Wärme- und Stoffübertragung I

Anwendung der Ähnlichkeitstheorie

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

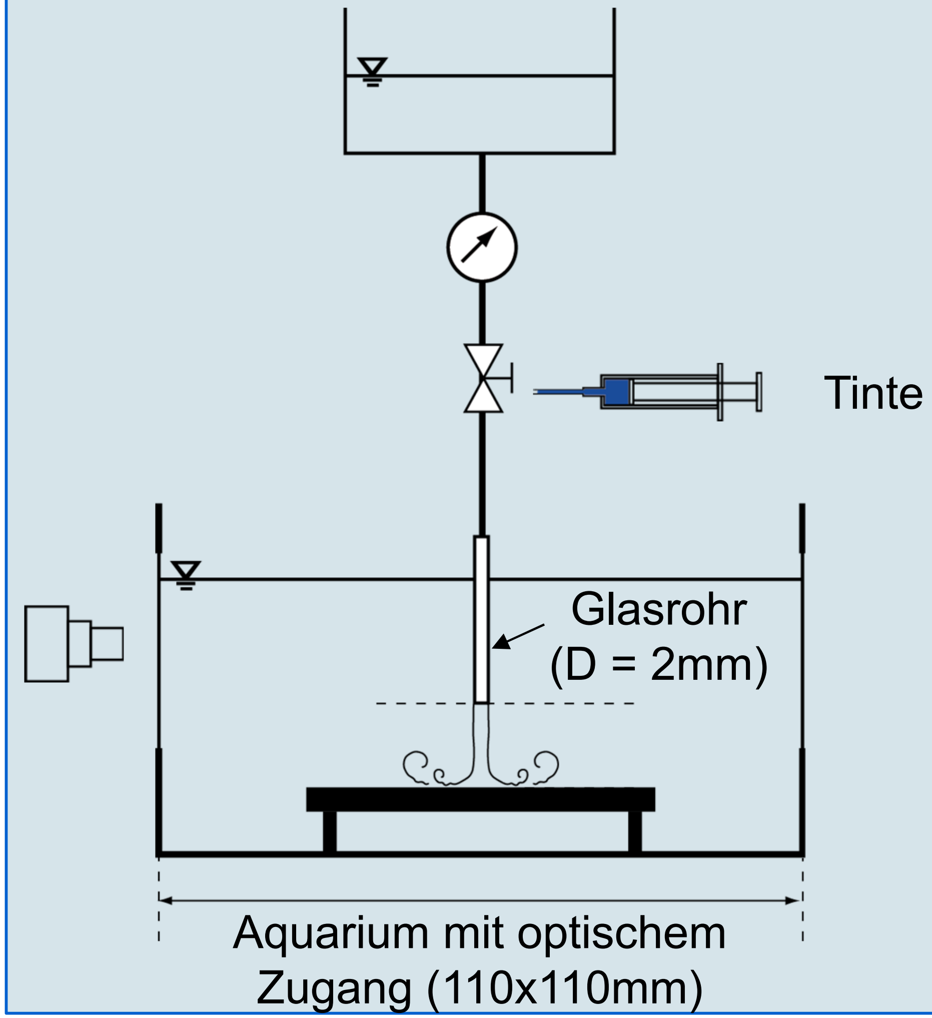
Lernziele

- Ähnlichkeitstheorie in der Wärme- und Stoffübertragung
  - Grundverständnis von der Ähnlichkeitstheorie.
  - Verständnisse der physikalischen Bedeutungen relevanter dimensionsloser Kennzahlen, die ein Konvektionsproblem beschreiben können.
  - Fähigkeit unterschiedliche konvektive Wärmeübergangsprobleme im Hinblick auf die Strömungs- und Randbedingungen zu unterscheiden.

