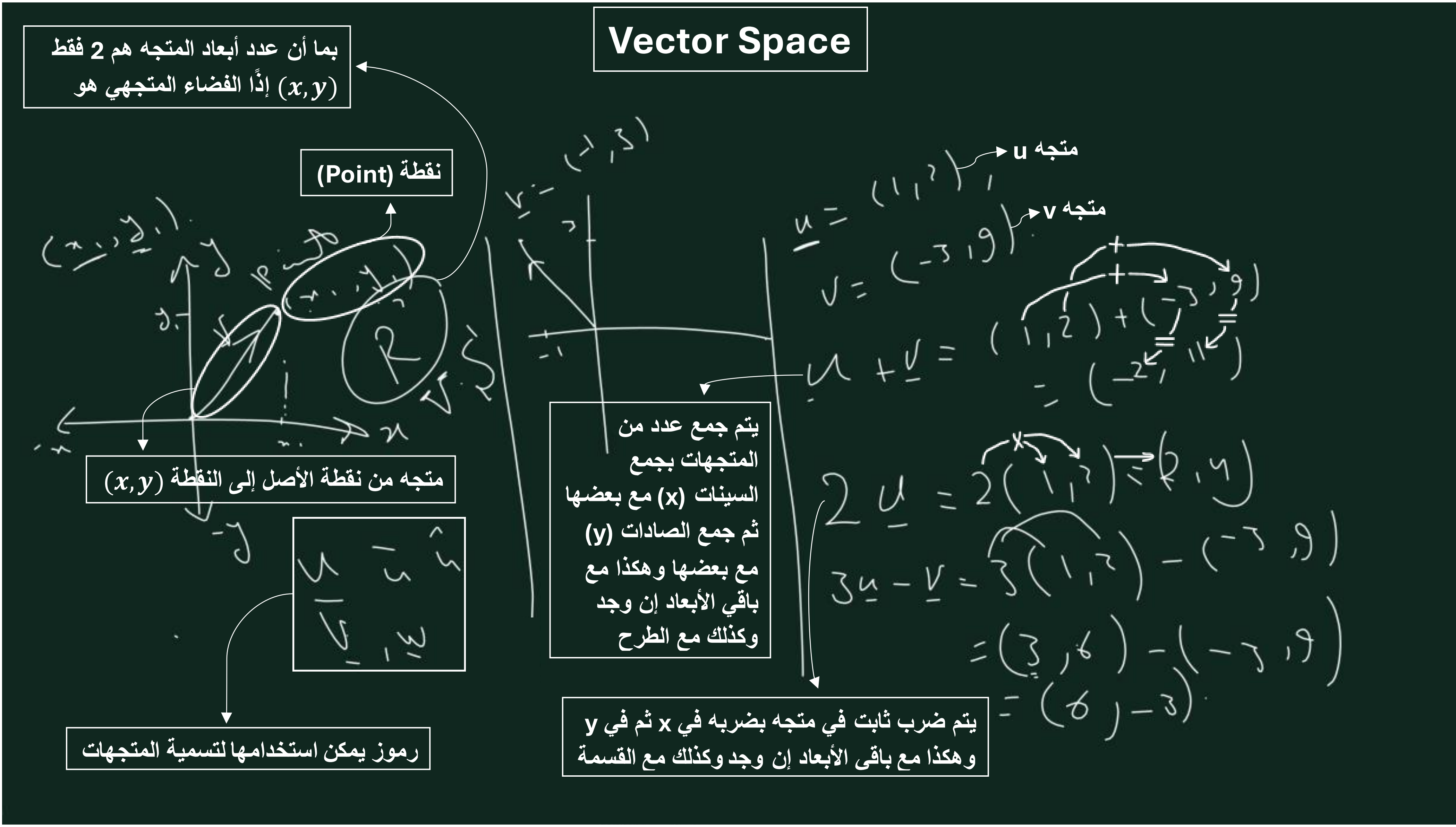

Vector Space
بما أن عدد أبعاد المتجه هم 2 فقط
إذًا الفضاء المتجهي هو (x, y)
نقطة (Point)
متجه من نقطة الأصل إلى النقطة (x, y)
رموز يمكن استخدامها لتسمية المتجهات
متجه u
متجه v
$\underline{u} = (1, 2)$
$\underline{v} = (-3, 9)$
$\underline{u} + \underline{v} = (1, 2) + (-3, 9) = (-2, 11)$
يتم جمع عدد من المتجهات بجمع السينات (x) مع بعضها ثم جمع الصادات (y) مع بعضها وهكذا مع باقي الأبعاد إن وجد وكذلك مع الطرح
$2\underline{u} = 2(1, 2) = (2, 4)$
$3\underline{u} - \underline{v} = 3(1, 2) - (-3, 9) = (3, 6) - (-3, 9) = (6, -3)$
يتم ضرب ثابت في متجه بضربه في x ثم في y
وهكذا مع باقى الأبعاد إن وجد وكذلك مع القسمة

شروط الجمع ال5 إللي بتحقق وجود فضاء متجه

V : $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, ...

vector space.

لسهولة الانغلاق $\oplus$

① $\forall\ u, v \in V \Rightarrow \underline{u} + \underline{v} \in V$ → الانغلاق (مجموع المتجهين ينتمي إلى v)

② com. $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ → الإبدال (مجموع أول وثاني متجه يساوي مجموع ثاني وأول متجه)

③ ASS. $(u + v) + w = u + (v + w)$ → التوزيع (مجموع أول متجهين + ثالث متجه يساوي مجموع أول متجه + مجموع ثانى متجهين)

④ iden. $\exists\ \underline{0} \in V \Rightarrow 0 + \underline{u} = \underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$ → المحايد (مجموع المتجه والمتجه الصفري هو نفسه مجموع المتجه الصفري والمتجه)

⑤ inver. $\exists\ -u \in V \Rightarrow \underline{u} + (-\underline{u}) = (-\underline{u}) + \underline{u} = \underline{0}$

