پردازش سیگنال های دیجیتال

فصل سوم
تبدیل Z و خواص آن

ارایه شده توسط:

حجت قیمت گر

استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مطالب

- تبدیل Z
- ویژگی های ناحیه همگرایی
- تبدیل Z سیگنال های مشهور
- تبدیل Z معکوس
- ویژگی های تبدیل Z

تبدیل Z

دو نوع تبدیل Z تعریف می شود:

۱- تبدیل Z (دو طرفه) سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

۲- تبدیل Z یک طرفه سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_{1-sided}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

نکته: اگر $n < 0$ ، $x[n] = 0$ ، آنگاه $X(z) = X_{1-sided}(z)$.

ارتباط تبدیل فوریه با تبدیل Z:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

در حالت کلی $z = r\,e^{j\omega}$ است پس با جایگذاری در رابطه تبدیل Z داریم:

$$z = re^{j\omega} \;\rightarrow\; X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

پس تبدیل Z سیگنال $x[n]$، معادل با تبدیل فوریه سیگنال $x[n]r^{-n}$ است.

یعنی بر اگر در رابطه بالا $r = 1$ انتخاب شود، یعنی، $z = e^{j\omega}$، آنگاه تبدیل فوریه حاصل می شود.

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$$

یعنی بر روی دایره واحد ($r = 1$)، تبدیل Z معادل با تبدیل فوریه است.

تبدیل Z
ویژگی های ناحیه ROC
تبدیل Z سیگنالهای مشهور
تبدیل Z معکوس
ویژگیهای تبدیل Z
۲

تبدیل Z

ارتباط تبدیل فوریه با تبدیل Z:

❖ تبدیل Z دنباله $x[n]$ در صورتی همگرا است که تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ همگرا باشد. واضحا برای هر دنباله $x[n]$ تبدیل فوریه تنها به ازای برخی از مقادیر r همگرا است و به ازای برخی مقادیر همگرا نیست.

❖ گسترده نواحی همگرایی تبدیل Z را به عنوان ROC تبدیل Z تعریف می کنیم. نواحی ROC تبدیل Z همواره به صورت دایره (دایره‌هایی) به مرکز مبدا مختصات مشخص می شوند.

نکته: تبدیل Z تنها با رابطه بالا مشخص نمی شود و باید حتما ناحیه همگرایی هم مشخص شود.

مثال ۱-۳: تبدیل Z سیگنال های زیر را بیابید:

الف) $x_1[n] = a^n u[n]$

ب) $x_2[n] = -a^n u[-n-1]$

حل (الف):

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

به شرطی که $|az^{-1}| < 1$ باشد یا $|z| > |a|$ باشد.

