Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene

Conception et Complexité des Algorithme

Rapport de Travaux Pratiques N°5
Algorithmes de complexité temporelle linéaire O(a^n) (a⟩1)

Binôme
MOHAMMEDI Haroune
HOUACINE Naila Aziza

Professeur
Pr. AMANI Ferhat

14 décembre 2017

1 Partie I : Tours de HANOÏ.

1 Développement de l'algorithme récursif qui résout le problème des "tours de Hanoï". On suppose qu'il y a n disques à transférer (n est un entier naturel, n≥1).

```
Algorithme Hanoi ;
VAR n, nb : entier ;
    //n = nombre de disques
    //nb = nombre de déplacement des disques

DEBUT
    //Partie 1: Lecture des donnees
ecrire("\nDonner le nombre de disques: n = ");          1
lire (n);                                               2

    //Partie 2: Traitement
nb=0;                                                   3
f_hanoi(n, 1, 3, 2);                                    4
//appel de la fonction f_hanoi(n, 1, 3, 2)

    //Partie 2: Sertie des resultats
ecrire ("le nombre des deplacements nb = ", nb);        5

FIN.
//fin de l'algorithme  Hanoi


//Definition de la fonction f_hanoi
void f_hanoi(int n, int A, int C, int B)
DEBUT
si (n >= 1)                                             6
    alors debut
        f_hanoi(n-1, A, B, C);                          7
        printf("\nDéplacer le disque restant de %d vers %d\n", A, B);
                                                         8
//La tour A devient vide
        nb=nb+1;                                        9
       f_hanoi(n-1, C, A, B);                           10
    fin;
FIN ;
//fin de la fonction f_hanoi(int n, int A, int C, int B)
```

2 Complexité :

2.1 Calcule des complexités temporelles en notation asymptotique de Landau O (Grand O) de cet algorithme.

Soit L le nombre d'instructions de l'algorithme Hanoi (ci-dessus), fi (i=1…L) la fréquence d'exécution de l'instruction Ii (i=1…L), et F la somme de ces fréquences.
On a : L = 10 instructions.

1- On a pour l'algorithme principal Hanoi :
f_1=1 ;
f_2=1 ;
f_3=1 ;
f_4=1 + H(n) ; 1 opération pour l'instruction d'appel de la fonction f_Hanoi(n, 1, 3, 2)

H(n) mesure la complexité temporelle de la fonction f_Hanoi(n, 1, 3, 2)
f_5=1 ;

Donc, F est :
F(n)= $\sum_{i=1}^{6} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$
→ F(n)=1+1+1+(1 + H(n))+1
→ F(n)= H(n) +5 (1)

2- Pour le calcul de H(n), on procède comme suit :
2.1- On calcule les fréquences des instructions de la fonction f_Hanoi(…) (instructions 6 à 10) :

f_6=1 ;
f_7=1 +H(n-1) ; 1 opération pour l'instruction d'appel de la fonction f_Hanoi(n, A, B, C)

H(n-1) mesure la complexité temporelle de la fonction f_Hanoi(n-1, A, B, C)

f_8=1 ;
f_9=2 ; 2 opérations : = et +
$f_1$0=1 + H(n-1) ; 1 opération pour l'instruction d'appel de la fonction f_Hanoi(n, C, A, B)

H(n-1) mesure la complexité temporelle de la fonction f_Hanoi(n-1, C, A, B)

2.2- On calcule la somme de ces fréquences :

H(n)=$\sum_{i=6}^{10} f_i = f_6 + f_7 + f_8 + f_9 + f_10$
→ H(n)=1+(1 +H(n-1))+1+2+(1 +H(n-1))
→ H(n)=2H(n-1)+6 (2)
Et H(0)=1 équation de récurrence
si n=0 alors la fonction f_Hanoi(…) exécute juste le test (n¿=1)

2.3- On résout l'équation de récurrence (2) avec la méthode de substitution comme suit :
H(n)=2H(n-1)+6
→ H(n)=2(2H(n-2)+6)+6

$\rightarrow$ H(n)=$2^2H(n-2)+2^1*6+6$
$\rightarrow$ H(n)=$2^2(2H(n-3)+6)+2^1*6+6$
$\rightarrow$ H(n)=$2^3H(n-3)+2^2*6+2^1*6+6$
$\rightarrow\ldots$
$\rightarrow$ H(n)=$2^nH(n-n)+2^(n-1)*6+\ldots+2^1*6+2^0*6$
$\rightarrow$ H(n)=$2^nH(0)+6(2^(n-1)+\ldots+2^1+2^0)$

$\rightarrow$ H(n)=$2^n*1+6((2^n-1)/(2-1))=2^n+6(2^n-1)=[7*2]^n-6$ (3)
La relation (3) représente la solution en notation exacte de l'équation de récurrence (2).

