پردازش سیگنال های دیجیتال پیشرفته

فصل ششم
نمایش زمان–فرکانس

ارایه شده توسط:

حجت قیمت گر
استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مقدمه

- هدف از پردازش زمان-فرکانس، استخراج ویژگی‌های محلی یک سیگنال به صورت اطلاعات زمانی و فرکانسی است.
- به منظور داشتن یک تفکیک زمانی و فرکانسی مناسب، نیاز است که کرنل زمانی $\phi(t)$ و تبدیل فوریه آن $\Phi(\Omega)$ (کرنل فرکانسی) در نقاط t_k و Ω_k دارای پهنای باریکی باشند.
- طبق اصل عدم قطعیت (در ادامه مطرح می شود)، باریک بودن کرنل در یک حوزه، منجر به گسترش در حوزه دیگر است.

- در حوزه فوریه، ما اطلاعات فرکانسی داریم. یعنی میدانیم که چه مولفه‌های فرکانسی وجود دارد اما نمی‌دانیم این مولفه‌ها در چه زمانی حضور دارند.
- در تحلیل سیگنال‌های ناایستان، آنالیز فوریه عملکرد خوبی ارائه نمی‌دهد. زیرا توان هر مولفه فرکانسی را در تمام زمان‌ها جاروب می‌کند:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt$$

مقدمه

ایده:

به کارگیری یک پنجره با طول ثابت و محاسبه تبدیل فوریه در هر سیگنال پنجره شده

$$F(\Omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t-\tau)e^{-j\Omega t}dt$$

این انتگرال، اساس تبدیل STFT است.

- ❖ $g(t)$ تابع پنجره نامیده می‌شود که به عنوان تابع مادر نیز شناخته می‌شود.
- ❖ اگر $g(t)$ گوسی انتخاب شود، تبدیل STFT را تبدیل گابور گویند.
- ❖ توابع اساسی با مدولاسیون و انتقال تابع پنجره $g(t)$ با پارامترهای Ω و τ تشکیل می‌شوند.

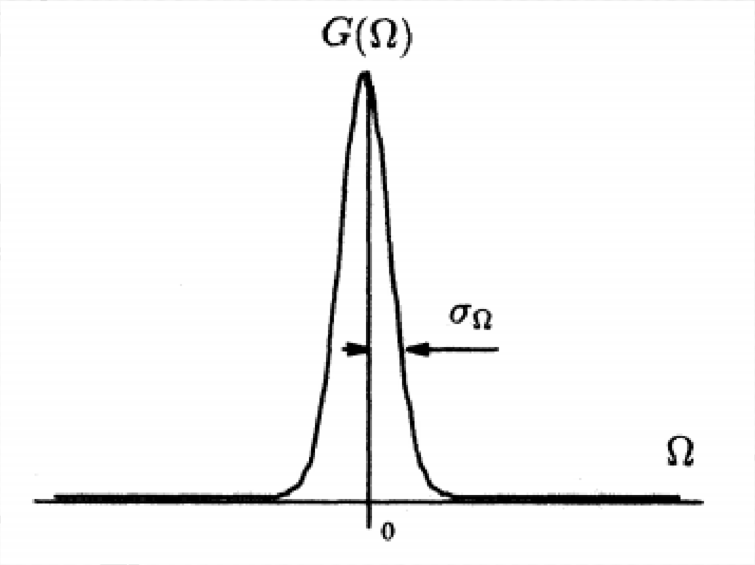
رفتار پارامترها:

۱- با افزایش پارامتر τ، تابع مادر تنها در حوزه زمان منتقل می‌شود و گستردگی در حوزه زمان تغییری نمی‌کند.

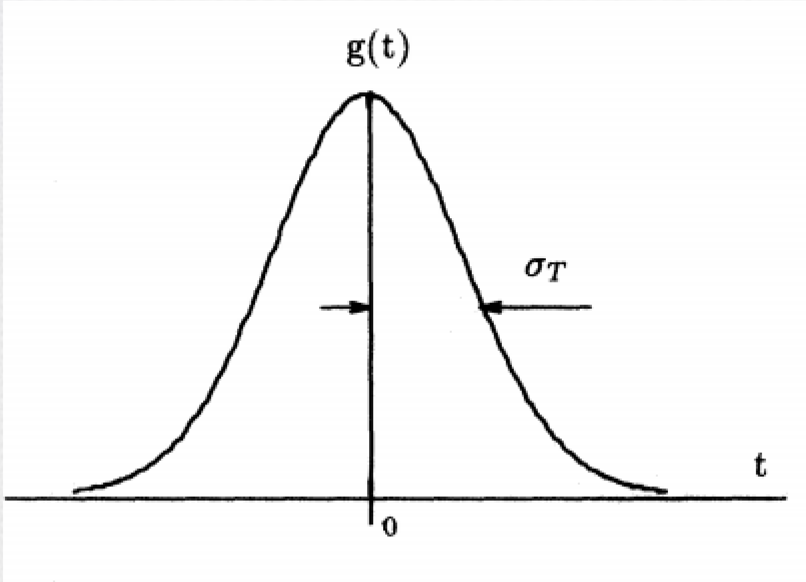
۲- با افزایش پارامتر Ω، تابع مادر تنها در حوزه فرکانس منتقل می‌شود و گستردگی در حوزه فرکانس تغییری نمی‌کند.

مقدمه

تبدیل فوریه تابع مادر تبدیل STFT گابور

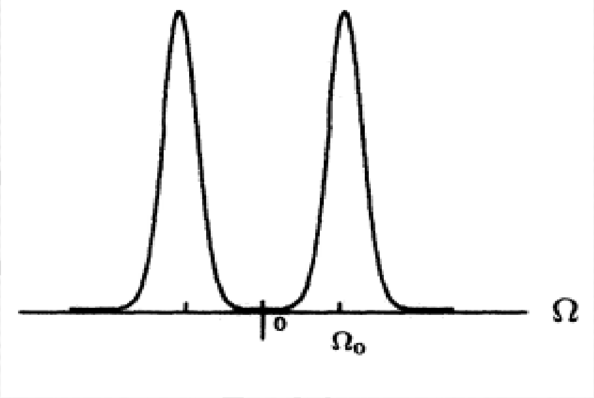


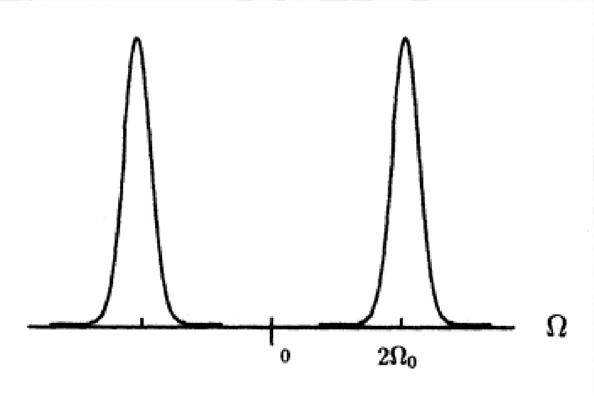
تابع مادر تبدیل STFT گابور

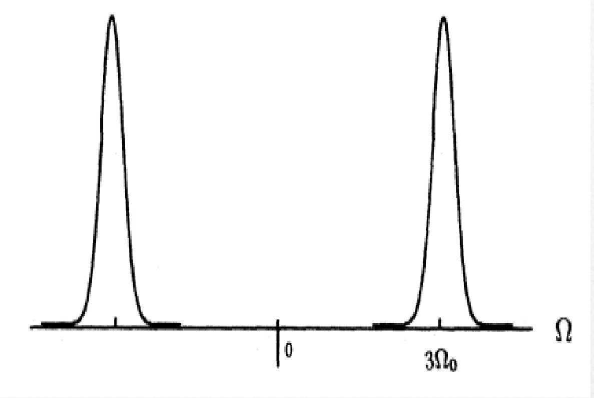


مقدمه

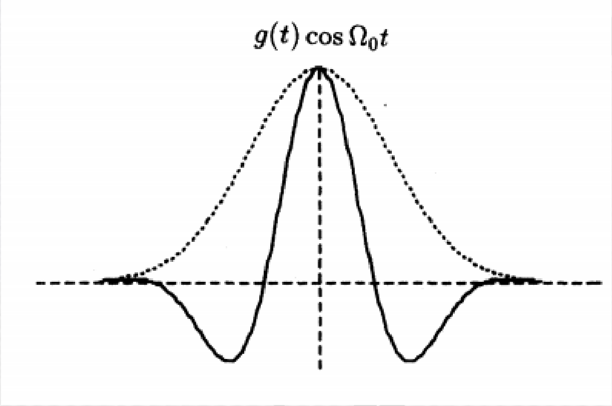
تبدیل فوریه شیفت‌های فرکانسی

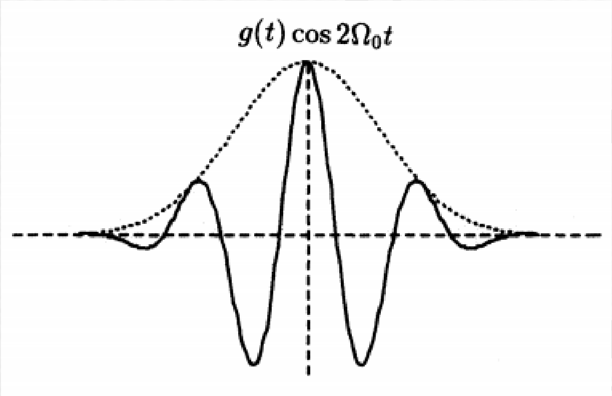


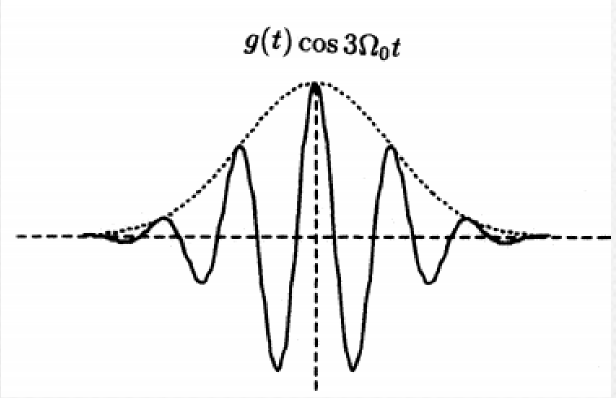




شیفت‌های فرکانسی







مقدمه

نکته: مشکل اساسی STFT این است که طول پنجره زمانی ثابت است و بنابراین تنها یک رزولوشن زمان-فرکانسی حاصل می‌شود. این یک نتیجه از اصل عدم قطعیت است.

اصل عدم قطعیت:

به ازای هر تابع $\phi(t)$ و تابع تبدیل فوریه آن $\Phi(\Omega)$ می‌توان نشان داد که

$$\delta_T \delta_\Omega \geq 1/2$$

که δ_T و δ_Ω به ترتیب RMS گسترش $\phi(t)$ و $\Phi(\Omega)$ در مرکز نمونه‌های زمانی و فرکانسی هستند و برابرند با:

$$\delta_T^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-\bar{t})^2 |\phi(t)|^2 dt}{E}$$

$$\delta_\Omega^2 = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\Omega-\bar{\Omega})^2 |\Phi(\Omega)|^2 d\Omega}{E}$$

که E انرژی سیگنال و $\bar{t}$ و $\bar{\Omega}$ میانگین وزنی کرنل‌های زمانی و فرکانسی هستند:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega|\Phi(\Omega)|^2d\Omega$$

$$\bar{t}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}t|\phi(t)|^2dt}{E}$$

$$\bar{\Omega}=\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega|\Phi(\Omega)|^2d\Omega}{E}$$

حالت تساوی:

رابطه اصل عدم قطعیت در صورتی به صورت $\delta_T\delta_\Omega=1/2$ است که $\phi(t)$ یک تابع گاوسی به صورت $e^{-\alpha t^2}$ باشد.

تعریف: حاصلضرب $\delta_T\delta_\Omega$ به عنوان سلول رزولوشن نامیده می‌شود.

