المصفوفات بطريقة جاوس

الفكرة: وهي اننا نعمل مصفوفة موسعة من خلال معاملات الحدود

$$2x - 5y + 5z = 17$$
$$x - 2y + 3z = 9$$
$$-x + 3y \qquad = -4$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & \text{ناتج} \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 & 17 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

① $R_2 = R_2 + R_3 \quad [0 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 5]$

$R_3 = 2R_3 + R_1 \quad [0 \;\; 1 \;\; 5 \;\; 9]$

ده شكل المصفوفة بعد ما خلينا العمود بأصفار ⇐
$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

② $R_3 = R_3 - R_2 \quad [0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4]$

ده شكل المصفوفة النهائية ⇐
$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$0(x) + 0(y) + 2(z) = 4 \longrightarrow 2z = 4 \quad \therefore z = 2$

$0(x) + 1(y) + 3(z) = 5$

$y + 3(2) = 5 \longrightarrow y = 5 - 6 \quad \therefore y = -1$

$2(x) - 5(y) + 5(z) = 17$

$2(x) - 5(-1) + 5(2) = 17$

$2x + 5 + 10 = 17 \longrightarrow 2x = 17 - 15 \quad \therefore x = 1$

Case of solutions

Unique solution — Infinit solutions — No solutions

لما يكون عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل

unique solution → بيكون فيها قيمة كل متغير حاجة واحدة

Infinite solutions [0 0 0 0] بيكون آخر صف فيها أصفار

No solutions [0 0 0 3] بيكون معاملات الحدود بأصفار فقط

حل مصفوفة من 4 مجاهيل

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$-x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2$$
$$4x_1 + 5x_2 - x_4 = 1$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 = R_2 - 2R_1 \quad \therefore R_2 \; [0 \; -3 \; -3 \; -6 \; 1]$

$R_3 = R_3 + R_1 \quad \therefore R_3 \; [0 \; 5 \; 4 \; 7 \; 2]$

$R_4 = R_4 - 4R_1 \quad \therefore R_4 \; [0 \; -3 \; -4 \; -13 \; 1]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 = 3R_3 + 5R_2 \quad \therefore R_3 \; [0 \; 0 \; -3 \; -9 \; 11]$

$R_4 = R_4 - R_3 \quad \therefore R_4 \; [0 \; 0 \; -1 \; -7 \; 0]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_4 = 3R_4 - R_3 \quad \therefore R_4 \; [0 \; 0 \; 0 \; -12 \; -11]$

Date : ____________ :تاريخ

من الصف الأخير في المصفوفة ←

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -11 \end{bmatrix}$$

$$-12x_4 = -11$$

$$\therefore x_4 = \frac{11}{12}$$

$$-3x_3 - 9x_4 = 11$$

$$-3x_3 - 9 \times \frac{11}{12} = 11$$

$$\therefore x_3 = \frac{-77}{12}$$

$$-3x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 1$$

$$-3x_2 - 3\left(\frac{-77}{12}\right) + 6\left(\frac{11}{12}\right) = 1$$

$$\therefore x_2 = \frac{17}{4}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + 2\left(\frac{17}{4}\right) + \left(\frac{-77}{12}\right) + 3\left(\frac{11}{12}\right) = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{-29}{6}$$

المعادلة الخطية لجاوس : كل الحدود من الدرجة الأولى

ومفيش $\cos$, $\ln$, دالة تربيعية

- عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل

$2x - y = 0$ let $y = t \in R$ $(-\infty, \infty)$ ← عدد لانهائي

$x = \frac{t}{2}$

$x + y + z = 1$ let $z = t$, $y = s$ $\therefore x = 1 - s - t$

$3x - \frac{1}{2}y = 0$ let $y = t \in R$

$3x - \frac{1}{2}t = 0$ $x = \frac{\frac{1}{2}t}{3}$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned} \quad \left|\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \end{array}$$

2 معادلة في مجهولين

لـ حاول تخلي أول رقم فيه الصفية (1,1) قيمته بـ 1 سواء بالتبديل أو بالقسمة على رقم

$$R_1 \rightleftharpoons R_2 \quad \left|\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right|$$

$$R_2 = R_2 - 2R_1 \quad [\,0 \quad 3 \quad 0\,]$$

المصفوفة النهائية

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right|$$

$3y = 0$ $\therefore y = 0$

$x - y = 2$ $\therefore x = 2$

لـ لو لقيت معادلتين في مجهولين ← مش شرط هيطلع حل وحيد

لـ أهم حاجة نتحكم من الصف الأخير في المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ have no solutions

Date :

أول 5 شروط بيتكلموا عن الجمع ← Vector space → من 5 ← 10 بيتكلموا عن الضرب

let $x, y, z \in V$

الشرط الأول "الانغلاق على عملية الجمع" $x \oplus y \in V$

← معناه انك لو جمعت الـ x مع الـ y هيديك قيمة موجودة في الـ V

الشرط التاني (الدمج) $(x+y)+z = x+(y+z)$

الشرط التالت: المتجهه الصفري لازم ينتمي للـ V ، والمتجهة الصفري مش معنى كده ان قيمته بصفر فقط لكن ده بيتحدد على حسب ممكن يكون فيه ازواج مرتبه (x, y) ← فهنا المتجهة الصفري $(0,0) \in R^2$

ولو زوج مرتب (x, y, z) ← فالمتجهة الصفري $(0,0,0) \in R^3$

الشرط الرابع: سالب المتجهه لازم ينتمي للـ V ويكون [المتجهه الصفري $= -x \oplus x$]