$0 \in R^2$

$(0,0)$

$\in R$

$(0,0,0)$

$\in M_{2\times2}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ → أنواع الفضاء المتجهي

شروط الضرب ال5 إللي بتحقق وجود فضاء متجه

6. $c \cdot \underline{u} \in V \quad \forall \underline{u} \in V,\ c \in F = \mathbb{R}$

7. $c(\underline{u} + \underline{v}) = c\underline{u} + c\underline{v}$

8. $(c + d)\underline{u} = c\underline{u} + d\underline{u}$

9. $c(d \cdot u) = (cd)\underline{u}$

10. $1\underline{u} = \underline{u}$

س: الأسئلة بتيجي إزاي؟
ج: مبدئيًا في نوعين من المسائل :

أول نوع بيكون فيه متجهين u و v مثلًا وبيكون فيه عملية جمع وعملية ضرب, بتكون فيه عملية منهم طبيعية (Standard) والثانية بتكون مش منطقية (أو ممكن الإثنين يكونوا مش منطقيين)

والمطلوب مننا إننا نعرف إيه هي العملية إللي مش منطقية فيهم ونوضح هي ليه مش منطقية بشرط من ال10 شروط إللي موجودين معانا وبالتالي نثبت إن ده مش Vector Space

بنحلها إزاي؟

إحنا عارفين جمع المتجهين بيكون عامل إزاي وضرب متجه في ثابت بيكون عامل إزاي ف بنشوف في العمليات المعطاة دي إيه العملية إللي مش مظبوطة فيهم

لو هي عملية الجمع ف بنمسك شرط من شروط الجمع ال5 (أول 5 شروط) وبنحاول نثبت منها إن عملية الجمع المعطاة مش منطقية بإننا نطبقها على الشرط إللي مسكناه, ولو طلع معانا الR.H.S (الطرف الأيمن 1) مش زي الL.H.S (الطرف الأيسر 2) يبقى كده أثبتنا إن ده مش Vector Space, أما لو طلعوا زي بعض ف بنمسك شرط ثاني ونطبق نفس الخطوات لحد ما نثبت إن الطرفين مش زي بعض لما بنطبق طريقة الجمع إللي موجودة في المسألة

