پردازش سیگنال های دیجیتال

فصل چهارم
نمونه‌گیری سیگنال‌های پیوسته در زمان

ارایه شده توسط:

حجت قیمت گر

استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مطالب

- قضیه نمونه برداری
- تبدیل پیوسته به گسسته C/D
- تبدیل گسسته به پیوسته D/C
- پردازش گسسته در زمان سیگنال های پیوسته در زمان
- تغییر نرخ نمونه برداری

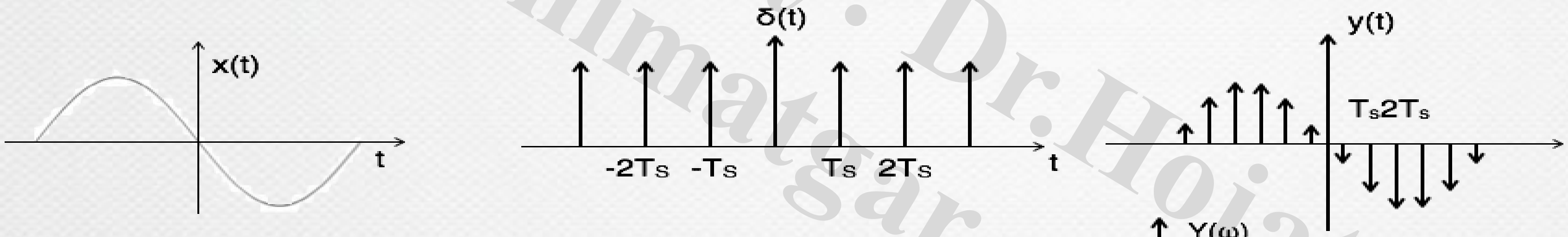
قضیه نمونه برداری

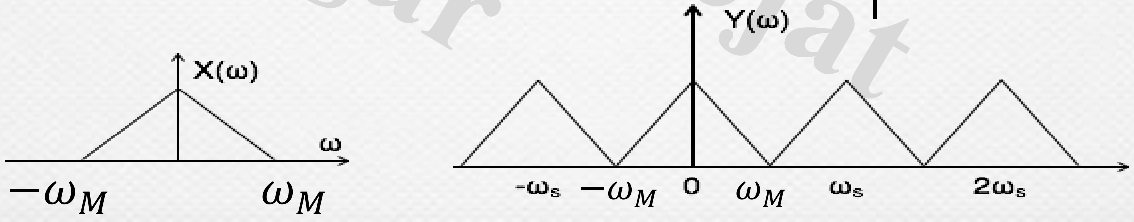
قضیه نمونه برداری نایکیوست

فرض کنید $x(t)$ سیگنالی باند محدود باشد یعنی $|\omega| > \omega_M$, $|X(j\omega)| = 0$. در این صورت می‌توان $x(t)$ را به طور یکتا و کامل از روی نمونه‌های $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $x(nT)$ بازسازی کرد اگر و تنها اگر:

$$T < \frac{\pi}{\omega_M} \quad \text{یا} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_M$$

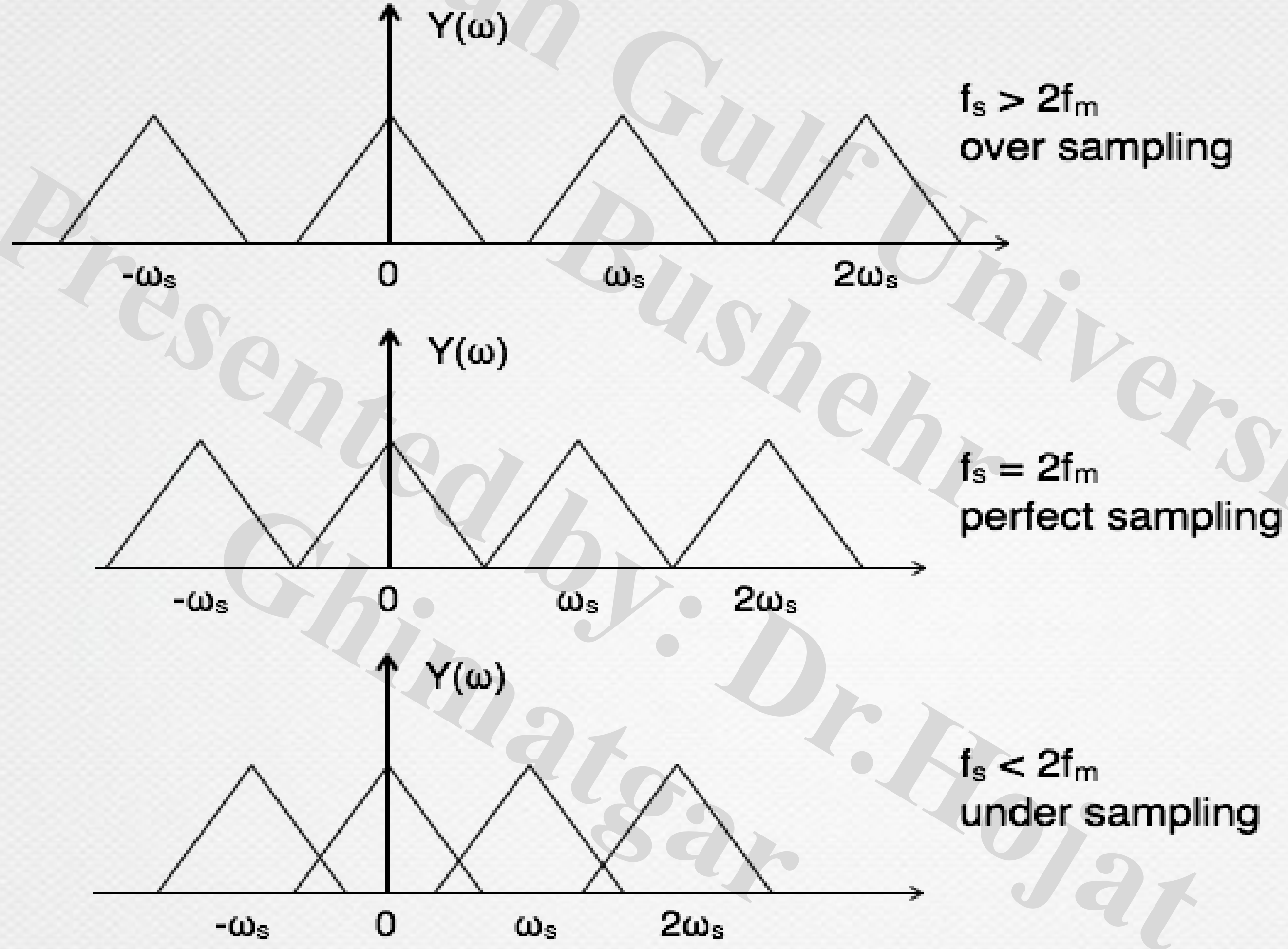
یعنی در هر ثانیه، حداقل به اندازه دو برابر پهنای باند نمونه گیری کنیم.



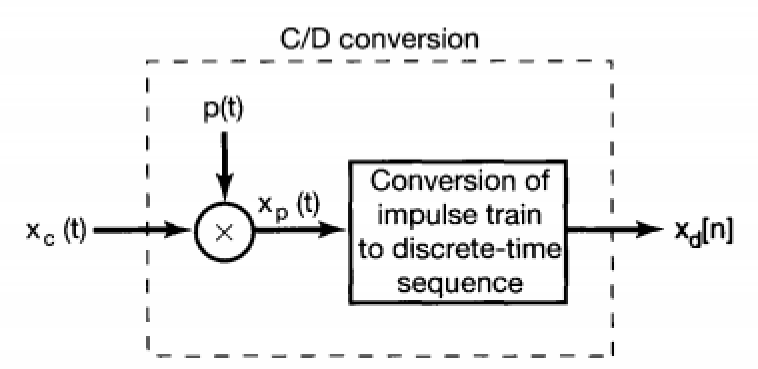


قضیه نمونه برداری
تبدیل C/D
تبدیل D/C
پردازش گسسته در زمان سیگنالهای پیوسته در زمان
تغییر نرخ

قضیه نمونه برداری



تبدیل پیوسته به گسسته C/D:



با استفاده از ساختار روبرو میتوان یک سیگنال پیوسته را به یک سیگنال گسسته معادل تبدیل کرد.

با فرض اینکه $p(t)$ یک قطار ضربه باشد، ارتباط طیفی بین ورودی و خروجی را می یابیم.

حل: می دانیم که:

$$x_p(t) = x_c(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

تبدیل فوریه سیگنال بالا را به دو روش محاسبه می کنیم:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)\delta(t-kT) \quad \rightarrow \quad X_p(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT)e^{-j\Omega kT} \qquad (1)$$

تبدیل پیوسته به گسسته C/D:

با استفاده از ویژگی ضرب میتوان گفت:

$$X_p(j\Omega) = X_c(j\Omega) * \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \qquad (2)$$

طبق رابطه تبدیل فوریه گسسته میتوان گفت:

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k]e^{-j\omega k} \qquad (3)$$

چون $x_c(kT) = x_d[k]$ است بنابراین از رابطه (۱) و (۳) میتوان گفت:

