پردازش سیگنال های دیجیتال

فصل هفتم
تکنیک‌های طراحی فیلتر

ارایه شده توسط:

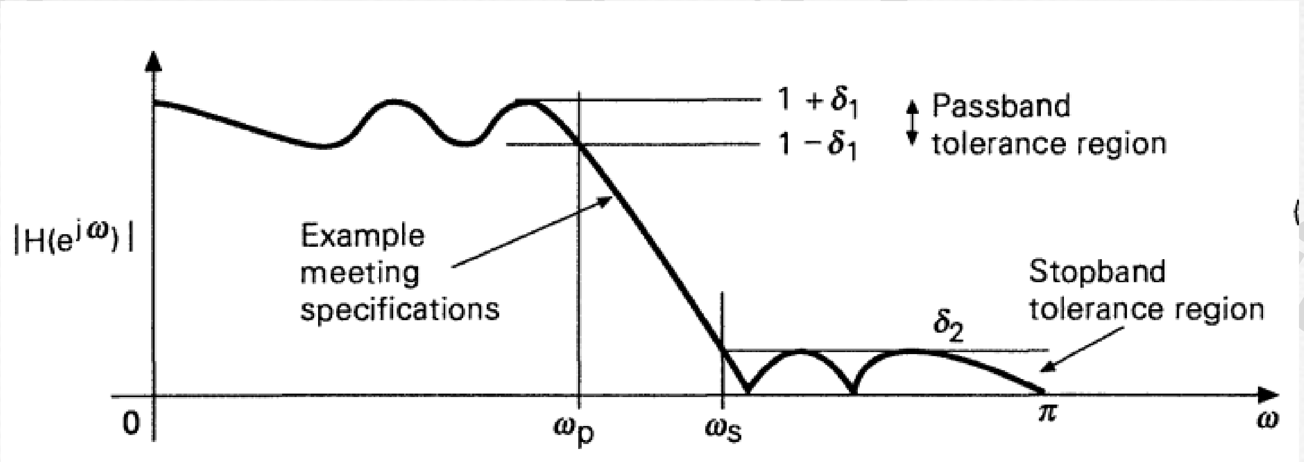
حجت قیمت گر
استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مطالب

- طراحی فیلتر گسسته در زمان IIR از فیلتر پیوسته در زمان
- طراحی فیلتر گسسته در زمان FIR به روش پنجره کردن
- تخمین بهینه فیلترهای FIR
- تبدیل فیلترها

مقدمه

- می‌دانیم که تبدیل فوریه گسسته در زمان همواره متناوب با دوره 2π است. به طور مرسوم بازه $(-\pi,\pi)$ در متون استفاده می شود.
- اگر ضرایب فیلتر حقیقی باشد، آنگاه اندازه فیلتر تقارن زوج دارد و بنابراین نمایش $(0,\pi)$ کفایت می کند. ما از این نمایش برای فیلترهای گسسته در زمان حقیقی استفاده می‌کنیم.



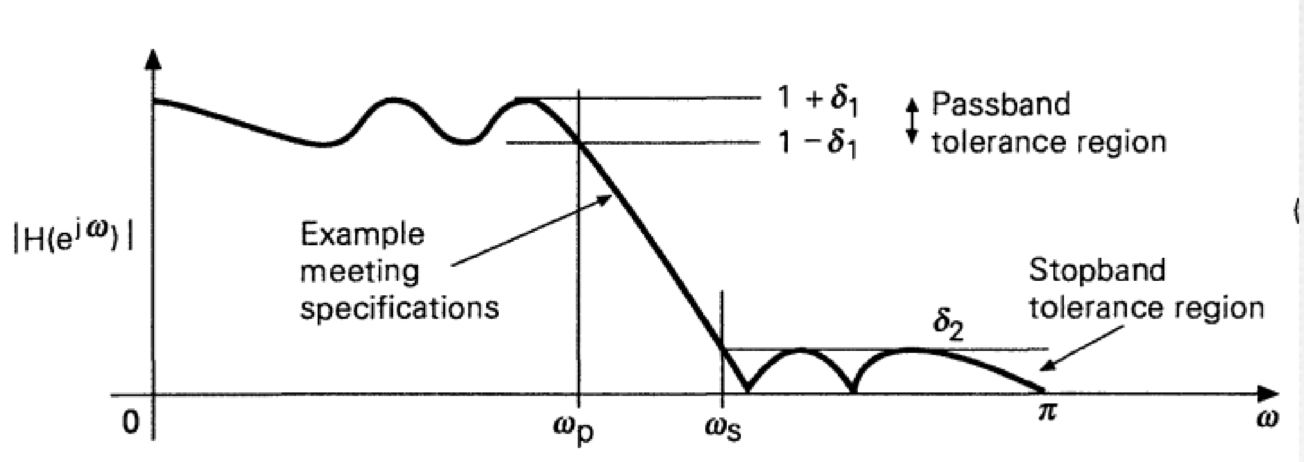
تعاریف:

باند عبور: محدوده $0 \le \omega \le \omega_p$

باند گذر: محدوده $\omega_p \le \omega \le \omega_s$

باند توقف: محدوده $\omega_s \le \omega \le \pi$

مقدمه



تعاریف:

پیک راپیل باند عبور: δ_1

پیک راپیل باند توقف: δ_2

پیک راپیل باند عبور dB: $A_s = -20\log_{10}(1-\delta_1)$

مینی‌مم تضعیف باند توقف dB: $A_p = -20\log_{10}(\delta_2)$

فرکانس لبه باندگذر: ω_p

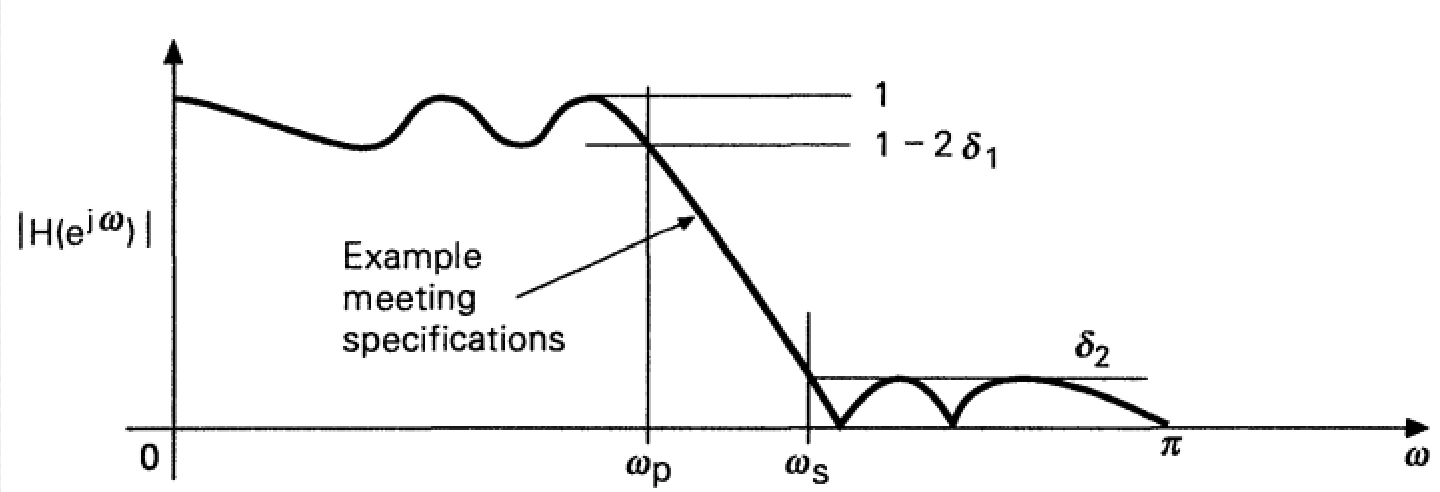
فرکانس لبه باند توقف: ω_s

پهنای باند گذر: $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ یا معادلا $\Delta f = f_s - f_p$

مقدمه

مشخصات نرمالیزه:

به منظور مقایسه فیلترها، عموما از نمایش نرمالیزه استفاده می شود. به منظور نرمالیزه کردن فیلتر، اندازه فیلتر بر ماکزیمم فیلتر تقسیم می شود:



اگر $\delta_1 \ll 1$ باشد به سادگی میتوان ثابت کرد که:

$$A_p = -20\log_{10}(1-\delta_1) = 0.866\delta_1$$

مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

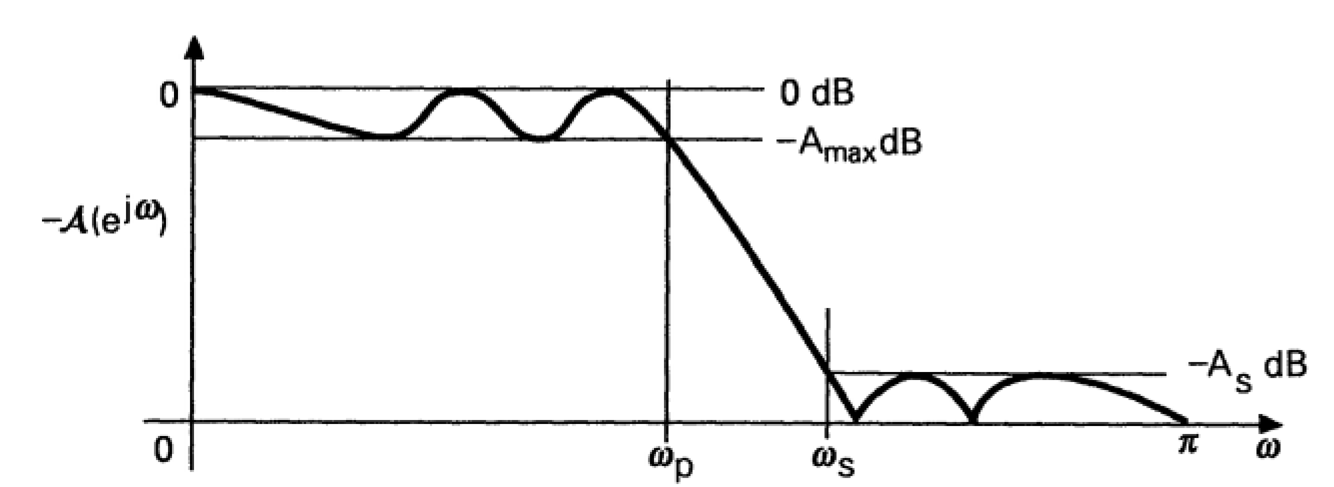
تبدیل فیلترها

مقدمه

تعریف: تضعیف مشخصه فیلتر به صورت زیر تعریف می شود:

$$A(e^{j\omega}) = -20\log_{10}\left|H(e^{j\omega})\right|$$

تعریف: پاسخ دامنه بر حسب dB به صورت زیر $-A(e^{j\omega})$ تعریف می شود.



معیارهای مدنظر در بهینه سازی فیلترها

فیلترهایی با رایپل یکنواخت:

- ❖ این فیلترها، ماکزیمم مقدار خطاها در یک باند معین، یکسان است.
- ❖ در این فیلترها چهار $\delta_1, \delta_2, \Delta f$ و درجه فیلتر N مد نظر است. اگر سه پارامتر ثابت فرض شوند، آنگاه پارامتر چهارم بهینه می شود.
- ❖ این بهینه سازی را minimax گویند، زیرا ماکزیمم سازی اندازه رایپل‌ها منجر به مینی‌مم سازی N و Δf می‌شود.

فیلترهایی Least-squares:

- ❖ در این فیلترها، هدف مینی‌مم کردن انتگرال قدرمطلق تفاضل بین فیلتر پیشنهادی و فیلتر ایده‌آل است.
- ❖ ساده‌ترین فیلتر از این نوع، فیلتر FIR مستطیلی است.

$$e = \min \int_{<2\pi>} \left|H_i\left(e^{j\omega}\right) - H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

فیلترهایی با ماکزیمم صافی:

- ❖ با توجه به اهمیت فرکانس‌های نزدیک صفر، در این فیلتر به دنبال ماکزیمم درجه صافی در فرکانس‌های نزدیک صفر هستیم.
- ❖ معیار ماکزیمم صافی بر اساس تعداد مشتقات صفر تابع $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$ در $\omega = 0$ تعریف می‌شود.
- ❖ مشهورترین فیلتر ماکزیمم صافی، فیلتر IIR باتروورث است.

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

❖ در این روش‌ها، از روی پاسخ ضربه یا پاسخ فرکانسی فیلترهای پیوسته در زمان، فیلترهای IIR گسسته در زمان طراحی می‌شود. دو روش طراحی وجود دارد:

۱- طراحی بر اساس پاسخ ضربه $h_c(t)$

۲- طراحی بر اساس پاسخ فرکانسی $H_c(j\Omega)$

۱- طراحی بر اساس پاسخ ضربه

❖ قبلا این روش طراحی را در فصل چهارم (مبحث پردازش پیوسته در زمان بر اساس طراحی گسسته در زمان) دیده‌ایم.

❖ پاسخ فیلتر گسسته در زمان، متناسب با نمونه‌های گرفته شده از فیلتر پیوسته در زمان تعریف می‌شود:

$$h_d[n] = T_d h_c(nT_d)$$

نکته مهم: نیازی نیست که پارامتر T_d لزوما با فرکانس نمونه‌برداری سیگنال برابر باشد و می‌توان یک ثابت دلخواه تعریف شود.

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

ارتباط طیف فرکانسی فیلتر گسسته در زمان و فیلتر پیوسته در زمان به صورت زیر است:

$$H_d(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right) \; 2\pi \text{ تکرار از هر }$$

یا معادلا

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega + 2\pi k}{T_d}\right)$$

اگر $H_c(j\Omega)$ یک فیلتر باند محدود باشد (تمام گذر نباشد) در این صورت داریم:

$$H_c(j\Omega) = 0 \quad , |\Omega| \geq \frac{\pi}{T_d} \qquad \rightarrow \qquad H_d(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right) \quad , |\omega| \leq \pi$$

یعنی، پاسخ فرکانسی گسسته در زمان و پیوسته در زمان به صورت یک رابطه خطی $\omega = \Omega T_d$ در بازه $|\omega| < \pi$ به هم مرتبط می‌شوند.

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

هدف: طراحی یک فیلتر گسسته در زمان با مشخصاتی مثل تضعیف باند توقف، فرکانس قطع، باند گذر و ...

مرحله اول: تبدیل مشخصات فیلتر گسسته به مشخصات پیوسته در زمان با معادله خطی نگاشت:

$$\Omega = \frac{\omega}{T_d}$$

مرحله دوم: طراحی فیلتر پیوسته در زمان مناسب با مشخصات بدست آمده در مرحله اول

مرحله سوم: نگاشت تبدیل لاپلاس فیلتر پیوسته در زمان $H_c(s)$ به تبدیل Z فیلتر گسسته در زمان $H_d(z)$

با فرض اینکه $H_c(s)$ کسری باشد داریم:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$$

و با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس داریم:

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(t)$$

مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

با استفاده از معادله $h_d[n] = T_d h_c(nT_d)$ داریم:

$$h_d[n] = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k (e^{s_k T_d})^n \, u[n]$$

و بنابراین با گرفتن تبدیل Z رابطه بالا داریم:

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}}$$

نکات:

۱- قطب $s = s_k$ در صفحه لاپلاس به قطب $z = e^{s_k T_d}$ در صفحه Z نگاشت شده است.