$$Nu = Nu(Re, Gr, Pr)$$

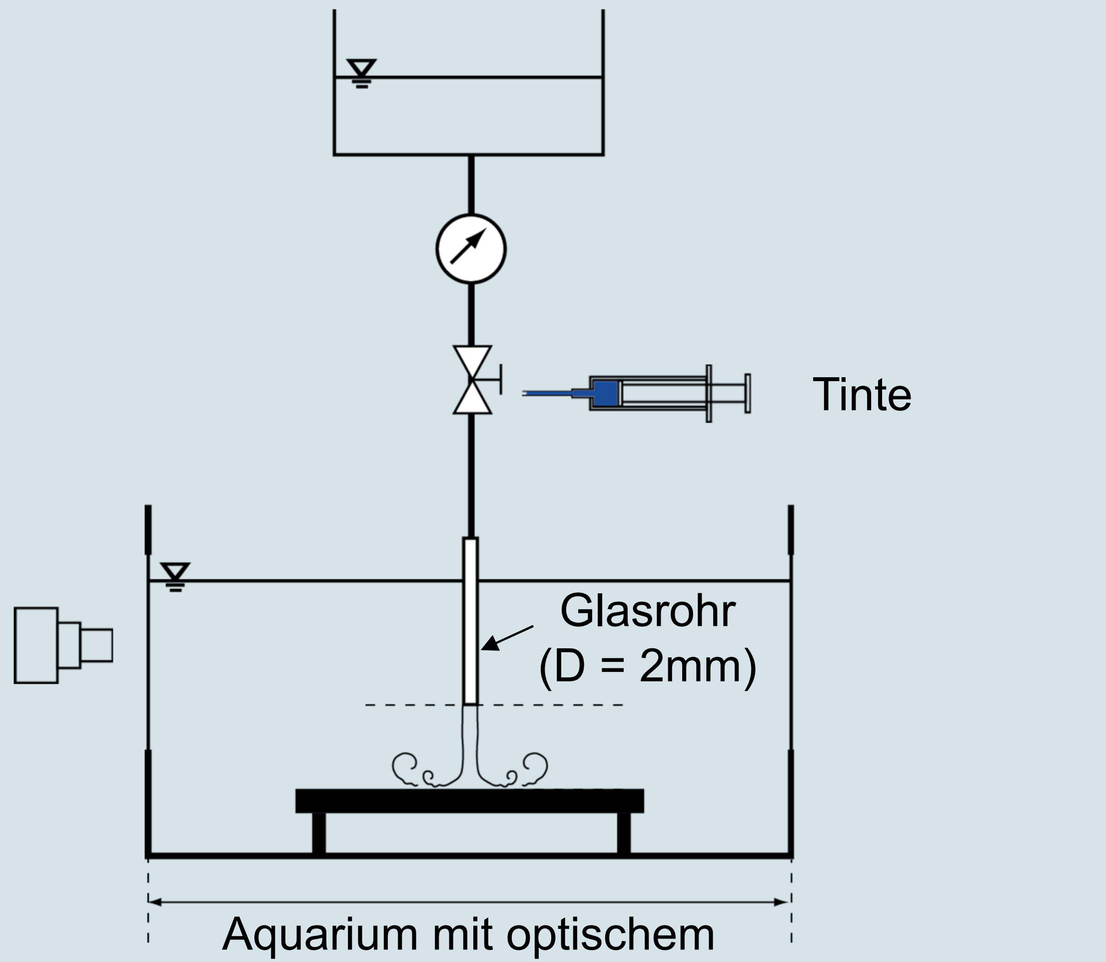
Ähnlichkeitstheorie

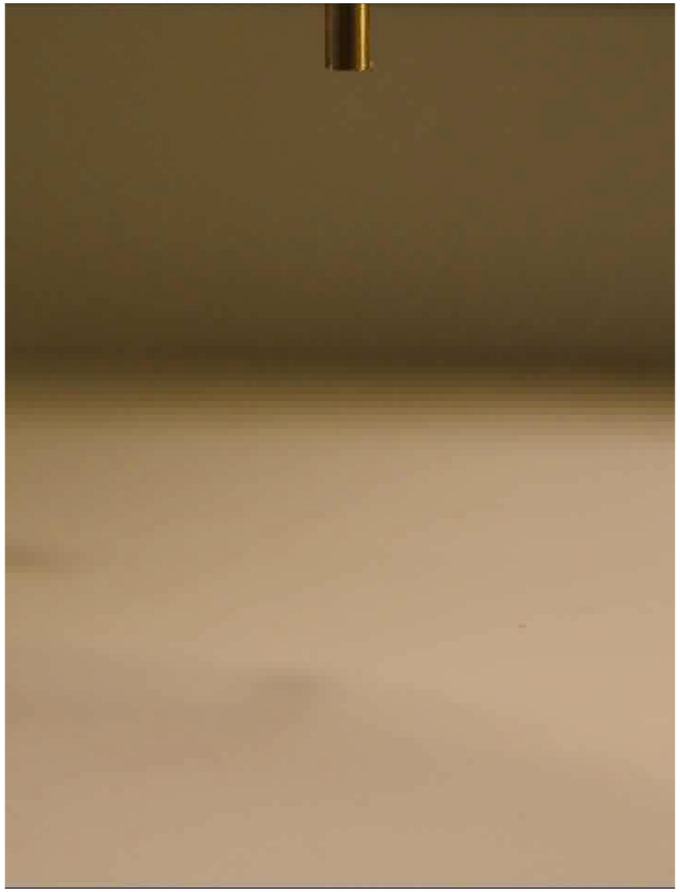
Prallstrahl: Experiment



Ähnlichkeitstheorie

Prallstrahl: Experiment





Ähnlichkeitstheorie

Welche Größen sind entscheiden?

