پردازش سیگنال های دیجیتال پیشرفته

فصل سوم
فیلترهای دیجیتال

ارایه شده توسط:

حجت قیمت گر

استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مطالب

- مشخصات فیلترهای دیجیتال
- طراحی فیلترهای FIR
- طراحی فیلترهای IIR
- فیلترهای تمام گذر
- انواع فیلترهای دیگر

فیلترهای دیجیتال

❖ یک فیلتر گسسته در زمان (دیجیتال شده) LTI در نظر بگیرید. $H(e^{j\omega})$ پاسخ فرکانسی فیلتر نامیده می شود.

❖ اگر ضرایب فیلتر $h[n]$ همگی **حقیقی** باشند آنگاه ثابت می شود که اندازه پاسخ فرکانسی تقارن زوج و فاز آن تقارن فرد دارد. یعنی

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$

$$\prec H(e^{-j\omega}) = -\prec H(e^{j\omega})$$

تعریف (فیلتر با فاز خطی): فیلتری دیجیتال در صورتی فاز خطی دارد که فاز فیلتر به صورت تابع خطی از ω باشد یعنی:

$$\phi(\omega) = \prec H(e^{j\omega}) = -K\omega$$

در این صورت، می‌توان فیلتر با فاز خطی را به صورت زیر نوشت:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)} = cH_R(\omega)\, e^{-jK\omega} \qquad (۱)$$

که c یک عدد حقیقی فرض می شود.

❖ $H_R(\omega)$ ، فیلتر فاز صفر نامیده می شود

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

فیلترهای دیجیتال

حال تبدیل Z یک فیلتر **LTI** و **FIR** سببی را در نظر بگیرید: $H(z) = \sum_{n=0}^{N} h[n]z^{-n}$

ثابت می‌شود که فیلتر $h[n]$ در صورتی فاز خطی دارد (معادله ۱) که $h[n]$ یا تقارن زوج یا تقارن فرد حول $N/2$ داشته باشد.

طول فیلتر N است که می‌توان زوج یا فرد باشد. بنابراین به طور کلی چهار نوع فیلتر FIR با فاز خطی تعریف می شود:

Type	1	2	3	4
Symmetry	$h(n) = h(N-n)$	$h(n) = h(N-n)$	$h(n) = -h(N-n)$	$h(n) = -h(N-n)$
Parity of N	N even	N odd	N even	N odd
Expression for frequency response $H(e^{j\omega})$	$e^{-j\omega N/2}H_R(\omega)$	$e^{-j\omega N/2}H_R(\omega)$	$je^{-j\omega N/2}H_R(\omega)$	$je^{-j\omega N/2}H_R(\omega)$
Amplitude response or zero-phase response $H_R(\omega)$	$\sum_{n=0}^{M} b_n \cos(\omega n)$ $M = N/2$	$\cos\frac{\omega}{2} \sum_{n=0}^{M} b_n \cos(\omega n)$ $M = (N-1)/2$	$\sin\omega \sum_{n=0}^{M} b_n \cos(\omega n)$ $M = (N-2)/2$	$\sin\frac{\omega}{2} \sum_{n=0}^{M} b_n \cos(\omega n)$ $M = (N-1)/2$
Special features		Zero at $\omega = \pi$	Zero at $\omega = 0$ and π	Zero at $\omega = 0$
Can be used for	Any type of bandpass response (LPF, HPF, etc.)	Any bandpass response except Highpass	Differentiators and and Hilbert transformers†	Differentiators, Hilbert transformers, and high pass filters

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

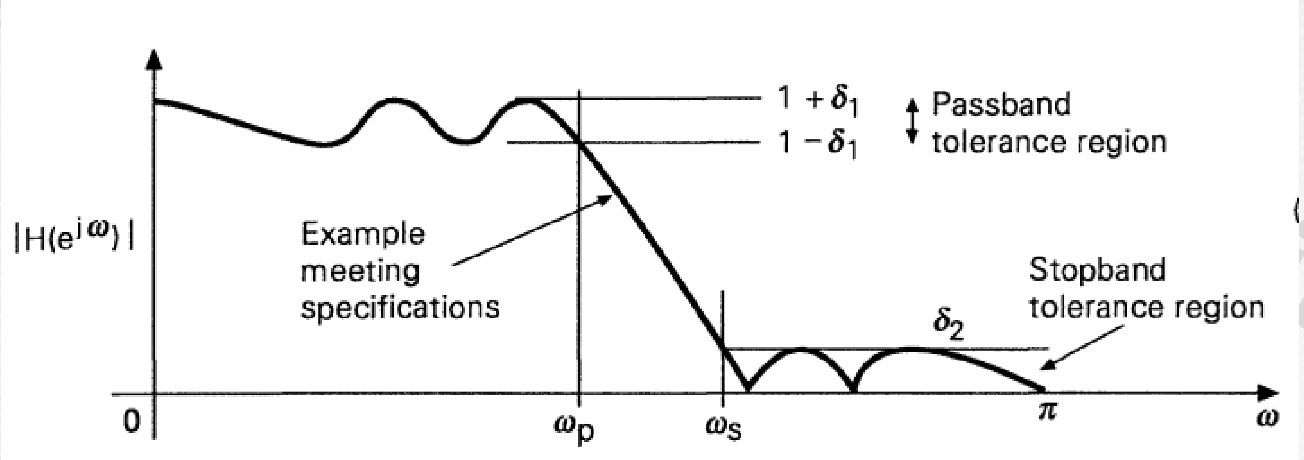
فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

مشخصات فیلترهای دیجیتال

- ❖ می‌دانیم که تبدیل فوریه گسسته در زمان همواره متناوب با دوره 2π است. به طور مرسوم بازه $(-\pi,\pi)$ در متون استفاده می شود.
- ❖ اگر ضرایب فیلتر حقیقی باشد، آنگاه اندازه فیلتر تقارن زوج دارد و بنابراین نمایش $(0,\pi)$ کفایت می کند. ما از این نمایش برای فیلترهای گسسته در زمان حقیقی استفاده می‌کنیم.



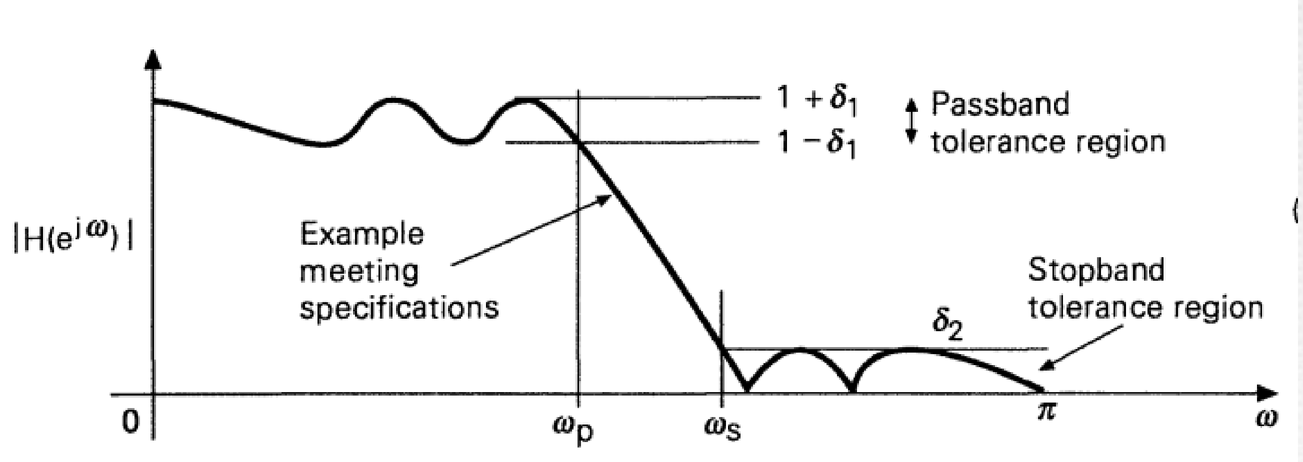
تعاریف:

باند عبور: محدوده $0 \le \omega \le \omega_p$

باند گذر: محدوده $\omega_p \le \omega \le \omega_s$

باند توقف: محدوده $\omega_s \le \omega \le \pi$

مشخصات فیلترهای دیجیتال



تعاریف:

