Wärme- und Stoffübertragung I

Halbunendliche Körper

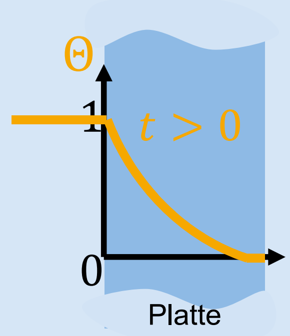
Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lernziele

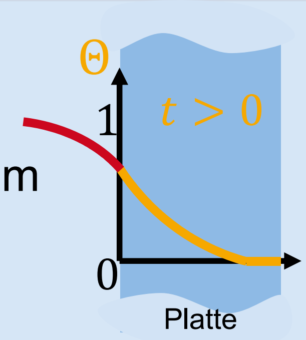
- Mit aufgeprägter Wandtemperatur

  - ➢ Verständnis der eingesetzten Randbedingungen von halbunendlichem Körper mit aufgeprägter Wandtemperatur
  - ➢ Lösung des Problems mittels tabellarischer Fehlerfunktion

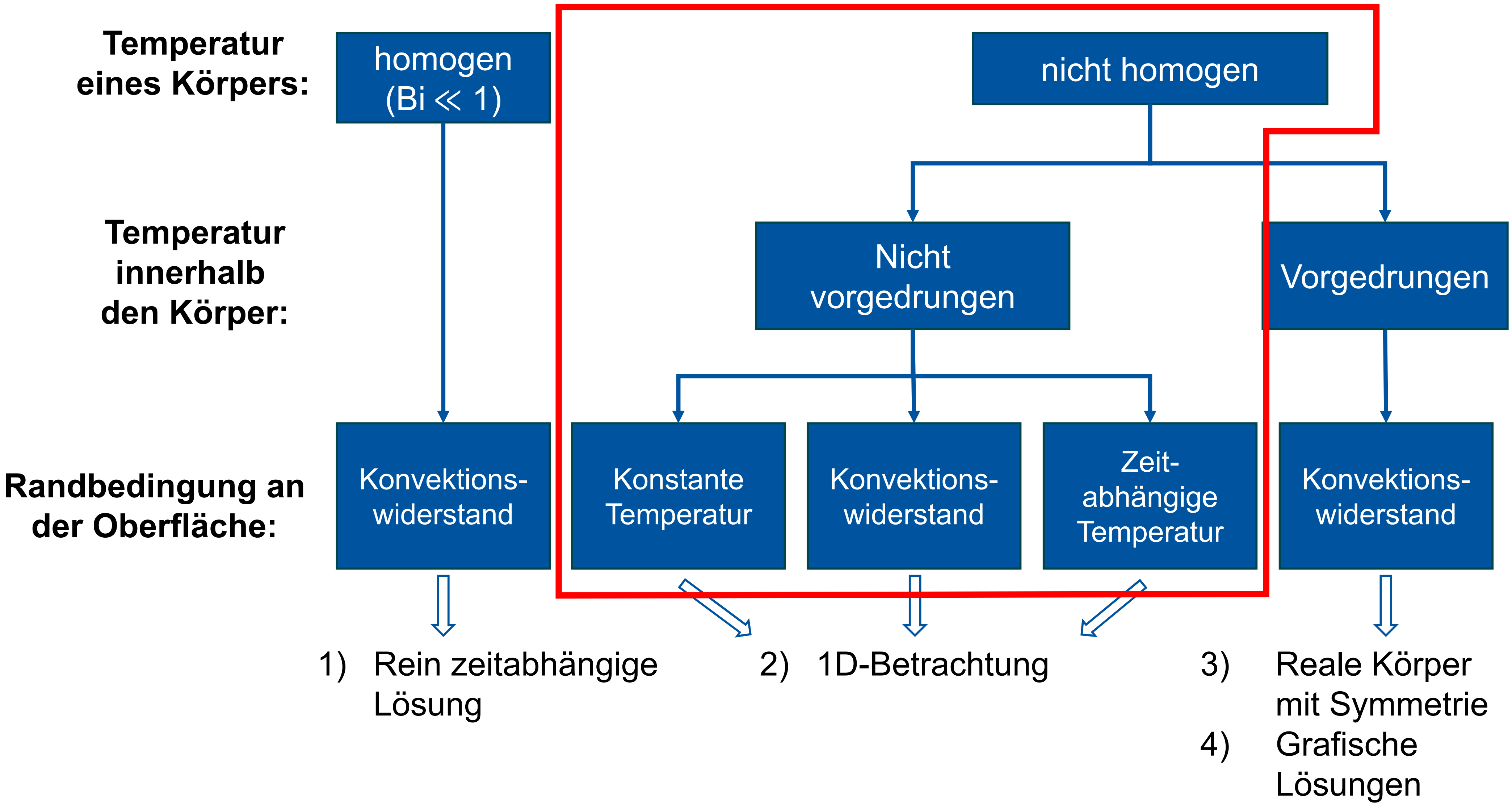


- Mit nichtvernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand

  - ➢ Verständnis der eingesetzten Randbedingungen von halbunendlichem Körper mit nichtvernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand

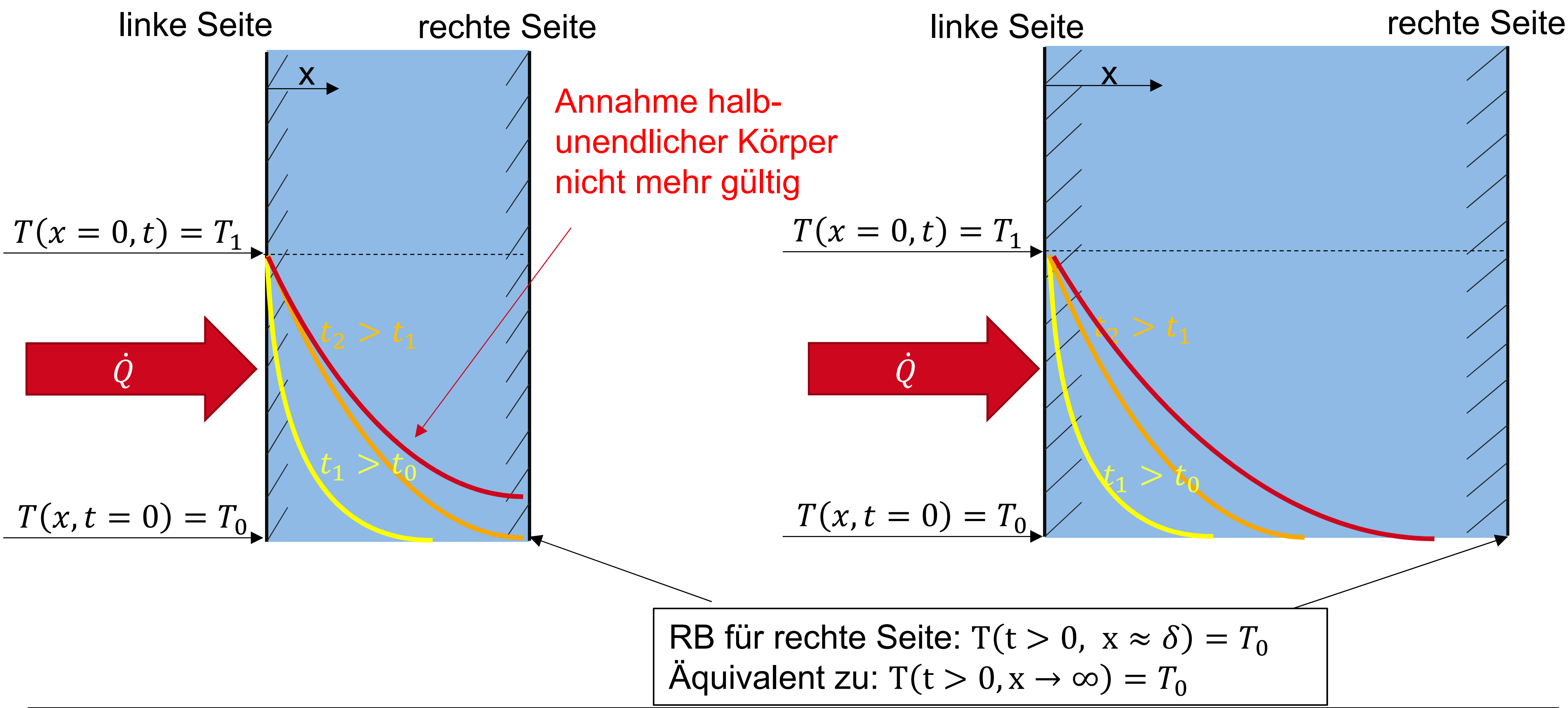


Wie lässt sich das Problem vereinfachen?