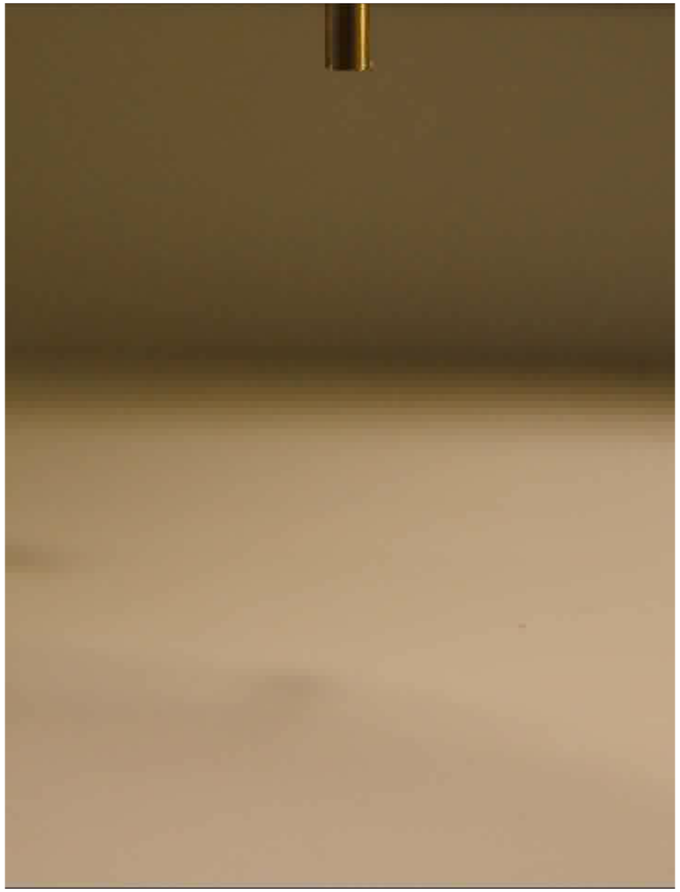
Stoffeigenschaften:
- Viskosität
- Dichte

Strömungsbedingungen:
- Geschwindigkeit

Geometrie:
- Düsendurchmesser
- Abstand Prallplatte

Sind Experimente mit Öl und Wasser vergleichbar?

