



Lehrstuhl
für Wärme-
und Stoff-
übertragung



Wärme- und Stoffübertragung I/II

Vorlesungsskript

Wintersemester
2019/20

„Wärme- und Stoffübertragung I/II“ (Vorlesungsskript)

Ausgabe vom 7. Oktober 2019

RWTH Aachen University
Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Kneer
Augustinerbach 6
52056 Aachen
Telefax 0241/80-95400
Telefon 0241/80-92143
www.wsa.rwth-aachen.de
info@wsa.rwth-aachen.de

Inhaltsverzeichnis

Das „†“ markiert Inhalte der Vorlesung „Wärme- und Stoffübertragung II“.

1	Einführung	1
1.1	Wärmestrahlung	3
1.2	Wärmeleitung	4
1.3	Konvektion	5
2	Wärmestrahlung	9
2.1	Strahlungseigenschaften	9
2.1.1	Wellen-/Quantencharakter	9
2.1.2	Intensitätsverteilung der Strahlung und gesamte Strahlungsintensität	12
2.1.2.1	Plancksches Verteilungsgesetz	12
2.1.2.2	Wiensches Verschiebungsgesetz	14
2.1.2.3	Stefan-Boltzmann-Gesetz	14
2.1.2.4	Strahlungsemission in einem bestimmten Spektralbereich	14
2.1.3	Reflexion, Absorption, Transmission an einer Oberfläche	17
2.1.4	Kirchhoffsches Gesetz	19
2.1.5	Richtungsabhängige und diffuse Strahlung	24
2.2	Strahlungsaustausch	25
2.2.1	Strahldichte	25
2.2.2	Strahlungsaustausch zwischen zwei Körpern	27
2.2.3	Strahlungsaustausch zwischen zwei grauen Oberflächen	33
2.2.4	Strahlungsaustausch zwischen zwei unendlich ausgedehnten grauen Platten	33
2.2.5	Strahlungsaustausch zwischen zwei sich umschließenden grauen Körpern	34
2.3	Strahlung in interagierenden Medien†	37
2.3.1	Physikalische Effekte bei der Strahlungsinteraktion	37
2.3.2	Strahlungsabschwächung	40
2.3.2.1	Absorptionskoeffizient	42
2.3.2.2	Streukoeffizient	43
2.3.3	Strahlungszuwachs	44
2.3.3.1	Emission	44

2.3.3.2	Streuung	45
2.3.4	Streukoeffizienten und Phasenfunktionen	48
2.3.4.1	Rayleigh Streuung	49
2.3.4.2	Geometrische Optik	49
2.3.4.3	Mie Streuung	50
2.3.4.4	Approximierte Phasenfunktionen	50
2.3.5	Strahlungstransportgleichung	52
2.4	Absorption und Emission von Strahlung in Gasen [†]	53
2.4.1	Das Bohr'sche Atommodell	55
2.4.2	Molekülspektren	57
2.4.2.1	Quantelung der Vibrationszustände	59
2.4.2.2	Quantelung der Rotationszustände	62
2.4.2.3	Struktur des Gasstrahlungsspektrums	63
2.4.2.4	Linienverbreiterung	68
3	Wärmeleitung	75
3.1	Differentialgleichung des Temperaturfeldes	75
3.2	Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung ohne Wärmequellen	79
3.2.1	Ebene Wand mit vorgegebenen Oberflächentemperaturen	79
3.2.2	Rohrwand mit vorgegebenen Oberflächentemperaturen	81
3.2.3	Ebene Wände mit konvektivem Wärmeübergang	84
3.2.4	Rohrwand mit konvektivem Wärmeübergang	86
3.2.5	Wärmeleitung in Rippen	87
3.3	Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung mit Wärmequellen	95
3.4	Stationäre, mehrdimensionale Wärmeleitung ohne Wärmequellen	98
3.5	Instationäre Wärmeleitung ohne Wärmequellen	103
3.5.1	Körper mit sehr großer Wärmeleitfähigkeit	103
3.5.2	Eindimensionale instationäre Wärmeleitungsprobleme	106
3.5.3	Dimensionslose Kennzahlen und Diagramme	116
4	Konvektion	129
4.1	Erhaltungsgleichungen für laminare, stationäre, zweidimensionale Strömungen	132
4.1.1	Kontinuitätsgleichung	132
4.1.2	Impulsgleichungen (Bewegungsgleichungen)	133
4.1.2.1	Impulsgleichung für die x-Richtung	134
4.1.2.2	Impulsgleichung für die y-Richtung	136
4.1.3	Energiegleichung	137
4.2	Erzwungene Konvektion - Grenzschichtgleichungen für laminare, stationäre Strömungen	141
4.2.1	Exakte Lösungen der Grenzschichtgleichungen	142
4.2.2	Eine einfache Näherungslösung zu den Grenzschichtgleichungen	145

4.3	Natürliche Konvektion – Grenzschichtgleichungen für laminare, stationäre Strömungen	150
4.4	Wärmeübertragung in turbulenten Strömungen	155
4.5	Anwendung der Ähnlichkeitstheorie zur Darstellung von Wärmeübertragungsgesetzen	159
5	Wärmeübergangsgesetze	165
5.1	Wärmeübergangsgesetze für erzwungene Konvektion	168
5.1.1	Erzwungene Konvektion umströmter Körper	168
5.1.1.1	Ebene Platte - laminare Grenzschichtströmung . . .	168
5.1.1.2	Ebene Platte - turbulente Grenzschichtströmung $Re_{x,krit} \approx 2 \cdot 10^5$	171
5.1.1.3	Längs angeströmter Zylinder	172
5.1.1.4	Quer angeströmter Zylinder	173
5.1.1.5	Quer angeströmtes Glatrohrbündel	176
5.1.1.6	Umströmte Kugel	179
5.1.2	Erzwungene Konvektion durchströmter Körper	180
5.1.2.1	Laminare Rohrströmung, $Re_{d,krit} \approx 2300$	180
5.1.2.2	Turbulente Rohrströmung, $Re_{d,krit} \approx 2300$	183
5.2	Wärmeübergangsgesetze für natürliche Konvektion	185
5.2.1	Natürliche Konvektion umströmter Körper	185
5.2.1.1	Senkrechte Platte - laminare Grenzschichtströmung .	185
5.2.1.2	Senkrechte Platte - turbulente Grenzschichtströmung	188
5.2.1.3	Senkrechter Zylinder - laminare und turbulente Grenzschichtströmungen	189
5.2.1.4	Horizontaler Zylinder - laminare und turbulente Strömungen, isotherme Oberfläche	189
5.2.1.5	Horizontale Platten - laminare und turbulente Strömungen nach Holman (1976)	190
5.2.2	Natürliche Konvektion in geschlossenen Räumen	191
5.2.2.1	Fluidschichten zwischen isothermen, senkrechten Wänden	191
5.2.2.2	Fluidschichten zwischen isothermen, horizontalen Flächen	192
6	Stoffübertragung	193
6.1	Molekulare Vorstellung von Diffusionsprozessen	193
6.1.1	Diffusion in Gasen	193
6.1.2	Diffusion in Flüssigkeiten	196
6.2	Grundbegriffe	198
6.3	Stofftransport in strömenden Medien	201
6.3.1	Beispiel instationärer Diffusion	204

6.4	Übergangsgesetze in der Stoffübertragung	205
6.4.1	Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung	206
6.4.2	Lösung des eindimensionalen instationären Wärmeleitungs- bzw. Diffusionsproblems	207
6.5	Verdunstung an einer flüssigen Oberfläche	209
6.5.1	Stefanstrom	210
6.5.2	Stoffübergangskoeffizient und Konzentrationsprofil [†]	212
6.6	Transportprozesse [†]	215
6.6.1	Diffusion	215
6.6.1.1	Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle	216
6.6.1.2	Stoßhäufigkeit	216
6.6.1.3	Mittlere frei Weglänge	217
6.6.1.4	Zwischenmolekulare Wechselwirkungen bei realen Gase	217
6.6.2	Berechnung von Diffusionskoeffizienten	218
6.6.2.1	Diffusionskoeffizienten für binäre Gemische	218
6.6.2.2	Diffusionskoeffizienten für Mehrstoffgemische	220
6.6.2.3	Wärmeleitfähigkeit und Viskosität für verdünnte Gase	223
6.6.2.4	Wärmeleitfähigkeit und Viskosität für Mehrstoffge- mische	224
6.7	Phasengleichgewichte [†]	224
6.7.1	Thermodynamisches Gleichgewicht	224
6.7.2	Das Chemische Potenzial	226
6.7.3	Löslichkeit von Gasen in Flüssigkeiten	228
6.7.3.1	Vereinfachungen	230
6.7.4	Flüssig-Flüssig Gleichgewicht	231
6.7.5	Fest-Flüssig Gleichgewicht	232
6.8	Stoffdurchgang [†]	232
6.8.1	Filmtheorie	233
6.8.2	Zweifilmtheorie	234
6.8.2.1	Diffusion durch die Phasengrenze zweier flüssiger Pha- sen	236
6.8.2.2	Diffusion durch die Phasengrenze einer flüssigen und einer gasförmigen Phase	236
6.9	Stoffübertragung im Rieselfilm [†]	238
6.9.1	Konvektiver Stoffübergang zwischen Wand und laminarem Rie- selfilm	238
7	Wärmeübertragung bei Verdampfung und Kondensation[†]	245
7.1	Physikalische Grundlagen	246
7.1.1	Phasengleichgewicht	246
7.1.1.1	Die Flüssigkeits-Dampf Phasengrenze – Clausius-Clapeyron Gleichung	246

7.1.1.2	Der Einfluss des Druckes auf den Dampfdruck	248
7.1.1.3	Antoine-Gleichung	250
7.1.1.4	Zustandsgleichung von „van der Waals“	250
7.1.2	Phasengleichgewicht bei Kondensation und Verdampfung . . .	252
7.1.2.1	Metastabile Zustände	253
7.1.2.2	Phasengleichgewicht an einer gekrümmten Phasen- grenze	255
7.2	Wärmeübertragung bei der Verdampfung	258
7.2.1	Behältersieden — pool boiling	258
7.2.1.1	Bereiche des Behältersiedens	258
7.2.1.2	Stilles Sieden — Free Convection Boiling	263
7.2.1.3	Blasensieden — Nucleate Boiling	264
7.2.1.4	Maximale Wärmestromdichte	267
7.2.1.5	Instabiler Siedebereich — Transition Boiling	268
7.2.1.6	Filmsieden — Film Boiling	269
7.2.2	Strömungssieden — Forced Convection Boiling	270
7.3	Wärmeübertragung bei der Kondensation	270
7.3.1	Laminare Filmkondensation an einer vertikalen Platte	270
7.3.1.1	Regime der Filmkondensation an einer vertikalen Plat- te	277
7.3.2	Kondensation reiner Dämpfe — Tropfenkondensation	277
8	Kontaktwärmeübertragung[†]	281
8.1	Grundlegende Überlegungen	282
8.2	Wärmetransportmechanismen im Kontaktstellenbereich	285
8.3	Experimentelle Untersuchungen	287
8.3.1	Stationäre Messverfahren	288
8.3.2	Instationäre Messverfahren	289
9	Infrarotthermographie[†]	291
9.1	Einleitung	291
9.2	Physikalische Grundlagen	292
9.3	Messverfahren	293
9.4	Integrationszeit	295
9.5	Räumliche Auflösung	297
9.6	Auflösung der Temperatur	299
9.7	Inhomogenitätskorrektur	300
9.8	Kalibrierung	302
9.9	Detektoren	305
9.10	Quantendetektoren	305
9.11	Thermische Detektoren	306

Anhang	VII
Stoffwerte	VII
Besselfunktion	XVII

Kapitel 1

Einführung

Der Schwerpunkt der Vorlesung liegt bei den Grundlagen des Wärmetransports in Medien oder zwischen zwei Medien. Eine knappe Einführung in den die Grundlagen des Stofftransports schließt die Vorlesung ab.

Die Begriffe *Wärmemenge* und *Wärmestrom* wurden bereits in der Vorlesung Thermodynamik im Zusammenhang mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik eingeführt.

Am Beispiel des Temperatúrausgleichs zweier Teilbehälter A und B in einem adiabaten Gesamtsystem sollen die Unterschiede der Vorlesungsinhalte gezeigt werden.

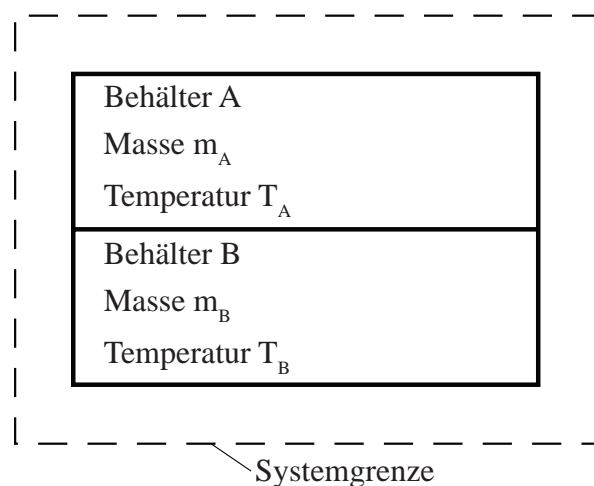


Abbildung 1.1: Temperatúrausgleich zwischen zwei Behältern

Für das adiabate Gesamtsystem, dem keine Arbeit zugeführt wird und dessen äußere Energien unverändert bleiben, ergibt sich aus dem 1. Hauptsatz

$$\underbrace{dQ}_0 + \underbrace{dW}_0 = dU + \underbrace{dE_a}_0$$

oder

$$dU = 0$$

Das heißt, die innere Energie des Gesamtsystems ändert sich während des Temperatúrausgleichsvorgangs nicht. Da sich aber die innere Energie des Gesamtsystems aus den Anteilen der Einzelsysteme ermitteln lässt, erhält man für zwei Zeiten t_0 und t_1 .

$$(U_A + U_B)_{t=t_0} = (U_A + U_B)_{t=t_1}$$

oder, solange keine Phasenänderungen zu berücksichtigen sind,

$$(m_A c_A T_A + m_B c_B T_B)_{t=t_0} = (m_A c_A T_A + m_B c_B T_B)_{t=t_1}$$

Wenn sich nach einer sehr langen Versuchszeit der Temperatúrausgleich einstellt, ergibt sich eine den beiden Teilsystemen gemeinsame Endtemperatur

$$T_{t \rightarrow \infty} = \frac{(m_A c_A T_A + m_B c_B T_B)_{t=t_0}}{m_A c_A T_A + m_B c_B T_B}$$

und für die bis dahin über die Trennwand der Teilbehälter übertragene Wärmemenge Q aus der Bilanz um den Einzelbehälter A

$$Q_A = (U_A)_{t \rightarrow \infty} - (U_A)_{t=t_0} = m_A c_A ((T_A)_{t \rightarrow \infty} - (T_A)_{t=t_0})$$

und

$$Q_A = -Q_B$$

Die Thermodynamik sagt dabei nichts aus über die Mechanismen, durch die Wärme transportiert wird und damit über den zeitlichen Verlauf des Vorgangs. Die Grundlagen dazu werden in dieser Einführungsvorlesung angeboten.

Mechanismen des Wärmetransports Die Mechanismen, durch die Wärme in gasförmigen, flüssigen oder festen Medien transportiert oder von einem Medium in ein anderes übertragen wird, können eingeteilt werden in

- Transport durch Wärmestrahlung
- Transport durch Wärmeleitung
- Transport durch Konvektion

Die physikalischen Grundlagen dieser drei Mechanismen sollen in dieser Einleitung nur skizziert werden. Die ausführlichere Darstellung erfolgt dann in späteren Abschnitten der Vorlesung.

1.1 Wärmestrahlung

Sind zwei Körper verschiedener Temperatur in einem evakuierten Behälter eingeschlossen, so wird sich auch hier nach einer gewissen Zeit ein Temperaturgleichgewicht einstellen. Dieser Ausgleichsprozess beruht auf einem Wärmetransport durch elektromagnetische Wellen, der Wärmestrahlung.

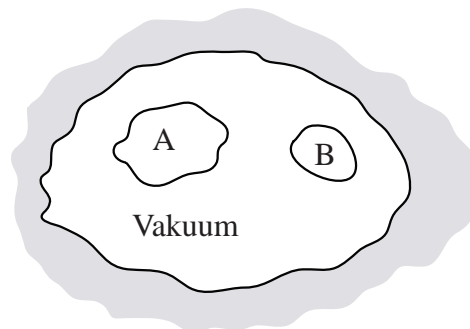


Abbildung 1.2: Wärmeaustausch zwischen zwei Körpern durch Strahlung

Thermodynamische Überlegungen zeigen, dass ein idealer Körper, ein “schwarzer“ Körper, eine Strahlung emittiert, die proportional der 4. Potenz der absoluten Temperatur ist. Daraus ergibt sich eine Netto-Wärmestromdichte

$$\frac{\dot{Q}}{A} \propto (T_A^4 - T_B^4) \quad \text{oder} \quad \frac{\dot{Q}}{A} = \sigma (T_A^4 - T_B^4)$$

wobei die Stefan-Boltzmann-Konstante σ den Zahlenwert $\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ hat.

Beim Strahlungsaustausch zwischen technischen Oberflächen muss die Abweichung von den Emissionseigenschaften des idealen *schwarzen* Körpers durch einen Korrekturfaktor F_ϵ und die Tatsache, dass meist die von einem Körper ausgesandte Strahlung aufgrund der gegenseitigen Anordnung nicht vollständig auf dem anderen Körper auftrifft, durch einen weiteren Korrekturfaktor F_A berücksichtigt werden.

Die Ermittlung der beiden Korrekturfaktoren kann sehr aufwendig sein und wird noch ausführlich besprochen werden. Noch komplexer sind die Zusammenhänge, wenn eine Gasatmosphäre zwischen den beiden Körpern am Strahlungsaustausch beteiligt ist.

1.2 Wärmeleitung

Wenn in einem Körper ein Temperaturgefälle besteht, sagt die Erfahrung, dass Wärme von einem Gebiet höherer Temperatur zu einem niedriger Temperatur transportiert wird. Der auf die Fläche bezogene Wärmestrom ist dabei dem Temperaturgefälle proportional

$$\frac{\dot{Q}}{A} \propto \frac{dT}{dx}.$$

Der Proportionalitätsfaktor ist eine stoffspezifische Größe und wird als Wärmeleitfähigkeit $\lambda^{\text{W}}/\text{mK}$ bezeichnet.

$$\frac{\dot{Q}}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Das Vorzeichen weist darauf hin, dass die Wärme in Richtung des *Temperaturgefälles* fließt. Für quantitative Angaben des Wärmestroms muss die Wärmeleitfähigkeit bekannt sein. In Gasen wird die Wärmeleitfähigkeit durch Stöße der Gasmolekel bestimmt, wobei man die kinetische Energie eines Gasmolekels seiner Temperatur proportional setzen kann. Wenn ein Molekel aus einem Bereich hoher Temperatur in einen Bereich niedriger Temperatur fliegt, wird es dort durch Stöße einen Teil seiner Energie und seines Impulses abgeben. Betrachtet man das Gas als Kontinuum, kann dieser Vorgang als Wärmeleitung im Gas aufgefasst werden.

Tabelle 1.1: Wärmeleitfähigkeiten einiger Stoffe bei 0°C

Stoffe	Wärmeleitfähigkeit $\lambda[\text{W/mK}]$
Metalle	
Silber	410
Kupfer	385
Kohlenstoff-Stahl	43
Chrom-Nickel-Stahl	16
Nichtmetallische Festkörper	
Quarz	2,4
Sandstein	1,8
Fensterglas	0,8
Flüssigkeiten	
Quecksilber	8,21
Wasser	0,56
Kältemittel R 12	0,07
Gase	
Wasserstoff	0,175
Luft	0,024
Wasserdampf	0,021

Für einfache Gase und mäßige Temperaturen lässt sich die Wärmeleitfähigkeit auf der Basis der kinetischen Gastheorie berechnen.

Bei flüssigen Medien und Festkörpern genügt die Genauigkeit der theoretischen Voraussagen im allgemeinen nicht, so dass man auf experimentell ermittelte Werte der Wärmeleitfähigkeit angewiesen ist.

Um eine Vorstellung der Größenordnung der Wärmeleitfähigkeit zu vermitteln, sind diese für einige Medien in der Tabelle zusammengestellt. Ausführlichere Angaben finden sich im Anhang des Umdrucks.

1.3 Konvektion

Es ist bekannt, dass sich ein heißer Körper schneller abkühlt, wenn er sich nicht in ruhender Luft befindet, sondern angeblasen wird. Der Wärmeleitungsmechanismus auf der Luftseite des Systems wird unterstützt durch den zusätzlichen Mechanismus des

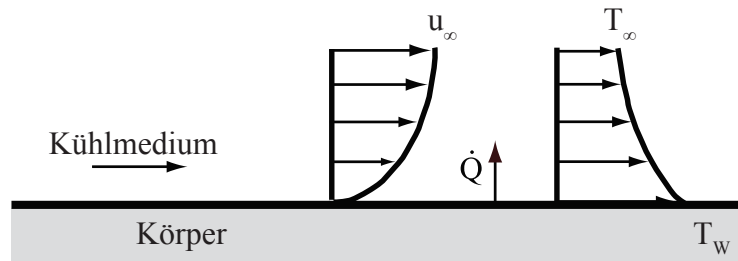


Abbildung 1.3: Wärmeabgabe eines überströmten Körpers

Tabelle 1.2: Größenordnung des Wärmeübergangskoeffizienten einiger Stoffe bei 0°C

Stoffe	Wärmeübergangskoeffizient $\alpha [\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$
Natürliche Konvektion, Gase	3 – 20
Natürliche Konvektion, Wasser	100 – 600
Erzwungene Konvektion, Gase	10 – 100
Erzwungene Konvektion, Wasser	500 – 10.000
Siedendes Wasser	2.000 – 25.000
Kondensation von Wasserdampf	5.000 – 100.000

Wärmetransports durch die makroskopische Luftströmung entlang des Körpers. Die Intensität dieses sogenannten konvektiven Wärmeübergangs wird proportional der Temperaturdifferenz zwischen der Körperoberfläche und dem Kühlmedium sein.

Der Proportionalitätsfaktor, der Wärmeübergangskoeffizient α , ist von vielen Einflussgrößen, zum Beispiel von der Strömungsgeschwindigkeit, der Art des Mediums usw., abhängig. Die Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten ist für einige einfachere Probleme auf theoretischem Weg möglich. Dazu werden die Grundlagen der Strömungslehre benötigt. Für viele praktische Probleme bleibt jedoch nur seine experimentelle Ermittlung.

Die Größenordnung des Wärmeübergangskoeffizienten zeigt die Tabelle, in der einige typische Werte zusammengestellt sind. In den meisten Problemen der Praxis treten diese drei Grundmechanismen des Wärmetransports gleichzeitig auf. Am Beispiel der Wärmeübertragung im Dampferzeuger eines Kraftwerks soll dies deutlich gemacht werden. Im Feuerraum des Dampferzeugers wird Wärme von den heißen Rauchgasen an die Rohrwand übertragen, um Wasser in den Rohren zu verdampfen. Die Skizze,

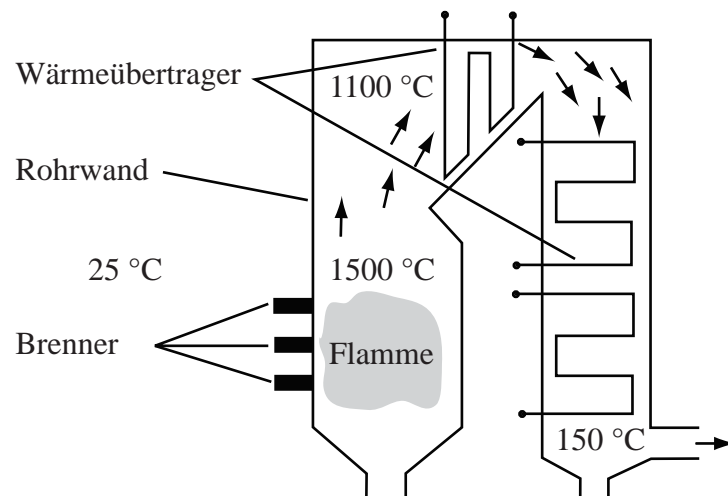


Abbildung 1.4: Schema eines Dampferzeugers eines Kohlekraftwerks

die einen Ausschnitt aus der Rohrwand wiedergibt, zeigt den Wärmefluss und die ihn bestimmenden Transportmechanismen.

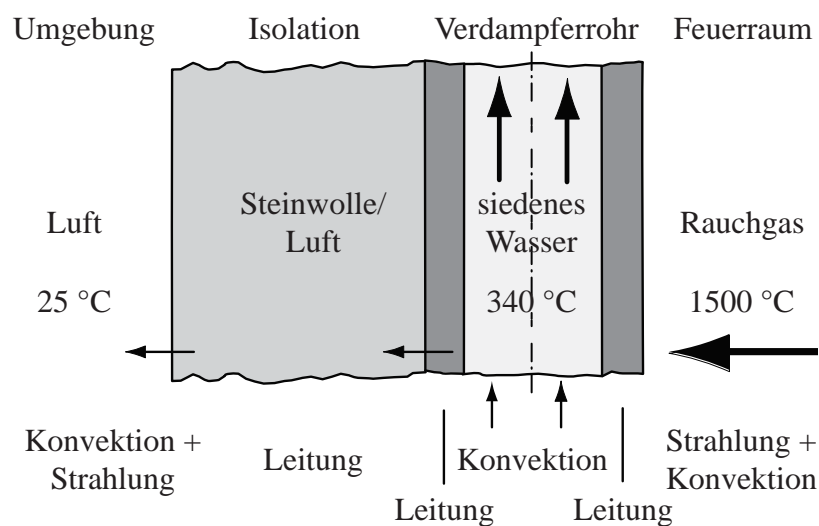


Abbildung 1.5: Wärmetransportmechanismus an der Rohrwand eines Dampferzeugers

Kapitel 2

Wärmestrahlung

Während bei der Wärmeleitung und der Konvektion die Energie durch molekulare Vorgänge bzw. durch makroskopische Bewegung von Fluiden transportiert wird, ist die Wärmestrahlung nicht an Materie gebunden, sondern beruht auf elektromagnetischen Vorgängen. Die Intensität und die Art der von einem gasförmigen, flüssigen oder festen Körper abgegebenen Strahlung hängen von der Beschaffenheit und Temperatur dieses Körpers ab, sie sind dagegen unabhängig vom Zustand der Umgebung. Wird die vom Körper emittierte Strahlung nicht isoliert, sondern der Strahlungsaustausch dieses Körpers mit seiner Umgebung betrachtet, so spielen Art, Temperatur und geometrische Anordnung der umgebenden Körper eine wichtige Rolle.

Obwohl bei den meisten zu lösenden Problemen der Wärmeübertragung der Energietransport gleichzeitig durch Wärmeleitung und/oder Konvektion und durch Wärmestrahlung stattfindet, wird hier soweit wie möglich die Wärmestrahlung getrennt behandelt.

2.1 Strahlungseigenschaften

2.1.1 Wellen-/Quantencharakter

Aus dem Physikunterricht wird bekannt sein, dass der Strahlung sowohl Wellen- als auch Quantencharakter zugeordnet werden kann. In einem Experiment von Whitaker (1977) wurde dieser Doppelcharakter sehr eindrucksvoll nachgewiesen. Wird eine Fotoplatte mit sehr geringer Lichtintensität unter Zwischenschaltung einer Blende

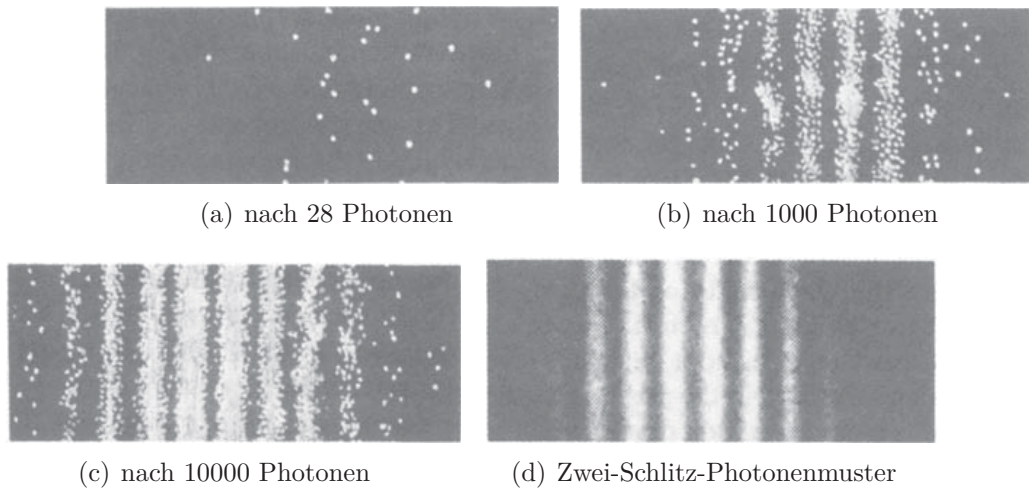


Abbildung 2.1: Zwei-Schlit-Experiment nach E.R. Huggins, Physics I, W.A. Benjamin, Inc., Menlo Park, California, USA, 1968, aus Whitaker (1977)

mit zwei engen Schlitzen belichtet, so können in Abhängigkeit von der Belichtungszeit die in den Bildern 2.1(a), 2.1(b), 2.1(c) und 2.1(d) dargestellten Muster registriert werden.

Bei sehr kurzen Belichtungszeiten, Bild 2.1(a), sind einzelne Lichtpunkte zu erkennen, die auf das Auftreffen von einzelnen Lichtquanten oder Photonen schließen lassen. Wird die Belichtungszeit verlängert, so zeigt sich, dass diese Photonen nicht völlig ungeordnet auftreffen, sondern sich zu Streifenmustern zusammenfinden, Bilder 2.1(b) und 2.1(c). Diese Streifen sind Interferenzmuster, wie sie bei der Überlagerung von kreisförmigen Wellen, die aus Schlitzen austreten, entstehen und auf einer Mattscheibe sichtbar gemacht werden können, Bild 2.1(d). Sie weisen auf den Wellencharakter der Strahlung hin. Das folgende Bild 2.2 gibt eine Übersicht über das Spektrum der elektromagnetischen Wellen und soll vor allem die Einordnung der Wärmestrahlung in den Gesamtbereich deutlich machen. Die Wellenlänge λ , im Bereich der Wärmestrahlung im allgemeinen in der Dimension $[\mu\text{m}]$ angegeben, ist mit der Frequenz über die Lichtgeschwindigkeit c verknüpft

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (2.1)$$

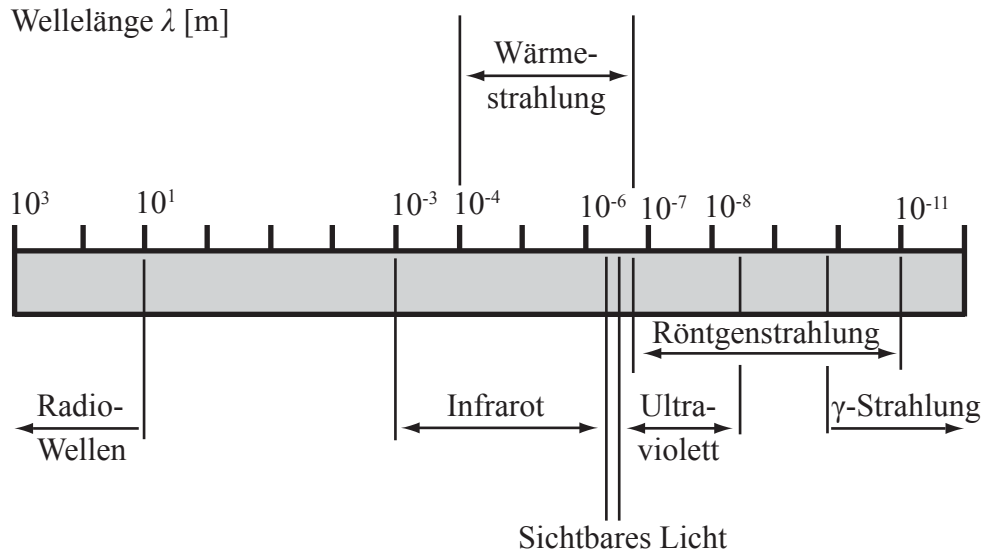


Abbildung 2.2: Spektrum elektromagnetischer Wellen

Der Wellencharakter der Strahlung wird immer dann von Bedeutung sein, wenn die Abmessungen des „Schlitzes“, der für eine Beugung des Strahls verantwortlich ist, die gleiche Größenordnung wie der Wellenlängenbereich der Strahlung erreicht.

Das oben dargestellte Spektrum macht deutlich, dass im Bereich der Wärmestrahlung die Wellenlängen sehr viel kleiner als typische „Schlitzabmessungen“ sind. Daraus folgt, dass bei der Wärmestrahlung vor allem der Quantencharakter interessiert. Nach Planck transportiert jedes Quant oder Photon die Energie

$$E = h \nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (2.2)$$

mit der Planckschen Konstante $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ [Js] . Aus der Gleichung ist ersichtlich, dass sich die pro Quant transportierte Energie umgekehrt proportional zur Wellenlänge λ verhält. Dieser Zusammenhang führt auch zur Definition der Wellenzahl η :

$$\eta = \frac{1}{\lambda} \quad (2.3)$$

Diese Größe hat den Vorteil, dass sie im Gegensatz zur Wellenlänge proportional zur transportierten Energie der entsprechenden Strahlungsquanten ist. Dies gilt aber nur, sofern sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Strahlung nicht ändert, siehe Gleichung (2.2). Ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit c – beispielsweise

se durch Eintritt in ein Medium mit einem unterschiedlichen Brechungsindex – so ändert sich nach Gleichung (2.2) die Wellenlänge und dementsprechend auch die Wellenzahl. Für Probleme mit unterschiedlichen Brechungsindizes ist also eine Betrachtung der Frequenz ν am geeignetsten, da diese sich im Gegensatz zu Wellenlänge und -zahl auch bei der Änderung des Brechungsindex nicht ändert.

2.1.2 Intensitätsverteilung der Strahlung und gesamte Strahlungsintensität

Die von einer Körperoberfläche emittierte Strahlung überdeckt den gesamten Wellenlängenbereich. Die Intensität der Strahlung ist dabei von der absoluten Temperatur des Körpers abhängig. Als Modellvorstellung existiert der sogenannte „schwarze Körper“: dieser Körper wird so definiert, dass er die gesamte einfallende Strahlung absorbiert.

2.1.2.1 Plancksches Verteilungsgesetz

Max Planck leitete aus der Quantentheorie eine Beziehung für die Verteilung der Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers über der Wellenlänge ab, das sogenannte **Plancksche Verteilungsgesetz** (Gleichung (2.4)). Dieses Gesetz beschreibt die in einem infinitesimal kleinen Wellenlängenbereich $d\lambda$ emittierte Strahlungsintensität $\dot{q}_{s\lambda}''$ die sogenannte monochromatische oder spektrale Strahlungsintensität. Das s im Index weist auf den schwarzen Körper hin. Aus der Gleichung ist ersichtlich, dass die spektrale Strahlungsintensität nur eine Funktion der Temperatur des emittierenden Körpers ist.

$$\dot{q}_{s\lambda}'' = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp \left[\frac{c_2}{\lambda T} \right] - 1} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \frac{1}{\text{m}} \right] \quad (2.4)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 lassen sich durch das Plancksche Wirkungsquantum h , die Boltzmann-Konstante k und die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c_o wie folgt ausdrücken:

$$c_1 = 2\pi h c_o^2 = 2\pi \cdot 6,6256 \cdot 10^{-34} \left(2,9979 \cdot 10^8 \right)^2 = 3,741 \cdot 10^{-16} \text{ Wm}^2$$

und

$$c_2 = h \frac{c_o}{k} = 6,6256 \cdot 10^{-34} \frac{2,9979 \cdot 10^8}{1,3805 \cdot 10^{-23}} = 1,439 \cdot 10^{-2} \text{ mK}$$

mit

$$k = \frac{R_m}{N_A} = \frac{8,3145}{6,0221 \cdot 10^{23}} = 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ J/K},$$

wobei N_A die Avogadro-Konstante und R_m die allgemeine Gaskonstante bezeichnen.

In dem für die Wärmestrahlung interessanten Wellenlängenbereich ist das Plancksche Verteilungsgesetz für einige Temperaturen in Bild 2.3 ausgewertet. Die Ab-

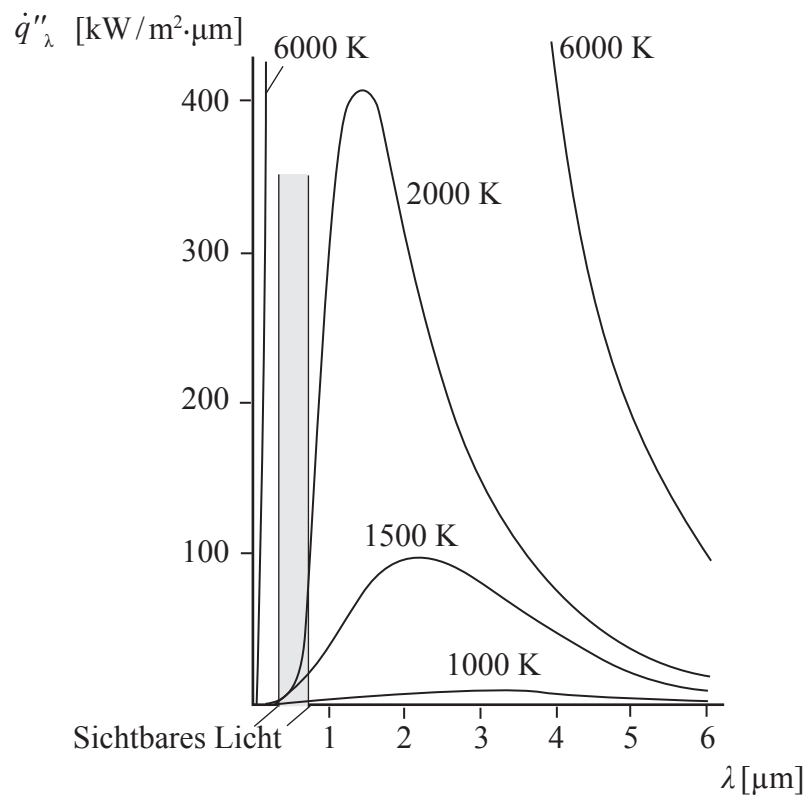


Abbildung 2.3: Spektrale Strahlungsstromdichte des schwarzen Körpers

bildung zeigt, dass die emittierte Strahlungsintensität mit steigender Temperatur zunimmt und dass sich das jeweilige Maximum mit steigender Temperatur zu kleineren Wellenlängen verschiebt.

2.1.2.2 Wiensches Verschiebungsgesetz

Durch Differentiation der Gleichung (2.4) lässt sich eine Beziehung für die Lage der Maxima angeben. Hieraus folgt das **Wiensche Verschiebungsgesetz**

$$\lambda_{max} = \frac{2898 \mu\text{m K}}{T} \quad (2.5)$$

2.1.2.3 Stefan-Boltzmann-Gesetz

Um die gesamte emittierte Strahlungsleistung pro Fläche zu ermitteln, wird das Plancksche Verschiebungsgesetz über das gesamte Spektrum integriert. Anschaulich bedeutet das, dass die Fläche unterhalb der Intensitätsverläufe die abgegebene Strahlungsleistung bezeichnet. Aus dieser Integration folgt das sogenannte **Stefan-Boltzmann-Gesetz**, vgl. Abbildung 2.4:

$$\dot{q}_s'' = \int_{\lambda=0}^{\infty} \dot{q}_{s\lambda}'' d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp\left[\frac{c_2}{\lambda T}\right] - 1} d\lambda = \sigma T^4 \quad (2.6)$$

Die Stefan-Boltzmann-Konstante σ hat den Zahlenwert $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \right]$.

2.1.2.4 Strahlungsemission in einem bestimmten Spektralbereich

Mitunter ist es notwendig, nicht die Strahlungsemission im gesamten Spektrum zu betrachte, sondern nur in einem Teilbereich zwischen den Wellenlängen λ_1 und λ_2 . Die Strahlungsdichte in diesem Intervall kann wieder mittels eines Integrals der Planck-Verteilung ausgedrückt werden:

$$\dot{q}_{s,\lambda_1 \rightarrow \lambda_2}'' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{q}_{s\lambda}'' d\lambda \quad (2.7)$$

Die Lösung des Integrals in Gleichung (2.7) führt auf den folgenden Reihenansatz:

$$F_{0 \rightarrow \lambda T} = \frac{15}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-n\xi}}{n} \left(\xi^3 + \frac{3\xi^2}{n} + \frac{6\xi}{n^2} + \frac{6}{n^3} \right) \right] \quad (2.8)$$

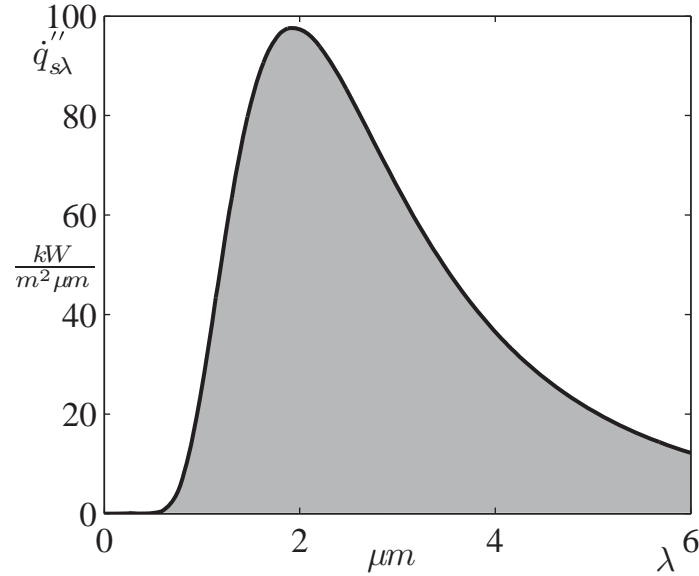


Abbildung 2.4: Gesamte emittierte Strahlungsleistung als Integralfläche unterhalb der Planck-Verteilung

mit

$$\xi = \frac{c_2}{\lambda T}$$

Dabei bezeichnet der Faktor $F_{0 \rightarrow \lambda T}$ den Anteil der Strahlungsintensität an der gesamten emittierten Intensität, der im Spektralbereich zwischen 0 und λ emittiert wird. Die tatsächlich emittierte Strahlungsintensität (Abbildung 2.5) in diesem Intervall kann dann mit Hilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes berechnet werden:

$$\dot{q}''_{s,0 \rightarrow \lambda} = F_{0 \rightarrow \lambda T} \cdot (\sigma T^4) \quad (2.9)$$

Der Anteil der Strahlungsintensität in einem beliebigem Intervall des Spektrums – wie in Abbildung 2.6 – kann dann wie folgt als Differenz der Werte für die beiden Intervallgrenzen berechnet werden:

$$\dot{q}''_{s,\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} = (F_{0 \rightarrow \lambda_2 T} - F_{0 \rightarrow \lambda_1 T}) \cdot \sigma T^4 \quad (2.10)$$

Für Handrechnungen ist der Reihenansatz nach Gleichung 2.8 eher unpraktisch; als Ersatz dafür existieren Tabellen mit repräsentativen Werten für $F_{0 \rightarrow \lambda T}$. Für computergestützte Berechnungen ist die Formel jedoch sehr nützlich, und bereits für

eine geringe Anzahl n von Reihengliedern lassen sich Ergebnisse von ausreichender Genauigkeit erzielen.

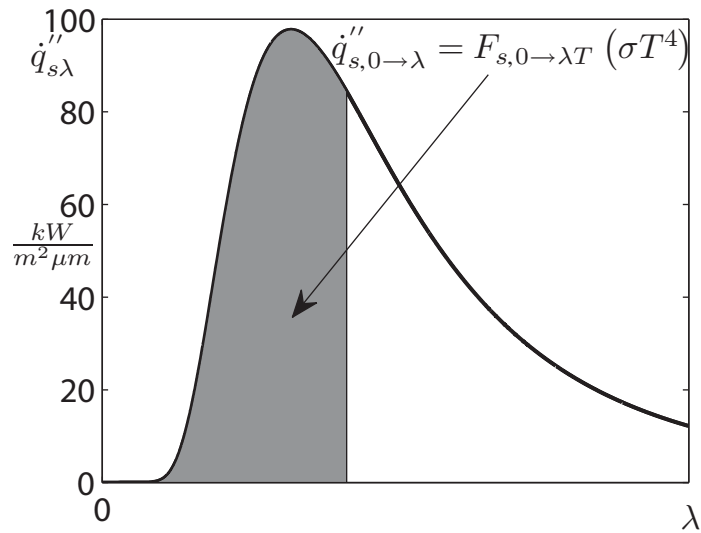


Abbildung 2.5: Emittierte Strahlungsleistung im Intervall $0 \rightarrow \lambda$

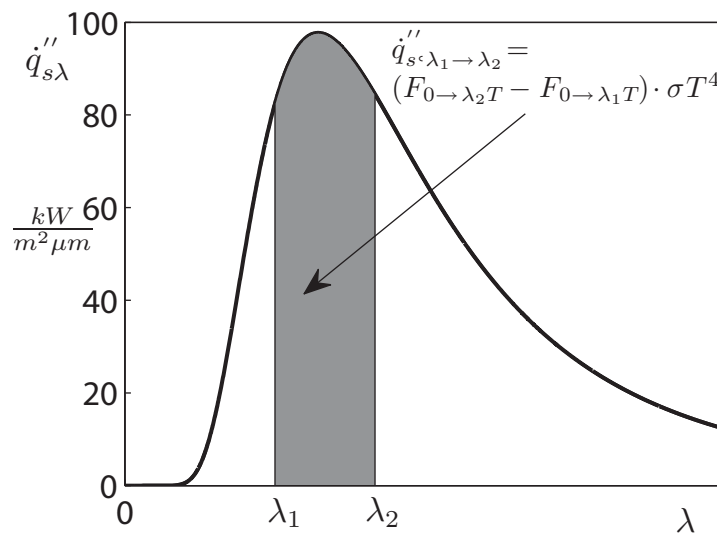


Abbildung 2.6: Emittierte Strahlungsleistung im Intervall $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$

2.1.3 Reflexion, Absorption, Transmission an einer Oberfläche

Trifft Strahlung eines bestimmten Wellenlängenbereichs auf die Oberfläche eines (nicht schwarzen) Körpers, so wird diese einfallende Strahlung entweder von der Oberfläche reflektiert, vom Körper absorbiert oder vom Körper durchgelassen, wobei die Reflexion zum Beispiel spiegelnd (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) oder diffus (in alle Richtungen gleich verteilt) erfolgen kann. Wir definieren den reflektierten Anteil

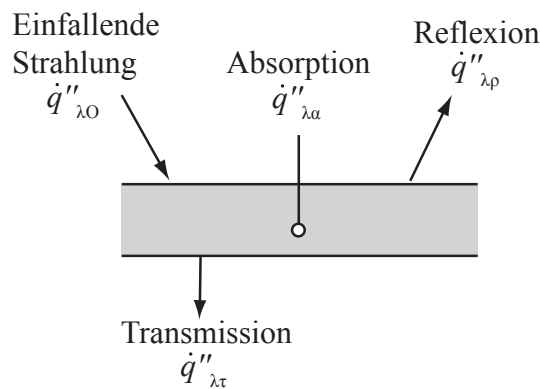


Abbildung 2.7: Beiträge zum Strahlungstransport

als den spektralen Reflexionsgrad $\rho(\lambda)$, den absorbierten Anteil als den spektralen Absorptionsgrad $\alpha(\lambda)$ und den durchgelassenen Anteil als den spektralen Transmissionsgrad $\tau(\lambda)$, vgl. Abbildung 2.7.

$$\rho(\lambda) \equiv \frac{\dot{q}_{\lambda\rho}''}{\dot{q}_{\lambda o}''} ; \alpha(\lambda) \equiv \frac{\dot{q}_{\lambda\alpha}''}{\dot{q}_{\lambda o}''} ; \tau(\lambda) \equiv \frac{\dot{q}_{\lambda\tau}''}{\dot{q}_{\lambda o}''} \quad (2.11)$$

Damit wird

$$\rho(\lambda) + \alpha(\lambda) + \tau(\lambda) = 1 \quad (2.12)$$

Als Sonderfälle sind zu nennen:

- Festkörper, die strahlungsundurchlässig sind und bei denen die einfallende Strahlung teils reflektiert, teils in Schichtdicken von wenigen μm (elektrische Leiter) bis etwa 2 mm (elektrische Nichtleiter) absorbiert wird

$$\rho(\lambda) + \alpha(\lambda) = 1 \quad (2.13)$$

- Festkörper, die alle Strahlung absorbieren, hatten wir schon als „schwarze“ Körper kennengelernt

$$\alpha(\lambda) = \alpha = 1 \quad (2.14)$$

- „Graue“ Körper dagegen sind Körper, die wellenlängenunabhängige Strahlungseigenschaften ($\alpha(\lambda) = \alpha$, $\rho(\lambda) = \rho$, $\tau(\lambda) = \tau$) haben

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (2.15)$$

In nachstehender Abbildung 2.8 sind Messergebnisse für den spektralen Absorptionsgrad einer polierten bzw. eloxierten Aluminiumplatte im Bereich der Wärmestrahlung nach Whitaker (1977) wiedergegeben. Die Abnahme des Absorptionsgrads mit

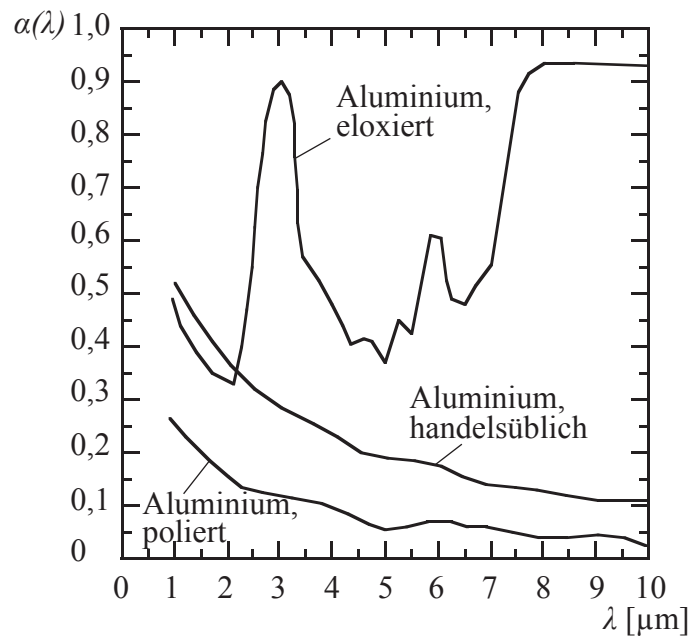


Abbildung 2.8: Absorptionsgrad von poliertem und eloxiertem Aluminium nach Whitaker (1977) bei 0°C

zunehmender Wellenlänge des polierten oder des handelsüblichen Aluminiums ist typisch für elektrische Leiter. Nichtleiter, wie die Oberflächenschicht des eloxierten Aluminiums, zeigen die entgegengesetzte Tendenz.

Wird analog zu den spektralen Eigenschaften eines Körpers die den gesamten Wellenlängenbereich charakterisierenden Werte des Reflexions-, Absorptions- und Transmissionsgrads definiert

$$\rho = \frac{\int_0^\infty \dot{q}_{\lambda\rho}'' d\lambda}{\int_0^\infty \dot{q}_{\lambda o}'' d\lambda}, \quad (2.16)$$

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \dot{q}_{\lambda\alpha}'' d\lambda}{\int_0^\infty \dot{q}_{\lambda o}'' d\lambda}, \quad (2.17)$$

$$\tau = \frac{\int_0^\infty \dot{q}_{\lambda\tau}'' d\lambda}{\int_0^\infty \dot{q}_{\lambda o}'' d\lambda}, \quad (2.18)$$

so folgt wieder

$$\rho + \alpha + \tau = 1. \quad (2.19)$$

Im Gegensatz zu den spektralen Werten sind diese Gesamtwerte nicht nur von der Temperatur des betrachteten Körpers abhängig. Da die einfallende Strahlung selber ebenfalls einen Ausgangskörper hat, sind die integralen Eigenschaften auch von dessen Temperatur abhängig.

Da in der Praxis selten ausreichende Informationen zur Wellenlängenabhängigkeit der Strahlungseigenschaften vorliegen und auch deren Berücksichtigung sehr aufwendig wäre, muss meist mit konstanten Mittelwerten gerechnet werden.

2.1.4 Kirchhoffsches Gesetz

Das Kirchhoffsche Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen der von einem Körper absorbierten und von ihm emittierten Strahlung. Betrachten wir zunächst die in Abbildung 2.9 skizzierte Versuchsanordnung, bei der zwei mit einem evakuierten Hohlraum versehene, nach außen adiabate Körper aus verschiedenen Materialien so angeordnet sind, dass ein kleines Loch die Hohlräume verbindet. Strahlung, die vom Hohlraum 1 durch das Loch in den Hohlraum 2 gelangt, wird in diesem nach mehreren Reflexionen nach und nach absorbiert. Für die aus dem Hohlraum 2 den

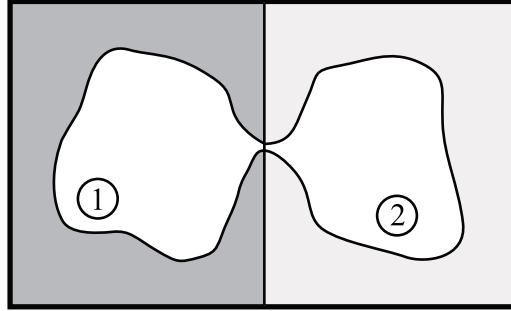


Abbildung 2.9: Strahlungsaustausch zwischen zwei Hohlräumen

Hohlraum 1 erreichende Strahlung gilt dasselbe. Im thermischen Gleichgewicht, das heißt, wenn der Temperatúrausgleich zwischen den Körpern erreicht ist, muss aufgrund des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik gelten

$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2}'' = \dot{q}_{2 \rightarrow 1}''$$

Daraus ist zu schließen, dass die Verschiedenheit der Wandmaterialien der beiden Hohlräume auf den Strahlungsfluss ohne Einfluss ist.

An dieser Aussage wird sich nichts ändern, wenn einer der beiden Hohlräume, zum Beispiel der Hohlraum 2, als schwarzer Körper ausgeführt wird. Wir erhalten

$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2}'' = \dot{q}_s'' \text{ oder allgemein } \dot{q}_{HR}'' = \dot{q}_s''$$

und stellen damit fest, dass die Strahlung eines beliebigen Hohlraums der eines schwarzen Körpers entspricht.

Wird nun in einen solchen Hohlraum HR ein kleiner, nicht schwarzer Probekörper 1 mit der Oberfläche A_1 eingebracht, so ergibt sich im thermischen Gleichgewicht, dass der im Körper 1 absorbierte Anteil der vom Hohlraum auftreffenden Strahlung gleich sein muss der vom Körper 1 emittierten Strahlung. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Hohlraum schwarz strahlt, folgt

$$\alpha_1 \dot{q}_s'' A_1 = \dot{q}_{\epsilon 1}'' A_1 \quad (2.20)$$

Daraus ergibt sich

$$\alpha = \frac{\dot{q}_{\epsilon}''}{\dot{q}_s''} \quad (2.21)$$

und damit die Aussage des Kirchhoffschen Gesetzes, dass der Absorptionsgrad eines Körpers gleich ist dem Verhältnis der von diesem Körper emittierten Strahlung, bezogen auf die eines schwarzen Körpers gleicher Temperatur. Dieses Verhältnis

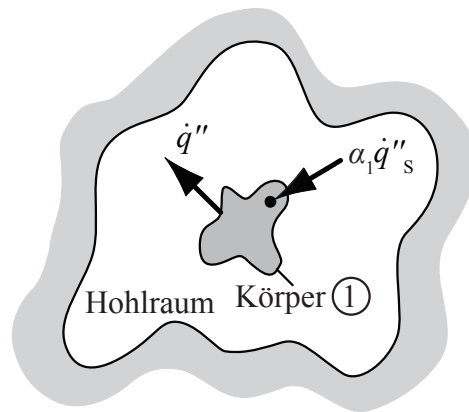


Abbildung 2.10: Strahlungsaustausch zwischen einem Körper und einem Hohlraum

wird als Emissionsgrad ϵ bezeichnet.

$$\epsilon \equiv \frac{\dot{q}''_{\epsilon}}{\dot{q}''_s} \quad (2.22)$$

Damit folgt die übliche Schreibweise des Kirchhoffschen Gesetzes

$$\alpha = \epsilon. \quad (2.23)$$

Streng genommen gilt das Kirchhoffsche Gesetz nur für monochromatische Strahlung, das heißt

$$\alpha(\lambda) = \epsilon(\lambda). \quad (2.24)$$

Da jedoch zur Lösung vieler technischer Aufgabenstellungen aus Gründen des Rechenaufwands, oder weil spektrale Daten nicht vorliegen, die Gl. (2.23) herangezogen werden muss, sollen im folgenden die Voraussetzung der Gültigkeit des Kirchhoff-

schen Gesetzes angegeben werden: Dazu muss der Gesamtemissionsgrad ϵ durch Integration der spektralen Wärmestromdichten ermittelt werden

$$\epsilon = \frac{\dot{q}_{\epsilon}''}{\dot{q}_s''} = \frac{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda\epsilon}'' d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda s}'' d\lambda}. \quad (2.25)$$

Wird entsprechend Gl. (2.22) ein spektraler Emissionsgrad definiert

$$\epsilon(\lambda) \equiv \frac{\dot{q}_{\lambda\epsilon}''}{\dot{q}_{\lambda s}''}, \quad (2.26)$$

so wird aus Gl. (2.25) die von der Art und der Temperatur des betrachteten Körpers abhängige Beziehung

$$\epsilon = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon(\lambda) \dot{q}_{\lambda s}'' d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda s}'' d\lambda} = \epsilon(T_K). \quad (2.27)$$

Für den Gesamtabsorptionsgrad α ergibt sich daher

$$\alpha = \frac{\dot{q}_{\alpha}''}{\dot{q}_o''} = \frac{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda\alpha}'' d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda o}'' d\lambda}. \quad (2.28)$$

Mit

$$\alpha \equiv \frac{\dot{q}_{\lambda\alpha}''}{\dot{q}_{\lambda o}''} \quad (2.29)$$

folgt hier aus Gl. (2.28) die folgende, von der Art und den Temperaturen des betrachteten und strahlenden Körpers abhängige Beziehung

$$\alpha = \frac{\int_0^{\infty} \alpha(\lambda) \dot{q}_{\lambda o}'' d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{\lambda o}'' d\lambda} = \alpha(T_K, T_{Str}). \quad (2.30)$$

Der Vergleich der Gln. (2.27) und (2.30) zeigt, dass das für den Gesamtemissionsgrad ϵ und Gesamtabsorptionsgrad α formulierte Kirchhoffsche Gesetz, Gl. (2.23), wegen der verschiedenartigen Temperaturabhängigkeit und spektralen Verteilung der auftreffenden und emittierten Strahlung nicht allgemeingültig sein kann.