On montre aisément que :
H(n)= $7*2^n-6$
$\rightarrow$ H(n)$\leq 7*2^n-6+6=7*2^n$
$\rightarrow$ H(n)=O(2^n)
(4)
H(n) en notation asymptotique

On conclut alors que la fonction f_Hanoi(...) a une complexité temporelle exponentielle.

3- On calcule enfin la fonction F(n) en y remplaçant la solution H(n) dans la relation (1) :
F(n)= H(n) +5
$\rightarrow$ F(n)=$(7*2^n-6)+5=7*2^n-1$ (5)
F(n) en notation exacte

On montre aisément aussi que :
F(n)=$7*2^n-1$
$\rightarrow$ F(n)$\leq 7*2^n-6+1=7*2^n$
$\rightarrow$ F(n)=O(2^n) (6)
F(n) en notation asymptotique

On conclut là aussi que l'Algorithme du problème des « tours de Hanoi » a une complexité temporelle exponentielle.

En conséquence, la complexité temporelle CT de l'algorithme Hanoi est :

$$\begin{cases} CT(n)=F(n)=7*2^n-1 & ennotationexacte \\ CT(n)=F(n)=O(2^n) & ennotationasymptotique \end{cases}$$

2.2 Calculer la complexité spatiale en notation exacte et en notation asymptotique de Landau O (Grand O) de cet algorithme notée s(n).

1- On a pour l'algorithme principal Hanoi :
n et nb : deux (2) variables de type entier correspondant à 8 octets au totale
H(n) mesure la complexité spatiale de la fonction f_Hanoi(n, 1, 3, 2)

Donc, F est :
F(n)= H(n) + 2 (1)

2- Pour le calcul de H(n), on procède comme suit :
2.1- On calcule les fréquences des transfère de disque de la fonction f_Hanoi(...) :

Tel que on alloue 2*2 + 1 case pour n = 2 disques
donc 2^2+(2-1)
2.2- On calcule la somme de ces allocations :

Et H(0)=2 équation de récurrence
si n=0 alors la fonction f_Hanoi(...) exécute juste le test (n$\geq$1)

2.3- On résout l'équation de récurrence (2) avec la méthode de substitution comme suit :
H(n)=2(H(n-1))+n
$\rightarrow$ H(n)=2(2(H(n-2))+n)+n
$\rightarrow$ H(n)=$2^2 H(n-2) + 2^1 * n + n$
$\rightarrow$ H(n)=$2^2(2H(n-3) + n) + 2^1 * n + n$
$\rightarrow$ H(n)=$2^3 H(n-3) + 2^2 * n + 2^1 * n + n$
$\rightarrow$...
$\rightarrow$ H(n)=$2^n H(n-n) + 2^(n-1) * n + \ldots + 2^1 * n + 2^0 * n$
$\rightarrow$ H(n)=$2^n H(0) + n(2^(n-1) + \ldots + 2^1 + 2^0)$

$\rightarrow$ H(n)=$2^n * 1 + n((2^n - 1)/(2-1)) = 2^n + n(2^n - 1) = [7 * 2]^n - n$ (3)
La relation (3) représente la solution en notation exacte de l'équation de récurrence (2).

On montre aisément que :
H(n)= $7 * 2^n - n$
$\rightarrow$ n $\leq 7 * 2^n$
$\rightarrow$ H(n)=O(2^n)
(4)
H(n) en notation asymptotique

On conclut alors que la fonction f_Hanoi(...) a une complexité temporelle exponentielle.

