

Notes de cours

---

# Analyse réelle I

## Droite réelle, suites et séries, continuité et dérivabilité

---

Rédigé par :  
Mohammed D. Belgoumri

Révisé par :  
Personne pour l'instant

Le 29 août 2021

# Table des matières

<b>Page de garde</b>	<b>1</b>
<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>1 Droite réelle achevée</b>	<b>2</b>
1.1 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels . . . . .	2
<b>2 Suites numériques</b>	<b>3</b>
2.1 Généralités . . . . .	3
2.2 Propriétés des suites réelles . . . . .	6

# Chapitre 1

## Droite réelle achevée

### 1.1 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

# Chapitre 2

## Suites numériques

Dans la suite de ce chapitre,  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  est l'un des deux corps  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ou  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ .

### 2.1 Généralités

**Définition 1** (Suite numérique).

On appelle une *suite numérique* toute application  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ . Une suite numérique est notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  plutôt que :

$$\begin{cases} u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$$

$u_n$  (l'image de  $n$  par cette application) est appelée le *terme général* de la suite.

**Définition 2** (Suite extraite).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On appelle une *suite extraite* ou *sous suite* de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute suite numérique  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général  $v_n = u_{\varphi(n)}$  où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une application croissante.

**Théorème et définition 2.1** (Limite d'une suite, convergence, divergence).

- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. Il existe au plus un seul  $\ell \in \mathbb{K}$  qui vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Un tel  $\ell$  (s'il existe) est appelé la *limite* de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On le note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \text{ ou encore } \lim u_n.$$

- Une suite est dite *convergente* ssi elle possède une limite  $\ell \in \mathbb{K}$ . Dans ce cas on dit que la suite *converge vers*  $\ell$  et on écrit :  $u_n \rightarrow \ell$
- Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

*Démonstration.*

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique,  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  et  $\ell, \ell' \in \mathbb{K}$  vérifient tous les deux :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 \Rightarrow |u_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

En posant  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ , on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < \varepsilon$$

Autrement dit, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |\ell - \ell'| < \varepsilon$$

D'où la conclusion :  $\ell = \ell'$

□

## **Théorème 2.2.**

*Toute suite convergente est bornée. i.e : Si  $(u_n)$  est convergente, alors il existe  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

*Démonstration.*

Soit  $(u_n)$  une suite convergente vers  $\ell \in \mathbb{K}$  et  $\varepsilon > 0$ . D'après la définition de la limite, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On en déduit que pour tout  $n > n_0$ , on a :

$$|u_n| - |\ell| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |u_n| < |\ell| + \varepsilon$$

Finalement, en posant  $m = \max \{|u_n| \mid n \leq n_0\}$  et  $M = \max \{m, |\ell| + \varepsilon\}$  on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

□

**Théorème 2.3** (Operations sur les suites convergentes).

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes vers  $\ell \in \mathbb{K}$  et  $\ell' \in \mathbb{K}$  respectivement. On a :

- (i)  $(u_n + \lambda v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell + \lambda \ell'$  quelque soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
- (ii)  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $|\ell|$ .
- (iii)  $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n) \Rightarrow \ell \leq \ell'$
- (iv)  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \ell'$ .
- (v) Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$  et  $\ell \neq 0$ , alors  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{1}{\ell}$ .
- (vi) Toute suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

*Démonstration.*

- (i) Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $u_n \rightarrow \ell$  et  $v_n \rightarrow \ell'$ , il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_1 &\Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 &\Rightarrow |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \end{aligned}$$

En posant  $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ , on a pour tout  $n > n_0$  :

$$\begin{aligned} |u_n + \lambda v_n - \ell - \lambda \ell'| &\leq |u_n - \ell| + |\lambda| \cdot |v_n - \ell'| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que  $\lim(u_n + \lambda v_n) = \ell + \lambda \ell'$

- (ii) La conclusion suit directement de l'inégalité triangulaire :

$$\left| |u_n| - |\ell| \right| \leq |u_n - \ell|$$

(iii)

(iv)

(v)

- (vi) Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après la définition de la limite, on a un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \quad (*)$$

Or,  $\varphi$  est croissante. Elle vérifie donc  $\varphi(n) \geq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Il en résulte en utilisant (\*) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$$

Autrement dit :  $u_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$

□

**Corollaire 2.4.**

Une suite complexe converge ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent.  
 Dans ce cas, on a :

$$\lim u_n = \lim \Re(u_n) + i \lim \Im(u_n)$$

**2.2 Propriétés des suites réelles**

Une différence importante entre  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  et  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  est le fait que  $\mathbb{R}$  est totalement ordonné. On peut donc parler des suites réelles qui deviennent arbitrairement grandes ou petites quand  $n \rightarrow +\infty$ , chose qu'on ne peut pas faire avec des suites complexes.

**Définition 3.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle divergente. On dit que  $u_n$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) ssi

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow u_n > A \text{ (resp. } u_n < A)$$

On note :  $\lim u_n = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

**Définition 4.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. On dit que  $u_n$  est :

- Majorée ssi :  $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$ .
- Minorée ssi  $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m$ .
- Croissante (resp. strictement croissante) ssi :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$ .  
(resp.  $u_{n+1} > u_n$ ).
- Décroissante (resp. strictement décroissante) ssi :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$ .  
(resp.  $u_{n+1} < u_n$ ).
- Monotone (resp. strictement monotone) ssi elle est croissante (resp. strictement croissante) ou décroissante (resp. strictement décroissante).

**Théorème 2.5** (Suites monotones).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- (i) Si  $u_n$  est croissante et majorée, alors  $\lim u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .
- (ii) Si  $u_n$  est croissante et minorée, alors  $\lim u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

Démonstration.

(i) Posons  $\lambda := \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ . On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \lambda - \varepsilon < u_{n_0} \leq \lambda$$

$u_n$  étant croissante,  $\lambda - \varepsilon < u_{n_0} \Rightarrow \lambda - \varepsilon < u_n$  pour tout  $n \geq n_0$ . Il en suit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda - \varepsilon < u_n \leq \lambda < \lambda + \varepsilon$$

D'où la conclusion :  $\lim u_n = \lambda$ .

(ii) La démonstration s'obtient en appliquant le raisonnement précédent à  $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

□

**Théorème et définition 2.6** (Suites adjacentes).

Soit  $(u_n)$  et  $v_n$  deux suites réelles telles que :

- a.  $(u_n)$  est croissante.
- b.  $(v_n)$  est décroissante.
- c.  $(u_n - v_n) \rightarrow 0$

$(u_n)$  et  $v_n$  sont dites deux suites *adjacentes*. Elles convergent et vérifient  $\lim u_n = \lim v_n$ .