مقدمه

سلول رزولوشن:

فرض کنید $G(\Omega) \rightarrow g(t)$ یک زوج تبدیل فوریه باشند که هر دو گاوسی هستند. در این صورت نمونه شیفت خورده زمانی و فرکانسی این تابع برابر است با:

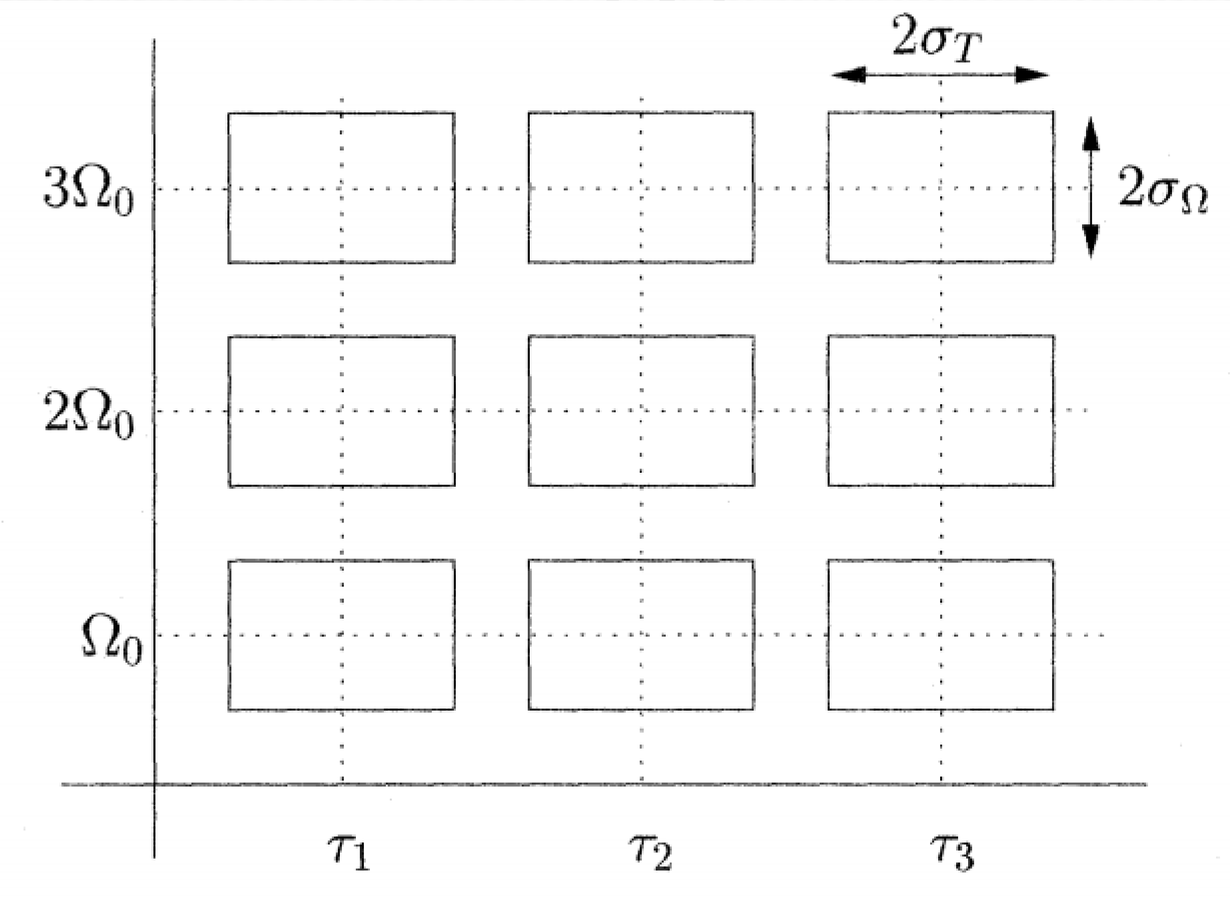
$$g_{\tau,\beta}(t) = g(t-\tau)e^{j\beta t} \rightarrow G(\Omega) = e^{-j(\Omega-\beta)\tau}G(\Omega-\beta)$$

این مجموعه دو پارامتری، در مرکز (τ,β) از صفحه زمان-فرکانس قرار دارند. به سادگی می‌توان نشان داده که گستردگی این تابع همانند گستردگی تابع مادر $g(t)$ است و بنابراین رزولوشن زمان-فرکانس تبدیل STFT همواره ثابت است:

$$\delta^2_{T(\tau,\beta)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(t-\bar{\tau})^2\left|g_{\tau,\beta}(t)\right|^2 dt}{E} = \delta^2_T$$

$$\delta^2_{\Omega(\tau,\beta)} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\Omega-\bar{\beta})^2\left|G_{\tau,\beta}(\Omega)\right|^2 d\Omega}{E} = \delta^2_\Omega$$

سلولهای رزولوشن در صفحه زمان فرکانس تبدیل STFT



تبدیل STFT

۱- تبدیل STFT پیوسته

تبدیل STFT پیوسته، یک نگاشت از فضای یک بعدی $f(t)$ به فضای دو بعدی $F(\Omega,\tau)$ است:

$$F(\Omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^{*}(t-\tau)e^{-j\Omega t}dt$$

- ❖ اگر Ω ثابت باشد و τ تغییر کند، در واقع توان سیگنال در باند فرکانسی به مرکزیت Ω را به صورت تابعی از زمان نشان می‌دهیم. (معادل با یک خط راست موازی با محور زمانی)
- ❖ اگر τ ثابت باشد وΩ تغییر کند، در واقع توان سیگنال در بازه زمانی حول τ را به صورت تابعی از فرکانس نشان می‌دهیم. (معادل با یک خط راست موازی با محور فرکانسی)

عکس تبدیل STFT پیوسته

$$f(t)=1/2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega,\tau)g(t-\tau)e^{j\Omega t}d\Omega d\tau$$

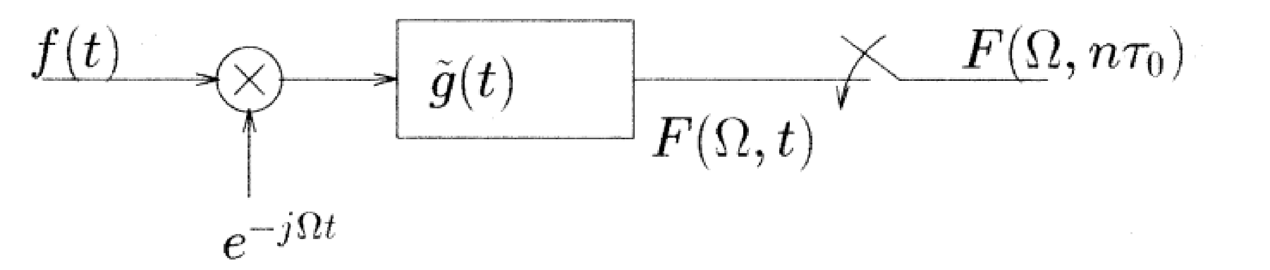
تبدیل STFT

تبدیل STFT را می‌توان به صورت حاصلضرب داخلی زیر نوشت:

$$F(\Omega,\tau) =< f(t), g(t-\tau)e^{j\Omega t} > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t-\tau)e^{-j\Omega t}dt$$

تبدیل STFT را می‌توان به صورت کانولوشن زیر نوشت:

$$F(\Omega,\tau) = f(t)e^{-j\Omega t} * g^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t-\tau)e^{-j\Omega t}dt$$



تبدیل STFT

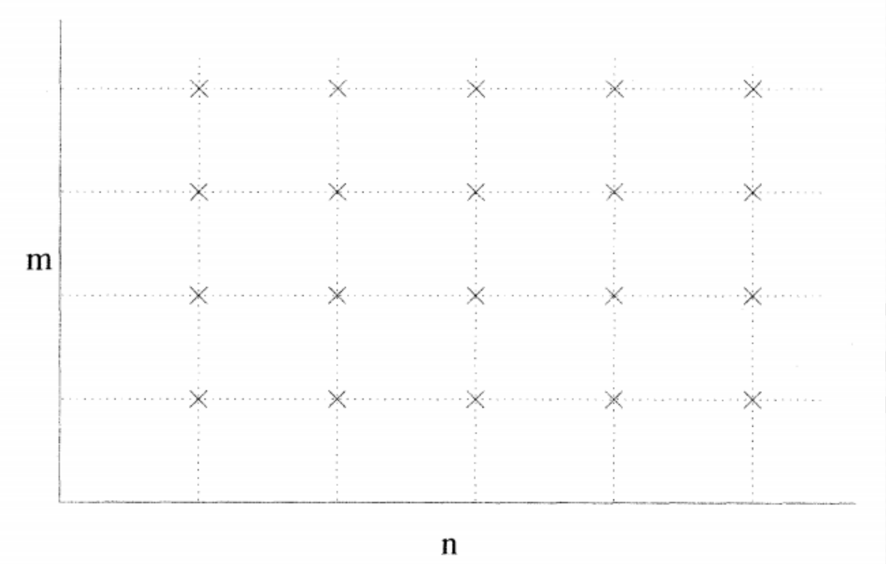
۲- تبدیل STFT گسسته

می‌توان با گسسته سازی پارامترهای (Ω,τ) در تبدیل STFT پیوسته در زمان، به یک نمایش مفید برای STFT گسسته در زمان رسید. به عبارت دیگر اگر تعریف کنیم

$$\Omega = m\Omega_0 \quad ,\tau = n\tau_0$$

آنگاه داریم:

$$F(\mathrm{m}\Omega_0, n\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t - n\tau_0)e^{-j\mathrm{m}\Omega_0 t}dt$$



تبدیل STFT

سوال:

آیا می‌توان از نمونه‌های گسسته $F(m,n)$ ، به سیگنال پیوسته در زمان $f(t)$ رسید؟

سوال:

اگر $\Omega_0\tau_0 < 2\pi$ باشد، در این صورت می‌توان به صورت زیر به سیگنال $f(t)$ رسید:

$$f(t) = \frac{\Omega_0\tau_0}{2\pi}\sum_{(m=-\infty)}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(m,n)g(t-n\tau_0)e^{jm\Omega_0 t}$$

نکته:

توابع $g(t-n\tau_0)e^{jm\Omega_0 t}$ متعامد نیستند و بنابراین در این تبدیل، افزونگی وجود دارد.

