Analyse I

Mohammed D. Belgoumri

18 août 2021

Table des matières

Chapitre 1

Droite réelle achevée

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Généralités

Dans la suite de ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est l'un des deux corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ou $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Définition 1 (Suite numérique)**.**
On appelle une *suite numérique* toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Une suite numérique est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que :

$$\begin{cases} u : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$$

u_n (l'image de n par cette application) est appelée le *terme général* de la suite.

Définition 2 (Suite extraite)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle une *suite extraite* ou *sous suite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante.

Théorème et définition 2.1 (Limite d'un suite, convergence, divergence)**.**

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Il existe au plus un seul $l \in \mathbb{K}$ qui vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Un tel l (s'il existe) est appelé la *limite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est noté $\lim_{n\to+\infty} u_n$, ou encore $\lim u_n$.

— Une suite est dite *convergente* ssi elle possède une limite $l \in \mathbb{K}$. Dans ce cas on dit que la suite *converge vers* l et on écrit : $u_n \to l$

— Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente.*

Démonstration.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, $\varepsilon \in]0, +\infty[$ et $l, l' \in \mathbb{K}$ vérifient tous les deux :

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon \end{array}$$

On en déduit l'existence de $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 \Rightarrow |u_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

En posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < \varepsilon$$

Autrement dit, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |l - l'| < \varepsilon$$

D'où la conclusion : $l = l'$ □

Théorème 2.2.
Toute suite convergente est bornée. i.e : Si (u_n) est convergente, alors il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

Démonstration.
Soit (u_n) une suite convergente vers $l \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

On en déduit que pour tout $n > n_0$, on a :

$$|u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow |u_n| + |l| < \varepsilon \Rightarrow |u_n| < \varepsilon - |l|$$

Finalement, en posant $m = \max\{|u_n|\ |n \leq n_0\}$ et $M = \max\{m, \varepsilon - |l|\}$ on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

□

Théorème 2.3 (Operations sur les suites convergentes)**.**
Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites convergentes vers* $l \in \mathbb{K}$ *et* $l' \in \mathbb{K}$ *respectivement. On a :*

(i) $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l + \lambda l'$ *quelque soit* $\lambda \in \mathbb{K}$.

(ii) $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $|l|$.

(iii) $(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n) \Rightarrow l \leq l'$

(iv) $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ll'.

(v) Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0$ *et* $l \neq 0$*, alors* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\frac{1}{l}$.

(vi) Toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *extraite de* (u_n) *converge vers* l.

Démonstration.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \to l$ et $v_n \to l'$, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \end{array}$$

En posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a pour tout $n > n_0$:

$$\begin{array}{rcl} |u_n + \lambda v_n - l - \lambda l'| & \leq & |u_n - l| + |\lambda| \cdot |v_n - l'| \\ & < & \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \\ & = & \varepsilon \end{array}$$

Ce qui entraîne que $\lim(u_n + \lambda v_n) = l + \lambda l'$

(ii) La conclusion suit directement de l'inégalité triangulaire :

$$\Big||u_n| - |l|\Big| \leq |u_n - l|$$

$\square$

Corollaire 2.4. *Une suite complexe converge ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent. Dans ce cas, on a :*

$$\lim u_n = \lim \mathfrak{Re}(u_n) + i \;\; \lim \mathfrak{Im}(u_n)$$