به نام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضیات مهندسی

گزارش تمرین کامپیوتری 2

محمد سعادتی

810198410

1400/04/07

فهرست گزارش سؤالات

سوال 1 – حل معادله حرارت

$$M=1,\ N=2,\ O=2 \Rightarrow U_t = 2^2 U_{xx}\ ;\ 0\leq x\leq \pi,\ t\geq 0,\ U_x(0,t)=e^{-t},\ U_x(2\pi,t)=e^{-2t},\ U(x,0)=\sin^2(x)$$

از آنجایی که شرایط مرزی غیرهمگن است پس مسئله را به حالت گذرا و پایدار تبدیل کنیم:

$$U(x,t)=V(x,t)+w(x,t)$$

$$w(x,t)=x\,a(t)+\frac{x^2}{2L}\left(b(t)-a(t)\right)=xe^{-t}+\frac{x^2}{2(2\pi)}\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)=xe^{-t}+\frac{x^2}{4\pi}\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)$$

حال باید مسئله را برای حالت گذرا بازنویسی کنیم:

$$U_t=V_t\underbrace{-xe^{-t}+\frac{x^2}{4\pi}\left(e^{-t}-2e^{-2t}\right)}_{W_t},\quad U_{xx}=V_{xx}+\underbrace{\frac{e^{-2t}-e^{-t}}{2\pi}}_{W_{xx}}$$

$$\longrightarrow U_t=4U_{xx} \Rightarrow V_t-xe^{-t}+\frac{x^2}{4\pi}\left(e^{-t}-2e^{-2t}\right)=4V_{xx}+\frac{2(e^{-2t}-e^{-t})}{\pi}$$

$$\longrightarrow V_t=4V_{xx}+\frac{2(e^{-2t}-e^{-t})}{\pi}+\frac{x^2}{4\pi}\left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)+xe^{-t},\quad V_x(0,t)=V_x(2\pi,t)=0$$

$$V(x,0)=U(x,0)-W(x,0)=\sin^2(x)-\left(x+\frac{x^2}{4\pi}(1-1)\right) \Rightarrow V(x,0)=\sin^2(x)-x$$

$$BC:\ V(x,t)=G_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\cos\left(\frac{nx}{2}\right),\ V_t=\dot G_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\dot G_n(t)\cos\left(\frac{nx}{2}\right),\ V_{xx}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4}G_n(t)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \dot G_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dot G_n(t)+n^2G_n(t)\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)=\frac{2(e^{-2t}-e^{-t})}{\pi}+\frac{x^2}{4\pi}\left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)+xe^{-t}$$

$$\dot G_n(t)+n^2G_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{2(e^{-2t}-e^{-t})}{\pi}+\frac{x^2}{4\pi}\left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)+xe^{-t}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)+\frac{\pi}{6}\left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)+\pi e^{-t}$$

$$G_n(t)e^{n^2t}=\int\left(\left(\frac{12+\pi^2}{3\pi}\right)e^{-2t}+\left(\frac{2\pi^2-12}{3\pi}\right)e^{-t}\right)dt=\left(\frac{12+\pi^2}{-6\pi}\right)e^{-2t}+\left(\frac{12-2\pi^2}{3\pi}\right)e^{-t}+C_n$$

$$IC:\ V(x,0)=\sin^2(x)-x=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(0)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n+\frac{5\pi^2-12}{-6\pi}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

$$C_n-\frac{5\pi^2-12}{6\pi}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin^2(x)-x\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)dx=\frac{4}{n^2}-\frac{(n^3-4n^2)\sin\left(\frac{\pi n+4\pi}{2}\right)+(n^3+4n^2)\sin\left(\frac{\pi n-4\pi}{2}\right)}{2n^4-32n^2}+$$

$$+\frac{\left((4\pi-2)n^3+(32-64\pi)n\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\left(8n^2-128\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{2n^4-32n^2}$$

$$\Rightarrow U(x,t)=V(x,t)+w(x,t)$$

%100 PCW paper

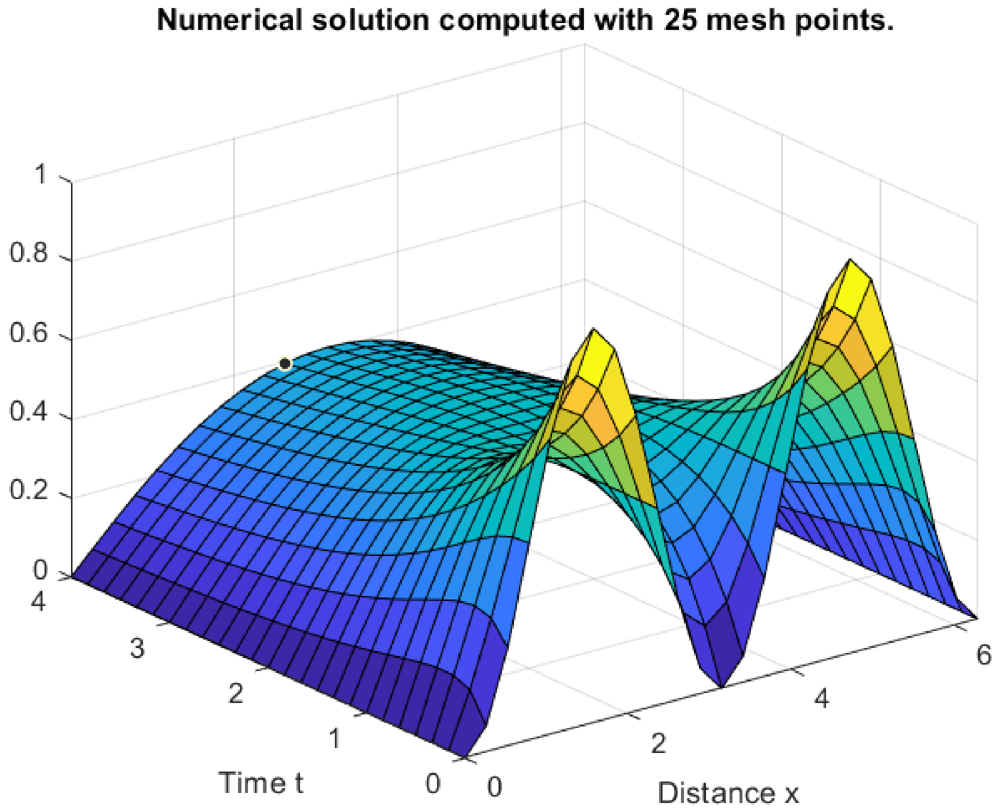
در t به سمت بینهایت u به 0 میل می کند و به اصطلاح هم دمایی رخ می دهد که قابل پیش بینی است و در کل شکل آن بصورت کسینوسی کاهنده است.

