با تخصیص قطبهای سمت چپ به  $H(s)$  و سمت راست به  $H(-s)$  داریم:

$$H(s) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{s - s_k}, \quad s_k = \sigma_k + j\omega_k$$

## پیاده سازی فیلتر چبی شف

- ۱- چند جمله ای مخرج چبی شف نیز یک چند جمله ای هرویتز است.
- ۲- تمام صفرهای انتقال در مخرج قرار دارد و روش سنتز کائور ۱ می باشد. چون روش سنتز کائور ۱ است پس سلفها در شاخه سری و خازن ها در شاخه موازی قرار دارند. با استفاده از ساختار دارلینگتون دو حالت رخ می دهد: ( $n$  درجه فیلتر)



مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(پیاده سازی)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها





دانشگاه خلیج فارس بوشهر

## پیاده سازی فیلتر چبی شف

$$\alpha = \begin{cases} \frac{4R_L}{(R_L + 1)^2} & n \text{ فرد} \\ \frac{4R_L}{(R_L + 1)^2} [1 + \epsilon^2] \leq 1 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\alpha_i = 2 \sin \frac{\pi i}{2n}$$

$$\beta_i = 2 \cos \frac{\pi i}{2n}$$

$$\gamma = \left[ \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\delta = \left[ \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2}} + \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2} + 1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$x = \gamma - \frac{1}{\gamma}$$

$$y = \delta - \frac{1}{\delta}$$

$$C_{2m-1} L_{2m} = \frac{4\alpha_{4m-3} \alpha_{4m-1}}{b_{2m-1}(x, y)}$$

$$C_{2m+1} L_{2m} = \frac{4\alpha_{4m-1} \alpha_{4m+1}}{b_{2m}(x, y)}$$

$$C_1 = \begin{cases} \frac{2\alpha_1}{(x-y)R_L} & R_L \geq R_s \\ \frac{2\alpha_1}{(x-y)} & R_L \leq R_s \end{cases}$$

$$b_i(x, y) = x^2 - \beta_{2i}xy + y^2 + \alpha_{2i}^2$$

$$m = \begin{cases} 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} & n \text{ فرد} \\ 1, 2, \dots, \frac{n}{2} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(پیاده سازی)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

**مثال:** یک فیلتر نرمالیزه پایین گذر چبی شف طراحی کنید که ماکزیمم رایپل باند عبور ۱ dB باشد و در باند توقف به ازای  $\omega > 4 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف ۴۰ dB باشد. مقاومت بار و مقاومت منبع را برابر با ۱ اهم فرض کنید.

**حل:** ابتدا باید درجه فیلتر را بیابیم. درجه فیلتر بر اساس مشخصه باند توقف و رایپل باند عبور بدست می آید:

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1} = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} = 0.5088$$

$$n \geq \frac{\cos^{-1}\left(\sqrt{10^{\frac{\alpha}{10}} - 1}\right)}{\cos^{-1}(\omega_c)} \rightarrow n \geq \frac{\cos^{-1}\left(\sqrt{10^{\frac{40}{10}} - 1}\right)}{\cos^{-1}(4)} \rightarrow n \geq 2.895 \rightarrow n = 3$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(مثال)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها





دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(پیاده سازی)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

$$a = \frac{4R_L}{(R_L + 1)^2} = \frac{4}{(1 + 1)^2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\alpha_i = 2 \sin \frac{\pi i}{2n} = 2 \sin \frac{\pi i}{6} \rightarrow A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5] = [1 \ \sqrt{3} \ 2 \ \sqrt{3} \ 1]$$

$$\beta_i = 2 \cos \frac{\pi i}{2n} = 2 \cos \frac{\pi i}{6} \rightarrow B = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4] = [\sqrt{3} \ 1 \ 0 \ -1]$$

$$\gamma = \left[ \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ \frac{1}{0.5088} + \sqrt{\frac{1}{0.5088^2} + 1} \right]^{\frac{1}{3}} = 1.61$$

$$\delta = \left[ \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2}} + \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2} + 1} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ \sqrt{\frac{1-1}{0.5088^2}} + \sqrt{\frac{1-1}{0.5088^2} + 1} \right]^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$x = \gamma - \frac{1}{\gamma} = 1.61 - \frac{1}{1.61} = 1 \quad y = \delta - \frac{1}{\delta} = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

$$C_1 = \frac{2 \times 1}{(1 - 0)} = 2$$

$$m = 1 \rightarrow C_1 L_2 = \frac{4\alpha_1 \alpha_3}{b_1(x, y)} = \frac{4\alpha_1 \alpha_3}{x^2 - \beta_2 xy + y^2 + \alpha_2^2}$$

$$\rightarrow C_1 L_2 = \frac{4 \times 1 \times 2}{1^2 - 1(1 \times 0) + 0^2 + 3} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\rightarrow L_2 = \frac{2}{C_1} = 1 H$$

$$m = 1 \rightarrow C_3 L_2 = \frac{4\alpha_3 \alpha_5}{b_2(x, y)} = \frac{4\alpha_3 \alpha_5}{x^2 - \beta_4 xy + y^2 + \alpha_4^2}$$

$$\rightarrow C_3 L_2 = \frac{4 \times 1 \times 2}{1^2 - 1(1 \times 0) + 0^2 + 3} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\rightarrow C_3 = \frac{2}{L_2} = 2 F$$

$$C_{2m-1} L_{2m} = \frac{4\alpha_{4m-3} \alpha_{4m-1}}{b_{2m-1}(x, y)}$$

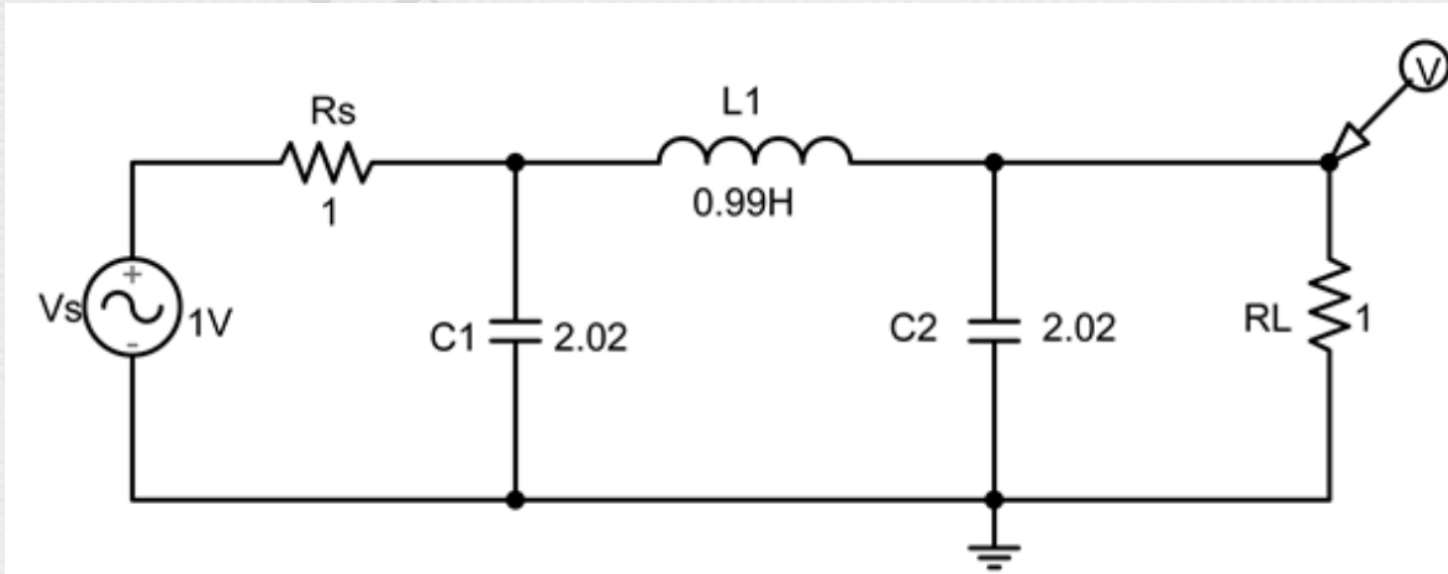
$$C_{2m+1} L_{2m} = \frac{4\alpha_{4m-1} \alpha_{4m+1}}{b_{2m}(x, y)}$$

$$C_1 = \begin{cases} \frac{2\alpha_1}{(x-y)R_L} & R_l \geq R_s \\ \frac{2\alpha_1}{(x-y)} & R_l \leq R_s \end{cases}$$

$$b_i(x, y) = x^2 - \beta_{2i} xy + y^2 + \alpha_{2i}^2$$

$$m = \begin{cases} 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} & \text{فرد } n \\ 1, 2, \dots, \frac{n}{2} & \text{زوج } n \end{cases}$$





مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(پیاده سازی)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

**مثال:** یک فیلتر نرمالیزه پایین گذر چبی شف طراحی کنید که ماکزیمم رایپل باند عبور ۱ dB باشد و در باند توقف به ازای  $\omega > 6 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف ۲۰ dB باشد. مقاومت بار ۱/۴ اهم مقاومت منبع ۱ اهم فرض کنید.