Definition: der halbunendliche Körper

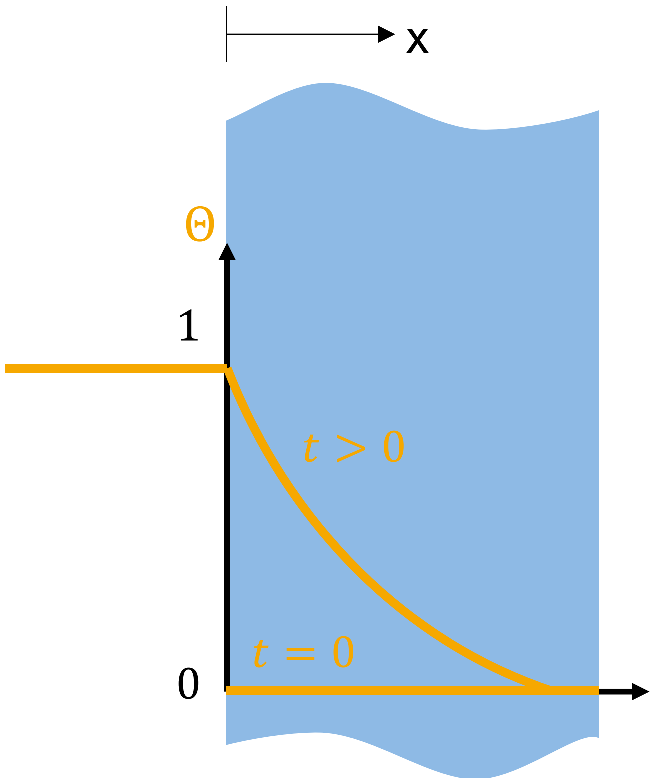
Temperaturverlauf in einem Körper ist abhängig von Ort und Zeit T = T(x,y,z,t).
Die Temperaturänderung auf der rechten Seite ist vernachlässigbar gering, sodass die Plattendicke kein Einflussparameter des Problems ist.



Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Differenzialgleichung sowie Anfangs- und Randbedingungen

DGL
1^{ter} Ordnung in der Zeit → 1 AB
2^{ter} Ordnung im Raum → 2 RB



Platte

Differenzialgleichung

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^2} \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

Dimensionslose Übertemperatur

$$\Theta^* = \frac{T - T_0}{T_U - T_0}$$

Anfangs- und Randbedingungen

Anfangsbedingung

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ 0 \leq x \leq \infty \end{matrix}\right\} T = T_0 \,|\Theta^* = 0$$

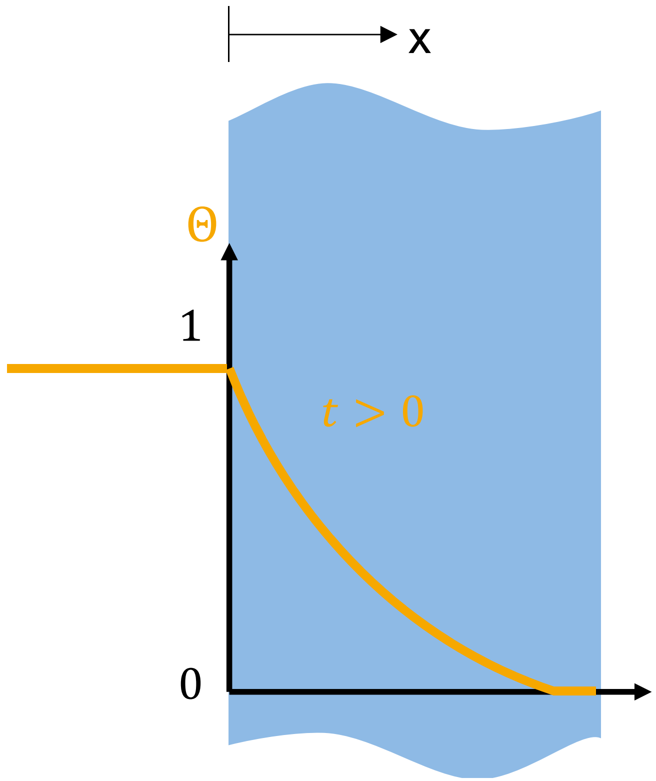
Randbedingungen

1 $$\left.\begin{matrix} t > 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} T = T_U \,|\Theta^* = 1$$

2 $$\left.\begin{matrix} t > 0 \\ x \rightarrow \infty \end{matrix}\right\} T = T_0 \,|\Theta^* = 0$$

halbunendlicher Körper

Verbinden von Zeit- und Raumkoordinate durch Substitution



Platte

Substitution

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^2} \qquad \text{Einführen von } \eta = \frac{x}{\sqrt{4at}}$$

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = \frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{\sqrt{4at^3}} \frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \eta^2} \cancelto{\frac{1}{4at}}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2} + \frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta} \cdot \cancel{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}$$

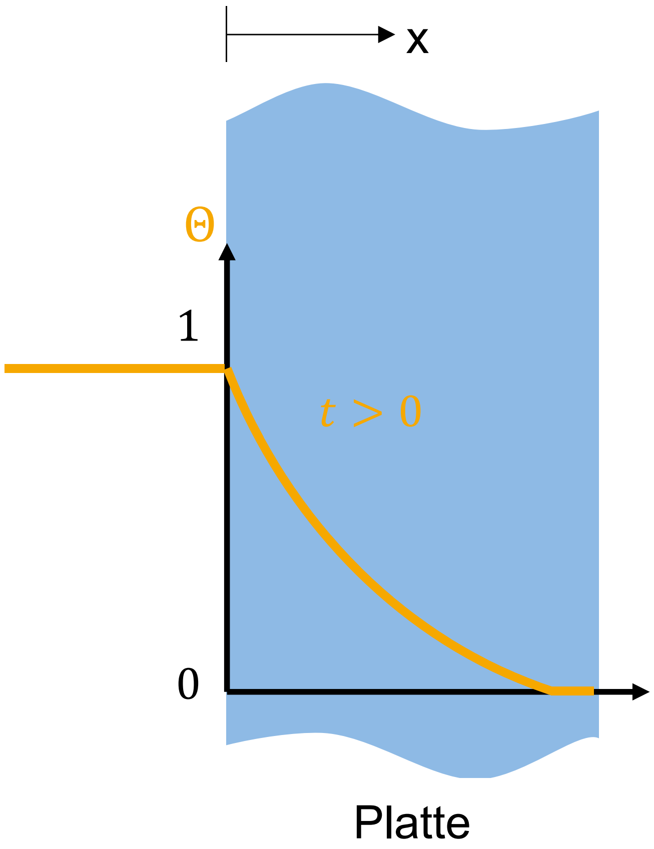
Herleitung am Ende des Videos

DGL in Abhängigkeit von $\eta(t, x)$

$$-\frac{x}{\sqrt{4at^3}} \frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta} = a \frac{1}{4at} \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta} = 0$$