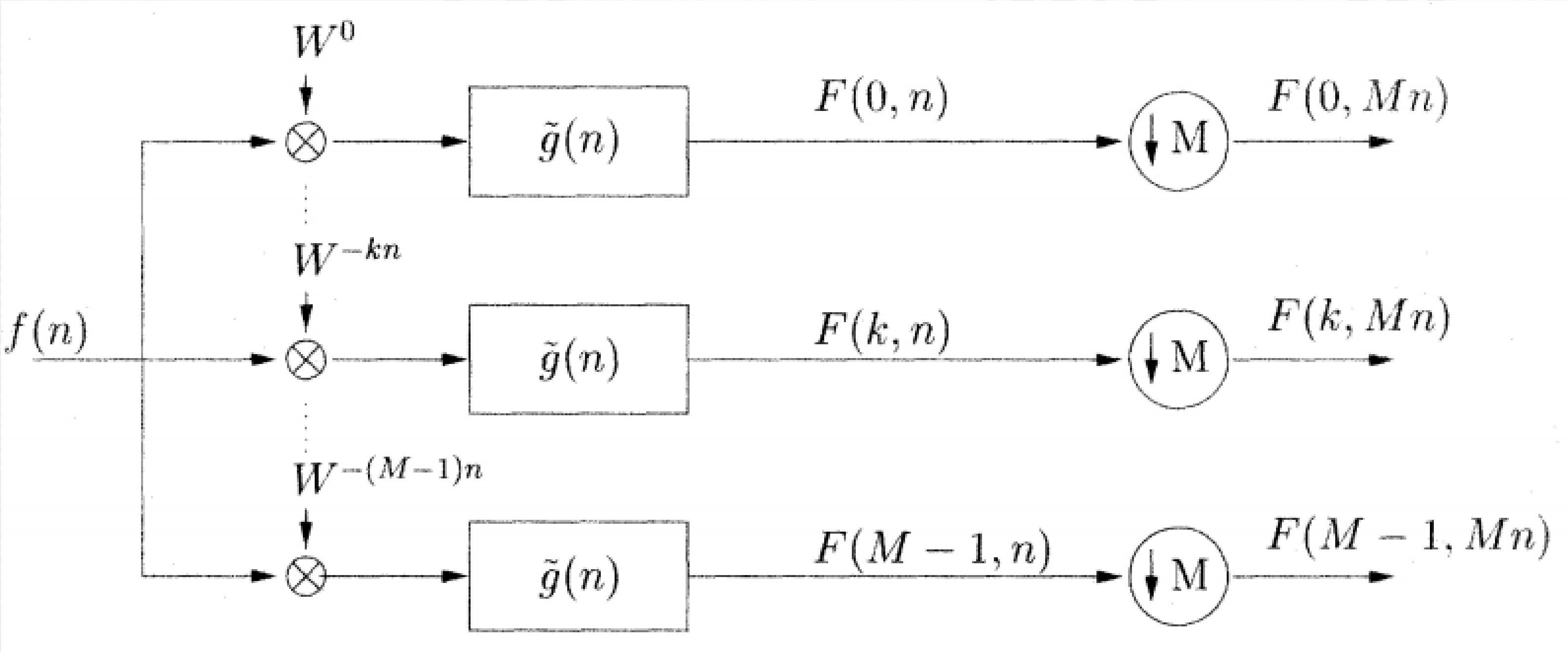
تبدیل STFT

۳- تبدیل STFT گسسته در زمان

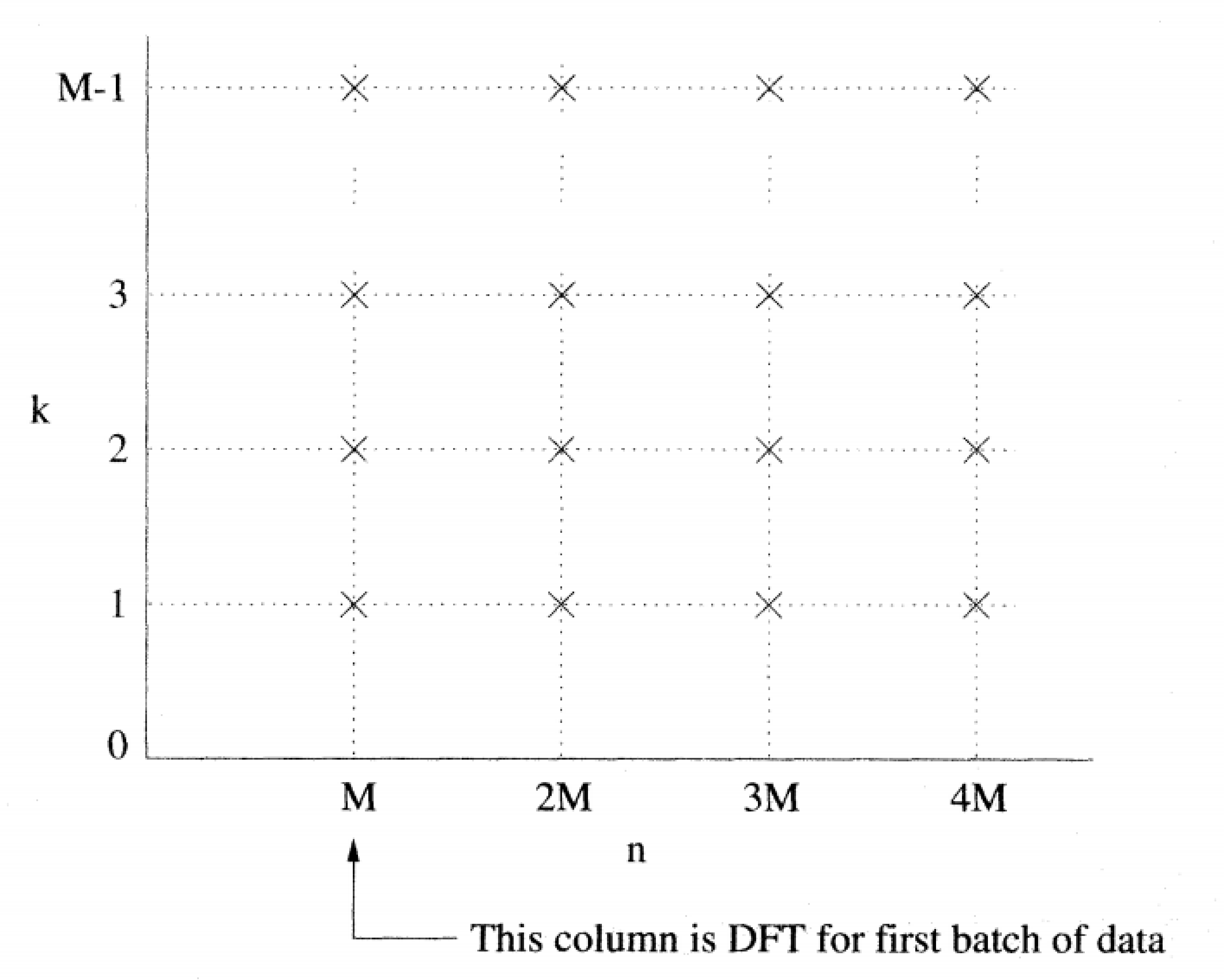
تبدیل STFT پیوسته، یک نگاشت از فضای یک بعدی $f[n]$ به فضای دو بعدی $F[k,n]$ است:

$$F[k,n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g^*(m-n) f(m) e^{-j\frac{2\pi}{M}km} \quad , \qquad k = 0,1,2,\ldots,M-1$$

رابطه بالا را می‌توان با فیلتربانک زیر مدل کرد:



تبدیل STFT

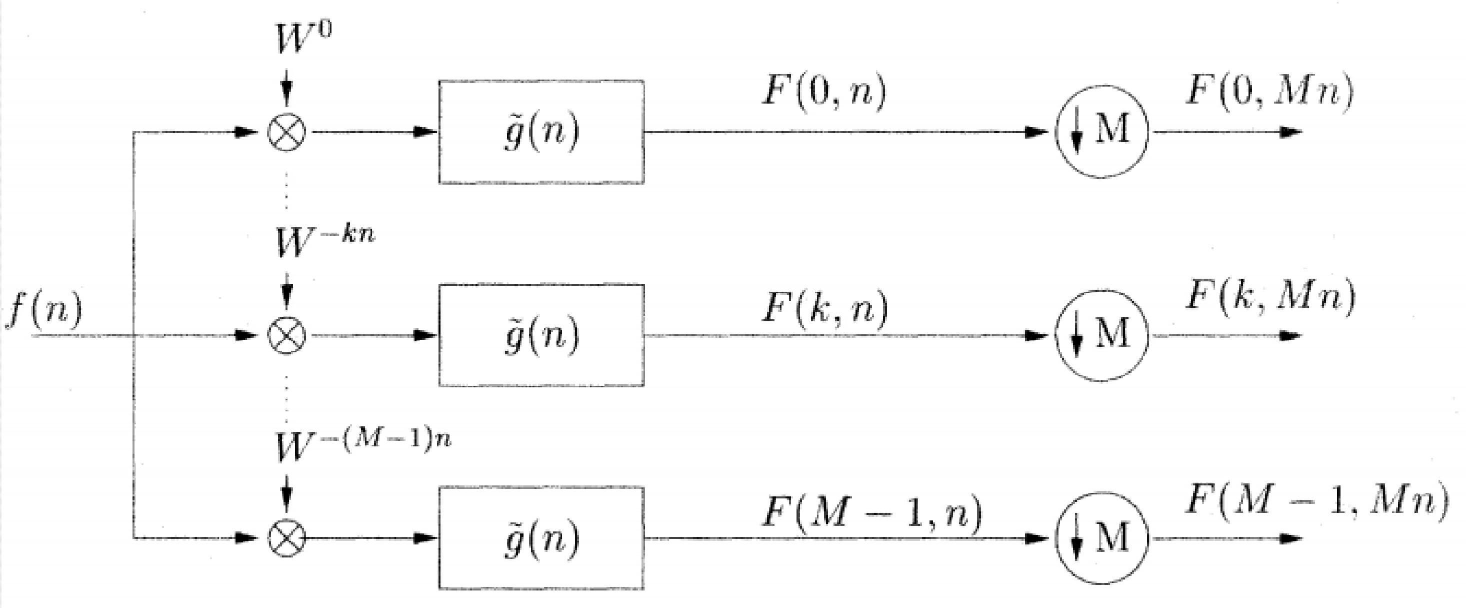


۳- تبدیل STFT گسسته در زمان

تبدیل STFT پیوسته، یک نگاشت از فضای یک بعدی $f[n]$ به فضای دو بعدی $F[k,n]$ است:

$$F[k,n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g^*(m-n) f(m) e^{-j\frac{2\pi}{M}km} \quad , \qquad k = 0,1,2,\dots,M-1$$

رابطه بالا را می‌توان با فیلتربانک زیر مدل کرد (اگر پنجره $g[n]$ مستطیلی باشد به همان فیلتربانک DFT می رسیم):



اصل عدم قطعیت گسسته در زمان

اصل عدم قطعیت گسسته در زمان:

به ازای هر تابع $f[n]$ و تابع تبدیل فوریه آن $\mathrm{F}(e^{j\omega})$ می‌توان نشان داد که

$$\delta_n \delta_\omega > \frac{1-\mu}{2}$$

که:

$$\sigma_n^2 = \frac{\sum_{(n=-\infty)}^{\infty} (n-\bar{n})^2 |f[n]|^2}{E}$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} (\omega-\bar{\omega})^2 \left|F\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega}{E}$$

که E انرژی سیگنال است و

$$\bar{n} = \frac{\sum_{(n=-\infty)}^{\infty} n|f[n]|^2}{E}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} \omega\left|F\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega}{E}$$

اصل عدم قطعیت گسسته در زمان

در رابطه اصل عدم قطعیت μ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu = \frac{\left|F\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}{E}\bigg|_{\omega=\pi} = \frac{|F(-1)|^2}{E}$$

- همانطور که ملاحظه می‌شود رابطه اصل عدم قطعیت در حالت پیوسته مستقیما به ½ اشاره میکرد اما در اینجا به عبارت $(1-\mu)/2$ می رسیم.
- در حالت پیوسته در زمان فرض بر این است که $F(\infty)=0$ است اما در حالت گسسته در زمان، فرکانس معادل در $\omega=\pi$ تعریف می شود که لزوما به ازای این فرکانس $F(e^{j\omega})$ صفر نیست.

حالت خاص:

اگر سیگنال در محدوده $\omega=\hat{\omega}$ متمرکز باشد می‌توان تعاریف را به صورت زیر اصلاح کرد:

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \frac{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\omega-\hat{\boldsymbol{\omega}})^2\left|F\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega}{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \omega\left|F\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega}{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}$$

اصل عدم قطعیت گسسته در زمان

و σ_n^2 و $\bar{n}$ تغییر نمی‌کنند. به آسانی می‌توان نشان داد که:

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \sigma_\omega^2 - \widehat{\omega}^2$$

و با این تفاسیر داریم:

$$\hat{\sigma}_\omega^2 \sigma_n^2 \geq \frac{1}{4}(1-\mu)^2 - \widehat{\omega}^2\, \sigma_n^2$$

در کتاب (Haddad, et al., 1993) نشان داده شده است که:

$$\hat{\sigma}_\omega \sigma_n \geq \frac{1}{2}(1-\mu')$$

که

$$\mu' = \frac{\widehat{\omega}}{\pi}\frac{|F(1)|^2}{E} + \left(1-\frac{\widehat{\omega}}{\pi}\right)\frac{|F(-1)|^2}{E}$$

اصل عدم قطعیت گسسته در زمان

حالت خاص ۱: اگر سیگنال، باند میانی باشد و مولفه DC صفر باشد، یعنی $F\left(e^{j0}\right) = F(1) = 0$، داریم:

$$\mu' = \left(1 - \frac{\widehat{\omega}}{\pi}\right)\frac{|F(-1)|^2}{E}$$

حالت خاص ۲: اگر سیگنال، باند میانی باشد و $F(1) = F(-1) = 0$ باشد داریم:

$$\mu' = 0 \quad \rightarrow \hat{\sigma}_\omega \sigma_n \geq 1/2$$

حالت خاص ۳: اگر فیلتر پایین‌گذر باشد یا سیگنال باند پایین باشد آنگاه $|F(1)| = \left|F\left(e^{j\omega}\right)\right|_{\max} \neq 0$ در این صورت دو کلاس از فیلترها یا سیگنال‌ها تعریف می‌شود:

کلاس ۱: $F(-1) = 0$ پس $\sigma_\omega \sigma_n \geq \frac{1}{2}$.