Entscheidend ist, dass alle Kräfteverhältnisse identisch sind



Welche Kräfte spielen eine Rolle: Betrachtung der Erhaltungsgleichungen

Kontinuitäts-gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impuls-gleichung

Impulsströme	Druck	Scherspannungen

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Welche Kräfte spielen eine Rolle: Betrachtung der Erhaltungsgleichungen

Kontinuitäts-gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L},\ y^* = \frac{y}{L},\ u^* = \frac{u}{u_\infty},\ v^* = \frac{v}{u_\infty},\ p^* = \frac{p}{\rho u_\infty{}^2}$$

Impuls-gleichung

Impulsströme | Druck | Scherspannungen

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

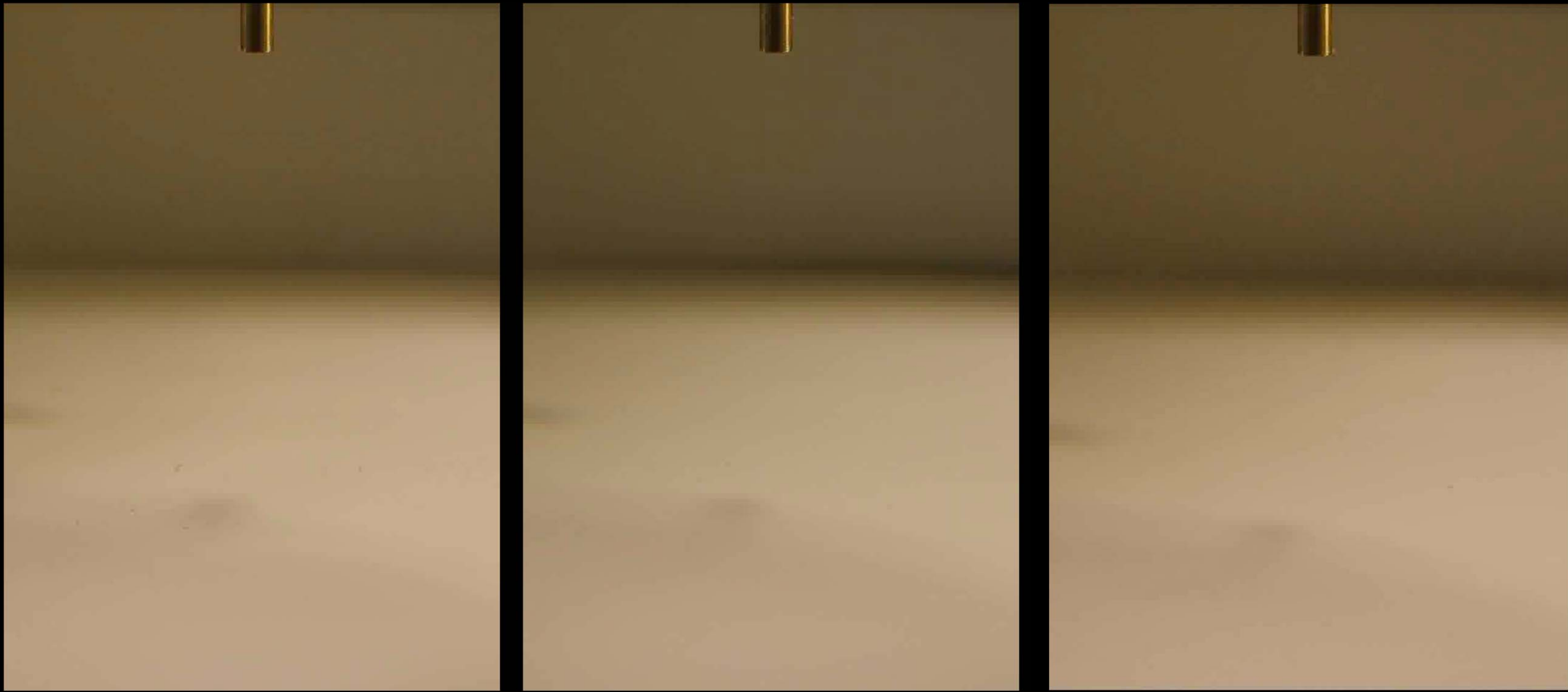
Die Reynolds-Zahl ist **die** relevante Kennzahl