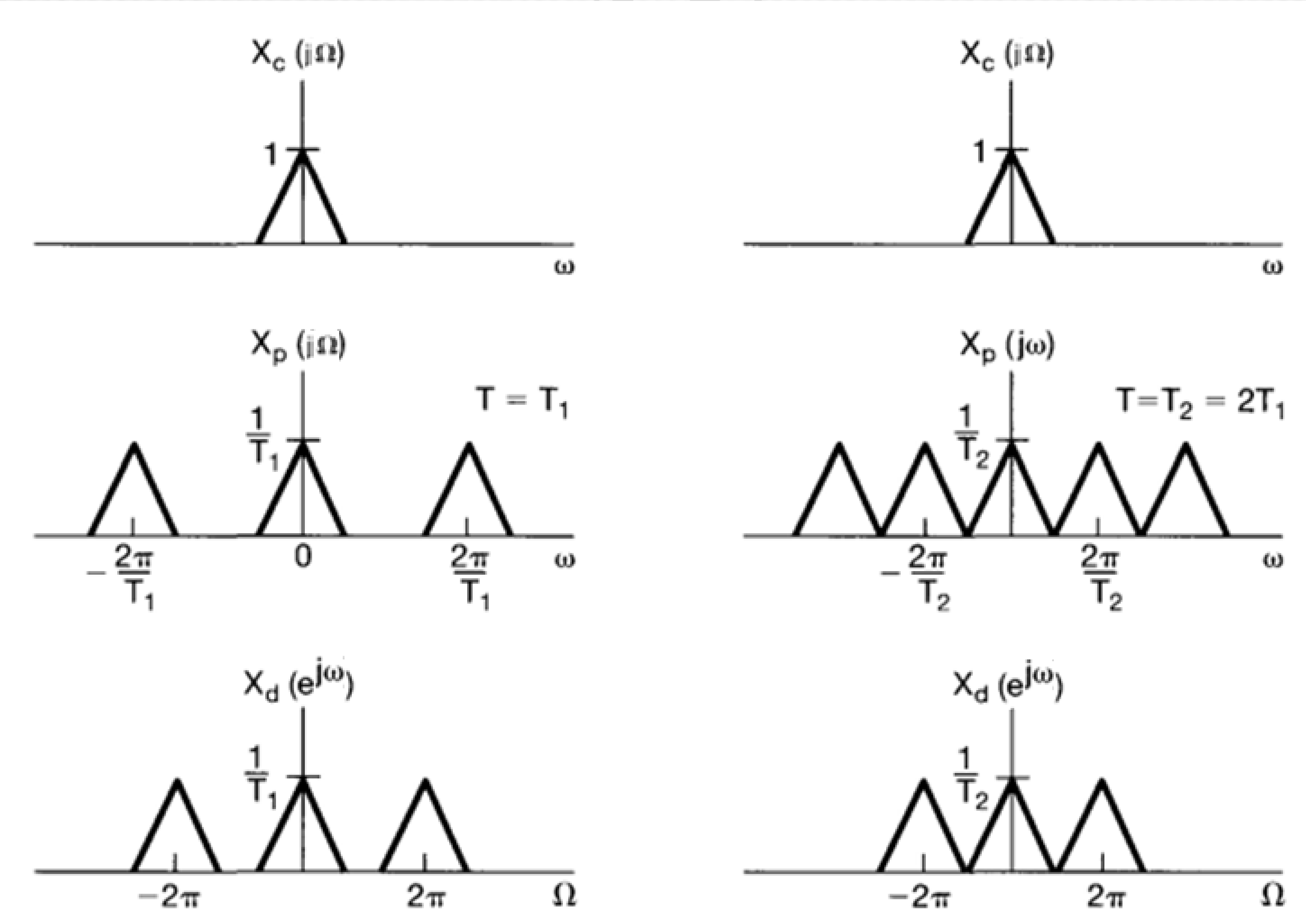
$$X_d(e^{j\omega}) = X_p\left(j\frac{\omega}{T}\right) \qquad (4)$$

از رابطه (۲) و (۴) ارتباط طیف گسسته با طیف پیوسته بدست می آید:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{\mathrm{T}} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

تبدیل پیوسته به گسسته C/D:

ارتباط طیف گسسته با طیف پیوسته نمونه برداری شده



قضیه نمونه برداری

تبدیل C/D

تبدیل D/C

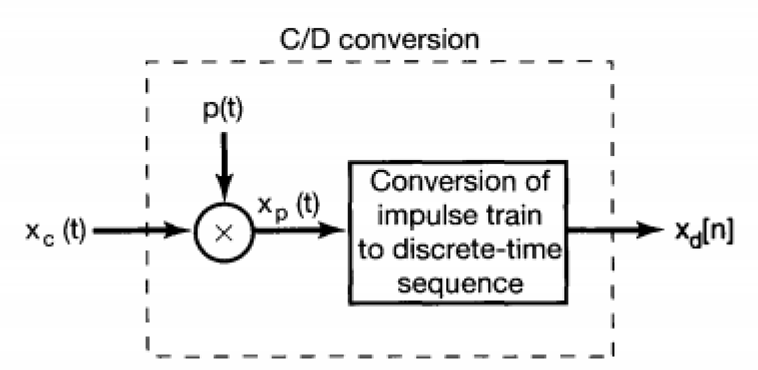
پردازش گسسته در زمان سیگنالهای پیوسته در زمان

تغییر نرخ

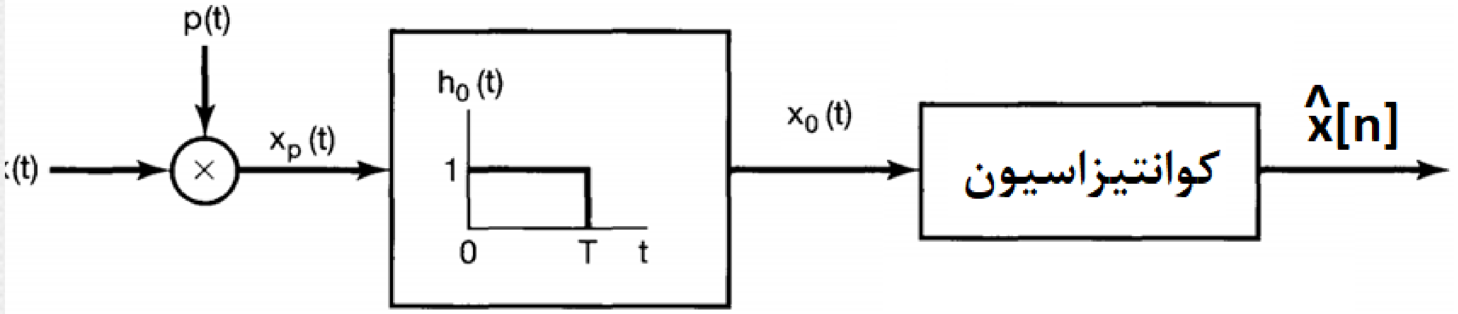
تبدیل پیوسته به گسسته C/D:

مدار عملی تبدیل پیوسته به گسسته C/D:

ساختار ارائه شده در اسلاید (۲۸) شامل یک مجموعه سیگنال ضربه ای با دامنه بسیار زیاد و باریک است که سبب می شود انتقال این پالسها با مشکل همراه باشد



برای حل این مشکل، می‌توان از ساختار S&H (sample/Hold) استفاده کرد:



قضیه نمونه برداری

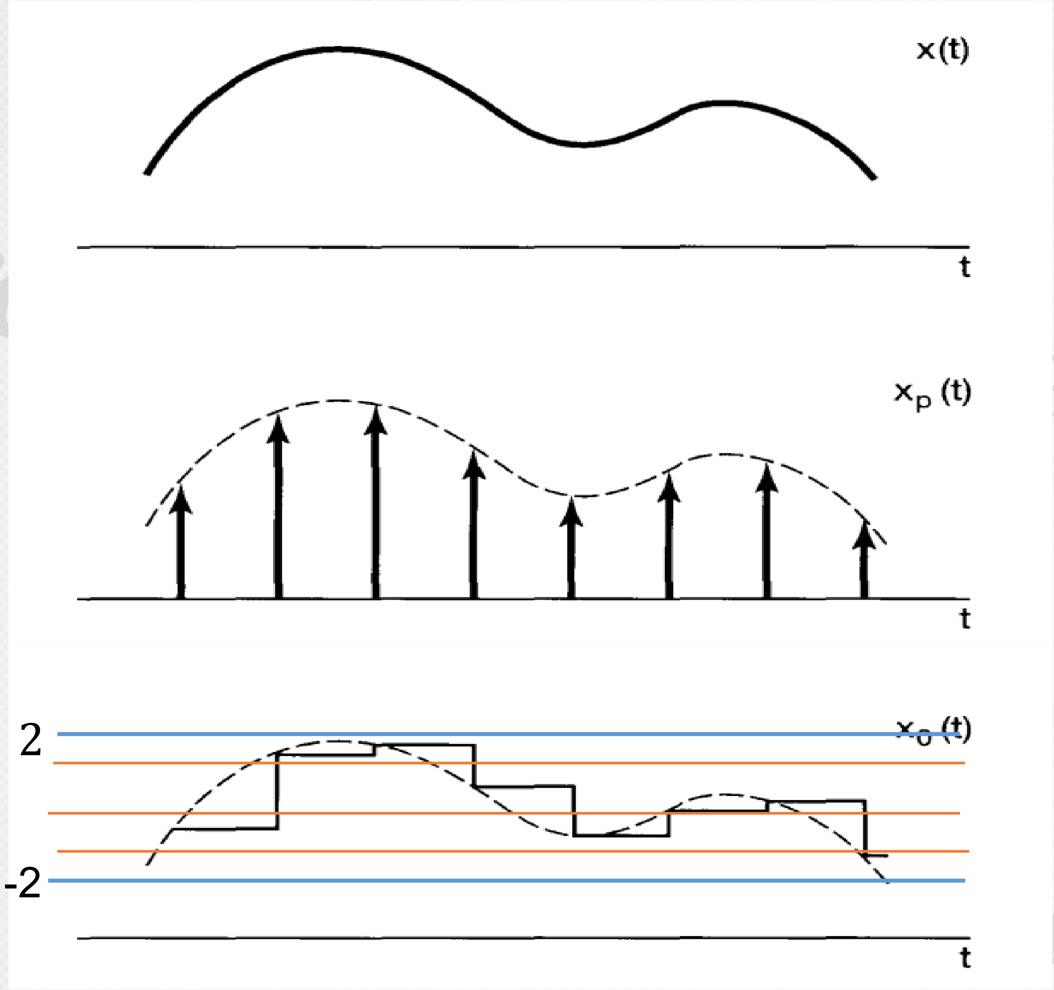
تبدیل C/D

تبدیل D/C

پردازش گسسته در زمان سیگنالهای پیوسته در زمان

تغییر نرخ

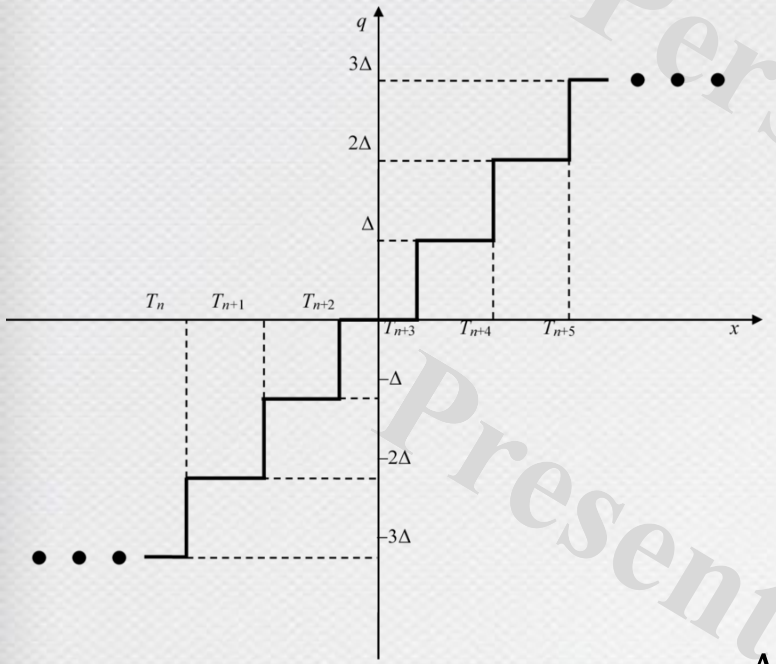
تبدیل پیوسته به گسسته C/D:



تبدیل پیوسته به گسسته C/D:

خطای گرد کردن

سوال ۱–۴: اگر $\hat{x}[n]$ گرد شده $x[n]$ باشد که با $B+1$ بیت مقداردهی شده باشد، خطای کوانتیزاسیون را بیابید.