پیک رایپل باند عبور: δ_1

پیک رایپل باند توقف: δ_2

پیک رایپل باند عبور dB: $A_p = -20\log_{10}(1-\delta_1)$

مینی‌مم تضعیف باند توقف dB: $A_s = -20\log_{10}(\delta_2)$

فرکانس لبه باندگذر: ω_p

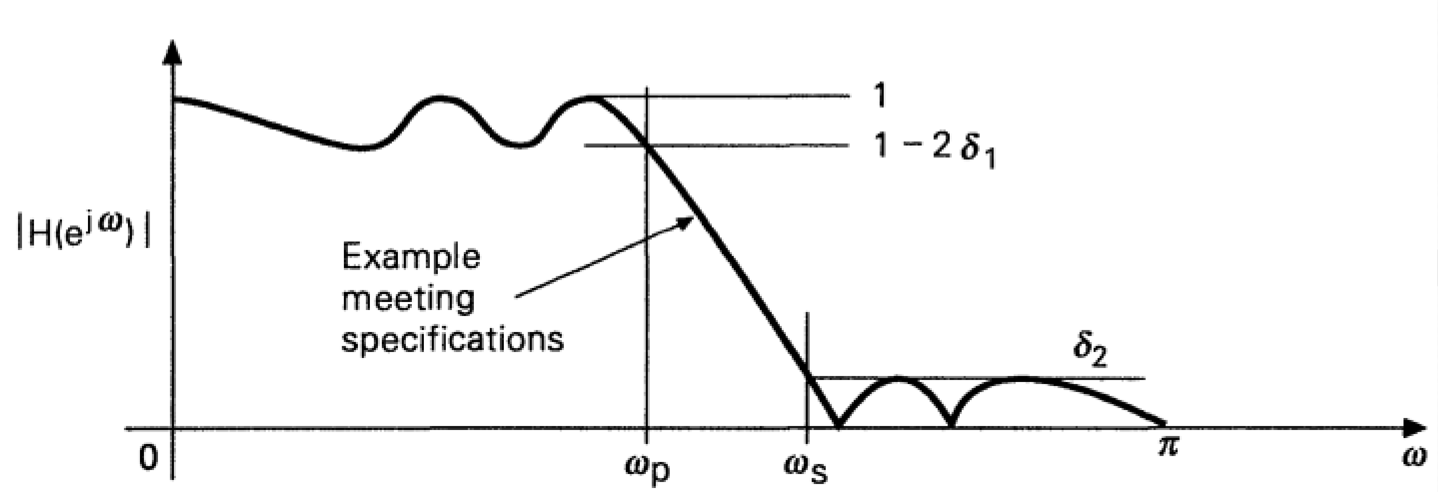
فرکانس لبه باند توقف: ω_s

پهنای باند گذر: $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ یا معادلا $\Delta f = f_s - f_p$

مشخصات فیلترهای دیجیتال

مشخصات نرمالیزه:

به منظور مقایسه فیلترها، عموما از نمایش نرمالیزه استفاده می شود. به منظور نرمالیزه کردن فیلتر، اندازه فیلتر بر ماکزیمم فیلتر یعنی $(1+\delta_1)$ تقسیم می شود:



اگر $1 \gg \delta_1$ باشد به سادگی میتوان ثابت کرد که:

$$A_p = -20\log_{10}(1-\delta_1) = 0.866\delta_1$$

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

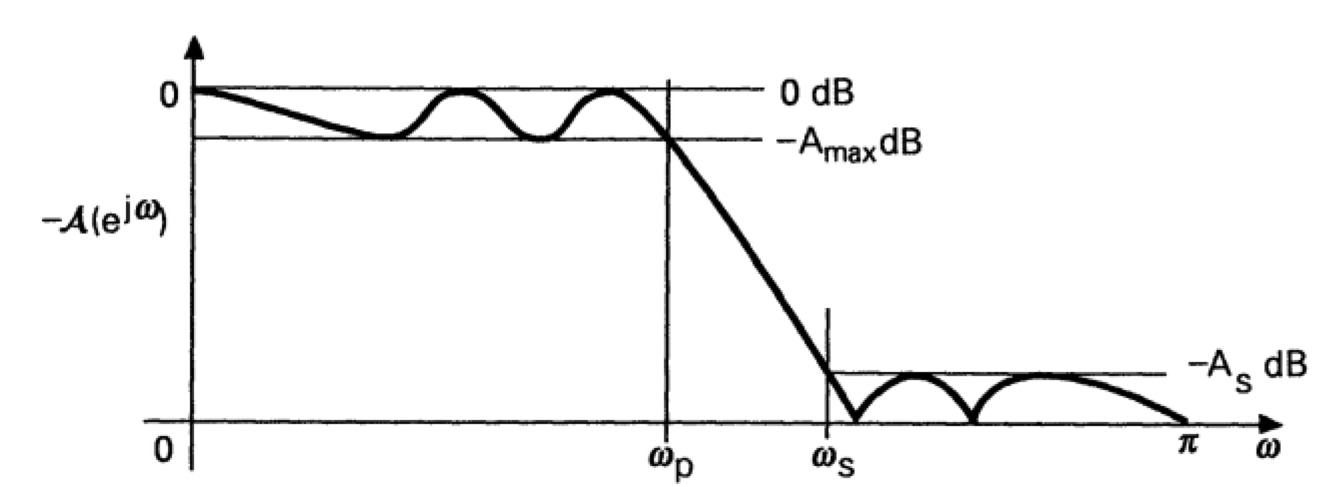
انواع فیلترهای دیگر

مشخصات فیلترهای دیجیتال

تعریف: تضعیف مشخصه فیلتر به صورت زیر تعریف می شود:

$$A(e^{j\omega}) = -20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$$

تعریف: پاسخ دامنه بر حسب dB به صورت زیر $-A(e^{j\omega})$ تعریف می شود.



معیارهای مدنظر در بهینه سازی فیلترها

فیلترهایی با رایپل یکنواخت:

❖ این فیلترها، ماکزیمم مقدار خطاها در یک باند معین، یکسان است.

❖ در این فیلترها چهار $\delta_1, \delta_2, \Delta f$ و درجه فیلتر N مد نظر است. اگر سه پارامتر ثابت فرض شوند، آنگاه پارامتر چهارم بهینه می شود.

❖ این بهینه سازی را minimax گویند، زیرا ماکزیمم سازی اندازه رایپل‌ها منجر به مینی‌مم سازی N و Δf می‌شود.

فیلترهایی Least-squares:

❖ در این فیلترها، هدف مینی‌مم کردن انتگرال قدرمطلق تفاضل بین فیلتر پیشنهادی و فیلتر ایده‌آل است.

❖ ساده‌ترین فیلتر از این نوع، فیلتر FIR مستطیلی است.

فیلترهایی با ماکزیمم صافی:

❖ با توجه به اهمیت فرکانس‌های نزدیک صفر، در این فیلتر به دنبال ماکزیمم درجه صافی در فرکانس‌های نزدیک صفر هستیم.

❖ معیار ماکزیمم صافی بر اساس تعداد مشقات صفر تابع $\left|H(e^{j\omega})\right|^2$ در $\omega = 0$ تعریف می‌شود.

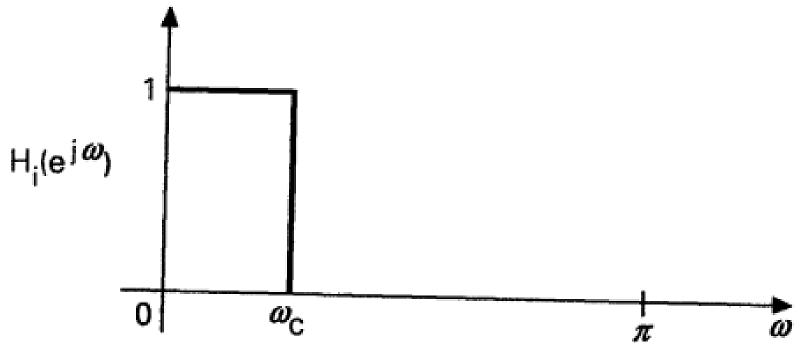
❖ مشهورترین فیلتر ماکزیمم صافی، فیلتر IIR باتروورث است.

دانشگاه خلیج فارس بوشهر
مشخصات فیلترها
فیلترهای FIR
فیلترهای IIR
فیلترهای تمام‌گذر
انواع فیلترهای دیگر

طراحی فیلترهای FIR

یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید:

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



$$h_i[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty \le n \le \infty$$

مزایا:

۱- پهنای باند گذر وجود ندارد.

۲- راiپل باند عبور صفر است

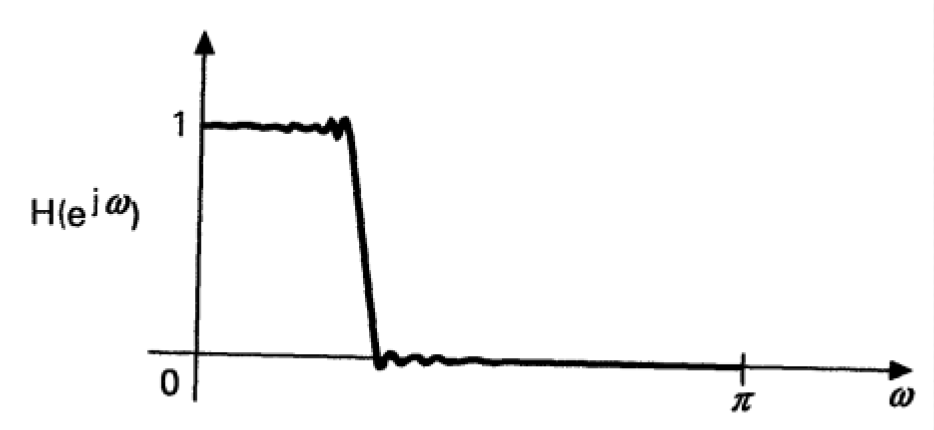
معایب:

۱- ثابت می‌شود که پاسخ ضربه $h[n]$ شرط پایداری را بر آورده نمی‌کند و سیستم ناپایدار است.

