

Notes de cours

---

# Analyse réelle I

Droite réelle, suites et séries, continuité et  
dérivabilité

---

Rédigé par : **Mohammed D. Belgoumri**  
Révisé par : Personne pour l'instant

Le 18 août 2021

# Table des matières

<b>Page de garde</b>	<b>1</b>
<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>1 Droite réelle achevée</b>	<b>2</b>
<b>2 Suites numériques</b>	<b>3</b>
2.1 Généralités . . . . .	3
2.2 Propriétés des suites réelles . . . . .	5

# Chapitre 1

## Droite réelle achevée

# Chapitre 2

## Suites numériques

### 2.1 Généralités

Dans la suite de ce chapitre,  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  est l'un des deux corps  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ou  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ .

**Définition 1** (Suite numérique).

On appelle une *suite numérique* toute application  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ . Une suite numérique est notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  plutôt que :

$$\begin{cases} u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$$

$u_n$  (l'image de  $n$  par cette application) est appelée le *terme général* de la suite.

**Définition 2** (Suite extraite).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On appelle une *suite extraite* ou *sous suite* de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute suite numérique  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général  $v_n = u_{\varphi(n)}$  où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une application croissante.

**Théorème et définition 2.1** (Limite d'une suite, convergence, divergence).

- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. Il existe au plus un seul  $l \in \mathbb{K}$  qui vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Un tel  $l$  (s'il existe) est appelé la *limite* de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On le note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ , ou encore  $\lim u_n$ .

- Une suite est dite *convergente* ssi elle possède une limite  $l \in \mathbb{K}$ . Dans ce cas on dit que la suite *converge vers*  $l$  et on écrit :  $u_n \rightarrow l$
- Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

*Démonstration.*

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique,  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  et  $l, l' \in \mathbb{K}$  vérifient tous les deux :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 \Rightarrow |u_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

En posant  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ , on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < \varepsilon$$

Autrement dit, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |l - l'| < \varepsilon$$

D'où la conclusion :  $l = l'$

□

### **Théorème 2.2.**

*Toute suite convergente est bornée. i.e : Si  $(u_n)$  est convergente, alors il existe  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

*Démonstration.*

Soit  $(u_n)$  une suite convergente vers  $l \in \mathbb{K}$  et  $\varepsilon > 0$ . D'après la définition de la limite, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

On en déduit que pour tout  $n > n_0$ , on a :

$$|u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow |u_n| + |l| < \varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon - |l|$$

Finalement, en posant  $m = \max \{|u_n| \mid n \leq n_0\}$  et  $M = \max \{m, \varepsilon - |l|\}$  on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

□

**Théorème 2.3** (Operations sur les suites convergentes).

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes vers  $l \in \mathbb{K}$  et  $l' \in \mathbb{K}$  respectivement. On a :

- (i)  $(u_n + \lambda v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l + \lambda l'$  quelque soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
- (ii)  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $|l|$ .
- (iii)  $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n) \Rightarrow l \leq l'$
- (iv)  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $ll'$ .
- (v) Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$  et  $l \neq 0$ , alors  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{1}{l}$ .
- (vi) Toute suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

*Démonstration.*

- (i) Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $u_n \rightarrow l$  et  $v_n \rightarrow l'$ , il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_1 &\Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 &\Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \end{aligned}$$

En posant  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ , on a pour tout  $n > n_0$  :

$$\begin{aligned} |u_n + \lambda v_n - l - \lambda l'| &\leq |u_n - l| + |\lambda| \cdot |v_n - l'| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que  $\lim(u_n + \lambda v_n) = l + \lambda l'$

- (ii) La conclusion suit directement de l'inégalité triangulaire :

$$\left| |u_n| - |l| \right| \leq |u_n - l|$$

□

**Corollaire 2.4.** Une suite complexe converge ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent. Dans ce cas, on a :

$$\lim u_n = \lim \Re(u_n) + i \lim \Im(u_n)$$

## 2.2 Propriétés des suites réelles