Lösung der substituierten DGL



2. Substitution zur Lösung der DGL

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta} = \mathrm{Z} \qquad \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \eta^2}$$

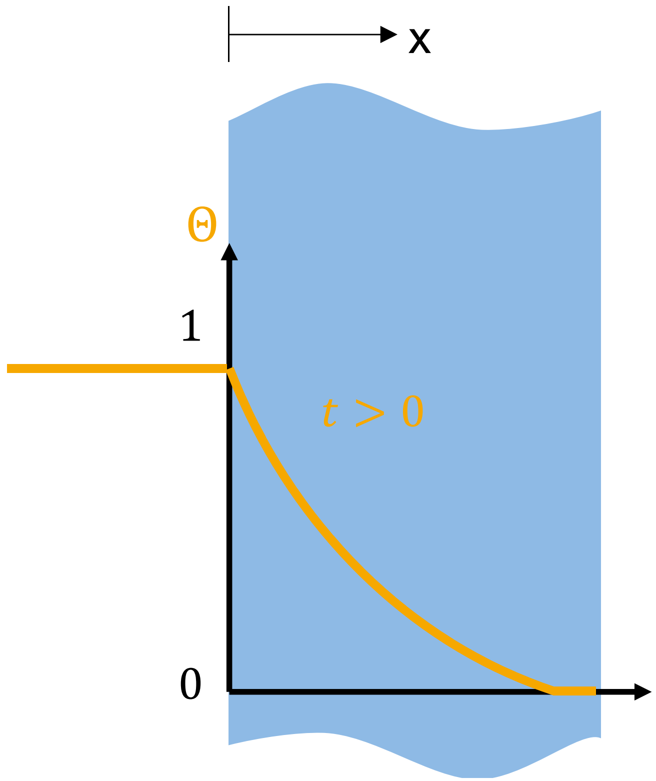
$$\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \eta} + 2\eta \mathrm{Z} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{Z}}{\mathrm{Z}} = -2\eta d\eta$$

DGL in Abhängigkeit von $\eta(t,x)$

$$\frac{d^2\Theta^*}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\Theta^*}{d\eta} = 0$$

Lösung der substituierten DGL



2. Substitution zur Lösung der DGL

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial \eta} = Z \qquad \frac{\partial Z}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} + 2\eta Z = 0$$

$$\frac{dZ}{Z} = -2\eta d\eta$$

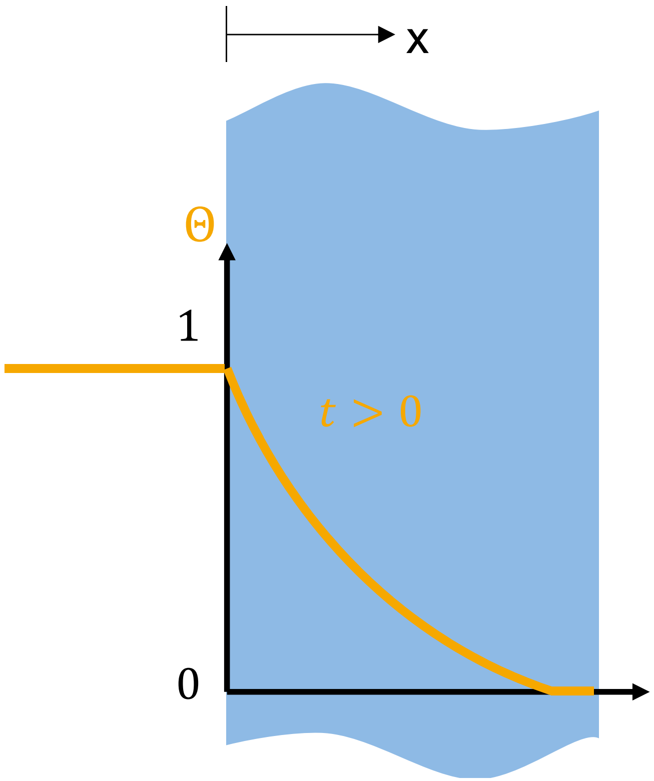
Integration

$$\ln Z = -\eta^2 + C_1$$

$$Z = \frac{d\Theta^*}{d\eta} = e^{-\eta^2 + C_1} = C_2 e^{-\eta^2}$$

$$\int_{\Theta^*_1}^{\Theta^*_2} d\Theta^* = C_2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{-\eta^2}\, d\eta$$

Lösung der substituierten DGL



Platte

Randbedingungen

Randbedingungen

① $\eta = 0 \quad |\Theta^* = 1$

② $\eta = \infty \quad |\Theta^* = 0$

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4at}}$$

$$\Theta^*_{\eta=\infty} - \Theta^*_{\eta=0} = -1 = C_2 \boxed{\int_0^\infty e^{-\eta^2}\, d\eta} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

WolframAlpha

Integration

$$\ln Z = -\eta^2 + C_1$$

$$Z = \frac{d\Theta^*}{d\eta} = e^{-\eta^2 + C_1} = C_2 e^{-\eta^2}$$

$$\int_{\Theta^*_1}^{\Theta^*_2} d\Theta^* = C_2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{-\eta^2}\, d\eta$$

WolframAlpha computational intelligence.

int_0^\infty e^(-x^2) dx

Extended Keyboard | Upload | Examples | Random

Definite integral: | More digits

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.886227$$

Indefinite integral:

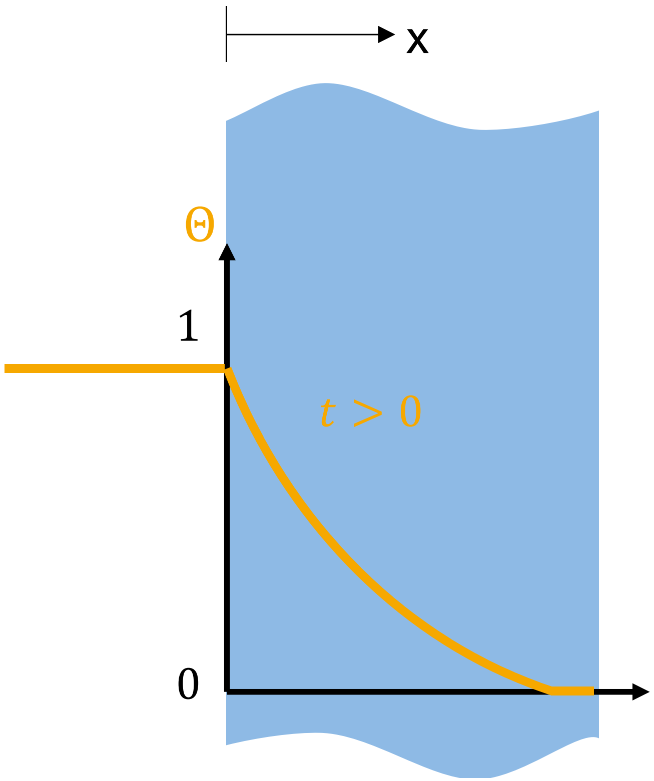
$$\int e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(x) + \text{constant}$$

$\mathrm{erf}(x)$ is the error function

Download Page

POWERED BY THE **WOLFRAM LANGUAGE**

Lösung der substituierten DGL



Randbedingungen

Randbedingen

① $\eta = 0 \qquad |\Theta^* = 1$

② $\eta = \infty \qquad |\Theta^* = 0$

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4at}}$$

$$\Theta^*_{\eta=\infty} - \Theta^*_{\eta=0} = -1 = \boxed{C_2 \int_0^\infty e^{-\eta^2}\, d\eta} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

