



UNIVERSITE HASSAN II CASABLANCA FACULTE DES SCIENCES AIN-CHOCK

MÉMOIRE PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU MASTER DE RECHERCHE :
Statistique Optimisation et Modélisation Stochastique

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUE
SPÉCIALITÉ : CALCUL STOCHASTIQUE

PRÉSENTÉE PAR : **Mohammed LAAMIRI**

Marches aléatoires

MÉMOIRE DE MASTER DIRIGÉE PAR : M. **Ahmed EL KHARROUBI**

Soutenue le 28 Mars 2014 devant le jury composé de :

Pr. A.EL KHARROUBI Faculté des Sciences Aïn Chock, Casablanca

Pr. H.CHAMLAL Faculté des Sciences Aïn Chock, Casablanca

Président du Jury
Directeur de mémoire
Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de différentes façons à la réussite de mon mémoire.

J'aimerais adresser un remerciement particulier à ma famille pour son soutien qui m'a été précieux afin de mener à bon mon travail.

Notre coordonnateur et responsable du Master Statistiques Optimisation et Modélisation Stochastique Monsieur Ahmed El KHARROUBI pour ses conseils et remarques pertinentes durant la période de l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens aussi à exprimer mes remerciements aux membres du jury, (nom du jury) qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Je désire aussi remercier tous les professeurs qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Finalement, je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mon ange gardien, ma mère

Je lui exprime ma gratitude pour tous ses efforts en faveur de mon éducation et mon bien être. Mais aucune dédicace ne suffirait pour exprimer ma reconnaissance à son égard.

Mon frère Nabil et sa petite famille

Qui m'ont toujours soutenu et encouragé durant la période de mon parcours universitaire.

Mon ami intime Jawad

Qui m'a facilité la réalisation de ce mémoire grâce à ses conseils et recommandations fructueuses.

Résumé

Notre but dans ce mémoire sera justement de s'intéresser aux comportements asymptotiques des probabilités, c'est-à-dire aux propriétés statistiques de la marche lorsqu'on la laisse se dérouler pendant un temps très long, $N \rightarrow \infty$.

Donc les questions typiques que l'on souhaiterait résoudre sont :

- quelle est la probabilité que le marcheur revienne à son point de départ ?
- combien de sites distincts visite-t-il en un temps N ?
- à quelle distance de son point de départ le marcheur s'éloigne-t-il en moyenne, après un temps N ?
- est-ce qu'un chemin typique d'une marche s'intersecte elle-même ? Et si oui, avec quelle fréquence ?
- que vaut la distribution de probabilité de la distance d'éloignement maximum du point de départ, i.e. $P_0[\max_{t \leq N} |\omega(t)| = x]$ comme fonction de x et de N ?
- quel est le temps moyen passé par le marcheur en un point donné \vec{x} ?

Abstract

The main aim of this paper is to establish some results related to the Asymptotic Behavior of the Transition Probability of a Random Walks, that is to say, the statistical properties of the walk when it has been running for a long time, $N \rightarrow \infty$.

So the typical questions that we wish be solved are :

- What is the probability that the walker will eventually return to her starting point ?
- How many different sites he visited a time N ?
- How far from its starting point the walker he departs on average, after a time N ?
- Is this a typical way of a walk intersects itself? And if so, with how often ?
- What is the probability distribution of the maximum distance away from the starting point, i.e. $P_0[\max_{t \leq N} |\omega(t)| = x]$ as function of x and of N ?
- What is the average time spent by the walker at a given point \vec{x} ?

Table des figures

1	Les réseaux \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^2	4
1.1	Réseau tronqué et symétrique autour de l'origine, qui comporte $2L + 1$ sites	10
1.2	<i>Pour L fixé, probabilité qu'après un temps N, le marcheur ne se soit pas éloigné d'une distance supérieure à L, comme fonction de N. Les courbes correspondent respectivement à $L = 15, 20$ et 25, de la gauche vers la droite.</i>	22
1.3	<i>Pour $N=200$ fixé, probabilité qu'après un temps N, le marcheur soit resté dans un intervalle $[-L, +L]$, pour L entre 1 et N. La formule exacte (1.34) et l'expression en termes theta(1.38) produisent deux courbes qui se confondent dès que $N \sim 30$</i>	25
1.4	<i>Le temps passer par un marcheur, dans la partie positive de l'axe.</i> .	34
1.5	<i>Probabilité de passer à droite de l'origine une fraction de temps égale à α (en abscisse). En encart, la probabilité intégrée (fonction de répartition) que le marcheur y passe une fraction inférieure ou égale à α.</i>	37
4.1	<i>Simulation de $N=1000$ étape de marche aléatoire</i>	64
4.2	<i>Simulation de $M = 10$ Marche aléatoire et $N = 1000$ étapes</i>	65
4.3	<i>Espace $2D$: orientations possibles pour la marche aléatoire</i>	65
4.4	<i>Simulation de N étape de marche aléatoire en deux dimension</i> . . .	68
4.5	<i>Simulation du mouvement brownien standard sur $[0,1]$ avec $N=1000$ étapes</i>	72
4.6	<i>Simulation de M Trajectoires d'un mouvement brownien</i>	73

Table des matières

Page de garde	i
Remerciements	i
Dédicace	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Table des figures	v
Table des matières	1
Introduction	3
1 Marches aléatoires discrètes	5
1.1 Position du marcheur	5
1.2 comportement diffusif	15
1.2.1 Temps de premier passage	16
1.2.2 La loi du logarithme itéré	30
1.2.3 Temps local : récurrence et transience	31
1.3 La première loi de l'arcsinus	34
1.4 Marches pondérées	39
2 Mouvement brownien	41
2.1 Un peu d'histoire	41
2.2 Limite du continu de la marche standard	42
2.3 Théorème central limite	48
2.4 Mesure de Wiener	49
2.5 Générateur du mouvement brownien	51
2.6 Formule de Kac	55

3	Marches aléatoires perturbées	59
4	Application	62
4.1	Simulation de marche aléatoire	62
4.1.1	Simulation de marche aléatoire unidimensionnel	62
4.1.2	Simulation de marche aléatoire en deux dimension	65
4.2	Simulation du mouvement brownien	68
4.2.1	Discrétisation	68
4.2.2	Approcher la trajectoire du mouvement brownien	68
4.2.3	Obtenir une réalisation du vecteur $(B_{\Delta t}, B_{2\Delta t}, \dots, B_{N\Delta t})$. .	70
	Conclusion	74
A	Quelques caractéristiques générales	75
	Annexe	75
B	Généralités sur les processus stochastiques	80
B.1	Mouvement Brownien	80
B.2	Les semigroupes (des matrices de transition) de Markov en temps continu	82

Introduction

Les marches aléatoires forment une classe très importante de processus stochastique de multiples connexions avec d'autres sujets en théorie des probabilités, mais également en analyse, en algèbre, etc. Dans ce mémoire nous discuterons quelques propriétés des marches aléatoires sur un réseau cubique \mathbb{Z}^d , d -dimensionnel, en nous concentrons principalement sur le cas des marches aléatoires dites simples (symétriques, ou standards) et plus précisément celle qui sont homogènes et invariantes par translation (ou encore que les sauts effectués à chaque instant sont des variables aléatoires indépendants et identiquement distribuées v.a.i.i.d.). Le premier chapitre est consacré à la marche aléatoire discrète, alors que le second chapitre est centré sur leur version continue (Mouvement Brownien), le troisième sera une conclusion d'une marche aléatoire perturbée. Finalement dans le quatrième chapitre, on termine par quelques techniques permettant de simuler les marches aléatoires et le mouvement brownien sous MATLAB.

On cherche à décrire le comportement d'un marcheur partant initialement d'un site quelconque de réseau symétrique d -dimensionnel, disons l'origine, et qui effectue, au hasard, un saut vers l'un des $2d$ sites voisins, ce dernier étant choisis uniformément, c'est-à-dire avec probabilité $\frac{1}{2d}$. (le cas plus simple, celui de dimension $d = 1$, décrit l'évolution de la fortune d'un joueur dans un jeu de pile ou face).

De manière générale au temps 1, le marcheur se trouve donc en $\{\pm e_i, i = 1, \dots, d\}$ (e_i le vecteur unité dans la direction i), de cette nouvelle position, le marcheur effectue un saut, aléatoire du même type que le premier, et occupera à l'instant 2, l'un des sites $\pm e_i \pm e_j$. Il est continue de la sorte aux instants antérieurs. Autrement dit, les pas successifs sont identiques, et chaque pas s'effectue indépendamment des pas précédents. Souvent aussi, on considérera des marches de longueur (ou de durée) N , c'est-à-dire qu'on laisse la marche se dérouler jusqu'au temps $t = N$. Ce qui implique que le nombre de chemins de longueur N vaut $(2d)^N$, puisque chaque seconde, le marcheur a le choix entre $2d$ sauts possibles.

D'après ce qui précède, un marcheur (sans doute ivré) se déplace dans \mathbb{Z}^d , sa

position à l'instant N , est la v.a $X_n \in \mathbb{Z}^d$ définie par la récurrence aléatoire X_0 , et la relation

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$$

Où y_1, y_2, \dots sont des v.a.i.i.d, uniformément distribuées dans $\{e_1, \dots, e_d, -e_1, \dots, -e_d\}$

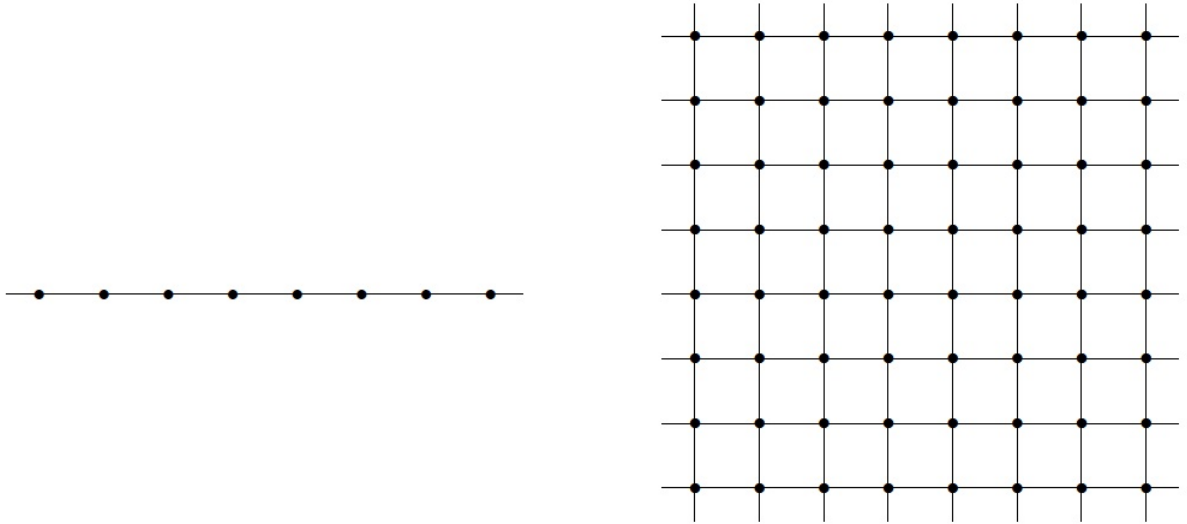


FIGURE 1 – Les réseaux \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^2

Chapitre 1

Marches aléatoires discrètes

1.1 Position du marcheur

La première probabilité que nous aurons calculé est celle qui concerne la position du marcheur après un temps N , noté :

$P_0(\vec{x}; N)$ = La probabilité que le marcheur soit arrivé au site \vec{x} au temps N , partant de l'origine .

Pour calculer cette distribution il existe de nombreuses manières, chacune a son utilité, mais nous en donnerons que trois pour calculer la distribution de la position du marcheur : la première méthode sera différentielle, la seconde sera basée sur une utilisation directe de la transformation de Fourier, alors que la troisième est empruntée à la théorie des graphes.

Méthode différentielle :

Pour que le marcheur soit en \vec{x} au temps N , il doit nécessairement être, à l'instant antérieur, en l'un des sites qui sont voisins de \vec{x} . Donc la probabilité recherchée est la même à celle en un de $(2d)$ points $\vec{x} \pm \vec{e}_i$ multiplier par la probabilité de dernier saut vers \vec{x} .

$$P_0(\vec{x}; N) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d [P_0(\vec{x} + \vec{e}_i; N-1) + P_0(\vec{x} - \vec{e}_i; N-1)] \quad (1.1)$$

Cette expression peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\partial P_0(\vec{x}; N-1) = \frac{1}{2d} \Delta P_0(\vec{x}; N-1) \quad (1.2)$$

avec :

$$\partial P_0(\vec{x}; N-1) = P_0(\vec{x}; N) - P_0(\vec{x}; N-1) \quad (1.3)$$

$$\Delta P_0(\vec{x}; N-1) = \sum_{i=1}^d [P_0(\vec{x} + \vec{e}_i; N-1) - 2P_0(\vec{x}; N-1) + P_0(\vec{x} - \vec{e}_i; N-1)] \quad (1.4)$$

Démonstration. Pour (1.3) (en fait aux différences finies)
 $P_0(\vec{x}; N-1) = P_0(\vec{x}; N_0) + (N-1-N_0)\partial P_0(\vec{x}; N-1)$, donc

$$\partial P_0(\vec{x}; N-1) = P_0(\vec{x}; N-1) + P_0(\vec{x}; N-1) \text{ (pour } N = N_0)$$

Pour (1.4) on a

$$P_0(\vec{x} + \vec{h}; N-1) = P_0(\vec{x}; N-1) + \frac{\vec{h}}{1!} \sum_i \partial P_0(\vec{x}; N-1) + \frac{\vec{h}^2}{2!} \Delta P_0(\vec{x}; N-1)$$

$$P_0(\vec{x} - \vec{h}; N-1) = P_0(\vec{x}; N-1) - \frac{\vec{h}}{1!} \sum_i \partial P_0(\vec{x}; N-1) + \frac{\vec{h}^2}{2!} \Delta P_0(\vec{x}; N-1)$$

La sommation des deux équations nous donnera :

$$\Delta P_0(\vec{x}; N-1) = \frac{1}{h^2} [P_0(\vec{x} + \vec{h}; N-1) + P_0(\vec{x} - \vec{h}; N-1) - 2P_0(\vec{x}; N-1)]$$

et si on pose $\vec{h} = \vec{e}_i$ (unité de mesure) on trouve

$$\Delta P_0(\vec{x}; N-1) = \sum_{i=1}^d [P_0(\vec{x} + \vec{e}_i; N-1) - 2P_0(\vec{x}; N-1) + P_0(\vec{x} - \vec{e}_i; N-1)]$$

Pour (1.2), d'après (1.1) et (1.3) on a :

$$P_0(\vec{x}; N) = \partial P_0(\vec{x}; N-1) + P_0(\vec{x}; N-1)$$

$$\partial P_0(\vec{x}; N-1) + P_0(\vec{x}; N-1) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d [P_0(\vec{x} + \vec{e}_i; N-1) + P_0(\vec{x} - \vec{e}_i; N-1)]$$

$$\partial P_0(\vec{x}; N-1) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d [P_0(\vec{x} + \vec{e}_i; N-1) - 2P_0(\vec{x}; N-1) + P_0(\vec{x} - \vec{e}_i; N-1)]$$

d'après (1.4), d'où le résultat

$$\partial P_0(\vec{x}; N-1) = \frac{1}{2d} \Delta P_0(\vec{x}; N-1).$$

□

Pour la résolution de cette équation, et par transformation de Fourier on a :

$$P_0(\vec{x}; N) = \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{i\vec{x} \cdot \vec{\varphi}} c_N(\varphi), \quad (\text{avec } c_N(\varphi) = \sum_{\vec{x}} e^{-i\vec{x} \cdot \vec{\varphi}} P_0(\vec{x}; N)) \quad (1.5)$$

Démonstration. On fait la démonstration sur \mathbb{Z} et après on généralise sur \mathbb{Z}^d

on a

$$c_N(\varphi) = \sum_x e^{-ix \cdot \vec{\varphi}} P_0(x; N)$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_N(\varphi) e^{ix \cdot \varphi} d\varphi &= \int_0^{2\pi} \sum_x \frac{d\varphi}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-ix \cdot \varphi} e^{ix \cdot \varphi} P_0(x; N) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} P_0(x; N) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} 2\pi P_0(x; N) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} P_0(x; N), \end{aligned}$$

d'où le résultat

$$P_0(\vec{x}; N) = \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{i\vec{x} \cdot \vec{\varphi}} c_N(\varphi)$$

□

Et si on insère (1.5) dans l'équation de la chaleur (1.2), on trouve que les coefficients $c_N(\varphi)$ satisfont

$$c_N(\varphi) = c_{N-1}(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos \varphi_i \right) = c_0(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos \varphi_i \right)^N. \quad (1.6)$$

Démonstration. D'après l'équation (1.2) et (1.3) on a

$$\partial P_0(\vec{x}; N-1) = \frac{1}{2d} \Delta P_0(\vec{x}; N-1)$$

donc

$$P_0(\vec{x}; N) - P_0(\vec{x}; N-1) = \frac{1}{2d} \Delta P_0(\vec{x}; N-1)$$

ce qui implique

$$\int_0^{2\pi} (c_N(\varphi) - c_{N-1}(\varphi)) e^{i\vec{x}\vec{\varphi}} \frac{d^d\varphi}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \frac{1}{2d} \Delta P_0(\vec{x}; N-1)$$

or on a :

$$\begin{aligned} \Delta P_0(\vec{x}; N-1) &= \sum_{j=1}^d [P_0(\vec{x} + \vec{e}_j; N-1) - 2P_0(\vec{x}; N-1) + P_0(\vec{x} - \vec{e}_j; N-1)] \\ &= \sum_{j=1}^d \left[\int_0^{2\pi} (e^{i\vec{e}_j\vec{\varphi}} - 2 + e^{-i\vec{e}_j\vec{\varphi}}) \frac{e^{i\vec{x}\vec{\varphi}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} c_{N-1}(\varphi) d^d\varphi \right] \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{2\pi} (c_N(\varphi) - c_{N-1}(\varphi)) e^{i\vec{x}\vec{\varphi}} \frac{d^d\varphi}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \frac{1}{2d} \sum_{j=1}^d \left[\int_0^{2\pi} (e^{i\vec{e}_j\vec{\varphi}} - 2 + e^{-i\vec{e}_j\vec{\varphi}}) \frac{e^{i\vec{x}\vec{\varphi}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} c_{N-1}(\varphi) d^d\varphi \right]$$

$$\implies c_N(\varphi) - c_{N-1}(\varphi) = \frac{1}{2d} \sum_{j=1}^d [(2 \cos(\vec{e}_j \vec{\varphi}) - 2) c_{N-1}(\varphi)].$$

$$\implies c_N(\varphi) - c_{N-1}(\varphi) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\vec{e}_j \vec{\varphi}) c_{N-1}(\varphi) - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d c_{N-1}(\varphi),$$

$$\implies c_N(\varphi) = c_{N-1}(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\varphi_j) \right)$$

par récurrence

$$c_N(\varphi) = c_{N-1}(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\varphi_j) \right)$$

$$c_{N-1}(\varphi) = c_{N-2}(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\varphi_j) \right)$$

$$c_{N-2}(\varphi) = c_{N-3}(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\varphi_j) \right)$$

\vdots

\vdots

$$c_1(\varphi) = c_0(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\varphi_j) \right)$$

et par multiplication de ces équations on trouve :

$$c_N(\varphi) = c_{N-1}(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\varphi_j) \right) = c_0(\varphi) \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\varphi_j) \right)^N.$$

□

La condition initiale $P_0(\vec{x}; 0) = \delta_{\vec{x}, \vec{0}}$ implique $c_0(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}$ donc la probabilité de position définie en (1.5) devient :

$$P_0(\vec{x}; N) = \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x}\vec{\varphi}} \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\varphi_j) \right)^N \quad (1.7)$$

On peut noter que ces probabilités sont correctement normalisées, $\sum_{\vec{x}} P_0(\vec{x}; N) = 1$.