۲- اگر فیلتر پیوسته در زمان پایدار و سببی باشد یعنی $Re\{s_k\} < 0$ است. بنابراین $|e^{s_k T_d}| < 1$ است و سیستم گسسته در زمان نیز پایدار و سببی است.

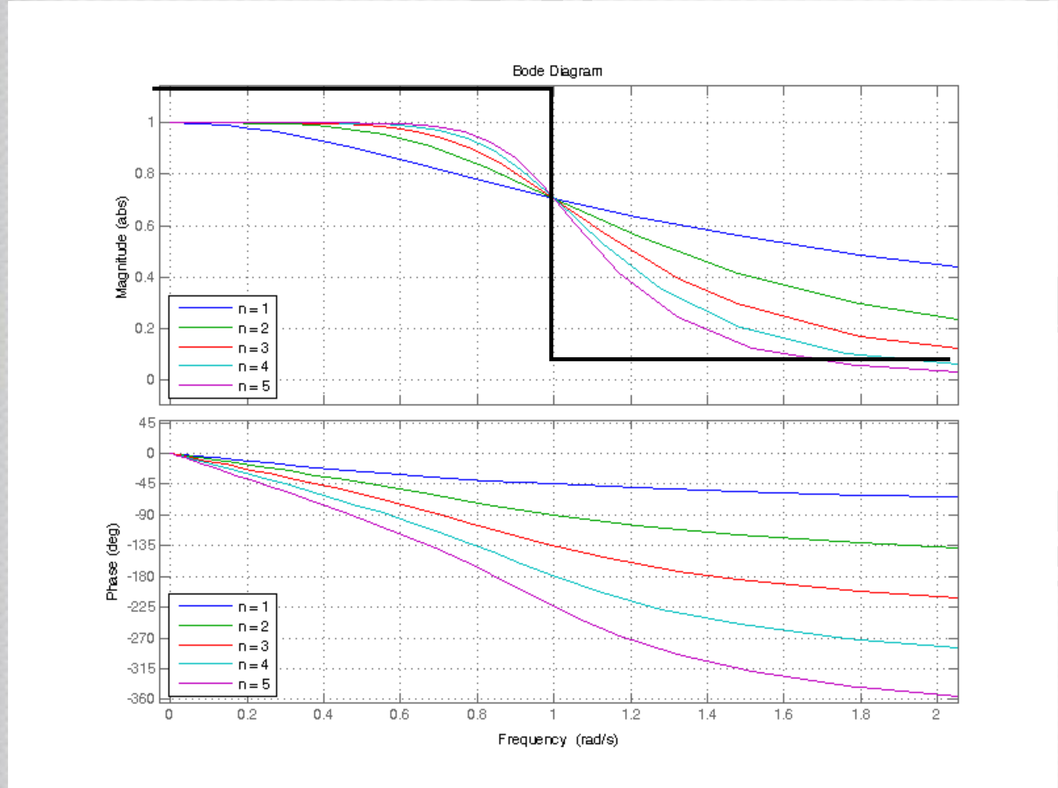
۳- نگاشت صفرها قاعده مشخصی ندارد زیرا مکان صفرها به مکان قطب‌ها وابسته است.

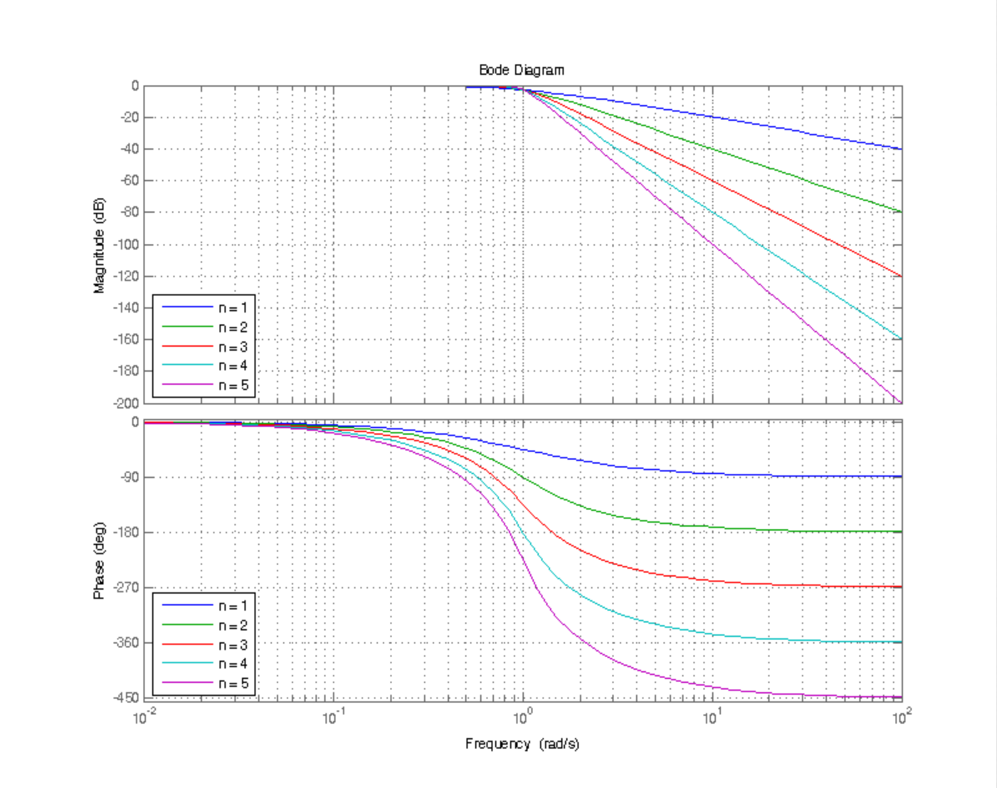
طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

۱- فیلتر باترورث: فیلتر باترورث مرتبه n به صورت زیر تعریف می شود:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2n}}$$

n: مرتبه فیلتر نامیده می شود. هر چه n بزرگتر باشد فیلتر به حالت ایده آل نزدیکتر می شود.





طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

تابع تبدیل فیلتر $H(s)$ نرمالیزه (فرکانس قطع ۱) بر اساس متغیر فرکانسی s تعریف می شود. بنابراین داریم:

$$H(s)H(-s) = |H(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$$

محل قطبهای تابع اندازه باترورث بر روی صفحه فرکانسی:

به ازای n زوج داریم:

$$1+(-1)^n s^{2n} = 0 \quad \rightarrow \quad s^{2n} = -1 \rightarrow \quad s^{2n} = e^{-j\pi}$$

پس می توان گفت:

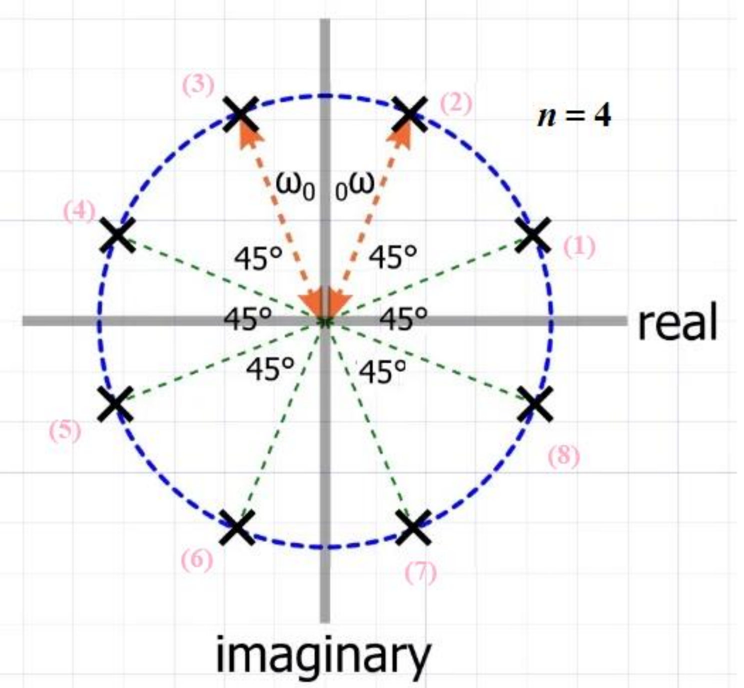
$$\hat{s}_k = e^{j\frac{(2k-1)}{2n}\pi} \quad , \qquad k = 1,2,\dots,2n$$

$$\hat{s}_k = \cos\frac{(2k-1)}{2n}\pi + j\sin\frac{(2k-1)}{2n}\pi \quad , \qquad k = 1,2,\dots,2n$$

$$\hat{s}_k = \cos\hat{\theta}_k + j\sin\hat{\theta}_k \quad , \qquad \hat{\theta}_k = \frac{2k-1}{2n}\pi \ , \qquad k = 1,2,\dots,2n$$

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

باید قطبهای سمت چپ را به $H(s)$ و قطبهای سمت راست را به $H(-s)$ تخصیص دهیم. پس قطبهای (۳) و (۴) و (۵) و (۶) باید به $H(s)$ تخصیص داده شوند. $(n = 4)$



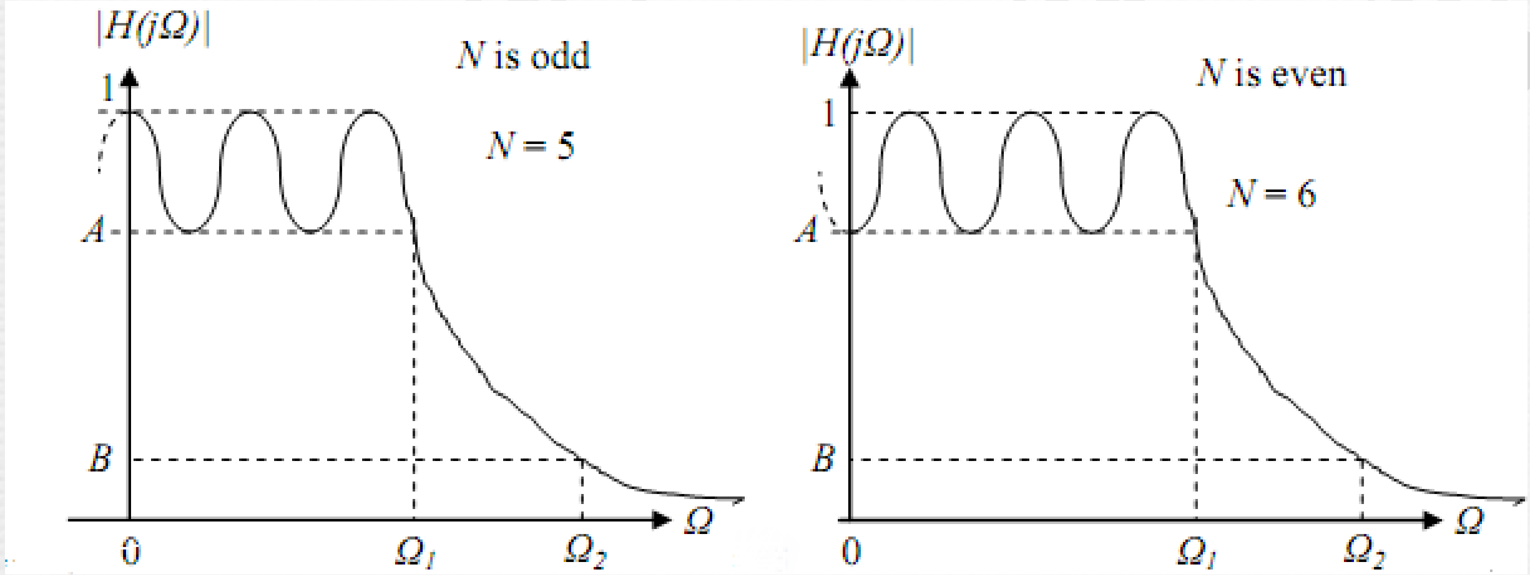
نکته: اگر فرکانس قطع برابر با یک نبود $\Omega_p \neq 1$ ، در این صورت قطبها روی دایره‌ای به شعاع Ω_p قرار می‌گیرند.

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

۲- فیلتر چبی شف نوع I:

- همان طور که مطرح شد، فیلتر باترورث ماکزیمم صافی را در باند عبور دارد.
- اما این فیلتر شیب افت مناسبی ندارد، به عبارت دیگر، باند گذر این فیلتر چندان باریک نیست.
- در فیلتر چبی شف شیب افت از باند عبور به باند توقف **خیلی سریع تر از باترورث** است ولی در باند عبور راپیل هایی مشاهده می شود.
- تعداد راپیل ها در باند عبور برابر با درجه فیلتر است.

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^2(\Omega)} \quad , \qquad T_n(\Omega) = \cos(n\cos^{-1}(\Omega))$$



مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

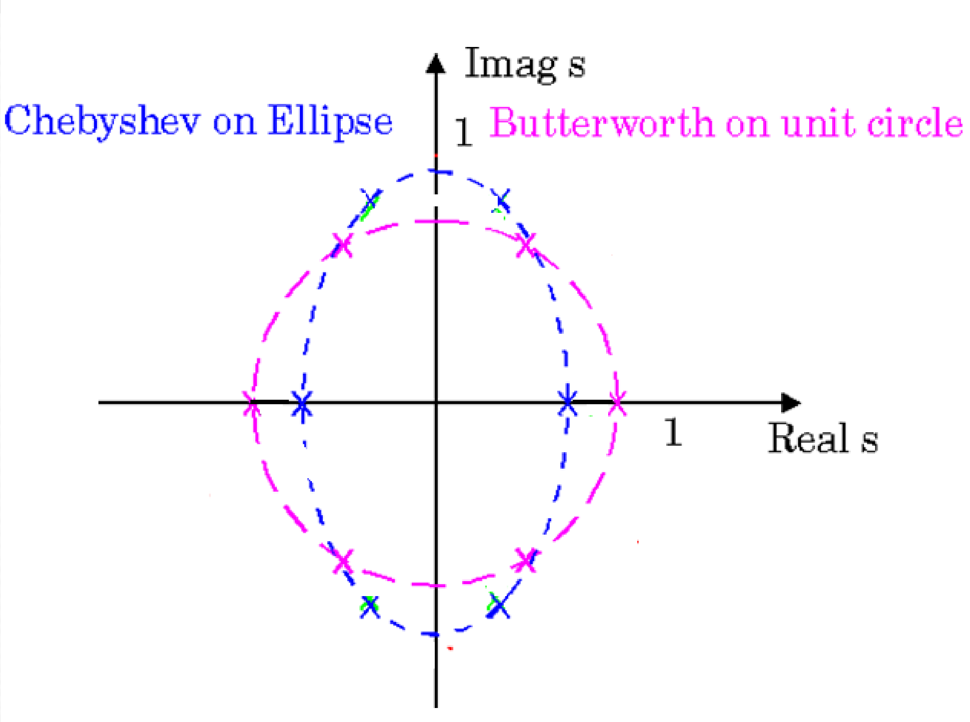
طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

با توجه به تبدیل $\cos((n+1)x) = 2\cos nx \cos x - \cos(n-1)x$ میتوان یک رابطه بازگشتی به صورت زیر پیشنهاد داد

$$T_{n+1}(\Omega) = 2\Omega T_n(\Omega) - T_{n-1}(\Omega)$$

با داشتن $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = \Omega$ میتوان بقیه جملات را یافت

محل قطبهای تابع اندازه چبی شف بر روی صفحه فرکانسی:



مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

۲- فیلتر چبی شف نوع II:

- همان طور که دیدیم فیلتر چبی شف، افت فیلتر خوبی دارد ولی در باند عبور رایپل تولید می شود.
- فیلتر چبی شف معکوس، رایپل فیلتر را به باند توقف منتقل می کند.

