Notes de cours

Analyse réelle I

Droite réelle, suites et séries, continuité et dérivabilité

Rédigé par :
Mohammed D. Belgoumri

Révisé par :
Personne pour l'instant

Le 5 septembre 2021

Table des matières

Chapitre 1

Droite réelle achevée

1.1 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Chapitre 2

Suites numériques

Dans la suite de ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est l'un des deux corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ou $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

2.1 Généralités

Définition 1 (Suite numérique)**.**
On appelle une *suite numérique* toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Une suite numérique est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que :

$$\begin{cases} u : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$$

u_n (l'image de n par cette application) est appelée le *terme général* de la suite.

Définition 2 (Suite extraite)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle une *suite extraite* ou *sous suite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante.

Théorème et définition 2.1 (Limite d'une suite, convergence, divergence)**.**

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Il existe au plus un seul $\ell \in \mathbb{K}$ qui vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Un tel ℓ (s'il existe) est appelé la *limite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On le note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, ou encore $\lim u_n$.

— Une suite est dite *convergente* ssi elle possède une limite $\ell \in \mathbb{K}$. Dans ce cas on dit que la suite *converge vers* ℓ et on écrit : $u_n \to \ell$

— Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente.*

Démonstration.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, $\varepsilon \in]0,+\infty[$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{K}$ vérifient tous les deux :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \\ &\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 \Rightarrow |u_n - \ell'| < \tfrac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

En posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < \varepsilon$$

Autrement dit, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |\ell - \ell'| < \varepsilon$$

D'où la conclusion : $\ell = \ell'$ □

Théorème 2.2.
Toute suite convergente est bornée. i.e : Si (u_n) est convergente, alors il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

Démonstration.
Soit (u_n) une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On en déduit que pour tout $n > n_0$, on a :

$$|u_n| - |\ell| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |u_n| < |\ell| + \varepsilon$$

Finalement, en posant $m = \max\{|u_n| \; |n \leq n_0\}$ et $M = \max\{m, |\ell| + \varepsilon\}$ on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

□

Théorème 2.3 (Operations sur les suites convergentes)**.**
Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites convergentes vers* $\ell \in \mathbb{K}$ *et* $\ell' \in \mathbb{K}$ *respectivement. On a :*

(i) $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell + \lambda\ell'$ *quelque soit* $\lambda \in \mathbb{K}$.

(ii) $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $|\ell|$.

(iii) $(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n) \Rightarrow \ell \leq \ell'$

(iv) $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell\ell'$.

(v) Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0$ *et* $\ell \neq 0$, *alors* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\frac{1}{l}$.

(vi) Toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *extraite de* (u_n) *converge vers* ℓ.

Démonstration.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \end{array}$$

En posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a pour tout $n > n_0$:

$$\begin{array}{rcl} |u_n + \lambda v_n - \ell - \lambda\ell'| & \leq & |u_n - \ell| + |\lambda| \cdot |v_n - \ell'| \\ & < & \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \\ & = & \varepsilon \end{array}$$

Ce qui entraîne que $\lim(u_n + \lambda v_n) = \ell + \lambda\ell'$

(ii) La conclusion suit directement de l'inégalité triangulaire :

$$\Big||u_n| - |\ell|\Big| \leq |u_n - \ell|$$

(iii)

(iv)

(v)

(vi) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la limite, on a un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \qquad (*)$$

Or, φ est croissante. Elle vérifie donc $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte en utilisant $(*)$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$$

Autrement dit : $u_{\varphi(n)} \to \ell$

$\square$

Corollaire 2.4.
Une suite complexe converge ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent. Dans ce cas, on a :

$$\lim u_n = \lim \mathfrak{Re}\ (u_n) + i\ \lim \mathfrak{Im}\ (u_n)$$

2.2 Propriétés des suites réelles

Une différence importante entre $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est le fait que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné. On peut donc parler des suites réelles qui deviennent arbitrairement grandes ou petites quand $n \to +\infty$, chose qu'on ne peut pas faire avec des suites complexes.

Définition 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle divergente. On dit que u_n *tend vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$ ssi

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 \Rightarrow u_n > A \text{ (resp. } u_n < A)$$

On note : $\lim u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Définition 4.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u_n est :

— *Majorée* ssi : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$.

— *Minorée* ssi $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m$.

— *Croissante* (resp. *strictement croissante*) ssi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$. (resp. $u_{n+1} > u_n$).

— *Décroissante* (resp. *strictement décroissante*) ssi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$. (resp. $u_{n+1} < u_n$).

— *Monotone*(resp. *strictement monotone*) ssi elle est croissante (resp. strictement croissante) ou décroissante (resp. strictement décroissante).

Théorème 2.5 (Suites monotones)**.**
Soit $u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*

(i) Si u_n *est croissante et majorée, alors* $\lim u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

(ii) Si u_n *est croissante et minorée, alors* $\lim u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Démonstration.

(i) Posons $\lambda := \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$. On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \lambda - \varepsilon < u_{n_0} \leq \lambda$$

u_n étant croissante, $\lambda - \varepsilon < u_{n_0} \Rightarrow \lambda - \varepsilon < u_n$ pour tout $n \geq n_0$. Il en suite que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda - \varepsilon < u_n \leq \lambda < \lambda + \varepsilon$$

D'où la conclusion : $limu_n = \lambda$.

(ii) La démonstration s'obtient en appliquant le raisonnement précédent à $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Théorème et définition 2.6 (Suites adjacentes)**.**
Soit (u_n) et v_n deux suites réelles telles que :

a. (u_n) est croissante.

b. (v_n) est décroissante.

c. $(u_n - v_n) \to 0$

(u_n) et v_n sont dites deux suites *adjacentes*. Elles convergent et vérifient $\lim u_n = \lim v_n$.