Les arguments précédents restent parfaitement valides pour n'importe quel point de départ, de sorte que l'on a

$$P_0(\vec{x}; N) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d [P_{\vec{y}}(\vec{x} + \vec{e}_i; N-1) + P_{\vec{y}}(\vec{x} - \vec{e}_i; N-1)] \quad (1.8)$$

Notons aussi que plutôt que de se demander d'où le marcheur venait lorsqu'il est arrivé en \vec{x} , on peut également poser la question où il est allé lorsqu'il a quitté \vec{y} , le même raisonnement que ci-dessus permet ainsi d'écrire une équation différentielle analogue à (1.7), dans laquelle c'est le point de départ qui varie, et non le point d'arrivée.

$$P_0(\vec{x}; N) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d [P_{\vec{y}+\vec{e}_i}(\vec{x} + \vec{e}_i; N-1) + P_{\vec{y}-\vec{e}_i}(\vec{x} - \vec{e}_i; N-1)] \quad (1.9)$$

Méthode de Transformation de Fourier directe :

Cette deuxième méthode repose sur une autre vision de la marche aléatoire, comme la somme des pas effectués chaque seconde. En effet, si \vec{s}_k désigne la variable aléatoire représentant le saut effectué au moment k , on pourra écrire que :

$$\vec{\omega}(N) = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \dots + \vec{s}_N. \quad (1.10)$$

Soit la fonction génératrice des moments définie par :

$$\langle e^{i\vec{\varphi}\vec{\omega}(N)} \rangle = \sum_{\vec{x}} e^{i\vec{\varphi}\vec{x}} P_0(\vec{x}; N). \quad (1.11)$$

(C'est la transformation de Fourier de la distribution $P_0(\vec{x}; N)$)

$$\langle e^{i\vec{\varphi}\vec{\omega}(N)} \rangle = \langle e^{i\vec{\varphi}\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \dots + \vec{s}_N} \rangle = \langle e^{i\vec{\varphi}\vec{s}_1} \rangle \dots \langle e^{i\vec{\varphi}\vec{s}_N} \rangle \text{ par indépendance de } s_k .$$

$$\langle e^{i\vec{\varphi}\vec{\omega}(N)} \rangle = \langle e^{i\vec{\varphi}\vec{s}_1} \rangle^N \text{ sont identiquement distribuées.}$$

$$\langle e^{i\vec{\varphi}\vec{\omega}(N)} \rangle = \left[\sum_{j=1}^d (e^{i\vec{\varphi}\vec{e}_j} \frac{1}{2d} + e^{-i\vec{\varphi}\vec{e}_j} \frac{1}{2d}) \right]^N = \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\varphi_j) \right)^N \quad (1.12)$$

Ce qui établit l'expression donnée plus haut en (1.7). (par la formule d'inversion de fourrier).

$$P_0(\vec{x}; N) = \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x}\vec{\varphi}} \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(\varphi_j) \right)^N$$

Méthode des graphes :

Dans cette méthode et par facilité, nous expliciterons la méthode dans le cas $d = 1$. En utilisant une portion finie entre $-L$ et $+L$, au lieu de considérer le réseau infini \mathbb{Z}^d .

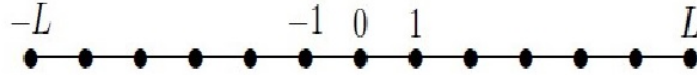


FIGURE 1.1 – Réseau tronqué et symétrique autour de l'origine, qui comporte $2L + 1$ sites

Le calcul de $P_0(x; N)$ nécessite d'énumérer les chemins de 0 à x en N pas. En général un graphe est caractérisé par sa matrice d'adjacence G telle que :

$$G_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est connecté à } b, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre cas la matrice d'adjacence est nulle partout sauf sur les deux diagonales en dessous et en dessus de la diagonale principale où elle vaut 1.

Selon la définition de matrice d'adjacence $G_{b,a}$ on déduit donc que le nombre de chemins qui vont de a à b en N pas est donné par :

$$\#\{\omega(0) = a, \omega(N) = b\} = (G^N)_{b,a} = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}} G_{b, a_{N-1}} \dots G_{a_2, a_1} G_{a_1, a} \quad (1.13)$$

Alors pour que le marcheur soit en x en N pas partant de l'origine, il est nécessaire de passer par des sites intermédiaires, ceci est pris en compte par les produits des éléments de la matrice G .

$$P_0(x; N) = \frac{1}{2^N} (G^N)_{x,0} = \left[\left(\frac{1}{2} G \right)^N \right]_{x,0} \quad (1.14)$$

On pose $T = \frac{1}{2}G$, qui contient la connectivité du graphe et aussi les probabilités des sauts. On appellera T la matrice des transition : Le coefficient $T_{x,y}$ donne la probabilité de y vers x , donc on a :

$$P_0(x; N) = (T^N)_{x,0} \quad (1.15)$$

La matrice de transition caractérise la marche, puis elle spécifie l'espace dans lequel elle s'effectue (le graphe), les sauts possibles (les connections du graphe) et les probabilités des sauts.

Avec le même raisonnement qui avait mené à l'équation de récurrence (1.9), on a :

$$P_0(x; N) = \sum_y T_{x,y} P_0(y; N-1) \quad (1.16)$$

Dans notre cas, l'évaluation des éléments de la matrice d'une puissance de G peut s'effectuer facilement par diagonalisation (étant symétrique, G est diagonalisable par une matrice orthogonale constituée de ses vecteurs propres). Si on dénote par λ_k les valeurs propres de G , et par v_k les vecteurs propres correspondants, supposés orthonormalisés, la décomposition spectrale de G s'écrit :

$G = PDP^{-1}$, avec P est une matrice orthogonale constituée par les vecteurs propres

de G . D contient les valeurs propres de λ_k .

$$G_{b,a} = \sum_k \lambda_k v_k^*(a) v_k(b) \quad (1.17)$$

et comme $G^N = PDP^{-1}.PDP^{-1}.....PDP^{-1} = PD^N P^{-1}$.

On déduit que

$$(G^N)_{b,a} = \sum_k \lambda_k^N v_k^*(a) v_k(b) \quad (1.18)$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, la matrice est tridiagonale, donc on déduit que le spectre de G vaut

$$\lambda_k = 2 \cos \frac{\pi k}{2(L+1)}, \quad v_k(a) = \frac{1}{\sqrt{L+1}} \sin \frac{\pi k(L+1+a)}{2(L+1)} \quad (1.19)$$

Où $1 \leq k \leq 2L+1$ et a, b allant de $-L$ à $+L$. On trouve donc :

$$P_0(x; N) = \frac{1}{L+1} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{2L+1} \left(\cos \frac{\pi k}{2(L+1)} \right)^N \cos \frac{\pi k x}{2(L+1)}. \quad (L \geq N) \quad (1.20)$$

Démonstration. d'après l'expression (1.14), on a :

$$\begin{aligned} P_0(x; N) &= \frac{1}{2^N} (G^N)_{x,0} \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_k \lambda_k^N v_k^*(0) v_k(x) \quad (\text{avec } b=0, a=x) \end{aligned}$$

Or

$$\lambda_k^N = \left(2 \cos \frac{\pi k}{2(L+1)} \right)^N$$

donc

$$P_0(x; N) = \frac{1}{2^N} \sum_k 2^N \left(\cos \frac{\pi k}{2(L+1)} \right)^N v_k^*(0) v_k(x),$$

où

$$\begin{aligned}
v_k^*(0)v_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{L+1}} \sin \frac{\pi k(L+1+0)}{2(L+1)} \frac{1}{\sqrt{L+1}} \sin \frac{\pi k(L+1+x)}{2(L+1)}, \\
&= \frac{1}{L+1} \sin \frac{\pi k(L+1)}{2(L+1)} \sin \frac{\pi k(L+1+x)}{2(L+1)} \\
&= \frac{1}{L+1} \sin \frac{\pi k(L+1+x)}{2(L+1)}
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\sin \frac{\pi k(L+1+x)}{2(L+1)} &= \sin \frac{\pi k(L+1) + \pi kx}{2(L+1)} \\
&= \sin \frac{\pi k(L+1)}{2(L+1)} \cos \frac{\pi kx}{2(L+1)} + \sin \frac{\pi kx}{2(L+1)} \cos \frac{\pi k(L+1)}{2(L+1)} \\
&= \cos \frac{\pi kx}{2(L+1)}, (k \text{ est impaire})
\end{aligned}$$

d'où

$$P_0(x; N) = \frac{1}{L+1} \sum_{\substack{k=1 \\ (\text{impaire})}}^{2L+1} \left(\cos \frac{\pi k}{2(L+1)} \right)^N \cos \frac{\pi kx}{2(L+1)}. \quad (L \geq N)$$

□

Cette formule n'est valide que si les bords en $\pm L$ n'ont pas d'effet. Car si c'est le cas, le marcheur sera réfléchi vers l'intérieur du graphe, ce qui implique une contradiction avec la marche considérée au début. Pour être sûr que le marcheur n'ait pas le temps d'atteindre le bord on supposera que L est suffisamment grand, $L \geq N$. Dans ce cas la restriction finie de \mathbb{Z} à une portion finie n'a aucun effet sur le résultat.

Pour une raison plus forte, l'expression (1.20) sera toujours valide si on prend $L \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
P_0(x; N) &= \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^L \left(\cos \frac{\pi(2m+1)}{2(L+1)} \right)^N \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2(L+1)} \\
&\sim \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^L \left(\cos \frac{\pi m}{L+1} \right)^N \cos \frac{\pi m x}{L+1} \\
&\sim \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\pi} (\cos \varphi)^N \cos \varphi x,
\end{aligned}$$

et on trouve l'expression précédente (1.7).

Démonstration. on pose,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi m}{n} \right)^N \cos \frac{\pi m x}{n}, \text{ Avec } L+1 = n$$

ce qui est équivalent à :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \left(\cos \frac{\pi m}{n} \right)^N \cos \frac{\pi m x}{n}.$$

et d'après la définition de la somme de Rieman, on a :

$$y_m = 0 + \frac{\pi m}{n}, \text{ avec } b - a = \pi - 0$$

ce qui implique que $f(y_m) = \cos(y_m)^N \cos(y_m x)$.

$$\implies \pi S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{m=1}^n \left(\cos \frac{\pi m}{n} \right)^N \cos \frac{\pi m x}{n}.$$

et puisque le cosinus est intégrable au sens de Rieman,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} \pi S_n &= \int_0^\pi d\varphi (\cos \varphi)^N \cos \varphi x, \text{ avec } \varphi = \frac{\pi m}{n} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\pi} (\cos \varphi)^N \cos \varphi x. \end{aligned}$$

□

Dans le cas d-dimensionnel ne pose pas de problème, on utilise le graphe $[-L, +L]^d$ correspondant au réseau tronqué, avec la matrice d'adjacence $G_{b,a} = \delta_{<a,b>} = 1$ ou 0 selon que a et b sont plus proches voisins ou non.

1.2 comportement diffusif

D'après ce qui précède On a calculé la distribution de probabilité concernant la position du marcheur, en fonction du temps. On a vu que la distribution est concentrée autour de l'origine, disant que le marcheur n'a pas tendance à s'écarter beaucoup de son point de départ. Peut-on quantifier cela ? C'est-à-dire est-ce qu'il restera effectivement autour de son point de départ, ne s'aventurant jamais très loin, ou au contraire fait-il des excursions de plus en plus grandes ?

Pour répondre à cette question, on donnera un complément de réponse plus loin qui est fourni par le calcul de $\langle |\omega(N)|^2 \rangle$, c'est-à-dire l'écart-type (le résultat de la compétition de deux facteurs) de la distribution de position, qui nous renseignera sur l'éloignement moyen du marcheur après un temps N .

D'une part, on l'a vu, qu'il y a une probabilité plus grande de rester autour de l'origine, mais ces chemins-là ne contribuent que très peu à la valeur moyenne de $|\omega(N)|^2$. Comme d'habitude, c'est donc une question de compétition entre un facteur combinatoire ou entropique (le nombre de chemins) et un facteur énergétique (la contribution qu'ils apportent).

Le calcul est à nouveau de faire appel à la décomposition du chemin en pas élémentaires indépendants :

$$\langle \vec{\omega}(N) \cdot \vec{\omega}(N) \rangle = \sum_{i,j=1}^N \langle \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \rangle = \sum_{i=1}^N \langle |\vec{s}_i|^2 \rangle = N \langle |s_1|^2 \rangle = N. \quad (1.21)$$

Pour des moments d'ordres plus élevés, le même calcul peut s'effectuer à l'aide de la fonction génératrice des moments, que l'on a calculée à la section 1. on trouve ainsi

$$\langle \vec{\omega}(N) \cdot \vec{\omega}(N) \rangle = \sum_{i=1}^d -\partial_{\varphi_i}^2 \langle e^{i\vec{\varphi} \cdot \vec{\omega}(N)} \rangle|_{\vec{\varphi}=0} = \sum_{i=1}^d -\partial_{\varphi_i}^2 \left(\frac{1}{d} \sum_j \cos \varphi_j \right)^N |_{\vec{\varphi}=0} \quad (1.22)$$

de même on trouve le quatrième moment

$$\langle |\omega(N)|^4 \rangle = \frac{(d+2)N^2 - 2N}{2d} \quad (1.23)$$

et en général, $\langle |\omega(N)|^{2m} \rangle \sim N^m$ à l'ordre dominant en N .

D'après la valeur du deuxième moment, on en déduit donc qu'après un temps N , le marcheur se trouve en moyenne à une distance \sqrt{N} de son point de départ. C'est le comportement caractéristique d'une diffusion, identique à la façon dont la chaleur se propage dans une barre. Si la distribution de position est effectivement centrée à l'origine, elle s'étale et s'aplatit avec le temps, et sa largeur augmente comme la racine carrée du temps.

Pour des temps arbitrairement longs, la particule va effectivement s'éloigner à des distances arbitrairement grandes, mais la question reste de savoir si elle y restera définitivement, ou si au contraire, elle a des chances de revenir au point de départ avant de repartir au loin. De même, l'éloignement moyen augmente comme \sqrt{N} après un temps N , mais que vaut la distribution des éloignements autour de cette moyenne ? Les trois sections suivantes examinent ces questions.

1.2.1 Temps de premier passage

Les temps de premier passage fournissent des informations précises et souvent utiles sur la façon dont le marcheur progresse. Dans un premier temps, considérons le temps de premier passage en b (où \vec{b} en dimension supérieure), que nous noterons m_b (lorsque $b = 0$, m_0 est considéré comme le temps de premier retour en 0). Et on définit :

$P_0(m_b > N)$: La probabilité qu'au temps N , le marcheur ne soit pas encore passé par b .

En une dimension c'est la probabilité que le maximum de la marche soit inférieur à b , et on note :

$$P_0(m_b > N) = P_0(\max_{s \leq N} \omega(s) < b).$$

Au début on s'intéresse à la probabilité $P_0(x; N \text{ et } m_b > N)$ d'être en x au temps N sans être encore passé par b , dans laquelle on tire facilement la probabilité $P_0(m_b > N)$ recherchée.

En effet, le marcheur sera en x au temps N sans être passé par b , si il est en y au temps $N - 1$ sans être passé par b , et qu'il effectue au dernier moment le saut de y à x .

On obtient dès lors que $f(x; N \mid b) \equiv P_0(x; N \text{ et } m_b > N)$, satisfait la même équation de diffusion que $P_0(x; N)$,

$$\begin{aligned}
f(x; N \mid b) &= \frac{1}{2} [f(x; N-1 \mid b) + f(x; N+1 \mid b) \delta(x < b-1)] \\
&= \sum_{y < x} T_{x,y} f(y; N-1 \mid b), \quad x < b,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Remarquons qu'en posant $f(b; N \mid b) = 0$, on peut supprimer la contrainte $y < b$, l'équation de diffusion s'écrit de nouveau mais avec une condition frontière non triviale en b .

$$f(x; N \mid b) = \sum_y T_{x,y} f(y; N-1 \mid b), \quad x, y < b, \text{ avec } f(b; N \mid b) = 0. \tag{1.25}$$

La contrainte de ne pas être passé en b disparaît pour $N = 0$, de sorte que la condition reste donnée par $f(x; 0 \mid b) = \delta_{x,0}$. On vérifie aisément que l'unique solution est donnée par :

$$f(x; N \mid b) = P_0(x; N) + P_0(x-2b; N), \quad x \leq y. \tag{1.26}$$

Si on pose T^* la restriction de la matrice de transition au sous graphe sur lequel le marcheur peut se déplacer facilement tout en respectant la contrainte de ne pas atteindre b , ici le graphe semi-infini $] -\infty, b-1] \cap \mathbb{Z}$, donc on peut réécrire l'équation (1.24) de manière équivalente mais qui prête parfois mieux aux généralisations, on obtient

$$f(x; N \mid b) = \sum_y T_{x,y}^* f(y; N-1 \mid b) = (T^{*N})_{x,0} \tag{1.27}$$

et par conséquent

$$P_0(m_b > N) = \sum_x (T^{*N})_{x,0} \tag{1.28}$$

Démonstration. On a

$$f(x; N \mid b) \equiv P_0[x; N \text{ et } m_b > N]$$

donc,

$$\begin{aligned}
P_0(m_b > N) &= P_0[(m_b > N) \cap \Omega] \\
&= P_0[(m_b > N) \cap (\cup(x; N))] \\
&= \sum_x P_0[(m_b > N) \cap (x; N)] \\
&= \sum_x P_0[x; N \text{ et } m_b > N] \\
P_0(m_b > N) &= \sum_x (T^{*N})_{x,0}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

□

Revenant maintenant à la question posée à la fin de la section précédente concernant la distribution des éloignements, nous pouvons y répondre en étudiant la distribution de l'éloignement maximal de la marche, telle que :

$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L]$: La probabilité que le marcheur reste enfermé dans une boule de rayon L pendant un temps N .

$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = P_0[m_{-L-1}, m_{L+1}]$: la probabilité qu'au temps N , le marcheur n'ait pas encore visité les sites $\pm(L+1)$.

Pour $N \leq L$ cette probabilité est bien sûr égale à 1, et on doit s'attendre à ce qu'elle décroisse avec N (à L fixé). La décroissance devrait d'abord être douce jusque $N \sim L^2$, puisque c'est le temps moyen qu'il faut au marcheur pour atteindre la distance L , et ensuite la décroissance doit être beaucoup plus marquée, sans doute exponentielle.

Afin de répondre aux questions posées, nous calculerons la distribution de probabilité de l'éloignement maximal. La probabilité

$$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq \sqrt{N}]$$

est celle que le marcheur a de dépasser son éloignement moyen.

Pour simplifier, nous effectuerons les calculs en dimension 1. Les caractéristiques générales resteront cependant qualitativement les mêmes en dimension supérieure.