پاسخ: فاصله بین دو سطوح به تعداد بیت کوانتیزاسیون بستگی دارد:

$$\Delta = \frac{2x_{max}}{2^{B+1}} = \frac{x_{max}}{2^B}$$

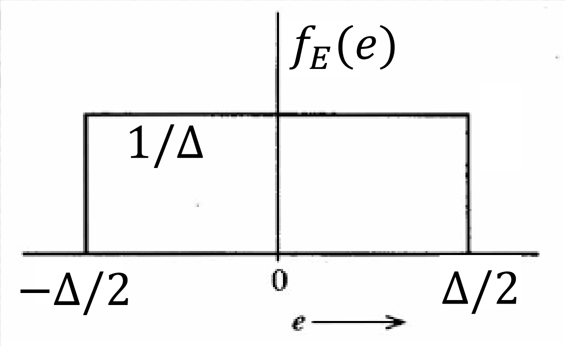
علاوه بر این ماکزیمم خطای کوانتیزاسیون برابر با $\Delta/2$ است.

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]\ , \qquad |e[n]| \le \frac{\Delta}{2}$$

$$-\frac{x_{max}}{2^{B+1}} \le e[n] \le \frac{x_{max}}{2^{B+1}}$$

می‌توان فرض کرد که خطا توزیع یکنواخت بر روی بازه $e \sim U\left(-\frac{x_{max}}{2^{B+1}}, \frac{x_{max}}{2^{B+1}}\right)$ دارد.

تبدیل پیوسته به گسسته C/D:



برای محاسبه نسبت سیگنال به نویز، به توان خطا نیاز داریم. با توجه به صفر بودن متوسط توزیع خطا، توان برابر با واریانس است:

$$\sigma_e^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^2 f_E(e)\,de=\frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2\,de=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\Delta^3}{24}+\frac{\Delta^3}{24}\right)=\frac{\Delta^2}{12}=\frac{1}{12}\,\frac{x_{max}^2}{2^{2B}}$$

نسبت سیگنال به نویز (خطا) برابر است با:

$$SNR=10\log\frac{S_x}{S_e}=10\log\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}=10\log\frac{\sigma_x^2}{\frac{x_{max}^2}{12\times 2^{2B}}}$$

$$=10\log 12+10\log 2^{2B}+10\log\frac{\sigma_x^2}{x_{max}^2}$$

$$=10.8\,dB+20B\log 2-20\log\frac{x_{max}}{\sigma_x}\quad\rightarrow\quad SNR=10.8\,dB+6B-20\log\frac{x_{max}}{\sigma_x}$$

تبدیل پیوسته به گسسته C/D:

$$SNR = 10.8\,dB + 6B - 20\log\frac{x_{max}}{\sigma_x}$$

❖ رابطه بالا نشان می دهد که با افزایش تعداد بیت (B)، نسبت سیگنال به نویز بهبود می یابد.

❖ به ازای هر بیت اضافی جهت کد کردن نمونه ها، ۶ دسی‌بل بهبود حاصل می شود.

❖ در مقابل، هر چه دامنه سیگنال x_{max} بیشتر باشد، SNR کاهش می‌یابد.

مثال ۲-۴: با فرض اینکه $x[n]$ توزیع گوسی با متوسط صفر و واریانس σ^2 دارد، نسبت سیگنال به نویز را به ازای $B = 16$ بیابید.

پاسخ: در توزیع گاوسی $x_{max} = \infty$ است اما با تقریبی خوبی میتوان گفت که $x_{max} = 4\sigma$ است.

$$\Pr\{-4\sigma < x < 4\sigma\} = 99\%$$

یعنی به احتمال ۹۹٪ داده‌های گاوسی در محدوده $-4\sigma < x < 4\sigma$ قرار دارند. بنابراین:

$$SNR = 10.8 + 6 \times 16 - 20\log 4 = 94.8\,dB$$

قضیه نمونه برداری

تبدیل C/D

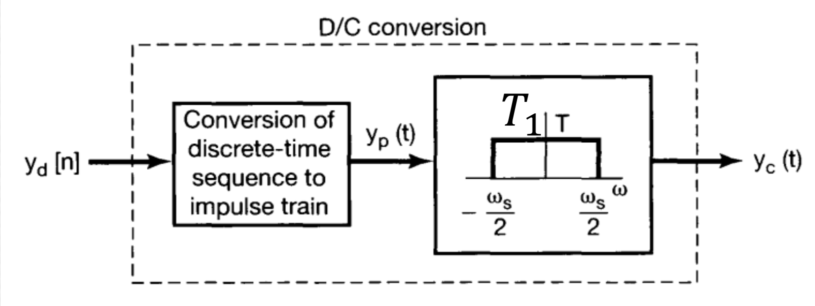
تبدیل D/C

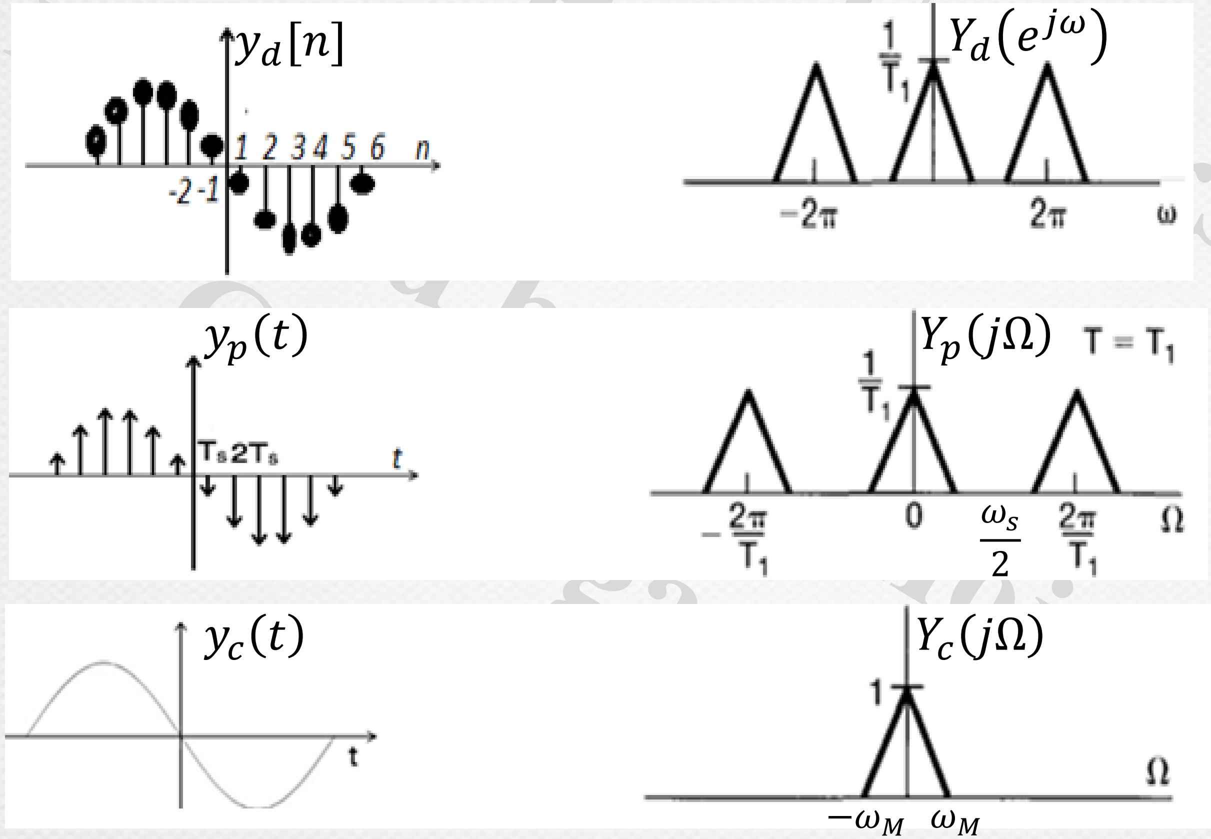
پردازش گسسته در زمان سیگنالهای پیوسته در زمان

تغییر نرخ

تبدیل گسسته به پیوسته D/C:

با استفاده از ساختار روبرو میتوان یک سیگنال گسسته را به یک سیگنال پیوسته تبدیل کرد.





تبدیل گسسته به پیوسته D/C:

تحلیل:

از ساختار بالا می‌توان گفت:

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n]\delta(t - nT)$$

با عبور از فیلتر ایده‌آل $H(e^{j\omega})$ و با توجه به خاصیت خطی بودن، می‌توان نوشت:

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n]h(t - nT)$$

اگر $h(t)$ یک فیلتر ایده‌آل پایین‌گذر فرض شود داریم:

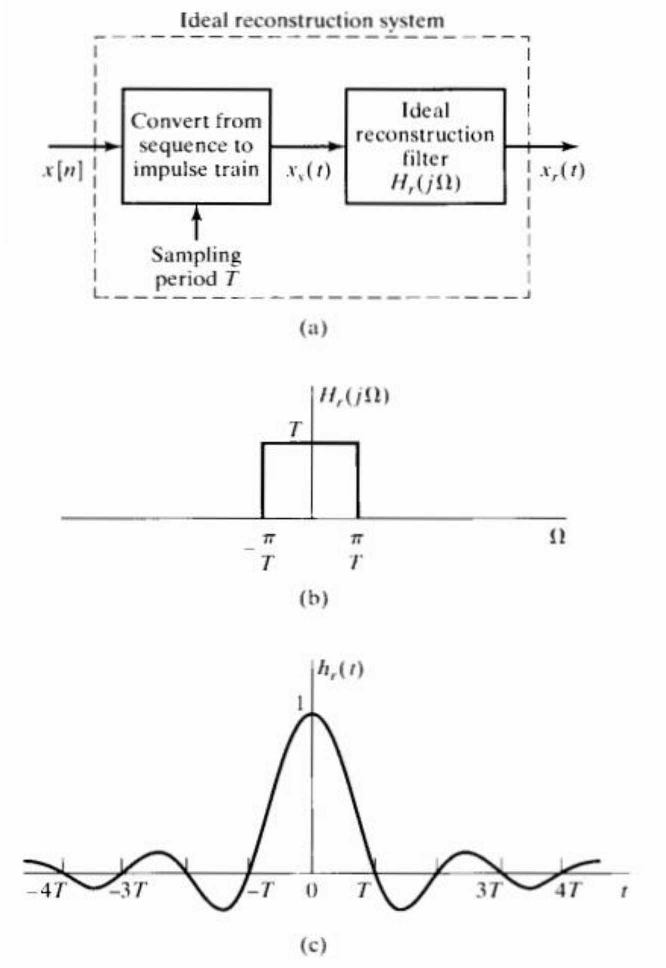
$$h(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

