پردازش سیگنال های دیجیتال

فصل هشتم

تبدیل فوریه گسسته DFT

ارایه شده توسط:

حجت قیمت گر

استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مطالب

- نمایش سری فوریه گسسته در زمان
- ویژگی سری فوریه گسسته در زمان
- تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب
- ویژگی های تبدیل DFT
- پاسخ سیستم LTI با تبدیل DFT

❖ تبدیل فوریه یک سیگنال گسسته در زمان، یک تابع پیوسته برحسب ω است. بنابراین یک افزونگی در این تبدیل وجود دارد.

❖ در این فصل یک تبدیل حوزه فرکانس به نام DFT به صورت $X[k]$ تعریف می‌شود که تمام اطلاعات فرکانسی $X(e^{j\omega})$ را دارد و علاوه بر این یک سیگنال گسسته در حوزه فرکانس است.

نمایش سری فوریه گسسته در زمان

فرض کنید سیگنال $\tilde{x}[n]$ متناوب با دوره N است. یعنی به ازای هر $n,r \in Z$ داریم:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$$

چون متناوب است پس سری فوریه دارد یعنی:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

نکته مهم: در نمایش سری فوریه پیوسته در زمان به بینهایت هارمونیک نمایی به صورت $e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$ برای نمایش سری فوریه نیاز است اما در حالت گسسته در زمان، نهایتا به N هارمونیک نیاز است که N برابر با دوره تناوب سیگنال $\tilde{x}[n]$ است.

نمایش سری فوریه گسسته در زمان

نکته مهم: ضرایب سری فوریه سیگنال گسسته در زمان نیز متناوب با دوره N هستند یعنی

$$a_k = a_{k+rN}$$

ضرایب سری فوریه a_k به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (۱)$$

عبارت $\tilde{X}[k]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

بنابراین داریم:

$$a_k = \frac{1}{N}\tilde{X}[k] \quad , \qquad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$\tilde{X}[k]$ نیز متناوب با دوره N است (تمام ویژگی های ضرایب سری فوریه را دارد و تنها در $1/N$ تفاوت دارند).

نمایش سری فوریه گسسته در زمان

به طور خلاصه:

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\quad ,\tilde{X}[k]=\tilde{X}[k+rN]$$

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\quad ,\tilde{x}[n]=\tilde{x}[k+rN]$$

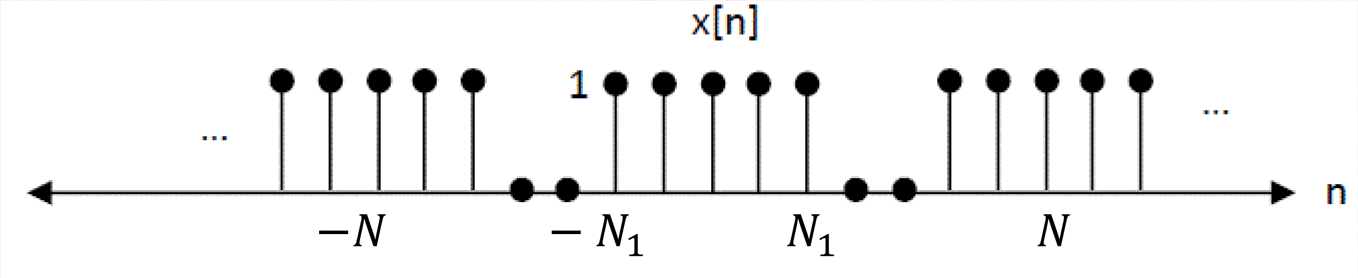
به منظور سادگی روابط $W_N=e^{-j\,2\pi/N}$ در نظر می‌گیریم بنابراین روابط بالا به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}\quad ,\tilde{X}[k]=\tilde{X}[k+rN]$$

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-kn}\quad ,\tilde{x}[n]=\tilde{x}[k+rN]$$

نمایش سری فوریه گسسته در زمان

مثال ۱–۸: ضرایب $\tilde{X}[k]$ را برای فوریه سیگنال زیر را بیابید.



حل: از فرمول ضرایب سری فوریه داریم:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N_0>}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{\pi k}{N}(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi k}{N}}\right),k=0,1,2,\dots,N-1$$

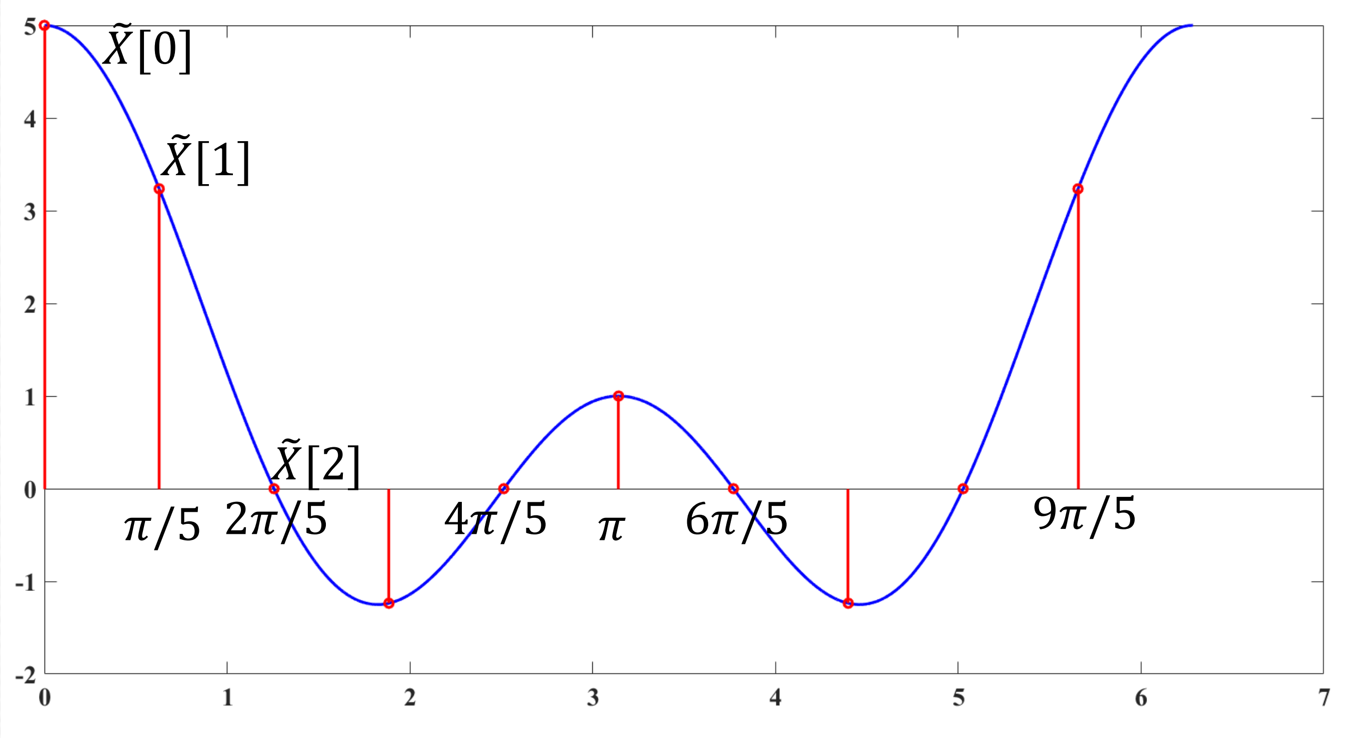
$$\tilde{X}[k]=Na_k=\frac{\sin\frac{\pi k}{N}(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi k}{N}}$$

می‌توان تبدیل فوریه یک تناوب جدا کرد، سپس تبدیل فوریه گرفت و نمونه‌های تبدیل فوریه را محاسبه کرد:

نمایش سری فوریه گسسته در زمان

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = \frac{\sin\omega\frac{2N_1+1}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\Bigg|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = \frac{\sin\frac{\pi k}{N}(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi k}{N}}$$

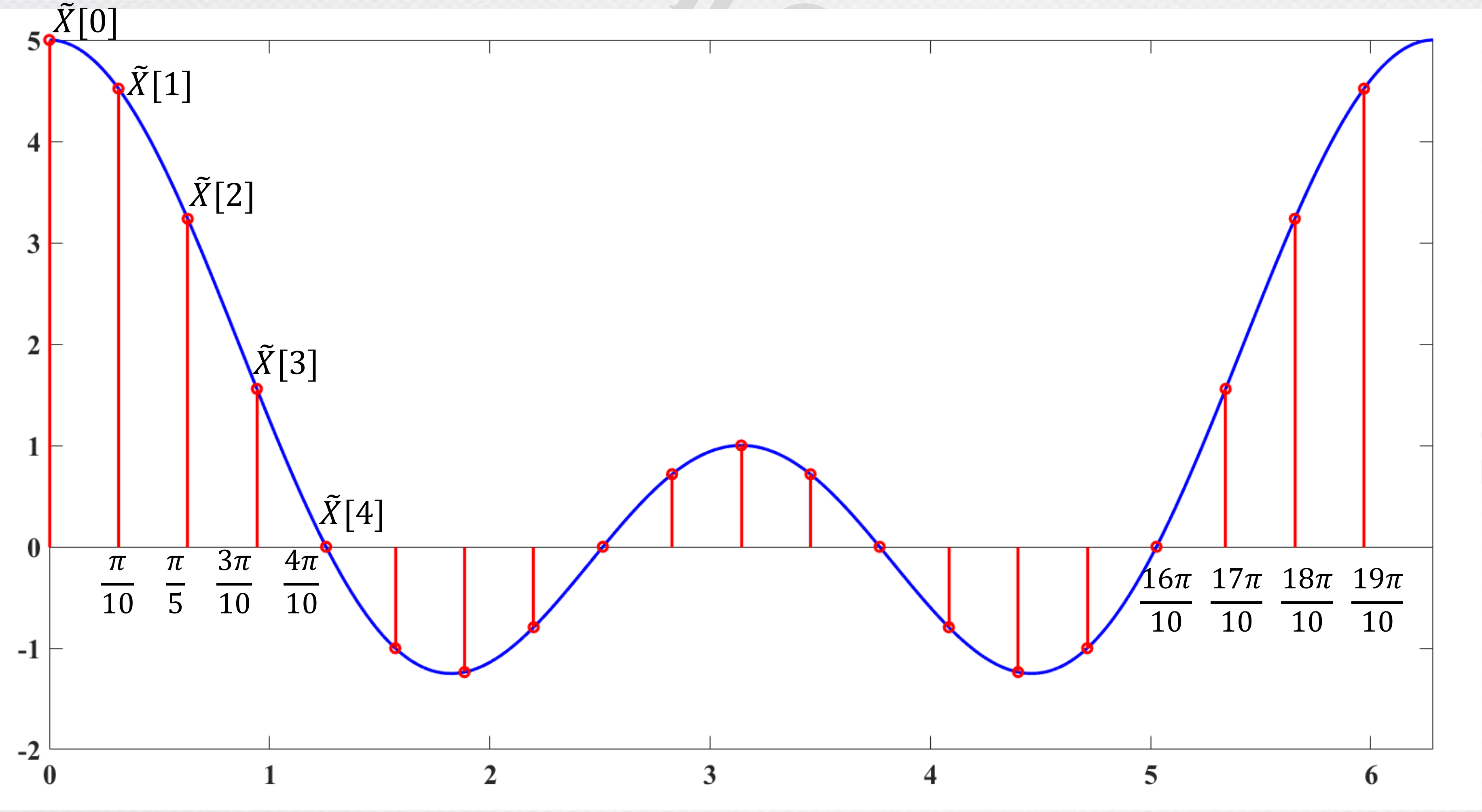
حالت اول: $N = 10$ و $N_1 = 2$ در این صورت داریم:



نمایش سری فوریه
خواص سری فوریه
تبدیل DFT
خواص تبدیل DFT
پاسخ فیلتر LTI به کمک DFT

نمایش سری فوریه گسسته در زمان

حالت دوم: $N = 20$ و $N_1 = 2$ در این صورت داریم:



ویژگی های سری فوریه گسسته در زمان

- اگر a_k ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ و b_k ضرایب سری فوریه $\tilde{y}[n]$ باشد و هر دو متناوب با دوره N باشند، می‌توان خواص متفاوتی را ثابت کرد.
- چون $\tilde{X}[k] = Na_k$ است پس خواص a_k عینا مشابه خواص $\tilde{X}[k]$ هستند. (یادآوری $\tilde{X}[k] = \tilde{X}[k+rN]$).

۱- خطی بودن:

$$\tilde{z}[n] = A\tilde{x}[n] + B\tilde{y}[n] \xrightarrow{S\mathfrak{F}} \tilde{Z}[k] = A\tilde{X}[k] + B\tilde{Y}[k]$$

۲- شیفت زمانی

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}[n-n_0] \xrightarrow{S\mathfrak{F}} \tilde{Y}[k] = e^{\left(-\frac{j2\pi k}{N}\right)n_0}\tilde{X}[k]$$

۳- شیفت فرکانسی

$$\tilde{y}[n] = e^{\left(\frac{j2\pi k_0}{N}\right)n}\tilde{x}[n] \xrightarrow{S\mathfrak{F}} \tilde{Y}[k] = \tilde{X}[k-k_0]$$

ویژگی های سری فوریه گسسته در زمان

۴- مزدوج گیری:

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}^*[n] \overset{S\mathfrak{F}}{\rightarrow} \tilde{Y}[k] = \tilde{X}^*[-k]$$

نتیجه ۱: اگر $x[n]$ حقیقی باشد آنگاه $\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$ است. در این صورت اندازه $\tilde{X}[k]$ ها تقارن زوج و فاز آنها تقارن فرد دارند.

نتیجه ۲: همچنین بخش حقیقی$\tilde{X}[k]$ ها تقارن زوج و بخش موهومی آنها تقارن فرد دارند.

نتیجه ۳: اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد،$\tilde{X}[k]$ ها نیز حقیقی و زوج هستند.

نتیجه ۴: اگر $x[n]$ حقیقی و فرد باشد،$\tilde{X}[k]$ ها موهومی خالص و فرد هستند.

۵- چرخش

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}[-n] \overset{S\mathfrak{F}}{\rightarrow} \tilde{Y}[k] = \tilde{X}[-k]$$

۶- کانولوشن

$$\tilde{z}[n] = \tilde{x}[n] \circledast_N \tilde{y}[n] \overset{S\mathfrak{F}}{\rightarrow} \tilde{Z}[k] = \tilde{X}[k]\tilde{Y}[k]$$

ویژگی های سری فوریه گسسته در زمان

۷- ضرب

$$\tilde{z}[n] = \tilde{x}[n]\tilde{y}[n] \xrightarrow{S\mathfrak{F}} \tilde{Z}[k] = \frac{1}{N}\tilde{X}[k]\circledast_N\tilde{Y}[k]$$

$\circledast_N$: عملگر کانولوشن حلقوی است. روند محاسبه کانولوشن حلقه ای متفاوت از کانولوشن عادی است

کانولوشن حلقوی دو سیگنال $\tilde{X}[k]$ و $\tilde{Y}[k]$ متناوب با دوره N

۱- جدا کردن یک دوره تناوب از هر سیگنال

۲- محاسبه کانولوشن عادی دو سیگنال بخش ۱

۳- تکرار سیگنال بخش ۲ از هر N نقطه (امکان تداخل وجود دارد)

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

فرض کنید یک سیگنال غیرمتناوب $x[n]$ با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ داریم. دنباله $\tilde{X}[k]$ از نمونه‌گیری $X(e^{j\omega})$ بدست آمده است:

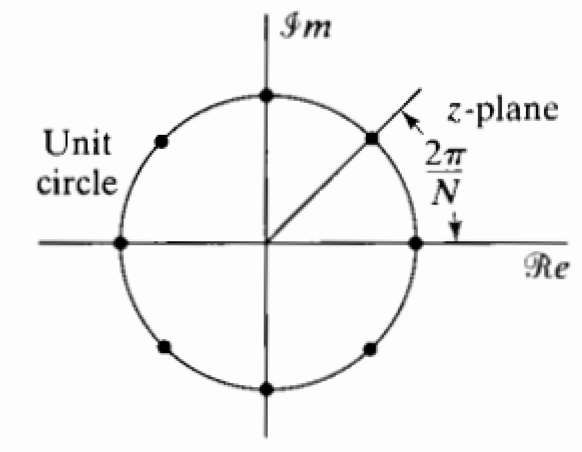
$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right) \qquad (۲)$$

چون تبدیل فوریه یک سیگنال گسسته در زمان همواره متناوب با دوره 2π است پس دنباله $\tilde{X}[k]$ بالا متناوب است یعنی:

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}[k+rN]$$

همچنین تبدیل فوریه معادل با همان تبدیل Z روی دایره واحد است، پس می‌توان گفت:

$$\tilde{X}[k] = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}}$$



واضحا از شکل بالا می‌توان گفت که نمونه N با نمونه 0 ، $N+1$ با نمونه ۱ و .... . یعنی $\tilde{X}[k]$ متناوب با دوره N است.

نمایش سری فوریه

خواص سری فوریه

تبدیل DFT

خواص تبدیل DFT

پاسخ فیلتر LTI به کمک DFT

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

دیدیم که دنباله $\tilde{X}[k]$ همان ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ هستند یعنی:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-kn} \qquad (۳)$$

که W_N به صورت $e^{-\frac{j2\pi}{N}}$ تعریف می شود. با جایگذاری (۲) در (۳) داریم:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=<N>}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-\frac{j2\pi}{N}km}\right)W_N^{-kn}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\left(\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}W_N^{-k(n-m)}\right)$$

نمایش سری فوریه

خواص سری فوریه

تبدیل DFT

خواص تبدیل DFT

پاسخ فیلتر LTI به کمک DFT

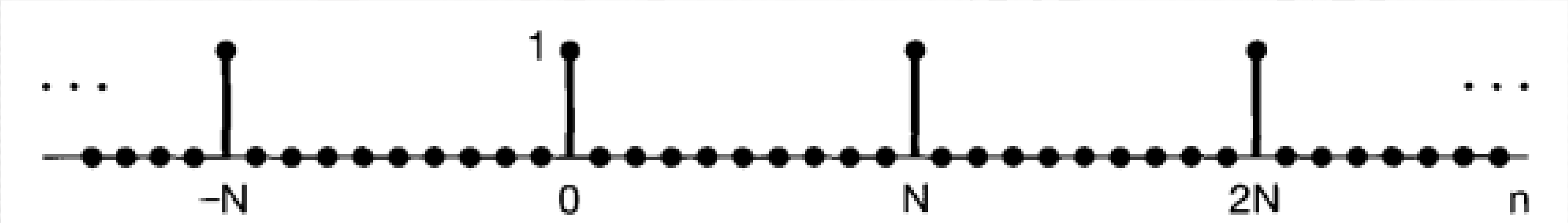
تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

عبارت بالا به صورت زیر ساده سازی می شود:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} x[m]\tilde{p}[n-m]$$

که $\tilde{p}[n]$ یک سیگنال پالسی متناوب است

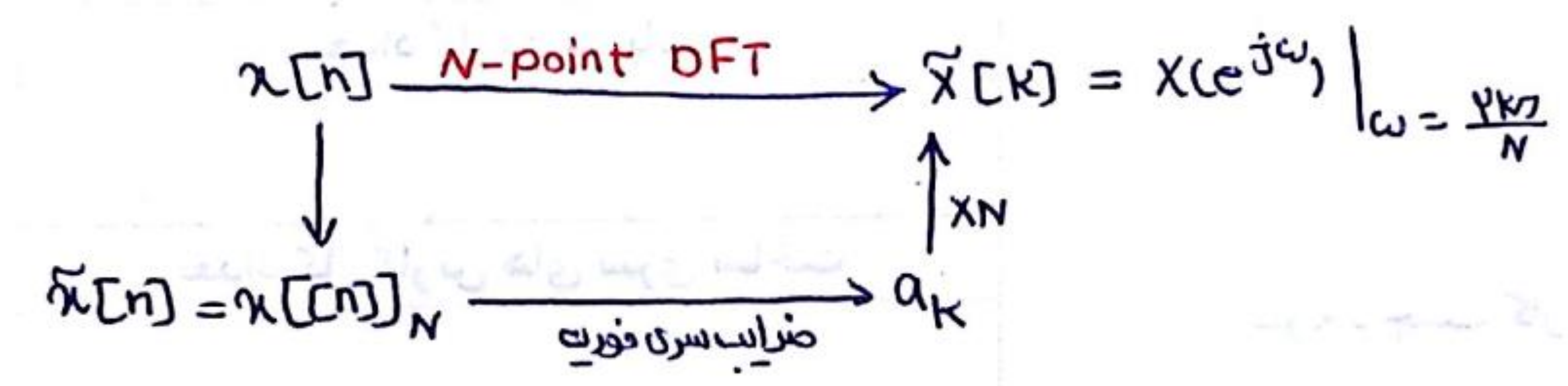
$$\tilde{p}[n-m] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m-rN]$$