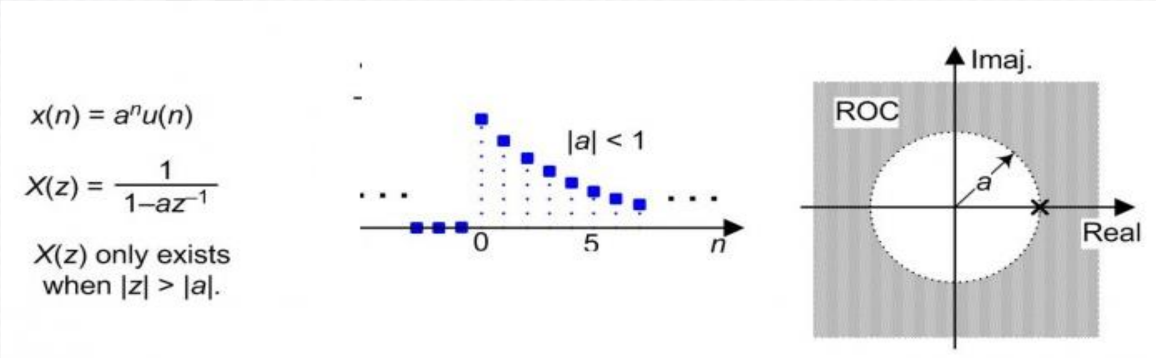
تبدیل Z

ویژگی های ناحیه ROC

تبدیل Z سیگنالهای مشهور

تبدیل Z معکوس

ویژگیهای تبدیل Z

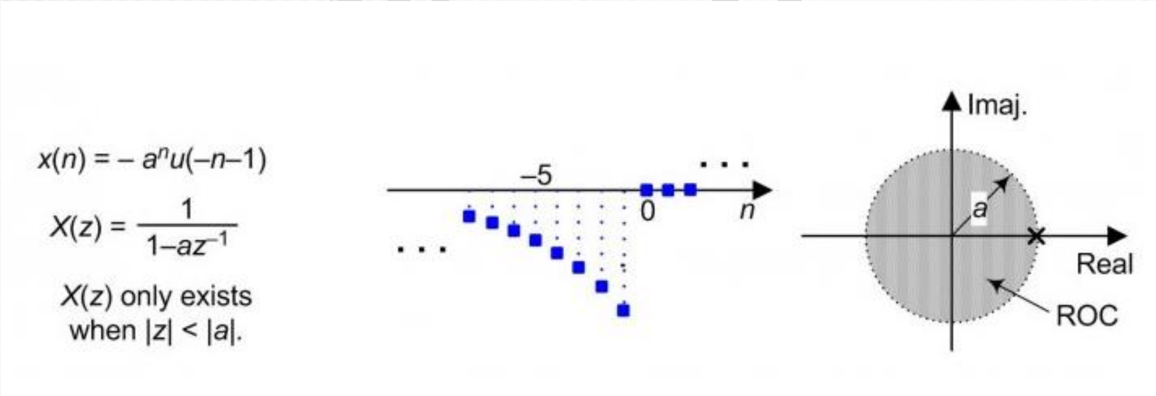


حل (ب):

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^nz^{-n}=-\sum_{m=1}^{\infty}(a^{-1}z)^m=-a^{-1}z\frac{1}{1-a^{-1}z}$$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

به شرطی که $|a^{-1}z|<1$ باشد یا $|z|<|a|$ باشد.



مثال ۲-۳: تبدیل Z سیگنال های زیر را بیابید:

الف) $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

ب) $x_2[n] = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

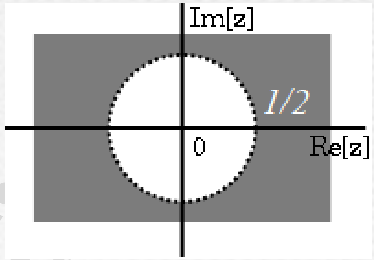
پ) $x_3[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + -\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

حل:

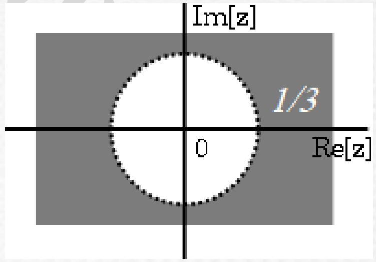
در هر سه مثال بالا ابتدا تبدیل Z و ناحیه همگرایی هر ترم را جداگانه حساب می کنیم. **اگر** ناحیه همگرایی مشترک داشتند آنگاه تبدیل Z نهایی را محاسبه میکنیم.

(الف) از مثال ۳-۱ (الف) و (ب) می دانیم که:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}} \quad , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

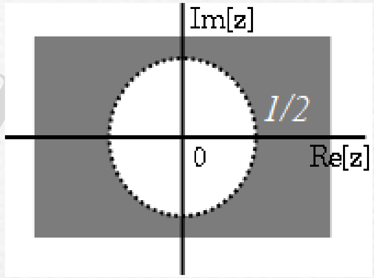


$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} \quad , \quad |z| > \frac{1}{3}$$