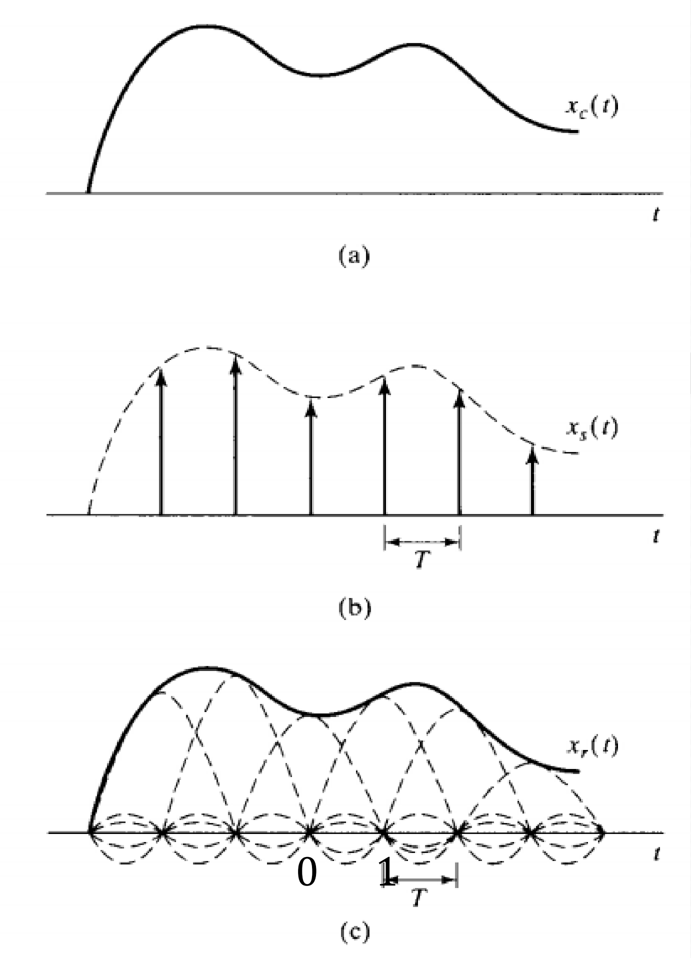
پس با جایگذاری در رابطه خروجی داریم:

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(t - nT)}{T}\right)$$

تبدیل گسسته به پیوسته D/C:

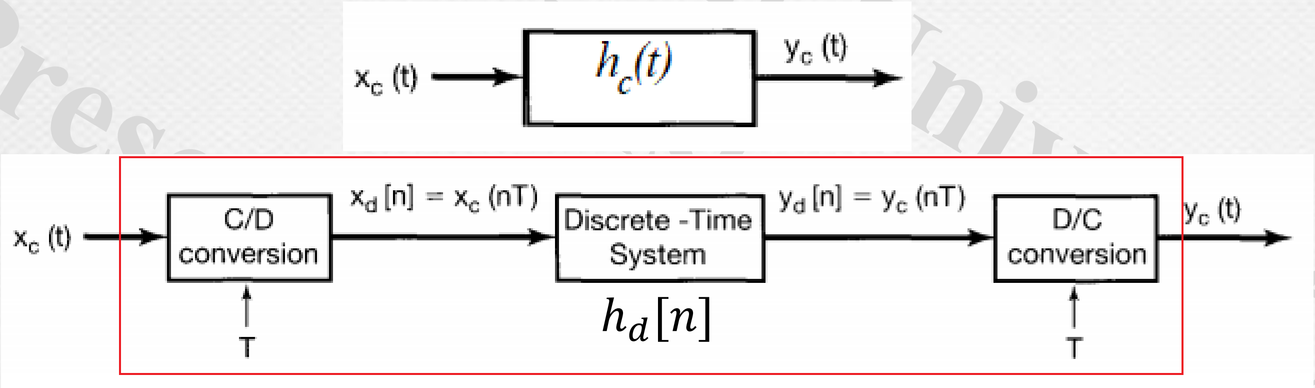
یعنی خروجی برابر با مجموع وزن‌دار سینک‌های شیف خورده است. به عبارت دیگر می‌توان گفت نمونه‌های گسسته در زمان به صورت سینک به هم متصل می‌شوند.





پردازش گسسته در زمان سیگنال های پیوسته در زمان:

با استفاده از ساختار زیر، ابتدا از سیگنال پیوسته نمونه برداری می شود تا یک سیگنال گسسته حاصل شود. سپس سیگنال گسسته، پردازش می شود و در نهایت نمونه های پردازش شده، مجددا به یک سیگنال پیوسته تبدیل می شوند.



هدف: سیستم گسسته $h_d[n]$ به گونه‌ای تعیین شود که خروجی هر دو ساختار بالا یکی شود؟

پاسخ: ثابت می شود که اگر نرخ نائیکویست رعایت شده باشد و علاوه بر این پاسخ فرکانسی فیلتر $h_d[n]$ به صورت زیر باشد، خروجی دو سیستم بالا با هم برابر است:

$$H_d(e^{j\omega}) = H_c\left(\frac{j\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi \qquad \text{یا} \qquad H_c(j\Omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\Omega T}) & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$

قضیه نمونه برداری

تبدیل C/D

تبدیل D/C

پردازش گسسته در زمان سیگنالهای پیوسته در زمان

تغییر نرخ

پردازش گسسته در زمان سیگنال های پیوسته در زمان:

مثال ۳-۴: نشان دهید که اگر $H_d(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right)$ باشد آنگاه $h_d[n] = T\, h_c(nT)$.

حل: سیستم LTI است پس :

$$y_c(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\lambda)d\lambda$$

طبق انتگرال ریمان میتوان به طور تقریبی گفت که:

$$y_c(t) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t,kT) = T(\ldots + g(-T) + g(0) + g(T) + \cdots.)$$

حال اگر از $y_c(t)$ با همان نرخ قبلی نمونه گیری کنیم داریم:

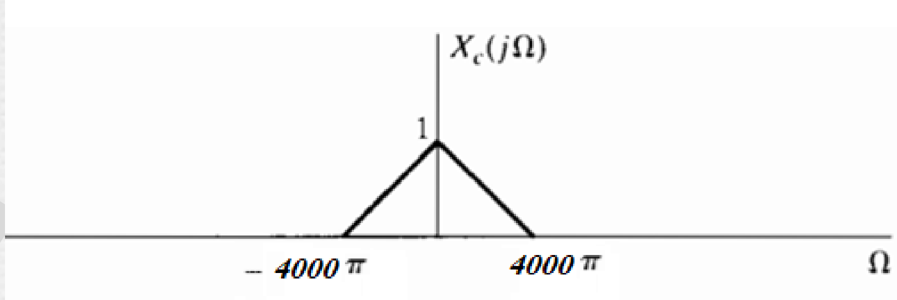
$$y_c(nT) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(nT,kT) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)h_c(nT-kT)$$

با تعریف $y_d[n] = y_c(nT)$ ،$x_d[n] = x_c(nT)$ داریم:

$$y_d[n] = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k]h_c(nT-kT) = x_d[n] * (T\, h_c(nT))$$

پردازش گسسته در زمان سیگنال های پیوسته در زمان:

مثال ۴-۴: یک سیگنال پیوسته در زمان با طیف فرکانسی زیر در نظر بگیرید که می‌خواهیم مولفه‌های فرکانسی بالای $\omega_c = 3000\pi$ را حذف کنیم



$$\omega_c = 3000\pi \rightarrow$$
$$f_c = \frac{3000\pi}{2\pi} = 1500 \text{ Hz}$$

با فرض اینکه از این سیگنال با نرخ بیش از نرخ ۳۰۰۰ نمونه در ثانیه، نمونه گیری شود، (مثلا ۶۰۰۰ نمونه در ثانیه) فیلتر دیجیتالی طراحی کنید که بتوان با پردازش سیگنال گسسته، فیلترینگ فرکانس‌های بالای ۳۰۰۰ را انجام داد.

حل: فرض کنید فیلتر $H(j\Omega)$ یک فیلتر ایده‌آل باشد یعنی:

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < 3000\pi \\ 0, & |\Omega| \geq 3000\pi \end{cases}$$

مطابق با رابطه $H_d(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right)$ داریم:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{3000\pi}{6000} = \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

قضیه نمونه برداری

تبدیل C/D

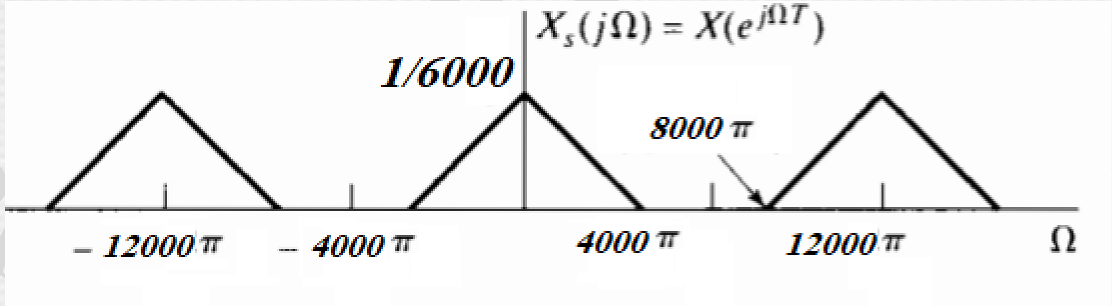
تبدیل D/C

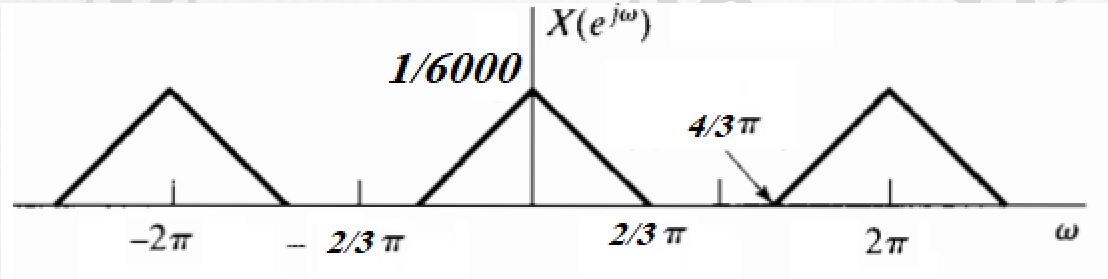
پردازش گسسته در زمان سیگنالهای پیوسته در زمان