پس داریم:

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:



به عبارت دیگر برای محاسبه DFT N-نقطه ای یک سیگنال غیر متناوب باید مراحل زیر انجام شود:

مرحله اول: متناوب کردن سیگنال $x[n]$ با دوره N (طول N باید لااقل به اندازه طول سیگنال $x[n]$ باشد $N \geq L$)

مرحله دوم: محاسبه ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$

مرحله سوم: ضرب کردن ضرایب سری فوریه در N

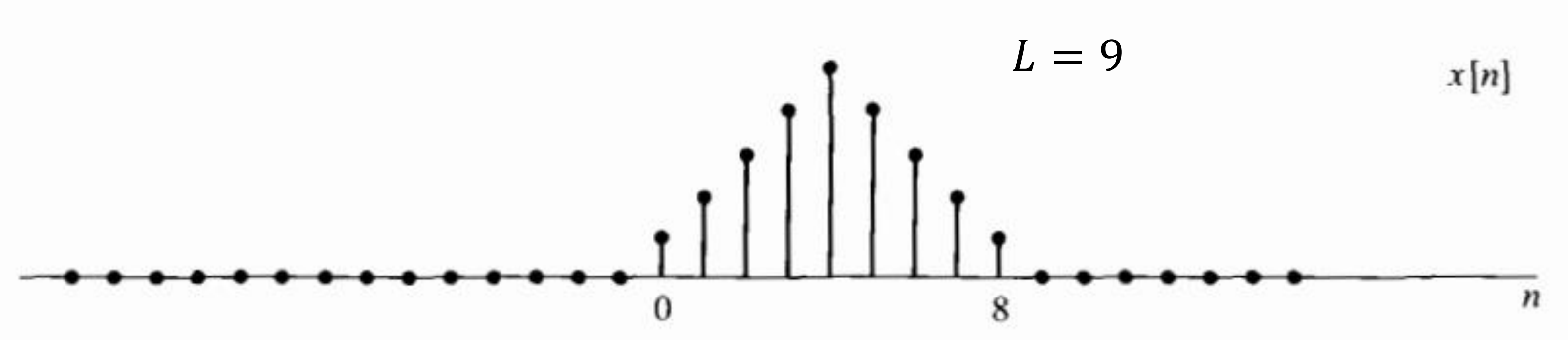
مرحله چهارم: ضرایب $\tilde{X}[k]$ در بازه $0 \leq k \leq N-1$ به عنوان DFT N –نقطه ای $x[n]$ انتخاب شوند.

توجه مهم: N باید لااقل به اندازه طول سیگنال $x[n]$ باشد $N \geq L$ انتخاب شود.

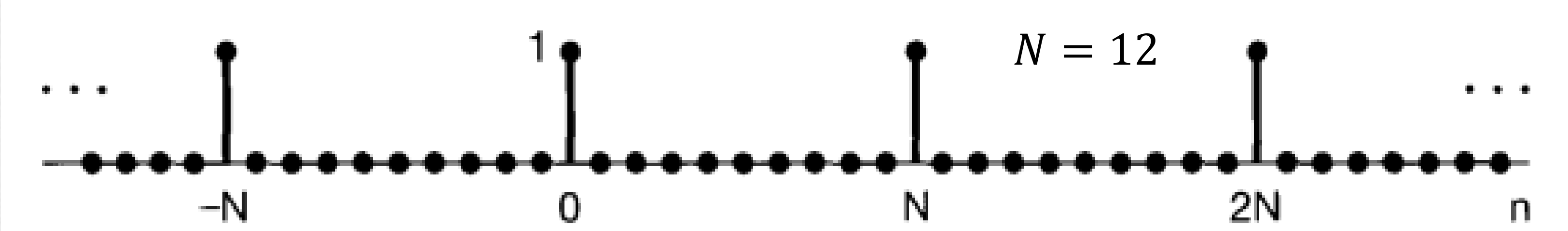
در غیر این صورت نمونه‌ها روی هم می‌افتند و منجر به یک سیگنال متناوب متفاوت می‌شوند که ضرایب سری فوریه آن ربطی به ضرایب DFT سیگنال غیر متناوب ندارد.

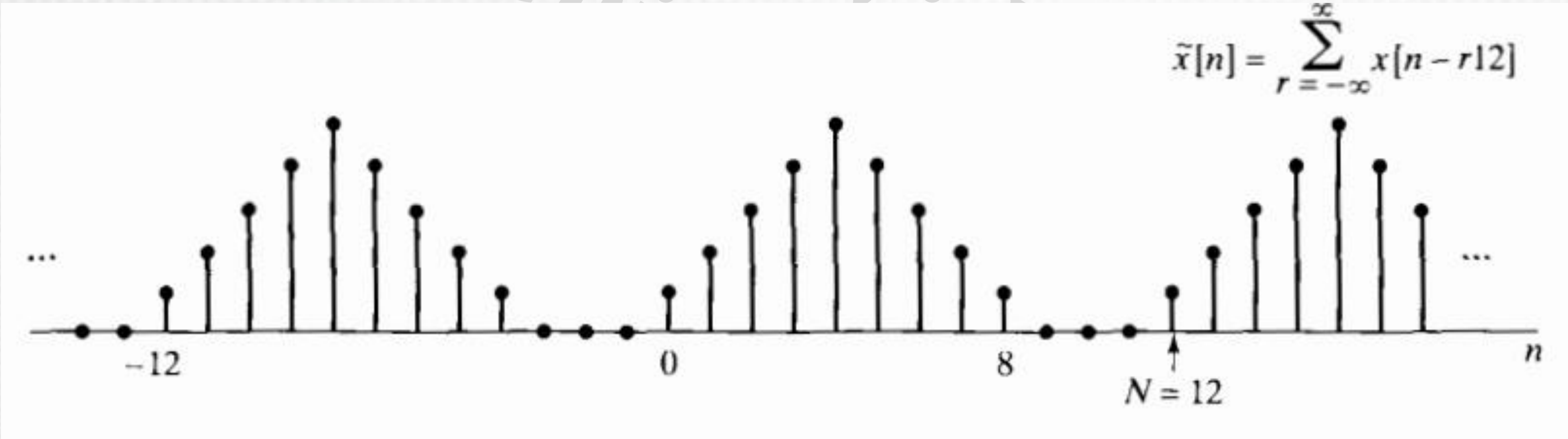
نمایش سری فوریه
خواص سری فوریه
تبدیل DFT
خواص تبدیل DFT
پاسخ فیلتر LTI به کمک DFT

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:



$*$





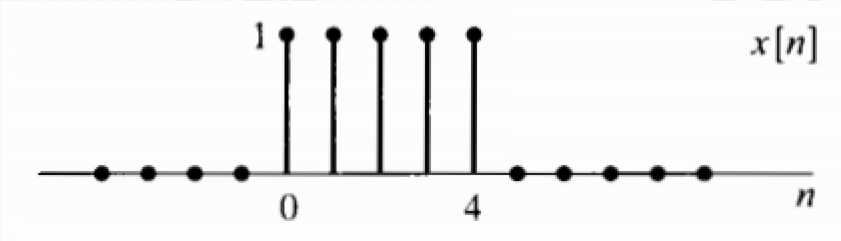
تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

به طور خلاصه زوج تبدیل N DFT-نقطه ای سیگنال غیر متناوب $x[n]$ به صورت زیر می باشد:

$$X[k] = \mathrm{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$x[n] = \mathrm{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \qquad 0 \le n \le N-1$$

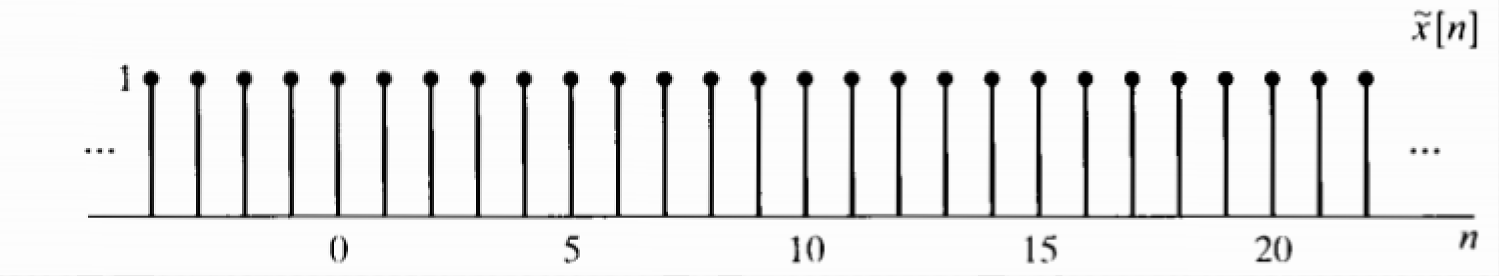
مثال ۲-۸: تبدیل DFT سیگنال زیر را بیابید:



حل: طول سیگنال برابر با $L = 5$ است پس باید $N \ge 5$ انتخاب شود. با فرض $N = 5$ سیگنال متناوب زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_5]$$

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:



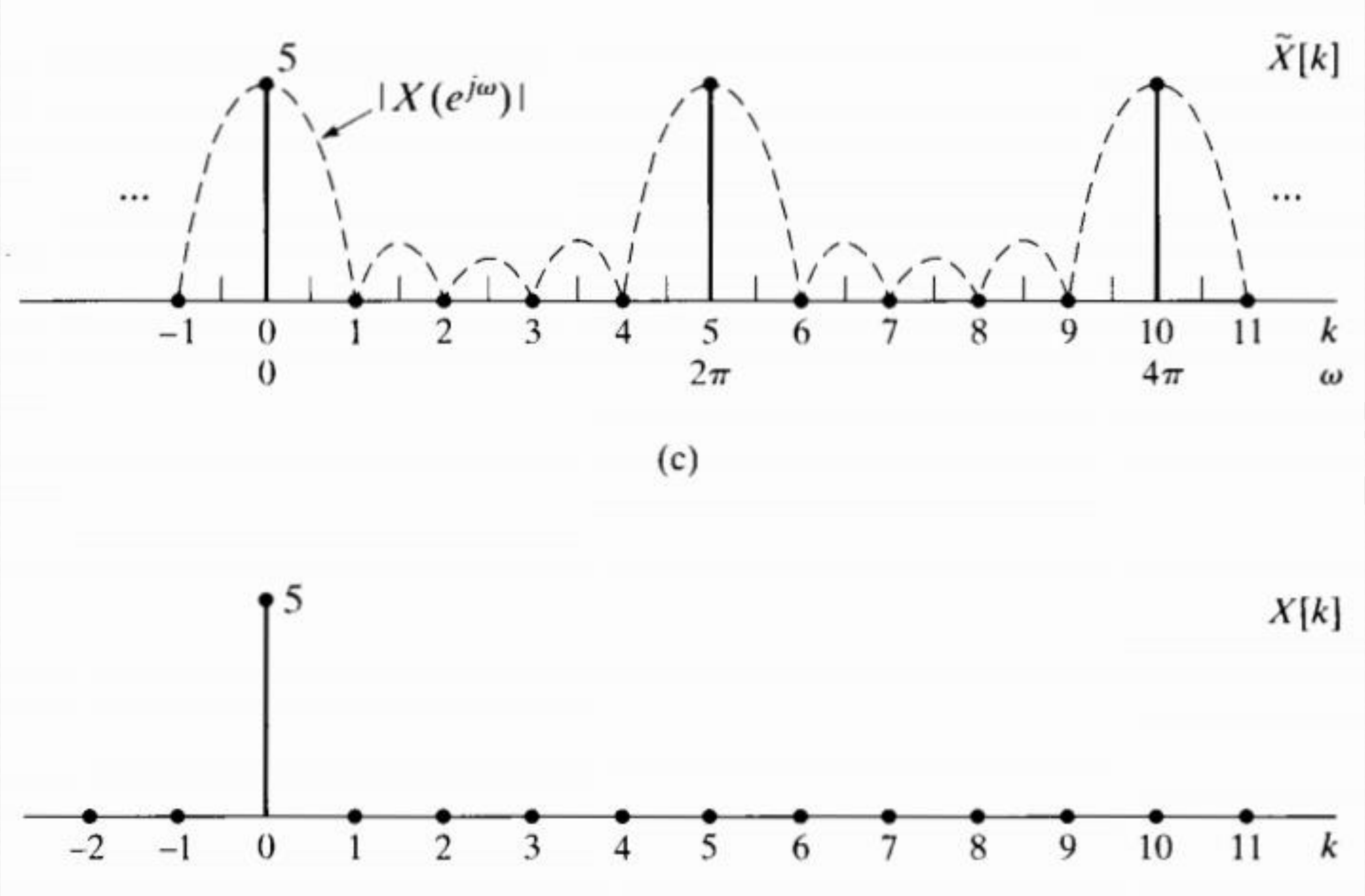
ضرایب سری فوریه $\tilde{X}[k]$ سیگنال بالا برابر است با:

$$\tilde{X}[k] = 5 \quad k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \qquad , a_k = 0 \;\; \forall k \neq 0, \pm 5, \dots$$

در این صورت تبدیل DFT سیگنال $x[n]$ برابر است با:

$$\mathrm{DFT}\{x[n]\} = X[k] = \begin{cases} 5 & k = 0 \\ 0 & k = 1,2,3,4 \end{cases}$$

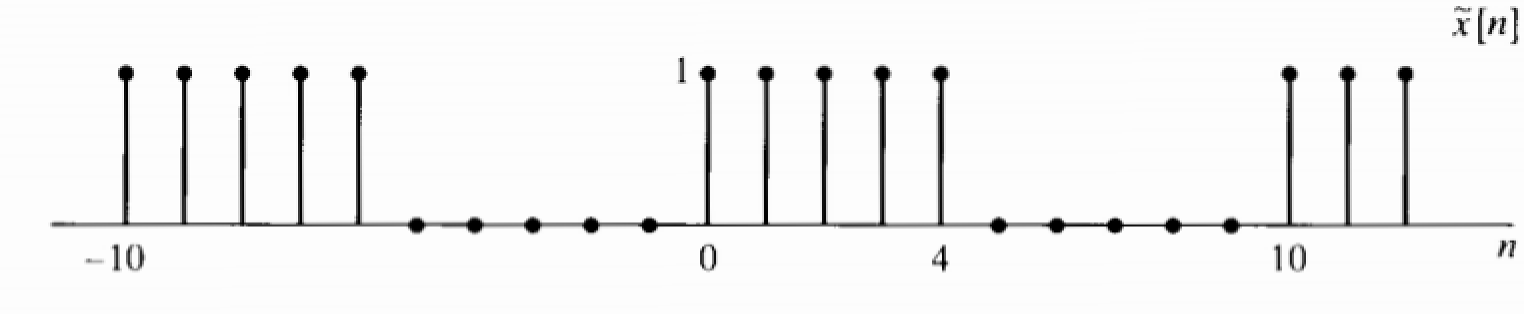
تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:



تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

حل: با فرض $N = 10$ سیگنال متناوب زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\tilde{x}[n] = x[((n))]_{10}$$



ضرایب سری فوریه $\tilde{X}[k]$ سیگنال بالا برابر است با:

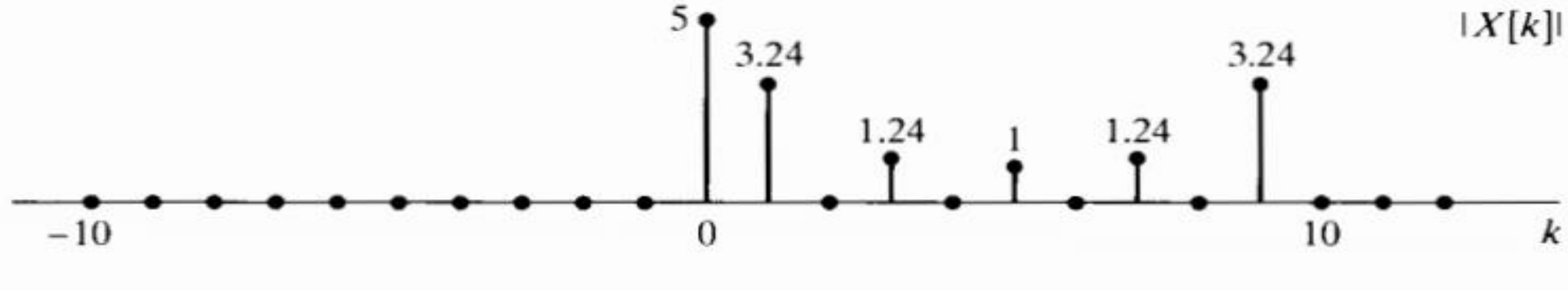
$$\tilde{X}[k] = \frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\sin\frac{\pi k}{10}} \quad k = 0,1,2,\dots,9 \quad , a_k = a_{k+rN}$$

در این صورت تبدیل DFT سیگنال $x[n]$ برابر است با:

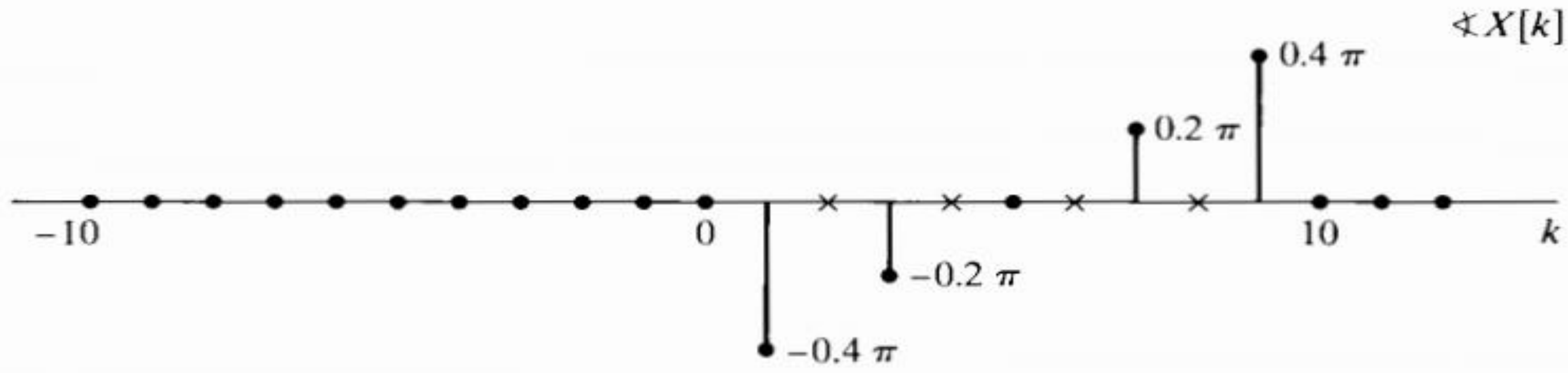
$$\text{DFT}\{x[n]\} = X[k] = \frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\sin\frac{\pi k}{10}} \quad k = 0,1,2,\dots,9$$

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

اندازه و فاز $X[k]$ در شکل زیر نشان داده شده است:



(c)



(d)

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

❖ اگر $X[k]$ تبدیل DFT $x[n]$ و $Y[k]$ تبدیل DFT $y[n]$ باشد.

