Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene

Conception et Complexité des Algorithme

Rapport de Travaux Pratiques N°3
Algorithmes de Complexité temporelle quadratique O(n²)

Binôme
MOHAMMEDI Haroune
HOUACINE Naila Aziza

Professeur
Pr. AMANI Ferhat

26 novembre 2017

1 Partie I : Algorithme 1 du test de la primalité.

1 Développement de l'algorithme de Tri par sélection d'un tableau de (n>=2) éléments.

```
 FONCTION Tri_Selection(T:Tableau[] , n:entier):Tableau[]
VAR
    i,j,n1,x : entier;
DEBUT
    i = 1;
    n1 = n -1;

    TANT QUE(i <= n1)
    FAIRE
        j = i +1;

        TANT QUE(j <= n)
        FAIRE

            SI( T[i] > T[j] )
            ALORS
                x = T[i] ;
                T[i] = T[j];
                T[j] = x;
            FIN SI;

            j = j + 1;

        FAIT;
        i = i + 1;
    FAIT;
    retourner T;

FIN
```

2 Complexité :

2.1 Calcule des complexités temporelles en notation asymptotique de Landau O (Grand O) de cet algorithme au meilleur cas, notée f1(n), et au pire cas, notée f2(n).

1. Calcule de la complexité au meilleur cas :
   Il s'agit du cas ou le tableau est déjà trié dans l'ordre croissant, tel que :
   f1(n) = 1(=) + 2(-,=) + n(<=) + (n-1)*2(+,=) + $\frac{n^2+n-2}{2}$ + $\frac{n^2+n-2}{2} - 1 + 2 * \frac{n^2+n-2}{2}$ + (n-1)*2(+,=) + 1(return).
   f1(n) = $2n^2$ + 7n - 5 (Opérations) $\Rightarrow$ f1(n) = O(n^2)

2. Calcule de la complexité au pire cas :
   Il s'agit du cas ou le tableau est trié dans l'ordre inverse (ordre décroissant), tel que :
   f2(n) = 1(=) + 2(-,=) + n(<=) + (n-1)*2(+,=) + $\frac{n^2+n-2}{2} + \frac{n^2+n-2}{2} - 1 + 3*(\frac{n^2+n-2}{2} - 1) + 2*\frac{n^2+n-2}{2}$ + (n-1)*2(+,=) + 1(return).

   f2(n) = $\frac{7n^2}{2}$ + $\frac{17n}{2}$ + - 11 (Opérations) $\Rightarrow$ f2(n) = O(n^2)

REMARQUE :

Nous remarquons que dans le pire est le meilleur des cas la complexité temporelle est toujours de l'ordre de O(n^2).

2.2 Calculer la complexité spatiale en notation exacte et en notation asymptotique de Landau O (Grand O) de cet algorithme notée s(n).

Il s'agit du nombre de case mémoire ou octets utilisés par le programme.
Pour calculer la complexité spatiale de cet algorithme nous allons considérer les tailles mémoires des types en langage C ; tel que nous aurons : int/entier : 2 octets

1. En notation exacte :
   Nous avons dans cet algorithme cinq (5) variables de type "entier" en plus d'un tableau de n entiers.
   Ce qui nous fait : (n + 5)(2 octets) = 2n + 10 octets

2. En notation asymptotique :
   Le nombre de case mémoire dépend uniquement de la taille du tableau, donc on obtient : s(n) = O(n)

3 Développement de programme correspondant avec le langage C.

3.1 Procédure de Tri

```
void selectionSort(long int *t, long int n){
    long int i,j,min,imin;
    for(i=0;i<n-1;i++){
        imin=i;
        for(j=i+1;j<n;j++){
            if(t[imin]>t[j]){
                min=t[j];
                imin= j;
            }
        }
        if(imin != i){
            t[imin]=t[i];
            t[i]=min;
        }
```

```
    }
}
```

3.2 Quelques fonctions d'aide pour les trois (3) type de tableaux.

Fonction de création et de calcule du temps d'exécution de la fonction de tri pour un tableau comportant des données en ordre Croissant.

```
double sortedTime(long int n) {

  long int *array = malloc(n*sizeof(long int));
  long int i;

  for (i = 0; i < n; i++)
  {
      array[i] = i;
  }
  clock_t start = clock();
  selectionSort(array, n); //replace with your function
  clock_t end = clock();

  return (double) (end - start)/CLOCKS_PER_SEC;
}
```

Fonction de création et de calcule du temps d'exécution de la fonction de tri pour un tableau comportant des données en ordre inverse (décroissant).

```
double inversedTime(long int n) {

  long int *array = malloc(n*sizeof(long int));
  long int i;

  for (i = 0; i < n; ++i)
  {
    array[i] = n - i;
  }
  clock_t start = clock();
  selectionSort(array, n); //replace with your function
  clock_t end = clock();

  return (double) (end - start)/CLOCKS_PER_SEC;
}
```