کلاس ۲: $F(-1) \neq 0$ پس $\sigma_\omega \sigma_n \geq \frac{1-\mu}{2}$

اصل عدم قطعیت گسسته در زمان

در حالت پیوسته دیدیم که اگر تابع گاوسی باشد در این صورت شرط تساوی برقرار می شود. در حالت گسسته در زمان، اگر تابع انتخابی به فرم تابع گاوسی $F(e^{j\omega}) = \exp(-K\omega^2/2)$ باشد، در این صورت چون $F(e^{j\pi}) = F(-1) \neq 0$ است پس شرط تساوی کلاس ۱ را نمی‌تواند برقرار شود. پس همواره داریم:

$$\sigma_\omega \sigma_n > \frac{1}{2}$$

انتخاب گاوسی، شرط کلاس ۲ را برقرار می‌کند. این حالت اگر تابع $F(e^{j\omega}) = \exp(-K\omega^2/2)$ باشد، داریم

$$\sigma_\omega \sigma_n = \frac{|1-\mu|}{2}$$

نکته: ثابت می‌شود که تقریب تابع گاوسی با تابع binomial، می‌تواند شرط صفر شدن مولفه فرکانسی $F(-1)$ را برآورده کند و بنابراین در این حالت داریم:

$$\sigma_\omega \sigma_n = 1/2$$

توزیع های دوجمله ای (Binomial) و گاوسی

کلاس ۲ و توزیع گاوسی:

با فرض کلاس II، توزیع گاوسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left|F\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = Ke^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}} \ ,|\omega| < \pi$$

ضریب K به منظور نرمالیزه کردن انرژی اعمال می‌شود. با این فرض می‌توان نشان داد که:

$$\sigma_\omega = \sigma(1-\mu)^{1/2}$$

و

$$\mu = \frac{\left|F\left(e^{j\pi}\right)\right|^2}{E} = Ke^{\frac{\pi^2}{2\sigma^2}}$$

بنابراین:

$$\sigma_\omega\sigma_n = \frac{|1-\mu|}{2} \rightarrow \ \ \sigma_n = \frac{|1-\mu|}{2\sigma_\omega} = \frac{|1-\mu|}{2\sigma(1-\mu)^{1/2}} = \frac{(1-\mu)^{1/2}}{2\sigma}$$

توزیع های دوجمله ای (Binomial) و گاوسی

اگر سیگنال باند باریک باشد، $\sigma \leq \pi/4$ ، $\mu \leq 10^{-3}$ و $F\left(e^{j\pi}\right) = F(-1) \approx 0$ باشد در این صورت:

$$\sigma_\omega \approx \sigma \, , \sigma_\omega \sigma = 1/2$$

بنابراین، مشابه حالت پیوسته در زمان، تابع پیشنهادی به صورت یک تابع گاوسی گسسته در زمان خواهد بود:

$$f[n] = \sigma \sqrt{\frac{K}{\pi}}\, e^{-\sigma^2 n^2}$$

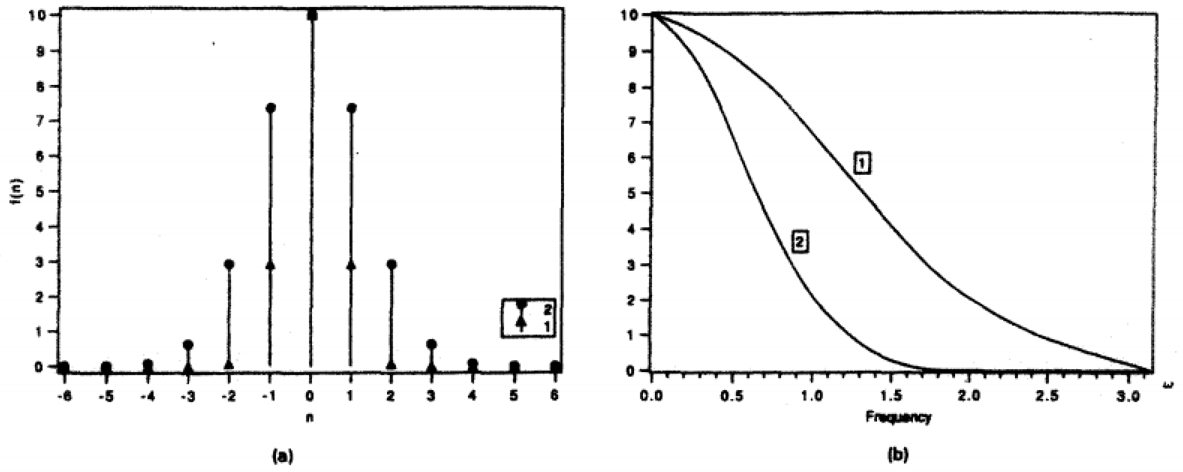


Figure 5.10: (a) Time and (b) frequency plots for narrow-band Gaussian functions: (1) $\sigma_\omega = \pi/4$, $\sigma_n = 0.637$ samples and (2) $\sigma_\omega = \pi/8$, $\sigma_n = 1.274$ samples.

توزیع های دوجمله ای (Binomial) و گاوسی

- ❖ اگر سیگنال باندپهن باشد، در این صورت تقریب‌های پیچیده‌تری نیاز است. برای مثال اگر $\sigma \geq 3\pi/8$ باشد (مثلا $\sigma = \pi/2$) در این صورت $\mu = 0.22625$، $\sigma_\omega = 0.1382$، $\sigma_n\sigma_\omega = 0.3869$ خواهد بود.
- ❖ در این حالت، کرنل‌های دوجمله‌ای تقریب خوبی از تابع $f[n]$ می‌دهند که تبدیل فوریه آنها نیز تا حدی مشابه با یک تابع گاوسی است.

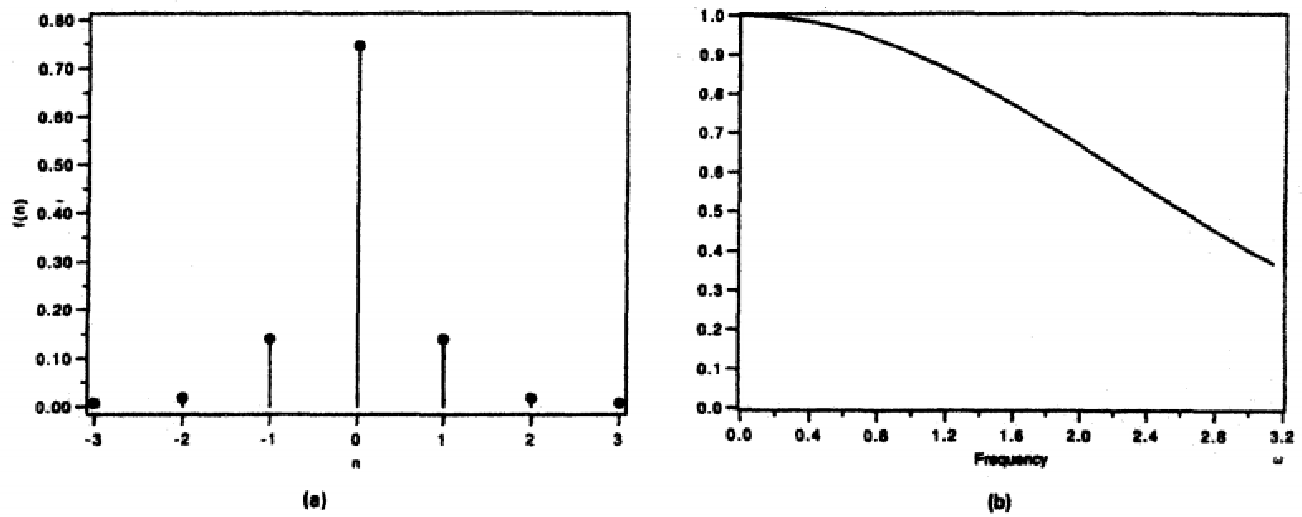


Figure 5.11: (a) Time and (b) frequency plots for the wide-band Gaussian case: $\sigma_\omega = \pi/2$ and $\sigma_\omega\sigma_n = 0.3869$.

توزیع های دوجمله ای (Binomial) و گاوسی

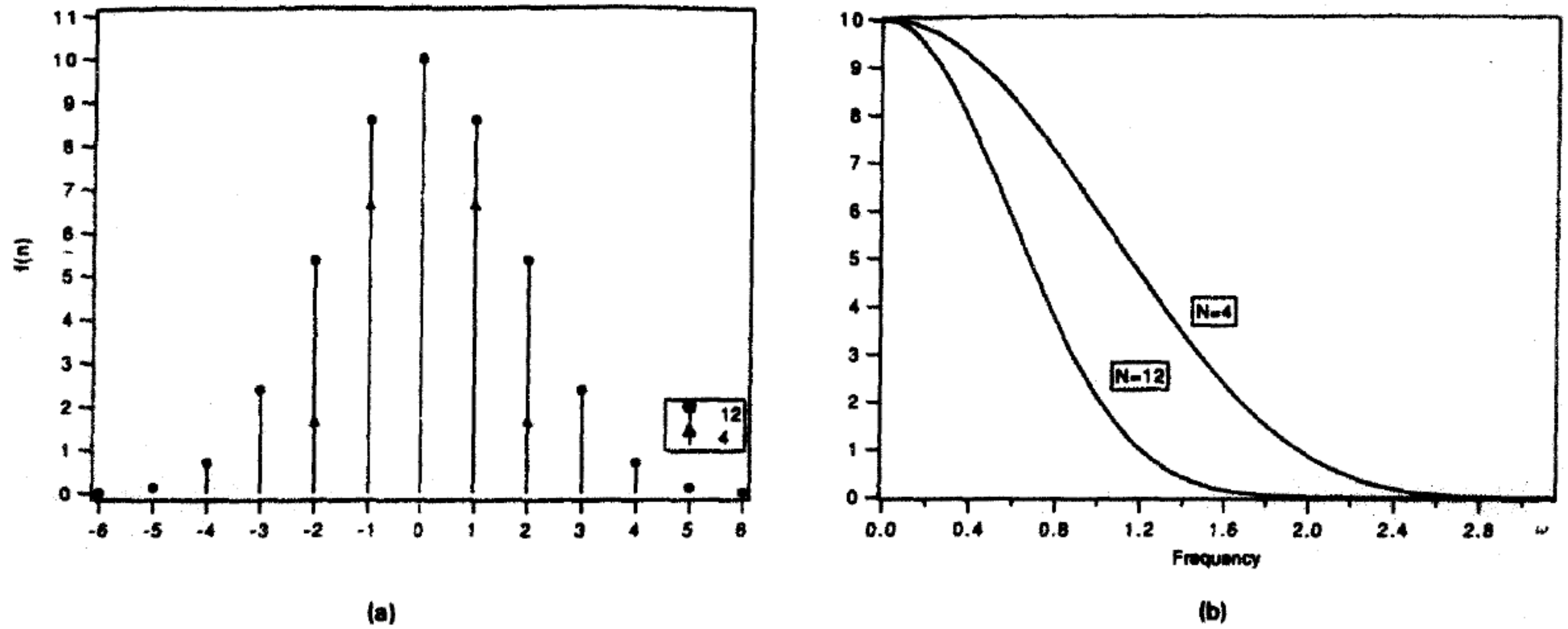


Figure 5.12: Time-frequency plots of binomial sequences: (a) $N = 4$ ($\sigma_\omega = 0.665$, $\sigma_n = 0.756$, and $\sigma_\omega\sigma_n = 0.50274$) and (b) $N = 12$ ($\sigma_\omega = 0.4$, $\sigma_n = 1.25$, and $\sigma_n\sigma_\omega = 0.5002$).