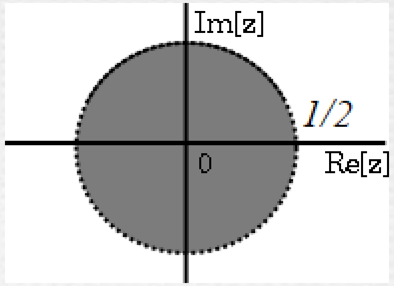
ناحیه مشترک به ازای $|z| > \frac{1}{2}$ بدست می‌آید پس تبدیل Z نهایی برابر است با:

$$X_1(z) = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}} + \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} = \frac{2-\frac{1}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}} \,, |z| > \frac{1}{2}$$

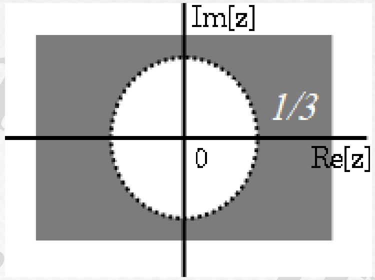


ب) از مثال ۳-۱ (الف) و (ب) می دانیم که:

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)z^{-1}} \quad , \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

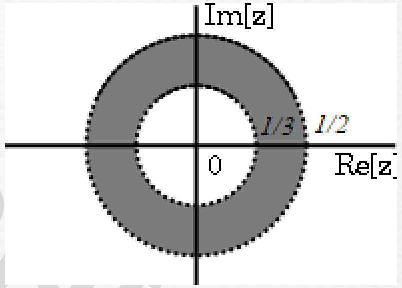


$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} \quad , \qquad |z| > \frac{1}{3}$$



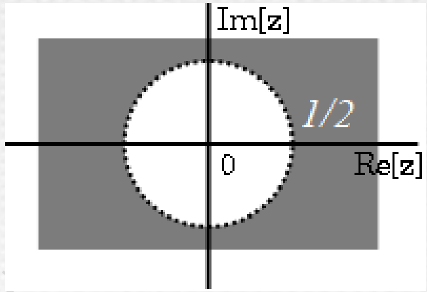
ناحیه مشترک به ازای $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$ بدست می‌آید پس تبدیل Z نهایی برابر است با:

$$X_2(z) = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)z^{-1}} + \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} = \frac{2+\frac{5}{6}z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} \quad , \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

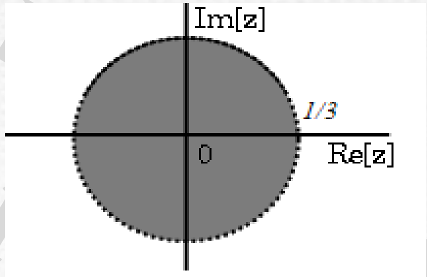


(ب) از مثال ۳-۱ (الف) و (ب) می دانیم که:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}} \;, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$



$$-\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}} \;, \qquad |z| < \frac{1}{3}$$



ناحیه مشترکی بین $|z| > \frac{1}{2}$ و $|z| < \frac{1}{3}$ تعریف نمی‌شود. بنابراین $x_3[n]$ تبدیل Z ندارد.

ویژگی های ناحیه همگرایی ROC

هشت ویژگی ناحیه همگرایی عبارتند از

ویژگی ۱: ناحیه همگرایی تبدیل Z به صورت ناحیه بیرون دایره، ناحیه درون ناحیه، یا ناحیه بین دو دایره تعریف می شود.

$$0 \le r_R \le |z| \le r_L \le \infty$$

ویژگی ۲: تبدیل فوریه دنباله $x[n]$ مطلقا همگرا است اگر و تنها اگر ناحیه ROC شامل دایره واحد شود..

ویژگی ۳: ناحیه همگرایی ROC نمی‌تواند شامل قطب باشد.

ویژگی ۴: اگر $x[n]$ یک دنباله با طول محدود باشد، آنگاه ناحیه همگرایی آن کل صفحه z را شامل میشود به جز نقاط $z = 0$ و $z = \infty$ که باید جداگانه بررسی شوند.

