پردازش سیگنال های دیجیتال پیشرفته

فصل چهارم
اساس سیستم‌های چندنرخی

ارایه شده توسط:

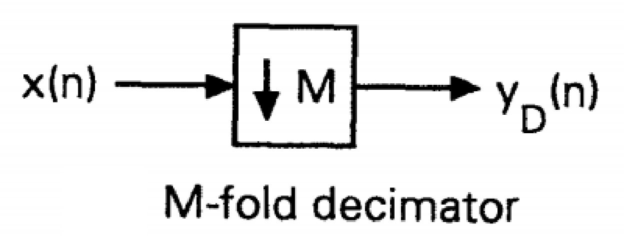
حجت قیمت گر
استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مطالب

عملگرهای اساسی چندنرخی

- دو عملگرهای اساسی چندنرخی decimation و interpolation (درون یابی) هستند.
- بلوک دیاگرام decimation را decimator و بلوک دیاگرام درون یابی را expander گویند.

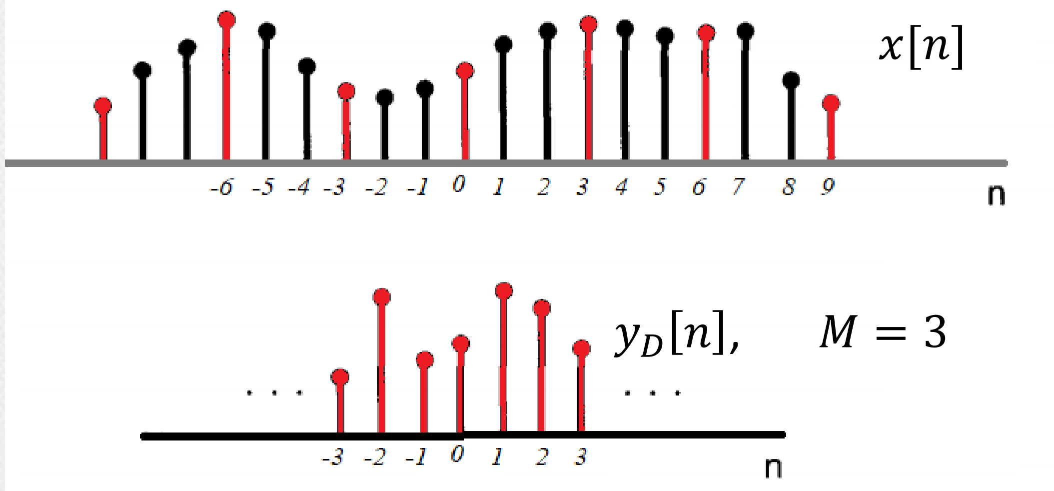
۱- decimator مرتبه M:



ساختار بلوک دیاگرامی این عملگر به صورت روبرو است

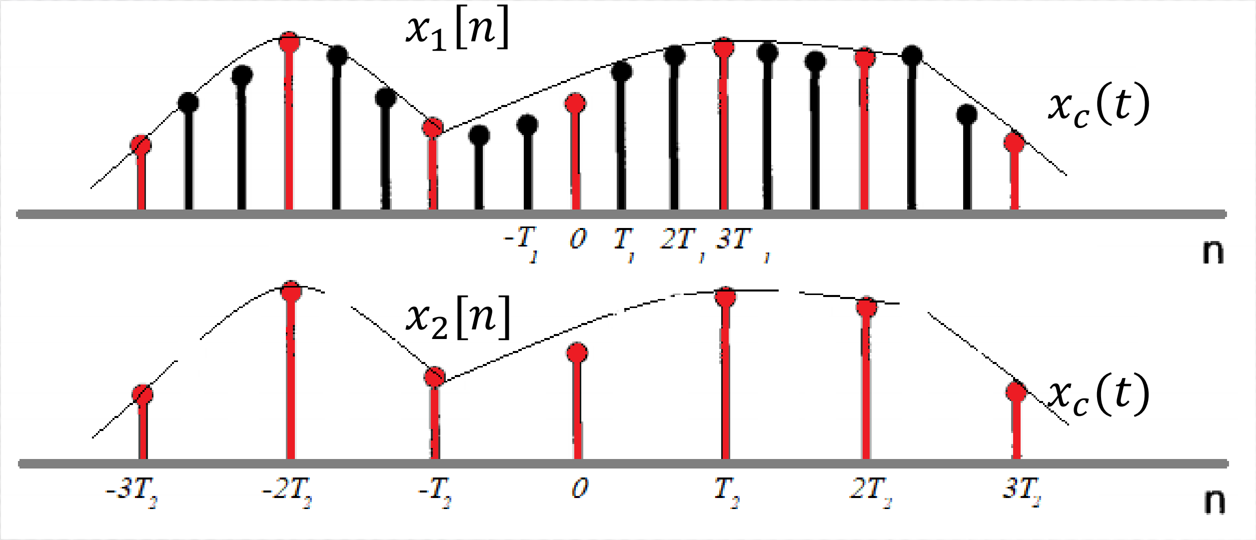
$$y_D[n] = x[Mn]$$

این عملگر از هر M نمونه سیگنال ورودی یکی را نگه می‌دارد و بقیه رو کنار می‌گذارد:



عملگرهای اساسی چندنرخی

آنالیز حوزه فرکانس **decimator**:



$$x[n] = x_c(nT_1)$$

$$y_D[n] = x_c(nT_2) = x_c(nMT_1)$$

می‌توان گفت که $x[n]$ نمونه گیری با نرخ T_1 و $y_D[n]$ نمونه گیری با نرخ $T_2 = MT_1$ است. پس $T_2 > T1$

طیف ورودی و خروجی بر اساس سیگنال پیوسته اولیه برابر است با:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi n}{T_1}\right)\right) \qquad (۱)$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T_2}\right)\right) \qquad (۲)$$

عملگرهای اساسی چندنرخی

از رابطه (۲) داریم:

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega-2\pi k}{T_2}\right)\right) = \frac{1}{MT_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega-2\pi k}{MT_1}\right)\right)$$

محدوده $-\infty \le k \le \infty$ را میتوان به صورت دو متغیره نوشت:

$$k = Mn + l \qquad l = 0, \dots, M-1\ , \qquad n = \cdots, -1,0,1,2, \dots$$

پس داریم:

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{M-1} X_c\left(j\left(\frac{\omega-2\pi(Mn+l)}{MT_1}\right)\right)$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT_1}-\frac{2\pi Mn}{MT_1}-\frac{2\pi l}{MT_1}\right)\right)$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{(\omega-2\pi l)/M}{T_1}-\frac{2\pi n}{T_1}\right)\right) \qquad (۳)$$

عملگرهای اساسی چندنرخی

از رابطه (۱) داریم:

$$X_1\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right)=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_c\left(\frac{(\omega-2\pi l)/M}{T_1}-\frac{2\pi n}{T_1}\right) \qquad (۴)$$

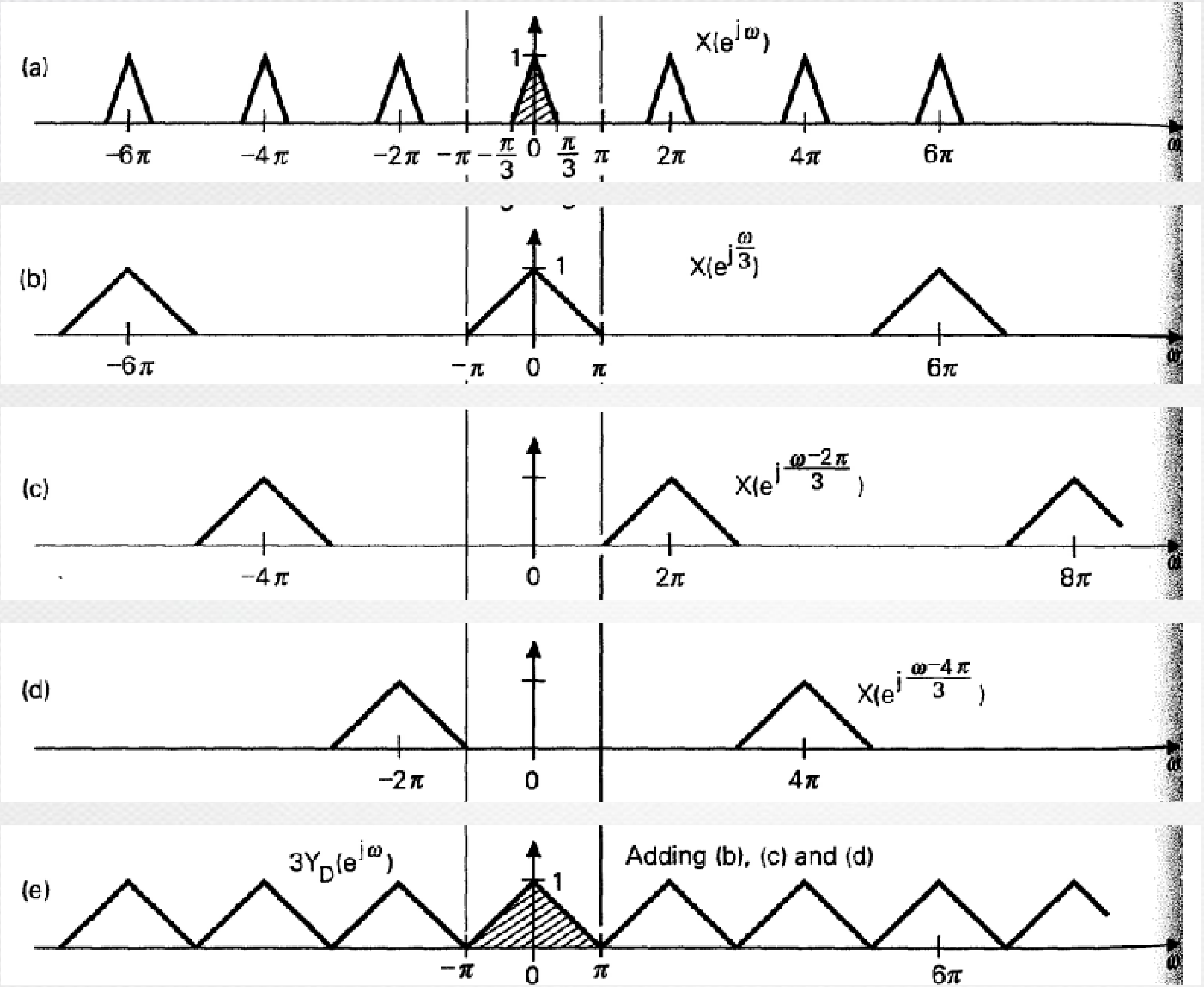
با مقایسه (۳) و (۴) داریم:

$$X_2(e^{j\omega})=\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}X_1\left(e^{j\frac{\omega-2\pi l}{M}}\right)$$

۱- باز شدن به اندازه M

۲- تکرار از هر 2π

۳- تضعیف دامنه در $1/M$



عملگرهای اساسی چند نرخی

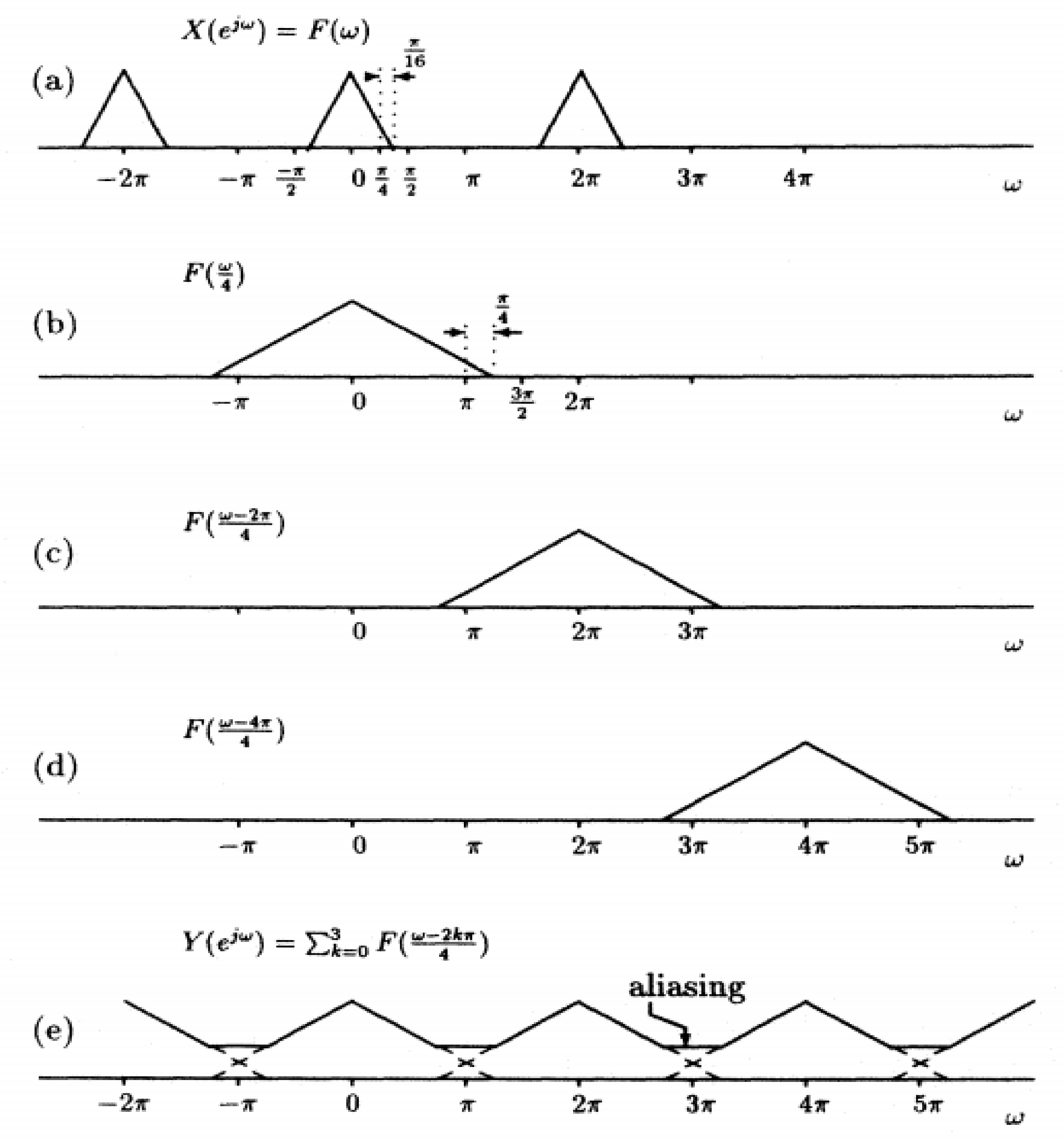
نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

فیلتربانک ها

عملگرهای اساسی چندنرخی

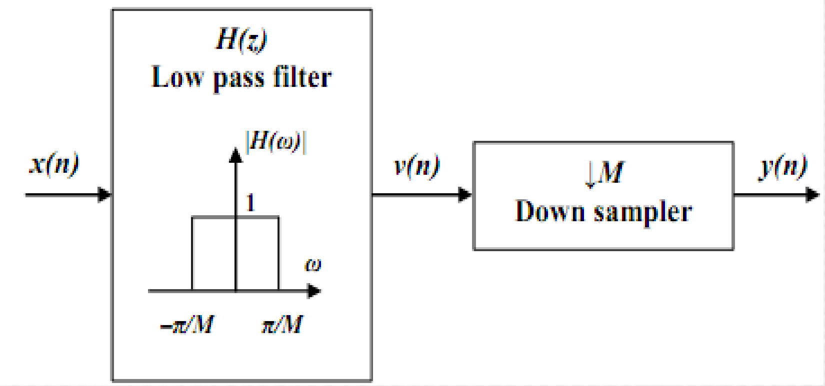


اثر تداخل طیفی در کاهش نرخ:

ملاحظه می شود که aliasing به ازای فرکانس‌های بزرگتر π/M رخ می دهد.

راه حل:

استفاده از یک LPF با فرکانس قطع π/M قبل از کاهش نرخ



عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

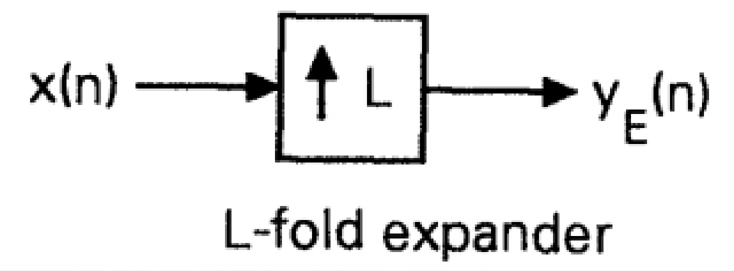
کاربردها

فیلتربانک ها

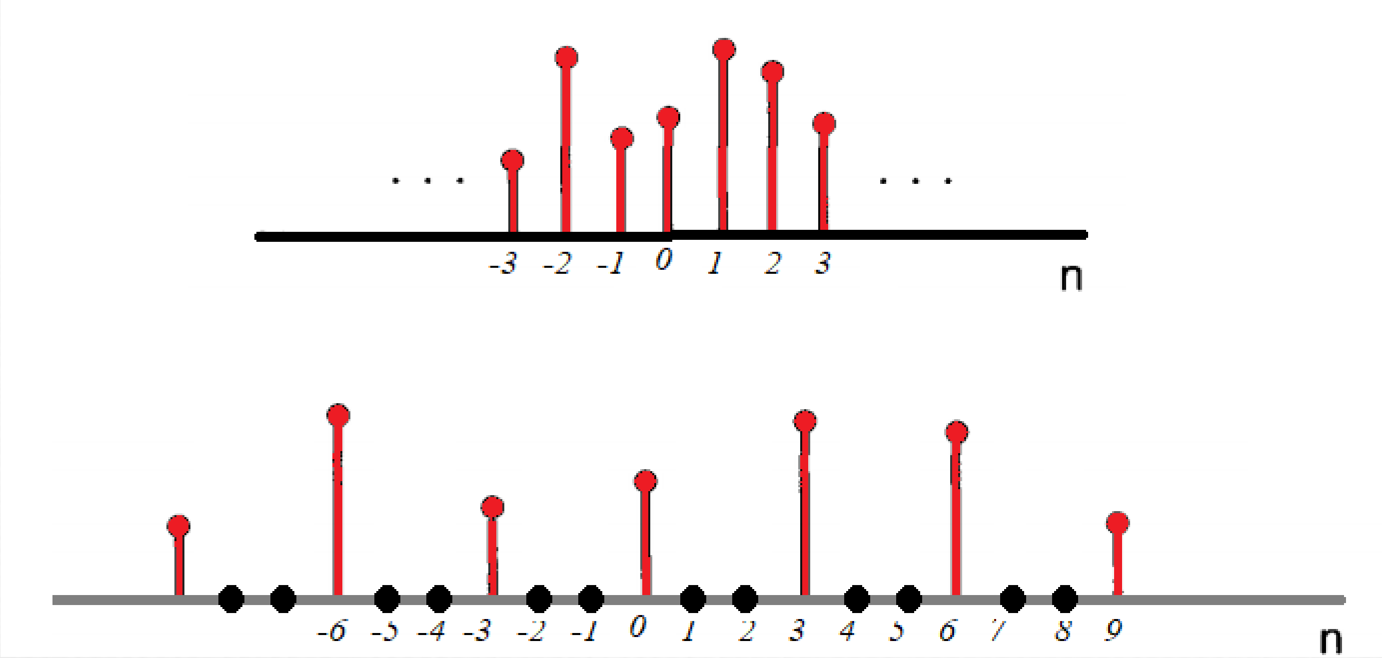
عملگرهای اساسی چندنرخی

۲- expander مرتبه L:

ساختار بلوک دیاگرامی این عملگر به صورت روبرو است



$$y_E[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right] & n \text{ مضرب } L \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



عملگرهای اساسی چندنرخی

آنالیز حوزه فرکانس expander:

اگر طیف ورودی را $X(e^{j\omega})$ و طیف خروجی را $Y_E(e^{j\omega})$ باشد داریم:

$$Y_E(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_E[n]z^{-n} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=Lk}}^{\infty} y_E[n]z^{-n}$$