۲- فیلتر IIR و غیرسببی است به طوریکه به ازای هیچ مقدار شیفت زمانی، سببی نمی‌شود

طراحی فیلترهای FIR

حال فرض کنید یک فیلتر FIR به صورت زیر تعریف شود:



$$h[n] = \begin{cases} h_i[n] & |n| \leq N/2 \\ 0 & |n| > N/2 \end{cases}$$

در مساله (۵-۳) ثابت می شود که این انتخاب سبب می شود تا فیلتر بر اساس معیار حداقل مربعات طراحی شود. یعنی به ازای هر N دلخواه داریم:

$$\min \int_0^{2\pi} \left| H(e^{j\omega}) - H_i(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

نکته ۱: هم ریپل داریم و هم پهنای باند گذر داریم.

نکته ۲: با افزایش N پهنای باند گذر کاهش می‌یابد ولی اندازه راپیل کم نمی‌شود (پدیده Gibbs)

طراحی فیلترهای FIR

انواع روش‌های طراحی فیلترهای FIR:

۱- روش پنجره کردن:

در این روش، یک نمونه‌های فیلتر IIR پنجره می‌شوند:

$$h[n] = h_i[n]v[n]$$

که $h_i[n]$ فیلتر ایده آل IIR و $v[n]$ یک پنجره متقارن بر روی بازه $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$ است.

در حوزه فرکانس داریم:

$$H(e^{j\omega}) = H_i(e^{j\omega}) * V(e^{j\omega})$$

این کانولوشن سبب می شود که پهنای باند گذر و ماکزیمم ریپل فیلتر FIR به پارامترهای $v[n]$ مرتبط شود:

۱- پهنای باند لوب اصلی $V(e^{j\omega})$ متناسب با پهنای باند گذر (Δf) فیلتر FIR است.

۲- دامنه رایپل لوب کناری $V(e^{j\omega})$ متناسب با پیک رایپل باند گذر (A_p) و باند توقف (A_s) فیلتر FIR است.

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

طراحی فیلترهای FIR

❖ اگر $v[n]$ به صورت $v[n]=1\ ,\ |n|\le\frac{N}{2}$ تعریف شود همان پنجره مستطیلی مطرح شده در اسلاید ۸ را داریم.

❖ $v[n]$ را می‌توان به گونه‌های مختلفی طراحی کرد که هم لوب اصلی باریک شود و هم رایپل لوب کناری کاهش یابد. (دو هدفی که در اسلاید قبل مطرح شد)

❖ یکی از روش‌های انتخاب $v[n]$ ، پنجره Kaiser است. این فیلتر دو پارامتر N و β دارد:

$$v[n]=\begin{cases}\dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\dfrac{n}{0.5N}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & -\dfrac{N}{2}\le n\le\dfrac{N}{2}\\ 0, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

که $I_0(x)$ تابع بسل مرتبه صفر اصلاح شده است.

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

طراحی فیلترهای FIR

تنظیم پارامترهای N و β:

در اسلاید ۹ مطرح شد که پیک رایپل باند توقف A_s و پهنای باند گذر Δf فیلتر نهایی FIR به مشخصات پنجره انتحابی ربط دارد.

حال می‌خواهیم پارامتر فیلتر Kaiser را بر اساس A_s و Δf مورد نیاز تنظیم کنیم:

$$\beta = \begin{cases} 0.1102\,(A_s - 8.7) & A_s > 50 \\ 0.5842(A_s - 21)^{0.4} + 0.07886(A_s - 21) & 21 < A_s < 50 \\ 0 & A_s < 21 \end{cases}$$

و

$$N = \frac{A_s - 7.95}{14.36\Delta f}$$

نکته: ما A_s و متعاقبا δ_2 را کنترل می‌کنیم ولی کنترل مستقلی بر روی δ_1 نداریم. معمولا δ_1 که بدست می‌آید نزدیک به δ_2 است.

دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

۱۲

طراحی فیلترهای FIR

۲- فاکتوریزاسیون طیف:

یک فیلتر FIR با فاز صفر در نظر بگیرید. تابع تبدیل آن به صورت زیر است:

$$H(z) = \sum_{n=-M}^{M} h[n] z^{-n}$$

فرض کنید $H(e^{j\omega})$ **حقیقی** است. اگر $\forall\omega$, $\boldsymbol{H(e^{j\omega}) > 0}$ می‌توان گفت:

$$H(e^{j\omega}) = \left|H_0(e^{j\omega})\right|^2$$

یا عبارت دیگر:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = H_0(e^{j\omega})H_0^*(e^{j\omega}) \rightarrow \quad H(z) = \widetilde{H_0}(z)H_0(z)$$

که $\widetilde{H_0}(z) = H_0^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$ و $H_0(z)$ یک فیلتر سببی FIR با درجه M است و به عنوان فاکتوری از $H(z)$ شناخته می شود.

یعنی:

$$h_0[n] \quad , \qquad n = 0,1,2,3, \dots, M$$

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

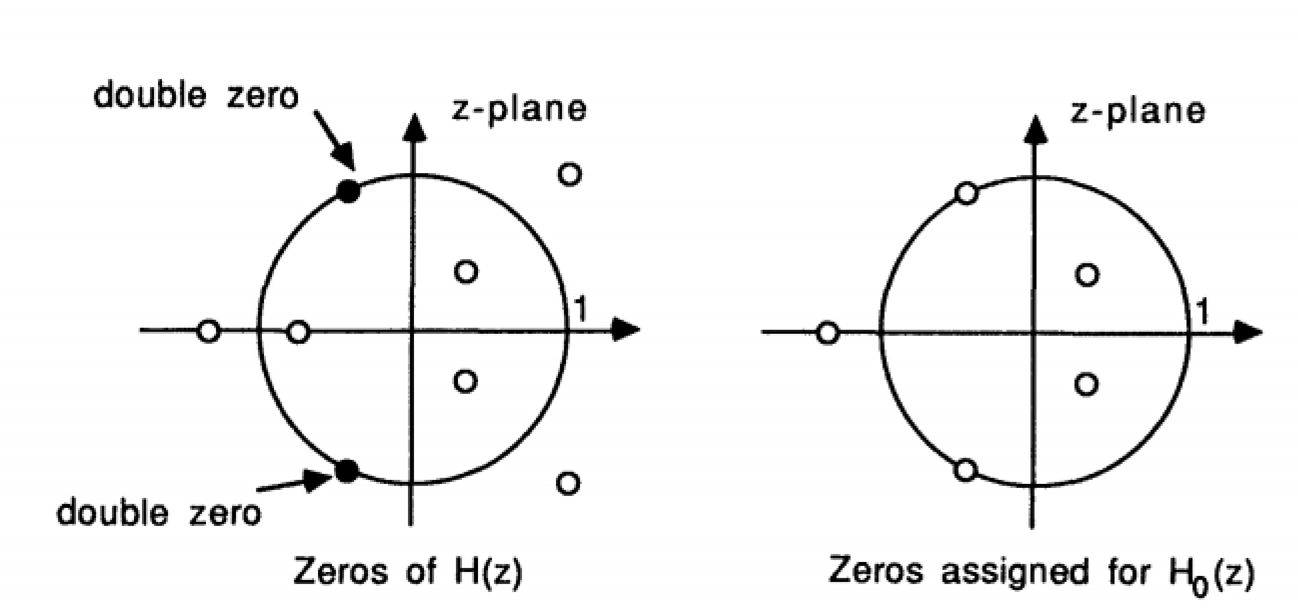
انواع فیلترهای دیگر

طراحی فیلترهای FIR

نحوه تشکیل $H_0(z)$:

- ❖ می‌دانیم که در یک فیلتر با فاز صفر، اگر z_k صفر $H_0(z)$ باشد آنگاه $1/z_k^*$ هم صفر $H_0(z)$ است.
- ❖ از طرفی چون $\forall\omega,\ H(e^{j\omega}) > 0$ می‌توان گفت که صفر z_k روی دایره واحد قرار دارد، باید مکرر باشد.
- ❖ در این صورت با تخصیص صفرهای z_k به $H_0(z)$ و صفرهای $1/z_k^*$ به $\widetilde{H_0}(z)$ فاکتوریزاسیون انجام می‌شود.

$$H_0(z) = c\sum_{k=1}^{M}(1 - z_k z^{-1}) \quad , \qquad \widetilde{H_0}(z) = c^*\sum_{k=1}^{M}(1 - z_k z^*)$$



مشخصات فیلترهای دیجیتال

کاربرد فاکتوریزاسیون طیف:

یکی از کاربردهای این روش، در طراحی فیلترهایی FIR با فاز غیر خطی است.