لو هي عملية الضرب ف بنمسك شرط من شروط الضرب ال5 (ثاني 5 شروط) وبنحاول نثبت منها إن عملية الضرب المعطاة مش منطقية بإننا نطبقها على الشرط إللي مسكناه, ولو طلع معانا الR.H.S (الطرف الأيمن 1) مش زي الL.H.S (الطرف الأيسر 2) يبقى كده أثبتنا إن ده مش Vector Space, أما لو طلعوا زي بعض ف بنمسك شرط ثاني ونطبق نفس الخطوات لحد ما نثبت إن الطرفين مش زي بعض لما بنطبق طريقة الضرب إللي موجودة في المسألة

لو العمليتين مش منطقيتين ف بنثبت إن ده مش Vector Space بواحدة فيهم أو ممكن بالإثنين

*ملحوظة : ممكن يكون فيه أكثر من شرط مايحققش العملية الغير المنطقية إللي موجودة في المسألة لكن يكفي إثبات إنها مش منطقية بشرط واحد فقط

ده بالنسبة لأول نوع من المسائل

ثاني نوع بيكون فيه متجه u مثلًا (x, y) وبيدينا فترة لكل من x و y والمطلوب مننا نثبت إن ده مش Vector Space بإننا نؤكد على إن فيه قيمة تنفع لx مش بتنتمي للفترة المعطاة

بنحلها إزاي؟

إحنا عارفين إن ال xوالy فترتهم هي الأعداد الحقيقية إللي هي R (يعني ممكن يكونوا بأي قيمة) لكن في المسألة بتكون فترة من الفترات المعطاة مش منطقية ف بنشوف إيه الفترة إللي مش منطقية ونحاول نثبت هي ليه مش منطقية بشكل طبيعي

