پردازش سیگنال های دیجیتال

فصل پنجم

آنالیز تابع تبدیل سیستم‌های LTI

ارایه شده توسط:

حجت قیمت گر

استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مطالب

- پاسخ فرکانسی سیستم LTI
- توابع سیستم برای سیستم‌هایی با معادله تفاضلی خطی
- سیستم‌های با تابع تبدیل کسری
- سیستم‌های تمام گذر
- سیستم‌های مینی‌مم فاز
- سیستم‌های با فاز خطی تعمیم یافته

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

❖ اگر یک سیستم LTI باشد رابطه ورودی و خروجی در حوزه فرکانس به صورت زیر است:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

در نمایش دامنه و فاز می‌توان گفت:

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j<Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})|e^{j<X(e^{j\omega})} \times |H(e^{j\omega})|e^{j<H(e^{j\omega})}$$

$$= |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(<H(e^{j\omega})+<X(e^{j\omega}))}$$

نتیجه: اندازه طیف خروجی برابر با حاصلضرب اندازه طیف سیگنال در اندازه طیف سیستم است.

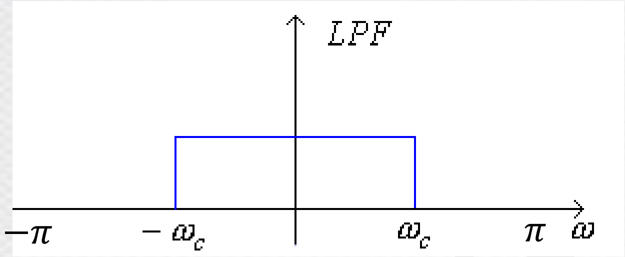
نتیجه: فاز طیف خروجی برابر با مجموع فاز سیگنال و فاز سیستم است.

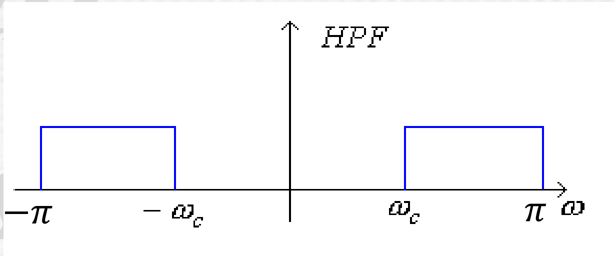
نتیجه: ساختار سیستم می‌تواند منجر به اعوجاج دامنه یا اعوجاج فاز شود.

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

فیلترهای فرکانس گزین ایده‌آل

فیلترهای ایده‌آل پایین گذر و تمام گذر به صورت زیر تعریف می شوند:





$$H_{LPF}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$H_{HPF}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c \\ 1, & \omega_c \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$h_{LPF}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

$$h_{HPF}[n] = \delta[n] - \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

- ❖ فاز هر دو فیلتر ایده‌آل بالا صفر است. پس هیچ اعوجاج فازی ندارند.
- ❖ در محدوده باند عبور هیچ اعوجاج دامنه ای هم وجود ندارد.
- ❖ اما هر دو فیلتر غیر سببی هستند و به ازای مقادیر $-\infty \le n \le \infty$ مقدار دارند. پس نمی‌توان آنها را به طور دقیق استفاده کرد.

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

اعوجاج فاز و فاز خطی

فرض کنید یک سیستم تاخیر به صورت $h[n] = \delta[n - n_0]$ داریم. اندازه و فاز پاسخ فرکانسی این فیلتر برابر است با:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \rightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = 1 \ \ \forall\omega \\ < H(e^{j\omega}) = -\omega n_0 \end{cases}$$

❖ در اینجا اعوجاج فاز به صورت یک رابطه خطی بر حسب ω است.

❖ شیفت زمانی فیلتر ایده‌آل می‌تواند به پیاده‌سازی فیلتر به صورت یک سیستم سببی کمک کند. این شیفت زمانی معادل با یک اعوجاج فاز خطی است که به آسانی قابل جبران است.

❖ نکته: به ازای هیچ مقدار n_0 نمی‌توان فیلتر ایده‌آل را به صورت دقیق و سببی پیاده سازی کرد. برای مثال:

$$h_{LPF}[n - n_0] = \frac{\sin \omega_c (n - n_0)}{\pi (n - n_0)} \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

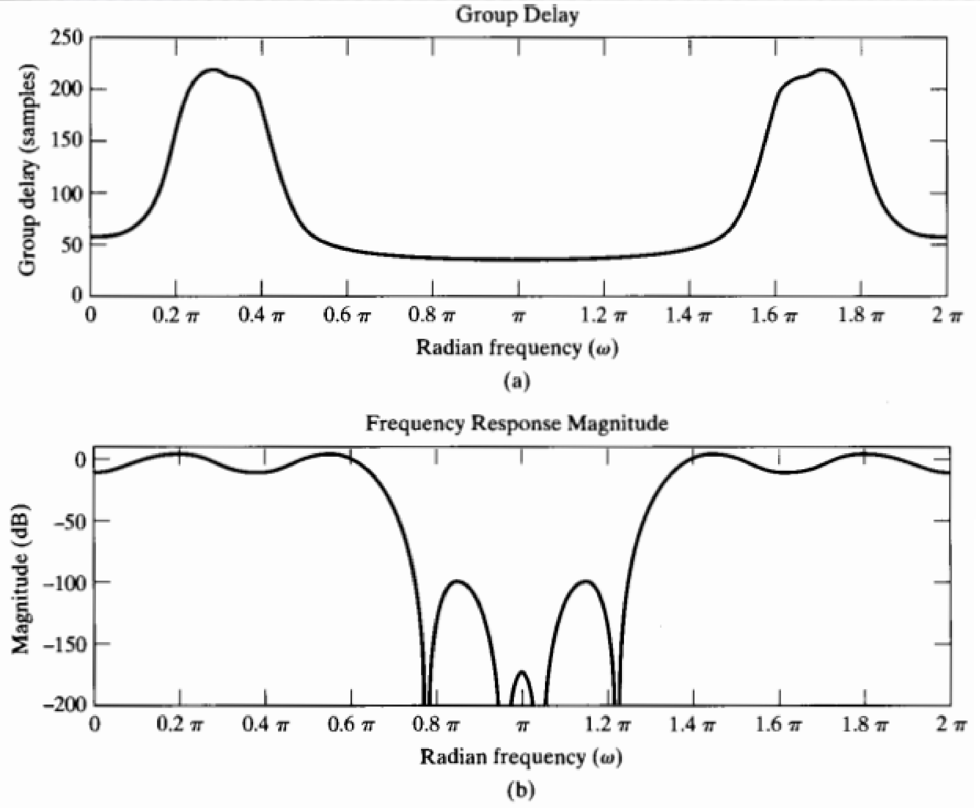
تاخیر گروه فیلتر:

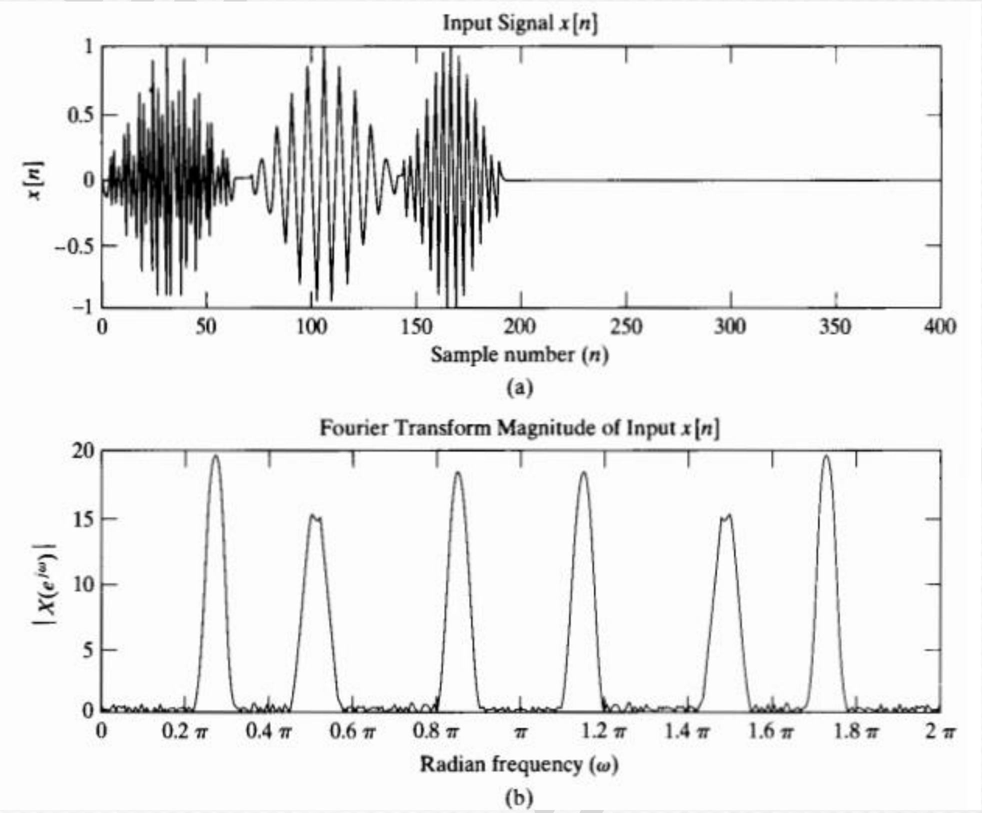
برابر با مشتق فاز فیلتر است و معرف درجه غیرخطی بودن فیلتر است.