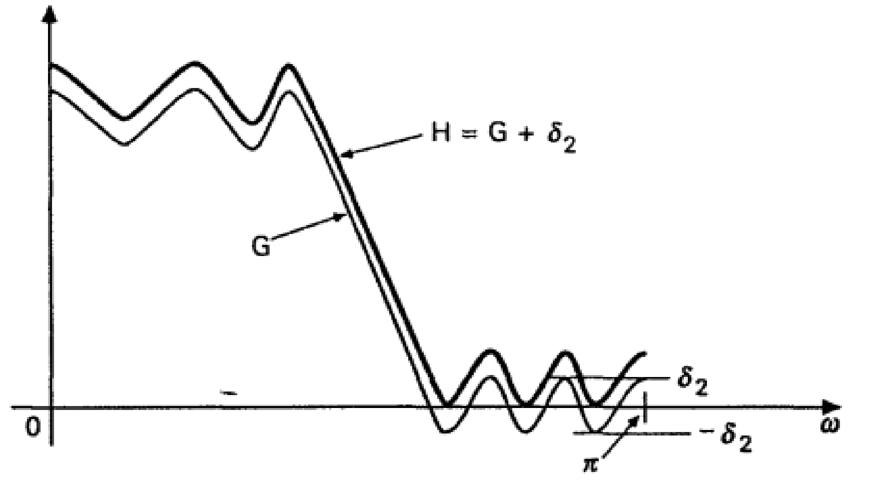
فرض کنید $G(z)$ یک فیلتر FIR با **فاز صفر** باشد که پیک تضعیف باند توقف δ_2 است. $H(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(z) = G(z) + \delta_2$$

و معادلا

$$H(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}) + \delta_2$$

$G(e^{j\omega})$ فاز صفر دارد پس $G(e^{j\omega})$ حقیقی است. پس $H(e^{j\omega})$ همان $G(e^{j\omega})$ است که به اندازه δ_2 تقویت شده است.



- مشخصات فیلترها
- فیلترهای FIR
- فیلترهای IIR
- فیلترهای تمام‌گذر
- انواع فیلترهای دیگر

فیلترهای IIR

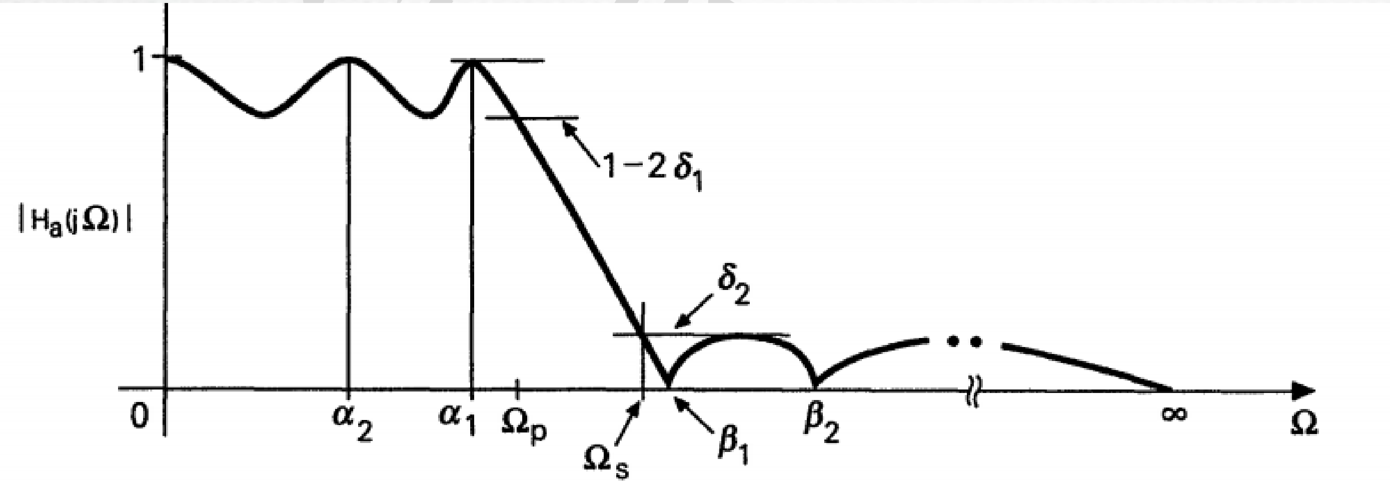
ویژگی فیلترهای IIR:

۱- درجه بسیار کمتر نسبت به فیلترهای FIR برای همان پاسخ فرکانسی که سبب می‌شود به ضرب شونده و جمع شونده کمتری نیاز باشد.

۲- معمولا فاز به صورت خطی نیست.

روش تبدیل Bilinear

در این روش، یک فیلتر آنالوک به یک فیلتر دیجیتال تبدیل می شود. یک فیلتر آنالوگ پایین گذر با پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$ فرض کنید:



مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

طراحی فیلترهای IIR:

فرض کنید تبدیل زیر بر روی تابع $H(s)$ اعمال شود:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

با فرض اینکه $s = j\Omega$ باشد و $z = e^{j\omega}$ داریم:

$$j\Omega = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}} = \frac{2j\sin\frac{\omega}{2}}{2\cos\frac{\omega}{2}} = j\tan\frac{\omega}{2}$$

پس داریم:

$$\Omega = \tan\frac{\omega}{2}$$

بنابراین اگر $\Omega = 0$ باشد آنگاه $\omega = 0$ و اگر $\Omega = \infty$ (ماکزیمم فرکانس طیف پیوسته) آنگاه $\omega = \pi$ (ماکزیمم فرکانس در نمایش طیف گسسته در بازه $(-\pi,\pi)$ است.

طراحی فیلترهای IIR:

- اگر فیلتر پیوسته پایدار باشد، آنگاه فیلتر دیجیتال هم پایدار است.
- فرکانس‌های قطع و گذر فیلتر دیجیتال مستقیما از ضابطه نگاشت محاسبه می شوند:

$$\omega_s = 2\tan^{-1}(\Omega_s) \quad , \quad \omega_p = 2\tan^{-1}(\Omega_p)$$

- پیک تضعیف باند گذر و باند توقف در فیلتر دیجیتال نسبت به فیلتر آنالوگ تغییر نمی کند.

روند طراحی

هدف طراحی فیلتر دیجیتال به روش bilinear با داشتن مشخصات ω_s، δ_2، δ_1 و ω_p

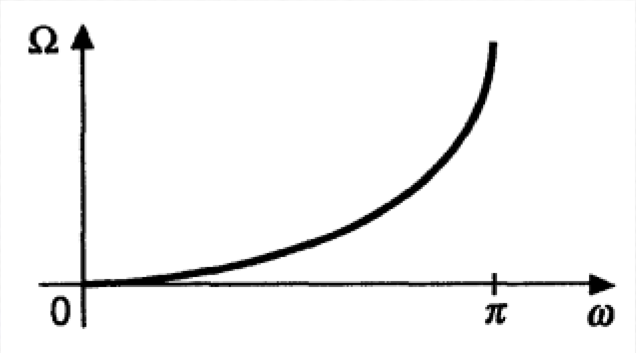
مرحله اول: محاسبه فرکانس‌های گذر و توقف فیلتر آنالوگ

$$\Omega_s = \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) \quad , \quad \Omega_p = 2\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$