تغییر نرخ

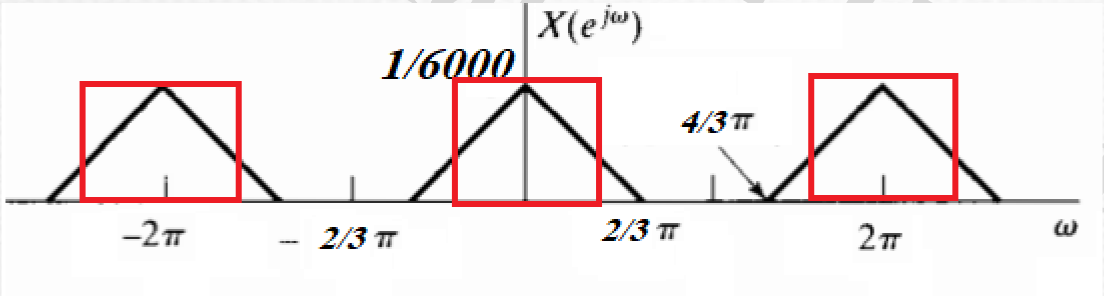
پردازش گسسته در زمان سیگنال های پیوسته در زمان:

از طرفی مطابق با نتایج اسلاید (۴)، طیف فوریه سیگنال نمونه برداری شده برابر است با:

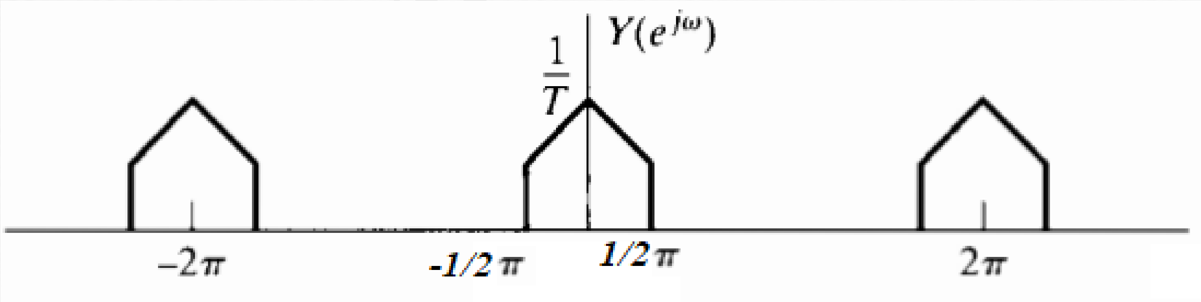




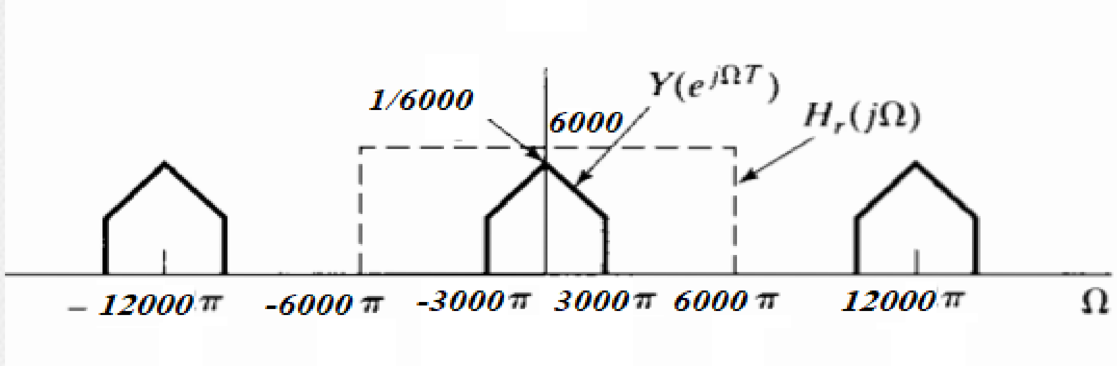
با عبور از فیلتر $H(e^{j\omega})$ طراحی شده در اسلاید قبل داریم:

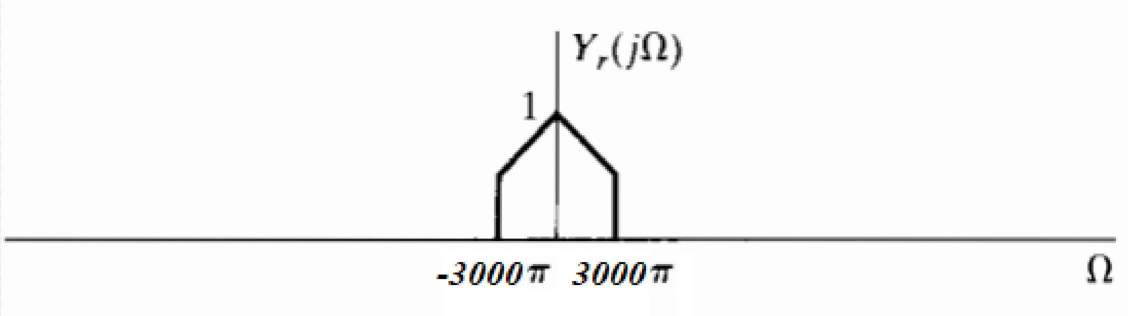


پردازش گسسته در زمان سیگنال های پیوسته در زمان:



حال تبدیل D/C را بررسی می‌کنیم.



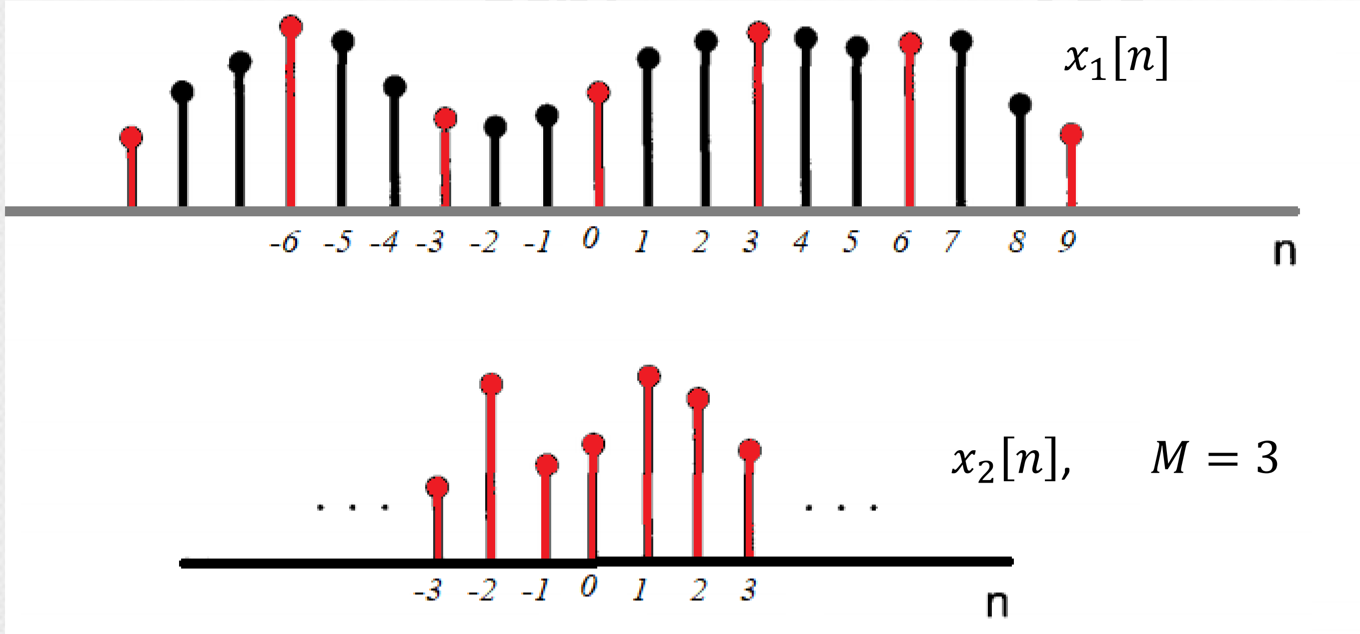


تغییر نرخ نمونه برداری

۱- کاهش نرخ down sampling:

فرض کنید از سیگنال $x_c(t)$ را نرخ T_1 نمونه برداری شده است و سیگنال $x_1[n]$ حاصل شده است. می‌خواهیم از سیگنال $x_1[n]$ نمونه گیری کنیم به طوریکه سیگنال $x_2[n]$ معادل با نمونه‌گیری از سیگنال $x_c(t)$ با نرخ $T_2 = MT_1$ باشد.

$$x_1[n] = x_c(nT_1) \qquad , \qquad x_2[n] = x_c(nT_2)$$

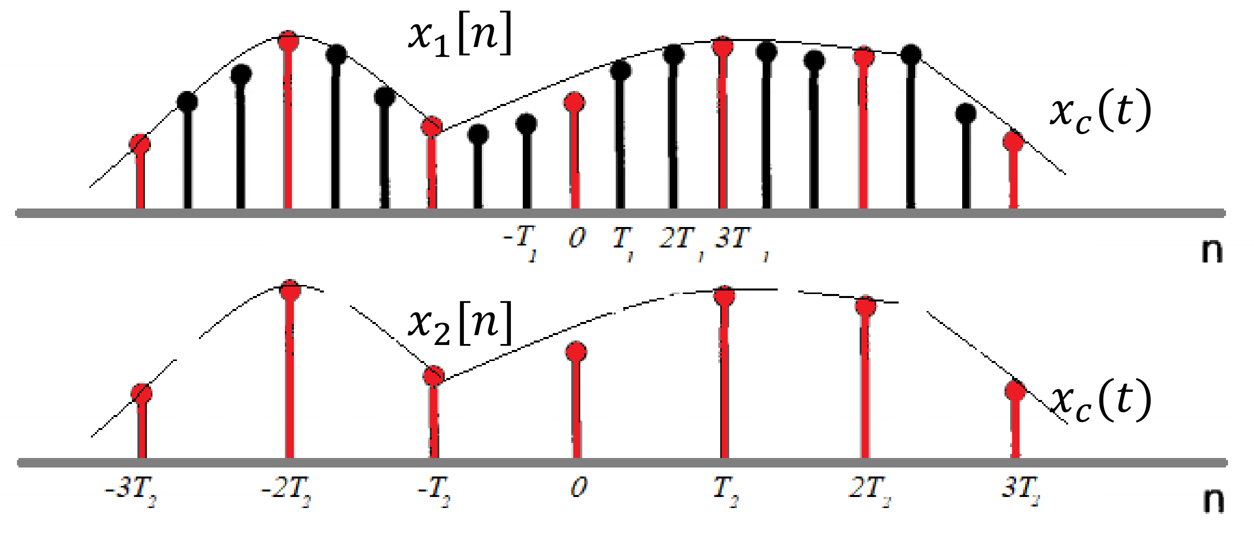


$$x_2[n] = x_1[Mn]$$

تغییر نرخ نمونه برداری

سوال ۵-۴: ارتباط طیف فرکانسی $X_1(e^{j\omega})$ و $X_2(e^{j\omega})$ را بیابید.