$$\tau(\omega) = \frac{d}{d\omega} < H(e^{j\omega})$$

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

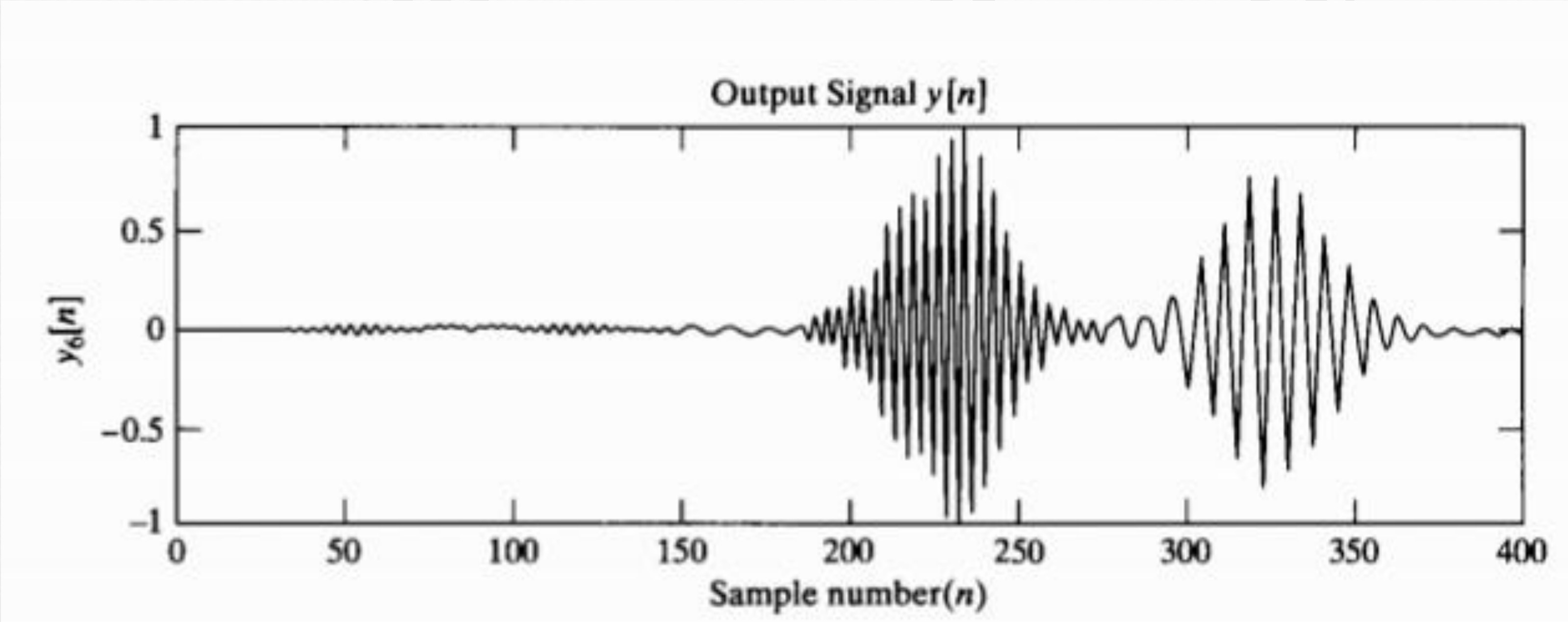
مثال ۱-۵: فرض کنید فیلتر $H(e^{j\omega})$ با مشخصات اندازه و تاخیر فاز گروه زیر مفروض است. سیگنال $x[n]$ و تبدیل فوریه آن به صورت $X(e^{j\omega})$ مفروض است. پاسخ خروجی را بیابید:





پاسخ فرکانسی سیستم LTI

- ❖ واضحا از طیف فوریه می‌توان گفت که سیگنال شامل سه مولفه فرکانس حول $0.25\ \pi$، $0.50\ \pi$ و $0.85\ \pi$ است.
- ❖ از طرفی فیلتر مولفه‌های حول $0.85\ \pi$ را به شدت تضعیف می‌کند (حدود dB ۱۰۰-). پس مولفه فرکانس بالای $0.85\ \pi$ در خروجی ظاهر نمی‌شود.
- ❖ از طرفی طبق تاخیر گروه، در فرکانس $0.25\ \pi$ ، حدود ۲۰۰ نمونه و در $0.50\ \pi$ حدود ۵۰ نمونه شیفت داریم.



پاسخ فرکانسی سیستم LTI
توابع سیستم با معادلات ...
توابع تبدیل کسری
سیستم های تمام گذر
سیستم های مینی‌مم فاز
سیستم هایی با فاز خطی

سیستم‌هایی بیان شده به صورت یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

یک سیستم با معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{n=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{n=0}^{M} b_k x[n-k]$$

با گرفتن تبدیل Z از رابطه بالا داریم:

$$\sum_{n=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{n=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

از طرفی چون در سیستم LTI، $Y(z) = X(z)H(z)$ است، پس نسبت $Y(z)/X(z)$ همان $H(z)$ است. از رابطه بالا داریم:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{n=0}^{N} a_k z^{-k}} \qquad (۱)$$

رابطه (۱)، تابع تبدیل سیستم را به صورت تقسیم دو چند جمله‌ای بر حسب z^{-1} بیان می‌کند.

سیستم‌هایی بیان شده به صورت یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

صورت و مخرج عبارت بالا به ترتیب چند جمله‌ای درجه M و N از z^{-1} هستند که می‌توان به عوامل درجه اول تفکیک شوند:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{n=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1-d_k z^{-1})} \qquad (۲)$$

در رابطه بالا، هر ترم $(1-c_k z^{-1})$ یک صفر در c_k و یک قطب در $z=0$ تولید می‌کند. مشابها، هر ترم $(1-d_k z^{-1})$ یک قطب در d_k و یک صفر در $z=0$ تولید می‌کند.

$$1-c_k z^{-1}=0 \quad \rightarrow 1-\frac{c_k}{z}=0 \rightarrow \frac{z-c_k}{z}=0$$

یافتن سیستم معکوس:

اگر یک سیستم LTI به صورت $H(z)$ فرض شود، $H_i(z)$ به شرطی معکوس این سیستم است که

$$H(z)H_i(z)=1 \quad \rightarrow \quad H_i(z)=\frac{1}{H(z)}$$

که مطابق با خواص تبدیل Z باید ناحیه همگرایی $H(z)$ و $H_i(z)$ همپوشانی داشته باشند. با گرفتن عکس تبدیل داریم:

$$h[n]*h_i[n]=\delta[n]$$

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

توابع سیستم با معادلات ...

توابع تبدیل کسری

سیستم های تمام گذر

سیستم های مینی‌مم فاز

سیستم هایی با فاز خطی

سیستم‌هایی بیان شده به صورت یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

اگر $H(z)$ به صورت معادله (۲) باشد، در این صورت $H_i(z)$ برابر است با:

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{a_0 \prod_{n=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}{b_0 \prod_{n=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}$$

یعنی جای صفرها و قطبها عوض می شود.

نکته: در رابطه عکس تبدیل Z باید ناحیه ROC به گونه‌ای انتخاب شود که با ناحیه ROC فیلتر اولیه همپوشانی داشته باشد

مثال ۲-۵: فرض کنید تابع تبدیل یک فیلتر به صورت زیر باشد. مطلوب است محاسبه فیلتر معکوس $h_i[n]$.

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}} \quad , |z| > 0.9$$

حل: تابع تبدیل سیستم معکوس برابر است با:

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} - 0.9\, z^{-1} \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

تنها یک قطب در $z = 0.5$ موجود است که تنها دو ROC تولید می‌کند به صورت $|z| < 0.5$ و دیگری $|z| > 0.5$. چون باید با ROC سیستم اول هم پوشانی داشته باشد پس $|z| > 0.5$ انتخاب می شود. در این صورت داریم:

$$h_i[n] = (0.5)^n u[n] - 0.9\, (0.5)^{n-1} u[n-1]$$

پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری

اگر در رابطه $H(z)$ یک فیلتر **پایدار**، به جای z کمیت $e^{j\omega}$ قرار داده شود، در این صورت پاسخ فرکانسی فیلتر بدست می‌آید.

با جایگذاری در رابطه (۱) و (۲) اسلایدهای (۶) و (۷) داریم:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \;, \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k e^{-j\omega})}$$

از رابطه حاصلضربی بالا می‌توان اندازه پاسخ فرکانسی را به صورت زیر نوشت:

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{b_0 \prod_{k=1}^{N}(1 - c_k e^{-j\omega})}{a_0 \prod_{k=1}^{M}(1 - d_k e^{-j\omega})}\right| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{\prod_{k=1}^{N}|(1 - c_k e^{-j\omega})|}{\prod_{k=1}^{M}|(1 - d_k e^{-j\omega})|}$$

در بسیاری از موارد به جای اندازه از مربع اندازه استفاده می شود. پس داریم:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \left|\frac{b_0}{a_0}\right|^2 \frac{\prod_{n=1}^{N}(1 - c_k e^{-j\omega})(1 - c_k^* e^{j\omega})}{\prod_{n=1}^{M}(1 - d_k e^{-j\omega})(1 - d_k^* e^{j\omega})}$$

پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری

نمایش لگاریتمی اندازه پاسخ فرکانسی

نمایش لگاریتمی اندازه پاسخ فرکانسی برابر است با:

$$10\log_{10}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = 20\log_{10}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

$$= 20\log\left|\frac{b_0}{a_0}\right| + \sum_{k=1}^{M} 20\log_{10}\left|\left(1-c_k e^{-j\omega}\right)\right| - \sum_{k=1}^{M} 20\log_{10}\left|\left(1-d_k e^{-j\omega}\right)\right| \qquad (۳)$$

تضعیف لگاریتمی اندازه پاسخ فرکانسی

تضعیف زمانی است که اندازه تابع تبدیل کمتر از ۱ باشد پس $20\log_{10}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| < 0$ می شود. برای این منظور در نمایش تضعیف از رابطه $-20\log_{10}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ استفاده می شود

$$\text{Atenuation } (dB) = -20\log_{10}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

دانشگاه خلیج فارس بوشهر

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

توابع سیستم با معادلات ...