**حل:** ابتدا باید درجه فیلتر را بیابیم. درجه فیلتر بر اساس مشخصه باند توقف و رایپل باند عبور بدست می آید:

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1} = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} = 0.5088$$

$$n \geq \frac{\cos^{-1}\left(\sqrt{10^{\frac{\alpha}{10}} - 1}\right)}{\cos^{-1}(\omega_c)} \rightarrow n \geq \frac{\cos^{-1}\left(\sqrt{10^{\frac{20}{10}} - 1}\right)}{\cos^{-1}(6)} \rightarrow n \geq 1.479 \rightarrow n = 2$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(مثال)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها





دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف  
(پیاده سازی)

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

$$a = \frac{4 \times 0.25}{(R_L + 1)^2} (1 + \epsilon^2) = \frac{1}{(0.25 + 1)^2} (1 + 0.5088^2) = 0.8057$$

$$\alpha_i = 2 \sin \frac{\pi i}{2n} = 2 \sin \frac{\pi i}{4} \rightarrow A = [a_1 \ a_2 \ a_3] = [\sqrt{2} \ 2 \ \sqrt{2}]$$

$$\beta_i = 2 \cos \frac{\pi i}{2n} = 2 \cos \frac{\pi i}{4} \rightarrow B = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3] = [\sqrt{2} \ 0 \ -\sqrt{2}]$$

$$\gamma = \left[ \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ \frac{1}{0.5088} + \sqrt{\frac{1}{0.5088^2} + 1} \right]^{\frac{1}{2}} = 2.042$$

$$\delta = \left[ \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2}} + \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2} + 1} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ \sqrt{\frac{1-0.8057}{0.5088^2}} + \sqrt{\frac{1-0.8057}{0.5088^2} + 1} \right]^{\frac{1}{2}} = 1.479$$

$$x = \gamma - \frac{1}{\gamma} = 2.042 - \frac{1}{2.042} = 1.552 \quad y = \delta - \frac{1}{\delta} = 1.479 - \frac{1}{1.479} = 0.8038$$

$$a = \begin{cases} \frac{4R_L}{(R_L + 1)^2} & \text{فرد } n \\ \frac{4R_L}{(R_L + 1)^2} [1 + \epsilon^2] \leq 1 & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$\alpha_i = 2 \sin \frac{\pi i}{2n}$$

$$\beta_i = 2 \cos \frac{\pi i}{2n}$$

$$\gamma = \left[ \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\delta = \left[ \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2}} + \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2} + 1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$x = \gamma - \frac{1}{\gamma}$$

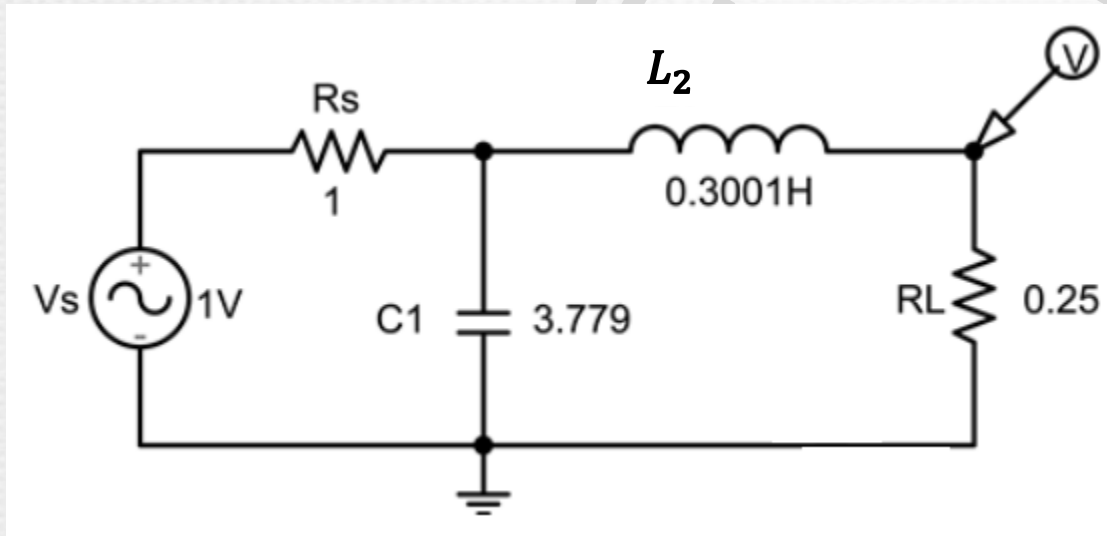
$$y = \delta - \frac{1}{\delta}$$

$$C_1 = \frac{2 \times \sqrt{2}}{(1.552 - 0.8038)} = 3.777$$

$$m = 1 \rightarrow C_1 L_2 = \frac{4\alpha_1 \alpha_3}{b_1(x, y)} = \frac{4\alpha_1 \alpha_3}{x^2 - \beta_2 xy + y^2 + \alpha_2^2}$$

$$\rightarrow C_1 L_2 = \frac{4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1.552^2 - 0(1.552 \times 0.8038) + 0.8038^2 + 4} = 1.138$$

$$\rightarrow L_2 = \frac{1.138}{3.777} = 0.300 \text{ H}$$



$$C_{2m-1} L_{2m} = \frac{4\alpha_{4m-3} \alpha_{4m-1}}{b_{2m-1}(x, y)}$$

$$C_{2m+1} L_{2m} = \frac{4\alpha_{4m-1} \alpha_{4m+1}}{b_{2m}(x, y)}$$

$$C_1 = \begin{cases} \frac{2\alpha_1}{(x-y)R_L} & R_L \geq R_s \\ \frac{2\alpha_1}{(x-y)} & R_L \leq R_s \end{cases}$$

$$b_i(x, y) = x^2 - \beta_{2i} xy + y^2 + \alpha_{2i}^2$$

$$m = \begin{cases} 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} & \text{فرد } n \\ 1, 2, \dots, \frac{n}{2} & \text{زوج } n \end{cases}$$



**تمرین:** یک فیلتر نرمالیزه پایین گذر چبی شف طراحی کنید که مشخصات زیر را داشته باشند:

الف) ماکزیمم رایپل باند عبور  $0.5 \text{ dB}$  باشد

ب) در باند توقف به ازای  $\omega > 6 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف  $60 \text{ dB}$  باشد.

پ) مقاومت بار  $1/2$  اهم مقاومت منبع  $1$  اهم فرض کنید.

Persian Gulf University of  
Bushehr  
Presented by: Dr.Hojat  
Ghimatgar

## فیلتر چبی شف معکوس

- ❖ همان طور که دیدیم فیلتر چبی شف، افت فیلتر خوبی دارد ولی در باند عبور رایپل تولید می شود.
- ❖ فیلتر چبی شف معکوس، رایپل فیلتر را به باند توقف منتقل می کند.