Zwei Sonderfälle, für die das Kirchhoffsche Gesetz für die Gesamtstrahlungseigenschaften gültig bleibt, können aus den Gln. (2.27) und (2.30) abgeleitet werden:

- der Strahler ist ein schwarzer oder grauer Körper und seine Temperatur ist gleich der des betrachteten Körpers, $T_{Str} = T_K$
- die Oberflächen des Körpers sind grau, das heißt, ihr Absorptionsgrad ist unabhängig von der Wellenlänge

Vor allem durch den zweiten Sonderfall kann in vielen Anwendungsfällen die näherungsweise Gültigkeit des Kirchhoffschen Gesetzes für die Gesamtstrahlungseigenschaften begründet werden.

Bei hohen Genauigkeitsansprüchen ist die Kenntnis der monochromatischen Strahlungseigenschaften notwendig.

In nachstehender Abbildung 2.11 ist die Strahlungsstromdichte eines wirklichen Kör-

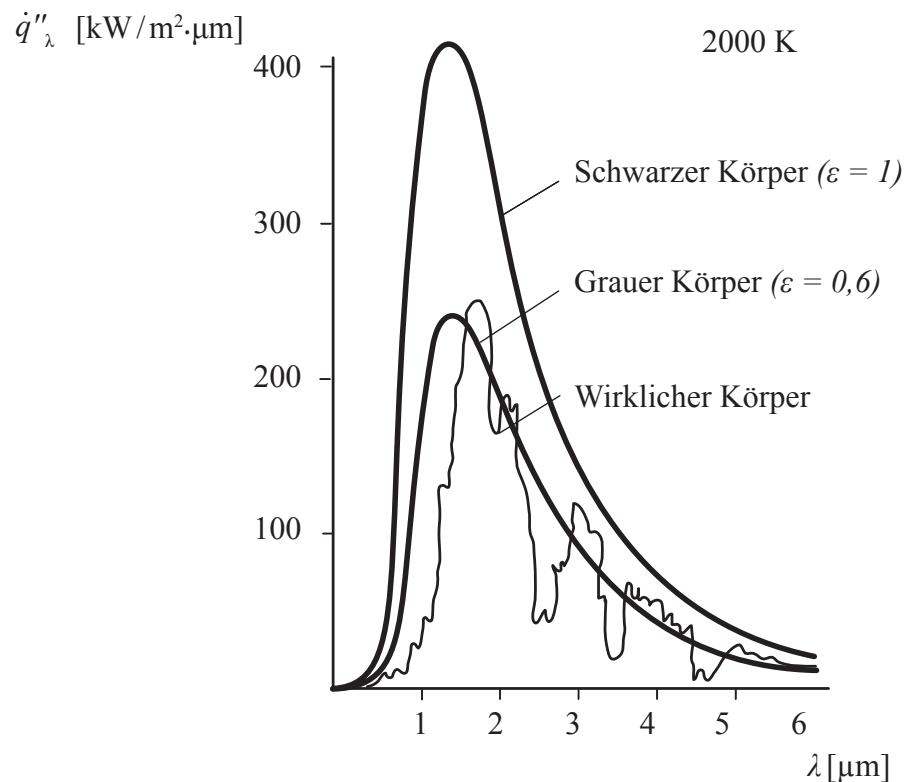


Abbildung 2.11: Spektrale Strahlungsstromdichte des schwarzen, eines grauen und eines wirklichen Körpers

pers bei $T = 2000 \text{ K}$ dargestellt. Zum Vergleich ist das Ergebnis des Planckschen Verteilungsgesetzes, Gl. (2.4), für einen schwarzen und einen grauen Körper mit eingetragen. Eine ausführlichere Zusammenstellung von Werten des Emissionsgrads verschiedener Materialien findet sich im Anhang A6.

2.1.5 Richtungsabhängige und diffuse Strahlung

Zusammenstellungen von Angaben zum Emissionsgrad verschiedener Stoffe, siehe zum Beispiel Tabelle im Anhang, geben meist Ergebnisse von Emissionsmessungen über den gesamten Halbraum wieder. Bei vielen technischen Oberflächen ist jedoch die Richtungsabhängigkeit zu beachten, denn nur ideale Oberflächen wie die des schwarzen oder grauen Körpers strahlen diffus, das heißt richtungsunabhängig. Die in den nachstehenden Abbildung 2.12 und 2.13 wiedergegebenen Messergebnisse zeigen, dass beispielsweise bei elektrisch leitenden Materialien die richtungsabhängigen Emissionsgrade mit zunehmenden Betrachtungswinkel φ ausgehend von sehr kleinen Werten zunehmen. Anders bei den Nichtleitern, die über einen weiten Bereich der Betrachtungswinkel einen nahezu gleichen, relativ großen Emissionsgrad aufweisen.

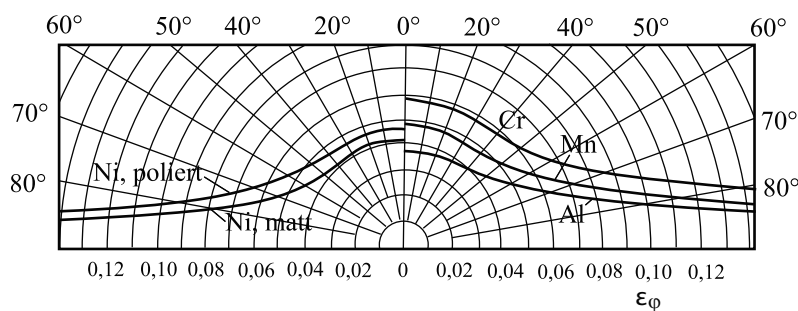


Abbildung 2.12: Richtungsabhängiges Emissionsverhalten verschiedener elektrischer Leiter

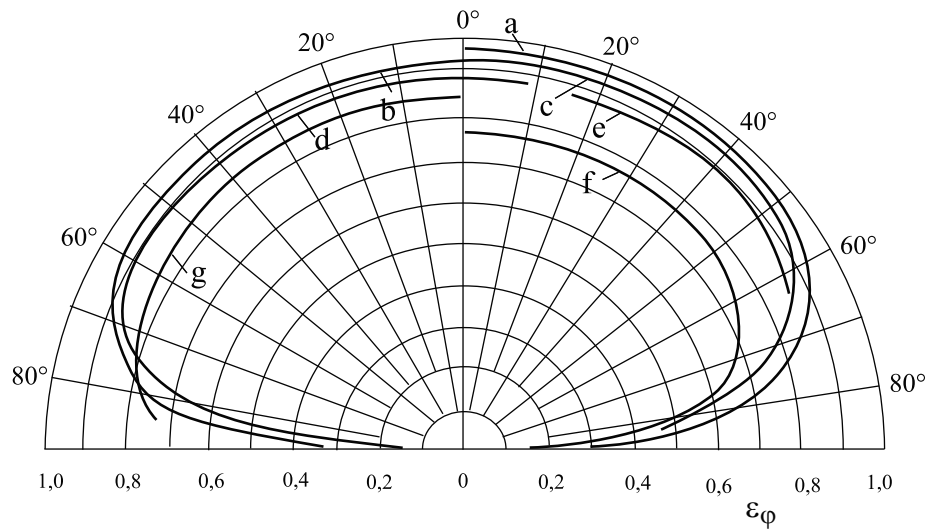


Abbildung 2.13: Richtungsabhängigkeit des Emissionsgrades verschiedener elektrisch nicht leitender Materialien nach Eckert (1966) ; (a) nasses Eis, (b) Holz, (c) Glas, (d) Papier, (e) Kreide, (f) Kupferoxid, (g) Aluminiumoxid bei Raumtemperatur

2.2 Strahlungsaustausch

2.2.1 Strahldichte

Bisher wurden die Strahlungseigenschaften behandelt, die zur Beschreibung des von einem Körper abgegebenen Wärmestroms notwendig sind. Interessiert jedoch nicht der insgesamt vom Körper abgegebene Wärmestrom, sondern der Wärmeaustausch zwischen diesem und einem anderen im Raum angeordneten Körper, so ist die Kenntnis der in Richtung dieses Körpers abgestrahlten und von diesem empfangenen Strahlung notwendig.

Ist über einem Flächenelement dA eines Körpers eine Halbkugel mit dem Radius r zentriert angeordnet, so wird der gesamte vom Flächenelement dA abgestrahlte Wärmestrom diese Halbkugel durchdringen, vgl. Abbildung 2.14.

Ein auf der Halbkugel angeordnetes Flächenelement da wird von dem folgenden Energiestrom, ausgehend von dA , durchdrungen

$$d\dot{Q}(\varphi, \psi) = L d\Omega dA \cos \varphi, \quad (2.31)$$

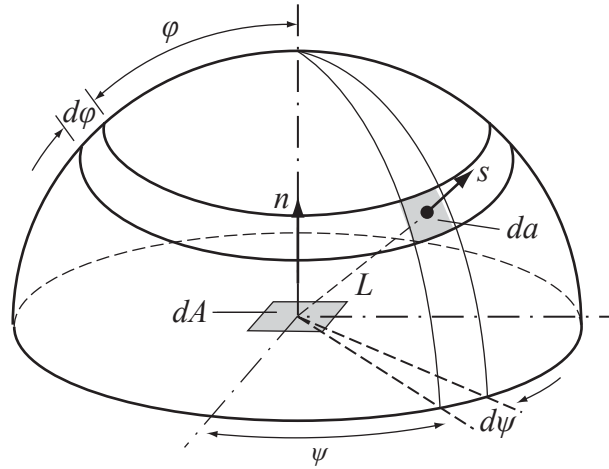


Abbildung 2.14: Strahlung zwischen einem Flächenelement und einer Halbkugel

wobei L die Strahldichte beschreibt. Die Strahldichte ist damit der von der in Strahlrichtung projizierten Fläche $dA \cos \varphi$ pro Raumwinkeleinheit $d\Omega$ abgestrahlte Energiestrom, wobei der Raumwinkel $d\Omega$ mit der Dimension „Steradian“ [sr] das Verhältnis aus der Fläche des Elements auf der Halbkugel und dem Quadrat des Kugelradius

$$d\Omega = \frac{da(\varphi, \psi)}{r^2} \quad (2.32)$$

darstellt.

Für diffus, das heißt richtungsunabhängig strahlende Oberflächen, ist die Strahldichte konstant. Der in den Raumwinkel abgestrahlte Energiestrom $d\dot{Q}(\varphi, \psi)$ ist damit proportional zur Projektionsfläche $dA \cos \varphi$. Die Strahldichte L ist anschaulich die vom Auge wahrgenommene Strahlungsintensität einer Oberfläche, die bei diffus strahlenden Körpern unabhängig vom Betrachtungswinkel ist. Die Strahlung kann dabei ihre Ursache sowohl in der Emission des strahlenden Körpers haben als auch reflektierte oder transmittierte Anteile einer anderen Strahlungsquelle beinhalten. Der das Flächenelement da beschreibende Raumwinkel lässt sich schließlich noch durch geometrische Beziehungen ausdrücken

$$d\Omega = \frac{da(\phi, \psi)}{r^2} = \frac{r \sin \varphi d\psi}{r^2} = \sin \varphi d\varphi d\psi \quad (2.33)$$

Damit folgt aus Gl. (2.31)

$$d\dot{Q}(\varphi, \psi) = L \sin \varphi \cos \varphi d\phi d\psi dA \quad (2.34)$$

woraus sich durch Integration über den Halbraum der Zusammenhang zwischen der Strahldichte und der vom Flächenelement durch Strahlung abgegebenen Wärmestromdichte

$$\dot{q}'' = \pi L \quad (2.35)$$

ergibt. Diese Wärmestromdichte wird häufig durch den Begriff „Flächenhelligkeit“ umschrieben.

2.2.2 Strahlungsaustausch zwischen zwei Körpern

Stehen zwei Körper verschiedener Temperatur mit diffus strahlenden Oberflächen im Strahlungsaustausch miteinander, strahlt der heißere Körper mehr Strahlungswärme an den kälteren ab als umgekehrt, so dass ein Nettowärmefluss vom heißeren zum kälteren Körper beobachtet werden kann. Bei einer beliebigen Anordnung der Körper wird von einem Flächenelement dA_1 des Körpers 1 der Wärmestrom $d\dot{Q}_{1 \rightarrow 2}$ an das Flächenelement dA_2 des Körpers 2 abgegeben, vgl. Abbildung 2.15. Mit Gl. (2.31)

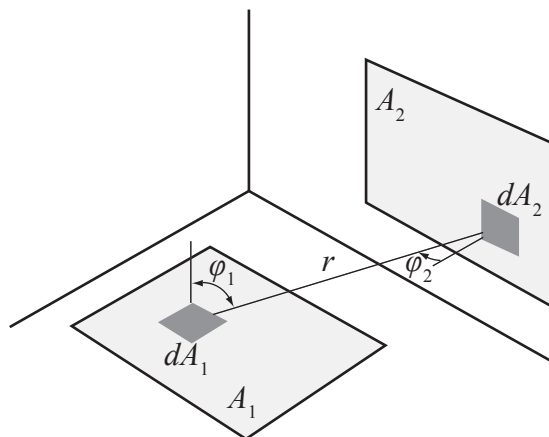


Abbildung 2.15: Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächen

wird

$$d\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = L_1 \cos \varphi_1 d\Omega_1 dA_1 \quad (2.36)$$

Da das Flächenelement dA_2 nicht senkrecht auf der Verbindungslinie r der beiden Flächenelemente steht, darf zur Ermittlung des Raumwinkels nur der projizierte Anteil der Fläche dA_2 zugrunde gelegt werden, das heißt

$$d\Omega_1 = \frac{dA_2 \cos \varphi_2}{r^2} \quad (2.37)$$

Damit folgt

$$d\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = L_1 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (2.38)$$

Eine entsprechende Beziehung ergibt sich für den vom Flächenelement dA_2 abgestrahlten und das Flächenelement dA_1 erreichenden Wärmestrom $d\dot{Q}_{2 \rightarrow 1}$

$$d\dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = L_2 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (2.39)$$

Daraus folgt für den Nettostrahlungsaustausch zwischen den beiden Körpern

$$d\dot{Q}_{1 \rightleftharpoons 2} = \int_{A_2} \int_{A_1} (L_1 - L_2) \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (2.40)$$

Da hier nur diffus strahlende Oberflächen mit über der Körperoberfläche einheitlichen Strahlungseigenschaften betrachtet werden, kann vereinfacht geschrieben werden

$$d\dot{Q}_{1 \rightleftharpoons 2} = (L_1 - L_2) \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (2.41)$$

Werden schließlich die Strahldichten L mit Hilfe der Gl. (2.35) durch die Wärmestromdichten \dot{q}'' ersetzt, so folgt

$$d\dot{Q}_{1 \rightleftharpoons 2} = (\dot{q}_1'' - \dot{q}_2'') \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (2.42)$$

Die zweifache Integration über die Oberfläche der beiden strahlenden Körper beinhaltet nur noch Geometriegrößen und keine Strahlungseigenschaften mehr, sie ist aber normalerweise sehr aufwendig und kann oft nur mit numerischen, grafischen oder auch fotografischen Methoden gelöst werden. Für eine große Anzahl typischer

Körperanordnungen sind die Ergebnisse in der Literatur verfügbar. Üblicherweise werden diese Ergebnisse in Form von „Einstrahlzahlen“ wiedergegeben.

Die Einstrahlzahl Φ_{12} ist der Anteil des von der Fläche A_1 abgegebenen Strahlungsstroms, der auf die Fläche A_2 trifft

$$\Phi_{12} = \frac{\dot{Q}_{1 \rightarrow 2}}{\dot{q}_1'' A_1} \quad (2.43)$$

Steht die Fläche A_1 im direkten Strahlungsaustausch mit n anderen Flächen, muss gelten

$$\Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{13} + \dots + \Phi_{1n} = 1 \quad (2.44)$$

Mit den Gln. (2.38) und (2.43) ergibt sich nach Integration eine nur von geometrischen Größen abhängige Beziehung für die Einstrahlzahl Φ_{12}

$$\Phi_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (2.45)$$

Für die Einstrahlzahl Φ_{21} folgt analog

$$\Phi_{21} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (2.46)$$

Wegen der Identität der Doppelintegrale der Gln. (2.45) und (2.46) gilt die Reziprozitätsbeziehung

$$A_1 \Phi_{12} = A_2 \Phi_{21} \quad (2.47)$$

und schließlich mit Gl. (2.42)

$$\dot{Q}_{1 \rightleftharpoons 2} = A_1 \Phi_{12} (\dot{q}_1'' - \dot{q}_2'') \quad (2.48)$$

$$= A_2 \Phi_{21} (\dot{q}_1'' - \dot{q}_2'') \quad (2.49)$$

Handelt es sich bei den beiden Körpern um schwarze Körper, umfasst die Wärmestromdichte nur emittierte Strahlung, für die das Stefan-Boltzmannsche Gesetz, Gl. (2.6), gilt. Hieraus folgt

$$\dot{Q}_{1\Rightarrow 2} = A_1 \Phi_{12} \sigma \left[(T_1)^4 - (T_2)^4 \right] \quad (2.50)$$

$$= A_2 \Phi_{21} \sigma \left[(T_1)^4 - (T_2)^4 \right] \quad (2.51)$$

Im folgenden sind beispielhaft Diagramme zur Ermittlung der Einstrahlzahlen von parallel angeordneten (Abbildung 2.16) bzw. senkrecht aufeinanderstehenden (Abbildung 2.17) rechteckigen Platten nach Holman (1976) wiedergegeben, mit deren Hilfe zum Beispiel der direkte Strahlungsaustausch zwischen zwei Wänden eines Raumes ermittelt werden könnte.

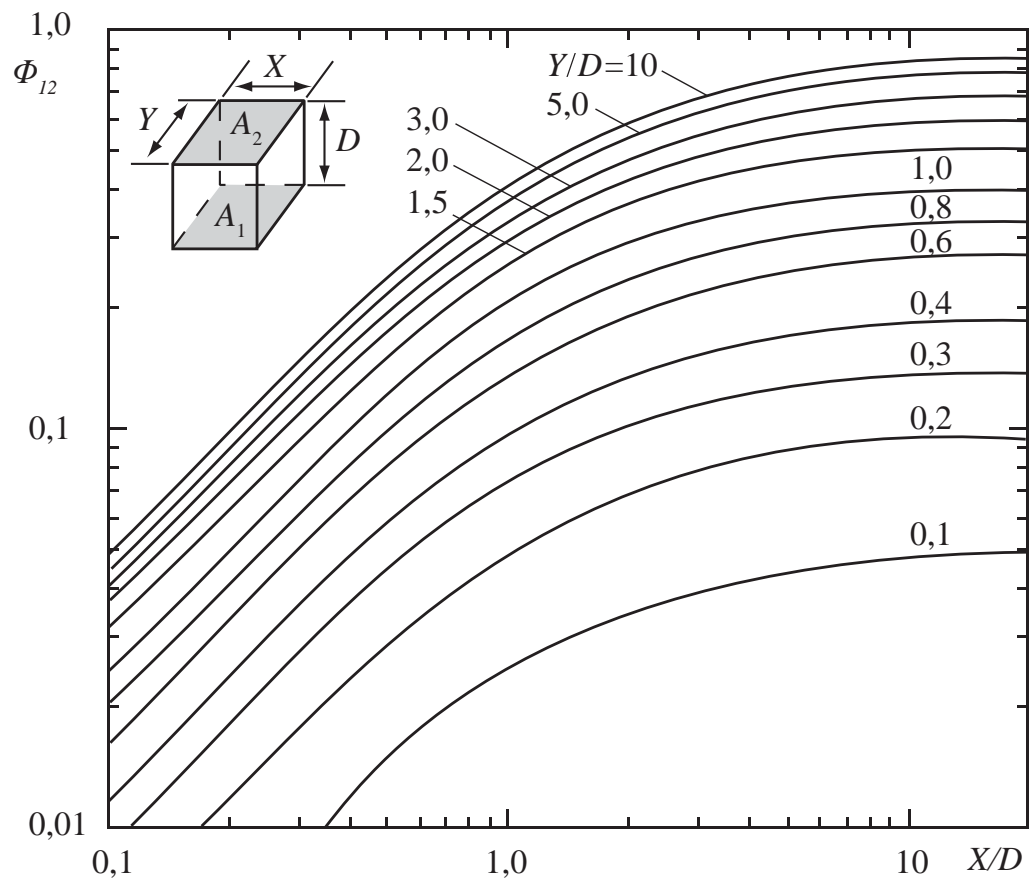


Abbildung 2.16: Einstrahlzahl für den Strahlungsaustausch zwischen parallelen rechteckigen Flächen nach Holman (1976)

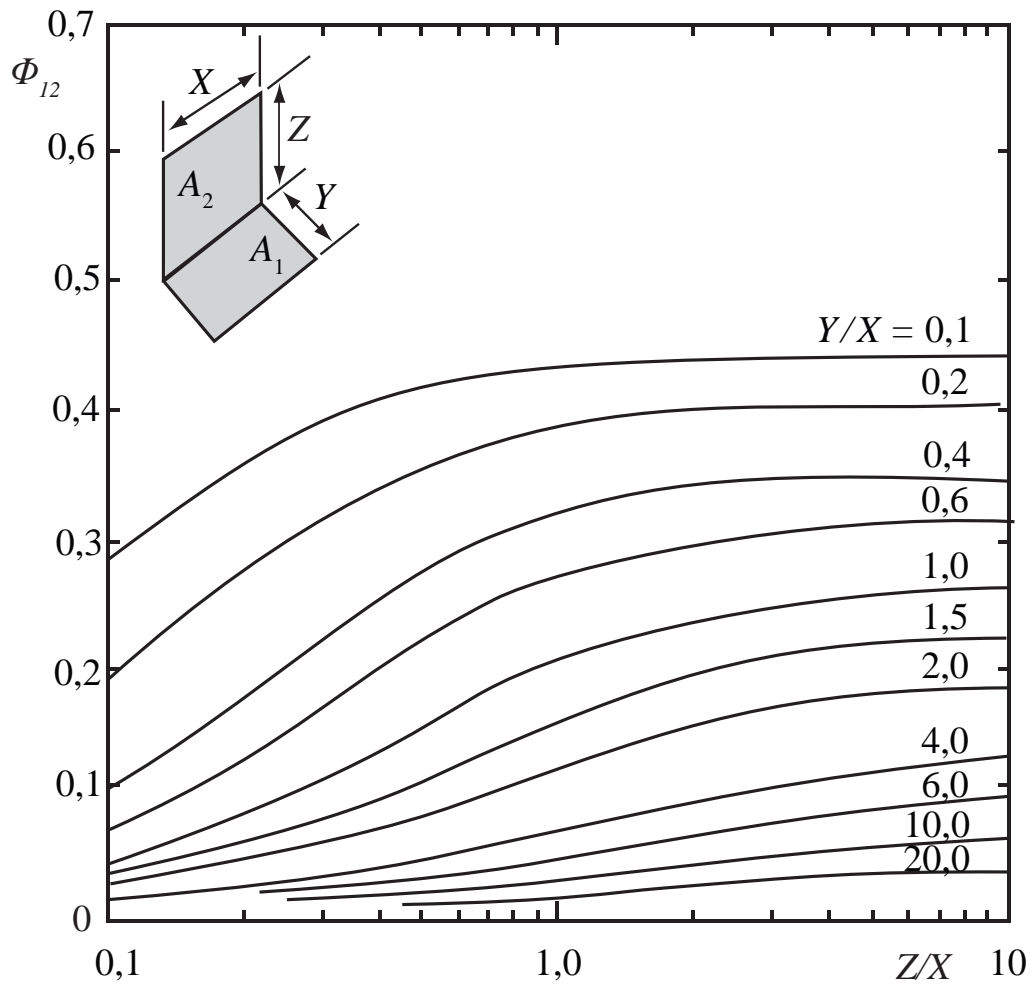


Abbildung 2.17: Einstrahlzahl für den Strahlungsaustausch zwischen senkrecht aufeinander stehenden rechteckigen Flächen nach Holman (1976)

2.2.3 Strahlungsaustausch zwischen zwei grauen Oberflächen

Für den Sonderfall, dass die im Strahlungsaustausch miteinander stehenden Körper schwarz strahlen, lässt sich bei bekannter Einstrahlzahl durch Einführung des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes in die Gln. (2.48) und (2.49) direkt die Abhängigkeit des Nettostrahlungsaustauschs von den Körpertemperaturen angeben, Gln. (2.50) und (2.51). Bei grauen Körpern umfassen die Flächenhelligkeiten außer der Emission jedoch auch Anteile reflektierter oder transmittierter Strahlung, da die ankommende Strahlung nicht wie bei einem schwarzen Körper vollständig absorbiert wird. Für den Strahlungsaustausch zwischen zwei strahlungsundurchlässigen Festkörpern gilt

$$\dot{Q}_{1\leftrightarrow 2} = \Phi_{12}\dot{Q}_1 - \Phi_{21}\dot{Q}_2, \quad (2.52)$$

wobei zum Beispiel $\dot{Q}_1 = A_1 \dot{q}_1'' = \dot{Q}_{1,\epsilon} + \dot{Q}_{1,\rho}$ ist.

Die Auswertung dieser Gleichungen ist im allgemeinen sehr aufwendig. Für einige einfache, aber häufig vorkommende geometrische Anordnungen lassen sich jedoch geschlossene Beziehungen für den Strahlungsaustausch angeben.

2.2.4 Strahlungsaustausch zwischen zwei unendlich ausgedehnten grauen Platten

Hier wird aus

$$\dot{Q}_1 = A_1 \dot{q}_1'' = \dot{Q}_{1,\epsilon} + \dot{Q}_{1,\rho} = \epsilon_1 A_1 \dot{q}_{s1}'' + \rho_1 A_2 \dot{q}_2'' \quad (2.53)$$

Mit $\rho + \alpha = 1$ und unter Berücksichtigung des Kirchhoffschen Gesetzes, $\alpha = \epsilon$, folgt

$$\dot{q}_1'' = \epsilon_1 \dot{q}_{s1}'' + (1 - \epsilon_1) \dot{q}_2'' \quad (2.54)$$

und entsprechend

$$\dot{q}_2'' = \epsilon_2 \dot{q}_{s2}'' + (1 - \epsilon_2) \dot{q}_1''. \quad (2.55)$$

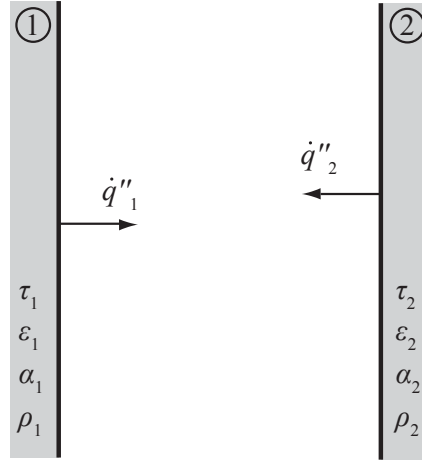


Abbildung 2.18: Strahlungsaustausch zwischen zwei grauen Körpern

Aus den Gln. (2.54) und (2.55) lassen sich die beiden Flächenhelligkeiten \dot{q}''_1 und \dot{q}''_2 ermitteln

$$\dot{q}''_1 = \frac{\epsilon_1 \dot{q}''_{s1} + (1 - \epsilon_1) \epsilon_2 \dot{q}''_{s2}}{1 - (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)}, \quad (2.56)$$

$$\dot{q}''_2 = \frac{\epsilon_2 \dot{q}''_{s2} + (1 - \epsilon_2) \epsilon_1 \dot{q}''_{s1}}{1 - (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)}. \quad (2.57)$$

Durch Einsetzen in Gl. (2.42) unter Beachtung von $\Phi_{12} = \Phi_{21} = 1$ ergibt sich für den Nettostrahlungsaustausch die Beziehung

$$\dot{q}''_{1 \rightleftharpoons 2} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} (\dot{q}''_{s1} - \dot{q}''_{s2}), \quad (2.58)$$

die schließlich noch durch Einführung des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes, Gl. (2.6), in Abhängigkeit von den Körpertemperaturen geschrieben werden kann

$$\dot{q}''_{1 \rightleftharpoons 2} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \sigma (T_1^4 - T_2^4). \quad (2.59)$$

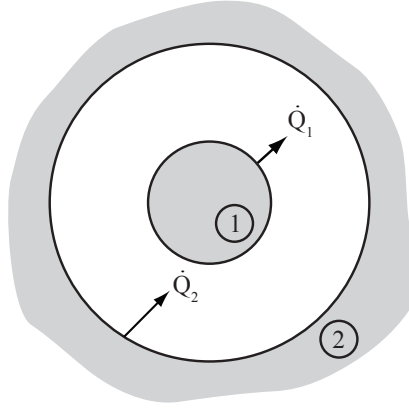


Abbildung 2.19: Strahlungsaustausch zwischen zwei umschließenden Körpern

2.2.5 Strahlungsaustausch zwischen zwei sich umschließenden grauen Körpern

Bei diesem Beispiel wird

$$\dot{Q}_1 = A_1 \dot{q}_1'' = \dot{Q}_{1,\epsilon} + \dot{Q}_{1,\rho} = \epsilon_1 A_1 \dot{q}_{s1}'' + \rho_1 (\Phi_{21} \dot{q}_2'' A_2) \quad (2.60)$$

oder unter Berücksichtigung des Kirchhoffschen Gesetzes und der Reziprozitätsbeziehung $\Phi_{12}A_1 = \Phi_{21}A_2$

$$\dot{Q}_1 = A_1 \dot{q}_1'' = A_1 (\epsilon_1 \dot{q}_{s1}'' + (1 - \epsilon_1) \Phi_{12} \dot{q}_2''). \quad (2.61)$$

Bei sich umschließenden Körpern nimmt die Einstrahlzahl Φ_{12} den Wert 1 an und damit

$$A_1 \dot{q}_1'' = A_1 (\epsilon_1 \dot{q}_{s1}'' + (1 - \epsilon_1) \dot{q}_2''). \quad (2.62)$$

Für den vom Körper 2 abgegebenen Wärmestrom ergeben sich zusätzliche Anteile der reflektierten Strahlung, die ihren Ursprung in der Flächenhelligkeit des Körpers selbst haben, der Körper „sieht sich selbst“:

$$\dot{Q}_2 = A_2 \dot{q}_2'' = \epsilon_2 A_2 \dot{q}_{s2}'' + \rho_2 (\Phi_{12} \dot{q}_1'' A_1) + \rho_2 (\Phi_{22} \dot{q}_2'' A_2) \quad (2.63)$$

Unter Berücksichtigung, dass $\Phi_{12} = 1$ und $\Phi_{21} = \frac{A_1 \Phi_{12}}{A_2} = \frac{A_1}{A_2}$ ist, wird

$$A_2 \dot{q}_2'' = \epsilon_2 A_2 \dot{q}_{s2}'' + (1 - \epsilon_2) \dot{q}_1'' A_1 + (1 - \epsilon_2) \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right) \dot{q}_2'' A_2. \quad (2.64)$$

Aus den Gl. (2.62) und (2.64) lassen sich die Flächenhelligkeiten der beiden Körper bestimmen, die durch Einsetzen in Gl. (2.52) nach einigen Umformungen auf eine Beziehung für den Strahlungsaustausch führen

$$\dot{Q}_{1 \rightleftharpoons 2} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4). \quad (2.65)$$

2.3 Strahlung in interagierenden Medien[†]

In den bisher betrachteten Fällen fand der Wärmeaustausch nur zwischen einzelnen Oberflächen statt, an denen die Strahlung entweder emittiert, absorbiert, reflektiert oder transmittiert wird. Beim Transport zwischen den Flächen erfolgte keine Beeinflussung der Strahlung. Diese Betrachtung kann für alle Fälle verwendet werden, bei denen die Strahlung und das Medium zwischen den im Strahlungsaustausch stehenden Flächen nicht aufeinander wirken. Wenn jedoch eine Wechselwirkung zwischen Strahlung und durchstrahltem Medium stattfindet, so muss die bisherige Betrachtungsweise der Wärmestrahlung erweitert werden. Hier wird von einem Strahlungsaustausch mit beteiligtem Medium gesprochen.

Typische Beispiele für Medien, die am Strahlungsaustausch beteiligt sind, sind Glas-schmelzen, Milchglas oder auch Gase unter bestimmten Bedingungen. Der Treib-hauseffekt in der Erdatmosphäre beruht beispielsweise auf der Wechselwirkung der in der Atmosphäre enthaltenen mehratomigen Gase (z.B. CO_2 , H_2O , CH_4) mit Wär-mestrahlung. Aber auch der Wärmeaustausch in der Brennkammer eines fossil gefeu-erten Dampferzeugers wird in wesentlichen Teilen von der Wechselwirkung zwischen Gas und Wärmestrahlung bestimmt.

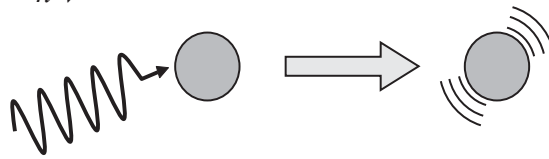
Im Gegensatz zum bisher betrachteten Strahlungsaustausch zwischen Oberflächen findet beim Vorhandensein von beteiligten Medien auch ein Energieaustausch ent-lang des Strahlungspfadestatt. Da nun nicht nur die Beschaffenheit, die geome-trische Anordnung und die Temperatur der begrenzenden Flächen für den Wärme-transport in einem gegebenen Raum maßgeblich sind, gewinnt die Betrachtung der Strahlung an Komplexität. Zusätzlich zu den genannten Parametern beeinflussen nun auch die Beschaffenheit und der thermodynamische Zustand des durchstrahlten Mediums den Strahlungsaustausch. Die nachfolgenden Inhalte stützen sich auf das Buch “Technische Thermodynamik” von Bosnjakovic u. Knoche (1998b).

2.3.1 Physikalische Effekte bei der Strahlungsinteraktion

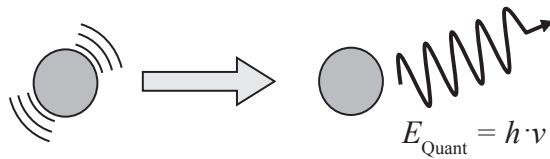
Grundsätzlich können drei verschiedene Effekte der Interaktion von Strahlung mit Materie beschrieben werden. Diese Beschreibung gilt nicht nur für die Wärmestrahlung, sondern umfasst allgemein alle Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Ma-terie auf atomarer beziehungsweise molekularer Ebene.

- Absorption von Strahlung (Abbildung 2.20(a)). Dabei wird ein Strahlungsquant von der betrachteten Materie „eingefangen“ und in innere Energie umgewandelt. Je nach Energie des absorbierten Quants erfolgt dabei ein Wechsel zwischen unterschiedlichen möglichen Energiezuständen des absorbierenden Moleküls. Dabei kann dessen Energieaufnahme in unterschiedliche Mechanismen erfolgen. Beispielsweise können sich bei der Energieaufnahme die Vibrations- und Rotationszustände des Moleküls ändern oder Elektronen auf Orbitale mit einem höheren Energiegehalt befördert werden. Mathematisch wird dieser Effekt in Abschnitt 2.3.2 beschrieben, die physikalische Beschreibung für Gase erfolgt im Kapitel 2.4.
- Emission von Strahlung (Abbildung 2.20(b)). Hierbei handelt es sich um die Umkehrung der Absorption, es wird also ein Strahlungsquant „freigesetzt“. Dabei wird die innere Energie der aussendenden Materie verringert. Die Freisetzung erfolgt über die gleichen Mechanismen wie bei der Absorption. Mathematisch wird die Emission in Abschnitt 2.3.3 beschrieben.
- Streuung von Strahlung (Abbildung 2.20(c)). Hierbei wird die Strahlung von ihrem ursprünglichen Pfad abgelenkt. Abhängig vom Mechanismus der Streuung wird sie auf verschiedene Raumrichtungen verteilt, wobei sich auch die Energie des gestreuten Quants ändern kann.

$$E_{\text{Quant}} = h \cdot \nu$$

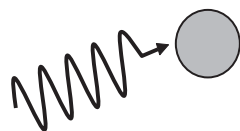


(a) Absorption eines Strahlungsquants durch ein Molekül



(b) Emission eines Strahlungsquants durch ein Molekül

$$E_{\text{Quant}} = h \cdot \nu$$



$$E_{\text{Quant}} = h \cdot \nu$$

(c) Streuung eines Strahlungsquants an einem Molekül

Abbildung 2.20: Mechanismen der Strahlung-Molekül-Interaktion

2.3.2 Strahlungsabschwächung

Hier wird spektrale Strahlung der Wellenzahl η mit der Wellenlängenbezogenen Intensität I_η in $\frac{W}{m^2} \frac{1}{m}$ betrachtet, die senkrecht auf ein Volumenelement der Dicke dS trifft (Abbildung 2.21). Dieses Volumenelement absorbiert und streut die Strahlung. Zunächst betrachten wir die Abschwächung der Strahlungsintensität durch diese beiden Effekte. Die Zunahme der Intensität durch lokale Emission und Streuung in die Richtung des betrachteten Pfades wird in einem späteren Abschnitt betrachtet. Beim Durchlaufen der Pfadlänge dS wird die Strahlung durch Absorption und Streu-

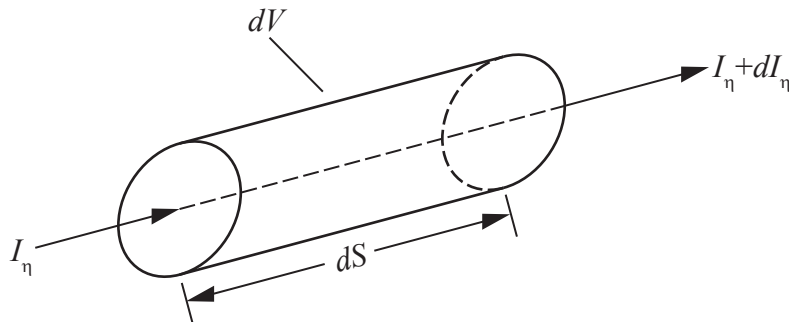


Abbildung 2.21: Senkrecht einfallende Strahlung auf das Bilanzvolumen dV .

ung abgeschwächt. Aus Experimenten ist bekannt, dass sich diese Abschwächung proportional zur lokalen Intensität verhält. Um den Zusammenhang zu beschreiben, wird ein Proportionalitätsfaktor K_η eingeführt:

$$\begin{aligned} dI_\eta &= -K_\eta I_\eta dS \\ \Leftrightarrow \frac{dI_\eta}{dS} &= -K_\eta \cdot I_\eta \end{aligned} \quad (2.66)$$

Dieser Koeffizient K_η wird als *spektraler Schwächungskoeffizient* bezeichnet. Er ist eine Stoffeigenschaft und hängt vom thermodynamischen Zustand und der Zusammensetzung des Materials in dV ab. Außerdem kann er für verschiedene Wellenzahlen beziehungsweise -längen deutlich unterschiedliche Werte annehmen.

Durch Integration von Gleichung 2.66 über eine bestimmte Weglänge S mit der

Anfangsintensität $I_\eta(0)$ ergibt sich der folgende Ausdruck. S^* ist hierbei die Integrationsvariable.

$$\begin{aligned} \int_{I_\eta(0)}^{I_\eta(S)} \frac{dI_\eta}{I_\eta} &= - \int_0^S K_\eta(S^*) dS^* \\ \Leftrightarrow I_\eta(S) &= I_\eta(0) \exp \left[- \int_0^S K_\eta(S^*) dS^* \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

Diese Gleichung (2.67) ist als *Gesetz von Bouguer* nach dem französischen Physiker Pierre Bouguer benannt. Dabei zeigt sich, dass die Strahlungsintensität beim Durchlaufen der Pfadlänge S exponentiell abgeschwächt wird. Der Exponent ist dabei das Integral über den lokalen Abschwächungskoeffizienten $K_\eta(S^*)$ entlang des Pfades. Unter der Annahme, dass der Abschwächungskoeffizient konstant ist (sich beispielsweise innerhalb eines Mediums nicht ändert), kann das Integral im Exponenten gelöst werden. Daraus ergibt sich eine vereinfachte Version des Gesetzes von Bouguer:

$$I_\eta(S) = I_\eta(0) \exp(-K_\eta \cdot S) \quad (2.68)$$

Der Exponentialfaktor in Gleichung 2.67 wird auch als *optische Dichte* $\kappa_\eta(S)$ für die entsprechende Pfadlänge bezeichnet (Gleichung 2.69). Diese Größe ist ein Maß für die Fähigkeit einer Schicht, Strahlung abzuschwächen: bei einer hohen optischen Dichte ($\kappa_\eta(S) \gg 1$) wird ein Strahlungspfad als *optisch dicht* bezeichnet; bei einer geringen optischen Dichte ($\kappa_\eta(S) \ll 1$) als *optisch dünn*. Dies wird auch im Bereich des sichtbaren Lichts anschaulich erkennbar: Eine Fensterglasscheibe ist optisch dünn, wohingegen eine Milchglasscheibe oder auch Transparentpapier optisch dicht sind.

$$\kappa_\eta = \int_0^S K_\eta(S^*) dS^* \quad (2.69)$$

Entsprechend den zwei Mechanismen - Absorption und Streuung - kann auch der Abschwächungskoeffizient als aus zwei weiteren Koeffizienten zusammengesetzt betrachtet werden: dem *Absorptionskoeffizienten* a_η sowie dem *Streukoeffizienten* $\sigma_{s,\eta}$, die jeweils die Abschwächung durch den entsprechenden Mechanismus beschreiben. Auf die Modellierung dieser Koeffizienten wird in einem späteren Absatz eingegan-

gen. Wie auch der Abschwächungskoeffizient hängen diese beiden Koeffizienten vom thermodynamischen Zustand des durchstrahlten Mediums ab:

$$K_{\eta}(p,T) = a_{\eta}(p,T) + \sigma_{s,\eta}(p,T) \quad (2.70)$$

Oft wird hierbei mit sogenannten Massen-Koeffizienten gearbeitet. Dabei werden der Absorptions- beziehungsweise der Streukoeffizient durch die lokale Dichte des absorbierenden beziehungsweise streuenden Stoffes geteilt. Dieser Ansatz resultiert aus der Überlegung, dass die Wahrscheinlichkeit der Interaktion zwischen einem Stoffteilchen und einem Strahlungsquant proportional zur Dichte des interagierenden Stoffes ist. Dieses Konzept des Massen-Koeffizienten korrespondiert mit dem in der Teilchenphysik verwendeten Wirkungsquerschnitt.

$$K_{\eta,m} = a_{\eta,m} + \sigma_{s,\eta,m} = \frac{K_{\eta}}{\rho} = \frac{a_{\eta}}{\rho} + \frac{\sigma_{s,\eta}}{\rho} \quad (2.71)$$

2.3.2.1 Absorptionskoeffizient

Häufig variiert der Absorptionskoeffizient a_{η} stark mit der Wellenzahl sowie der Temperatur und dem Druck. Umfangreiche Anstrengungen wurden unternommen, um a_{η} für verschiedene Gase, Flüssigkeiten und Festkörper sowohl experimentell als auch analytisch zu bestimmen. Die Berechnung auf analytischem Weg erfordert ein umfangreiches Verständnis quantenmechanische Vorgänge. Lediglich für sehr einfache Gase - beispielsweise Wasserstoff - können diese Berechnungen ohne größere Vereinfachungen durchgeführt werden. Nähere Betrachtungen dazu finden sich in Kapitel 2.4. Die starke Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Wellenzahl beziehungsweise -länge stellt eine der Hauptschwierigkeiten bei der Berechnung des Strahlungsaustausches dar. In Abbildung 2.22 ist der Verlauf des Absorptionskoeffizienten für Wasserdampf gezeigt. Deutlich ist die extreme Variation über kleine Wellenzahlbereiche zu erkennen. Strahlung mit einer Wellenzahl, die im Bereich eines hohen Absorptionskoeffizienten liegt, wird größtenteils absorbiert. Solche mit einer davon leicht abweichenden Wellenzahl erfährt hingegen kaum Absorption. Die Berechnung von Absorptionskoeffizienten durch Integration über sämtliche Spektrallinien ist sehr aufwändig. Daher sind vereinfachende Modelle nötig, die einen Mittelweg zwischen aufwändiger Berechnung und erzielbarer Genauigkeit darstellen.

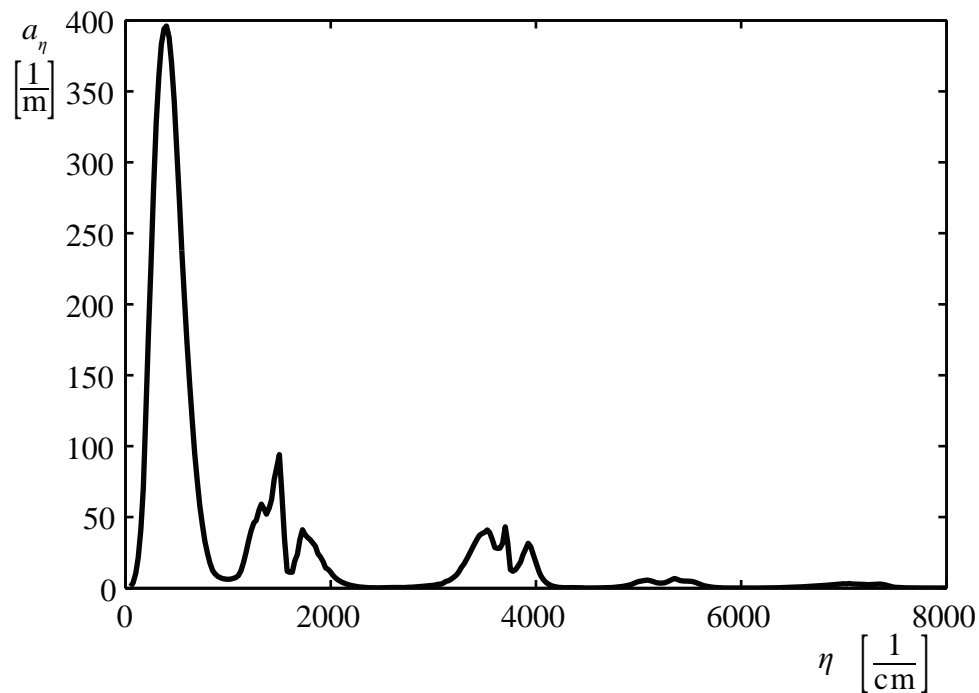


Abbildung 2.22: Verlauf des Absorptionskoeffizienten über der Wellenzahl für Wasserdampf bei einer Temperatur von 1500 K

2.3.2.2 Streukoeffizient

Auch der Streukoeffizient variiert im allgemeinen stark mit der Wellenzahl. Anders als der Absorptionskoeffizient verändert er sich jedoch kaum mit dem thermodynamischen Zustand des durchstrahlten Mediums. Im Wesentlichen sind die Größe und die Konzentration der streuenden Partikel maßgeblich für die Streuung der Strahlung. Für Partikel, deren Durchmesser wesentlich kleiner ist als die Wellenlänge der beteiligten Strahlung, kann die Streuung mittels der Theorie der *Rayleigh-Streuung* (benannt nach John W. Strutt, 3rd Baron Rayleigh) berechnet werden. Für Partikel, deren Durchmesser im Bereich der Wellenlänge der beteiligten Strahlung liegt, entwickelte Gustav Mie eine umfangreiche Streuungstheorie, die nach ihrem Urheber als *Mie-Streuung* bekannt ist. Diese Art der Streuung tritt hauptsächlich an größeren Partikeln, beispielsweise Kohle in Brennkammern, auf. Eine nähere Betrachtung der unterschiedlichen Phasenfunktionen ist in Abschnitt 2.3.4 zu finden.

2.3.3 Strahlungszuwachs

Neben den im vorherigen Abschnitt beschriebenen Effekten der Abschwächung findet auch ein Zuwachs an Strahlungsintensität entlang eines Strahlungspfades statt. Hierzu tragen - wie bei der Abschwächung - zwei Mechanismen bei:

- Durch lokale Emission des durchstrahlten Mediums wird zusätzliche Strahlung freigesetzt.
- Durch Streuung wird Strahlung, die aus einer anderen Richtung als der des betrachteten Strahlungspfades in ein Kontrollvolumen einfällt, in die betrachtete Richtung umgelenkt. Die Streuung erfolgt jedoch im Gegensatz zur Emission nicht gleichmäßig in alle Richtungen. Sie unterscheidet sich in Abhängigkeit des Winkels von der ursprünglichen Richtung der gestreuten Strahlung.

2.3.3.1 Emission

Die Emission in einem Bilanzvolumen dV kann über das Kirchhoff'sche Gesetz (Gleichung 2.24) mit der Absorption verknüpft werden. Wird entsprechend der Gleichung 2.66 eine Strahlabschwächung ausschließlich durch Absorption (ohne Streuung, $\sigma_{s,\eta} = 0$) betrachtet, so lässt sich für das Bilanzvolumen dV mit der Strahlungspfadlänge dS ein Absorptionsgrad α_η definieren:

$$\frac{dI_{\eta,\text{Absorption}}}{dS} = -a_\eta \cdot I_{\eta,\text{Absorption}} \Leftrightarrow \left| \frac{dI_\eta}{I_\eta} \right| = a_\eta \cdot dS = d\alpha_\eta \quad (2.72)$$

Hierauf lässt sich nun das Kirchhoff'sche Gesetz anwenden, welches besagt, dass der spektrale Absorptionsgrad gleich dem spektralen Emissionsgrad ist:

$$\alpha_\eta = \epsilon_\eta \quad (2.73)$$

Daraus lässt sich nun die Zunahme der Strahlung durch Emission ausdrücken. Dabei dient wie üblich die Schwarzkörperstrahlung $I_{\text{Schwarz},\eta}(T)$ bei der Temperatur T des Bilanzvolumens als Referenz:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\eta,\text{Emission}}}{I_{\text{Schwarz},\eta}} &= d\epsilon_{\eta} = d\alpha_{\eta} = a_{\eta} \cdot dS \\ \Leftrightarrow \frac{dI_{\eta,\text{Emission}}}{dS} &= a_{\eta} \cdot I_{\text{Schwarz},\eta} \end{aligned} \quad (2.74)$$

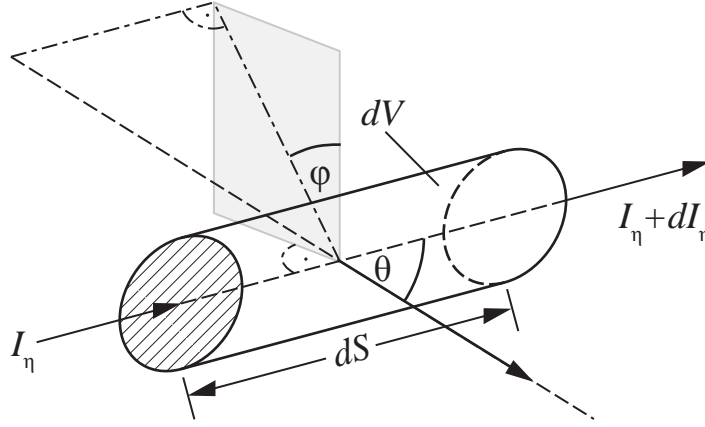
Aus dieser Formulierung wird ersichtlich, dass auch die Emission in einem interagierenden Medium durch den bereits eingeführten Absorptionskoeffizienten a_{η} beschrieben wird.

2.3.3.2 Streuung

Wie im vorherigen Abschnitt 2.3.2 erläutert, beschreibt der Streukoeffizient $\sigma_{s,\eta}$ die Abschwächung der Strahlung durch Streuung. Da bei der Streuung keine Umwandlung von Strahlungsenergie in eine andere Energieform auftritt, wird die “eingestreuete” Energie komplett wieder “ausgestreut”. Dabei erfolgt die Verteilung aber nicht gleichmäßig. Daher wird in einige Richtungen mehr Strahlung gestreut als in andere. Diese Verteilung wird mathematisch allgemein durch die *Phasenfunktion* beschrieben (Siehe auch Abschnitt 2.3.4). Deren “Funktionsweise” erläutert Abbildung 2.23. Es wird Strahlung betrachtet, die das Kontrollvolumen dV durchläuft. Der Anteil der gestreuten Intensität an der einfallenden Strahlungsintensität ergibt sich nach Gleichung 2.66 zu $dI_{\eta,s} = \sigma_{s,\eta} I_{\eta} dS$.

Die Umverteilung der gestreuten Intensität auf die unterschiedlichen Raumrichtungen muss nun beschrieben werden. Dazu wird die Raumrichtung durch die beiden Winkel θ und φ beschrieben: θ bezeichnet den Winkel zwischen der betrachteten Strahlungsrichtung s und der Richtung der gestreuten Strahlung; der Winkel φ bezeichnet den Umfangswinkel in der Ebene senkrecht zur betrachteten Strahlungsrichtung s . Diese beiden Winkel sind auch in Abbildung 2.23 gezeigt.

Die in die Richtung (θ, φ) gestreute Intensität wird nun definiert als die in diese Richtung pro Raumwinkel ω_s gestreute Strahlungsenergie, bezogen auf Raumwinkel


 Abbildung 2.23: Streuung von Strahlung in die Raumrichtung (φ, θ)

ω und Fläche A der *einfallenden* Strahlung. In differentieller und spektraler Schreibweise:

$$dI_{\eta,s}(\theta, \varphi) = \frac{\text{Spektrale Energie in die Richtung } (\theta, \varphi) \text{ gestreut}}{d\omega_s dA d\omega d\eta} \quad (2.75)$$

Die Phasenfunktion $\Phi(\theta, \varphi)$ stellt nun die Verbindung zwischen der in die Richtung (θ, φ) gestreuten Intensität $dI_{\eta,s}(\theta, \varphi)$ und der gesamten gestreuten Intensität $dI_{\eta,s}$ her:

$$dI_{\eta,s}(\theta, \varphi) = dI_{\eta,s} \frac{\Phi(\theta, \varphi)}{4\pi} = \sigma_{s,\eta} I_\eta dS \frac{\Phi(\theta, \varphi)}{4\pi} \quad (2.76)$$

Nun wird die Intensität betrachtet, die in den Raumwinkel $d\omega_s$ gestreut wird. Die spektrale Energie in diesem Raumwinkel ergibt sich zu $dI_{\eta,s} d\omega_s$. Die spektrale Energie für alle Raumwinkel folgt aus einer Integration über alle Raumwinkel: $\int_{\omega_s=0}^{4\pi} dI_{\eta,s}(\theta, \varphi) d\omega_s$. Das entspricht aber auch der gesamten gestreuten Intensität $dI_{\eta,s}$ nach den Gleichungen 2.66 und 2.70 :

$$dI_{\eta,s} = \sigma_{s,\eta} I_\eta dS = \int_{\omega_s=0}^{4\pi} dI_{\eta,s}(\theta, \varphi) d\omega_s \quad (2.77)$$

Unter Verwendung der Gleichungen 2.76 und 2.77 kann die Phasenfunktion definiert werden:

$$\Phi(\theta, \varphi) = \frac{dI_{\eta,s}(\theta, \varphi)}{\frac{1}{4\pi} \sigma_{s,\eta} I_\eta dS} = \frac{dI_{\eta,s}(\theta, \varphi)}{\frac{1}{4\pi} \int_{\omega_s=0}^{4\pi} dI_{\eta,s}(\theta, \varphi) d\omega_s} \quad (2.78)$$

Anschaulich kann die Phasenfunktion als das Verhältnis aus der in eine bestimmte, durch θ und φ beschriebene Richtung gestreute Intensität und der Intensität für isotrope Streuung (gleichmäßig in alle Richtungen) betrachtet werden. Für isotrope Streuung gilt demnach $\Phi = 1$. Die Integration von Gleichung 2.78 über alle Raumwinkel beziehungsweise Richtungen zeigt, dass die Phasenfunktion eine normalisierte Verteilungsfunktion ist:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\omega_s=0}^{4\pi} \Phi(\theta, \varphi) d\omega_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 1 \quad (2.79)$$

Je nach Mechanismus der Streuung kann die Phasenfunktion eine durchaus komplizierte Form annehmen.

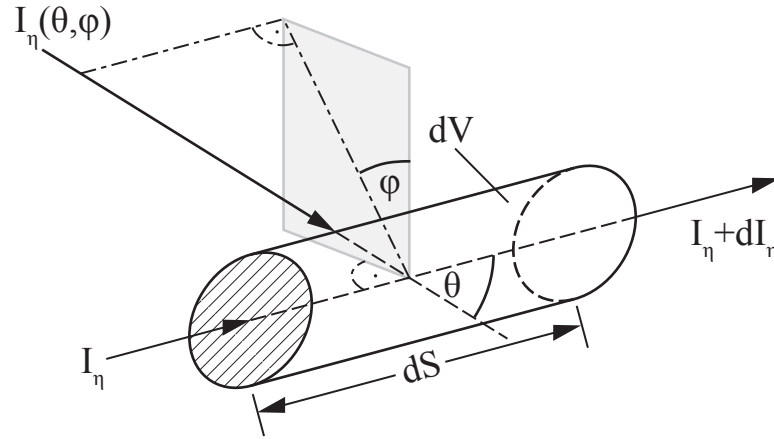


Abbildung 2.24: Streuung von Strahlungsintensität in die S-Richtung

Bis hierher wurde nur die Verteilung der gestreuten Strahlung auf die verschiedenen Richtungen betrachtet. Im nächsten Schritt wird nun die Verstärkung von Strahlung entlang eines Pfadinkrements dS durch Strahlung beschrieben, die aus anderen Richtungen eingestreut wird. Aus der durch (θ, φ) beschriebenen Richtung fällt Strahlung mit der Intensität $I_\eta(\theta, \varphi)$ in das Bilanzvolumen dV ein. Der in die Strahlrichtung S gestreute Anteil dieser Strahlung kann über die Phasenfunktion berechnet werden:

$$dI_\eta = \sigma_{s,\eta} I_\eta(\theta, \varphi) \frac{\Phi(\theta, \varphi)}{4\pi} \quad (2.80)$$

Wird nun über alle Richtungen beziehungsweise Raumwinkel integriert und wird die Änderung auf das durchlaufene Pfadinkrement dS in Richtung der verstärkten

Strahlung bezogen, so ergibt sich der gesamte Intensitätszuwachs durch eingestreuete Strahlung:

$$\begin{aligned}\frac{dI_{\eta,\text{eingestreu}}}{dS} &= \frac{\sigma_{s,\eta}}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_{\eta}(\theta,\varphi) \Phi(\theta,\varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{\sigma_{s,\eta}}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} I_{\eta}(\theta,\varphi) \Phi(\theta,\varphi) \, d\omega\end{aligned}\quad (2.81)$$

2.3.4 Streukoeffizienten und Phasenfunktionen

Um die für die Aufteilung des gestreuten Lichts auf die Raumwinkel zu beschreiben existieren verschiedene Ansätze, die Phasenfunktionen zu bestimmen. Auf diese wird in diesem Abschnitt eingegangen. Zunächst wird der Größenparameter x mit

$$x = \frac{\pi D}{\lambda} \quad (2.82)$$

eingeführt. D ist hier der Partikeldurchmesser, λ die Wellenlänge des einfallenden Lichts. Mit Partikel sind hier sowohl Atome und Moleküle bezeichnet, als auch mit Strahlung interagierende Partikel wie Asche oder pulverisierte Kohle. Die Streuung an Partikeln, deren Durchmesser kleiner als die Wellenlänge des einfallenden Lichts ist ($x < 0,3$), kann als Rayleigh Streuung berechnet werden. Für Partikel mit einem Durchmesser der wesentlich größer als die Wellenlänge des einfallenden Lichts ist ($x > 100$), können die Streueigenschaften mit Hilfe der geometrischen Optik bestimmt werden. Ausserhalb der Gültigkeitsbereiche dieser beiden Methoden kann zur Berechnung von Streueigenschaften die Mie Theorie eingesetzt werden, welche über das gesamte Spektrum Gültigkeit hat, aber aufgrund der komplizierten Berechnung nur ausserhalb der Gültigkeitsbereiche der anderen Methoden zur Berechnung der Streuung eingesetzt wird.