WolframAlpha

Lösung

$$C_2 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Theta^*(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\xi^2}\, d\xi$$

Beschreibung der Fehlerfunktion

Formelsammlung Anhang B

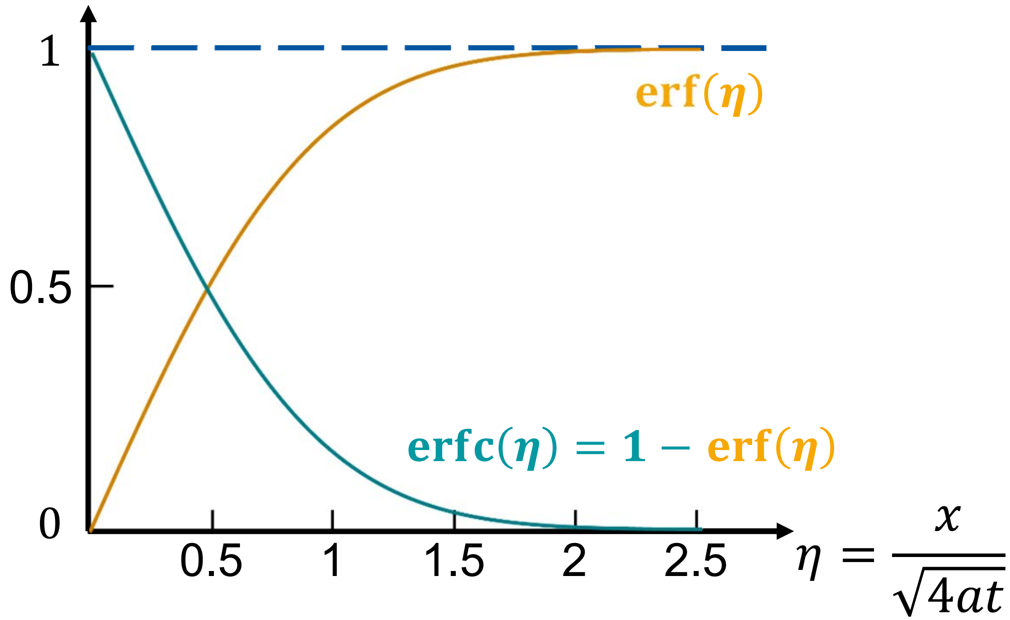
Tabelle 8: Auswertung der Fehlerfunktion

η	$\mathrm{erf}(\eta)$	$\mathrm{erfc}(\eta)$	$2/\sqrt{\pi}\exp(-\eta^2)$
0	0	1	1,128
0,05	0,056	0,944	1,126
0,1	0,112	0,888	1,117
0.15	0,168	0,832	1,103
0,2	0,223	0,777	1,084
0,25	0,276	0,724	1,060
0,3	0,329	0,671	1,031
0,35	0,379	0,621	0,998
0,4	0,428	0,572	0,962
0,45	0,475	0,525	0,922
0,5	0,520	0,480	0,879
0,55	0,563	0,437	0,834
0,6	0,604	0,396	0,787
0,65	0,642	0,378	0,740
0,7	0,678	0,322	0,691
0,75	0,711	0,289	0,643
0,8	0,742	0,258	0,595
0,85	0,771	0,229	0,548
0,9	0,797	0,203	0,502
0,95	0,821	0,179	0,458
1	0,843	0,157	0,415
1,1	0,880	0,120	0,337
1,2	0,910	0,090	0,267
1,3	0,934	0,066	0,208
1,4	0,952	0,048	0,159
1,5	0,966	0,034	0,119
1,6	0,976	0,024	0,087
1,7	0,984	0,016	0,063
1,8	0,989	0,011	0,044
1,9	0,993	0,007	0,030
2	0,995	0,005	0,021

Fehlerfunktion $\mathrm{erf}(\eta)$

$$\Theta^*(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

oder: $$\Theta^*(\eta) = 1 - \mathrm{erf}(\eta)$$



Beispiel: Vergleich der thermische Eindringtiefe unterschiedlicher Werkstoffe

An welcher Stelle x wird $\Theta^*(\eta) = 0{,}01$ nach t = 10s erreicht?

$$\Theta^*(\eta) = 0{,}01 = 1 - \mathrm{erf}(\eta) \quad \rightarrow \ \mathrm{erf}(\eta) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

$$\boxed{\rightarrow \eta = 1{,}8}$$

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4at}} \qquad \boxed{\rightarrow \ x = 2 \cdot \eta \cdot \sqrt{at}}$$

A) Kupfer mit $\mathrm{a} = 117 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

$$x = 2 \cdot 1{,}8 \cdot \sqrt{117 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s} \cdot 10s}$$

$$x_K = 0{,}123\, m$$

B) Papier mit $\mathrm{a} = 0{,}14 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

$$x = 2 \cdot 1{,}8 \cdot \sqrt{0{,}14 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s} \cdot 10s}$$