Fonction de création et de calcule du temps d'exécution de la fonction de tri pour un tableau comportant des données en ordre Aléatoire

```
double randomTime(long int n) {

  long int *array = malloc(n*sizeof(long int));
  long int i;
```

```
  for (i = 0; i < n; ++i)
  {
    array[i] = (int) rand()%n;
  }
  clock_t start = clock();
  selectionSort(array, n); //replace with your function
  clock_t end = clock();

  return (double) (end - start)/CLOCKS_PER_SEC;
}
```

Fonction de récupération des résultats des temps d'exécution dans un fichier.

```
  void saveResults(double array[], long int n, char* name) {

     long int i;
     FILE * fp;
     fp = fopen ("tp3_results","a");
     fprintf(fp, name);
     fprintf(fp, "[");

     for(i = 0;i<n;i++) {
      fprintf(fp, "%lf, ",array[i]);
     }

     fprintf(fp, "]\n");
     fclose (fp);
  }
```

3.3 Algorithme de teste

Lancement de l'algorithme pour les différentes tailles de tableau et avec les 3 type de tableaux (ordonné , ordre inverse , aléatoire).

```
#include <stdio.h>
#include <stdbool.h>
#include <stdlib.h>
#include<time.h>

int nbInputs = 12;
long int inputs[] = {50000 , 100000 , 200000 , 400000 , 800000 , 3200000
   ↪ , 6400000 , 12800000 , 25600000 , 1024000000 , 2048000000};

int main(int argc, char const *argv[])
  {
  double *inversedTimes = malloc(nbInputs*sizeof(double));
  double *sortedTimes = malloc(nbInputs*sizeof(double));
  double *randomTimes = malloc(nbInputs*sizeof(double));
  int i;

  for (i = 0; i < nbInputs; i++)
```

```
{
  inversedTimes[i] = inversedTime(inputs[i]);
  sortedTimes[i] = sortedTime(inputs[i]);
  randomTimes[i] = randomTime(inputs[i]);
}

saveResults(inversedTimes,nbInputs, "inversed = ");
saveResults(sortedTimes,nbInputs, "sorted = ");
saveResults(randomTimes,nbInputs, "random = ");

return 0;
}
```

3.4 Résultat

Ansin dans le fichier `tp3_results` on obtiendra les résultats suivants :

```
inversed = [5.308000, 21.059000, 87.593000, 342.122000, 1368.488000,
 5446.582000, 22330.988000, 93790.146170,373284.781800, 1530467.605000,
  6106565.745000  ]

sorted = [4.813000, 19.649000, 79.942000, 318.696000, 1274.784000,
5736.528000, 22946.112000, 94996.908000, 436985.756900 , 1747943.028000,
 7201525.274000 ]

random = [5.025000, 20.328000, 81.150000, 292.308000, 1169.232000,
4817.235840, 19172.59864, 76690.394570, 322099.657200, 1285177.632000,
 5654781.582000 ]
```

4 Mesure des temps d'exécution.

Grâce à l'exécution du programme C vu précédemment nous avons obtenu les temps d'exécution des trois (3) cas de tableaux.