فرض کنید فیلتر چبی شف معکوس را با  $|H(j\omega)|^2$  و فیلتر چبی شف را با  $|\hat{H}(j\omega)|^2$  نشان دهیم:

$$|\hat{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)} \rightarrow 1 - |\hat{H}(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)} = \frac{\epsilon^2 T_n^2(\omega)}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

می دانیم که عبارت  $1 - |\hat{H}(j\omega)|^2$  یک فیلتر بالاگذر را نتیجه می دهد. با تغییر متغیر  $\omega_c/\omega \rightarrow \omega$  مجدد یک فیلتر پایین گذر حاصل می شود.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 T_n^2(\omega_c/\omega)}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega_c/\omega)}$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

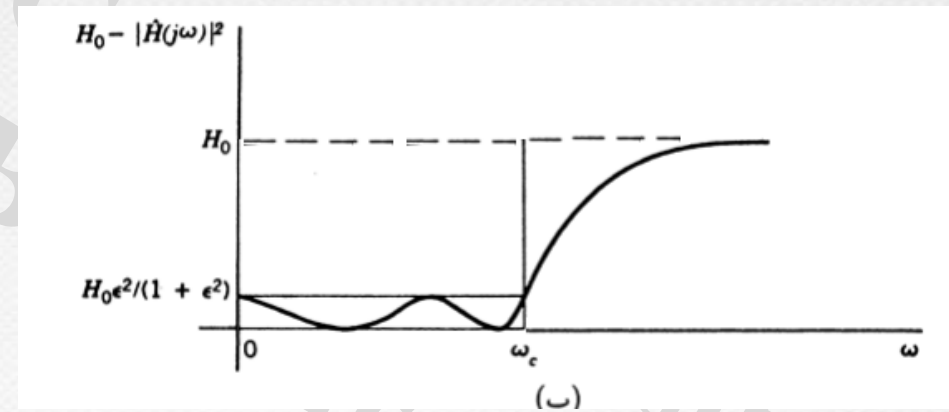
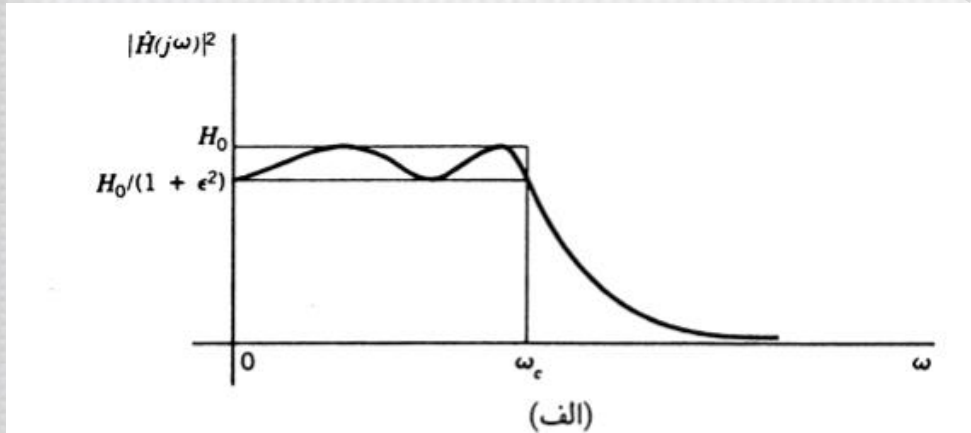
فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

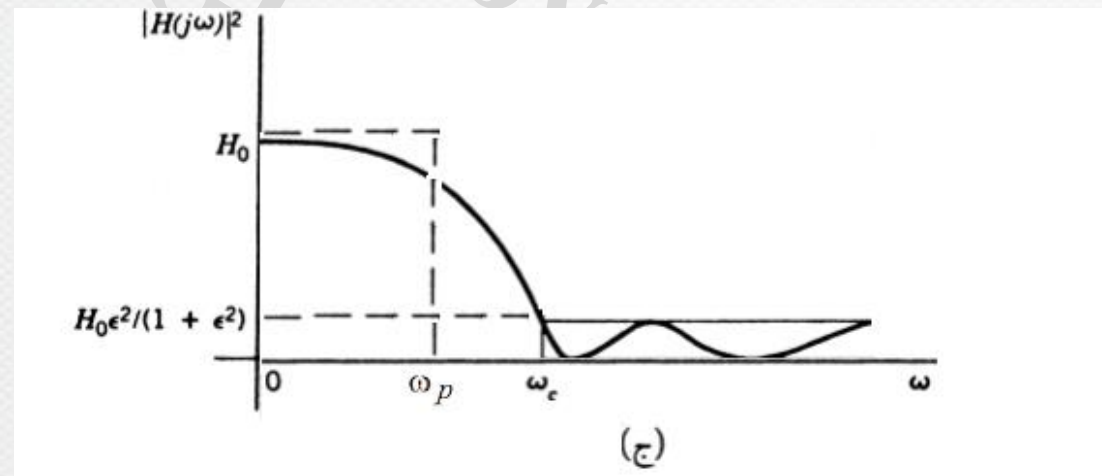


# فیلتر چبی شف معکوس

$$1 - |\hat{H}(j\omega)|^2$$



$$\omega \rightarrow \omega_c/\omega$$



مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

## محل صفرها و قطب های فیلتر چبی شف معکوس

این فیلتر برخلاف دو فیلتر قبلی، تمام قطب نیست. با فرض  $\omega_c = 1$  داریم:

$$H(s)H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{\epsilon^2 T_n^2\left(\frac{j}{s}\right)}{1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{j}{s}\right)}$$

صفرها:

$$T_n\left(\frac{j}{s_k}\right) = 0 \rightarrow \cos\left(ncos^{-1}\frac{j}{s_k}\right) = 0 \rightarrow cos^{-1}\frac{j}{s_k} = \frac{k\pi}{2n} \quad k = 1, 3, 5, \dots, 2n-1$$

$$s_k = j \sec\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \quad k = 1, 3, \dots, 2n-1$$

قطب ها:

قطب های تابع مشابه با فیلتر چبی شف به دست می آید با این تفاوت که به جای  $s = \frac{1}{s}$  قرار می گیرد

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



## فیلتر بیضوی

- ❖ فیلتر بیضوی هم در باند توقف و هم در باند عبور، دارای رایپل با دامنه یکسان است
- ❖ شیب افت فیلتر بیضوی به مراتب بهتر از فیلترهای قبلی است.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\omega)}$$

تابع  $R_n(\omega)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_n(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_k^2 - \omega^2)}{(1 - \omega_1^2 \omega^2)(1 - \omega_2^2 \omega^2) \dots (1 - \omega_k^2 \omega^2)}, & n = 2k + 1 \\ \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_k^2 - \omega^2)}{(1 - \omega_1^2 \omega^2)(1 - \omega_2^2 \omega^2) \dots (1 - \omega_k^2 \omega^2)}, & n = 2k \end{cases}$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

## محل صفرها و قطب های فیلتر بیضوی

فرکانس های  $\omega_i$  باید همگی در شرط  $0 < \omega_i < 1 \quad i = 1, 2, \dots, k$  صدق کنند.  
صفرها:

$$s = \pm \omega_i \quad i = 1, 2, \dots, k$$

قطب ها:

$$s = \pm \frac{1}{\omega_i} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

ویژگی فرکانس های بحرانی:

در تمام فرکانس های بحرانی (صفر و قطب ها) ویژگی زیر برقرار است:

$$|H(j\omega_i)|^2 = 1$$

$$\left| H\left(j \frac{1}{\omega_i}\right) \right|^2 = 0$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