فرض کنید فیلتر چبی شف معکوس را با $|H(j\omega)|^2$ و فیلتر چبی شف را با $|\hat{H}(j\omega)|^2$ نشان دهیم:

$$|\hat{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^2(\omega)} \quad \rightarrow \quad 1-|\hat{H}(j\omega)|^2 = 1-\frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

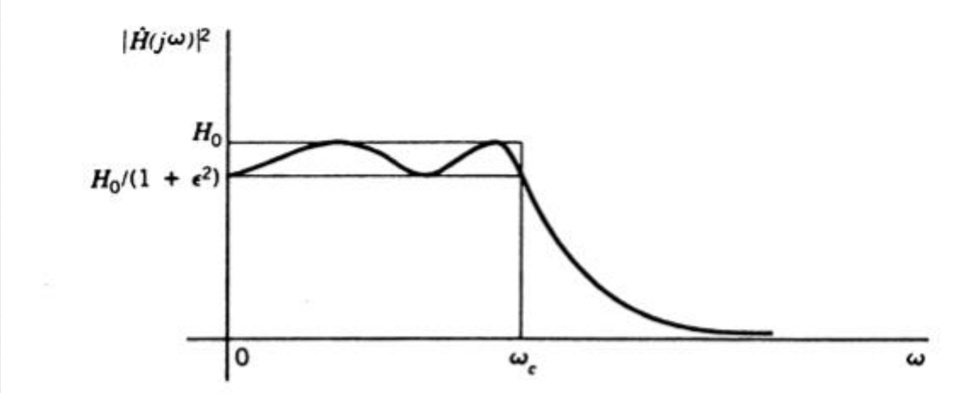
$$= \frac{\epsilon^2 T_n^2(\omega)}{1+\epsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

می دانیم که عبارت $1-|\hat{H}(j\omega)|^2$ یک فیلتر بالاگذر را نتیجه می دهد. با تغییر متغیر $\omega \rightarrow \omega_c/\omega$ مجدد یک فیلتر پایین گذر حاصل می شود.

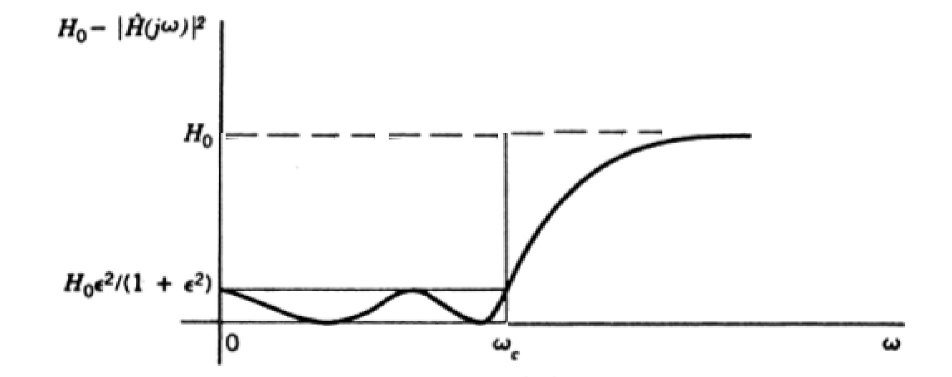
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 T_n^2(\omega_c/\omega)}{1+\epsilon^2 T_n^2(\omega_c/\omega)}$$

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

$$1-\left|\hat{H}(j\omega)\right|^2$$

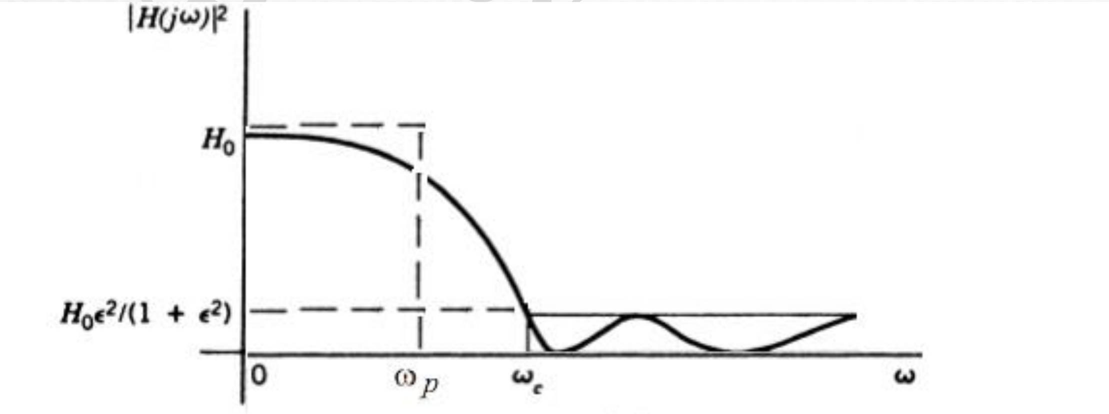


(الف)



(ب)

$$\omega \rightarrow \omega_c/\omega$$



(ج)

مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

مثال ۱-۷: یک فیلتر باتروروث پایین گذر گسسته در زمان با مشخصات زیر طراحی کنید:

$$0.89125 \le \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 1 \quad |\omega| < 0.2\pi$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 0.17783 \quad 0.3\pi \le |\omega| < \pi$$

حل: گام اول: تبدیل مشخصات فیلتر گسسته در زمان به فیلتر پیوسته در زمان با فرض $T_d = 1$

$$0.89125 \le |H(j\Omega)| \le 1 \quad |\Omega| < 0.2\pi$$

$$|H(j\Omega)| \le 0.17783 \quad |\Omega| \ge 0.3\pi$$

گام دوم: طراحی فیلتر پیوسته در زمان

$$|H(j0.2\pi)| \ge 0.89125 \rightarrow |H(j0.2\pi)|^2 \ge 0.79432$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2n}} \ge 0.79432 \qquad (1)$$

مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

گام دوم: طراحی فیلتر پیوسته در زمان

$$|H(j0.3\pi)| \leq 0.17783 \rightarrow |H(j0.3\pi)|^2 \leq 0.03162$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2n}} \leq 0.03162 \qquad (2)$$

با حل دو معادله دو مجهول (۱) و (۲) مقادیر Ω_c و n بدست می‌آید.

$$n = 5.8858 \rightarrow n = 6 \quad , \qquad \Omega_c = 0.7032$$

گام سوم: تبدیل فیلتر پیوسته در زمان به فیلتر گسسته در زمان

ابتدا مکان قطب‌ها را محاسبه می کنیم

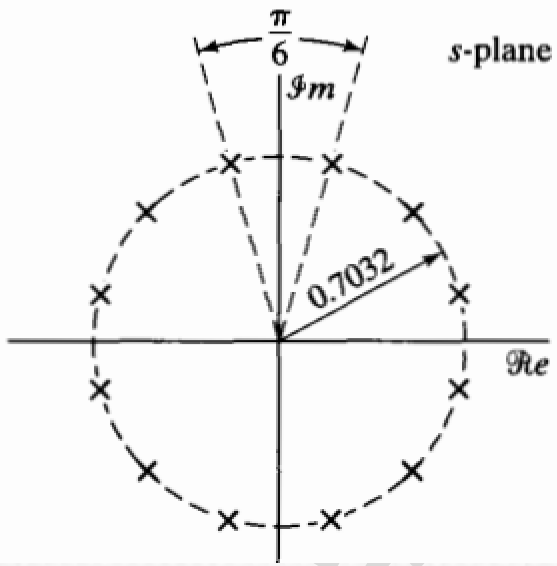
$$\hat{s}_k = 0.7032\left(\cos\frac{(2k-1)}{12}\pi + j\sin\frac{(2k-1)}{12}\pi\right) \quad , \qquad k = 1,2,\dots,12$$

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

Pole pair 1: $-0.182 \pm j(0.679)$,

Pole pair 2: $-0.497 \pm j(0.497)$,

Pole pair 3: $-0.679 \pm j(0.182)$.



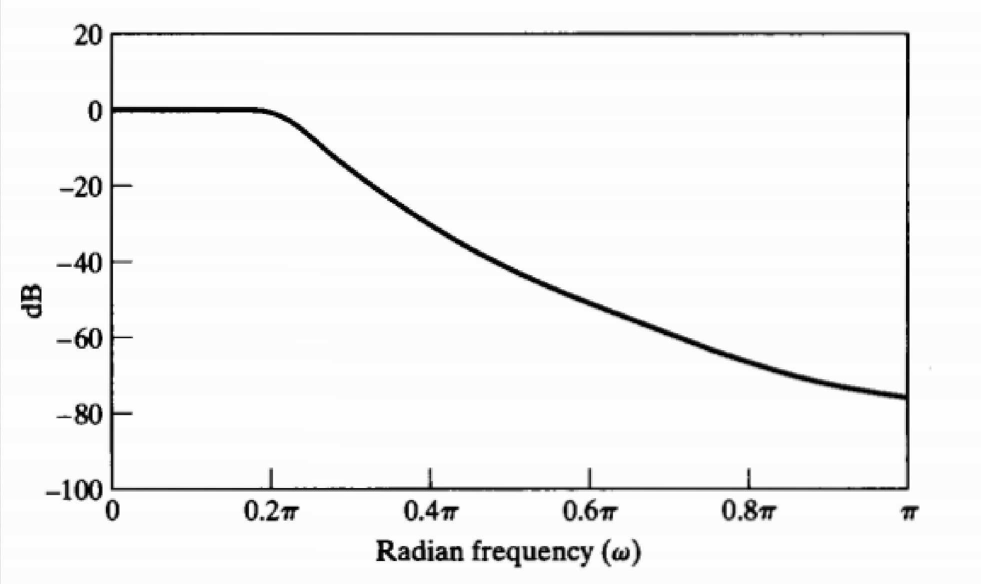
با تخصص قطب‌های سمت چپ محور موهومی به $H(s)$ داریم:

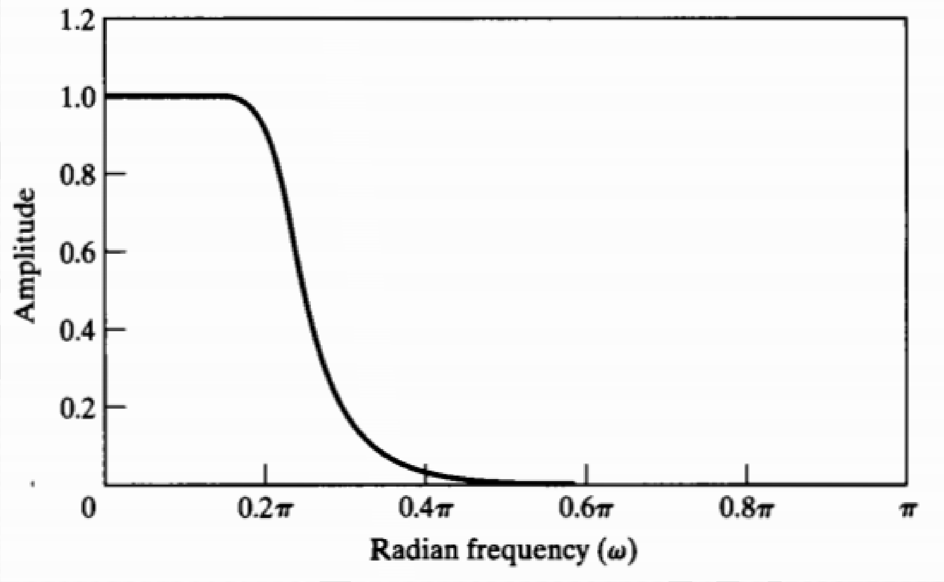
$$H(s) = \frac{0.12093}{(s^2 + 0.364s + 0.4945)(s^2 + 0.9945s + 0.4945)(s^2 + 1.3585s + 0.4945)}$$

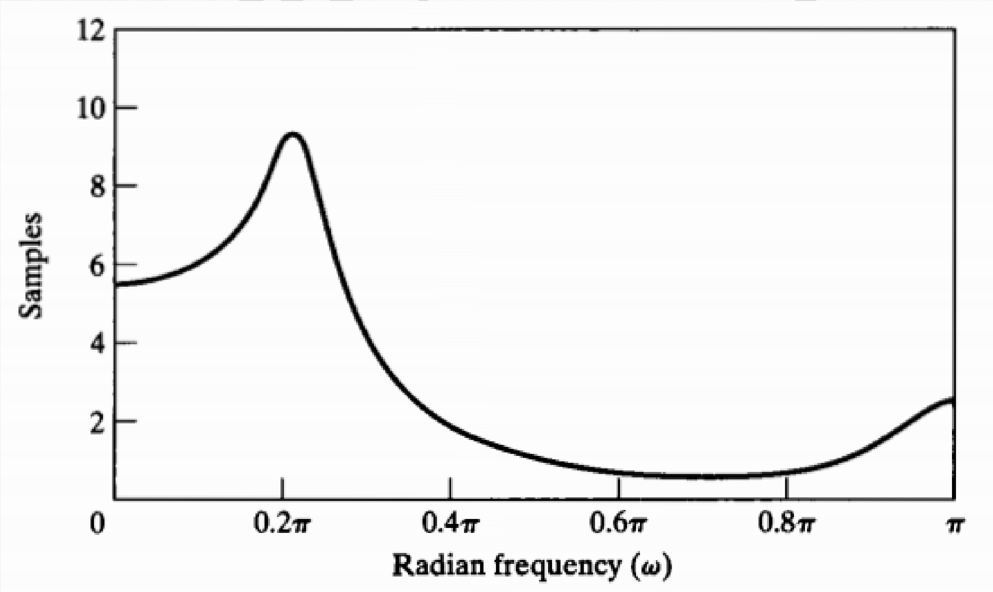
با نگاشت قطب s_k به قطب e^{s_k} در صفحه Z داریم:

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 1.2971z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1455z^{-1}}{1 - 1.10691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8557 - 0.6303z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 2.570z^{-2}}$$

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان







طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

۲- طراحی بر اساس پاسخ فرکانسی (طراحی Bilinear)

❖ در این روش به دنبال یک نگاشت غیرخطی هستیم به طوریکه کل محور $j\Omega$ در صفحه لاپلاس را به دایره واحد در صفحه Z نگاشت کند.

❖ مزیت این روش نسبت به روش قبلی،جلوگیری از مشکل **تداخل فرکانسی** است.

❖ اگر $H_c(s)$ تبدیل لاپلاس فیلتر پیوسته در زمان و $H(z)$ تبدیل Z فیلتر گسسته در زمان باشد، تبدیل Bilinear به صورت زیر $H(s)$ را به $H(z)$ تبدیل می‌کند.