با شبیه سازی متلب بوسیله کد ارائه شده به نتایج زیر خواهیم رسید:

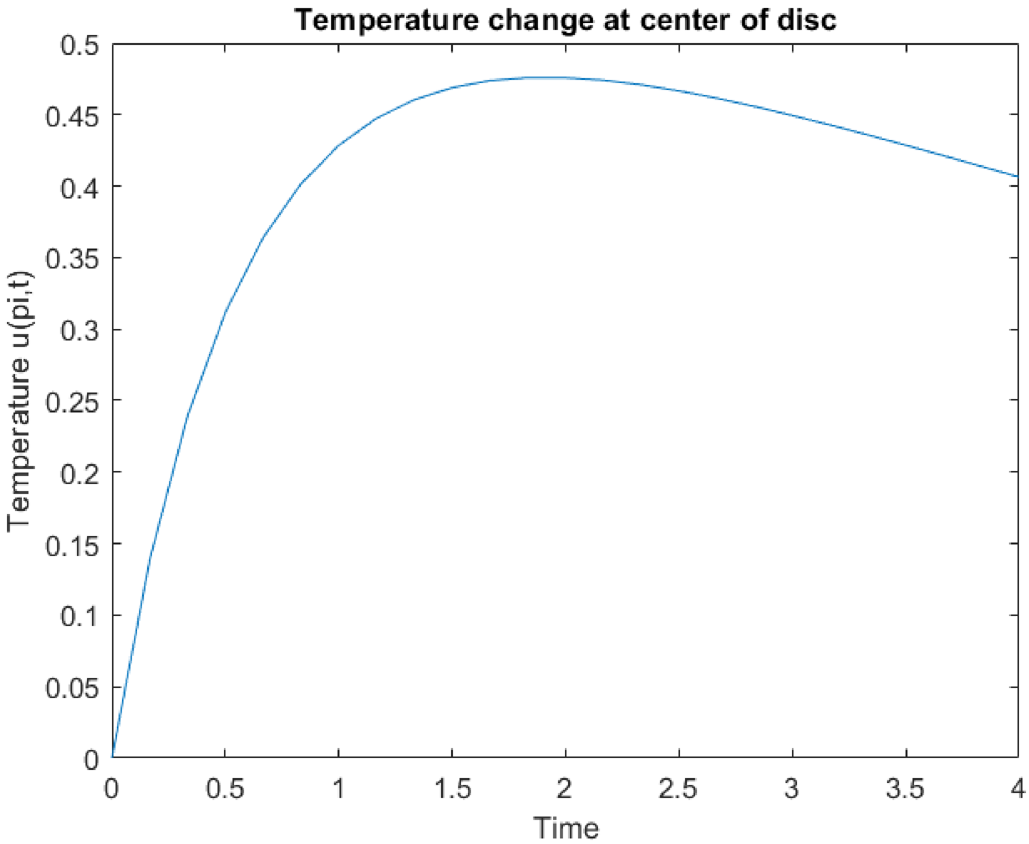
```
m = 0;
x = linspace(0,2*pi,25);
t = linspace(0,4,25);
sol = pdepe(m,@pdefun,@icfun,@bcfun,x,t);
% Extract the first solution component as u.
u = sol(:,:,1);
% A surface plot is often a good way to study a solution.
surf(x,t,u)
title('Numerical solution computed with 25 mesh points.')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
% A solution profile can also be illuminating half of array is 13.
figure
plot(t,u(:,13))
xlabel('Time')
ylabel('Temperature u(pi,t)')
title('Temperature change at center of disc')
% --------------------------------------------------------------

function [c,f,s] = pdefun(x,t,u,DuDx)
c = 2;
f = DuDx;
s = 0;
end
% --------------------------------------------------------------
function u0 = icfun(x)
u0 = sin(x)^2;
end
% --------------------------------------------------------------
function [pl,ql,pr,qr] = bcfun(xl,ul,xr,ur,t)
pl = ul;
ql = 0;
pr = ur;
qr = 0;
end
```

در کد بالا با استفاده از نوع معادله , شرایط اولیه و شرایط مرزی تابع های pdefun icfun , و bcfunرا می نویسیم.

نمودار های خواسته شده:



شکل 1 : نمودار نمودار سه بعدی دما برحسب زمان و مکان



شکل 2 : نمودار دما برحسب زمان را در مرکز میله

مطابق شکل های 1 و 2 مطابق انتظار به ازای x ثابت دما بصورت نمایی طی زمان کاهش میابد و همچنین به ازای زمان های ثابت دما بصورت کسینوسی در طول میله تغییر میکند.

سوال ۲ – حل عددی معادله لاپلاس