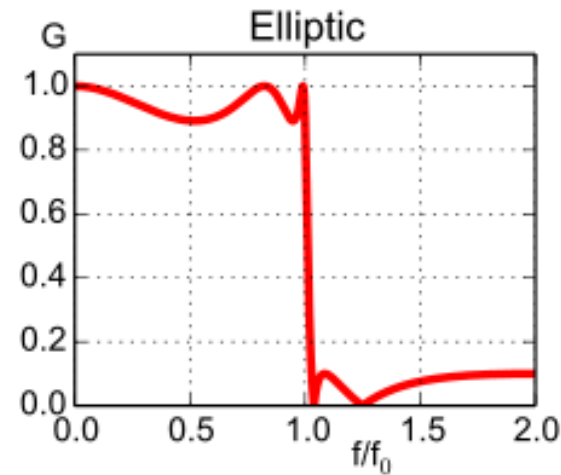
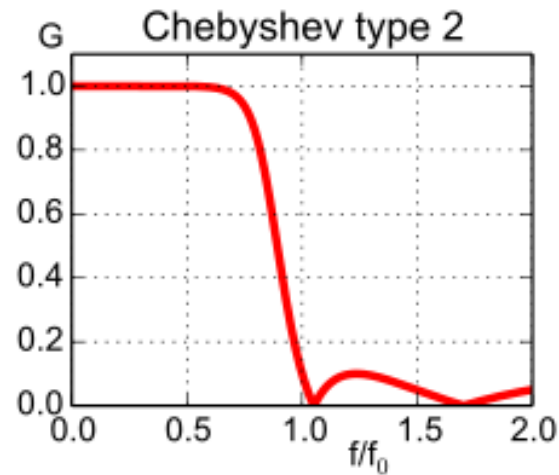
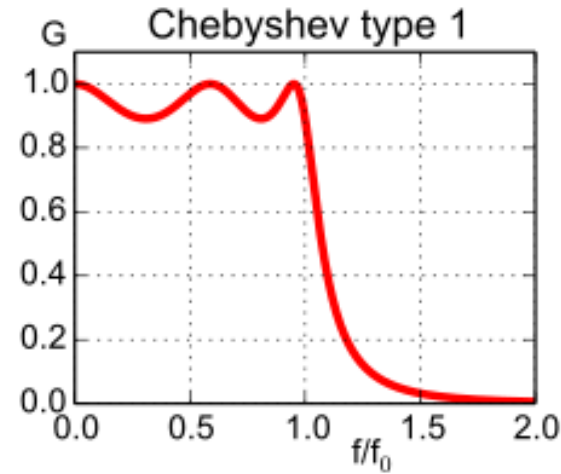
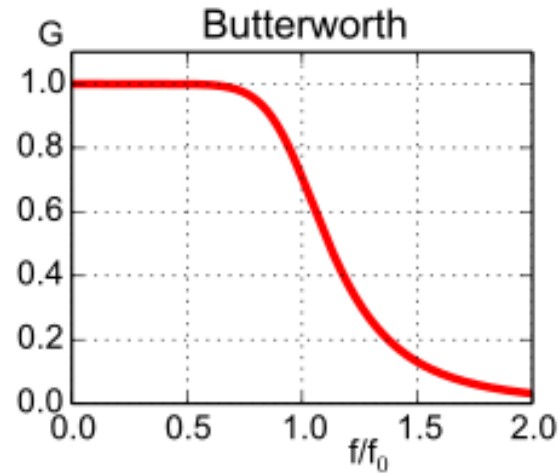
تبدیل فیلترها





دانشگاه خلیج فارس بوشهر

## مقایسه فیلترهای معرفی شده



مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

## تبدیل فیلتر پایین گذر نرمالیزه به فیلتر پایین گذر غیر نرمالیزه

❖ تمام فیلترهای معرفی شده تا اینجا، دارای فرکانس قطع  $1 \text{ rad/sec}$  هستند. به منظور تبدیل فیلترها به فیلترهای پایین گذر با فرکانس قطع  $\omega_c \neq 1$  (حالت کلی) از نگاشت زیر استفاده می کنیم:

$$\omega \rightarrow \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{یا} \quad s \rightarrow \frac{s}{\omega_c}$$

❖ مطابق با نگاشت بالا عناصر مداری به صورت زیر تغییر می کنند:

المان در مدار غیرنرمالیزه	بعد از نرمالیزه	قبل از نرمالیزه	المان در مدار نرمالیزه
مقاومت $R$	$R$	$R$	مقاومت $R$
سلف با اندکتنس $\frac{L}{\omega_c}$	$L \left( \frac{s}{\omega_c} \right) = \frac{L}{\omega_c} s$	$LS$	سلف با اندوکتنس $L$
خازن با ظرفیت $\frac{C}{\omega_c}$	$\frac{1}{C \left( \frac{s}{\omega_c} \right)} = \frac{1}{\frac{C}{\omega_c} s}$	$\frac{1}{Cs}$	خازن با ظرفیت $C$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



**مثال:** یک فیلتر پایین گذر چبی شف با مشخصات زیر طراحی کنید:

(الف) پهنای باند عبور  $1 \text{ Krad/sec}$

(ب) ماکزیمم رایپل باند عبور  $0.1 \text{ dB}$  باشد

(پ) در باند توقف به ازای  $\omega > 6 \text{ Krad/sec}$  حداقل تضعیف  $40 \text{ dB}$  باشد.

**حل: (مرحله اول)** ابتدا مشخصات فیلتر بالا را به یک فیلتر پایین گذر تبدیل می کنیم:

(الف) پهنای باند عبور  $1 \text{ rad/sec}$

(ب) ماکزیمم رایپل باند عبور  $0.1 \text{ dB}$  باشد

(پ) در باند توقف به ازای  $\omega > 6 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف  $40 \text{ dB}$  باشد.

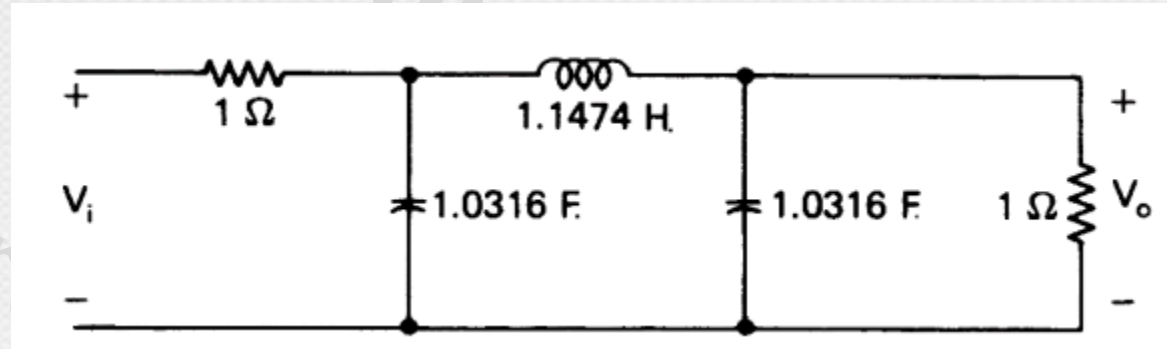
**(مرحله دوم)** حال فیلتر پایین گذر نرمالیزه بدست آمده را طراحی می کنیم:

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.5088$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \frac{\sqrt{10^4 - 1}}{0.5088}}{\cosh^{-1} 4} = 2.895 \rightarrow n = 3$$

تابع تبدیل نرمالیزه مرتبه سوم چبی شف برابر است با:

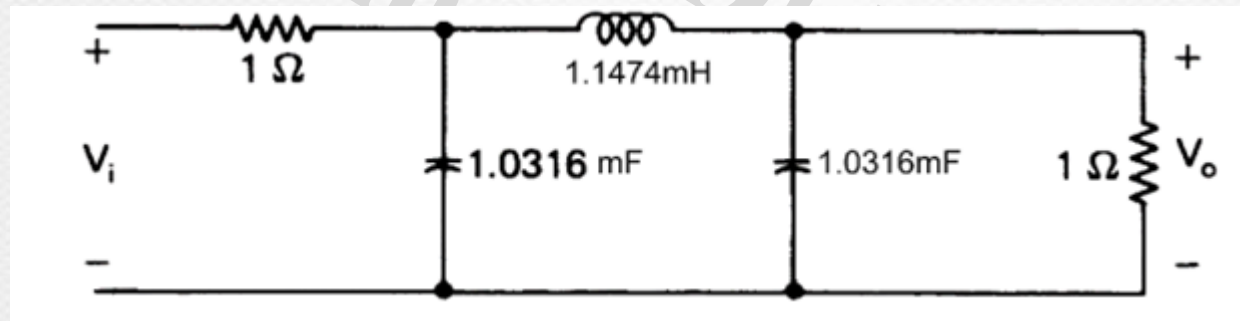
$$H_N(s) = \frac{1}{s^3 + 1.9388s^2 + 2.6295s + 1.6381}$$



حال با تبدیل  $s \rightarrow \frac{s}{10^3}$  فیلتر پایین گذر غیر نرمالیزه بدست می آید:

$$H_N(s) = \frac{10^9}{s^3 + 1.9388 \times 10^3 s^2 + 2.6295 \times 10^6 s + 1.6381 \times 10^9}$$

و با تغییر المان ها مشابه با جدول داده شده، ساختار فیلتر غیر نرمالیزه بدست می آید



مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



## تبدیل فیلتر پایین گذر نرمالیزه به فیلتر میان گذر غیر نرمالیزه

❖ به منظور تبدیل فیلتر پایین گذر نرمالیزه به یک فیلتر میان گذر غیر نرمالیزه از تبدیل زیر استفاده می شود:

$$\omega \rightarrow \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{B\omega} \quad \text{یا} \quad s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$$

که  $B$  پهنای باند فیلتر میان گذر و  $\omega_0$  فرکانس مرکزی این فیلتر است.