تحلیل: $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را میتوان به صورت زیر بر حسب سیگنال پیوسته $x_c(t)$ نمایش داد



$$x_1[n] = x_c(nT_1)$$

$$x_2[n] = x_c(nT_2) = x_c(nMT_1)$$

از نتیجه بدست آمده در اسلاید ۴ داریم:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi n}{T_1}\right)\right) \qquad (۱)$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T_2}\right)\right) \qquad (۲)$$

تغییر نرخ نمونه برداری

از رابطه (۲) داریم:

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega-2\pi k}{T_2}\right)\right) = \frac{1}{MT_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega-2\pi k}{MT_1}\right)\right)$$

محدوده $-\infty \le k \le \infty$ را میتوان به صورت دو متغیره نوشت:

$$k = Mn + l \qquad l = 0, \dots, M-1\ , \qquad n = \cdots, -1,0,1,2, \dots$$

پس داریم:

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{M-1} X_c\left(j\left(\frac{\omega-2\pi(Mn+l)}{MT_1}\right)\right)$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT_1}-\frac{2\pi Mn}{MT_1}-\frac{2\pi l}{MT_1}\right)\right)$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{(\omega-2\pi l)/M}{T_1}-\frac{2\pi n}{T_1}\right)\right) \qquad (۳)$$

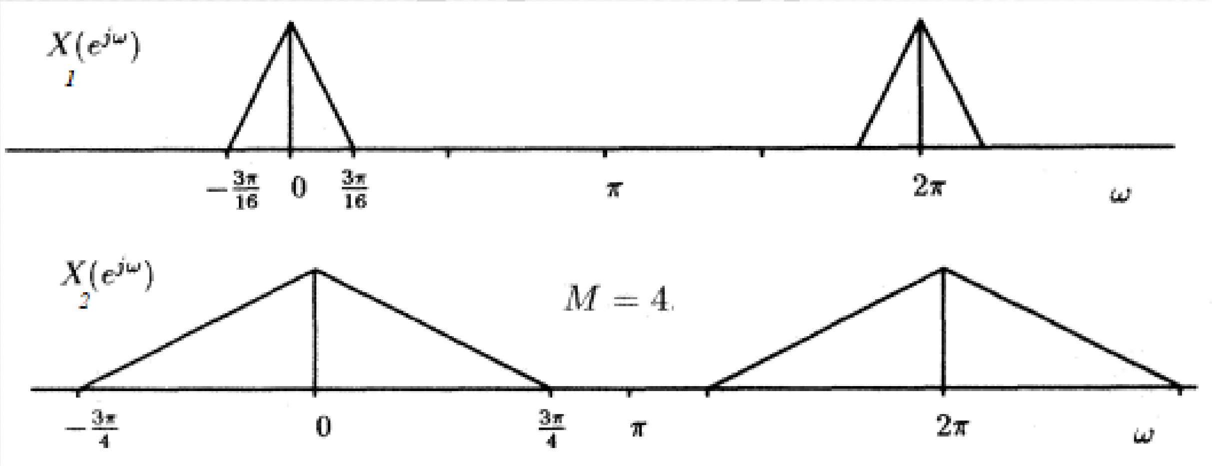
تغییر نرخ نمونه برداری

در رابطه (۱) به جای ω مقدار $\frac{\omega-2\pi l}{M}$ قرار می‌دهیم:

$$X_1\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right)=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_c\left(\frac{(\omega-2\pi l)/M}{T_1}-\frac{2\pi n}{T_1}\right) \qquad (۴)$$

با مقایسه (۳) و (۴) داریم:

$$X_2\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}X_1\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right)$$



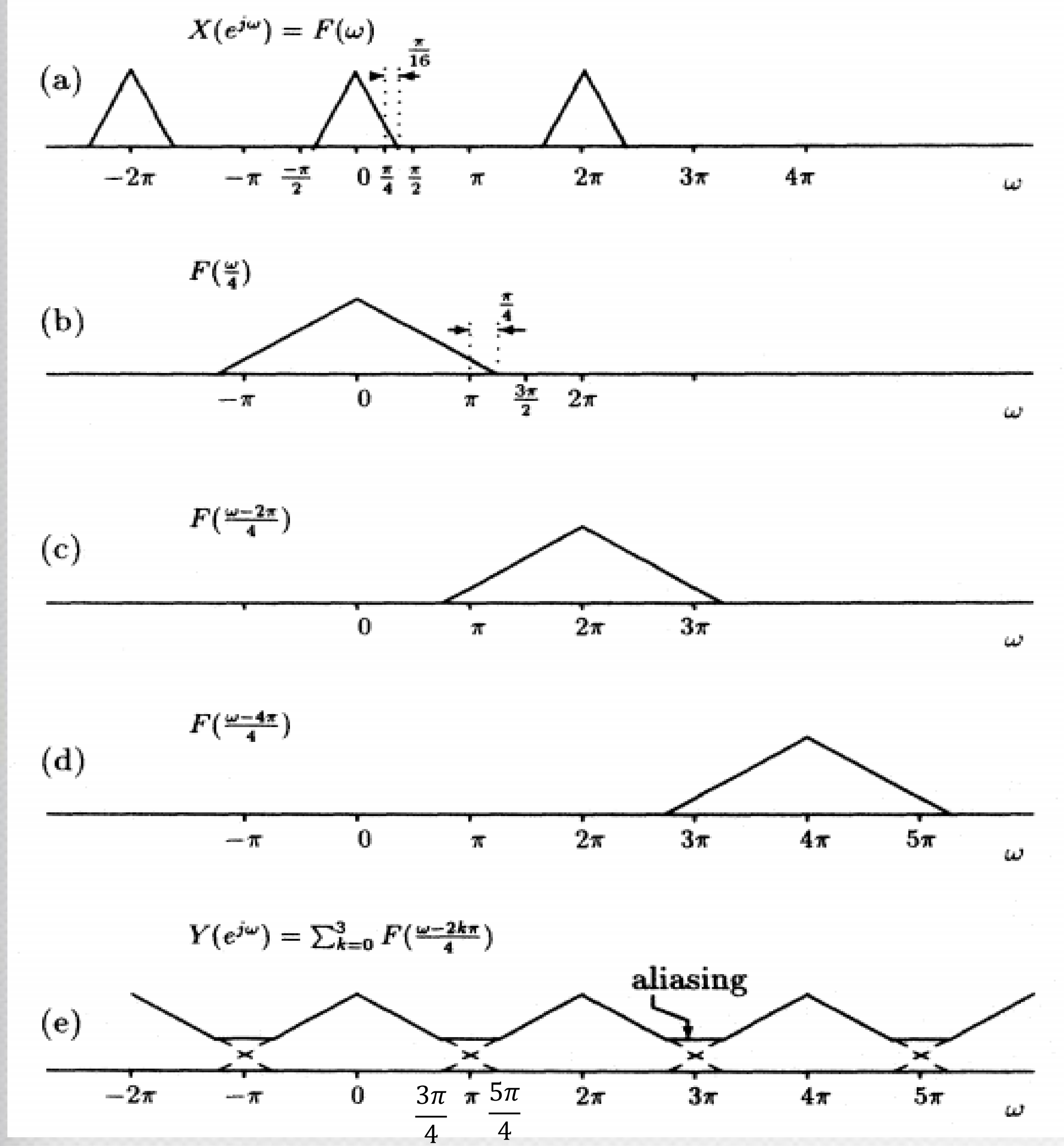
۱- باز شدن به اندازه M

۲- تکرار از هر 2π

۳- تضعیف دامنه در $1/M$

تغییر نرخ نمونه برداری

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{4}X_1\left(e^{\frac{j\omega}{4}}\right) + \frac{1}{4}X_1\left(e^{\frac{j(\omega-2\pi)}{4}}\right) + \frac{1}{4}X_1\left(e^{\frac{j(\omega-4\pi)}{4}}\right) + \frac{1}{4}X_1\left(e^{\frac{j(\omega-6\pi)}{4}}\right)$$

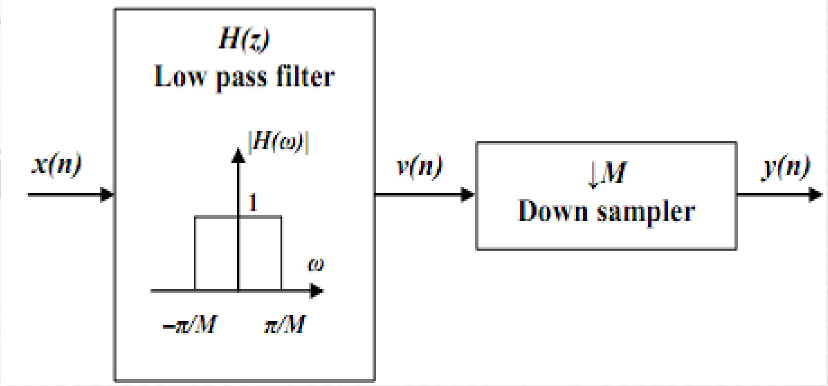


اثر تداخل طیفی در کاهش نرخ:

ملاحظه می شود که aliasing به ازای فرکانس‌های بزرگتر π/M رخ می دهد.