3- On calcule enfin la fonction F(n) en y remplaçant la solution H(n) dans la relation (1) :
F(n)= H(n) + 2
$\rightarrow$ F(n)=$(7 * 2^n - n) + 2 = 7 * 2^n - n + 2$ (5)
F(n) en notation exacte

On obtiens ainsi :
$\rightarrow$ F(n)=O(2^n) (6)
F(n) en notation asymptotique

On conclut là aussi que l'Algorithme du problème des « tours de Hanoi » a une complexité spatiale exponentielle.

En conséquence, la complexité spatiale CS de l'algorithme Hanoi est :

$$\begin{cases} CS(n) = F(n) = 7 * 2^n - n + 2 & ennotationexacte \\ CS(n) = F(n) = O(2^n) & ennotationasymptotique \end{cases}$$

3 Développement de programme correspondant avec le langage C.

3.1 Programme principale

```c
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>

//Déclaration de la fonction hanoi
void hanoi(int, int, int, int);
int nb;
//nb est une variable globale

int main(void)
{
  int n;
  //n = nombre de disques
  //nb = nombre de déplacement des disques
  clock_t t1, t2;
  //clock_t désigne le type temps
  double delta;
  //delta mesure la durée d'exécution du programme entre les points t1 et t2

  //Partie 1: Lecture des données
  printf("\nDonner le nombre de disques: n = ");
  scanf("%d", &n);

  //Partie 2: Traitement
  nb=0;
  t1=clock();

  hanoi(n, 1, 3, 2);
  //appel de la fonction hanoi(n, 1, 3, 2)
  //On suppose : A=1, B=2 et C=3

  t2=clock();

  delta=(double)(t2-t1)/CLOCKS_PER_SEC;
  printf("\n\n nb=%d déplacements", nb);
  printf("\n\nEntrer une touche quelconque pour terminer le programme: ");
  getchar(); getchar();
```

```
  return(0);
}
//fin du programme
```

3.2 Fonction Hanoi

```
//Définition de la fonction hanoi
void hanoi(int n, int A, int C, int B)
{
  if (n >= 1)
    {
        hanoi(n-1, A, B, C);
        printf("\nDéplacer le disque restant de %d vers %d\n", A, B);
        //La tour A devient vide
        nb=nb+1;
        //Lors des mesures du temps, ces 2 instructions doivent etre
           ↪ bloquees (par exemple mises en commentaires)
        hanoi(n-1, C, A, B);
    }
}
//fin de la fonction hanoi
```

3.3 Résultat

```
Donner le nombre de disques: n = 2
Deplacer le disque restant de 1 vers 3
Deplacer le disque restant de 1 vers 2
Deplacer le disque restant de 2 vers 3

 nb=3 deplacements


Donner le nombre de disques: n = 3
Deplacer le disque restant de 1 vers 3
Deplacer le disque restant de 1 vers 2
Deplacer le disque restant de 3 vers 2
Deplacer le disque restant de 1 vers 3
Deplacer le disque restant de 2 vers 1
Deplacer le disque restant de 2 vers 3
Deplacer le disque restant de 1 vers 3

 nb=7 deplacements

 ...
```