❖ مطابق با نگاشت بالا عناصر مداری به صورت زیر تغییر می کنند:

المان در مدار غیرنرمالیزه	بعد از نرمالیزه	قبل از نرمالیزه	المان در مدار نرمالیزه
مقاومت $R$	$R$	$R$	مقاومت $R$
سلف با اندکتانس $\frac{L}{B}$ سری شده با یک خازن به ظرفیت $B/L\omega_0^2$	$L \left( \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs} \right) = \frac{L}{B}s + \frac{1}{\frac{B}{L\omega_0^2}s}$	$LS$	سلف با اندوکتانس $L$
خازن با ظرفیت $\frac{C}{B}$ موازی شده با یک سلف به اندوکتانس $B/C\omega_0^2$	$\frac{1}{C \left( \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs} \right)} = \frac{1}{\frac{C}{B}s + \frac{1}{\frac{B}{C\omega_0^2}s}}$	$\frac{1}{Cs}$	خازن با ظرفیت $C$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

**مثال:** یک فیلتر میان گذر باترورث با مشخصات زیر طراحی کنید:

(الف) فرکانس مرکزی  $100 \text{ Krad/sec}$

(ب) پهنای باند  $20 \text{ Krad/sec}$

(پ) ماکزیمم تضعیف در باند عبور به ازای فرکانس های  $100 \text{ Krad/sec}$  و  $\omega_1 = 102.5 \text{ Krad/sec}$  برابر  $0.05 \text{ dB}$  باشد

(ت) در باند توقف به ازای  $\omega_2 > 120 \text{ Krad/sec}$  حداقل تضعیف  $10 \text{ dB}$  باشد.

**حل: (مرحله اول)** ابتدا مشخصات فیلتر را به کمک نگاشت  $\omega \rightarrow \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{B\omega}$  به یک فیلتر پایین گذر تبدیل می کنیم:

فیلتر میان گذر غیر نرمالیزه	فیلتر پایین گذر نرمالیزه
$\omega_0 = 100 \text{ Krad/sec}$	$\omega_0 = 0 \text{ rad/sec}$
$\omega_H = 110 \text{ Krad/sec}$	$\omega_H = 0.955 \text{ rad/sec}$
$\omega_L = 90 \text{ Krad/sec}$	$\omega_L = -1.056 \text{ rad/sec}$
$\omega_1 = 102.5 \text{ Krad/sec}$	$\omega_1 = 0.247 \text{ rad/sec}$
$\omega_2 = 120 \text{ Krad/sec}$	$\omega_2 = 1.833 \text{ rad/sec}$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



(پ) ماکزیمم تضعیف در باند عبور به ازای فرکانس های  $\omega < 0.247 \text{ rad/sec}$  برابر  $0.05 \text{ dB}$  باشد  
 (ت) در باند توقف به ازای  $\omega > 1.833 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف  $10 \text{ dB}$  باشد.

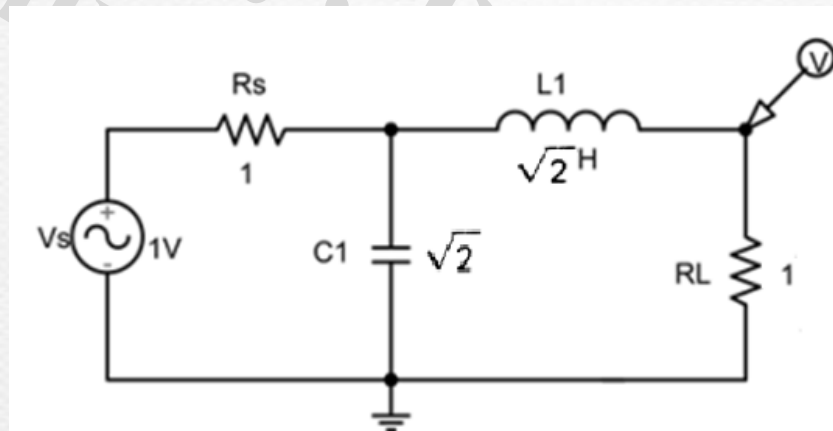
با اعمال دو شرط (پ) و (ت) میتوان فیلتر نرمالیزه پایین گذر را طراحی کرد:

$$-10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + (0.248)^n} \right) \leq 0.05 \rightarrow n \geq 1.594$$

$$\rightarrow n = 2$$

$$-10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + (1.833)^n} \right) \geq 10 \rightarrow n \geq 1.813$$

تابع باترورث مرتبه دوم و همچنین مدار این فیلتر به صورت زیر است:



$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

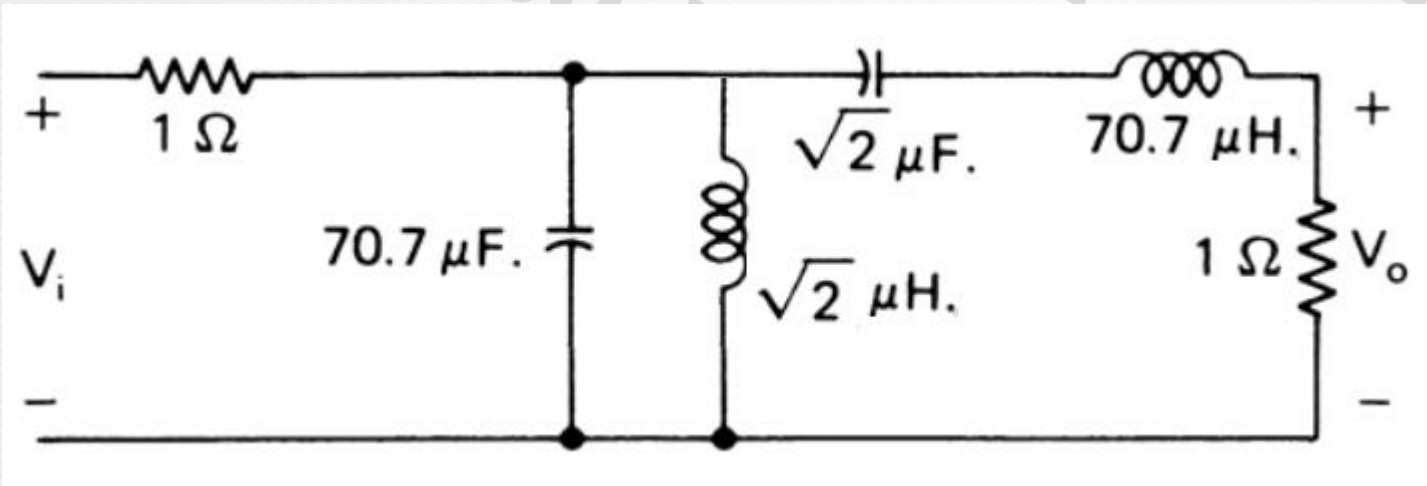
تبدیل فیلترها

حال با تبدیل  $s \rightarrow \frac{s+10^{10}}{2 \times 10^4 s}$  فیلتر پایین گذر غیر نرمالیزه بدست می آید:

$$H_N(s) = \frac{1}{\left(\frac{s+10^{10}}{2 \times 10^4 s}\right)^2 + \sqrt{2} \left(\frac{s+10^{10}}{2 \times 10^4 s}\right) + 1}$$

$$= \frac{4 \times 10^8 s^2}{(s+10^{10})^2 + \sqrt{2}(s+10^{10})2 \times 10^4 s + 1}$$

و با تغییر المان ها مشابه با جدول داده شده، ساختار فیلتر غیر نرمالیزه بدست می آید:





# تبدیل فیلتر پایین گذر نرمالیزه به فیلتر میان گذر غیر نرمالیزه

❖ به منظور تبدیل فیلتر پایین گذر نرمالیزه به یک فیلتر میان گذر غیر نرمالیزه از تبدیل زیر استفاده می شود:

$$\omega \rightarrow \frac{B\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{یا} \quad s \rightarrow \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}$$

که  $B$  پهنای باند فیلتر میان گذر و  $\omega_0$  فرکانس مرکزی این فیلتر است.