Um die Streuung in die Strahlungstransportgleichung einzubinden, wird der Streukoeffizient $\sigma_{s,\eta}$ benötigt. Dieser wird aus dem Streuquerschnitt C_{η} , welcher die Strahlungsquerschnittsfläche angibt, die durch das Partikel beeinflusst wird, und der Anzahl an Partikeln pro Einheitsvolumen N [$1/m^3$], die mit der Strahlung interagieren, errechnet.

$$\sigma_{s,\eta} = NC_{\eta} \quad (2.83)$$

Für praktische Berechnungen kann hier auch der Volumenanteil $Y = NV_P$ der Partikel verwendet werden.

2.3.4.1 Rayleigh Streuung

Für die Vorhersage der Streuungseigenschaften sehr kleiner Partikel und Moleküle wird die Rayleigh Streuung eingesetzt. Der Streuquerschnitt ergibt sich demnach zu

$$C_\eta = \frac{8\pi D^2}{3} x^4 \left| \frac{\bar{n}^2 - 1}{\bar{n}^2 + 1} \right|^2, \quad \bar{n} = \frac{n_P}{n_U} \quad (2.84)$$

$n_P = m_P - ik_P$ ist der komplexe Brechungsindex des Partikels, welcher auch absorption berücksichtigt, n_U ist der Brechungsindex der nichtabsorbierenden Atmosphäre. Die Rayleigh Streuung ist insbesondere für die Streuung von Strahlung an Partikeln wichtig. Die Phasenfunktion ergibt sich aus der elektromagnetischen Theorie zu

$$\Phi_{\text{RA}}(\theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta) \quad (2.85)$$

Diese Phasenfunktion ist symmetrisch und unabhängig vom Azimuthalwinkel φ . Ein Effekt, der durch die Rayleigh Streuung hervorgerufen wird, ist die blaue Farbe des Himmels. Durch die Wellenlängenabhängigkeit λ^{-4} des Streuquerschnitts durch den Größenparameter x wird Strahlung kleinerer Wellenlänge (blau) wesentlich stärker gestreut als Strahlung mit größerer Wellenlänge (rot). Deshalb trifft mehr blaues Licht aus allen Himmelsrichtungen auf einen Beobachter als Licht mit größerer Wellenlänge.

2.3.4.2 Geometrische Optik

Wird die geometrische Optik eingesetzt, um die Streuung zu beschreiben, werden meist Partikel betrachtet, die sehr groß sind, $x > 10000$. Hier wird kein Streuquerschnitt mehr berechnet sondern ein Strahlbündel betrachtet, welches mittels eines Ray Tracing Algorithmus auf seinem Weg durch das Partikel verfolgt wird. Die Ergebnisse stimmen mit denen aus der Mie Theorie weitgehend überein, eine Berechnung für Ansammlungen kleiner Partikel ist jedoch zu rechenaufwändig.

2.3.4.3 Mie Streuung

Zur Berechnung der Streuung an Partikeln hat Gustav Mie eine umfangreiche Theorie entwickelt, die eine sehr detaillierte Beschreibung der Streuung von elektromagnetischen Wellen an sphärischen Partikeln zulässt. Die Mie Theorie liefert eine spezielle Lösung der Maxwellgleichungen für sphärische Partikel, mit deren Hilfe Streuquerschnitt und Phasenfunktion bestimmt werden können. Die Phasenfunktion $\Phi_{\text{Mie}}(n, x)$ ist nur eine Funktion des komplexen Brechungsindex n und des Größenpüarameters x . Die Berechnung ist aufwändig, daher wird oft auf Phasenfunktionen zurückgegriffen, die entweder Vereinfachungen der eigentlichen Lösung oder Approximationen sind.

Für den Streuquerschnitt C_η kann aus der Mie Theorie eine einfachere Berechnungsvorschrift extrahiert werden, sodass für die Bestimmung des Streuquerschnitts die Mie Theorie eingesetzt werden kann, für die Phasenfunktion jedoch andere Methoden herangezogen werden.

2.3.4.4 Approximierte Phasenfunktionen

Da die Auswertung der Mie Theorie in der technischen Anwendung zu zeitaufwändig ist, gibt es viele Anstrengungen, über approximierte Phasenfunktionen die Streuung zu berechnen. Die einfachste Möglichkeit ist die Annahme isotroper Streuung, die insgesamt gestreute Intensität wird auf alle Raumrichtungen gleich verteilt. Diese Annahme ist jedoch insbesondere im Bereich $1 < x < 500$ nicht gültig. Die wichtigsten approximierten Phasenfunktionen sollen im Folgenden vorgestellt werden. Für viele Phasenfunktionen wird der cosinus des Streuwinkels benötigt, der als $\mu = \cos \theta$ definiert ist.

Henye Greenstein Eine Oft verwendete approximierte Phasenfunktion ist die Henye Greenstein Phasenfunktion, die als einzigen Parameter einen Assymetriefaktor g enthält:

$$\Phi_{\text{HG}}(\cos \theta) = \frac{1 - g^2}{1 + g^2 - 1g\mu} \quad (2.86)$$

Der Assymetriefaktor kann mit Hilfe der Mie Theorie bestimmt werden und gibt an, wie stark die Phasenfunktion von der Kreisform abweicht:

$$g = (1/2) \int_{-1}^1 \mu \Phi_{\text{Mie}}(\mu) \quad (2.87)$$

Diese Phasenfunktion ist ursprünglich zur Berechnung der Streuung von Strahlung an Planeten und Galaxien entwickelt worden, wird aber mittlerweile gerne in der Modellierung der Streuung an Partikeln eingesetzt.

Approximation mit Legendre Polynomen Eine weitere Methode ist die Beschreibung der Phasenfunktion mit Hilfe von Legendre Polynomen $P_m(\mu)$.

$$\Phi_{\text{LG}}(\mu) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m P_m(\mu) \quad (2.88)$$

die Parameter a_m werden durch einen Parameterfit an die Lösung aus der Mie Theorie bestimmt.

Delta-Eddington Phasenfunktion Bei der Berechnung der Streuung anhand der Delta-Eddington Phasenfunktion wird isotrope Streuung mit vorwärtsgerichteter Streuung kombiniert, wobei die Aufteilung auf die beiden Anteile anhand eines Parameters f erfolgt. Ein weiterer Parameter ist wie bei der Henyey Greenstein Phasenfunktion ein Assymetriefaktor g .

$$\Phi_{\text{DE}}(\mu) = 2f\delta(1 - \mu) + (1 - f)(1 + 3g\mu) \quad (2.89)$$

Motivation für diese Aufteilung ist der große Anteil an Vorwärtsstreuung, der bei der Interaktion zwischen Strahlung und Partikeln im Bereich $1 < x < 500$ auftritt. Der Parameter f kann durch Integration über die Phasenfunktion aus der Mie Theorie bestimmt werden:

$$f = (1/2) \int_{-1}^1 \Phi_{\text{Mie}}(\mu P_2(\mu)) \quad (2.90)$$

2.3.5 Strahlungstransportgleichung

Die in den beiden vorherigen Abschnitten erläuterten Formalismen zur Beschreibung der Strahlungsverstärkung und Abschwächung werden können in einer Gleichung zusammengefasst werden. Diese beschreibt den Strahlungstransport entlang einer Pfadrichtung S . Die Änderungsrate der Strahlung pro Pfadlänge - also die Ableitung - ergibt sich, indem Strahlungsabschwächung und -verstärkung miteinander bilanziert werden. Daraus lässt sich die Strahlungstransportgleichung (Gleichung 2.91) erhalten.

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_\eta}{dS} &= \frac{dI_{\eta,\text{Emission}}}{dS} - \frac{dI_{\eta,\text{Absorption}}}{dS} - \frac{dI_{\eta,\text{Gestreut}}}{dS} + \frac{dI_{\eta,\text{Eingestreut}}}{dS} \quad (2.91) \\
 &= \underbrace{a_\eta \cdot I_{S,\eta}}_{\substack{\text{Zuwachs} \\ \text{durch lokale} \\ \text{Emission}}} - \underbrace{a_\eta \cdot I_\eta}_{\substack{\text{Abschwächung durch} \\ \text{lokale} \\ \text{Absorption}}} - \underbrace{\sigma_{s,\eta} \cdot I_\eta}_{\substack{\text{Abschwächung durch} \\ \text{Streuung}}} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\sigma_{s,\eta}}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} I_\eta(\theta,\varphi) \Phi(\theta,\varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}_{\substack{\text{Zuwachs durch Streuung von Strahlung in die} \\ \text{betrachtete Richtung s}}}
 \end{aligned}$$

Die Terme, welche die Abschwächung der Strahlung in Pfadrichtung durch Absorption und Streuung beschreiben, können unter Berücksichtigung des spektralen Abschwächungskoeffizienten K_η und dessen Definition nach Gleichung 2.66 zusammengefasst werden. Es ergibt sich damit die folgende Form der Strahlungstransportgleichung:

$$\frac{dI_\eta}{dS} = -K \cdot I_\eta + a_\eta \cdot I_{\text{Schwarz},\eta} + \frac{\sigma_{s,\eta}}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} I_\eta(\theta,\varphi) \Phi(\theta,\varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (2.92)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI_\eta}{dS} + K \cdot I_\eta = a_\eta \cdot I_{\text{Schwarz},\eta} + \frac{\sigma_{s,\eta}}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} I_\eta(\theta,\varphi) \Phi(\theta,\varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (2.93)$$

Die rechte Seite der Gleichung 2.93 stellt nun in der üblichen Form einer Differentialgleichung den Quellterm der Strahlungsintensität entlang des Pfades s dar. Im Gegensatz zu anderen Transportgleichungen (beispielsweise Impulstransport in der Fluidodynamik), handelt es sich hierbei um eine sogenannte Integro-Differentialgleichung. Das bedeutet, dass in Gleichung 2.93 die Intensitäten am betrachteten Punkt sowohl in der Ableitung auf der linken Seite als auch im Integral auf der rechten Seite auftritt. Für einfache Fälle ist das Integral jedoch lösbar und die Strahlungstransportgleichung kann somit als normale Differentialgleichung behandelt werden. Dies ist dann der Fall, wenn keine Streuung auftritt ($\sigma_{s,\eta} = 0$). In anderen Fällen muss die Gleichung mittels spezieller, zum Teil recht komplizierter numerischen Methoden gelöst werden. Diese sind in der entsprechenden Literatur zum Strahlungstransport beschrieben, beispielsweise bei Siegel u. Howell (2002).

Die hergeleitete Strahlungstransportgleichung beschreibt allgemein den Transport und Austausch von Strahlung in Medien, die mit dieser interagieren. Die Wechselwirkung wird durch drei Parameter beschrieben, wie auch in Gleichung 2.91 zu erkennen:

- Der **Absorptionskoeffizient** a_η beschreibt die Emission und Absorption von Strahlung.
- Der **Streukoeffizient** $\sigma_{s,\eta}$ beschreibt den Anteil der einfallenden Strahlung, der gestreut wird.
- Die **Phasenfunktion** $\Phi(\theta, \varphi)$ beschreibt die Umverteilung der gestreuten Strahlung auf die unterschiedlichen Raumrichtungen.

Diese drei Parameter sind grundsätzlich Materialeigenschaften und hängen, wie in Abschnitt 2.3.2 bereits erwähnt, vom durchstrahlten Material und seinem thermodynamischen Zustand ab. Das Verhalten dieser Parameter und die zugrundeliegenden physikalischen Effekte sollen nun im Folgenden näher betrachtet werden.

2.4 Absorption und Emission von Strahlung in Gasen[†]

Elektromagnetische Strahlung kann von Atomen und Molekülen absorbiert beziehungsweise emittiert werden, indem innerhalb des Atoms oder des Moleküls ein Wechsel zwischen verschiedenen Energieniveaus stattfindet. Die Absorption spiegelt

sich in einer Verringerung der Durchlässigkeit für Strahlung bei einer bestimmten Wellenlänge wieder, die durch die Differenz der Energieniveaus bestimmt ist. Bei der Emission ist, eine ebenfalls bei einer diskreten Wellenlänge, die Freisetzung von Strahlung sichtbar. Die so entstehenden Effekte werden Spektrallinie genannt. Diese Spektrallinien ordnen sich um eine Fundamentalschwingung an und formen zusammen eine Spektralbande. Der Begriff Absorptions- oder Emissionsspektrums fasst das Absorptions- oder Emissionsverhalten eines Gases oder Gasgemisches zusammen und besteht aus den einzelnen Spektralbanden. In Abbildung 2.25 ist das Absorptionsspektrum für CO_2 dargestellt. Ein bekanntes Beispiel aus der Physik für dieses Phänomen ist das optische Spektrum des Wasserstoffs, an dem zuerst die systematische Quantelung der emittierten Strahlung empirisch nachgewiesen wurde. Die bei diesem Experiment emittierte Strahlung im sichtbaren Bereich wird durch Übergänge des Wasserstoffelektrons zwischen verschiedenen Energieniveaus erzeugt. Der Schweizer Physiker Johann Jakob Balmer leitete 1885 empirisch eine Beziehung zur Berechnung der Wellenzahlen ab, die nach ihm benannten Balmer-Serie. In den darauffolgenden Jahren wurden weitere Strahlungsserien entdeckt, die sich mittels der von Balmer aufgestellten Beziehung beschreiben lassen. Aus diesen Überlegungen wurden im Anschluss die ersten Atommodelle, wie beispielsweise das Bohr'sche Atommodell, entwickelt.

Die nachfolgenden Inhalte stützen sich auf das Buch "Technische Thermodynamik" von Bosnjakovic u. Knoche (1998b) sowie das Buch "Thermal Radiation Heat Transfer" von Siegel u. Howell (2002).

Durch den Übergang zwischen zwei Energieniveaus mit den Energien E' und E'' wird eine Strahlungsquant mit der entsprechenden Energie und der daraus resultierenden Frequenz emittiert. Für seine Energie E_{Quant} gilt:

$$E_{\text{Quant}} = E' - E'' = h \cdot \nu_{\text{Quant}} = h \cdot c_0 \cdot \eta_{\text{Quant}} \quad (2.94)$$

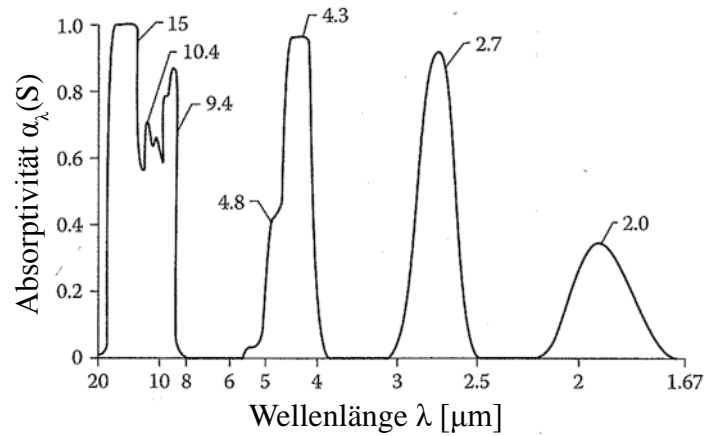


Abbildung 2.25: Absorptionsbanden für CO₂ bei 830 °C, 10 bar, Pfadlänge 0,388 m, aus Siegel u. Howell (2002)

Daraus kann dann die Frequenz ν_{Quant} und die Wellenzahl η_{Quant} der emittierten Strahlung berechnet werden:

$$\begin{aligned}\nu_{\text{Quant}} &= \frac{E_{\text{Quant}}}{h} = \frac{E' - E''}{h} \\ \eta_{\text{Quant}} &= \frac{E_{\text{Quant}}}{h \cdot c_0} = \frac{E' - E''}{h \cdot c_0}\end{aligned}\quad (2.95)$$

2.4.1 Das Bohr'sche Atommodell

Bereits in der Schule beziehungsweise zu Beginn des Studiums in der Vorlesung Physik wurde die Entstehung von elektromagnetischen Wellen (Strahlung im sichtbaren Bereich und Röntgenstrahlung) durch das Bohr'sche Atommodell beschrieben. Wir möchten hier noch einmal kurz auf die Grundlagen eingehen.

Die Schwierigkeit, die mechanische Stabilität des Systems Atomkern-Elektron zu gewährleisten, hat Bohr umgangen, indem er postulierte, dass nur bestimmte Umlaufbahnen erlaubt seien. Er bezeichnete diese Umlaufbahnen als stationäre Zustände, in denen die Energie des Elektrons konstant sei und dieses daher keine Strahlung emittiert beziehungsweise absorbiert. Wenn das Elektron jedoch von einer erlaubten Umlaufbahn in eine andere übergeht, so kann es entweder Strahlung emittieren oder absorbieren.

Das zweite von Bohr aufgestellte Postulat verknüpft die Frequenz der Strahlung mit den Energien der beiden beteiligten Zustände, beziehungsweise dem Wechsel vom

einen in den anderen Zustand. Ist E_A die Anfangs- und E_E die Endenergie des Atoms, dann ist die Frequenz der beim Übergang beteiligten Strahlung

$$v = \frac{E_A - E_E}{h}, \quad (2.96)$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum ist. Da die Energie in einer kreisförmigen Umlaufbahn für eine dem Radius anti-proportionalen Kraft $1/r^2$ (hier Coulomb'sche Anziehungskraft)

$$E = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \quad (2.97)$$

entspricht, ergibt sich für die Frequenz

$$v = \frac{E_1 - E_2}{h} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{h} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (2.98)$$

In diesen Gleichungen ist $4\pi\epsilon_0$ die Coulomb-Konstante, e die Ladung eines Elektrons. Z beschreibt die positive Ladung des Atomkerns und ist für Wasserstoff ($Z = 1$) und für einfach ionisiertes Helium ($Z = 2$). r_1 und r_2 beschreiben die Radien der Umlaufbahnen vor beziehungsweise nach dem Übergang.

Da wiederum nicht alle Radien erlaubt sind, konnte eine Bedingung für die möglichen Radien aufgestellt werden, mit der wir aus der obige Gleichung

$$v = Z^2 \underbrace{\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{4\pi\hbar}}_R \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \quad (2.99)$$

erhalten. Bei dem Vorfaktor handelt es sich um die Rydberg-Konstante ($3.2898 \cdot 10^{15} \text{ 1/s}$).

Die verschiedenen gequanteten Energieniveaus eines Wasserstoffatoms sind in Abb. 2.26 abgebildet. Der Unterschied der Energieniveaus (angegeben in [eV]) entspricht der Energie der emittierten Strahlung.¹

Die bei Elektronenübergängen freigesetzte Energie ist jedoch sehr hoch, so dass die abgegebene Strahlung zumeist im sichtbaren Wellenlängenbereich oder darunter liegt. Langwellige Strahlung (Infrarotstrahlung) entsteht bei diesen Übergängen nicht. Um diese Art der Strahlung zu erklären, soll in den nächsten Abschnitten auf

¹Eine Angabe der Energie in Joule ist in der Literatur ebenfalls üblich. Dabei entspricht $1 \text{ eV} = 1,602176565 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

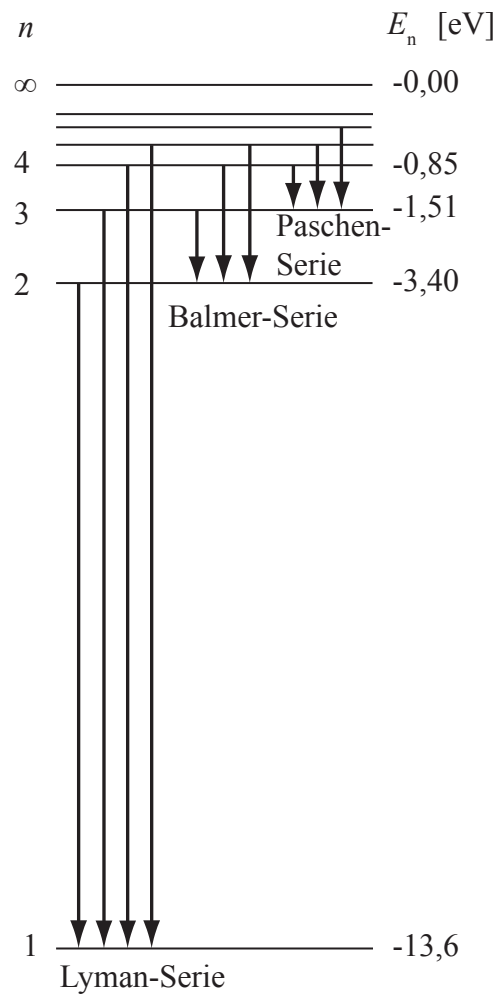


Abbildung 2.26: Energieniveaus des Wasserstoffatoms

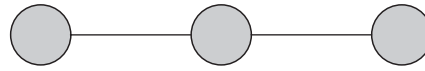
die Übergänge zwischen verschiedenen Rotations- und Vibrationszuständen eingegangen werden.

2.4.2 Molekülspektren

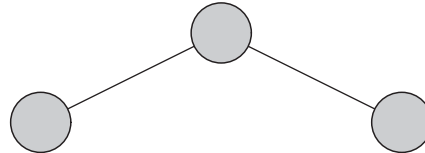
Die hier betrachtete thermische Strahlung wird nicht wie die Strahlung der Balmer-Serie durch Übergänge eines Elektrons zwischen zwei Energiezuständen hervorgerufen, sondern durch Übergänge zwischen verschiedenen Vibrations- und Rotationszuständen der Moleküle verursacht. Im Gegensatz zu Atomen verfügen Moleküle als "Konglomerat" mehrerer Atome über zusätzliche Bewegungsmöglichkeiten: Zum

einen können die einzelnen Atomkerne gegeneinander schwingen, zum anderen kann das Molekül auch um seinen Schwerpunkt rotieren. Beide Bewegungsarten verändern den Schwerpunkt des Gesamtsystems nicht. Wenn sich bei einem Übergang zwischen unterschiedlichen Vibrations- und Rotationszuständen das Dipolmoment des Moleküls ändert, kann dadurch Strahlung emittiert oder absorbiert werden. Ein Molekül besitzt ein Dipolmoment, wenn der Schwerpunkt der negativen Ladungen (Elektronen) und der positiven Ladungen (Atomkerne) nicht zusammenfallen. Um eine Änderung des Dipolmomentes zu erreichen ist das Vorhandensein eines Dipolmomentes im Grundzustand nicht erforderlich, dieses kann auch erst durch die Oszillation des Moleküls hervorgerufen werden. Ein Beispiel für ein solches Molekül ist CO_2 . Um eine Änderung des Dipolmoments zu erreichen, muss eine ungleiche Verteilung der elektrischen Ladung innerhalb des Moleküls vorliegen. Moleküle, bei denen eine solche Dipolmomentänderung nicht möglich ist, werden als *unpolar* bezeichnet. Dazu gehören beispielsweise Moleküle, die aus Atomen mit gleicher Elektronegativität gebildet sind und bei denen daher die Ladung gleichmäßig auf alle Atome verteilt ist. Bei gleichatomigen Molekülen (O_2 , N_2) ist dies der Fall, zum thermischen Strahlungsaustausch tragen diese Moleküle daher nicht bei. Zu den technisch relevanten Molekülen, die ein Dipolmoment aufweisen und daher mit thermischer Strahlung interagieren können, zählen Kohlenstoffdioxid (CO_2) Wasser (H_2O) und Kohlenstoffmonoxid (CO).

Die hier betrachteten Moleküle können in zwei Gruppen unterteilt werden: lineare und nicht-lineare Moleküle. Bei einem linearen Molekül (Abbildung 2.27(a)) sind die einzelnen Atome entlang einer Geraden angeordnet. Ein typischer Vertreter dieser Gruppe ist CO_2 . In einem nicht-linearen Molekül (Abbildung 2.27(b)) sind die einzelnen Atome nicht auf einer Geraden angeordnet. Für die technisch relevanten dreiatomigen Moleküle ergibt sich eine v-förmige Anordnung. Zu diesen Molekülen zählt unter anderem Wasser (H_2O). Für die Betrachtung der emittierten beziehungsweise absorbierten Strahlung ist die Unterscheidung zwischen linearen und nicht-linearen Molekülen insofern wichtig, als dass sich die beiden Gruppen hinsichtlich ihrer Freiheitsgerade bezüglich der Schwingungen und Rotation unterscheiden:



(a) Lineares Molekül



(b) Nicht-lineares Molekül

Abbildung 2.27: Mögliche Anordnungen der Atome in einem 3-atomigen Molekül

Schwingungen der Atomkerne gegeneinander:

Lineares Molekül: 4 Freiheitsgrade

Nichtlineares Molekül: 3 Freiheitsgrade

Rotation um den Schwerpunkt:

Lineares Molekül: 2 Freiheitsgrade

Nichtlineares Molekül: 3 Freiheitsgrade

Die Freiheitsgrade bezüglich der Rotation lassen sich leicht erklären: Bei einem nicht-linearen Molekül kann das Molekül jeweils um jede der drei Raumachsen rotieren und für jede dieser Achsen ein anderes Trägheitsmoment aufweisen. Bei einem linearen Molekül sind die Trägheitsmomente bezüglich der Rotationen um die beiden Achsen quer zur Verbindungsgeraden des Moleküls gleich. Daher kann nicht zwischen diesen beiden Rotationszuständen unterschieden werden und es entfällt ein Freiheitsgrad bezüglich der Rotation. Die verschiedenen Möglichkeiten der Schwingung der Atomkerne gegeneinander für lineare und nicht-lineare Moleküle sind in Tabelle 2.1 gezeigt. Für beide Energieformen - sowohl die Schwingung als auch die Rotation - gilt, dass nicht beliebige Energiezustände eingenommen werden können, sondern nur diskrete Zustände zulässig sind. Dies soll im Folgenden skizziert werden.

Lineares Molekül	Nichtlineares Molekül

Tabelle 2.1: Vibrationen dreiatomiger Moleküle

2.4.2.1 Quantelung der Vibrationszustände

Zwei aneinander gebundene Atomkerne eines Moleküls werden betrachtet. Wenn die Atome nun aus ihrem Gleichgewichtszustand einander angenähert werden, stellt sich durch die Coulombkraft zwischen den beiden positiv geladenen Kernen eine abstoßende Kraft ein. Umgekehrt verhält es sich, wenn die beiden Atomkerne voneinander entfernt werden: Es stellt sich durch die Bindung eine anziehende Kraft zwischen den Atomkernen ein. Für nicht allzu große Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage ist diese Kraft proportional zur Auslenkung und das System kann entsprechend einem

Masse-Feder-System als harmonischer Oszillator mit der Eigenfrequenz ν betrachtet werden. Die Frequenz ν ergibt sich aus der Masse der beteiligten Atome sowie der Art der Bindung und soll hier als bekannt betrachtet werden. Die Schrödinger-Gleichung beschreibt mögliche Energiezustände E_{Osz} des Oszillator-Systems. Die Lösung dieser Gleichung für das zuvor beschriebene System ist:

$$E_{\text{Osz},n} = h \cdot \nu \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (2.100)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

dabei wird n in Gleichung 2.100 als *Schwingungsquantenzahl* bezeichnet und kennzeichnet die unterschiedlichen Energieniveaus. Aus dieser Gleichung lässt sich folgendes erkennen:

- Im Gegensatz zum harmonischen Oszillator in der klassischen Physik ist dieser quantenmechanische Oszillator nicht in der Lage, beliebige Energiezustände durch Veränderung der Amplitude einzunehmen. Es können ausschließlich die durch Gleichung 2.100 beschriebenen Energien eingestellt werden.
- Die sich ergebenden Energieniveaus sind äquidistant zueinander angeordnet: Der energetische Abstand zwischen zwei Energiezuständen beträgt immer $h \cdot \nu$. Wenn nun durch den Übergang zwischen zwei benachbarten Energieniveaus ein Strahlungsquant emittiert wird, so ergibt sich dessen Energie E_{Quant} aus der Differenz der beiden beteiligten Energieniveaus:

$$E_{\text{Quant}} = \Delta E_{\text{Osz}} = h \cdot \nu = h \cdot \nu_{\text{Quant}} \quad (2.101)$$

Die obenstehende Gleichung zeigt, dass die Frequenz des emittierten Strahlungsquants gleich der Frequenz des Oszillators ist. Die dieser Frequenz entsprechende Wellenzahl η_{Quant} wird als *charakteristische Wellenzahl* dieser Schwingung bezeichnet:

$$\Delta E_{\text{Osz}} = h \cdot c_0 \cdot \eta_{\text{Quant}}$$

$$\Leftrightarrow \eta_{\text{Quant}} = \frac{\Delta E_{\text{Osz}}}{h \cdot c_0} \quad (2.102)$$

Für Energieniveaus mit höheren Schwingungsquantenzahlen gilt der Zusammenhang nach Gleichung 2.100 nicht mehr uneingeschränkt. In diesem Fall werden die gebundenen Atome weit voneinander entfernt. Die Kraft zwischen den Atomkernen verhält sich dann nicht mehr proportional zum Abstand. Dementsprechend sind die einzelnen Energiezustände mit höheren Schwingungsquantenzahlen nicht mehr äquidistant zueinander angeordnet, sondern nähern sich einander an. Dieses reale Verhalten der Schwingungsenergieniveaus ist in Abbildung 2.28 gezeigt.

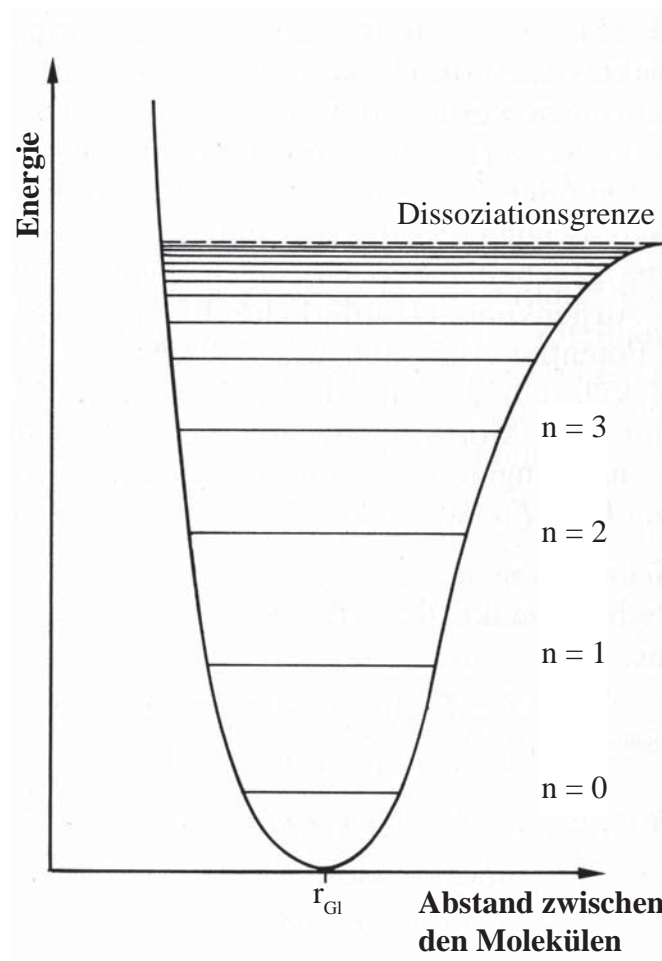


Abbildung 2.28: Realer Verlauf der einzelnen Schwingungsenergieniveaus

2.4.2.2 Quantelung der Rotationszustände

Ähnlich der Quantelung der einzelnen Vibrationszustände, die mit der Schwingungsquantenzahl n gekennzeichnet werden, existiert auch für die einzelnen Rotations-

zustände der Moleküle eine Quantelung. Als Modellvorstellung dient hierbei die Vorstellung des starren Rotators, bei dem keine Verformung durch Fliehkräfte auftritt. Ähnlich wie die Annahme des harmonischen Oszillators ist diese Annahme für geringe Rotationsenergien völlig ausreichend. Zur Charakterisierung des Rotators dient hierbei dessen Trägheitsmoment J . Die Schrödinger-Gleichung gibt folgende zulässige Energiezustände:

$$E_{\text{rot},l} = \frac{h^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot J} (l+1) \cdot l \quad (2.103)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

hierbei wird l als *Rotationsquantenzahl* bezeichnet und unterscheidet die einzelnen Rotationsenergiezustände. Im Unterschied zu den Energiezuständen der Vibration ist der Abstand zwischen den einzelnen Energiezuständen nicht konstant, sondern steigt mit zunehmender Rotationsquantenzahl an:

$$\Delta E_{\text{rot}} = E_{\text{rot}}(l) - E_{\text{rot}}(l-1) = \frac{h^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot J} \cdot l \quad (2.104)$$

Auch hier gilt, dass das reale Verhalten für höhere Energiezustände zunehmend vom Modell des starren Rotators abweicht. Bedingt wird dies unter anderem durch das mit zunehmender Rotationsenergie durch Zentrifugalkräfte zunehmende Trägheitsmoment J . Für das grundlegende Verständnis reicht die Beschreibung der Energiezustände nach Gleichung 2.103 aus.

2.4.2.3 Struktur des Gasstrahlungsspektrums

Aus Übergängen zwischen den zuvor beschriebenen Schwingungs- und Rotationszuständen der einzelnen Gasmoleküle setzen sich nun die Strahlungsspektren der Gase zusammen. Dabei gilt, dass die Abstände zwischen den einzelnen Vibrationsenergiezuständen wesentlich größer sind als die Abstände zwischen den Rotationsenergiezuständen. Dementsprechend können die möglichen Energiezustände nun so gegliedert werden, dass die Rotationszustände den einzelnen Schwingungszuständen überlagert werden, wie in Abbildung 2.29 gezeigt ist.

Diese Gliederung findet sich auch in dem durch die verschiedenen Übergänge entstehenden Strahlungsspektrum wieder: Die Lage einer *Spektralline* wird durch einen

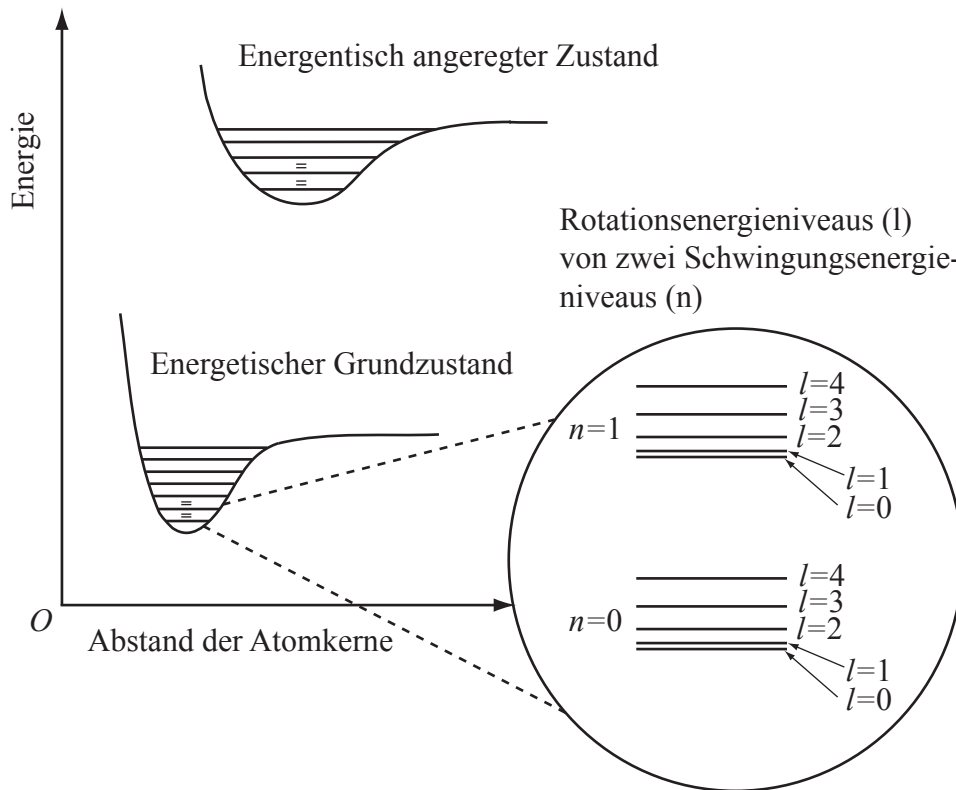


Abbildung 2.29: Überlagerung der Schwingungs- und Rotationszustände eines Moleküls

Übergang zwischen zwei Schwingungszuständen festgelegt. Die Lage des Bandes, das sich aus dem Übergang zwischen zwei Schwingungszuständen mit den Schwingungsquantenzahlen n' und n'' ergibt, wird durch die sich für diesen Übergang einstellende Wellenzahl $\eta_0^{n' \rightarrow n''}$ bezeichnet:

$$\eta_0^{n' \rightarrow n''} = \frac{(E'_{\text{Osz}} - E''_{\text{Osz}})}{hc_0} \quad (2.105)$$

Um diese Wellenzahl herum gruppieren sich dann weitere diskrete Wellenzahlen, bei denen Strahlungsabsorption beziehungsweise -emission aufgrund von dem Vibrationsübergang überlagerten Rotationsübergängen möglich ist. Diese Wellenzahlen werden auch als Absorptions- beziehungsweise Emissionslinien bezeichnet. Für mögliche Rotationsübergänge gelten folgende Auswahlregeln:

Für zweiatomige Moleküle: $\Delta l = \pm 1$

Für dreiatomige Moleküle: $\Delta l = \pm 1$ oder $\Delta l = 0$

Entsprechend dieser zulässigen Rotationsübergänge wird ein Absorptionsband in drei *Zweige* untergliedert:

- Die Absorptionslinien mit $\Delta l = -1$ werden als *P-Zweig* bezeichnet.
- Die Absorptionslinien mit $\Delta l = 1$ werden als *R-Zweig* bezeichnet.
- Die durch einen reinen Vibrationsübergang mit $\Delta l = 0$ entstehenden Linien werden als *Q-Zweig* bezeichnet.

Die pro Spektrallinie emittierte beziehungsweise absorbierte Strahlungsintensität ergibt sich aus den Besetzungsdichten N' und N'' für die verschiedenen Energieniveaus, die sich entsprechend einer Boltzmann-Verteilung anordnen und eine Temperaturabhängigkeit aufweisen.

Für einfache Moleküle kann das Strahlungsspektrum durch die Gleichungen 2.100 bis 2.104 berechnet werden. Das Resultat einer solchen Rechnung für Kohlenstoffmonoxid (CO) ist in Abbildung 2.30 gezeigt. Deutlich ist das Fehlen des Q-Zweiges, dessen Existenz durch die Bedingung $\Delta l \neq 0$ für zweiatomige Moleküle verhindert wird.

Für mehratomige Moleküle ist die Berechnung des Absorptionslinienspektrums mit einem deutlich erhöhten Aufwand verbunden. Durch die Existenz mehrerer Freiheitsgrade für Schwingung und Rotation steigt die Anzahl der möglichen Übergänge. Vor allem die erhöhte Anzahl der Schwingungsübergänge trägt dazu bei, dass das Molekülspektrum im Vergleich zum Spektrum der zweiatomigen Moleküle wesentlich komplexer ausfällt. Die Berechnung wird zusätzlich dadurch erschwert, dass für eine präzise Vorhersage des Spektrums eine genaue Kenntnis der innermolekularen Kräfte notwendig ist. Für Berechnungen in den Ingenieursdisziplinen ist dies bei weitem zu kompliziert und umfangreich. Trotzdem lässt sich die Lage der Absorptionsbänder mittels der Übergänge zwischen verschiedenen Schwingungsenergieniveaus erklären. Für CO_2 und H_2O werden im Folgenden die Grundenergiezustände der einzelnen Schwingungszustände gezeigt, die sich auch in den Strahlungsspektren dieser Gase

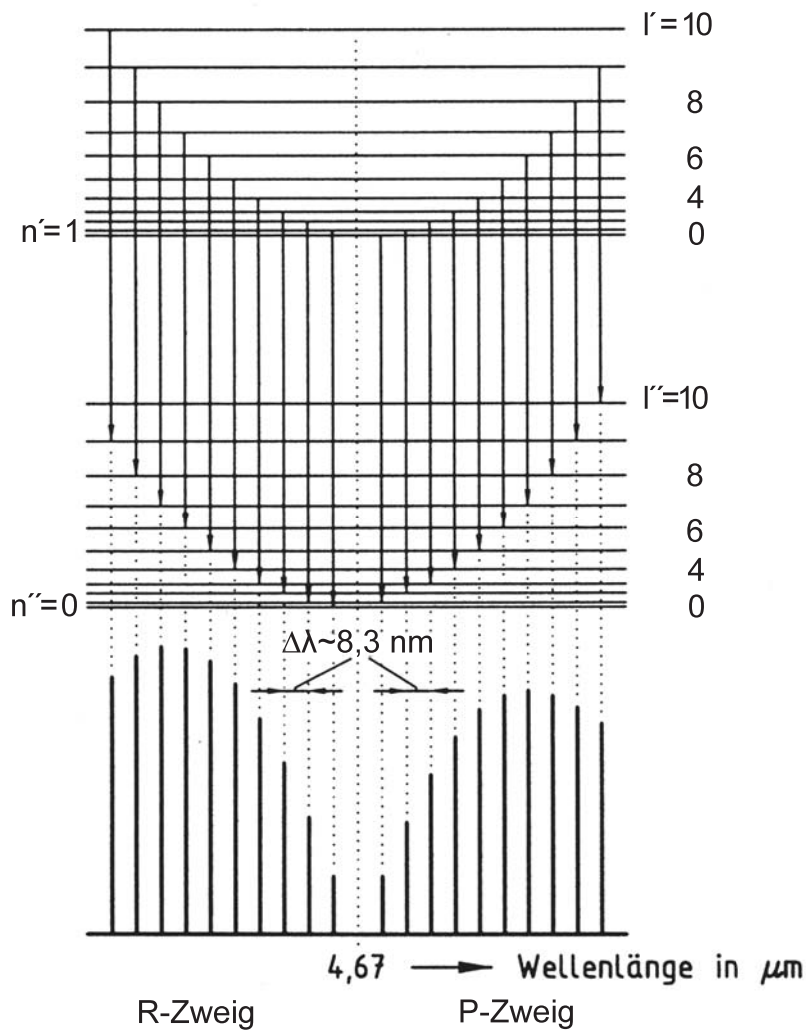


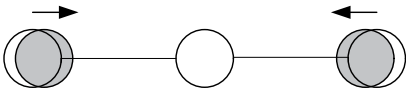
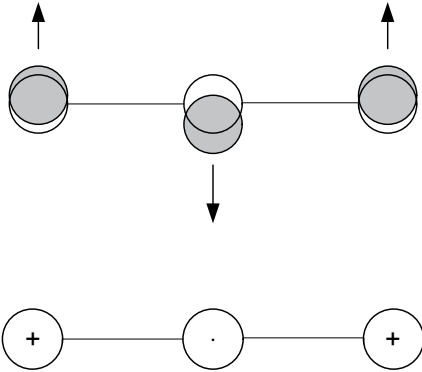
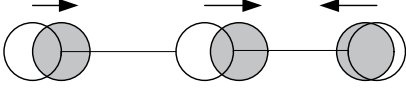
Abbildung 2.30: Rotations-Vibrations-Bande für Kohlenmonoxid (CO)

wiederfinden lassen.

Entsprechend der in Tabelle 2.1 gezeigten Schwingungsmöglichkeiten existieren für CO_2 als dreiatomiges lineares Moleküle vier Freiheitsgrade hinsichtlich der Atom-schwingungen. Für CO_2 gilt, dass die beiden Biegeschwingungen (die dritte und vierte Variante in Tabelle 2.1) nicht voneinander unterschieden werden können. Dem-zufolge reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf drei. In Tabelle 2.2 sind diese

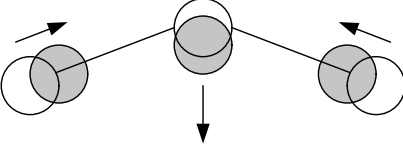
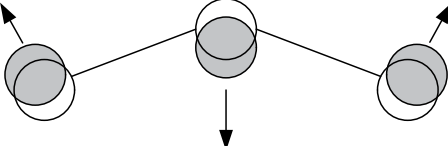
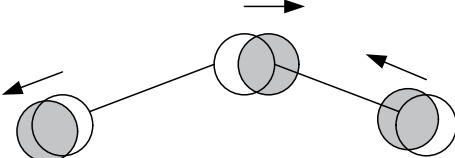
Schwingungsformen sowie die dazugehörigen charakteristischen Wellenzahlen nach Gleichung 2.102 dargestellt.

Tabelle 2.2: Wellenzahlen für die Fundamentalschwingungen von CO_2

1		$\eta_1 = 1285,8 \text{ 1/cm}$
2		$\eta_2 = 667,4 \text{ 1/cm}$
3		$\eta_3 = 2349,16 \text{ 1/cm}$

Bei H_2O handelt es es sich um ein nichtlineares Molekül: Die beiden Verbindungs-
linien zwischen dem zentralen Sauerstoffatom und den beiden Wasserstoffatomen
sind in einem von 180° abweichenden Winkel zueinander angeordnet. Nach Tabelle
2.1 existieren für die Schwingungen dieser Konfiguration drei Freiheitsgrade. Diese
Vibrationsmodi und ihre charakteristischen Wellenzahlen sind in Tabelle 2.3 aufge-
listet.

Tabelle 2.3: Wellenzahlen für die Fundamentalschwingungen von H₂O

1		$\eta_1 = 3657,05 \text{ 1/cm}$
2		$\eta_2 = 1594,78 \text{ 1/cm}$
3		$\eta_3 = 3755,92 \text{ 1/cm}$

Für die angegebenen Wellenzahlen finden sich auch entsprechende Strahlungsbänder in den Spektren der Gase. Lediglich für den ersten Schwingungsmodus des CO₂ mit der charakteristischen Wellenzahl $\eta_1 = 1285,8 \text{ 1/cm}$ lässt sich kein entsprechendes Strahlungsbänder finden: Bei einem Übergang zwischen den Energieniveaus dieser Schwingung ändert sich das Dipolmoment des Moleküls nicht. Somit kann auch keine Strahlung absorbiert beziehungsweise emittiert werden. Trotzdem besitzt dieser Schwingungszustand insofern eine Bedeutung für das Strahlungsspektrum, als dass bei einem Übergang von einem der anderen Schwingungszustände auf diesen Zustand (beziehungsweise umgekehrt) eine Strahlungsfreisetzung beziehungsweise -absorption erfolgen kann, da eine Änderung des Dipolmoments durchaus möglich ist.

Die Bänder bei den charakteristischen Wellenzahlen, wie sie in den Tabellen 2.2 und 2.3 für CO₂ und H₂O aufgelistet sind, werden als *Fundamentalbänder* bezeichnet. Daneben finden sich noch weitere Strahlungsbänder in den Gasspektren, die aus

Übergängen zwischen Energieniveaus der einzelnen Vibrationsformen resultieren.

2.4.2.4 Linienverbreiterung

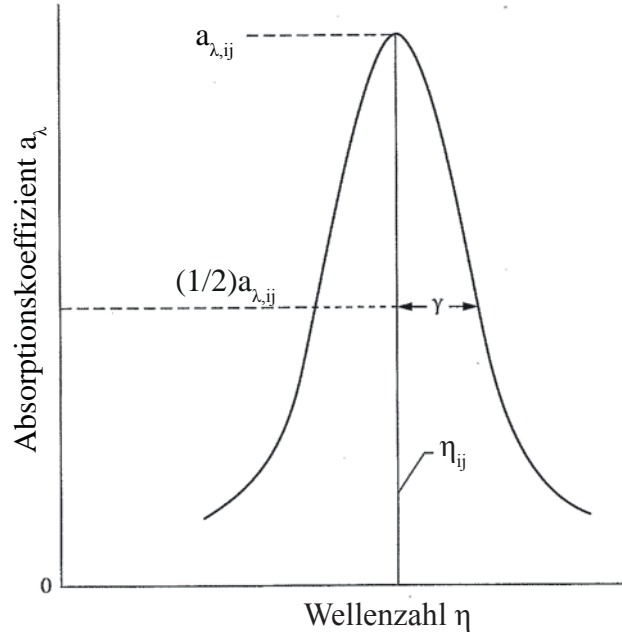
Wie im vorherigen Abschnitt diskutiert wurde, entstehen durch die Änderung der Vibrations- und Rotationszustände diskrete Absorptionslinien. In der Realität ist jedoch zu beobachten, dass die Absorption und Emission nicht nur bei den aus der Theorie vorhergesagten Wellenlängen stattfindet, sondern auch in Wellenlängenbereichen mit etwas größerer oder kleinerer Wellenlänge. Der Effekt, der dafür verantwortlich ist, ist die spektrale Linienverbreiterung, welche sich in vier Mechanismen aufteilen lässt; die Natürliche Linienverbreiterung, die Doppler- und die Stoßverbreiterung, sowie die Stark-Verbreiterung. Der wichtigste Mechanismus für Anwendungen im Ingenieurbereich ist die Stoßverbreiterung, die Stark-Verbreiterung wird je nach Quelle mit der Stoßverbreiterung zusammengefasst.

Eine typische Form der Linienverbreiterung ist in Abbildung 2.31 dargestellt. Die Linienintensität S_{ij} für einen Sprung zwischen den Energieniveaus i und j kann mit dem Integral über den spektralen Absorptionskoeffizienten $a_{\eta,ij}$ berechnet werden:

$$S_{ij} = \int_0^{\infty} a_{\eta,ij} d\eta \quad (2.106)$$

Ein wichtiges Kriterium für die Form einer Linie ist die Halbwertsbreite γ . Diese ist definiert als die Hälfte der Linienbreite bei der Hälfte der maximalen Linienhöhe.

Natürliche Linienverbreiterung Die natürliche Linienverbreiterung oder auch Lorentz-Verbreiterung entsteht durch eine Unsicherheit in den exakten Werten der diskreten Energielevel, welche auf die Heisenbergsche Unschärferelation zurückzuführen ist. Dieser Mechanismus hat jedoch, verglichen mit anderen Mechanismen, nur einen geringen Anteil an der Linienverbreiterung, deshalb wird die natürliche Linienver-


 Abbildung 2.31: Typische Form einer Linie, Halbwertsbreite γ

breitung häufig vernachlässigt. Die Form der Linie, die durch die natürliche Linienverbreiterung entsteht, kann durch ein Lorentz-Profil beschrieben werden.

$$\frac{\alpha_{\eta,ij}}{S_{ij}} = \frac{\gamma_n \pi}{\gamma_n^2 + (\eta - \eta_{ij})^2} \quad (2.107)$$

Doppler Verbreiterung Eine weitere Form der Linienverbreiterung wird durch den Dopplereffekt hervorgerufen. Bewegt sich ein Molekül mit der Geschwindigkeit v auf einen Beobachter zu und emittiert gleichzeitig mit der Wellenzahl η_i , erreicht das Licht den Beobachter mit einer erhöhten Wellenzahl von $\eta = \eta_i(1 + v/c_0)$ mit der Lichtgeschwindigkeit c_0 . Für ein sich wegbewegendes Molekül ist eine Verringerung der Wellenzahl der emittierten Strahlung zu beobachten. Im thermischen Gleichgewicht haben Molekülgeschwindigkeiten eine Maxwell-Boltzmann Verteilung. So kann auf die Form der Linienverbreiterung geschlossen werden:

$$\frac{\alpha_{\eta,ij}}{S_{ij}} = \frac{1}{\gamma_D} \sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi}} \exp \left[-(\eta - \eta_{ij})^2 \frac{\ln(2)}{\gamma_D^2} \right] \quad (2.108)$$

mit der Halbwertsbreite

$$\gamma_D = \frac{\eta_{ij}}{c} \left(\frac{2kT}{M} \ln(2) \right)^{1/2} \quad (2.109)$$

Anhand der Temperaturabhängigkeit wird ersichtlich, dass diese Verbreiterung insbesondere bei hohen Temperaturen einen großen Einfluss hat.

Stoßverbreiterung Durch eine Steigerung von Druck und Temperatur wird die Häufigkeit der Kollision zwischen Atomen oder Moleküle erhöht. Dadurch werden die Energieniveaus der Moleküle gestört, was zu der Stoßverbreiterung der Spektrallinien führt. Wie schon bei der natürlichen Linienverbreiterung kann die Form der Linie durch ein Lorentzprofil beschrieben werden:

$$\frac{\alpha_{\eta,ij}}{S_{ij}} = \frac{\gamma_c \pi}{\gamma_c^2 + (\eta - \eta_{ij})^2} \quad (2.110)$$

Die Halbwertsbreite wird Anhand der Kollisionshäufigkeit bestimmt. Ein angenäherter Wert kann mit Hilfe der kinetischen Gastheorie bestimmt werden:

$$\gamma_c = \frac{1}{c} \frac{2D^2 p}{(\pi M k T)^{1/2}} \quad (2.111)$$

D ist der Moleküldurchmesser, p der Druck des Gases, M die Molekülmasse. Im Gegensatz zur Dopplerverbreiterung hat diese Form der Linienverbreiterung besonders bei hohen Drücken und niedrigen Temperaturen den größten Einfluss. In technischen Anwendungen hat meist die Stoßverbreiterung den größten Anteil an der Linienverbreiterung. Aufgrund der unterschiedlichen Form der Profile (siehe Abbildung 2.32) ist insbesondere im Bereich weit vom Zentrum der Spektrallinie entfernt Stoßverbreiterung zu finden, auch wenn im Zentrum der Spektrallinie die Dopplerverbreiterung dominiert.

Stark Verbreiterung Wenn elektrische Felder auf ein Molekül oder Atom wirken, kommt es zum sogenannten Stark Effekt, durch den die Energieniveaus sehr stark beeinflusst werden. Dies ist häufig bei ionisierten Gasen der Fall. Die so entstehende Linienverbreiterung ist sehr groß und hat ein unregelmäßiges Profil zur Folge, welches

mit Quantenmechanischen Modellen beschrieben werden muss. Häufig wird die Stark-Verbreiterung mit der Stoßverbreiterung zusammengefasst.

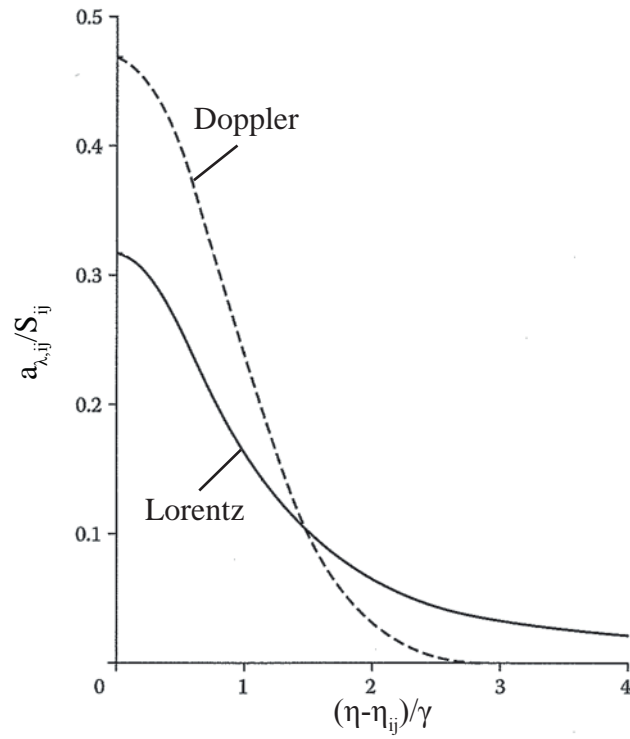


Abbildung 2.32: Doppler- bzw. Lorentzprofile für verbreiterte Spektrallinien gleicher Intensität

Beispiel

Als Beispiel soll CO betrachtet werden. Anders als bei CO_2 und H_2O besteht hier ein Molekül nur aus zwei Atomen. Bei dieser Anordnung ist nur ein Freiheitsgrad der Schwingung möglich, nämlich eine Schwingung der Atome entlang ihrer Verbindungsachse. Diese Schwingungsform ist in Abbildung 2.33 gezeigt. Die zulässigen

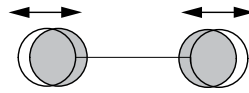


Abbildung 2.33: Mögliche Schwingungsform für CO

Energieniveaus dieser Schwingungsform werden durch Gleichung (2.100) beschrieben. Da nur eine Schwingungsform existiert, wird der Schwingungszustand des gesamten Moleküls durch eine Schwingungsquantenzahl n_1 beschrieben. Aus Messungen ist bekannt, dass CO eine Strahlungsbande bei einer Wellenlänge von $4,67\ \mu\text{m}$ besitzt, was einer Wellenzahl von $2141\ \text{1/cm}$ entspricht. Dabei handelt es sich um die zur Fundamentalschwingung gehörende Wellenzahl. Der Unterschied der Vibrationsquantenzahlen der beiden beteiligten Energiezustände beträgt demnach $\Delta n = 1$; auch abgekürzt geschrieben als (1). Daraus kann dann mit Gleichung (2.101) der Abstand zwischen den einzelnen Vibrationsenergiezuständen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{Osz}} &= E_{\text{Quant}} = h \cdot \nu_{\text{Quant}} = h \cdot c_0 \cdot \eta_{\text{Quant}} \\ &= 6,626 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \cdot 2,998 \cdot 10^8\ \text{m/s} \cdot 2141\ \text{1/cm} \\ &= 4,253 \cdot 10^{-20}\ \text{J} = 0,2655\ \text{eV}\end{aligned}$$

Neben diesem Übergang kann auch ein Übergang mit der Quantenzahl (2) auftreten. Dabei wird die zweifache “Energiedistanz“ übersprungen, es ergibt sich eine

zweite Strahlungsbande bei einer größeren Wellenzahl η_2 beziehungsweise bei einer geringeren Wellenlänge λ_2 :

$$\begin{aligned} 2 \cdot \Delta E_{\text{Osz}} &= 8,47 \cdot 10^{-20} \text{ J} = h \cdot c_0 \cdot \eta_2 \\ \Leftrightarrow \eta_2 &= 2 \cdot \eta_{\text{Quant}} = 4282 \text{ 1/cm} \\ \Rightarrow \lambda_2 &= 2,34 \text{ }\mu\text{m} \end{aligned}$$

Allerdings ist die Intensität dieser Strahlungsbande wesentlich geringer als die Bande bei 2141 1/cm . Diese Strahlungsbande wurde bereits in Abbildung 2.30 gezeigt. Da es sich bei CO um ein zweiatomiges Molekül handelt, sind aufgrund der Auswahlregeln für die Rotationsübergänge nur solche Übergänge zulässig, bei denen sich die Rotationsquantenzahl ändert: $\Delta l = \pm 1$. Dementsprechend existiert für Strahlungsbanden des CO kein Q-Zweig. Dies ist durch die Lücke bei der zentralen Wellenlänge $4,67 \text{ }\mu\text{m}$ in Abbildung 2.30 zu erkennen.

