Linear Combination - التركيب الخطي

Linear Combination

$$S' = \{\underline{u}_1, \underline{u}_1, ---, \underline{u}_n\} \subseteq V$$

$$\underline{v} \in V$$

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \cdots + \alpha_n \underline{u}_n$$

المجاهيل إللي هنحاول نجيبها (مجاهيل حقيقية ووحيدة)

س: الأسئلة بتيجي إزاي؟

ج: مبدئًا فيه 3 أنواع من المسائل :

أول نوع بيكون فيه مجموعة S وهي مجموعة بتتكون من عدد معين من المتجهات, وبيكون فيه متجه U مثلًا والمطلوب هو معرفة إذا كان ممكن كتابة المتجه U كمزيج خطي للمجموعة S وللا لا

بنحلها إزاي؟

أول حاجة بنكون مصفوفة من المتجهات دي عن طريق إننا نمسك أول متجه في المجموعة S ونحطه في أول عمود (بنحط أول عنصر في المتجه في أول عنصر في العمود وثاني عنصر في المتجه في ثاني عنصر في العمود... وهكذا) وبعد كده نمسك ثاني متجه في المجموعة S ونحطه في ثاني عمود... وهكذا لحد ما نحط كل المتجهات إللي في المجموعة S في المصفوفة إللي معانا وفي النهاية بنحط المتجه U في آخر عمود في المصفوفة

ثاني حاجة بنحل المصفوفة إللي كوناها باستخدام طريقة جاوس للحذف (Gauss Elimination Method) إللي أخدناها لحد ما نشوف إيه الاحتمال إللي طلع معانا من المصفوفة دي

لو لقينا كل عناصر الصف الأخير تساوي صفر أو في صف معين لقينا إن آخر عنصر مش بيساوي صفر وفيه على الأقل عنصرين معاه في نفس الصف مش بيساووا صفر ف ده معناه إن فيه عدد لا نهائي من الحلول وده معناه إن المتجه U ممكن نكتبه بعدد لا نهائي من الطرق ووقتها هنقول إن المتجه U يمكن التعبير عنه كتركيب خطي من متجهات المجموعة S

أما لو لقينا إن عناصر الصف الأخير تساوي صفر ما عدا عنصر واحد ف ده معناه إن مافيش حل وممكن وقتها نقول إن المتجه U لا يمكن كتابته كمزيج خطي من متجهات المجموعة S

أما لو لقينا كل عناصر الصف الأخير تساوي صفر ما عدا آخر عنصرين ف ده معناه إن فيه حل وحيد ووقتها ممكن نكتب المتجه U كمزيج خطي من متجهات المجموعة S وبنكتبه بإننا نجيب قيم المجاهيل إللي إحنا بنحاول نجيبها وبعد ما بنجيبها بنكتب معادلة المتجه U بإننا نجمع حاصل ضرب قيمة أول مجهول في أول عنصر في المتجه U ونجمعه على حاصل ضرب قيمة ثاني مجهول في ثاني عنصر في المتجه U... وهكذا لحد ما نوصل لقيمة آخر مجهولة مضروبة في آخر عنصر في المتجه U

ده بالنسبة لأول نوع من المسائل

ثاني نوع بيكون فيه مجموعة S وهي مجموعة بتتكون من عدد معين من المتجهات برضو, لكن المتجهات بتكون معطاة على شكل محددات, وبيكون فيه متجه U معطى على شكل محدد برضو والمطلوب هو معرفة إذا كان ممكن كتابة المتجه U كمزيج خطي للمجموعة S وللا لا, والحل بيكون بالطريقة العامة مش المختصرة, يعني بنضرب المجهول الأول في المتجه الأول والمجهول الثاني في المتجه الثاني... وهكذا لحد ما نوصل لآخر متجه, وبعد كده بنكون المحدد إللي بيكون فيه حاصل جمع (المجاهيل*المتجهات) وبنساويه بالمتجه المعطى U وبنكمل زي أول نوع (بنجيب قيم المجاهيل وهكذا)

ده بالنسبة لثاني نوع من المسائل والمثال إللي عليه موجود في ملف شرح ثالث سكشن من م. ريهام