که معادل است با:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_E[kL]z^{-kL} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-kL} = X(z^L)$$

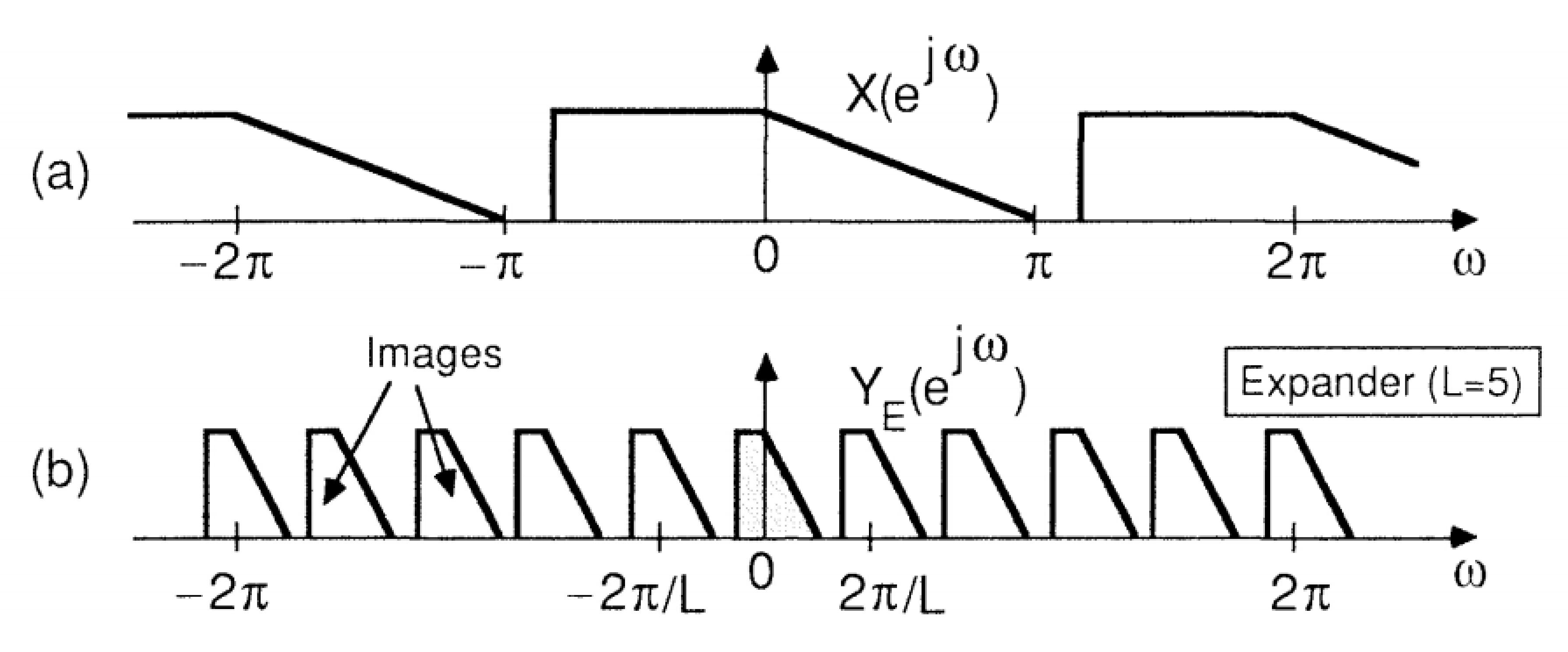
بنابراین اگر $z = e^{j\omega}$ باشد، تبدیل فوریه خروجی بر حسب ورودی برابر است با:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{jL\omega})$$

چون $L > 1$ فرض می شود بنابراین طیف ورودی به اندازه L فشرده تر می شود.

عملگرهای اساسی چندنرخی

ارتباط طیف سیگنال ورودی و خروجی **expander** با مرتبه ۵

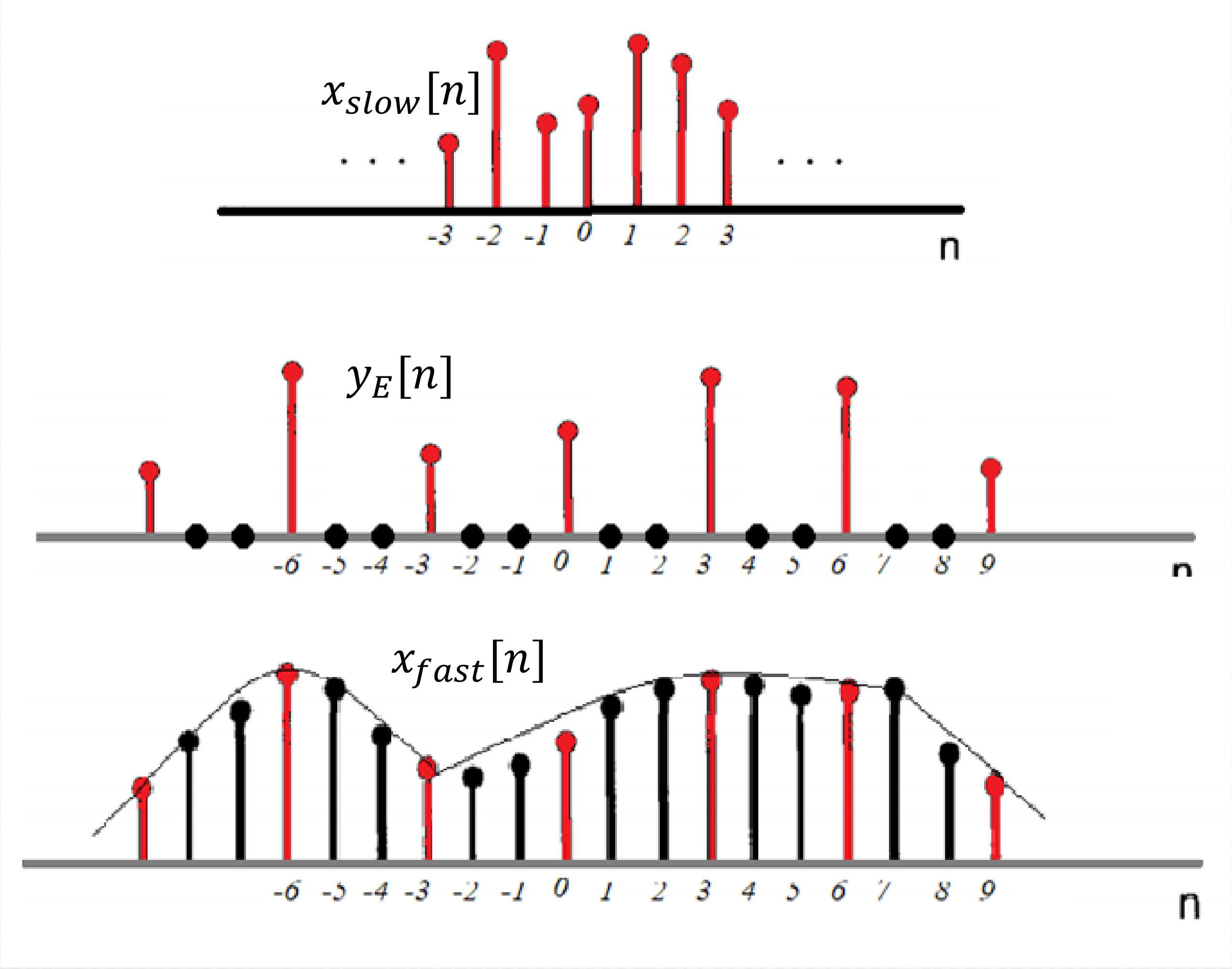


نکته: نامهای دیگر این عملگر، upsampler (افزایش نرخ دهنده) یا interpolator (درون یاب) است.

عملگرهای اساسی چندنرخی

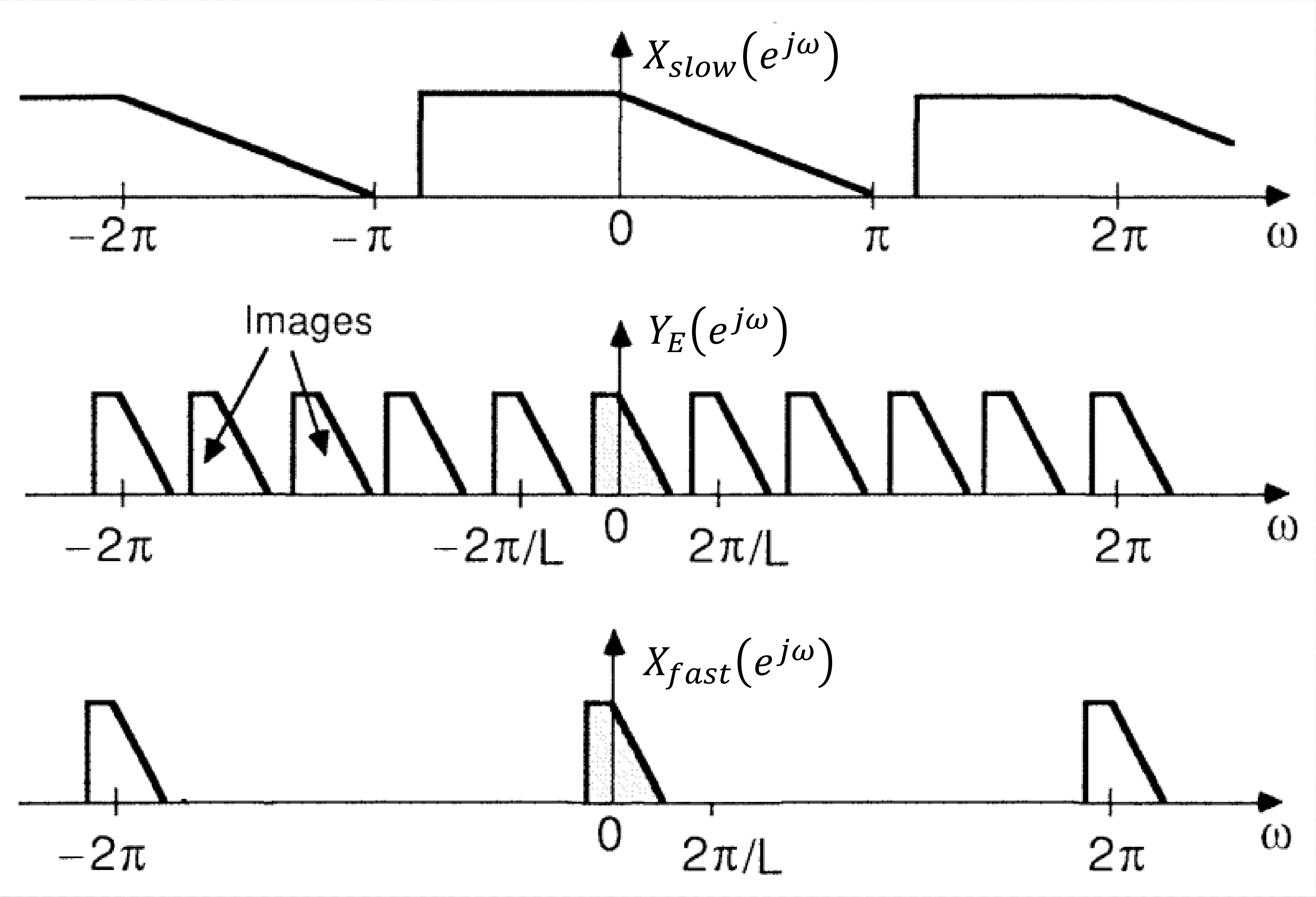
۴- افزایش نرخ سیگنال:

می‌توان نمونه های صفر خروجی expander درون یابی کرد و نرخ نمونه برداری سیگنال را افزایش داد.



عملگرهای اساسی چندنرخی

طیف فرکانسی سه سیگنال بالا به صورت زیر است:



عملگرهای اساسی چندنرخی

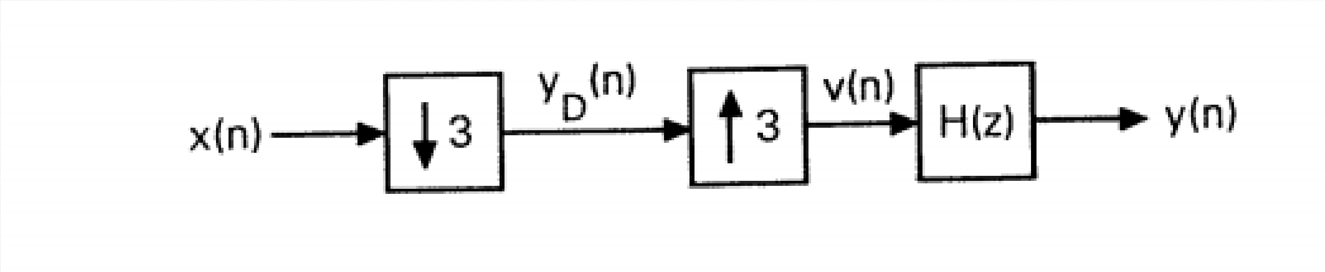
۳- بازیابی سیگنال decimate شده

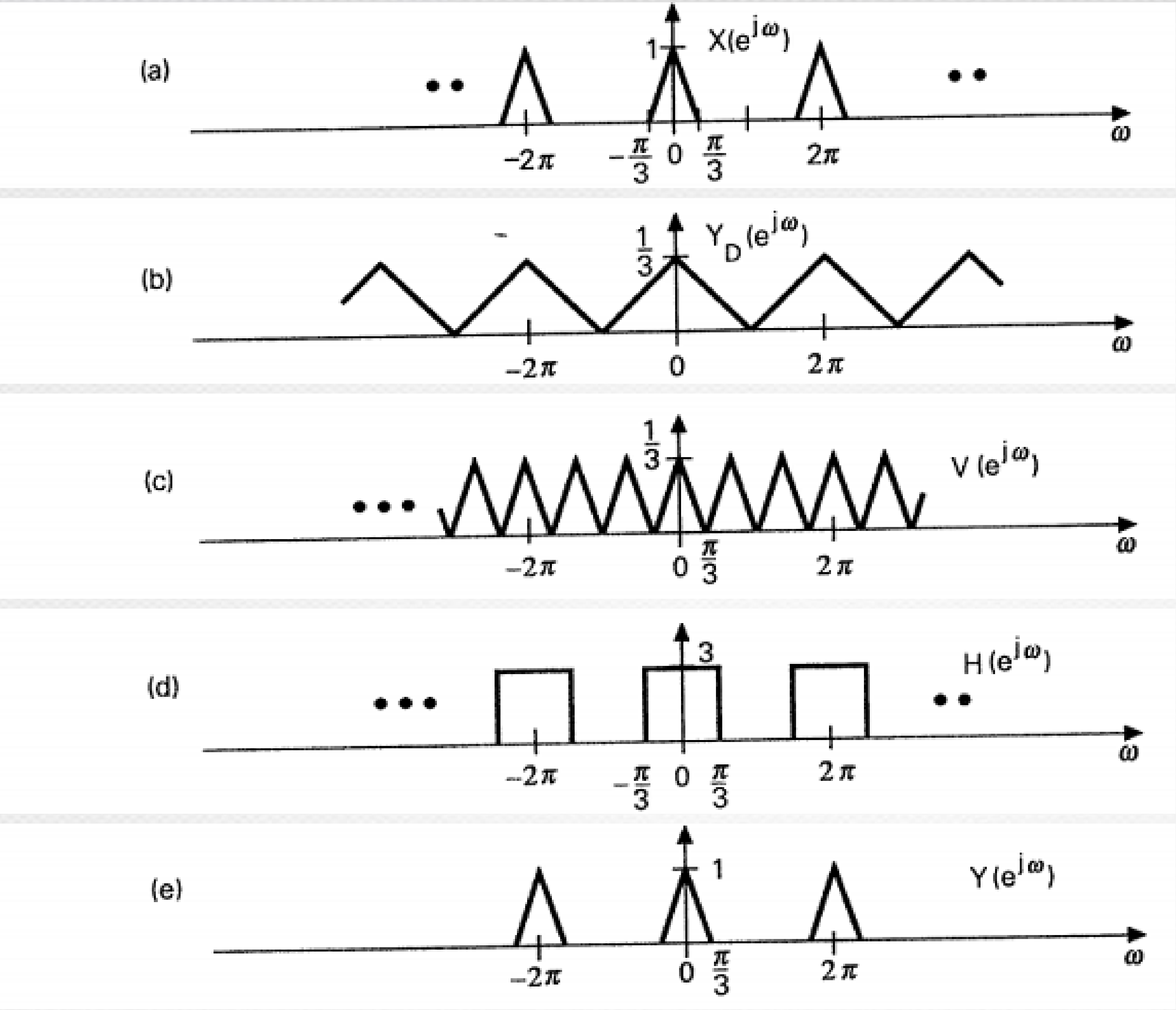
نکته مهم: دو عملگر decimator و expander خطی هستند اما تغییر ناپذیر با زمان نیستند. پس در ساختارهای پردازشی نمی‌توان جای آنها را عوض کرد.

فرض کنید بر روی سیگنال $x[n]$ decimator اعمال شده است. می‌خواهیم نمونه های حذف شده را بازیابی کنیم:

شرط مهم: باید پهنای باند سیگنال ورودی مد نظر نهایتا π/M باشد.

با اتصال سری decimator و expander و به کارگیری یک LPF داریم:





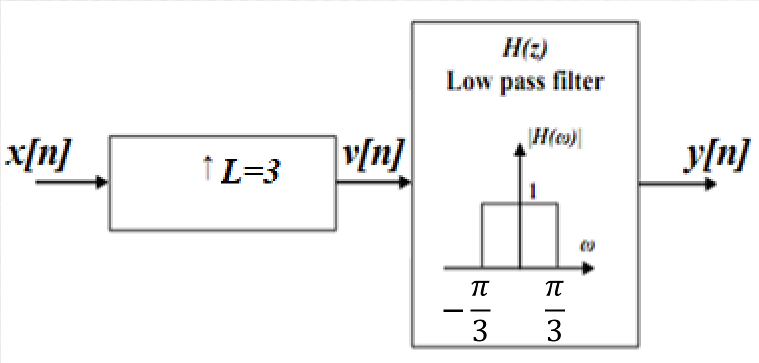
(a)
$X(e^{j\omega})$
1
-2π
$-\frac{\pi}{3}$
0
$\frac{\pi}{3}$
2π
ω
(b)
$Y_D(e^{j\omega})$
$\frac{1}{3}$
-2π
0
2π
ω
(c)
$V(e^{j\omega})$
$\frac{1}{3}$
-2π
0
$\frac{\pi}{3}$
2π
ω
(d)
$H(e^{j\omega})$
3
-2π
$-\frac{\pi}{3}$
0
$\frac{\pi}{3}$
2π
ω
(e)
$Y(e^{j\omega})$
1
-2π
0
$\frac{\pi}{3}$
2π
ω

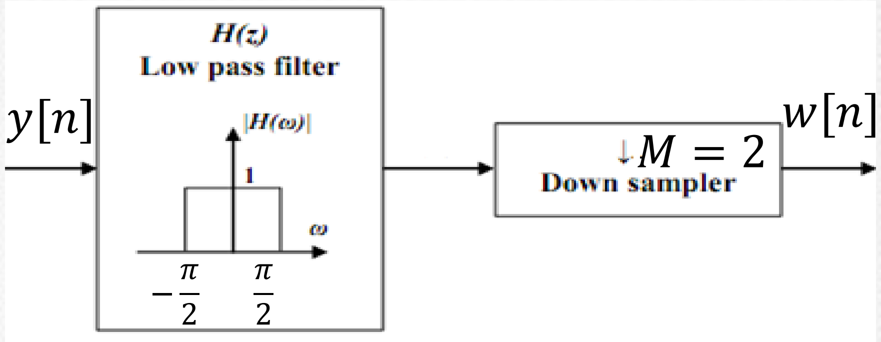
تغییر نرخ نمونه برداری

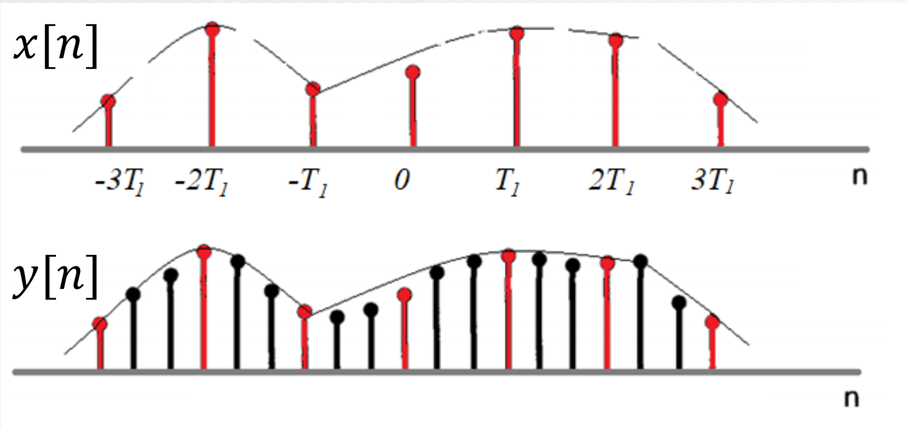
۳-افزایش نرخ کسری:

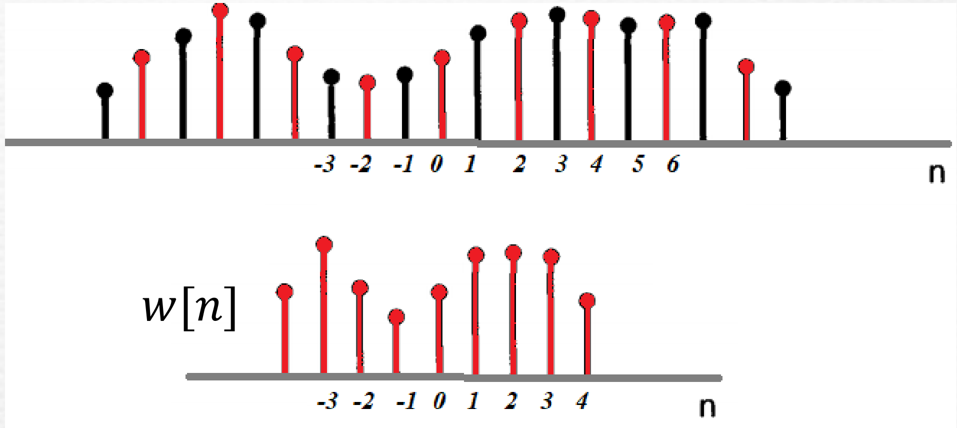
فرض کنید از سیگنال $x_c(t)$ را نرخ T_1 نمونه برداری شده است. می‌خواهیم نرخ نمونه برداری را ۱/۵ برابر کنیم.