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \rightarrow H(z) = H_c\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right)$$

نحوه نگاشت فرکانسی:

معادله بالا را بر اساس z حل می‌کنیم:

$$z = \frac{1+\frac{T_d}{2}s}{1-\frac{T_d}{2}s}$$

مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

با فرض $s = \sigma + j\Omega$ داریم:

$$z = \frac{1 + \frac{T_d}{2}\sigma + j\frac{T_d}{2}\Omega}{1 - \frac{T_d}{2}\sigma + j\frac{T_d}{2}\Omega}$$

اگر $0 > \sigma$ باشد آنگاه قطعا $|z| < 1$ است. یعنی قطبهای سمت چپ محور $j\Omega$ به داخل دایره واحد تبدیل Z نگاشت می‌شوند.

نتیجه: اگر سیستم پیوسته در زمان، سببی و پایدار باشد، سیستم گسسته در زمان هم سببی و پایدار خواهد بود.

حال فرض کنید $\sigma = 0$ است، یعنی روی محور موهومی در صفحه لاپلاس:

$$z = \frac{1 + j\frac{T_d}{2}\Omega}{1 - +j\frac{T_d}{2}\Omega} \rightarrow |z| = 1$$

یعنی محور $j\Omega$ در صفحه لاپلاس به دایره واحد در صفحه Z نگاشت می‌شود.

مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

پس داریم:

$$e^{j\omega} = \frac{1 + j\frac{T_d}{2}\Omega}{1 - +j\frac{T_d}{2}\Omega}$$

یا به عبارت دیگر:

$$j\Omega = j\frac{2}{T_d}\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = j\frac{2}{T_d}\tan\frac{\omega}{2}$$

با حذف j از دو طرفه معادله داریم:

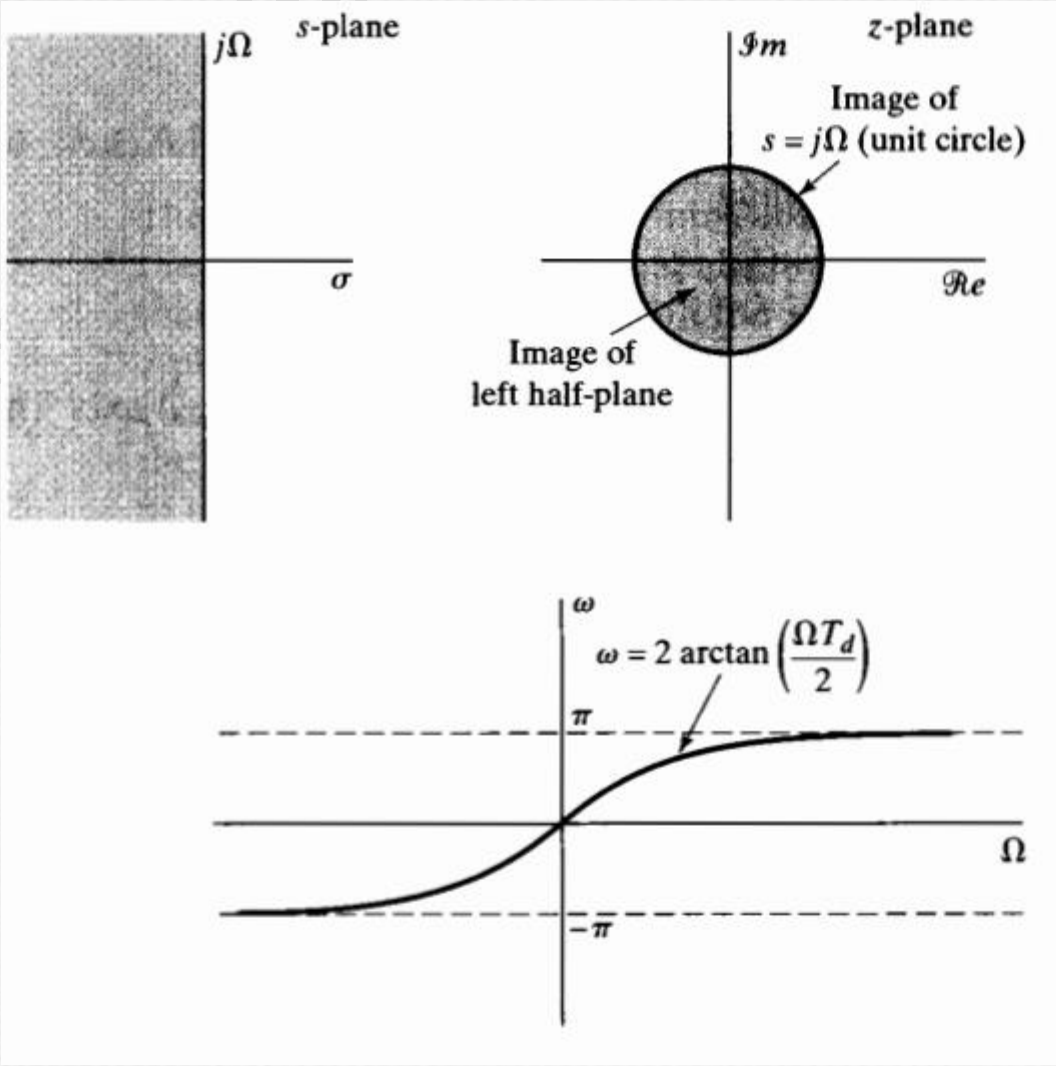
$$\Omega = \frac{2}{T_d}\tan\frac{\omega}{2} \quad \rightarrow \omega = 2\tan^{-1}\left(\frac{T_d}{2}\Omega\right)$$

واضحا می‌توان دید که فضای فرکانسی پیوست به فضای فرکانسی گسسته نگاشت می شود:

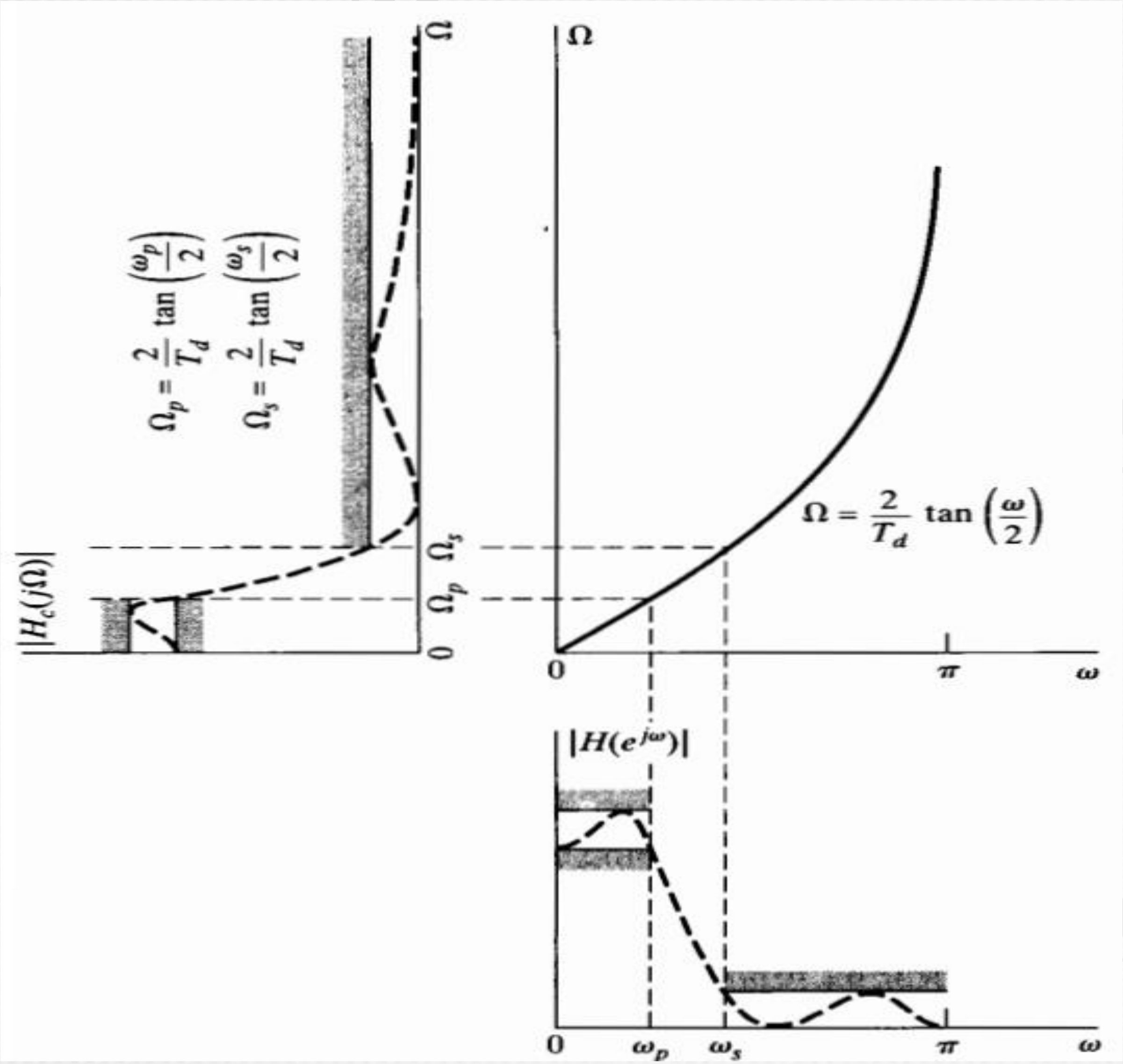
$$\Omega = \infty \quad \rightarrow \omega = 2\tan^{-1}(\infty) = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\Omega = -\infty \quad \rightarrow \omega = 2\tan^{-1}(-\infty) = -2\frac{\pi}{2} = -\pi$$

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان



طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان



طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

مثال ۲–۷: یک فیلتر باترورث پایین گذر گسسته در زمان با مشخصات زیر به روش bilinear طراحی کنید:

$$0.89125 \leq \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq 1 \quad |\omega| < 0.2\pi$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq 0.17783 \quad 0.3\pi \leq |\omega| < \pi$$

حل: گام اول: تبدیل مشخصات فیلتر گسسته در زمان به فیلتر پیوسته در زمان با فرض $T_d = 1$

$$\Omega_p = 2\tan\frac{0.2\pi}{2} = 0.64984 \quad , \qquad \Omega_s = 2\tan\frac{0.3\pi}{2} = 1.0191$$

$$0.89125 \leq |H(j\Omega)| \leq 1 \quad |\Omega| < 0.64984$$

$$|H(j\Omega)| \leq 0.17783 \quad 0.2193 \leq |\Omega| < \pi$$

گام دوم: طراحی فیلتر پیوسته در زمان

$$|H(j0.64984)| \geq 0.89125 \rightarrow |H(j0.64984)|^2 \geq 0.79432$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{0.64984}{\Omega_c}\right)^{2n}} \geq 0.79432 \qquad (1)$$

مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

گام دوم: طراحی فیلتر پیوسته در زمان

$$|H(j1.0191)| \geq 0.17783 \rightarrow |H(j1.0191)|^2 \geq 0.03162$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1.0191}{\Omega_c}\right)^{2n}} \leq 0.03162 \qquad (2)$$

با حل دو معادله دو مجهول (۱) و (۲) مقادیر Ω_c و n بدست می‌آید.

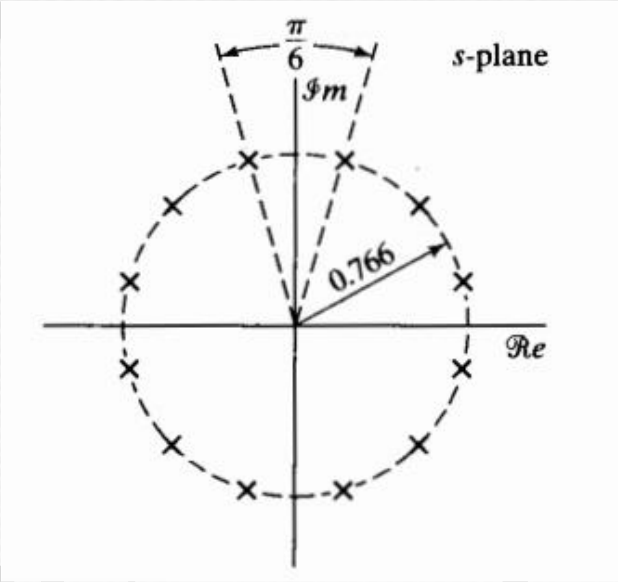
$$n = 5.305 \rightarrow n = 6 \quad , \qquad \Omega_c = 0.766$$

گام سوم: تبدیل فیلتر پیوسته در زمان به فیلتر گسسته در زمان

ابتدا مکان قطب‌ها را محاسبه می کنیم

$$\hat{s}_k = 0.766\left(\cos\frac{(2k-1)}{12}\pi + j\sin\frac{(2k-1)}{12}\pi\right) \quad , \qquad k = 1,2,\dots,12$$

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان



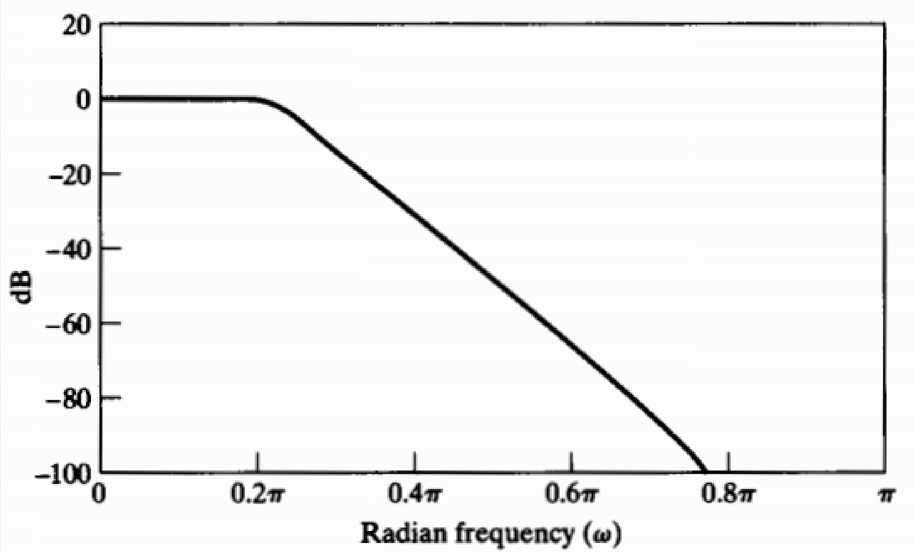
با تخصص قطب‌های سمت چپ محور موهومی به $H(s)$ داریم:

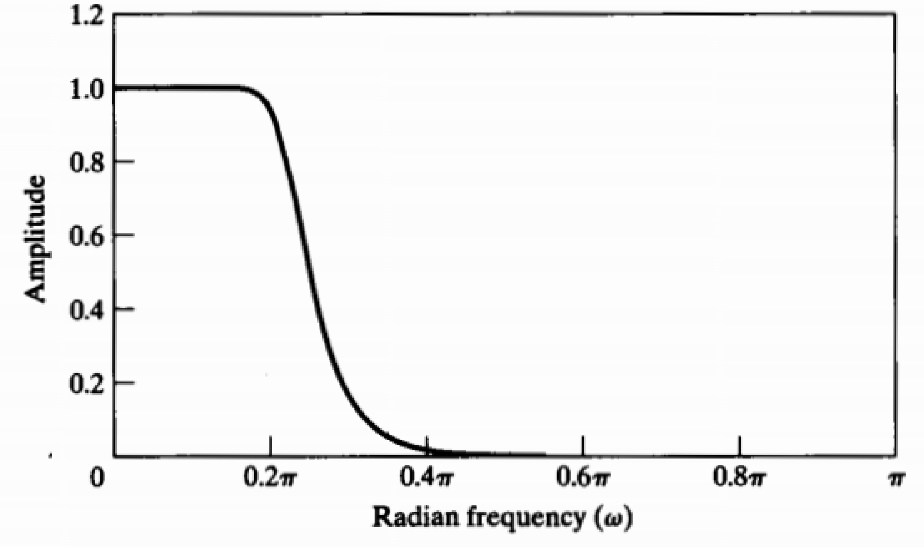
$$H(s) = \frac{0.20238}{(s^2 + 0.3996s + 0.5871)(s^2 + 1.0836s + 0.5871)(s^2 + 1.4802s + 0.5871)}$$

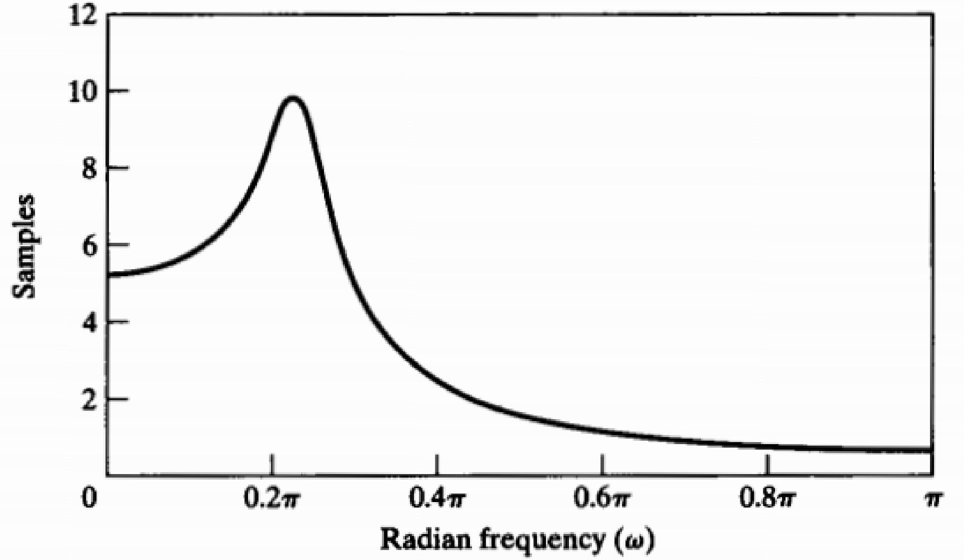
با نگاشت قطب s به $2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$ در صفحه Z داریم:

$$H(z) = \frac{0.0007378(1 + z^{-1})^6}{(1 - 1.2686z^{-1} + 0.7051z^{-2})(1 - 1.0106z^{-1} + 0.3583z^{-2})} \times \frac{1}{(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2})}.$$

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان







مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

مثال ۳–۷: یک فیلتر پایین گذر گسسته در زمان با مشخصات زیر به روش bilinear طراحی کنید:

$$0.99 \le \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 1.01 \quad |\omega| < 0.4\pi$$

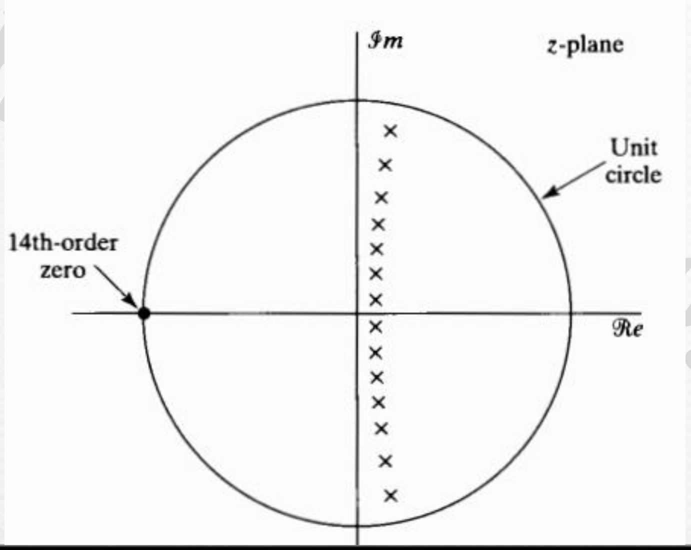
$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 0.001 \quad 0.6\pi \le |\omega| < \pi$$

الف) به کمک فیلتر باترورث

ب) به کمک فیلتر باترورث

حل: با روندی که در دو مثال قبل دیدیم، می‌توان نشان داده که به یک فیلتر باترورث با مرتبه ۱۴ نیاز است.

مرتبه فیلتر ۱۴ است بنابراین ۱۴ صفر در $s = \infty$ فیلتر پیوسته در زمان وجود دارد که به ۱۴ صفر $z = -1$ نگاشت می‌شود.



مقدمه

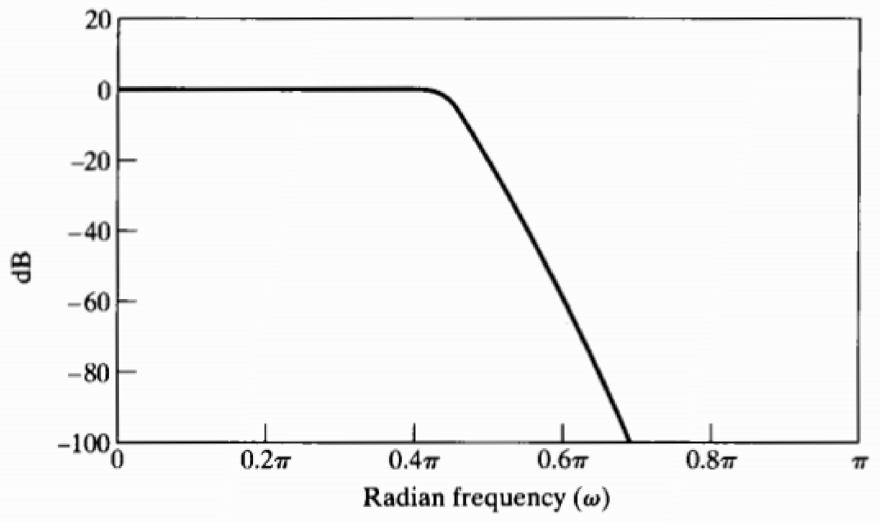
طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

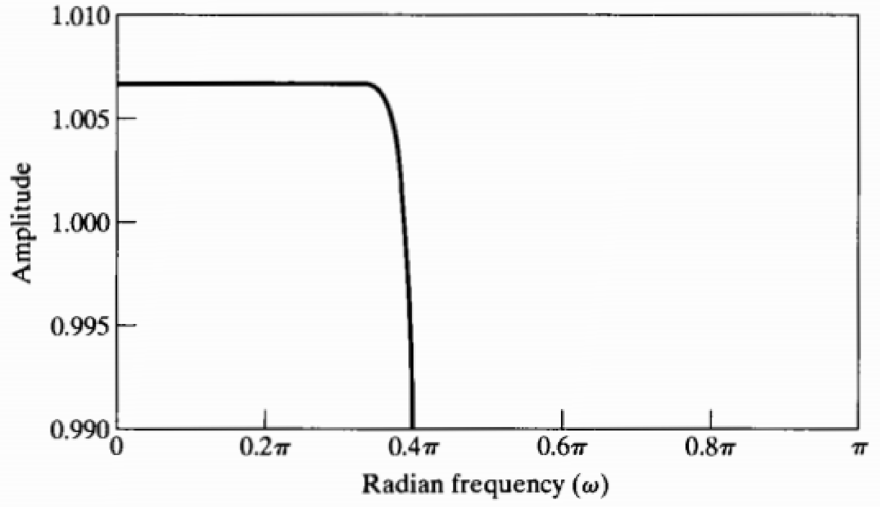
بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان



(a)

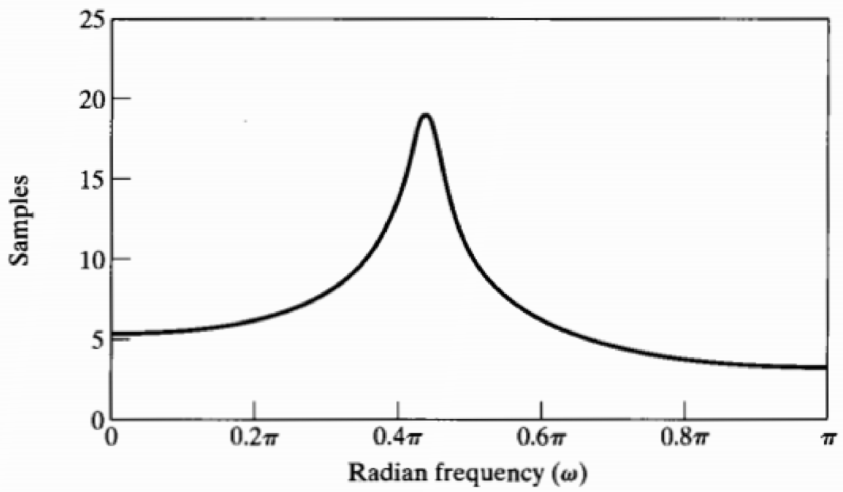


(b)

الف) پاسخ فرکانسی فیلتر بر حسب dB

ب) پاسخ فرکانسی فیلتر فقط در باند عبور

ج) تاخیر گروه



(c)

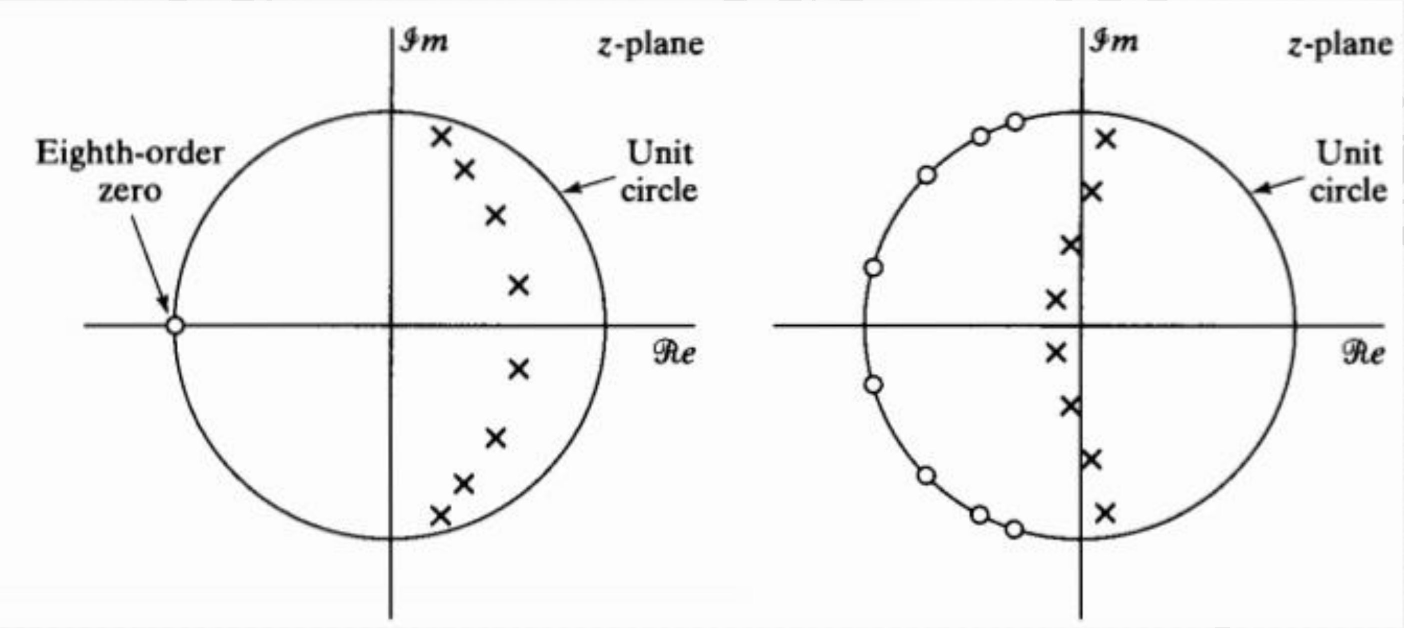
طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

حل (ب):

فیلتر چبی شف دو نوع I و II دارد که در مباحث قبلی تنها فیلتر چبی شف نوع I معرفی شد.

طراحی فیلتر پیوسته در زمان به روش bilinear و فیلتر چبی شف نوع I یا II ، منجر به یک فیلتر مرتبه ۸ می شود.

نگاشت صفرها در فیلتر نوع I به صورت ۸ صفر $z=-1$ و در فیلتر نوع II به صورت ۸ صفر بر روی دایره واحد است.