ثالث نوع بيكون فيه مجموعة S وهي مجموعة بتتكون من عدد معين من المتجهات برضو, لكن المتجهات بتكون معطاة على شكل معادلات, ومش بيكون فيه متجه Uمعطى, والمطلوب هو معرفة إذا كان ممكن كتابة الدالة $U(x)$ كمزيج خطي للمجموعة S وللا لا, والحل بيكون مشابه لأول نوع من المسائل وهو وإننا بنكون مصفوفة للمتجهات دي وبنمسك أول متجه (أول معادلة) ونحطه في أول عمود وهكذا, لكن الطريقة بتكون مختلفة شوية لأننا بنحط المعادلات في العواميد بإننا نحط الحد المطلق في أول عنصر في العمود وبعد كده معامل الx في ثاني عنصر وبعد كده معامل الx^2 في ثالث عنصر... وهكذا لحد ما نوصل لآخر عنصر وهكذا مع باقي المتجهات وبعدين نكمل طريقة الحل زي النوع الأول من المسائل

ده بالنسبة لثالث وآخر نوع من المسائل والمثال إللي عليه موجود برضو في ملف شرح ثالث سكشن من م. ريهام

- **ملحوظة : ترتيب المتجهات في المجموعة مش بيكون مهم, ف علشان كده ينفع نغير ترتيب الصفوف في المصفوفة المكونة بحيث نخلي أول عنصر في أول صف قيمته 1 لو ممكن (لتسهيل الحل)**

مثال على أول نوع

Ex) Can you write $\underline{u} = (2,1,3)$ as a Linear Combination of $S = \{(2,6,-6), (1,5,3), (2,1,1)\}$

Sol.

$$\underline{u} = (2,1,3) = \alpha_1(2,6,-6) + \alpha_2(1,5,3) + \alpha_3(2,1,1)$$

$$(2,1,3) = (\boxed{2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3}, 6\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3, -6\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3)$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 2$$

$$6\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

$$-6\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 3$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

في المثال ده أول حاجة حطينا المتجهات إللي في المجموعة S في مصفوفة بالترتيب الصح وإللي هو المتجه الأول في العمود الأول والمتجه الثاني في العمود الثاني... لحد ما نوصل لآخر عمود وإللي هو المتجه U, بعد كده هنحل المصفوفة دي باستخدام طريقة جاوس للحنف علشان نجيب قيم المجاهيل إللي عندنا (إللي هي α_1 وα_2 وα_3 إللي في المثال الحالي) وبعد كده بنكتب المتجه U بناءا على قيم المجاهيل إللي إحنا طلعناها

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_2' = -3R_1 + R_2$

$R_3' = 3R_1 + R_3$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & \boxed{6} & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$R_3' = -3R_2 + R_3 \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 22 & 24 \end{bmatrix}$$

$\alpha_3 = \frac{24}{22}$, $\alpha_2 = \frac{5}{22}$ $\alpha_1 = \frac{-9}{44}$

$$\therefore u = \frac{24}{22}(2,6,-6) + \frac{5}{22}(1,5,3) - \frac{9}{44}(2,1,1)$$

الناتج النهائي

بنكتب المتجه u كمزيج خطي للمجموعة S في حالة إنه طلب كده فقط

أما لو طلب معرفة إذا كان ممكن كتابة المتجه u كمزيج خطي للمجموعة S وللا لا ف مش لازم u وبنكتب إذا كان ممكن وللا لا فقط

مثال ثاني على أول نوع

2) $S' = \{(1,1,1), (2,-3,4), (3,1,1), (6,-1,6)\}$

$\underline{u} = (2, 1, 1)$

Sol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2' = R_2 - R_1$

$R_3' = R_3 - R_1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -7 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_3' = 5R_3 + 2R_2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & -14 & -7 \end{bmatrix}$$