برای این منظور ابتدا باید ۳ واحد افزایش نرخ داد و سپس ۲ واحد کاهش نرخ داد $\frac{L}{M} = \frac{3}{2} = 1.5$





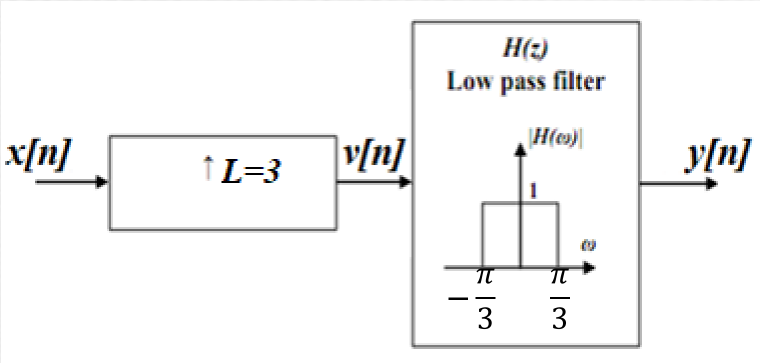


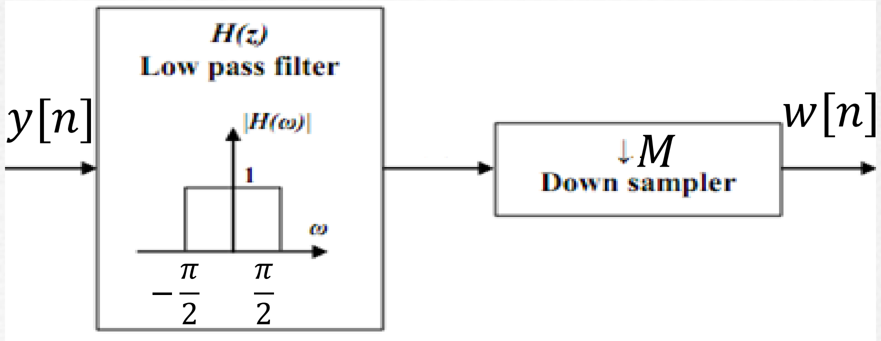


تغییر نرخ نمونه برداری

۴- ساختار زمانی

با اعمال فیلترهای پایین گذر به عملگرهای decimator و expander رابطه ورودی و خروجی این عملگرها به صورت زیر تغییر می کند





L-fold interpolation filter

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-kL]$$

L-fold decimation filter

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[Mn-k]$$

و در حالت تغییر نرخ کسری داریم:

$\frac{M}{L}$-fold decimation filter $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[Mn-kL]$$

عملگرهای اساسی چندنرخی

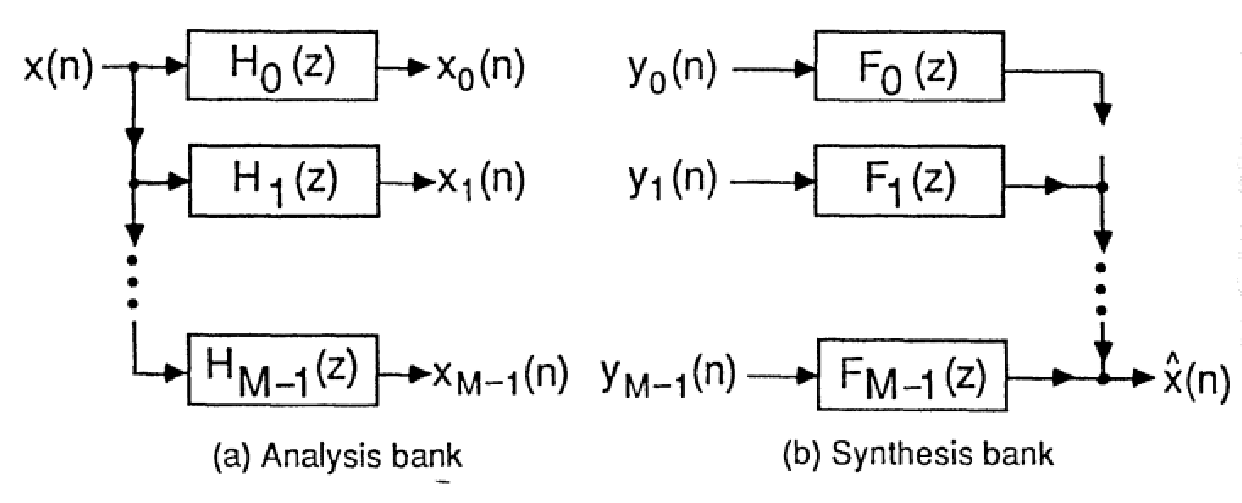
فیلتربانک‌های دیجیتال:

تعریف: مجموعه‌ای از فیلترهای دیجیتال با یک ورودی مشترک یا خروجی مشترک را فیلتر بانک گویند.

دو نوع فیلتر بانک داریم:

۱- فیلتر بانک آنالیز (ورودی مشترک): فیلترهای $H_k(z)$ را فیلتر آنالیز گویند که سیگنال را به M زیر سیگنال (subband signals) تقسیم می‌کنند

۲- فیلتر بانک سنتز (خروجی مشترک): فیلترهای $F_k(z)$ را فیلتر سنتز گویند که M سیگنال را ترکیب می‌کنند تا $\hat{x}[n]$ حاصل شود.

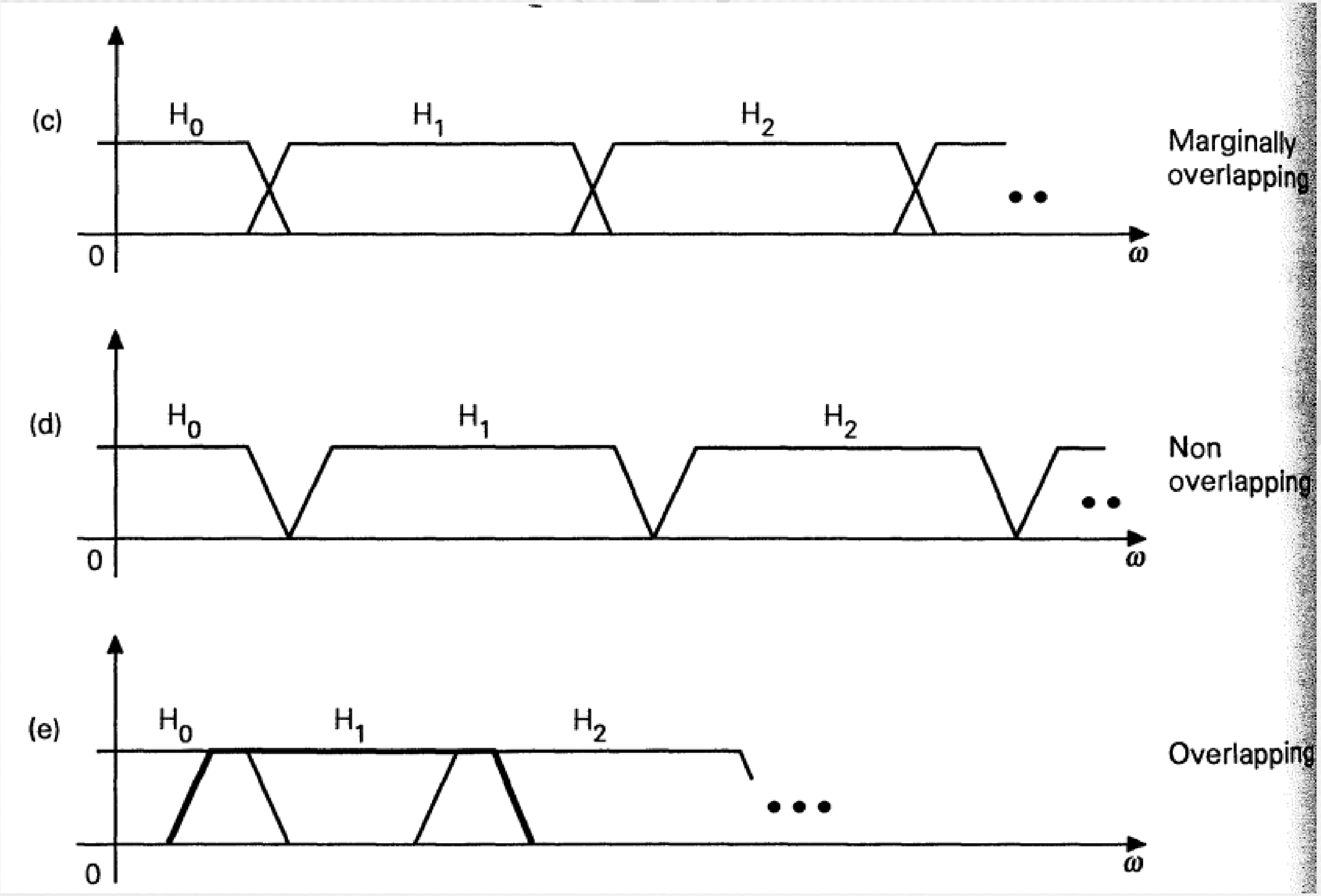


دانشگاه خلیج فارس بوشهر

- عملگرهای اساسی چند نرخی
- نمایش چندفازی
- پیاده سازی چند مرحله‌ای
- کاربردها
- فیلتربانک ها

عملگرهای اساسی چندنرخی

از نظر نمایش فرکانسی، فیلترهای آنالیز و سنتز می‌توانند کاملا از هم مجزا باشند یا با هم همپوشانی داشته باشند:



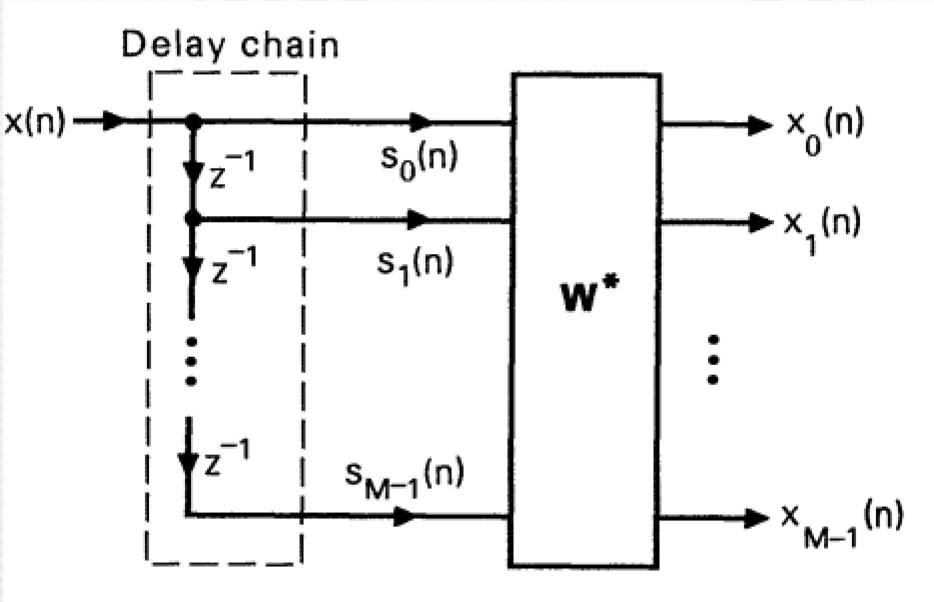
عملگرهای اساسی چندنرخی

مثال ۱-۴: فیلتر بانک DFT.

فرض کنید $W=e^{-\frac{j2\pi}{M}}$ باشد. مطابق با شکل زیر، ابتدا سیگنال $x[n]$ با المانهای تاخیر، به M سیگنال $s_i[n]$ تبدیل می شود و سپس د ماتریس $W_{km}=[W]^{km}$ ضرب می شود. یعنی:

$$x_k[n]=\sum_{i=0}^{M-1} s_i[n]W^{-ki}\,,\qquad 0\le k\le M-1$$

$$s_i[n]=x[n-i]$$



عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

فیلتربانک ها

عملگرهای اساسی چندنرخی

تحلیل فرکانسی:

با گرفتن تبدیل Z از رابطه بالا داریم:

$$X_k(z)=\sum_{i=0}^{M-1} S_i(z)W^{-ki}=\sum_{i=0}^{M-1} X(z)z^{-i}W^{-ki}=\sum_{i=0}^{M-1} X(z)(zW^k)^{-i}$$

برای سیستم‌های LTI، نسبت تبدیل Z خروجی به ورودی، برابر با تابع تبدیل سیستم است، $H_k(z)=\frac{X_k(z)}{X(z)}$ پس:

$$H_k(z)=\frac{X_k(z)}{X(z)}=\sum_{i=0}^{M-1}(zW^k)^{-i}=1+(zW^k)^{-1}+(zW^k)^{-2}+\cdots+(zW^k)^{-M+1}$$

برای $k=0$ داریم:

$$H_0(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-M+1}$$

با مقایسه $H_k(z)$ و $H_0(z)$ داریم:

$$H_k(z)=H_0(zW^k)$$

عملگرهای اساسی چند نرخی

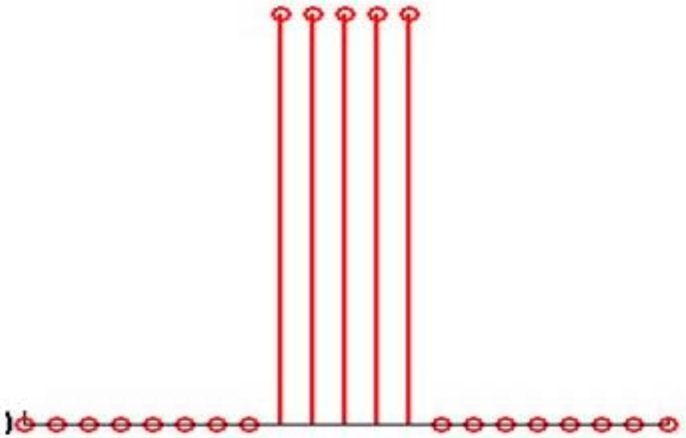
نمایش چندفازی

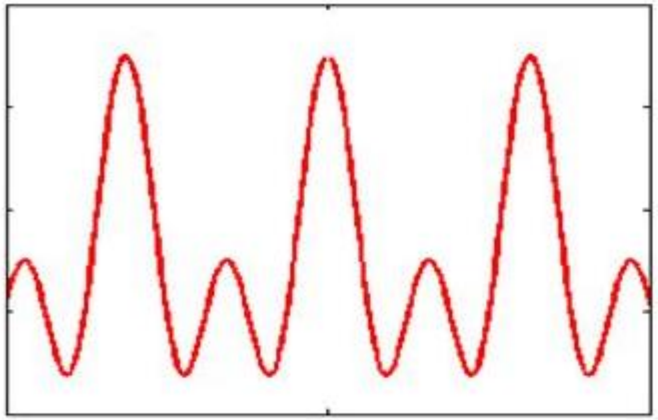
پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

فیلتربانک ها

عملگرهای اساسی چندنرخی





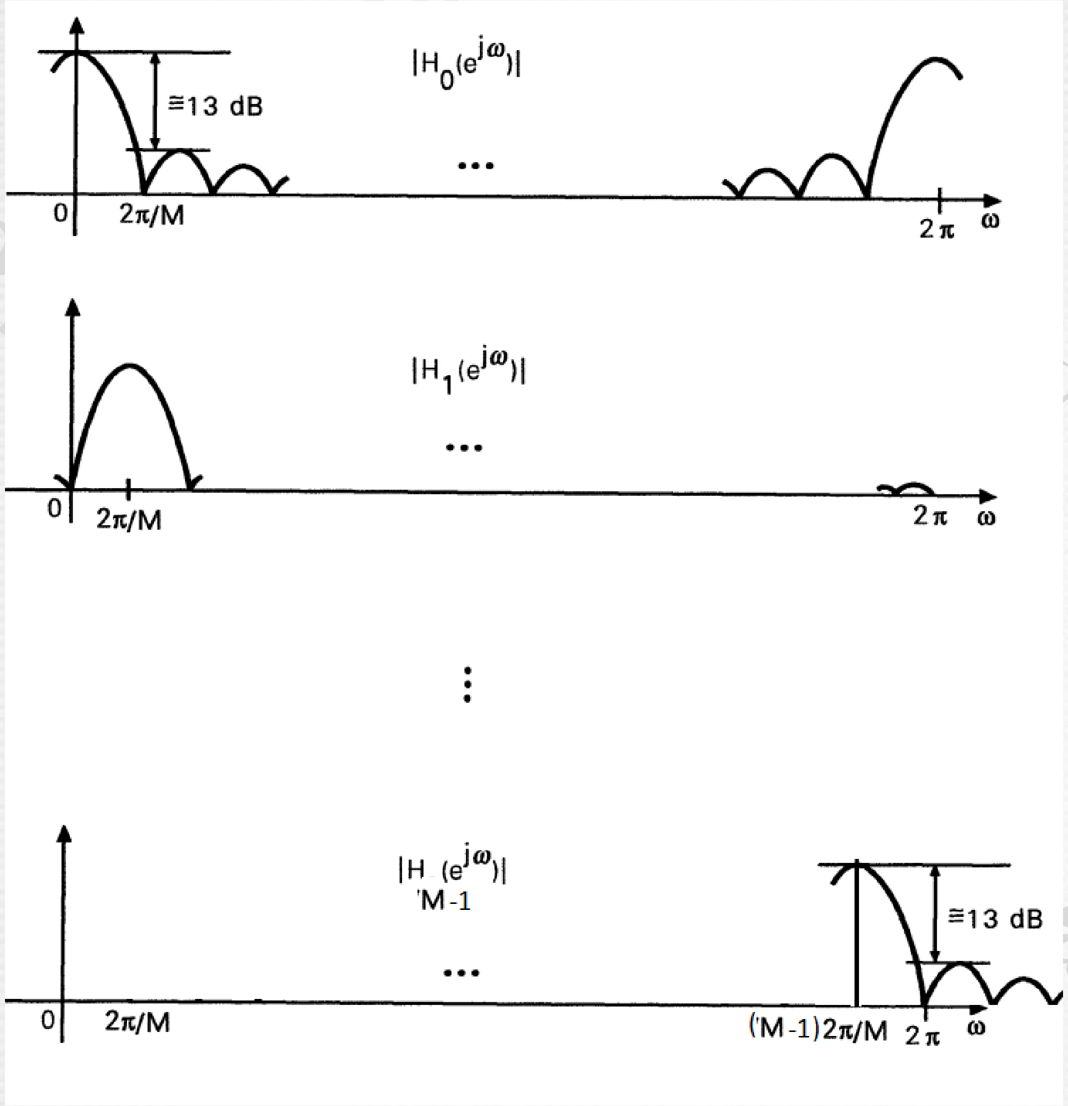
$$h_0[n] = Z^{-1}\big(H_0(z)\big) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_0(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{M\omega}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