محلی‌سازی زمان–فرکانس

❖ می‌خواهیم رزولوشن زمان فرکانس فیلتربانک‌های مختلف با طراحی‌های متفاوت را بررسی کنیم.

❖ شکل‌های زیر، مشخصات سه فیلتربانک متفاوت با tap های متفاوت را نشان می‌دهد:

❖ هر چه حاصلضرب ستون آخر کوچکتر باشد، فیلتر بهینه‌تر است

1- the binomial QMF

2- the Smith and Barnwell conjugate quadrature filter (CQF)

3- the multiplierless PR QMF

	$\bar{\omega}$	$\bar{n}$	σ_ω^2	σ_n^2	$\sigma_\omega^2 \times \sigma_n^2$
B-QMF (8-tap)	0	1.46	0.9468	0.6025	0.5704
	π	5.54	0.9468	0.6025	0.5704
Multiplierless (8-tap)	0	2.50	0.9743	0.3750	0.3654
	π	4.50	0.9743	0.3750	0.3654
Smith-Barnwell (8-tap)	0	4.17	0.9174	0.5099	0.4678
	π	2.83	0.9174	0.5099	0.4678

محلی‌سازی زمان–فرکانس

	$\bar{\omega}$	$\bar{n}$	σ_ω^2	σ_n^2	$\sigma_\omega^2 \times \sigma_n^2$
B-QMF Hierarchical	0	4.05	0.2526	2.7261	0.6886
4 Band Tree	1.23	12.88	0.1222	3.8269	0.4676
(22-tap product	1.91	16.28	0.1222	2.7757	0.3392
filters)	π	8.80	0.2526	2.2622	0.5714
Multiplierless	0	7.50	0.2747	1.5817	0.4345
(22-tap product	1.24	11.50	0.1346	2.1683	0.2918
filters)	1.90	13.49	0.1346	2.1675	0.2918
	π	9.50	0.2747	1.5818	0.4245
Smith-Barnwell	0	12.45	0.2339	2.1458	0.5019
(22-tap product	1.22	9.88	0.1077	2.9463	0.3173
filters)	1.92	8.45	0.1077	3.0185	0.3251
	π	11.22	0.2339	2.0772	0.4859

محلی‌سازی زمان–فرکانس

	$\bar{\omega}$	$\bar{n}$	σ_ω^2	σ_n^2	$\sigma_\omega^2 \times \sigma_n^2$
B-QMF Hierarchical 8-Band Tree (50-tap product filters)	0	9.12	0.0644	11.726	0.7552
	0.63	26.96	0.0490	15.953	0.7817
	1.01	34.11	0.0961	11.326	1.0884
	1.45	19.65	0.0496	9.7846	0.4853
	1.68	22.56	0.0496	10.510	0.5213
	2.13	37.99	0.0961	12.013	1.1544
	2.52	31.54	0.0490	14.950	0.7326
	π	14.36	0.0644	10.777	0.6940
Multiplierless (50-tap product filters)	0	17.53	0.0724	6.3415	0.4591
	0.64	25.46	0.0688	8.8171	0.6066
	1.02	29.46	0.1193	9.1282	1.0890
	1.45	21.54	0.0558	7.2005	0.4018
	1.68	23.47	0.0558	7.2099	0.4023
	2.11	31.53	0.1193	9.1234	1.0884
	2.50	27.54	0.0688	8.8269	0.6073
	π	19.47	0.0724	6.3371	0.4588
Smith-Barnwell (50-tap product filters)	0	28.86	0.0591	8.6494	0.5112
	0.6137	24.03	0.0321	11.837	0.3800
	0.9951	21.22	0.0688	12.623	0.8685
	1.4488	26.55	0.0436	9.5939	0.4183
	1.6927	25.32	0.0436	9.6769	0.4219
	2.1465	19.57	0.0688	12.599	0.8668
	2.5279	22.51	0.0321	11.912	0.3824
	π	27.93	0.0591	8.5379	0.5046

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

- ❖ مشکل اصلی تبدیل STFT ثابت بودن طول پنجره به ازای شیفت‌های زمانی و فرکانسی مختلف است.
- ❖ دیدیم که این ثابت بودن طول پنجره منجر به سلول‌های رزولوشن یکسان در فضای زمان-فرکانس می‌شود.
- ❖ در تبدیل موجک، با تغییر طول پنجره به ازای شیفت‌های زمانی و فرکانسی مختلف، تا حدودی این مشکل حل شده است.

۱- تبدیل موجک پیوسته

تبدیل موجک پیوسته یا CWT به صورت نمونه‌های شیفت خورده و مقیاس‌دهی شده تابع مادر $\psi(t)$ تعریف می‌شود:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \rightarrow \Psi_{a,b}(\Omega) = \sqrt{a}\Psi(a\Omega)e^{jb\Omega}$$

و نگاشت یک بعدی $f(t)$ به تابع دو بعدی $W_f(a,b)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_f(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}(t) f(t)dt =< \psi_{a,b}(t), f(t) >$$

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

عکس تبدیل موجک به صورت زیر تعریف میشود:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dadb}{a^2}W_f(a,b)\psi_{a,b}(t)$$

که

$$C_\psi = \int_0^{\infty}\frac{|\Psi(\Omega)|^2}{\Omega}d\Omega$$

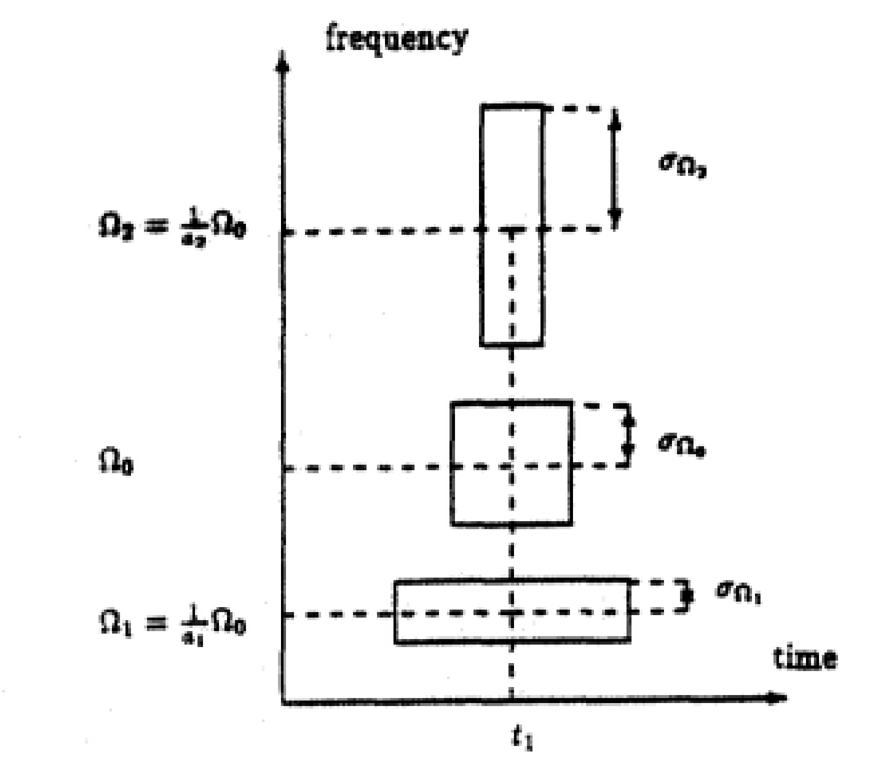
نکته: شرط $C_\psi < \infty$ را شرط admissibility تبدیل موجک پیوسته در زمان گویند.

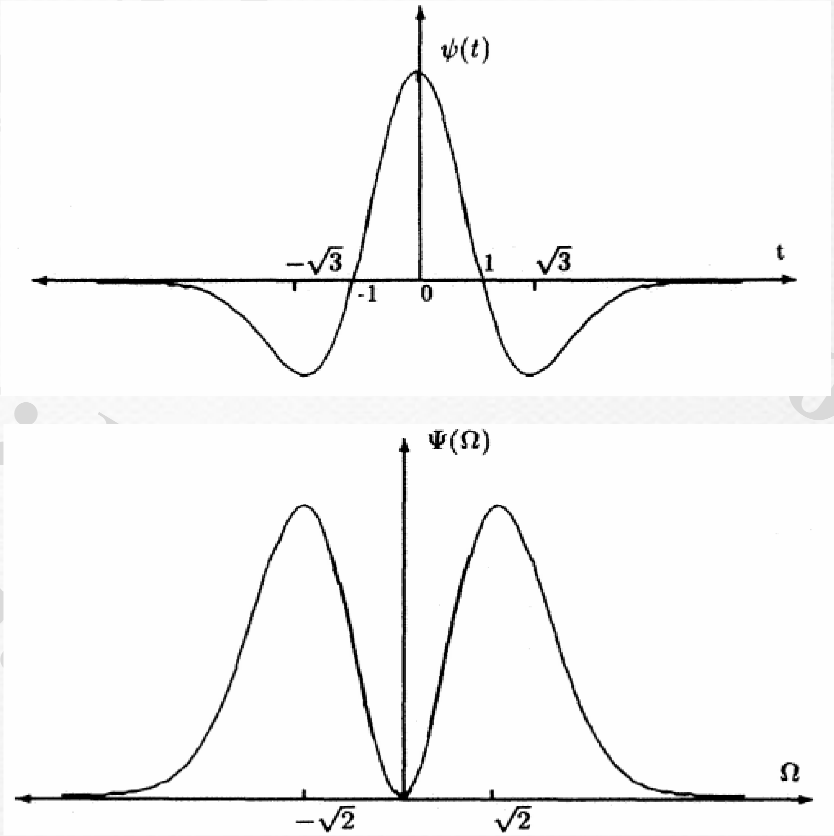
نکته: هر چه سرعت افت تابع $\psi(t)$ در زمان بیشتر باشد، در این صورت محلی‌سازی زمان-فرکانس بهتری حاصل می‌شود

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

یک مثال رایج از تابع موجک مادر، مشتق دوم تابع گاوسی است.

$$\psi(t) = (1-t)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \;\rightarrow\; \Psi(\Omega) = \sqrt{2\pi\Omega^2} e^{-\frac{\Omega^2}{2}}$$





تبدیل موجک (Wavelet Transform)

- ❖ تبدیل STFT، سیگنال را به مجموعه‌ای از توابع با پهنای باند یکسان تفکیک می‌کند.
- ❖ تبدیل موجک، سیگنال را به مجموعه‌ای از توابع با Q یکسان (معادل با پهنای باند مقیاس لگاریتمی) تفکیک می‌کند.
- ❖ به عبارت دیگر در تبدیل موجک، مقیاس زمانی بزرگ همراستا با مقیاس فرکانسی کوچک، و مقیاس زمانی کوچک همراستا با مقیاس فرکانسی بزرگ است. (این یک مزیت نسبت به STFT است).
- ❖ در واقع، تبدیل موجک را می‌توان یک **سیستم چندنرخی** نامید.

رزولوشن زمان-فرکانس در تبدیل موجک:

فرض کنید σ_t و σ_Ω به ترتیب RMS موجک مادر در حوزه زمان و فرکانس باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_t^2 = \int (t - t_0)^2 |\psi(t)|^2 dt$$

$$\sigma_\Omega^2 = \int (\Omega - \Omega_0)^2 |\Psi(\Omega)|^2 d\Omega$$

که $\psi(t)$ حول (t_0, Ω_0) در مختصات زمان-فرکانس متمرکز شده است.