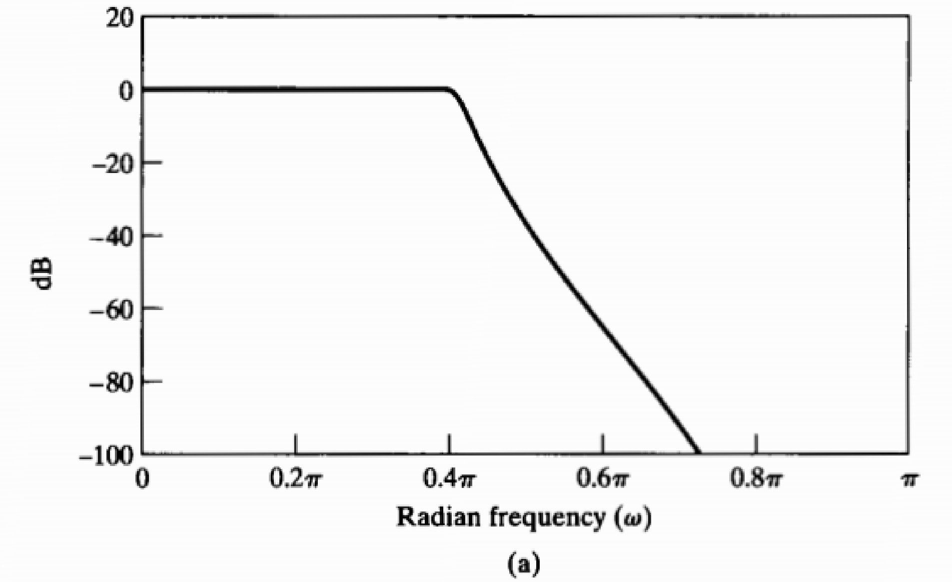
طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان

فیلتر چبی شف مرتبه ۸ نوع I

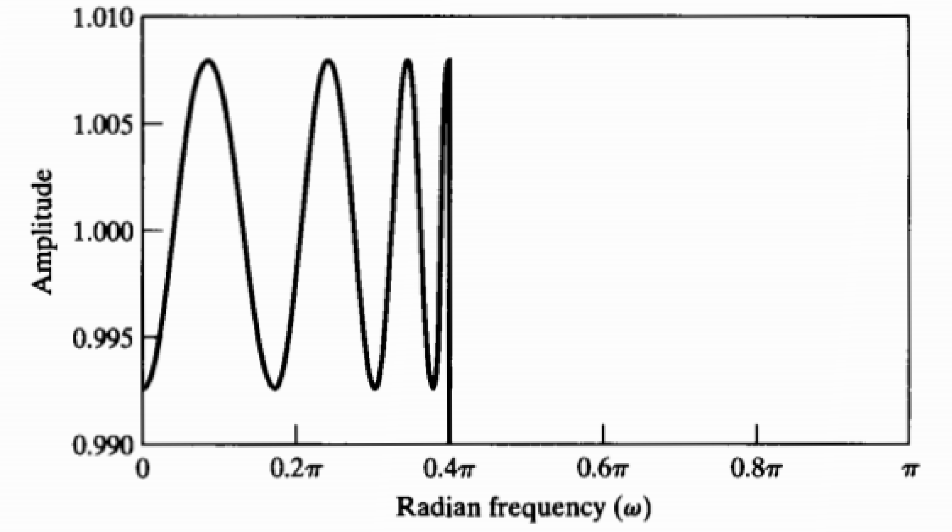
الف) پاسخ فرکانسی فیلتر بر حسب dB

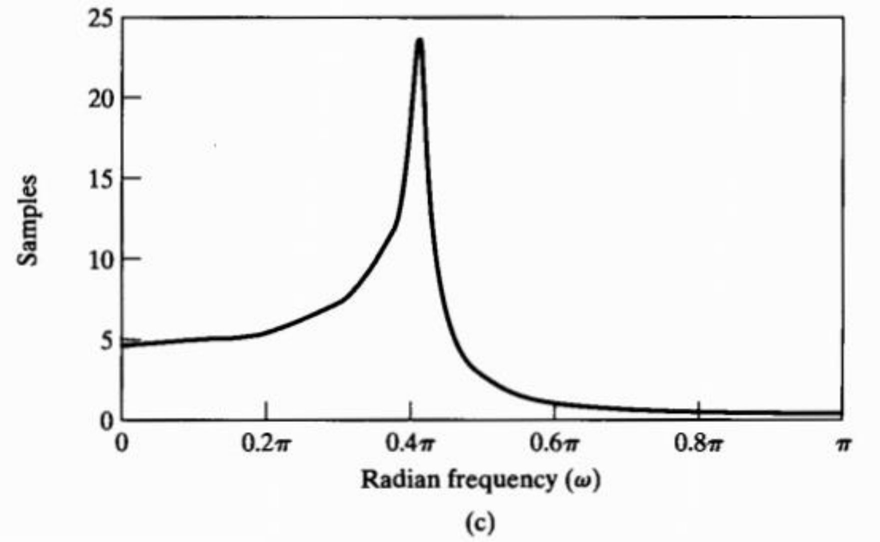
ب) پاسخ فرکانسی فیلتر فقط در باند عبور

ج) تاخیر گروه



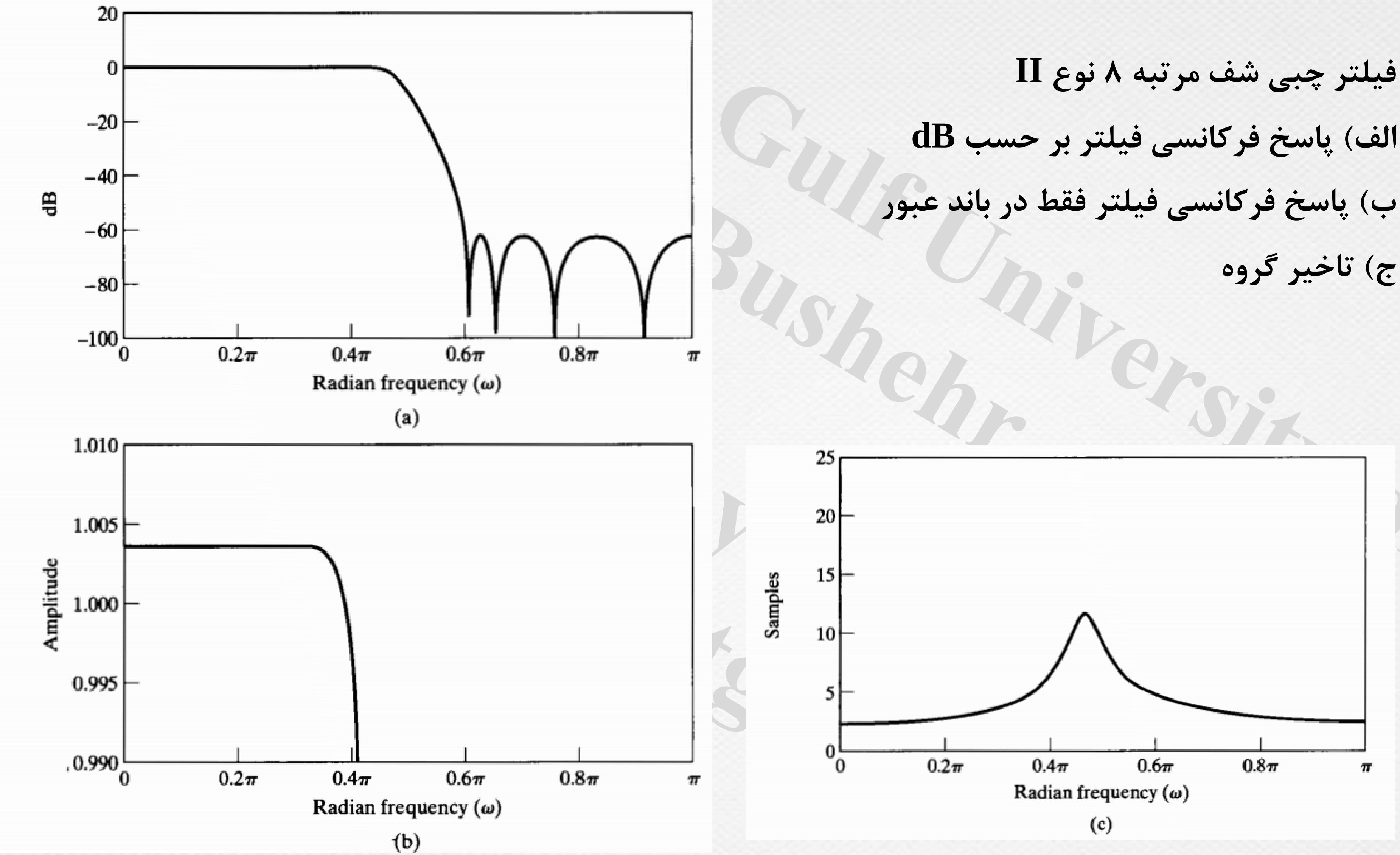
(a)





(c)

طراحی فیلتر IIR گسسته در زمان بر اساس فیلترهای پیوسته در زمان



فیلتر چبی شف مرتبه ۸ نوع II

الف) پاسخ فرکانسی فیلتر بر حسب dB

ب) پاسخ فرکانسی فیلتر فقط در باند عبور

ج) تاخیر گروه

طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

❖ روش پنجره کردن ساده‌ترین روش طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان است

فرض کنید $h_d[n]$ یک فیلتر گسسته در زمان ایده‌آل باشد. در فصل ۵ دیدیم که این فیلتر غیرسببی و طول بینهایت دارد.

اگر $w[n]$ یک پنجره دلخواه باشد، در این صورت فیلتر FIR غیر ایده‌آل به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

ساده‌ترین انتخاب برای $w[n]$ یک پنجره مستطیلی شکل به طول $M+1$ است یعنی:

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le M \\ 0 & n < 0 \text{ یا } n > M \end{cases}$$

در این صورت:

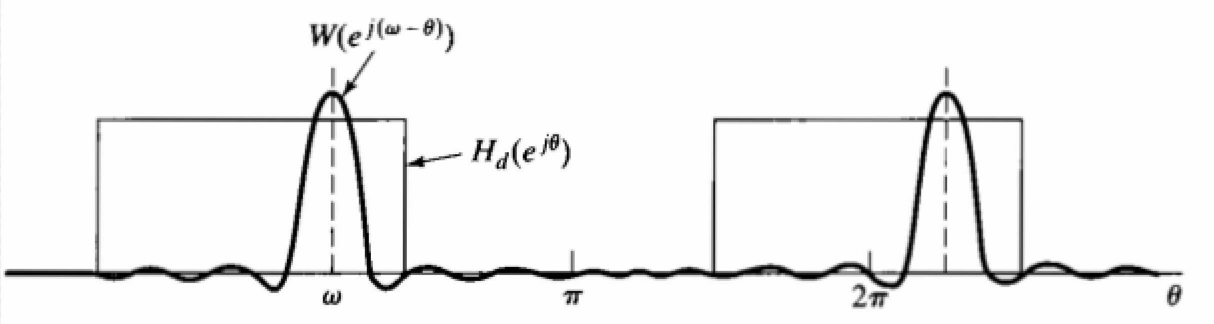
$$h[n] = \begin{cases} h_d[n] & 0 \le n \le M \\ 0 & n < 0 \text{ یا } n > M \end{cases}$$

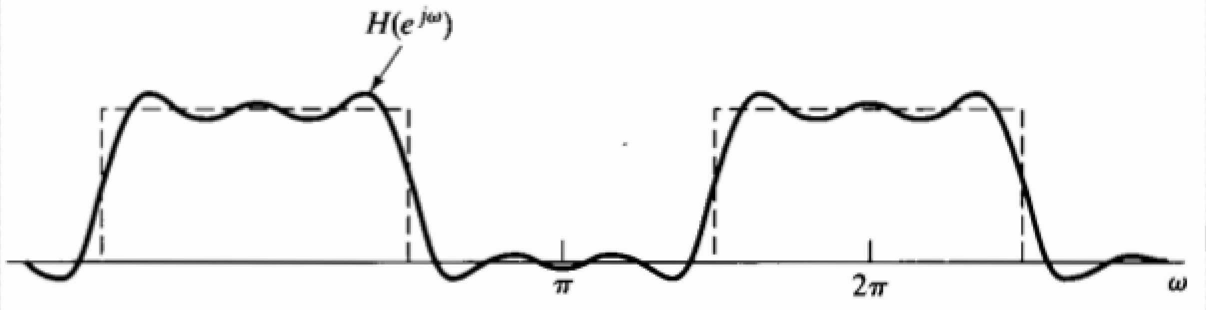
طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

بررسی رفتار فرکانسی:

چون $h[n] = h_d[n]w[n]$ پس داریم:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) \circledast_{2\pi} W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$



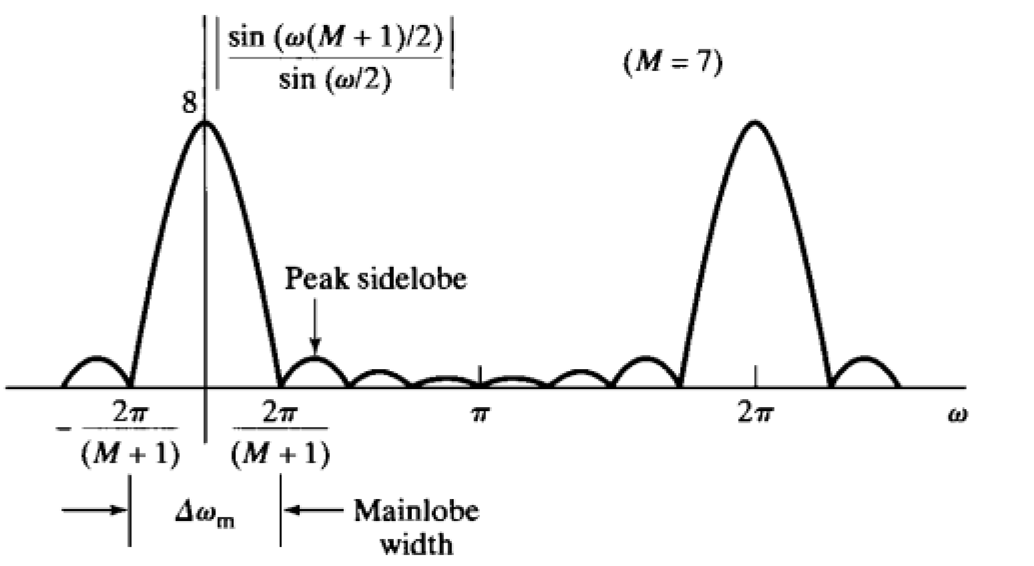


طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

در واقع تبدیل فوریه $W(e^{j\omega})$ با فرض مستطیلی بودن $w[n]$ به صورت زیر است:

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{M}{2}}\frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin\omega/2}$$

با فرض $M = 7$ اندازه تبدیل فوریه بالا به صورت است:



تعریف: لوب اصلی برابر با فاصله بین اولین صفر قبل و بعد از مبدا فرکانسی تعریف می‌شود.

تعریف: پیک لوب کناری برابر با ماکزیمم دامنه اولین گلبرگ فرعی اندازه پاسخ فرکانسی تعریف می‌شود

طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

نکات طراحی:

۱- پهنای لوب اصلی برای یک پنجره مستطیلی با پارامتر M برابر است با:

$$\omega_m = \frac{4\pi}{M+1}$$

۲- هر چه M افزایش یابد، پهنای گلبرگ اصلی (و دیگر گلبرگ‌ها) کاهش می‌یابد و فیلتر $h[n]$ به فیلتر $h_d[n]$ نزدیک می‌شود.

۳- در مقابل با **کاهش** پهنای گلبرگ‌ها، پیک دامنه گلبرگ‌ها **افزایش** می‌یابد (مساحت زیر هر گلبرک ثابت می‌ماند).

نتیجه: با افزایش M نسبت پیک‌ها عوض نمی‌شود. در پنجره مستطیلی همواره به ازای هر M دلخواه، پیک اول کناری برابر با ‎-۱۳ dB و افت باند توقف حدود ‎-۲۱ dB است.

- اگر به فیلترهایی با افت بهتر نیاز باشد، باید نوع پنجره عوض شود.

طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

دیگر پنجره‌های پرکاربرد:

۲- پنجره مثلثی (Bartlett):

$$w[n]=\begin{cases}2n/M & 0\le n\le M/2\\ 2-2n/M & M/2\le n\le M\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

۳- پنجره hanning:

$$w[n]=\begin{cases}0.5-0.5\cos(2\pi n/M) & 0\le n\le M\\ 0 & n<0 \text{ یا } n>M\end{cases}$$

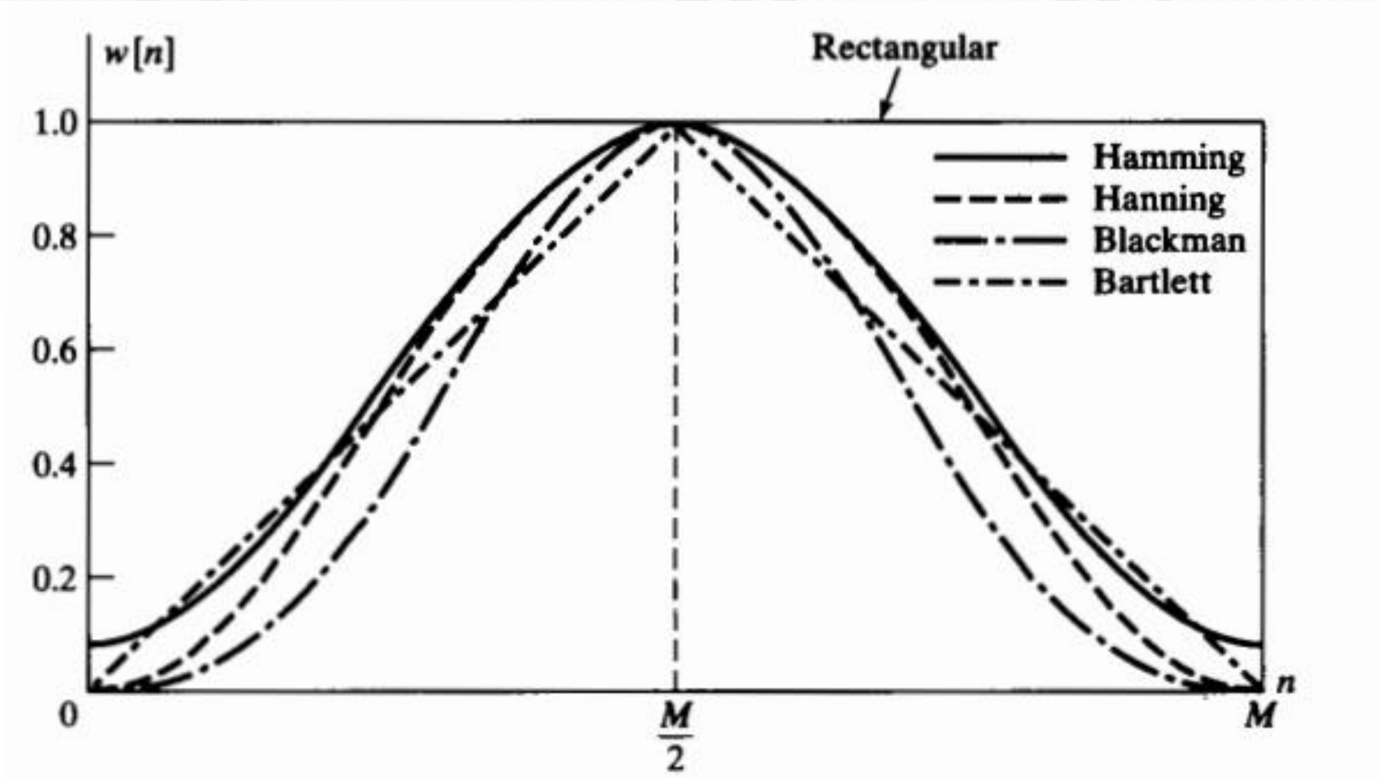
۴- پنجره hamming:

$$w[n]=\begin{cases}0.54-0.46\cos(2\pi n/M) & 0\le n\le M\\ 0 & n<0 \text{ یا } n>M\end{cases}$$

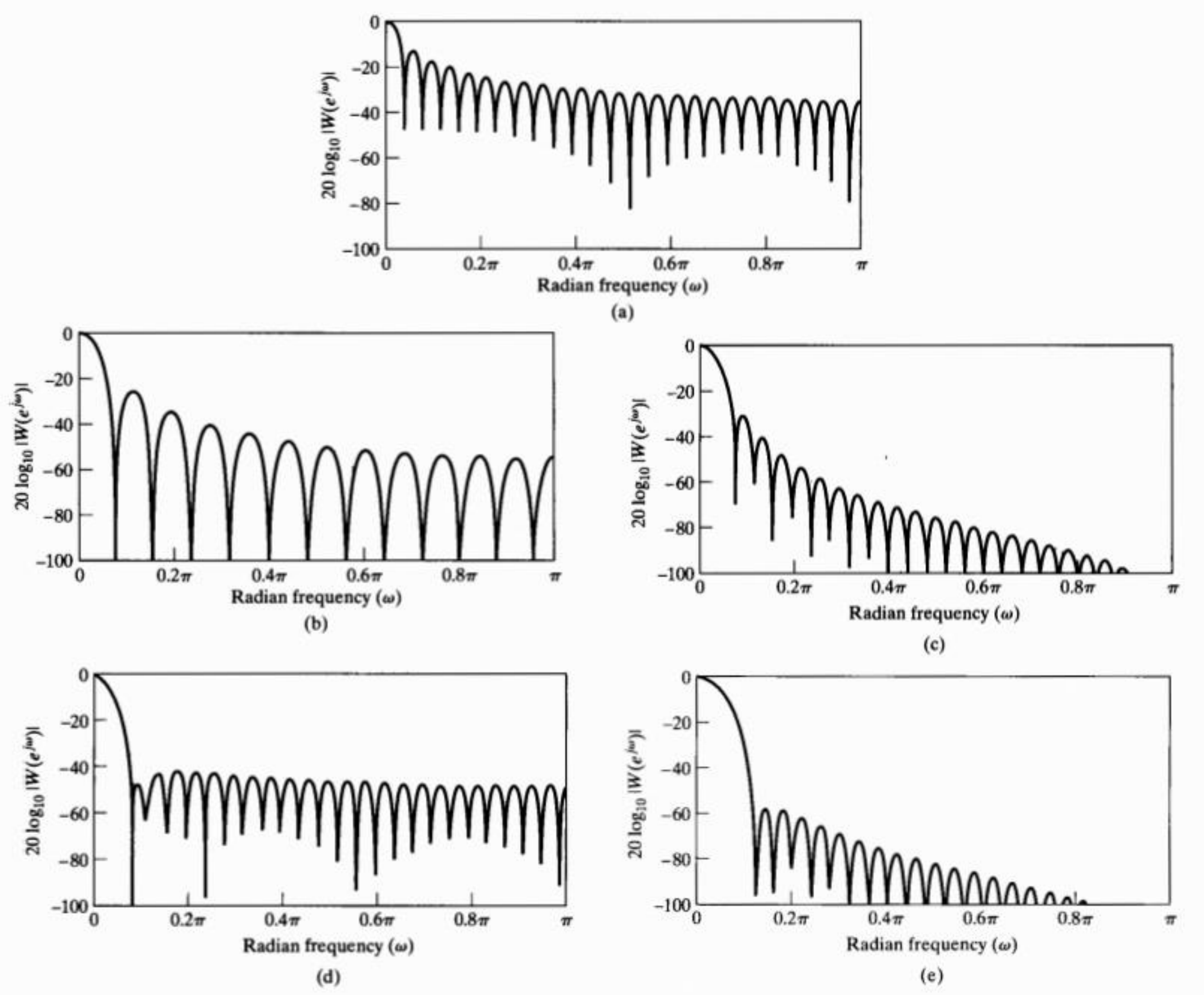
طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

۵- پنجره blackman:

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos(2\pi n/M) - 0.08\cos(4\pi n/M) & 0 \le n \le M \\ 0 & n < 0 \text{ یا } n > M \end{cases}$$



طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن



طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

TABLE 7.1 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20\log_{10}\delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, β	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	−13	$4\pi/(M+1)$	−21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	−25	$8\pi/M$	−25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	−31	$8\pi/M$	−44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	−41	$8\pi/M$	−53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	−57	$12\pi/M$	−74	7.04	$9.19\pi/M$

طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

تکنیک طراحی پنجره Kaiser:

تعامل بین پهنای لوب اصلی و پیک لوب کناری می‌تواند با جستجوی پنجره متمرکز حول $\omega = 0$ حاصل شود.

Kaiser به کمک تابع بسل مرتبه صفر اصلاح شده، پنجره زیر را پیشنهاد داد:

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left(\beta\left(1-\left[\frac{n-\alpha}{\alpha}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{I_0(\beta)} & 0 \le n \le M \\ 0 & n < 0 \text{ یا } n > M \end{cases}$$

$\alpha = M/2$ و $I_0(.)$ تابع بسل اصلاح شده مرتبه صفر نوع اول است.

نکته: تفاوت اصلی این پنجره نسبت به تمام پنجره‌های قبلی، وجود دو پارامتر تنظیم β و α در طراحی فیلتر است که البته α متناسب با طول پنجره $M+1$ است. پنجره‌های قبلی فقط یک پارامتر M داشتند.

مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

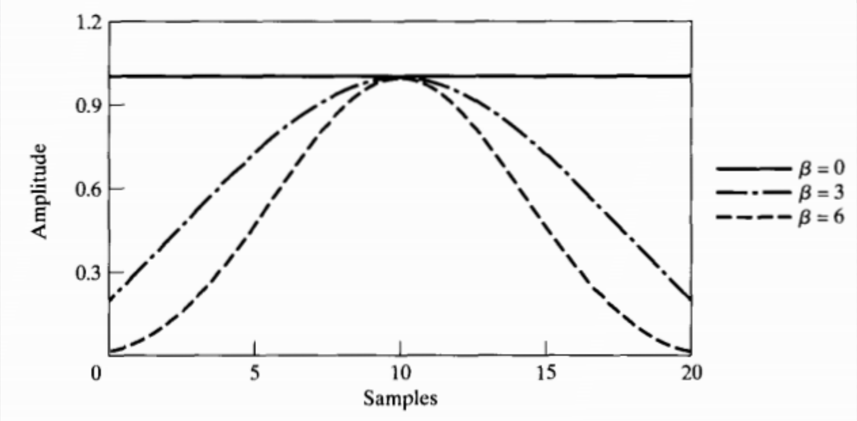
طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

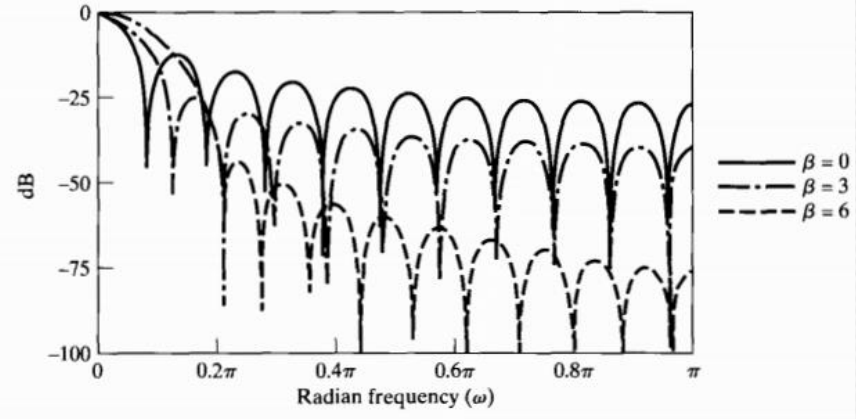
تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

اثر $\boldsymbol{\beta}$: در شکل زیر به ازای $M+1=21$ و مقادیر مختلف β پنجره و پاسخ فرکانسی فیلتر آورده شده است.

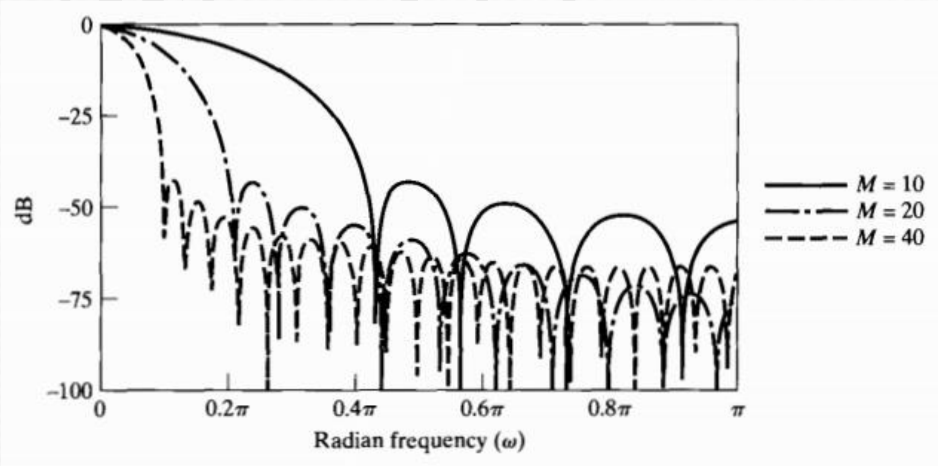


(a)



(b)

اثر $\boldsymbol{M}$: در شکل زیر به ازای $\beta=6$ و مقادیر مختلف M پنجره و پاسخ فرکانسی فیلتر آورده شده است.



طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

❖ هر چه $h[n]$ مخروطی‌تر باشد؛ دامنه لوب کناری کوچکتر و پهنای لوب اصلی بیشتر می‌شود.

❖ هر چه M افزایش یابد (β ثابت)، لوب اصلی باریکتر می‌شود ولی دامنه لوب کناری تغییری نمی‌کند.

طراحی به روش پنجره Kaiser:

در این روش با فرض اینکه $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ باشد و پهنای باند به صورت $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ تعریف شود، پارامترهای β و M به صورت زیر انتخاب می‌شوند: ($A_s = -20\log_{10}\delta$)

$$\beta = \begin{cases} 0.1102\,(A_s - 8.7) & A_s > 50 \\ 0.5842(A_s - 21)^{0.4} + 0.07886(A_s - 21) & 21 < A_s < 50 \\ 0 & A_s < 21 \end{cases}$$

و

$$M = \frac{A_s - 8}{2.285\Delta\omega}$$

طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

مثال ۴–۷: یک فیلتر پایین گذر گسسته در زمان با مشخصات زیر به روش طراحی پنجره Kaiser طراحی کنید:

$$0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01 \quad |\omega| < 0.4\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.001 \quad 0.6\pi \leq |\omega| < \pi$$

حل: در این مساله $\omega_p = 0.4\pi$ ، $\omega_s = 0.6\,\pi$ و $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$ است.