پس با جایگذاری $z = e^{j\omega}$ در رابطه (۳) اسلاید قبل داریم:

$$H_k(e^{j\omega}) = H_0\left(e^{j\omega}e^{-\frac{j2\pi k}{M}}\right) = H_0\left(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi k}{M}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{M\left(\omega-\frac{2\pi k}{M}\right)}{2}\right)}{\sin\frac{\left(\omega-\frac{2\pi k}{M}\right)}{2}}$$

عملگرهای اساسی چندنرخی



عملگرهای اساسی چندنرخی

مفهوم زمانی خروجی فیلتربانک DFT:

فرض کنید در معادله $x_k(n)$ به جای n، $n+M-1$ قرار دهیم. داریم:

$$x_k[n+M-1] = \sum_{i=0}^{M-1} s_i[n+M-1]W^{-ki} = \sum_{i=0}^{M-1} x[n-i+M-1]W^{-ki}$$

با تغییر متغیر $l = M-1-i$ داریم:

$$x_k[n+M-1] = \sum_{l=0}^{M-1} x[n+l]W^{k(l-M+1)} = \sum_{l=0}^{M-1} x[n+l]W^{kl}W^{-kM}W^{k}$$

W^{-kM} برابر با یک است پس داریم:

$$x_k[n+M-1] = W^k \sum_{l=0}^{M-1} x[n+l]W^{kl}$$

یعنی $x_k[n+M-1]$ چیزی نیست جز W^k ضربدر نقطه k-ام تبدیل DFT دنباله M نقطه‌ای زیر:

$$x[n], x[n+1], x[n+2], \dots, x[n+M-1]$$

عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

فیلتربانک ها

عملگرهای اساسی چندنرخی

نتایج:

۱- دامنه $x_k[n+M-1]$ مطابق با دامنه k-امین نقطه DFT بخشی از دنباله $x[n]$ است.

۲- این موضوع نشان می‌دهد که فیلتربانک به صورت یک آنالیزور فرکانسی عمل می‌کند. یعنی خروجی هر فیلتر آنالیزی به صورت $x_k[n]$، معرف **طیف فرکانسی** بدست آمده از یک **بخش M تایی** سیگنال اولیه است.

۳- در واقع هر فیلتر $H_k(e^{j\omega})$ بخشی از طیف فرکانسی حول $\omega=\frac{2\pi k}{M}$ را استخراج می‌کند.

۴- با افزایش تعداد فیلترها یعنی M، رزولوشن تفکیک فرکانسی بهبود می‌یابد.

۵- به فیلتربانک‌هایی که می‌توان k -امین فیلتر را از روی فیلتر $H_0(z)$ یافت، فیلترهای Uniform گویند. پس DFT یک فیلتربانک Uniform است.

عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

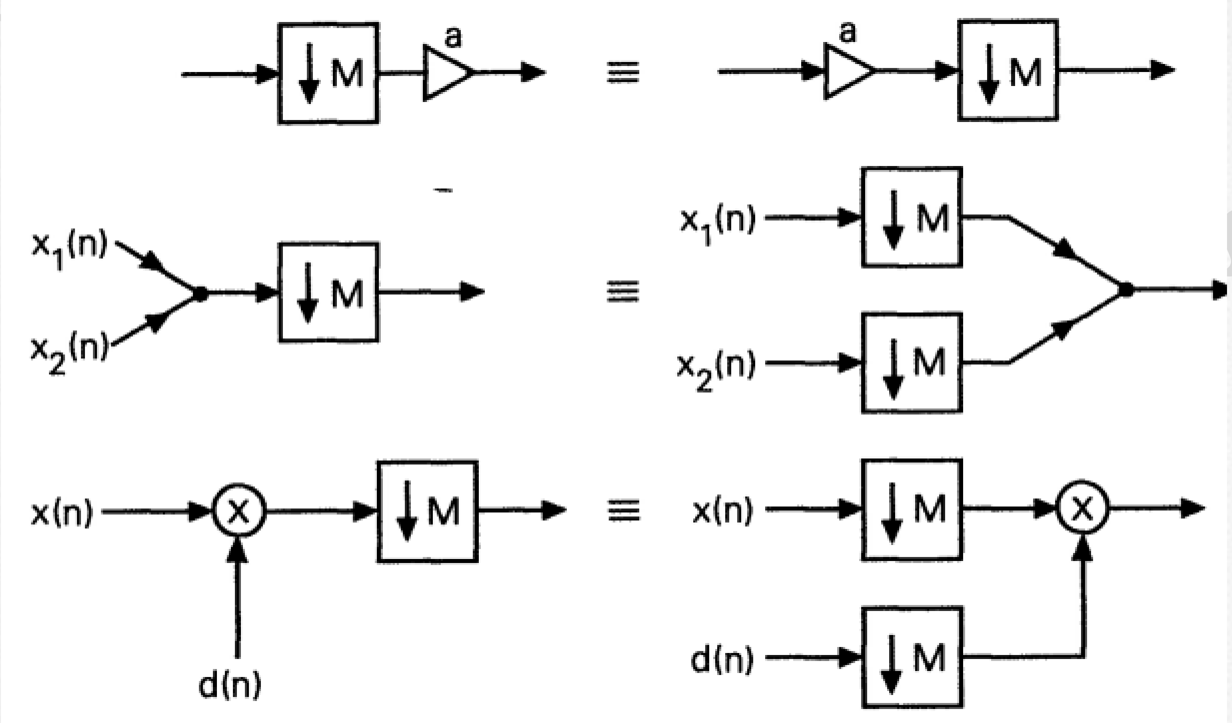
کاربردها

فیلتربانک ها

عملگرهای اساسی چندنرخی

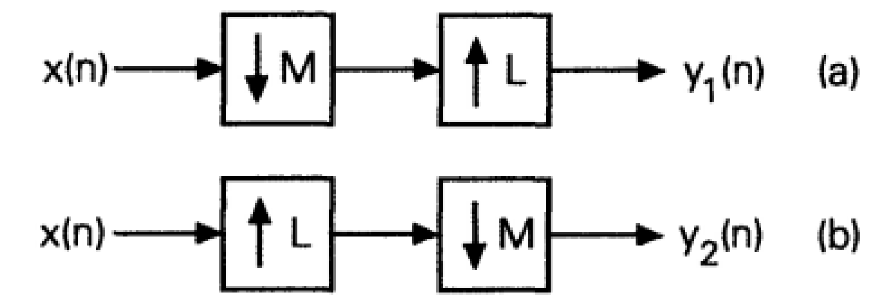
ارتباط درونی اجرای سازنده

شکل زیر ساختار سیستم های چندنرخی و سیستم های معادل هر کدام را نشان می‌دهد. اگر عناصر decimator با expander عوض شود تمام ساختارهای معادل زیر معتبر هستند.



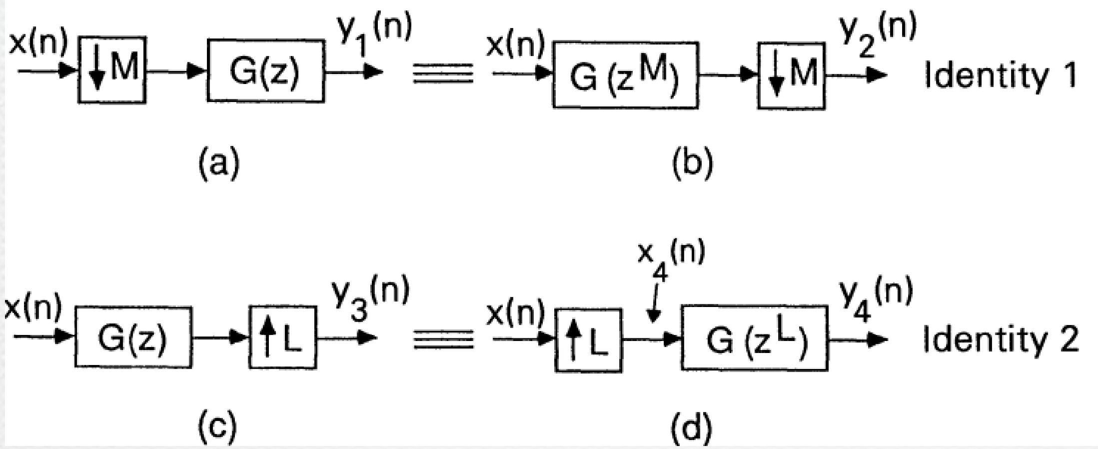
عملگرهای اساسی چندنرخی

حال فرض کنید یک decimator و یک expander به صورت زیر با هم سری شده‌اند. این دو ساختار در حالت کلی با هم معادل نیستند



نکته مهم: دو ساختار بالا با هم معادل هستند اگر و تنها اگر M و L نسبت به هم اول باشند یعنی $\gcd(M,L) = 1$

از طرفی می‌دانیم که عملگرهای چندنرخی همراه با یک فیلتر پایین‌گذر استفاده می‌شوند. اگر $G(z)$ یک چند جمله ای بر حسب z^{-1} باشد و توانهای z^{-1} **کسری باشند**، ساختار معادل در حضور سیستم‌های LTI به صورت زیر است:



دانشگاه خلیج فارس بوشهر

عملگرهای اساسی چندنرخی

اثبات:

از ساختار (a) می‌توان گفت:

$$Y_1(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{M}}\right)\right) G(e^{j\omega})$$

از ساختار (b) می‌توان گفت:

$$W_1(z) = G(z^M)X(z) \rightarrow$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} W_1\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{M}}\right) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{M}}\right) G(e^{j\omega})$$

واضحا دو ساختار با هم برابر هستند.

تمرین: مشابها ثابت کنید دو ساختار (c) و (d) با هم برابر هستند.

نمایش چند فازی

یک فیلتر گسسته در زمان $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$ در نظر بگیرید. فرض کنید در ضرایب زوج و فرد را از هم جدا کنیم یعنی:

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[2n]z^{-2n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[2n+1]z^{-(2n+1)}$$

دو تابع $E_0(z)$ و $E_1(z)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E_0(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[2n]z^{-n},\qquad E_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[2n+1]z^{-n}$$

می‌توان از روابط بالا گفت:

$$H(z)=E_0(z^2)+z^{-1}E_1(z^2)$$

نکته: این ساختار برای هر فیلتر IIR یا FIR ، سببی یا غیر سببی معتبر است.

نمایش چند فازی

تعمیم مساله:

فرض کنید ضرایب فیلتر $H(z)$ را به M بخش تقسیم میکنیم که فاصله بین نمونه‌های هر بخش M است یعنی:

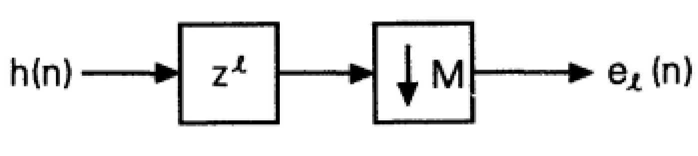
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[Mn]z^{-Mn} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[Mn+1]z^{-(Mn+1)} + \cdots + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[M(n-1)-1]z^{-(M(n-1)-1)}$$

یا معادلا داریم:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[Mn]z^{-Mn} + z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[Mn+1]z^{-Mn} + \cdots + z^{-(M-1)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[M(n-1)-1]z^{-Mn}$$

$E_l(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_l(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[Mn+l]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_l(n)\, z^{-n}\ , \qquad e_l(n) = h(Mn+l) \quad 0 \le l \le M-1$$



نمایش چند فازی

$$H(z) = E_0(z^M) + z^{-1}E_1(z^M) + z^{-2}E_2(z^M) + \cdots z^{-(M-1)}E_{M-1}(z^M)$$

$$\rightarrow H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l}E_l(z^M) \qquad (۱)$$

به نمایش رابطه (۱)، **نمایش چندفازی نوع I** می‌گویند.

نمایش چند فاری نوع II:

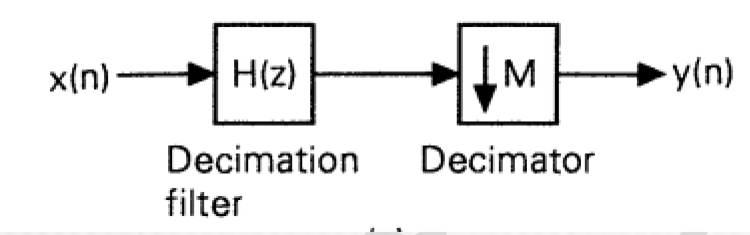
با تغییر متغیر $l \rightarrow M-1-l$ در رابطه (۱) داریم:

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)}E_{l-M-1}(z^M) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)}\, R_l(z^M) \qquad (۲)$$

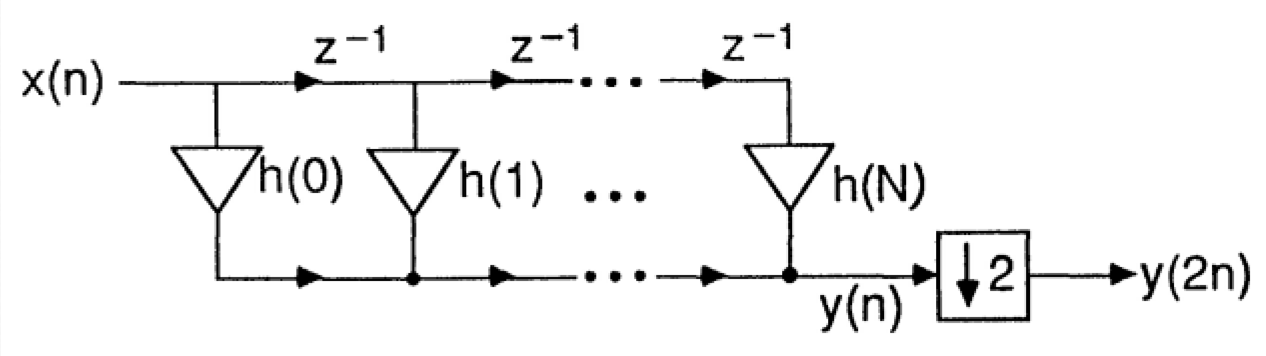
که $R_l(z^M) = E_{l-M-1}(z^M)$ است. به نمایش رابطه (۱)، **نمایش چندفازی نوع II** می‌گویند.

نمایش چند فازی

نشان می‌دهیم که ساختار چندفازی از نظر حجم محاسبات به مراتب بهتر است. ساختار decimator را در نظر بگیرید:



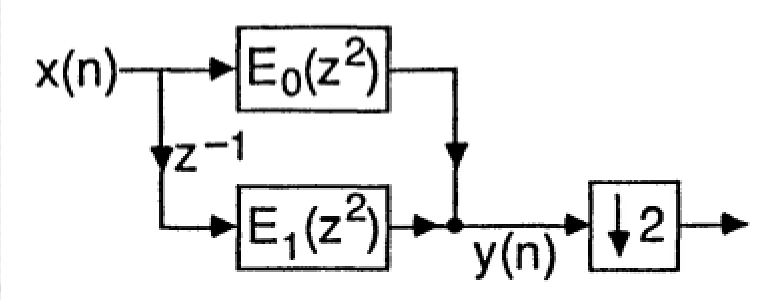
اگر $H(z)$ یک فیلتر FIR فرض شود، در این صورت پیاده سازی این فیلتر به روش مرسوم به صورت زیر است:



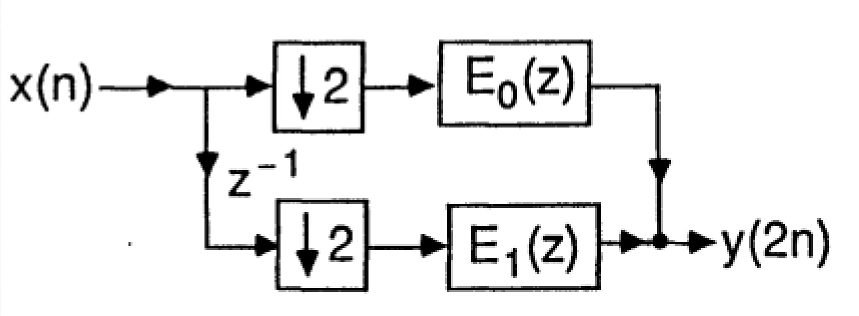
- ❖ تعداد ضرب‌ها برابر با $N+1$ و تعداد جمع‌ها برابر با N است.
- ❖ در حالتی که زمان از $2n$ (زوج) به n (فرد) تغییر می‌کند، خروجی تاخیرها تغییر می‌کند اما decimator این خروجی را کنار می‌گذارد.
- ❖ نتیجه اینکه به تعداد $N+1$ ضرب و N جمع در هر واحد زمانی نیاز داریم.

نمایش چند فازی

$H(z)$ را به صورت نمایش چندفازی مدل می‌کنیم:



ساختار معادل سیستم بالا را مطابق با بحث ارتباط درونی اجزای سازه بدست می‌آوریم (از شکل (b) به شکل (a):



عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

فیلتربانک ها

نمایش چند فازی

- اگر n_0 و n_1 مرتبه $E_0(z)$ و $E_1(z)$ باشند آنگاه $N+1=n_0+n_1+2$.
- برای پیاده سازی $E_l(z)$ به n_l+1 ضرب و n_l جمع نیاز هست. پس هزینه برابر است با:

$$\text{multiplications: } (n_0+1)+(n_1+1)=n_0+n_1+2=N+1$$

$$\text{additions: } n_0+n_1+1=N$$

- چون فیلترها در نرخ پایین عمل می کنند (بعد از کاهش نرخ سیگنال با نرخ ۲ استفاده می شوند) پس تعداد ضرب ها و جمع ها در واحد زمان نصف می شود یعنی تنها به $(N+1)/2$ ضرب و $N/2$ جمع در واحد زمان نیاز است.

عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

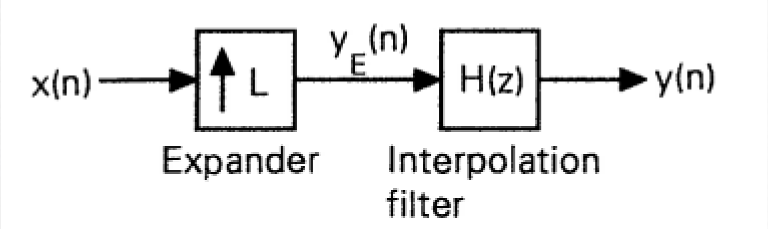
کاربردها

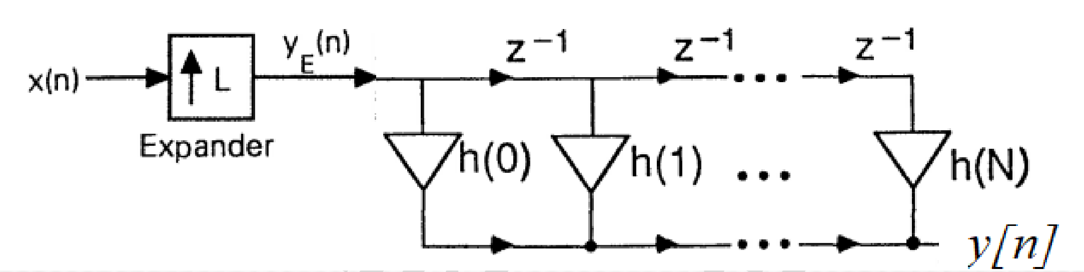
فیلتربانک ها

نمایش چند فازی

نمایش چند فازی فیلترهای interpolation:

ساختار interpolation را در نظر بگیرید که $L = 2$ است:





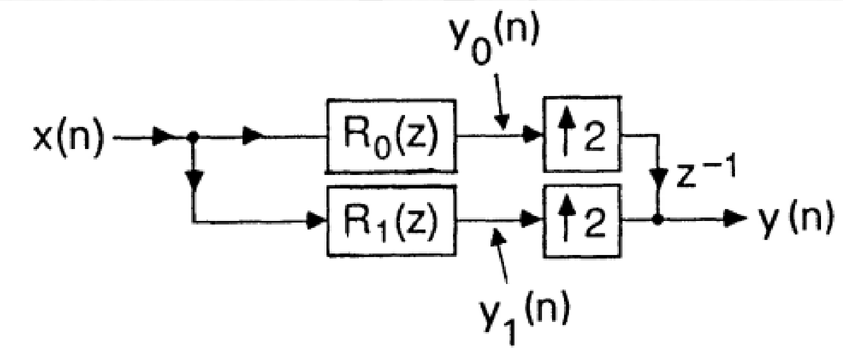
❖ در ساختار بالا نمونه‌های $y_E(n)$ یکی در میان صفر هستند. پس تنها ۵۰٪ نمونه‌های ورودی به فیلتر غیر صفر هستند. بنابراین استفاده از ساختار پیاده سازی مستقیم بهینه نیست.

$H(z)$ را بر اساس ساختار چندفازی نوع ۲ تفکیک می‌کنیم:

$$H(z) = R_1(z^2) + z^{-1}R_0(z^2)$$

نمایش چند فازی

در ادامه اگر از ارتباط درونی اجرای سازنده استفاده کنیم به ساختار زیر می رسیم:



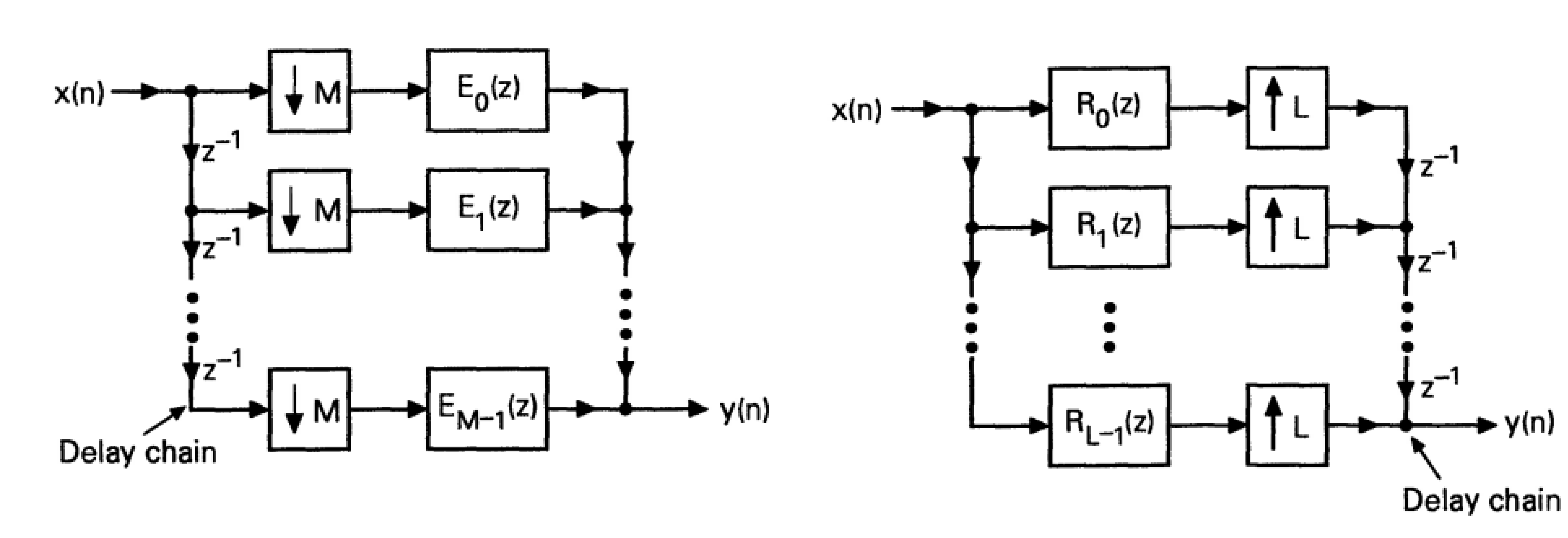
در این حالت فیلتر با همان نرخ سیگنال ورودی اعمال می شود و بنابراین محاسبات اضافی وجود ندارد و نسبت به ساختار قبلی حجم محاسبات کاهش یافته است.

نکته جالب دیگر اینکه نمونه‌های خروجی $y(n)$ (درون یابی شده) به صورت زیر تولید می شوند:

$$y(n) = [y_0(0) \quad y_1(0) \quad y_0(1) \quad y_1(1) \quad y_0(2) \quad y_1(2) \quad y_0(3)]$$

نمایش چند فازی

تعمیم به حالت M فازی:



- تعداد ضربهای مورد نیاز برای پیاده سازی ساختار بالا برابر با $(N+1)/M$ است.
- تعداد جمع ها مورد نیاز برای پیاده سازی ساختار بالا برابر با $(N)/M$ است.
- در ساختار بالا هیچگاه سیستم در حالت resting قرار ندارد.

نمایش چند فازی

ساختار چندفازی برای فیلترهای FIR با فاز خطی:

می‌خواهیم نشان دهیم که اگر فیلتر FIR با فاز خطی باشد باز هم می‌توان محاسبات را کمتر کرد. فرض کنید فیلتر از نوع اول یا دوم باشد یعنی $h[n] = h[N-n]$.

الف) N زوج باشد (نوع اول): با فرض $N = 4$ و $h[n] = [1\ 2\ 4\ 2\ 1]$ داریم:

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$$

$E_0(z)$ و $E_1(z)$ برابرند با:

$$E_0(z) = 1 + 4z^{-1} + z^{-2}\ , \qquad E_1(z) = 2 + 2z^{-1}$$

یعنی $e_0(z)$ و $e_1(z)$ تقارن دارند.

نمایش چند فازی

الف) N فرد باشد (نوع دوم): با فرض $N=5$ و $h[n]=[1\ 2\ 4\ 4\ 2\ 1]$ داریم:

$$H(z)=1+2z^{-1}+4z^{-2}+4z^{-3}+2z^{-4}+z^{-5}$$

$E_0(z)$ و $E_1(z)$ برابرند با:

$$E_0(z)=1+4z^{-1}+2z^{-2}\ ,\qquad E_1(z)=2+4z^{-1}+1z^{-2}$$

یعنی $e_0(z)$ و $e_1(z)$ نسبت به هم تقارن آینه‌ای دارند.

نتیجه ۱: در حالت زوج می‌توانیم محاسبات قسمت اول $e_0(z)$ و $e_1(z)$ را ذخیره کنیم و برای پیاده سازی قسمت دوم همان فیلتر استفاده کنیم.

نتیجه ۲: در حالت فرد می‌توانیم محاسبات $e_0(z)$ را ذخیره کنیم و برای پیاده سازی فیلتر $e_1(z)$ استفاده کنیم.

نتیجه ۳: با این روند تعداد جمع‌شوند تغییری نمی‌کند اما تعداد ضرب شونده ها نصف می شود یعنی $N/4$

عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

فیلتربانک ها

نمایش چند فازی

ساختار چندفازی برای فیلتربانک Uniform DFT:

دیدیم که فیلتر k –ام فیلتر بانک DFT با فرض فیلتر پایه $H_0(z)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$H_k(z) = H_0\left(zW^k\right)$$

که $W = e^{-j\frac{2\pi}{M}}$ است. اگر $H_0(z)$ را به فرم نمایش چندفازی نوع اول بنویسیم و در رابطه بالا قرار دهیم داریم:

$$H_0(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M) \rightarrow H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} \left(z^{-1}W^{-k}\right)^l E_l(z^M)$$

خروجی فیلتر k –ام فیلتر بانک DFT برابر است با:

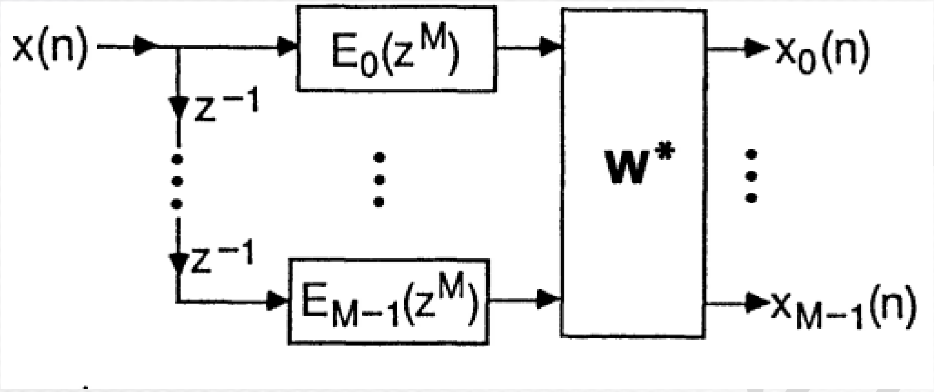
$$X_k(z) = H_k(z)X(z) = \sum_{l=0}^{M-1} \left(z^{-1}W^{-k}\right)^l E_l(z^M)\, X(z)$$

$$= \sum_{l=0}^{M-1} W^{-kl} \left(\boldsymbol{z^{-l} E_l\left(z^M\right) X(z)}\right)$$

نمایش چند فازی

ساختار چندفازی برای فیلتربانک DFT یکنواخت:

یعنی کافی است تا عبارت $z^{-1}E_l(z^M)X(z)$ در ماتریس W اعمال شود.



$$X_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} W^{-kl}\left(z^{-l}E_l(z^M)X(z)\right)$$

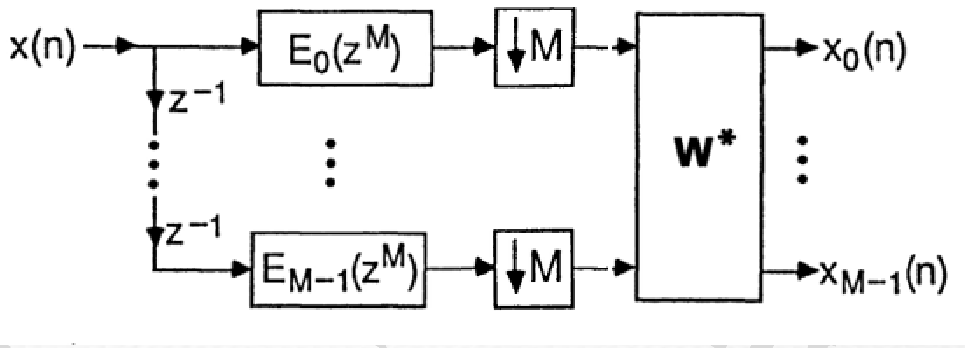
اگر $H_0(z)$ یک فیلتر FIR مرتبه N باشد آنگاه به $N+1$ ضرب و $N+M-1$ جمع برای پیاده سازی ساختار فیلتری بالا نیاز داریم. (بدون هزینه محاسبات ماتریس W^*)

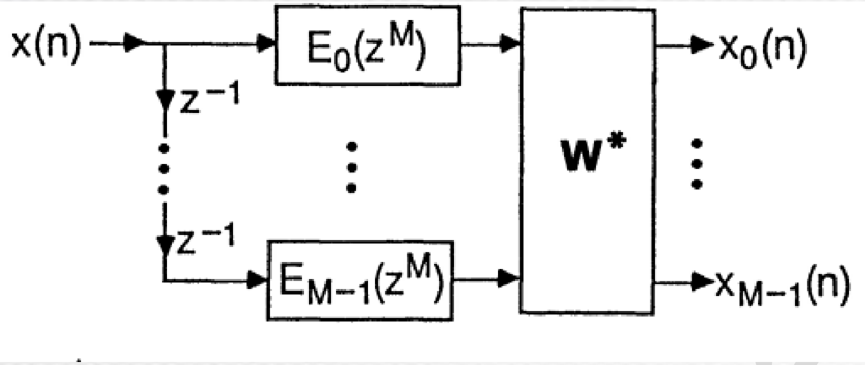
- ❖ در مثال ۴-۱ دیدیم که هر اگر طول فیلتر بزرگتر باشد، آنگاه فرکانس قطع تیزتر و تضعیف باند توقف بیشتر است.
- ❖ در ساختار مثال ۴-۱ نمی‌توان M را زیاد افزایش داد (بنا به حجم مجاسبات) اما در این ساختار می‌توان با فرض $E_l(z) = 1 \;\; \forall l$ به فیلترهای با فرکانس قطع تیز و تضعیف بالا در باند توقف رسید

نمایش چند فازی

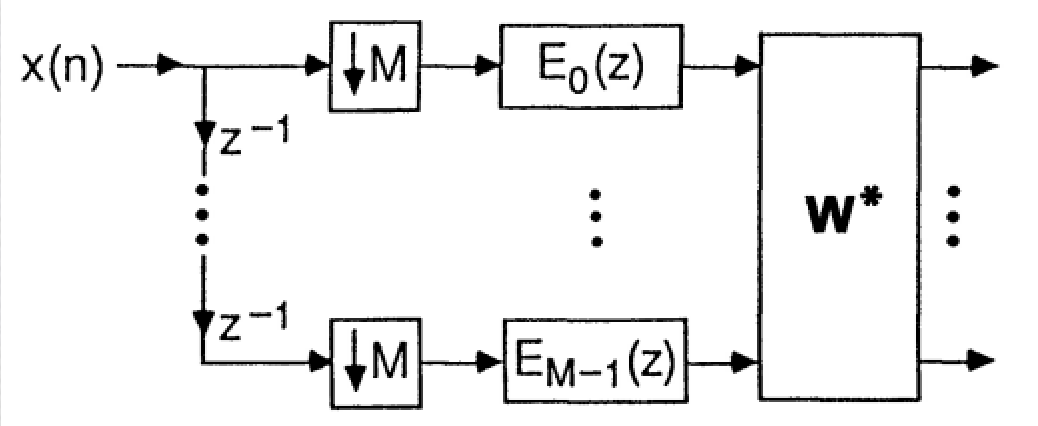
ساختار چندفازی برای فیلتربانک DFT یکنواخت:

خروجی هر یک از فیلترها $E_0(z)$ پهنای باندی در حدود $2\pi/M$ دارد که می‌توان با کاهش نرخ M به بازه $(-\pi,\pi)$ گسترده شوند





و با استفاده از جابه جایی فیلتر و decimator داریم:

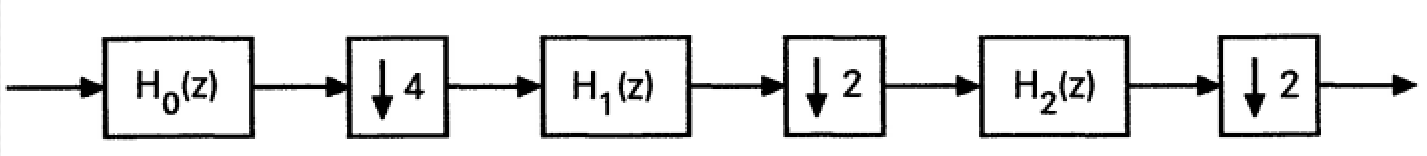


❖ در کتاب مطرح شده است که برای پیاده سازی ۳۲ فیلتر از مرتبه ۵۰ با ساختار روبرو تنها به ۶ ضرب شونده در واحد زمان نیاز است

پیاده سازی چند مرحله ای

کاربرد: بهبود حجم محاسبات در طراحی کاهش نرخ دهنده هایی با مقادیر بزرگ M.

مثلا کاهش نرخ با $M = 16$ را می‌توان به صورت زیر پیاده‌سازی کرد: $16 = 4 \times 2 \times 2$



سوال: بهترین تقسیم کردن M چگونه بدست می‌آید؟

پاسخی که به این سوال داده می شود به مرتبه فیلتر بستگی دارد. مرتبه یک فیلتر FIR به صورت زیر تعریف می شود:

$$N \approx \frac{D(\delta_1, \delta_2)}{\Delta f}$$

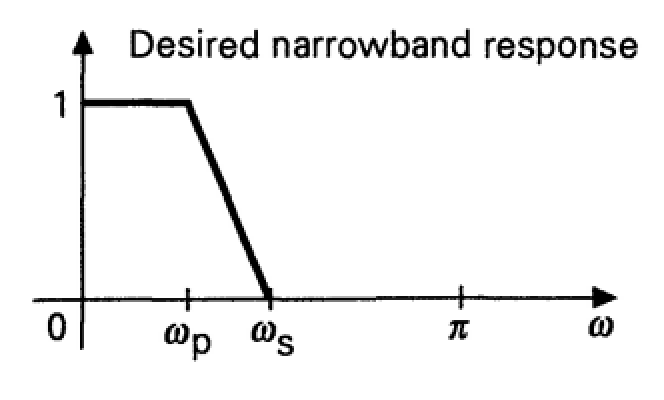
که $D(\delta_1,\delta_2)$ تابعی بر اساس میزان تضعیف باند عبور و باند توقف است.

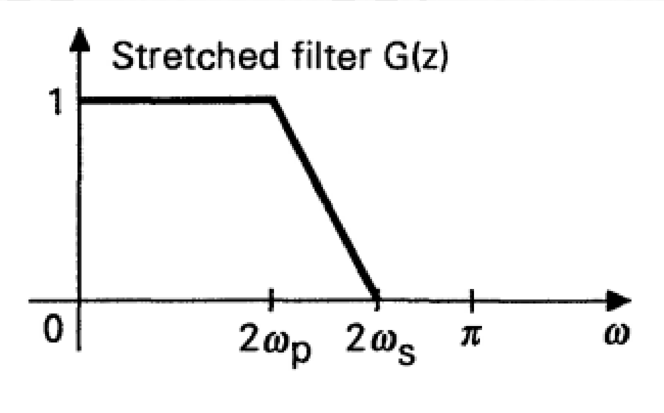
پیاده سازی چند مرحله ای

طراحی فیلتر IFIR (Interpolated FIR)

- ❖ این فیلترها به منظور طراحی فیلترهایی باند باریک استفاده می شوند.