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

حال تابع $\psi_{ab}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ را تشکیل می‌دهیم.

اگر $\psi(t)$ حول (t_0,Ω_0) باشد آنگاه $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ حول $\left(t_0,\frac{\Omega_0}{a}\right)$ متمرکز است بنابراین داریم:

$$\sigma_{ab_t}^2 = \int (t-t_0)^2 |\psi_{ab}(t)|^2 dt = a^2 \sigma_t^2$$

$$\sigma_{ab_\Omega}^2 = \int \left(\Omega - \frac{\Omega_0}{a}\right)^2 |\Psi_{ab}(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{a^2}\sigma_\Omega^2$$

نتیجه: با تغییر پارامتر a، رزولوشن زمانی و فرکانسی در جهت عکس هم تغییر می‌کنند. یعنی کاهش یکی منجر به افزایش دیگری با همان نسبت می‌شود. بنابراین حاصل‌ضرب این دو کمیت همواره ثابت است.

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

۲- تبدیل موجک گسسته

دو مشکل اساسی تبدیل موجک پیوسته در زمان عبارتند از:

۱- افزونگی (ناشی از ماهیت تبدیل موجک)

۲- غیر عملی بودن (ناشی از پیوسته بودن متغیرهای فرکانسی و زمانی)

راه حل: نمونه‌گیری زمانی و فرکانسی از تبدیل موجک

برای نمونه‌گیری فرکانسی و زمانی فرض کنید:

$$a = a_0^m \quad , \qquad b = nb_0 a_0^m$$

در این صورت توابع موجک گسسته در زمان برابرند با:

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m} t - nb_0)$$

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

تعریف: اگر مجموعه بالا یک مجموعه کامل بر روی فضای $L^2(R)$ باشد، آنگاه مجموعه $\{\psi_{mn}(t)\}$ موجک affine نامیده می‌شود.

در این صورت می‌توان هر تابع زمانی دلخواه $f(t)$ را به صورت مجموع وزن‌دار توابع $\psi_{mn}(t)$ نوشت یعنی:

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \psi_{mn}(t)$$

که $d_{m,n}$ برابر با ضرب داخلی تابع $f(t)$ در توابع موجک است:

$$d_{m,n} =< f(t), \psi_{m,n}(t) > = \int f(t)\psi^*_{m,n}(t)dt$$

$$= a_0^{-\frac{m}{2}} \int f(t)\psi^*(a_0^{-m}t - nb_0)dt$$

این توابع در اصطلاح فریم نامیده می‌شوند. این فریم‌ها، نسبت به هم متعامد نیستند زیرا می‌توان نشان داد که

$$A||f||^2 \leq \sum_m \sum_n |d_{m,n}|^2 \leq B||f||^2$$

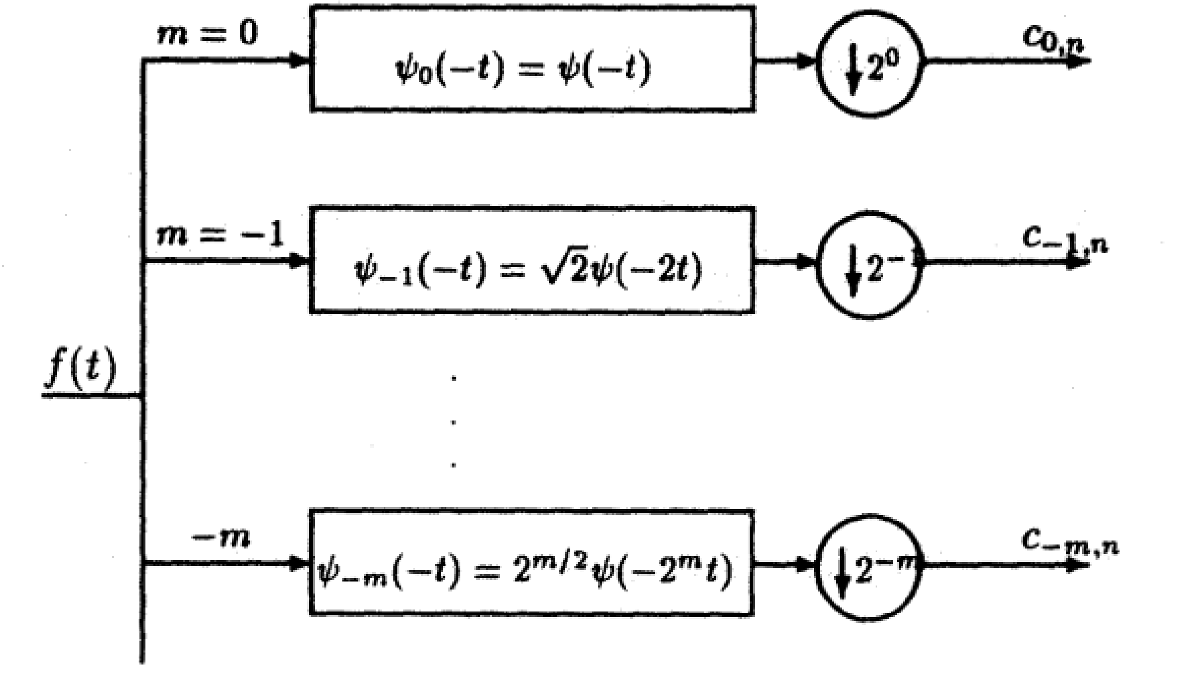
اگر در رابطه بالا $A = B = 1$ باشد، در این صورت قضیه پارسوال برقرار می شود و پایه ها متعامد می شوند.

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

تعریف: پایه‌های (فریم‌ها) $\psi_{m,n}(t)$ در صورتی متعامد هستند که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t)\psi_{m',n'}(t)dt = \begin{cases} 1, & m = m', n = n' \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

محاسبه ضرایب تبدیل موجک گسسته می‌توان با ساختار زیر انجام شود:



تبدیل موجک (Wavelet Transform)

تحلیل ساختار بالا:

خروجی فیلترها برابر است با:

$$y(t) = \int f(\tau)\psi_m(\tau - t)d\tau$$

با فرض اینکه $a = 2$ باشد و $\psi_m(t) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}t)$ باشد، داریم:

$$y(t) = 2^{-m/2}\int f(\tau)\psi(2^{-m}\tau - t)d\tau$$

با نمونه‌گیری در لحظات $t = n2^m$ داریم:

$$y(n2^m) = 2^{-m/2}\int f(\tau)\psi(2^{-m}\tau - n)d\tau = d_{m,n}$$

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

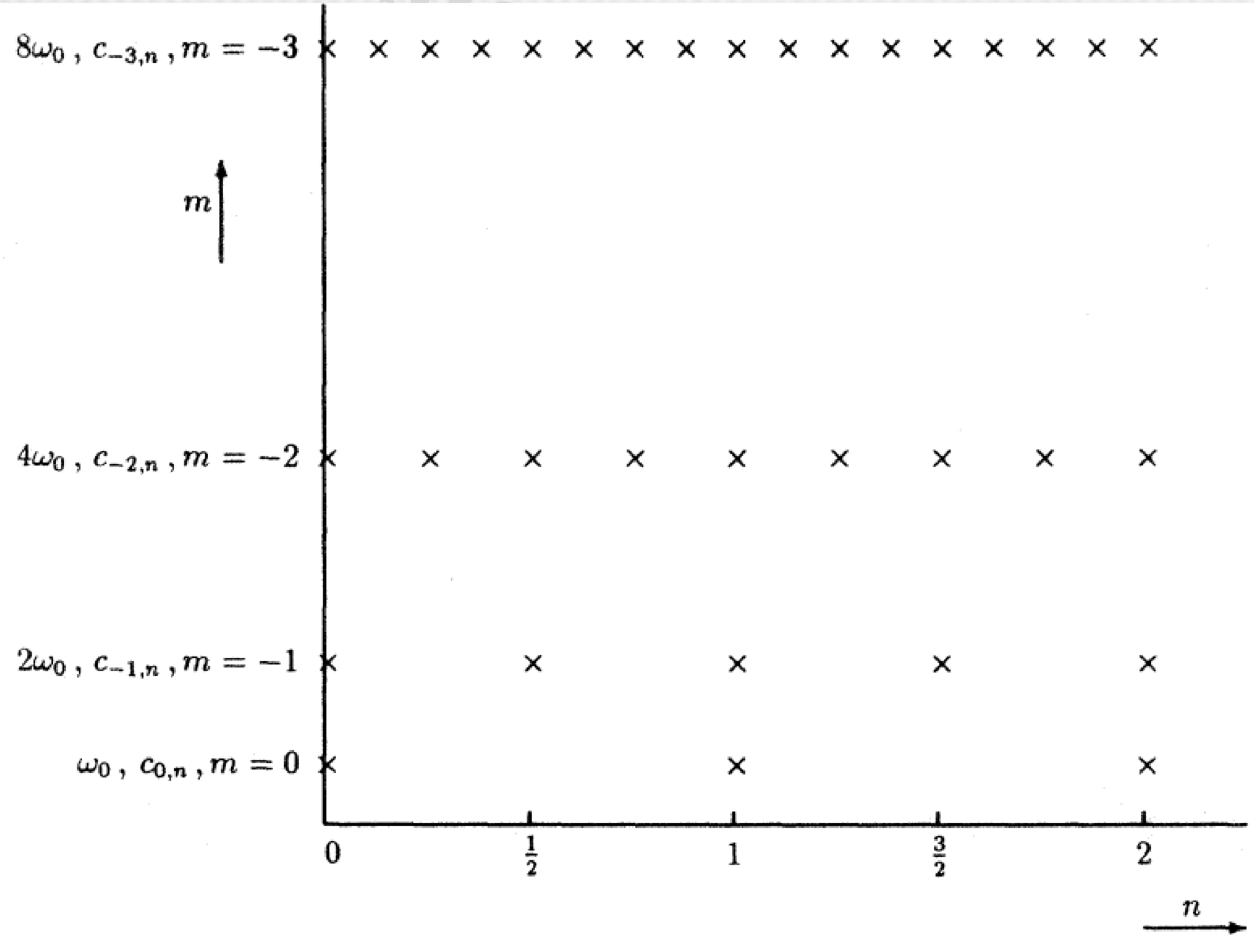
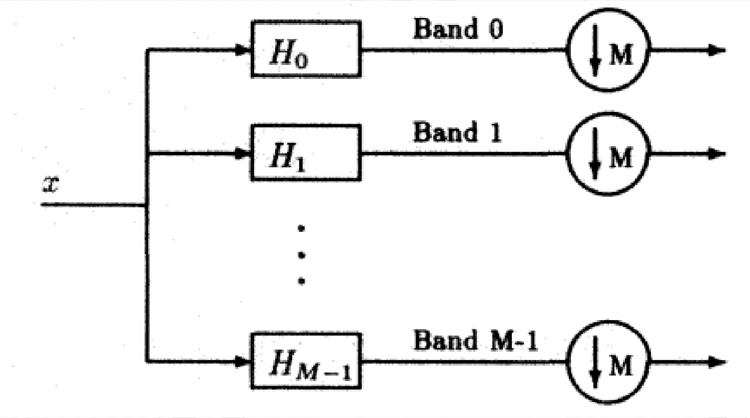


Figure 6.4: Sampling grid (dyadic) for discrete wavelet transform.