توابع تبدیل کسری

سیستم های تمام گذر

سیستم های مینی‌مم فاز

سیستم هایی با فاز خطی

پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری

نمایش فاز پاسخ فرکانسی:

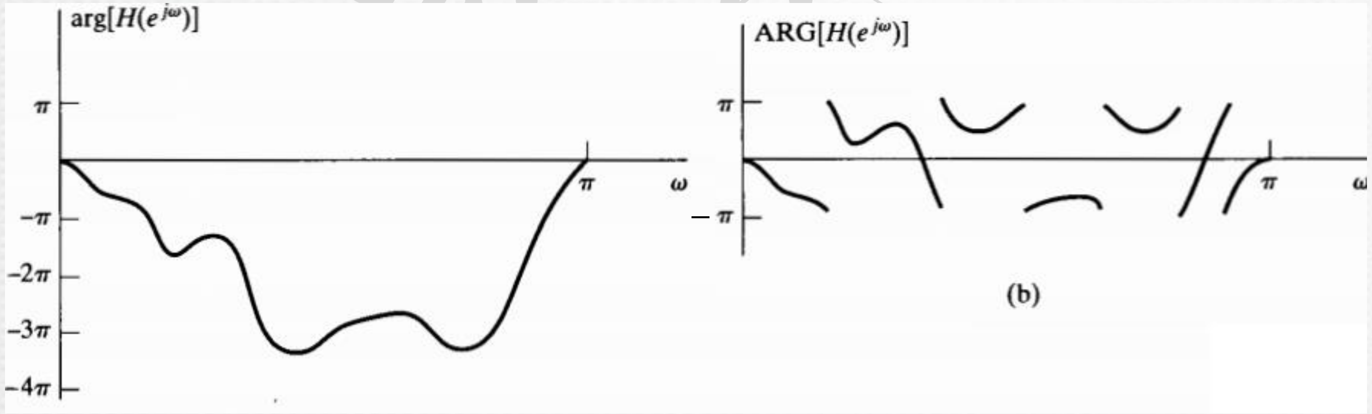
$$\arg\left(H(e^{j\omega})\right) = \measuredangle\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=1}^{M} \measuredangle\left(1 - c_k e^{-j\omega}\right) - \sum_{k=1}^{M} \measuredangle\left(1 - d_k e^{-j\omega}\right) \qquad (۴)$$

نکته: در رابطه بالا چندین فاز با هم جمع زده می‌شوند پس $\arg\left(H(e^{j\omega})\right)$ پیوسته است و می‌توان هر عددی را شامل شود.

نکته: مقدار اساسی فاز با کم و زیادن کردن $2\pi r(\omega)$ از $\arg\left(H(e^{j\omega})\right)$ و تعریف فاز در بازه $[-\pi,\pi]$ بیان می شود و با $ARG\left(H(e^{j\omega})\right)$ نمایش داده می شود:

$$\arg\left(H(e^{j\omega})\right) = \mathrm{ARG}\left(H(e^{j\omega})\right) + 2\pi r(\omega) \quad ,r(\omega) \in Z$$

این تابع می‌توان ناپیوسته باشد



پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری

مثال ۳-۵: رفتار پاسخ فرکانسی برای یک صفر یا قطب تک

❖ در معادلات (۳) و (۴) دامنه لگاریتمی و فاز پاسخ فرکانسی به صورت **مجموع** دامنه لگاریتمی و فاز عبارت‌های درجه ۱ نوشته شده است. می‌خواهیم رفتار یک قطب به صورت $\frac{1}{1-d_k e^{-j\omega}}$ یا یک صفر به صورت $(1-c_k e^{-j\omega})$ را بررسی کنیم.

❖ هر دو عبارت به صورت یک ترم مجموع در روابط (۳) و (۴) حضور دارند. با فرض اینکه صفر $c_k = re^{j\theta}$ باشد، داریم:

$$H(e^{j\omega}) = (1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})$$

اندازه:

$$\left|1 - re^{j\omega}e^{-j\omega}\right|^2 = (1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega}) = 1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)$$

پس:

$$20\log_{10}\left|1 - re^{j\omega}e^{-j\omega}\right| = 10\log_{10}(1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta))$$

فاز: ARG به صورت نسبت بخش موهومی به بخش حقیقی تعریف می شود:

$$ARG(1 - re^{j\omega}e^{-j\omega}) = \tan^{-1}\frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}$$

پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری

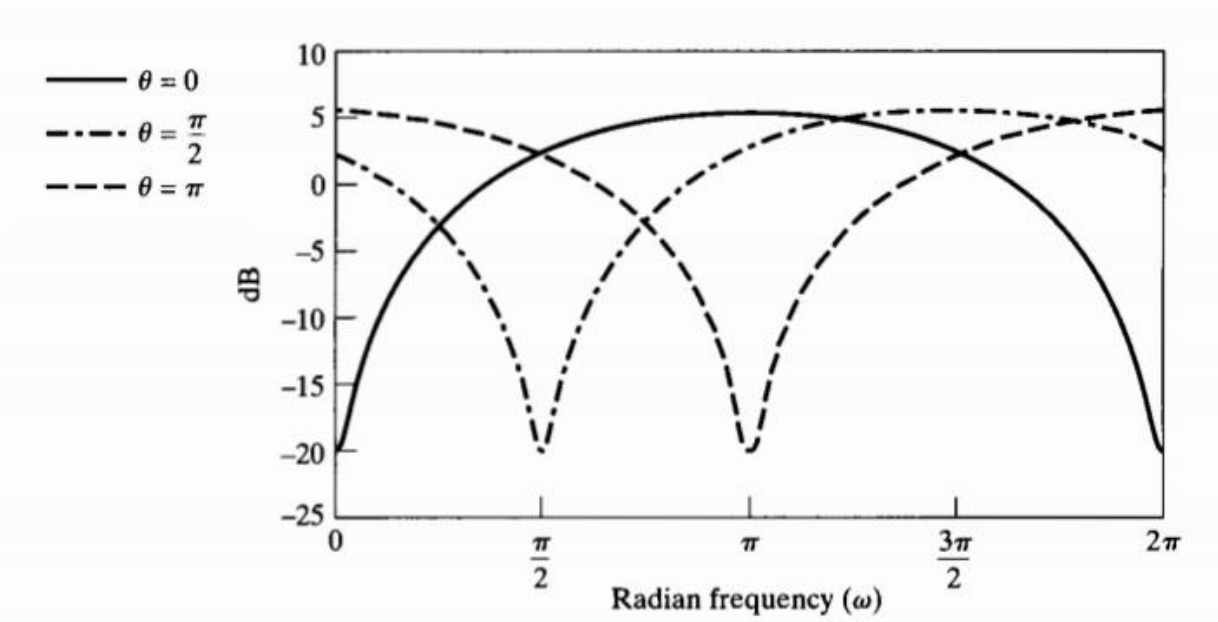
❖ شکل زیر **اندازه لگاریتمی** به ازای $r = 0.9$ و مقادیر مختلف $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ برای یک صفر ترسیم شده است.

❖ چون $c_k = 0.9\, e^{j\theta}$ صفر فرض شده است، باید به ازای فرکانس $\omega = \theta$ اندازه لگاریتمی به شدت افت کند.