D'après ce qui précède, on définit

$$g(x; N \mid L) \equiv P_0 \left[\omega(N) = x, \max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L \right]$$

comme ci dessus on vérifie que cette fonction satisfait la même équation de diffusion discrète, avec cette fois deux conditions frontières en $\pm(L+1)$.

$$g(x; N \mid L) = \sum_y T_{x,y} g(y; N-1 \mid L), \text{ avec } g(\pm(L+1); N \mid L) = 0 \quad (1.30)$$

de même l'écriture en termes de la restriction de la matrice de transition au sous-graphe autorisé fournit immédiatement la solution,

$$P_0[\omega(N) = x, \max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = (T^*)_{x,0} \quad (1.31)$$

Cette probabilité est la même que ce qui est établi en (1.20), mais au lieu que $L \leq N$ (la probabilité que le marcheur n'ait pas le temps d'atteindre les bords) ici on n'impose pas cette inégalité, puisque l'on contraint précisément le marcheur à rester sur le graphe fini :

$$P_0[\omega(N) = x, \max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{1}{L+1} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{2L+1} \cos\left(\frac{\pi k}{2(L+1)}\right)^N \cos\left(\frac{\pi k x}{2(L+1)}\right) \quad (1.32)$$

Donc pour obtenir la probabilité qui nous intéresse $P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L]$ et suivant le même raisonnement qui précède, sommant l'expression (1.32) sur x , et utilisant

$$\sum_{x=-L}^L \cos\left(\frac{\pi k x}{2(L+1)}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cot \frac{\pi k}{4(L+1)}. \quad (1.33)$$

Démonstration. comme le cosinus est paire on a

$$\sum_{x=-L}^L \cos\left(\frac{\pi k x}{2(L+1)}\right) = 2 \sum_{x=1}^L \cos\left(\frac{\pi k x}{2(L+1)}\right) + 1$$

$$\begin{aligned}
2 \sum_{x=1}^L \cos\left(\frac{\pi k x}{2(L+1)}\right) &= \sum_{x=1}^L \exp\left(\frac{i\pi k x}{2(L+1)}\right) + \sum_{x=1}^L \exp\left(\frac{-i\pi k x}{2(L+1)}\right) \\
&= \frac{1 - \exp\left(\frac{i\pi k L}{2(L+1)}\right)}{1 - \exp\left(\frac{i\pi k}{2(L+1)}\right)} + \frac{1 - \exp\left(\frac{-i\pi k L}{2(L+1)}\right)}{1 - \exp\left(\frac{-i\pi k}{2(L+1)}\right)} \\
&= \frac{\exp\left(\frac{i\pi k L}{4(L+1)}\right) \exp\left(\frac{-i\pi k L}{4(L+1)}\right) - \exp\left(\frac{i\pi k L}{4(L+1)}\right)}{\exp\left(\frac{i\pi k}{4(L+1)}\right) \exp\left(\frac{-i\pi k}{4(L+1)}\right) - \exp\left(\frac{i\pi k}{4(L+1)}\right)} \\
&\quad + \frac{\exp\left(\frac{-i\pi k L}{4(L+1)}\right) \exp\left(\frac{-i\pi k L}{4(L+1)}\right) - \exp\left(\frac{i\pi k L}{4(L+1)}\right)}{\exp\left(\frac{-i\pi k}{4(L+1)}\right) \exp\left(\frac{-i\pi k}{4(L+1)}\right) - \exp\left(\frac{i\pi k}{4(L+1)}\right)} \\
&= \frac{\exp\left(\frac{i\pi k L}{4(L+1)}\right) \sin\left(\frac{\pi k L}{4(L+1)}\right)}{\exp\left(\frac{i\pi k}{4(L+1)}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{4(L+1)}\right)} + \frac{\exp\left(\frac{-i\pi k L}{4(L+1)}\right) \sin\left(\frac{\pi k L}{4(L+1)}\right)}{\exp\left(\frac{-i\pi k}{4(L+1)}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{4(L+1)}\right)} \\
&= \left[\exp\left(\frac{i\pi k(L-1)}{4(L+1)}\right) + \exp\left(\frac{-i\pi k(L-1)}{4(L+1)}\right) \right] \frac{\sin\left(\frac{\pi k L}{4(L+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{4(L+1)}\right)} \\
&= 2 \cos\left(\frac{\pi k(L-1)}{4(L+1)}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi k L}{4(L+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{4(L+1)}\right)}
\end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi k(L-1)}{4(L+1)}\right) &= \cos\left(\frac{\pi k L}{4(L+1)} - \frac{\pi k}{4(L+1)}\right) \\
&= \cos\frac{\pi k L}{4(L+1)} \cos\frac{\pi k}{4(L+1)} + \sin\frac{\pi k L}{4(L+1)} \sin\frac{\pi k}{4(L+1)}
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
2 \cos \left(\frac{\pi k(L-1)}{4(L+1)} \right) \frac{\sin \frac{\pi k L}{4(L+1)}}{\sin \frac{\pi k}{4(L+1)}} &= 2 \cos \frac{\pi k L}{4(L+1)} \cos \frac{\pi k}{4(L+1)} \frac{\sin \frac{\pi k L}{4(L+1)}}{\sin \frac{\pi k}{4(L+1)}} \\
&+ \sin \frac{\pi k L}{4(L+1)} \sin \frac{\pi k}{4(L+1)} \frac{\sin \frac{\pi k L}{4(L+1)}}{\sin \frac{\pi k}{4(L+1)}} \\
&= 2 \cos \frac{\pi k L}{4(L+1)} \sin \frac{\pi k L}{4(L+1)} \cot \frac{\pi k}{4(L+1)} + 2 \sin^2 \frac{\pi k L}{4(L+1)} \\
&= \sin \frac{\pi k L}{2(L+1)} \cot \frac{\pi k}{4(L+1)} + 2 \sin^2 \frac{\pi k L}{4(L+1)}
\end{aligned}$$

or k est impaire, donc $k = 2n + 1$ et on pose $L \sim L + 1$

donc pour $k = 2n + 1$, on a $n = \frac{k-1}{2}$ et comme $\sin \frac{\pi k}{2} = \pm 1 \implies \sin \frac{\pi k}{2} = (-1)^{\frac{k-1}{2}}$

et puisque $\sin^2 \frac{\pi k}{2} = \frac{1}{2}$, d'où

$$\sum_{x=-L}^L \cos \left(\frac{\pi k x}{2(L+1)} \right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cot \frac{\pi k}{4(L+1)} + 2$$

on obtient donc la probabilité cherchée :

$$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{1}{L+1} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{2L+1} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos \left(\frac{\pi k}{2(L+1)} \right)^N \cot \frac{\pi k}{4(L+1)}. \quad (1.34)$$

□

Pour $L = 15, 20$ et 25 , la distribution est représentée dans la figure 1.2 ci dessous pour $N \geq 1000$. On observe effectivement le plateau $P_0 \sim 1$ pour N petit, et une décroissance qui semble bien exponentielle pour $N \gg L^2$. La distribution à N fixé comme fonction de L est quant à elle représentée sur la figure 2.2.

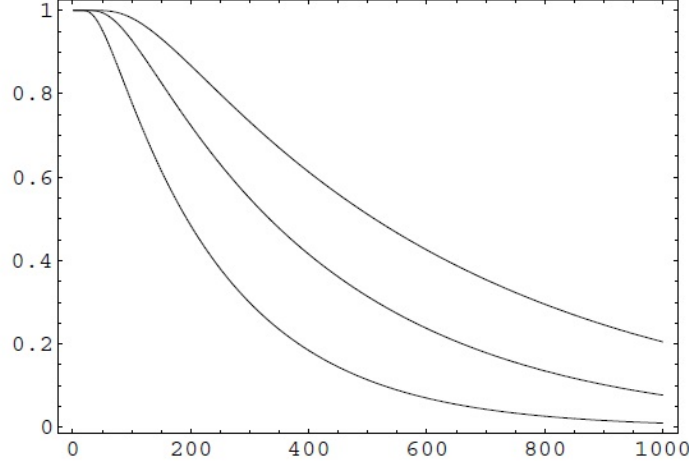


FIGURE 1.2 – Pour L fixé, probabilité qu’après un temps N , le marcheur ne se soit pas éloigné d’une distance supérieure à L , comme fonction de N . Les courbes correspondent respectivement à $L = 15, 20$ et 25 , de la gauche vers la droite.

Analysons l’expression précédente (1.32) lorsque L est grand. Notons d’abord que ce sont les valeurs de k qui sont petites devant L qui apporteront la plus grande contribution à la somme, parce que le cosinus reste proche de 1. On remarquera que k et $2L + 2 - k$ donnent au cosinus une valeur identique en norme, mais que $2L + 2 - k$ apporte une contribution qui est dépréciée par un facteur L^{-2} par rapport à k , à cause de la cotangente. Pour $k \ll L$, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi k}{2(L+1)}\right) \sim 1 - \frac{\pi^2 k^2}{8(L+1)^2} = \left(1 - \frac{\pi^2 k^2}{8(L+1)^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{8(L+1)^2}\right) \quad (1.35)$$

toujours pour L grand, le développement au premier ordre de la cotangente $\cot x \sim \frac{1}{x}$ on obtient

$$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(L+1)^2}\right) \quad (1.36)$$

Pour $L \ll \sqrt{N}$, le premier terme seul fournit une très bonne approximation, confirmant la décroissance exponentielle annoncée que la probabilité le tende vers zéro lorsque N tend vers ∞ , quel que soit L , montre qu’après un temps suffisamment grand, le marcheur sort de n’importe quel intervalle $[-L, +L]$, avec probabilité

1, c'est-à-dire qu'il visitera n'importe quel site, aussi éloigné soit-il du point de départ, et cela avec probabilité 1. Ce résultat reste valable en n'importe quelle dimension : avec probabilité 1, le marcheur sort de n'importe quelle boîte/boule fixée.

Pour tout N fixé, la série (1.36), reproduit une probabilité qui vaut 1 lorsque $L \rightarrow \infty$, en vertu de $1 = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = \frac{\pi}{4}$.

Cette série infinie définit une fonction qui est reliée à des fonctions classiques, à savoir les fonctions *theta* elliptiques(....). L'une d'entre elles est définie par :

$$\theta_2(z | \tau) = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \exp \frac{i\pi k^2 \tau}{4} \cos kz = 2q^{\frac{1}{4}} \cos z \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})(1 + q^{2m} \cos 2z + q^{4m}) \quad (1.37)$$

avec $q = e^{i\pi\tau}$.

Pour N suffisamment grand, et l'utilisation de cette fonction *theta*, on a :

$$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz \theta_2 \left(z \mid \frac{i\pi N}{2(L+1)^2} \right). \quad (1.38)$$

Revenons maintenant aux questions principales de cette section. Que peut on dire de la probabilité que le marcheur a de dépasser son point d'éloignement moyen \sqrt{N} ?

Remplaçant $L = \sqrt{N}$ dans (1.36), et en ne conservant que le premier terme, on trouve :

$$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq \sqrt{N}] \sim \frac{4}{\pi} \exp(-\frac{\pi^2}{8}) = 0.3708. \quad (1.39)$$

ce qui donne une bonne approximation (même aussi ce que l'on peut voir sur les graphes de la Fig.1).

Voyant que la probabilité que le marcheur dépasse le point \sqrt{N} , est supérieure à $\frac{1}{2}$. Mais dans quelles proportions ? Pour s'en rendre compte, calculons la valeur moyenne du maximum et l'écart-type de sa distribution.

La moyenne du maximum est donnée par :

$$\langle \max_{x \leq N} |\omega(s)| \rangle = \sum_{L=1}^N L P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| = L] = (N+1) - \sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] \quad (1.40)$$

L'analyse de la somme, détaillée plus bas, montre que la moyenne augmente comme \sqrt{N} .

$$\langle \max_{x \leq N} |\omega(s)| \rangle = \sqrt{\frac{\pi N}{2}} - \frac{1}{2} + \dots \quad (1.41)$$

Avec les points représentents une correction qui s'annule lorsque $N \rightarrow \infty$.

Ce résultat ne devrait pas surprendre, mais on peut prendre note de la valeur numérique du coefficient $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.2533$, qui signifie qu'en moyenne, le marcheur dépasse le point d'éloignement moyen ($= \sqrt{N}$) de 25%. De même on trouve, que le second moment augmente linéairement avec N :

$$\langle (\max_{x \leq N} |\omega(s)|)^2 \rangle = 2GN - \sqrt{\frac{\pi N}{2}} + \frac{G+1}{3} + \dots \quad (1.42)$$

avec, $G=0.915966$ est la constante de Catalan.

On en déduit immédiatement que l'écart-type de la distribution du maximum autour de sa moyenne est lui aussi proportionnel à \sqrt{N} .

$$\langle (\max_{x \leq N} |\omega(s)|)^2 \rangle - \langle \max_{x \leq N} |\omega(s)| \rangle^2 \sim \sqrt{(2G - \frac{\pi}{2})N} = 0.511\sqrt{N} \quad (1.43)$$

Le renseignement à tirer est donc qu'après un temps N , le marcheur ne s'est pas éloigné en moyenne d'une distance supérieure à un multiple de \sqrt{N} , et cela avec des fluctuations d'ordre N . La probabilité qu'il soit resté à une distance au plus égale à environ 2 fois \sqrt{N} est donc pratiquement égale à 1. C'est bien ce que l'on peut voir sur la courbe de la Figure 1.3 (pour laquelle $2\sqrt{200} \sim 30$).

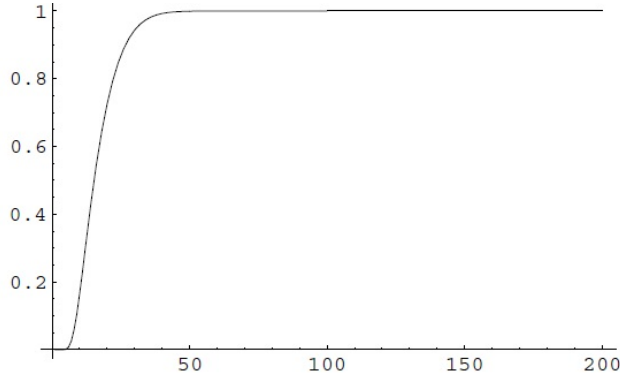


FIGURE 1.3 – Pour $N=200$ fixé, probabilité qu’après un temps N , le marcheur soit resté dans un intervalle $[-L, +L]$, pour L entre 1 et N . La formule exacte (1.34) et l’expression en termes theta (1.38) produisent deux courbes qui se confondent dès que $N \sim 30$

Ces conclusions restent qualitativement correctes en dimension supérieure.

Pour calculer la moyenne du maximum, nous partons de la série (1.36).

$$P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(L+1)^2}\right),$$

et nous sommes sur L , l’utilisation de la formule d’Euler-MacLaurin (voir l’annexe), nous permet de remplacer la somme par une intégrale.

Donc dans notre cas on a :

$$\sum_{L=1}^N F(L) = \int_0^N dx F(x) + \frac{1}{2}[F(N) + F(0)] + \frac{1}{12}[F'(N) - F'(0)] - \frac{1}{120}[F'''(N) - F'''(0)] + \dots \quad (1.44)$$

Par application de cette formule. On obtient, en négligeant tous les termes qui s’annulent lorsque $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \sum_{L=1}^N \left(\frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(L+1)^2}\right) \right)$$

Donc

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \int_0^N \sum_{L=1}^N \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} e^{-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(L+1)^2}} + \frac{1}{2} \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} e^{-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(L+1)^2}}$$

ce qui nous donne :

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \int_0^N dL e^{-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(L+1)^2}} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} e^{-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(N+1)^2}} \quad (1.45)$$

Posons :

$$A_n = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \int_0^N dL e^{-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(L+1)^2}}, \quad B_n = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} e^{-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(N+1)^2}}$$

La série B_n est une série infinie, uniformément convergente en N . Par conséquent, la limite $N \rightarrow \infty$ et la sommation peuvent être échangées, ce qui donne le résultat $\frac{\pi}{4}$, avec une convergence exponentielle en N , comme on peut le montrer par la technique utilisée ci-dessous (La dérivée par rapport à N de la série est reliée à la fonction $\theta'(0 | \tau)$ utilisée en bas).

Or pour la série A_n on effectue un changement, $L' = L + 1$ ce qui conduit que l'intervalle de l'intégrale devient $[1, N + 1]$, que l'on peut changer en $[0, N + 1]$ (à des termes exponentiellement petits).

Ensuite on pose un changement de variable $y = \frac{1}{L'}$, on obtient

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2 N y^2}{8}}. \quad (1.46)$$

En intégrant une fois par parties,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2 N y^2}{8}} &= \left[-\frac{1}{y} e^{-\frac{k^2 \pi^2 N y^2}{8}} \right]_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} - 2 \frac{k^2 \pi^2 N}{8} \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} dy e^{-\frac{k^2 \pi^2 N y^2}{8}} \\ &= (N+1) e^{-\frac{k^2 \pi^2 N}{8(N+1)^2}} - \frac{k^2 \pi^2 N}{4} \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} dy e^{-\frac{k^2 \pi^2 N y^2}{8}} \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\frac{1}{2} + \frac{4(N+1)}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} e^{-\frac{\pi^2 k^2 N}{8(N+1)^2}} - \pi N \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} k \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} dy e^{-\frac{k^2 \pi^2 N y^2}{8}} \quad (1.47)$$

Le première série est identique à celle que l'on a rencontré plus haut, et donne $\frac{\pi}{4}$ à des corrections exponentielles. La seconde série pose plus de problèmes. On peut voir que l'intégrale est exponentiellement petit sur une grosse partie du domaine d'intégration, mais par contre il est d'ordre 1 (pour k petit) dans le voisinage de la borne inférieure. Une estimation propre est possible en tirant parti de l'observation faite plus haut que les séries que l'on manipule ici sont reliées à des fonctions *theta*. Pour les besoins de la cause, on introduit cette fois la fonction *theta* $\theta_1(z \mid \tau)$, définie par :

$$\theta_1(z \mid \tau) = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} e^{\frac{i\pi k^2 \tau}{4}} \sin kz = 2q^{\frac{1}{4}} \sin z \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})(1 + q^{2m} \cos 2z + q^{4m}) \quad (1.48)$$

avec, $q = e^{i\pi\tau}$.

Si on dérive la fonction *theta* par rapport à z on a :

$$\theta'_1(z \mid \tau) = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} e^{\frac{i\pi k^2 \tau}{4}} k \cos kz$$

mettent $z = 0$ et $\tau = \frac{i\pi y^2 N}{2}$

$$\theta'_1(0 \mid \tau) = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} k (-1)^{\frac{k-1}{2}} e^{\frac{i\pi k^2 \tau}{4}}$$

ce qui nous donne à la fin

$$\theta'_1(0 \mid \frac{i\pi y^2 N}{2}) = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} k (-1)^{\frac{k-1}{2}} e^{\frac{-k^2 \pi^2 y^2 N}{8}}.$$

On trouve effectivement que la série dans l'expression précédente est proportionnelle à $\theta'_1(0 \mid \frac{i\pi y^2 N}{2})$. L'intérêt de cette observation réside dans le fait que la fonction θ_1 satisfait une identité remarquable (transformation modulaire, voir l'annexe) :

d'après les transformations modulaires de *theta* on a :

$$\theta_1(z \mid -\frac{1}{\tau}) = -i\alpha\theta_1(\tau z \mid \tau) \text{ avec, } \alpha = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\tau z^2}{\pi}}$$

Démonstration. On pose $-\frac{1}{\tau} = t$ comme un simple changement de variable avec la considération que θ_1 est impaire on a :

$$\theta_1(z \mid t) = \frac{i}{\sqrt{-it}} e^{\frac{iz^2}{\pi t}} \theta_1\left(\frac{z}{t} \mid -\frac{1}{t}\right)$$

alors,

$$\theta_1(z \mid \tau) = \frac{i}{\sqrt{-i\tau}} e^{\frac{iz^2}{\pi\tau}} \theta_1\left(\frac{z}{\tau} \mid -\frac{1}{\tau}\right). \quad (1.49)$$

□

Dérivant par rapport à z et posant $z = 0$, on obtient l'identité

$$\theta'_1(0 \mid \tau) = (-i\tau)^{-\frac{3}{2}} \theta'_1\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right).$$

En l'insérant dans l'équation (1.49), on trouve :

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = N + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{8}{\pi N}} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} k \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} \frac{dy}{y^3} e^{-\frac{k^2}{2Ny^2}} \quad (1.50)$$

En effet : d'après (1.47)

$$A_n = \frac{1}{2} + \frac{4(N+1)}{\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 1 + N = N + \frac{3}{2}.$$

Par contre pour la seconde série de l'expression (1.47), on a déjà vu qu'elle est proportionnelle à $\theta'_1(0 \mid \frac{i\pi y^2 N}{2})$, avec $\theta'_1(0 \mid \tau) = (-i\tau)^{-\frac{3}{2}} \theta'_1(0 \mid -\frac{1}{\tau})$.

On déduit que cette somme est proportionnelle à $(\frac{\pi y^2 N}{2})^{-\frac{3}{2}} \theta'_1(0 \mid -\frac{2}{i\pi y^2 N})$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} k e^{-\frac{k^2 \pi^2 N y^2}{8}} &= \frac{1}{2} \theta'_1(0 \mid \frac{i\pi y^2 N}{2}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi y^2 N}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} \theta'_1(0 \mid -\frac{2}{i\pi y^2 N}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi y^2 N}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} k e^{\frac{i\pi k^2}{4} \cdot \frac{2}{i\pi y^2 N}} \\
&= \left(\frac{\pi y^2 N}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} k e^{\frac{k^2}{2Ny^2}}.
\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\pi N \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} k \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} dy e^{-\frac{k^2 \pi^2 N y^2}{8}} = \sqrt{\frac{8}{\pi N}} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} k \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} \frac{dy}{y^3} e^{-\frac{k^2}{2Ny^2}}$$

donc on a bien montré l'expression :

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = N + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{8}{\pi N}} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} k \int_{\frac{1}{N+1}}^{\infty} \frac{dy}{y^3} e^{-\frac{k^2}{2Ny^2}}$$

d'après une simple intégration sur y , on trouve :

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = N + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{8N}{\pi}} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} k \left[e^{-\frac{k^2(N+1)}{2N}} - 1 \right]$$

comme cette série est une série infinie et uniformément convergente en N :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \text{impaire}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} k \left[e^{-\frac{k^2(N+1)}{2N}} - 1 \right] = -\frac{\pi}{4}.$$

alors :

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = N + \sqrt{\frac{\pi N}{2}} + \frac{3}{2}. \quad (1.51)$$

a des termes exponentiellement petits. La valeur donnée plus haut pour la moyenne du maximum s'ensuit.

Le calcul du second moment

$$\langle (\max_{s \leq N} |\omega(s)|)^2 \rangle = (N+1)^2 - \sum_{L=1}^N (2L+1) P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] \quad (1.52)$$

est semblable. En prenant les précautions nécessaires dans l'application de la formule d'Euler-MacLaurin, on obtient par la même technique que

$$\sum_{L=1}^N P_0[\max_{s \leq N} |\omega(s)| \leq L] = \frac{N^2}{2} - (G - \frac{1}{2})N + \sqrt{\frac{\pi N}{2}} - \frac{5+2G}{12} \quad (1.53)$$

plus des corrections qui s'annulent dans la limite $N \rightarrow \infty$. La constante de Catalan apparaît comme somme de la série $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}$.