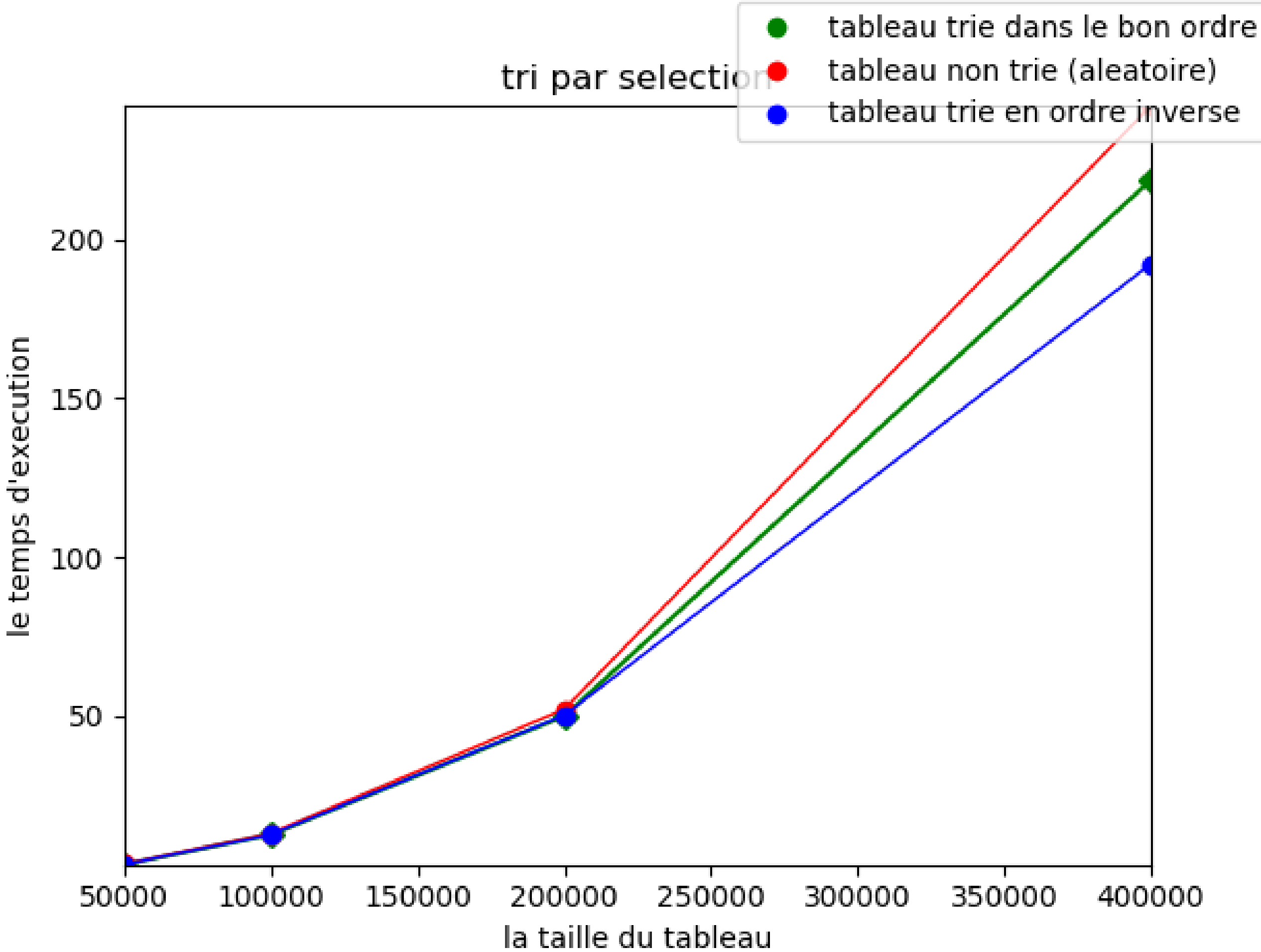
4.1 Remplissage du tableau :

Taille du Tableau (N) :	50000	100000	200000	400000	800000	1600000
Temps (bon ordre) :	3.190	12.533	49.868	218.696	846.771	4736.528
Temps (ordre inverse) :	3.263	13.000	52.035	242.122	918.292	4446.582
Temps (Aléatoire) :	3.133	12.563	50.082	192.308	857.088	3817.235

Taille du Tableau (N) :	3200000	6400000	12800000	25600000	51200000
Temps (bon ordre) :	22946.112	94996.908	436985.756	1747943.028	7201525.274
Temps (ordre inverse) :	22330.988	93790.146	373284.781	1530467.605	6106565.745
Temps (Aléatoire) :	19172.598	76690.394	322099.657	1285177.632	5654781.582

5 Représentation par un graphe, Gf1(n) et Gf2(n), les variations de la fonction de la complexité temporelle correspondant au meilleur cas f1(n) et au pire cas f2(n) en fonction de n respectivement ; et par trois (3) autres graphes, les variations du temps d'exécution T(n) en fonction de n selon les trois (3) type d'ordre du tableau.