4 Mesure des temps d'exécution.

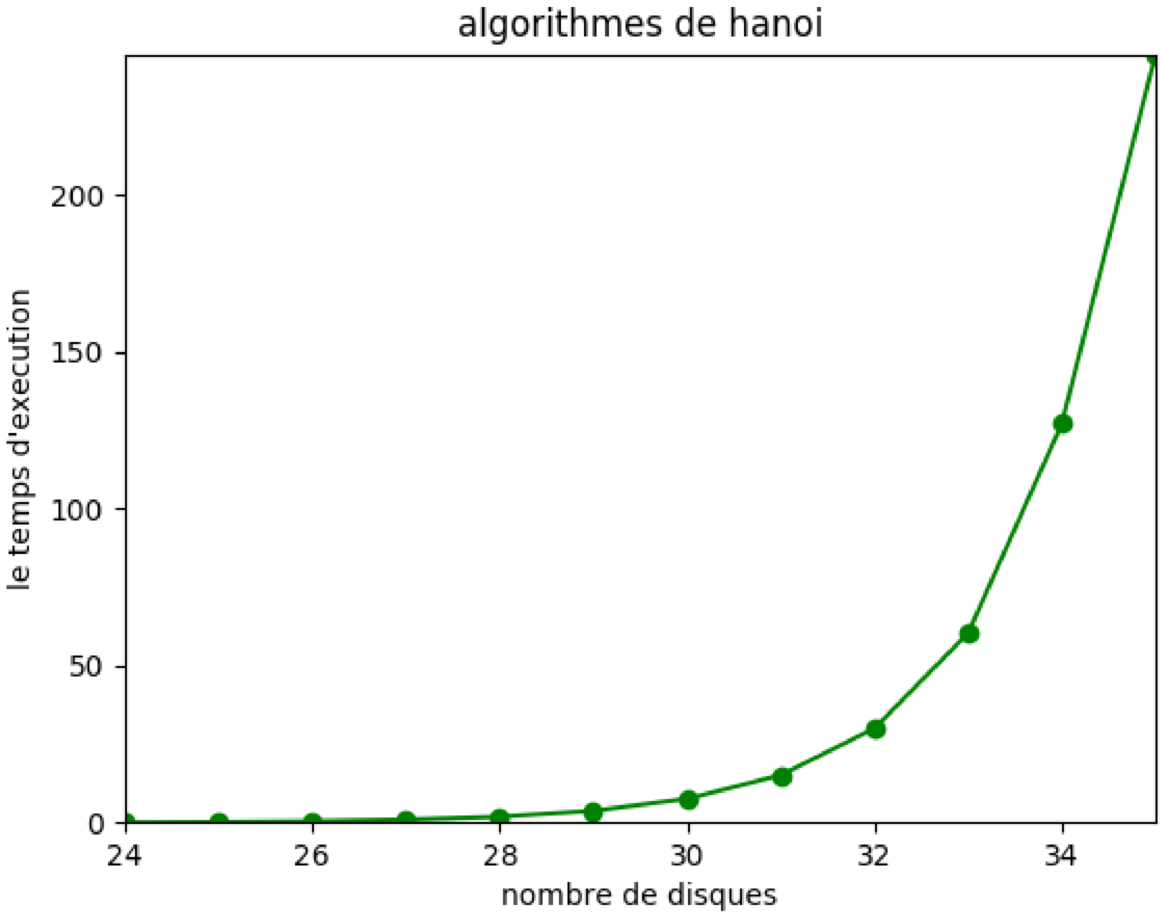
Grâce à l'exécution du programme C vu précédemment nous avons obtenu les temps d'exécution suivants.