مرحله دوم: طراحی فیلتر آنالوگ با پارامترهای Ω_s، δ_2، δ_1 و Ω_p

مرحله سوم: اعمال تبدیل bilinear به صورت

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$



مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

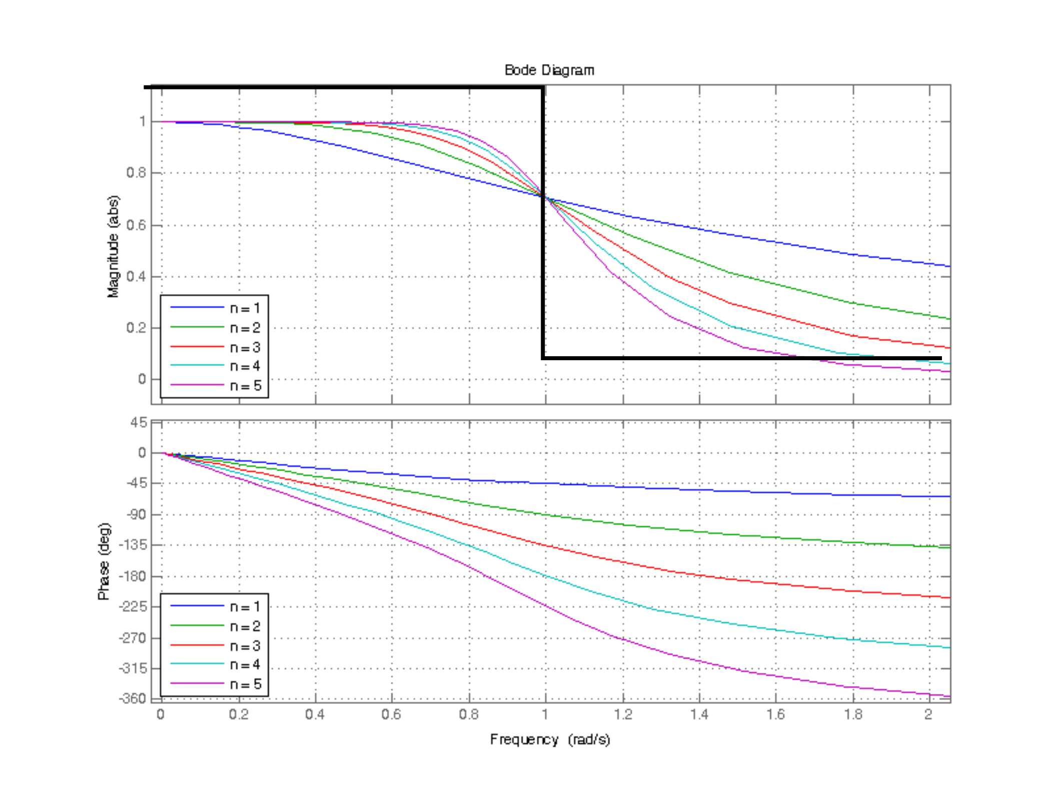
انواع فیلترهای دیگر

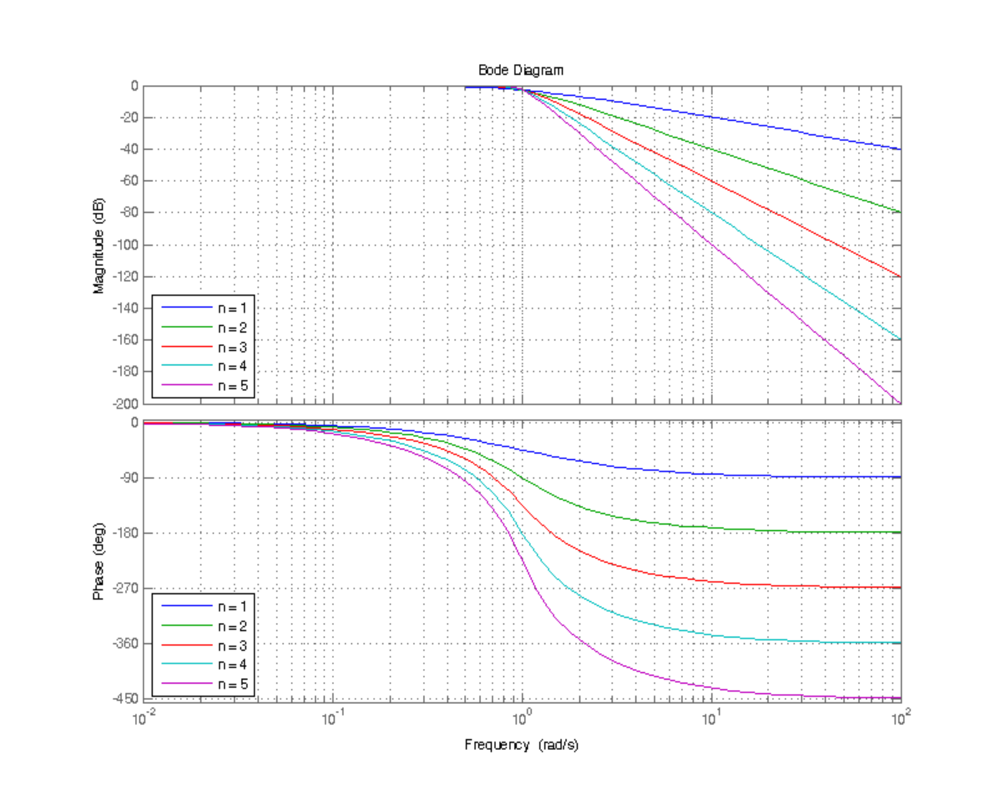
انواع فیلترهای آنالوگ

۱- فیلتر باتروورث: فیلتر باتروورث مرتبه n به صورت زیر تعریف می شود:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2n}}$$

n: مرتبه فیلتر نامیده می شود. هر چه n بزرگتر باشد فیلتر به حالت ایده آل نزدیکتر می شود.





خواص فیلتر باتروورث

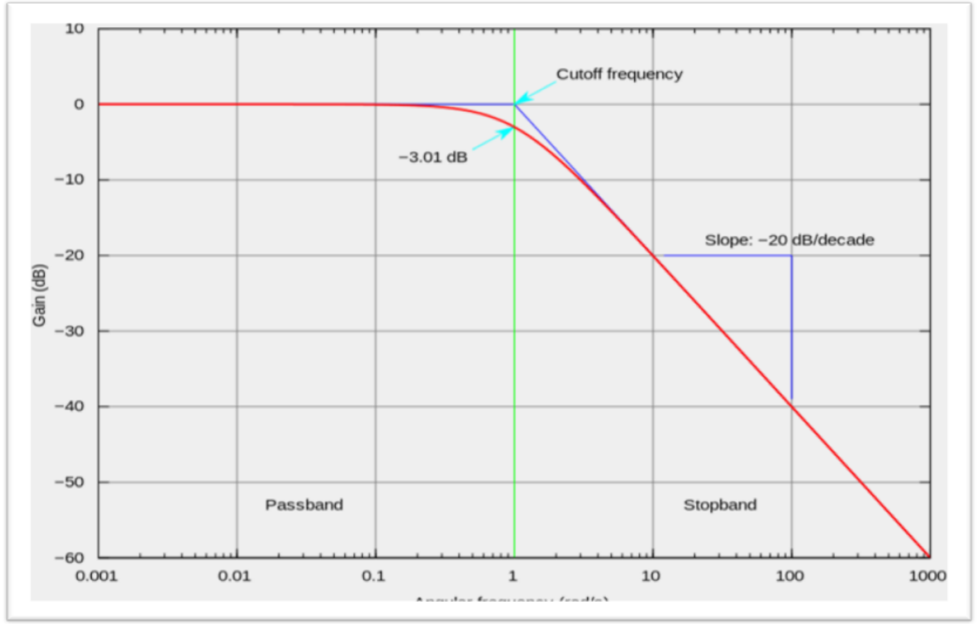
خاصیت ۱: اگر درجه فیلتر برابر با n باشد آنگاه:

$$|H(j0)|^2 = 1 \quad , \quad |H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad |Hj\infty|^2 = 0$$

خاصیت ۲: تابع تبدیل فیلتر بارتروث یک تابع نزولی بر حسب فرکانس است و در $\omega = 0$ مقدار ماکزیمم دارد.

خاصیت ۳: کلیه مشتقات تابع باترورث در $\omega = 0$ صفر است. از اینرو گفته می شود فیلتر ماکزیمم صافی را در باند عبور را دارد

خاصیت ۴: به ازای فرکانسهای بالا، شیب افت فیلتر $20n\ db/decade$ است. یعنی به ازای ۱۰ برابر شدن فرکانس، دامنه به اندازه 20 افت می کند.



مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

تابع تبدیل باترورث:

تابع تبدیل فیلتر $H(s)$ نرمالیزه (فرکانس قطع ۱) بر اساس متغیر فرکانسی s تعریف می شود. بنابراین داریم:

$$H(s)H(-s) = |H(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}}$$

محل قطبهای تابع اندازه باترورث بر روی صفحه فرکانسی:

به ازای n زوج داریم:

$$1+(-1)^n s^{2n} = 0 \quad \rightarrow \quad s^{2n} = -1 \rightarrow \quad s^{2n} = e^{-j\pi}$$

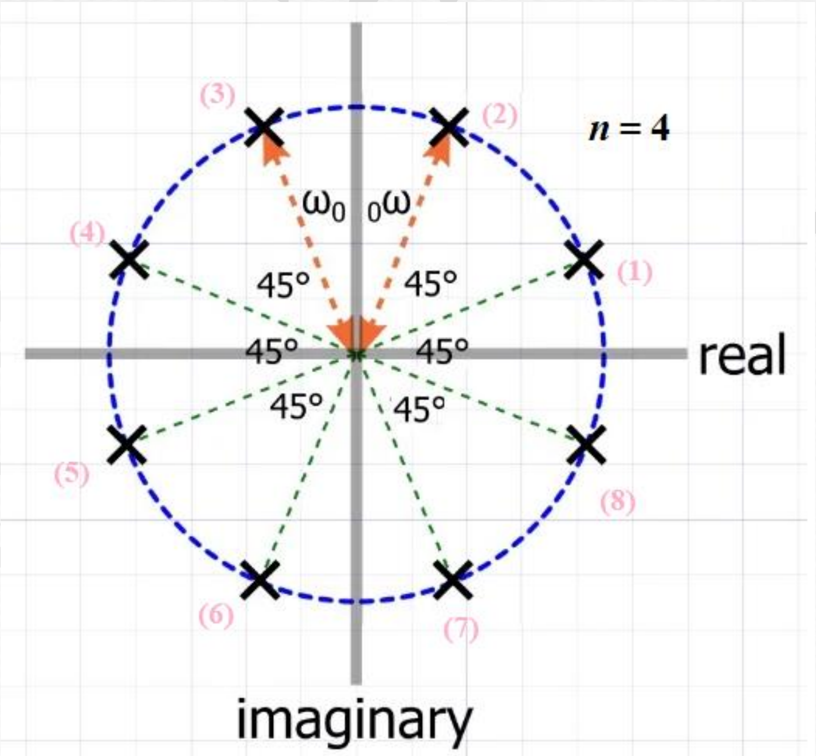
پس می توان گفت:

$$\hat{s}_k = e^{j\frac{(2k-1)}{2n}\pi} \quad , \qquad k = 1,2,\dots,2n$$

$$\hat{s}_k = \cos\frac{(2k-1)}{2n}\pi + j\sin\frac{(2k-1)}{2n}\pi \quad , \qquad k = 1,2,\dots,2n$$

$$\hat{s}_k = \cos\hat{\theta}_k + j\sin\hat{\theta}_k \quad , \qquad \hat{\theta}_k = \frac{2k-1}{2n}\pi \ , \qquad k = 1,2,\dots,2n$$

باید قطبهای سمت چپ را به $H(s)$ و قطبهای سمت راست را به $H(-s)$ تخصیص دهیم. پس قطبهـای (۳) و (۴) و (۵) و (۶) باید به $H(s)$ تخصیص داده شوند.