Aus dem Abstand der einzelnen Rotationslinien kann auch die Charakteristik der Rotationszustände bestimmt werden. Dazu wird ein Quant betrachtet, das bei dem Rotationsübergang $l' \rightarrow l'' = 1 \rightarrow 0$ und dem gleichzeitigen Vibrationsübergang $n' \rightarrow n'' = 1 \rightarrow 0$ emittiert wird. Dieser Übergang ist in Abbildung 2.30 durch die erste Linie links der Bandenmitte gekennzeichnet. Die Wellenlänge beträgt:

$$\lambda_{\text{Quant}} = \lambda_{\text{Vibration}} - \Delta\lambda = 4,67 \text{ }\mu\text{m} - 8,3 \text{ nm} = 4,6617 \text{ }\mu\text{m}$$

Für die Energie dieses Quants gilt dann:

$$E_{\text{Quant}} = \frac{h \cdot c_0}{\lambda_{\text{Quant}}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4,6617 \text{ }\mu\text{m}} = 4,261 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,2660 \text{ eV}$$

Ohne den Energieunterschied zwischen den Vibrationszuständen ergibt sich die Differenz zwischen den beiden betrachteten Rotationsenergieniveaus:

$$\Delta E_{\text{rot}, 1 \rightarrow 0} = E_{\text{Quant}} - \Delta E_{\text{Osz}} = 0,2660 \text{ eV} - 0,2655 \text{ eV} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

Mit Gleichung (2.104) kann damit auch der zunehmende Abstand zwischen den Energieniveaus ausgedrückt werden:

$$\Delta E_{\text{rot}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ eV} \cdot l = 8,01 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot l$$

Kapitel 3

Wärmeleitung

In diesem Abschnitt wird der einfachste Wärmetransportmechanismus, die Wärmeleitung, ohne den oft überlagerten Einfluss von Konvektion und Strahlung behandelt. Die zuständige Stoffeigenschaft, die Wärmeleitfähigkeit $\lambda \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$, soll bekannt sein, so dass die Betrachtung der Molekülstruktur des wärmeleitenden Festkörpers oder Fluids nicht notwendig ist. Es genügt, das Medium als einen homogenen Körper aufzufassen.

3.1 Differentialgleichung des Temperaturfeldes

Werden in einem einfachen Versuchsaufbau die Oberflächentemperatur einer ebenen Platte mit der Dicke δ durch Heizung bzw. Kühlung auf die Temperaturen T_1 bzw. T_2 eingeregelt, so zeigt die Auswertung des Experiments einen linearen Zusammenhang zwischen der Wärmestromdichte $\frac{\dot{Q}}{A}$ und der auf die Plattendicke δ bezogenen Temperaturdifferenz $(T_1 - T_2)$, vgl. Abbildung 3.1. Der Temperaturverlauf in der Platte ist demnach linear und es gilt für die Wärmestromdichte

$$\frac{\dot{Q}}{A} \equiv \dot{q}'' = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\delta} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (3.1)$$

Dieses Experiment lässt einen allgemeinen Zusammenhang, der schon von Fourier 1822 erkannt wurde, von der Form

$$\dot{q}'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (3.2)$$

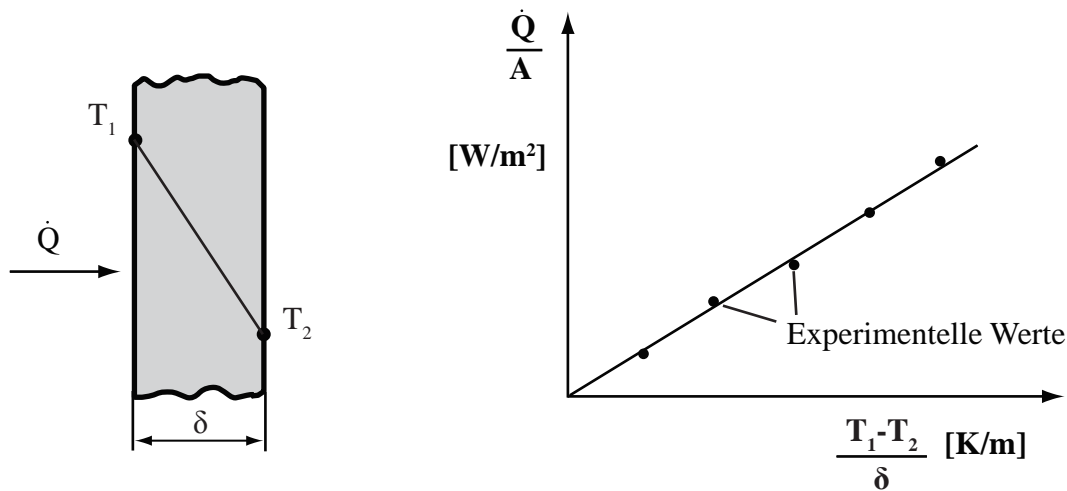


Abbildung 3.1: Wärmestromdichte als Funktion der Temperaturdifferenz
(Fouriersches Gesetz)

vermuten, wobei $\frac{\partial T}{\partial n}$ der Temperaturgradient normal zu einer Fläche konstanter Temperatur ist.

Das negative Vorzeichen berücksichtigt die Vorschrift des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik, dass Wärme immer nur von einer Stelle hoher Temperatur zu einer Stelle niedriger Temperatur fließen kann.

Das Temperaturfeld eines Körpers, in dem auch Wärmequellen zum Beispiel durch Joule'sche Wärme oder Reaktionsumsätze vorhanden sein können, wird durch die Energiebilanz an einem Kontrollvolumen beschrieben, vgl. Abbildung 3.2.

Satz: Die zeitliche Zunahme der inneren Energie im Kontrollvolumen ergibt sich aus der Differenz zwischen eintretendem und austretendem Energiestrom und aus der im Körperinneren produzierten Wärme.

in die Fläche $dydz$ eintretende Energiestrom ist ein reiner Wärmeleitungsstrom $d\dot{Q}_x$, da hier Konvektionsströme ausgeschlossen werden sollen. Mit dem Fourierschen Gesetz Gl. (3.2) ergibt sich für den eintretenden Wärmeleitungsstrom in x-Richtung

$$d\dot{Q}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydz \quad (3.3)$$

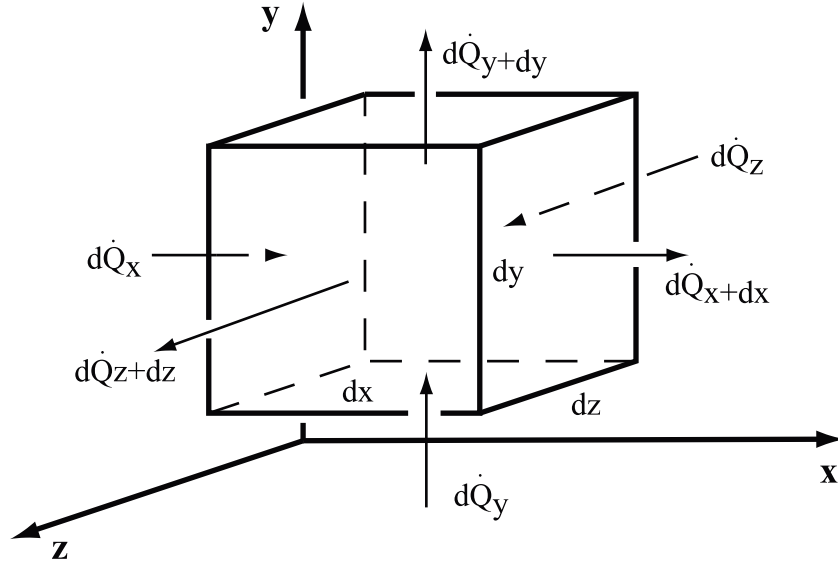


Abbildung 3.2: Energiebilanz am Kontrollvolumen eines ruhenden Systems

und für den austretenden Wärmeleitungsstrom in x-Richtung

$$\begin{aligned} d\dot{Q}_{x+dx} &= d\dot{Q}_x + \frac{\partial}{\partial x} (d\dot{Q}_x) dx \\ &= d\dot{Q}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (3.4)$$

Entsprechende Ausdrücke gelten für die beiden anderen Koordinatenrichtungen.

Die im Volumenelement produzierte Wärme ist

$$\dot{\Phi}''' dx dy dz \quad (3.5)$$

mit der Quellstärke

$$\dot{\Phi}''' \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]. \quad (3.6)$$

Die zeitliche Änderung der inneren Energie des Elements kann für den Fall, dass die Massenänderung im Volumenelement vernachlässigt werden darf, geschrieben werden

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d(m \cdot u)}{dt} = \rho c_v dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.7)$$

Dabei sind ρ [kg/m³] die Dichte und c_v [J/kgK] die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen, deren Index v bei Festkörpern entfallen kann.

Daraus folgt nach dem Energiesatz die Differentialgleichung für das Temperaturfeld im rechtwinkligen Koordinatensystem. Analoge Ableitungen in Zylinder- und Kugelkoordination führen auf entsprechende Differentialgleichungen.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}''' \quad (3.8)$$

(Rechtwinklige Koordinaten (x,y,z,t))

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}''' \quad (3.9)$$

(Zylinder - Koordinaten (r,θ,z,t))

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{\Phi}''' \quad (3.10)$$

(Kugel - Koordinaten (r,θ,φ,t))

In einer ausführlichen Ableitung im Kapitel 4 „Konvektion“ wird nachgewiesen, dass die Gleichungen (3.8) - (3.10) auch bei nicht vernachlässigbaren Masseänderungen, d. h. Dichteänderungen, gültig bleiben, wenn für die spezifische Wärmekapazität c der Wert bei konstantem Druck c_p eingesetzt wird. In den meisten Anwendungsfällen kann die Wärmeleitfähigkeit λ als konstant vorausgesetzt werden, so dass sich die Gleichungen (3.8) -(3.10) vereinfachen. Für Gleichung (3.8) ergibt sich beispielsweise

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda}$$

oder

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} \quad (3.11)$$

wobei die neue Stoffeigenschaft, die *Temperaturleitfähigkeit* $a \equiv \frac{\lambda}{\rho c}$, die Dimension m²/s hat. Die Gleichung (3.11) wird als *Fourier'sche Differentialgleichung* bezeichnet,

deren Lösung zusammen mit den Randbedingungen des Problems auf das gesuchte Temperaturfeld des Körpers führt. In einer ersten Diskussion der Gleichung (3.11) wird deutlich, dass die „Wärmedurchlässigkeit“ eines Materials mit steigender Temperaturleitfähigkeit wächst. Die Ursache kann dabei eine gute Wärmeleitfähigkeit λ oder ein schlechtes Speichervermögen ρc des Materials sein.

In den folgenden Abschnitten werden für spezielle Anwendungsfälle Lösungen der Differential-Gleichungen (3.8)-(3.10) behandelt. Aus dem für ein gegebenes Problem mit seinen Randbedingungen ermittelten Temperaturfeld lässt sich dann nach Gleichung (3.2) der vor allem interessierende Wärmestrom durch eine Fläche errechnen.

In der Literatur wird die Fourier'sche Differentialgleichung, Gl. (3.11)

a) wenn der instationäre Term $\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ nicht zu berücksichtigen ist,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} = 0$$

als *Poisson-Gleichung*

b) und wenn zusätzlich Wärmequellen $\frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda}$ nicht vorliegen,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.12)$$

als *Laplace-Gleichung* bezeichnet.

3.2 Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung ohne Wärmequellen

3.2.1 Ebene Wand mit vorgegebenen Oberflächentemperaturen

Die Gleichung (3.8) vereinfacht sich für stationäre, eindimensionale Probleme ohne Wärmequellen für konstante Wärmeleitfähigkeit zu

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (3.13)$$

Die Integration ergibt $T = Ax + B$, und damit das schon oben gefundene lineare

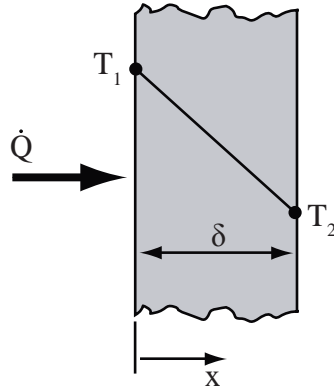


Abbildung 3.3: Wärmeleitung durch eine Wand

Temperaturprofil. Die Konstanten A und B werden durch die Randbedingungen

$$\begin{aligned} x = 0 & : T = T_1 \\ \text{und } x = \delta & : T = T_2 \text{ festgelegt.} \end{aligned}$$

Für den Temperaturverlauf in der Platte folgt

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\delta} x \quad (3.14)$$

und daraus mit Gl. (3.2) den Wärmestrom

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx} = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{\delta} \quad [\text{W}] \quad (3.15)$$

Besteht die Wand aus mehreren Schichten verschiedener Dicken und Materialien, muss die Gl. (3.15) für jede Schicht aufgestellt werden. Der Wärmestrom, der in die Schicht 1 eintritt, wird bei stationären, eindimensionalen Problemen unverändert die Schicht 3 verlassen.

$$\dot{Q} = \lambda_1 \frac{A}{\delta_1} (T_1 - T_2) = \lambda_2 \frac{A}{\delta_2} (T_2 - T_3) = \lambda_3 \frac{A}{\delta_3} (T_3 - T_4)$$

Daraus folgt

$$\dot{Q} = \frac{A}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} (T_1 - T_4)$$

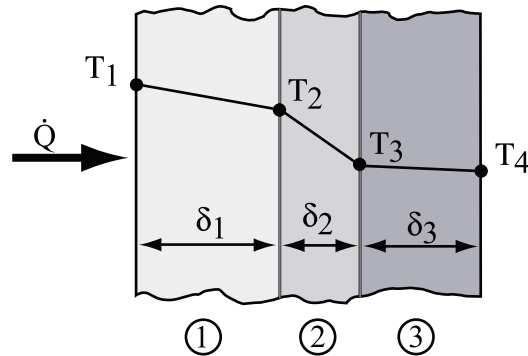


Abbildung 3.4: Wärmeleitung durch eine mehrschichtige Wand

oder allgemein für n Schichten

$$\dot{Q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{A\lambda_i}} (T_1 - T_{n+1}) = \frac{1}{W_L} (T_1 - T_{n+1}) \quad (3.16)$$

Der Wärmestrom ist gleich einem Temperaturpotential dividiert durch die Summe der einzelnen Wärmeleitwiderstände W_{L_i} der Schichten, mit

$$W_L = \sum_{i=1}^n W_{L_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_i}{A\lambda_i} \right) \quad \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

Die Gl. (3.16) ist damit analog dem Ohmschen Gesetz aufgebaut.

3.2.2 Rohrwand mit vorgegebenen Oberflächentemperaturen

In das Kontrollvolumen $2\pi r dr L$ fließt durch die Fläche $2\pi r L$ der Wärmestrom

$$\dot{Q}_r = -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr}$$

Durch die Fläche $2\pi(r + dr)L$ tritt der Wärmestrom

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{r+dr} &= \dot{Q}_r + \frac{d\dot{Q}_r}{dr} dr \\ &= \dot{Q}_r - 2\pi L \lambda \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr \end{aligned}$$

wieder aus.

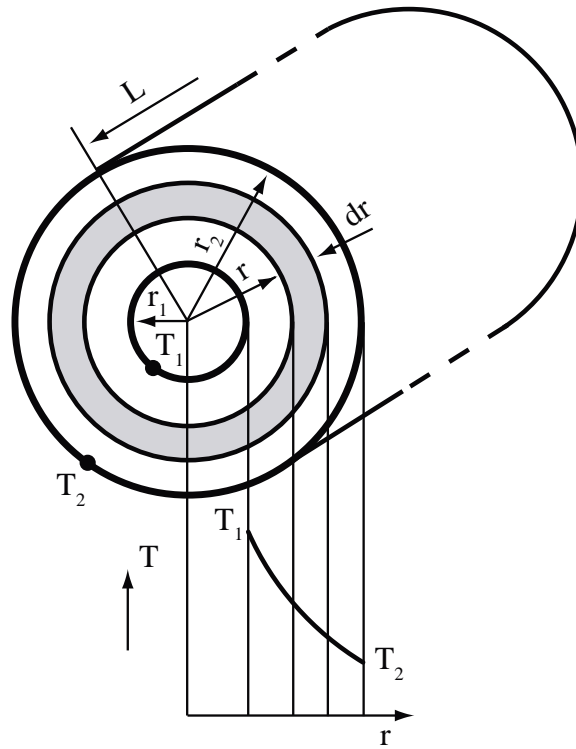


Abbildung 3.5: Wärmeleitung durch eine Rohrwand

Im stationären, eindimensionalen Fall bleibt der Wärmestrom konstant.

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} = 0 \quad (3.17)$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (3.18)$$

oder

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.19)$$

Die Beziehung, Gl. (3.18) hätte sich auch direkt aus Gl. (3.9) ablesen lassen.

Die Laplace-Gleichung, Gl. (3.18), hat die Lösung

$$T = A \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + B \quad (3.20)$$

mit r_0 als Bezugsradius.

Die Randbedingungen

$r = r_1$: $T = T_1$ und $r = r_2$: $T = T_2$ legen die Konstanten A und B der Gl. (3.20) fest:

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad ; \quad B = T_1 - \frac{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) (T_2 - T_1)}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}$$

Die Temperaturverteilung in der Rohrwand zeigt einen logarithmischen Verlauf und ist gegeben durch

$$T = T_1 + \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) \frac{T_2 - T_1}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \quad (3.21)$$

oder

$$T = T_2 + \ln \left(\frac{r}{r_2} \right) \frac{T_2 - T_1}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \quad (3.22)$$

Der Wärmestrom durch die Rohrwand wird unter Anwendung des Fourierschen Gesetzes, Gl.(3.2),

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dr} = -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr}$$

mit Gl. (3.21)

$$\dot{Q} = +2\pi\lambda L \frac{T_1 - T_2}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \quad (3.23)$$

Mit einem Wärmeleitwiderstand wie in Gl. (3.16) folgt aus Gl. (3.23)

$$\dot{Q} \equiv \frac{T_1 - T_2}{W_L} \quad \text{mit} \quad W_L = \frac{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}{2\pi\lambda L} \quad (3.24)$$

Entsprechend zur mehrschichtigen Platte können mehrschichtige Rohrwände behandelt werden. Für diesen Fall gilt:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n W_{L_i}} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\frac{1}{2\pi L} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \quad (3.25)$$

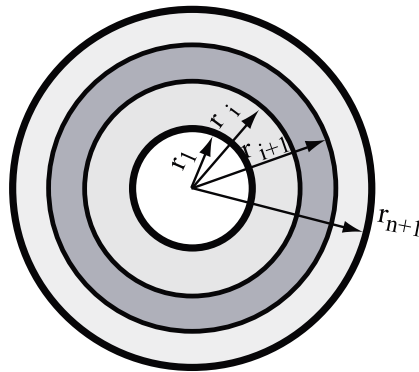


Abbildung 3.6: Wärmeleitung durch ein mehrschichtiges Rohr

3.2.3 Ebene Wände mit konvektivem Wärmeübergang

Obwohl in diesem Kapitel nur Wärmetransport durch Leitung behandelt werden soll, wird in diesem Unterabschnitt auf die Wärmeübertragung durch Konvektion eingegangen, da diese über die Randbedingungen auch bei Wärmeleitproblemen wichtig sein kann. In der Einleitung wurde schon darauf hingewiesen, dass der Energietransport in einem an der Oberfläche entlangströmenden Fluid zu einer begrenzenden Wand nicht mehr allein von der Wärmeleitung übernommen wird. Nur in der unmittelbaren Nähe der Wand, wo aufgrund der Zähigkeit des Fluids seine Geschwindigkeit vernachlässigbar klein ist, kann der Wärmestrom wie bisher nach Gl. (3.2)

$$\dot{Q} = -A \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)_{\text{Fluid, Wand}} \quad (3.26)$$

durch den Temperaturgradienten im Fluid und die Wärmeleitfähigkeit des Fluids λ_{f} beschrieben werden.

Der Temperaturgradient an der Wand ist aber abhängig von der Strömungsgeschwindigkeit des Fluids, so dass eine rein theoretische Ermittlung nur in wenigen Fällen möglich ist, auf die im Abschnitt 4 noch eingegangen wird.

Anstelle der Gl. (3.26) wird üblicherweise der phänomenologische Ansatz für den konvektiven Wärmeübergang benutzt. Zum Beispiel für die Seite des Fluids A,

$$\dot{Q} = A\alpha_A (T_A - T_1) \quad (3.27)$$

wobei der Wärmeübergangskoeffizient $\alpha \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$ in diesem Abschnitt als bekannt vorausgesetzt wird. Für das vorliegende Problem der ebenen, von einem Fluid über-

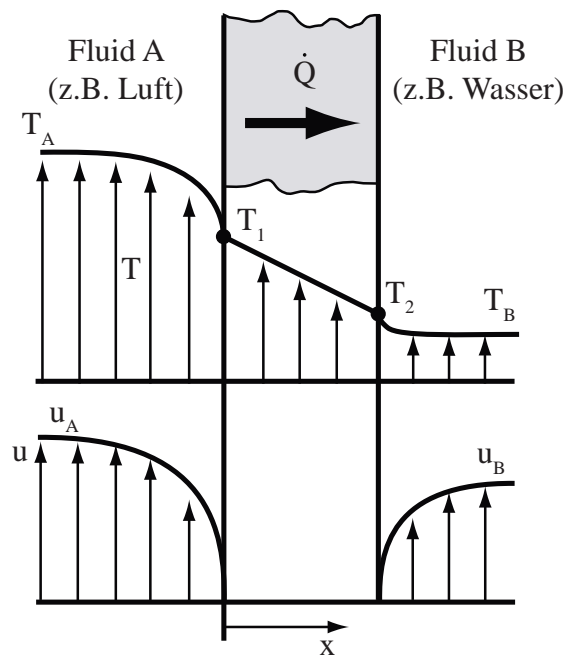


Abbildung 3.7: Wärmeleitung durch eine Wand bei konvektiven Randbedingungen

strömten Wand, ergeben sich die Wärmeströme

- von Fluid A zur Wand durch Konvektion

$$\dot{Q}_{K_A} = A\alpha_A (T_A - T_1)$$

- durch die Wand durch Leitung

$$\dot{Q}_L = A \frac{\lambda}{\delta} (T_1 - T_2)$$

- von der Wand in das Fluid B durch Konvektion

$$\dot{Q}_{K_B} = A\alpha_B (T_2 - T_B)$$

Im stationären Fall ist

$$\dot{Q}_{K_A} = \dot{Q}_L = \dot{Q}_{K_B} = \dot{Q}$$

und damit

$$\dot{Q} = \frac{A}{\frac{1}{\alpha_A} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_B}} (T_A - T_B) \quad (3.28)$$

Der Nenner der Gl. (3.28) kann durch die Definition eines Wärmedurchgangskoeffizienten $k \left[\frac{W}{m^2K} \right]$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_B} \quad (3.29)$$

zusammengefasst werden.

Daraus folgt

$$\dot{Q} = kA (T_A - T_B) \quad (3.30)$$

oder alternativ durch Einführung von „Wärmeübergangswiderständen“ für den konvektiven Wärmeübergang

$$W_K \equiv \frac{1}{A\alpha} \left[\frac{K}{W} \right]$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{W_{K_A} + W_L + W_{K_B}} (T_A - T_B) = \frac{1}{\sum W_i} (T_A - T_B) \quad (3.31)$$

Durch Ergänzung von weiteren Wärmeleitwiderständen W_{L_i} (siehe Gl. 3.16) kann Gl. (3.31) einfach auf Probleme mit mehrschichtigen Wänden erweitert werden.

3.2.4 Rohrwand mit konvektivem Wärmeübergang

Die im letzten Abschnitt abgeleiteten Zusammenhänge können sinngemäß auf das Problem eines ein- oder mehrschichtigen Rohres übertragen werden. Ein Anwendungsbeispiel wäre die Berechnung des Wärmeverlustes eines isolierten Heißwasserrohres.

Die Wärmeleitwiderstände W_{L_i} der Gl. (3.25) sind zu ergänzen durch die Wärmeübergangswiderstände auf der Rohrrinnenseite und der Rohraußenseite $W_{K_A} = \frac{1}{\alpha_A A_A} \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$ bzw. $W_{K_B} = \frac{1}{\alpha_B A_B}$, wobei $A_A = 2\pi r_1 L$ und $A_B = 2\pi r_{n+1} L$ ist.

Für den Wärmestrom ergibt sich:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L}{\frac{1}{\alpha_A r_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{\alpha_B r_{n+1}}} (T_A - T_B) \quad (3.32)$$

Durch einen Vergleich dieses Ansatzes mit einer Schreibweise unter Verwendung des Wärmedurchgangskoeffizienten k

$$\dot{Q} = kA (T_A - T_B) = k\pi dL (T_A - T_B) \quad (3.33)$$

ergibt sich

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A} \frac{d}{d_1} + \frac{d}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_B} \frac{d}{d_{n+1}} \quad (3.34)$$

Dabei ist es gleichgültig, welche Bezugsfläche A bzw. welcher Bezugsdurchmesser d in Gl. (3.33) und Gl. (3.34) eingesetzt wird. In der Praxis wird als Bezugsdurchmesser meist der Rohraußendurchmesser d_{n+1} gewählt. Bei dünnwandigen Rohren kann anstelle der Gl. (3.32) mit der für die ebene Wand gültigen Beziehung (3.28) gerechnet werden, wenn dort für $A = \pi d_m L$ eingesetzt wird, wobei d_m den arithmetisch gemittelten Durchmesser darstellt. Es empfiehlt sich dann, bei Problemen mit Wärmeübergangskoeffizienten von gleicher Größenordnung auf beiden Fluidseiten mit dem arithmetischen Mittelwert aus dem Innen- und Außendurchmesser des Rohres zu rechnen. Unterscheiden sich die Wärmeübergangskoeffizienten sehr stark voneinander, so ist der Durchmesser zu wählen, wo der kleinere Wärmeübergangskoeffizient vorliegt.

3.2.5 Wärmeleitung in Rippen

Ein technisch sehr wichtiges Anwendungsgebiet der bisher behandelten Grundlagen ist die Voraussage der Temperaturverteilung in Rippen und deren Wärmeabgabe.

Rippen werden in Form von zylindrischen Stabrippen, ebenen Rippen, Kreisrippen usw. auf der Oberfläche eines wärmeabgebenden (oder -aufnehmenden) Körpers dort

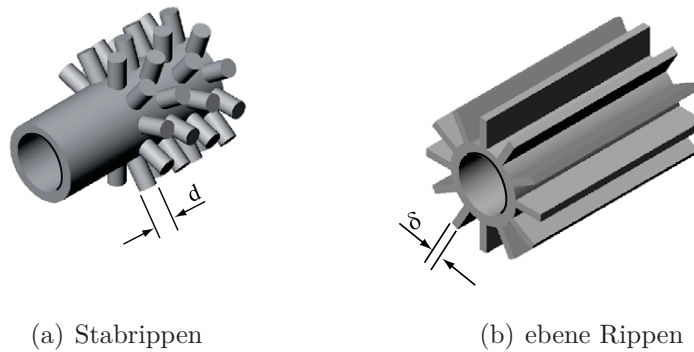


Abbildung 3.8: Berippte Rohroberflächen

angebracht, wo die größeren Wärmeübergangswiderstände sind. Die Wirksamkeit einer Rippe wird durch den Rippenwirkungsgrad η_R beschrieben. Er ist definiert durch

$$\eta_R = \frac{\text{Übertragene Wärme}}{\text{Maximal übertragbare Wärmemenge}} \quad (3.35)$$

wobei die „maximal übertragbare Wärmemenge“ die Wärmemenge ist, die die Rippe übertragen könnte, wenn ihre gesamte Oberfläche die Temperatur des Rippenfußes annehmen würde.

Zunächst sind nur solche Rippengeometrien zu besprechen, die näherungsweise eindimensional und damit analytischen Ansätzen zugänglich sind. Zwei- und dreidimensionale Rippen können nur noch mit numerischen Verfahren erfasst werden.

Stabrippen und ebene Rippen Unter der vereinfachenden Annahmen, dass

- der Temperaturverlauf in der Rippe eindimensional ist, das heißt, das sich die Temperatur nur mit der Rippenlänge und nicht mit dem Radius bzw. der Querrichtung ändert ($Bi \ll 1$),
- der Wärmeübergangskoeffizient bekannt ist,

dann ergibt die Wärmebilanz am Rippenelement mit der Querschnittsfläche A_Q , dass die Differenz zwischen dem ein- und austretenden Wärmeleitungsstrom durch Konvektion an die Umgebung abgegeben werden muss.

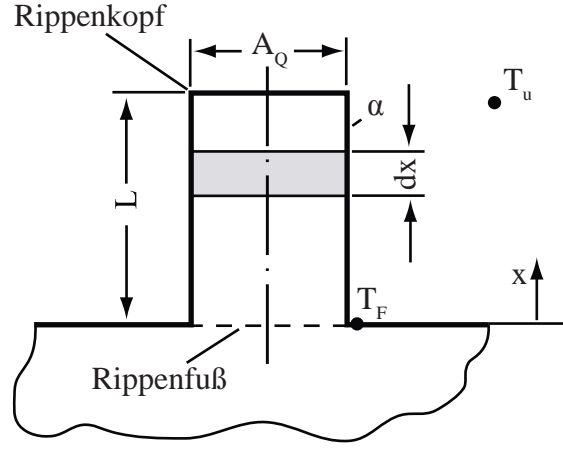


Abbildung 3.9: Energiebilanz an einer Rippe

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} = d\dot{Q}_K$$

Mit Gl. (3.2) werden die Wärmeleitungsströme

$$\dot{Q}_x = -\lambda A_Q \frac{dT}{dx}$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{d\dot{Q}_x}{dx} dx = -\lambda A_Q \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right)$$

und mit Gl. (3.27) der Konvektionsstrom vom Element mit dem Umfang U und der Länge dx an die Umgebung

$$d\dot{Q}_K = \alpha U (T - T_u) dx$$

Die Bilanz ergibt nach Einführung einer *Übertemperatur* $\theta \equiv T - T_u$ die Differenzialgleichung für die Rippentemperatur

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \underbrace{\frac{\alpha U}{\lambda A_Q}}_{m^2} \theta = 0 \quad (3.36)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet:

$$\theta = A e^{mx} + B e^{-mx} = A^* \sinh(mx) + B^* \cosh(mx) \quad (3.37)$$

mit

$$m \equiv \left(\frac{\alpha U}{\lambda A_Q} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{m} \right],$$

wobei U dem Umfang [m] und A_Q der Querschnittsfläche [m²] der Rippe entspricht.

Für die Stabrippe mit Kreisquerschnitt wird $m = \left(\frac{4\alpha}{\lambda d} \right)^{\frac{1}{2}}$ und für die ebene Rippe $m = \left(\frac{2\alpha}{\lambda d} \right)^{\frac{1}{2}}$

Randbedingungen

1. $x = 0$: $\theta = \theta_F$ (wobei θ_F die „Fußübertemperatur“ ist)
2. $x = L$:

Am Rippenkopf sind verschiedene Varianten der Randbedingung denkbar:

- a) Die Wärmeabgabe am Rippenkopf ist im Vergleich zur insgesamt abgegebenen Wärme vernachlässigbar, so dass der Kopf näherungsweise als adiabat angesehen werden darf
 $\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=L} = 0$ (adiabater Rippenkopf)
- b) Die Rippe ist sehr lang, ihre Kopftemperatur nimmt näherungsweise Umgebungstemperatur an
 $(\theta)_{x=L} = 0$ (lange Rippe, Umgebungstemperatur am Rippenkopf)
- c) Die Rippe hat eine endliche Höhe und gibt auch am Kopf Wärme ab
 $(Q)_{x=L} = \alpha A_Q \theta_K$ (Wärmetransport über den Rippenkopf)

Beispielhaft soll hier die Randbedingung 2a berücksichtigt werden.

Dann folgt aus Gl. (3.37) der Temperaturverlauf über der Rippenhöhe

$$\theta = \theta_F \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad (3.38)$$

oder

$$\theta = \theta_F \frac{\cosh [m (L - x)]}{\cosh (mL)} \quad (3.39)$$

Für eine Stabrippe mit Kreisquerschnitt mit $m = \left(\frac{4\alpha}{\lambda d} \right)^{\frac{1}{2}}$ ist im folgenden Diagramm der dimensionslose Temperaturverlauf über der Länge x für eine Rippe mit einem

Durchmesser $d = 8\text{ mm}$, einer Länge $L = 40\text{ mm}$ und einem Wärmeübergangskoeffizient gegen Umgebungsluft von $\alpha = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ für verschiedene Rippenwerkstoffe skizziert. Aus dem gefundenen Temperaturverlauf in der Rippe lässt sich der von

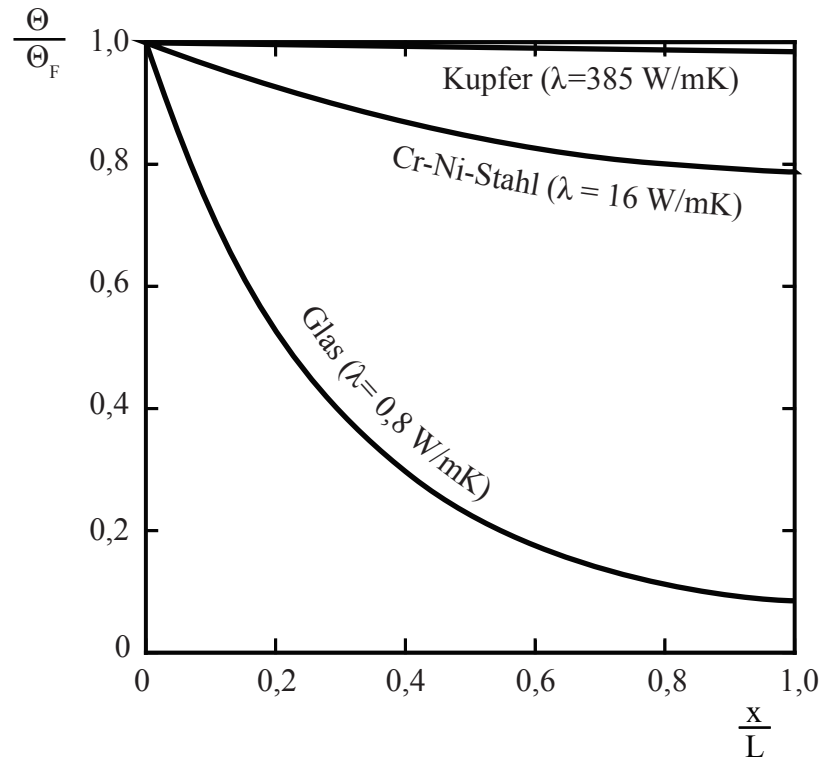


Abbildung 3.10: Temperaturverlauf über der Länge einer Stabrippe

der Rippe insgesamt an die Umgebung abgegebene Wärmestrom errechnen. Eine Energiebilanz um die Rippe sagt aus, dass der am Fuß aus dem Grundmaterial in die Rippe durch Wärmeleitung einfließende Wärmestrom im stationären Fall durch Konvektion wieder an die Umgebung abgegeben wird.

$$\dot{Q} = \dot{Q}_F = -\lambda A_Q \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0}$$

unter Verwendung von Gl. (3.38) oder

$$\dot{Q} = \lambda A_Q m \theta_F \left(\frac{e^{mL} - e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right) \quad (3.40)$$

$$\dot{Q} = \lambda A_Q m \theta_F \tanh(mL) \quad (3.41)$$

Zur Ermittlung des Rippenwirkungsgrades wird der durch Gl. (3.41) festgelegte Wärmestrom auf den maximal möglichen Wärmestrom dieser Rippengeometrie bezogen, siehe Gl. (3.35),

$$\eta_R \equiv \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}} = \frac{\lambda A_Q m \theta_F \tanh(mL)}{\alpha U L \theta_F} \quad (3.42)$$

mit $\dot{Q}_{\max} = UL\alpha\theta_F$ und $\dot{Q}_R = \dot{Q}_{\max}\eta_R$.

$$\eta_R = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

Diese Funktion ist in Abb. 3.11 dargestellt. Der Kurvenverlauf macht deutlich, dass

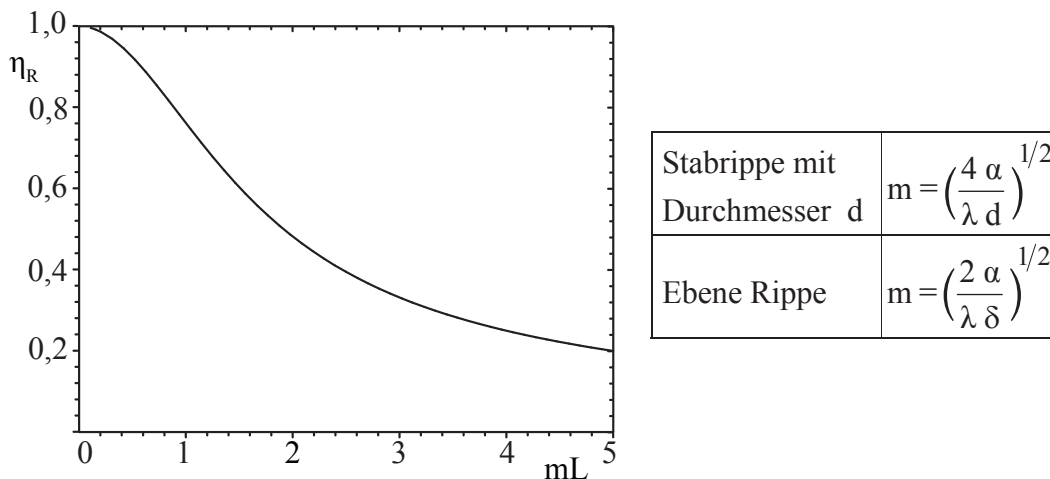


Abbildung 3.11: Rippenwirkungsgrad einer Stabrippe

der Rippenwirkungsgrad nicht über die Rippenlänge zu optimieren ist, dass vielmehr Kriterien wie Rippenmasse oder Rippenvolumen eine Rolle spielen werden.

Die Gln. (3.38) bis (3.42) sind unter Berücksichtigung der Randbedingung 2a) am Rippenkopf abgeleitet worden. Die Ableitungen für die Randbedingungen 2b) und 2c) sind ganz analog.

Kreisrippen* Diese Rippengeometrie ist in der Praxis des Kühlerbaus am häufigsten anzutreffen, deshalb sollen die entsprechenden Ableitungen wenigstens angedeutet

werden. Die Wärmebilanz am Rippenenelement $2\pi r dr$ führt auf die Differentialgleichung

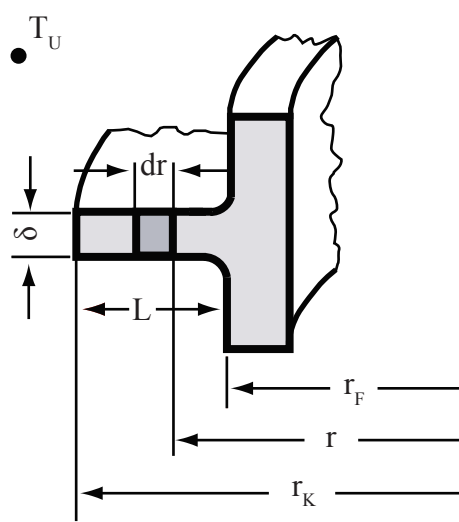


Abbildung 3.12: Wärmeübertragung durch Kreisrippen

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda\delta} \theta = 0 \quad (3.43)$$

Dies ist die Besselsche Differentialgleichung Nullter Ordnung. Ihre Lösung wird durch Glieder der modifizierten Besselfunktion erster Art I_o und zweiter Art K_o (siehe Tab. 2 im Anhang) angegeben

$$\theta = A I_o(mr) + B K_o(mr) \quad (3.44)$$

dabei ist $m = \left(\frac{2\alpha}{\lambda\delta}\right)^{\frac{1}{2}}$. Die Konstanten A und B sind wieder aus den Randbedingungen zu ermitteln.

Mit den Randbedingungen

1. $r = r_F : \theta = \theta_F$
2. $r = r_K : \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{r=r_K} = 0$

folgt für den Temperaturverlauf in der Rippe

$$\theta = \theta_F \frac{I_o(m r) K_1(m r_K) + I_1(m r_K) K_o(m r)}{I_o(m r_F) K_1(m r_K) + I_1(m r_K) K_o(m r_F)} \quad (3.45)$$

und für den gesamten abgegebenen Wärmestrom

$$\dot{Q} = 2\pi r_F \lambda \delta m \theta_F \frac{I_1(m r_K) K_1(m r_F) - I_1(m r_K) K_1(m r_K)}{I_o(m r_F) K_1(m r_K) + I_1(m r_K) K_o(m r_F)} \quad (3.46)$$

und damit schließlich für den Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R \equiv \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}} = \frac{2}{m r_F \left[\left(\frac{r_K}{r_F} \right)^2 - 1 \right]} \frac{I_1(m r_K) K_1(m r_F) - I_1(m r_F) K_1(m r_K)}{I_o(m r_F) K_1(m r_K) + I_1(m r_K) K_o(m r_F)} \quad (3.47)$$

$$\approx \frac{\tanh(m r_F \varphi)}{m r_F \varphi} \quad (3.48)$$

mit

$$\varphi = \left(\frac{r_K}{r_F} - 1 \right) \left(1 + 0,35 \ln \frac{r_K}{r_F} \right)$$

und

$$\dot{Q}_{\max} = \alpha \pi (r_\alpha^2 - r_F^2) a \theta_F$$

Die zahlenmäßige Auswertung ist etwas unhandlich, da tabellierte Bessel-Funktionen benutzt werden müssen.

Im Bild ist der Rippenwirkungsgrad für Kreisrippen verschiedener Radienverhältnisse $\frac{r_K}{r_F}$ nach den Gln. (3.48) zusammengestellt. Innerhalb der Zeichengenauigkeit sind die Ergebnisse der beiden Berechnungen nicht zu unterscheiden. Für Radien-

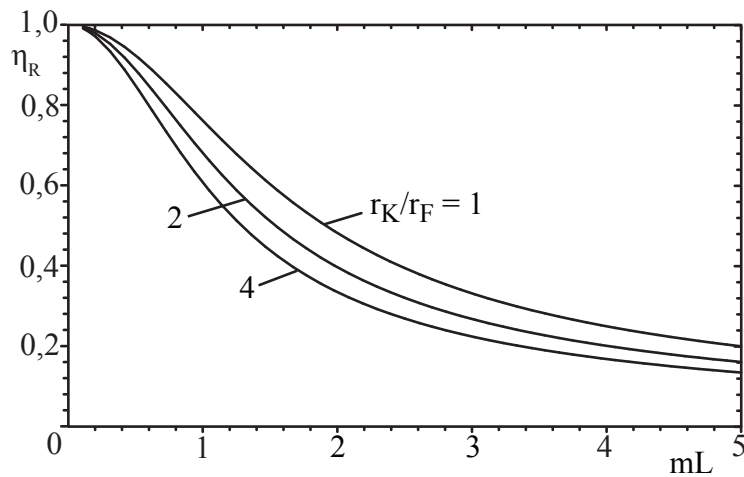


Abbildung 3.13: Rippenwirkungsgrad einer Kreisrippe

verhältnisse $\frac{r_K}{r_F} \rightarrow 1$ müssen sich wieder die Werte für die ebene Rippe ergeben.

3.3 Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung mit Wärmequellen

In vielen Anwendungsfällen sind Wärmetransportvorgänge für Systeme mit innerer Wärmeproduktion zu berechnen. Als Beispiele könnten Brennstäbe von Kernreaktoren, Elektro-Widerstandsdrähte oder Behälter, in denen chemische Reaktionen ablaufen, genannt werden. Oft ist eine eindimensionale Betrachtung für eine erste Abschätzung zulässig. Am Beispiel eines zylindrischen Brennstabs soll die Differen-

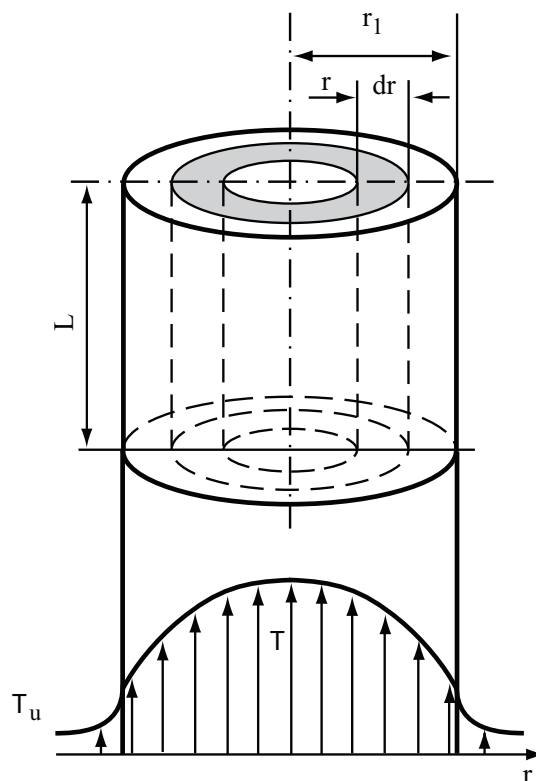


Abbildung 3.14: Wärmeleitung in einem Zylinder mit Wärmequellen

tialgleichung des Temperaturfeldes abgeleitet werden.

Die Energiebilanz am Volumenelement $dV = 2\pi r dr L$ ergibt

$$+\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} + \dot{\Phi}''' dV = 0$$

und damit

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} = 0 \quad (3.49)$$

oder

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} = 0 \quad (3.50)$$

Diese Berechnung oder analoge für den ebenen oder kugelsymmetrischen Fall lassen sich direkt aus Gl. (3.8) ablesen.

Die Randbedingungen lauten

1.

$$r = 0 \quad : \quad \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=0} = 0 \quad (3.51)$$

2.

$$r = r_1 \quad :$$

Entsprechend dem Abschnitt 3.2 kann an der Zylinderoberfläche entweder a) die Temperatur oder b) ein Wärmeübergangskoeffizient vorgeschrieben sein

a)

$$T = T_1 \quad (3.52)$$

b)

$$\dot{Q} = 2\pi r_1 L \alpha (T_1 - T_u) \quad (3.53)$$

da die abgeführte Wärme im stationären Fall von den Wärmequellen im Zylinder produziert werden muss, wird

$$\dot{Q} = \pi r_1^2 L \dot{\Phi}'''$$

und damit

$$T_1 = T_u + \frac{r_1 \dot{\Phi}'''}{2\alpha}$$

Die Integration der Differenzialgleichung (3.49) unter Beachtung von Gl. (3.51) und (3.53) führt auf den Temperaturverlauf im Zylinder

$$T = T_u + \frac{\dot{\Phi}''' r_1^2}{4\lambda} \left(1 + \frac{2\lambda}{\alpha r_1} - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right) \quad (3.54)$$

Diese Gleichung lässt sich in einer allgemeinen Form angeben, so dass sie auch für die ebene und die kugelsymmetrische Geometrie gültig ist

$$T = T_u + \frac{\dot{\Phi}''' s^2}{2(n+1)\lambda} \left(1 + \frac{2\lambda}{\alpha s} - \left(\frac{\xi}{s} \right)^2 \right) \quad (3.55)$$

Die Ortsvariable ξ , die charakteristische Abmessung s und die Steuergröße n sind nach der folgenden Vorschrift einzuführen:

Tabelle 3.1: Bedeutung der allgemeinen Variablen der Gl. (3.55)

	Platte*)	Zylinder	Kugel
ξ	x	r	r
s	δ	r_1	r_1
n	0	1	2

*)Bei der Platte ist x auf die Symmetrieebene zu beziehen, und δ entspricht der Hälfte der Plattendicke.

Durch Auswertung von Gl. (3.55) kann die Maximaltemperatur im Körper ($\xi = 0$)

$$T_{\max} = T_u + \frac{\dot{\Phi}''' s^2}{2(n+1)\lambda} \left(1 + \frac{2\lambda}{\alpha s} \right) \quad (3.56)$$

und die Oberflächentemperatur ($\xi = s$)

$$T_s = T_u + \frac{\dot{\Phi}''' s}{(n+1)\alpha} \quad (3.57)$$

berechnet werden.

3.4 Stationäre, mehrdimensionale Wärmeleitung ohne Wärmequellen

Ein typisches Beispiel dieser Gruppe ist das schon im Abschnitt 3.2.5 besprochene Rippenproblem. Wenn die Rippenlänge im Verhältnis zum Durchmesser klein ist, oder wenn die Wärmeleitwiderstände gegenüber den Wärmeübergangswiderständen groß sind, wird sich nicht nur über der Rippenlänge, sondern auch über dem Rippenradius bzw. der Rippendicke ein Temperaturprofil ergeben. In Abbildung 3.15 sind Isothermen einer solchen Rippe, die durch ein Analogieverfahren, Schmidt (1966) bestimmt wurden, und die dazu orthogonalen Wärmestromlinien schematisch dargestellt. Dieses Temperaturfeld muss sich aus der im Abschnitt 3.1 abgeleiteten Ener-

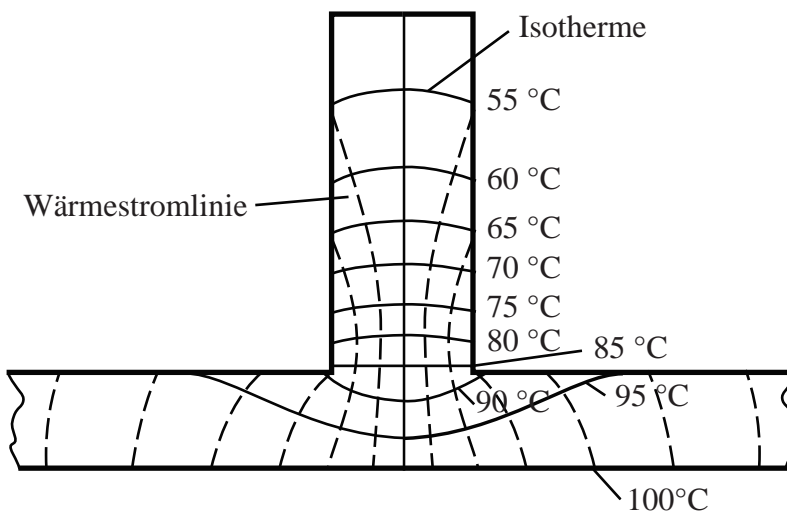


Abbildung 3.15: Isothermen und Wärmestromlinien in einer ebenen Rippe

giebilanz, Gl. (3.8), für einen ebenen Körper mit konstanter Wärmeleitfähigkeit, das heißt aus der Laplace-Gleichung ergeben.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Diese Gleichung kann analytisch, numerisch, grafisch oder auch wie im Falle der oben gezeigten Rippe durch Analogieverfahren gelöst werden.

Die analytischen Verfahren sind in ihrer Anwendbarkeit auf wenige Geometrien und Randbedingungen beschränkt und auch dann oft noch sehr aufwendig. Eine ausführ-

liche Behandlung ist z.B. in den Büchern von Carslaw u. Jaeger (1948) oder Schneider (1955) zu finden. Grafische Methoden oder Analogieverfahren werden meist eingesetzt, wenn eine qualitative Beurteilung eines Wärmeleitproblems genügt und vor allem die Auswirkungen von Parametervariationen interessieren.

Mit der Entwicklung der schnellen Großrechenanlagen sind heute auch sehr komplexe Probleme mit großer Genauigkeit numerisch zu lösen. Zur numerischen Behandlung der Laplace-Gleichung wird die partielle Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung angenähert, das heißt, die Ableitungen in der Differentialgleichung werden durch algebraische Näherungen an diskreten Körperpunkten ersetzt. Die Verfahrensvarianten unterscheiden sich vor allem in der Art der Formulierung dieser Näherungen und der Lösungsmethode des entstehenden Gleichungssystems.

Am Beispiel der ebenen Rippe soll das prinzipielle Vorgehen gezeigt werden. Ausführliche Beschreibungen mit Wiedergaben von Rechenprogrammen sind bei Croft u. Lilley (1977), oder Bayley u. a. (1972) zu finden.

Zur übersichtlicheren Darstellung der Randbedingungen werden in die Laplace-Gleichung die Übertemperaturen $\theta = T - T_u$ eingeführt:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (3.58)$$

Wird, wie in Abb. 3.16 angedeutet, der Körper in den beiden Koordinatenrichtungen in jeweils äquidistante Streifen der Breite Δx und Δy geteilt, so lassen sich die Temperaturgradienten wie folgt durch Differenzenquotienten annähern.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n} &\approx \frac{\theta_{m+1,n} - \theta_{m,n}}{\Delta x} \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n} &\approx \frac{\theta_{m,n} - \theta_{m-1,n}}{\Delta x} \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{m,n+\frac{1}{2}} &\approx \frac{\theta_{m,n+1} - \theta_{m,n}}{\Delta y} \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{m,n-\frac{1}{2}} &\approx \frac{\theta_{m,n} - \theta_{m,n-1}}{\Delta y} \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Differenzenformulierungen für die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \approx \frac{\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n} - \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} = \frac{\theta_{m+1,n} + \theta_{m-1,n} - 2\theta_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

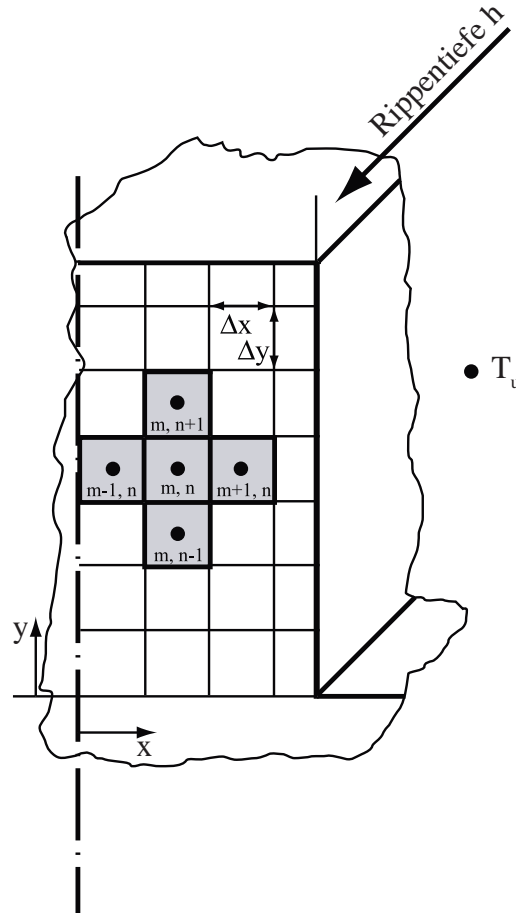


Abbildung 3.16: Beschreibung der Wärmeleitung in einer Rippe mit Differenzenverfahren

und

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \approx \frac{\frac{\partial \theta}{\partial y} \big|_{m, n + \frac{1}{2}} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \big|_{m, n - \frac{1}{2}}}{\Delta y} = \frac{\theta_{m, n+1} + \theta_{m, n-1} - 2\theta_{m, n}}{(\Delta y)^2}$$

und damit die Differenzschreibweise der Laplace-Gleichung

$$\frac{\theta_{m+1, n} + \theta_{m-1, n} - 2\theta_{m, n}}{(\Delta x)^2} + \frac{\theta_{m, n+1} + \theta_{m, n-1} - 2\theta_{m, n}}{(\Delta y)^2} = 0$$

die sich unter der Voraussetzung eines quadratischen Gitters $\Delta x = \Delta y$ vereinfachen lässt zu

$$\theta_{m+1, n} + \theta_{m-1, n} + \theta_{m, n+1} + \theta_{m, n-1} - 4\theta_{m, n} = 0 \quad (3.59)$$

Sind innere Wärmequellen vorhanden, kann die Gl. (3.59) durch Einführung der Quellstärke leicht zu

$$\theta_{m+1,n} + \theta_{m-1,n} + \theta_{m,n+1} + \theta_{m,n-1} - 4\theta_{m,n} + \frac{\dot{\Phi}'''(\Delta x)^2}{\lambda} = 0 \quad (3.60)$$

erweitert werden. Für jeden anderen Gitterpunkt des Körpers sind den Gln. (3.59) bzw. (3.60) entsprechende Beziehungen aufzustellen, wobei an den Körperrändern die Randbedingungen des Problems mit einfließen.

Sind am Körperndie Temperaturen nicht vorgeschrieben, müssen dafür ein entsprechendes Wärmeübergangsgesetz und die Umgebungstemperatur T_u bekannt sein. Die Wärmebilanz am Gitterelement des Randpunktes (m,n) ergibt

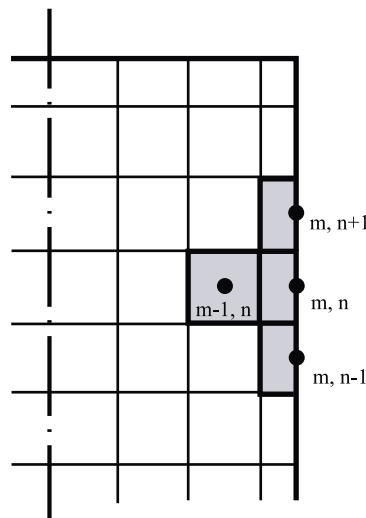


Abbildung 3.17: Formulierung der Randbedingung

$$-\lambda \frac{\Delta y}{\Delta x} (\theta_{m,n} - \theta_{m-1,n}) - \lambda \frac{\Delta x}{2\Delta y} (\theta_{m,n} - \theta_{m,n+1}) - \lambda \frac{\Delta x}{2\Delta y} (\theta_{m,n} - \theta_{m,n-1}) = \alpha \Delta y \theta_{m,n} \quad (3.61)$$

Bei einer quadratischen Gitteranordnung $\Delta x = \Delta y$ folgt daraus für die Übertemperatur des Wandpunktes $\theta_{m,n}$

$$\theta_{m,n} \left(\frac{\alpha}{\lambda} \Delta x + 2 \right) - \frac{1}{2} [2\theta_{m-1,n} + \theta_{m,n+1} + \theta_{m,n-1}] = 0 \quad (3.62)$$

Ähnliche Ausdrücke lassen sich für die Körperecken oder für adiabate Oberflächen ableiten, siehe beispielsweise Holman (1976).

Je feiner das Gitternetz angelegt ist, desto besser wird die Differenzengleichung mit der Differentialgleichung übereinstimmen, desto größer wird aber auch der numerische Aufwand zur Lösung des Gleichungssystems.

Für eine nicht zu große Anzahl von Gitterpunkten kann die Lösung noch mit einer Handrechnung nach dem aus der Strömungslehre bekannten Relaxationsverfahren durchgeführt werden.

Beim Relaxationsverfahren wird in folgenden Rechenschritten vorgegangen:

1. Zuordnung einer Schätztemperatur zu den Gitterpunkten. Am Körperperrand sind je nach Randbedingung die Temperaturwerte direkt vorgegeben, oder im Falle eines konvektiven Wärmeübergangs zur Umgebung über ein Wärmeübergangsgesetz zu ermitteln (siehe oben).
2. Durch Einsetzen der Schätztemperaturen in Gl. (3.59) bzw. (3.62) folgt für jedes Gitterelement einen Rest, der in Analogie zu Gl. (3.60) als eine „Wärmequelle“ interpretieren werden könnte.
3. Änderung der Schätztemperaturen beginnend bei den Temperaturen in der Nachbarschaft des Elements mit der größten „Wärmequelle“ mit dem Ziel, die „Wärmequelle“ zum Verschwinden zu bringen.
4. Sind die „Wärmequellen“ genügend klein, ist das Temperaturfeld bestimmt. Die vom Körper abgegebene Wärmemenge kann damit nach

$$\dot{Q} = \sum \lambda h \Delta x \left. \frac{\Delta \theta}{\Delta y} \right|_{\text{Wand}} \quad \text{bzw.} \quad \dot{Q} = \sum \lambda h \Delta y \left. \frac{\Delta \theta}{\Delta x} \right|_{\text{Wand}} \quad \text{berechnet werden, wobei } h \text{ die Körpertiefe bedeutet.}$$

Das iterative Relaxationsverfahren wurde für den Einsatz auf dem Großrechner zur besseren Rechenzeitausnutzung modifiziert. Für spezielle Probleme haben sich auch

direkte Lösungsverfahren, wie die Methode der Gauß'schen Elimination oder der Matrizeninversion als vorteilhaft erwiesen.