Entscheidend für dieses Problem ist das Kräfteverhältnis zwischen viskosen Kräften und Trägheitskräften

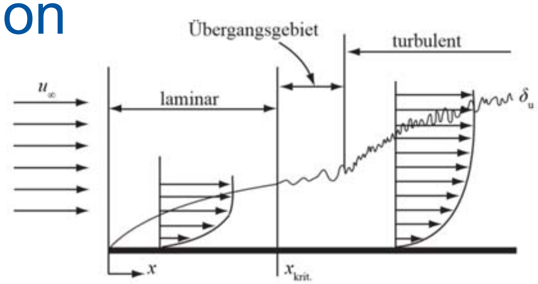
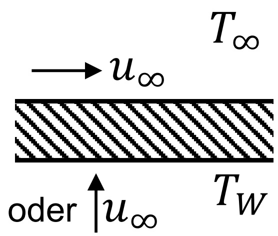
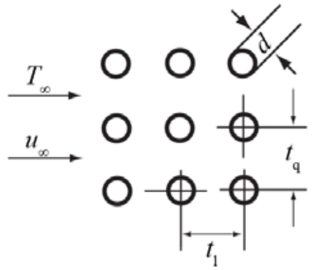
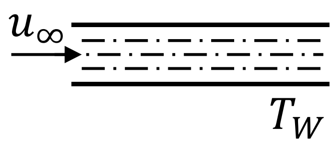
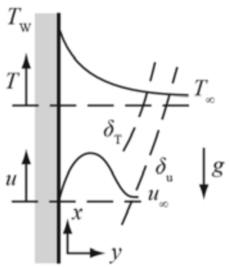
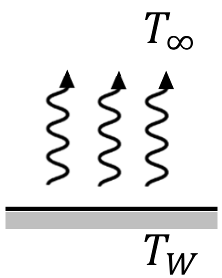
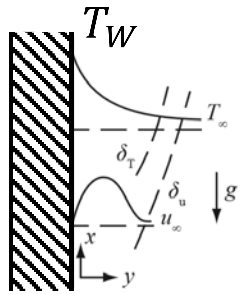
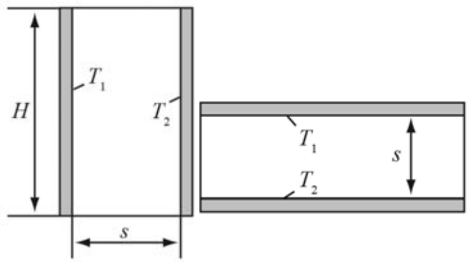
Achtung: Oft kommen weitere Effekte durch die Randbedingungen zum Tragen

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Re = 2500 Re = 1600 Re = 800



Beispielen für konvektive Wärmetransportkonfigurationen

	Umströmung			Durchströmung
	Platten	Zylinder (axial / radial)	Glattrohrbündel usw. …	Rohr
Erzwungene Konvektion				
Natürliche Konvektion		 		

Beispielen für konvektive Wärmetransportkonfigurationen

Umströmung

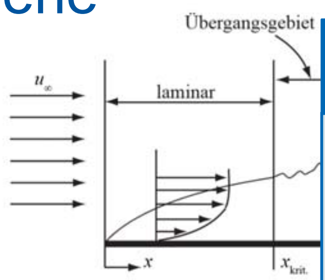
Platten
(Grenzschichten,
teilweise schon gelernt)

Zylinder
(axial / radial)