❖ وقتی r ثابت باشد اندازه تنها تابع $\omega - \theta$ می شود. ماکزیمم و مینی‌مم وقتی است که ترم کسینوس ۱ و ۱- شود یعنی:

$$\max 20\log\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| : \cos(\omega - \theta) = -1 \rightarrow \omega = \pi + \theta$$

$$\min 20\log\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| : \cos(\omega - \theta) = +1 \rightarrow \omega = \theta$$



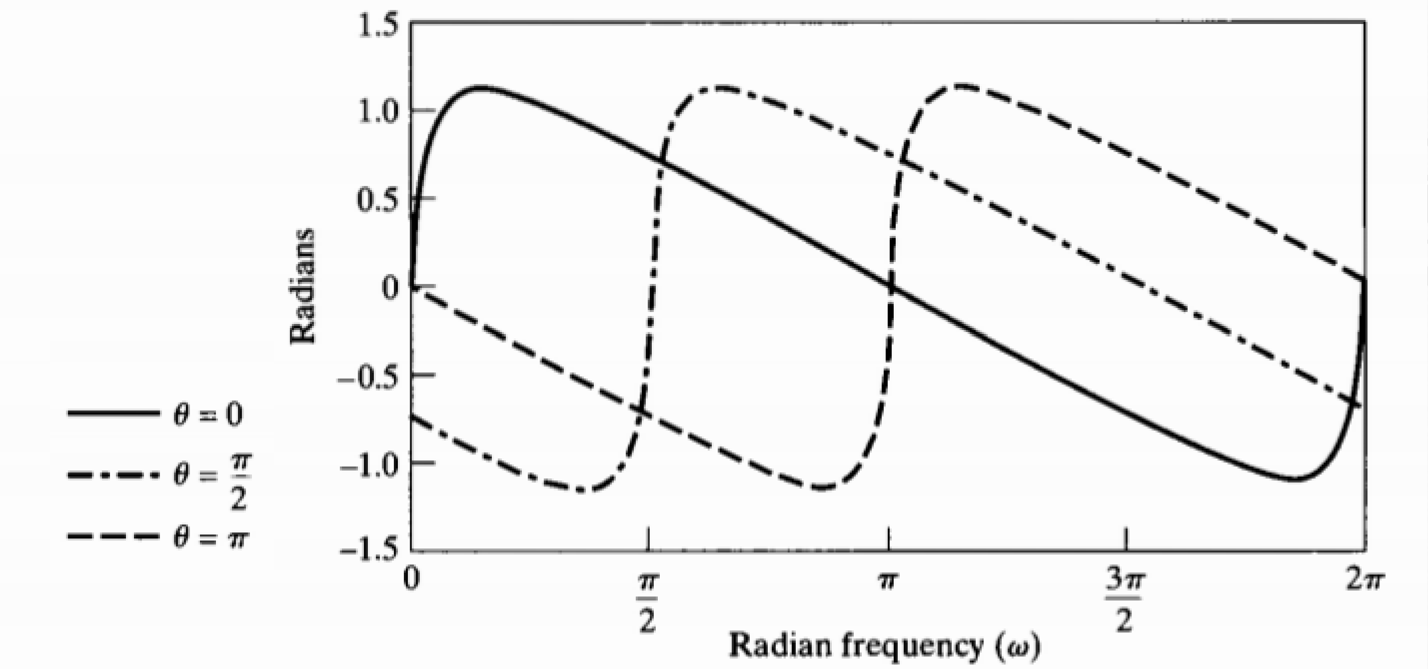
پاسخ فرکانسی سیستم LTI
توابع سیستم با معادلات ...
توابع تبدیل کسری
سیستم های تمام گذر
سیستم های مینی‌مم فاز
سیستم هایی با فاز خطی

پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری

❖ شکل زیر **فاز** به ازای $r = 0.9$ و مقادیر مختلف $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ برای یک صفر ترسیم شده است.

❖ در جایی که مینیمم اندازه رخ می‌دهد $(\omega = \theta)$ مقدار فاز دقیقا صفر است.

❖ با تعییر θ شکل نمودار فاز تغییر نمی کند و فقط شیفت رخ می‌دهد.



پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری

تحلیلی دیگری از رفتار پاسخ فرکانسی یک صفر

دیدیم که

$$H(z) = 1 - c_k z^{-1} = \frac{z - c_k}{z}$$

با فرض $c_k = r\,e^{j\theta}$ و $z = e^{j\omega}$ داریم:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}}$$

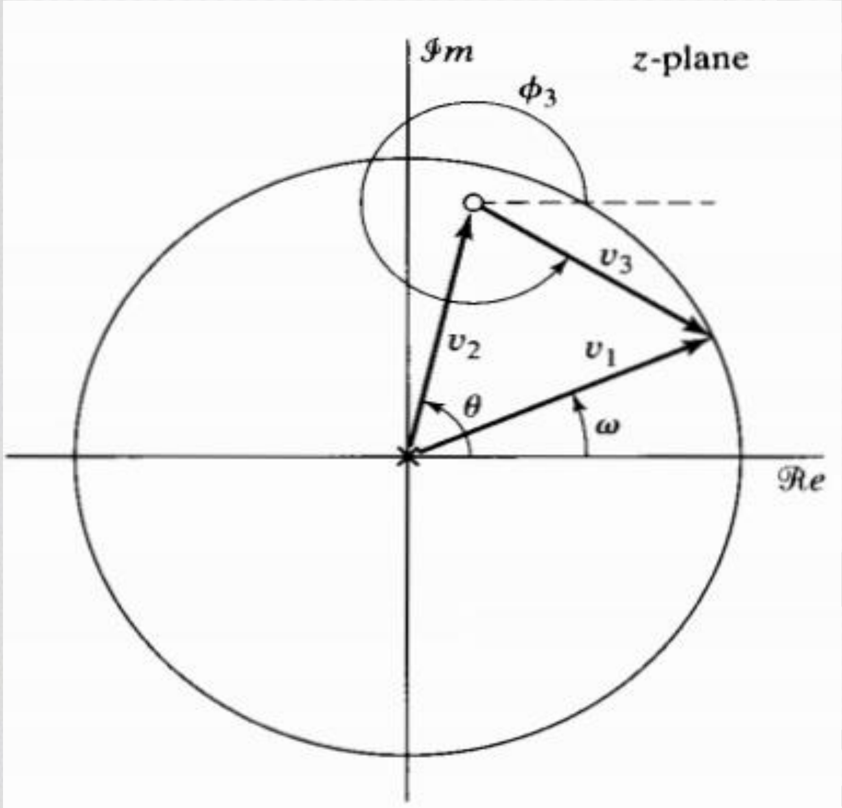
اندازه پاسخ فرکانسی برابر است با:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\left|e^{j\omega} - re^{j\theta}\right|}{\left|e^{j\omega}\right|}$$

اگر $v_1 = e^{j\omega}$ و $v_2 = re^{j\theta}$ و $v_3 = v_2 - v_1$ تعریف شود داریم:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{|v_1 - v_2|}{|v_1|} = \frac{|v_3|}{|v_1|} = |v_3|$$

پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری



- بردار v_3 از صفر (قطب) شروع می شود و به دایره واحد در نقطه $e^{j\omega}$ می رسد. این بردار را بردار صفر (قطب) گویند.
- مطابق با رابطه صفحه قبل $|v_3| = |H(e^{j\omega})|$ است. یعنی با چرخش ω روی دایره واحد، طول v_3 و متناظرا طول $|H(e^{j\omega})|$ تغییر می کند.
- مینی‌مم ترین طول v_3 دقیقا جایی است که $\omega = \theta$ می شود و ماکزیمم طول v_3 دقیقا نقطه متقابل یعنی در $\omega = \theta + \pi$ رخ می‌دهد. (همان نتایج تحلیل قبلی)

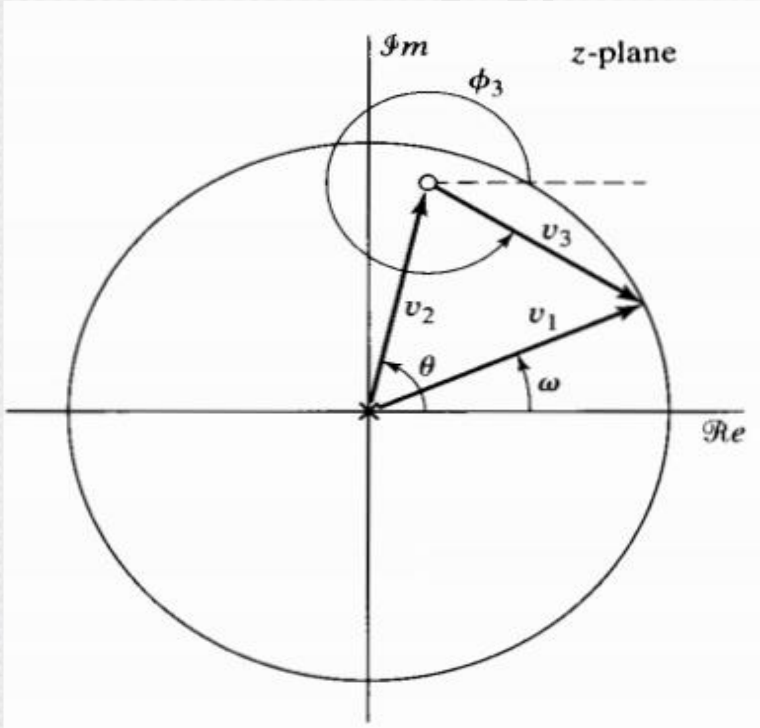
پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری

بررسی فاز:

فاز پاسخ فرکانسی برابر است با:

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \sphericalangle v_3 - \sphericalangle v_1 = \sphericalangle (e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \sphericalangle (e^{j\omega}) \rightarrow$$

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \phi_3 - \omega$$



❖ با افزایش ω عبارت $\phi_3 - \omega$ کمتر می شود ولی به محض اینکه $\omega = \theta$ شد با چرخش فاز ۳۶۰ درجه ϕ_3 مواجه هستیم که منجر به یک جهش در نمایش فاز پاسخ فرکانسی می شود.

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

توابع سیستم با معادلات ...