❖ مطابق با نگاشت بالا عناصر مداری به صورت زیر تغییر می کنند:

المان در مدار غیرنرمالیزه	بعد از نرمالیزه	قبل از نرمالیزه	المان در مدار نرمالیزه
مقاومت $R$	$R$	$R$	مقاومت $R$
سلف با اندکتانس $\frac{LB}{\omega_0^2}$ موازی شده با یک خازن به ظرفیت $1/LB$	$L \left( \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2} \right) = \frac{1}{\frac{1}{LB}s + \frac{LB}{\omega_0^2}s}$	$LS$	سلف با اندوکتانس $L$
خازن با ظرفیت $\frac{BC}{\omega_0^2}$ سری شده با یک سلف به اندوکتانس $1/CB$	$\frac{1}{C \left( \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2} \right)} = \frac{1}{\frac{BC}{\omega_0^2}s + \frac{1}{CB}s}$	$\frac{1}{Cs}$	خازن با ظرفیت $C$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

**مثال:** یک فیلتر میان نگذر باترورث با مشخصات زیر طراحی کنید:

(الف) فرکانس مرکزی  $1 \text{ Krad/sec}$

(ب) پهنای باند  $100 \text{ rad/sec}$

(پ) حداقل تضعیف در باند توقف به ازای فرکانس های  $1 \text{ Krad/sec}$  و  $\omega_1 = 1.01 \text{ Krad/sec}$  برابر  $40 \text{ dB}$  باشد

(ت) در باند عبور به ازای  $\omega_2 > 1.2 \text{ Krad/sec}$  حداکثر تضعیف  $0.1 \text{ dB}$  باشد.

**حل: (مرحله اول)** ابتدا مشخصات فیلتر را به کمک نگاشت  $s \rightarrow \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}$  یا  $\omega = \frac{Bs}{\omega_0^2 - \omega^2}$  به یک فیلتر پایین گذر تبدیل می

کنیم:

فیلتر میان نگذر	فیلتر نرمالیزه پایین گذر
$\omega_0 = 1000 \text{ rad/sec}$	$\omega_0 = \infty \text{ rad/sec}$
$\omega_H = 1050 \text{ rad/sec}$	$\omega_H = -1.024 \text{ rad/sec}$
$\omega_L = 950 \text{ rad/sec}$	$\omega_L = 0.975 \text{ rad/sec}$
$\omega_1 = 1010 \text{ rad/sec}$	$\omega_1 = 5.025 \text{ rad/sec}$
$\omega_2 = 1200 \text{ rad/sec}$	$\omega_2 = -0.273 \text{ rad/sec}$



(پ) ماکزیمم تضعیف در باند عبور به ازای فرکانس های  $\omega < 0.247 \text{ rad/sec}$  برابر ۰.۱ dB باشد

(ت) در باند توقف به ازای  $\omega > 5.025 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف ۴۰ dB باشد.

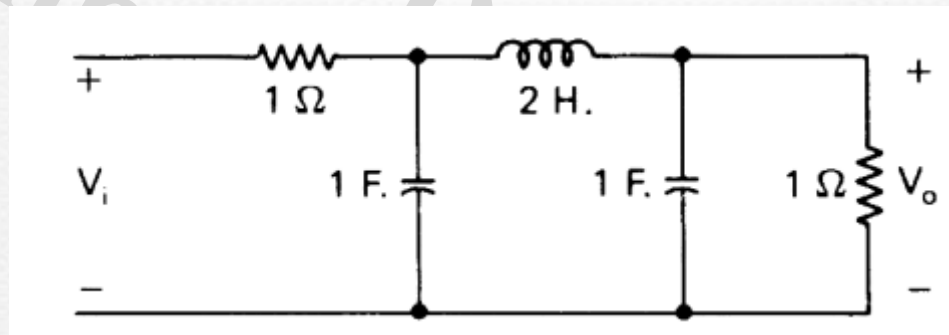
با اعمال دو شرط (پ) و (ت) میتوان فیلتر نرمالیزه پایین گذر را طراحی کرد:

$$-10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + (0.273)^n} \right) \leq 0.1 \rightarrow n \geq 1.448$$

$$\rightarrow n = 3$$

$$-10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + (5.025)^n} \right) \geq 40 \rightarrow n \geq 2.852$$

تابع باتروث مرتبه سوم و همچنین مدار این فیلتر به صورت زیر است:



$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

مقدمه

فیلتر باتروث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

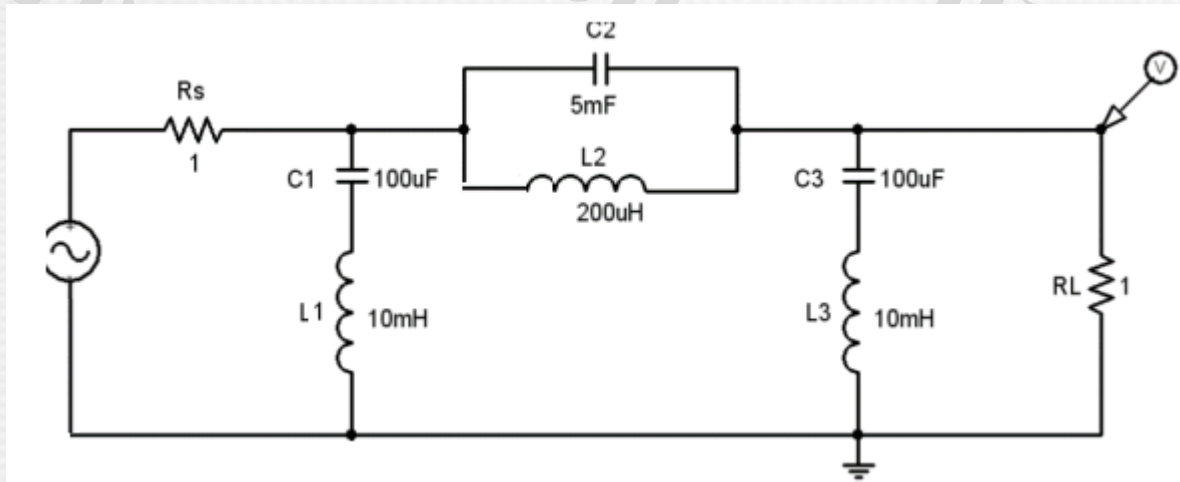
فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

حال با تبدیل  $s \rightarrow \frac{100s}{s+10^6}$  فیلتر پایین گذر غیر نرمالیزه بدست می آید:

$$H_N(s) = \frac{1}{\left(\frac{100s}{s+10^6}\right)^3 + 2\left(\frac{100s}{s+10^6}\right)^2 + 2\left(\frac{100s}{s+10^6}\right) + 1}$$

و با تغییر المان ها مشابه با جدول داده شده، ساختار فیلتر میان گذر غیر نرمالیزه بدست می آید:



مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



## تبدیل فیلتر پایین گذر نرمالیزه به فیلتر بالا گذر غیر نرمالیزه

❖ تبدیل فیلتر پایین گذر نرمالیزه به یک فیلتر بالاگذر غیر نرمالیزه با فرکانس قطع  $\omega_c$  با تبدیل زیر ممکن است:

$$\omega \rightarrow \frac{\omega_c}{\omega} \quad \text{یا} \quad s \rightarrow \frac{\omega_c}{s}$$

که  $\omega_c$  فرکانس قطع فیلتر بالاگذر است.

❖ مطابق با نگاشت بالا عناصر مداری به صورت زیر تغییر می کنند:

المان در مدار غیرنرمالیزه	بعد از نرمالیزه	قبل از نرمالیزه	المان در مدار نرمالیزه
مقاومت $R$	$R$	$R$	مقاومت $R$
خازن به ظرفیت $\frac{1}{L\omega_c}$	$L\left(\frac{\omega_c}{s}\right) = \frac{1}{\frac{1}{L\omega_c}s}$	$LS$	سلف با اندوکتانس $L$
سلف به اندوکتانس $\frac{1}{C\omega_c}$	$\frac{1}{C\left(\frac{\omega_c}{s}\right)} = \frac{1}{C\omega_c}s$	$\frac{1}{Cs}$	خازن با ظرفیت $C$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

## د نرمالیزاسیون امیدانس

❖ اثر نرمالیزاسیون امیدانس بر روی هر یک عناصر RLC به صورت زیر است. فرض کنید ضریب نرمالیزاسیون امیدانس  $\alpha$  باشد.