1.2.2 La loi du logarithme itéré

Les résultats de la section précédente, qui donnent des informations sur la façon dont le marcheur diffuse sur le réseau, peuvent être considérablement raffinés. En une dimension, on sait que le marcheur a une tendance naturelle à s'éloigner de son point de départ, et de diffuser dans une portion de plus en plus large du réseau. On peut traduire cette idée en disant que (la position du marcheur est une fonction croissance du temps). Evidemment ça ne peut pas être littéralement correct, puisque le marcheur retourne à l'origine, passe du temps dans la partie négative de l'axe, ... Une formulation plus précise dirait que le supremum de la position jusqu'au temps N est une fonction croissante, mais une telle affirmation est complètement triviale. Par contre une estimation précise sur la croissance du supremum est elle hautement non-triviale. C'est justement ce que donne le superbe résultat suivant, que l'on mentionnera sans démonstration. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite non décroissante de nombres réels positifs, et $x(n)$ la position du marcheur au temps n (c'est une variable aléatoire). Alors

$$P_0[x(n) \geq \sqrt{n}a_n \text{ i.s.}] = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (1.54)$$

où les i.s. signifient infiniment souvent.

Par exemple, une suite constante confirme les résultats de la section précédente : le marcheur a une grande probabilité de dépasser son point d'éloignement moyen et donc de se trouver à droite de celui-ci. En se basant sur le résultat, on peut essayer de préciser la croissance de $x(n)$ en cherchant une suite avec une croissance maximale et qui assure en même temps la divergence de la série. Un moment de réflexion montre que la suite ne peut croître comme une puissance positive de n , ni même logarithmiquement, mais par contre peut croître comme le logarithme d'un logarithme.

Ce qui mène à la loi du logarithme itéré : on a

$$P_0[x(n) \geq \sqrt{2\lambda n \log \log n} \text{ i.s}] = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leq 1 \\ 0 & \text{si } \lambda > 1 \end{cases} \quad (1.55)$$

Cette borne ne peut pas être significativement améliorée.

1.2.3 Temps local : récurrence et transience

La section précédente a établi de façon assez précise la manière dont le marcheur diffuse sur le réseau. Elle a en particulier montré qu'il effectue des excursions arbitrairement loin de son point de départ, avec probabilité 1. Un élément important qui nous manque encore est de savoir si, après s'être éloigné à des distances arbitrairement grandes, le marcheur revient vers son point de départ, ou si au contraire il reste piégé à l'infini.

pour cela en étudiant le nombre moyen de retour à l'origine, ou de façon équivalente, le temps que le marcheur passe à l'origine.

On note :

$\tau(\vec{x}, N)$: Le temps passé en un site \vec{x} pendant un temps N , on l'appelle un temps local.

$G(x) \equiv \langle \tau(\vec{x}, +\infty) \rangle$: Le temps moyen passé en un site \vec{x} lorsqu'on laisse le marcheur se dérouler infiniment.

Pour calculer le temps local, définissons les variables binaires aléatoires $I_n(\vec{x})$:

$$I_n(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Le marcheur se trouve en } \vec{x} \text{ au temps } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.56)$$

On a clairement que $I_n(x) = 1$ avec probabilité $P_0(\vec{x}; n)$, de sorte que la moyenne de $I_n(x)$ est simplement $\langle I_n(x) \rangle = P_0(\vec{x}; n)$. Donc le temps local lui même s'écrit $\tau(\vec{x}; n) = \sum_{n=0}^N I_n(x)$.

Donc la valeur moyenne du temps local à l'origine et pour un temps infini :

$$G(0) = \langle \tau(0, +\infty) \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} P_0(0; N) = d \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{1}{d - \sum_i^d \cos \varphi_i} \quad (1.57)$$

Démonstration. On a

$$\tau(\vec{x}; n) = \sum_{n=0}^N I_n(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \langle I_n(\vec{x}) \rangle = P_0(\vec{x}; n)$$

donc

$$G(0) = \langle \tau(0, +\infty) \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} P_0(0; N)$$

et d'après l'expression (1.7)

$$P_0(\vec{x}; N) = \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x}\vec{\varphi}} \left(\frac{1}{d} \sum_i^d \cos \varphi_i \right)^N$$

ce qui implique

$$P_0(0; N) = \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{d} \sum_i^d \cos \varphi_i \right)^N$$

donc

$$G(0) = \langle \tau(0, +\infty) \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} P_0(0; N) = \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{d} \sum_i^d \cos \varphi_i \right)^N$$

avec

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{d} \sum_i^d \cos \varphi_i \right)^N = \frac{1}{1 - \frac{1}{d} \sum_i^d \cos \varphi_i} = \frac{d}{d - \sum_i^d \cos \varphi_i}$$

d'où

$$G(0) = \langle \tau(0, +\infty) \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} P_0(0; N) = d \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{1}{d - \sum_i^d \cos \varphi_i}$$

□

On voit que l'intégrand possède une divergence en $\varphi = 0$, et la question revient à voir si cette divergence est intégrable.

danc après un développement limité sur le cosinus on a :

$$G(0) \sim 2d \int_0 \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{1}{|\vec{\varphi}|^2}$$

et d'après le théorème de la mesure de surface (voir l'annexe), on a :

$$\begin{aligned} \int_0 \frac{d^d \varphi}{|\vec{\varphi}|^2} &= \int_0^\infty |\varphi|^{d-1} \int_{S_n} \frac{1}{|\varphi|^2} d\sigma_n d|\varphi| \\ &= \int_0^\infty |\varphi|^{d-3} \int_{S_n} d\sigma_n d|\varphi| \\ &= \int_0^\infty |\varphi|^{d-3} \sigma_n(s_n)^1 d|\varphi| \end{aligned}$$

on trouve donc :

$$G(0) \sim 2d \int_0 \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{1}{|\vec{\varphi}|^2} \sim cste \int_0^\infty d|\varphi| |\varphi|^{d-3} = \begin{cases} +\infty & \text{si } d = 1, 2 \\ fini & \text{si } d \geq 3 \end{cases} \quad (1.58)$$

Après un temps infini, le marcheur sera revenu en moyenne une infinité de fois à son point de départ si $d = 1, 2$.

et qu'il n'y reviendra qu'un nombre fini de fois en dimension $d \geq 3$.

Ce résultat possède une implication directe sur la probabilité p que le marcheur a de revenir à son point de départ. En effet, si p est cette probabilité, p^m est celle de revenir au moins m fois, et donc $p^m - p^{m+1} = p^m(1 - p)$ est celle de revenir exactement m fois. Dès alors, le temps moyen calculé plus haut vaut :

$$G(0) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} m p^m (1 - p) \quad (1.59)$$

La divergence du temps moyen passé à l'origine implique donc $p = 1$, c'est-à-dire la certitude d'y revenir. C'est la propriété de récurrence bien connue des marches aléatoires en une et deux dimensions. A l'inverse, un temps moyen fini implique $p < 1$, et donc une probabilité non-nulle de ne jamais y revenir : les marches sont transientes en dimension $d > 3$.

le même raisonnement s'applique au temps moyen passé en n'importe quel autre

poit .

$$G(\vec{x}) = d \int_0^{2\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\vec{\varphi}\vec{x}}}{d - \sum_i^d \cos \varphi_i} \quad (1.60)$$

1.3 La première loi de l'arcsinus

Les marches aléatoires étant symétriques autour de l'origine, on peut sans danger conclure qu'en moyenne, le marcheur passera autant de temps à gauche qu'à droite de l'origine (en une dimension). On peut raisonnablement penser aussi qu'il y a une grande probabilité qu'il passe effectivement de chaque côté à peu près la moitié du temps, sans doute avec des changements. Si donc on considère la probabilité que le marcheur passe un temps k du côté positif de l'axe sur une durée totale N , on s'attend à ce que cette probabilité soit maximale pour k de l'ordre de $\frac{N}{2}$. Le calcul explicite montre que c'est exactement le contraire qui se passe.

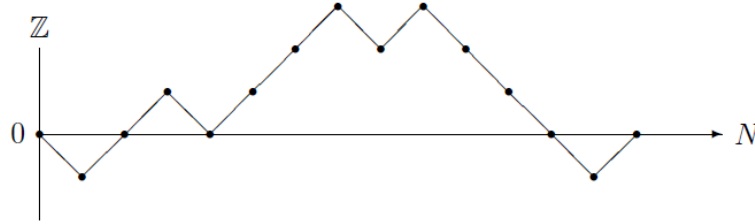


FIGURE 1.4 – Le temps passer par un marcheur, dans la partie positive de l'axe.

Soit $P_{2N}(2k)$ La probabilité que pendant un temps $2N$, la marche passe exactement un temps égal à $2k$ dans la partie positive de l'axe. Avec $0 \leq k \leq N$.

Passer un temps $2k$ dans la partie positive de l'axe est illustré sur la figure-3, sur laquelle un chemin de longueur 14 est représenté, qui passe un temps 10 dans la partie positive et un temps 4 dans la partie négative.

On fait donc un décompte des segments de chemins plutôt que de positions successives.

i) si $k = 0$: La probabilité $P_{2N}(0)$ (qui est aussi la probabilité $P_0(0; 2N)$ que le marcheur soit précisément de retour à l'origine au temps $2N$!) est celle que la

marche reste tout le temps du côté négatif (celle que le temps de premier passage m_1 en $x = 1$ soit supérieur à $2N$).

$$P_{2N}(0) = P_0(m_1 > 2N) = \frac{1}{2^{2N}} C_{2N}^N \quad (1.61)$$

ii) si $k = N$: Par symétrie, on a la même probabilité pour $N = k$, c'est-à-dire $P_{2N}(2N) = P_{2N}(0)$.

iii) si $1 \leq k \leq N$: La marche passe nécessairement par l'origine, disons au temps $2r$ pour la première fois. La probabilité correspondante, celle de revenir en 0 pour la première fois au temps $2r$, sera notée f_{2r} . Entre son départ et le temps $2r$, la marche est soit restée du côté positif de l'axe, soit du côté négatif, et on traite les deux situations séparément (ce sont des événements disjoints).

Premier cas : $r \in [1, k]$.

$$P_{2N}(2k) = \frac{1}{2} f_{2r} P_{(2N-2r)}(2k - 2r). \quad (1.62)$$

avec :

$\frac{1}{2} f_{2r}$, est la probabilité de revenir en 0 pour la première fois en $2r$ tout en étant resté du côté positif.

$P_{(2N-2r)}(2k - 2r)$, c'est la probabilité qu'au temps $(2N - 2r)$, le marcheur passe exactement un temps égal $(2N - 2r)$.

Deuxième cas : $r \in [1, N - k]$.

$$P_{2N}(2k) = \frac{1}{2} f_{2r} P_{(2N-2r)}(2k). \quad (1.63)$$

Ces contributions proviennent d'événements disjoints, donc la probabilité $P_{2N}(2k)$ est simplement leur somme, ce qui donne

$$P_{2N}(2k) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k f_{2r} P_{2N-2r}(2k-2r) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N-k} f_{2r} P_{(2N-2r)}(2k), \quad (0 \leq k \leq N) \quad (1.64)$$

On montre par induction que la solution est donnée par

$$P_{2N}(2k) = P_{2k}(0) P_{2N-2k}(0) = P_0(0; 2k) = P_0(0; 2N - 2k) \quad (1.65)$$

Par les résultats relatifs à $k = 0$ et $k = N$, l'expression est correcte pour $N = 1$.

Montrons que si elle est correcte pour $P_{2m}(\cdot)$, $1 \leq m \leq N \leq N-1$, elle le sera aussi pour $P_{2N}(\cdot)$. On peut voir de (1.64) que P_{2N} ne dépend que des P_{2N} , et en y insérant l'expression (1.65), on trouve

$$P_{2N}(2k) = \frac{1}{2} P_{2N-2k}(0) \sum_{r=1}^k f_{2r} P_{2k-2r}(0) + \frac{1}{2} P_{2k}(0) \sum_{r=1}^{N-k} f_{2r} P_{2(N-k)-2r}(0) \quad (1.66)$$

⇒ La première somme implique que la probabilité que le premier retour en 0 se fasse au temps $2r$ suivi par un retour au temps $2k-2r$, et correspond donc à la décomposition de l'événement "être de retour en 0 au temps $2k$ " en termes des temps de premier retour à l'origine, qui sont à nouveau des événements disjoints. La somme vaut donc $P_0(0; 2k) = P_{2k}(0)$.

⇒ La deuxième somme se traite de la même manière et vaut $P_0(0; 2N-2k) = P_{2N-2k}(0)$

on a donc

$$P_{2N}(2k) = P_{2k}(0) P_{2N-2k}(0) = P_0(0; 2k) = P_0(0; 2N-2k)$$

Le résultat (1.65), est bien établi .

On a donc la probabilité recherchée, sous forme explicite

$$P_{2N}(2k) = \frac{1}{2^{2N}} C_{2k}^k C_{2N-2k}^{N-k} \quad (1.67)$$

Une première propriété de ce résultat est qu'il est symétrique sous $k \longleftrightarrow N-k$: la probabilité de rester peu de temps sur l'axe positif égale à la probabilité d'y passer beaucoup de temps. C'est conforme à l'intuition, puisque si la marche a peu de chance de rester presque tout le temps positive, elle a aussi peu de chance de rester presque tout le temps négative.

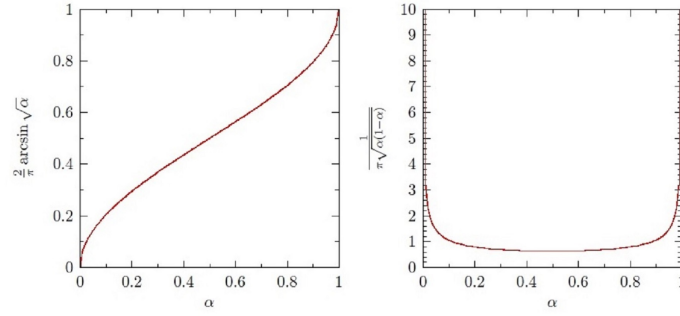


FIGURE 1.5 – Probabilité de passer à droite de l’origine une fraction de temps égale à α (en abscisse). En encart, la probabilité intégrée (fonction de répartition) que le marcheur y passe une fraction inférieure ou égale à α .

La réelle surprise est que ces deux régimes extrêmes sont les plus probables ! La figure 3 montre bien que la probabilité est maximale de passer une fraction de temps soit faible soit importante sur l’axe positif, et que celle d’y passer la moitié du temps est minimale ! On a ici une magnifique et surprenante illustration qu’un comportement typique peut être très différent d’un comportement moyen ...

On peut rendre les tendances de la courbe plus apparentes en remplaçant l’expression (1.67) par sa valeur asymptotique lorsque $1 \ll k \ll N$. En utilisant la formule de Stirling (voir l’annexe), $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, on trouve facilement que la probabilité de passer une fraction de temps $\alpha = \frac{k}{N} \leq 1$ sur l’axe positif vaut

$$P_{2N}(2k) \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k(N-k)}} \quad (1.68)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} P_{2N}(2k) &= \frac{1}{2^{2N}} C_{2k}^k C_{2N-2k}^{N-k} \\ &= \frac{1}{2^{2N}} \frac{(2k)!}{k!(2k-k)!} \frac{(2N-2k)!}{(N-k)!(2N-2k-N+k)!} \\ &= \frac{1}{2^{2N}} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{(2(N-k))!}{((N-k)!)^2} \end{aligned}$$

d’après la formule de Stirling.

$$(2k)! = \sqrt{2\pi} (2k)^{2k+\frac{1}{2}} e^{-2k} \quad \text{et} \quad (k!)^2 = 2\pi (k)^{2k+1} e^{-2k}$$

donc

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} 2^{2k+\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}-1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} 2^{2k+\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{(2(N-k))!}{((N-k)!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} 2^{2(N-k)+\frac{1}{2}} (N-k)^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui implique

$$P_{2N}(2k) = \frac{1}{2^{2N}} \frac{2\pi}{(2\pi)^2} 2^{2N} 2^{-2k+\frac{1}{2}} 2^{2k+\frac{1}{2}} (N-k)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}}$$

d'où le résultat

$$P_{2N}(2k) \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k(N-k)}}$$

□

On en déduit que

$$\begin{aligned} F(\alpha) &\equiv P_0[\textit{fraction de temps dans } \mathbb{Z}_+ \leq \alpha] = \sum_{k=0}^{\alpha N} P_{2N}(2k) \sim \int_0^{\alpha N} dk \frac{1}{\pi \sqrt{k(N-k)}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha} \end{aligned} \quad (1.69)$$

Cette fonction est également représentée sur la Figure 3. Comme discuté plus haut, la particularité la plus remarquable concerne les valeurs aux deux bords. Ainsi, la probabilité que le marcheur passe au moins 90% de son temps à droite de l'origine vaut environ $\frac{1}{5}$, ce qui semble énorme! Par contre, la probabilité que le marcheur passe au plus la moitié de son temps sur l'axe positif est égale à $\frac{1}{2}$, comme il se doit sur base de la symétrie ($F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$). La moyenne est également celle que l'on attend

$$\langle \textit{fraction de temps dans } \mathbb{Z}_+ \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha du \frac{u}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2} \quad (1.70)$$

avec un écart-type important, égal $\frac{1}{\sqrt{8}} \sim 1.35$.

1.4 Marches pondérées

Nous terminerons notre tour des marches aléatoires discrètes en formulant une généralisation qui nous sera utile et instructive pour la suite.

La particularité (simplificatrice) des marches que l'on a discutées jusqu'ici est que tous les chemins de même longueur ont même probabilité. Et en particulier les probabilités ne dépendent pas des sites visités.

La généralisation que l'on veut considérer consiste justement à mettre des poids différents sur les sites du réseau (lequel reste le réseau cubique \mathbb{Z}). Les probabilités (relatives) de transition seront à présent données par

$$P(\vec{y} \rightarrow \vec{x}) \sim \frac{w(\vec{x})}{2d} \delta_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}. \quad (1.71)$$

La fonction delta indique, comme précédemment, que le marcheur ne peut sauter que sur un site plus proche voisin, mais les probabilités relatives de saut sont maintenant spécifiées par les nombres w . Les poids w sont pour le moment quelconques (positifs tout de même), et ne satisfont pas de condition de normalisation. Par conséquent les probabilités de transition (1.82) ne sont pas normalisées à 1, ce que rappelle le symbole \sim .

Les perturbations que l'on peut introduire via le choix des poids w sont diverses. On peut introduire des anisotropies locales ou même envisager des perturbations aléatoires, en décidant que les poids w sont eux-même des variables aléatoires. En fonction du choix que l'on fait, les propriétés asymptotiques des marches peuvent changer ou ne pas changer (propriétés diffusives, récurrence/transience,...). Cette question sera le thème majeur du chapitre 3.

L'étude du processus stochastique correspondant à ces marches implique de considérer les probabilités de transition normalisées, données par

$$T_{x,y}^{norm} = \frac{w(\vec{x})}{2dA(y)} \delta_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}, \quad A(y) = \sum_{\langle x,y \rangle} \frac{w(x)}{2d} \quad (1.72)$$

Les distributions de position sont données en termes des puissances de la matrice T^{norm} . Elles sont correctement normalisées et se propagent dans le temps (satisfaisant l'équation de Chapman-Kolmogorov de la section 1.2). Elles sont cependant techniquement compliquées à obtenir en raison de la dépendance non-triviale de la matrice T^{norm} dans les positions initiales et finale de saut.

Si par contre on décide d'oublier pour un instant le facteur de normalisation, la "probabilité" de partir de \vec{y} et d'arriver en \vec{x} au temps N en ayant emprunté un certain chemin ω est égale à

$$P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N|\omega) = \prod_{i=1}^N \frac{w(\omega(i))}{2d} \quad (1.73)$$

et celle sans restriction sur le chemin emprunté vaut

$$P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N|\omega) = \sum_{\omega:|\omega|=N} \prod_{i=1}^N \frac{w(\omega(i))}{2d} \quad (1.74)$$

Cette "probabilité" satisfait une équation différentielle, comme dans le cas des marches standards, avec les dérivées spatiales par rapport au point de départ ou d'arrivée :

$$P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N+1) = \frac{w(\vec{x})}{2d} \sum_{i=1}^d \left[P_{\vec{y}}^w(\vec{x} + \vec{e}_i; N) + P_{\vec{y}}^w(\vec{x} - \vec{e}_i; N) \right] \quad (1.75)$$

$$P_{\vec{y}}^w(\vec{x}; N+1) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d \left[w(\vec{y} + \vec{e}_i) P_{\vec{y}+\vec{e}_i}^w(\vec{x}; N) + w(\vec{y} - \vec{e}_i) P_{\vec{y}-\vec{e}_i}^w(\vec{x}; N) \right] \quad (1.76)$$

Chapitre 2

Mouvement brownien

2.1 Un peu d'histoire

Historiquement, le mouvement brownien est associé à l'analyse de mouvements qui évoluent au cours du temps de manière si désordonnée qu'il semble difficile de prévoir leur évolution, même dans un intervalle de temps très court. Il joue un rôle central dans la théorie des processus aléatoires, parce que dans de nombreux problèmes théoriques ou appliqués, le mouvement brownien ou les diffusions que l'on en déduit fournissent des modèles limites simples sur lesquels de nombreux calculs peuvent être faits.