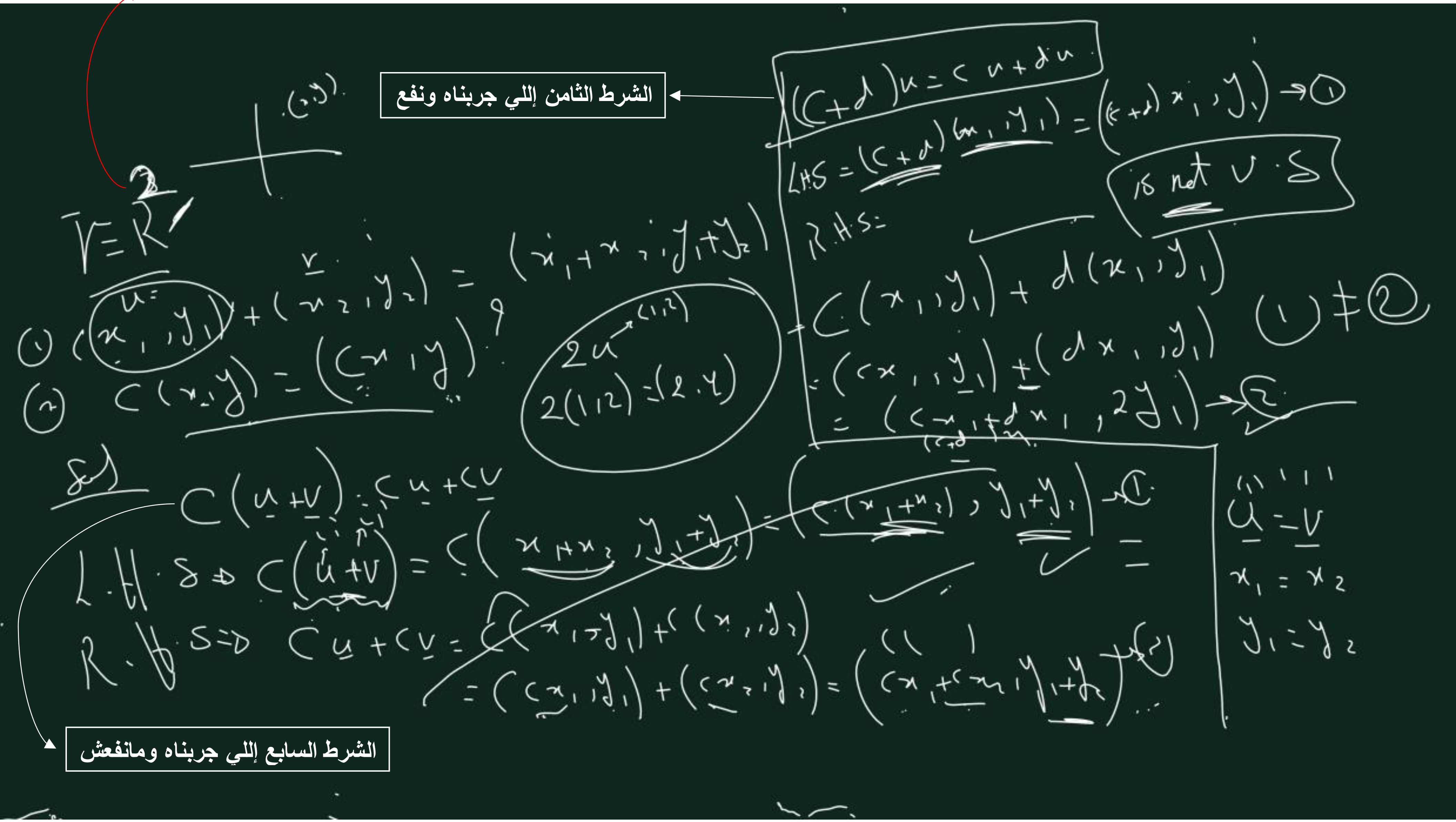
يعني لو مثلا قال إن x فترتها من 0 إلى ∞ ف ممكن نثبت إنها مش منطقية بإننا نجيب متجه u مثلا بيساوي (x, y) ونضرب المتجه ده في -1 ويطلع معانا إن x أقل من الصفر يعني خارج الفترة المعطاة وبالتالي ده مش Vector Space

ده بالنسبة لثاني نوع من المسائل

فيه نوع ثالث من المسائل بس ده مش علينا دلوقتي ف هنركز على أول نوعين بس

حددنا الفضاء المتجهي إللي في المسألة ب R^2 (بنبص على المتجهات المعطاة ونشوف هي بتتكون من كام بعد أو هو بيحددهالنا على طول

مثال على أول نوع



في المثال ده أول حاجة لقيناها إن عملية الجمع (1) منطقية لكن عملية الضرب (2) هي إللي مش منطقية: لأن الطبيعي إللي إحنا عارفينه هو إن الثابت لما بيتضرب في متجه بيتضرب في ال x وفي ال y, مش في ال x فقط زي ما جايبلنا في المسألة, ف حاولنا نثبت إن ده مش Vector Space بإننا نمسك الشرط السابع (إللي هو ثاني شرط من شروط الضرب) ونطبق طريقة الضرب إللي هو عاطيهالنا على الشرط ده, لكن زي ما واضح طلع إن الطرف الأيمن بيساوي الطرف الأيسر ف كده ماعرفناش نثبت إن طريقة الضرب إللي عاطيهالنا في المسألة مش منطقية, ف جينا نمسك الشرط الثامن (إللي هو ثالث شرط من شروط الضرب) وطبقنا طريقة الضرب إللي هو عاطيهالنا على الشرط ده ولقينا إن الطرف الأيمن مش بيساوي الطرف الأيسر وبكده أثبتنا إن ده مش Vector Space

مثال ثاني على أول نوع

كده الفضاء المتجهي ب R^3

① $\overset{u}{(x_1, y_1, z_1)} + \overset{v}{(x_2, y_2, z_2)} = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1, z_1 + z_2 + 1)$.