$$x_P = 0{,}0043\, m$$

Vgl. beider Eindringtiefen

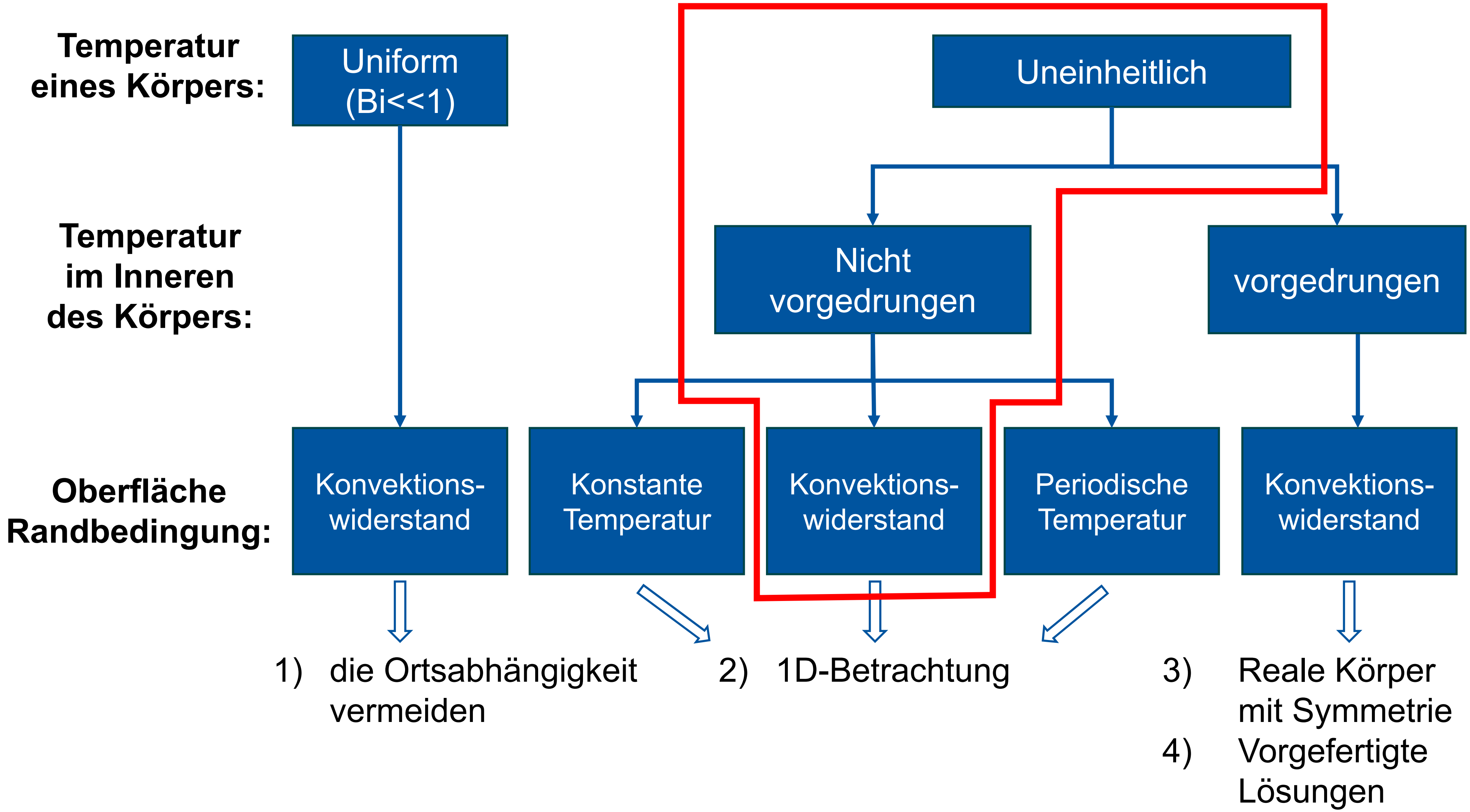
$$29 \cdot x_P \approx x_K$$

Tabelle 8: Auswertung der Fehlerfunktion

η	$\mathrm{erf}(\eta)$	$\mathrm{erfc}(\eta)$	$2/\sqrt{\pi}\exp(-\eta^2)$
0	0	1	1,128
0,05	0,056	0,944	1,126
0,1	0,112	0,888	1,117
0.15	0,168	0,832	1,103
0,2	0,223	0,777	1,084
0,25	0,276	0,724	1,060
0,3	0,329	0,671	1,031
0,35	0,379	0,621	0,998
0,4	0,428	0,572	0,962
0,45	0,475	0,525	0,922
0,5	0,520	0,480	0,879
0,55	0,563	0,437	0,834
0,6	0,604	0,396	0,787
0,65	0,642	0,378	0,740
0,7	0,678	0,322	0,691
0,75	0,711	0,289	0,643
0,8	0,742	0,258	0,595
0,85	0,771	0,229	0,548
0,9	0,797	0,203	0,502
0,95	0,821	0,179	0,458
1	0,843	0,157	0,415
1,1	0,880	0,120	0,337
1,2	0,910	0,090	0,267
1,3	0,934	0,066	0,208
1,4	0,952	0,048	0,159
1,5	0,966	0,034	0,119
1,6	0,976	0,024	0,087
1,7	0,984	0,016	0,063
1,8	0,989	0,011	0,044
1,9	0,993	0,007	0,030
2	0,995	0,005	0,021

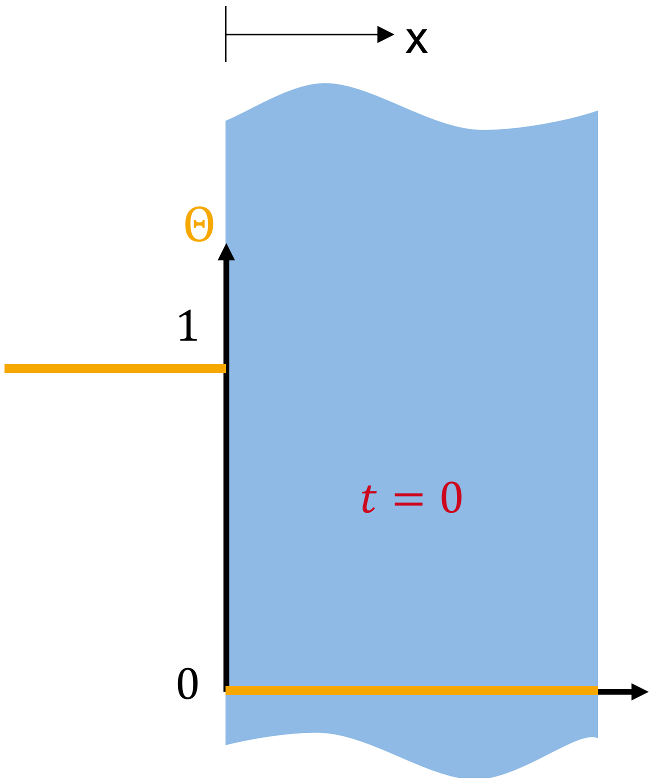
Die Temperaturleitfähigkeit a bestimmt die Geschwindigkeit, mit der sich eine Temperaturinformation in einem Körper ausbreitet!

Wie lässt sich das Problem vereinfachen?



Mit nicht vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand

Äußerer Wärmeübergangs-widerstand ist **nicht** vernachlässigbar



Platte

Differenzialgleichung

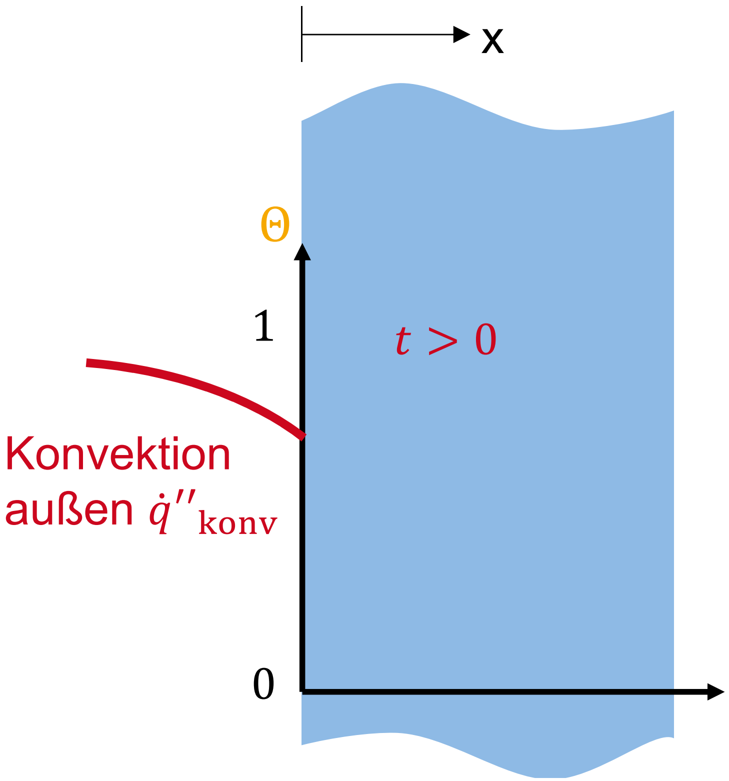
$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^2} \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