C'est le botaniste anglais Robert Brown (1773-1858) qui le premier décrit en 1827 le mouvement erratique de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide. Au *XIX^e* siècle, après lui, plusieurs physiciens reconnaissent que ce mouvement est très irrégulier et ne semble pas admettre de tangente ; on ne pourrait donc pas parler de sa vitesse, ni a fortiori lui appliquer les lois de la mécanique !

En 1900, Louis Bachelier (1870-1946) introduit le mouvement brownien pour modéliser la dynamique des prix des actions à la Bourse, mais sa démarche est ensuite oubliée jusque vers les années 1960... Sa thèse, "Théorie de la spéculation" est le point de départ de la finance moderne.

Mais c'est la physique du début du siècle qui est à l'origine du grand intérêt porté à ce processus. En 1905, Albert Einstein (1879-1955) construit un modèle probabiliste pour décrire le mouvement d'une particule qui diffuse : il trouve que la loi de la position à l'instant t de la particule, sachant que l'état initial est x admet une densité qui vérifie l'équation de la chaleur et de ce fait est gaussienne. Sa théorie sera rapidement confortée par des mesures expérimentales de constantes

de diffusion satisfaisantes. La même année qu'Einstein, une version discrète du mouvement brownien est proposée par le physicien polonais Smoluchowski à l'aide de promenades aléatoires.

En 1923, Norbert Wiener (1894-1964) construit rigoureusement "la fonction aléatoire" du mouvement brownien ; il établit en particulier que les trajectoires sont continues. Dès 1930, en suivant une idée de Paul Langevin, Ornstein et Uhlenbeck étudient la fonction aléatoire gaussienne qui porte leur nom et qui apparaît comme la situation d'équilibre naturelle à associer au mouvement brownien.

C'est le début d'une recherche mathématique théorique très active. Paul Lévy (1886-1971) découvre ensuite, avec d'autres mathématiciens, de nombreuses propriétés du mouvement brownien et introduit une première forme des équations différentielles stochastiques, dont l'étude sera ensuite systématisée par K. Itô (1915-2008) ; ses travaux sont rassemblés dans un traité paru en 1948 devenu très célèbre.

Mais l'Histoire connaît parfois des rebondissements incroyables. En effet en 2000, l'Académie des Sciences a ouvert un pli resté scellé depuis 1940 appartenant au jeune mathématicien Doeblin (1915-2008), télégraphiste français mort pendant l'offensive allemande. Ce pli regroupait en fait ses recherches récentes, rédigées sur un simple cahier d'écolier depuis son camp de cantonnement entre novembre 1939 et février 1940. A l'ouverture de ce pli, il a été réalisé que Doeblin, qui avait déjà marqué la théorie des probabilités par ses travaux remarquables sur les lois stables et les processus de Markov, avait découvert avant Itô les équations différentielles stochastiques et leurs liens avec les équations aux dérivées partielles de Kolmogorov. Le calcul d'Itô aurait pu peut-être s'appeler calcul de Doeblin...

2.2 Limite du continu de la marche standard

Après avoir discuté dans le chapitre précédent, quelques propriétés des marches aléatoires au temps discret et répondant à quelques questions qui concerne ce type de marche, sur un réseau symétrique d-dimensionnel \mathbb{Z}^d , nous s'intéresserons dans ce chapitre à étudier la version continue en temps des marches aléatoires (Mouvement Brownien).

Il existe plusieurs raisons pour discuter les marches aléatoires continues. Il y a bien sûr le fait qu'elles constituent une alternative bien naturelle aux marches discrètes, tout comme le feraient les marches continues à temps discret, les marches discrètes à temps continu, ...

Les motivations qui nous concernent plus directement sont basées sur les affirmations suivantes :

Le régime asymptotique le seul qui soit réellement intéressant d'une marche discrète peut être décrit par une marche continue associée. D'une façon un peu plus précise, les marches continues peuvent se voir comme certaines limites des marches discrètes ; de ce fait, elles extraient et elles capturent les caractéristiques essentielles des marches discrètes en les oubliant les détails du régime intermédiaire (petits temps, petites distances).

Peut-être encore un peu obscure pour le moment, ces affirmations sont contenues dans l'idée de "limite du continu" ou "limite d'échelle", et s'éclairciront par la suite. Elles nous conduiront directement aux propriétés d'universalité, par lesquelles des marches discrètes distinctes partagent le même régime asymptotique, parce que leur limite du continu respective mène à une unique marche continue.

D'autre part, pour la marche aléatoire standard sur \mathbb{Z}^d , la limite du continu définit le mouvement brownien standard d-dimensionnel sur \mathbb{R}^d , et présente une analogie frappante avec la formulation en intégrale de chemins de la mécanique quantique (à la Feynman). Donc on peut poser la question suivant :

Que devient la distribution $P_0(\vec{m}; N)$ dans la limite du continu (La taille a des maillons tend vers 0) ?

Il ya plusieurs façons de préciser, mais l'une entre elles, sans doute la plus intuitive, est de réaliser \mathbb{R} comme la limite de $a\mathbb{Z}$ pour $a \rightarrow 0$, c'est-à-dire un réseau de pas a , dont les mailles deviennent de plus en plus petites.

Que l'on soit dans \mathbb{Z} ou $a\mathbb{Z}$ ne change strictement rien dans la définition de la marche aléatoire. En effet, seules les probabilités de transition comptaient, et elles ne dépendaient que de la notion "être plus proche voisin", et non pas de la distance à parcourir pour effectuer le saut.

Par conséquent pour $\vec{x} \in a\mathbb{Z}$, $P_0(\vec{m}; N)$ ne dépend de \vec{x} qu'à travers l'entier $\vec{m} = \frac{\vec{x}}{a}$, pour lequel les formules du chapitre 1 s'appliquent. Donc d'après la formule de transformée de fourier on tire simplement que :

$$P_0\left(\frac{\vec{x}}{a}; N\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \varphi}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x} \frac{\vec{\varphi}}{a}} \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos \varphi_i \right)^N, \quad x \in a\mathbb{Z} \quad (2.1)$$

et en posant $\vec{\varphi} = \vec{k}a$, on obtient

$$P_0(\frac{\vec{x}}{a}; N) = a^d \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x}\vec{k}} \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos ak_i \right)^N. \quad (2.2)$$

alors quand $a \rightarrow 0$, le domaine d'intégration tend vers \mathbb{R} , ensuite on peut approximer $\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos ak_i \sim e^{-\frac{a^2|k|^2}{2d}}$, on a donc

$$P_0(\frac{\vec{x}}{a}; N) = a^d \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x}\vec{k}} e^{-\frac{Na^2|k|^2}{2d}} \quad (2.3)$$

Sa limite doit nous fournir la probabilité dans le continu,

$$P_0^{cont}(\vec{x}; N) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^d} P_0^{disc}(\frac{\vec{x}}{a}; N) \quad (2.4)$$

Avec la probabilité dans le discret du membre de droite suppose que \vec{x} appartient à \mathbb{Z} . L'inclusion de facteur a^{-d} est simplement dictée par la nécessité d'obtenir une limite non triviale : pour tout a strictement positif, l'intégrale (2.3) converge et la limite donnerait identiquement 0 à cause du préfacteur a^d . Le facteur a^{-d} implique aussi que la limite du continu nous fera passer d'une probabilité à une densité de probabilité, puisqu'on divise par un élément de volume.

Mais malgré tout ça, la limite reste toujours triviale : on trouve que $P_0^{cont}(\vec{x}; N) = \delta(\vec{x})$ (dans la limite continu le marcheur reste sur place avec probabilité 1).

Ce résultat se comprend facilement. Voyant \vec{x} comme un vecteur réel fixé, la relation $\vec{x} = a\vec{m}$ avec $a \rightarrow 0$ implique que la norme $m \rightarrow \infty$. Comme N reste fixe, $P_0^{disc}(\vec{m}; N)$ la probabilité qui est bien entendue nulle, sauf si \vec{x} est lui même nul, le site \vec{m} peut rester à distance finie, et dans ce cas $P_0^{disc}(\vec{m}; N) \neq 0$ (on n'a pas laissé au marcheur suffisamment de temps pour atteindre le site \vec{m} arbitrairement éloigné.)

Notre limite est correcte mais triviale et intéressante. La discussion ci-dessus montre bien que l'on ne pourra obtenir une limite non-triviale qu'à la seule condition d'ajuster le temps N en fonction de a , de sorte que, tout comme \vec{m} , N diverge lorsque a tend vers 0. On doit laisser au marcheur suffisamment de temps pour atteindre le site $\frac{\vec{x}}{a} = \vec{m}$.

Donc reste à savoir ce que "suffisamment" de temps veut dire. A quelle vitesse est-ce que N doit diverger en fonction de a ? Le site $\frac{\vec{x}}{a}$ à atteindre est éloigné d'une distance qui diverge comme a^{-1} . On sait qu'il faut un temps de l'ordre de $|\vec{m}|^2$ pour

s'éloigner d'une distance $|\vec{m}|$, et on peut dès lors penser que la limite du continu sera non-triviale si le temps N est ajusté en fonction de l'échelle a de telle sorte qu'il diverge comme a^{-2} .

Afin de vérifier ce raisonnement, laissons ouverte la question de la vitesse de divergence de N en fonction de a et posons $N = \frac{Dt}{a^{\frac{1}{\nu}}}$ avec :

$\nu > 0$, un certain exposant à déterminer.

D est une constante de proportionnalité qui fixe l'échelle des temps t .

D'après la modification de 2.4 on a :

$$P_0^{cont}(\vec{x}; t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^d} P_0^{disc}\left(\frac{\vec{x}}{a}; \frac{Dt}{a^{\frac{1}{\nu}}}\right) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x}\vec{k}} e^{-\frac{Dta^{2-\frac{1}{\nu}}|\vec{k}|^2}{2d}} \quad (2.5)$$

Suivant les cas que peut prendre ν , on déduit que la seule façon, d'obtenir une limite non triviale est donc effectivement de mettre $\nu = \frac{1}{2}$.

La limite donne alors,

$$P_0^{cont}(\vec{x}; t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^d} P_0^{disc}\left(\frac{\vec{x}}{a}; \frac{Dt}{a^{\frac{1}{\nu}}}\right) = \frac{1}{\left(\frac{2\pi Dt}{d}\right)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{d|\vec{x}|^2}{2Dt}} \quad (2.6)$$

Démonstration.

$$P_0^{cont}(\vec{x}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x}\vec{k}} e^{-\frac{Dt|\vec{k}|^2}{2d}}$$

pour $d = 1$:

$$P_0^{cont}(\vec{x}; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-\frac{Dtk^2}{2} + i x k}$$

avec,

$$\begin{aligned} -\frac{Dtk^2}{2} + i x k &= \frac{Dt}{2} \left(k^2 - \frac{2ixk}{Dt} \right) \\ &= \frac{Dt}{2} \left(k^2 - \frac{2ixk}{Dt} - \frac{x^2}{D^2 t^2} \right) - \frac{x^2}{2Dt} \\ &= \frac{Dt}{2} \left(k - \frac{ix}{Dt} \right)^2 - \frac{x^2}{2Dt} \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
P_0^{cont}(\vec{x}; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-\frac{Dt}{2} (k - \frac{ix}{Dt})^2} e^{\frac{-x^2}{2Dt}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2\pi}}{Dt}}{Dt} e^{-\frac{x^2}{2Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{Dt}}} e^{-\frac{(k - \frac{ix}{Dt})^2}{2(\frac{1}{Dt})^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{2Dt}}
\end{aligned}$$

□

$P_0^{cont}(\vec{x}; t)$ est une densité de probabilité, qui est normalisée. La mesure de probabilité correspondante, $P_0^{cont}(\vec{x}; t) d^d x$ donne la probabilité d'être en un point de l'élément de volume $d^d x$ au temps t , en étant parti de l'origine au temps $t = 0$.

Tout comme dans les marches discrètes, on verra \vec{x} comme une position le long d'une trajectoire continue, que l'on dénotera par $\omega(t)$, $t \geq 0$. Pour t fixé, $\omega(t)$ a valeur dans \mathbb{R} , et de densité,

$$P_0(\omega(t) \in d^d x) = P_0^{cont}(\vec{x}; t) d^d x = \frac{1}{(\frac{2\pi Dt}{d})^{\frac{d}{2}}} e^{\frac{-d|\vec{x}|^2}{2Dt}} d^d x \quad (2.7)$$

Cette mesure peut également être obtenue comme solution élémentaire de l'équation de la chaleur, que l'on établit en calculant la limite du continu de l'une des deux équations différentielles discrètes du chapitre 1. On se souvient que l'une incluait une variation du point d'arrivée, et l'autre une variation du point de départ. On trouve dans les deux cas que la densité $P_{\vec{y}}(\vec{x}; N)$ satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \frac{D}{2d} \Delta_x P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) \\ \frac{\partial}{\partial t} P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \frac{D}{2d} \Delta_y P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) \end{cases} \quad \text{avec,} \quad P_{\vec{y}}(\vec{x}; 0) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.8)$$

Le processus de limite développé ci-dessus est représentatif du calcul de la limite du continu d'un système discret. On l'appelle aussi limite d'échelle (scaling limit), une dénomination qui exprime bien l'idée sous-jacente de faire un zoom arrière (facteur d'échelle $a < 1$). En termes de l'échelle a , qui est véritablement le paramètre contrôlant la limite, les variables discrètes (\vec{m} et N) doivent être

finement ajustées sous peine d'obtenir une limite triviale : il y a un ajustement critique des variables (ni trop ni trop peu), spécifié par des exposants critiques. Dans le cas présent, l'ajustement est contrôlé par l'exposant $\nu = \frac{1}{2}$ et la relation est $|\vec{m}| = |\frac{\vec{x}}{a}| \sim (\frac{tD}{a^2})^\nu \sim N^\nu$. La valeur de cet exposant est clairement reliée aux propriétés diffusives de la marche discrète, dont la marche continue hérite. De façon plus générale, tous les paramètres présents dans le système discret devront être ajustés (scalés !) de manière adéquate pour obtenir une limite d'échelle non triviale. Des exemples seront donnés plus loin. Les relations $\vec{m} = \frac{\vec{x}}{a}$ et $N = \frac{Dt}{a^2}$ entre les variables discrètes et continues montrent bien que ce sont les régimes de grandes distances $\vec{m} \rightarrow \infty$ et de grands temps $N \rightarrow \infty$ qui définissent la limite d'échelle. On se trouve donc bien dans le régime asymptotique des marches discrètes, comme annoncé au début du chapitre. Du reste, l'idée de faire un zoom arrière, de prendre du recul, qui est bien l'idée maîtresse de la limite d'échelle, explique parfaitement pourquoi le régime asymptotique de la marche standard est une marche continue, dans le temps et dans l'espace. Cette marche continue s'appelle le mouvement brownien (standard).

Les distributions continues, browniennes $P_0(b\vec{x}; t)$ gardent une trace claire de la limite d'échelle défini par

$$P_0(\vec{x}; t) = b^d P_0(\vec{x}; b^2 t), \quad b \in \mathbb{R}_+ \quad (2.9)$$

La facteur b^d dans le membre de droite est dû à la nature de P_0 comme densité de probabilité. Les probabilités elle mêmes sont invariantes sous changement d'échelle :

$$P_0(\vec{x}; t) d^d x = b^d P_0(\vec{x}; b^2 t) d^d x, \quad b \in \mathbb{R}_+ \quad (2.10)$$

Donc on peut dire que les trajectoires $\omega(t)$ et $\frac{1}{b}\omega(b^2 t)$ ont la même distribution.

Pour résumer, la limite d'échelle nous a conduit d'un processus discret à un processus continu, le mouvement brownien, dont nous avons calculé les distributions de position. Elle préserve les propriétés P1-P3 dont jouissaient les marches discrètes, à savoir l'homogénéité dans l'espace, la propriété de Markov et l'équation de Chapman-Kolmogorov (voir l'annexe). On a donc

$$P_{\vec{y}}(\omega(t) \in d^d x) = P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) d^d x = P_0(\vec{x} - \vec{y}; t) d^d x \quad (2.11)$$

La propriété de Markov exprime l'indépendance des morceaux disjoints de la marche

$$P_{\vec{y}}(\omega(t) \in d^d x | B_s) = P_{\omega(s)}(\omega(t-s) \in d^d x), \quad s \leq t \quad (2.12)$$

où B_s représente tout le passé de la marche antérieur au temps s : (la seule influence du passé sur le futur, c'est la position à l'instant présent). L'équation de Chapman-Kolmogorov est une conséquence de la propriété de Markov

$$P_{\vec{y}}(\omega(t) \in d^d x) = \int P_{\vec{y}}(\omega(s) \in d^d z) P_{\vec{z}}(\omega(t-s) \in d^d x), \quad s \leq t. \quad (2.13)$$

$$\Longleftrightarrow P_0(\vec{x}; t) d^d x = \int d^d z P_{\vec{y}}(\vec{z}; s) P_{\vec{z}}(\vec{x}; t-s). \quad (2.14)$$

2.3 Théorème central limite

Jusqu'à maintenant on a détaillé le calcul de la limite du continu des marches aléatoires standards sur \mathbb{Z} .

Notre but dans cette section est de tracer une propriété remarquable de la distribution continu, et à savoir qu'elle est universelle. Quelle que soit la marche aléatoire discrète que l'on considère au départ, tout au moins dans une très large classe, limite de continu donne toujours les mêmes distributions continues. Ce sera notre première résultat d'universalité.

On considère des marches aléatoires sur \mathbb{Z} en termes des sauts \vec{s}_i i.i.d, de sorte que la position du marcheur à l'instant N soit $\omega(N) = \vec{s}_1 + \dots + \vec{s}_N$. Avec la moyenne de s est nulle et sa matrice de covariance $\langle s^i, s^j \rangle = \frac{\sigma}{d} \delta_{i,j}$ des composantes de \vec{s} soit un multiple fini de l'identité (l'hypothèse importante est que σ soit fini).

A partir de ces conditions on a, $\langle e^{i\vec{\varphi}\vec{\omega}(N)} \rangle = \langle e^{i\vec{\varphi}\vec{s}} \rangle^N$, et l'équation (2.2) devient :

$$P_0\left(\frac{\vec{x}}{a}; N\right) = a^d \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x}\vec{k}} \langle e^{ia\vec{k}\vec{s}} \rangle^N. \quad (2.15)$$

pour a petit,

$$\begin{aligned} e^{ia\vec{k}\vec{s}} &\simeq 1 + \frac{(ia)^2 (\vec{k}\vec{s})^2}{2!} + \dots \\ &\simeq 1 - \frac{a^2 |\vec{k}|^2 \sigma}{2d} + \dots \\ &\simeq e^{-\frac{a^2 |\vec{k}|^2 \sigma}{2d}} \end{aligned}$$

ce qui implique,

$$P_0\left(\frac{\vec{x}}{a}; N\right) = a^d \int_{\frac{-\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{x}\vec{k}} e^{-\frac{a^2|\vec{k}|^2\sigma N}{2d}}$$

on retrouve exactement la même forme que pour la marche standard, à un facteur σ près dans l'exponentielle. Par conséquent, la distribution continue est exactement la même, à part que la constante D , ou de façon équivalente, la variable temporelle t , se trouve multipliée par σ .

On obtient le résultat étonnant que toutes les marches discrètes de la classe définie plus haut possède la même limite du continu, et donc le même régime asymptotique, à un changement d'échelle du temps près. On dira que toutes ces marches sont dans la même classe d'universalité¹.

Notons finalement que ce que l'on a fait ici n'est qu'une reformulation du théorème central limite, que nous verrons dans le cadre de ce cours comme un résultat d'universalité.

Soit X_1, X_2, \dots , des variables aléatoires réelle, i.i.d et de moyenne nulle et de variance σ . Alors $\frac{X_1+X_2+\dots+X_N}{\sqrt{N}}$ tend vers une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance σ , dont la fonction de densité s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} \quad (2.16)$$

La relation avec les calculs qui précèdent, en $d = 1$ au moins, est immédiate.

2.4 Mesure de Wiener

Les distributions de position à temps fixé $P_{\vec{y}}(\vec{x}; t)$ devient en pratique insuffisantes. car, elles ne permettent d'examiner les trajectoires browniennes qu'à des temps isolés, et pas sur des intervalles de temps (par exemple, comment calculer la fraction de temps passé dans une boule).