راه حل:

استفاده از یک LPF با فرکانس قطع π/M قبل از کاهش نرخ (**decimator**)



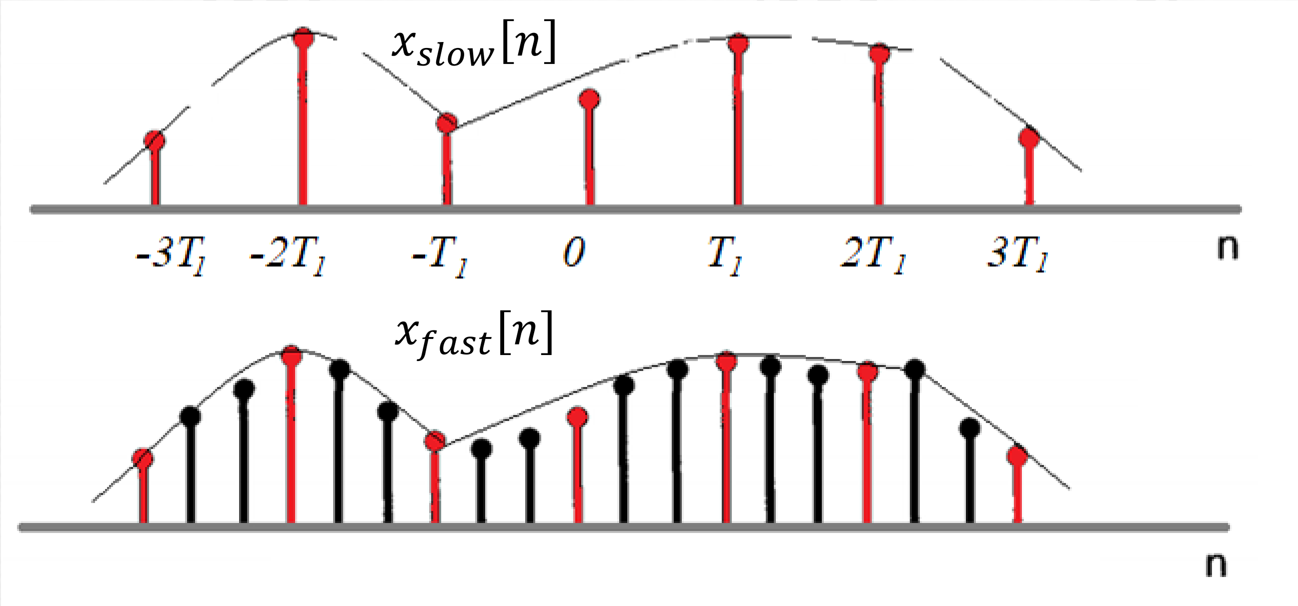
تغییر نرخ نمونه برداری

تغییر نرخ نمونه برداری

۲-افزایش نرخ:

فرض کنید از سیگنال $x_c(t)$ را نرخ **کم** T_1 نمونه برداری شده است و سیگنال $x_{slow}[n]$ حاصل شده است. می‌خواهیم بدون مراجعه به سیگنال پیوسته $x_c(t)$ نرخ نمونه‌برداری را افزایش دهیم $(T_2 = \frac{T_1}{M})$

$$x_{slow}[n] = x_c(nT_1) \qquad , \qquad x_{fast}[n] = x_c(nT_2)$$



قضیه نمونه برداری

تبدیل C/D

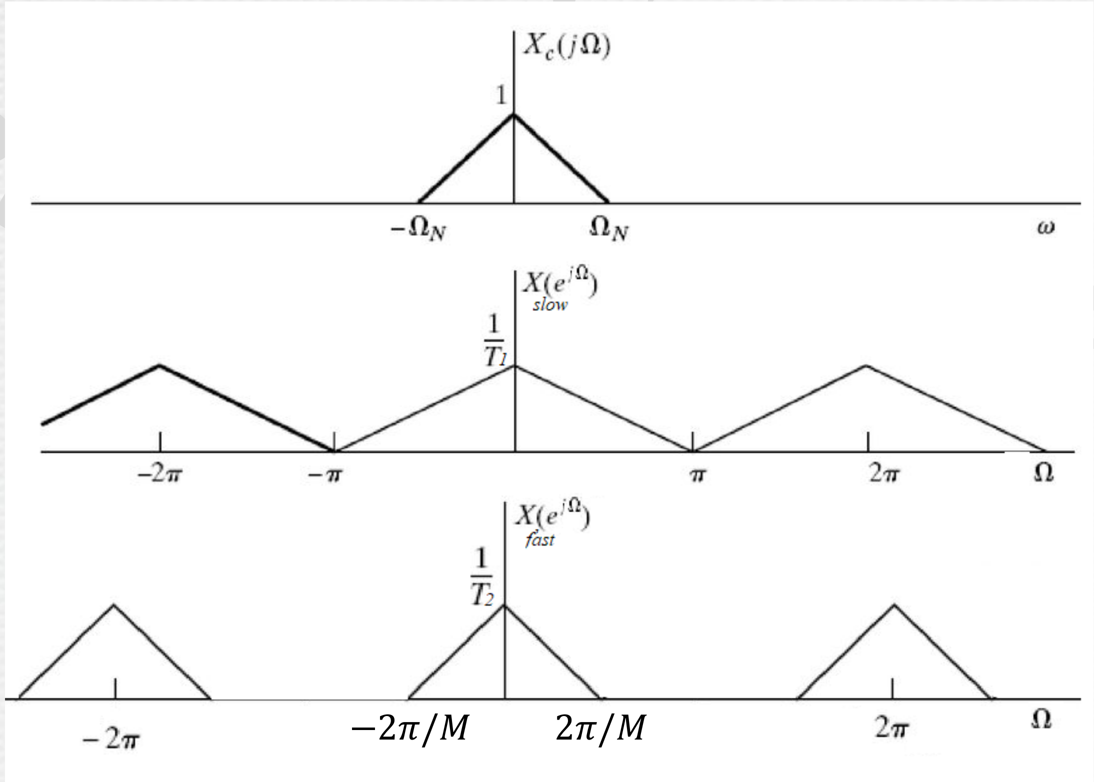
تبدیل D/C

پردازش گسسته در زمان سیگنالهای پیوسته در زمان

تغییر نرخ

تغییر نرخ نمونه برداری

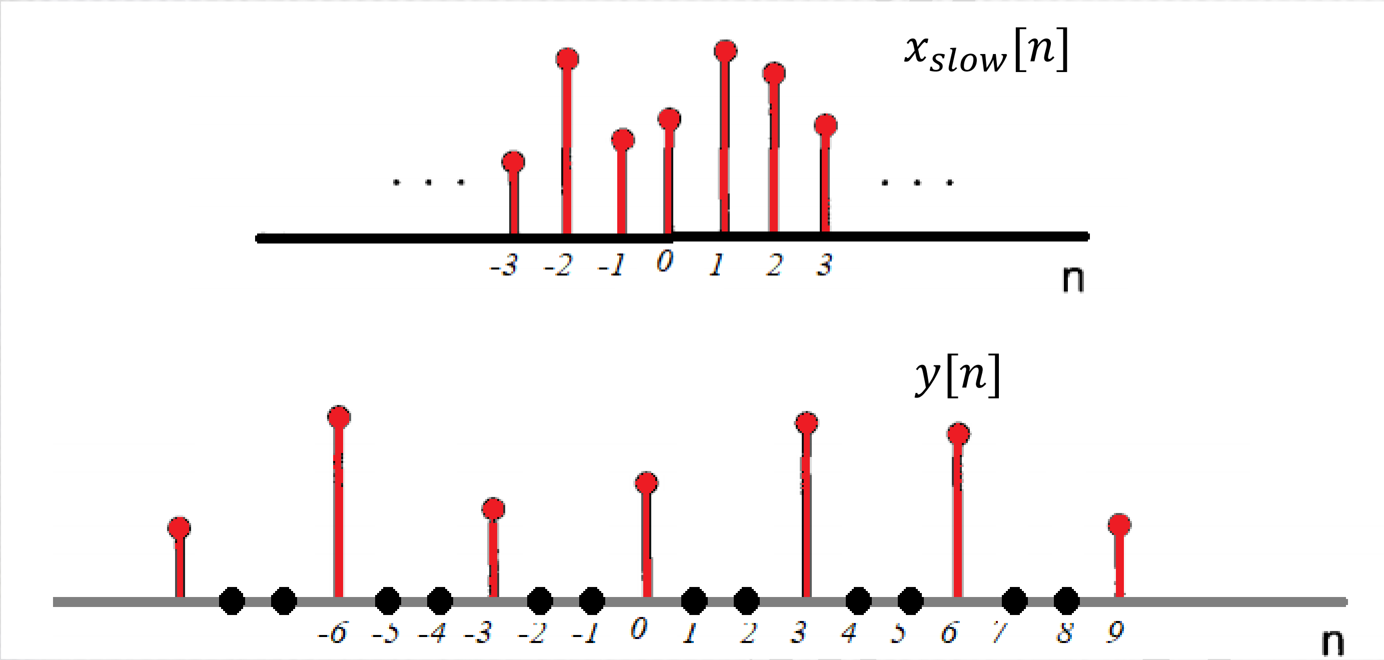
فرض کنید سیگنال کند $x_{slow}[n]$ (سیگنالی که در اختیار داریم) دقیقا نرخ نایکویست را برآورده می‌کند. طیف فرکانسی سیگنال $x_{slow}[n]$ و سیگنال $x_{fast}[n]$ (در اختیار نداریم) بر حسب طیف سیگنال پیوسته $x_c(t)$ به صورت زیر هستند:



اگر بتوانیم از $X_{slow}(e^{j\omega})$ به $X_{fast}(e^{j\omega})$ برسیم، در واقع توانسته ایم از $x_{slow}[n]$ به $x_{fast}[n]$ برسیم و افزایش نرخ داشته ایم

تغییر نرخ نمونه برداری

ابتدا سیگنال $y[n]$ را به صورت زیر از شکل $x_{slow}[n]$ بدست می‌آوریم:



Interpolator یا upsampler

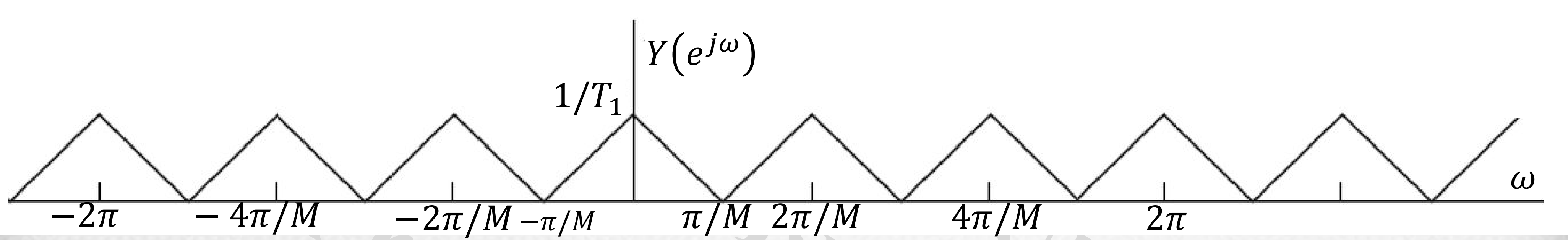
$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{M}\right] & n \text{ مضرب } M \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

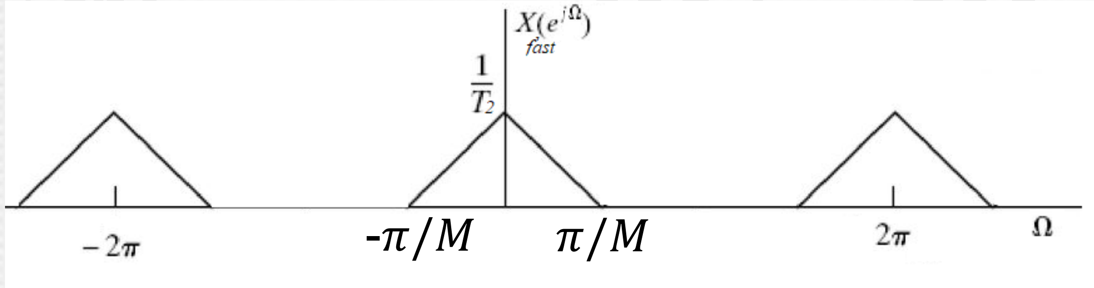
ثابن می شود که طیف $Y(e^{j\omega})$ برابر است با (تمرین):