المان در مدار غیرنرمالیزه	بعد از نرمالیزه	قبل از نرمالیزه	المان در مدار نرمالیزه
مقاومت $R\alpha$	$\alpha R$	$R$	مقاومت $R$
سلف به اندوکتانس $\alpha L$	$\alpha L s$	$Ls$	سلف با اندوکتانس $L$
خازن با ظرفیت $\frac{C}{\alpha}$	$\frac{\alpha}{Cs} = \frac{C}{\alpha} s$	$\frac{1}{Cs}$	خازن با ظرفیت $C$

مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



**مثال:** یک فیلتر پایین گذر باترورث با مشخصات زیر طراحی کنید:

(الف) فرکانس قطع  $20 \text{ Krad/sec}$

(ب) در باند عبور به ازای  $\omega < 10 \text{ Krad/sec}$  حداکثر تضعیف  $0.1 \text{ dB}$  باشد.

(پ) در باند توقف به ازای  $\omega > 50 \text{ Krad/sec}$  حداقل تضعیف  $40 \text{ dB}$  باشد.

(ت) مقاومت بار و منبع مساوی و برابر با  $10 \text{ K}\Omega$

**حل: (مرحله اول)** ابتدا مشخصات فیلتر بالا را به یک فیلتر پایین گذر تبدیل می کنیم:

(الف) فرکانس قطع  $1 \text{ rad/sec}$

(ب) در باند عبور به ازای  $\omega < 0.5 \text{ rad/sec}$  حداکثر تضعیف  $0.1 \text{ dB}$  باشد.

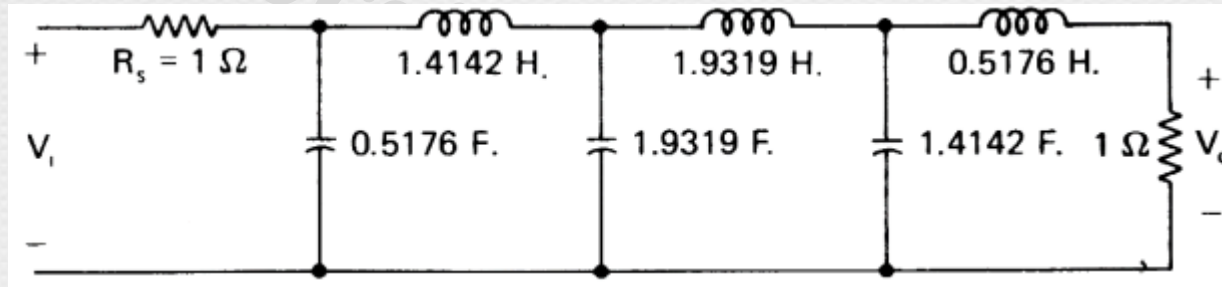
(پ) در باند توقف به ازای  $\omega > 2.5 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف  $40 \text{ dB}$  باشد.

(ت) مقاومت بار و منبع مساوی و برابر با  $1 \Omega$

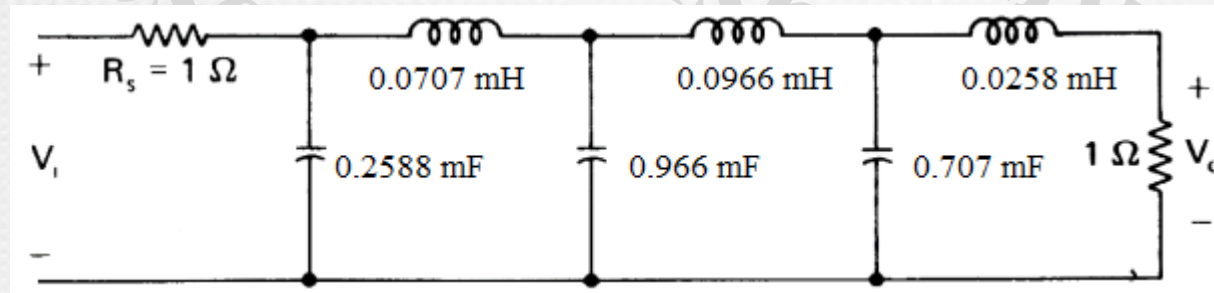
**(مرحله دوم)** حال فیلتر پایین گذر نرمالیزه بدست آمده را طراحی می کنیم:

$$-10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + (2.5)^n} \right) \geq 40 \rightarrow n \geq 6 \quad -10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + (0.5)^n} \right) \leq 0.1 \rightarrow n \geq 3$$

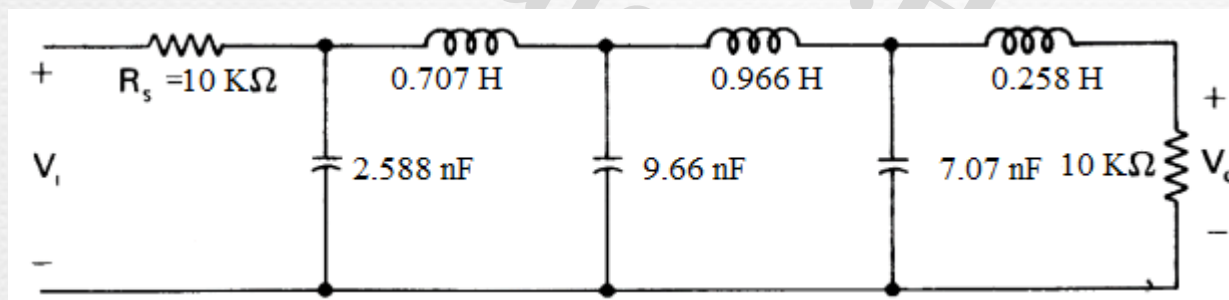
مدار نرمالیزه پایین گذر



مدار غیر نرمالیزه پایین گذر و مقاومت منبع ۱ اهمی



مدار غیر نرمالیزه پایین گذر و مقاومت منبع ۱۰ کیلو اهمی



مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها



۶۲





**مثال:** یک فیلتر میان گذر چبی شف با مشخصات زیر طراحی کنید:

(الف) فرکانس قطع پایین  $900 \text{ rad/sec}$  و فرکانس قطع بالا  $1600 \text{ rad/sec}$

(ب) تضعیف در باند باند میانی (عبور) حداکثر  $0.1 \text{ dB}$  باشد

(پ) در باند توقف به ازای  $\omega_2 > 3000 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف  $20 \text{ dB}$  باشد.

(ت) مقاومت بار و مقاومت منبع مساوی و برابر با  $50 \Omega$  باشد.

**حل: (مرحله اول)** ابتدا مشخصات فیلتر را به کمک نگاشت  $s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$  به یک فیلتر پایین گذر تبدیل می کنیم. فرکانس

مرکزی از فرمول زیر بدست می آید:  $f_0 = \sqrt{f_L f_H} = \sqrt{900 * 1600} = 1200$

فیلتر نرمالیزه پایین گذر	فیلتر میان گذر
$\omega_0 = 0 \text{ rad/sec}$	$\omega_0 = 1200 \text{ rad/sec}$
$\omega_H = 1 \text{ rad/sec}$	$\omega_H = 1600 \text{ rad/sec}$
$\omega_L = -1 \text{ rad/sec}$	$\omega_L = 900 \text{ rad/sec}$
$\omega_2 = 3.6 \text{ rad/sec}$	$\omega_2 = 3000 \text{ rad/sec}$

(ب) تضعیف در باند عبور حداکثر ۰.۱ dB باشد

(پ) در باند توقف به ازای  $\omega_2 > 3.6 \text{ rad/sec}$  حداقل تضعیف ۲۰ dB باشد.

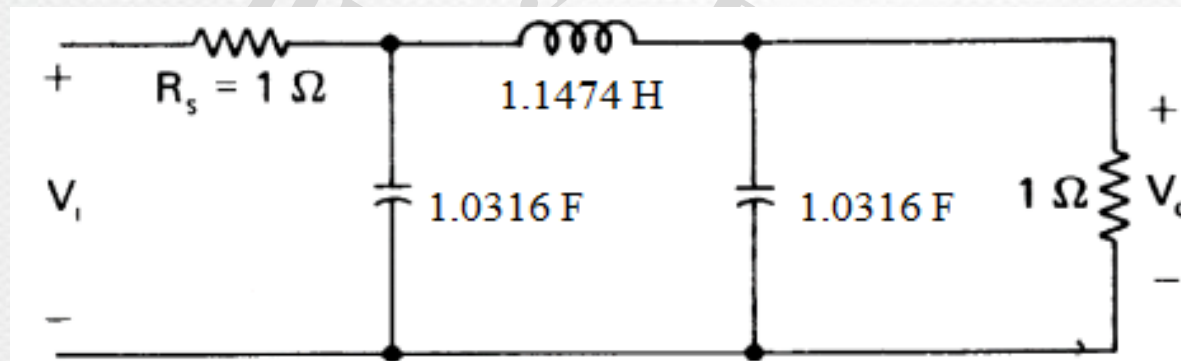
(ت) مقاومت بار و مقاومت منبع مساوی و برابر با ۱ اهم باشد.