فرض کنید یک فیلتر FIR باند باریک با مشخصه فرکانسی زیر مورد نیاز است. همچنین فرض کنید $G(z)$ فیلتر پایین گذر با پهنای باند دو برابر فیلتر اولیه است (باز شدن فرکانسی)

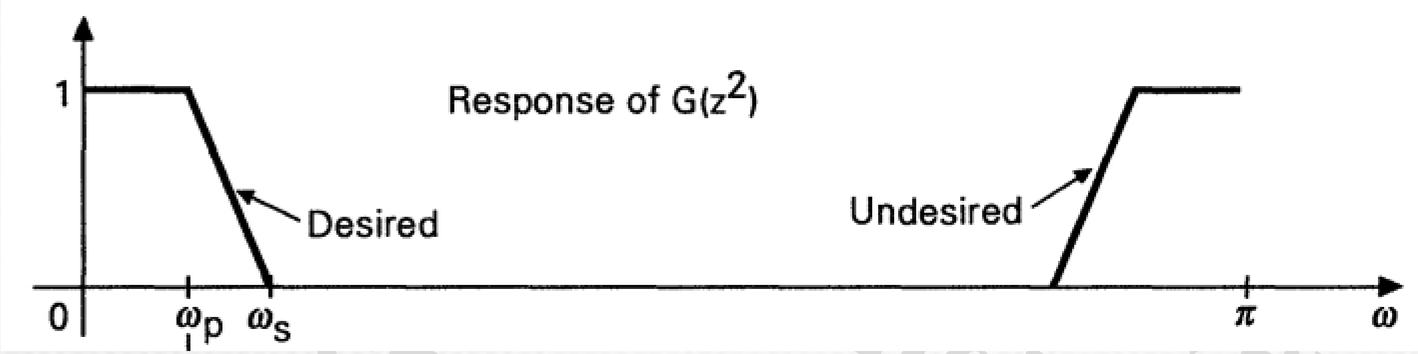




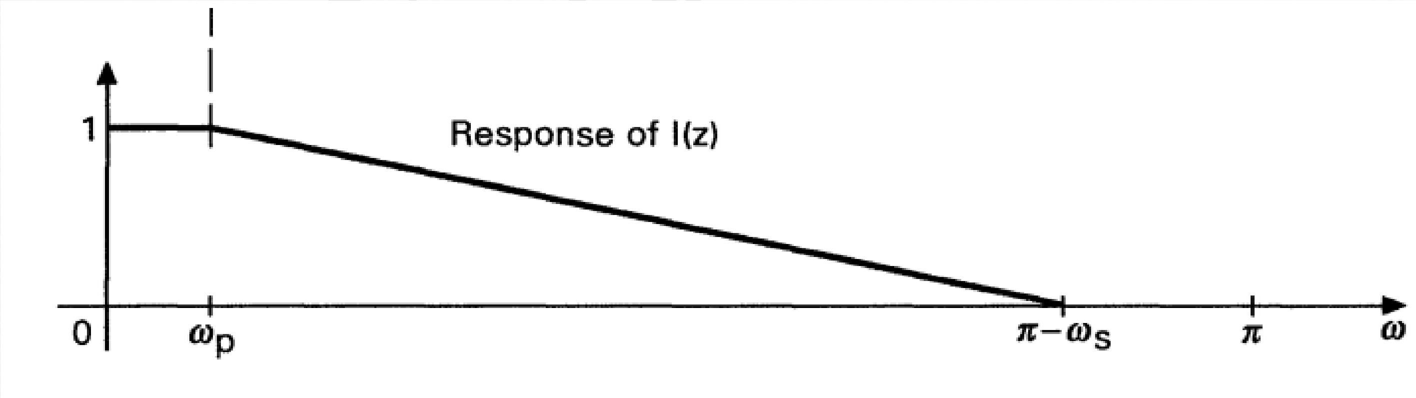
- ❖ اگر پهنای باند فیلتر مطلوب Δf باشد، پهنای باند فیلتر $G(z)$ برابر با $2\Delta f$ است.
- ❖ اگر مرتبه فیلتر مطلوب N باشد، مرتبه فیلتر $G(z)$ برابر با $N/2$ است. پس تعداد ضرب‌ها و جمع‌های به نسبت فیلتر اولیه نصف شده است.

پیاده سازی چند مرحله ای

اگر $G(z)$ از expander عبور کند طیف آن $G(z^2)$ می شود



این فیلتر دقیقا مشابه همان فیلتر اولیه است با این تفاوت که کپی موجود در 2π اکنون در π ظاهر شده است. برای حذف این کپی می‌توان از یک فیلتر پایین گذر با مرتبه بسیار کم استفاده کرد:



پیاده سازی چند مرحله ای

مثال ۴–۲: به روش IFIR یک فیلتر FIR با مشخصات زیر طراحی کنید.

$$\omega_p = 0.09\,\pi \;,\omega_s = 0.11\,\pi \;,\delta_1 = 0.02 \,,\delta_2 = 0.001$$

حل: مطابق با توضیحات در اسلایدهای قبل، $G(z)$ فیلتر پایین گذری است با مشخصات زیر:

$$\omega_p = 0.18\,\pi \;,\omega_s = 0.22\,\pi \;,\delta_1 = 0.01 \,,\delta_2 = 0.001$$

فرکانس‌های قطع دو برابر می شوند، δ_1 نصف می شود و δ_2 تغییری نمی‌کند.

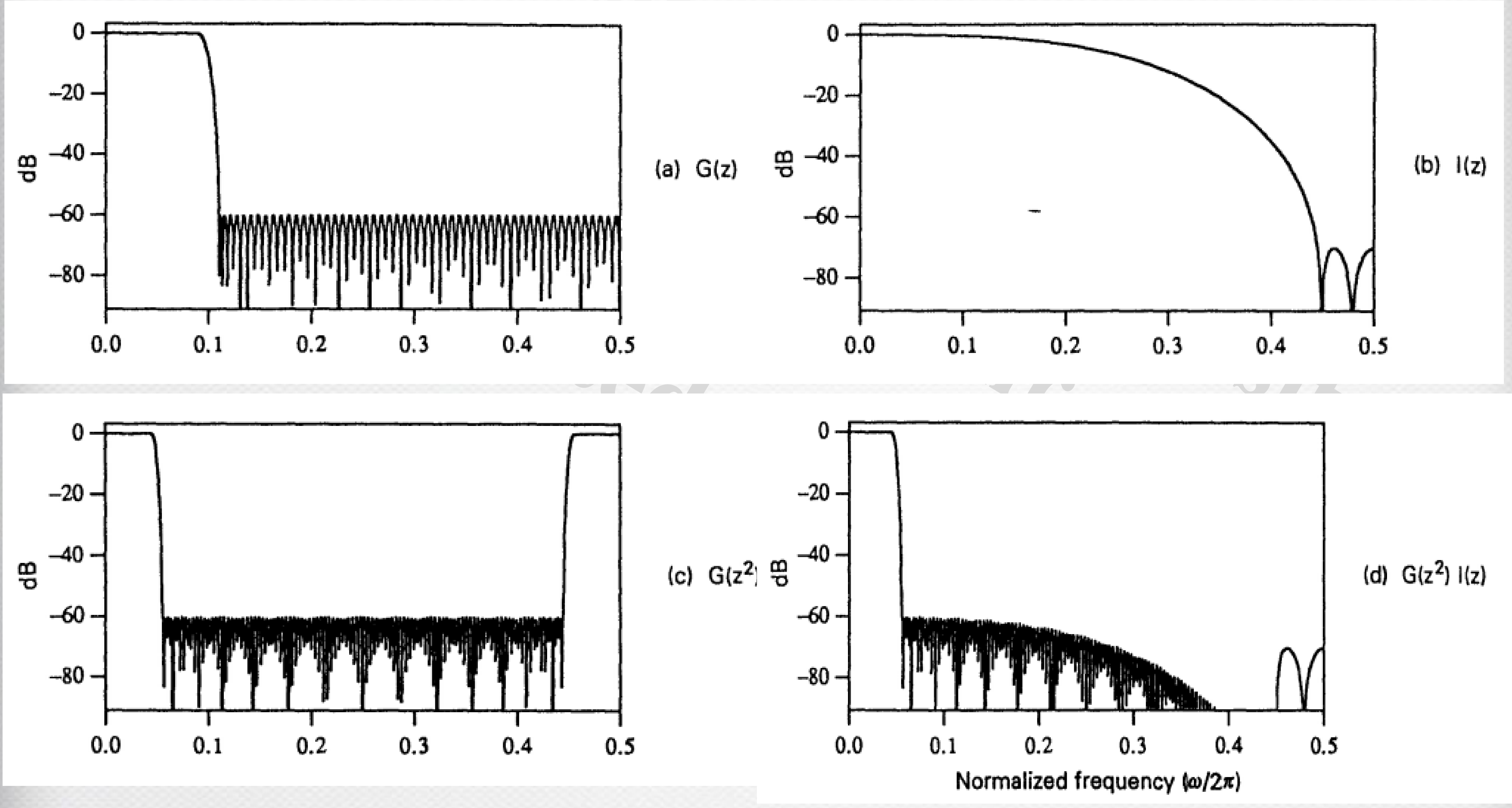
فیلتر $I(z)$ یک فیلتر بسیار نرم با درجه پایین است که مشخصات زیر را دارد:

$$\omega_p = 0.09\,\pi \;,\omega_s = 0.89\,\pi \;,\delta_1 = 0.01 \,,\delta_2 = 0.001$$

پیاده سازی دو فیلتر $G(z)$ و $I(z)$ نشان می‌دهد که مرتبه این دو فیلتر به ترتیب $N_g = 131$ و $N_i = 6$ است در حالیکه پیاده‌سازی فیلتر FIR اولیه، از مرتبه $N = 233$ است.

دانشگاه خلیج فارس بوشهر

پیاده سازی چند مرحله ای



پیاده سازی چند مرحله ای

مقایسه پیچیدگی محاسباتی پیاده سازی مستقیم و پیاده سازی به روش IFIR

Quantity Compared	Conventional Method	IFIR Method		
		$G(z)$	$I(z)$	Total
Filter order	233	131	6	268
Number of Mul.	117	66	4	70
Number of Add.	233	131	6	137

❖ مثال بالا برای بسط دادن $M = 2$ بود. در حالت کلی می‌توان از $G(z^{M_1})$ به جای $G(z^2)$ استفاده کرد.

❖ در این صورت M_1 کپی وجود دارد که باید $M_1 - 1$ تای آنها توسط $I(z)$ حذف شود.

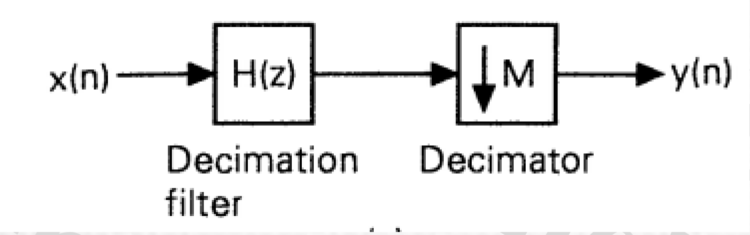
❖ پس $I(z)$ یک فیلتر باندباریک میشود و مسلما درجه و پیچیدگی این فیلتر زیاد می شود.

نتیجه: هر چه M_1 بیشتر شود، پیچیدگی محاسباتی $G(z)$ کمتر و پیچیدگی محاسباتی $I(z)$ افزایش می‌یابد.

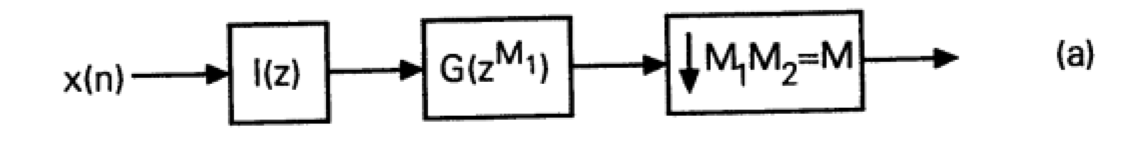
پیاده سازی چند مرحله ای

پیاده سازی چند مرحله‌ای فیلترهای decimation و interpolation:

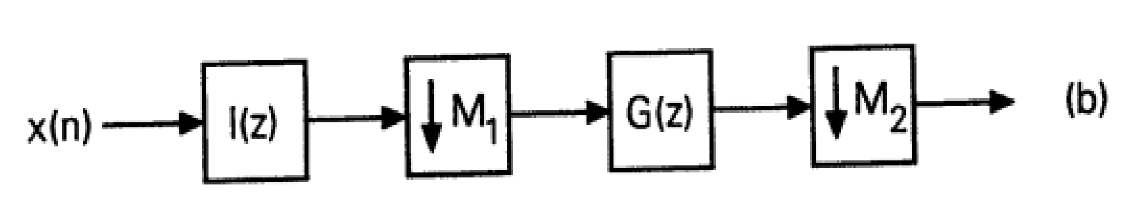
می‌خواهیم یک کاهش نرخ با M بزرگ انجام دهیم. می‌دانیم که برای جلوگیری از تداخل فرکانسی باید از فیلتر پایین گذری با پهنای باند π/M استفاده کنیم. چون M بزرگ است پس فیلتر خیلی باندباریک می‌شود.



می‌توان فیلتر باند باریک $H(z)$ را به روش $IFIR$ پیاده سازی کرد که پارامتر کشیدگی را $M_1 < M$ فرض می‌کنیم و M بر M_1 بخش پذیر است. یعنی $M = M_1 M_2$.



با استفاده از ویژگی جا به جایی فیلتر و عملگر decimator می‌توان گفت:



عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

فیلتربانک ها

پیاده سازی چند مرحله ای

مثال ۴-۳: فرض کنید می‌خواهیم یک سیگنال را با $M = 50$ کاهش نرخ دهیم فیلتر FIR مورد نیاز برای عدم تداخل فرکانسی با مشخصات زیر نیاز است. ساختار را با روش چندمرحله ای پیاده سازی کنید

$$\omega_p = \frac{7}{8}\frac{\pi}{50}\ \omega_s = \frac{\pi}{50}\ , \delta_1 = 0.01\ , \delta_2 = 0.001$$

حل: با فرض $M_1 = 25$,$M_2 = 2$ و مطابق با توضیحات قبلی، $G(z)$ فیلتر پایین گذری است با مشخصات زیر:

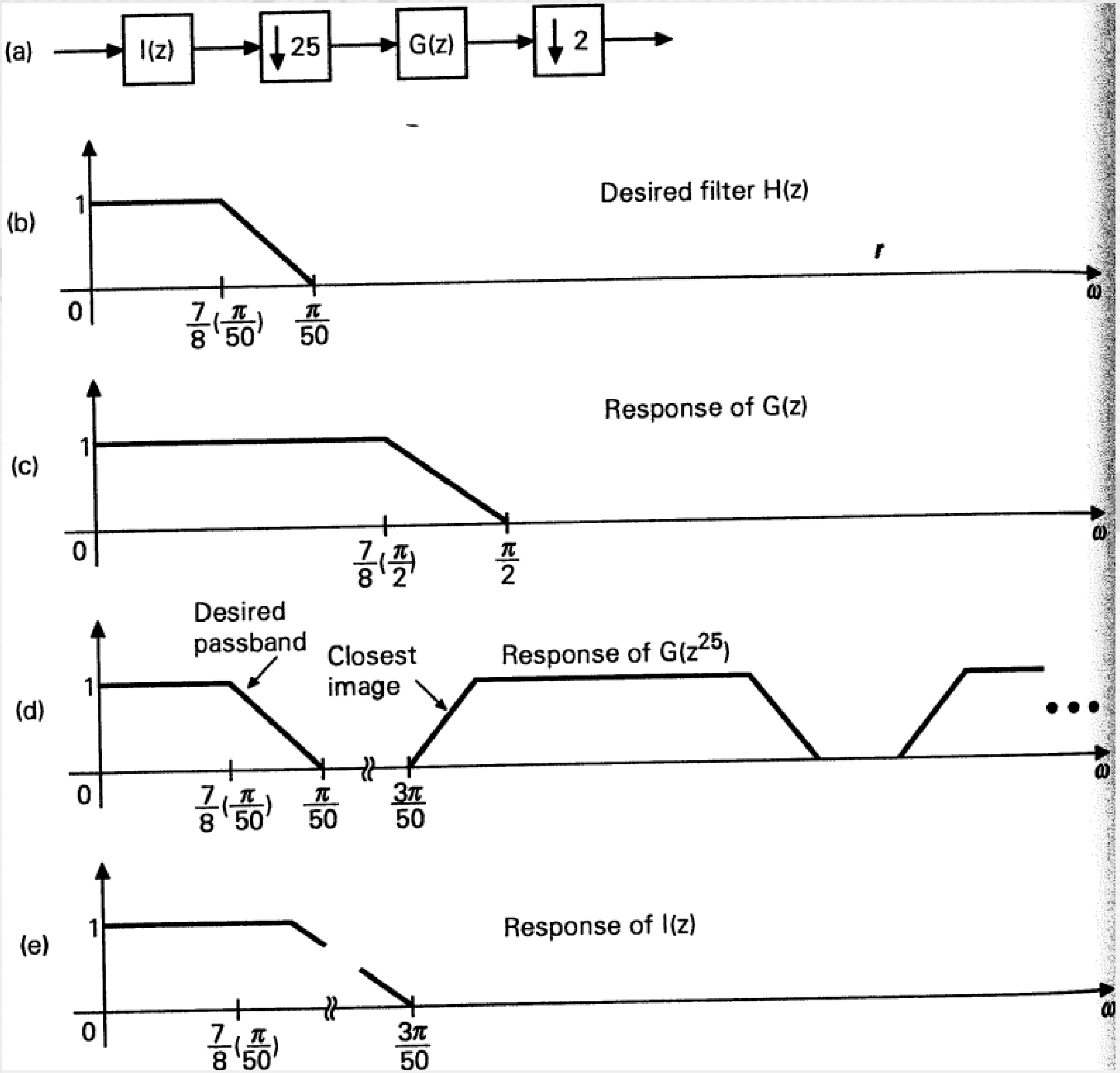
$$\omega_p = \frac{7}{8}\frac{\pi}{2}\ , \omega_s = \frac{\pi}{2}\ , \delta_1 = 0.005\ , \delta_2 = 0.001$$

فیلتر $I(z)$ یک فیلتر است که مشخصات زیر را دارد:

$$\omega_p = \frac{7}{8}\frac{\pi}{50}, \omega_s = \frac{3\pi}{50}\ , \delta_1 = 0.005\ , \delta_2 = 0.001$$

پیاده سازی دو فیلتر $G(z)$ و $I(z)$ نشان می‌دهد که مرتبه این دو فیلتر به ترتیب $N_g = 90$ و $N_i = 139$ است در حالیکه پیاده‌سازی فیلتر FIR اولیه، از مرتبه $N = 2028$ است.