② $c(x, y, z) = (cx, cy, cz)$

$\boxed{\exists\, \underline{0} \in V \ni \underline{0} + \underline{u} = \underline{u} + \underline{0} = \underline{u}}$

الشرط الرابع إللي جربناه ونفع

Sol:-

$\underline{0} = (0, 0, 0)$

المتجه الصفري

$\underline{0} + \underline{u} = u$

not V.S.

L.H.S: $(0, 0, 0) + (x, y, z) = (0 + x + 1, 0 + y + 1, 0 + z + 1)$

R.H.S: $\underline{u} = (x, y, z)$ ② $\neq (x + 1, y + 1, z + 1) =$ ①

في المثال ده أول حاجة لقيناها إن عملية الجمع (1) هي إللي مش منطقية أما عملية الضرب (2) منطقية; لأن الطبيعي إللي إحنا عارفينه هو إننا لما بنجمع عدد من المتجهات بنجمع السينات مع بعضها والصادات مع بعضها وهكذا, مش بنجمع السينات ونجمع 1 مكان آخر سين أو آخر x وكذلك مع الصادات, ف حاولنا نثبت إن ده مش منطقي أو إن ده مش **Vector Space** بإننا نمسك الشرط الرابع في الجمع ونطبق طريقة الجمع إللي هو عاطيهالنا على الشرط ده, ولقينا إن الطرف الأيمن مش بيساوي الطرف الأيسر وبكده أثبتنا إن ده مش **Vector Space**

مثال ثالث على أول نوع

حددنا الفضاء المتجهي ب R^2

$V = R^2$

$① \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, 0)$

$② \quad c(x, y) = (cx, cy)$ ✓

$u + v = v + u$

الشرط الثاني إللي جربناه ونفع

$L.H.S = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, 0) \to ①$

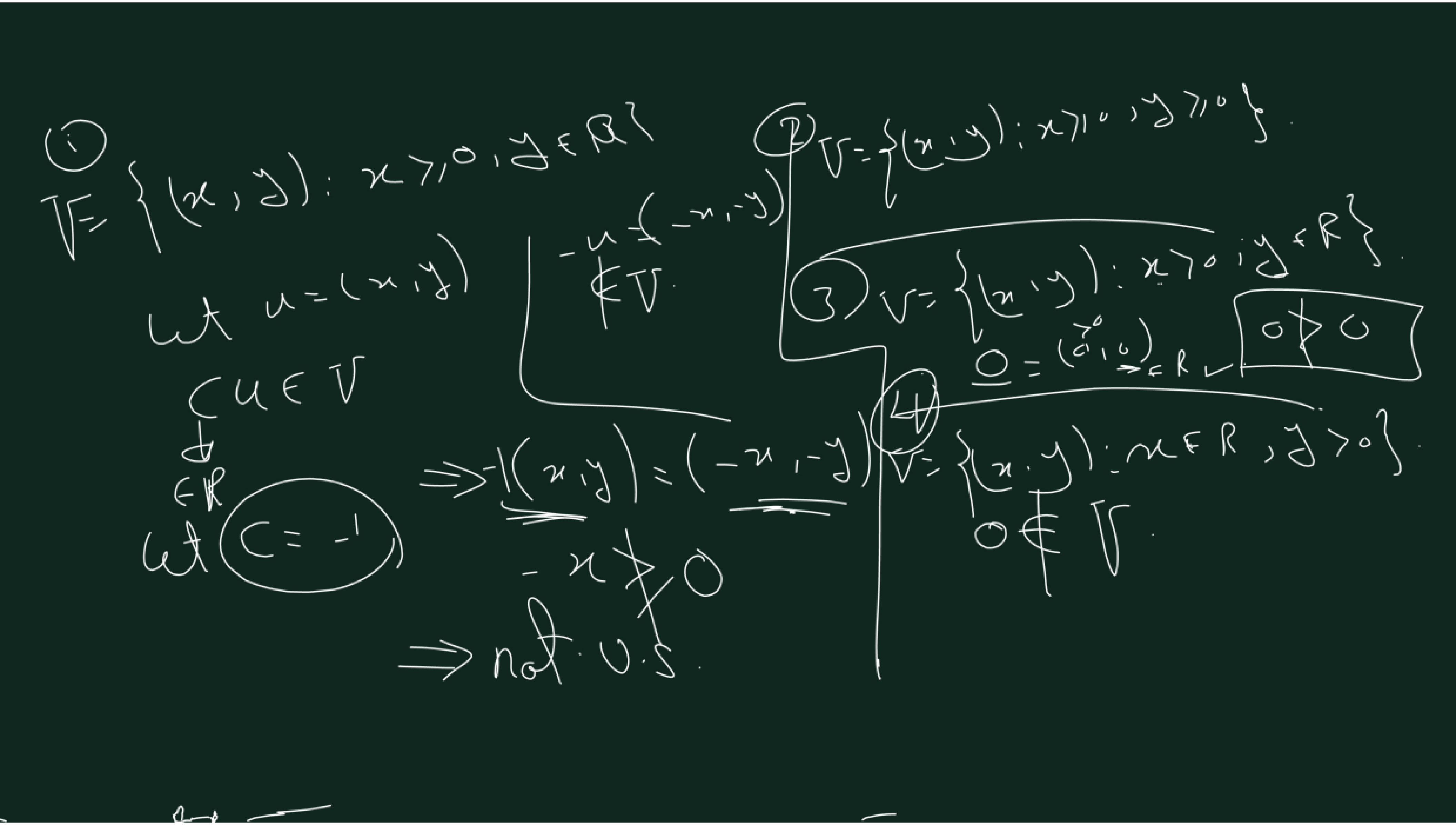
$v + u = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_2, 0) \to ②$