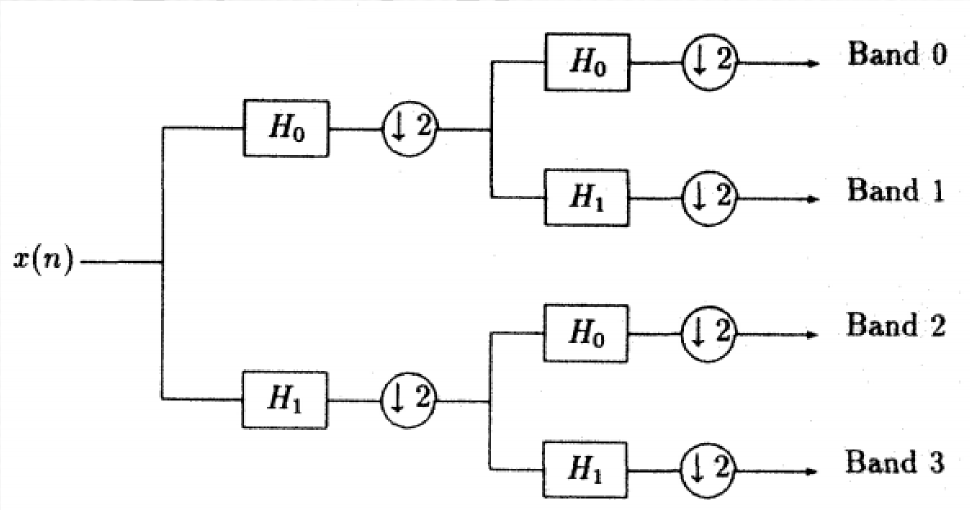
تبدیل موجک (Wavelet Transform)

سه نوع فیلتر بانک:

۱- فیلتر بانک M-باند

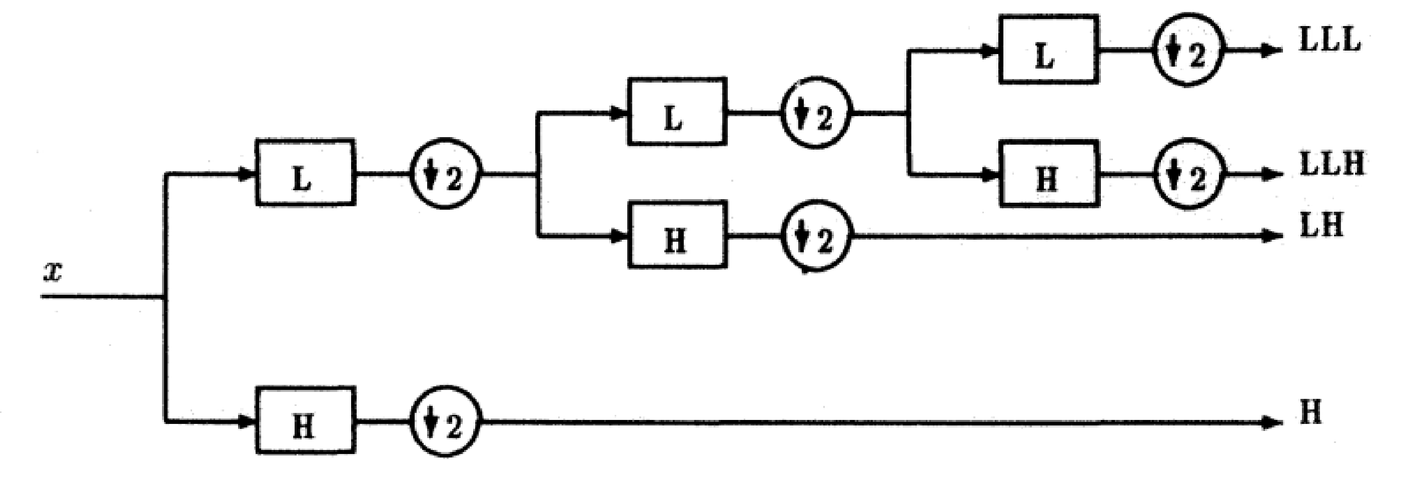


۲- فیلتر بانک درختی منظم (باینری L-سطحی)



تبدیل موجک (Wavelet Transform)

۳- ساختار چند رزولوشنی یا فیلتر بانک درختی dyadic



❖ در این ساختار ابتدا سیگنال به دو بخش فرکانس پایین و فرکانس بالا تقسیم می‌شود.

❖ سپس بخش فرکانس پایین که اطلاعات بیشتری دارد می‌تواند مجددا به دو بخش LL و LH تقسیم شود و این روند به صورت باینری بر روی بخش LL قابل تکرار است.

❖ ضرایب H جزییات فرکانس بالا، و ضرایب LLL جزییات فرکانس پایین را شامل می‌شوند.

❖ تبدیل موجک عموما از ساختار بالا استفاده می‌کند و بنابراین یک ساختار چندرزولوشنی را نتیجه می‌دهد.

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

تجزیه چندرزولوشنی سیگنال:

فرض کنید $f(t)$ یک بردار دلخواه باشد که به طور کامل بر روی یک مجموعه بردار $\phi_k(t)\ \ k=0,1,2,\dots,N$ نگاشت می شود. یک مجموعه بردار به صورت $V_1=\{\phi_k(t)\ \ k=0,1,2,..,L-1\}$ در اختیار است، می‌توان تصویر $f(t)$ را بر روی هر یک از توابع بالا یافت:

$$\theta_k =< f(t),\phi_k(t) >$$

در این صورت $\hat{f}(t)$ به صورت تقریبی از $f(t)$ در فضای V_1 برابر است با:

$$\hat{f}(t)=\sum_{n=0}^{L-1}\theta_k\phi_k(t)$$

نکته: می‌گوییم فضای V_1 بر روی مجموعه $\{\phi_k(t)\ \ k=0,1,2,..,L-1\}$، span شده است.

اگر مجموعه دیگر به صورت $V_2=\{\phi_k(t)\ \ k=L,L+1,L+2,..,N\}$ تعریف شود که خطای بین $f(t)$ و $\hat{f}(t)$ را به طور کامل نگاشت کند، در این صورت هر بردار پایه در فضای V_2 بر هر بردار پایه در فضای V_1 متعامد است.

$$e(t)=f(t)-\hat{f}(t)=\sum_{n=L}^{N}\alpha_k\phi_k(t)$$

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

تجزیه چندرزولوشنی سیگنال:

فرض کنید $f(t) \in L^2(R)$ باشد. یک تجزیه چندرزلوشنی شامل مجموعه $\{V_m | m \in Z\} \in L^2(R)$ است که چهار شرط زیر را داشته باشد:

۱- Containment:

$$\ldots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots$$

$$\leftarrow Coarser\ , Finer \rightarrow$$

۲- Completeness

$$\bigcap_{m \in Z} V_m = \{0\} \qquad \bigcup_{m \in Z} V_m = L^2(R)$$

۳- ویژگی مقیاس دهی:

$$f(x) \in V_m \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{m-1} \text{ for any function } f \in L^2(R)$$

۴- ویژگی پایه/فریم: یک تابع مقیاس $\boldsymbol{\phi(t) \in V_0}$ وجود دارد به طوریکه به ازای $m \in Z$، مجموعه توابع زیر **متعامد** باشند:

$$\left\{\phi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}t - n)\right\}$$

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

می دانیم که $V_m \subset V_{m-1}$ است. یعنی زیر فضایی از V_{m-1} وجود دارد که در V_m وجود ندارد. فرض کنید W_m زیر فضای مکمل در V_{m-1} باشد. این زیر فضا قطعا بر V_m عمود است یعنی:

$$V_m \perp W_m$$

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m \qquad (۱)$$

بنابراین می‌توان گفت که مجموع فضای مکمل W_m به ازای مقادیر مختلف $m \in Z$ کل فضای $L^2(R)$ را پوشش می‌دهد:

$$\dots W_{j-1} \oplus W_j \dots \oplus W_1 \oplus W_0 \dots \oplus W_{-j+1} \oplus W_{-j+2} \dots = L^2(R)$$

حال فرض کنید تصویر تابع $f(t)$ بر روی زیرفضای V_m را با عملگر P_m و تصویر تابع $f(t)$ بر روی زیر فضای W_m را با عملگر Q_m نشان دهیم. در این صورت با جایگذاری در رابطه (۱) داریم:

$$P_{m-1}f = P_m f + Q_m f$$

نتیجه: $P_m f$ شامل اطلاعات فرکانس پایین f در زیرفضای V_m و $Q_m f$ شامل اطلاعات فرکانس بالا (جزییات) در زیرفضای W_m هستند. (مجموع این دو، برابر با کل اطلاعات در زیر فضای V_{m-1} است.

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

- حال اگر $\phi(t-n) \in V_0$ باشد مطابق با ویژگی ۳، $\phi(2t-n) \in V_{-1}$ است.
- چون $V_0 = \text{span}\{\phi(t-n)\}$ و $V_1 = \text{span}\{\phi(2t-n)\}$ برقرار است منطقی است که در فضای W_m باید تابعی مثل $\psi(t) \in W_0$ موجود باشد به نحوی که:

$$W_0 = \text{span}\{\psi(t-n)\}$$

این تابع $\psi(t)$ تابع موجک در آنالیز چندمقیاسی است.

- چون $W_m \perp V_m$ است و $V_{m-1} = V_m \oplus W_m$ بنابراین، W_m ها بر خلاف V_m ها قطعا بر هم عمود هستند. بنابراین تمام مجموعه‌های $\psi_{mn}(t)$ بر روی W_m ها متعامد بر هم هستند و بنابراین یک مجموعه پایه متعامد در اختیار داریم:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}t-n)$$

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

❖ اگر V_0 توسط توابع شیفت خورده $\text{span}\,\{\phi(t-n)\}$ شود آنگاه V_{-1} توسط توابع $\text{span}\,\phi(2t-n)$ خواهد شد.
در این صورت توابع پایه در V_{-1} عبارتند از:

$$\phi(2(t-n)) \quad n \text{ زوج}$$

$$\phi(2(t-n)-1) \quad \text{n فرد}$$

چون V_{-1} به طور کامل توسط دو مجموعه توابع بالا تولید می‌شود، و از طرفی $\phi(t)$ نسبت به $\phi(2t)$ گستردگی زمانی بیشتری دارد، پس می‌توان این $\phi(t)$ را بر اساس توابع پایه بالا بسط داد یعنی:

$$\phi(t) = \sum_n h_0[n]\phi(2t-n)$$

$h_0[n]$ ها ضرایب پایه درون مقیاسی (باند پایین) نامیده می‌شوند

مشابها چون $\psi(t)$ گستردگی زمانی بیشتری نسبت به $\phi(2t)$ دارد، پس می‌توان این تابع را بر اساس توابع بالا بسط داد:

$$\psi(t) = \sum_n h_1[n]\phi(2t-n)$$

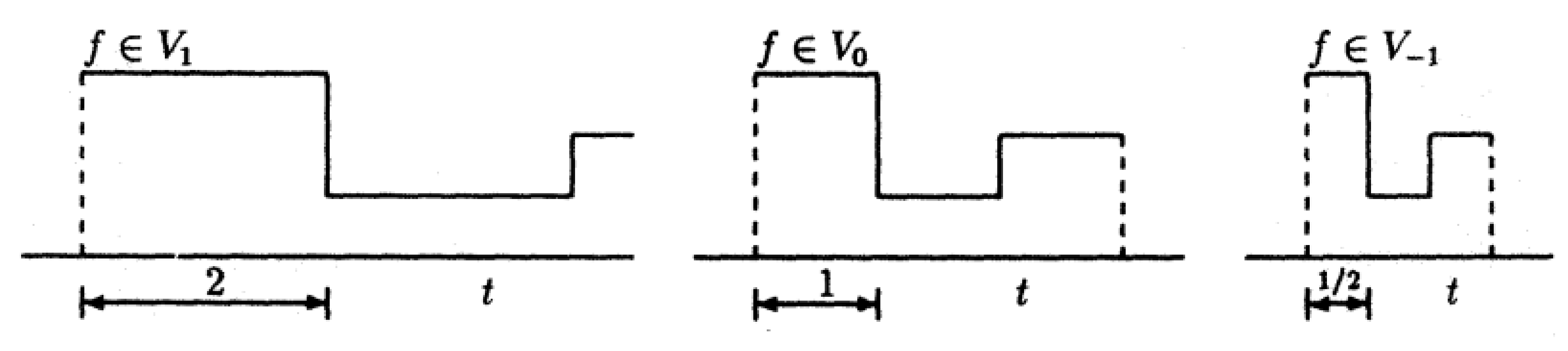
$h_1[n]$ ها ضرایب پایه باند بالا نامیده می‌شوند.