پیاده سازی چند مرحله ای



عملگرهای اساسی چند نرخی

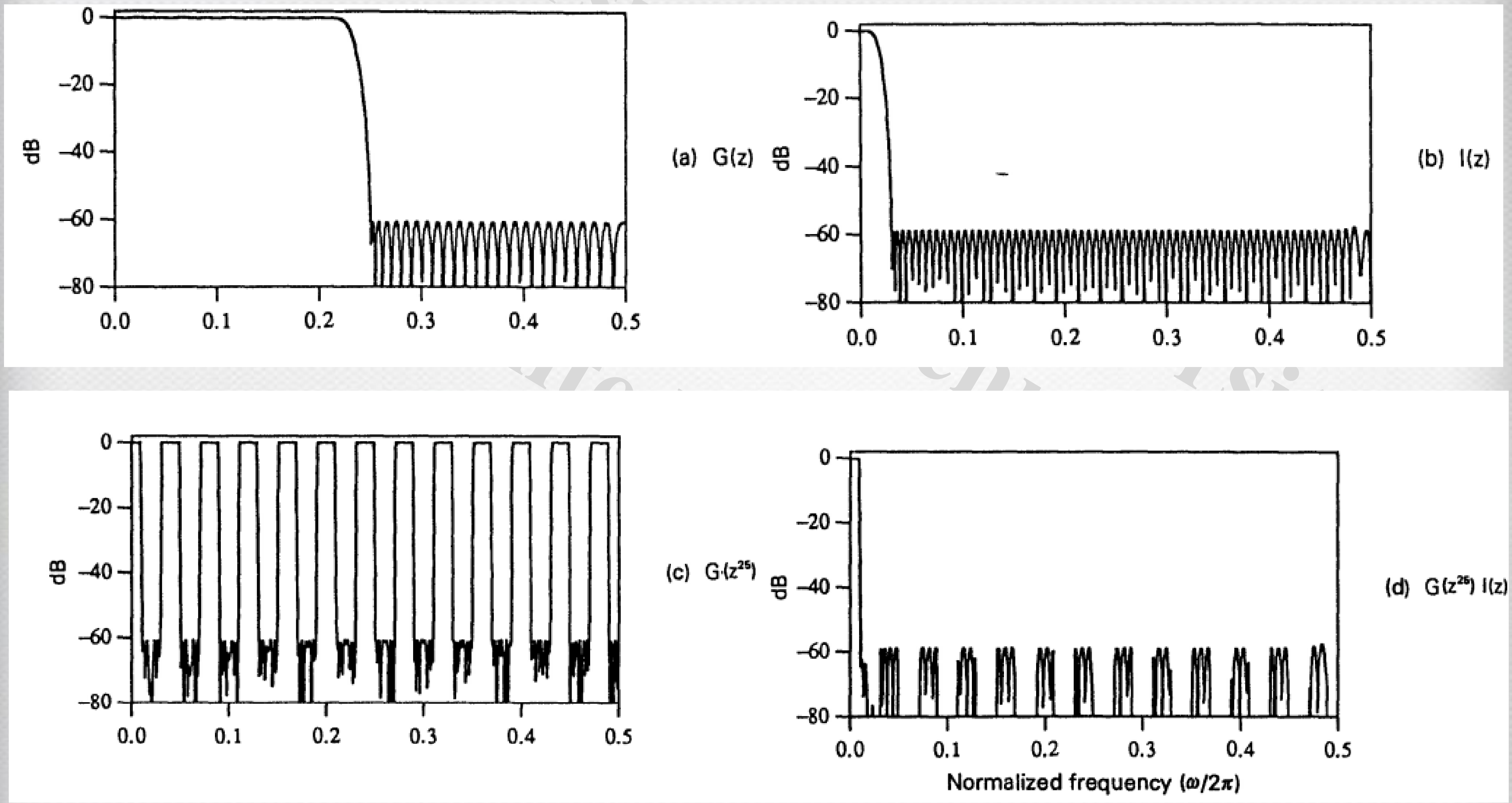
نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

فیلتربانک ها

پیاده سازی چند مرحله ای



پیاده سازی چند مرحله ای

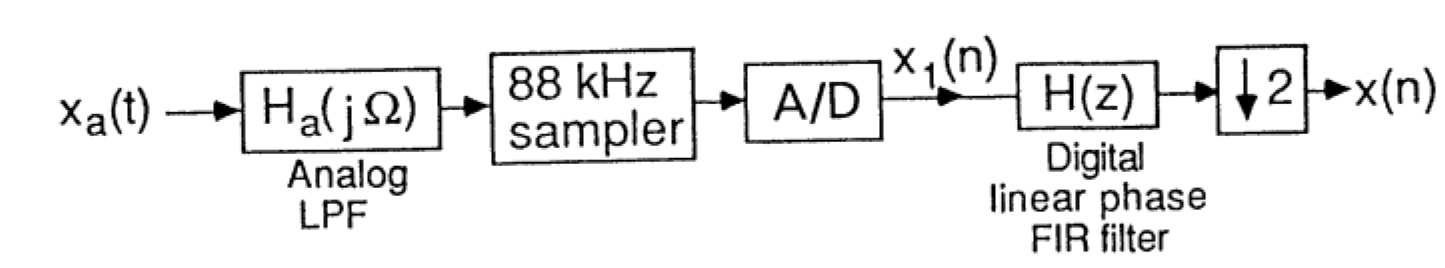
مقایسه پیچیدگی محاسباتی پیاده سازی مستقیم و پیاده سازی به روش IFIR

	Direct design $H(z)$	Multistage Design		
		$G(z)$	$I(z)$	Total
Filter order	2,028	90	139	2,389
MPUs	≈21	0.92	2.8	3.72
APUs	≈41	1.8	5.56	7.36
Mul per sec (8 kHz)	168,000			29,760
Add per sec (8 kHz)	328,000			58,880

کاربردهای نمایش چندنرخی

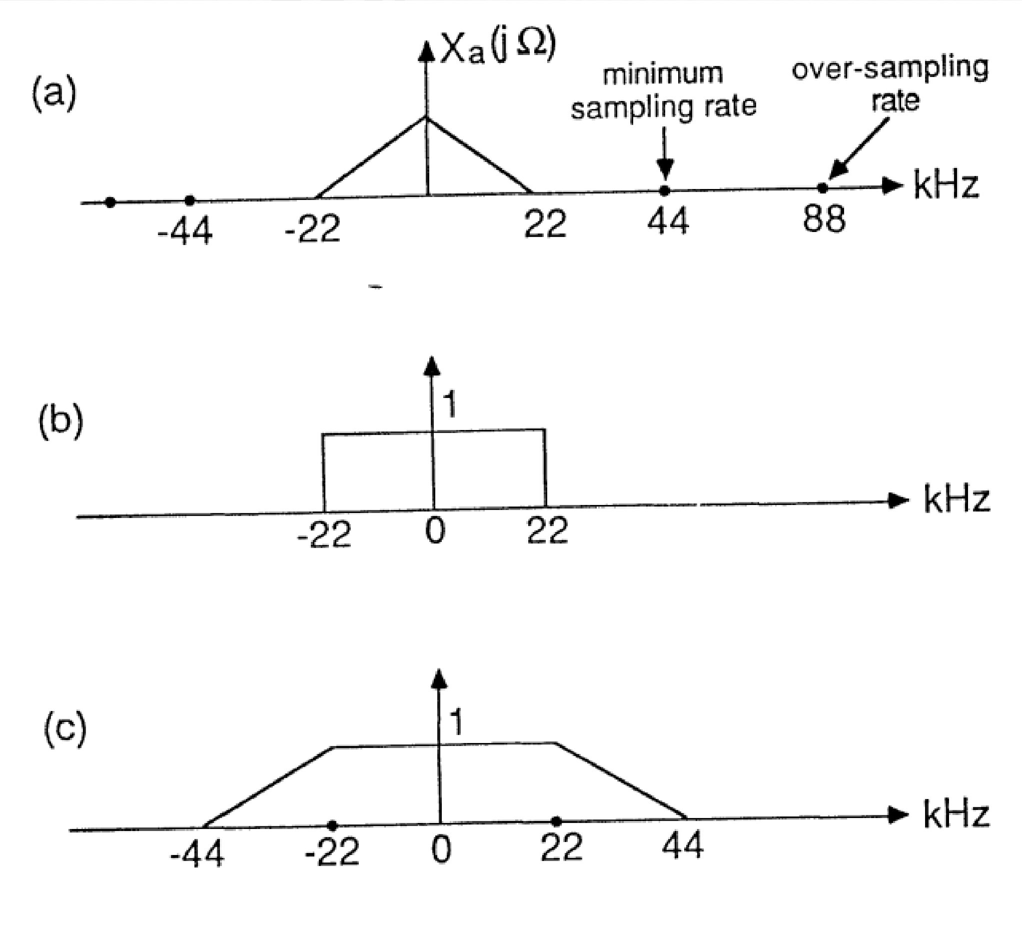
۱- سیستم‌های صوتی دیجیتال:

- صدای انسان در محدوده فرکانسی $|f| > 22KHz$ اطلاعات قابل توجهی ندارد. پس مطابق با قضیه نمونه‌برداری باید با سرعت ۴۴ Khz از آن نمونه برداری شود.
- در مثال (۳.۳.۲) نشان داده شده است که یک فیلتر آنالوگ با پهنای باند ۲۲ KHz (برای جلوگیری از تداخل فرکانسی) به شدت فاز غیرخطی دارد و علاوه بر این شیب فیلتر چندان مناسب نیست.
- برای حل این مشکل می‌توان نرخ نمونه برداری ۲ برابر یا ۴ برابر کرد (مثلا ۸۸ KHz) و سپس از ساختار decimator استفاده کرد.
- با این روش هم طراحی فیلتر آنالوگ در فرکانس ۴۴ KHz راحت تر است و هم در طراحی دیجیتال می‌توان از فیلتر با فاز خطی و شیب فرکانس قطع مناسب استفاده کرد.



عملگرهای اساسی چند نرخی
نمایش چندفازی
پیاده سازی چند مرحله‌ای
کاربردها
فیلتربانک ها

کاربردهای نمایش چندنرخی



- در تبدیل D/A سیگنال خروجی نیز همین مشکل دیده می‌شود. یعنی به یک فیلتر آنالوگ با شیب تند نیاز است.
- در اینجا نیز می‌توان از یک عملگرد expander و یگ فیلتر دیجیتال با فاز خطی (قبل از مبدل D/A استفاده کرد.

کاربردهای نمایش چندنرخی

۲- تغییر نرخ نمونه برداری:

❖ در بسیاری از کاربردها فرکانس نمونه‌برداری متفاوت است. مثلا بیشتر studio ها با فرکانس نمونه برداری KHz ۴۸ کار می‌کنند در حالیکه در CD matering از فرکانس KHz ۴۴.۱ و در پخش ماهواره‌ای از فرکانس KHz ۳۲ استفاده می شود.

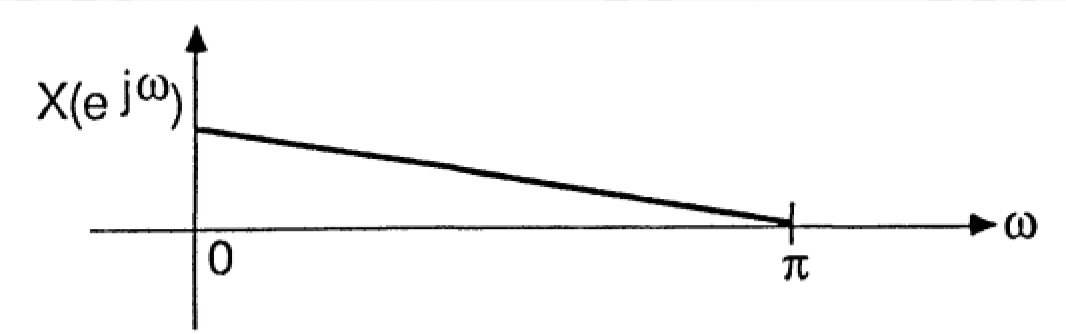
❖ بنابراین باید از افزایش نرخ به میزان $L = 441$ و کاهش نرخ به میزان $M = 480$ استفاده کرد.

❖ افزایش نرخ ۴۴۱ و کاهش نرخ ۴۸۰ به فیلترهایی با شیب بسیار تیز نیاز دارند که برای پیاده سازی این فیلترها می‌توان از روش طراحی چندمرحله‌ای استفاده کرد.

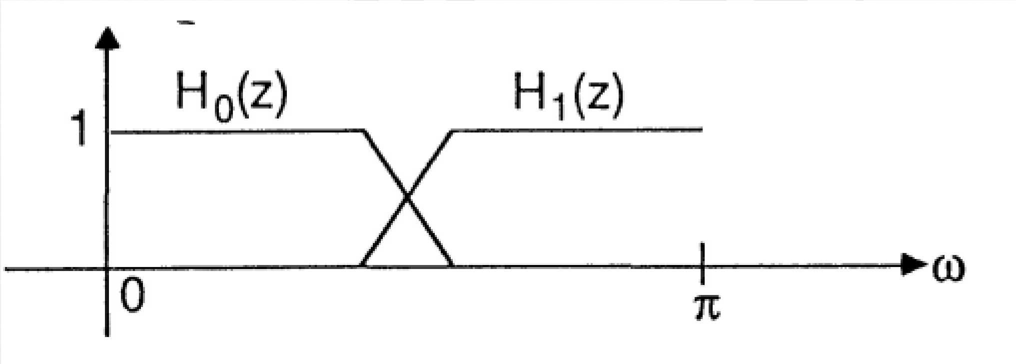
کاربردهای نمایش چندنرخی

۳- کدینگ زیرباند سیگنال‌های صوتی و تصویری:

- ❖ در کاربردهای عملی، عموما با سیگنال ها و تصویرهایی سر و کار داریم که انرژی سیگنال تنها در بخشی از مولفه‌های فرکانسی متمرکز هستند و در سایر مولفه‌های فرکانسی انرژی چندانی وجود ندارد.
- ❖ برای مثال در شکل زیر، مولفه‌های بعد از $|\omega| > \pi/2$ به نسبت دامنه کمتری دارند. اما اطلاعات این مولفه‌ها آنقدر کوچک نیست که بتوان آنها را حذف کرد و نادیده گرفت.



- ❖ راه حلی که پیشنهاد می‌شود بر گرفته از مفهوم فیلتربانک است. دو فیلتر $H_0(e^{j\omega})$ و $H_1(e^{j\omega})$ فرض کنید:



کاربردهای نمایش چندنرخی

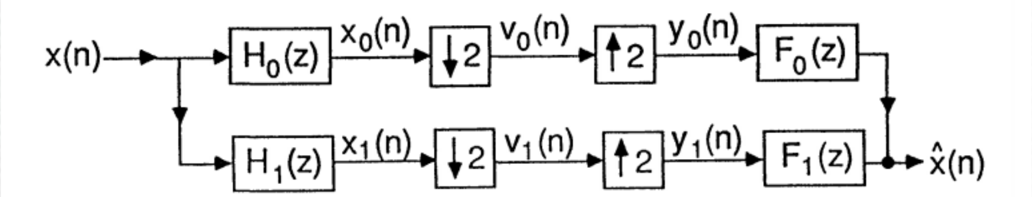
❖ حال می‌توان سیگنال بدست آمده از خروجی فیلتر $H_0(z)$ را با نرخ بیت بالا و سیگنال بدست آمده در خروجی $H_1(z)$ را با نرخ بیت کمتر کد کرد.

مثال عملی:

فرض کنید از یک سیگنال $x[n]$ با نرخ ۱۰۰۰۰ نمونه بر ثانیه نمونه گیری می‌کنیم و هر نمونه با ۱۶ بیت ذخیره می شود پس

$$10000 \times 16 = 160 \text{ Kbit/sec}$$

حال فرض کنید $x[n]$ را از دو فیلتر بالا عبور دهیم. سپس $x_0[n]$ و $x_1[n]$ را با نرخ ۲ decimate کنیم $v_0[n]$ و $v_1[n]$.



$x_0[n]$ را با ۱۶ بیت و $x_1[n]$ را با ۸ بیت کد کنیم در این صورت داریم:

$$5000 \times 16 + 5000 \times 8 = 120 \text{ Kbit/sec}$$

این ایده را می‌توان به M باند مختلف تعمیم داد و هر باند را با تعداد بیت متفاوتی کد کرد.

کاربردهای نمایش چندنرخی

۵- مالتی‌پلکس ها:

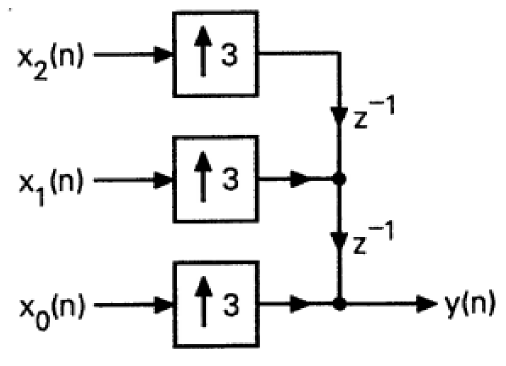
- ❖ در مخابرات از دو نوع مالتی‌پلکس استفاده می شود: TDM و FDM
- ❖ در TDM نمونه‌های سیگنال‌ها کنار هم چیده می شود و در FDM طیف فرکانسی سیگنال‌ها

پیاده سازی TDM با ساختار چندنرخی

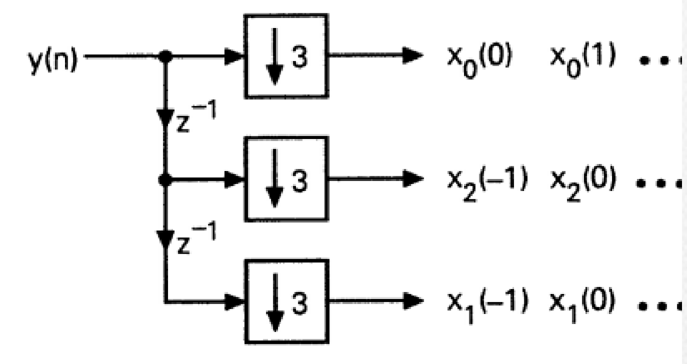
سه سیگنال $x_0[n]$,$x_1[n]$,$x_2[n]$ فرض کنید. اگر این سه سیگنال به expander داده شوند و $x_2[n]$ با دو تاخیر و $x_1[n]$ با یک تاخیر همراه باشد به یک مالتی پلکس TDM می رسیم:

$$x_0[0]\ \ x_1[0]\ \ x_2[0]\ \ x_0[1]\ \ x_1[1]\ \ x_2[1]\ \ \ldots.$$

باز یابی سیگنال نیز با ساختار decimate قابل انجام است (تجزیه چند فازی)



(a) Multiplexing



(b) Demultiplexing

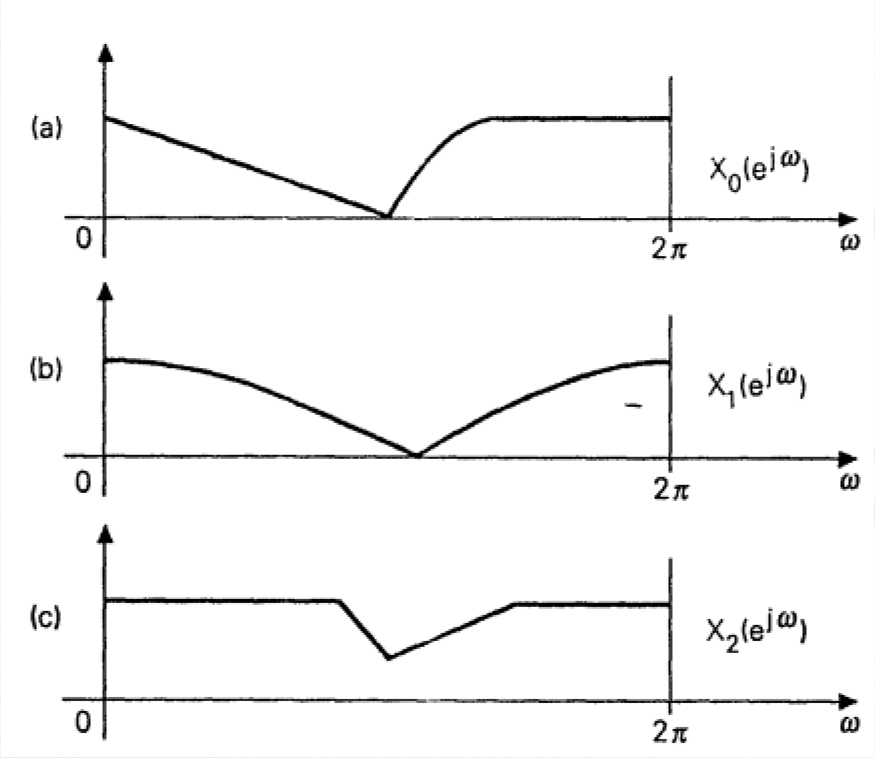
عملگرهای اساسی چند نرخی
نمایش چندفازی
پیاده سازی چند مرحله‌ای
کاربردها
فیلتربانک ها

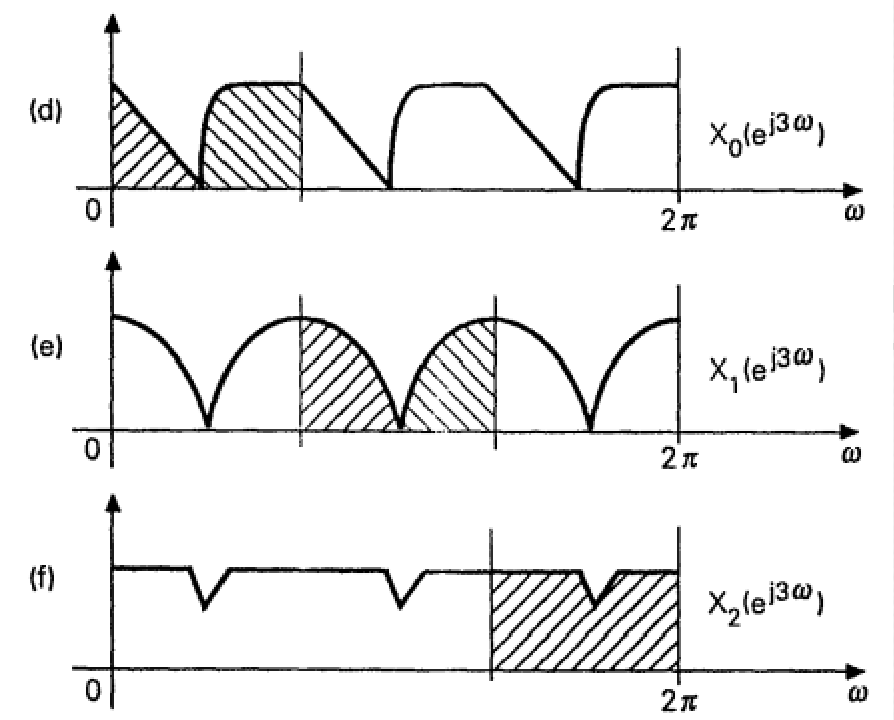
کاربردهای نمایش چندنرخی

پیاده سازی FDM با ساختار چندنرخی

سه سیگنال $x_0[n],x_1[n],x_2[n]$ فرض کنید. طیف فرکانسی همه این سه سیگنال در محدوده $0 \leq \omega \leq 2\pi$ می باشد (شکل سمت چپ)