الشرط الخامس: (الابدال) $x+y = y+x$

« let $\alpha, \beta \in F$ »

Field: المجالات اللي بتنتمي ليه الأرقام زي R , N , Z

حقيقيه

صحيحه

الشرط السادس: "الانغلاق على عملية الضرب" $\alpha x \in V$

← يعني ان حاصل ضرب الـ α في أي متجه لازم ينتمي للـ V

الشرط السابع: توزيع الرقم على المتجهات $\alpha(x \oplus y) = \alpha x \oplus \alpha y$

← هنا بوزع رقم اللي هو الـ (α) على متجهين x, y

الشرط الثامن : $(\alpha B)X = \alpha(BX)$

← الشرط ده فزيب للدمج

الشرط التاسع : $(\alpha+B)X = \alpha X \oplus BX$

← هنا نوزع متجهة على اتنين (راجع الشرط السابع)

الشرط العاشر : $\underset{\text{"العدد واحد"}}{1} \cdot X = X$

مش "متجهة الوحدة"

← النوع الأول "مسائل فيها أرقام" أي رقم غير الصفر

$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & 2 \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\}$

← الشروط الخ لم تتحقق

① المتجهة الصفرية $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ لاينتمي لـ V لأن الـ 2 مش بيساوي صفر

② لو فرضنا ان الـ x عبارة عن $\begin{bmatrix} a & c \\ b & 2 \end{bmatrix}$ والـ y عبارة عن $\begin{bmatrix} x & z \\ y & 2 \end{bmatrix}$
فالشرط الأول اللي هو $x+y \in V$ مش هيتحقق لأن

$$x+y = \begin{bmatrix} a+x & z+c \\ y+b & 4 \end{bmatrix}$$

الخانة دي مش بتساوي (2)

③ الشرط السادس مش هيتحقق ($\alpha X \in V$)

④ الشرط الرابع سالب المتجه الصفري لا ينتمي لـ V

$$-X = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -2 \end{bmatrix}$$

الخانة دي مش بتساوي (2)

⇐ ملحوظة : طالما عطالك زوج مرتب أو مصفوفة وجواها عدد ثابت مش الصفر فالشروط اللي مش هتتحقق

[1] المتجهة الصفري [2] سالب المتجهة

[3] جمع متجهين $\in V$ (شرط 1) [4] حاصل ضرب α في المتجهة $\alpha X \in V$

⇐ أما لو العدد الثابت ده صفر ⇐ فالأربعة شروط عادي هيتحققوا #

السؤال الثاني: $V = \{ (a, b, a+b+1) \; a, b \in V \}$

الشروط اللي لم تتحقق

[1] المتجهة الصفري $\notin V$

النوع الثاني "مسائل فيها مشكلة في الجمع" فهي في الشرط ← الثاني أو ← الخامس

إذا كانت $V = \{ (a, b) : a, b \in R \}$

ومعرف عليه عمليتي الجمع والضرب بالصورة التالية

المشكلة ⇐ $(a, b) + (x, y) = [(a+x), (b-y)]$

$\alpha (a, b) = (\alpha a, \alpha b)$

let $W, k \in V$

$W = (a, b) \quad , \quad k(l, m)$

⇐ نتحقق من الشرط الخامس $W + k = k + W$

$W + k = (a+l, b-m)$

$k + w = (l+a, m-b)$

الشرط الخامس لم يتحقق $\because$ $(W+k) \neq k + W$ $\therefore$

← ولو جربت تجرب خاصية الدمج مش هتتحقق برضو

Page:

Date :

العنوان

التاريخ

التاسع أو العاشر ← فيه فى الشرط

النوع الثالث " مسائل فيها مشكلة فى الضرب "

إذا كانت $V = \{ (a,b) : a,b \in R \}$

ومعرفه عليه عمليتى الجمع والضرب كمايلى

$(a,b) + (x,y) = (a+x , b+y)$

$\alpha(a,b) = (\alpha b , a)$!!! ⇐ المسألة

⇐ الشروط اللى لم تتحقق

الشرط العاشر

$1 \cdot x = x$

$\text{Let } x = (a,b)$

بناء على القاعدة دى

$1 \cdot (a,b) = (b,a) \longrightarrow$ كان من المفترض يطلع (a,b)

طب لو القاعدة دى اتغيرت بالشكل ده $\alpha(a,b) = (\alpha a , b)$

فالشرط الذى لم يتحقق هو الشرط التاسع $(\alpha+B)x = \alpha x \oplus Bx$

$(\alpha+B)\underbrace{(a,b)}_{\text{قيمة ال } x} = ((\alpha+B)a , b)$

الشكل ده طلع بناء على القاعدة

أما بناء على الشرط الأساسى فكان من المفترض ان الناتج يكون

$\alpha x + Bx = \alpha(a,b) + B(a,b)$

$= (\alpha a , b) + (Ba , b)$

$\alpha x + Bx = (\alpha a + Ba , 2b)$

$\therefore (\alpha+B)x \neq (\alpha x + Bx)$

Page: Math 2 العنوان: Section 2

Date : التاريخ:

ال zero vector بيقى بيتغير الفضاء

لو مفيش zero vector يبقى مفيش سالب المتجهة

لكن لو مفيش سالب متجهة ليس بالضرورى عدم وجود zero vector

ال idendity الخاص بالجمع هو ال zero vector بيتغير عند ما يتغير الفضاء

ولكن

ال idendity الخاص بالضرب هو "القيمة واحد" فقط ولا يتغير بتغير الفضاء