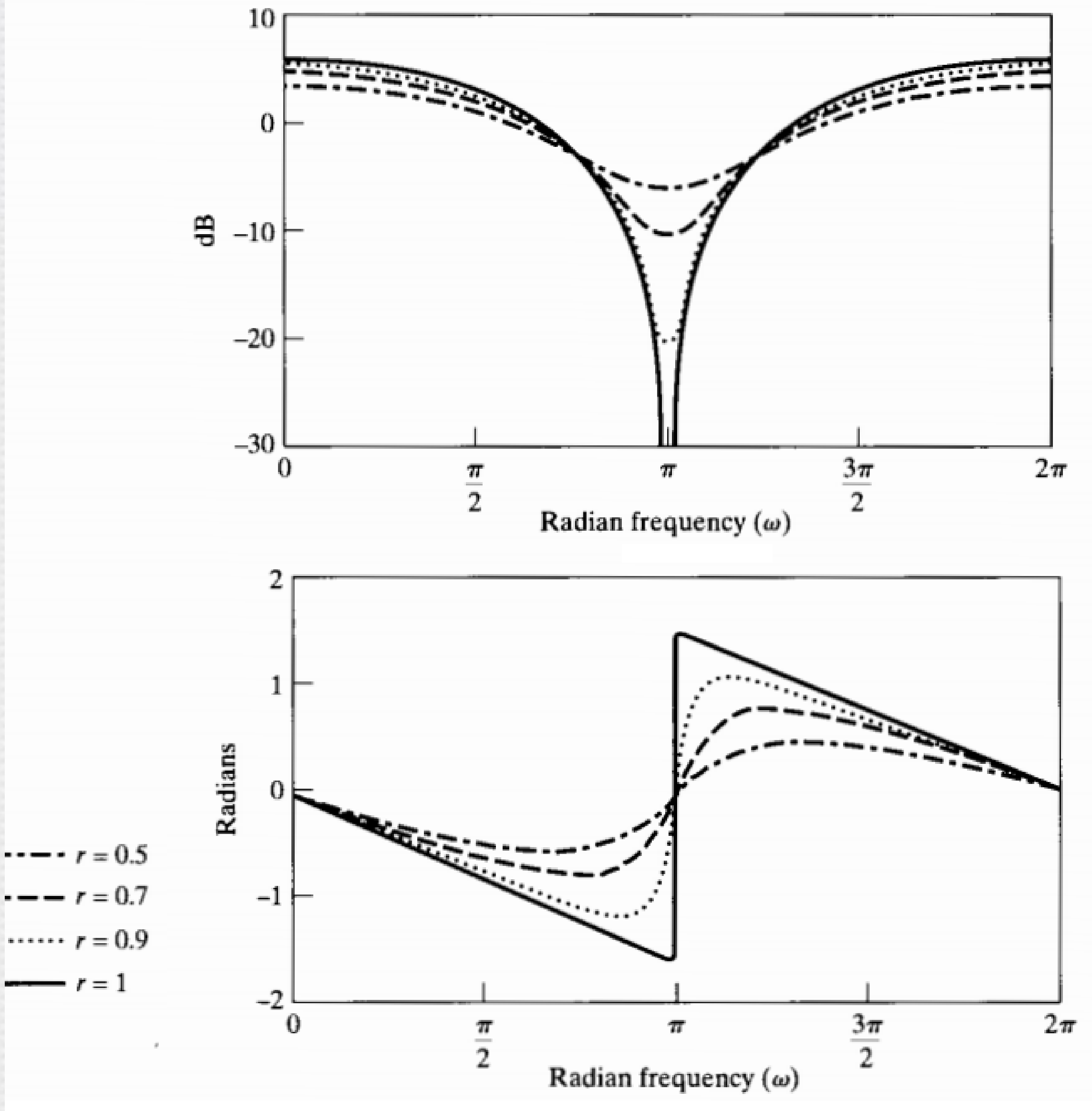
توابع تبدیل کسری

سیستم های تمام گذر

سیستم های مینی‌مم فاز

سیستم هایی با فاز خطی

پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری



نمایش اندازه و فاز یک تابع تبدیل تک صفر در $c_k = re^{j\pi}$ به ازای مقادیر مختلف r

پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری

ارتباط بین دامنه و فاز:

سوال: آیا با داشتن فاز پاسخ فرکانسی می‌توان اطلاعاتی درباره اندازه پاسخ فرکانسی بدست آورد؟ آیا با داشتن اندازه پاسخ فرکانسی، می‌توان درباره فاز فرکانسی اظهار نظر کرد؟

پاسخ: خیر. در حال کلی نمی‌توان از اطلاعات فاز به اطلاعات اندازه پاسخ فرکانسی و برعکس رسید.

حالت خاص: اگر پاسخ فرکانسی به صورت یک تابع کسری باشد و قطب‌ها، صفرها و اندازه پاسخ فرکانسی مشخص باشد، آنگاه یک مجموعه محدود از توابع فاز پاسخ فرکانسی موجود است.

همچنین اگر پاسخ فرکانسی به صورت یک تابع کسری باشد و قطب‌ها، صفرها و فاز پاسخ فرکانسی مشخص باشد، آنگاه یک مجموعه محدود از توابع اندازه پاسخ فرکانسی موجود است.

فرض کنید مربع اندازه پاسخ فرکانسی را در اختیار داریم (اطلاعات فاز را نداریم):

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

پاسخ فرکانسی توابع تبدیل کسری

با فرض اینکه تابع $H(z)$ یک تابع کسری بر حسب z^{-1} باشد داریم:

$$C(z) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{n=1}^{M}(1-c_k z^{-1})(1-c_k^* z)}{\prod_{n=1}^{N}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z)}$$

❖ اگر d_k قطب تابع $C(z)$ باشد، آنگاه قطعا $1/d_k^*$ هم قطب این تابع $C(z)$ است.

❖ اگر c_k صفر تابع $C(z)$ باشد، آنگاه قطعا $1/c_k^*$ هم صفر این تابع $C(z)$ است.

نتیجه: به عبارتی اگر یک قطب (صفر) درون دایره واحد باشد، حتما یک قطب (صفر) بیرون دایره واحد است و برعکس. همچنین اگر یک قطب (صفر) روی دایره واحد باشد حتما این قطب (صفر) مکرر هست.

نتیجه: اگر سیستم سببی و پایدار فرض شود، تمام قطب‌های داخل دایره واحد به $H(z)$ اختصاص داده می شود و قطب‌های بیرون دایره واحد به $H^*(1/z^*)$ اختصاص داده می شود. ولی تخصیص صفرها یکتا نیست و بنابراین چندین پاسخ میتواند درست باشد.

پاسخ فرکانسی سیستم LTI
توابع سیستم با معادلات ...
توابع تبدیل کسری
سیستم های تمام گذر
سیستم های مینی‌مم فاز
سیستم هایی با فاز خطی

فیلترهای تمام گذر

تعریف: یک تابع تبدیل $H(z)$ تمام گذر نامیده می شود اگر:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = c \quad \forall\omega \in R$$

بنابراین، نمایش دامنه و فاز تابع $H\left(e^{j\omega}\right)$ به صورت زیر است:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = c\ e^{j\phi(t)}$$

برای مثال سیستم تاخیر به صورت z^{-k} تعریف می شود که اندازه این تابع تبدیل به ازای $z = e^{j\omega}$ همواره ۱ است و بنابراین یک فیلتر تمام گذر است.

فیلتر تمام گذر مرتبه اول: فرم کلی یک سیستم تمام گذر مرتبه اول به صورت زیر است:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \qquad (۱)$$

پاسخ فرکانسی یک سیستم تمام گذر مرتبه اول با جایگذاری $z = e^{j\omega}$ حاصل می شود:

$$H_{ap}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega}\frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}$$

فیلترهای تمام گذر

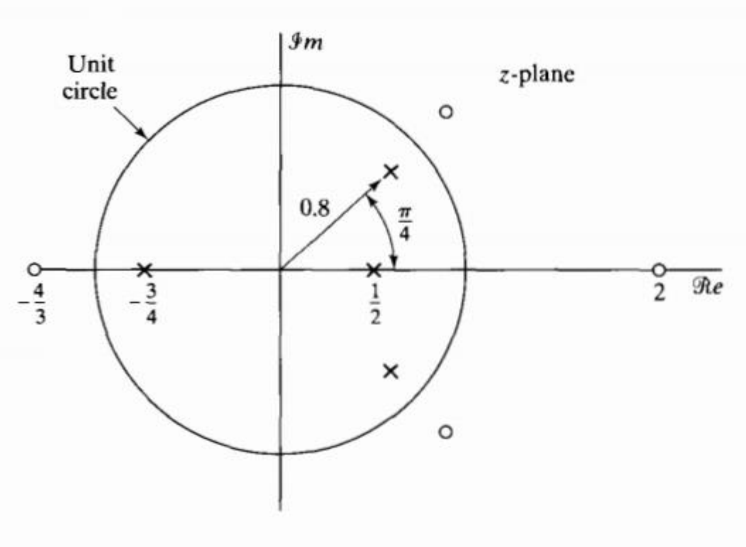
فیلتر تمام گذر مرتبه بالاتر: ضرب N تابع تمام گذر مجددا تمام گذر است:

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \qquad (۲)$$

اگر قطب a_k مختلط باشد حتما مزدوج این قطب نیز موجود است و بنابراین قطب‌ها و صفرها دوتایی هستند. در این صورت:

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - d_k^*}{1 - d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{z^{-1} - e_k^*}{1 - e_k z^{-1}} \frac{z^{-1} - e_k}{1 - e_k^* z^{-1}}$$

که $N = M_r + 2M_c$ است و M_r و M_c به ترتیب تعداد قطب‌های حقیقی و موهومی تابع تبدیل هستند.



فیلترهای تمام گذر

- به ازای هر قطب یک صفر وجود دارد. اگر قطب داخل دایره واحد باشد، صفر متناظر بیرون دایره واحد هست و بالعکس
- اگر سیستم تمام گذر بخواهد سببی باشد باید تمام قطب‌های داخل دایره واحد باشد. پس تمام صفرها بیرون دایره واحد هستند.