$①\neq②$

not V.S.

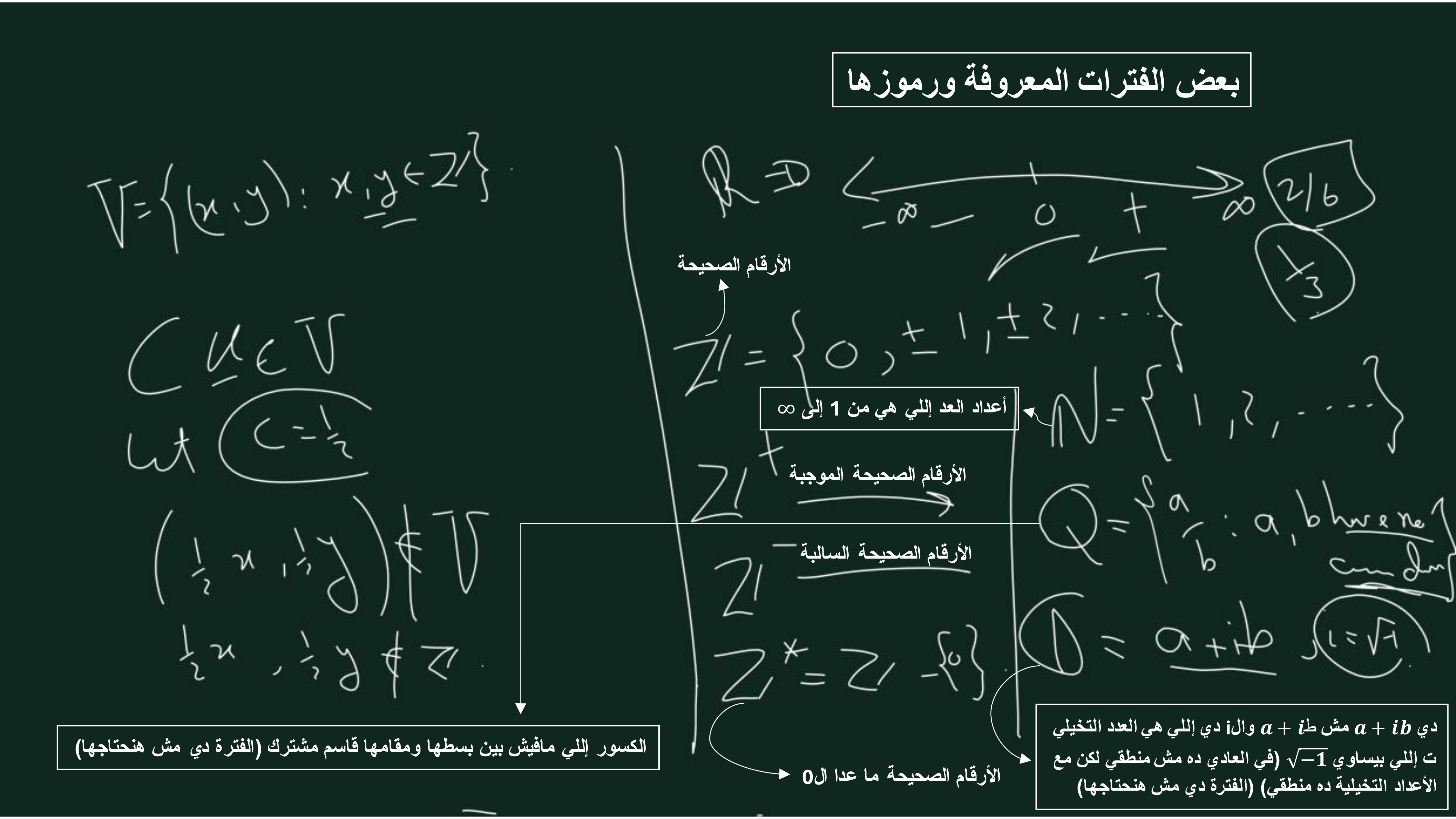
في المثال ده أول حاجة لقيناها إن عملية الجمع (1) هي إللي مش منطقية أما عملية الضرب (2) منطقية; لأن الطبيعي إللي إحنا عارفينه هو إننا لما بنجمع عدد من المتجهات بنجمع السينات مع بعضها والصادات مع بعضها وهكذا, مش بنجمع السينات ونخلي الصادات ب0, ف حاولنا نثبت إن ده مش منطقي أو إن ده مش Vector Space بإننا نمسك الشرط الثاني في الجمع ونطبق طريقة الجمع إللي هو عاطيهالنا على الشرط ده, ولقينا إن الطرف الأيمن مش بيساوي الطرف الأيسر وبكده أثبتنا إن ده مش Vector Space