ویژگی ۵: اگر $x[n]$ یک دنباله دست راستی باشد و $|z| = r_0$ جز ناحیه همگرایی باشد آنگاه تمام مقادیر $|z| > r_0$ هم جز ناحیه همگرایی است.

به عبارت دیگر اگر $x[n]$ دست راستی باشد، ROC به صورت خارج یک دایره تعریف می شود.

ویژگی های ناحیه همگرایی ROC

ویژگی ۶: اگر $x[n]$ یک دنباله دست چپی باشد و $|z| = r_0$ جز ناحیه همگرایی باشد آنگاه تمام مقادیر $|z| < r_0$ هم جز ناحیه همگرایی است.

به عبارت دیگر اگر $x[n]$ دست چپی باشد، ROC به صورت داخل یک دایره تعریف می شود.

ویژگی ۷: اگر $x[n]$ یک دنباله دو طرفه با طول نامحدود باشد یعنی $x[n], -\infty \le n \le \infty$ باشد، ROC به صورت ناحیه بین یک دایره تعریف می شود که البته شامل هیچ قطبی نمی باشد

ویژگی ۸: ناحیه همگرایی همواره همبند است.

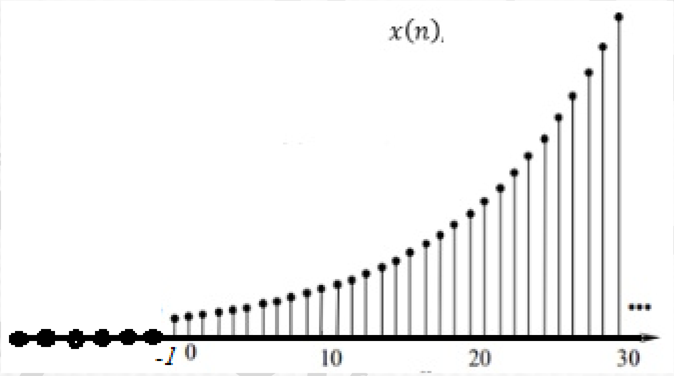
سوال ۳-۳: آیا اگر $x[n]$ دست راستی باشد (ویژگی ۵)، ناحیه همگرایی شامل بینهایت می شود؟

مشابها اگر $x[n]$ دست چپی باشد، آیا ناحیه همگرایی شامل صفر می شود؟

ویژگی های ناحیه همگرایی ROC

پاسخ (الف): لزوما اگر $x[n]$ یک دنباله دست راستی باشد، لزوما ناحیه همگرایی شامل $|z| = \infty$ نمی شود:

برای مثال فرض کنید $x[n] = 2^{n+1}u[n+1]$ باشد، در این صورت داریم:



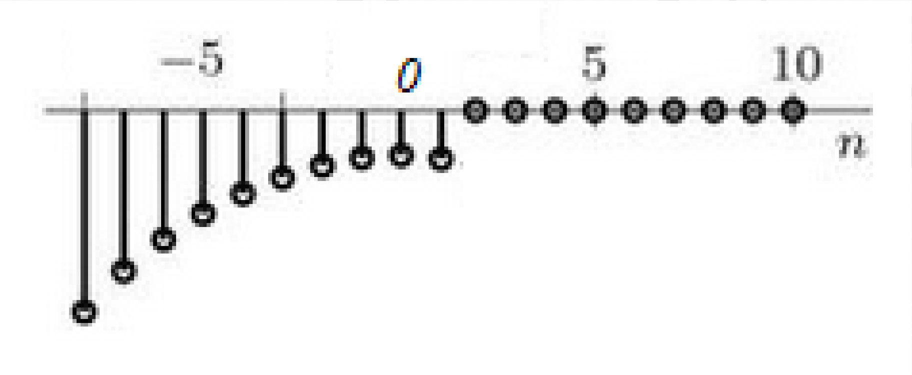
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-1}^{\infty} 2^{n+1}z^{-n} = z^{+1} + 2 + 4z^{-1} + 8z^{-2} + \cdots$$

واضحا وقتی $z \to \infty$ آنگاه $X(z) \to \infty$ پس در $z = \infty$ واگرایی رخ می‌دهد.