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

موجک Haar:

فرض کنید زیر فضای V_m به صورت زیر تعریف شود:

$$V_m = \{f(t) \in L^2(R); n \in Z[2^m n, 2^m(n+1)]\text{به طوری که } f(t) \text{ ثابت باشد بر روی بازه}\}$$



واضحا $\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \ldots$ برقرار است. همچنین ملاحظه می‌شود که اگر $f(t) \in V_0$ باشد آنگاه $f(2t) \in V_{-1}$ است.

اگر $\phi(t)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\phi(t) = 1 \quad 0 \le t \le 1 \quad \rightarrow \quad \Phi(\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \frac{\sin \Omega/2}{\Omega/2}$$

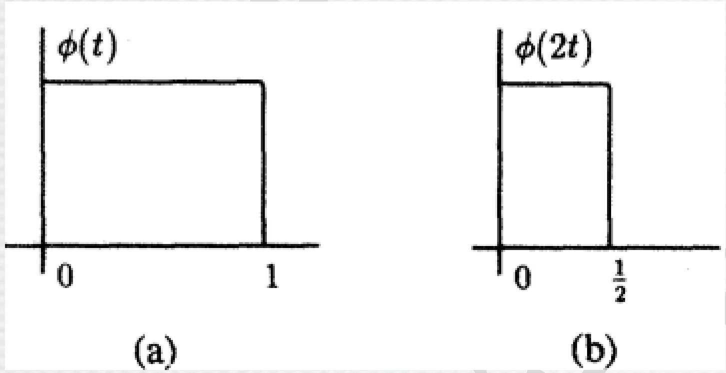
این تابع به عنوان تابع پایه فضای V_0 انتخاب می‌شود

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

به راحتی می‌توان ثابت کرد که

$$<\phi(t-n),\phi(t-m)>=0 \quad \forall n,m$$

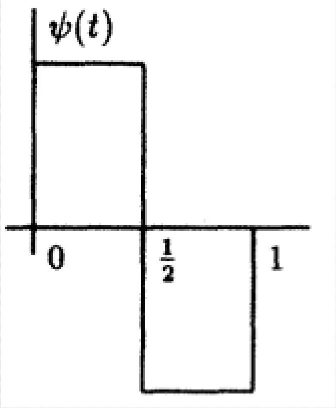
حال نشان می‌دهیم که $\phi(t)$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از $\phi(2t-n)$ ها نوشت:



$$\phi(t)=\phi(2t)+\phi(2t-n)$$

یعنی:

$$h_0[0]=1 \quad ,h_0[1]=1$$

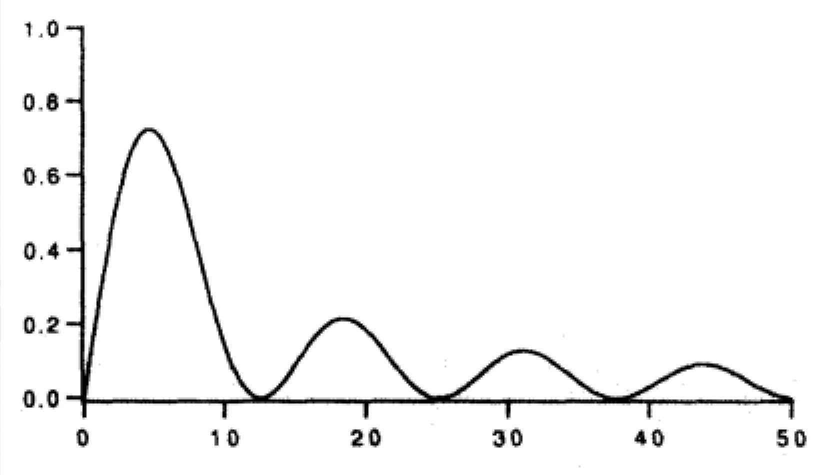


W_0 به عنوان فضای مکمل V_m تعریف می‌شود. $\psi(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(t)=\phi(2t)-\phi(2t-1)$$

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

تابع $\psi(t)$ بالا به عنوان موجک مادر Haar تعریف می شود که طیف فوریه آن به صورت زیر می‌باشد:

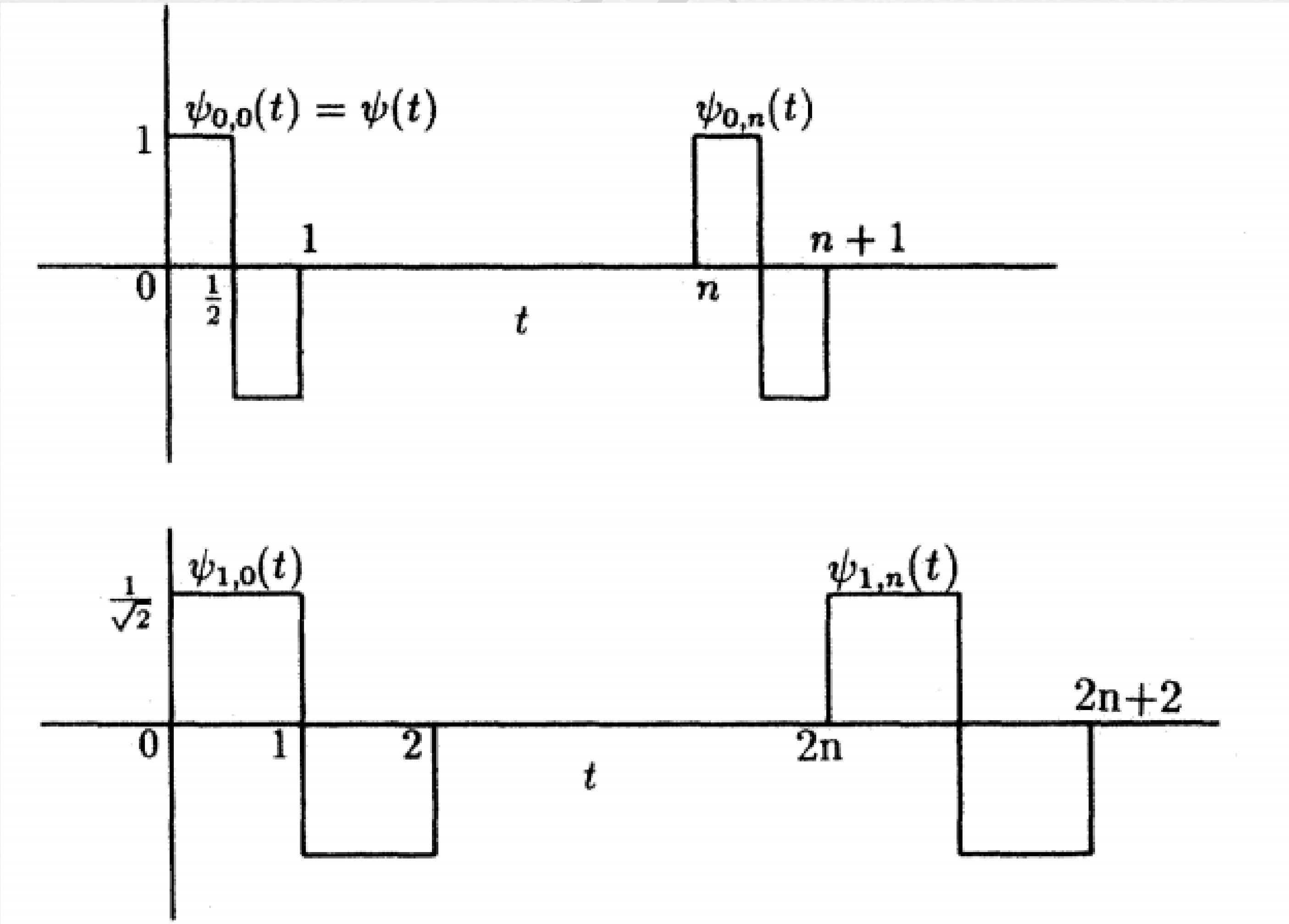


توابع شیفت خورده و مقیاس یافته $\psi(t)$ به عنوان توابع Haar $\{\psi_{mn}(t)\}$ نامیده می‌شوند. این توابع به صورت زیر تعریف می شوند و دو به دو بر هعم متعامد هستند:

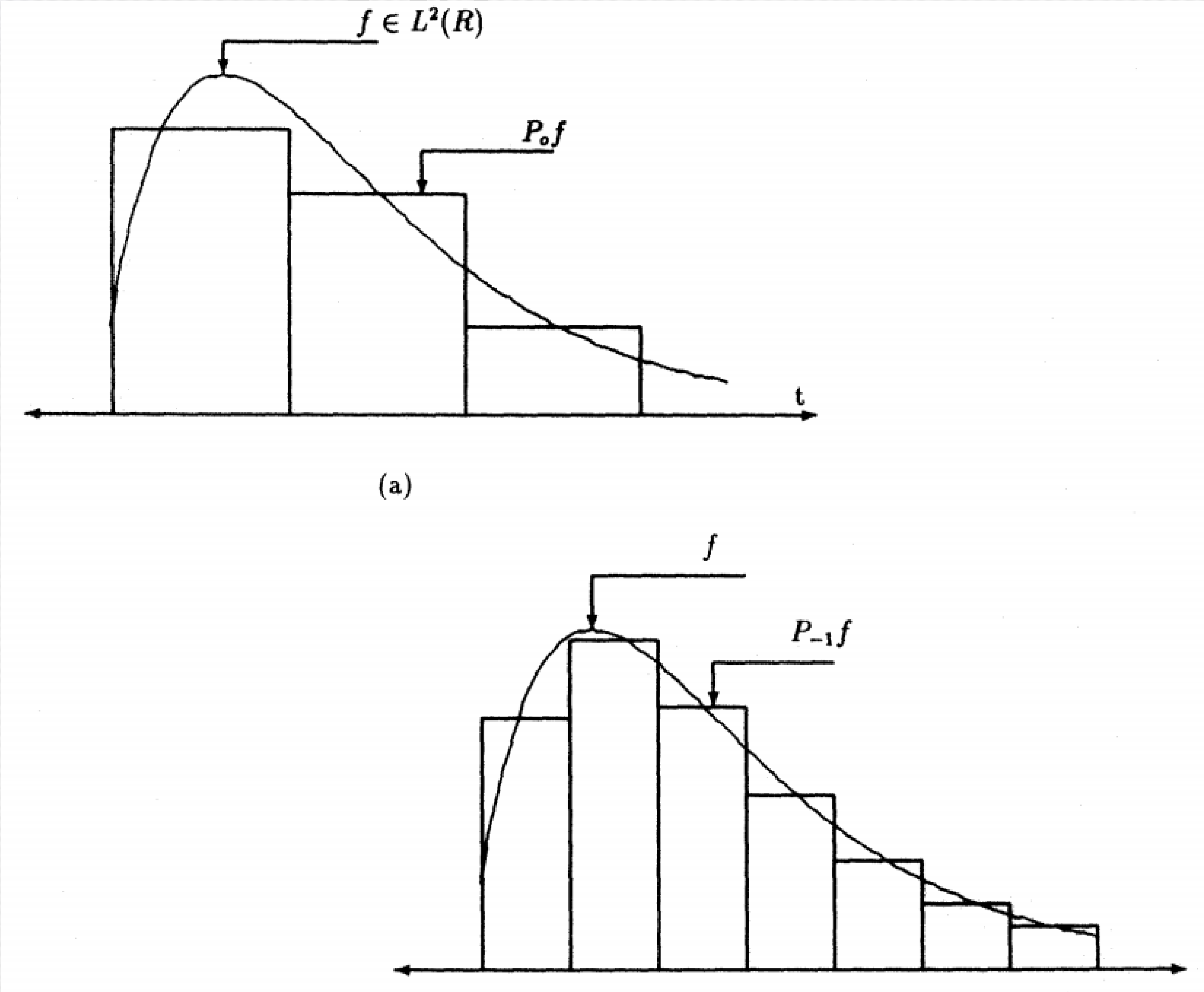
$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}t - n)$$

تبدیل موجک (Wavelet Transform)

موجک Haar در مقیاس های صفر و یک



تبدیل موجک (Wavelet Transform)



End of Chapter 6

دانشگاه خلیج فارس بوشهر