۱- خطی بودن:

$$z[n] = \ Ax[n] + By[n] \xrightarrow{DFT} Z[k] = AX[k] + BY[k]$$

نکته بسیار مهم:

فرض کنید طول $x[n]$ برابر N_1 و طول $y[n]$ برابر با N_2 باشد به طوریکه $N_2 > N_1$ است. چون میخواهیم $X[k]$ و $Y[k]$ را با هم جمع بزنیم باید طول DFT ها با هم برابر باشد.

برای این منظور ابتدا با اضافه کردن صفر به انتهای دنباله $x[n]$، طول $x[n]$ را با N_2 می‌رسانیم و سپس از $x[n]$ و $y[n]$ تبدیل DFT N_1 نقطه ای می‌گیریم.

نمایش سری فوریه

خواص سری فوریه

تبدیل DFT

خواص تبدیل DFT

پاسخ فیلتر LTI به کمک DFT

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

۲- شیفت چرخشی:

در تبدیل فوریه گسسته در زمان و سری فوریه گسسته در زمان دیدیم که

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}[n-m] \overset{S\mathfrak{F}}{\rightarrow} \tilde{Y}[k] = e^{\left(-\frac{j2\pi k}{N}\right)m}\tilde{X}[k]$$

یعنی ضرب کردن $e^{\left(-\frac{j2\pi k}{N}\right)m}$ در ضرایب سری فوریه منجر به یک شیفت زمانی در سیگنال زمانی متناوب می‌شد.

سوال: آیا در تبدیل DFT، $X[k]$، هم همانند تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ و ضریب سری فوریه $\tilde{X}[k]$ با ضرب $e^{-\frac{j2\pi k}{N}m}$ یک شیفت زمانی رخ می‌دهد؟

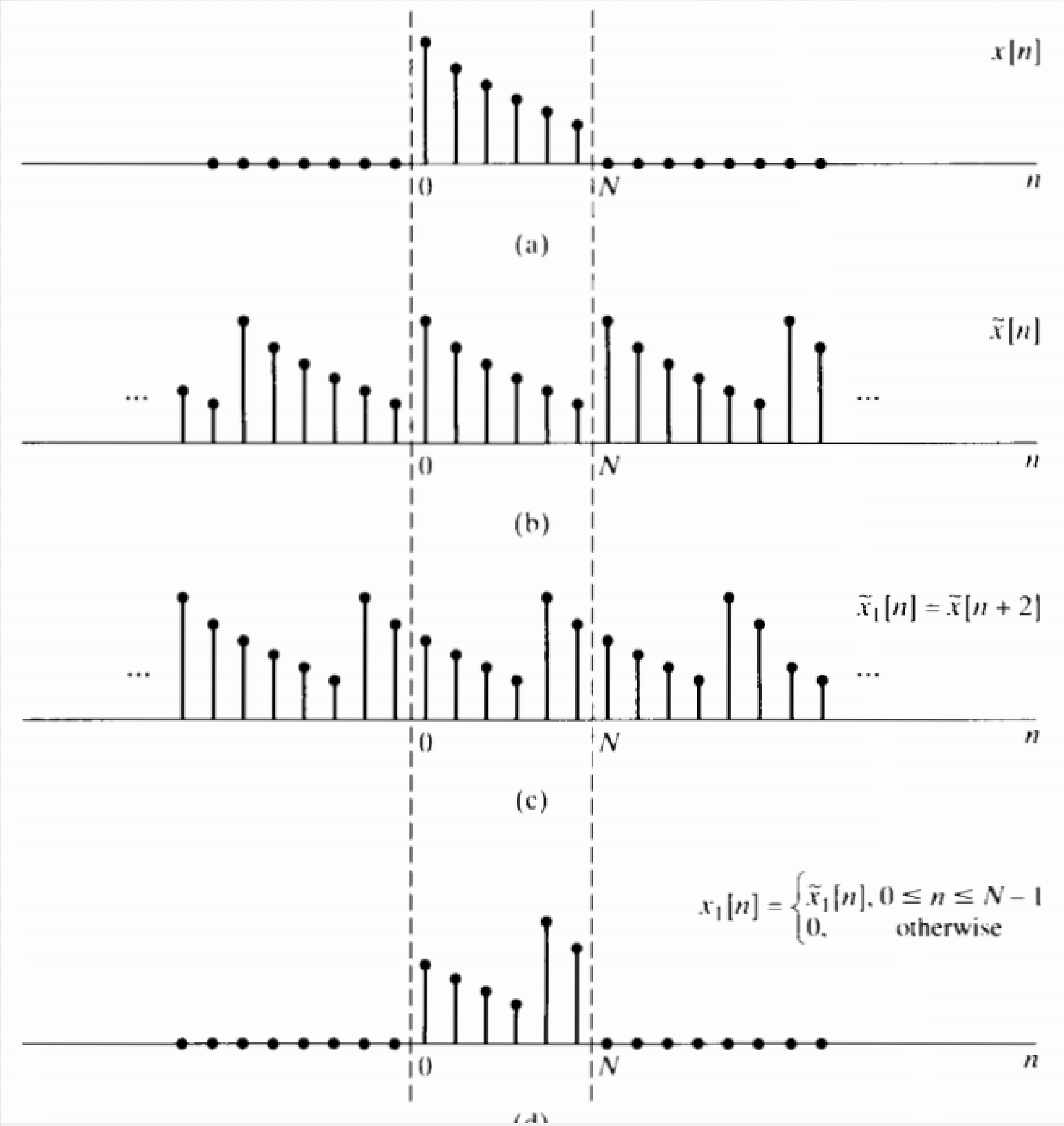
پاسخ:

❖ خیر. در اینجا شیفت زمانی رخ نمی‌دهد. در واقع اگر بخواهیم یک DFT N-نقطه ای داشته باشیم باید $x[n]$ و $y[n]$ (عکس تبدیل DFT $X[k]\, e^{-\frac{j2\pi k}{N}m}$) در $0 \le n \le N-1$ تعریف شوند. پس اگر $y[n] = x[n-m]$ باشد دیگر در بازه $0 \le n \le N-1$ نیست و این اشتباه هست. پس باید به دنبال سیگنال دیگری باشیم.

راه حل:

می‌دانیم که ضرب $e^{-\frac{j2\pi k}{N}m}$ در $X[k]$ معادل با ضرب $e^{-\frac{j2\pi k}{N}m}$ در $\tilde{X}[k]$ است. $\tilde{X}[k]e^{-\frac{j2\pi k}{N}m}$ معادل با $\tilde{x}[n-m]$ است. این سیگنال را تشکیل می‌دهیم و یک دوره تناوب از این سیگنال در بازه $0 \le n \le N-1$ را جدا می‌کنیم.

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:



$$y[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n-m], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$y[n] = \begin{cases} x\left[((n-m))_N\right], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{DFT}} Y[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} X[k]$$

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

۳- دوگانی :

$$x[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X[k]$$

$$y[n] = X[n] \xrightarrow{\text{DFT}} Nx\left[((-k))_N\right] \qquad 0 \le k \le N-1$$

$x\left[((-k))_N\right]$: یعنی $x[-k]$ را تشکیل بدهید. سپس با دوره N تکرار کنید و در ادامه بازه $0 \le k \le N-1$ را جدا کنید

۴- تقارن :

$$\mathrm{Re}\{x[n]\} \xrightarrow{\text{DFT}} X_e[k]$$

$$j\mathrm{Im}\{x[n]\} \xrightarrow{\text{DFT}} X_o[k]$$

$$x_e[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \mathrm{Re}\{X[k]\}$$

$$x_o[n] \xrightarrow{\text{DFT}} j\mathrm{Im}\{X[k]\}$$

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

۵- کانولوشن حلقوی:

در تبدیل فوریه دیدیم که اگر $x_1[n] * x_2[n]$ باشد آنگاه $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$ است.

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

سوال: اگر $x_1[n]$ و $x_2[n]$ دو سیگنال N نقطه ای باشد که DFT آنها به ترتیب $X_1[k]$ و $X_2[k]$ باشد، در این صورت اگر $0 \leq k \leq N-1$ $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ باشد، ارتباط $x_3[n] = \text{IDFT}\{X_3[k]\}$ با $x_1[n]$ و $x_2[n]$ چیست؟

پاسخ: از رابطه ضرایب سری فوریه و تبدیل DFT می‌توان ثابت کرد که $x_3[n]$ برابر با کانولوشن حلقوی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در بازه $0 \leq n \leq N-1$ است یعنی:

$$x_3[n] = (x_1[n] \circledast_N x_2[n])R_N[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$$

نکته مهم: پس از محاسبه کانولوشن حلقوی، تنها بازه $0 \leq n \leq N-1$ در نظر گرفته می‌شود. $R_N[n]$ یک پالس مستطیلی N نقطه ای در این بازه هست که تمام نمونه‌های آن برابر با ۱ است.