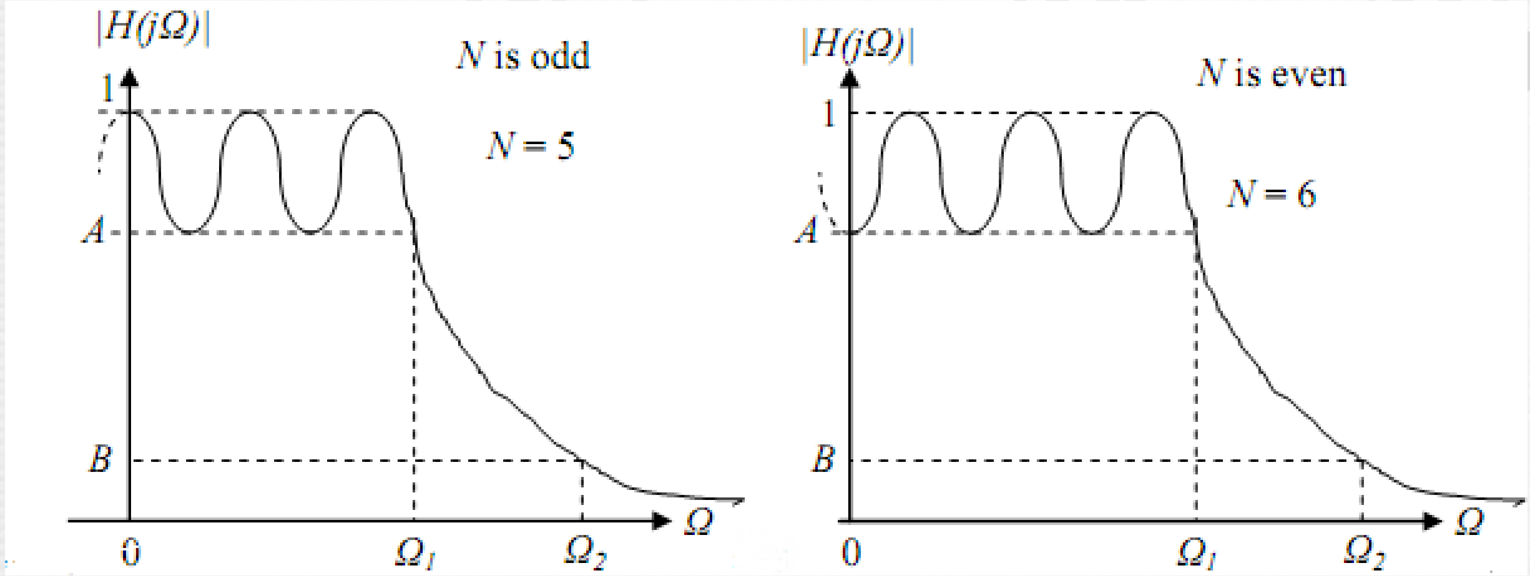


نکته: اگر فرکانس قطع برابر با یک نبود $\Omega_p \neq 1$ ، در این صورت قطبها روی دایره‌ای به شعاع Ω_p قرار می‌گیرند.

۲- فیلتر چبی شف:

- همان طور که مطرح شد، فیلتر باترورث ماکزیمم صافی را در باند عبور دارد.
- اما این فیلتر شیب افت مناسبی ندارد، به عبارت دیگر، باند گذر این فیلتر چندان باریک نیست.
- در فیلتر چبی شف شیب افت از باند عبور به باند توقف **خیلی سریع تر از باترورث** است ولی در باند عبور رایپل هایی مشاهده می شود.
- تعداد رایپل ها در باند عبور برابر با درجه فیلتر است.

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^2(\Omega)} \quad , \qquad T_n(\Omega) = \cos(n\cos^{-1}(\Omega))$$



مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

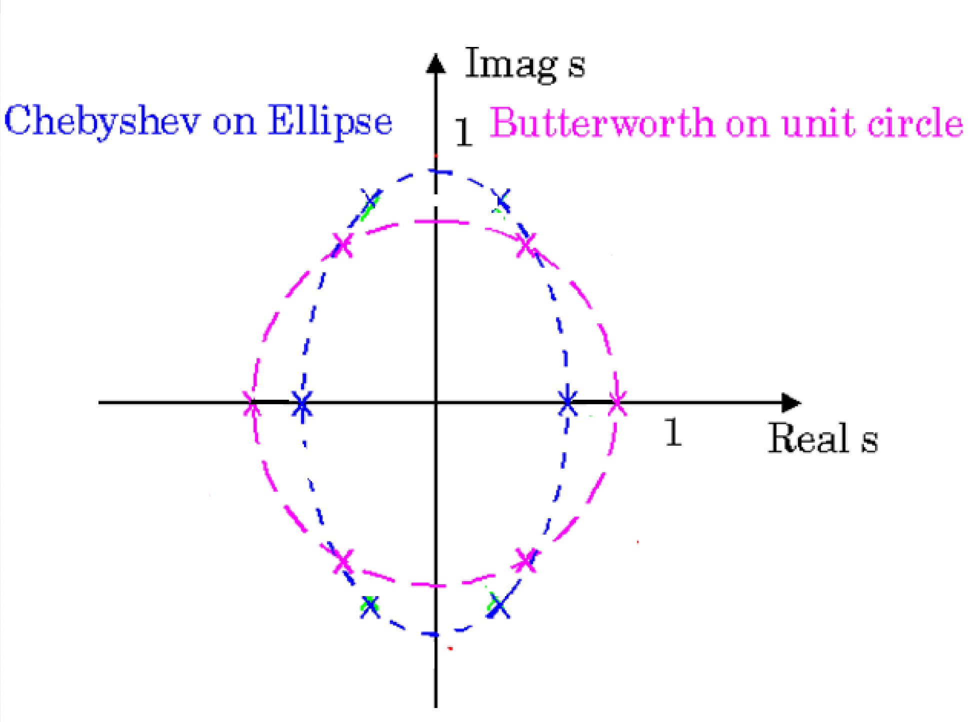
طراحی فیلترهای IIR:

با توجه به تبدیل $\cos((n+1)x) = 2\cos nx \cos x - \cos(n-1)x$ میتوان یک رابطه بازگشتی به صورت زیر پیشنهاد داد

$$T_{n+1}(\Omega) = 2\omega T_n(\Omega) - T_{n-1}(\Omega)$$

با داشتن $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = \Omega$ میتوان بقیه جملات را یافت

محل قطبهای تابع اندازه باتروورث بر روی صفحه فرکانسی:



مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

فیلترهای تمام گذر

تعریف: یک تابع تبدیل $H(z)$ تمام گذر نامیده می شود اگر:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = c \quad \forall\omega \in R$$

بنابراین، نمایش دامنه و فاز تابع $H\left(e^{j\omega}\right)$ به صورت زیر است:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = c\, e^{j\phi(t)}$$

برای مثال سیستم تاخیر به صورت z^{-k} تعریف می شود که اندازه این تابع تبدیل به ازای $z = e^{j\omega}$ همواره ۱ است و بنابراین یک فیلتر تمام گذر است.

فیلتر تمام گذر مرتبه اول: فرم کلی یک سیستم تمام گذر مرتبه اول به صورت زیر است:

$$H_{ap}(z) = z^{-1}\frac{1 + a^{*}z}{1 + az^{-1}} \qquad (۱)$$

فیلتر تمام گذر مرتبه بالاتر: ضرب دو تابع تمام گذر مجددا تمام گذر است:

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{N} z^{-1}\frac{1 + a_k^{*}z}{1 + a_k z^{-1}} \qquad (۲)$$

فیلترهای تمام گذر

۱- صفرهای و قطبها فیلتر تمام گذر:

در این درس تنها بر روی فیلترهای تمام گذر کسری تمرکز داریم. از رابطه فیلتر تمام گذر مرتبه اول می توان گفت:

$$zero: \ 1 + a^* z = 0 \ \rightarrow z = -\frac{1}{a^*}$$

$$pole: \ 1 + a z^{-1} = 0 \ \rightarrow z = -a$$

اگر α یک قطب تابع باشد، آنگاه $1/\alpha^*$ یک صفر تابع تمام گذر است.

حالت خاص: اگر $a = 0$ باشد، آنگاه رابطه $z^{-1}\frac{1+a^* z}{1+a z^{-1}}$ به صورت z^{-1} می شود که معادل با سیستم تاخیر است.

مشابها می‌توان صفرها و قطبهای تابع تمام گذر مرتبه N کسری را به صورت زیر یافت

$$H_{ap}(z) = \beta \prod_{k=1}^{N} \frac{-\alpha_k + z^{-1}}{1 - \alpha_k z^{-1}} \qquad (۳)$$

$$zero: \ 1 + a_k^* z = 0 \ \rightarrow z = -\frac{1}{a_k^*}$$

$$pole: \ 1 + a_k z^{-1} = 0 \ \rightarrow z = -a_k$$

اگر α_k یک قطب تابع باشد، آنگاه $1/\alpha_k^*$ یک صفر تابع تمام گذر است.

دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

فیلترهای تمام گذر

۲- فرم کلی بدون تفکیک:

می دانیم که تابع تبدیل هر فیلتر کسری را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

که $A(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}$ و $B(z) = \sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}$ است.

اگر فرم (۳) را به صورت رابطه بالا بنویسیم داریم:

$$H_{ap}(z) = \beta \prod_{k=1}^{N} \frac{-\alpha_k + z^{-1}}{1 - \alpha_k z^{-1}} = d\frac{b_N^* + b_{N-1}^* z^{-1} + \cdots + b_1^* z^{-N+1} + b_0^* z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}} \quad , d > 0$$

با مقایسه دو رابطه بالا داریم:

$$a_n = d b_{N-b}^* \quad \rightarrow \quad A(z) = d z^{-N} \tilde{B}(z)$$

که $\tilde{B}(z) = B^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$ استو بنابراین:

$$H_{ap}(z) = d z^{-N} \frac{\tilde{B}(z)}{B(z)} \qquad (۴)$$

فیلترهای تمام گذر

۳- ویژگی حفظ انرژی:

فرض کنید ورودی $x[n]$ به فیلتر تمام گذر $h[n]$ اعمال می شود و خروجی $y[n]$ تولید می شود. با فرض LTI بودن $h[n]$ در حوزه فرکانس داریم:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

انرژی خروجی برابر است با:

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|Y(e^{j\omega})\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H(e^{j\omega})\right|^2\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega = c^2\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega\right)$$

عبارت داخل پرانتز همان انرژی سیگنال ورودی است پس:

$$E_y = c^2 E_x$$

نتیجه: با فرض اینکه انرژی فیلتر تمام گذر واحد باشد $(c = 1)$ ، می‌توان گفت که فیلتر تمام گذر، یک فیلتر **بدون اتلاف** است.

فیلترهای تمام گذر

۴- تابع خودهمبستگی فیلتر تمام گذر:

تابع خودهمبستگی به صورت زیر تعریف می شود:

$$r(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]h^*[n-k] = h[k] * h^*[-k]$$

از جدول تبدیل Z می دانیم که $\widetilde{H}(z) = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = Z\{h^*[-n]\}$. پس داریم:

$$R(z) = H(z)\widetilde{H}(z)$$

حال اگر $H(z)$ یک فیلتر تمام گذر باشد آنگاه

$$R(z) = |c|^2 = c^2$$

و با گرفتن عکس تبدیل Z داریم:

$$r(k) = c^2\delta[k]$$

نتیجه: فیلتر $h[n]$ تمام گذر است اگر و تنها اگر **تابع خودهمبستگی** آن به صورت یک **تابع ضربه** باشد.

فیلترهای تمام گذر

۵- اندازه فیلتر تمام گذر در تمام فضای Z:

در اسلاید ۲۵ گفتیم که $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = c$ است. یعنی اندازه تابع تبدیل روی دایره واحد $z = e^{j\omega}$ همواره ثابت است.

می‌خواهیم اندازه فیلتر **پایدار و سببی** $|H(z)|$ را به ازای z های مختلف بررسی کنیم.

اثبات این قضیه با استفاده از تئوری ماکزیمم اندازه قدرمطلق است که در صفحه ۷۵ کتاب آورده شده است. بر این اساس ثابت می شود که:

$$|H(z)| = \begin{cases} < c & ,|z| > 1 \\ > c & ,|z| < 1 \\ = c & ,|z| = 1 \end{cases}$$

یعنی درون دایره واحد اندازه تابع تبدیل بزرگتر از c و بیرون دایره واحد کوچکتر از c است.

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

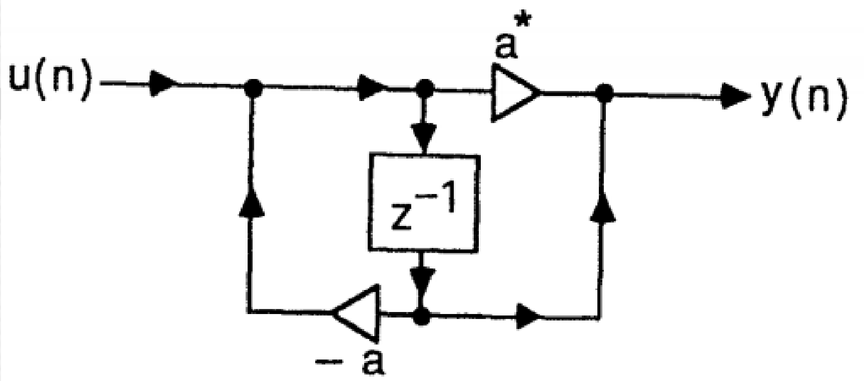
فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

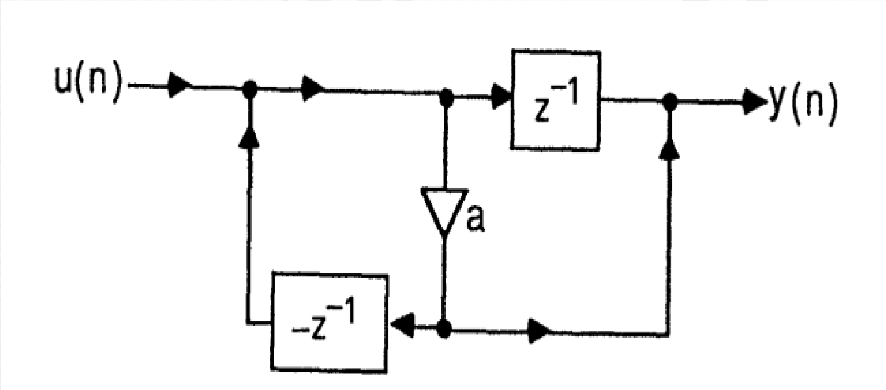
فیلترهای تمام گذر

پیاده سازی فیلتر تمام گذر:

۱- فرم مستقیم: در اسلاید ۲۵ دیدیم که $H(z) = {}^{1+a^*z}/_{1+az^{-1}}$. این رابطه را می‌توان به فرم زیر پیاده سازی کرد:

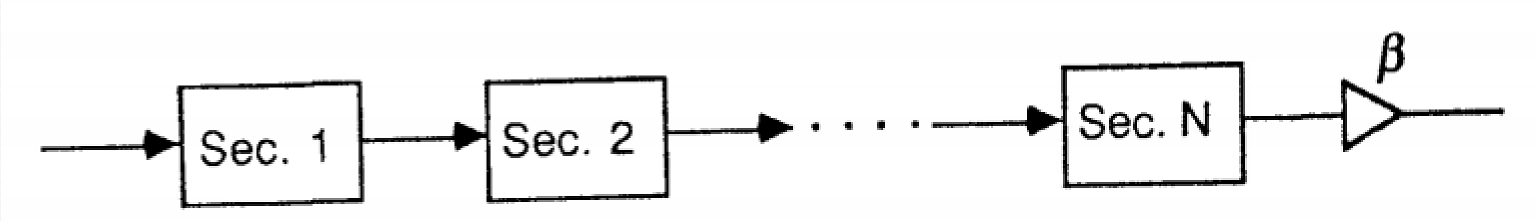


اگر قطب ها حقیقی باشد آنگاه $a = a^*$ است و داریم:



فیلترهای تمام گذر

اگر فیلتر مرتبه N باشد با توجه به معادله (۲) در اسلاید ۲۵ می توان از اتصال سری فیلترهای درجه یک استفاده کرد:



اگر ضرایب فیلتر حقیقی باشد آنگاه در صورتی که قطب یا صفر مختلط باشد حتما مزدوج مختلط آن نیز موجود است. در این صورت می‌توان به جای داشتن دو عبارت درجه یک مختلط، یک عبارت درجه ۲ حقیقی داشت که تعداد ضرب شونده و تاخیر کمتری استفاده می شود:

$$H_{2,k}(z) = \frac{R_k^2 - 2R_k \cos\theta_k z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2R_k \cos\theta_k z^{-1} + R_k^2 z^{-2}}$$

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

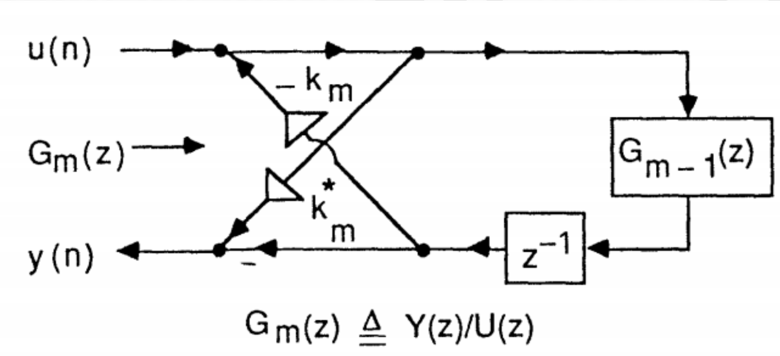
انواع فیلترهای دیگر

مشخصات فیلترهای دیجیتال

۲- پیاده سازی با ساختار لتیس

قضیه کاهش مرتبه:

فرض کنید $G_m(z)$ یک فیلتر تمام گذر، پایدار و سببی با دامنه یک با مرتبه m است. می‌توان $G_m(z)$ را به صورت زیر پیاده سازی کرد که $|k_m| < 1$ و $G_{m-1}(z)$ یک فیلتر تمام گذر، پایدار و سببی با دامنه یک با مرتبه $m-1$ است.