Les distributions de position à temps fixé, conjuguées à la propriété de Markov, déterminent un unique processus aléatoire défini en termes d'une unique mesure du probabilité sur l'ensemble des trajectoire browniens. La mesure est s'appelle la

1. pour lesquelles des marches discrètes distinctes partagent le même régime asymptotique.

mesure de Wiener (cf. appendice B.)

Les trajectoires formant un ensemble non-dénombrable, donc on ne peut pas leur assigner une probabilité, et pour donner sens à une fonction de densité, il nous faudrait définir une mesure sur un ensemble de trajectoires. L'idée donc est de définir la mesure de Wiener de façon indirecte, en disant ce qu'elle donne lorsqu'on l'intègre sur des ensembles de trajectoires convenablement choisis.² Les ensembles types que l'on choisit sont des cylindres, définis par des fenêtres (ou des cubes en d dimensions).

La probabilité des trajectoires ω qui sont passées dans I_1, I_2, \dots aux temps t_1, t_2, \dots , est donnée par,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_y[\omega : \omega(t_1) - y \in I_1, \omega(t_2) - \omega(t_1) \in I_2, \omega(t_3) - \omega(t_2) \in I_3, \dots] \\ = \int_{\substack{x_1 - y \in I_1 \\ x_2 - x_1 \in I_2}} P_y(\omega_{t_1} \in d^d x_1) P_{x_1}(\omega_{t_2} \in d^d x_2) P_{x_2}(\omega_{t_3} \in d^d x_3) \dots \\ = \int_{\substack{z_1 \in I_1 \\ z_2 \in I_2}} P_0(\omega_{t_1} \in d^d z_1) P_0(\omega_{t_2 - t_1} \in d^d z_2) P_0(\omega_{t_3 - t_2} \in d^d z_3) \dots \\ = P_0(\omega(t_1) \in I_1) P_0(\omega(t_2 - t_1) \in I_2) P_0(\omega(t_3 - t_2) \in I_3) \dots \end{aligned}$$

En utilisant les distributions de position à des instants fixés et la propriété de Markov.

On peut montrer que les probabilités de ces ensembles cylindriques définissent une unique mesure de probabilité \mathbb{P}_y ³ sur l'ensemble des trajectoires.

Clairement la mesure de Wiener satisfait la propriété de Markov

$$\mathbb{P}_y[\omega : s \leq t \leq T | \omega(\tau) : \tau \leq s] = \mathbb{P}_{\omega(s)}[\omega(t) : 0 \leq t \leq T - s]. \quad (2.17)$$

Dans tout ce qui suit et qui concerne le mouvement brownien, nous fixerons l'échelle des temps t en choisissant la constante de proportionnalité $D = d$, ce qui a l'avantage de simplifier les distributions de position. Celles-ci seront donc données par

2. comme si on définissait la mesure de Lebesgue sur la droite réelle en donnant la mesure (de Lebesgue) de tous les intervalles de \mathbb{R} .

3. est la mesure de Wiener (et \mathbb{E}_y sera l'espérance associée).

$$P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{2t}} \iff \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \frac{1}{2} \Delta_x P_{\vec{y}}(\vec{x}; t) = \frac{1}{2} \Delta_y P_{\vec{y}}(\vec{x}; t), \\ P_{\vec{y}}(\vec{x}; 0) = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{cases} \quad (2.18)$$

dans tous ce qui suit, il s'agit de la mesure de Wiener satisfait \mathbb{P} qui se réduit simplement à (un produit de) P_y lorsque l'événement à mesurer concerne les positions à des temps fixés.

2.5 Générateur du mouvement brownien

Le mouvement brownien est un processus stochastique, dont l'essence est de définir une dynamique stochastique, c'est-à-dire aléatoire. Plus précisément, un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre t (discret ou continu) que l'on peut associer à une variable temporelle, et définies sur un même espace S . La suite $(X_t)_t$ donne alors l'évolution d'un point de S au cours du temps t , cette évolution étant aléatoire puisque les positions X_t sont des variables aléatoires, de distributions données. De plus, lorsque le processus possède la propriété de Markov (la trajectoire considérée après le temps t ne dépend que de la position au temps t), les variables sont en quelque sorte "dynamiquement" reliées les unes aux autres : leurs distributions se propagent dans le temps au travers de l'équation de Chapman-Kolmogorov.

Dans le cas du mouvement brownien, la suite est $(X_t)_t$ définie par $(\omega(t))_t \in \mathbb{R}_+$ avec $\omega(t)$ à valeur dans \mathbb{R} . Leur distribution est donnée par

$$P_0(\omega(t) \in dx) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} dx e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dx \quad (2.19)$$

pour un départ à l'origine. La suite $(\omega(t))$ détermine donc l'évolution (aléatoire) dans \mathbb{R}^d du marcheur (de la particule) au cours du temps.

Dans une telle situation, on est tenté de définir un opérateur d'évolution, qui implémente l'évolution temporelle sur les variables de position. Ici le choix naturel serait d'introduire un opérateur $T(s)$ qui envoie formellement les variables $\omega(t)$ sur leurs translatées dans le temps $\omega(t+s)$. C'est purement formel, puisque $T(s)$ est supposé agir sur des variables aléatoires.

L'idée permettant de donner du sens à cet opérateur est cependant claire : on peut le faire agir sur les densités de probabilité plutôt que sur les variables aléatoires elles-mêmes, ou mieux encore, sur les valeurs moyennes des variables aléatoires. C'est équivalent à le faire agir sur les densités de probabilité, puisque connaître les valeurs moyennes de toutes les fonctions (dans une bonne classe) des $\omega(t)$ équivaut à connaître les densités de probabilité des $\omega(t)$. L'avantage est d'opérer sur des fonctions ordinaires.

On éfinit donc les opérateurs d'évolution $T(t)$ par

$$T(t)f(x) = T(t) E_x^4(f(\omega_0)) = E_x(f(\omega_t)) = \int dy P_x(y; t) f(y), \quad (2.20)$$

L'opérateurs T (semi-groupe) satisfait la propriété additive que l'on attend d'eux, à savoir

$T(s)T(t) = T(s+t) = T(t)T(s)$, grâce à l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$T(s)T(t)f(x) = T(s) \int dy P_x(y; t) f(y) = \int dz P_x(z; s) \int dy f(y) P_z(y; t) \quad (2.21)$$

$$= \int dy P_x(y; s+t) f(y) = T(s+t)f(x) \quad (2.22)$$

Le paramètre temporel étant continu, la propriété additive suggère de définir le générateur infinitésimal des translations dans le temps de la façon habituelle, c'est-à-dire en posant

$$T(t) = e^{-t\Theta}, \quad \Theta = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} T(t) \quad (2.23)$$

Donc que vaut le générateur du mouvement brownien ? La réponse suit d'un calcul simple, qui peut se faire de deux manières différentes :

i) Si l'on utilise l'équation de la chaleur avec dérivées spatiales par rapport au point de départ,

4. est la valeur moyenne par rapport à la mesure de Wiener conditionnée sur un départ en x au temps 0.

$$\begin{aligned}
-\Theta f(x) &= -\Theta E_x(f(\omega_0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t T(t) E_x(f(\omega_0)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t E_x(f(\omega_t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t \int dy f(y) P_x(y; t) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int dy f(y) \frac{1}{2} \Delta_x P_x(y; t) = \frac{1}{2} \Delta_x \int dy f(y) P_x(y; 0) \\
&= \frac{1}{2} \Delta f(x).
\end{aligned}$$

ii) Si les dérivées sont par rapport au point d'arrivée. On trouve,

$$\begin{aligned}
-\Theta f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int dy f(y) \frac{1}{2} \Delta_y P_x(y; t) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int dy \frac{1}{2} \Delta f(y) P_x(y; t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int dy \frac{1}{2} \Delta f(y) P_x(y; 0) \\
&= \frac{1}{2} \Delta f(x).
\end{aligned}$$

donc d'après i) et ii) on a

$$\Theta = -\frac{1}{2} \Delta, \quad (\text{mouvement brownien stansard}).$$

On retrouve l'opérateur caractéristique de la diffusion, mais on sent poindre aussi une analogie avec la mécanique quantique d'une particule libre : Θ est le générateur infinitésimal des translations dans le temps, et sa représentation dans un espace fonctionnel est le laplacien, exactement le hamiltonien pour une particule libre. Cette analogie se reserrera par la suite.

La notion de générateur est importante car il caractérise univoquement un processus de Markov. La raison en est simplement que la connaissance du générateur permet de calculer les densités de probabilité des variables aléatoires, qui, avec la propriété de Markov, permet de construire une mesure sur l'espace des trajectoires du processus (l'équivalent de la mesure de Wiener). Effectivement, on a pour toute fonction f

$$\begin{aligned}
-\partial T(t) f(x) &= \Theta T(t) f(x) = \Theta \int dy f(y) P_x(y; t) \\
&= \int dy f(y) \Theta_x P_x(y; t) = - \int dy f(y) \partial_t P_x(y; t)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $P_x(y; t)$ satisfait

$$\begin{cases} -\partial_t P_x(y; t) = \Theta_x P_x(y; t), \\ P_x(y; t) = \delta(x - y) \end{cases} \quad (2.24)$$

Où l'opérateur Θ agit sur x , (le point de départ). Cette équation détermine univoquement $P_x(y; t)$, qui apparaît comme la solution fondamentale de l'équation différentielle.

Notons que si $P_x(y; t)$ satisfait une équation différentielle analogue à l'équation précédente, mais avec dérivées spatiales par rapport au point d'arrivée y , l'opérateur différentiel spatial sera l'adjoint du générateur, comme le montre la chaîne d'équations *i* et *ii* dans laquelle des intégrations par parties doivent être effectuées. On aura ainsi

$$\begin{cases} -\partial_t P_x(y; t) = \Theta_y^* P_x(y; t), \\ P_x(y; t) = \delta(x - y) \end{cases} \quad (2.25)$$

Mais dans le cas du mouvement brownien, ces distinctions sont inutiles, puisque le générateur est le laplacien, auto-adjoint (sur l'espace des fonctions L_2 , avec le produit scalaire habituel, implicitement présent).

L'équation (2.24), montre que les valeurs moyennes à l'instant t , $u(x; t) \equiv T(t)f(x) = E_x(f(\omega_t))$, satisfont aussi l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} -\partial_t u(x; t) = \Theta u(x; t), \\ u(x; t) = f(x) \end{cases} \quad (2.26)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} u(x; t) = T(t)f(x) &\implies \frac{\partial}{\partial t} u(x; t) = \frac{\partial}{\partial t} T(t)f(x) \\ &= -\Theta T(t)f(x) \\ &= -\Theta u(x; t). \end{aligned}$$

□

2.6 Formule de Kac

Pour le calcul de comportement asymptotique du mouvement brownien, il est utile de généraliser la formule précédente. La généralisation correspondante permet en outre d'établir un lien solide avec l'intégrale de chemins en mécanique quantique (la formule que l'on s'apprête à dériver est d'ailleurs parfois appelée formule de Feynman-Kac⁵).

La section précédente a permis de calculer, via la résolution d'une équation différentielle, la moyenne $E_x(f(\omega_t))$. La formule de Kac est une généralisation de cela pour la quantité

$$u(x; t) = E_x[e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds} f(\omega_t)], \quad (2.27)$$

qui se ramène au cas précédente si $V = 0$. Nous allons voir que $u(x; t)$ satisfait aussi une équation différentielle.

le principal avantage réside dans la possibilité d'évaluer une moyenne de fonctionnelles intégrales du processus stochastique et ainsi d'examiner (sonder) la trajectoire de façon continue, et non plus simplement à des moments intermédiaires. Techniquement, cela fait une différence appréciable. Alors que sonder la trajectoire à des instants précis requiert juste la connaissance des distributions de positions $P_x(y; t)$, le fait de suivre la trajectoire tout au cours de son déroulement nécessite une mesure de probabilité sur les trajectoires elles-mêmes, c'est-à-dire la mesure de Wiener, dont les densités $P_x(y; t)$ ne sont que des faibles traces.

Plutôt que de calculer l'équation différentielle pour $u(x; t)$, nous allons dériver celle satisfaite par sa transformée de Laplace

$$\hat{u}(x; \alpha) = \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} u(x; t) = E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds} f(\omega_t) \quad (2.28)$$

5. C'est 1948 que Feynman, sur une suggestion très antérieure de Dirac, a proposé sa formulation de la mécanique quantique en intégrale de chemins. Kac a quant à lui publié sa formule en 1951.)

Pour $V = 0$ et d'après (2.26)

$$\begin{cases} \hat{u}(x; t) = E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f(\omega_t), \\ (\Theta + \alpha)\hat{u} = f(x) \end{cases} \quad (2.29)$$

Démonstration. on a

$$-\partial_t u(x; t) = \Theta u(x; t) \implies u(x; t) = K e^{-\Theta t}$$

d'après condition initial $u(x; 0) = K = f(x)$, ce qui implique que $u(x; t) = f(x) e^{-\Theta t}$

$$\begin{aligned} \implies \hat{u}(x; \alpha) &= \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f(x) e^{-\Theta t} = f(x) \int_0^\infty dt e^{-t(\alpha+\Theta)} \\ &= f(x) \left[\frac{1}{-\alpha - \Theta} e^{-t(\alpha+\Theta)} \right]_0^{+\infty} = f(x) \frac{1}{\alpha + \Theta} \end{aligned}$$

d'où

$$(\alpha + \Theta)\hat{u} = f(x)$$

□

D'après (B.2) et (2.28) on a

$$\begin{aligned} E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f(\omega_t) - \hat{u} &= E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f(\omega_t) - E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds} f(\omega_t) \\ &= E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} \{1 - e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds}\} f(\omega_t) \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}
1 - e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds} &= e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds} \left(e^{\int_0^t V(\omega(s))ds} - 1 \right) \\
&= e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds} \int_0^t d\tau \partial_\tau e^{\int_0^\tau V(\omega(s))ds} \\
&= e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds} \int_0^t d\tau V(\omega_\tau) e^{\int_0^\tau V(\omega(s))ds} \\
&= \int_0^t d\tau V(\omega_\tau) e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds + \int_0^\tau V(\omega(s))ds} \\
&= \int_0^t d\tau V(\omega_\tau) e^{-\int_\tau^t V(\omega(s))ds} \\
&= \int_0^t d\tau V(\omega_\tau) e^{-\int_0^{t-\tau} V(\omega(z+\tau))dz} \quad (z = s - \tau) \\
&= \int_0^t d\tau V(\omega_\tau) e^{-\int_0^{t-\tau} V(\omega(s+\tau))ds}
\end{aligned}$$

Maintenant, en échangeant les intégrations sur t et τ on obtient,

$$\begin{aligned}
E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f(\omega_t) - \hat{u} &= E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} \{1 - e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds}\} f(\omega_t) \\
&= E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f(\omega_t) - u(x; \alpha) \\
&= E_x \int_0^\infty d\tau V(\omega_\tau) \int_\tau^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^{t-\tau} V(\omega(s+\tau))ds} f(\omega_t) \\
&= E_x \int_0^\infty d\tau e^{-\alpha \tau} V(\omega_\tau) \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t V(\omega(s+\tau))ds} f(\omega_{\tau+t})
\end{aligned}$$

Remarquons que l'intégrale sur t ne dépend de la marche qu'à partir des temps τ . On sait, par la propriété de Markov (propriété *ii*), que la marche pour des temps ultérieurs à τ ne dépend que de la position au temps τ . L'intégrale sur t concerne donc une marche qui peut être considérée comme démarrant en ω_t au temps 0. La propriété d'indépendance entraîne donc

$$\begin{aligned}
E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} f(\omega_t) - \hat{u} &= E_x \int_0^\infty d\tau e^{-\alpha \tau} V(\omega_\tau) E_{\omega_\tau} \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds} f(\omega_t) \\
&= E_x \int_0^\infty d\tau e^{-\alpha \tau} V(\omega_\tau) \hat{u}(\omega_\tau; \alpha).
\end{aligned}$$

La fonction \hat{u} s'exprime donc en termes de deux valeurs moyennes qui ne font intervenir que la position de la marche à un instant précis, c'est-à-dire du type que l'on a examiné à la section précédente. Dès lors, appliquant l'opérateur $(\Theta + \alpha)$ et utilisant $(.)$, on trouve la formule de Kac

$$\begin{cases} \hat{u}(x; \alpha) = E_x \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds} f(\omega_t), \\ (\Theta + \alpha + V)\hat{u} = f(x) \end{cases} \quad (2.30)$$

Cette formule est valide pour un processus stochastique ayant la propriété de Markov et de générateur Θ , où bien sûr l'espérance $E_x(\cdot)$ désigne la moyenne par rapport à la mesure du processus en question.

Repassant à la variable t , il est facile de voir que la formule de Kac prend la forme

$$\begin{cases} u(x; t) = E_x[e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds} f(\omega_t)], \\ (\Theta + V)u = -\frac{\partial}{\partial t}, \quad u(x; 0) = f(x). \end{cases} \quad (2.31)$$

Sous des conditions assez générales, la solution $u(x; t)$ à cette équation est unique.

Cette formule est importante pour le calcul de propriétés concrètes du mouvement brownien (ou de tout autre processus de Markov), mais établit aussi un pont intéressant avec la formulation fonctionnelle (en intégrale de chemins) de la mécanique quantique. Effectivement, dans le cas du mouvement brownien, la formule de Kac devient particulièrement suggestive (pour un physicien tout au moins!) si on se rappelle que $\Theta = -\frac{1}{2}\Delta$. L'expression différentielle spatiale apparaît alors comme un Hamiltonien quantique ...

En guise de préparation, il sera très instructif d'examiner la question suivante. On sait que le mouvement brownien est la limite d'échelle d'une marche aléatoire symétrique. Qu'obtient-on si on effectue une limite d'échelle sur les marches aléatoires pondérées de la fin du chapitre I? Quel processus stochastique obtient-on et quel est son générateur?

Chapitre 3

Marches aléatoires perturbées

Dans tout ce qui précède on a traité presque uniquement des marches aléatoires symétriques, standards, dans le discret et dans le continu, et déterminé leurs propriétés essentielles (diffusives notamment).

Alors que dans ce dernier chapitre on ferons la même démarche pour explorer les propriétés de marches non-standards, vues comme des marches standards perturbées. La question fondamentale est de préciser, et dans notre cas d'illustrer surtout, de quelle façon les propriétés de marches perturbées diffèrent de celles des marches standards.

Dans ce chapitre nous traitons les perturbation de la façon expliquée à la fin du premier chapitre, c'est-à-dire que nous utiliserons les probabilités de transitions non normalisées.

$$T_{\vec{m}, \vec{n}} \equiv p(\vec{n} \rightarrow \vec{m}) = \frac{w(\vec{m})}{2d} \delta_{\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle} \quad (3.1)$$

De même ce qui précède on en a tiré des pseudo-distributions $P_0^w(\vec{m}; N)$, satisfaisant une équation différentielle

$$P_0^w(\vec{m}; N) = \sum_{\vec{n}} T_{\vec{m}, \vec{n}} P_0^w(\vec{n}; N-1) = \sum_{\vec{n}} (T^N)_{\vec{m}, \vec{n}} P_0^w(\vec{n}; 0) = (T^N)_{\vec{m}, \vec{0}} \quad (3.2)$$

Soit $Z_N = \sum_{\vec{m}} P_0^w(\vec{m}; N)$ est la normalisation de $P_0^w(\vec{m}; N)$.

Nous intéresserons par la suite par la distribution de probabilité $P_0^w(\vec{m}; N)/Z_N$, qui est correctement normalisée.

Nous nous concentrerons dans tout ce chapitre sur un exemple simple et concret, correspondant à une perturbation minimale, localisée à l'origine, au lieu de faire une étude générale des perturbation de ce type :

$$w(\vec{m}) = 1 + (e^\beta - 1)\delta_{(\vec{m},0)} = e^{\beta\delta_{\vec{m},0}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{m} \neq 0, \\ e^\beta & \text{si } \vec{m} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Donc comme pour les marches standards La probabilité de sauter vers un site plus proche voisin vaut donc $\frac{1}{2d}$, sauf s'il s'agit d'un saut vers l'origine, auquel cas la probabilité relative vaut $\frac{e^\beta}{2d}$. Dépendant du signe de β , cette probabilité est inférieure ou supérieure à $\frac{1}{2d}$.

La matrice T vaut donc,

$$T(\beta)_{\vec{m},\vec{n}} = \frac{e^{\beta\delta_{\vec{m},0}}}{2d} \quad (3.4)$$

et aussi c'est la matrice non perturbé $T(0)$ dont on a multiplié la ligne de l'origine par e^β .