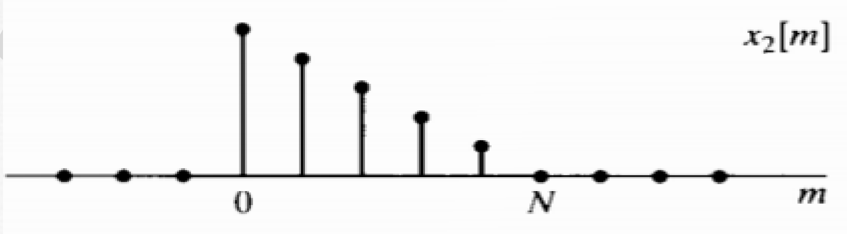
نمایش سری فوریه
خواص سری فوریه
تبدیل DFT
خواص تبدیل DFT
پاسخ فیلتر LTI به کمک DFT

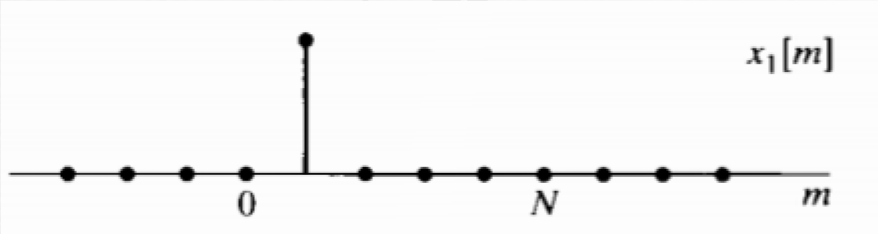
تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

مثال ۳-۸: اگر $x_1[n]$ و $x_2[n]$ دو سیگنال N نقطه ای به صورت زیر باشند، مطلوب است

الف) محاسبه $x_3[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]$

ب) ارتباط $X_3[k]$ و $X_2[k]$

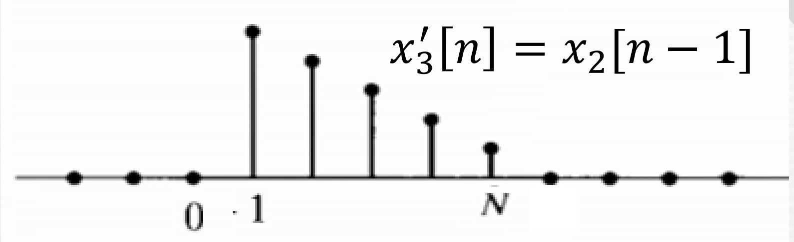




حل: کانولوشن $x_1[n] * x_1[n]$ را محاسبه می‌کنیم و از هر N نقطه تکرار می‌کنیم:

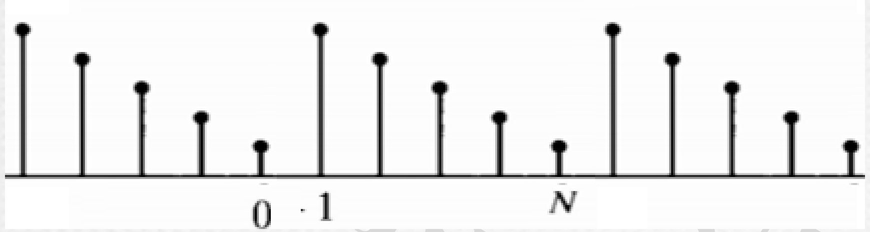
$$x_3'[n] = x_1[n] * x_2[n] = \delta[n-1] * x_2[n] = x_2[n-1]$$

پس داریم:



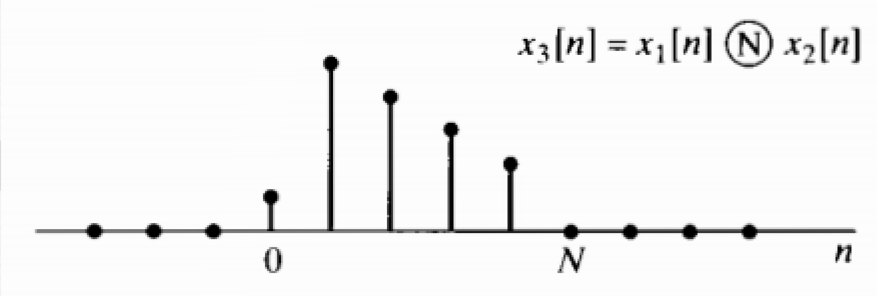
تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

حال این دنباله را از هر N نقطه تکرار می کنیم



$$x_3\left[((m-n))_N\right]$$

در پایان یه دوره از این سیگنال در بازه $0 \le n \le N-1$ را جدا می کنیم

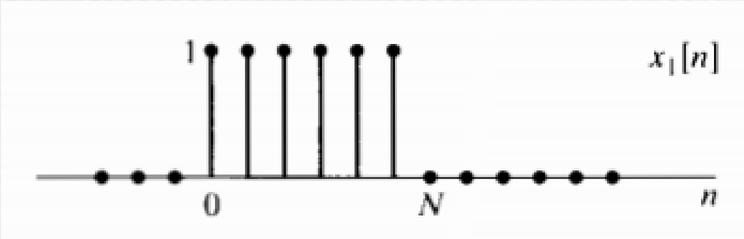


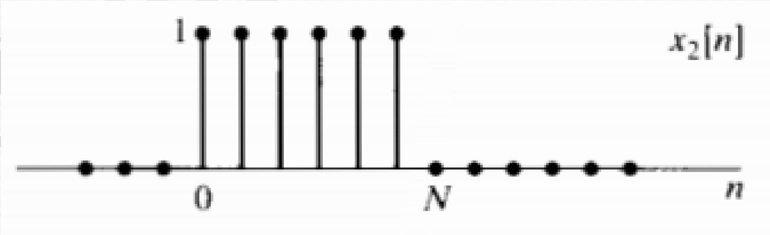
می‌دانیم که $X_1[k] = W_N^k$ است که $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ است. بنابراین با توجه به ویژگی ۵ داریم:

$$X_3[k] = X_2[k] W_N^k$$

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

مثال ۴–۸: مثال قبل را به ازای دو سیگنال N نقطه ای $x_1[n]$ و $x_2[n]$ زیر و تبدیل DFT N نقطه ای و $2N-1$ تکرار کنید.

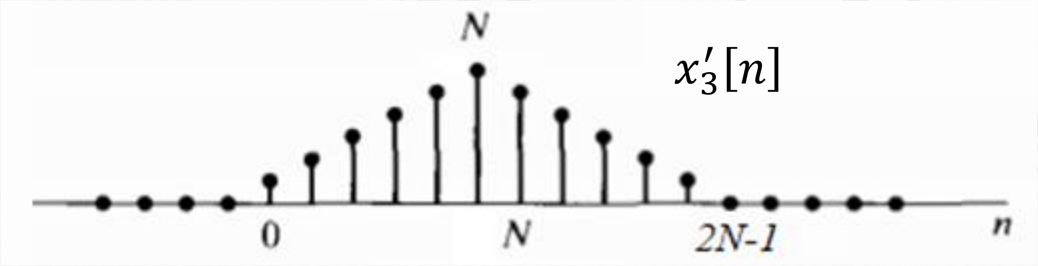




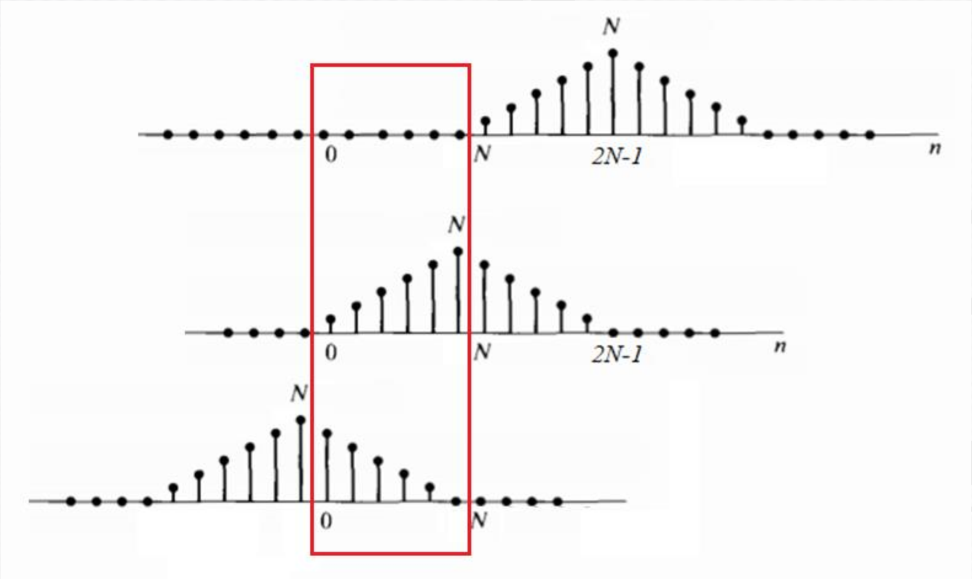
حل: کانولوشن $x_1[n] * x_2[n]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x_3'[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

پس داریم:



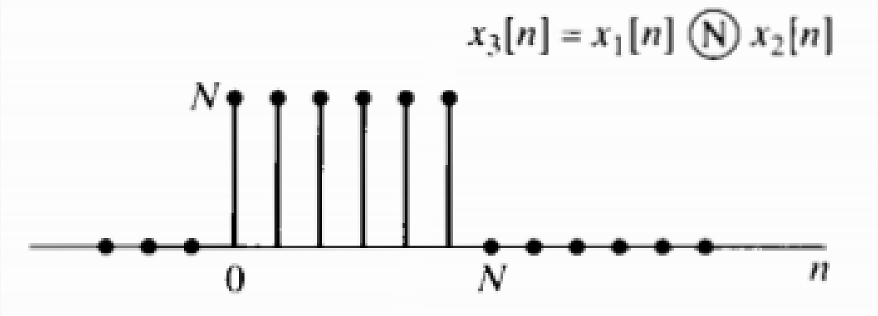
تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:



الف) حال این دنباله را از هر N نقطه تکرار می کنیم

$$x_3\left[((m-n))_N\right]$$

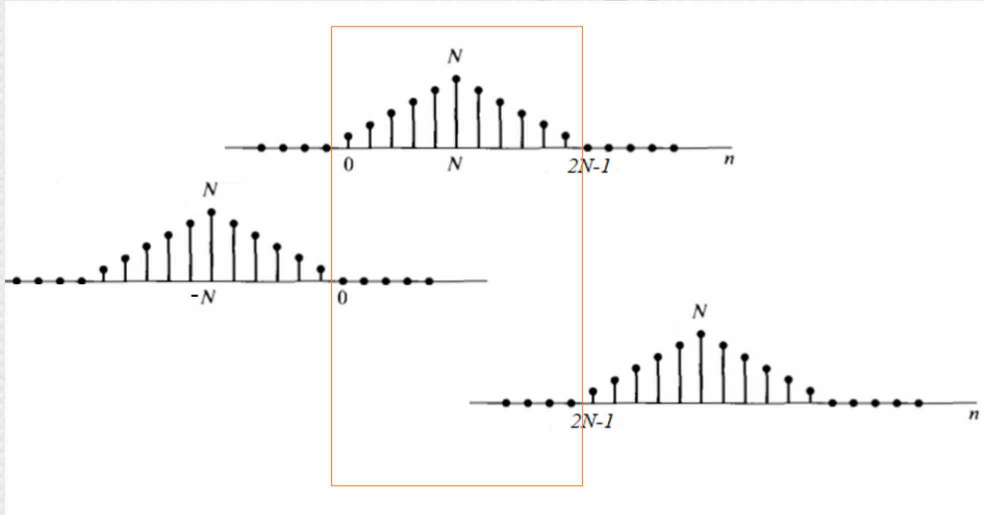
در پایان یه دوره از این سیگنال در بازه $0 \le n \le N-1$ را جدا می کنیم