Dimensionsloser Übertemperatur

$$\Theta^* = \frac{T - T_0}{T_U - T_0}$$

Mit nicht-vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand

Äußerer Wärmeübergangs-widerstand ist **nicht** vernachlässigbar



Differenzialgleichung

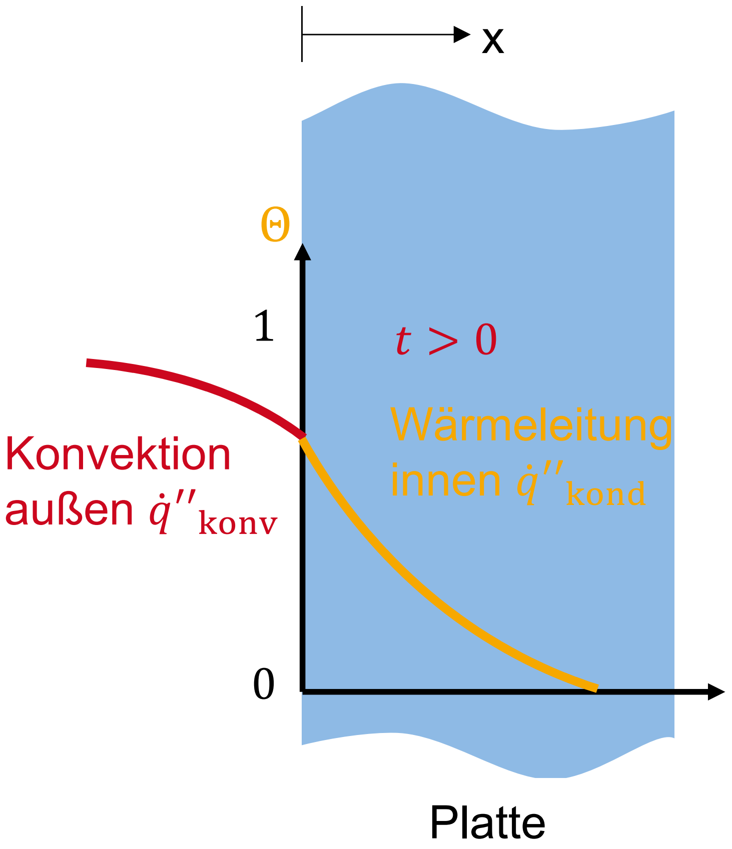
$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^2} \qquad \mathrm{mit} \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

Dimensionsloser Übertemperatur

$$\Theta^* = \frac{T - T_0}{T_U - T_0}$$

Mit nicht-vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand

Äußerer Wärmeübergangs-widerstand ist **nicht** vernachlässigbar



Differenzialgleichung

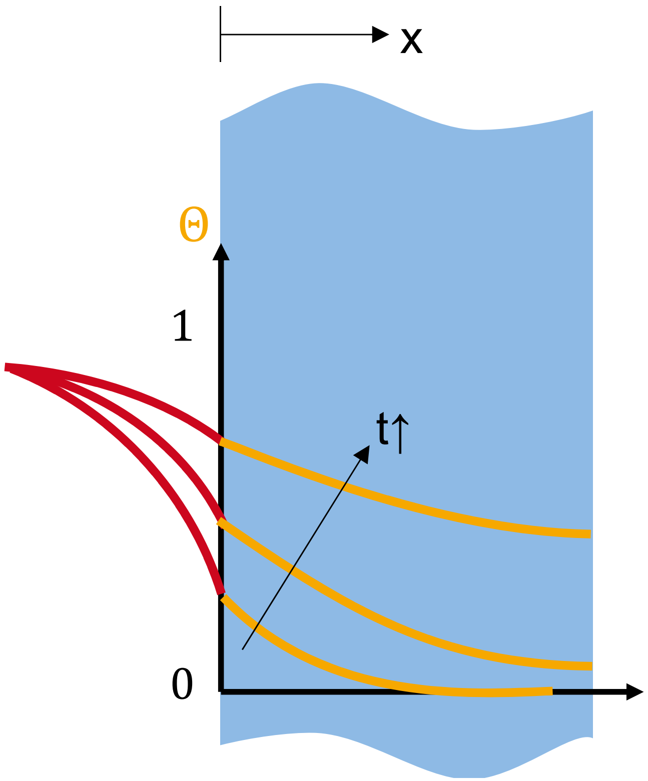
$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^2} \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

Dimensionsloser Übertemperatur

$$\Theta^* = \frac{T - T_0}{T_U - T_0}$$

Mit nicht-vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand

Wärmeübergangswiderstand ist nicht vernachlässigbar



Randbedingungen

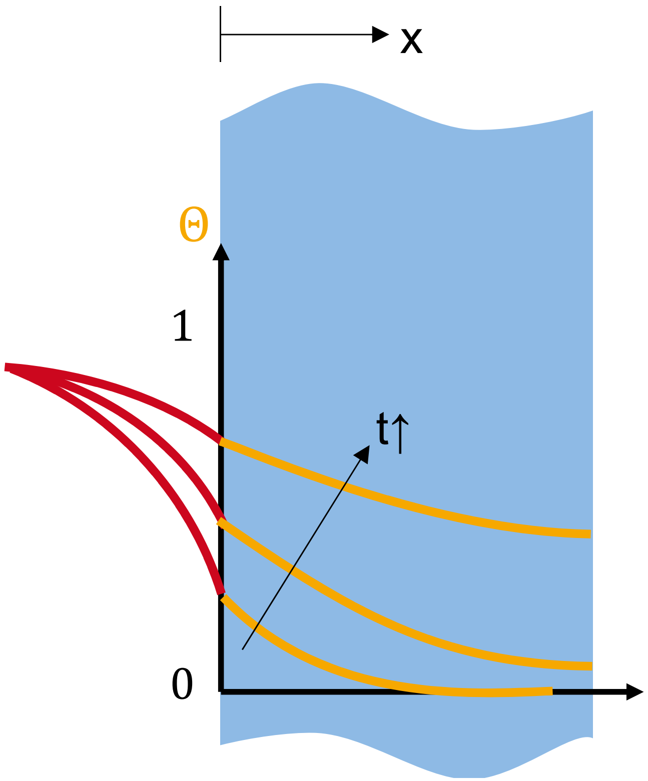
Randbedingungen

1 $\left.\begin{array}{l} t > 0 \\ x = 0 \end{array}\right\}$

$$\underbrace{\alpha(T_U - T_{x=0})}_{\dot{q}''_{\mathrm{konv}}} = \underbrace{-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}}_{\dot{q}''_{\mathrm{kond}}} \rightarrow \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda}(T_{x=0} - T_U)$$

Mit nicht-vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand

Wärmeübergangswiderstand ist nicht vernachlässigbar



Platte

Randbedingungen

Randbedingungen

① $\left.\begin{matrix} t > 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \mid \left.\frac{\partial \Theta^*}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{\alpha}{\lambda}$

$$\underbrace{\alpha(T_U - T_{x=0})}_{\dot{q}''_{\mathrm{konv}}} = \underbrace{-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}}_{\dot{q}''_{\mathrm{kond}}} \rightarrow \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda}(T_{x=0} - T_U)$$

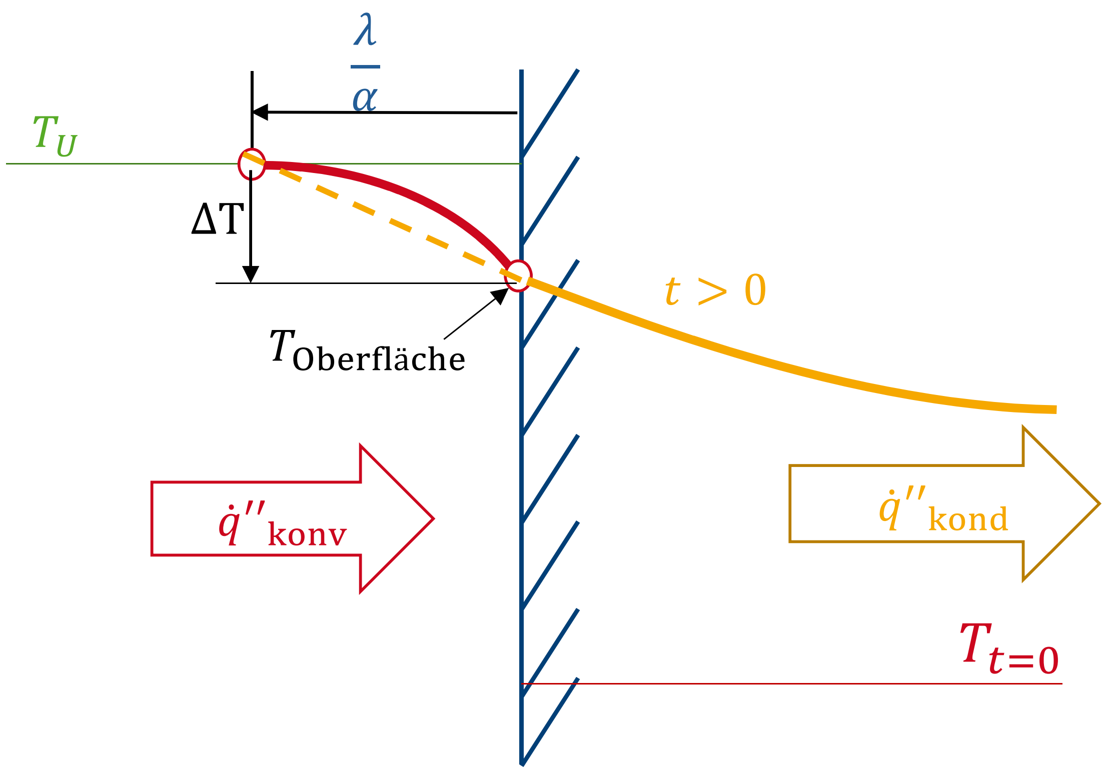
② $\left.\begin{matrix} t > 0 \\ x \rightarrow \infty \end{matrix}\right\} T = T_0 \mid \Theta^* = 0$

