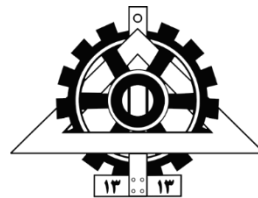




به نام خدا
دانشکده فنی دانشگاه تهران
دانشکده برق و کامپیوتر



تمرین کامپیوتری دوم

ریاضیات مهندسی

حل معادلات PDE به کمک نرم افزار MATLAB

دکتر طالع ماسوله

نیم سال دوم ۹۹-۰۰

طراح: علی ساعی زاده

ایمیل: alisaei90@gmail.com

به نکات تکمیلی در انتها توجه بفرمایید.

در درس ریاضیات مهندسی با معادلات PDE آشنا شدید. معادلات دیفرانسیل در علوم پایه نظیر ریاضی، علوم کامپیوتر، فیزیک، شیمی، زیست شناسی و ستاره شناسی و همچنین علوم مهندسی نظیر مکانیک، برق، مواد و مهندسی شیمی کاربردی گسترده و حضوری چشمگیر دارند. در این [لینک](#) می توانید بخش کوچکی از کاربردهای معادلات PDE را ببینید. این معادلات با توجه به نوع معادله و شرایط مرزی تنوع زیادی دارند. در این تمرین کامپیوتری سعی داریم بخشی از این معادلات که در درس بررسی شده اند را به کمک نرم افزار MATLAB حل و تحلیل کنیم.

بخش اول: حل معادله حرارت

معادله حرارت بیانگر روابط حاکم بر توزیع دما در یک دامنه است. با دیدن این [لینک](#) می توانید دید کلی نسبت به این بخش پیدا کنید. برای حل معادله حرارت باید شرایط اولیه و شرایط مرزی مشخص باشند. معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$u_t = O^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq M\pi, \quad t \geq 0$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = e^{-Mt} \\ u_x(2\pi, t) = e^{-Nt} \end{cases}, \quad u(x, 0) = \sin^2(x)$$

$$M: (\text{رقم یکان شماره دانشجویی}) \%3 + 1$$

$$N: (\text{رقم دهگان شماره دانشجویی}) \%3 + 1$$

$$O: (\text{رقم صدگان شماره دانشجویی}) \%3 + 1$$

تابع `pdepe` نرم افزار MATLAB برای حل معادلات با مشتقات جزئی `parabolic` و یا `elliptic` استفاده می شود. برای یادگیری نحوه استفاده از این تابع می توانید به [help نرم افزار MATLAB برای این تابع](#) مراجعه کنید. برای پیاده سازی معادله در محیط MATLAB باید معادله اصلی، شرایط مرزی و شرایط اولیه را با توجه توضیحات MATLAB و فرمی که تابع `pdepe` از ما انتظار دارد تعریف کنیم.

معادله:

با توجه به توضیحات MATLAB معادله PDE باید به فرم زیر تعریف شود:

$$c\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right) + s\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

پارامتر `m` شکل مساله را مشخص می کند. توابع $c(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$ ، $f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$ و $s(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$ را باید با توجه به معادله مد نظر تعریف کنیم. برای تعریف این توابع باید آن ها را به عنوان ورودی دوم به تابع `pdepe` بدهیم.

```
function [c, f, s] = pdefun(x, t, u, dudx)
c = ...;
f = ...;
s = ...;
end
```

شرایط مرزی:

شرایط مرزی باید به فرم زیر تعریف شوند:

$$p(x, t, u) + q(x, t) f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

تابع $f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial u}{\partial x}$ همان تابعی است که برای معادله PDE تعریف شده. فرض کنید تابع f به صورت $f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial u}{\partial x}$ تعریف شده باشد. اگر بخواهیم شرط مرزی $u_x(0, t) = t$ را تعریف کنیم، باید تابع p و q را به صورت $p(x, t, u) = -t$ و $q(x, t) = 1$ تعریف کنیم. توجه کنید که با این انتخاب p و q مشخص نیست که در $x = 0$ این شرط برقرار است، بنابراین توابع p_l و q_l برای تعریف شرط مرزی چپ و توابع p_r و q_r برای تعریف شرط مرزی راست استفاده می‌شود. این توابع به عنوان ورودی چهارم به تابع $pdepe$ داده می‌شوند.

```
function [pl, ql, pr, qr] = bcfun(xl, ul, xr, ur, t)
pl = ...;
ql = ...;
pr = ...;
qr = ...;
end
```

شرایط اولیه:

شرط اولیه (با توجه به اینکه معادله حرارت است و تنها یک بعد مد نظر است، تنها یک شرط اولیه داریم) باید به فرم زیر تعریف شود:

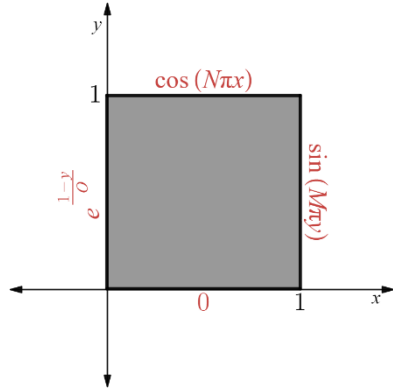
$$u(x, t_0) = u_0(x)$$

تابع $u_0(x)$ به عنوان ورودی سوم به تابع $pdepe$ داده می‌شود.

```
function u = icfun(x)
u = ...;
end
```

- معادله حرارت را به صورت دستی حل کنید و راه حل را در گزارش ارائه دهید.
- از نظر فیزیکی، جواب بدست آمده و راه حل خود را به طور مختصر تحلیل کنید.
- تابع $pdefun$ را پیاده‌سازی کنید.
- تابع $icfun$ را پیاده‌سازی کنید.
- تابع $bcfun$ را پیاده‌سازی کنید.
- نمودار دما بر حسب زمان را در مرکز میله رسم کنید.
- نمودار سه بعدی دما (محور Z) بر حسب مکان (محور X) و زمان (محور Y) رسم کنید.
- حل دستی خود را به ازای سری از $n = 1$ تا $n = 50$ در محیط MATLAB در نمودار سه بعدی رسم کنید.
- اختلاف خروجی $pdepe$ و حل دستی را به صورت نمودار سه بعدی رسم کنید.

بخش دوم: حل عددی معادله لاپلاس



یک ناحیه مربعی با اضلاع یک متر را در نظر بگیرید. اضلاع این ناحیه مربعی فلزی هستند و پتانسیل الکتریکی آنها مطابق شکل روبرو است. قصد داریم مقادیر ولتاژ را در نقاط مختلف به کمک MATLAB بدست بیاوریم.

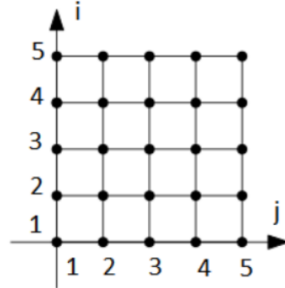
$$M: (3 + 1) \% \text{ (رقم یکان شماره دانشجویی)}$$

$$N: (3 + 1) \% \text{ (رقم دهگان شماره دانشجویی)}$$

$$O: (3 + 1) \% \text{ (رقم صدگان شماره دانشجویی)}$$

در این قسمت قصد داریم تا معادله لاپلاس را به صورت عددی حل نماییم. برای این کار ابتدا ناحیه موردنظر را به مربع های کوچک کنار هم تبدیل می کنیم. طول و عرض به ترتیب به N_x و N_y قسمت تقسیم می شوند. به شکل توجه کنید.

$$N_x = N_y = 5$$



قصد داریم تا مقدار پتانسیل را در نقاط تقاطع به دست آوریم. برای این کار پتانسیل هر نقطه را به صورت میانگینی از پتانسیل نقاط اطرافش می نویسیم.

$$\phi_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}}{4}$$

معادله بالا را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = 0$$

این معادله برای تمام نقاط داخلی برقرار است. منظور از نقاط داخلی نقاطی است که روی اضلاع قرار ندارند.

فرض کنید قصد داریم تا پتانسیل را در نقطه (3,4) به دست آوریم. با توجه به شکل معادله بالا برای این نقطه به صورت زیر نوشته می شود.

$$\phi_{4,4} + \phi_{2,4} + \phi_{3,5} + \phi_{3,3} - 4\phi_{3,4} = 0$$

بنابراین یک دسته معادله خواهیم داشت که مربوط به نقاط داخلی هستند. دسته دیگر معادلات مربوط به نقاط مرزی هستند که مقدار پتانسیل در آن نقاط را خود مسئله داده است. فرض کنید مقدار پتانسیل در ضلع سمت راست برابر پنج ولت است. در این صورت معادلات زیر را برای نقاط مرزی ضلع سمت راست داریم.

$$\phi_{1,5} = \phi_{2,5} = \phi_{3,5} = \phi_{4,5} = \phi_{5,5} = 5$$

برای نقاط مرزی ضلع چپ معادلات زیر را داریم:

$$\phi_{1,1} = \phi_{2,1} = \phi_{3,1} = \phi_{4,1} = \phi_{5,1} = 0$$

حال بردار ϕ را بصورت زیر در نظر میگیریم:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \\ \phi_{3,1} \\ \vdots \\ \phi_{N_y, N_x} \end{bmatrix}$$

در بردار ϕ ابتدا مقادیر پتانسیل مربوط به ستون اول قرار داده شده‌اند. سپس ستون دوم و سپس ستون سوم و در انتها مقادیر پتانسیل مربوط به ستون آخر (پتانسیل مربوط به نقاط مرزی ضلع سمت راست) آمده است.