أمثلة على ثاني نوع



في أول مثال أول حاجة لقيناها إن فترة قيم x هي من 0 إلى ∞ (مش منطقية لأنها ممكن تكون بالسالب عادي) وفترة قيم y هي الأعداد الحقيقية إللي هي من ∞− إلى ∞ (منطقية), ف حاولنا نثبت إن فترة قيم x مش منطقية بإننا نجيب متجه بقيمة (x, y) المعطاة ونضربه في ثابت بيساوي 1- وبكده أثبتنا إن ده مش **Vector Space** وبالنسبة لباقي الأمثلة هنا ف هنطبق نفس الخطوات عليها

مثال على ثاني نوع



في المثال ده أول حاجة لقيناها إن فترة قيم x وy هي $\mathbb{Z}$ إللي هي الأرقام الصحيحة (مش منطقية لأنها ممكن تكون بكسر عادي), ف حاولنا نثبت إن فترة قيم x مش منطقية بإننا نجيب متجه بقيمة (x,y) المعطاة ونضربه في ثابت بيساوي 0.5 وبكده أثبتنا إن ده مش Vector Space

مثال على ثاني نوع

$$V = \{(x, 0, z) : x, z \in N\}$$

$$\underline{0} = (0, 0, 0) \notin V$$

$$0 \notin N$$

في المثال ده أول حاجة لقيناها إن فترة قيم x وy وz هي ℕ إللي هي أعداد العد (مش منطقية لأنها ممكن تكون ب0 أو رقم سالب عادي), ف حاولنا نثبت إن الفترة دي مش منطقية بإننا نجيب المتجه الصفري إللي مش بينتمي لفضاء المتجه وبكده أثبتنا إن ده مش **Vector Space**