3.5 Instationäre Wärmeleitung ohne Wärmequellen

Die vorhergehenden Abschnitte befassten sich mit Wärmeleitvorgängen, bei denen sich ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat. Das ermittelte Temperaturfeld war unabhängig von der Zeit.

In diesem Abschnitt sollen die instationären Aufheiz- und Abkühlprozesse bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes behandelt werden. Diese Vorgänge werden durch die Differenzialgleichungen (3.8), (3.9) oder ((3.10)) des Abschnitts 3.1 unter Beachtung der Rand- und Anfangsbedingungen des Problems beschrieben.

Da eine allgemeine Lösung dieser Gleichungen nicht möglich ist, können wieder nur typische Anwendungsbeispiele gegeben werden.

3.5.1 Körper mit sehr großer Wärmeleitfähigkeit

Besitzt ein Körper eine so große Wärmeleitfähigkeit, dass der Wärmeleitwiderstand im Körper klein ist gegenüber dem Wärmübergangswiderstand zwischen dem Körper und dem umgebenden Fluid, so wird sich beim Aufheiz- oder Abkühlvorgang zu jedem Zeitpunkt im Körper eine nahezu gleichmäßige Temperatur einstellen.

In diesem Fall ist es nicht notwendig, von den Differentialgleichungen für das Temperaturfeld, Gleichungen (3.8), (3.9) oder 3.10, auszugehen und diese zu integrieren. Es ist einfacher, eine den gesamten Körper erfassende Energiebilanz aufzustellen, die aussagt, dass die sich mit der Zeit ändernde innere Energie des Körpers durch Wärmeübertragung an der Oberfläche an die Umgebung abgegeben oder von ihr aufgenommen wird:

Energiebilanz

$$\frac{dU}{dt} = -\alpha A (T - T_u)$$

oder

$$\rho c V \frac{dT}{dt} + \alpha A (T - T_u) = 0 \quad (3.63)$$

Wird eine dimensionslose Übertemperatur $\theta^* \equiv \frac{(T-T_0)}{(T_u-T_0)}$, wobei T die sich zeitlich

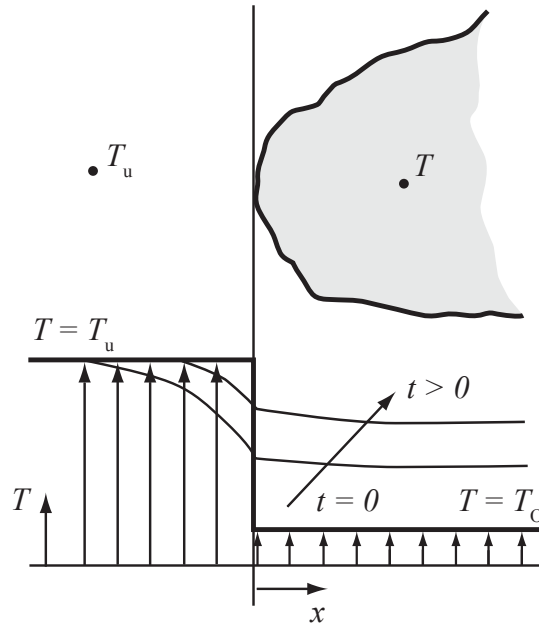


Abbildung 3.18: Aufheizen eines Körpers

ändernde Temperatur des Körpers und T_0 die Anfangstemperatur des Körpers ist, definiert, so folgt

$$\frac{d\theta^*}{dt} + \frac{\alpha}{\rho c} \frac{A}{V} (\theta^* - 1) = 0$$

und daraus

$$\frac{d\theta^*}{(\theta^* - 1)} = -\frac{\alpha}{\rho c} \frac{A}{V} dt$$

Diese Differentialgleichung lässt sich unter Beachtung der Anfangsbedingung

$$t = 0: \quad T = T_0 \quad \text{das heißt} \quad \theta^* = 0$$

für $0 \leq \theta^* \leq 1$ integrieren und führt auf

$$\frac{T - T_0}{T_u - T_0} = 1 - \exp \left[-\frac{\alpha}{\rho c} \frac{A}{V} t \right] \quad (3.64)$$

Durch Einführung zweier dimensionsloser Kennzahlen, der Biot-Zahl und der Fourier-Zahl lässt sich die Gl. (3.64) zusammenfassen. Die Biot-Zahl ist definiert durch

$$\text{Bi} \equiv \frac{\alpha L}{\lambda}, \quad (3.65)$$

bei der die charakteristische Länge L die Größe bezeichnet, die für den Wärmeleitungswiderstand maßgeblich ist. Die Fourier-Zahl ist definiert durch

$$\text{Fo} \equiv \frac{\lambda t}{\rho c L^2} = \frac{at}{L^2}, \quad (3.66)$$

wobei die den Körper charakterisierende Länge L hierbei aus dem Verhältnis $\frac{V}{A}$ gebildet wird. A entspricht hierbei der Oberfläche, an der konvektiver Wärmetransport stattfindet.

Aus Gl. (3.64) folgt somit

$$\frac{T - T_0}{T_u - T_0} = 1 - \exp[-\text{Bi} \cdot \text{Fo}] \quad (3.67)$$

Das heißt, der zeitliche Verlauf des Temperaturausgleichs zwischen einem Körper

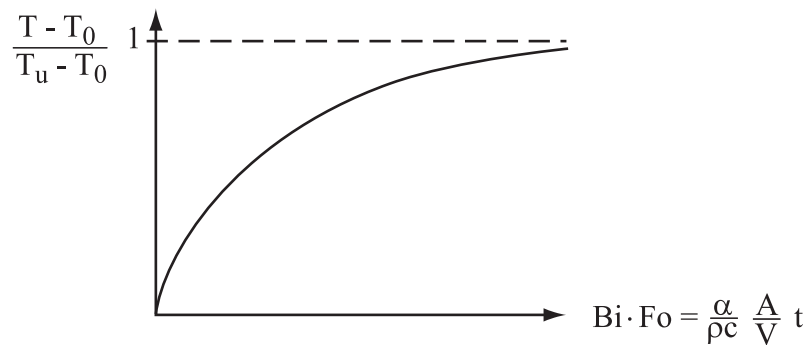


Abbildung 3.19: Zeitlicher Temperaturverlauf des Körpers

mit großer Wärmeleitfähigkeit und seiner Umgebung ist für alle Probleme, deren Randbedingungen durch gleiche Biot-Zahlen beschrieben werden können, in der dimensionslosen Auftragung derselbe. Nach den eingangs gemachten Voraussetzungen ist diese Aussage für alle Probleme mit kleineren Biot-Zahlen, $\text{Bi} \ll 1$, gültig.

Die Gl. (3.67) wird aber auch für Fälle, bei denen diese Bedingung nicht erfüllt ist, zur Abschätzung einer oberen Grenze des transienten Verhaltens nützlich sein.

3.5.2 Eindimensionale instationäre Wärmeleitungsprobleme

Bei Körpern, bei denen der Wärmeleitwiderstand im Inneren nicht vernachlässigt werden kann, ist eine allgemeine analytische Lösung nur für wenige Geometrien und Randbedingungen unter erträglichem Rechenaufwand möglich.

Da diese Lösungen, die meist in dimensionslosen Diagrammen wiedergegeben sind, in der Praxis in sehr vielen Fällen zur Abschätzung des Temperatur/Zeit-Verhaltens genügen, sollen die rechnerischen Grundlagen dieser Darstellungen für einige Beispiele besprochen werden.

Halbunendliche Platte mit aufgeprägter Wandtemperatur

Ein zur Abschätzung des Temperatur/Zeit-Verhaltens von Körpern sehr nützlicher Grenzfall für große Biot-Zahlen ist die halbunendliche Platte, das heißt das Modell eines Körpers, bei dem die aufgeprägte Temperaturänderung noch nicht sehr tief ins Innere eingedrungen ist und der eindimensional behandelt werden kann.

Unter diesen Voraussetzungen vereinfachen sich die Differentialgleichung für das Temperaturfeld, Gl. (3.8) zu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.68)$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

AB 1:

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \\ 0 < x < \infty \end{array} \right\} T = T_0$$

RB 2: wegen $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} \gg 1$

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} T = T_u$$

RB 3:

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right\} T = T_0$$

Durch die Einführung der dimensionslosen Übertemperatur $\theta^* \equiv \frac{T-T_0}{T_u-T_0}$ und der

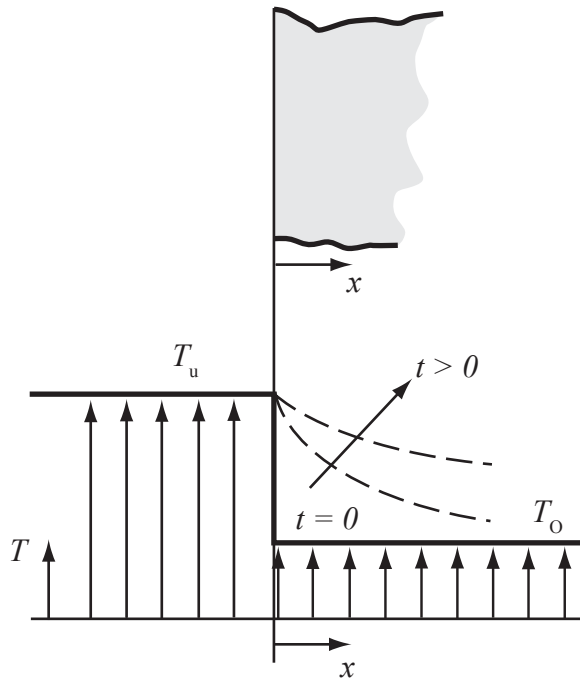


Abbildung 3.20: Anfangs- und Randbedingungen

Temperaturleitfähigkeit $a \equiv \frac{\lambda}{\rho c}$ folgt alternativ

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2} \right) \quad (3.69)$$

und

AB 1:

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \\ 0 < x < \infty \end{array} \right\} \theta^* = 0$$

RB 2:

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \theta^* = 1$$

RB 3:

$$\left. \begin{array}{l} t > 0 \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right\} \theta^* = 0$$

Diese Differentialgleichung kann grundsätzlich nach der Methode der „Trennung der Variablen“ gelöst werden.

Im vorliegenden Fall ergibt sich jedoch ein einfacherer Lösungsweg. Dabei wird anstelle der beiden unabhängigen Variablen x und t eine einzige unabhängige Variable $\eta(x,t)$ gesucht, durch die sich die partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche reduzieren lässt, so dass gilt

$$\theta^*(x,t) = \theta^*[\eta(x,t)]$$

Bei der Suche nach der Form dieser Variablen kann von dem allgemeinen Ansatz $\eta = b x^c t^d$ ausgegangen werden. Die Differentiale der Gl. (3.69) schreiben sich in den neuen Variablen

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = \left(\frac{d\theta^*}{d\eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)$$

und

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2} = \left(\frac{d^2 \theta^*}{d\eta^2} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{d\theta^*}{d\eta} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)$$

und damit wird unter Berücksichtigung des Ansatzes $\eta = b x^c t^d$ aus der Differentialgleichung, Gl. (3.69)

$$\left(\frac{d\theta^*}{d\eta} \right) b x^c d t^{d-1} = a \left(\frac{d^2 \theta^*}{d\eta^2} \right) (b c x^{c-1} t^d)^2 + a \left(\frac{d\theta^*}{d\eta} \right) (b c (c-1) x^{c-2} t^d)$$

und daraus durch Umstellung

$$\frac{d^2 \theta^*}{d\eta^2} + \frac{\left(\frac{a c (c-1) t}{d x^2} - 1 \right) d\theta^*}{\left(\frac{a b c^2 t^{d+1}}{d x^{2-c}} \right) d\eta} = 0$$

Wenn diese Gleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung sein soll mit Koeffizienten, die nur von η abhängen, dürfen die Klammerausdrücke nur von η abhängen.

Durch einen Vergleich der Exponenten der Variablen x und t ergibt sich

$$c = 1 \quad d = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{\sqrt{4a}}$$

und damit die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2\theta^*}{d\eta^2} + 2\eta\frac{d\theta^*}{d\eta} = 0 \quad (3.70)$$

wobei $\eta \equiv \frac{x}{\sqrt{4at}}$ ist. Die neue Variable η kann durch die Fourier-Kennzahl Fo , in der als kennzeichnende Länge der Abstand von der Plattenoberfläche eingesetzt wird, beschrieben werden

$$\eta \equiv \frac{x}{\sqrt{4at}} = \frac{1}{\sqrt{4} \, Fo}$$

Die Lösung des Randwertproblems 2. Ordnung Gl. (3.70) erfordert zwei Randbedingungen in den neuen Koordinaten η und θ^* . Die transformierten Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \text{RB1: } \eta = \infty & : \theta^* = 0 \\ \text{RB2: } \eta \rightarrow 0 & : \theta^* = 1 \\ \text{RB3: } \eta \rightarrow \infty & : \theta^* = 0 \end{aligned}$$

Da die Randbedingungen RB1 und RB3 bei der Ähnlichkeitstransformation ineinander übergehen und sich nicht widersprechen, ist eine ähnliche Lösung mit der Variablen η möglich.

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung erfolgt nach der üblichen Methode durch Substitution zur Reduzierung der Ordnung. Die Substitution

$$z \equiv \frac{d\theta^*}{d\eta}, \quad \frac{dz}{d\eta} = \frac{d^2\theta^*}{d\eta^2}$$

führt auf

$$\frac{dz}{d\eta} + 2\eta z = 0$$

und durch Integration auf

$$\ln z = -\eta^2 + C_1 \quad \text{oder} \quad \frac{d\theta^*}{d\eta} = C_2 \exp(-\eta^2)$$

Die zweite Integration ergibt mit der Integrationsvariablen ξ und der Randbedingung RB 2

$$\theta^*(\eta) - 1 = C_2 \int_{\xi=0}^{\xi=\eta} \exp(-\xi^2) d\xi$$

Die Konstante C_2 lässt sich aus der Randbedingung RB 1 bestimmen

$$C_2 = \frac{-1}{\int_0^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Damit ist das dimensionslose Temperaturfeld gegeben durch

$$\theta^* = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi=0}^{\xi=\eta} \exp(-\xi^2) d\xi \quad (3.71)$$

Der zweite Ausdruck der rechten Seite von Gl. (3.71) wird als Errorfunktion $\text{erf}(\eta)$ bezeichnet und ist als Tabelle im Anhang B wiedergegeben. Damit wird

$$\begin{aligned} \theta^* &= 1 - \text{erf}[\eta] & \text{oder} \\ \theta^* &= 1 - \text{erf}\left[\frac{1}{\sqrt{4\text{Fo}}}\right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

Die Auswertung der Gl. (3.71) ist im Bild 3.21 dargestellt Dieser Temperaturverlauf

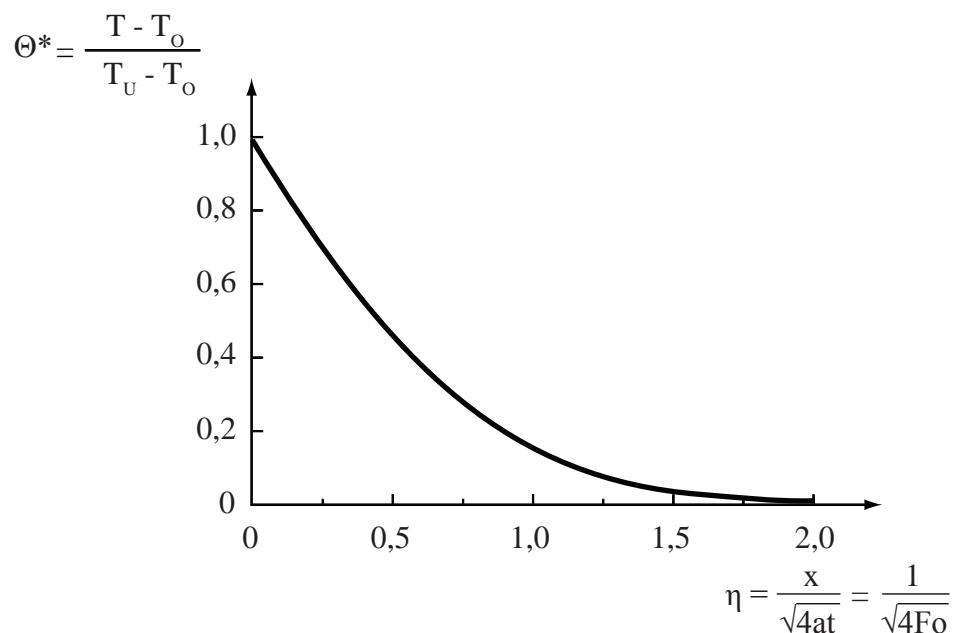


Abbildung 3.21: Der zeitliche Temperaturverlauf im halbunendlichen Körper - konstante Oberflächentemperatur

zeigt, dass die anfängliche Temperaturdifferenz bei einem Wert von $\eta = 1,8$ auf 1%

abgebaut ist. Dieser Wert wird oft zur Definition einer Eindringtiefe oder Dicke der Temperaturgrenzschicht benutzt

$$\delta(t) = 3,6\sqrt{at} \quad (3.73)$$

Aus dem Temperaturfeld Gl. (3.71) lässt sich die Wärmestromdichte an der Oberfläche

$$\dot{q}''|_{x=0} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0}$$

durch Differentiation ermitteln:

$$\begin{aligned} \dot{q}''|_{x=0} &= \frac{\lambda}{\sqrt{\pi at}} (T_u - T_o) \\ &= \sqrt{\frac{\lambda c \rho}{\pi t}} (T_u - T_o) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Das heißt, der Wärmestrom fällt stetig mit der Zeit. Bis zum Zeitpunkt t ist damit die Gesamtwärme

$$\int_{t=0}^t \dot{q}''|_{x=0} dt = 2\sqrt{\frac{\lambda c \rho}{\pi}} t (T_u - T_o) \quad (3.75)$$

übergegangen.

Halbunendliche Platte mit nichtvernachlässigbarem Wärmeübergangswiderstand

Im vorhergehenden Abschnitt wurde davon ausgegangen, dass zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ die Oberfläche des Körpers die Umgebungstemperatur annimmt. Diese Annahme war immer dann richtig, wenn der Wärmeübergangswiderstand klein ist gegenüber dem Wärmeleitwiderstand bzw. wenn $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} \gg 1$ ist.

Ist der Wärmeübergangswiderstand nicht mehr zu vernachlässigen, stellt sich eine Oberflächentemperatur zwischen der Umgebungstemperatur und der ursprünglichen Körpertemperatur ein. An die Stelle der Randbedingung RB 2 tritt die neue Randbedingung

RB 2a:

$$\alpha (T_u - T_{x=0}) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}$$

oder

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda} (T_{x=0} - T_u) \quad (3.76)$$

Diese Beziehung kann grafisch sehr anschaulich dargestellt werden (siehe Abb. 3.22). Die Verlängerungen aller Gradienten schneiden sich im Punkt P, der durch die Koordinaten T_u und $-\frac{\lambda}{\alpha}$ gegeben ist. Der Aufwand zur Lösung der Differentialgleichung Gl. (3.68) unter Beachtung dieser Randbedingung ist erheblich größer als vorher. Nähere Einzelheiten sind bei Schneider (1955) zu finden. Es ergibt sich eine Gleichung für das Temperaturfeld von der Form

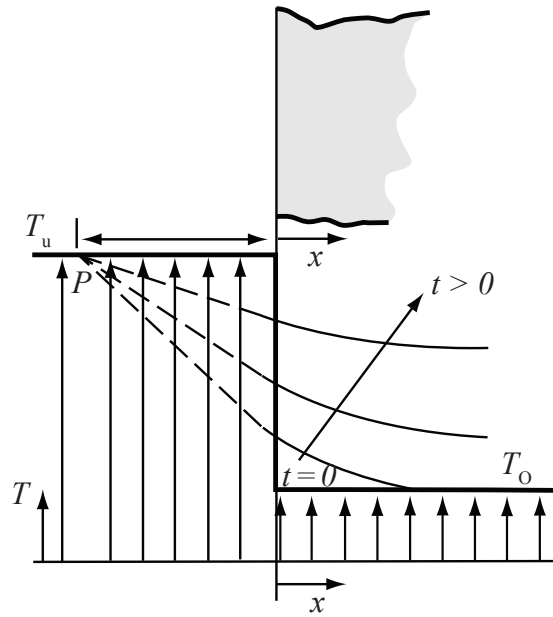


Abbildung 3.22: Randbedingungen

$$\theta^* = \frac{T - T_0}{T_u - T_0} = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{4 \operatorname{Fo}}} \right) - \left[\exp \left(\operatorname{Bi} + \operatorname{Fo} \operatorname{Bi}^2 \right) \right] \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{4 \operatorname{Fo}}} + \sqrt{\operatorname{Fo}} \cdot \operatorname{Bi} \right) \right] \quad (3.77)$$

mit $\operatorname{Fo} = at/x^2$ und $\operatorname{Bi} = \alpha x/\lambda$.

Die Lösung dieser Gleichung ist in der Abbildung 3.23 dargestellt. Der vorher besprochene Fall des verschwindenden Wärmeübergangswiderstands ist als spezieller Fall $\sqrt{Fo}Bi \rightarrow \infty$ im Diagramm enthalten.

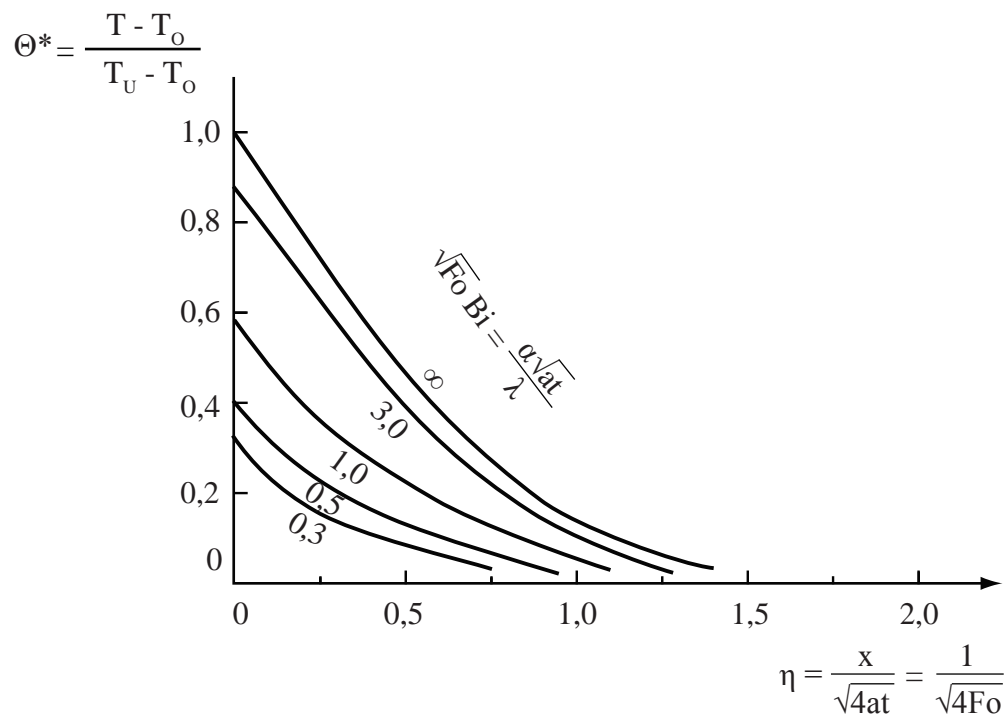


Abbildung 3.23: Der zeitliche Temperaturverlauf im halbunendlichen Körper bei Berücksichtigung des konvektiven Wärmeübergangs - Halbunendliche Platte mit zeitlich veränderlichen Oberflächentemperaturen

Halbunendliche Platte mit zeitlich veränderlichen Oberflächentemperaturen

Bei vielen Vorgängen ändern sich die Randbedingungen bei Temperatenausgleichsvorgängen periodisch, so zum Beispiel bei den täglichen oder jahreszeitlichen Temperaturschwankungen mit ihren Auswirkungen auf die Temperaturverteilung in Gebäudewänden oder im Erdboden oder zum Beispiel bei der sich zyklisch ändernden Wärmebelastung der Zylinderwand eines Verbrennungsmotors.

Im allgemeinen sind solche Vorgänge einer analytischen Lösung der Differentialgleichung für das Temperaturfeld, Gl. (3.8), durch die periodisch wechselnden Randbedingungen nicht mehr zugänglich.

Die grundsätzlichen Zusammenhänge können jedoch wieder am halbunendlichen Körper diskutiert werden. Die Gl. (3.7) vereinfacht sich wie oben zu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.78)$$

$$\text{AB1: } t = 0 : \quad T = T_o(x)$$

$$\text{RB1: } x = 0 : \quad T_{x=0} = f(t)$$

$$\text{RB2: } x \rightarrow \infty : \quad T_{x \rightarrow \infty} = T_m$$

Liegt im einfachsten Fall eine periodische Änderung der Oberflächentemperatur nach einer Sprungfunktion zwischen T_{\max} und T_{\min} zugrunde, so können qualitative Aussagen über den zeitlichen Temperaturverlauf im Körper anhand der untenstehenden Skizze gemacht werden.

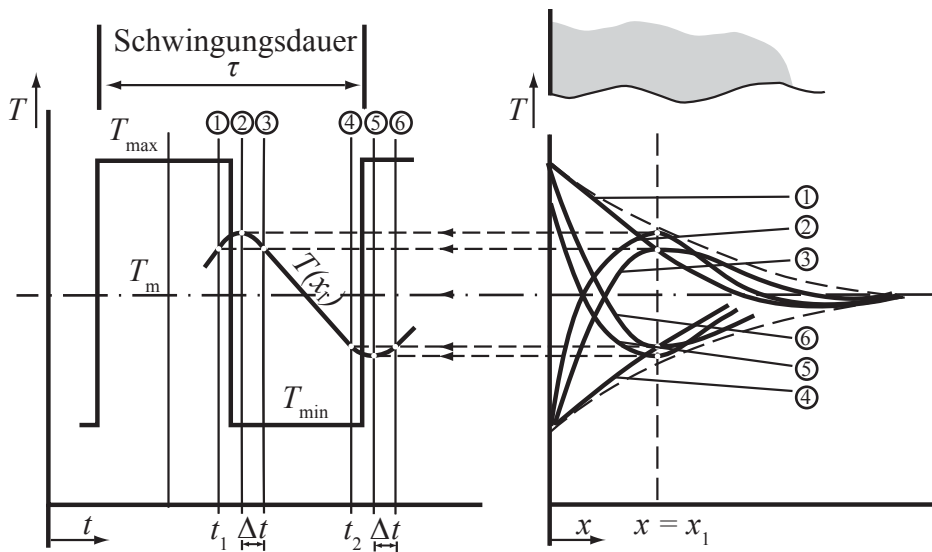


Abbildung 3.24: Eindringen einer periodischen Änderung der Umgebungstemperatur in einen halbunendlichen Körper

Zu einem Zeitpunkt t_1 kurz vor dem Umschalten der Oberflächentemperatur von T_{\max} auf T_{\min} wäre eine Temperaturverteilung nach Kurve 1 plausibel. Nur in den tieferen Schichten weicht diese Kurve deutlich vom Grenzfall großer Schwingungsdauer ab. Eine kurze Zeit Δt nach dem Umschalten auf die Temperatur T_{\min} würde

sich ein neues Temperaturprofil, Kurve 2, einstellen, bei dem sich zwar in den tiefen Schichten das Temperaturmaximum weiter durch Wärmeleitung verflacht, in den oberflächennahen Zonen aber die abgesenkte Oberflächentemperatur deutlich zu bemerken ist. Die Temperatúrausgleichsvorgänge führen kurz vor dem erneuten Umschalten von T_{\min} auf T_{\max} zum Zeitpunkt t_2 auf ein Temperaturprofil, Kurve 4, das spiegelbildlich zur Kurve 1 verläuft. Nach dem Umschalten beginnt das Spiel von neuem. Aus diesen, durch qualitative Überlegungen gefundenen Temperaturprofilen der rechten Bildhälfte können nun zum Beispiel für eine Schicht in der Tiefe $x = x_1$ des Körpers die zeitlichen Temperaturverläufe zeichnerisch in die linke Bildhälfte übertragen werden. Die Konstruktion ist im Bild angedeutet.

Als Ergebnis kann festgehalten werden:

- die Amplitude der Temperaturschwingung wird mit zunehmender Tiefe kleiner,
- die Temperaturmaxima treten im Körperinneren zeitlich verschoben auf.

Ist die sich periodisch ändernde Oberflächentemperatur durch eine harmonische Schwingung zu beschreiben,

$$T_{x=0} - T_m = (T_{\max} - T_m) \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$$

bzw.

$$\theta_{x=0} = \frac{T_{x=0} - T_m}{T_{\max} - T_m} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$$

mit der Schwingungsdauer τ , so lässt sich eine analytische Lösung für das Temperaturfeld von der Form

$$\theta = \frac{T - T_m}{T_{\max} - T_m} = \underbrace{\exp\left(-\sqrt{\frac{\pi x^2}{a\tau}}\right)}_1 \cos\left(\underbrace{2\pi \frac{t}{\tau}}_2 - \underbrace{\sqrt{\frac{\pi x^2}{a\tau}}}_3\right) \quad (3.79)$$

finden, mit der Amplitudedämpfung (1):

$$\exp\left(-\sqrt{\frac{\pi x^2}{a\tau}}\right)$$

Kreisfrequenz (2):

$$\frac{2\pi}{\tau}$$

und der Phasenverschiebung (3):

$$\sqrt{\frac{\pi x^2}{a\tau}}$$

Die Dämpfung und die Phasenverschiebung sind somit miteinander verknüpft. Die oben mehr qualitativ gefunden Aussagen über das Abklingen der Amplitude der Temperaturschwankung und der Phasenverschiebung können durch Auswertung der Gl. (3.79) quantitativ nachvollzogen werden.

3.5.3 Dimensionslose Kennzahlen und Diagramme

In den vorangegangenen Abschnitten wurden einige einfache, meist mit analytischen Ansätzen lösbare Beispiele der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung, Gl. (3.8),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

besprochen. Sind nun Probleme zu behandeln, die aufgrund einer komplizierten Geometrie des Systems oder aufgrund schwieriger Rand- und Anfangsbedingungen nicht mehr durch analytische Ansätze zu lösen sind, bietet sich heute vor allem die numerische Lösung der Differentialgleichung mit Differenzenverfahren an.

Der entscheidende Nachteil solcher Verfahren liegt darin, dass im allgemeinen Fall das gefundene Temperaturfeld von sehr vielen Parametern abhängig ist

$$T = T(x, y, z, t, \rho, c, \lambda, \text{Anfangs- und Randbedingungen})$$

und dass bei Änderung eines dieser Parameter die Rechnung wiederholt werden muss.

Im folgenden soll am einfachen Beispiel der instationären Wärmeleitung in einer Platte gezeigt werden, dass die Zahl der Einflussparameter durch die Einführung von dimensionslosen Kennzahlen, die auch in den vorangegangenen speziellen Lösungsbeispielen immer wieder auftraten, erheblich reduziert werden kann. Betrachtet werden zwei Platten, deren laterale Abmessungen im Vergleich zu ihrer Dicke sehr

groß sind und die zu einem vorgegebenen Zeitpunkt in eine andere Umgebung mit einer anderen Temperatur gebracht werden. Die Plattendicke, die Anfangstemperatur der Platte, die neue Umgebungstemperatur, die Stoffeigenschaften des Plattenmaterials und die Randbedingungen werden für die erste Platte mit A und für die zweite Platte mit B indiziert. Für die Temperaturverteilung in den Platten gelten demnach

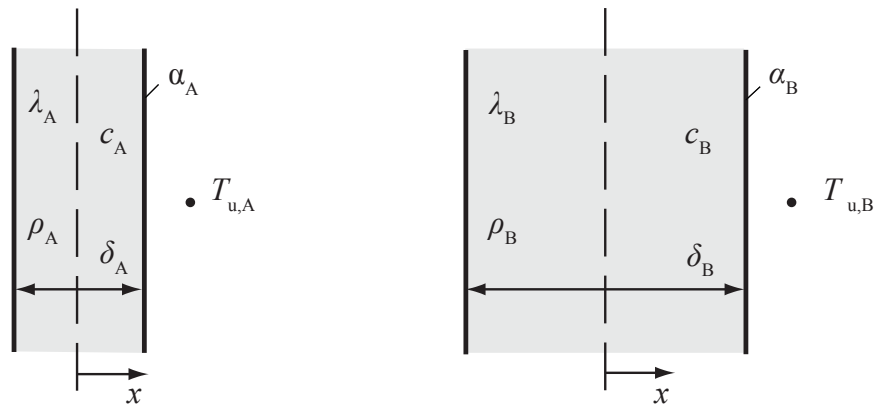


Abbildung 3.25: Instationärer Temperatursgleichungsvorgang bei zwei verschiedenen Plattenkonfigurationen

die Differentialgleichungen

System A

$$\frac{\partial T_A}{\partial t} = \left(\frac{\lambda}{\rho c} \right)_A \frac{\partial^2 T_A}{\partial x^2}$$

System B

$$\frac{\partial T_B}{\partial t} = \left(\frac{\lambda}{\rho c} \right)_B \frac{\partial^2 T_B}{\partial x^2}$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{array}{lll} t = 0 & -\frac{\delta}{2} < x < +\frac{\delta}{2} & T = T_0 \\ t \rightarrow \infty & -\frac{\delta}{2} < x < +\frac{\delta}{2} & T = T_u \\ t > 0 & x = -\frac{\delta}{2} \text{ und } x = +\frac{\delta}{2} & \dot{q}_{\text{Leitung}}'' = \dot{q}_{\text{Konvektion}}'' \end{array}$$

Die Differentialgleichungen für die beiden Systeme können dimensionslos geschrieben werden. Dazu werden Bezugsgrößen, die das Problem charakterisieren, gewählt. Die Geometrie der beiden Platten wird durch die Plattendicke δ beschrieben. Der zeitliche Ablauf des Wärmeleitvorgangs ist bei den beiden Platten dann vergleichbar, wenn sich bei periodischen Vorgängen nur die Schwingungsdauer der beiden Systeme

unterscheidet. Die Temperatur, oder besser die Übertemperatur $\theta \equiv T - T_u$, wird schließlich auf die systemcharakteristische Übertemperatur $\theta_0 \equiv T_0 - T_u$ bezogen.

Die so definierten dimensionslosen Variablen

$$\begin{aligned} x^* &\equiv \frac{x_A}{\delta_A} = \frac{x_B}{\delta_B}, \\ t^* &\equiv \frac{t_A}{\tau_A} = \frac{t_B}{\tau_B} \\ \text{und } \theta^* &\equiv \frac{\theta_A}{\theta_{A_0}} = \frac{\theta_B}{\theta_{B_0}} \end{aligned} \quad (3.80)$$

werden in die Differentialgleichungen für das Temperaturfeld eingeführt, und folgt

<u>System A</u>	<u>System B</u>
$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \left(\frac{a_A \tau_A}{\delta_A^2} \right) \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}}$	$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \left(\frac{a_B \tau_B}{\delta_B^2} \right) \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}}$

Die Differentialgleichungen sind demnach identisch, wenn die Fourier-Zahl

$$\text{Fo} \equiv \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\tau}{\delta^2}$$

der beiden Systeme gleich groß ist. Die Gleichheit der die Fourier-Zahl bildenden Parameter ist nicht notwendig. Die dimensionslosen Temperaturfelder sind allerdings nur dann gleich, wenn auch die Randbedingungen der beiden Systeme gleich sind. Zu jedem Zeitpunkt t muss die Energiebilanz an der Wand erfüllt sein. Das heißt, der Wärmeleitungsstrom zur Oberfläche des Körpers muss gleich dem Konvektionsstrom von der Oberfläche in die Umgebung sein

$$\dot{q}_{\text{Wand}}'' = \dot{q}_{\text{konv}}''.$$

und damit

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{Wand}} = -\frac{\alpha}{\lambda} (T_{\text{Wand}} - T_u)$$

In der dimensionslosen Schreibweise ergeben sich die folgenden Randbedingungen

<u>System A</u>	<u>System B</u>
$\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right)_{\text{Wand}} = - \left(\frac{\alpha_A \delta_A}{\lambda_A} \right) \theta_{\text{Wand}}^*$	$\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right)_{\text{Wand}} = - \left(\frac{\alpha_B \delta_B}{\lambda_B} \right) \theta_{\text{Wand}}^*$

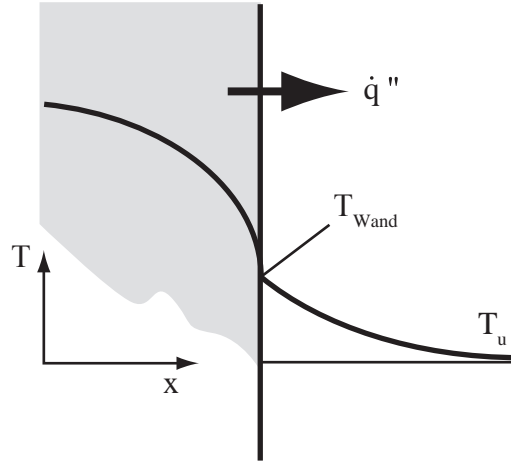


Abbildung 3.26: Randbedingung an der Oberfläche

Daraus folgt, dass die Randbedingungen identisch sind, wenn die Biot-Zahl

$$\text{Bi} \equiv \frac{\alpha \delta}{\lambda}$$

der beiden Systeme übereinstimmt.

Soll das System auf dreidimensionale Körper erweitert werden, so ist das dimensionslose Temperaturfeld durch die dimensionslosen Parameter

$$\begin{aligned} \frac{T - T_u}{T_0 - T_u} &= \frac{T - T_u}{T_0 - T_u} \left(\frac{x}{\delta_1}, \frac{y}{\delta_2}, \frac{z}{\delta_3}, \frac{t}{\tau}, \left(\frac{\alpha \tau}{\delta^2} \right)_{1,2,3}, \left(\frac{\alpha \delta}{\lambda} \right)_{1,2,3} \right) \\ &= \frac{T - T_u}{T_0 - T_u} (x^*, y^*, z^*, t^*, \text{Fo}_{1,2,3}, \text{Bi}_{1,2,3}) \end{aligned} \quad (3.81)$$

darzustellen.

Die schon früher besprochenen einfacheren Beispiele lassen sich durch Zusammenfassen der Parameter aus dieser allgemeinen Darstellung ableiten. Zur Wiedergabe der oft aufwendigen analytischen oder der numerischen Lösungen der Differentialgleichung eignet sich für die praktische Handhabung eine Darstellung in Diagrammen mit diesen dimensionslosen Parametern. Drei zur ersten Abschätzung vieler praktischer Probleme sehr nützliche Beispiele sind im folgenden wiedergegeben. Es handelt sich um den Temperaturverlauf und die übertragene Wärmemenge während der Abkühlung (oder Aufheizung) von ausgedehnten Platten, von langen Zylindern und

von Kugeln, deren Umgebungstemperatur zu einem vorgegebenen Zeitpunkt plötzlich geändert wird. Diese eindimensionalen Probleme sind zwar noch analytisch zu lösen, wegen der aufwendigen Auswertung sind Diagrammdarstellungen nach Heisler (1947) jedoch vorzuziehen. In den nachfolgenden Diagrammen sind die zeitlichen Änderungen der Mittentemperaturen von Platte, Zylinder und Kugel, zusammen mit Hilfsdiagrammen zur Ermittlung der Temperatur an anderen Stellen in dem Körper wiedergegeben. Diese Diagramme werden ergänzt um daraus ableitbare Darstellungen der zeitabhängigen an der Oberfläche der Körper übertragenen Wärme.

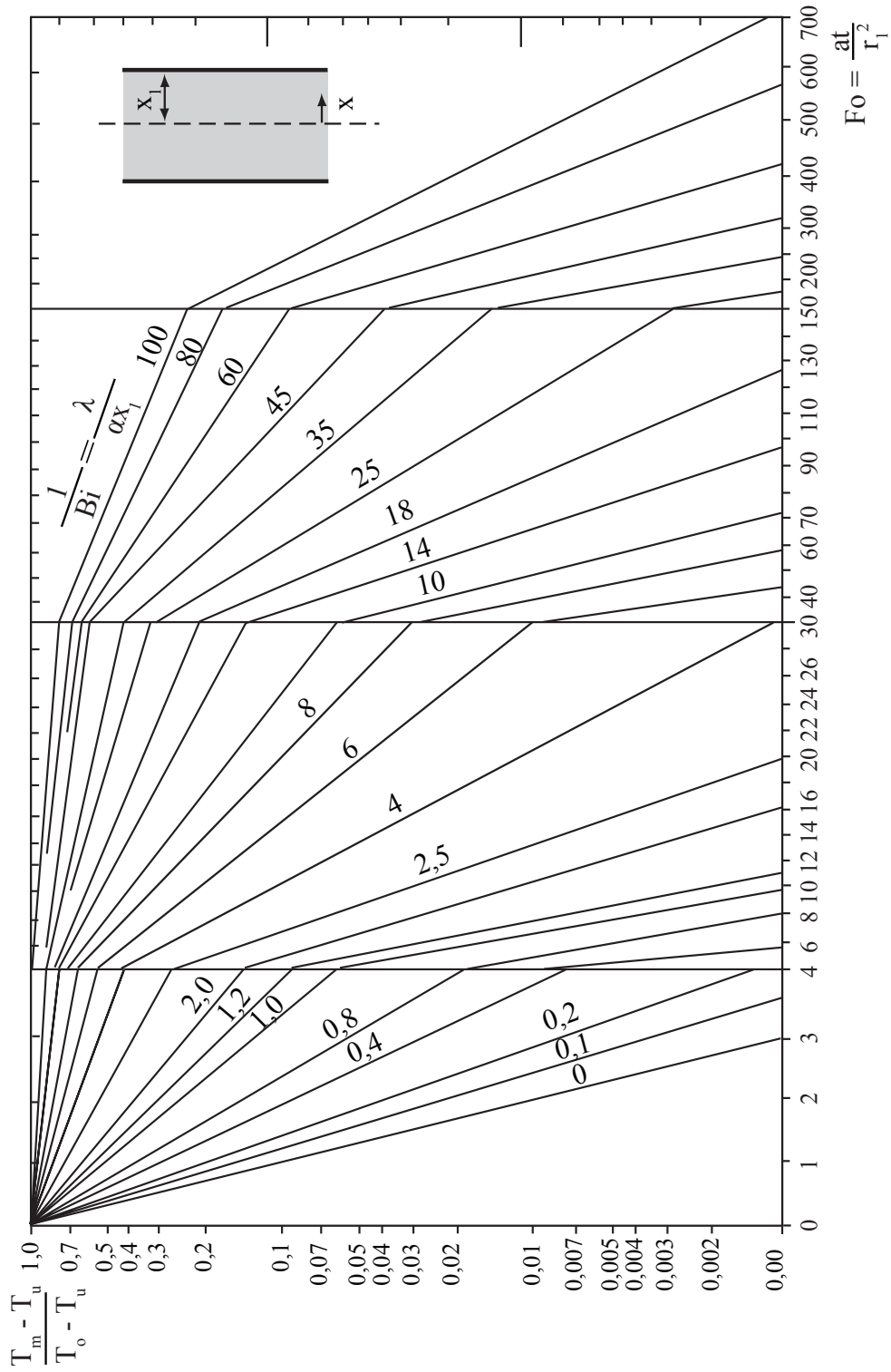


Abbildung 3.27: Temperatur in der Mitte einer Platte der Dicke $2x_1$

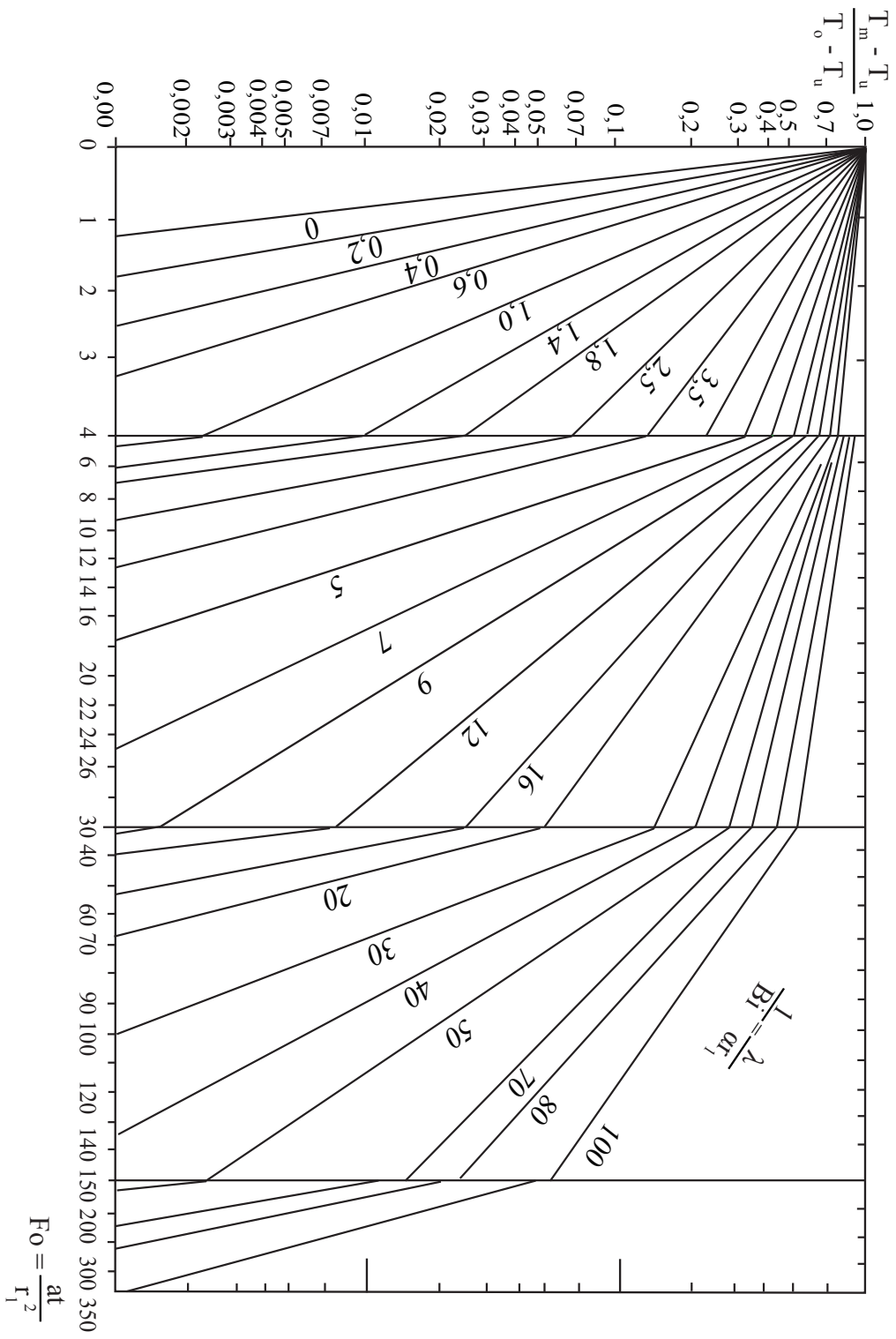


Abbildung 3.28: Temperatur auf der Achse eines Zylinders mit dem Radius r_1

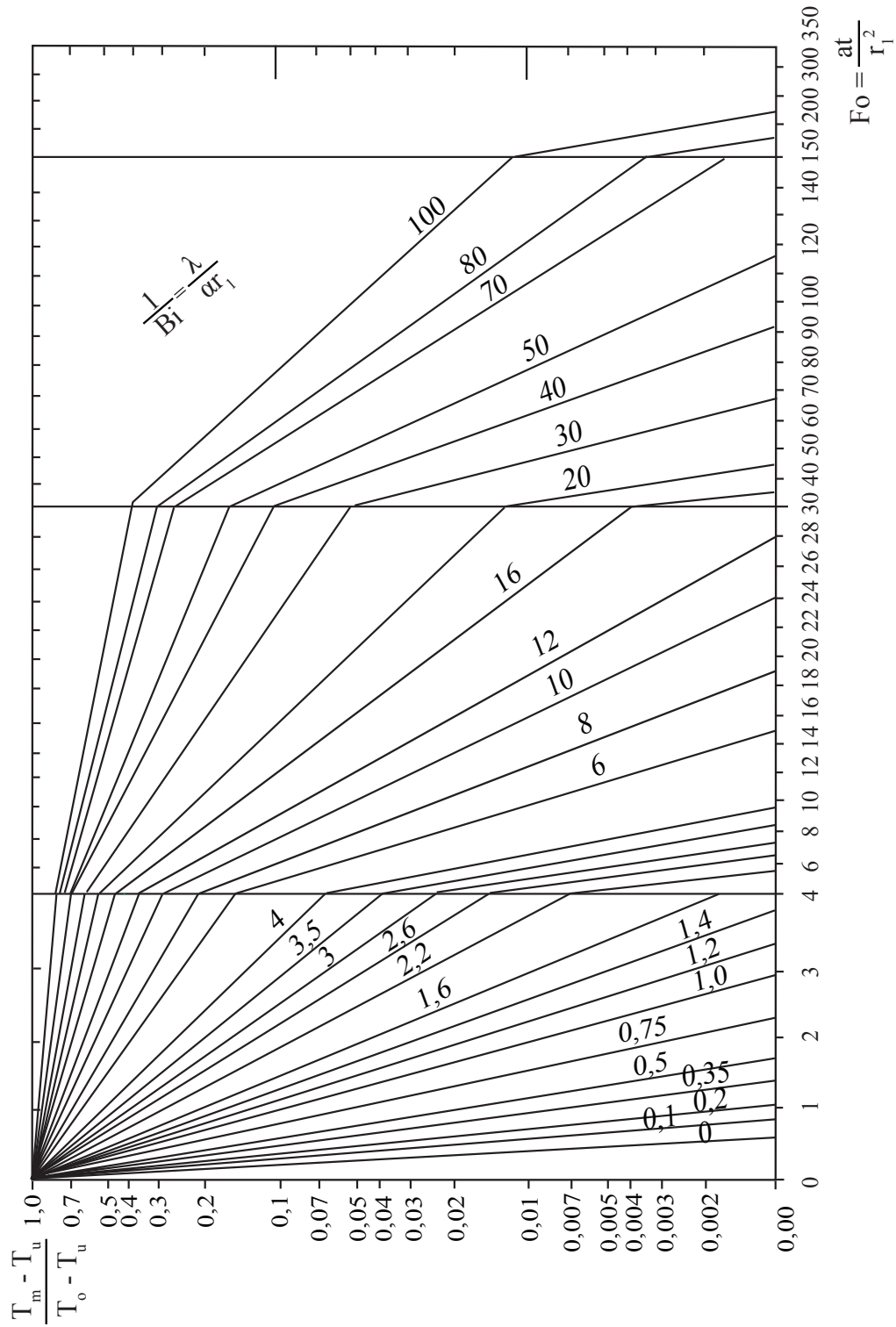


Abbildung 3.29: Temperatur im Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius r_1

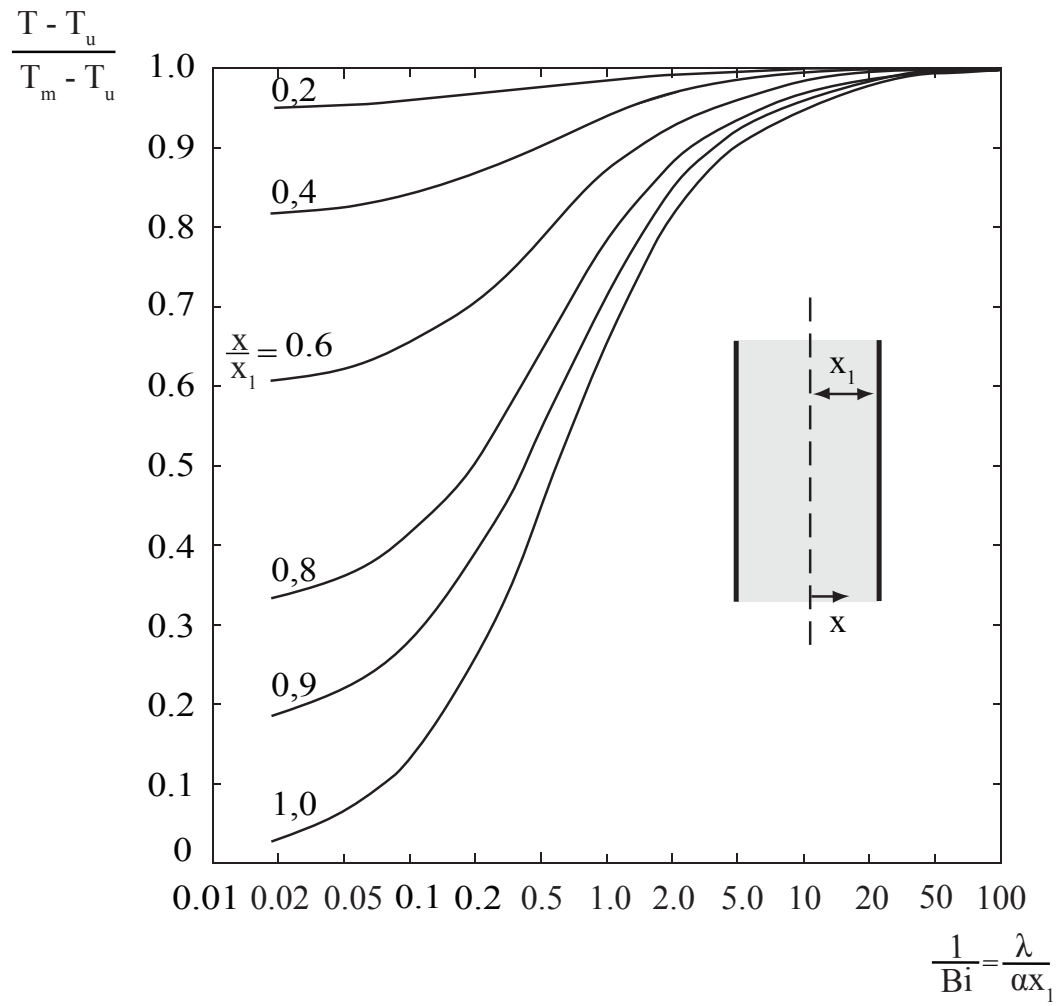


Abbildung 3.30: Temperaturverteilung in einer Platte (gültig für $Fo > 0,2$)

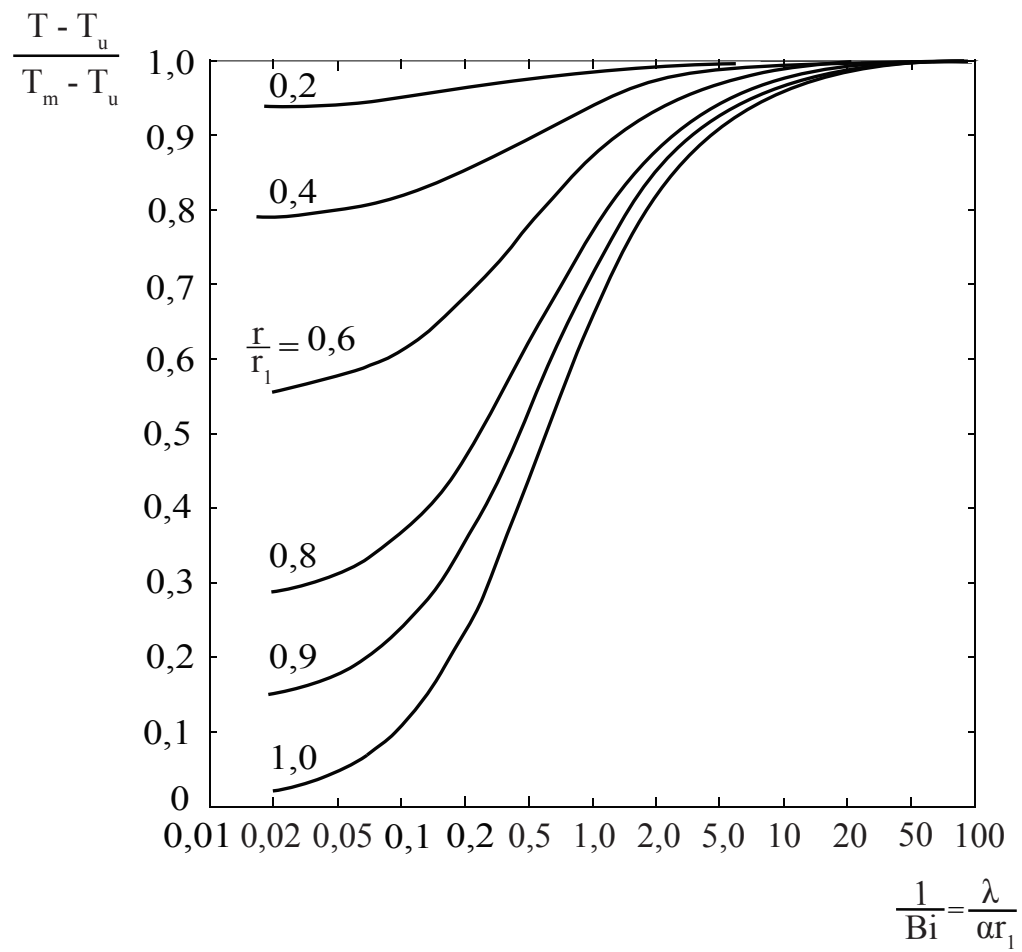


Abbildung 3.31: Temperaturverteilung in einem Zylinder (gültig für $Fo > 0,2$)

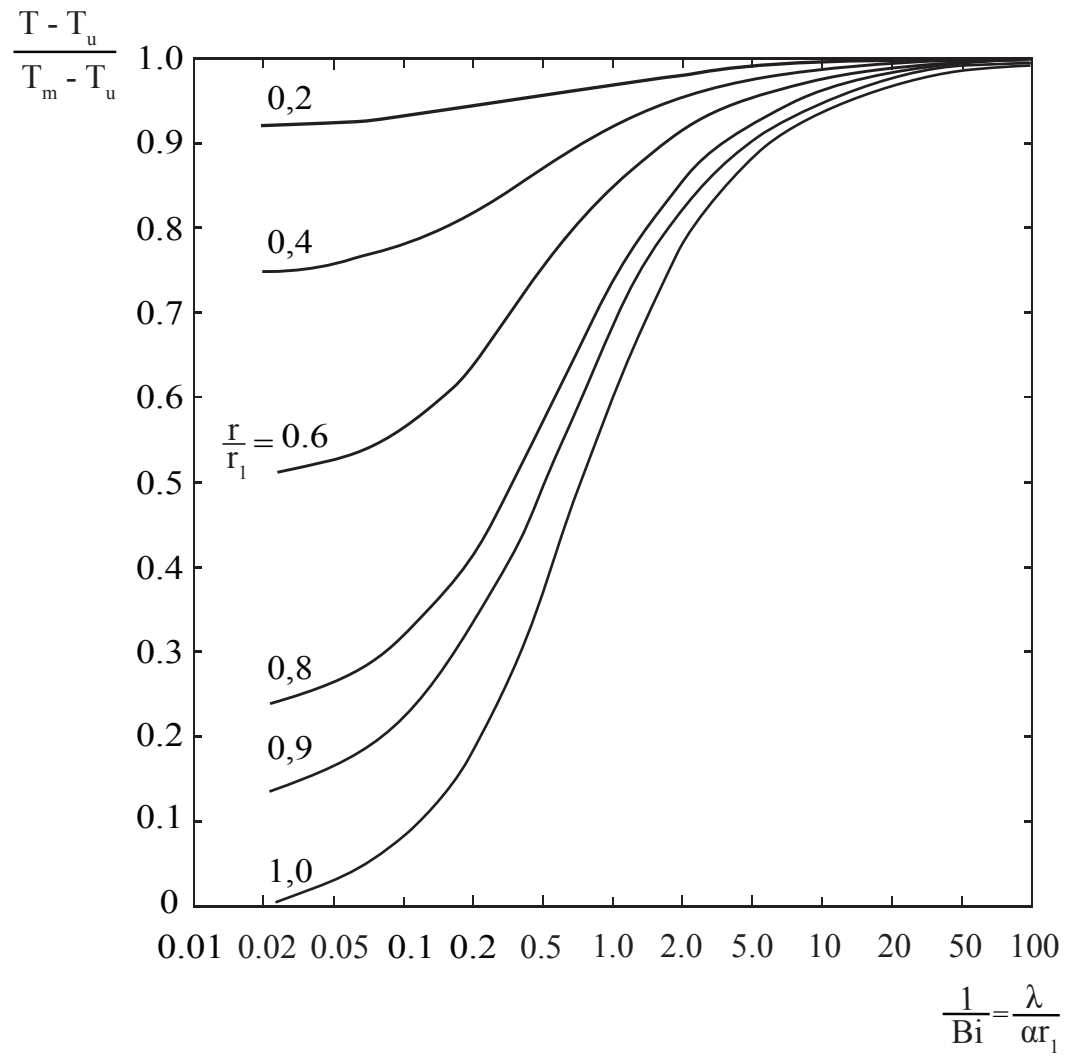


Abbildung 3.32: Temperaturverteilung in einer Kugel (gültig für $Fo > 0,2$)

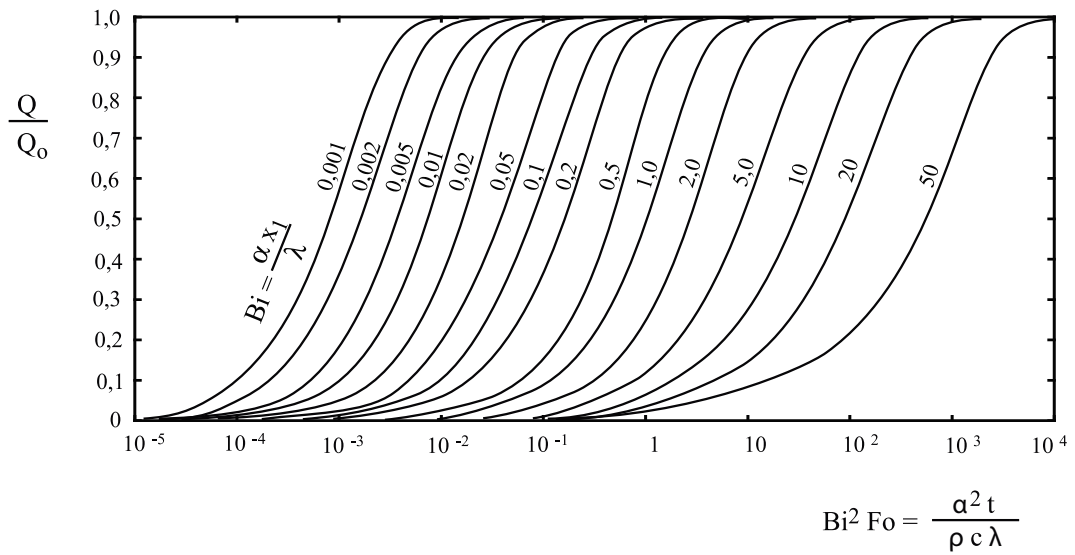


Abbildung 3.33: Wärmeverlust einer Platte mit $Q = \int_0^t \dot{Q} d\tilde{t}$ und $Q_0 = \int_0^\infty \dot{Q} d\tilde{t}$

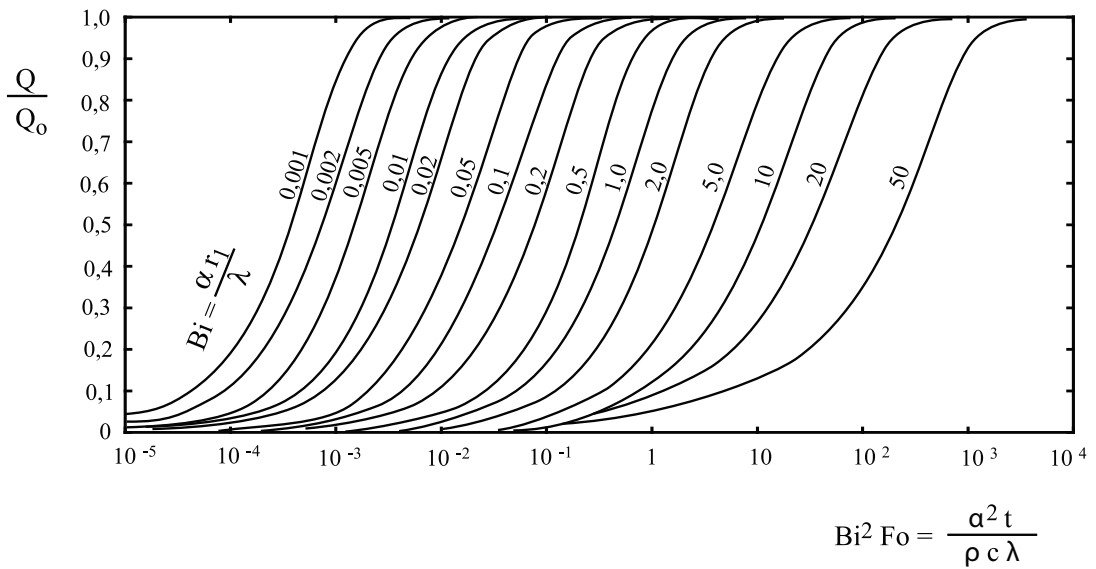


Abbildung 3.34: Wärmeverlust eines Zylinders mit $Q = \int_0^t \dot{Q} d\tilde{t}$ und $Q_0 = \int_0^\infty \dot{Q} d\tilde{t}$

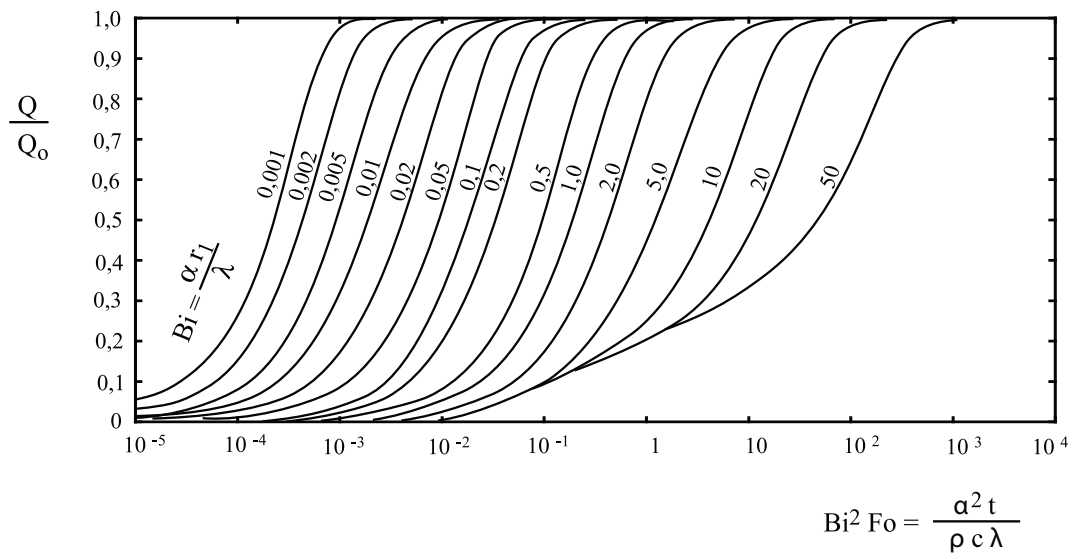


Abbildung 3.35: Wärmeverlust einer Kugel mit $Q = \int_0^t \dot{Q} d\tilde{t}$ und $Q_0 = \int_0^\infty \dot{Q} d\tilde{t}$

Kapitel 4

Konvektion

Im Abschnitt 3 wurde der Energietransport in Körpern durch Wärmeleitung behandelt. Maßgebend für den Wärmetransport waren molekulare Eigenschaften, ausgedrückt als die Wärmeleitfähigkeit des Stoffes.