4.1 Remplissage du tableau :

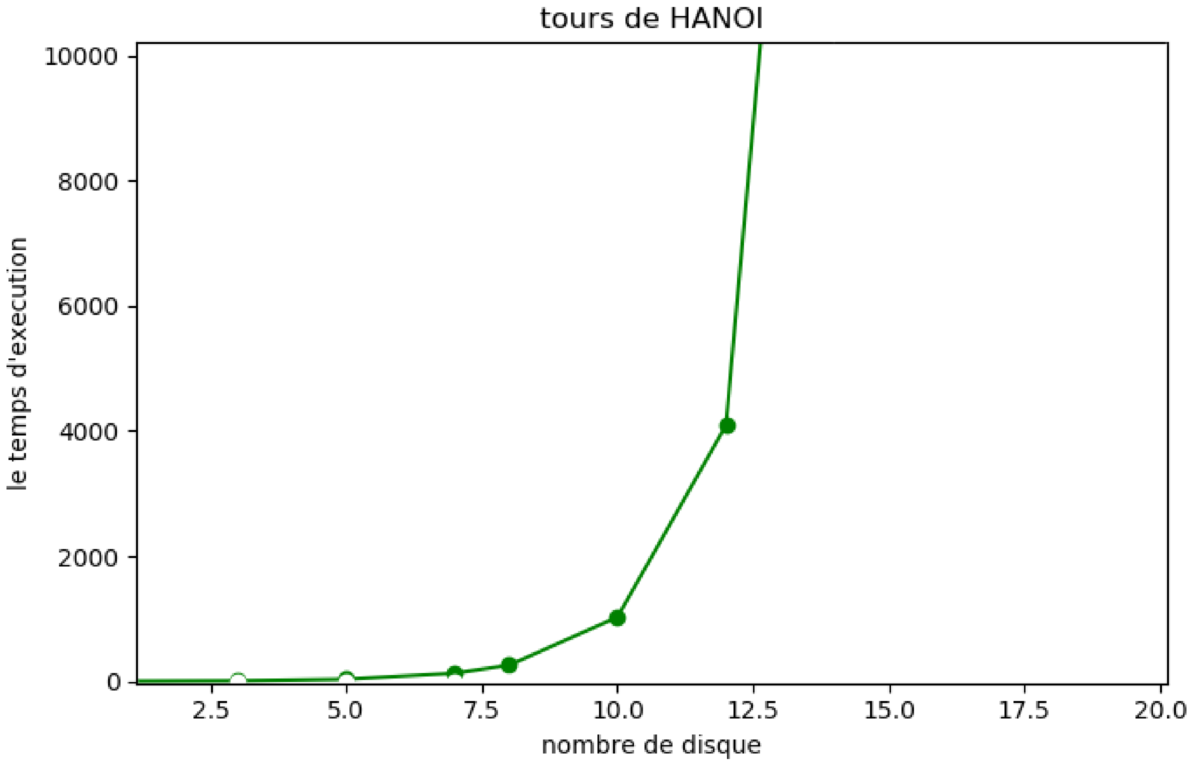
Nombre de disque (N) :	≤ 4	5	6	7	8	9	10
Temps d'exécution :	0.000001	0.000002	0.000002	0.000004	0.000006	0.000022	0.000022
Nombre de disque (N) :	11	12	13	14	15	16	17
Temps d'exécution :	0.000038	0.000089	0.000191	0.000371	0.000730	0.001448	0.002859
Nombre de disque (N) :	18	19	20	21	22	23	24
Temps d'exécution :	0.004113	0.003898	0.008290	0.016846	0.033388	0.075825	0.121189
Nombre de disque (N) :	25	26	27	28	29	30	31
Temps d'exécution :	0.241212	0.488855	0.981898	1.954524	4.279422	9.125135	17.255445
Nombre de disque (N) :	32	33	34	35	...	...	64
Temps d'exécution :	34.634779	64.643997	132.495650	263.460620			

5 Représentation par un graphe, Gf(n) les variations de la fonction de la complexité temporelle théorique fonction de n ; et par un (1) autre graphe, les variations du temps d'exécution T(n) en fonction de n.

5.1 Représentation des graphes de la variation du temps d'exécution :



5.2 Représentation du graphe Gf de la complexité théorique :



6 Interprétation des résultats.

6.1 Comparaison des mesures de temps d'exécution avec le pire et meilleur cas :

Vu que ici nous n'avons pas complexité au pire et meilleur cas , nous comparons alors la complexité exacte obtenu : il nous parait claire de part le graphe que les temps d'exécutions suivent la même évolution, en O(2^n).

6.2 Remarque et déduction d'une fonction T(n) reliant n au temps d'exécution.

On remarque que les temps d'exécution sont approximativement multipliés par 2 lorsque N est incrémenté de 1.

Exemples :
N1 = 6 $\Rightarrow$ T1 = 0.000002
N2 = 7 $\approx N1 + 1 \Rightarrow$ T2 = 0.000004 $\approx 2 * T1$

Aussi
N1 = 12 $\Rightarrow$ T1 = 0.000089
N2 = 13 $\approx N1 + 1 \Rightarrow$ T2 = 0.000191 $\approx 2 * T1$

On en déduit que le temps d'exécution est proportionnel à N, ce que l'on peut représenter par la formule suivante :

$$T(N+1) = 2^1 * T(N) \text{ pour tous } N \in [0-64]$$

(x étant la tangente d'un point sur le graphe).

Nous ne pouvant pas généraliser car les testes que nous avons fait n'englobent pas toutes les valeurs possibles,

6.3 Comparaison de la complexité théorique et expérimentale.

Dans le cas des données de l'échantillon la complexité théorique et expérimentale sont du même ordre de grandeur que la complexité théorique,
Donc Le modèle théorique est conforme aux mesures expérimentales.