اثبات:

می‌دانیم (از رابطه (۴) اسلاید ۲۸ که $G_m(z) = z^{-m}\tilde{B}_m(z)/B_m(z)$ (اندازه $d = 1$ و $N = m$ است) و

$$B(z) = b_{m,0} + b_{m,1}z^{-1} + \cdots + b_{m,m}z^{-m}$$

با توجه به پایدار بودن فیلتر می‌توان گفت که تمام قطبها درون دایره واحد قرار دارند.

مشخصات فیلترهای دیجیتال

همچنین، از شکل بالا می‌توان نوشت:

$$G_m(z) = \frac{k_m^* + z^{-1}G_{m-1}(z)}{1 + k_m z^{-1} G_{m-1}(z)}$$

با حل رابطه بالا بر حسب $G_{m-1}(z)$ داریم:

$$z^{-1}G_{m-1}(z) = \frac{G_m(z) - k_m^*}{1 - k_m G_m(z)} \qquad (۵)$$

با جایگذاری $G_m(z) = z^{-m}\tilde{B}_m(z)/B_m(z)$ در رابطه بالا داریم:

$$z^{-1}G_{m-1}(z) = \frac{\dfrac{z^{-m}\tilde{B}_m(z)}{B_m(z)} - k_m^*}{1 - \dfrac{k_m z^{-m}\tilde{B}_m(z)}{B_m(z)}} = \frac{z^{-m}\tilde{B}_m(z) - k_m^* B_m(z)}{B_m(z) - k_m z^{-m}\tilde{B}_m(z)}$$

هدف مساله:

نشان دهیم $G_{m-1}(z)$ یک فیلتر با سببی، پایدار و با درجه $m-1$ است و همچنین $|k_m| < 1$ هستند.

مشخصات فیلترها

فیلترهای FIR

فیلترهای IIR

فیلترهای تمام‌گذر

انواع فیلترهای دیگر

مشخصات فیلترهای دیجیتال

واضحا عبارت مخرج $B_m(z) - k_m z^{-m}\tilde{B}_m(z)$ باید از درجه $m-1$ باشد که همان درجه $G_{m-1}(z)$ است.

این عبارت واضحا یک عبارت درجه m است. پس باید ضریب z^{-m} صفر شود. ثابت می شود ضریب z^{-m} برابر است با:

$$\left(b_{m,m} - k_m b_{m,0}^*\right) = 0 \quad \rightarrow k_m = \frac{b_{m,m}}{b_{m,0}^*}$$

با این انتخاب، عبارت صورت هم از درجه $m-1$ می شود. پس دو عبارت هم درجه $(m-1)$ بر هم تقسیم می شوند و حاصل به صورت زیر می شود.

$$z^{-1}G_{m-1}(z) = z^{-1}\frac{A_{m-1}(z)}{B_{m-1}(z)} = \frac{z^{-m}\tilde{B}_m(z) - k_m^* B_m(z)}{B_m(z) - k_m z^{-m}\tilde{B}_m(z)}$$

با مساوی قرار دادن صورت و مخرج عبارت بالا داریم:

$$A_{m-1}(z) = z^{-(m-1)}\tilde{B}_{m-1}(z)$$

پس

$$G_{m-1}(z) = \frac{A_{m-1}(z)}{B_{m-1}(z)} = z^{-(m-1)}\,\frac{\tilde{B}_{m-1}(z)}{B_{m-1}(z)}$$

این سیستم سببی هم هست (**چرا؟**)

مشخصات فیلترهای دیجیتال

اثبات $|k_m| < 1$:

از طرفی حاصل ضرب تمام ریشه های $B_m(z)$ به صورت $\left|\frac{b_{m,m}}{b_{m,0}}\right|$ است. چون همه قطبها $G_m(z)$ درون دایره واحد هستند پس این عبارت کمتر از یک است.

از طرفی این عبارت همان $|k_m|$ است. پس داریم:

$$|k_m| < 1$$

اثبات پایداری:

فرض کنید α یک قطب $G_{m-1}(z)$ باشد. از رابطه (۵) داریم:

$$1 - k_m G_m(\alpha) = 0 \quad \rightarrow |G_m(\alpha)| = 1/k_m$$

چون $|k_m| < 1$ است پس $|G_m(\alpha)| > 1$ است.

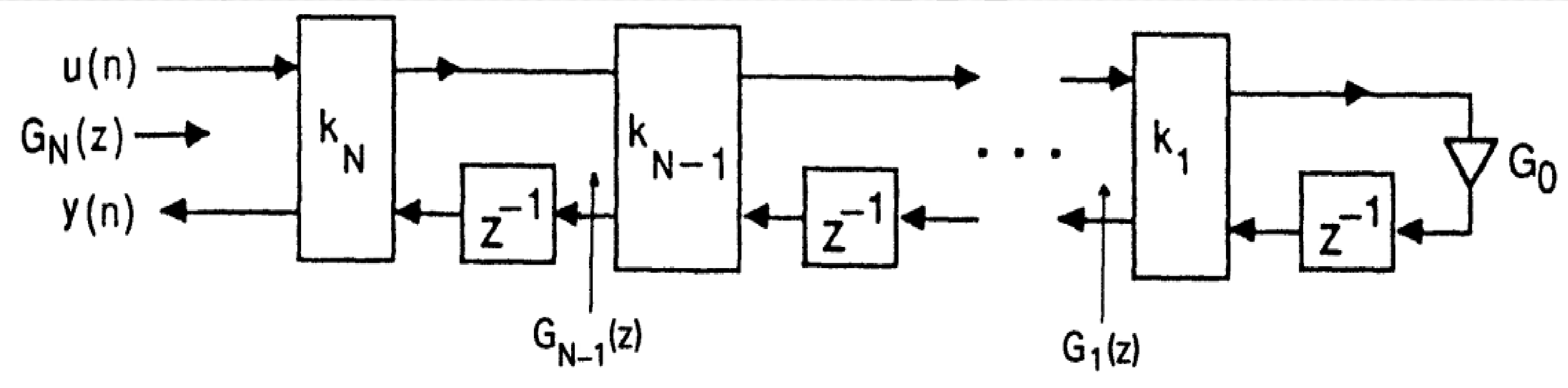
از تئوری ماکزیمم اندازه قدرمطلق (اسلاید ۳۰) می دانیم در صورتی اندازه تابع تمام گذر بزرگتر از یک است که z داخل دایره واحد باشد.

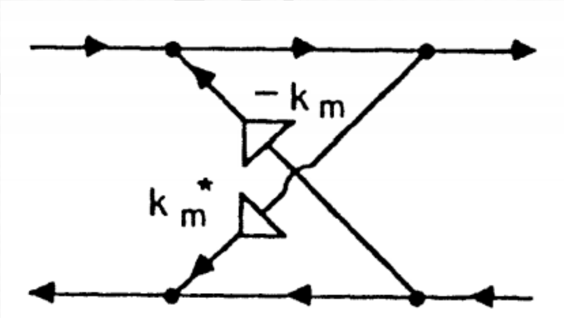
پس α یا همان قطب‌های تابع $G_{m-1}(z)$ داخل دایره واحد هستند و بنابراین پایدار است

مشخصات فیلترهای دیجیتال

تعمیم شبکه لتیس:

واضحا می‌توان $G_{m-1}(z)$ را بر اساس $G_{m-2}(z)$ و $G_{m-2}(z)$ را بر اساس $G_{m-3}(z)$ و ... ساخت. با اتصال این ساختارها به صورت سری داریم:





که در حالت کلی $|G_0| = 1$ است و $all\ m\quad |k_m| < 1$.

معرفی انواع فیلترها:

۱- فیلتر با فاز خطی: معرفی شده در اسلاید ۱

۲- فیلتر تمام گذر: معرفی شده در اسلاید ۲۵

۳- فیلتر کران دار: اگر $H(z)$ یک فیلتر پایدار باشد به طوریکه $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 1$ آنگاه فیلتر را کراندار گویند. اگر ضرایب فیلتر کراندار حقیقی هم باشد این فیلتر را BR گویند.

۴- فیلتر بدون اتلاف : فیلتر بدون اتلاف است اگر و تنها اگر پایدار و تمام گذر باشد. در این حالت $E_y = c^2 E_x$

۵- فیلتر LBR: فیلتر که هم BR و هم بدون اتلاف باشد را LBR گویند. این فیلتر تمام گذر و پایدار با ضرایب حقیقی است.

۶- فیلتر مکمل توان: دو فیلتر $H_0(z)$ و $H_1(z)$ را مکمل توان گویند اگر و تنها اگر:

$$\left|H_0\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 + \left|H_1\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = c^2 \quad c > 0, \qquad \forall\, all\ \omega$$

در حال کلی تر، یک مجموعه از M فیلتر مکمل توان هستند اگر و تنها اگر:

$$\sum_{m=1}^{M} \left|H_k\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = c^2 \quad , \forall all\ \omega$$

End of Chapter 3