In einigen Beispielen war als Randbedingung des Problems der Energietransport der Wärmeübertragung vom betrachteten Körper in das benachbarte strömende Fluid zu formulieren. Ohne im einzelnen auf die physikalischen Zusammenhänge einzugehen, wurde ein Ansatz

$$\frac{\dot{Q}_W}{A} \equiv \dot{q}_W'' = \alpha(T_W - T_U) \quad (4.1)$$

gewählt, wobei der Wärmeübergangskoeffizient α als bekannt angenommen wurde. In diesem Abschnitt werden die Grundlagen dieser Transportmechanismen behandelt. Der wesentliche Unterschied zwischen den Transportmechanismen Wärmeleitung und Konvektion kann in einem einfachen Versuch, in dem eine heiße, horizontale Wand zu kühlen ist, gezeigt werden, vgl. Abbildung 4.2. Im ersten Versuchsaufbau wird die zu kühlende Wand von unten durch ein kaltes Fluid, eine Flüssigkeit oder ein Gas, gekühlt. Bei dieser Anordnung stellt sich eine stabile Schichtung ein und die Wärme wird durch reine Wärmeleitung zur Wärmesenke transportiert. Ist die heiße Wand unten angeordnet, so wird sich im Fluid eine instabile Schichtung einstellen und die warmen unteren Zonen werden aufgrund der geringeren Dichte aufsteigen wodurch eine Strömung im Fluid induziert wird. Diese *natürliche Konvektion* verstärkt den Wärmetransport. Im dritten Versuchsaufbau wird die heiße Wand durch ein von einer Pumpe gefördertes Medium gekühlt. Wie im Fall der natürlichen Konvektion wird bei diesem Fall der *erzwungenen Konvektion* die Wärmeleitfähigkeit des

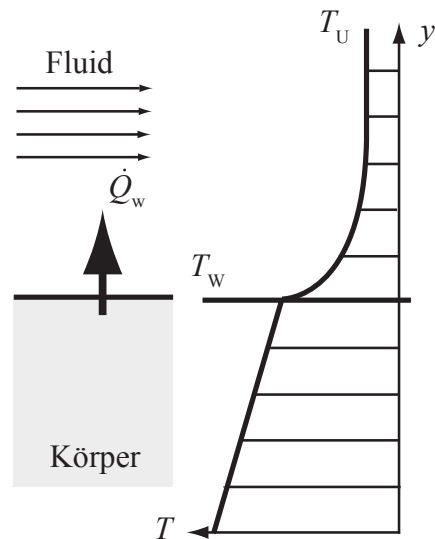


Abbildung 4.1: Wärmeübertragung an einer Oberfläche

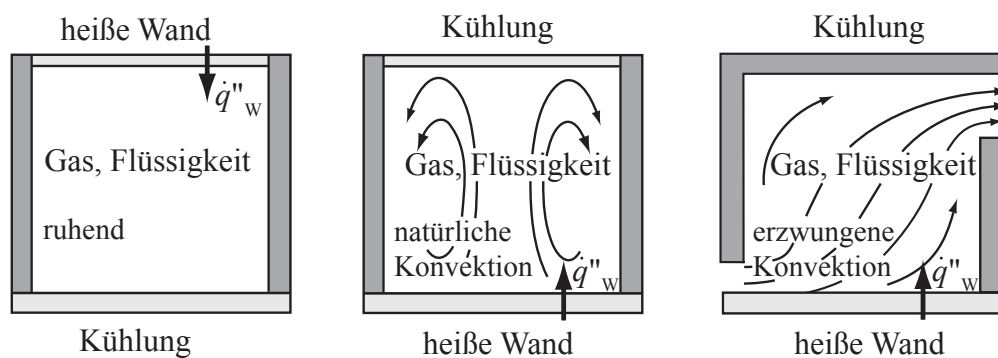


Abbildung 4.2: Kühlung einer heißen Oberfläche durch Wärmeleitung und Konvektion

Fluids nicht allein für den Wärmeübergang maßgebend sein. Ein wichtiger zusätzlicher den Wärmeübergang beeinflussender Parameter ist offensichtlich die Fluidgeschwindigkeit, die im einen Fall von den Dichteunterschieden herrührt und im anderen Fall von der Pumpenleistung abhängt.

Nur in der unmittelbaren Nähe der Wand, wo aufgrund der Haftbedingung an der Wand die Geschwindigkeit gegen Null geht, gilt für den Wärmetransport im Fluid weiterhin das Fouriersche Gesetz

$$\dot{q}_W'' = - \left(\lambda_{\text{Fluid}} \frac{dT_{\text{Fluid}}}{dy} \right)_W \quad (4.2)$$

(Fluidseite)

wie für den Wärmetransport im Körper

$$\dot{q}_W'' = - \left(\lambda_{\text{Körper}} \frac{dT_{\text{Körper}}}{dy} \right)_W \quad (4.3)$$

(Körperseite)

Der durch Gl. (4.1) definierte Wärmeübergangskoeffizient kann durch einen Vergleich mit Gl. (4.2) aus dem Temperaturgradienten an der Wand auf der Fluidseite ermittelt werden.

$$\alpha = \frac{- \left(\lambda_{\text{Fluid}} \frac{dT_{\text{Fluid}}}{dy} \right)_W}{T_W - T_U} \quad (4.4)$$

Das Temperaturfeld im Fluid und damit auch der Temperaturgradient an der Wandoberfläche wird durch die Erhaltungsgleichung für die Energie (1. Hauptsatz der Thermodynamik) beschrieben. Im vorliegenden Abschnitt müssen die Ableitungen der Energiebilanz des vorangegangenen Abschnittes um die in das Volumenelement ein- und ausfließenden Enthalpieströme erweitert werden. Zur Beschreibung dieser Ströme müssen außer den Temperaturen auch die Geschwindigkeiten bekannt sein. Dies erfordert zusätzlich zur Formulierung und Lösung der Energiegleichung auch die der Impulsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung. Die notwendigen Grundlagen dazu sind aus der Vorlesung „Strömungslehre“ bekannt und werden hier nur kurz besprochen.

4.1 Erhaltungsgleichungen für laminare, stationäre, zweidimensionale Strömungen

Das allgemeine Problem einer dreidimensionalen Strömung, in der das Strömungsfeld und das Temperaturfeld gekoppelt sind, kann nur durch die Bestimmung der drei Geschwindigkeitskomponenten u , v und w , der Temperatur T und des Druckes p , zusammen mit den Stoffeigenschaften des Fluids, der Dichte ρ , der dynamischen Zähigkeit η und der Wärmeleitfähigkeit λ , gelöst werden. Da diese Größen nicht unabhängig voneinander sind, setzt dies eine simultane Lösung der Erhaltungsgleichungen für die Masse, den Impuls und die Energie voraus. Um den Schreibaufwand in Grenzen zu halten, werden im Folgenden die Ableitungen auf den zweidimensionalen, stationären Fall beschränkt.

Die Strömung kann entweder laminar oder turbulent sein, das heißt, die Stromlinien verlaufen entweder in sehr geordneten Bahnen, oder der im Mittel stationären Strömung sind Fluktuationsbewegungen überlagert. Die Behandlung dieser dreidimensionalen Schwankungsgeschwindigkeiten und ihr Beitrag zum Impuls- und Wärmeaustausch werden im Abschnitt 4.4 angesprochen.

Die folgenden Ableitungen sind zunächst auf laminare Strömungen beschränkt.

4.1.1 Kontinuitätsgleichung

Bei einer stationären Strömung muss die Differenz zwischen dem austretenden und dem eintretenden Massenstrom verschwinden. Eintretende Massenströme

$$\begin{aligned} \rho u dy l \\ \rho v dx l \end{aligned}$$

Austretende Massenströme

$$\begin{aligned} \rho u dy l + \frac{\partial}{\partial x} \rho u dx dy l \\ \rho v dx l + \frac{\partial}{\partial y} \rho v dy dx l \end{aligned}$$

Differenz

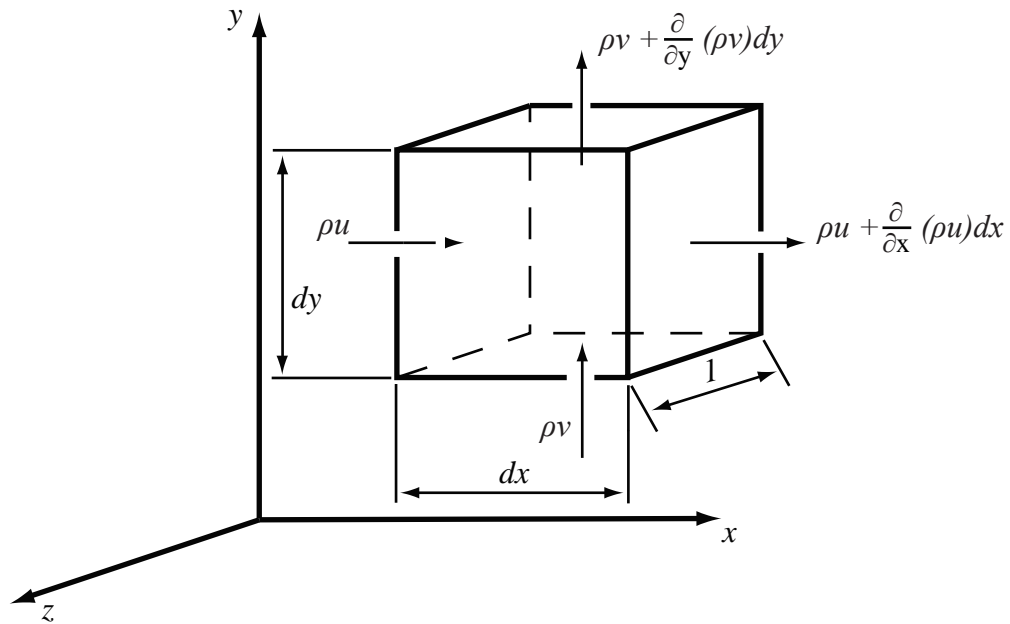


Abbildung 4.3: Massenbilanz am Kontrollvolumen

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u \, dx \, dy \, l + \frac{\partial}{\partial y} \rho v \, dx \, dy \, l$$

Daraus folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \text{ Kontinuitätsgleichung} \quad (4.5)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\operatorname{div}(\rho \vec{w}) = 0$$

Diese Gleichung vereinfacht sich für inkompressible Fluide ($\rho = \text{konstant}$) zu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.6)$$

4.1.2 Impulsgleichungen (Bewegungsgleichungen)

Die Impulsgleichung sagt aus, dass die Differenz der Impulsströme am Volumenelement gleich den am Volumenelement wirkenden äußeren Kräften sein muss, wobei Massenkräfte und Oberflächenkräfte eine Rolle spielen können.

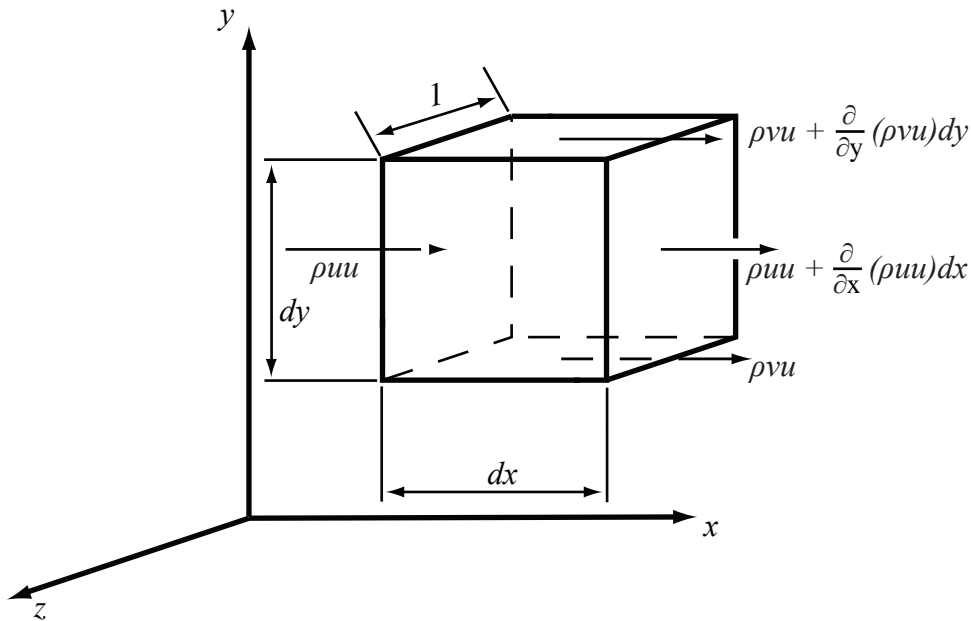


Abbildung 4.4: Impulsströme am Kontrollvolumen

4.1.2.1 Impulsgleichung für die x-Richtung

Die Differenz zwischen den austretenden und den eintretenden Impulsströmen beträgt

$$\left(\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} \right) dx dy l = \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + u \underbrace{\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ (Gl.4.5)}} \right) dx dy l \quad (4.7)$$

Die Oberflächenkräfte, das heißt, die Druck-, Schub- und Normalkräfte lassen sich allgemein durch eine Bezeichnung p_{xy} darstellen, wobei der erste Index auf die Orientierung der Fläche (hier z.B. senkrecht zur x-Richtung) auf die die Kraft wirkt und der zweite auf die Kraftwirkungsrichtung (hier z.B. die y-Richtung) hinweisen.

In der Impulsgleichung für die x-Richtung sind nur die in x-Richtung wirkenden Kräfte zu berücksichtigen.

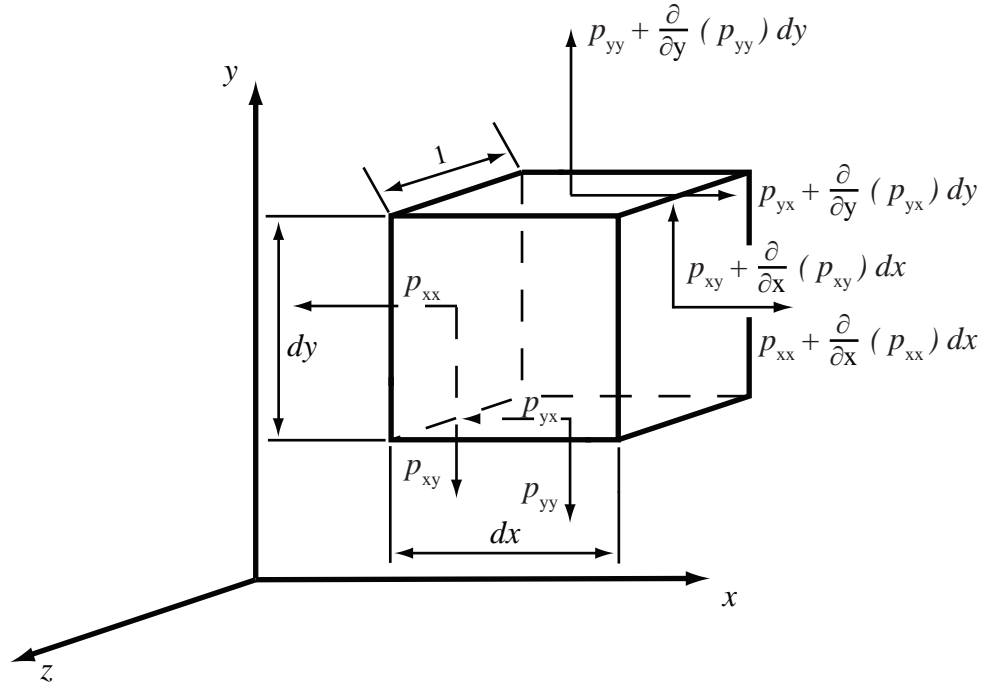


Abbildung 4.5: Kräfte am Kontrollvolumen

Am Volumenelement wirken damit die Netto-Oberflächenkräfte

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx dy l + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} dy dx l$$

mit der Normalspannung p_{xx} und der Schubspannung p_{yx} , für die schon Navier (1827) und Stokes (1845) den Zusammenhang mit dem Druck p , den Geschwindigkeiten u und v und der dynamischen Zähigkeit η kg/ms gegeben haben, siehe zum Beispiel Schlichting u. Gersten (2006).

$$p_{xx} = -p + \sigma_x = -p - \frac{2}{3}\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}$$

und

$$p_{yx} = \tau_{yx} = \tau_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Damit ergibt sich

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right] dx dy l$$

Am Volumenelement wirken schließlich noch Massenkkräfte, von denen hier nur die Schwerkraft interessiert:

$$\rho g_x dx dy l$$

Die Zusammenfassung der Impulsströme, Oberflächen- und Massenkkräfte ergibt die Impulsgleichung, die sogenannte Navier-Stokes-Gleichung

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \rho g_x \end{aligned} \quad (4.8)$$

(Impulsgleichung, x-Richtung)

4.1.2.2 Impulsgleichung für die y-Richtung

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\eta \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \rho g_y \end{aligned} \quad (4.9)$$

(Impulsgleichung, y-Richtung)

Unter der Annahme konstanter Stoffeigenschaften (Dichte, Zähigkeit) lassen sich die Impulsgleichungen weiter vereinfachen zu

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g_x \quad (4.10)$$

(Impulsgleichung, x-Richtung, (ρ, η) konstant)

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g_y \quad (4.11)$$

(Impulsgleichung, y-Richtung, (ρ, η) konstant)

oder in der Vektorschreibweise

$$\rho \left(\vec{w} \times \text{grad} \right) \vec{w} = -\text{grad } p + \eta \nabla^2 \vec{w} + \rho \vec{g} \quad (4.12)$$

(Impulsgleichung, (ρ, η) konstant)

4.1.3 Energiegleichung

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$d\dot{Q} + dP = d\dot{U} + d\dot{E}_a \quad (4.13)$$

auf ein Volumenelement eines strömenden Fluids angewendet, sagt aus, dass sich eine Zufuhr von Wärme oder von Arbeit durch eine Änderung der *inneren Energie*, der potentiellen oder kinetischen Energie bemerkbar macht. Die kinetische Energie ist für

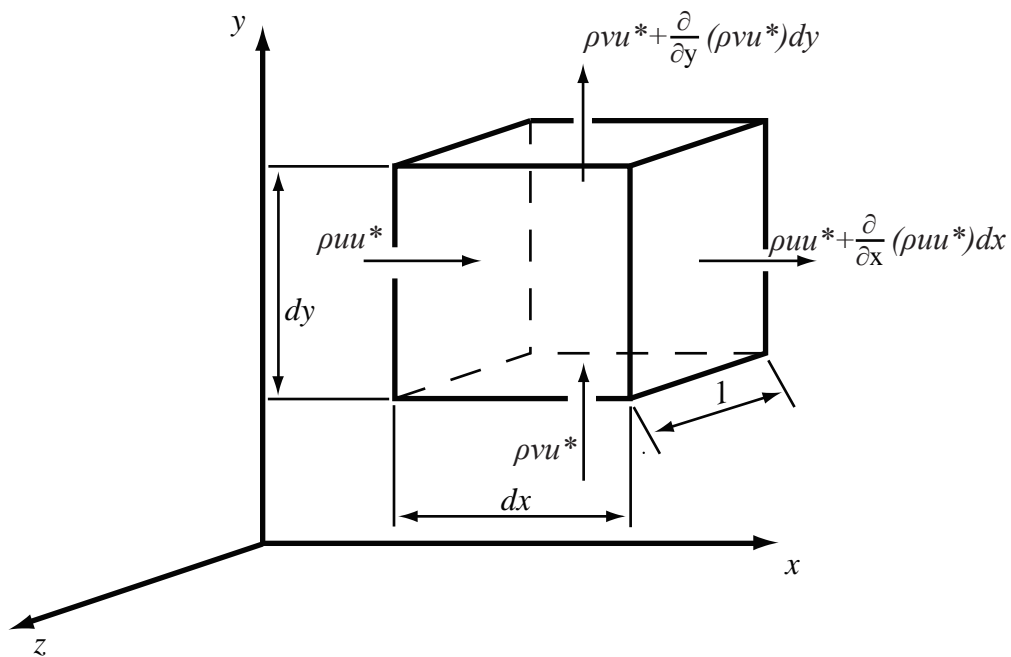


Abbildung 4.6: Energieströme am Kontrollvolumen

den Energieumsatz erst bei Strömungsgeschwindigkeiten in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit von Bedeutung und soll deshalb unberücksichtigt bleiben. Die

Differenz zwischen dem austretenden und eintretenden Strom der inneren Energie beträgt

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u u^*) dx dy l + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u^*) dx dy l$$

wobei die spezifische innere Energie mit u^* [$\frac{J}{kg}$] bezeichnet ist. Wird anstelle der spezifischen inneren Energie die spezifische Enthalpie $h \equiv u^* + \frac{p}{\rho}$ eingeführt, so folgt

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho u h) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v h) - \frac{\partial}{\partial x} (u p) - \frac{\partial}{\partial y} (v p) \right) dx dy l \\ &= \left(\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\underbrace{\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}}_{=0 \text{ (Gl. 4.5)}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (u p) - \frac{\partial}{\partial y} (v p) \right) dx dy l \end{aligned}$$

Aus dem Fourierschen Gesetz ergibt sich die insgesamt *zugeführte Wärme*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) dx dy l.$$

Am Volumenelement wird von den Oberflächen- (Reibungs-) und von den Massenkraften Leistung zugeführt.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_x) - \frac{\partial}{\partial x} (u p) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{xy}) + \rho u g_x \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (v \sigma_y) - \frac{\partial}{\partial y} (v p) + \frac{\partial}{\partial x} (v \tau_{xy}) + \rho v g_y \right) dx dy l \end{aligned}$$

Damit lautet die Energiegleichung

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_x + v \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{xy} + v \sigma_y) + \rho u g_x + \rho v g_y \end{aligned} \quad (4.14)$$

Auf die Einführung der bei der Ableitung der Impulsgleichung formulierten Spannungsansätze soll hier verzichtet werden, da in den weitaus meisten Anwendungsfäl-

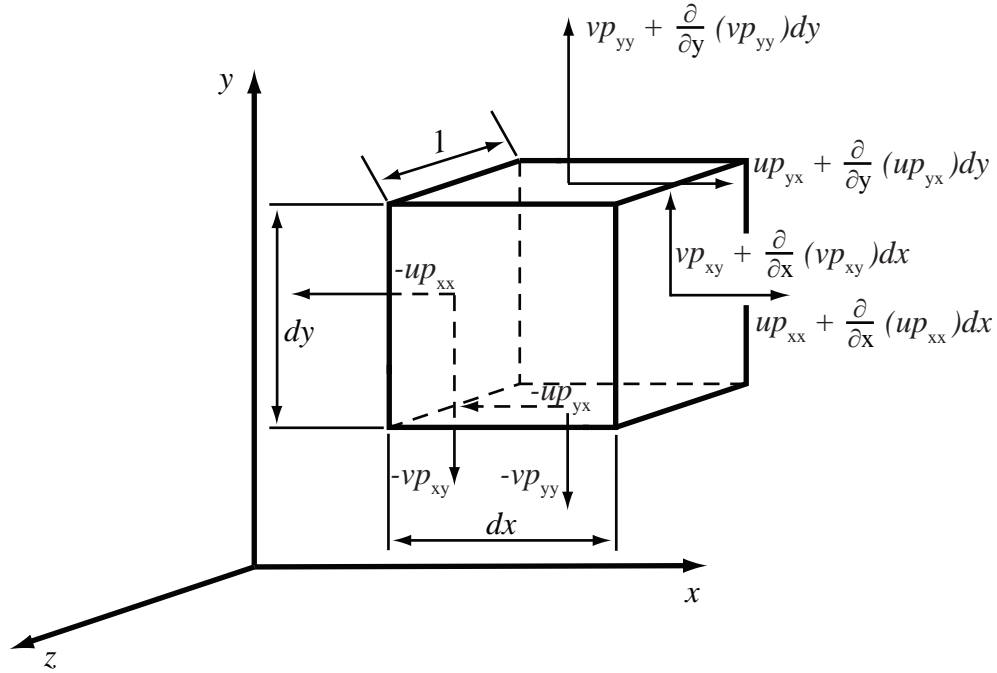


Abbildung 4.7: Beitrag der Kräfte zur Energiebilanz am Volumenelement

len der Beitrag der Normal-, Schub und Massenkräfte zur Energiebilanz vernachlässigt werden kann.

Die spezifische Enthalpie kann schließlich bei Systemen ohne Phasenänderungen und ohne chemische Reaktionen durch die Temperatur ersetzt werden, wenn es sich bei dem Fluid um ein ideales Gas ($dh = c_p dT$) oder um eine inkompressible Flüssigkeit ($dh = c dT$) handelt.

Damit wird

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4.15)$$

Ein Vergleich dieser Gleichung mit der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung, Gl. 3.2, für stationäre Probleme ohne Wärmequellen zeigt, dass unter den gemachten Voraussetzungen der Energietransport durch Wärmeleitung durch den konvektiven Energietransport durch Enthalpieströme erweitert wird. Für instationäre Vorgänge ist die linke Seite der Gl. 4.15 durch einen die Energiespeicherung charakterisierenden Term $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$ zu ergänzen.

Ist außerdem die Wärmeleitfähigkeit vom Ort unabhängig, wird aus Gl. (4.15)

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.16)$$

oder

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\eta}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.17)$$

mit der Prandtl-Zahl

$$\text{Pr} \equiv \frac{\eta}{\lambda/c_p} \quad (4.18)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\rho \vec{w} \times \text{grad } T = \frac{\eta}{\text{Pr}} \nabla^2 T \quad (4.19)$$

Das Temperaturfeld eines strömenden Mediums und damit auch der Temperaturgradient an seiner Berandung, aus dem die übertragene Wärmemenge bestimmt werden kann, Gl.(4.2), ist durch die Energiegleichung, z.B. Gl. (4.17), die Impulsgleichungen, z.B. Gl. (4.10), die Kontinuitätsgleichung, z.B. Gl. (4.6), und geeignete Ansätze zur Beschreibung der Stoffeigenschaften sowie durch die Randbedingungen des Systems ausreichend beschrieben.

Die Lösung dieses Systems von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen ist nur numerisch mit Differenzenverfahren möglich, die heute kommerziell angeboten werden und auf die in weiterführenden Vorlesungen eingegangen wird. Bei komplizierten Geometrien oder Randbedingungen erreichen solche Rechenverfahren die Grenzen moderner Großrechner, so dass gezielte Experimente zur Ermittlung von Wärmeübergangskoeffizienten oft wirtschaftlicher sind.

Für eine große Gruppe von technisch wichtigen Strömungen, für *Grenzschichtströmungen*, können die abgeleiteten Erhaltungsgleichungen weiter vereinfacht werden. Dadurch ergeben sich anstelle der elliptischen partiellen Differentialgleichungen parabolische, die numerisch sehr viel einfacher zu behandeln sind und die in einigen Fällen in gewöhnliche Differentialgleichungen transformiert werden können.

Auf diese Lösungsmethoden wird im folgenden nur sehr kurz eingegangen, ausführlicher werden diese Probleme zum Beispiel in Bayley u. a. (1972) behandelt.

4.2 Erzwungene Konvektion - Grenzschichtgleichungen für laminare, stationäre Strömungen

Für Strömungen entlang fester Wände ist der Einfluss der Zähigkeitskräfte auf eine wandnahe Zone, die *Geschwindigkeitsgrenzschicht*, mit der Ausdehnung δ_u beschränkt. Außerhalb dieser Grenzschicht ist die Zähigkeit ohne Bedeutung - die Strömung verhält sich wie eine Potenzialströmung. Analoges gilt für den Bereich, in dem die Wärmeleitung eine Rolle spielt. Die *Temperaturgrenzschicht* mit der Dicke δ_T grenzt den Bereich der Wärmeleitung vom Bereich der ungestörten Strömung ab. Für eine derartige Strömung hat Prandtl (1904) aus den vollständigen Erhaltungs-

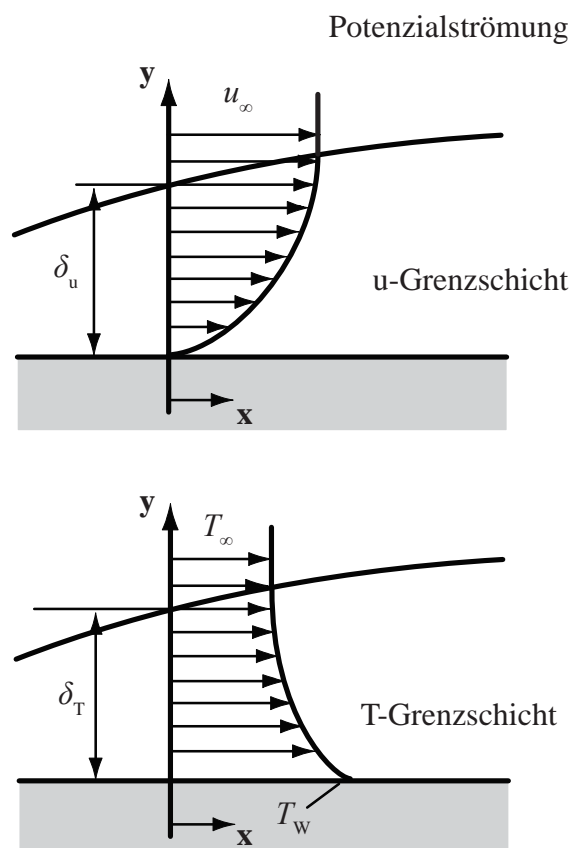


Abbildung 4.8: Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschicht an einer überströmten Oberfläche

gleichungen durch eine vergleichende Größenordnungsabschätzung der Einzelterme die Grenzschichtgleichungen abgeleitet. Diese Abschätzungen, die zum Beispiel bei Schlichting u. Gersten (2006) zu finden sind, ergeben, dass für Strömungen mit Grenzschichtcharakter, das heißt für $\frac{\delta}{L} \ll 1$, die Terme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.20)$$

werden. Damit ergeben sich für Grenzschichten mit konstanten Stoffeigenschaften die folgenden parabolischen Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.21)$$

(Kontinuitätsgleichung)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g_x \quad (4.22)$$

(Impulsgleichung, x-Richtung)

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\eta}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.23)$$

(Energiegleichung)

Im allgemeinen sind die Dicken der Geschwindigkeits- und der Temperaturgrenzschicht nicht gleich. Als Konsequenz der Grenzschichtnäherungen folgt jedoch, da $\delta_u \approx \eta^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{\delta_u}{\delta_T} \approx \text{Pr}^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

Bei Gasen liegen die Prandtl-Zahlen in der Größenordnung von 1, so dass Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschichten nahezu zusammenfallen.

4.2.1 Exakte Lösungen der Grenzschichtgleichungen

Für eine ebene Platte ($dp/dx = 0$), ohne Massenkkräfte ($\rho g_x = 0$) ist eine Koordinatentransformation möglich, die auf eine gewöhnliche Differentialgleichung mit einer exakten Lösung führt, siehe Schlichting u. Gersten (2006).

Die Lösung der Impulsgleichung, der Geschwindigkeitsverlauf in der Grenzschicht, geht auf Blasius (1908) zurück und ist in Abbildung 4.9 über dem dimensionslosen Wandabstand aufgetragen. Aus dem Geschwindigkeitsgradienten an der Wand lässt sich die dimensionslose Wandschubspannung, der Reibungswert $\frac{c_f}{2}$ ableiten.

$$\frac{c_f}{2} \equiv \frac{\tau_W}{\rho u_\infty^2} = \frac{\left(\eta \frac{du}{dy}\right)_W}{\rho u_\infty^2} \quad (4.25)$$

Die dazugehörige Energiegleichung (Gl. 4.23) für die ebene Platte mit konstanter

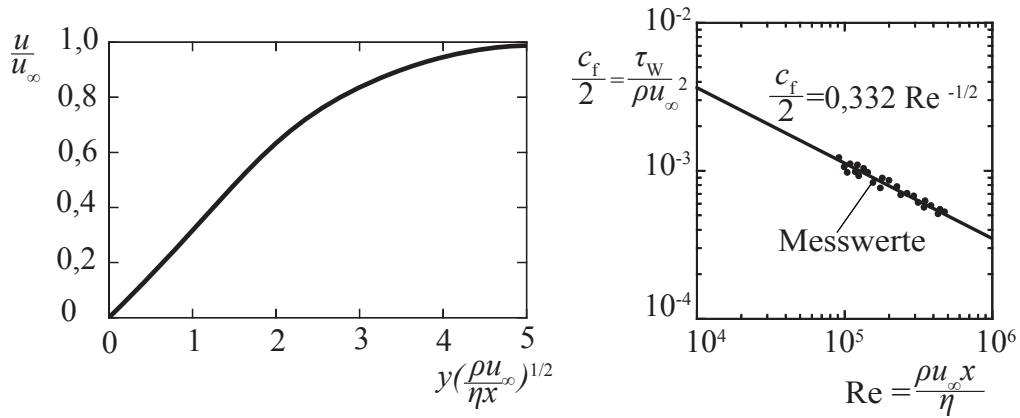


Abbildung 4.9: Laminare Strömung über einer ebenen Platte - Geschwindigkeitsprofil und Reibungsbeiwert nach Blasius (1908)

Wandtemperatur wurde von Pohlhausen (1921) gelöst und führt auf Temperaturprofile, die zusätzlich von der Prandtl-Zahl abhängig sind. Aus diesen Temperaturprofilen lässt sich wieder der Temperaturgradient an der Wand und damit der lokale Wärmeübergangskoeffizient α , siehe Gl. (4.4), oder dessen Mittelwert $\bar{\alpha}$ ableiten

$$\alpha = \frac{-\left(\lambda \frac{dT}{dy}\right)_W}{(T_W - T_\infty)} \quad \text{und} \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx \quad (4.26)$$

Das dimensionslose Temperaturprofil und der dimensionslose Wärmeübergangskoeffizient, die Nusselt-Zahl,

$$\text{Nu} \equiv \frac{\alpha x}{\lambda} \quad \text{und} \quad \overline{\text{Nu}} \equiv \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda} \quad (4.27)$$

sind im Bild 4.10 aufgetragen. Da für $\text{Pr} = 1$ die Impulsgleichung, Gl. (4.22),

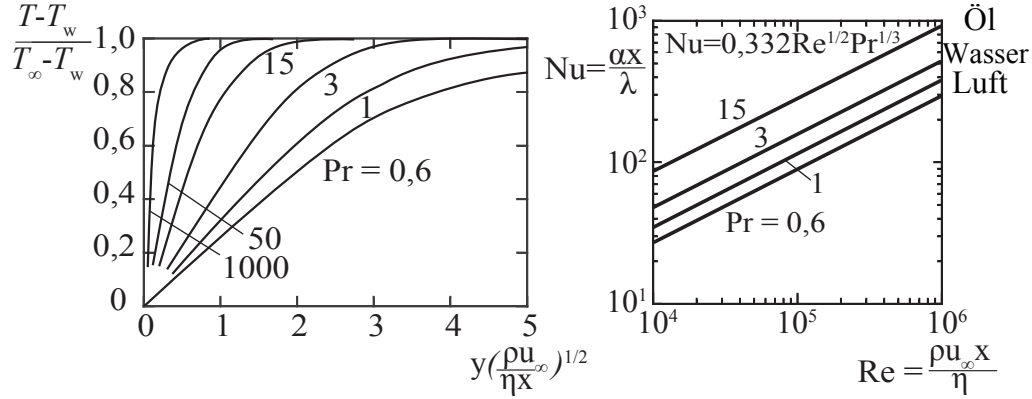


Abbildung 4.10: Laminare Strömung über einer ebenen Platte – Temperaturprofil und Nusselt-Zahl nach ?

und die Energiegleichung, Gl. (4.23), bei Vernachlässigung von Druckgradienten und Massenkräften identisch sind, müssen für diesen Fall auch das dimensionslose Geschwindigkeits- und das dimensionslose Temperaturprofil identisch sein und damit auch

$$\left(\frac{d\left(\frac{u}{u_\infty}\right)}{dy} \right)_w = \left(\frac{d\left(\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w}\right)}{dy} \right)_w$$

Mit den Gln. (4.4) und (4.27) ergibt sich

$$Nu = \frac{x}{\lambda} \left(\lambda \frac{d\left(\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w}\right)}{dy} \right)_w$$

und mit Gl. (4.25)

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\eta}{\rho u_\infty} \left(\frac{d\frac{u}{u_\infty}}{dy} \right)_w \quad (4.28)$$

(für $Pr = 1$)

Wegen der Gleichheit der dimensionslosen Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile ergibt sich aus diesen beiden Beziehungen der Zusammenhang zwischen der Nusselt-Zahl, dem Reibungsbeiwert und der Reynolds-Zahl, $Re = \frac{\rho u_\infty x}{\eta}$

$$Nu = \frac{c_f}{2} Re \quad (4.29)$$

(für $Pr = 1$)

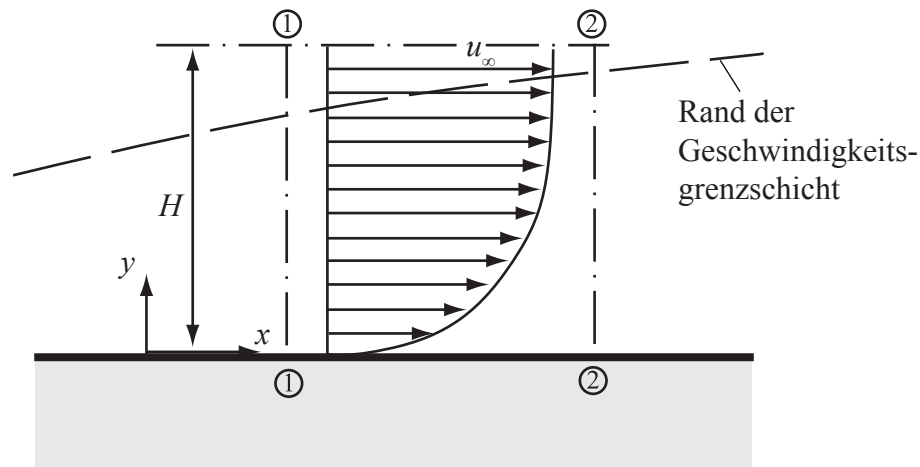


Abbildung 4.11: Integrale Impulsbilanz an einer Grenzschichtströmung

Eine näherungsweise Erfassung des Einflusses der Prandtl-Zahl führt auf eine erweiterte Beziehung

$$\text{Nu} = \frac{c_f}{2} \text{Re} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (4.30)$$

4.2.2 Eine einfache Näherungslösung zu den Grenzschichtgleichungen

Im vorhergehenden Abschnitt wurden Ergebnisse der exakten Lösungen der laminaren, stationären Grenzschichtgleichungen für ebene Strömungen vorgestellt. Die dazu notwendigen Ableitungen sind so umfangreich, dass sie in einer Einführungsvorlesung nicht zu behandeln sind.

Eine sehr einfache Näherungslösung der Grenzschichtgleichungen, die stattdessen besprochen werden soll, ergibt Ergebnisse, die mit denen der exakten Lösungen recht gut übereinstimmen und die vor allem die physikalischen Zusammenhänge deutlich machen.

Betrachtet wird wieder die Grenzschichtströmung über einer ebenen Platte. Zur Formulierung der Erhaltungsgleichungen wird jedoch ein Kontrollvolumen festgelegt, das von den Ebenen $\overline{11}$, $\overline{12}$, $\overline{22}$ und der festen Wand begrenzt wird. Dabei liegt die Ebene $\overline{12}$ außerhalb der Grenzschicht in der Potenzialströmung. Für dieses

Kontrollvolumen ergibt sich die *integrale Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{d}{dx} \int_0^H \rho u \, dy \, dx \, l + \rho v_\infty dx \, l = 0 \quad (4.31)$$

(Kontinuitätsgleichung)

und die integrale Impulsgleichung in x-Richtung

$$\frac{d}{dx} \int_0^H \rho u^2 \, dy \, dx \, l + \rho u_\infty v_\infty dx \, l = -\tau_W dx \, l$$

An der oberen Begrenzungsebene, die in der Potenzialströmung angeordnet ist, wirken keine Schubkräfte. Normalkräfte in den Ebenen $\overline{11}$ und $\overline{22}$ sind im Rahmen der Grenzschichtnäherungen zu vernachlässigen. An der Wand muss nur die Schubspannung $\tau_{yx} = \left(\eta \frac{du}{dy} \right)_W$ berücksichtigt werden. Damit ergibt sich unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung, Gl. (4.31),

$$\frac{d}{dx} \int_0^H \rho u^2 \, dy - \frac{d}{dx} \int_0^H \rho u u_\infty \, dy = - \left(\eta \frac{du}{dy} \right)_W$$

oder

$$\frac{d}{dx} \int_0^H \rho u (u_\infty - u) \, dy = \left(\eta \frac{du}{dy} \right)_W \quad (4.32)$$

(Impulsgleichung, x-Richtung)

Die Integration ist durchführbar, wenn der Geschwindigkeitsverlauf in der Grenzschicht bekannt ist.

Wird als grobe Näherung ein *lineares Geschwindigkeitsprofil* angenommen

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{y}{\delta_u} \quad (4.33)$$

und bleibt die Dichte in der Grenzschicht unverändert, so wird aus Gl. (4.32)

$$\rho u_\infty \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_u} \frac{y}{\delta_u} \left(1 - \frac{y}{\delta_u} \right) dy = \frac{\eta}{\delta_u}$$

Hierdurch ergibt sich schließlich durch Integrieren eine Beziehung für die Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht

$$\delta_u = \sqrt{\frac{12\eta}{\rho u_\infty}} x \quad (4.34)$$

oder in dimensionsloser Schreibweise

$$\frac{\delta_u}{x} = \sqrt{\frac{12\eta}{\rho u_\infty x}} = \sqrt{\frac{12}{\text{Re}_x}} \quad (4.35)$$

mit der auf die Lauflänge x bezogenen Reynolds-Zahl $\text{Re} \equiv \frac{\rho u_\infty x}{\eta}$.

Ist die Grenzschichtdicke bekannt, lässt sich auch die *Wandschubspannung*

$$\tau_w = \left(\eta \frac{du}{dy} \right)_w = \eta \frac{u_\infty}{\delta_u} = \frac{1}{\sqrt{12}\sqrt{\text{Re}}} \rho u_\infty^2 \quad (4.36)$$

und ihre dimensionslose Form, der Reibungswert $\frac{c_f}{2}$

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{1}{\sqrt{12}\sqrt{\text{Re}}} = 0,289 \text{ Re}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.37)$$

ermitteln. Diese Beziehung zeigt dieselbe Abhängigkeit des Reibungsbeiwerts von der Reynolds-Zahl wie die vorne angegebene exakte Lösung der Impulsgleichung

$$\frac{c_f}{2} = 0,332 \text{ Re}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.38)$$

nur der Vorfaktor wird hier um etwa 15% zu klein ermittelt.

Die *integrale Energiegleichung* lässt sich an einem entsprechenden, die Temperaturgrenzschicht umfassenden Kontrollvolumen ableiten.

Werden die von den am Volumen wirkenden Kräften verursachte Dissipationswärme und die Wärmeleitung in Strömungsrichtung, die klein gegenüber dem konvektiven Energietransport in dieser Richtung ist, vernachlässigt, so ergibt sich

$$\frac{d}{dx} \int_0^H \rho u c_p (T - T_0) dx dy l + \rho v_\infty c_p (T_\infty - T_0) dx l = - \left(\lambda \frac{dT}{dy} \right)_w dx l$$

wobei T_0 eine Bezugstemperatur zur Festlegung des Enthalpiebezugswertes bedeuten soll.

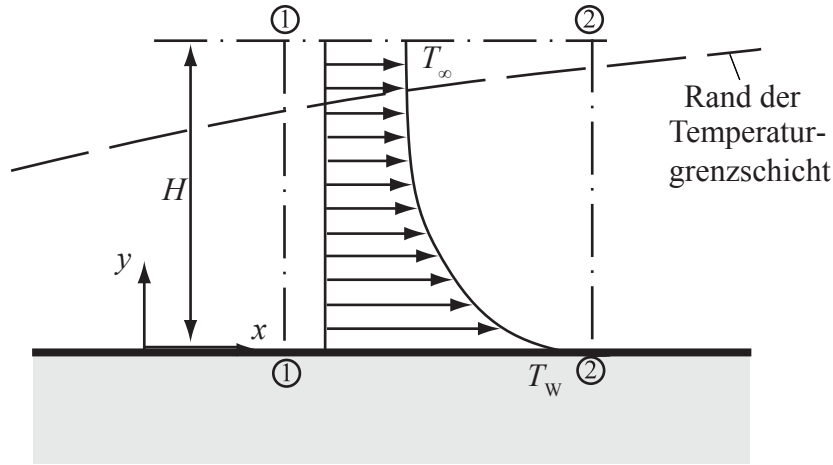


Abbildung 4.12: Integrale Energiebilanz an einer Grenzschichtströmung

Wird auch hier die Kontinuitätsgleichung, Gl. (4.31), eingeführt, so ergibt sich daraus

$$\frac{d}{dx} \int_0^H \rho u c_p (T - T_0) dy - \frac{d}{dx} \int_0^H \rho u c_p (T_\infty - T_0) dy = - \left(\lambda \frac{dT}{dy} \right)_w$$

oder

$$\frac{d}{dx} \int_0^H \rho u c_p (T - T_\infty) dy = - \left(\lambda \frac{dT}{dy} \right)_w \quad (4.39)$$

(Energiegleichung)

Unter der Annahme konstanter Stoffeigenschaften (ρ, λ, c_p) lässt sich die Energiegleichung integrieren, wenn für das Temperaturprofil in der Grenzschicht ein linearer Verlauf angenommen wird.

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \equiv \frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{y}{\delta_T} \quad (4.40)$$

Damit wird

$$\rho c_p \frac{d}{dx} \int_0^H u_\infty \frac{y}{\delta_u} \left(\frac{y}{\delta_T} \theta_\infty - \theta_\infty \right) dy = - \lambda \frac{\theta_\infty}{\delta_T}$$

Nehmen wir zunächst an, dass die Temperaturgrenzschicht gleich dick oder dünner als die Geschwindigkeitsgrenzschicht ist, kann $H = \delta_T$ gesetzt werden. Die Integration führt dann auf

$$\delta_T d \left(\frac{\delta_T^2}{\delta_u} \right) = \frac{6\lambda}{\rho c_p u_\infty} dx \quad (4.41)$$

Bleibt das Verhältnis der beiden Grenzschichtdicken konstant, wird daraus

$$\left(\frac{\delta_T}{\delta_u} \right)^3 \delta_u d\delta_u = \frac{6\lambda}{\rho c_p u_\infty} dx \quad (4.42)$$

und zusammen mit Gl. (4.34) ergibt sich eine Beziehung für die Temperaturgrenzschichtdicke

$$\frac{\delta_T}{\delta_u} = \left(\frac{\lambda}{\eta c_p} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\text{Pr}^{\frac{1}{3}}} \quad (4.43)$$

Für Gase ist die Prandtl-Zahl $\text{Pr} \approx 1$, so dass die getroffene Annahme $\delta_u = \delta_T$ berechtigt war. Bei bekannter Dicke der Temperaturgrenzschicht δ_T lässt sich die Wärmestromdichte \dot{q}_W'' an der Wand berechnen.

$$\dot{q}_W'' = -\lambda \left(\frac{dT}{dy} \right)_W = -\lambda \frac{\theta_\infty}{\delta_T} = -\frac{\lambda \theta_\infty \text{Pr}^{\frac{1}{3}}}{\delta_u} \quad (4.44)$$

und damit mit Gl. (4.35) für die Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht

$$\dot{q}_W'' = \frac{\lambda}{x} 0,289 \text{Re}^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} (T_W - T_\infty) \quad (4.45)$$

Ein Vergleich dieser Beziehung mit dem schon häufig zur Beschreibung der konvektiven Wärmeübertragung benutzten empirischen Ansatz

$$\dot{q}_W'' = \alpha (T_W - T_\infty)$$

liefert für den Wärmeübergangskoeffizienten α die Beziehung

$$\alpha = \frac{\lambda}{x} 0,289 \text{Re}^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (4.46)$$

oder in dimensionsloser Form, $\text{Nu} \equiv \frac{\alpha x}{\lambda}$,

$$\text{Nu} = 0,289 \text{Re}^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}. \quad (4.47)$$

Wie der Vergleich mit der exakten Lösung von ? (Gl. (4.30) und Gl. (4.38))

$$\text{Nu} = 0,332 \text{ Re}^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (4.48)$$

zeigt, ergibt sich auch für die hier berechneten Wärmeübergangskoeffizienten trotz der grob vereinfachenden Annahmen der richtige Funktionsverlauf bei nur geringfügigem Fehler im Absolutwert. Mit wenig Mehraufwand bei der Integration der Erhaltungsgleichungen durch die Einführung von Polynomen 3. Grades zur Beschreibung der Profile lässt sich die Übereinstimmung mit den exakten Lösungen noch deutlich verbessern.

4.3 Natürliche Konvektion – Grenzschichtgleichungen für laminare, stationäre Strömungen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde der Wärmeübergang zwischen einer Oberfläche und einem Fluid betrachtet, dessen Strömung von außen zum Beispiel durch ein Gebläse aufgeprägt wurde. Bei der Behandlung dieser Probleme wurden die Massenkraften wegen ihrer meist untergeordneten Bedeutung vernachlässigt.

In einer anderen Gruppe von Anwendungsfällen wird die Strömung entlang der Oberfläche nicht aufgezwungen, sondern durch eine Massenkraft, meist die Schwerkraft, induziert. Bei dieser *natürlichen Konvektion* bilden sich Geschwindigkeits- und Temperaturgrenzschichten aus, wie sie in der nebenstehenden Skizze angedeutet sind. Diese Profile ergeben sich wie vorher aus der Lösung der Grenzschichtgleichungen, der Kontinuitätsgleichung, Gl. (4.21), der Impulsgleichung für die x-Richtung, Gl. (4.22), und der Energiegleichung, Gl. (4.23). In der Impulsgleichung

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g_x \quad (4.49)$$

hat sich bei dem den Schwerkrafteinfluss erfassenden Term das Vorzeichen geändert, da im betrachteten Beispiel die Schwerkraft entgegen der positiven x-Richtung wirkt.

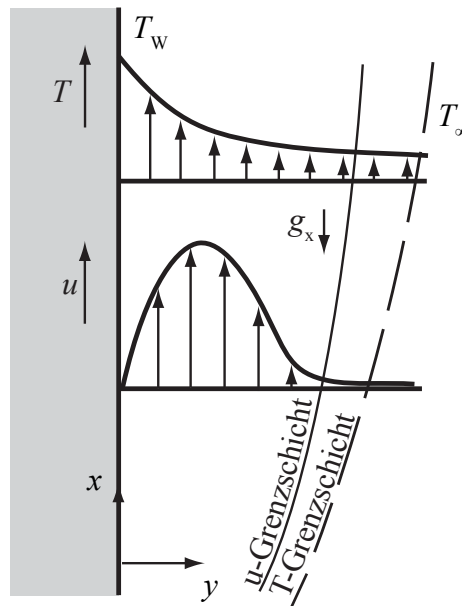


Abbildung 4.13: Natürliche Konvektion an der senkrechten Platte

Der Druckgradient $\frac{dp}{dx}$ war bei der erzwungenen Konvektion über der ebenen Platte gleich null. Bei den Problemen der freien Konvektion wird die Druckänderung über der Höhe gleich dem Gewicht der Flüssigkeitssäule über der Einheitsfläche sein

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_{\infty}g \quad (4.50)$$

Damit lässt sich die Impulsgleichung umformen in

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = g(\rho_\infty - \rho) + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.51)$$

Bei homogenen Medien ist es üblich, die Dichtedifferenz im Auftriebsterm durch den volumetrischen Ausdehnungskoeffizienten β

$$\beta \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_n = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)}$$

auszudrücken. Damit folgt

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = g\rho\beta(T - T_\infty) + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.52)$$

(Impulsgleichung, x-Richtung)

Für zahlreiche Fluide ist der volumetrische Ausdehnungskoeffizient tabelliert, für ideale Gase gilt:

$$\beta = \frac{1}{T}$$

In vielen Fällen ist die Annahme konstanter Stoffwerte, außer im Auftriebsterm, zulässig, obwohl gerade Dichtedifferenzen die Ursache der Strömung des Fluids sind.