La distribution de probabilité devient

$$\frac{P_0^\beta(\vec{m}; N)}{Z_N(\beta)} = \sum_{\omega: 0 \rightarrow \vec{m}} \frac{e^{\beta \times (\text{Nombre de retours en } 0)}}{(2d)^N Z_N(\beta)}. \quad (3.5)$$

Donc est selon les cas, La perturbation est encourage, ou décourage, le marcheur à visiter l'origine. Mais pour visiter l'origine, il doit préalablement se trouver dans son voisinage, ce qui implique qu'effectivement la perturbation n'affecte la marche que lorsque le marcheur se trouve près de l'origine. Les effets d'une telle perturbation sur les propriétés globales de la marche ne sont pas évidents a priori.

On peut néanmoins s'attendre à des effets qui dépendent de la dimensionnalité de l'espace.

En $d = 1, 2$, la marche standard est récurrente. Le marcheur revient une infinité de fois à l'origine, et a donc plus de chances de sentir l'effet de la perturbation qu'en dimension supérieure.

Donc tout ce qui suit dans cette dernière chapitre n'est qu'une affirmation de cette proposition.

Noton que la première manière de mesurer l'effet de la perturbation à l'origine définie plus haut est La Formulation discrète, qui ont permis de se faire une première

idée des comportements auxquels on peut s'attendre lorsque l'on met une perturbation attractive à l'origine. Alors que dans la deuxième section et pour des calculs explicites doivent être effectués pour avoir une description complète, en particulier dans le régime répulsif ($\beta < 0$), on s'intéresse par une Formulation continue qui donne de toutes manières des résultats équivalents à ceux de la formulation discrète dans son régime asymptotique de grands temps, qui est bien le régime qui nous intéresse.

Alors que dans le cas répulsif, la marche reste diffusive (i.e. le deuxième moment croît linéairement avec t) mais avec un coefficient de diffusion plus élevé que pour la marche standard (2 au lieu de 1), en rapport bien sûr avec ses retours moins fréquents à l'origine. Par contre, dans le cas attractif, le second moment reste borné dans le temps, ce qui implique que la distribution asymptotique reste très concentrée à l'origine.

Le calcul de cette section fournissent des résultats très explicites, mais reste confiné, à la dimension $d = 1$, et pour des dimension plus élevé ($d > 2$), on s'intéresse à Analyse en Echelles : Renormalisation (Groupe de Renormalisation).

Chapitre 4

Application

L'objectif de ce chapitre est de donner quelques méthodes probabilistes pour la simulation donc cette application repose sur la simulation numérique. Pour commencer nous abordons la simulation pour les marches aléatoires qui est la base des autres simulations stochastiques de notre travail. Il faut discrétiser le problème, cette discrétisation se faisant au niveau des variables, par exemple sur la variable de temps pour la marche aléatoire. Cette simulation sera illustrée avec l'utilisation de logiciels (MATLAB, qui est à la fois un logiciel de calcul et un langage de programmation haut niveau. C'est un logiciel payant, dont il existe deux équivalents gratuits

- Octave est un logiciel qui utilise le langage de matlab et peut donc utiliser les fonctions écrites en matlab. Il est plus lent et un peu moins beau.
- Scilab est développé par l'INRIA et la syntaxe diffère un peu de celle de matlab mais l'esprit est le même. Il est de mon point de vue encore un peu moins pratique que matlab.

4.1 Simulation de marche aléatoire

4.1.1 Simulation de marche aléatoire unidimensionnel

Le but de ce paragraphe est de simuler une marche aléatoire. En effet, rappelons nous qu'une marche aléatoire est un processus stochastique itératif, du type chaîne de Markov qui part de zéro $X_0 := 0 \in \mathbb{Z}$, Pour tout $j \in \mathbb{N}$ calculons

$$X_j := X_{j-1} + \Delta X_j,$$

où $\Delta X_j = 1$ ou -1 avec une même probabilité.
On peut aussi écrire, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$X_N := \sum_{j=0}^N \Delta X_j, \quad \text{avec } \Delta X_0 := 0,$$

où, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, ΔX_j est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, ayant toutes la loi de Bernoulli.

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($q = 1 - p, p = q = \frac{1}{2}$) qui atteint les valeurs 1 ou -1 , alors la valeur attendue de X est 0 et sa variance est 1. C'est, $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) = 1$. En fait, d'après la définition de la marche aléatoire on a :

$$X_N = \sum_{j=0}^N \Delta X_j, \quad \Delta X_0 := 0,$$

Dans ce qui suit on donne un exemple du code utilisé dans MATLAB pour :

⇒ **La simulation de N étape d'une marche aléatoire :**

Code de Matlab 4.1 – *Programme de simulation de N étape d'une marche aléatoire*

```
function randwalk(N)
p=0.5;%initialisation
dX=2.*(rand(1,N)<=p)-1; %crée une séquence de 1 et de -1
    partant de zero
y=[0 cumsum(dX)]; %calcule les sommes partielles
%Ce qui suit est juste pour le traçage
plot([0:N],y);
grid on
xlabel('étapes')
ylabel('Position')
title([int2str(N) '-étapes d une marche aléatoire (partant de
    0) '])
end
```

En lançant le code 4.1 dans l'éditeur de Matlab avec $N = 1000$ étapes, On obtient le graphique suivants :

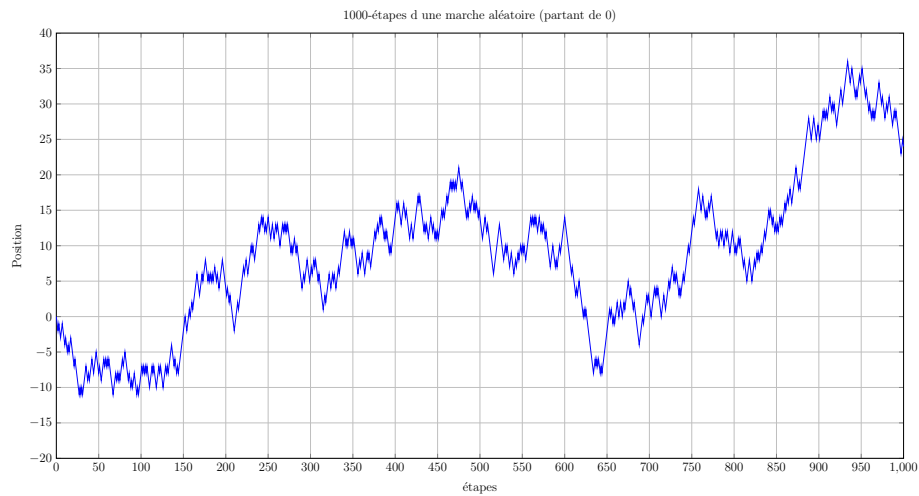


FIGURE 4.1 – *Simulation de $N=1000$ étape de marche aléatoire*

⇒ **La simulation de M Marche aléatoire en N étapes :**

Avec les mêmes démarches suivies dans la simulation d'une marche aléatoire de N étape on peut simuler N étapes et M marche aléatoire

Code de Matlab 4.2 – *Programme de simulation de M marche aléatoire en N étapes*

```
function randwalks(M,N)
%M= Le nombre de marches aléatoires
%N= le nombre d'étapes
p=0.5;
dX=2.*(rand(M,N)<=p)-1;
y=[cumsum(dX,2)];
plot([0:N],[zeros(M,1),y(1:M,:)]);
grid on
xlabel('Steps')
ylabel('Position')
title([' ' int2str(M) ' marche aléatoires de' int2str(N) '
      étapes '])
end
```

En lançant le code 4.2 dans l'éditeur de Matlab avec $M = 10$ marche aléatoire et $N=1000$ étapes, On obtient le graphique suivants :

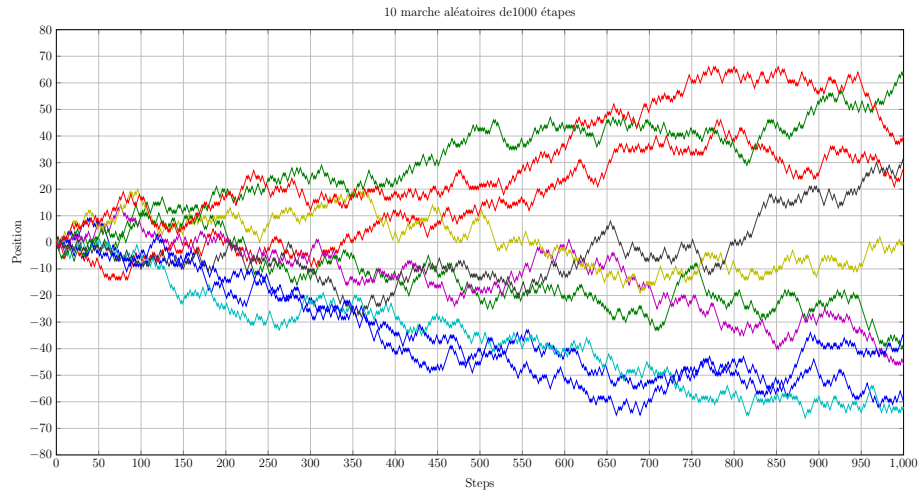


FIGURE 4.2 – Simulation de $M = 10$ Marche aléatoire et $N = 1000$ étapes

4.1.2 Simulation de marche aléatoire en deux dimension

Nous considérons le cas discret dans l'espace $2D$ et les orientations possibles pour la marche aléatoire, comme le montre la figure 4.3

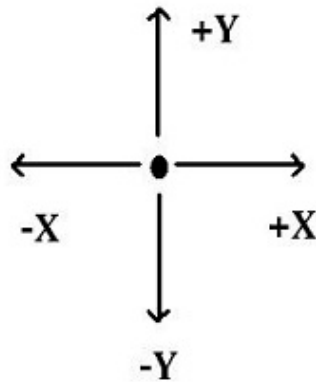


FIGURE 4.3 – *Espace 2D : orientations possibles pour la marche aléatoire*

A chaque pas de temps, l'objet choisit un nombre aléatoire de 1, 2, 3, 4 et en fonction de ce nombre, il va choisir l'un des quatre sens et faire un pas. Comme il s'agit d'un processus itératif, pour cela nous aurons besoin d'utiliser une boucle de simulation. Nous allons d'abord simuler une seule étape, puis nous mettrons une boucle autour d'elle.

Donc, nous devons suivre quatre Étapes :

• Première Étape

Assigner la position actuelle $r=[x,y]$

```
|| r=[0 0];
```

• Deuxième Étape

Obtenez un nombre aléatoire B pour sélectionner la direction

Générer un nombre B avec deux valeurs binaires $[B1, B2]$.

Ces deux valeurs combinées vont choisir la direction que la suite

```
|| Z=rand(1,2);  
|| B=Z>0.5;
```

TABLE 4.1 – Tableau d’orientations possibles pour la marche aléatoire

B		Direction	rStep
[1,1]	→	+X Direction	[1,0]
[1,0]	→	+Y Direction	[0,1]
[0,1]	→	-X Direction	[-1,0]
[0,0]	→	-Y Direction	[0,-1]

B sera 0 ou 1 selon si Z est inférieur à 0,5 ou non.

• Troisième Étape

on calcule la nouvelle position à partir de la dernière position et de son étape..

$r_{new} = r + rStep$;

```
|| if B==1  
||     rnew=r+[1 0];  
|| elseif B1==1  
||     rnew=r+[0 1];  
|| elseif B2==1  
||     rnew=r+[-1 0];  
|| else  
||     rnew=r+[0 -1];  
|| end
```

Par ailleurs, il est important de noter que si nous mettons $B == 1$ comme condition à l’intérieur **If**, il sera considéré comme vrai que lorsque tous les éléments de B satisfait la condition. Alors $r_{new} = r + [1\ 0]$ uniquement lorsque $B1$ et $B2$ les deux vaut 1. Sinon, si l’un d’eux est égal à 0, il va vérifier que l’on est 1 et de décider. En fin de compte, si aucune conditions sont réunies, cela signifie que B est $[0\ 0]$ et la direction Y négative est choisi.

• Quatrième Étape

Mettre à jour la position de cette nouvelle valeur

```
%UPDATE the new position  
r=rnew;
```

Maintenant, nous mettons ici l'ensemble du (code **Matlab**)

```
r=[0 0];  
Z=rand(1,2);  
B=Z>0.5;  
if B==1  
    rnew=r+[1 0];  
elseif B1==1  
    rnew=r+[0 1];  
elseif B2==1  
    rnew=r+[-1 0];  
else  
    rnew=r+[0 -1];  
end  
%UPDATE the new position  
r=rnew;
```

Maintenant, mettez une boucle autour de lui pour en faire un processus itératif.

Code de Matlab 4.3 – *Programme de simulation d'une marche aléatoire en deux dimension*

```
r=[0 0];  
for t= 0:0.1:100  
    Z=rand(1,2);  
    B=Z>0.5;  
    if B==1  
        rnew=r+[1 0];  
    elseif B1==1  
        rnew=r+[0 1];  
    elseif B2==1  
        rnew=r+[-1 0];  
    else  
        rnew=r+[0 -1];  
    end  
  
    hold on;  
    plot([r(1) rnew(1)], [r(2) rnew(2)]);  
    drawnow ;  
    %UPDATE the new position  
    r=rnew ;  
end
```

En lançant le code 4.3 dans l'éditeur de Matlab avec $N = 1000$ étapes, On obtient le graphique suivants :

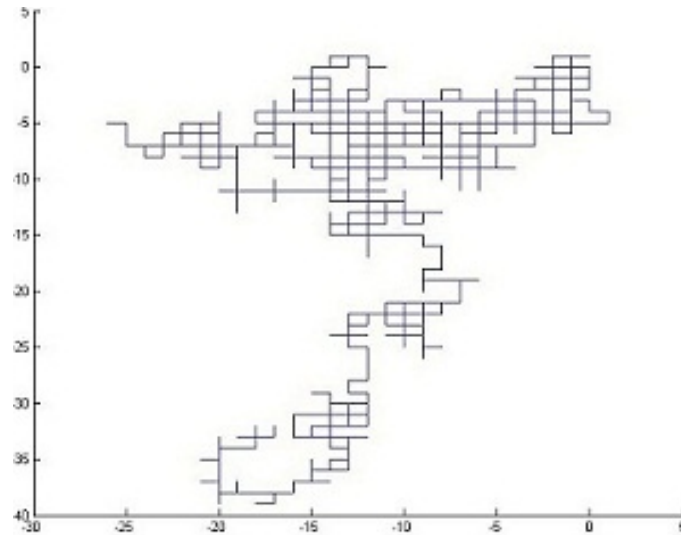


FIGURE 4.4 – *Simulation de N étape de marche aléatoire en deux dimension*

4.2 Simulation du mouvement brownien

La simulation repose sur la discrétisation du temps.

4.2.1 Discrétisation

Pour simuler le mouvement brownien qui est un processus à temps continu, il faut d'abord discrétiser le temps. Soit Δt la longueur d'une période de temps. Nous simulerons le mouvement brownien au temps $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ donc pour ce faire, on procède en deux étapes principales :

- ⇒ Obtenir une réalisation du vecteur $(B_{\Delta t}, B_{2\Delta t}, \dots, B_{N\Delta t})$
- ⇒ Approcher la trajectoire du mouvement brownien B à partir de cette réalisation.

Commençons par la deuxième étape.

4.2.2 Approcher la trajectoire du mouvement brownien

On a deux approches :

⇒ Approximation par une fonction en escalier.

⇒ Interpolation linéaire.

Approximation par une fonction en escalier.

On définit le processus en escalier \hat{B} par

$$\hat{B}_u = \hat{B}_{k\Delta t} \text{ pour tout } u \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[\text{ où } k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq N.$$

En particulier, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq N$, $\hat{B}_u = \hat{B}_{k\Delta t}$. Remarquons que le processus \hat{B} n'est pas continu mais il est continu à droite et constant par morceaux.

⇔ La précision de notre approximation discrète

Évidemment, plus la longueur de l'intervalle de temps Δt est petite, meilleure sera notre approximation. On peut mesurer la qualité de notre approximation de la façon suivante :

Proposition 4.2.1 (Qualité de l'approximation)

Il existe une constante ne dépendant que de T telle que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |\hat{B}_u - B|^2 \right) \leq C_T \Delta t$$

En particulier,

$$\sup_{0 \leq u \leq T} |\hat{B}_u - B_u| \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0^+]{L^2} 0$$

Interpolation linéaire.

Au lieu d'approcher le mouvement brownien par une fonction en escalier, on peut l'approcher par une interpolation linéaire. Plus précisément, on considère le processus \tilde{B} affine sur chaque intervalle $[k\Delta t, (k+1)\Delta t[$ avec $(0 \leq k \leq N)$ et tel que pour tout $0 \leq k \leq N$,

$$\tilde{B}_{k\Delta t} = B_{k\Delta t}.$$

Par définition, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{B}_u = \sum_{k=0}^{[Nu]-1} (B_{(k+1)\Delta t} - B_{k\Delta t}) + (Nu - [Nu])(B_{([Nu]+1)\Delta t} - B_{[Nu]\Delta t})$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x .

⇔ La précision de notre approximation discrète

La qualité de l'approximation reste alors la même que celle de l'approximation par le processus en escalier \tilde{B} . Le processus \tilde{B} vérifie donc aussi la proposition précédente.

Proposition 4.2.2 (Qualité de l'approximation)

Il existe une constante ne dépendant que de T telle que

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq u \leq T} |\tilde{B}_u - B|^2 \right) \leq C_T \Delta t$$

En particulier,

$$\sup_{0 \leq u \leq T} |\tilde{B}_u - B_u| \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0^+]{L^2} 0$$

4.2.3 Obtenir une réalisation du vecteur $(B_{\Delta t}, B_{2\Delta t}, \dots, B_{N\Delta t})$

Notons qu'il y a plusieurs méthodes, mais nous citerons ici que la méthode **d'Euler aléatoire** qui sera illustré par la suite

Méthode d'Euler aléatoire

D'après le chapitre du mouvement brownien standard est une variable aléatoire B_t qui dépend continument de temps ($t \in [0, T]$) et satisfait les quartes conditions connues. Soit B_j une notation de B_{t_j} avec $t_j = j\Delta t$. Les propriétés (MB1) et (MB2) se traduisent en disant que

$$\{B_{j\Delta t} - B_{(j-1)\Delta t} : j \in \mathbb{N}\}$$

est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi $N(0, \Delta t) \stackrel{\mathcal{L}oi}{=} \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$.

De plus les propriétés (MB2) et (MB3) sont données par :

$$B_j = B_{j-1} + \Delta B_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

où ΔB_j est une variable aléatoire indépendante de $\sqrt{\Delta t} N(0, 1)$

Une réalisation du vecteur $(B_{\Delta t}, B_{2\Delta t}, \dots, B_{N\Delta t})$ peut donc être obtenue à partir de la réalisation de N variables aléatoires gaussiennes i.i.d. centrées et de variance Δt .

Algorithme de simulation du mouvement brownien

1 – Générer N variables aléatoires z_k i.i.d. de loi $N(0, 1)$.

2 – Poser

$$B_0 = 0 \text{ et } B_j = B_{j-1} + \sqrt{\Delta t} \times z_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

3 – Approcher la trajectoire par interpolation linéaire ou par une fonction en escalier.

Dans ce qui suit on donne un exemple du code utilisé dans MATLAB pour :

⇒ **Simulation du Mouvement Brownien Standard :**

Code de Matlab 4.4 – Programme de La Simulation d'un Mouvement Brownien standard

```
T=1;N=1000;
dt=T/N; % Discrétisation de temps
dB(1)=0; % La première condition
B(1)=dB(1);
for j=2:N
    dB(j)=sqrt(dt)*randn;
    B(j)=B(j-1)+dB(j);%la 2eme et la 3eme condition
end

plot([0:dt:T],[0,B],'b-')% dessiner le graphe de B en fonction
    de t en couleur blue
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('B(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
grid on
title(['Simulation du mouvement brownien standard sur [ '
    int2str(0) ',' int2str(T) ' ] avec ' int2str(N) ' etapes'])
```

En lançant le code 4.4 dans l'éditeur de Matlab avec $N=1000$ étapes, On obtient le graphique suivants :

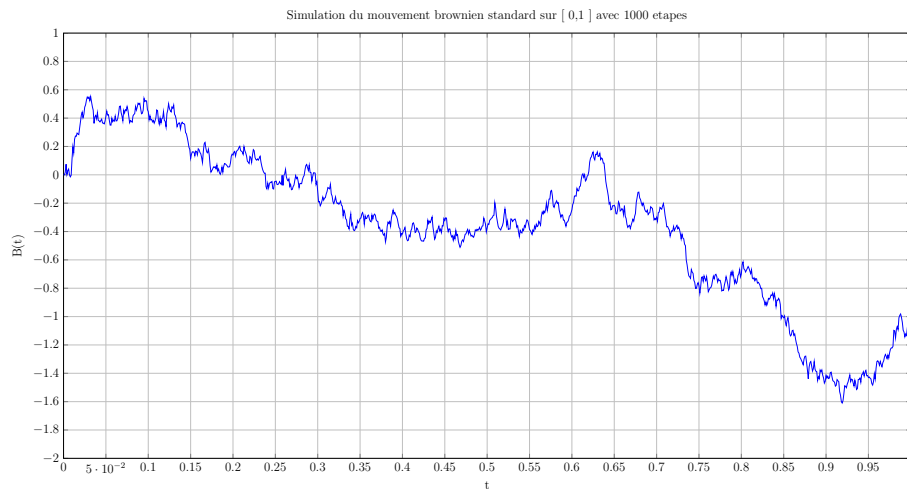


FIGURE 4.5 – *Simulation du mouvement brownien standard sur $[0,1]$ avec $N=1000$ étapes*

⇒ Simulation de M trajectoires du mouvement brownien standard

Avec les mêmes démarches suivies dans la simulation d'une trajectoire d'un mouvement Brownien on peut simuler M trajectoires.