Anfangsbedingung

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ 0 \leq x \leq \infty \end{matrix}\right\} T = T_0 \mid \Theta^* = 0$$

Grafischer Lösungsansatz

Bestimmung des Temperaturgradienten an der Wand für RB $\dot{q}''_{\text{konv}}$



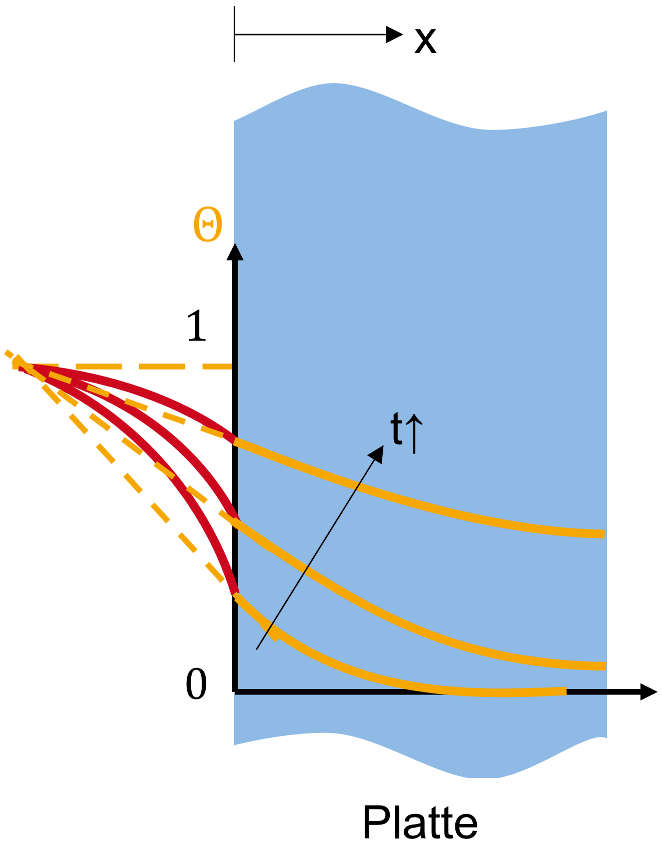
$$\underbrace{\alpha(T_U - T_{x=0})}_{\dot{q}''_{\text{konv}}} = \underbrace{-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}}_{\dot{q}''_{\text{kond}}}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \underbrace{\boxed{\frac{\alpha}{\lambda}}}_{[1/\text{m}]} (T_{x=0} - T_U)$$

$\frac{\lambda}{\alpha}$ ist der räumliche Abstand zwischen T_U und $T_{\text{Oberfläche}}$

Mit nicht-vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand

Wärmeübergangswiderstand
ist nicht vernachlässigbar



Randbedingungen

Randbedingungen

① $\left.\begin{matrix} t > 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \mid \left.\frac{\partial \Theta^*}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{\alpha}{\lambda}$

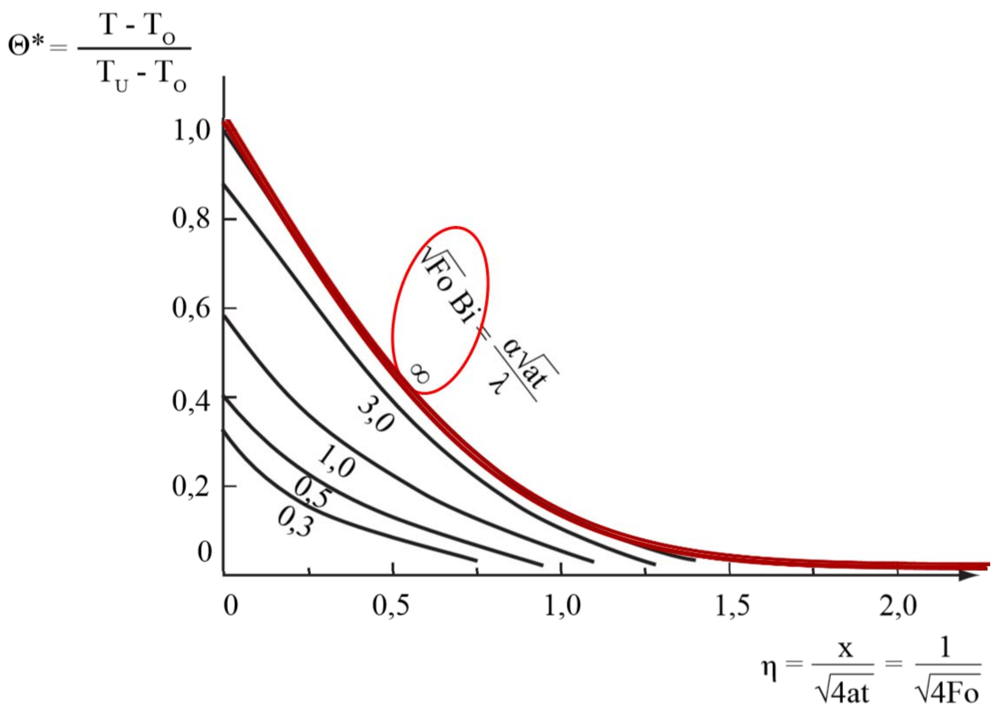
$$\underbrace{\alpha(T_U - T_{x=0})}_{\dot{q}''_{\mathrm{konv}}} = \underbrace{-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}}_{\dot{q}''_{\mathrm{kond}}} \rightarrow \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda}(T_{x=0} - T_U)$$

② $\left.\begin{matrix} t > 0 \\ x \rightarrow \infty \end{matrix}\right\} T = T_0 \mid \Theta^* = 0$

Anfangsbedingung

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ 0 \leq x \leq \infty \end{matrix}\right\} T = T_0 \mid \Theta^* = 0$$

Mit nicht-vernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand



Rückblick $\alpha = \infty$

$$\Theta^*(\eta) = 1 - \mathrm{erf}(\eta) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right)$$

$$\Theta^*(\eta) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{4Fo}}\right)$$