بررسی اندازه و فاز فیلترهای تمام گذر:

همان طور که در اسلاید ۲۱ مطرح شد، اندازه فیلتر تمام گذر همواره ثابت و برابر با واحد است. بنابراین به بررسی فاز می پردازیم:

برای یک سیستم تمام گذر مرتبه اول با قطب $a = re^{j\theta}$ داریم:

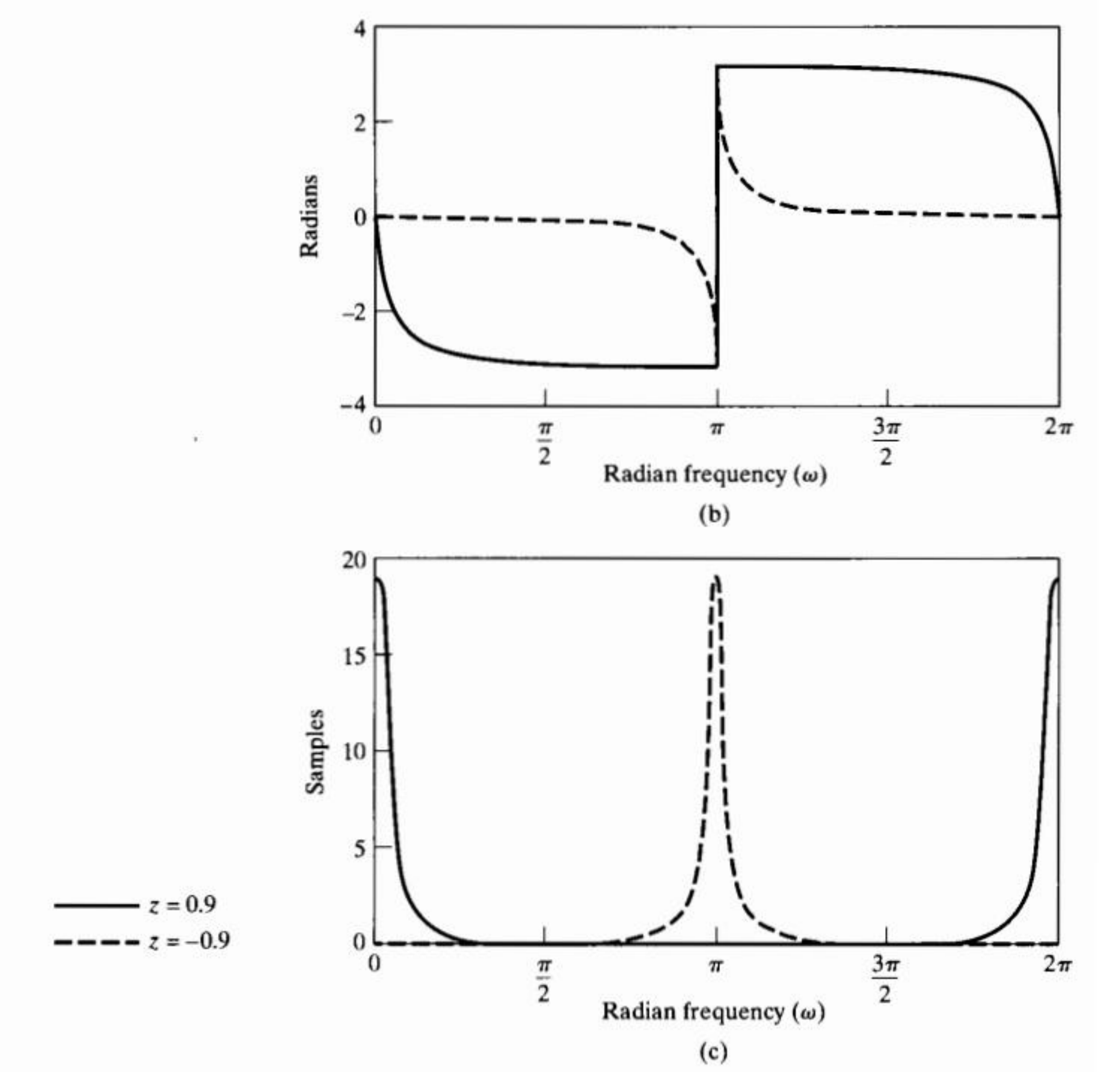
$$\sphericalangle H_{ap1}(e^{j\omega}) = \sphericalangle \frac{(e^{-j\omega} - re^{-j\theta})}{(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})} = -\omega - \tan^{-1}\left(\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1 - r\cos(\omega-\theta)}\right)$$

فیلترهای تمام گذر

مثال از دو سیستم تمام گذر مرتبه اول:

سیستم بالا: یک قطب حقیقی در $z = 0.9$

سیستم پایین یک قطب حقیقی در $z = -0.9$



فیلترهای مینی‌مم فاز

تعریف: یک تابع تبدیل $H(z)$ مینی‌مم فاز نامیده می شود اگر تمام صفرها و تمام قطب‌های این سیستم درون دایره واحد باشد

- دیدیم که برای پایداری و سببیت یک سیستم، تنها کافی است تمام قطب‌ها درون دایره واحد باشند و هیچ شرطی روی صفرها نیاز نبود.
- اگر یک سیستم مینی‌مم فاز باشد، قطعا سببی و پایدار است. علاوه بر این معکوس این سیستم نیز سببی و پایدار است.

- در اسلاید ۱۹ و ۲۰ دیدیم که اگر سیستم به صورت یک تابع کسری باشد آنگاه می‌توان به منظور سببت قطب‌های $H(z)$ را از $C(z)$ بدست آورد ولی درباره صفرها نمی‌توان نظری داد.
- اگر سیستم مینی‌مم فاز باشد می‌توان از روی $C(z) = H(z)^* \left(\frac{1}{z^*}\right)$ به طور یکتا $H(z)$ را تشکیل داد. یعنی فقط از روی اطلاعات اندازه می‌توان $H(z)$ را به طور دقیق مشخص کرد.
- برای این منظور کافی است تمام صفرها و قطب‌های داخل دایره واحد را به $H(z)$ و تمام صفرها و قطب‌های بیرون دایره واحد را به $H^* \left(\frac{1}{z^*}\right)$ تخصیص داد.

فیلترهای مینی‌مم فاز

نکته مهم: هر سیستم **سببی و پایدار** را می‌توان به صورت حاصلضرب یک سیستم مینی‌مم فاز و یک سیستم تمام گذر نوشت:

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

توجیه:

چون سیستم سببی و پایدار هست پس قطعا تمام قطب‌ها داخل دایره واحد هستند. صفرها می‌توانند بیرون دایره واحد باشند.

فرض کنید $H(z)$ تنها یک صفر بیرون دایره واحد در $z = 1/c^*$ دارد که $|c| < 1$ است. داریم:

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*)$$

$H_1(z)$ مینی‌مم فاز است زیرا تمام قطب ها و صفرهای آن درون دایره واحد فرض شده اند. با ضرب $(1 - cz^{-1})$ در صورت و مخرج عبارت بالا داریم:

$$H(z) = H_1(z)(1 - cz^{-1})\left(\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}\right)$$

چون $|c| < 1$ است پس $H_1(z)(1 - cz^{-1})$ همچنان مینی‌مم فاز باقی می‌ماند.

در عوض عبارت $\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}}$ یک سیستم **تمام گذر پایدار و سببی** است که یک قطب در $z = c$ دارد

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

توابع سیستم با معادلات ...

توابع تبدیل کسری

سیستم های تمام گذر

سیستم های مینی‌مم فاز

سیستم هایی با فاز خطی

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

مثال ۴–۵: سیستم زیر را به صورت یک سیستم تمام گذر و یک سیستم مینی‌فاز بنویسید.

$$H(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

حل: صفر سیستم بیرون از دایره واحد است پس قطب متناظر با آن را تشکیل می‌دهیم

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=3\,\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{\frac{1}{3}+z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\rightarrow$$

$$H_{min}(z)=3\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\,,\qquad H_{ap}(z)=\frac{\frac{1}{3}+z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

تمرین: سیستم زیر را به صورت یک سیستم تمام گذر و یک سیستم مینی‌فاز بنویسید.

$$H(z)=\frac{\left(1+\frac{3}{2}e^{\frac{j\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{2}e^{-\frac{j\pi}{4}}z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

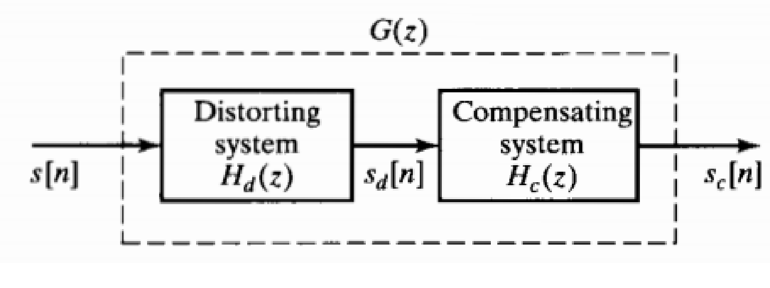
پاسخ فرکانسی سیستم LTI

کاربرد: حذف کامل اعوجاج دامنه

فرض کنید سیستم سببی و پایدار $H_d(z)$ یک اعوجاج دامنه بر روی سیگنال ایجاد کرده است. چون سیستم سببی و پایدار است پس:

$$H_d(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$$

حال سیستم معکوس را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم. واضحا $H_c(z)$ (سیستم جبران کننده) سببی و پایدار است:



$$H_c(z) = \frac{1}{H_{min}(z)}$$

سیستم نهایی به صورت زیر عمل می‌کند:

$$G(z) = H_d(z)H_c(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)\frac{1}{H_{min}(z)} = H_{ap}(z)$$

از آنجا که اندازه فیلتر تمام گذر همواره ۱ هست پس هیچ گونه اعوجاج دامنه ای نداریم و تنها یک تصحیح فاز رخ داده است

سیستم های خطی با فاز خطی تعمیم یافته

- ❖ هیچ سیستم سببی دارای فاز صفر نیست و بنابراین در تمام سیستم‌های سببی یک اعوجاج فاز رخ می‌دهد.
- ❖ از طرفی دیدیم که اگر سیستم به صورت شیفت زمانی باشد، اعوجاج فاز به صورت خطی است.
- ❖ همچنین فاز خطی معادل با تاخیر گروه ثابت است. در این بخش به دنبال فیلترهایی هستیم که دارای فاز خطی باشند.

