Analyse I

Mohammed D. Belgoumri

18 août 2021

Table des matières

Chapitre 1

Droite réelle achevée

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Généralités

Dans la suite de ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est l'un des deux corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ou $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Définition 1 (Suite numérique)**.**
On appelle une *suite numérique* toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Une suite numérique est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n \mapsto u_n \end{array} \right.$$

u_n (l'image de n par cette application) est appelée le *terme général* de la suite.

Définition 2 (Suite extraite)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante.

Théorème et définition 2.1 (Limite d'un suite, convergence, divergence)**.**

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Il existe au plus un seul $l \in \mathbb{K}$ qui vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Un tel l (s'il existe) est appelé la *limite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est noté $\lim_{n\to+\infty} u_n$, ou encore $\lim u_n$.

- Une suite est dite *convergente* ssi elle possède une limite $l \in \mathbb{K}$. Dans ce cas on dit que la suite *converge vers* l.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

Démonstration.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, $\varepsilon \in]0,+\infty[$ et $l, l' \in \mathbb{K}$ vérifient tous les deux :

$$\begin{array}{l}\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon\end{array}$$

On en déduit l'existence de $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 \Rightarrow |u_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}\end{array}$$

En posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < \varepsilon$$

Autrement dit, on a :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad |l - l'| < \varepsilon$$

D'où la conclusion : $l = l'$ $\square$