ویژگی های ناحیه همگرایی ROC

پاسخ (ب): لزوما اگر $x[n]$ یک دنباله دست چپی باشد، لزوما ناحیه همگرایی شامل $|z| = 0$ نمی شود:

برای مثال فرض کنید $u[-n+1]$ $x_b[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ باشد، در این صورت داریم:



$$X_b(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b[n]z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} z^{-n} = \cdots + 8z^2 + 4z + 2 + z^{-1}$$

واضحا وقتی $z \to 0$ آنگاه $X(z) \to 0$ پس در $z = 0$ واگرایی رخ می‌دهد.

تبدیل Z

ویژگی های ناحیه ROC

تبدیل Z سیگنالهای مشهور

تبدیل Z معکوس

ویژگیهای تبدیل Z

ویژگی های ناحیه همگرایی ROC

پایداری بر اساس تبدیل Z:

در فصل دوم دیدیم که یک سیستم (فیلتر) LTI در صورتی پایدار است که مطلقا جمع پذیر باشد:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

این شرط معادل این است که ROC تبدیل Z شامل دایره واحد شود.

توجیه:

بر روی دایره واحد $z = e^{j\omega}$ است. بنابراین داریم:

$$|H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}\right|_{z=e^{j\omega}} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]||e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$$

شرط پایداری این است که $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| < \infty$ شود. پس

$$|H(z)|_{z=e^{j\omega}} < \infty$$

یعنی ROC شامل دایره واحد است.

تبدیل Z
ویژگی های ناحیه ROC
تبدیل Z سیگنالهای مشهور
تبدیل Z معکوس
ویژگیهای تبدیل Z

ویژگی های ناحیه همگرایی ROC

سببت بر اساس تبدیل Z:

در فصل دوم دیدیم که یک سیستم (فیلتر) LTI در صورتی سببی است که:

$$h[n] = 0 \quad , \qquad \forall\, n < 0$$

این شرط معادل این است که ROC تبدیل Z بیرون یک دایره تعریف شود و بینهایت در ROC باشد.

توجیه:

فرض می کنیم سیستم سببی است، نشان می دهیم ROC شامل بینهایت است:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \cdots$$

به ازای $n \geq 0$، هیچ توان مثبتی از z موجود نیست. پس ROC شامل بینهایت است و بنابراین ROC بیرون یک دایره تعریف شده است.

تبدیل Z سیگنال های مشهور

TABLE 3.1 SOME COMMON z-TRANSFORM PAIRS

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m>0$) or ∞ (if $m<0$)
5. $a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7. $na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0\le n\le N-1,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

عکس تبدیل Z

۱- بسط کسرهای جزیی

فرض کنید $X(z)$ به صورت نسبت دو چندجمله‌ای بر حسب z^{-1} بیان شده است:

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

اگر صورت و مخرج، برحسب عبارت‌های درجه اول بر حسب z^{-1} $(1 - c_k z^{-1})$ یا $(1 - d_k z^{-1})$ بنویسیم داریم:

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

که c_k ها صفرهای غیرصفر و d_k ها قطب‌های غیرصفر $X(z)$ هستند.

سه حالت رخ می دهد:

الف) اگر درجه صورت از مخرج کمتر باشد یعنی $M < N$ و d_k همگی مرتبه اول باشند، آنگاه میتوان عبارت بالا با روش تفکیک کسر، به عبارتهای درجه ۱ بسط داد:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})}$$

و عکس تبدیل Z عبارتهای درجه ۱ را میتوان از جدول تبدیل Z یافت

عکس تبدیل Z

مثال ۴–۳: عکس تبدیل Z زیر را بیابید:

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \quad ,|z| > \frac{1}{2}$$

پاسخ : با توجه به اینکه $M = 0$ و $N = 2$ است پس با روش تفکیک کسرها ادامه می‌دهیم:

$$X(z) = \frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

محاسبه A_1,A_2:

$$A_1 = \lim_{z\to\frac{1}{4}}\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z) = \lim_{z\to\frac{1}{4}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = -1$$

$$A_2 = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = 2$$

عکس تبدیل Z

با جایگذاری داریم:

$$X(z)=\frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

چون ناحیه همگرایی برای $|z|>\frac{1}{2}$ تعریف شده است بنابراین:

$$Z^{-1}\left\{\frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right\}=-\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad , \quad Z^{-1}\left\{\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}=2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

پس

$$x[n]=-\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

عکس تبدیل Z

ب) اگر درجه صورت از مخرج بیشتر یا مساوی باشد یعنی $M \geq N$ و d_k همگی مرتبه اول باشند، آنگاه باید ابتدا خارج قسمت را به عنوان یک ترم مرتبه اول جدا کرد و سپس باقیمانده را با روش تفکیک کسر، به عبارتهای درجه ۱ بسط داد:

$$X(z)=\sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{(1-d_k z^{-1})}$$

پ) اگر درجه صورت از مخرج بیشتر یا مساوی باشد یعنی $M \geq N$ و چندین قطب با مرتبه بیشتر از یک موجود باشند، آنگاه باید ابتدا خارج قسمت را به عنوان یک ترم مرتبه اول جدا کرد و سپس عبارت باقیمانده با روش تفکیک کسر، به عبارتهای درجه ۱ و درجه بالاتر بسط داد.

برای مثال فرض کنید تنها یک قطب مرتبه بالاتر در $z=d_i$ موجود است که مرتبه این قطب s است. در این صورت داریم:

$$X(z)=\sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k}+\sum_{k=1,k\neq i}^{N}\frac{A_k}{(1-d_k z^{-1})}+\sum_{m=1}^{s}\frac{C_m}{(1-d_i z^{-1})^m}$$

که

$$C_m=\frac{1}{(s-m)!\,(-d_i)^{s-m}}\left\{\frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}}\left[(1-d_i w)^s X(w^{-1})\right]\right\}_{w=d_i^{-1}}$$

عکس تبدیل Z

مثال ۵-۳: عکس تبدیل Z زیر را بیابید:

$$X(z)=\frac{(1+z^{-1})^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}\quad ,|z|>1$$

پاسخ : با توجه به اینکه $M=2$ و $N=2$ است و قطب مکرر نداریم (حالت ب)، پس با روش تفکیک کسرها ادامه می‌دهیم:

$$X(z)=B_0+\frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

پس

$$X(z)=2+\frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}$$

حال عبارت باقیمانده را تفکیک می‌کنیم:

تبدیل Z

ویژگی های ناحیه ROC

تبدیل Z سیگنالهای مشهور

تبدیل Z معکوس

ویژگیهای تبدیل Z

عکس تبدیل Z

$$X(z) = 2 + \frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

محاسبه A_1,A_2:

$$A_1 = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{-1+5z^{-1}}{1-z^{-1}} = -9$$

$$A_2 = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{-1+5z^{-1}}{1-z^{-1}} = 8$$

با جایگذاری داریم:

$$X(z) = 2 + \frac{-9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1-z^{-1}}$$

چون ناحیه همگرایی برای $|z|>1$ تعریف شده است بنابراین:

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n]$$

عکس تبدیل Z

$$X(z) = \sum_{(k=-\infty)}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

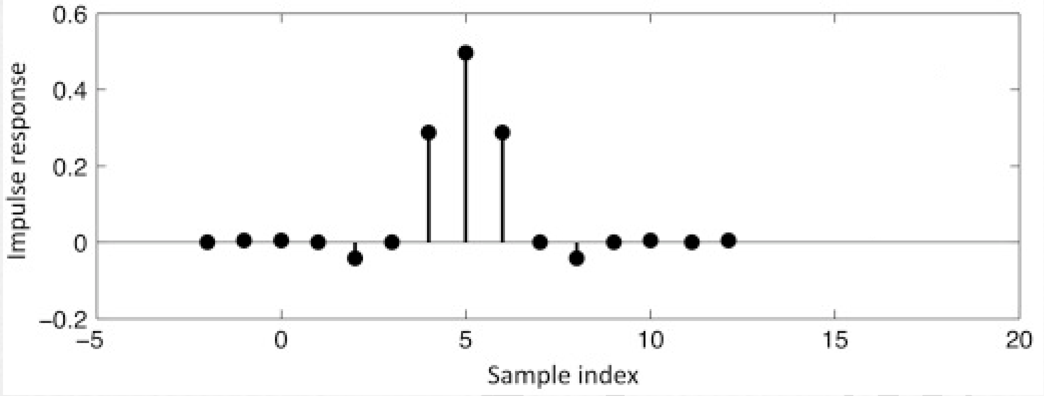
حالت خاص (تبدیل Z عبارتهای نمایی):

فرض کنید $N = 0$ باشد. در این صورت تنها ترم صورت موجود است یعنی

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M} c_k z^{-k} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_M z^{-M}$$

در این صورت عکس تبدیل Z به صورت مجموع چندین ضربه می شود:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = c_0\delta[n] + c_1\delta[n-1] + c_2\delta[n-2] + \cdots + c_M\delta[n-M]$$



یعنی طول سیگنال $x[n]$ محدود است.

تبدیل Z

ویژگی های ناحیه ROC

تبدیل Z سیگنالهای مشهور

تبدیل Z معکوس

ویژگیهای تبدیل Z

عکس تبدیل Z

۲- انتگرال گیری

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c} X(z)z^{n-1}dz$$

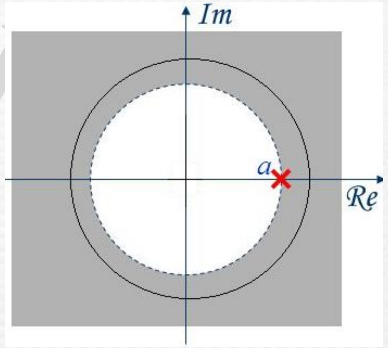
$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c\prime} X\left(\frac{1}{p}\right)(p)^{-n+1}dp$$

که c مسیر بسته باید یک دایره به مرکز مبدا مختصات و درون ناحیه همگرایی در جهت پاد ساعتگرد با شعاع a تعریف شود و c' یک مسیر بسته است که با شعاع $1/a$

مثال ۶-۳: عکس تبدیل Z زیر را با روش انتگرال گیری محاسبه کنید.

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad ,|z|>\frac{1}{4}$$

پاسخ : از انتگرال مانده ها داریم:



$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}z^{n-1}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint \frac{z^{n}}{\left(z-\frac{1}{4}\right)}dz$$

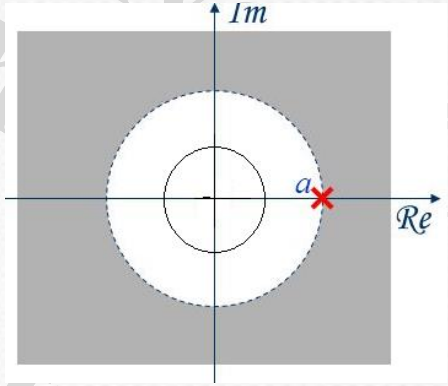
عکس تبدیل Z

با فرض $n \geq 0$، انتگرال بالا قابل محاسبه است. مانده $z = \frac{1}{4}$ برابر است با:

$$Res\left\{\frac{z^n}{z-\frac{1}{4}}\right\} = \lim_{z\to\frac{1}{4}}\left(z-\frac{1}{4}\right)\frac{z^n}{z-\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad , n \geq 0$$