$-14\alpha_3 - 14\alpha_4 = -7$

في المثال ده أول حاجة حطينا المتجهات إللي في المجموعة S في مصفوفة بالترتيب الصح وإللي هو المتجه الأول في العمود الأول والمتجه الثاني في العمود الثاني... لحد ما نوصل لآخر عمود وإللي هو المتجه U, بعد كده هنحل المصفوفة دي باستخدام طريقة جاوس للحنف علشان نجيب قيم المجاهيل إللي عندنا (إللي هي α_1 وα_2 وα_3 إللي في المثال الحالي) بس المرة دي لقينا إن هيكون فيه عدد لا نهائي من الحلول; لأن في آخر صف لقينا إن العنصر الأخير مش بيساوي صفر وفي نفس الوقت فيه على الأقل عنصرين قبل العنصر الأخير مش بيساووا صفر, وبالتالي هيكون فيه عدد لا نهائي من الحلول ووقتها ممكن نقول إن المجموعة S غير مستقلة خطيًّا

Linear Independence - الاستقلال الخطي

Linear dependent & Linear independent

$S' = \{\underline{v}_1, ---, \underline{v}_n\}$

Linear indep.

$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + --- + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

For some i, $\alpha_i \neq 0$

S' L. dep.

$\underline{u} = \alpha_1 \underline{v}_1 , \cdots - \alpha_n \underline{v}_n$

س: الأسئلة بتيجي إزاي؟
ج: بيكون فيه مجموعة من المتجهات S والمطلوب هو توضيح مما إذا كانت المجموعة S مستقلة خطيا وللا مرتبطة خطيا؟

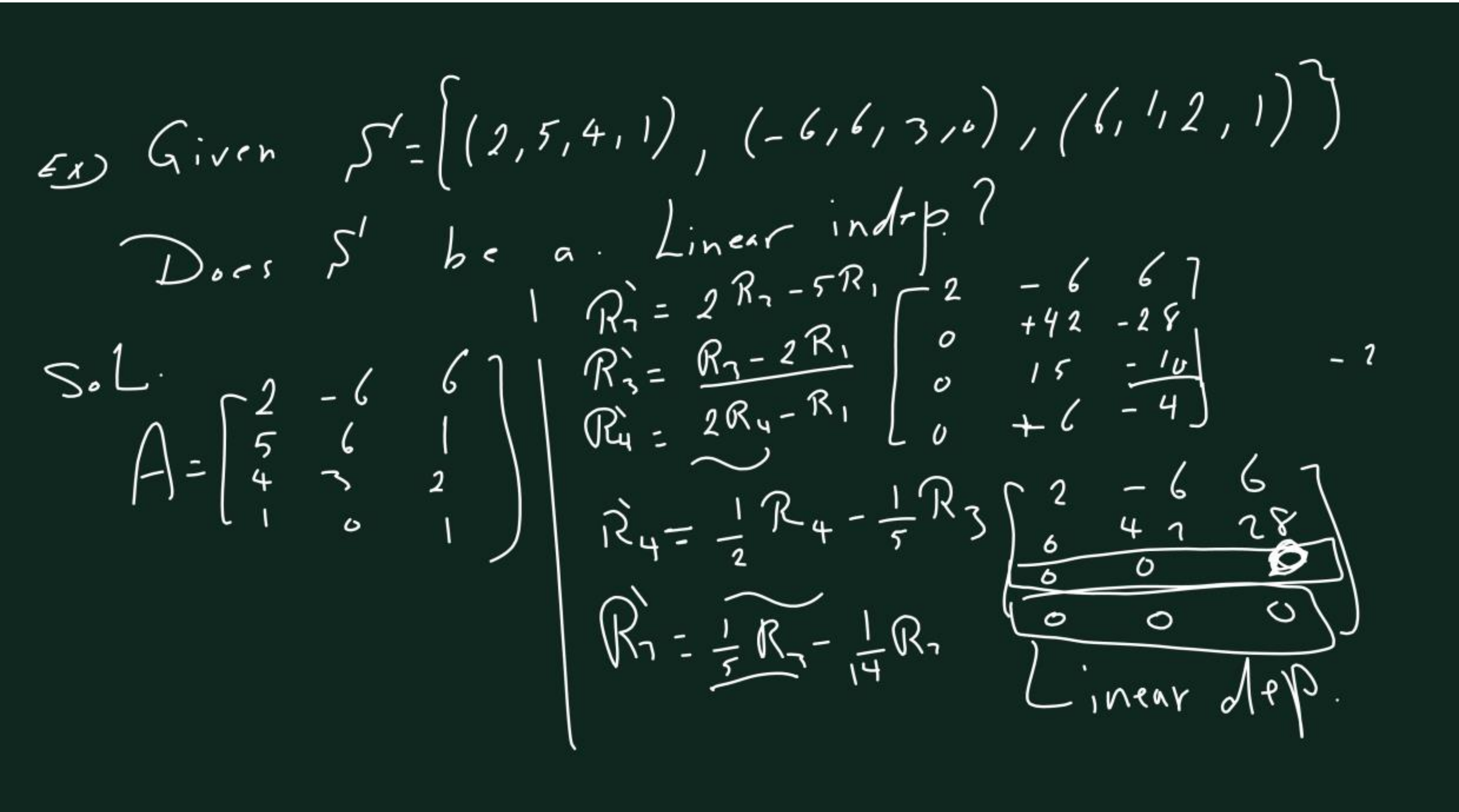
بنحلها إزاي؟
بنكون المصفوفة إللي هنحط فيها متجهات المجموعة S بإننا نمسك أول متجه في المجموعة S ونحطه في أول عمود (بنحط أول عنصر في المتجه في أول عنصر في العمود وثاني عنصر في المتجه في ثاني عنصر في العمود... وهكذا) وبعد كده نمسك ثاني متجه في المجموعة S ونحطه في ثاني عمود... وهكذا لحد ما نحط كل المتجهات إللي في المجموعة S في المصفوفة إللي معانا, وهنا بيكون عندنا طريقتين للحل