ماتریس A را ماتریس ضرایب دسته معادلات داخلی و مرزی تعریف می‌کنیم. ماتریس A یک ماتریس مربعی با $N_y \times N_x$ ردیف و ستون خواهد بود (چرا؟). بردار U را بردار جواب‌های معادلات تعریف می‌کنیم. بنابراین شکل کلی معادلات به صورت زیر خواهد بود.

$$A\phi = U$$

برای مثال اگر بخواهیم معادله مربوط به نقطه مرزی $\phi_{1,1}$ را بنویسیم خواهیم داشت:

$$\phi_{1,1} = 0$$

مقدار پتانسیل سایر نقاط در این معادله حضور ندارد بنابراین ضرایب مربوط به آنها صفر است. در این صورت ردیف اول ماتریس A به صورت زیر خواهد بود.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & ? \end{bmatrix}$$

ماتریس U نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ ? \end{bmatrix}$$

قصد داریم تا معادله مربوط به نقطه داخلی $(2,2)$ را بنویسیم. داریم:

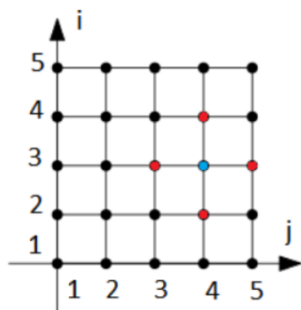
$$\phi_{2,1} + \phi_{1,2} - 4\phi_{2,2} + \phi_{3,2} + \phi_{2,3} = 0$$

بنابراین در ماتریس A یک ردیف همانند بردار زیر خواهد بود:

$$[0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad -4 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0]$$

پس از کامل کردن ماتریسهای A و U مقادیر پتانسیل برابر است با:

$$\phi = A^{-1}U$$



- یک صفحه جدید باز کنید سپس ماتریس های \mathbf{A} و \mathbf{U} را تعریف کنید.
- با توجه به معادلات نقاط مرزی ماتریس های \mathbf{A} و \mathbf{U} را مقداردهی نمایید.
- با توجه به معادلات نقاط داخلی ماتریس های \mathbf{A} و \mathbf{U} را مقداردهی نمایید.
- مقدار پتانسیل را در نقاط مختلف به دست آورید و با دستور `imagesc` نمایش دهید.
- مقدار پتانسیل الکتریکی در نقاط مختلف را به دست آورید و نمایش دهید.

نکات تکمیلی در مورد تمارین کامپیوتری

- در صورت وجود هرگونه سوال و ابهام، از طریق ایمیل با من در ارتباط باشید.
- مشورت کردن، کمک به یکدیگر و همفکری بسیار درست و سازنده است؛ به شرط آن که به یادگیری کمک کند. بنابراین مشورت در راستای فهم دقیق مسائل مانعی ندارد.
- در صورت وجود مشابهت در تمارین، برای طرفین نمره صفر منظور خواهد شد.
- تمارین کامپیوتری شامل فایل‌های **کد متلب و گزارش کار** خواهند بود. برای هر پروژه، تمامی فایل‌ها را در یک فایل zip بارگذاری کنید.
- فرمت گزارش‌نویسی باید رعایت شود و گزارش کار باید کامل، شامل نمودارها و نتایج لازم و توضیحات کافی برای هر سوال با توجه به خواسته های آن سوال باشد.
- بخش اصلی نمره شما را گزارش کار تشکیل خواهد داد.
- زمانی برای تحویل آنلاین تمرین کامپیوتری در محیط **skype** به شما اعلام خواهد شد.
- فایل **Word** قالب گزارش کار کار تحت عنوان "**قالب گزارش**" در صفحه درس قرار داده شده است اما اجباری به استفاده از آن نیست. شما می توانید در صورت استفاده از **MATLAB Live Script** گزارش خود را همان جا بنویسید و خروجی **HTML** و یا **PDF** را ضمیمه کنید و یا از **LaTeX** برای تهیه گزارش استفاده کنید. لازم به ذکر است که مسئولیت کامل، گویا و جامع بودن گزارش و همچنین رعایت اصول گزارش نویسی به عهده دانشجو است و عدم رعایت آنها موجب کسر نمره خواهد شد.