با اعمال دو شرط (ب) تا (ت) میتوان فیلتر نرمالیزه پایین گذر را طراحی کرد:

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.5088$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \frac{\sqrt{10^2 - 1}}{0.1526}}{\cosh^{-1} 3.6} = 2.49 \rightarrow n = 3$$

فیلتر چبی شف مرتبه سوم به صورت زیر است:





عناصر سلف و خازن به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$C_1 = \frac{C}{B} = \frac{1.0316}{700} = 2.345 \times 10^{-4} \text{ F}$$

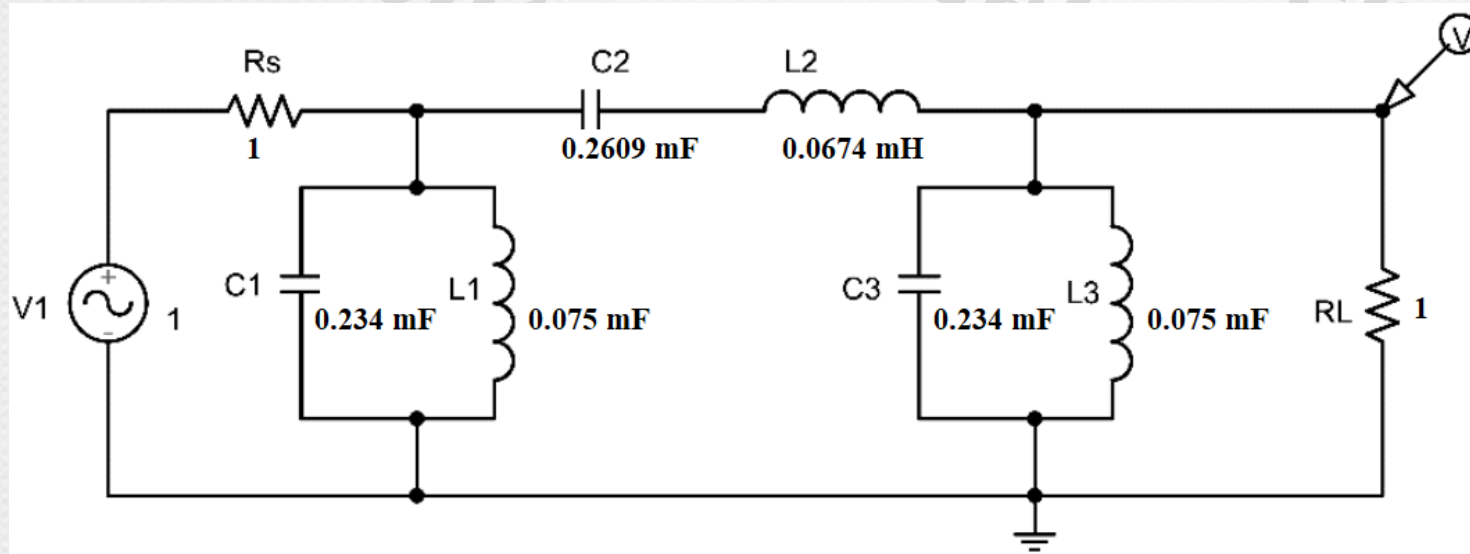
$$L_1 = \frac{B}{\omega_0^2 C} = \frac{700}{1200^2 \times 1.0316} = 7.5 \times 10^{-5} \text{ H}$$

$$L_2 = \frac{L}{B} = \frac{1.1474}{700} = 2.609 \times 10^{-4} \text{ H}$$

$$C_2 = \frac{B}{\omega_0^2 L} = \frac{700}{1200^2 \times 1.1474} = 6.74 \times 10^{-5} \text{ F}$$

$$C_3 = \frac{C}{B} = \frac{1.0316}{700} = 2.345 \times 10^{-4} \text{ F}$$

$$L_3 = \frac{B}{\omega_0^2 C} = \frac{700}{1200^2 \times 1.0316} = 7.5 \times 10^{-5} \text{ H}$$



مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها

پس از دنرمالیزاسیون امپدانس داریم:

$$C'_1 = \frac{C_1}{\alpha} = \frac{2.345 \times 10^{-4}}{50} = 4.69 \times 10^{-6} F$$

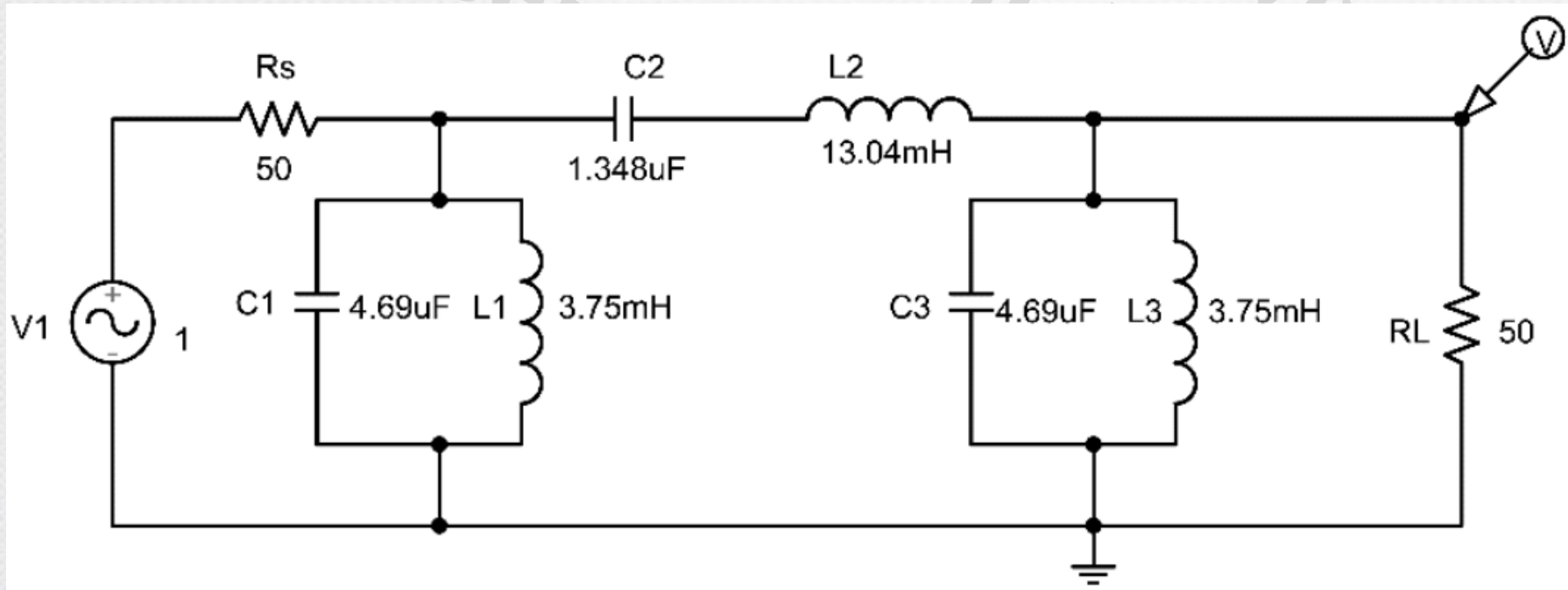
$$L'_1 = \alpha L_1 = 50 \times 7.5 \times 10^{-5} = 3.75 \times 10^{-3} F$$

$$C'_2 = \frac{C_2}{\alpha} = \frac{6.74 \times 10^{-5}}{50} = 13.04 \times 10^{-6} F$$

$$L'_2 = \alpha L_2 = 50 \times 2.609 \times 10^{-4} = 1.348 \times 10^{-3} F$$

$$C'_3 = \frac{C_3}{\alpha} = \frac{2.345 \times 10^{-4}}{50} = 4.69 \times 10^{-6} F$$

$$L'_3 = \alpha L_3 = 50 \times 7.5 \times 10^{-5} = 3.75 \times 10^{-3} F$$



مقدمه

فیلتر باترورث

فیلتر چبی شف

چبی شف معکوس

فیلتر بیضوی

تبدیل فیلترها