سیستم با فاز خطی:

فرض کنید پاسخ فرکانسی ی سیستم به صورت $H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}$ است که $\alpha \in R$ است (لزوما یک عدد صحیح نیست).

اندازه و فاز و تاخیر گروه این سیستم برابر است با:

$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1 , \qquad \sphericalangle H_{id}(e^{j\omega}) = -\alpha\omega , \qquad \tau(\omega) = \alpha$$

این یک سیستم با فاز خطی است که پاسخ ضربه آن (عکس تبدیل فوریه $H(e^{j\omega})$) بسته به مقدار α به صورت زیر است:

$$h_{id}[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}, & \alpha \in R \\ \delta[n-\alpha], & \alpha \in Z \end{cases}$$

پاسخ فرکانسی
سیستم LTI

توابع سیستم با
معادلات ...

توابع تبدیل کسری

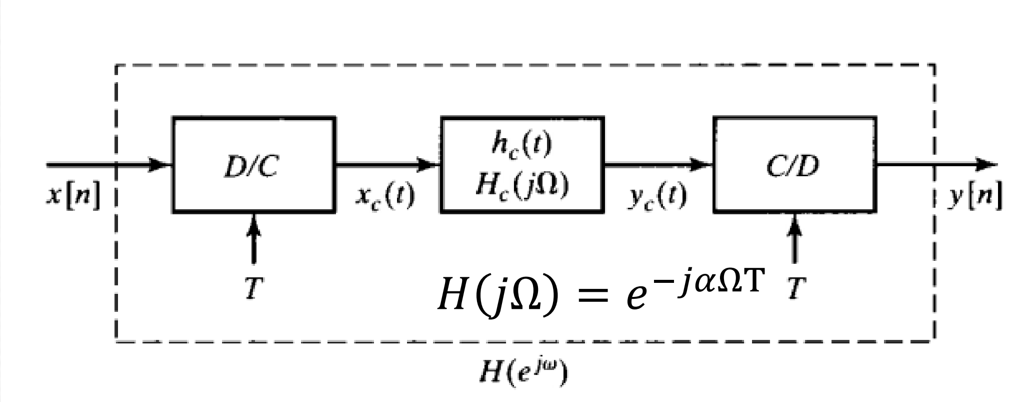
سیستم های
تمام گذر

سیستم های
مینی‌مم فاز

سیستم هایی
با فاز خطی

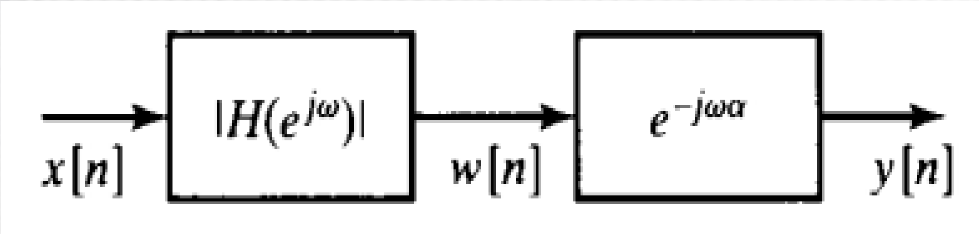
سیستم های خطی با فاز خطی تعمیم یافته

- ❖ اگر $\alpha = n_0 \in Z$ باشد، سیستم به صورت یک شیفت دهند عمل می کند.
- ❖ اگر α عدد صحیح نباشد، همانند این است که سیگنال پیوسته اولیه را به اندازه αT (T بازه نمونه برداری) شیفت داده ایم و سپس از سیگنال پیوسته در زمان با نرخ T نمونه گیری شده است



$$y[n] = x_c(nT - \alpha T)$$

علاوه بر این، اگر یک سیستم با پاسخ فرکانسی کلی و فاز خطی فرض شود، می‌تواند به صورت اتصال سری یک سیستم با فاز صفر و یک سیستم با تاخیر مدل شود:



$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega\alpha}$$

سیستم های خطی با فاز خطی تعمیم یافته

مثال: سیستم پایین‌گذر ایده‌آل با فاز خطی

یک سیستم ایده‌آل پایین گذر به صورت زیر $h[n]=\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$ تعریف می شود. این سیستم را به ازای شیفت‌های مختلف بررسی میکنیم:

الف) $\alpha \in Z$

در این صورت داریم $\alpha = n_d$:

$$h[n]=\frac{\sin \omega_c (n-n_d)}{\pi (n-n_d)}$$

این فیلتر نسبت به n_d تقارن دارد. یعنی

$$h[2n_d-n]=\frac{\sin \omega_c (2n_d-n-n_d)}{\pi (2n_d-n-n_d)}=\frac{\sin \omega_c (n_d-n)}{\pi (n_d-n)}=\frac{\sin \omega_c (n-n_d)}{\pi (n-n_d)}=h[n]$$

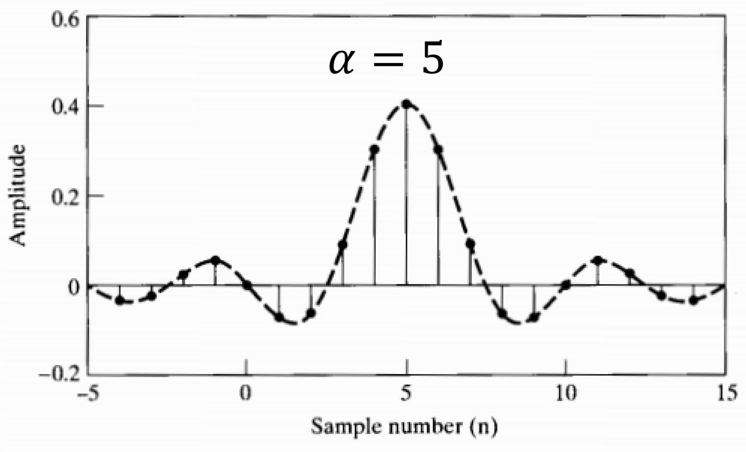
ب) $2\alpha \in Z$

در این حالت نیز سیستم نسبت به α متقارن است اما تقارن حول فضای بین دو نمونه است نه حول یک نمونه.

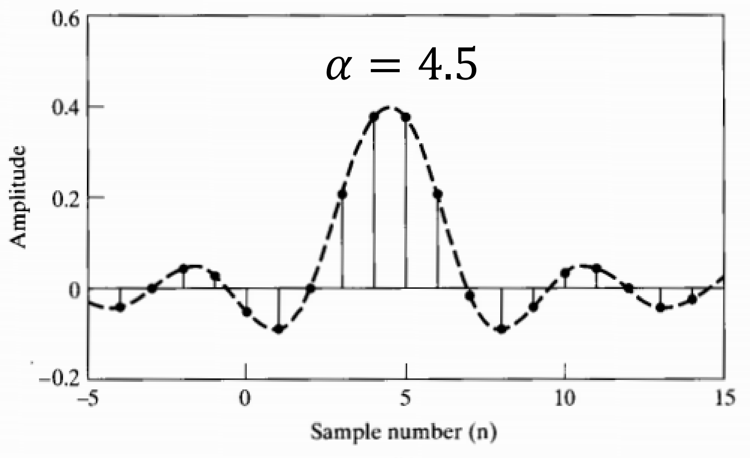
ج) $2\alpha \notin Z$

در این صورت تقارنی در پاسخ ضربه سیستم وجود ندارد.

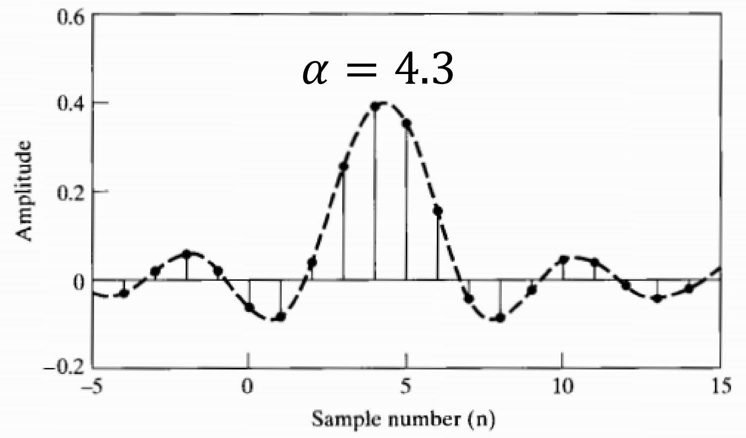
سیستم های خطی با فاز خطی تعمیم یافته



(a)



(b)



(c)

نکته مهم: اگر $2\alpha \in Z$ باشد فاز سیستم **قطعا** خطی است. یعنی این یک شرط **کافی** است اما شرط **لازم** نیست.