Zur Ermittlung der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder und damit der Reibung und des Wärmeaustauschs an einer senkrechten Oberfläche müssen damit die folgenden Erhaltungsgleichungen gelöst werden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.53)$$

(Kontinuitätsgleichung, ρ konstant)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = g\rho\beta(T - T_\infty) + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.54)$$

(Impulsgleichung, x-Richtung, ρ, η konstant)

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\eta}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.55)$$

(Energiegleichung, λ konstant)

Die Lösung wird gegenüber der des Grenzschichtgleichungssystems für erzwungene Konvektion dadurch erschwert, dass zur Lösung der Impulsgleichung die Kenntnis des Temperaturfeldes notwendig ist.

Für die einfache Geometrie der ebenen Platte mit konstanter Oberflächentemperatur sind dennoch wieder exakte Lösungen durch eine Transformation der partiellen in gewöhnliche Differenzialgleichungen möglich.

Diese gewöhnlichen Differenzialgleichungen sind nach Ostrach (1953) gelöst worden. Die sich ergebenden Geschwindigkeits- und Temperaturprofile sind in Abbildung 4.14

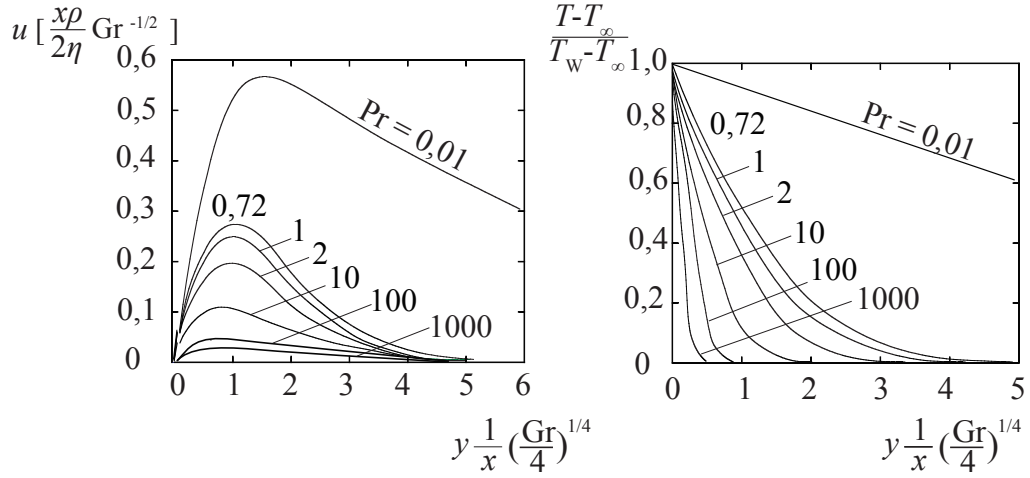


Abbildung 4.14: Geschwindigkeits- und Temperaturprofile an einer senkrechten Wand bei natürlicher Konvektion nach Ostrach (1953)

in dimensionsloser Form wiedergegeben. Dabei ist die neue dimensionslose Kennzahl, die *Grashof-Zahl*

$$\text{Gr} \equiv \frac{\beta g \rho^2 (T_w - T_\infty) x^3}{\eta^2} \quad (4.56)$$

ein Maß für die Bedeutung der Auftriebskräfte gegenüber den Zähigkeitskräften.

Aus der Steigung des Temperaturprofils an der Wand ist der Wärmestrom nach dem Fourierschen Gesetz oder auch der Wärmeübergangskoeffizient nach Gl. (4.25) zu berechnen. Örtlich gemittelte Nusselt-Zahlen lassen sich in der Form

$$\overline{\text{Nu}} = C (\text{Gr} \text{Pr})^{1/4} \quad (4.57)$$

darstellen. Dabei ist $\overline{\text{Nu}}$ ein Mittelwert der Nusselt-Zahl über der Plattenhöhe und C ein von der Prandtl-Zahl abhängiger Faktor, der in der folgenden Tabelle wiedergegeben ist:

Tabelle 4.1: Zahlenwerte der Konstanten C der Gl. (4.57) nach Ostrach (1953)

Pr	0,003	0,01	0,03	0,72	1	2	10	100	1000	∞
C	0,182	0,242	0,305	0,516	0,535	0,568	0,620	0,653	0,665	0,670

Diese theoretischen Ergebnisse sind in den nächsten beiden Bildern mit Messwerten verglichen. Im Bild (4.15) sind die berechneten Geschwindigkeits- und Temperatur-

felder an einer senkrechten, beheizten Platte in Luft mit experimentellen Werten verglichen. In Bild (4.16) werden die mittleren Nusselt-Zahlen mit Messwerten nach Whitaker (1974) verglichen. Der Vergleich der Profile in Luft zeigt eine sehr gu-

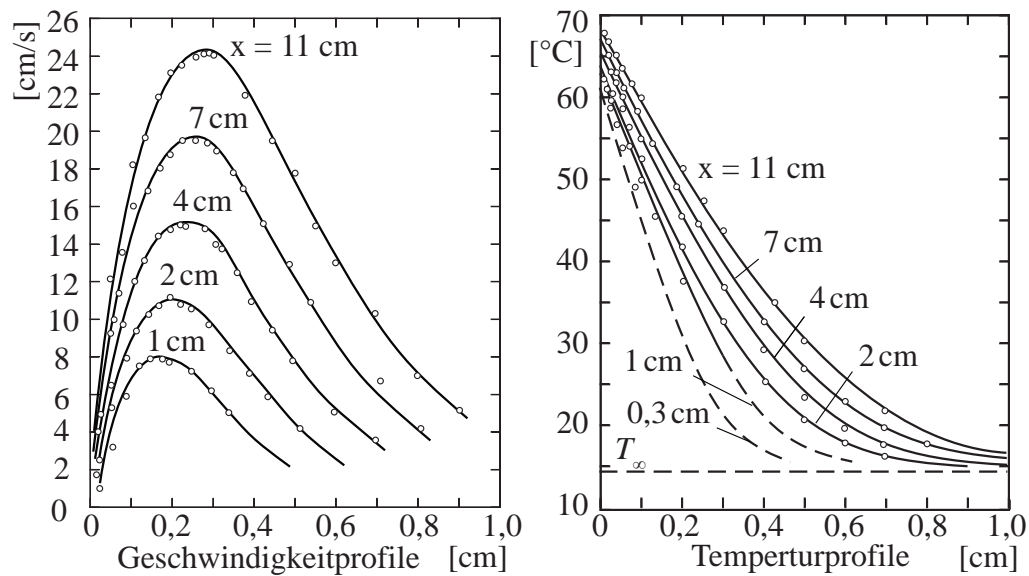


Abbildung 4.15: Berechnete und gemessene Geschwindigkeits- und Temperaturprofile an einer senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion in Luft aus Whitaker (1974)

te Übereinstimmung und bestätigt damit die Gültigkeit der vereinfachenden Annahmen bei der Ableitung der Erhaltungsgleichungen. Bei den örtlich gemittelten Nusselt-Zahlen stimmen Rechnung und Experiment nur im Bereich mittlerer ($GrPr$)-Werte überein. Im Bereich $GrPr < 10^3$ sind offensichtlich die Grenzschichtnäherungen nicht mehr gültig. Im Bereich $GrPr > 10^9$ wird der Wärmeaustausch durch das Umschlagen von der laminaren in die turbulente Strömungsform verstärkt.

Diese beiden Effekte, die auch bei der erzwungenen Konvektion zu beobachten sind, erschweren die theoretische Lösung der Erhaltungsgleichungen ganz erheblich. Entfallen die Voraussetzungen der Grenzschichtnäherungen, müssen anstelle der parabolischen elliptische Differenzialgleichungen mit numerischen Verfahren oder schließlich durch Experimente gelöst werden. Schlägt die Strömung von der laminaren in die turbulente Strömungsform um, müssen Modellvorstellungen zum Beitrag der Turbulenz zum Impuls- und Wärmeaustausch erarbeitet werden.

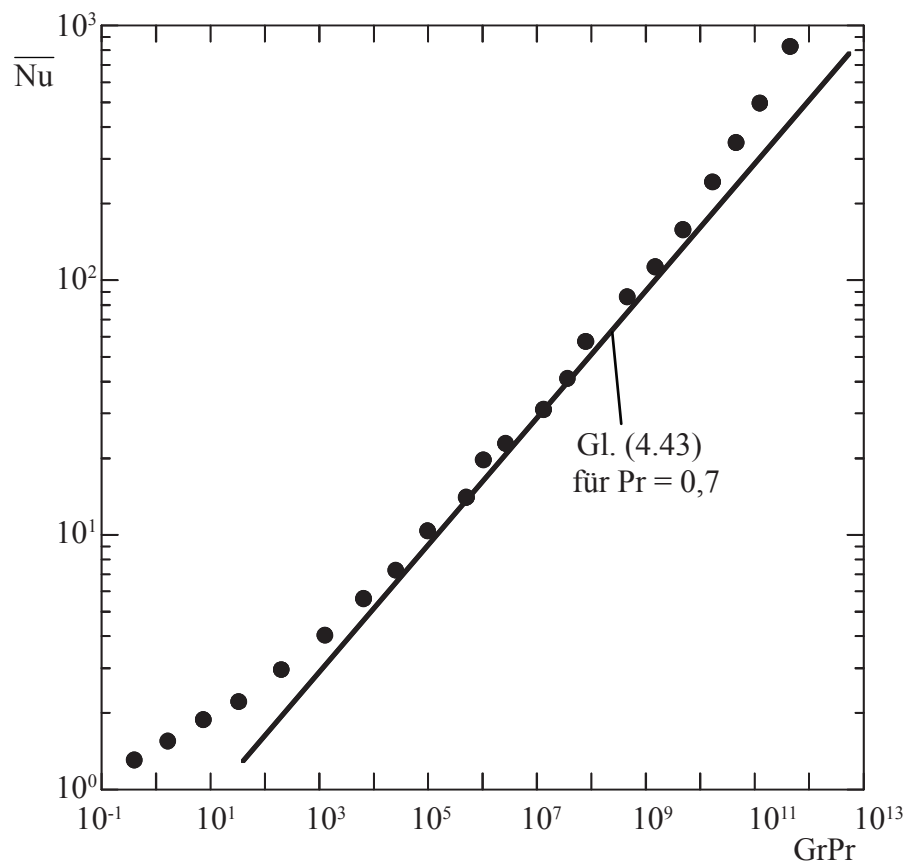


Abbildung 4.16: Berechnete und gemessene örtlich gemittelte Nusselt-Zahlen an einer senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion aus Whitaker (1974)

Auf die Eigenschaften turbulenter Strömungen wird im folgenden Abschnitt 4.4 eingegangen.

4.4 Wärmeübertragung in turbulenten Strömungen

In den vorhergehenden Abschnitten wurden die physikalischen Zusammenhänge der Wärmeübertragung von einer festen Wand an ein laminar strömendes Fluid beschrieben. Dort konnte gezeigt werden, dass in der unmittelbaren Nähe der festen Begrenzung die Wärmeleitung und in einiger Entfernung davon der Enthalpietransport durch die Strömung der jeweils vorherrschende Energietransportmechanismus ist.

In sehr vielen technisch wichtigen Anwendungsfällen stellt sich jedoch, abhängig von der die Strömung charakterisierenden Reynolds-Zahl, eine turbulente Strömungsform ein, die zu zusätzlichen Austauschmechanismen führt. Die Strömung kann sich bei Überschreitung dieser kritischen Reynolds-Zahl zwar im zeitlichen Mittel durchaus wie eine stationäre Strömung verhalten, werden jedoch die Momentanwerte der Geschwindigkeit oder der Temperatur mit einem schnell ansprechenden Messgerät, einem Hitzdrahtanemometer bzw. einem sehr dünnen Thermoelement, erfasst, so zeigt sich der skizzierte zeitliche Verlauf dieser Größen. Dabei gilt für den Moment-

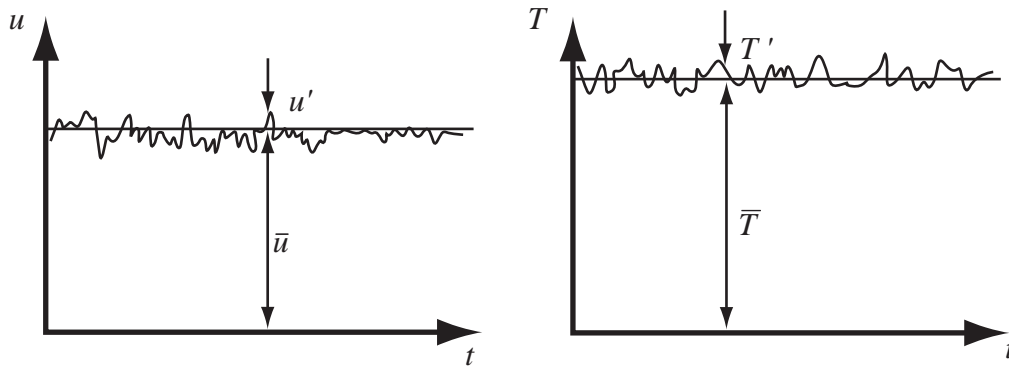


Abbildung 4.17: Zeitliches Verhalten der Geschwindigkeit und der Temperatur in einer im zeitlichen Mittel stationären, turbulenten Strömung

anwert der Geschwindigkeit u der folgende Zusammenhang mit dem zeitlichen Mittelwert \bar{u} und der Schwankungsgröße u'

$$u = \bar{u} + u'$$

und entsprechend

$$v = \bar{v} + v' ; \quad T = \bar{T} + T' \quad \text{und} \quad p = \bar{p} + p'$$

Werden diese Momentanwerte in die zeitabhängige Kontinuitätsgleichung, in die Impulsgleichungen und die Energiegleichung eingefügt, so folgt nach einer zeitlichen Mittelung zum Beispiel für Strömungen mit Grenzschichtcharakter und unter der Annahme konstanter Stoffeigenschaften aus Gln. (4.21) bis (4.23) ein neuer Satz von Erhaltungsgleichungen.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (4.58)$$

(Kontinuitätsgleichung)

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \eta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (4.59)$$

(Impulsgleichung)

$$\rho \bar{u} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho \bar{v} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} - \rho c_p \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial y} \quad (4.60)$$

(Energiegleichung)

Die etwas schreibaufwendigen Ableitungen sind zum Beispiel bei Schlichting u. Gersten (2006) zu finden. Diese neuen, für stationäre turbulente Grenzschichtströmungen gültigen Gleichungen unterscheiden sich von denen für laminare Strömungen durch je einen neu dazu gekommenen Term auf der rechten Seite von Impuls- und Energiegleichung, der den zusätzlichen Transport von Impuls bzw. Energie durch die turbulenten Schwankungsbewegungen der Strömung beschreibt.

Meist werden diese beiden Zusatzterme als „*turbulente Schubspannung*“ bzw. „*turbulente Wärmeleitung*“ bezeichnet

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} \quad \text{und} \quad \dot{q}_t'' = \rho c_p \overline{v'T'}.$$

Wird in Analogie zum molekularen Transport von Impuls und Wärme eine entsprechende turbulente Zähigkeit η_t und Wärmeleitfähigkeit λ_t definiert

$$\tau_t \equiv \eta_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{und} \quad \dot{q}_t'' \equiv -\lambda_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}.$$

so lassen sich die molekularen Transporteigenschaften und der Einfluss der turbulenten Schwankungsbewegung zu *effektiven Transporteigenschaften* zusammenfassen, zum Beispiel $\eta_{\text{eff}} = \eta + \eta_t$. Für das Beispiel einer turbulenten Grenzschichtströmung ergibt sich schließlich die folgenden Erhaltungsgleichungen:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (4.61)$$

(Kontinuitätsgleichung)

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (4.62)$$

(Impulsgleichung)

$$\rho \bar{u} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho \bar{v} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \quad (4.63)$$

(Energiegleichung)

Trotz dieser vollkommenen formalen Ähnlichkeit mit den ursprünglichen, für laminare Grenzschichtströmungen gültigen Erhaltungsgleichungen, darf nicht übersehen werden, dass die turbulenten Transporteigenschaften den Einfluss der Turbulenz der Strömung erfassen und damit nicht nur vom Ort in der Strömung, sondern auch von der Geometrie und der Vorgeschichte der Strömung abhängen. Die turbulenten Transporteigenschaften sind keine Stoffeigenschaften wie ihre molekularen Analogien. Halbempirische Ansätze zu ihrer Beschreibung sind unter dem Stichwort „Turbulenzmodelle“ in der Spezialliteratur zu finden, zum Beispiel bei Jischa (1982).

Diese speziellen Eigenschaften machen eine exakte Lösung der Erhaltungsgleichungen, wie sie für Sonderfälle laminarer Strömungen vorgestellt wurden, unmöglich. Daher müssen numerischer Methoden, wie z. B. das Finite-Differenzen-, das Finite-Elemente- oder das Finite-Volumen-Verfahren eingesetzt werden. Die Behandlung numerischer Methoden zur Lösung der Strömungsgleichungen bleibt speziellen Vorlesungen vorbehalten. Die Anwendung von heute kommerziell verfügbaren Codes für Fragestellungen aus der Energie- und Verbrennungstechnik wird in der Vorlesung „Feuerungstechnik“ vorgestellt.

4.5 Anwendung der Ähnlichkeitstheorie zur Darstellung von Wärmeübertragungsgesetzen

Obwohl durch die Entwicklung der Großrechner in den vergangenen Jahren enorme Fortschritte auf dem Gebiet der numerischen Voraussage der Wärmeübertragung möglich geworden sind, muss auch heute noch bei der Apparateauslegung in weitaus den meisten technischen Anwendungsfällen auf empirische Wärmeübertragungsgesetze zurückgegriffen werden.

Diese Gesetze ergeben sich aus Versuchswerten, die in geeigneter Art grafisch oder durch empirische Formeln dargestellt werden.

Wie in diesem Abschnitt gezeigt werden soll, ist es nicht notwendig, für jeden Anwendungsfall, das heißt, für das interessierende Fluid und die vorliegende Geometrie und Strömungsform im gesuchten Temperatur- und Geschwindigkeitsbereich jeweils erneut Versuche durchzuführen.

Die beiden oben behandelten analytischen Lösungen für die Wärmeübertragung bei erzwungener und bei natürlicher Konvektion haben gezeigt, dass die Ergebnisse durch wenige dimensionslose Kennzahlen in der Form

$$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr}) \text{ bei erzwungener Konvektion} \quad (4.64)$$

$$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Gr}, \text{Pr}) \text{ bei natürlicher Konvektion} \quad (4.65)$$

dargestellt werden können. Die Lösungen ergaben nicht nur die den Vorgang beschreibenden Kennzahlen, sondern auch deren funktionalen Zusammenhang.

In den Fällen, in denen eine Lösung der Erhaltungsgleichungen nicht bekannt ist, bleibt meist die Möglichkeit, zur Reduzierung der Zahl der Einflussgrößen aus den Erhaltungsgleichungen die für die Wärmeübertragung zuständigen Kennzahlen nach der Methode der *Ähnlichkeitstheorie* abzuleiten. Die Ermittlung des funktionalen Zusammenhangs der Kennzahlen bleibt dann die Aufgabe gezielter Messungen.

Zur Ermittlung der Kennzahlen werden die Erhaltungsgleichungen dimensionslos gemacht. Um den Schreibaufwand auch hier zu begrenzen, soll von den zweidimensionalen, laminaren Grenzschichtgleichungen mit konstanten Stoffeigenschaften in der Form der Gln. (4.53) bis (4.55) ausgegangen werden, wobei in der Impulsgleichung ein zusätzlicher Druckgradient $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\text{kin}}$ ergänzt wurde. Anzumerken sei hier, dass bei der Ableitung der Impulsgleichung, Gl. (4.54) für die senkrechte ebene Platte nur ein Druckgradient der Fluidsäule $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\text{pot}}$ wirksam werden kann und Druckgradienten durch eine Beschleunigung des Fluids $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\text{kin}}$, wie zum Beispiel in einer Düsenströmung, nicht berücksichtigt werden mussten. Hier soll deshalb der allgemeingültigere Fall behandelt werden.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.66)$$

(Kontinuitätsgleichung)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \left(\frac{dp}{dx} \right)_{\text{kin}} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g_x \rho \beta (T - T_\infty) \quad (4.67)$$

(Impulsgleichung)

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.68)$$

(Energiegleichung)

Alle Variablen dieser Gleichungen werden nun mit entsprechenden charakteristischen Größen, die durch das Problem gegeben sind, dimensionslos gemacht. So sind die Ortskoordinaten x und y auf eine charakteristische Länge L zu beziehen, die bei einer Kugel oder beim Rohr der Durchmesser D oder bei einer Plattenströmung die Plattenlänge L sein kann. Die Geschwindigkeitskomponenten u und v werden durch die charakteristische Geschwindigkeit u_∞ dividiert, bei der Rohrströmung die mittlere Geschwindigkeit, bei der Plattenströmung die Anströmgeschwindigkeit. Der Druck wird auf den doppelten Staudruck und die Temperatur auf eine charakteristische Temperaturdifferenz, zum Beispiel zwischen Oberfläche und Fluid in großer Entfernung vom Körper, bezogen.

Werden die dimensionslosen Variablen mit $*$ gekennzeichnet, so folgen mit

$$x^* \equiv \frac{x}{L}; \quad y^* \equiv \frac{y}{L}; \quad u^* \equiv \frac{u}{u_\infty}; \quad v^* \equiv \frac{v}{u_\infty}; \quad p^* \equiv \frac{p}{\rho u_\infty^2}; \quad \theta^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}$$

die dimensionslosen Erhaltungsgleichungen

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (4.69)$$

(Kontinuitätsgleichung)

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \left(\frac{dp^*}{dx^*} \right)_{\text{kin}} + \left(\frac{\eta}{\rho u_\infty L} \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \left(\frac{g_x \beta L (T_W - T_\infty)}{u_\infty^2} \right) \theta^* \quad (4.70)$$

(Impulsgleichung)

$$u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} = \left(\frac{\lambda}{\rho c_p u_\infty L} \right) \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \quad (4.71)$$

(Energiegleichung)

Neben den dimensionslosen Variablen enthalten diese Gleichungen die in Klammern dargestellten Ausdrücke, die ebenfalls dimensionslos sein müssen. In einer genaueren Betrachtung dieser Ausdrücke können die dimensionslosen Kennzahlen der vorhergehenden Abschnitte wiedergefunden werden.

In der Impulsgleichung, Gl. (4.70), sind zwei solche Terme zu finden.

Der Klammerausdruck des Reibungsterms ist der Kehrwert der *Reynolds-Zahl*

$$\text{Re} \equiv \frac{\rho u_\infty L}{\eta}$$

Der Klammerausdruck des Auftriebsterms wird als *Archimedes-Zahl* bezeichnet

$$\text{Ar} \equiv \frac{g_x \beta L (T_W - T_\infty)}{u_\infty^2}$$

die in der Literatur häufig als Quotient aus *Grashof-Zahl* und dem Quadrat der *Reynolds-Zahl*

$$\text{Ar} = \left(\frac{g_x \rho^2 \beta L^3 (T_W - T_\infty)}{\eta^2} \right) \left(\frac{\eta}{\rho u_\infty L} \right)^2 = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2}$$

geschrieben wird. Die dimensionslose Energiegleichung führt auf die *Péclet-Zahl*

$$\text{Pe} \equiv \frac{\rho c_p u_\infty L}{\lambda} = \frac{u_\infty L}{a}$$

die sich wiederum als Produkt aus *Reynolds-* und *Prandtl-Zahl* darstellen lassen kann.

$$\text{Pe} = \left(\frac{\rho u_\infty L}{\eta} \right) \left(\frac{\eta c_p}{\lambda} \right) = \text{Re} \text{ Pr}$$

Sind nun für verschiedene Anwendungsfälle, zum Beispiel verschiedene Fluide oder verschiedene Rohrdurchmesser, die Kennzahlen oder Kennzahlkombinationen der Klammerausdrücke gleich, so sind auch die Lösungen der Differenzialgleichungen, das heißt die dimensionslosen Felder der Geschwindigkeit, der Temperatur und des Drucks identisch, wenn zusätzlich auch die Randbedingungen gleichwertig sind. Geschwindigkeits- und Temperaturfeld sind demnach darstellbar als Funktion der Parameter

$$\vec{w} = \vec{w}(x^*, y^*, \text{Re}, \text{Gr}, \text{Pr}) \quad (4.72)$$

und

$$\theta^* = \theta^*(x^*, y^*, \text{Re}, \text{Gr}, \text{Pr}) \quad (4.73)$$

Hier interessieren weniger die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder des Fluids als vielmehr die zwischen Fluid und Körper übertragene Wärmemenge, die sich aus dem Gradienten des Temperaturprofils im Fluid an der Körperoberfläche ergibt

$$\dot{q}'' = - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w$$

Aus einem Vergleich mit der Definitionsgleichung für den Wärmeübergangskoeffizienten α

$$\dot{q}'' \equiv \alpha (T_w - T_\infty)$$

folgt:

$$\alpha = \frac{- \left(\lambda \frac{dT}{dy} \right)_w}{(T_w - T_\infty)}$$

oder in dimensionsloser Schreibweise die *Nusselt-Zahl* :

$$\text{Nu} \equiv \frac{\alpha L}{\lambda} = - \left(\frac{d\theta^*}{dy^*} \right)_w$$

Die schon in den vorigen Abschnitten als dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient eingeführte Nusselt-Zahl ist also gleich dem dimensionslosen Temperaturgradienten und damit wie das Temperaturfeld darzustellen als

$$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Re}, \text{Gr}, \text{Pr}) \quad (4.74)$$

Damit ist gezeigt, dass sich die übertragene Wärmemenge für geometrisch ähnliche Probleme und ähnliche Randbedingungen formal durch vier dimensionslose Kennzahlen darstellen lässt.

Diese Aussage ist auch für turbulente Strömungen gültig, solange sich der Turbulenzgrad der Strömung nicht zu sehr unterscheidet.

Häufig vereinfacht sich bei praktischen Aufgaben der Zusammenhang, Gl. (4.74), noch weiter.

Bei *erzwungener Konvektion* sind die Trägheits- und Reibungskräfte größer als die durch Temperaturveränderungen hervorgerufenen Auftriebskräfte. Bei Vernachlässigung des Auftriebsterms in der Bewegungsgleichung gilt dann

$$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr}) \quad (4.75)$$

Bei der *natürlichen Konvektion* wird das Geschwindigkeitsfeld durch Temperaturdifferenzen verursacht; eine von außen aufgeprägte Geschwindigkeit u_∞ existiert nicht. Die Trägheitskräfte dürfen hier vernachlässigt werden, so dass sich folgender Zusammenhang ergibt

$$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Gr}, \text{Pr}) \quad (4.76)$$

Über die Form der funktionalen Beziehungen zwischen der Kennzahl Nu und den Kennzahlen Re, Gr, Pr kann die Ähnlichkeitstheorie keine Aussagen machen. Dieser Zusammenhang kann entweder aus den analytischen Lösungen, wenn diese mit Hilfe der dimensionslosen Kennzahlen darstellt wird, oder aus Experimenten abgeleitet werden. Häufig wird versucht die experimentellen Ergebnisse als Potenzgesetze, d.h. in der Form

$$\text{Nu} = C \text{Re}^m \text{Pr}^n \text{Gr}^p$$

anzunähern.

Wichtige Beispiele solcher Potenzgesetze sind im folgenden Kapitel zusammengestellt.

Kapitel 5

Wärmeübergangsgesetze

Der von einer Wand mit der Fläche A und der Temperatur T_W an ein Fluid mit der Temperatur T_f abgegebene Wärmestrom errechnet sich aus

$$\dot{Q}_W = A\alpha (T_W - T_f) \quad (5.1)$$

Zur Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten α sind im folgenden für einige wichtige Anwendungsfälle Nusselt-Kennzahl-Funktionen zusammengestellt.

Diese Kennzahl-Funktionen haben die allgemeine Form

$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr})$ für erzwungene Konvektion

$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Gr}, \text{Pr})$ für natürliche Konvektion

mit den Definitionen Nusselt-Zahl

$$\text{Nu} \equiv \frac{\alpha L}{\lambda} \quad (5.2)$$

Reynolds-Zahl

$$\text{Re} \equiv \frac{\rho u_\infty L}{\eta} \quad (5.3)$$

Grashof-Zahl

$$\text{Gr} \equiv \frac{\rho^2 g \beta (T_W - T_f) L^3}{\eta^2} \quad (5.4)$$

Prandtl-Zahl

$$\text{Pr} \equiv \frac{\eta c_p}{\lambda} \quad (5.5)$$

Die Anwendbarkeit der angegebenen Kennzahl-Funktionen auf das zu lösende Problem muss in jedem Einzelfall anhand nachfolgender Kriterien überprüft werden.

Die *Geometrie*, die der gestellten Aufgabe zugrunde liegt, muss im Sinne der Ähnlichkeitstheorie mit der Geometrie des Experiments übereinstimmen, aus dem das Wärmeübergangsgesetz ermittelt wurde.

Die *Strömungsform* muss anhand der kritischen Reynolds- oder Grashof-Zahl, die den Bereich des Umschlags laminar/turbulent beschreibt, überprüft werden. Ein für eine laminare Strömung gültiges Gesetz ist nicht auf einen Anwendungsfall mit einer turbulenten Strömungsform anwendbar.

Die *thermischen Randbedingungen* des Anwendungsfalls sind kritisch mit denen des Wärmeübergangsgesetzes zu vergleichen. Gesetze, die zum Beispiel für eine Rohrströmung mit konstanter Wandtemperatur ermittelt wurden, sind nur mit Einschränkungen bei Fällen mit konstanter Wärmestromdichte an der Rohrwand einzusetzen. Bei Anwendungsfällen, in denen große Temperaturänderungen im System auftreten, muss darauf geachtet werden, dass die Bezugstemperatur, bei der die Stoffwerte in den Kennzahlen ermittelt werden, entsprechend der Vorschrift bei der Aufstellung des Gesetzes bestimmt wird. In den meisten Wärmeübergangsgesetzen sind die Stoffwerte bei einer arithmetisch gemittelten Temperatur zu berechnen. In besonderen Fällen sind die Kennzahl-Beziehungen um zusätzliche Terme, entweder Temperaturverhältnisse oder Zähigkeitsverhältnisse, zur näherungsweisen Berücksichtigung der variablen Stoffwerte erweitert. Ein weiteres Problem ist die im Ansatz für den örtlichen Wärmestrom bei eingeschlossenen Strömungen einzusetzende Fluidtemperatur T_{fl} . Hier wird üblicherweise eine *energetisch gemittelte Fluidtemperatur*

$$T_{\text{fl}} = \frac{\int_{A_Q} \rho u c_p T dA_Q}{\int_{A_Q} \rho u c_p dA_Q} \quad (5.6)$$

zugrundegelegt.

Viele Wärmeübergangsgesetze sind das Ergebnis integraler Messungen an einem System und geben deshalb nur Auskunft über die *mittleren Wärmeübergangskoeffizienten* $\bar{\alpha}$ eines Wärmeübertragers. Entsprechend gilt für den *mittleren Wärmestrom*

$$\dot{Q}_W = \bar{\alpha} A (T_W - T_{\text{fl}})_m = \bar{\alpha} A \Delta T_m \quad (5.7)$$

wobei sowohl die Wandtemperatur als auch die Fluidtemperatur ortsabhängig sein können. In vielen technisch wichtigen Fällen, bei denen der Wärmeübergangskoeffizient nicht von der Temperatur abhängig ist, kann die sogenannte *logarithmische Temperaturdifferenz*

$$(T_W - T_{fl})_m = \Delta T_{ln} \equiv \frac{\Delta T_{\text{Eintritt}} - \Delta T_{\text{Austritt}}}{\ln \left(\frac{\Delta T_{\text{Eintritt}}}{\Delta T_{\text{Austritt}}} \right)}$$

gebildet mit den Temperaturdifferenzen am Ein- und Austritt des Wärmeübertragers, verwendet werden. Auf diese Problematik wird in der Vorlesung „Wärmeübertrager und Dampferzeuger“ ausführlich eingegangen.

Schließlich muss überprüft werden, ob der Kennzahlbereich, in dem das Wärmeübergangsgesetz ermittelt wurde, mit dem des vorliegenden Problems übereinstimmt. Dies gilt vor allem für experimentell gefundene Gesetze, bei denen der funktionale Zusammenhang immer nur näherungsweise beschrieben wird.

Im Folgenden ist eine Auswahl wichtiger Wärmeübergangsgesetze für erzwungene und für natürliche Konvektion zusammengestellt. Eine sehr viel ausführlichere Zusammenstellung von Wärmeübergangsgesetzen ist zum Beispiel im VDI-Wärmeatlas, 1997 zu finden.

5.1 Wärmeübergangsgesetze für erzwungene Konvektion

5.1.1 Erzwungene Konvektion umströmter Körper

Die in den Kennzahlen auftretenden Stoffeigenschaften sind, wenn nicht anders erwähnt, bei

$$T_{\text{St}} = \frac{T_{\text{W}} + T_{\infty}}{2}$$

zu ermitteln.

5.1.1.1 Ebene Platte - laminare Grenzschichtströmung $\text{Re}_{x,\text{krit}} \approx 2 \cdot 10^5$

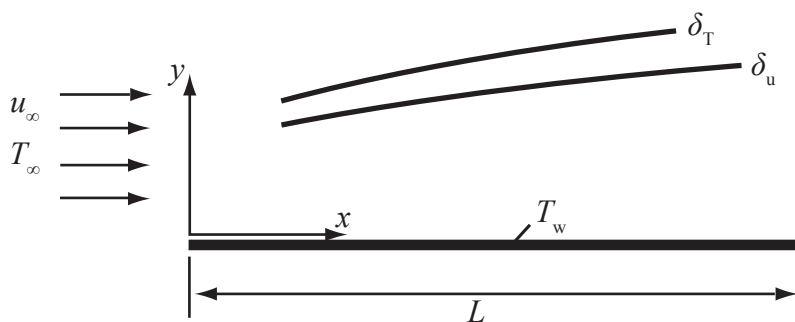


Abbildung 5.1: Laminare Plattengrenzschicht mit isothermer Oberfläche

(Bemerkung: Die für laminare Grenzschichten angegebenen Wärmeübergangsgesetze ergeben sich als „exakte“ theoretische Lösungen der Erhaltungsgleichungen)

Isotherme Oberfläche, gleichzeitiger hydrodynamischer und thermischer Anlauf

- Nusselt-Gesetz für den örtlichen Wärmeübergang:

$$\text{Nu}_x = 0,332 \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (\text{WÜK.1})$$

für $0,6 < \text{Pr} < 10$

und $\text{Re}_x < \text{Re}_{x,\text{krit}} \approx 2 \cdot 10^5$

- Nusselt-Gesetz für den gemittelten Wärmeübergang:

$$\overline{\text{Nu}}_L = \frac{\overline{\alpha}L}{\lambda} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx = 2 \text{Nu}_{x=L}$$

$$\overline{\text{Nu}}_L = 0,664 \text{Re}_L^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (\text{WÜK.2})$$

für $0,6 < \text{Pr} < 10$

und $\text{Re}_L < \text{Re}_{L,\text{krit}} \approx 2 \cdot 10^5$

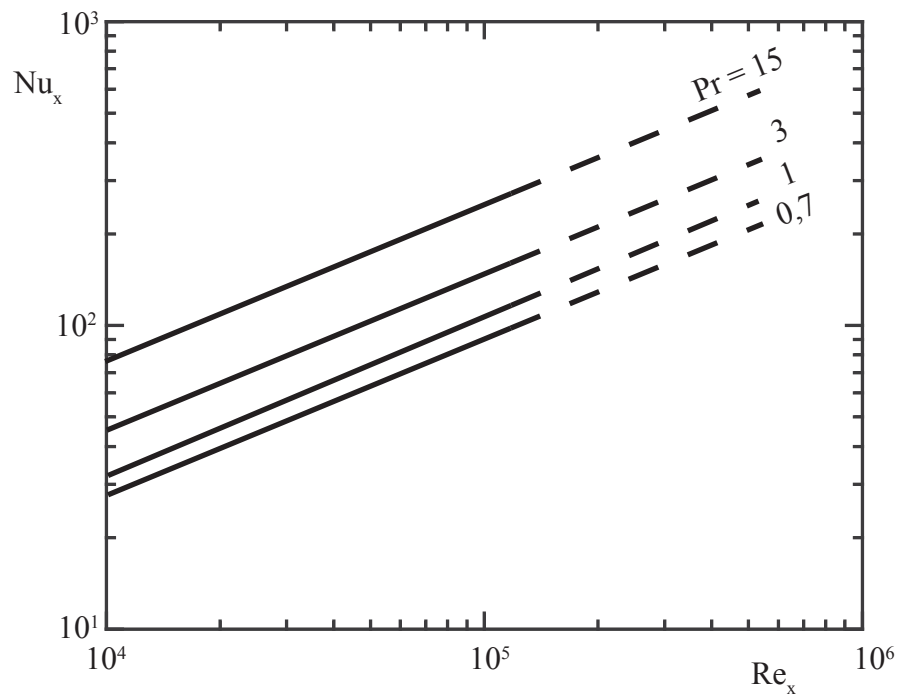


Abbildung 5.2: Örtliche Nusselt-Zahl für die laminare Plattengrenzschicht

Isotherme Oberfläche, hydrodynamischer Einlauf bis $x = x_0$
(Beheizung oder Kühlung ab Stelle $x = x_0$)

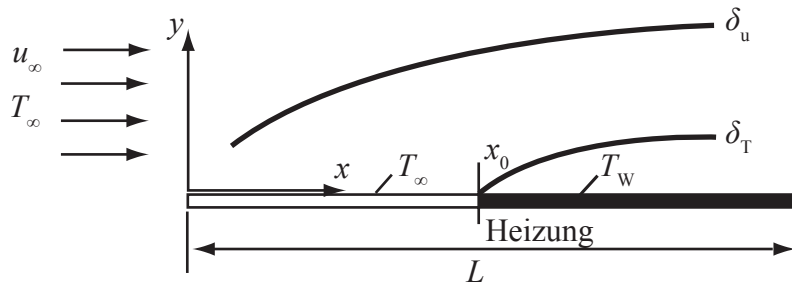


Abbildung 5.3: Laminare Plattengrenzschicht, Beheizung ab $x = x_0$ mit isothermer Oberfläche

- Nusselt-Gesetz für den örtlichen Wärmeübergang:

$$\text{Nu}_x = 0,332 \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\frac{3}{4}} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{WÜK.3})$$

für $0,6 < \text{Pr} < 10$

und $\text{Re}_x < \text{Re}_{x,\text{krit}} \approx 2 \cdot 10^5$

- Nusselt-Gesetz für den mittleren Wärmeübergang:

$$\text{Nu}_L = \frac{L}{L - x_0} \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^L \alpha(x) dx$$

$$\text{Nu}_L = 0,664 \text{Re}_L^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \frac{\left[1 - \left(\frac{x_0}{L} \right)^{\frac{3}{4}} \right]^{\frac{2}{3}}}{\left[1 - \frac{x_0}{L} \right]} \quad (\text{WÜK.4})$$

für $0,6 < \text{Pr} < 10$

und $\text{Re}_x < \text{Re}_{x,\text{krit}} \approx 2 \cdot 10^5$

5.1.1.2 Ebene Platte - turbulente Grenzschichtströmung $Re_{x,krit} \approx 2 \cdot 10^5$

(Bemerkungen: Der Umschlag von der laminaren in die turbulente Strömungsform hängt vom Turbulenzgrad der ungestörten Strömung, von der Oberflächenrauigkeit, usw. ab, siehe unten. Bei Strömungen über ebenen Flächen ist die kritische Reynolds-Zahl, das heißt der Beginn des Umschlaggebietes, bei 1 bis $2 \cdot 10^5$ zu erwarten. In extrem turbulenzarmen Windkanälen können kritische Reynolds-Zahlen von $Re_{x,krit} \approx 1 \cdot 10^6$ erreicht werden.) Die angegebenen Beziehungen sind aus Ex-

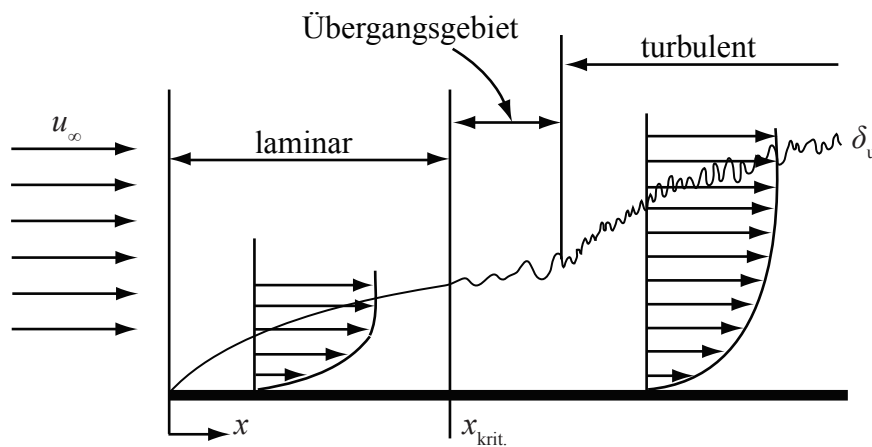


Abbildung 5.4: Laminar / Turbulente Plattengrenzschicht

perimenten abgeleitet worden.

Isotherme Oberfläche, gleichzeitiger hydrodynamischer und thermischer Anlauf

- Nusselt-Gesetz für den örtlichen Wärmeübergang:

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{0,8} Pr^{0,43} \quad \text{für } 5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7 \quad (\text{WÜK.5})$$

- Nusselt-Gesetz für den mittleren Wärmeübergang:

(Bemerkung: Der mittlere Wärmeübergang einer Platte der Länge L errechnet sich aus der Integration der Gln. (WÜK.1) und (WÜK.5))

$$\overline{Nu_L} = \frac{\overline{\alpha} L}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\int_0^{x_{krit}} \alpha(x)_{\text{Gl. (WÜK.1)}} dx + \int_{x_{krit}}^L \alpha(x)_{\text{Gl. (WÜK.5)}} dx \right) \quad (5.8)$$

Das Ergebnis hängt damit von der zugrunde gelegten kritischen Reynolds-Zahl ab.

Nusselt-Gesetz für den mittleren Wärmeübergang:

$$\overline{Nu}_L \approx 0,036 Pr^{0,43} (Re_L^{0,8} - 9400) \quad (WÜK.6)$$

$$\text{für } Re_{L,krit} \approx 2 \cdot 10^5$$

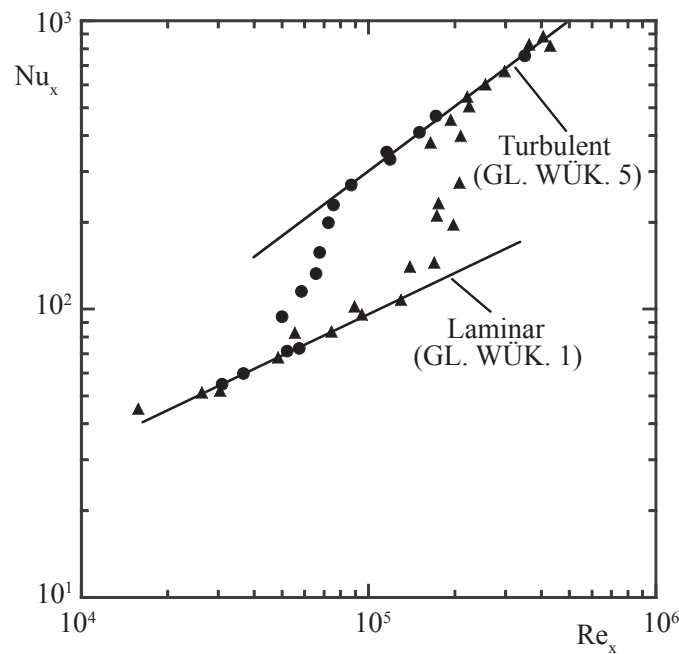


Abbildung 5.5: Örtliche Nusselt-Zahl für eine von Luft überströmte ebene Platte, Turbulenzgrad $T_u = 0,7$ bis $1,6\%$; Turbulenzgrad $T_u = 2,4$ bis $3,8\%$ nach Kestin u. a. (1961)

5.1.1.3 Längs angeströmter Zylinder

Solange der Körperdurchmesser deutlich größer als die Grenzschichtdicke ist, kann ein längsangeströmter Zylinder wie eine ebene Oberfläche behandelt werden.

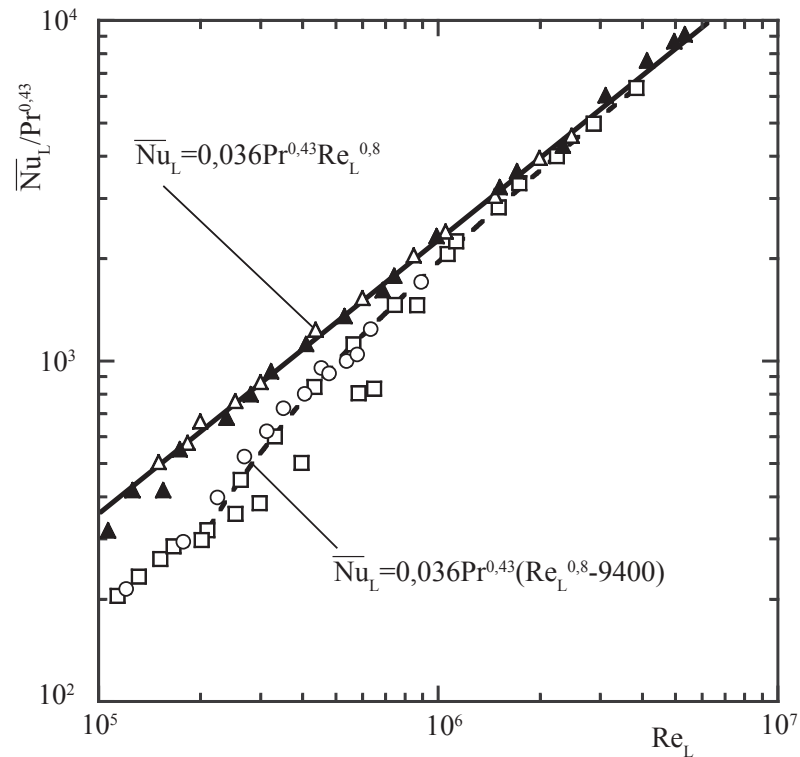


Abbildung 5.6: Mittlere Nusselt-Zahl für die turbulente Plattengrenzschicht
 (∇ Luft (Heizung) mit kleinem Turbulenzgrad, Δ Luft (Heizung) mit
 Turbulenzgrad 5%, Luft, Wasser, Öl (Heizung und Kühlung) mit
 unbekanntem Turbulenzgrad nach Whitaker (1976))

5.1.1.4 Quer angeströmter Zylinder

- örtlicher Wärmeübergang

Die in Abb. 5.7 wiedergegebene örtliche Nusselt-Zahl zeigt eine starke Abhängigkeit vom Umfangswinkel, bedingt durch den Umschlag laminar/turbulent und die Strömungsablösung.

- mittlerer Wärmeübergang:

$$\overline{Nu_d} = C Re_d^m Pr^{0,4} \quad (\text{WÜK.7})$$

mit den in Tabelle 5.1 dem betrachteten Reynolds-Zahl-Bereich zugeordneten Konstanten C und m .

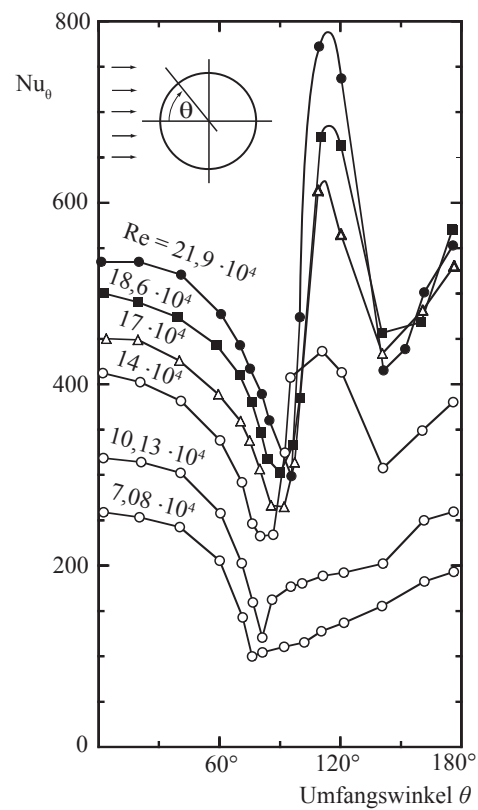


Abbildung 5.7: Örtliche Nusselt-Zahl am quer angeströmten Kreiszylinder nach Holman (1976)

Tabelle 5.1: Konstanten C und m der Gl. (WÜK.7)

Re_d	C	m
0,4 - 4	0,989	0,330
4 - 40	0,911	0,385
40 - 4000	0,683	0,466
4000 - 40000	0,193	0,618
40000 - 400000	0,0266	0,805

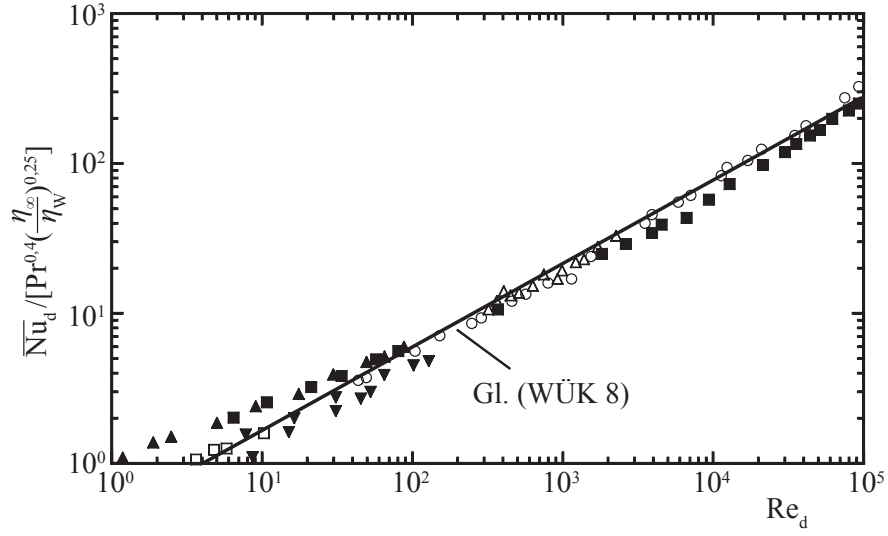


Abbildung 5.8: Mittlere Nusselt-Zahl für den querangeströmten Kreiszylinder nach Whitaker (1976)

Für den Gesamtbereich der Reynolds-Zahlen gilt die einfachere Näherungsgleichung nach Whitaker (1976).

$$\overline{\text{Nu}}_d = \left[0,40 \text{Re}_d^{\frac{1}{2}} + 0,06 \text{Re}_d^{\frac{2}{3}} \right] \text{Pr}^{0,4} \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_w} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{WÜK.8})$$

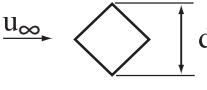
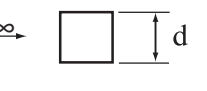
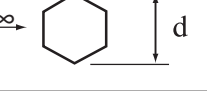
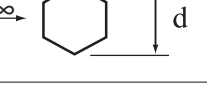
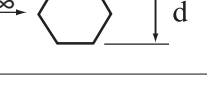
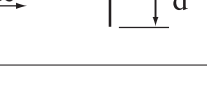
(Bemerkung: Für Gl. (WÜK.8) sind die Stoffeigenschaften in den Kennzahlen bei der Freistromtemperatur zu ermitteln. Der letzte Faktor, das Verhältnis aus der Zähigkeit bei der Freistromtemperatur und der Zähigkeit bei der Wandtemperatur, erfasst näherungsweise die Temperaturabhängigkeit der Stoffeigenschaften).

- mittlerer Wärmeübergang bei nicht kreisförmigen Zylindern

$$\overline{\text{Nu}}_d = C \text{Re}_d^m \text{Pr}^{0,4} \quad (\text{WÜK.9})$$

Konstanten der Gl. (WÜK.9) nach Jakob (1949):

Tabelle 5.2: Konstanten C und m der Gl. (WÜK.9)

Geometrie	Re_d	C	m
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,246	0,588
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,102	0,675
	$5 \cdot 10^3 - 1,94 \cdot 10^4$	0,160	0,638
	$1,95 \cdot 10^4 - 10^5$	0,0385	0,782
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,153	0,638
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,228	0,731

5.1.1.5 Quer angeströmtes Glattrohrbündel

Die Fluidtemperatur im Rohrbündel ändert sich von Rohrreihe zu Rohrreihe. Daher muss eine repräsentative mittlere Temperaturdifferenz bei der Berechnung des übertragenen Wärmestroms

$$\dot{Q}_W = \bar{\alpha} A (T_W - T_{fl})_m = \bar{\alpha} A \Delta T_m \quad (5.9)$$

eingesetzt werden. In vielen Anwendungsfällen ist die logarithmische Temperaturdifferenz

$$\Delta T_m = \Delta T_{ln} \equiv \frac{\Delta T_{\text{Eintritt}} - \Delta T_{\text{Austritt}}}{\ln \frac{\Delta T_{\text{Eintritt}}}{\Delta T_{\text{Austritt}}}}$$

eine gute Näherung. Im üblichen industriellen Einsatzbereich von Glattrohrbündeln

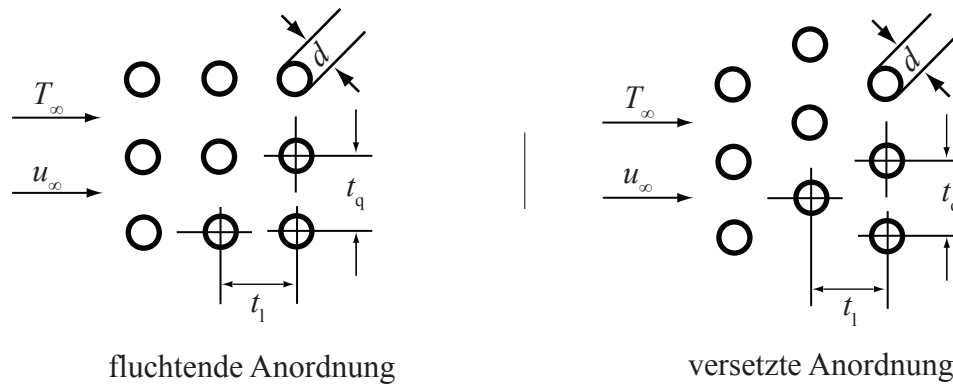


Abbildung 5.9: Rohranordnungen bei quer angeströmten Rohrbündeln

gilt für den Wärmeübergang auf der Außenseite der Rohre nach Witte (1974)

$$\overline{\text{Nu}}_d = 0,287 \text{Re}_d^{0,6} \text{Pr}^{0,36} \cdot f_e \quad (\text{WÜK.10})$$

Die Reynolds-Zahl wird mit der Anströmgeschwindigkeit gebildet. Die Stoffeigenschaften sind bei einem Mittelwert der Fluidtemperatur zwischen Eintritt und Austritt zu bestimmen.

Der Rohranordnungsfaktor f_e hängt von der relativen Längsteilung $\frac{t_l}{d}$, der relativen Querteilung $\frac{t_q}{d}$ der Rohre im Bündel und von der Rohranordnung ab. Er ist den nachfolgenden Diagrammen zu entnehmen.

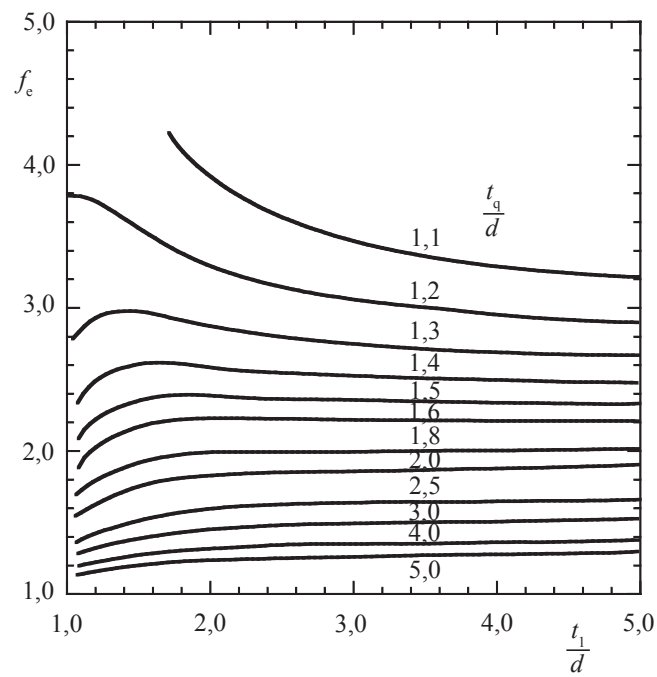


Abbildung 5.10: Anordnungsfaktor, fluchtende Rohranordnung nach Witte (1974)

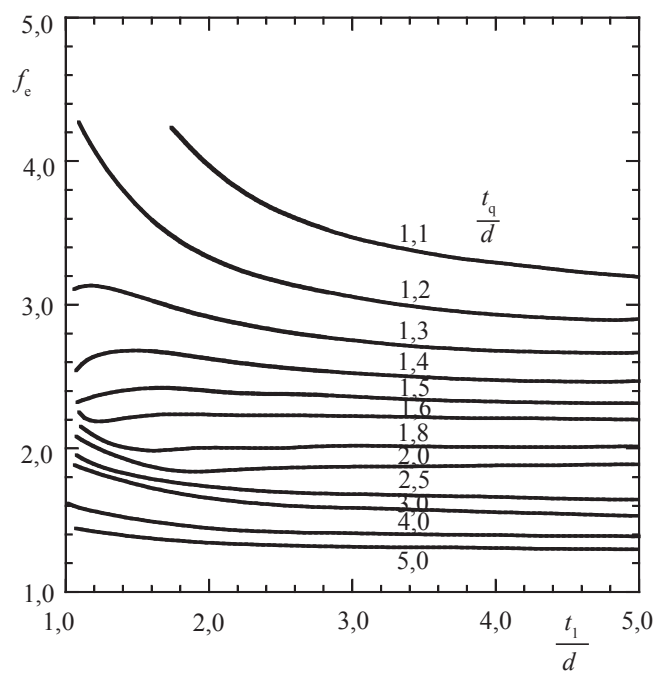


Abbildung 5.11: Anordnungsfaktor, versetzte Rohranordnung nach Witte (1974)

5.1.1.6 Umströmte Kugel

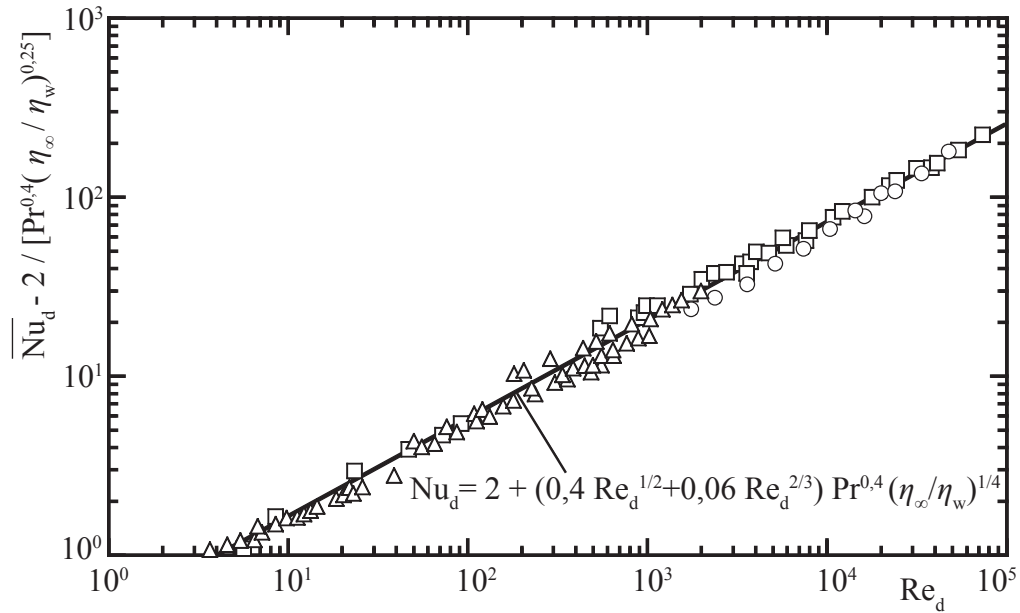


Abbildung 5.12: Mittlere Nusselt-Zahl für die umströmte Kugel (\mp Wasser, Δ Luft, \square Wasser, Öl, \circ Luft nach Whitaker (1976))

Entsprechend dem Beispiel des quer angeströmten Kreiszylinders lassen sich nach Whitaker (1976) die experimentellen Ergebnisse für den gemittelten Wärmeübergang (siehe Abb. 5.12) durch eine Gleichung von der Form

$$\overline{Nu_d} = 2 + \left(0,4 Re_d^{\frac{1}{2}} + 0,06 Re_d^{\frac{2}{3}} \right) Pr^{0,4} \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_w} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{WÜK.11})$$

$$\begin{aligned} &\text{für } 0,7 < Pr < 380 \\ &\text{und } 3,5 < Re_d < 8 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

zusammenfassen. Auch hier sind die Stoffeigenschaften in den Kennzahlen bei der Freistromtemperatur zu ermitteln.