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega M})$$

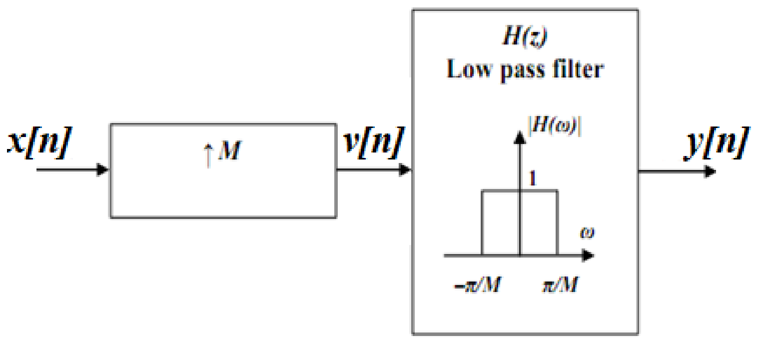
یعنی طیف $X_{slow}(e^{j\omega})$ باید به اندازه M فشرده شود

تغییر نرخ نمونه برداری





با مقایسه طیف $Y(e^{j\omega})$ با طیف $X_{fast}(e^{j\omega})$ در اسلاید (۲۵) میتوان گفت که با یک فیلتر پایین گذر با پهنای π/M میتوان افزایش نرخ داشت:



قضیه نمونه برداری
تبدیل C/D
تبدیل D/C
پردازش گسسته در زمان سیگنالهای پیوسته در زمان
تغییر نرخ

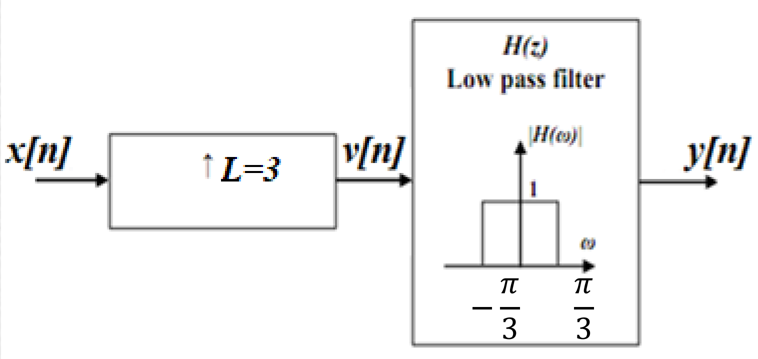
تغییر نرخ نمونه برداری

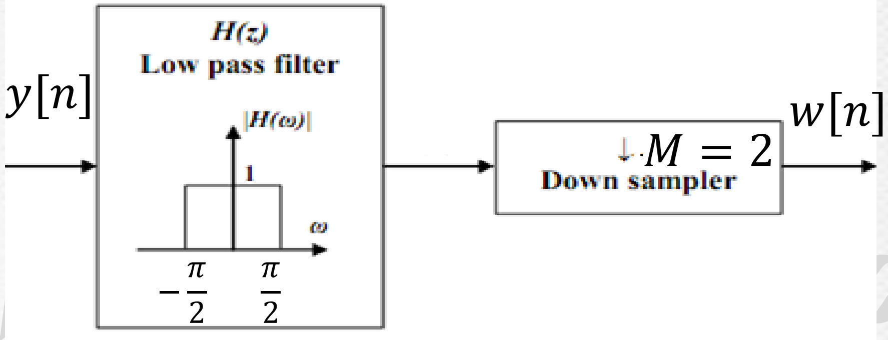
تغییر نرخ نمونه برداری

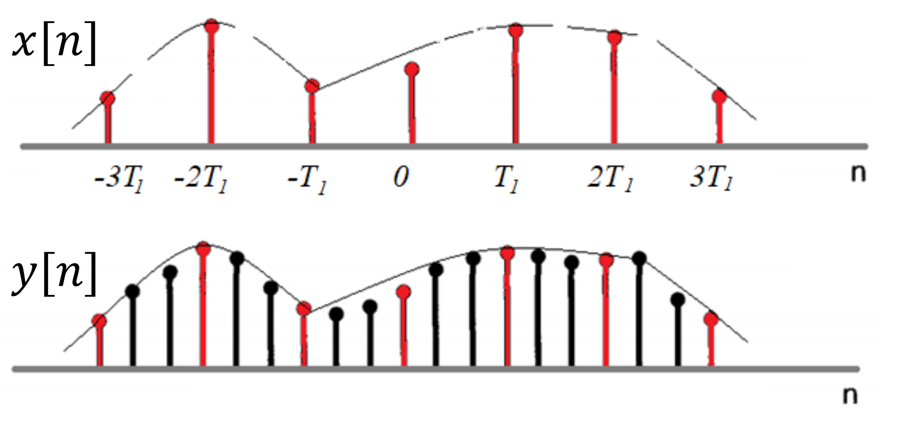
۳-تغییر نرخ کسری:

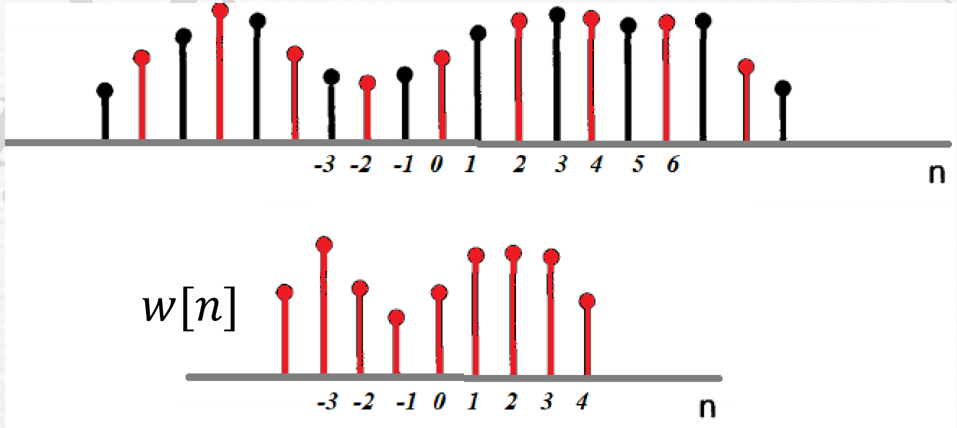
فرض کنید از سیگنال $x_c(t)$ را نرخ T_1 نمونه برداری شده است. می‌خواهیم نرخ نمونه برداری را ۱/۵ برابر کنیم.

برای این منظور ابتدا باید ۳ واحد افزایش نرخ داد و سپس ۲ واحد کاهش نرخ داد $\frac{L}{M}=\frac{3}{2}=1.5$



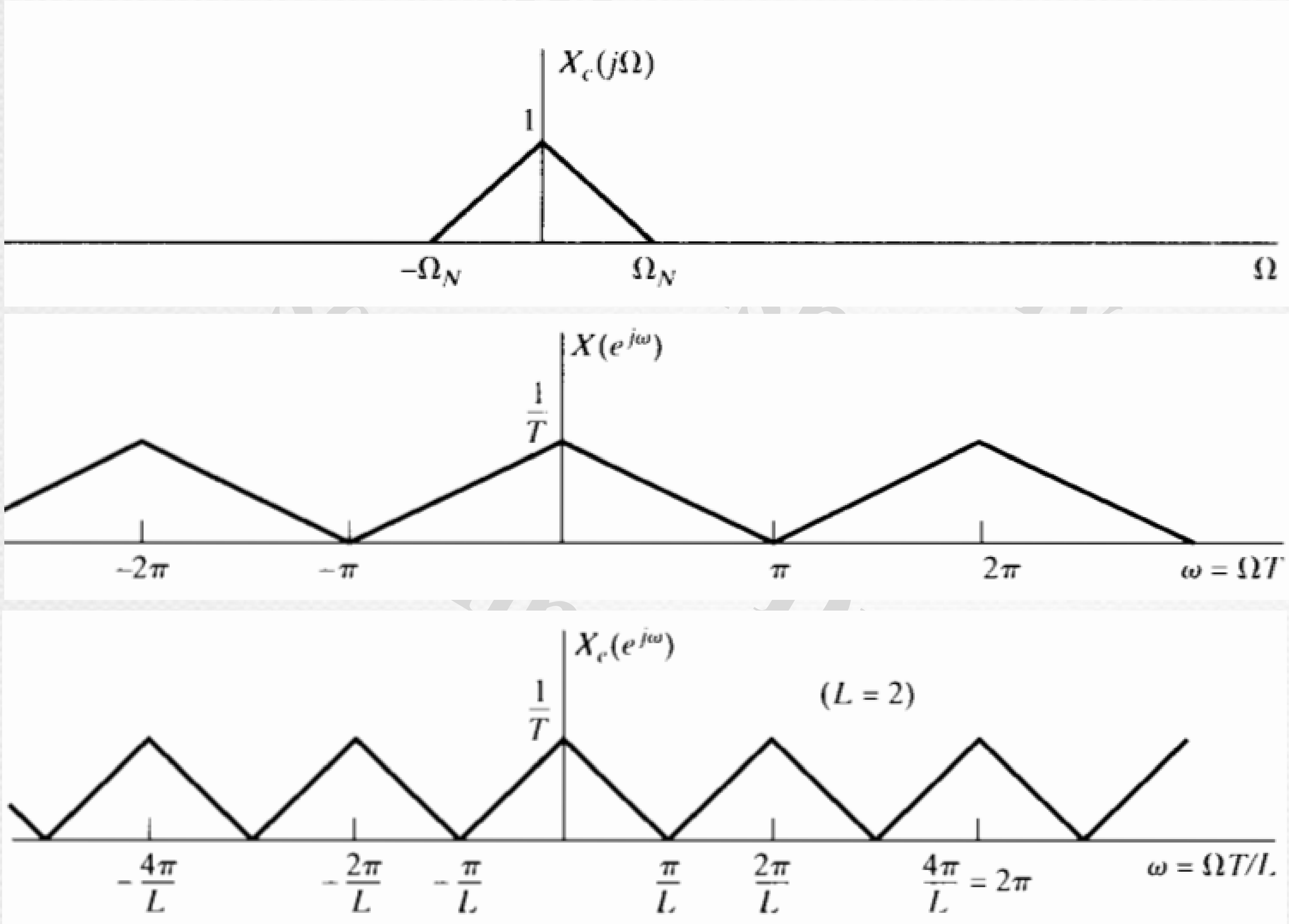






تغییر نرخ نمونه برداری

مثالی از تغییر نرخ کسری



قضیه نمونه برداری

تبدیل C/D

تبدیل D/C

پردازش گسسته در زمان سیگنالهای پیوسته در زمان

تغییر نرخ

End of Chapter 4