یعنی اگر فاز سیستم خطی بود لزوما $2\alpha \in Z$ نیست و می‌تواند هر عدد حقیقی دیگری باشد.

- پاسخ فرکانسی سیستم LTI
- توابع سیستم با معادلات ...
- توابع تبدیل کسری
- سیستم های تمام گذر
- سیستم های مینی‌مم فاز
- سیستم هایی با فاز خطی

سیستم های خطی با فاز خطی تعمیم یافته

سیستم با فاز خطی تعمیم یافته:

تعریف: یک سیستم دارای فاز خطی تعمیم یافته است اگر پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر تعریف شود:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta}$$

که α و β اعداد حقیقی هستند. برای مثال قبل، $\beta = 0$ و $\alpha = 5,4.5,4.3$ در نظرگرفته شده بود.

فاز و تاخیر گروه برای سیستم با فاز خطی تعمیم یافته برابر است با:

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \beta - \alpha\omega \quad |\omega| < \pi \;\rightarrow \tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\sphericalangle H(e^{j\omega}) = \alpha$$

سوال: پاسخ ضربه $h[n]$ باید چه شرایطی داشته باشد که فاز پاسخ فرکانسی آن به صورت خطی تعمیم یافته باشد؟

پاسخ: از رابطه فاز خطی تعمیم یافته داریم:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta} = A(e^{j\omega})\cos(\beta-\alpha\omega) + jA(e^{j\omega})\sin(\beta-\alpha\omega) \qquad (۱)$$

سیستم های خطی با فاز خطی تعمیم یافته

از طرفی می‌توان گفت:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos\omega n - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin\omega n \qquad (۲)$$

فاز سیستم از رابطه (۱) و (۲) را محاسبه می‌کنیم و مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\tan^{-1}\frac{A(e^{j\omega})\sin(\beta-\alpha\omega)}{A(e^{j\omega})\cos(\beta-\alpha\omega)} = -\tan^{-1}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin\omega n}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos\omega n} \rightarrow$$

$$\frac{\sin(\beta-\alpha\omega)}{\cos(\beta-\alpha\omega)} = -\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin\omega n}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos\omega n} \rightarrow$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos\omega n\,\sin(\beta-\alpha\omega) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin\omega n\cos(\beta-\alpha\omega) = 0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,\sin(\omega(n-\alpha)+\beta) = 0 \qquad \forall\omega \in R$$

شرط اعمالی بر روی $h[n]$، α و β برای داشتن فاز خطی تعمیم یافته

سیستم های خطی با فاز خطی تعمیم یافته

حالت الف) $\beta = 0$ یا $\beta = \pi$ و $2\alpha = M \in Z$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin[\omega(n-\alpha)] = 0 \quad \forall \omega \in R$$

تابع سینوس حول α تقارن فرد دارد بنابراین اگر $h[n]$ حول α تقارن زوج داشته باشد، حاصل عبارت بالا همواره صفر است.

$$h[n] = h[2\alpha - n]$$

حالت ب) $\beta = \pi/2$ یا $\beta = 3\pi/2$ و $2\alpha = M \in Z$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cos[\omega(n-\alpha)] = 0 \quad \forall \omega \in R$$

تابع کسینوس حول α تقارن زوج دارد بنابراین اگر $h[n]$ حول α تقارن فرد داشته باشد، حاصل عبارت بالا همواره صفر است.

$$h[2\alpha - n] = -h[n]$$

سیستم های خطی با فاز خطی تعمیم یافته

فیلترهای سببی FIR با فاز خطی تعمیم یافته:

اگر سیستم سببی باشد شرط اسلاید قبل به صورت زیر می باشد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h[n]\ \sin(\omega(n-\alpha)+\beta)=0 \quad \forall\omega\in R$$

و با فرض FIR بودن (به منظور برقراری شرایط تقارنی) داریم:

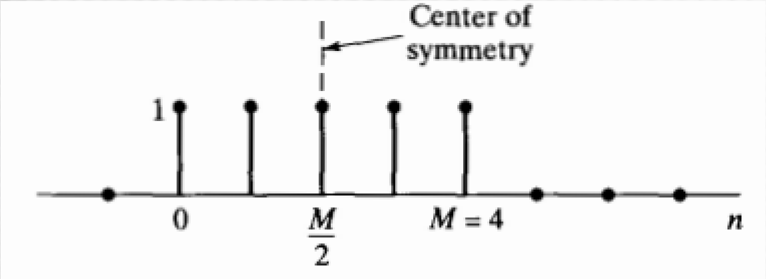
$$h[n]=0\ \ n<0\,,n>M\ \ \rightarrow \sum_{n=0}^{M} h[n]\ \sin(\omega(n-\alpha)+\beta)=0 \quad \forall\omega\in R$$

بر اساس نتایج بدست آمده چهار نوع فیلتر FIR سببی با فاز خطی تعمیم یافته تعریف می شود:

نوع اول (Type I):

در این سیستم‌ها M یک عدد زوج است و تقارن زوج حول $M/2$ داریم یعنی:

$$h[M-n]=h[n]\quad n=0,1,2,\ldots M$$

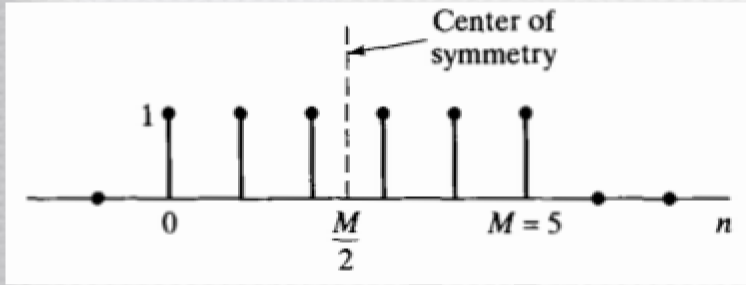


سیستم های خطی با فاز خطی تعمیم یافته

نوع دوم (Type II):

در این سیستم‌ها M یک عدد فرد است و تقارن زوج حول $M/2$ داریم :

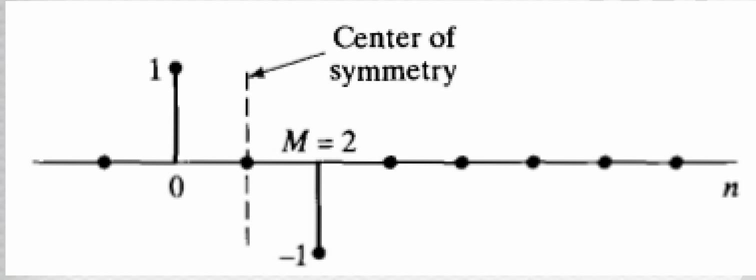
$$h[(M+1)/2-n]=h[n] \quad n=0,1,2,\dots M$$



نوع سوم (Type III):

در این سیستم‌ها M یک عدد زوج است و تقارن فرد حول $M/2$ داریم یعنی:

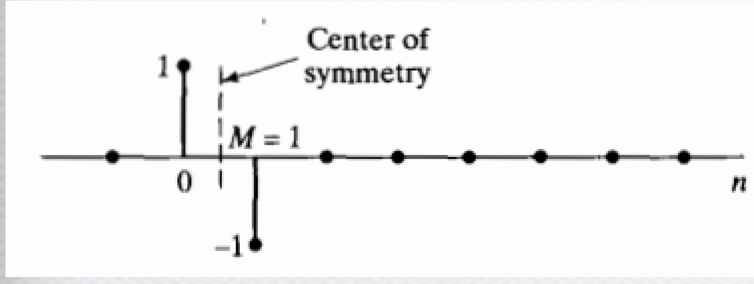
$$h[M-n]=-h[n] \quad n=0,1,2,\dots M$$



نوع چهارم (Type IV):

در این سیستم‌ها M یک عدد فرد است و تقارن فرد حول $M/2$ داریم :

$$h[(M+1)/2-n]=-h[n] \quad n=0,1,2,\dots M$$



سیستم های خطی با فاز خطی تعمیم یافته

تمرین ۱: فرض کنید سیستم $h[n]$ یک سیستم FIR با فاز خطی تعمیم یافته از نوع ۱ یا ۲ باشد. نشان دهید که اگر z_0 صفر سیستم باشد آنگاه $1/z_0$ نیز صفر سیستم است. یعنی: $H(z_0) = 0 \rightarrow H\left(\frac{1}{z_0}\right) = 0$

از این نتیجه نشان دهید که اگر سیستم حقیقی باشد، صفرهای بیرون دایره واحد، تقارن چهارگانه و صفرهای روی دایره تقارن دوگانه دارند

تمرین ۲: فرض کنید سیستم $h[n]$ یک سیستم FIR با فاز خطی تعمیم یافته از نوع ۳ و ۴ باشد. نشان دهید:

$$H(1) = 0$$

$$H(-1) = (-1)^{M+1} H(-1)$$

پاسخ فرکانسی سیستم LTI

توابع سیستم با معادلات ...

توابع تبدیل کسری

سیستم های تمام گذر

سیستم های مینی‌مم فاز

سیستم هایی با فاز خطی

End of Chapter 5