Code de Matlab 4.5 – Simulation de M trajectoires du mouvement brownien standard

```
function [B]=BM_2(T,N,M)
dt = T/N;
t = [dt:dt:T];
for i=1:M
    dB(i,1)=0;
end % Première condition
dB = sqrt(2)*sqrt(dt)*randn(M,N);
B = cumsum(dB,2);
plot(t,B,'b')
grid on
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('B(t)','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
title([' Simulation de ',int2str(M),' trajectoires du mouvement brownien standard sur [ ',int2str(0),' ',int2str(T),' ] avec ',int2str(N),' étapes'])
end
```

En lançant le code 4.5 dans l'éditeur de Matlab avec $N=1000$ étapes, On obtient le graphique suivants :

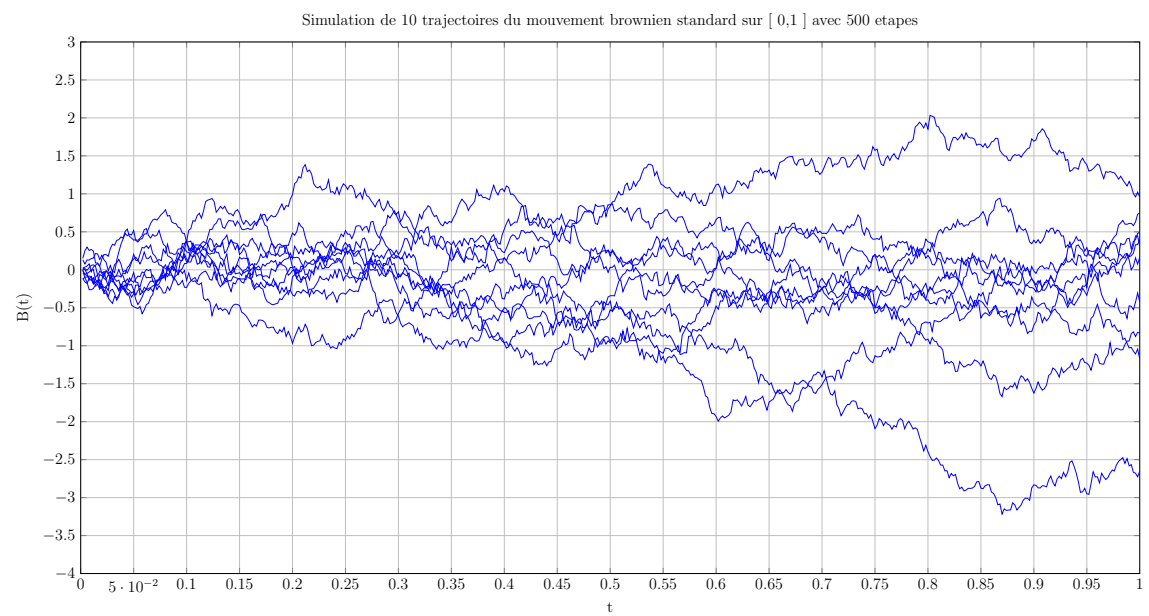


FIGURE 4.6 – *Simulation de M Trajectoires d'un mouvement brownien*

Conclusion

Ce mémoire s'intéresse aux marches aléatoires sur un réseau symétrique d -dimensionnel \mathbb{Z}^d . Dont on a étudié toutes les propriétés statistiques des marches aléatoires symétriques.

On a en particulier établi de façon assez précise la manière dont le marcheur diffuse sur le réseau, il a été éloigné avec une moyenne \sqrt{N} qui augmente après un temps N , et lorsque N est suffisamment grand, le marcheur sera revenu en moyenne une infinité de fois à son point de départ, si la dimension $d = 1$ ou 2 . Cependant en dimension $d \geq 3$, il n'y reviendra qu'un nombre fini de fois.

On a aussi établi que la relation entre les marches aléatoires discrètes et le mouvement brownien illustre magnifiquement la description des propriétés critiques d'une classe (d'universalité) des systèmes discrets par une théorie des champs. Un autre type de marche aléatoire a été défini sous le nom des marches pondérées qui consiste justement à mettre des poids différents sur les sites des réseaux (qui restent des réseaux cubiques \mathbb{Z}^d), on a donc généralisé ce type des marches aléatoires par un résumé sur les marches aléatoires perturbés, on a adopté la même démarche pour explorer les propriétés des marches non-standarts, vues comme des marches dont on pose la question : De quelle façon les propriétés de la marche perturbée sont différentes de celles de la marche aléatoire standard ? (question de stabilité).

Annexe A

Quelques caractéristiques générales

Avant de passer à l'étude de quelques propriétés plus fines des marches aléatoires, on rappellera à des propriétés qui concernent la distribution de position que l'on vient de calculer et quelques propriétés que l'on utilisera dans la suite (sans démonstration).

Propriété A.0.3

i) C'est la propriété d'invariance sous translation de la marche (et du réseau).

$$P_0(\vec{x}; t) = P_y(\vec{x} + \vec{y}; t) \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{Z}^d. \quad (\text{A.1})$$

(Le choix de l'origine comme point de départ n'a évidemment rien de particulier)

ii) Les parties disjointes d'une marche sont indépendantes, en raison de l'indépendance des sauts successifs effectués par le marcheur. Ceci se traduit par la propriété suivante

$$P_0(\vec{x}; t | \text{histoire de la marche jusqu'au temps } s) = P_{\omega(s)}(\vec{x}; t - s) \quad \forall s \leq t. \quad (\text{A.2})$$

C'est une des propriétés les plus fortes des marches aléatoires. Si l'on connaît à un moment donné la position du marcheur, ce qui s'est passé avant ce moment n'a strictement aucun effet sur ce qui lui arrivera après ce moment. Techniquement, on dit que la marche aléatoire possède la propriété de **Markov**.

iii) Les distributions satisfont (comme n'importe quelle mesure de probabilité)

$$P_0(\vec{x}; t) = \sum_{\vec{y}} P_0(\vec{x}; t | \vec{y}; s) P_0(\vec{y}; s) \quad \forall s \leq t. \quad (\text{A.3})$$

La propriété de **Markov ii)** implique que la probabilité conditionnelle est une simple probabilité pour une marche démarrant de \vec{y} au temps s .

L'équation ci-dessus se réécrit

$$P_0(\vec{x}; t) = \sum_{\vec{y}} P_0(\vec{y}; s) P_{\vec{y}}(\vec{x}; t - s) \quad \forall s \leq t. \quad (\text{A.4})$$

qui porte le nom d'équation de **Chapman-Kolmogorov**.

Notons que :

$$P_0(x; t) \equiv P_{0,x}^{(t)} \quad \text{et} \quad P_0(x; t | y; s) \equiv P(m_t = x | m_s = y, m_0 = y_0)$$

Lemme :(matrice tridiagonale)

Pour une matrice tridiagonale d'ordre $n \geq 2$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}, \quad \text{où } a \in \mathbb{C}, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } bc > 0,$$

les valeurs propres λ_k sont données par

$$\lambda_k = a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}} \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) \quad k = 1, \dots, n.$$

La valeur propre λ_k , $1 \leq k \leq n$, admet pour vecteur propre $x_k = (x_j)$ où

$$(x_i) = \sqrt{\frac{c}{b}} \sin\left(j\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

1 Fonctions elliptiques de Jacobi

1.1 Les quatres fonctions Thêta

1.1.1 Equation de dispersion de la chaleur

Considérons un problème spécifique de dispersion de la chaleur dans un solide.

Soit θ la température au temps t , en un certain point du solide, dont les propriétés de dispersions sont uniformes et isotropiques. Soit k la constante de diffusivité du solide. Alors θ satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \nabla^2 \theta \quad (\text{A.5})$$

Dans le cas particulier unidimensionnel dans la coordonnée z , cette équation devient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (\text{A.6})$$

où $\theta = \theta(z; t)$, avec $z \in [0; \pi]$ et $t \in \mathbb{R}$

1.1.2 Définitions des quatres fonctions Thêta

Si l'on fixe les conditions initiales telles que la température reste nulle sur les bords du segment ($\theta(0) = \theta(\pi) = 0$), la solution de l'équation (6) prend la forme suivante :

$$\theta = \theta_1(z; q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n+1}{2}} \sin(2n+1)z, \quad (\text{A.7})$$

où $q = e^{i\pi\tau}$.

C'est la première des quatres fonctions Thêta.

Imposer maintenant comme condition que $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$ aux bornes ($z = 0$ et $z = \pi$) dans l'équation (A.6), nous amène à considérer la solution suivante :

$$\theta = \theta_4(z; q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n)^2} \cos 2nz, \quad (\text{A.8})$$

On prolonge la première fonction Thêta, $\theta_1(z, q)$, grâce à sa série (7) pour tous complexes z et q tels que $|q| < 1$. En remplaçant la fonction sin par sa représentation

eulérienne, on obtient une définition alternative de θ_1 par une série doublement infinie :

$$i\theta_1(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(\frac{n+1}{2})^2} e^{i(2n+1)z}. \quad (\text{A.9})$$

D'après les équation (A.7) et (A.9), θ_1 est, par rapport à z , une fonction impaire, périodique de période 2π .

En incrémentant z d'un quart de période, on définit la deuxième fonction Thêta, θ_2 , laquelle s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} \theta_2(z; q) &= \theta_1\left(z + \frac{\pi}{2}; q\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(\frac{n+1}{2})^2} \sin(2n+1)z + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi. \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(\frac{n+1}{2})^2} \cos(2n+1)z \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(\frac{n+1}{2})^2} e^{i(2n+1)z}. \end{aligned}$$

θ_2 , par rapport à z , est une fonction paire et de période elle aussi 2π . La fonction Thêta θ_4 , définie en (A.8), peut s'exprimer de la même manière que θ_1 par une série doublement infinie :

$$\theta_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2inz}. \quad (\text{A.10})$$

C'est une fonction paire et de période 2π par rapport à z . De plus, elle prend des valeurs réelles, lorsque z et q sont réels.

En incrémentant z de $\frac{\pi}{2}$ on obtient finalement la fonction Thêta θ_3 , telle que :

$$\theta_3(z; q) = \theta_4\left(z + \frac{\pi}{2}; q\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n)^2} \cos 2nz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2inz}. \quad (\text{A.11})$$

C'est encore une fois une fonction paire et périodique de période π .

2.1 Identités de Jacobi

Les identités de Jacobi décrivent comment les fonctions thêta transforment sous le groupe modulaire. Soit

$$\alpha = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\tau z^2}{\pi}}$$

alors

$$\theta_1(z; -\frac{1}{\tau}) = -i\alpha\theta_1(\tau z; \tau)$$

$$\theta_2(z; -\frac{1}{\tau}) = \alpha\theta_4(\tau z; \tau)$$

$$\theta_3(z; -\frac{1}{\tau}) = \alpha\theta_3(\tau z; \tau)$$

$$\theta_4(z; -\frac{1}{\tau}) = \alpha\theta_2(\tau z; \tau)$$

Proposition (Euler-Maclaurin)

Soient $m, n \in \mathbb{Z}^2$ tels que $m < n$.

soit $f \in \mathcal{C}^r([m, n], \mathbb{C}) (r > 1)$. Alors :

$$\sum_{k=m}^n = \int_m^n dt f(t) + \frac{1}{2}[f(m) + f(n)] + \sum_{k=2}^r \frac{b_k}{k!} [f^{(k-1)}(n) + f^{(k-1)}(m)] + R_r$$

Où :

$$R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B}(t) f^{(r)}(t) dt$$

Théorème A.0.4

si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est integration on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\varphi=0}^{+\infty} \varphi^{d-1} \int_{S_n} f(\varphi) d\sigma_m d\varphi$$

avec $d\sigma_m$ la mesure de surface sur S_n .

Annexe B

Généralités sur les processus stochastiques

B.1 Mouvement Brownien

Définition B.1.1

Le mouvement Brownien standard ou processus de Wiener standard est le processus stochastique $B = (B_t)_{t \geq 0}$ vérifiant :

MB1 $B_0 = 0$ \mathbb{P} - *p.s.* (le mouvement Brownien est issu de l'origine).

MB2 Incréments gaussiens : $\forall s \in [0, t], B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

MB3 Incréments indépendants : $\forall n \geq 1, \forall t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$; les variables

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

MB4 L'application $t \mapsto B_t$ est continue \mathbb{P} - *p.s.*

Pour cette dernière définition, on peut remplacer les propriétés *MB2* et *MB3* par d'autres propriétés comme le montre la proposition suivante :

Proposition B.1.2

Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes.

MB2 $\forall 0 \leq s < t, B_t - B_s$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, t - s)$,

MB3 $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants,

$$\Longleftrightarrow$$

MB2-1 $\forall t \geq 0, B_t$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, t)$,

MB3-1 $\forall 0 < s \leq t, B_t - B_s$ est indépendant de la tribu du passé avant s , $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_u, u \leq s)$,

$$\Longleftrightarrow$$

MB2-2 $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ est un processus gaussien centré,

MB3-2 $\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \text{Cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}[B_t B_s] = s \wedge t$.

Remarque B.1.3

Par un argument de classes monotones, on montre que la loi de $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ est donné par

$$P[(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}) \in A] = \int_A dy_1 \dots dy_n p_{t_1}(y_1) p_{t_2-t_1}(y_2 - y_1) \dots p_{t_n-t_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) \quad (\text{B.1})$$

Pour tout $A \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^n$, où

$$p_t(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

Mesure de Wiener. Notons $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}^d . La donnée mouvement brownien B fournit donc une application

$$\Omega \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$$

$$\omega \longrightarrow (t \longrightarrow B_t(\omega))$$

qui est mesurable lorsque $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ est muni de la plus petite tribu rendant mesurables les applications coordonnées $w \longrightarrow w(t)$. Il est facile de voir que cette tribu notée \mathcal{C} coïncide avec la tribu borélienne pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. **La mesure de Wiener** (loi du mouvement brownien) est par définition la mesure-image de $P(dw)$ par cette application. Si $W(dw)$ désigne

cette mesure-image, la formule $(.)$, qui est vraie pour n'importe quel mouvement brownien B montre que, pour $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, et $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} W(w; w(t_0) \in A_0, w(t_1) \in A_1, \dots, w(t_n) \in A_n) \\ = 1_{A_0} \int_{A_1 \times \dots \times A_n} dy_1 \dots dy_n p_{t_1}(y_1) p_{t_2-t_1}(y_2 - y_1) \dots p_{t_n-t_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) \end{aligned}$$

(avec la convention $y_0 = 0$). De plus ces propriétés caractérisent la probabilité W : en effet, la classe des ensembles de la forme $w; w(t_0) \in A_0, w(t_1) \in A_1, \dots, w(t_n) \in A_n$ (les "cylindres") est stable par intersection finie et engendre la tribu \mathcal{C} ce qui, par un argument standard de classes monotones, sur t pour dire qu'une mesure de probabilité sur \mathcal{C} est caractérisée par ses valeurs sur cette classe. En conséquence, la mesure de Wiener ne dépend pas du choix du mouvement brownien B pour la construction. Si B' est un autre mouvement brownien, on a pour tout $A \in \mathcal{C}$,

$$P((B_t)_{t \geq 0} \in A) = w(A) = P((B'_t)_{t \geq 0} \in A)$$

Si l'on prend maintenant comme espace de probabilité

$$\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \quad \mathcal{F} = \mathcal{C}, \quad P(dw) = W(dw),$$

le processus, dit canonique,

$$X_t(w) = w(t)$$

est un mouvement brownien. C'est la construction du mouvement brownien canonique.

B.2 Les semigroupes (des matrices de transition) de Markov en temps continu

En temps discret, a cause de l'équation de Chapman-Kolmogorov, les matrices des probabilités de transition après temps n avait une structure de semigroup T^n , qui était engendré par la matrice T de transition après temps 1. On retrouve la même structure dans le cas continu :

Théorème B.2.1

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène à temps continu. Alors $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe stochastique, c'est-à-dire :

- (1) $T_0 = I_d$
- (2) $\forall s, t \geq 0, T_{t+s} = T_t T_s$ (équations de Chapman-Kolmogorov)

(3) $\forall t \geq 0$, T_t est une matrice stochastique (i.e. $\forall i, j \in I, t_{ij}(t) \geq 0$ et $\forall i \in I, \sum_{j \in I} t_{ij}(t) = 1$).

Définition B.2.2

Une famille des operateurs satisfaisant les propriétés (1) et (2) du théorème précédente est appelée semi-groupe. Une famille satisfaisant aussi la propriété (3) est appelée semi-groupe stochastique.

Pour caractériser les processus de Markov en temps continu, nous aimerions avoir une représentation des familles de matrices stochastiques de transition $T(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, qui satisfont l'équation de Chapman-Kolmogorov $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$

Dans le cas des semigroupes discrètes de matrices stochastique indicé par $t \in \mathbb{N}$, ça se faisait par la formule $T(t) = [T(1)]^n$.

Pour les processus de Markov en temps continu, il n'existe plus un "temps minimal" d'observation (comme le $t = 1$ du cas discrète); il est donc moins evident comment générer le semi-groupe des matrices de transition. Nous verrons que la représentation cherchée est

$$T(t) = e^{tG}$$

où la matrice G , appelée générateur, est liée à la matrice de transition infinitesimale P_h , avec $h \rightarrow 0^2$.

Définition B.2.3

On appelle générateur d'un semigroupe de Markov sur un espace d'états fini où denombrable la matrice

$$G = (g_{ij})_{i,j \in I} = \stackrel{\text{déf}}{\lim_{t \rightarrow 0^+}} \frac{T_t - I}{t} = T'(0)$$

Plus précisément, la matrice G de "taux de transition" infinitésimales, ou "générateur", en partant d'un état initial arbitraire $X_0 = i$, est définie par :

$$\begin{cases} g_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_t}{t} & \text{quand } i \neq j, \\ -g_{ii} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1-T_t}{t} & \text{quand } i = j \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Ainsi, pour $j \neq i$ alors $g_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t_{ij}}{t} \geq 0$ est le **taux de passage** de l'état e_i à l'état e_j , et on a $g_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$.
 Pour $j = i$ $-g_{ii} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1-t_i}{t} \geq 0$ est le **taux de sortie** de l'état e_i , pour $t \rightarrow 0$.

Définition B.2.4

Une matrice G satisfaisant $g_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$, $g_{ii} \leq 0$ et $g_{i,i} = -\sum_{i \neq j} g_{i,j}$ sera appelée **matrice génératrice**.

Bibliographie

- [1] P. Ruelle, *Marches Aléatoires* note de cours Physique Théorique et Mathématique II. PHYS 2122 ,Université catholique de Louvain. Belgique 2005-2006
- [2] E. Gitter, *Méthode de théorie des champs pour les polymères et les membranes polymérisées* . Notes de cours de l'Ecole de physique de la matière Condensée, Institut de Physique Théorique, France 1997.
- [3] É. Pardoux, *Processus de Markov et applications* Notes de ce manual de l'association Tremplin, Marseille 2006, Berlin, 1995.
- [4] E. Rasposo, S. de Oliveira, A. Nemirovsky et M. Coutinho-Filho *Random walks : A pedestrian approach to polymers, critical phenomena, and field theory*, Am. J. Phys. 59 (1991) 633.
- [5] F. Spitzer, *Principles of random walk* , Springer 1976.
- [6] Michel Benaïm et Nicole El Karoui *Promenade aléatoire Chaînes de Markov et simulations* ; Ecole polytechnique, 2005
- [7] Desmond J. Higham. *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*. SIAM J. Numer. Anal., 43(3) :525-546, 2001.
- [8] Desmond J. Higham and Nicholas. *MATLAB Guide, Second Edition* SIAM, 2005