علاوه بر این $\delta_1 = 0.01$ و $\delta_2 = 0.001$ است و بنابراین می‌گیریم $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0.001$. پس:

$$A_s = -20\log_{10} 0.001 = 60\text{ dB}$$

پارامترهای β و M برابرند با:

$$\beta = 0.1102\,(A_s - 8.7) = 5.653$$

$$M = \frac{A_s - 8}{2.285\Delta\omega} = 36.21 \rightarrow M = 37$$

طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

پس داریم:

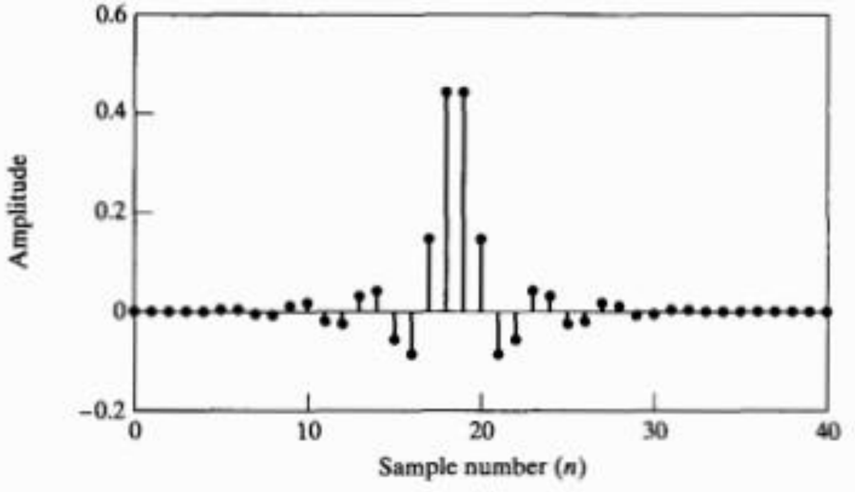
$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left(5.653\left(1-\left[\dfrac{n-18.5}{18.5}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{I_0(5.653)} & 0 \le n \le M \\ 0 & n<0 \text{ یا } n>M \end{cases}$$

با ضرب پنجره Kaiser بالا در فیلتر ایده‌آل $h_d[n] = \frac{\sin \omega_c(n-\alpha)}{\omega_c(n-\alpha)}$ داریم:

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin 0.5\pi(n-18.5)}{0.5\pi(n-18.5)} \dfrac{I_0\left(5.653\left(1-\left[\dfrac{n-18.5}{18.5}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{I_0(5.653)} & 0 \le n \le M \\ 0 & n<0 \text{ یا } n>M \end{cases}$$

مقدمه
طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان
طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان
بهینه سازی پارامترهای طراحی
تبدیل فیلترها

طراحی فیلتر FIR گسسته در زمان با تکنیک پنجره کردن

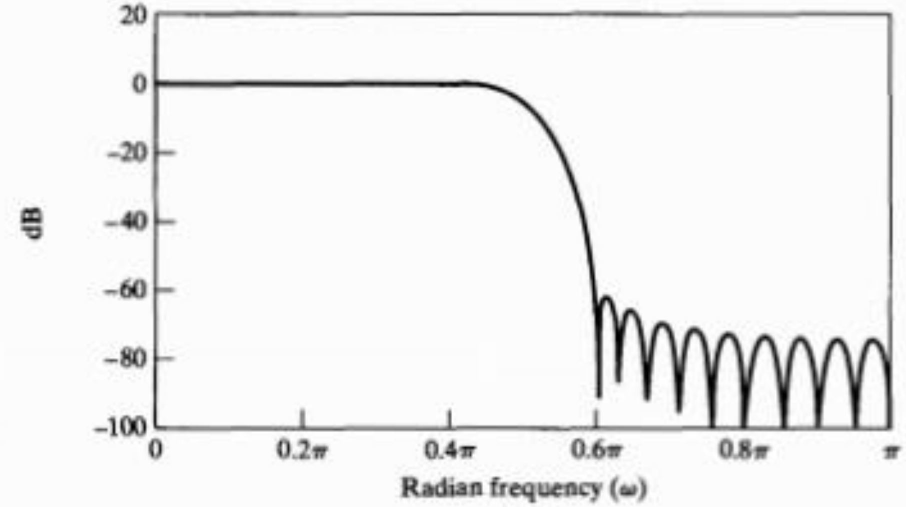


(a)

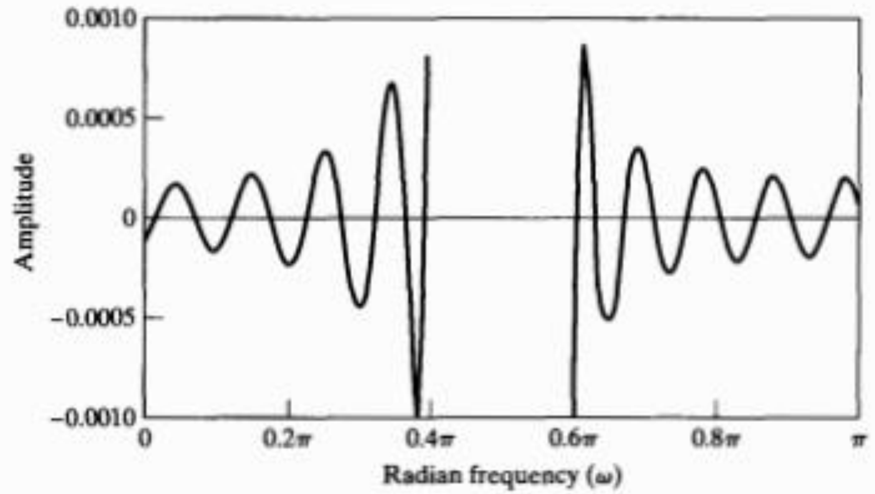
الف) پاسخ ضربه فیلتر

ب) پاسخ فرکانسی فیلتر فقط در باند عبور

ج) راپیل پاسخ فرکانسی در باند عبور و باند توقف



(b)



(c)

بهینه سازی پارامترهای طراحی فیلتر

❖ طراحی فیلتر FIR با روش پنجره کردن، بر اساس تقریب مینی‌مم میانگین مربع خطا بین پاسخ فرکانسی فیلتر ایده‌آل و فیلتر طراحی شده است یعنی هدف مینی‌مم کردن رابطه زیر است:

$$\epsilon^2 = \min \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

❖ این روش، نتایج خوبی در نقاط ناپیوستگی فیلتر (از باند عبور به باند توقف) ندارد. در مقابل روش‌های دیگری مثل، معیار minmax (مینی‌مم کردن ماکزیمم خطا) و معیار خطای فرکانس وزنی، به نتایج بهتری منجر می‌شود.

فرضیات:

۱- طراحی یک فیلتر پایین گذر نوع I به صورت $h[n] = h[-n]$,$n = -L, \dots, L$

۲- $\max \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right| \leq \delta_1$ به ازای $0 \leq \omega \leq \omega_p$

۳- $\max \left| H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right| \leq \delta_2$ به ازای $\omega_s \leq \omega \leq \pi$

مقدمه

طراحی فیلترهای IIR گسسته در زمان

طراحی فیلترهای FIR گسسته در زمان

بهینه سازی پارامترهای طراحی

تبدیل فیلترها

بهینه سازی پارامترهای طراحی فیلتر

طراحی به روش Park-McClellan :

فرضیات: طراحی یک فیلتر با مشخصات بالا

این فیلتر فعلا یک فیلتر غیر سببی است که می‌توان با شیفت به اندازه $L/2$ به یک فیلتر سببی با فاز خطی رسید. پاسخ فرکانسی فیلتر برابر است با:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^{L} h[n]e^{-j\omega n} = h[0] + \sum_{n=1}^{L} 2h[n]\cos\omega n$$

$\cos\omega n$ را می‌توان به صورت مجموعی از توان‌های $\cos\omega$ نوشت یعنی:

$$\cos\omega n = T_n(\cos\omega)$$

که T_n یک چندجمله ای مرتبه n است. پس در این صورت می‌توان نوشت:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L} \alpha_n \cos^n\omega$$

بهینه سازی پارامترهای طراحی فیلتر

با فرض $x = \cos\omega$ داریم:

$$P(x) = H(e^{j\omega})\Big|_{(\cos\omega = x)} = \sum_{n=0}^{L} \alpha_n x^n$$

❖ نکته کلیدی این طراحی، ثابت نگه داشتن ω_s و ω_p و تغییر مقادیر δ_1,δ_2 است.

❖ Park-McClellan نشان داد که این مساله طراحی، به تقریب چبی شف منتهی می‌شد.

❖ مساله طراحی به صورت مینی‌مم کردن خطا در باند عبور و باند توقف تعریف می‌شود. یعنی بررسی باند گذر اهمیتی ندارد.

$$E(\omega) = W(\omega)\left[H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})\right]$$

با فرض پایین‌گذر بودن فیلتر داریم:

$$W(\omega) = \begin{cases} 1/K, & 0 \le \omega \le \omega_p \\ 0, & \omega_s \le \omega \le \pi \end{cases}, \qquad K = \delta_1/\delta_2$$

بهینه سازی پارامترهای طراحی فیلتر

به دنبال یک $h[n]$ هستیم که در باند عبور و باند توقف فرکانسی، ماکزیمم خطای وزنی فرکانسی را مینی‌مم کند یعنی:

$$\min_{h[n],n=0,1,2,..L}\left(\max_{\omega\in F}|E(\omega)|\right)$$

که $F=\{0\le\omega\le\omega_p\}U\{0\le\omega\le\omega_s\}$. برای حل مساله بالا، از قضیه جایگزینی استفاده می شود

قضیه جایگزینی (Alternation Theory):

فرض کنید $P(x)=\sum_{n=0}^{L}a_nx^n$ است و F_p اجتماع دو مجموعه پیوسته است. همچنین فرض کنید که

$$E_p(x)=W_p(x)\left[D_p(x)-P(x)\right]$$

که $D_p(x)$ تابع مطلوب، $P(x)$ تابع هدف بر روی F_p باشد. میخواهیم با تعیین $P(x)$ ، عبارت زیر را بهینه کنیم:

$$\min_{P(x)}\left(\max_{x\in F_p}|E(x)|\right)$$

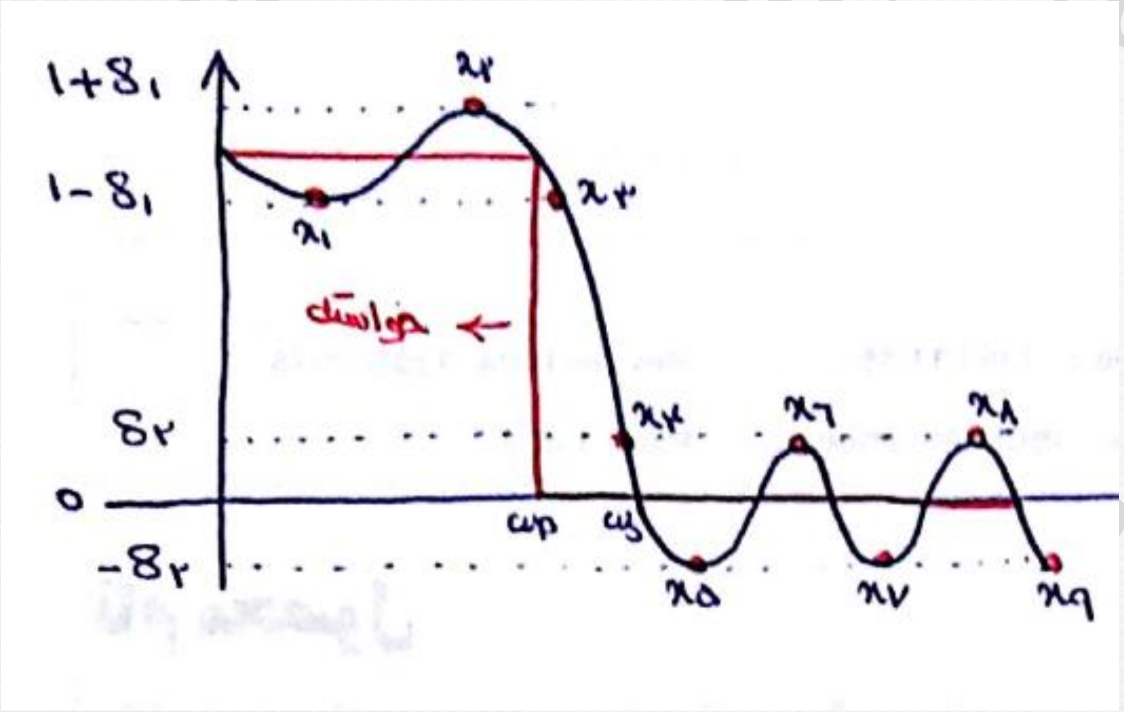
بهینه سازی پارامترهای طراحی فیلتر

شرط لازم و کافی برای حل این مساله این است که $(L+2)$ مقدار x وجود داشته باشد به طوریکه در این نقاط

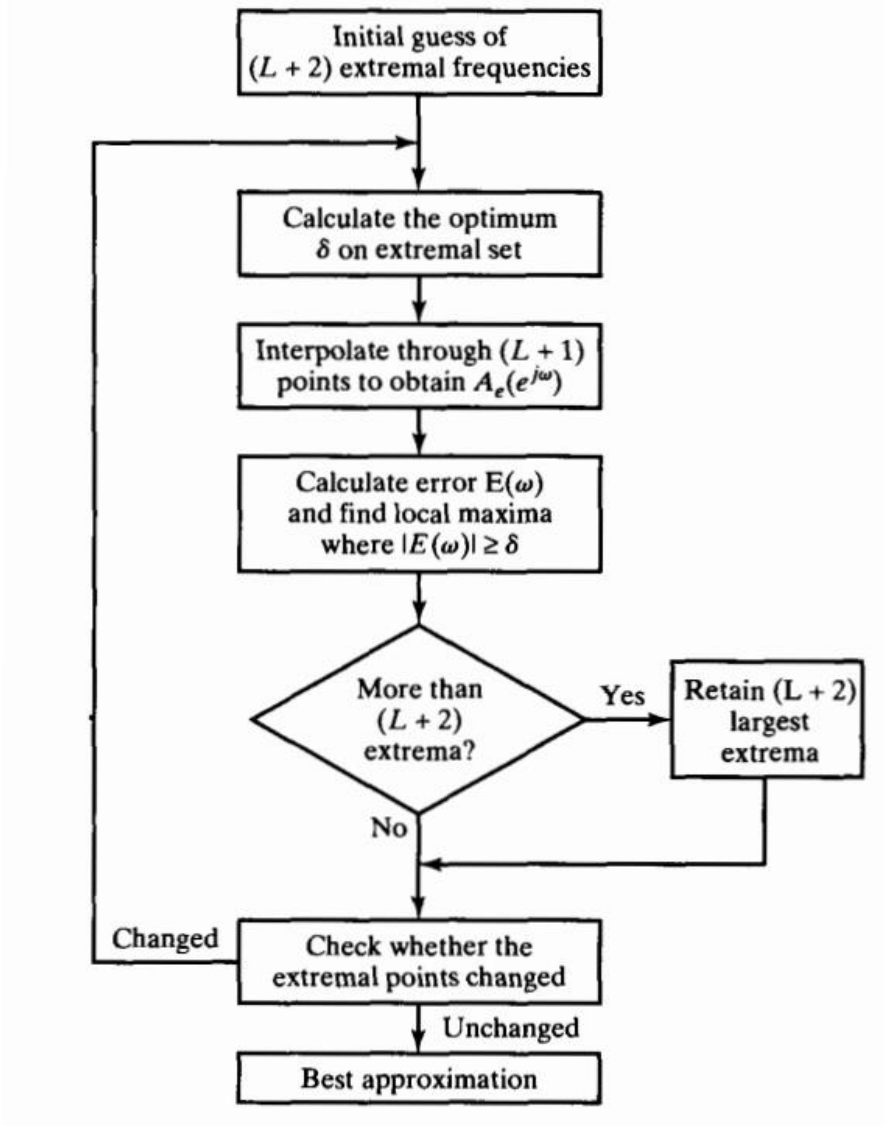
$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{L+2}$$

و

$$E_p(x_i) - E_p(x_{i+1}) = \pm|E| \quad i = 1,2,\ldots,L+1, \qquad |E| = \max_{x\in F_p}|E(x)|$$



بهینه سازی پارامترهای طراحی فیلتر



End of Chapter 7