اگر هر سه سیگنال با نرخ ۳ افزایش نرخ داده شوند، طیف ها به صورت زیر هستند (شکل سمت راست)

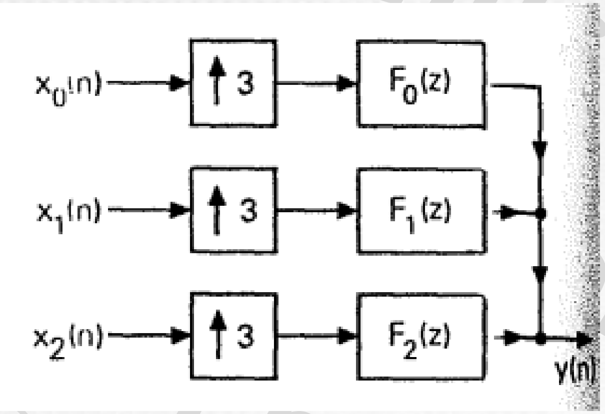




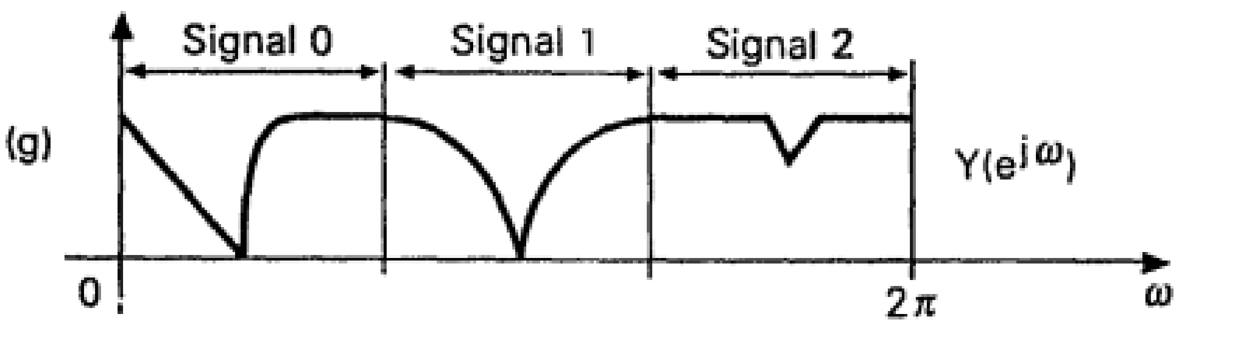
عملگرهای اساسی چند نرخی
نمایش چندفازی
پیاده سازی چند مرحله‌ای
کابردها
فیلتربانک ها

کاربردهای نمایش چندنرخی

چون اطلاعات فرکانسی در بازه $0 \le \omega \le 2\pi/3$ همانند اطلاعات فرکانسی در بازه $2\pi/3 \le \omega \le 4\pi/3$ و $4\pi/3 \le \omega \le 2\pi$ است، پس با حفظ هر کدام از بازه های فرکانسی، تمام اطلاعات سیگنال حفظ می شود



د نهایت با جمع زدن خروجی فیلترهای فرکانس گزین $F_0(z)$، $F_1(z)$ و $F_2(z)$ به یک مالتی‌پلکس FDM می‌رسیم:



فیلترهای خاص و فیلتربانک‌ها

۱- فیلترهای M باند یا فیلترهای نائیکویست (M)

مطابق با ساختار expander ، ارتباط طیف ورودی و خروجی expander به صورت زیر است:

$$Y(z) = H(z)X(z^M)$$

فرض کنید در تجزیه چندفازی نوع اول مرتبه M، مولفه $E_0(z)$ ثابت و برابر با c است پس $H(z)$ برابر است با:

$$H(z) = c + z^{-1}E_1(z^M) + z^{-2}E_2(z^M) + \cdots + z^{-(M-1)}E_{M-1}(z^M)$$

$$H(z) = c + \sum_{m=1}^{M-1} z^{-m}E_m(z^M)$$

و بنابراین داریم:

$$Y(z) = cX(z^M) + \sum_{m=1}^{M-1} z^{-m}E_m(z^M)\,X(z^M)$$

از این رابطه می‌توان نشان داد که $y[Mn] = cx[n]$. یعنی نمونه‌های اولیه سیگنال $x[n]$ هیچ‌گونه تغییری نمی‌کنند.

فیلتری که چنین ویژگی داشته باشد، **فیلتر M-باند یا نائیکویست** نامیده می‌شود.

عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

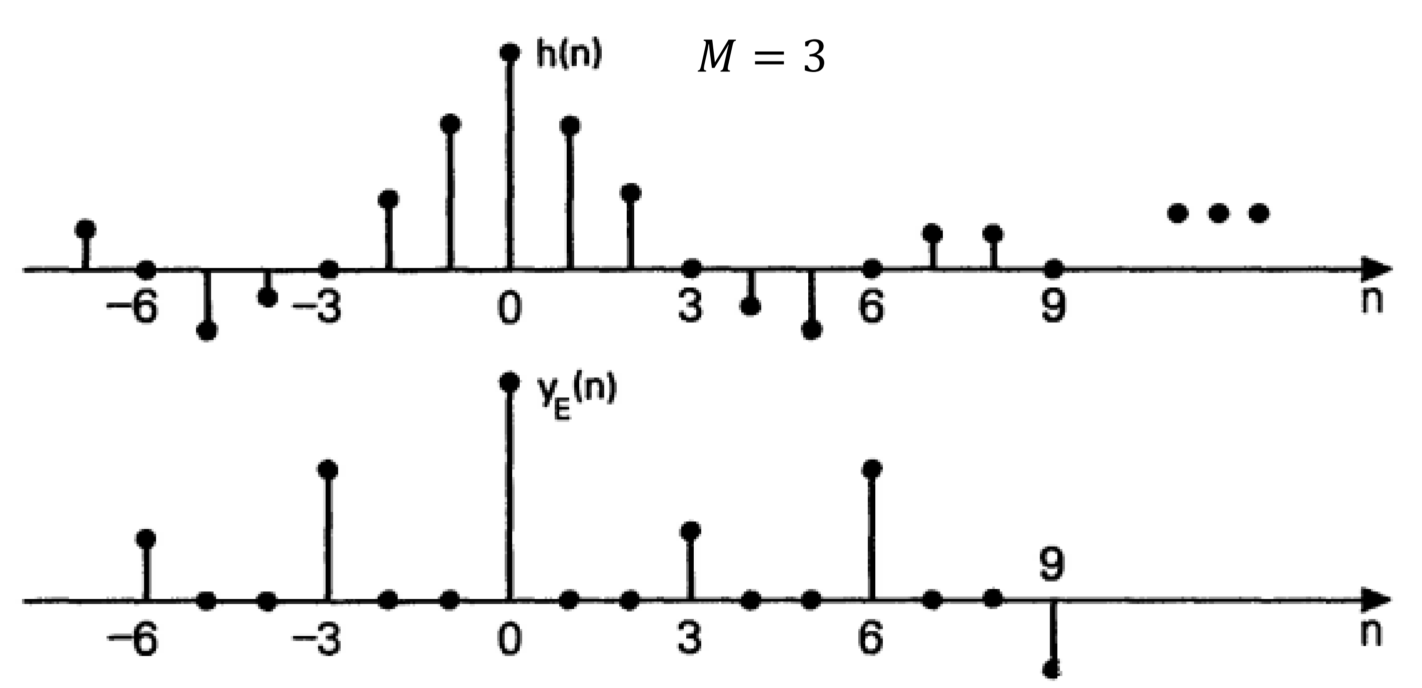
فیلتربانک ها

فیلترهای خاص و فیلتربانک‌ها

در واقع پاسخ ضربه فیلتر $h[n]$ به صورتی است که به ازای n های مضرب M صفر است و کانولوشن این فیلتر در سیگنال ورودی $y_E[n]$ سبب می‌شود نمونه‌های موجود در n های مضرب M تغییر نکنند.

$$h[Mn] = 0 \quad n \neq 0$$

$$h[0] = c \quad n = 0$$



فیلترهای خاص و فیلتربانک‌ها

ویژگی manifestation در حوزه فرکانس:

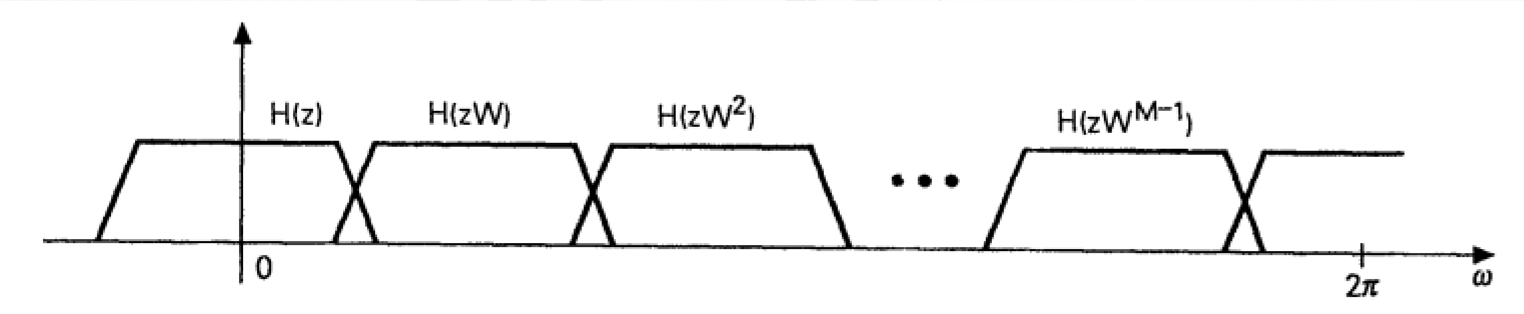
دیدیم که فیلترهای فیلتربانک Uniform به صورت زیر تعریف می شوند:

$$H_k(z) = H_0(zW^k)$$

اگر $H_0(z)$ یک فیلتر M-باند (نائیکویست) باشد در این صورت می‌توان نشان داد:

$$\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) = \sum_{k=0}^{M-1} H_0(zW^k) = cM$$

اگر $c = 1/M$ باشد در این صورت عبارت بالا برابر با یک است. یعنی تمام انرژی سیگنال پس از عبور از فیلترهای فیلتربانک حفظ می شود.



عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

فیلتربانک ها

فیلترهای خاص و فیلتربانک‌ها

۲- توابع تبدیل مکمل

۲-۱ توابع تبدیل اکیدا مکمل (SC)

یک مجموعه از توابع تبدیل $H_0(z), H_1(z), \dots H_{M-1}(z)$ را اکیدا مکمل (SC) گویند اگر

$$\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) = cz^{-n_0}, \qquad c \neq 0$$

به عبارت دیگر اگر خروجی تمام فیلترهای $H_k(z)$ با هم جمع کنیم، دقیقا همان سیگنال اولیه بدون هیچ اعوجاجی بدست می‌آید که تنها به اندازه n_0 شیفت خورده و به اندازه c تفکیک شده است

مثال:

فرض کنید $M = 2$ باشد و $H_0(z)$ یک فیلتر FIR با فاز خطی نوع اول باشد بنابراین (از جدول ۱ فصل سوم)

$$H_0(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N}{2}} H_R(\omega)$$

عملگرهای اساسی چند نرخی

نمایش چندفازی

پیاده سازی چند مرحله‌ای

کاربردها

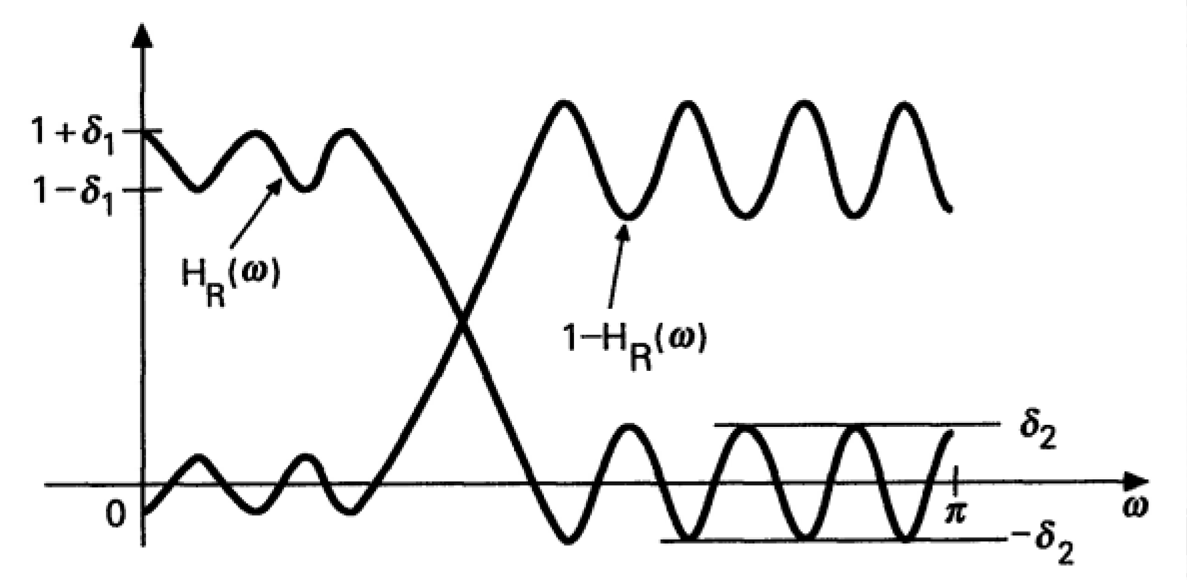
فیلتربانک ها

فیلترهای خاص و فیلتربانک‌ها

اگر $H_1(z)$ برابر با $z^{-\frac{N}{2}} - H_0(z)$ انتخاب شود آنگاه داریم:

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N}{2}} - H_0(e^{j\omega})$$

$$= e^{-j\omega\frac{N}{2}} - e^{-j\omega\frac{N}{2}}H_R(\omega) = e^{-j\omega\frac{N}{2}}\left(1 - H_R(\omega)\right)$$



فیلترهای خاص و فیلتربانک‌ها

۲-۲ توابع تبدیل مکمل توان (PC)

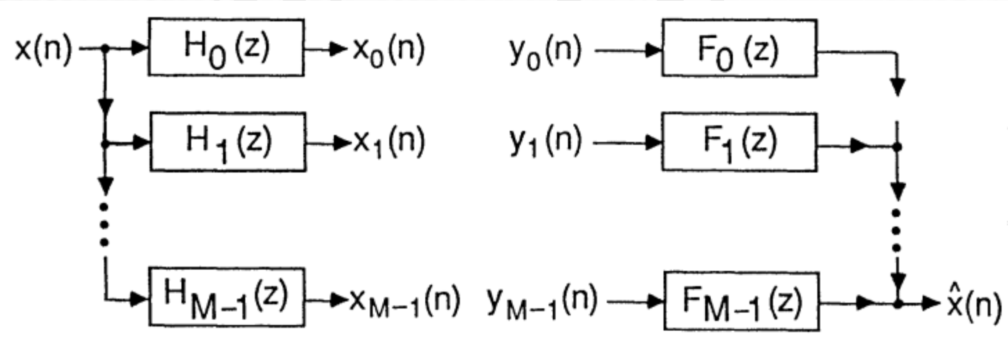
یک مجموعه از توابع تبدیل $H_0(z), H_1(z), \ldots H_{M-1}(z)$ را مکمل توان (PC) گویند اگر

$$\sum_{k=0}^{M-1} \left|H_k(e^{j\omega})\right|^2 = c, \qquad c > 0\,, \forall\omega$$

یا معادلا

$$\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)\widetilde{H}_k(z) = c, \qquad c > 0\,, \forall z$$

حال فیلتر بانک DFT را در نظر بگیرید (یادآوری):



(a) Analysis bank (b) Synthesis bank

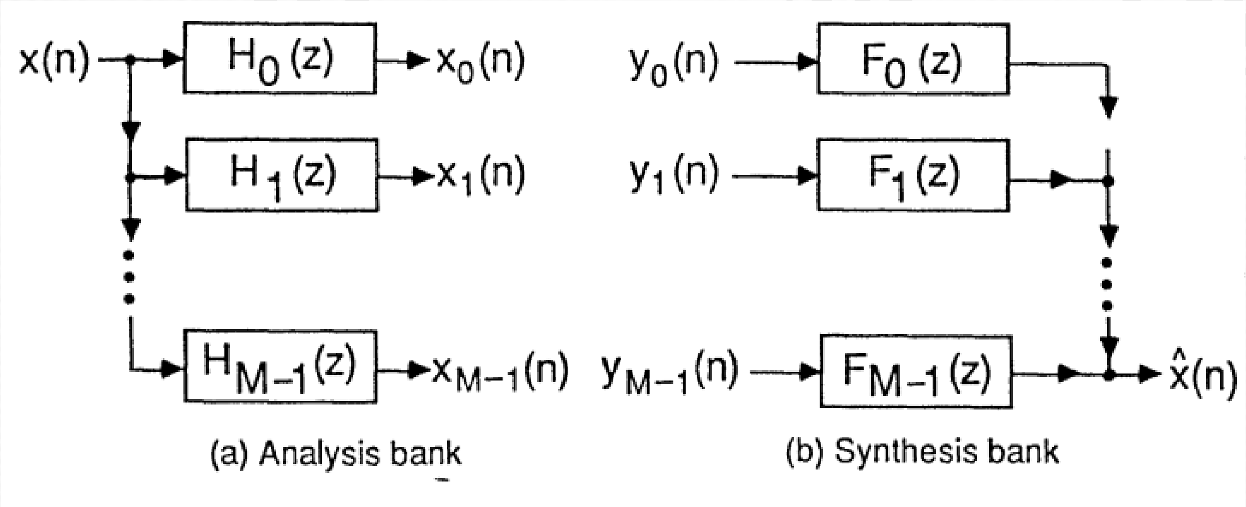
فیلترهای خاص و فیلتربانک‌ها

۲-۲ توابع تبدیل مکمل توان (PC)

یک مجموعه از توابع تبدیل $H_{M-1}(z)$ ... ,$H_0(z)$,$H_1(z)$ را مکمل توان (PC) گویند اگر

$$\sum_{k=0}^{M-1} \left|H_k(e^{j\omega})\right|^2 = c, \qquad c > 0\,, \forall\omega \quad \text{یا} \quad \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)\tilde{H}_k(z) = c, \qquad c > 0\,, \forall z$$

حال فیلتر بانک DFT را در نظر بگیرید (یادآوری):



اگر $F_k(z) = \tilde{H}_k(z)$ در نظر گرفته بشود در این صورت اتصال سری بانک آنالیز و بانک سنتز سبب می شود که $x[n] = \hat{x}[n]$.

فیلترهای خاص و فیلتربانک‌ها

۲-۳ توابع تبدیل مکمل تمام گذر (AC)

یک مجموعه از توابع تبدیل $H_0(z), H_1(z), \dots H_{M-1}(z)$ را مکمل تمام گذر (AC) گویند اگر

$$\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) = A(z), \qquad c > 0, \forall z$$

که $A(z)$ یک تابع تمام گذر است.

نکته: فیلترهای اکیدا مکمل، قطعا مکمل تمام گذر هستند اما لزوما مکمل توان نیستند.

۲-۴ توابع تبدیل مکمل دوگانه (DC)

یک مجموعه از توابع تبدیل $H_0(z), H_1(z), \dots H_{M-1}(z)$ را مکمل دوگانه (DC) گویند اگر دو ویژگی مکمل توان (DC) و مکمل تمام گذر (AC) را داشته باشد

End of Chapter 4

دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مشخصات فیلترها
فیلترهای FIR
فیلترهای IIR
فیلترهای تمام‌گذر
انواع فیلترهای دیگر