برای $n < 0$ باید از انتگرال دوم استفاده کنیم:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{1}{1-\frac{1}{4}p}(p)^{-n+1}dp$$



$$x[n] = 0 \quad n < 0$$

پس در کل داریم:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

تبدیل Z

ویژگی های ناحیه ROC

تبدیل Z سیگنالهای مشهور

تبدیل Z معکوس

ویژگیهای تبدیل Z

ویژگی‌های تبدیل Z

SOME z-TRANSFORM PROPERTIES

Section Reference	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
3.4.1	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
3.4.2	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|R_x$
3.4.4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	Contains R_x
	$\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$	Contains R_x
3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
3.4.7	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
3.4.8	Initial-value theorem:		
	$x[n]=0, \quad n<0$	$\lim_{z\to\infty} X(z)=x[0]$	

ویژگی‌های تبدیل Z

مثال ۷-۳: عکس تبدیل زیر عبارت زیر را بیابید:

$$X(z)=\frac{1}{z-\frac{1}{4}}$$

حل: ابتدا با بسط کسرهای جزیی مساله را حل می‌کنیم:

$$X(z)=\frac{1}{z-\dfrac{1}{4}}=\frac{z^{-1}}{1-\dfrac{1}{4}z^{-1}}$$

درجه صورت و مخرج با هم برابر است (حالت دوم) پس باید خارج قسمت و باقیمانده محاسبه شود:

$$X(z)=-4+\frac{4}{1-\dfrac{1}{4}z^{-1}}$$

پس:

$$x[n]=-4\,\delta[n]+4\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

دانشگاه خلیج فارس بوشهر

تبدیل Z

ویژگی های ناحیه ROC

تبدیل Z سیگنالهای مشهور

تبدیل Z معکوس

ویژگیهای تبدیل Z

ویژگی‌های تبدیل Z

حل با استفاده از خواص تبدیل Z: از ویژگی شیفت زمانی داریم:

$$y[n] \to Y(z) \qquad Then: y[n-n_0] = Y(z)z^{-n_0}$$

حال عبارت $X(z)$ را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$X(z) = z^{-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)$$

پس:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

نشان می‌دهیم دو رابطه بدست آمده معادل هم هستند:

$$x[n] = -4\delta[n] + 4\left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n] = -4\delta[n] + 4\delta[n] + 4\left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n-1]$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

مثال ۸–۳: تبدیل Z سیگنال زیر را بیابید:

$$x[n] = r_0^n \cos \omega_0 n\, u[n] \quad , r_0 > 0$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

حل: می‌دانیم که

$$a^n u[n] \rightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC: |z| > |a|$$

$x[n]$ را می‌توان به صورت مجموع دو نمایی نوشت:

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(r_0 e^{j\omega_0}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(r_0 e^{-j\omega_0}\right)^n u[n]$$

پس داریم:

$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - r_0\, e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - r_0\, e^{-j\omega_0} z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1 - r_0 \cos \omega_0 n\ z^{-1}}{1 - 2r_0 \cos \omega_0 n\, z^{-1} + r_0^2 z^{-2}} \quad , \qquad ROC : |z| > r_0$$

ویژگی‌های تبدیل Z

مثال ۹-۳: عکس تبدیل زیر عبارت زیر را بیابید:

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) \quad ROC: |z| > |a|$$

حل: یادآوری: از ویژگی تبدیل Z می دانیم که:

$$y[n] = nx[n] \quad \rightarrow \quad Y(z) = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

ابتدا مشتق $X(z)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{-az^{-2}}{1 + az^{-1}}$$

$Y(z)$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$Y(z) = -z\frac{d}{dz}X(z) = \frac{a\,z^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

عکس تبدیل Z عبارت بالا با توجه به ناحیه همگرایی $|z| > |a|$ برابر است با:

$$y[n] = a\,(-a)^{n-1}u[n-1]$$

پس

$$nx[n] = y[n] \;\rightarrow x[n] = \frac{a}{n}(-a)^{n-1}u[n-1]$$

End of Chapter 3