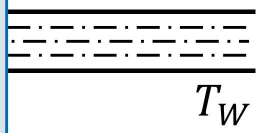
Glattrohrbündel
usw. …

Durch-
strömung

Erzwungene



Rohr



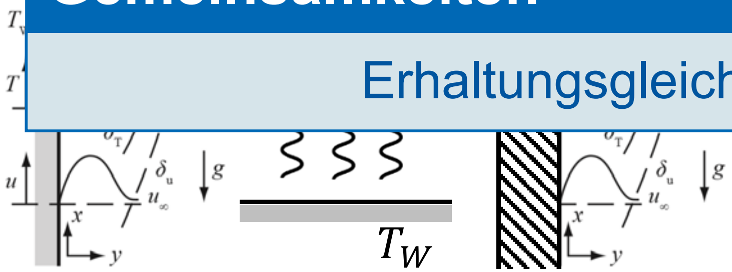
Unterschieden

- Geometrie (Platten, Zylinder etc.)
- Strömung (laminar, turbulent)
- Randbedingungen (dynamisch, thermisch)

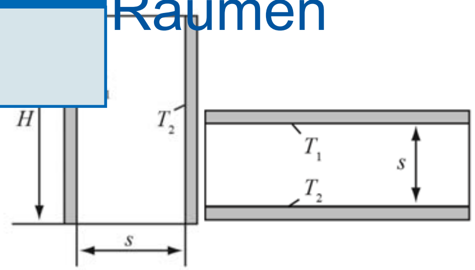
Gemeinsamkeiten

Erhaltungsgleichungen

Natürliche



eschlossene
Räumen



Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Rückblick: Erzwungene Konvektion

Kontinuitäts-gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impuls-gleichung

Impulsströme | Druck | Scherspannungen

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Energie-gleichung

Enthalpieströme | Wärmeleitung

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Rückblick: Erzwungene Konvektion

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L},\ y^* = \frac{y}{L},\ u^* = \frac{u}{u_\infty},\ v^* = \frac{v}{u_\infty},\ p^* = \frac{p}{\rho {u_\infty}^2},\ \Theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}$$

Kontinuitätsgleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Impulsgleichung

Impulsströme | Druck | Scherspannungen

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

Energiegleichung

Enthalpieströme | Wärmeleitung

$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\underbrace{RePr}_{Pe}}\left(\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

$$Nu = Nu(Re, Pr)$$

Rückblick: Natürliche Konvektion

Kontinuitäts-gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impuls-gleichung

Impulsströme | Druck | Scherspannungen | Schwerkraft

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \beta g (T - T_\infty)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Energie-gleichung

Enthalpieströme | Wärmeleitung

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Rückblick: Natürliche Konvektion

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L},\ y^* = \frac{y}{L},\ u^* = \frac{u}{u_\infty},\ v^* = \frac{v}{u_\infty},\ p^* = \frac{p}{\rho {u_\infty}^2},\ \Theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}$$

Kontinuitäts-gleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Impuls-gleichung

Impulsströme | Druck | Scherspannungen | Schwerkraft

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \underbrace{+ Gr \cdot \left(\frac{1}{Re}\right)^2}_{Ar} \Theta^*$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

Energie-gleichung

Enthalpieströme | Wärmeleitung

$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\underbrace{RePr}_{Pe}}\left(\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

$$Nu = Nu(Gr, Pr)$$

Zusammenfassung: Dimensionslose Zahlen

Allgemeiner Form der Wärmeübergangskoeffizient

$$Nu \equiv \frac{\alpha L}{\lambda} = \text{Dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient}$$
$$= C \cdot Re^m \cdot Pr^n \cdot Gr^p$$

mit

$$Re \equiv \frac{\rho u_\infty L}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}}$$

$$Pr \equiv \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{Diffusiver Impulstransport}}{\text{Diffusiver Wärmetransport}}$$

$$Gr \equiv \frac{\beta g \rho^2 (T_W - T_\infty) L^3}{\eta^2} = \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}}$$

$$Pe \equiv Re \cdot Pr = \frac{\text{Advectiver Wärmefluss}}{\text{Diffusiver Wärmefluss}}$$

$$Ar \equiv \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}$$

Verständnisfragen

Was besagt die Ähnlichkeitstheorie und auf was muss geachtet werden, damit die Lösung zweier unterschiedlicher Probleme identisch ist?

Welche Kennzahlen sind für die empirisch begründeten Wärmeübergangsgesetze von essentieller Bedeutung?