بنابراین داریم: $X_1[k] = X_2[k] = N \quad 0 \le k \le N-1$

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] = N^2 \quad , \qquad 0 \le k \le N-1$$

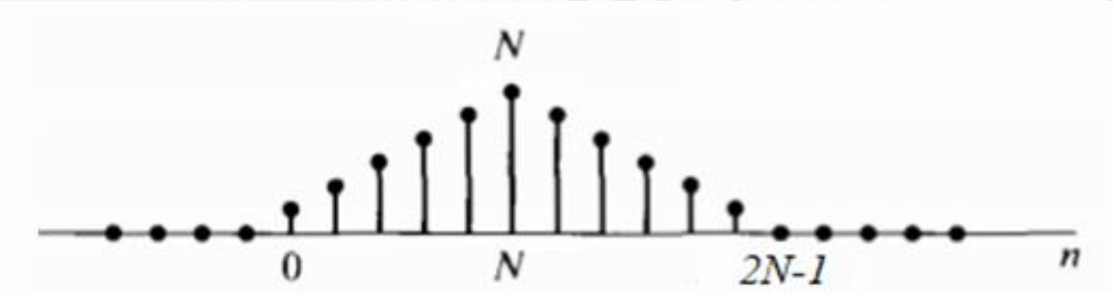
تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:



ب) حال این دنباله را از هر $2N-1$ نقطه تکرار می کنیم

$$x_3\left[\left((m-n)\right)_{2N-1}\right]$$

در پایان یه دوره از این سیگنال در بازه $0 \le n \le 2N-1$ را جدا می کنیم



بنابراین داریم: $X_1[k] = X_2[k] = \frac{1-W_{2N-1}^{\frac{2N-1}{2}k}}{1-W_{2N-1}^{k}} \quad 0 \le k \le 2N-1$

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] = \left(\frac{1-W_{2N-1}^{\frac{2N-1}{2}k}}{1-W_{2N-1}^{k}}\right)^2 , \qquad 0 \le k \le N-1$$

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

TABLE 8.2

Finite-Length Sequence (Length N)	N-point DFT (Length N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
6. $W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_1(\ell)X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $\mathcal{Re}\{x[n]\}$	$X_{ep}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12. $j\mathcal{Jm}\{x[n]\}$	$X_{op}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13. $x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{Re}\{X[k]\}$
14. $x_{op}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{Jm}\{X[k]\}$
Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.	
15. Symmetry properties	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \mathcal{Re}\{X[k]\} = \mathcal{Re}\{X[((-k))_N]\} \\ \mathcal{Jm}\{X[k]\} = -\mathcal{Jm}\{X[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert = \lvert X[((-k))_N]\rvert \\ \sphericalangle\{X[k]\} = -\sphericalangle\{X[((-k))_N]\} \end{cases}$
16. $x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[((-n))_N]\}$	$\mathcal{Re}\{X[k]\}$
17. $x_{op}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{Jm}\{X[k]\}$

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

❖ در مثال ۴-۹ دیدیم که کانولوشن حلقوی دو پالس مربعی با طول N منجر به یک پالس مربعی دیگر می شد که با نتایج کانولوشن عادی متفاوت بود.

❖ در واقع کانولوشن کردن دو سیگنال N نقطه ای، منجر به یک سیگنال $2N-1$ نقطه ای می شود نه سیگنال N نقطه ای

❖ اگر بخواهیم خروجی یک سیستم LTI را به کمک تبدیل DFT محاسبه کنیم باید روند زیر را دنبال کنیم:

فرضیات: ورودی $x[n]$ با L تقطه و پاسخ ضربه $h[n]$ با P نقطه

هدف: محاسبه خروجی سیستم $y[n] = x[n] * h[n]$

مرحله اول: محاسبه DFT $L+P-1$ نقطه ای از $x[n]$ و $h[n]$

مرحله دوم: محاسبه حاصلضرب $Y[k] = X[k]H[k]$ به ازای $0 \le k \le L+P-2$

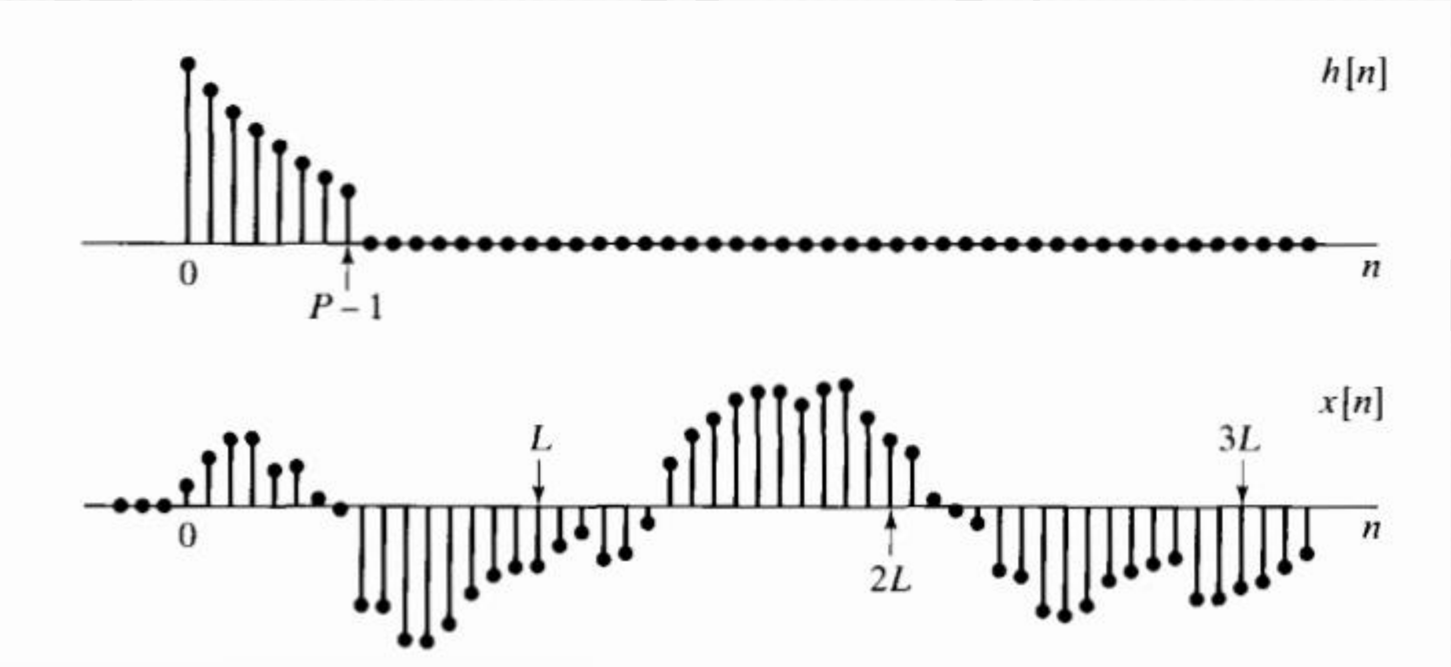
مرحله سوم: گرفتن عکس تبدیل DFT از $Y[k]$

مشکل: با این حال در بسیاری از موارد طول سیگنال ورودی نامعین است و یا طول سیگنال آنقدر زیاد است که قادر به ذخیره سازی و پردازش این سیگنال به صورت یک باره نیستیم

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

روش اول: overlap saving method

فرض کنید $h[n]$ یک فیلتر LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ و طول P باشد. می‌خواهیم سیگنال $x[n]$ را از این فیلتر عبور دهیم که طول $x[n]$ بسیار بزرگتر از L است. برای راحتی فرض کنید $x[n] = 0 ,n < 0$



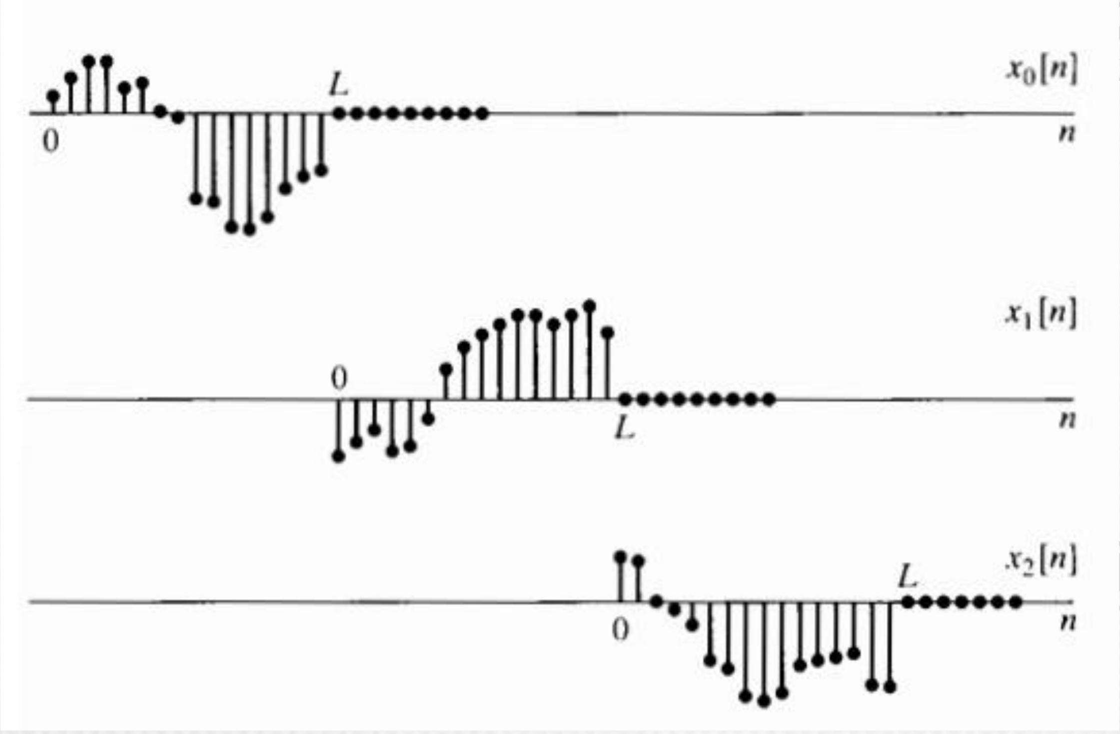
نمایش سری فوریه
خواص سری فوریه
تبدیل DFT
خواص تبدیل DFT
پاسخ فیلتر LTI به کمک DFT

تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

می‌توانیم سیگنال $x[n]$ را به قطعاتی با طول L تقسیم می‌کنیم: **(به شروع هر سیگنال توجه کنید که در $\boldsymbol{n=0}$ است)**

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL] \qquad (۱)$$

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \le n \le L - 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

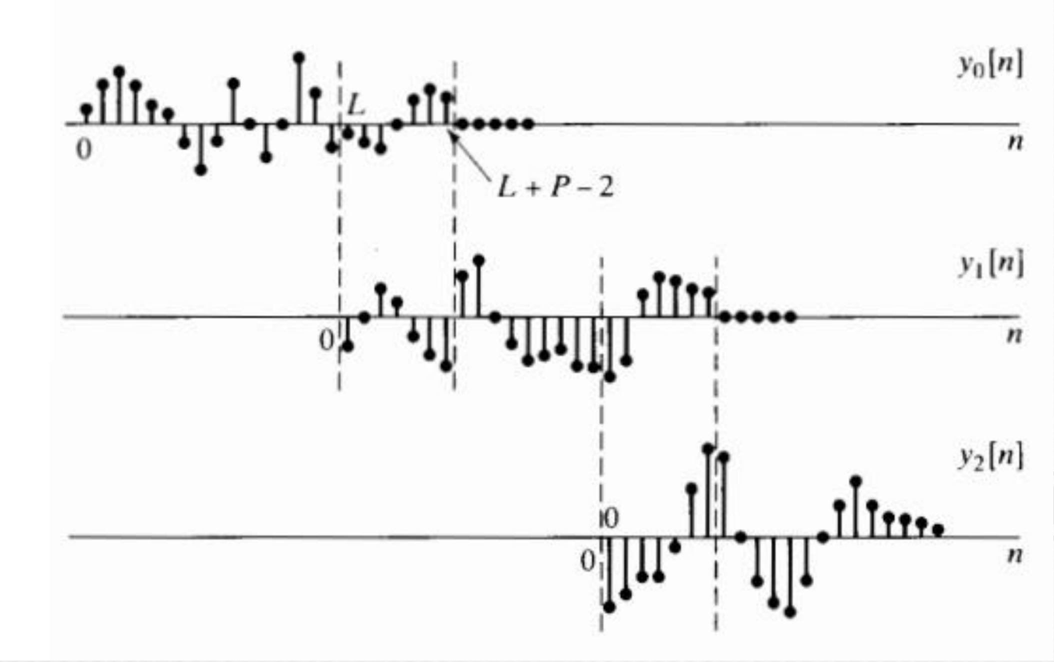


تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

کانولوشن یک عملگر خطی است. پس مجموع پاسخ به قطعات $x_r[n]$ برابر با پاسخ به سیگنال $x[n]$ است یعنی:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{n=0}^{\infty} x_r[n - rL] * h[n] = \sum_{n=0}^{\infty} y_r[n - rL]$$

- ❖ هر قطعه $x_r[n]$، L نمونه غیر صفر دارد و چون طول $h[n]$ برابر با P است پس باید از DFT سیگنال و فیلتر لااقل باید به ازای $N = L + P - 1$ محاسبه شود.
- ❖ $P - 1$ نقطه غیرصفر وجود دارد که با خروجی قبلی تداخل دارد. این تداخل باید منظور شود تا خروجی نهایی صحیح باشد.



تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

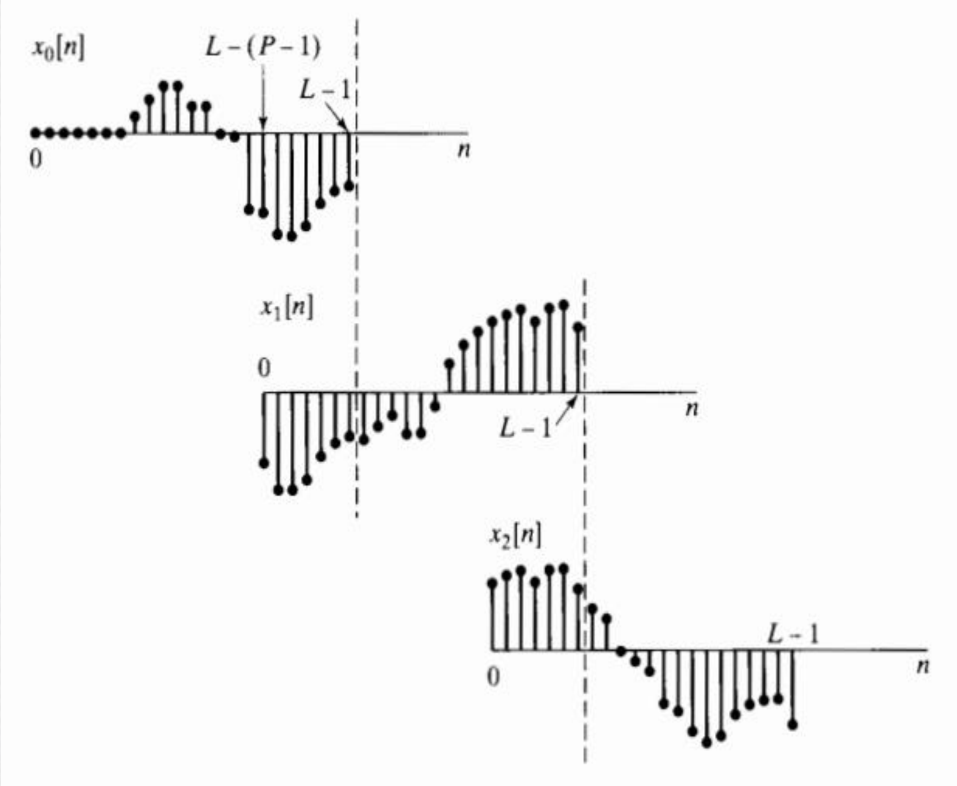
روش دوم:**overlap save method**

❖ فرض کنید $h[n]$ یک فیلتر LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ و طول P باشد. می‌خواهیم سیگنال $x[n]$ را از این فیلتر عبور دهیم که طول $x[n]$ بسیار بزرگتر از L است. برای راحتی فرض کنید $x[n] = 0 ,n < 0$

❖ فرض کنید $x[n]$ را به قطعاتی با طول L تقسیم کرده ایم که $L > P$ می باشد و هر قطعه با قطعه قبلی به اندازه $P - 1$ نمونه اشتراک دارد یعنی:

$$x_r[n] = x[n + r(L + P - 1) - P + 1]$$

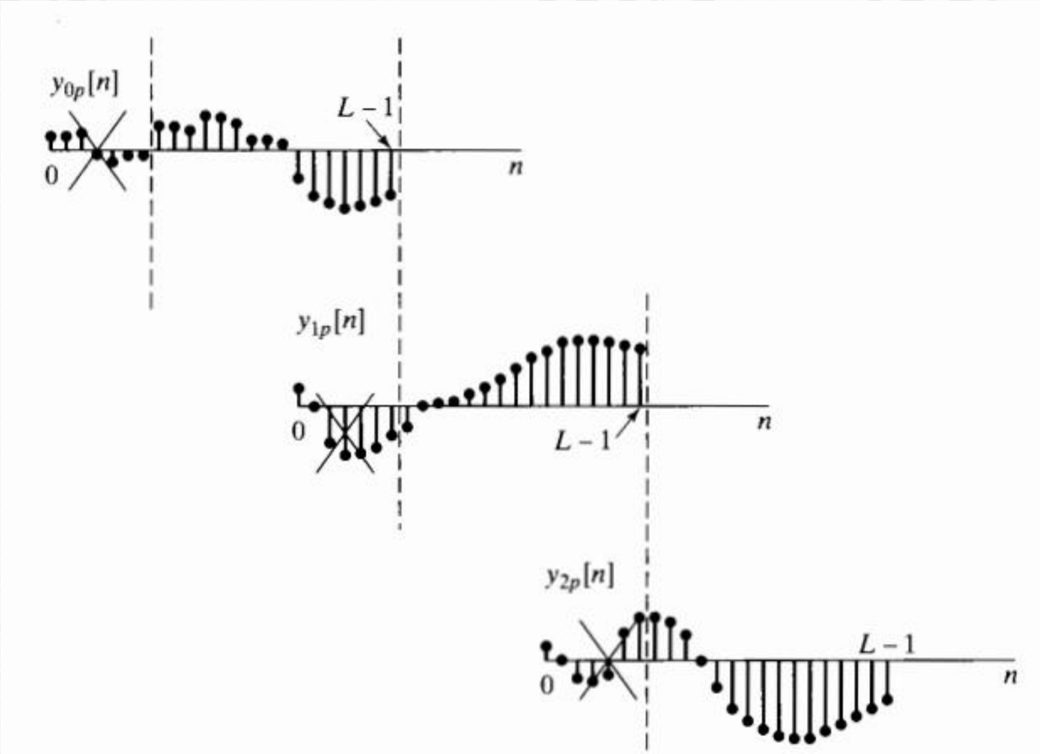
$$,0 \le n \le L - 1$$



تبدیل DFT سیگنال های غیر متناوب:

کانولوشن حلقوی هر بخش با فیلتر منجر به خروجی $y_{rp}[n]$ می شود.

در این ساختار چون یک سیگنال L نقطه ای با یک فیلتر P نقطه ای بر اساس DFT L نقطه ای پیاده سازی شده اند، می‌توان نشان داد که $P-1$ نقطه اول خروجی نادرست است و مابقی نمونه‌ها مطابق با خروجی مطلوب است. پس $P-1$ نمونه اول در خروجی هر بلوک را کنار می‌گذاریم و بقیه رو با هم جمع می‌زنیم



End of Chapter 8