الأولى (الأسهل) هي إننا نحسب Rank المصفوفة إللي كونناها, والRank هو عدد الصفوف الغير صفرية (عدد الصفوف إللي فيها على الأقل عنصر واحد لا يساوي صفر), وبعد ما بنحسب الRank بنشوفه هل بيساوي عدد المتجهات إللي في المجموعة S وللا لا

لو الRank بيساوي عدد المتجهات إللي في المجموعة S يبقى المجموعة S مستقلة خطيا (Independent) أما لو الRank أصغر من عدد المتجهات إللي في المجموعة S يبقى المجموعة S مرتبطة خطيا (Dependent)

وممكن نحلها بإننا لو شفنا صف صفري (صف كل عناصره تساوي صفر) ف نقول على طول إن المجموعة S مرتبطة خطيا, غير كده يبقى المجموعة S مستقلة خطيا

مثال



في المثال ده أول حاجة حطينا المتجهات إللي في المجموعة S في مصفوفة بالترتيب الصح وإللي هو المتجه الأول في العمود الأول والمتجه الثاني في العمود الثاني... لحد ما نوصل لآخر عمود وإللي هو المتجه U, بعد كده هنحل المصفوفة دي باستخدام طريقة جاوس للحنف علشان نشوف هل فيه صف صفري هيطلع معانا ولّا لا, وهنا طلع معانا صفين كلهم أصفار بالفعل وبالتالي المجموعة S مرتبطة خطيا (Dependent)

- **ملحوظة : كان ممكن نبدل الصف الأول بالصف الأخير قبل ما نستخدم طريقة جاوس على المصفوفة علشان يكون الحل أسهل**

Rank of a matrix A [rank A]

The number of non-zero rows in Gausian's matrix

rank A = 2 < 3

dep.

مثال ثاني

P_3

Ex) $S = \{ t^3+t^2-1 ,\ 2t^3+t^2+t+1 ,\ -t^3 ,\ 3t^2-t-1 \}$

$\mathbb{R}^4 \leftarrow (1,1,0,-1),\ (2,1,1,1),\ (-1,0,0,0),\ (0,3,-1,-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_2' = R_2 - R_1$

$R_4' = R_4 + R_1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_3' = R_3 + R_2$

$R_4' = R_4 + 3R_2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$R_4' = \underbrace{R_4 - 2R_3} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\text{Rank } A = 4$

S is L. indep