Ergebnis $\alpha \neq \infty$

$$\Theta^*(\eta) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{4Fo}}\right)$$

$$-e^{Bi + FoBi^2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{4Fo}} + \sqrt{Fo} \cdot Bi\right)\right]$$

mit

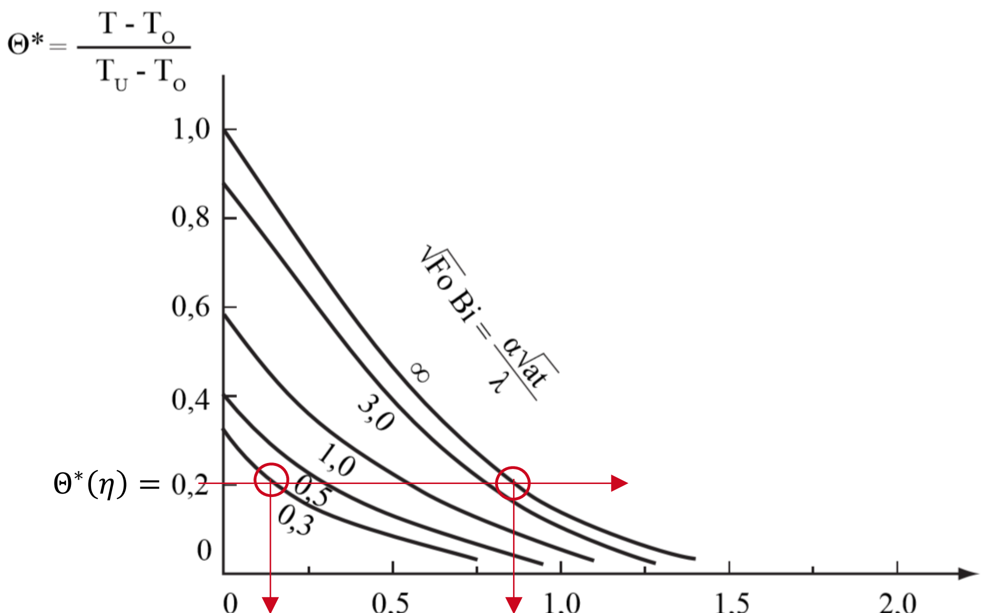
$$Fo = \frac{at}{L^2} \qquad Bi = \frac{\alpha x}{\lambda}$$

Beispiel: Thermische Eindringtiefe mit konvektivem Widerstand

An welcher Stelle x wird $\Theta^*(\eta) = 0{,}2$ bei t = 10 s für Kupfer erreicht?

$a_K = 117 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$; $\lambda_K = 401\,\frac{W}{m \cdot K}$

$$\sqrt{Fo} \cdot Bi = \frac{\alpha \sqrt{a \cdot t}}{\lambda} = \frac{\alpha \sqrt{117 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s} \cdot 10s}}{401\,\frac{W}{m \cdot K}} = \alpha \cdot 8{,}53 \cdot 10^{-5}\,\frac{m^2 \cdot K}{W}$$



$\eta \approx 0{,}18$

$\eta \approx 0{,}85$

Betrachtung unterschiedlicher Fälle

A) $\alpha \rightarrow \infty$: aufgeprägte Wandtemperatur

$$\sqrt{Fo} \cdot Bi = \frac{\alpha \sqrt{a \cdot t}}{\lambda} = \infty \rightarrow \eta \approx 0{,}85$$

$$x = \eta \sqrt{4at} = 0{,}85 \sqrt{4 \cdot 117 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s} \cdot 10s} = \mathbf{0{,}058m}$$

B) Thermischer Widerstand ($\sqrt{Fo} \cdot Bi = 0{,}3$)

$$\sqrt{Fo} \cdot Bi = \frac{\alpha \sqrt{a \cdot t}}{\lambda} = 0{,}3 \rightarrow \alpha \approx 3.517\,\frac{W}{mK}$$

$$\rightarrow \eta \approx 0{,}2$$

$$x = \eta \sqrt{4at} = 0{,}2 \sqrt{4 \cdot 117 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s} \cdot 10s} = \mathbf{0{,}0136m}$$

Vergleich – Lösung mit Fehlerfunktion und mit Diagramm

An welcher Stelle x wird $\Theta^*(\eta) = 0{,}2$ bei t = 10s für Kupfer erreicht?

$$\Theta^*(\eta) = 0{,}2 = 1 - \mathrm{erf}(\eta) \quad \rightarrow \ \mathrm{erf}(\eta) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

$$\boxed{\rightarrow \eta = 0{,}9}$$

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4at}} \qquad \boxed{\rightarrow \quad x = 2 \cdot \eta \cdot \sqrt{at}}$$

Mit tabellierter Fehlerfunktion

$$x = 2 \cdot 0{,}9 \cdot \sqrt{117 \cdot 10^{-6}\frac{m^2}{s} \cdot 10s}$$

$$\mathbf{x_{K,e} = 0{,}0615m}$$

Aus Diagramm

$$x = 0{,}85\sqrt{4 \cdot 117 \cdot 10^{-6}\frac{m^2}{s} \cdot 10s}$$

$$\boldsymbol{x_{K,d} = 0{,}058m}$$

Differenz erfolgt aufgrund von Ableseungenauigkeiten, da die Gleichungen für einen vernachlässigbaren thermischen Widerstand identisch sind.

Tabelle 8: Auswertung der Fehlerfunktion

η	$\mathrm{erf}(\eta)$	$\mathrm{erfc}(\eta)$	$2/\sqrt{\pi}\,\exp(-\eta^2)$
0	0	1	1,128
0,05	0,056	0,944	1,126
0,1	0,112	0,888	1,117
0.15	0,168	0,832	1,103
0,2	0,223	0,777	1,084
0,25	0,276	0,724	1,060
0,3	0,329	0,671	1,031
0,35	0,379	0,621	0,998
0,4	0,428	0,572	0,962
0,45	0,475	0,525	0,922
0,5	0,520	0,480	0,879
0,55	0,563	0,437	0,834
0,6	0,604	0,396	0,787
0,65	0,642	0,378	0,740
0,7	0,678	0,322	0,691
0,75	0,711	0,289	0,643
0,8	0,742	0,258	0,595
0,85	0,771	0,229	0,548
0,9	0,797	0,203	0,502
0,95	0,821	0,179	0,458
1	0,843	0,157	0,415
1,1	0,880	0,120	0,337
1,2	0,910	0,090	0,267
1,3	0,934	0,066	0,208
1,4	0,952	0,048	0,159
1,5	0,966	0,034	0,119
1,6	0,976	0,024	0,087
1,7	0,984	0,016	0,063
1,8	0,989	0,011	0,044
1,9	0,993	0,007	0,030
2	0,995	0,005	0,021

Verständnisfragen

Was ist unter einem halbunendlichen Körper zu verstehen und wie ist dieser definiert?

Welche zwei dimensionslosen Kennzahlen beschreiben den instationären Temperaturverlauf innerhalb eines (halbunendlichen) Körpers mit relevantem konvektivem Widerstand?

Was ist unter der thermischen Eindringtiefe zu verstehen?

Mathematische Erklärung

Ableitung

$$\frac{\partial^2\Theta^*}{\partial x^2} = \frac{d^2\Theta^*}{d\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{d\Theta^*}{d\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\Theta^*}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Theta^*}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial\Theta^*}{\partial\eta}}_{u}\cdot\underbrace{\frac{\partial\eta}{\partial x}}_{v}\right) \xrightarrow{\text{Kettenregel}} u'v + v'u$$

$$= \underbrace{\frac{\partial\eta}{\partial x}}_{v}\cdot\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\Theta^*}{\partial\eta}\right)}_{u'}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right] + \underbrace{\frac{\partial\Theta^*}{\partial\eta}}_{u}\cdot\underbrace{\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}}_{v'}$$

$$= \frac{d^2\Theta^*}{d\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{d\Theta^*}{d\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$