5.1 Représentation des graphes de la variation du temps d'exécution :

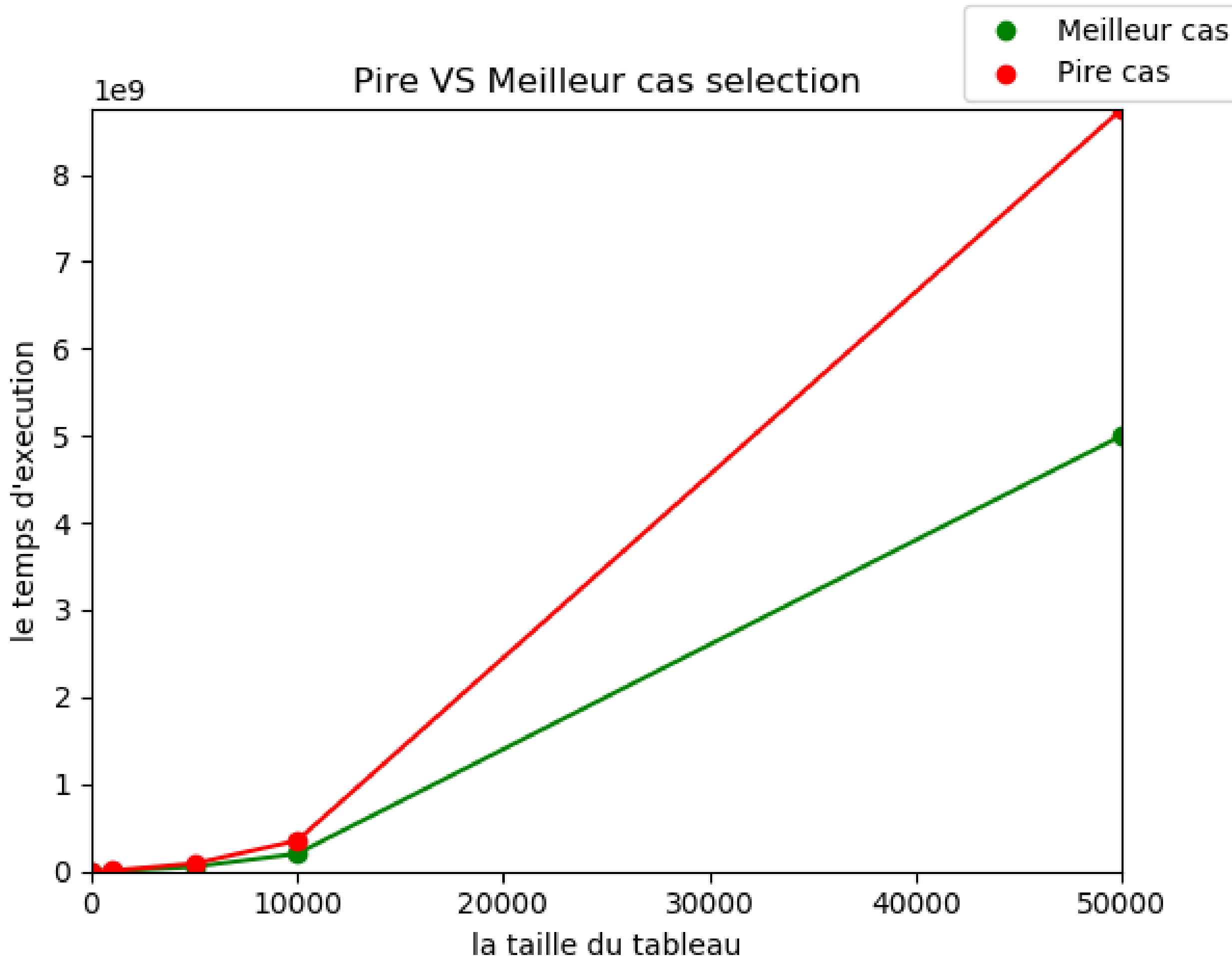


Représentation du graphe de la variation du temps d'exécution selon un tableau dans le bon ordre (croissant).

Représentation du graphe de la variation du temps d'exécution selon un tableau dans l'ordre inverse (décroissant).

Représentation du graphe de la variation du temps d'exécution selon un tableau dans ordre aléatoire.

5.2 Représentation des deux graphes Gf1 et Gf2 du meilleur et pire cas respectivement :



6 Interprétation des résultats.

6.1 Comparaison des mesures de temps d'exécution avec le pire et meilleur cas :

Vu que la complexité au pire et meilleur cas sont identiques, il est claire que les temps d'exécutions suivent la même évolution, en O(n^2).

6.2 Remarque et déduction d'une fonction T(n) reliant n au temps d'exécution.

On remarque que les temps d'exécution sont approximativement multipliés par 4 lorsque N est doublé n'importe l'ordre des éléments du tableau.

Exemples :
N1 = 50000 ⇒ T1 = 3.190
N2 = 100000 $\approx 2 * N1$ ⇒ T2 = 13.533 $\approx 4 * T1$

Aussi
N1 = 400000 ⇒ T1 = 218.696

N2 = 800000 $\approx 2 * N1 \Rightarrow$ T2 = 849.771 $\approx 4 * T1$

On en déduit que le temps d'exécution est proportionnel à N, ce que l'on peut représenter par la formule suivante :

$$T(x * N) = x^2 * T(N) \text{ pour tous } x * N \in [50000 - 2048000000]$$

(x étant la tangente d'un point sur le graphe).

Nous ne pouvant pas généraliser car les testes que nous avons fait n'englobent pas toutes les valeurs possibles,

6.3 Comparaison de la complexité théorique et expérimentale.

Dans le cas des données de l'échantillon la complexité théorique et expérimentale sont du même ordre de grandeur que la complexité théorique du pire et meilleur cas,
Donc Le modèle théorique est conforme aux mesures expérimentales.

Même si en générale la complexité expérimentale d'un échantillon quelconque est compris entre la complexité au pire cas et au meilleur cas.

Complexité Meilleur cas = complexité expérimentale = complexité Pire cas