5.1.2 Erzwungene Konvektion durchströmter Körper

Bei durchströmten Körpern, wie zum Beispiel Rohren, Kanälen oder Düsen wird der Wärmeübergangskoeffizient wieder durch die Beziehung

$$\dot{Q}_W = \bar{\alpha} A \Delta T_m$$

definiert, wobei ΔT_m eine repräsentative Temperaturdifferenz zwischen der Rohrwandtemperatur T_W und der energetisch gemittelten Fluidtemperatur T_f (siehe Vorbemerkung) darstellt. Bei größeren Änderungen der Fluidtemperaturen entlang des Strömungsweges ist dafür die logarithmische Temperaturdifferenz einzusetzen.

Die in den Kennzahlen auftretenden Stoffeigenschaften sind, wenn nicht anders erwähnt, bei über der Rohrlänge gemittelten Fluidtemperaturen

$$T_{St} = \frac{T_{f,Austritt} + T_{f, Eintritt}}{2}$$

zu ermitteln.

Die Reynolds-Zahl Re_d wird mit der mittleren Fluidgeschwindigkeit und dem Durchmesser definiert.

Die für turbulent durchströmte Rohre angegebenen Beziehungen sind auch für Kanäle mit nicht kreisförmigem Querschnitt gültig, wenn der Durchmesser durch den sogenannten hydraulischen Durchmesser d_h ersetzt wird

$$d_h = 4 \frac{\text{Durchströmter Querschnitt}}{\text{Benetzter Umfang}} = 4 \frac{A_Q}{U}$$

5.1.2.1 Laminare Rohrströmung, $Re_{d,krit} \approx 2300$

Isotherme Oberfläche, hydrodynamisch ausgebildete Strömung bei Beginn des beheizten (gekühlten) Rohrabschnitts Für dieses Problem existieren für den örtlichen und den mittleren Wärmeübergang theoretische Lösungen in Form von Reihenentwicklungen, die im untenstehenden Diagramm wiedergegeben sind. Das Bild zeigt, dass nach Erreichen einer thermischen Einlaufänge von

$$\frac{L_{th}}{d} \approx 0,05 Re_d Pr$$

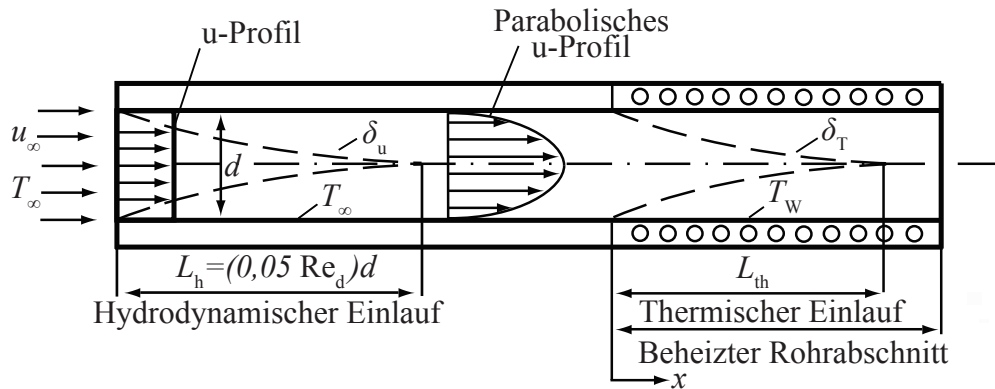


Abbildung 5.13: Beheiztes Rohr mit hydrodynamisch ausgebildeter Strömung

die Nusselt-Zahl einen Endwert von $Nu_{d,\infty} = 3,66 \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14}$ erreicht.

Die Ergebnisse für die mittlere Nusselt-Zahl \overline{Nu}_d können näherungsweise dargestellt werden durch

$$\overline{Nu}_d = \left(3,66 + \frac{0,19 \left(Re_d Pr \frac{d}{L} \right)^{0,8}}{1 + 0,117 \left(Re_d Pr \frac{d}{L} \right)^{0,467}} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad (\text{WÜK.12})$$

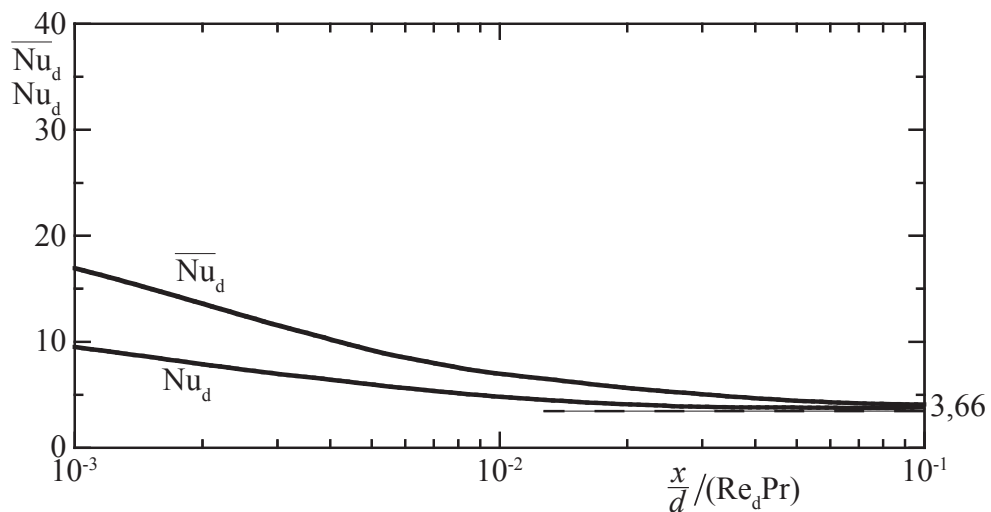


Abbildung 5.14: Örtliche und mittlere Nusselt-Zahl für die laminare hydrodynamisch ausgebildete Rohrströmung nach Rohsenow u. Harnett (1973)

Wird anstelle der Wandtemperatur die Wärmestromdichte an der Wand konstant gehalten, so ergeben sich um etwa 20% höhere Wärmeübergangskoeffizienten. Der Endwert für lange Rohre beträgt für diesen Fall $Nu_{d,\infty} = 4,36 \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14}$.

Isotherme Oberfläche, gleichzeitiger hydrodynamischer und thermischer Anlauf

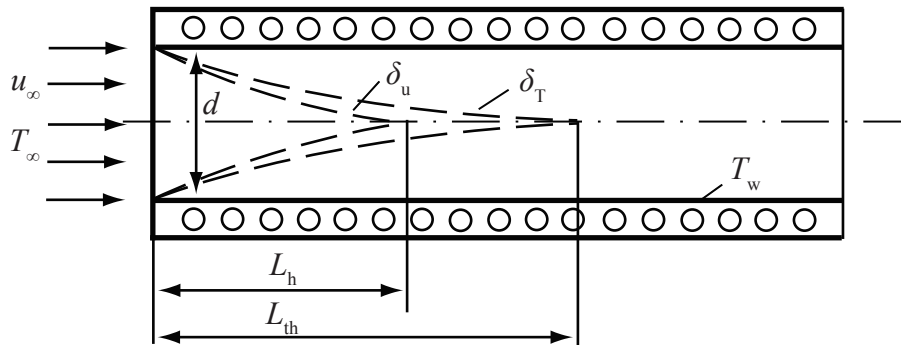


Abbildung 5.15: Beheiztes Rohr mit gleichzeitigem hydrodynamischen und thermischen Anlauf

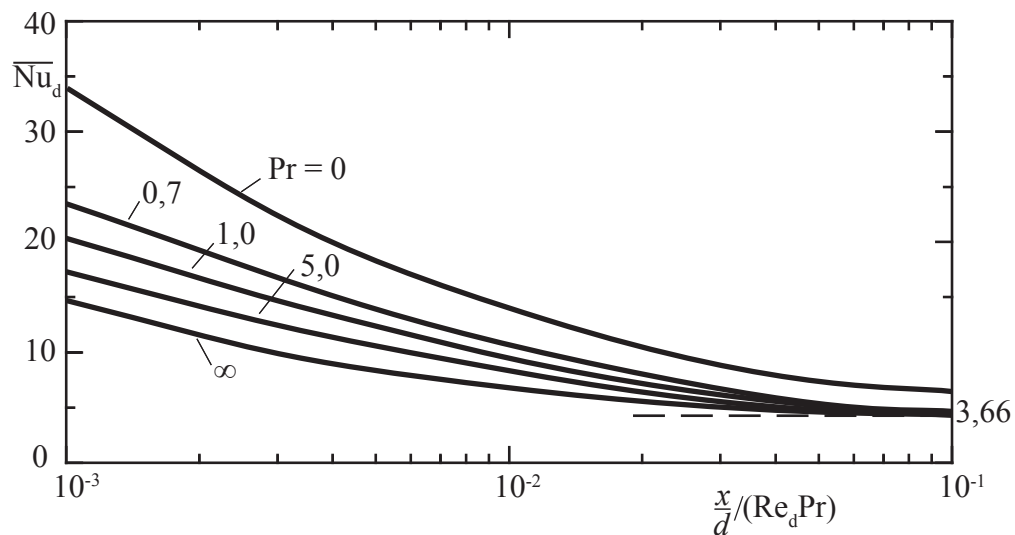


Abbildung 5.16: Mittlere Nusselt-Zahl für die laminare Rohrströmung bei gleichzeitigem hydrodynamischen und thermischen Anlauf

Auch dieses Problem ist theoretisch lösbar. Das Ergebnis ist zusätzlich von der Prandtl-Zahl des Fluids abhängig. Die mittleren Nusselt-Zahlen sind im Bild (5.16) wiedergegeben.

Die Lösung lässt sich näherungsweise durch die Beziehung

$$\overline{Nu_d} = \left(3,66 + \frac{0,0677 \left(Re_d Pr \frac{d}{L} \right)^{1,33}}{1 + 0,1 Pr \left(Re_d \frac{d}{L} \right)^{0,83}} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad (\text{WÜK.13})$$

beschreiben.

5.1.2.2 Turbulente Rohrströmung, $Re_{d,krit} \approx 2300$

Isotherme Wandtemperatur, gleichzeitiger hydrodynamischer und thermischer Anlauf

Aus der Auswertung zahlreicher Experimente zum Wärmeübergang von einem vom Rohranfang an beheizten Rohr an eine turbulente Rohrrinnenströmung ergibt sich, nach VDI Wärmeatlas, 1997 die empirische Beziehung für die mittlere Nusselt-Zahl

$$\overline{Nu_d} = 0,0235 \left(Re_d^{0,8} - 230 \right) \left(1,8 Pr^{0,3} - 0,8 \right) \left(1 + \left(\frac{d}{L} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad (\text{WÜK.14})$$

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad 0,6 < Pr < 500 \quad \frac{L}{d} > 1 \\ &\text{und} \quad Re_d > 2300 \end{aligned}$$

die durch den Term $\left(1 + \left(\frac{d}{L} \right)^{\frac{2}{3}} \right)$ näherungsweise auch einen Teilbereich des thermischen Anlaufs erfasst. Der thermische Anlauf ist bei turbulenten Strömungen je nach Reynolds-Zahl nach 10 bis 40 Rohrdurchmessern abgeschlossen.

Wärmeübergangskoeffizienten, die unter der Bedingung konstanter Wärmestromdichte gemessen wurden, unterscheiden sich um weniger als 5% vom Fall konstanter Wandtemperatur. Eine Ausnahme bilden Flüssigmetallströmungen mit sehr kleinen Prandtl-Zahlen.

In vielen Fällen genügt anstelle der Gl. (WÜK.14) die einfachere Beziehung:

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{d}} = 0,027 \text{ Re}_{\text{d}}^{0,8} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\eta}{\eta_{\text{W}}} \right)^{0,14} \quad (\text{WÜK.15})$$

$$\text{und } 3000 < \text{Re}_{\text{d}} < 10^5 \quad \frac{L}{d} > 40$$

5.2 Wärmeübergangsgesetze für natürliche Konvektion

5.2.1 Natürliche Konvektion umströmter Körper

5.2.1.1 Senkrechte Platte - laminare Grenzschichtströmung, $Gr_{x,krit} Pr \approx 4 \cdot 10^9$

(Bemerkung: Alle Stoffwerte sind, wenn nicht anders erwähnt, bei einer mittleren Grenzschichttemperatur zu ermitteln, mit Ausnahme des isobaren Ausdehnungskoeffizienten β , der für ideale Gase nach $\beta = \frac{1}{T_\infty}$ berechnet wird.

Isotherme Oberfläche

- örtlicher Wärmeübergang

Wie im Abschnitt 4.3 erwähnt, kann aus einer Näherungslösung der Erhaltungsgleichungen eine theoretische Beziehung für die Nusselt-Zahl gefunden werden.

$$Nu_x = 0,508 \left(\frac{Pr}{0,952 + Pr} \right)^{\frac{1}{4}} (Gr_x Pr)^{\frac{1}{4}} \quad (WÜK.16)$$

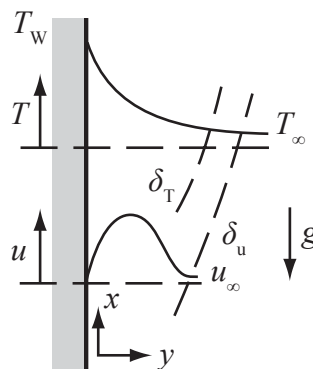


Abbildung 5.17: Beheizte Platte, natürliche Konvektion

- mittlerer Wärmeübergang ($Gr_{L,krit} Pr \approx 4 \cdot 10^9$)

$$\overline{Nu}_L = \frac{\overline{\alpha} L}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^L \alpha(x) dx \quad (5.10)$$

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{L}} = C (\text{Gr}_{\text{L}} \text{Pr})^{\frac{1}{4}} \quad (\text{WÜK.17})$$

für $\text{GrPr} < \text{Gr}_{\text{L,krit}} \text{Pr}$

mit folgenden Prandtl-Zahl abhängigen Konstanten C

Tabelle 5.3: Konstante C der Gl. (WÜK.17)

Pr	0,003	0,01	0,03	0,72	1	2	10	100	1000	∞
C	0,182	0,242	0,305	0,516	0,535	0,568	0,620	0,653	0,665	0,670

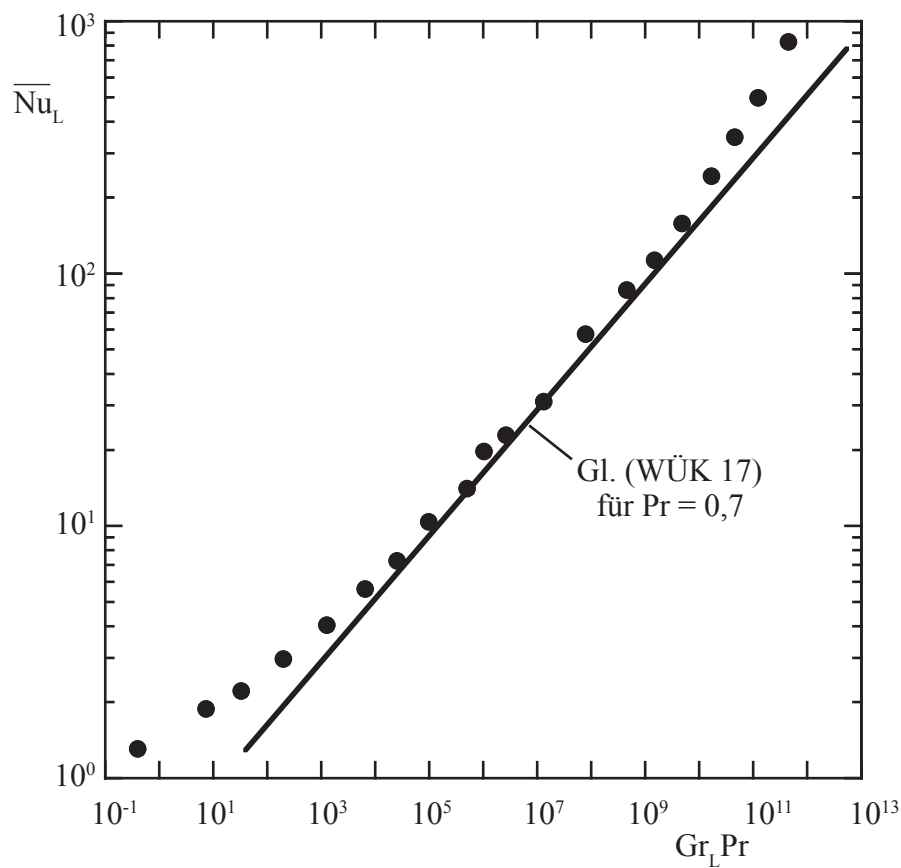


Abbildung 5.18: Mittlere Nusselt-Zahl bei natürlicher Konvektion an der senkrechten Platte, •Luft nach Whitaker (1976)

(Bemerkung: Diese, schon im Kapitel 4 angegebene, exakte Lösung der Erhaltungsgleichungen weicht geringfügig von dem Ergebnis ab, das sich durch Integrieren der Gl. (WÜK.16) ergibt.)

Konstanter Wärmestrom

(Bemerkung: Da als Randbedingungen der Wärmestrom vorgegeben ist, wird wegen der einfacheren Handhabung eine modifizierte Grashof-Zahl Gr_x^* definiert $\text{Gr}_x^* \equiv \text{Gr}_x \text{Nu}_x = \frac{\rho^2 g \beta q_W'' x^4}{\lambda \eta^2}$ eingeführt.)

- örtlicher Wärmeübergang

Aus Experimenten ergibt sich für den örtlichen Wärmeübergang nach Holman (1976)

$$\text{Nu}_x = 0,60 (\text{Gr}_x^* \text{Pr})^{\frac{1}{5}} \quad (\text{WÜK.18})$$

$$\text{für } 10^5 < \text{Gr}_x^* < 10^{11}$$

5.2.1.2 Senkrechte Platte - turbulente Grenzschichtströmung,

$$Gr_{x,krit} Pr \approx 4 \cdot 10^9$$

Isotherme Oberfläche

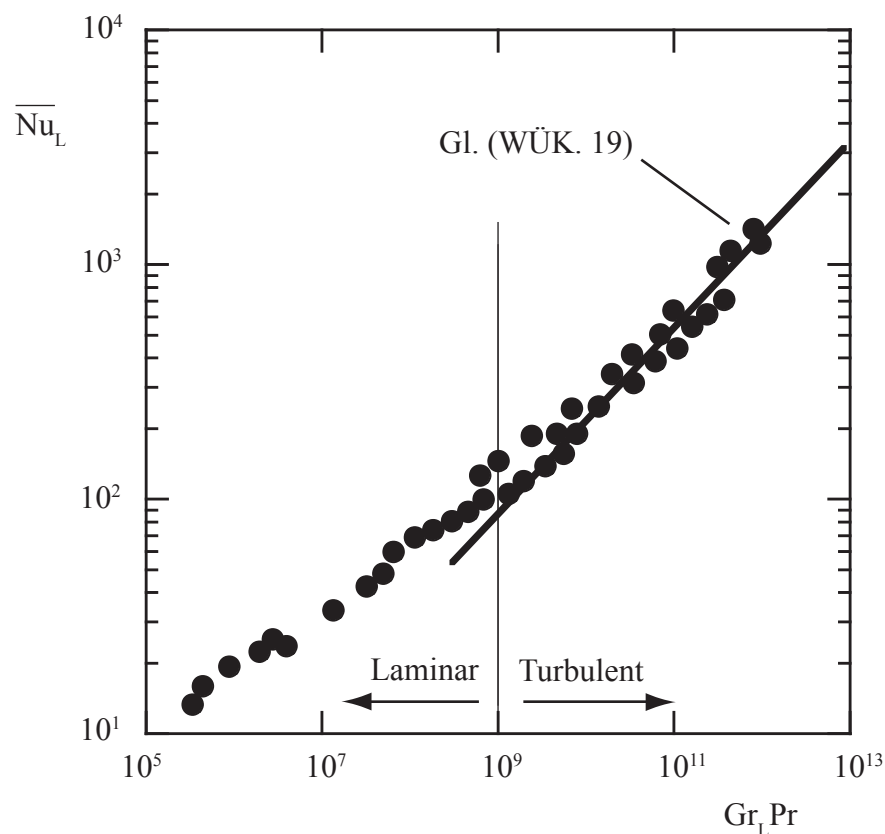


Abbildung 5.19: Mittlere Nusselt-Zahl bei turbulenter, natürlicher Konvektion an der senkrechten Platte, • Luft nach Whitaker (1976)

- mittlerer Wärmeübergang

$$\overline{Nu_L} = 0,13 (Gr_L Pr)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{WÜK.19})$$

$$\text{für } 10^9 < (Gr_L Pr) < 10^{12}$$

(Bemerkung: Bei turbulenter Grenzschichtströmung wird durch den Exponent $\frac{1}{3}$ der Grashof-Zahl der Wärmeübergangskoeffizient unabhängig von der Plattenhöhe)

5.2.1.3 Senkrechter Zylinder - laminare und turbulente Grenzschichtströmungen

Solange der Durchmesser des Zylinders deutlich größer ist als die sich entwickelnde Grenzschichtdicke, gelten die für die senkrechte Platte angegebenen Beziehungen. Als Kriterium gilt näherungsweise $\frac{d}{L} > 35 \cdot \text{Gr}_L^{-\frac{1}{4}}$. Die das Strömungsbild charakterisierende geometrische Abmessung ist die Zylinderlänge.

5.2.1.4 Horizontaler Zylinder - laminare und turbulente Strömungen, isotherme Oberfläche

(Bemerkung: Als kennzeichnende Länge L ist hier der Zylinderdurchmesser d zu wählen).

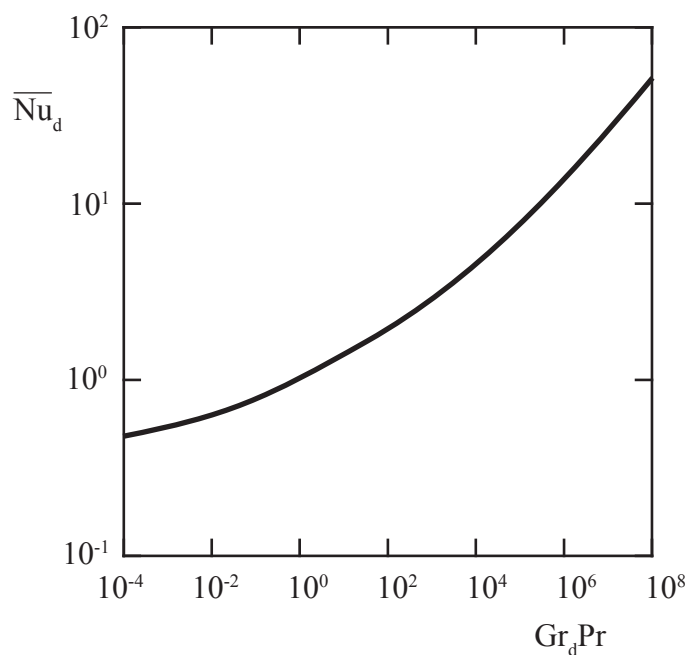


Abbildung 5.20: Mittlere Nusselt-Zahl bei freier Konvektion am horizontalen Zylinder nach McAdams (1954)

Mit den Näherungsbeziehungen nach Bayley u. a. (1972)

- für den **laminaren** Bereich $10^4 < Gr_d Pr < 10^9$

$$\overline{Nu_d} = 0,53 (Gr_d Pr)^{\frac{1}{4}} \quad (WÜK.20)$$

- für den **turbulenten** Bereich $10^9 < Gr_d Pr < 10^{12}$

$$\overline{Nu_d} = 0,13 (Gr_d Pr)^{\frac{1}{3}} \quad (WÜK.21)$$

5.2.1.5 Horizontale Platten - laminare und turbulente Strömungen nach Holman (1976)

(Bemerkung: Die angegebenen Beziehungen sind aus Messungen an quadratischen Platten abgeleitet worden. Sie gelten näherungsweise auch für rechteckige und kreisförmige Flächen, wenn eine mittlere Seitenlänge bzw. $(0,9d)$ als kennzeichnende Länge eingesetzt wird).

Isotherme Oberfläche, Plattenoberseite geheizt oder Plattenunterseite gekühlt

- **laminarer** Bereich $2 \cdot 10^4 < Gr_L Pr < 8 \cdot 10^6$

$$\overline{Nu_L} = 0,54 (Gr_L Pr)^{\frac{1}{4}} \quad (WÜK.22a)$$

- **turbulenter** Bereich $8 \cdot 10^6 < Gr_L Pr < 10^{11}$

$$\overline{Nu_L} = 0,15 (Gr_L Pr)^{\frac{1}{3}} \quad (WÜK.23a)$$

Isotherme Oberfläche, Plattenoberseite gekühlt oder Plattenunterseite geheizt

- **laminarer** Bereich $10^5 < Gr_L Pr < 10^{11}$

$$\overline{Nu_L} = 0,27 (Gr_L Pr)^{\frac{1}{4}} \quad (WÜK.24a)$$

Konstanter Wärmestrom, Plattenoberseite geheizt oder Plattenunterseite gekühlt

- **laminarer** Bereich $\text{Gr}_L \text{Pr} < 2 \cdot 10^8$

$$\overline{\text{Nu}}_L = 0,13 (\text{Gr}_L \text{Pr})^{\frac{1}{3}} \quad (\text{WÜK.22b})$$

- **turbulenter** Bereich $2 \cdot 10^8 < \text{Gr}_L \text{Pr} < 10^{11}$

$$\overline{\text{Nu}}_L = 0,16 (\text{Gr}_L \text{Pr})^{\frac{1}{3}} \quad (\text{WÜK.23b})$$

Konstanter Wärmestrom, Plattenoberseite gekühlt oder Plattenunterseite geheizt

- **laminarer** Bereich $10^6 < \text{Gr}_L \text{Pr} < 10^{11}$

$$\overline{\text{Nu}}_L = 0,58 (\text{Gr}_L \text{Pr})^{\frac{1}{5}} \quad (\text{WÜK.24b})$$

5.2.2 Natürliche Konvektion in geschlossenen Räumen

(Bemerkung: Als kennzeichnende Länge L wird der Abstand s zwischen der beheizten und der gekühlten Oberfläche, als treibende Temperaturen werden die Heiz- und Kühlwandtemperaturen eingesetzt).

5.2.2.1 Fluidschichten zwischen isothermen, senkrechten Wänden mit einem Höhen/Abstands-Verhältnis $3,1 < \frac{H}{s} < 42,2$ nach Bayley u. a. (1972)

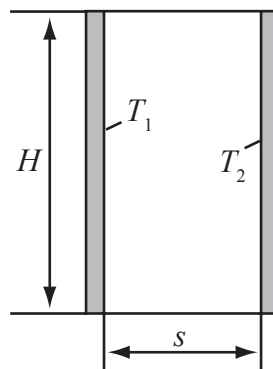


Abbildung 5.21: Vertikale, eingeschlossene Fluidschichten

Für $Gr_s < 2 \cdot 10^3$ (**reine Wärmeleitung**) $\overline{Nu}_s = 1$

Für den **laminaren** Bereich $2 \cdot 10^3 < Gr_s < 2 \cdot 10^4$

$$\overline{Nu}_s = 0,20 \left(\frac{H}{s} \right)^{-\frac{1}{9}} (Gr_s Pr)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{WÜK.25})$$

Für den **turbulenten** Bereich $2 \cdot 10^5 < Gr_s < 10^7$

$$\overline{Nu}_s = 0,071 \left(\frac{H}{s} \right)^{-\frac{1}{9}} (Gr_s Pr)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{WÜK.26})$$

5.2.2.2 Fluidschichten zwischen isothermen, horizontalen Flächen, Beheizung von unten nach Holman (1976)

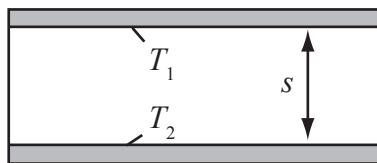


Abbildung 5.22: Horizontale, eingeschlossene Fluidschichten

(Bemerkung: Wird von oben geheizt, bildet sich eine stabile Schichtung aus. Die Wärme wird durch Wärmeleitung übertragen.)

Für $Gr_s < 2 \cdot 10^3$ (**reine Wärmeleitung**) $\overline{Nu}_s = 1$

Für den **laminaren** Bereich $10^4 < Gr_s < 3,2 \cdot 10^5$

$$\overline{Nu}_s = 0,21 (Gr_s Pr)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{WÜK.27})$$

Für den **turbulenten** Bereich $3,2 \cdot 10^5 < Gr_s < 10^7$

$$\overline{Nu}_s = 0,075 (Gr_s Pr)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{WÜK.28})$$

Kapitel 6

Stoffübertragung

Zur Einführung in die Stoffübertragung, soll zunächst der Mechanismus der Selbstdiffusion¹ auf molekularer Ebene betrachtet werden.

6.1 Molekulare Vorstellung von Diffusionsprozessen

6.1.1 Diffusion in Gasen

Angenommen sei ein gasförmiges, verdünntes, binäres Stoffgemisch (Stoffe A, B), in welchem sich die Moleküle sehr ähnlich verhalten. Abbildung 6.1 zeigt ein ein-dimensionales Beispiel, bei dem auf der linken Seite die Anzahl der Moleküle A größer ist als die Anzahl der Moleküle B. Auf der rechten Seite ist das Verhältnis umgekehrt. Die Temperatur und der Druck in dem Gemisch seien konstant und die Schwerpunktgeschwindigkeit, d.h. diejenige Geschwindigkeit, die makroskopisch die Bewegung aller Teilchen beschreibt, ist Null.

Auf molekularer Ebene bewegt sich jedes Molekül mit einer Geschwindigkeit \vec{w} , die in Betrag und Richtung zufällig von Molekül zu Molekül variiert. Diese Geschwindigkeit wird auch thermische Geschwindigkeit genannt. Die durchschnittliche Geschwindigkeit mit der sich die Moleküle A und B bewegen sei \bar{w} . Die durchschnitt-

¹Dieser Prozess wird „Selbstdiffusion“ genannt, da das treibende Potenzial die Konzentrationsdifferenz selbst ist.

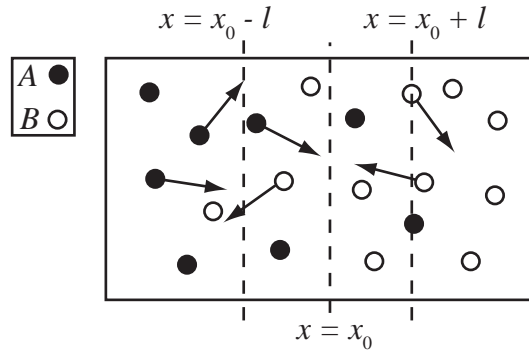


Abbildung 6.1: Molekulare Betrachtung der Diffusion

liche Häufigkeit, mit der Moleküle die Ebene $x = x_0$ passieren ist damit proportional mit $c \cdot \bar{w}$ wobei c die Anzahl der Moleküle pro Volumen ($1/\text{m}^3$) beschreibt. Bevor die Moleküle die x_0 -Ebene passieren, müssen sie eine Distanz nahe einer mittleren freien Weglänge l zurücklegen. Die mittlere freie Weglänge ist die durchschnittliche Weglänge, die ein Teilchen, bzw. Molekül, ohne Wechselwirkung mit anderen Teilchen zurücklegt. Der rechtsseitige Teilchenfluss der Moleküle A über x_0 von ihrer ursprünglichen Position $x_0 - l$ ist proportional zur Anzahl der Moleküle A, gegeben durch c_A/c_{ges} an der Stelle $x_0 - l$. Der linksseitige Teilchenfluss von $x_0 + l$ nach x_0 ist proportional zum Stoffmengenanteil der Moleküle A c_A/c_{ges} an der Stelle $x_0 + l$. Es ist wahrscheinlicher, dass Moleküle von A von links nach rechts durch die Ebene x_0 hindurch treten als umgekehrt, da die Anzahl der Moleküle linksseitig größer ist (unter Annahme der Teilchenverteilung aus Abb. 6.1). Der Erwartungswert der zufälligen Molekülbewegungen bestimmt somit diesen Stofftransport.

Die Masse der Moleküle m_A von A ist durch M_A/N_A mit der Stoffmengenkonzentration C_A verknüpft, wobei N_A die Avogadro-Konstante² und M_A die Molmasse von A beschreibt. Daher gilt für den Massenstrom in x-Richtung

$$j_A''|_{x=x_0} \approx \eta(c_{\text{ges}}\bar{w}) \left(\frac{M_A}{N_A} \right) \left(\left. \frac{c_A}{c_{\text{ges}}} \right|_{x_0-l} - \left. \frac{c_A}{c_{\text{ges}}} \right|_{x_0+l} \right) \quad (6.1)$$

²Avogadro-Konstante $N_A = 6,02214179 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$, Teilchenzahl in einem mol

wobei hier η eine Proportionalitätskonstante beschreibt. Da sich die Konzentration über die zweifache freie Weglänge ($2l$) nicht sehr stark verändert, kann die Differenz durch eine Taylorreihenentwicklung ersten Grades um x_0 approximiert werden.

$$j_A''|_{x=x_0} = \eta(c_{\text{ges}}\bar{w}) \left(\frac{M_A}{N_A} \right) \left(-2l \frac{d(c_A/c_{\text{ges}})}{dx} \Big|_{x_0} \right) = -2\eta(\bar{w}l)\rho \frac{d\xi_A}{dx} \Big|_{x_0} \quad (6.2)$$

mit $\xi_A = m_A/m_{\text{ges}}$ als der Massenkonzentration. Wobei in der Umformung

$$c_A = \frac{m_{\text{ges}}}{V} \cdot \frac{\xi_A N_A}{M_A}$$

unter Berücksichtigung der Tatsache, dass C mit der Einheit $[1/\text{m}^3]$ vorliegt, ersetzt wurde. Der Massenstrom der Teilchen der Komponente A ist somit proportional zum Gradienten der Massenkonzentration der Komponente A. Die Konstanten, die den Gradienten skalieren, lassen sich zum Diffusionskoeffizienten D_{AB} zusammenfassen, wobei die Indizierung dieses Koeffizienten festlegt, welche Komponente durch welche Komponente diffundiert (z. B. D_{AB} bedeutet Diffusion von A in B).

$$D_{AB} = 2\eta(\bar{w}l) \quad (6.3)$$

Für den Massenstrom ergibt sich damit die auch als Fick'sches Gesetz bekannte Gleichung

$$j_A'' = -\rho D_{AB} \frac{d\xi}{dx} \quad (6.4)$$

Schlussendlich soll die Bezeichnung dieses Stofftransportes als „Selbstdiffusion“ noch einmal erläutert werden. Wie in Gleichung (6.3) gezeigt, ist das einzige treibende Potenzial der Gradient der Massen- oder Stoffmengenkonzentration. Der stochastische Prozess der molekularen Bewegungen ist schließlich verantwortlich für eine gleichmäßigere Verteilung der Komponenten und somit für den Stofftransport. Siehe auch Lienhard (2008).

6.1.2 Diffusion in Flüssigkeiten

Findet die Diffusion nicht in Gasen, sondern in einer Flüssigkeit statt, so verliert die kinetische Gastheorie ihre Gültigkeit, da jedes Molekül in der Flüssigkeit im starken Kontakt mit anderen Nachbarmolekülen steht. Für diesen Fall hat Einstein (1905) die Theorie der Diffusion kleiner suspendierter Kugeln A entwickelt, die hier in ihren Ansätzen kurz dargestellt werden soll: Angenommen sei, wie Abb. 6.2 zeigt, eine

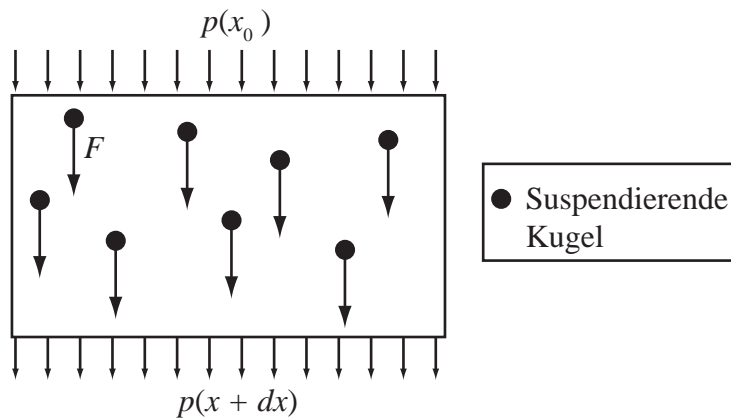


Abbildung 6.2: Modellvorstellung zur Diffusion in Flüssigkeiten

Flüssigkeitsschicht, in der suspendierte Teilchen regellos verteilt sind. Die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit sei n_V . Auf jedes dieser Teilchen wirkt eine Kraft F , die vom Ort, jedoch nicht von der Zeit abhängt. Der Einfachheit halber werde angenommen, dass die Kraft überall die Richtung der x -Achse habe. Somit ergibt sich für die Veränderung des Partialdrucks

$$-\frac{\partial p_i}{\partial x} = n_V F \quad (6.5)$$

Aufgrund der an einem Teilchen wirkenden Kraft, bewegt sich dieses unter Annahme der Stokes'schen Hypothese (schleichende Strömung, $Re < 1$) mit einer Geschwindigkeit von

$$u = \frac{F}{6\pi\eta r}, \quad (6.6)$$

wobei η die Viskosität der Flüssigkeit und r der Teilchenradius ist. Der Teilchenfluss durch eine Ebene ergibt sich aus $u \cdot n_V$ und der Massenfluss zu

$$\dot{m}'' = M_i \cdot u \cdot \frac{n_V}{N_A}. \quad (6.7)$$

Mit M_i als der Molmasse der Komponente i und N_A als der Avogadro-Konstanten. Einsetzen der Kraft F (6.6) in den Massenfluss (6.7) liefert:

$$\dot{m}'' = -\frac{M_i n_V}{6\pi\eta r n_V N_A} \frac{\partial p_i}{\partial x} \quad (6.8)$$

Im Folgenden sei angenommen, dass sich der Partialdruck des in der Flüssigkeit gelösten Gases wiederum durch das ideale Gasgesetz beschreiben lässt ($pV = Nk_B T$), wobei N die Teilchenzahl beschreibt. Diese Annahme ist gerechtfertigt, falls die einzelnen gelösten Gasmoleküle nicht miteinander interagieren. Mit k_B als der Boltzmann-Konstanten³ folgt

$$\dot{m}'' = -\frac{M_i}{6\pi\eta r N_A} \frac{k_B T}{V} \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad (6.9)$$

Wird dieser Massenstrom auf der anderen Seite durch das Fick'sche Gesetz und einen Konzentrationsgradienten beschrieben, so lässt sich ein Diffusionskoeffizient D für eine Flüssigkeit bestimmen.

$$\dot{m}'' = -\rho D \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \quad (6.10)$$

Mit $\xi_i = \rho_i / \rho$ lässt sich auf der rechten Seite die Dichte eliminieren. Wird ρ_i durch $N_i \cdot M_i / (N_A \cdot V)$ ersetzt so ergibt sich

$$\dot{m}'' = -\frac{M_i}{6\pi\eta r N_A} \frac{k_B T}{V} \frac{\partial N_i}{\partial x} = -D \frac{M_i}{N_A V} \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad (6.11)$$

wodurch für den Diffusionskoeffizient

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r} \quad (6.12)$$

³Die Boltzmann-Konstante ist nach dem österreichischen Physiker Ludwig Boltzmann (1844-1906), einem der Begründer der statistischen Mechanik, benannt. Diese Konstante darf nicht mit der Stefan-Boltzmann-Konstante aus der Wärmestrahlung verwechselt werden. $k_B = 1,3806504 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

folgt. Auf dieser Gleichung basieren viele empirische Korrelationen.

6.2 Grundbegriffe

In der vorangegangenen Einführung ist der Diffusionsprozess zunächst über die Stoffmenge n und dann über die Massenkonzentration ξ beschrieben worden. Hier sollen daher die das System beschreibenden Größen noch einmal eingeführt werden.

Tabelle 6.1: Größendefinitionen in binären Gemischen

(Füll) Masse	$m_1; m_2$	[kg]
Molmassen der Gase	$M_1; M_2$	[kg/kmol]
Partialdichte	$\rho_1 = \frac{m_1}{V}; \rho_2 = \frac{m_2}{V}$	[kg/m ³]
Gemischdichte	$\rho = \frac{m_1+m_2}{V}$	[kg/m ³]
Molmenge	$n_1 = \frac{m_1}{M_1}; n_2 = \frac{m_2}{M_2}$	[kmol]
Stoffmengenkonzentration	$C_1 = \frac{n_1}{V}; C_2 = \frac{n_2}{V}$	[kmol/m ³]
Gemischkonzentration	$C = \frac{n_1+n_2}{V}$	[kmol/m ³]
Stoffmengenanteil	$\psi_1 = \frac{n_1}{n_1+n_2} = \frac{C_1}{C}; \psi_2 = \frac{n_2}{n_1+n_2} = \frac{C_2}{C}$	[–]
Massenkonzentration	$\xi_1 = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{m_1}{m_{\text{ges}}}; \xi_2 = \frac{\rho_2}{\rho} = \frac{m_2}{m_{\text{ges}}}$	[–]
Partialdruck	$p_1 = \frac{R_m}{M_1} \rho_1 T = R_m C_1 T; p_2 = \frac{R_m}{M_2} \rho_2 T = R_m C_2 T$	[N/m ²]

Zwischen dem Mengenanteil ψ und dem Massenanteil ξ lässt sich der folgende Zusammenhang aufstellen:

$$\psi_1 = \frac{\frac{\rho_1}{M_1} \frac{1}{\rho}}{\left(\frac{\rho_1}{M_1} + \frac{\rho_2}{M_2}\right) \frac{1}{\rho}} = \frac{\frac{\xi_1}{M_1}}{\frac{\xi_1}{M_1} + \frac{\xi_2}{M_2}} \quad (6.13)$$

Des weiteren lässt sich die mittlere Molmasse \bar{M} definieren als

$$\bar{M} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \frac{\frac{1}{V}(m_1 + m_2)}{\frac{1}{V}(n_1 + n_2)} = \frac{\rho}{C} \quad (6.14)$$

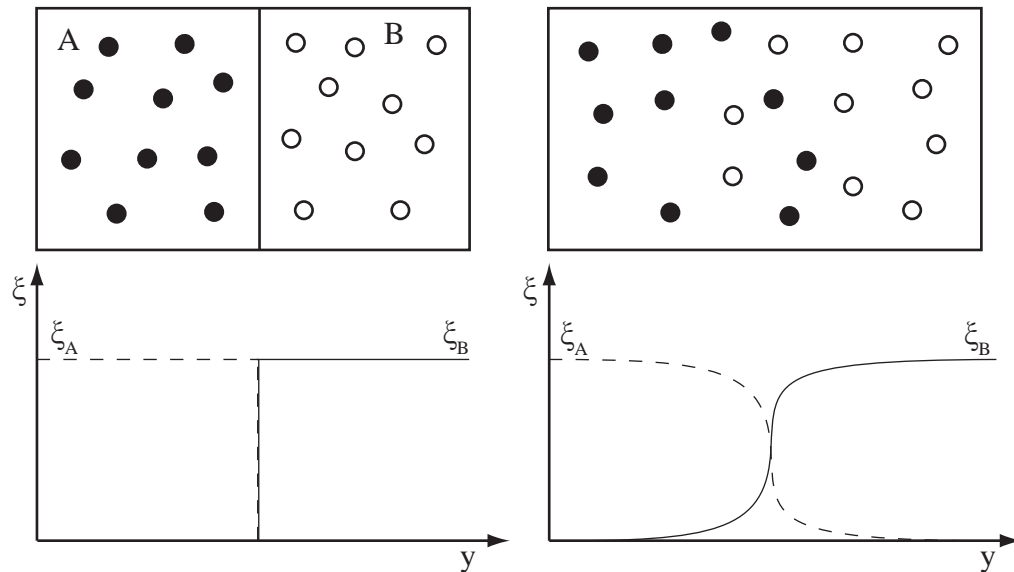


Abbildung 6.3: Eindimensionale, äquimolare Diffusion in ruhenden, binären Gasgemischen

Wird den gasförmigen Komponenten und dem Gasgemisch ein ideales Verhalten unterstellt, so folgt:

$$p = R_m c T = R_m (c_1 + c_2) T = p_1 + p_2 \quad (6.15)$$

Der Gesamtdruck entspricht somit der Summe der Partialdrücke (Gesetz von Dalton, 1805). Da der Druck direkt proportional zur Stoffmenge ist, folgt

$$\psi_1 = \frac{p_1}{p} \text{ bzw. } \psi_2 = \frac{p_2}{p} \quad (6.16)$$

Beispiel: Eindimensionale, äquimolare Diffusion in ruhenden, binären Gasgemischen Aus der Abgeschlossenheit des in Abb. 6.3 skizzierten Systems ergibt sich, dass die Stoffmenge der einzelnen Komponenten und damit auch die gesamte Stoffmenge konstant bleibt. Die Gemischkonzentration C und der Druck sind folglich konstant. Der Teilchenfluss, der für die Vermischung der beiden Komponenten sorgt, ist abhängig von dem negativen Gradienten der Konzentration.

$$\text{Fluss} = \text{Diffusionskoeffizient} \cdot \text{neg. Gradient der Mengenkonzentration} \quad (6.17)$$

Für die Stoffflüsse ergibt sich daher

$$\dot{n}_1'' = D_{12} \cdot \left(-\frac{dC_1}{dy} \right) \quad (6.18)$$

und

$$\dot{n}_2'' = D_{21} \cdot \left(-\frac{dC_2}{dy} \right) \quad (6.19)$$

Aus der Eingangs gemachten Voraussetzung, dass die Stoffmengenkonzentration der Komponenten und die gesamte Stoffmengenkonzentration innerhalb des betrachteten Systems konstant sind

$$C_1 + C_2 = C = \text{konst} \quad (6.20)$$

folgt die Übereinstimmung der beiden Konzentrationsgradienten:

$$\frac{dC_1}{dy} + \frac{dC_2}{dy} = 0 \quad (6.21)$$

Mit der weiteren Voraussetzung, dass die Stoffmenge konstant ist

$$n = n_1 + n_2 = \text{konst} \quad (6.22)$$

müssen auch die Summe der Stoffflüsse Null ergeben

$$\dot{n}_1'' + \dot{n}_2'' = 0 \rightarrow \dot{n}_1'' = -\dot{n}_2'' \quad (6.23)$$

Aus den Gleichungen (6.18) und (6.19) folgt

$$\frac{\dot{n}_1''}{D_{12}} + \frac{\dot{n}_2''}{D_{21}} = - \left(\frac{dC_1}{dy} + \frac{dC_2}{dy} \right) \quad (6.24)$$

und mit (6.21) und (6.22) folgt die Übereinstimmung der Diffusionskoeffizienten in einem Zweistoffgemisch

$$D_{12} = D_{21} \quad (6.25)$$

Diese Übereinstimmung der Diffusionskoeffizienten gilt nur im Zweistoffgemisch.

6.3 Stofftransport in strömenden Medien

Den im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Stofftransport durch Diffusion auf Grund eines Konzentrationsgradienten soll im folgenden auf den allgemeinen, dreidimensionalen Fall übertragen werden.

Handelt es sich wie im oben betrachteten Beispiel bei dem Fluid um keinen reinen Stoff, sondern ein Gemisch aus n verschiedenen Bestandteilen (Komponenten), so kann dem konvektiven Massentransport ein Stofftransport durch Diffusion überlagert sein, welcher durch Konzentrations-, Druck- und/oder Temperaturgradienten hervorgerufen wird.

Wird ein differenzielles Volumen, wie in Abb. 6.4 gezeigt, betrachtet, so kann die über alle Komponenten gemittelte Strömungsgeschwindigkeit \vec{w} von den Mittelwerten der Strömungsgeschwindigkeiten w_{xi}, w_{yi}, w_{zi} der einzelnen Komponenten i auf Grund von Diffusionsprozessen abweichen⁴. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit kann auf unterschiedliche Weisen definiert sein. Hier soll als Mittelwert die Schwerpunktgeschwindigkeit dienen:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \rho \xi_i \begin{pmatrix} w_{xi} \\ w_{yi} \\ w_{zi} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

wobei ρ in kg/m^3 die Dichte des Fluides und ξ_i den Massenanteil der Komponente i im Gemisch bezeichnet.

Für die Bilanz der einzelnen Stoffströme wird wieder das Volumenelement $dV = dx dy dz$ betrachtet. Die Masse des Stoffes i innerhalb des Volumens beträgt $\xi_i \rho dV$, und deren zeitliche Änderung ist $\partial(\xi_i \rho)/\partial t$. Die zeitliche Änderung der Masse lässt sich durch die Massenströme über die sechs Oberflächen des Volumenelements dV wie folgt definieren:

⁴Natürlich gibt es auch andere Phänomene, welche ein Abweichen der Geschwindigkeiten hervorrufen können, wie es z.B. bei Feststoffpartikeln in einer beschleunigten Strömung auf Grund von Trägheitskräften der Fall ist. Diese Effekte sollen im folgen jedoch nicht Bestandteil der Betrachtung sein

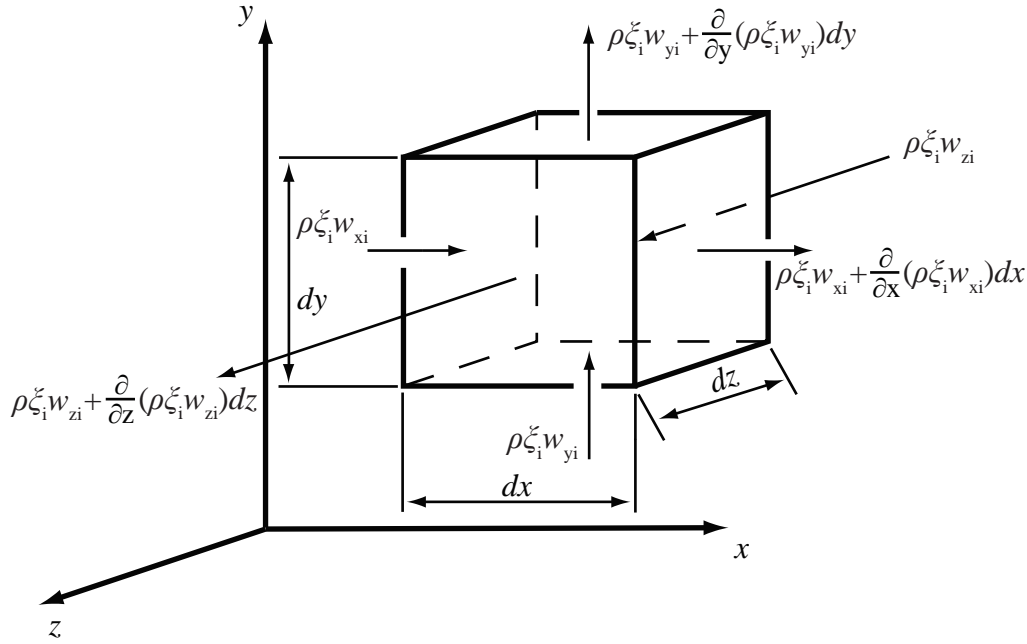


Abbildung 6.4: Stoffbilanz am Kontrollvolumen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\xi_i \rho)}{\partial t} dV &= \rho \xi_i w_{xi} dy dz - \left[\rho \xi_i w_{xi} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \xi_i w_{xi}) dx \right] dy dz \\
 &+ \rho \xi_i w_{yi} dx dz - \left[\rho \xi_i w_{yi} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \xi_i w_{yi}) dy \right] dx dz \\
 &+ \rho \xi_i w_{zi} dx dy - \left[\rho \xi_i w_{zi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \xi_i w_{zi}) dz \right] dx dy \\
 &= -dV \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho \xi_i w_{xi}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \xi_i w_{yi}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \xi_i w_{zi}) \right]
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Zur Beschreibung des Stofftransportes durch Diffusion werden Begriffe wie **Diffusionsgeschwindigkeit** und **Diffusionsstromdichte** verwendet. Hier soll die Diffusionsgeschwindigkeit als diejenige Geschwindigkeit definiert werden, die sich aus der Differenz zwischen der mittleren Teilchengeschwindigkeit $\vec{w}_i = (w_{xi}, w_{yi}, w_{zi})$ und der Schwerpunktschwindigkeit $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ ergibt. Unter der Diffusionsstromdichte \vec{j}_i soll der zugehörige Massenstrom der Komponente i (in kg/m²s) verstanden werden:

$$\vec{j}_i = \rho \xi_i (\vec{w}_i - \vec{w}) \tag{6.28}$$

Aus Gleichung (6.26) folgt, dass nach der Definition entsprechend (6.28) die Summe aller Diffusionsstromdichten über alle Komponenten verschwinden muss

$$\sum_{i=1}^n \vec{j}_i'' = \sum_{i=1}^n \rho \xi_i (\vec{w}_i - \vec{w}) = 0 \quad (6.29)$$

Für die Diffusionsstromdichte \vec{j}_i hat Fick bereits 1855 (Fick (1855)) empirisch das nach ihm benannte Gesetz gefunden, nach dem die Diffusionsstromdichte dem Konzentrationsgradienten proportional ist:

$$j_{xi}'' = -\rho D \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \quad (6.30)$$

Das Einsetzen der Definition der Diffusionsstromdichte (6.28) in Gleichung (6.27) führt zu

$$\frac{\partial(\xi_i \rho)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\xi_i \rho w_x + j_{xi}'') + \frac{\partial}{\partial y} (\xi_i \rho w_y + j_{yi}'') + \frac{\partial}{\partial z} (\xi_i \rho w_z + j_{zi}'') \right] \quad (6.31)$$

Diese Gleichung kann partiell differenziert und unter Annahme konstanter Dichte und der Anwendung der Kontinuitätsgleichung umgeschrieben werden. Es ergibt sich die hier verwendete Form der Erhaltungsgleichung für die Komponente i (der Index i wird im Folgenden weggelassen):

$$\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \xi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \xi}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial j''}{\partial x} + \frac{\partial j''}{\partial y} + \frac{\partial j''}{\partial z} = 0 \quad (6.32)$$

mit dem Fick'schen Gesetz (6.30) ergibt sich

$$\rho \frac{\partial(\xi)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \xi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \xi}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho D \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.33)$$

Im stationären Fall ergibt sich unter Annahme konstanter Stoffeigenschaften und unter Einführung der Schmidt-Zahl $Sc = \frac{\eta}{\rho D}$ die vereinfachte Form:

$$\rho u \frac{\partial \xi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \xi}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\eta}{Sc} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (6.34)$$

die ganz analog zur Energiegleichung im Abschnitt Konvektion durch Einführung bezogener Größen dimensionslos gemacht werden kann. Werden diese Größen wie folgt definiert:

$$x^* \equiv \frac{x}{L}; y^* \equiv \frac{y}{L}; z^* \equiv \frac{z}{L}; u^* \equiv \frac{u}{u_\infty}; v^* \equiv \frac{v}{u_\infty}; w^* \equiv \frac{w}{u_\infty}; \xi^* \equiv \frac{\xi - \xi_W}{\xi_\infty - \xi_W} \quad (6.35)$$

so ergibt sich die dimensionslose Stofferhaltungsgleichung

$$u^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial \xi^*}{\partial z^*} = \frac{1}{\text{Re Sc}} \left(\frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (6.36)$$

aus der folgt, dass das bezogene Konzentrationsfeld von den dimensionslosen Ortsvariablen und den Kennzahlen Re und Sc abhängen muss:

$$\xi^* = f(x^*, y^*, z^*, \text{Re}, \text{Sc}) \quad (6.37)$$

Auch hier fällt die Analogie zur Wärmeübertragung auf, bei der im Abschnitt 4 Konvektion für das dimensionslose Temperaturfeld analog galt:

$$T^* = f(x^*, y^*, z^*, \text{Re}, \text{Pr}) \quad (6.38)$$

6.3.1 Beispiel instationärer Diffusion

Bei Betrachtung eines eindimensionalen, instationären Problems lässt sich Gleichung (6.33) vereinfachen zu

$$\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (6.39)$$

Wird zusätzlich angenommen, dass keine Konvektion auftritt, so ergibt sich die folgende Differenzialgleichung, die auch unter dem „2. Fick’schen Gesetz“ bekannt ist.

$$\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (6.40)$$

Diese Differenzialgleichung entspricht in ihrer Struktur der Gleichung (3.69) aus dem Kapitel 3.5.2 und kann daher auch analog gelöst werden.

6.4 Übergangsgesetze in der Stoffübertragung

Analog zu dem in der Wärmeübertragung eingeführten Wärmeübergangskoeffizienten α , welcher eine Verknüpfung der Wärmestromdichte \dot{q}'' mit der Temperaturdifferenz zwischen Wand T_W und T_∞ Umgebung darstellt

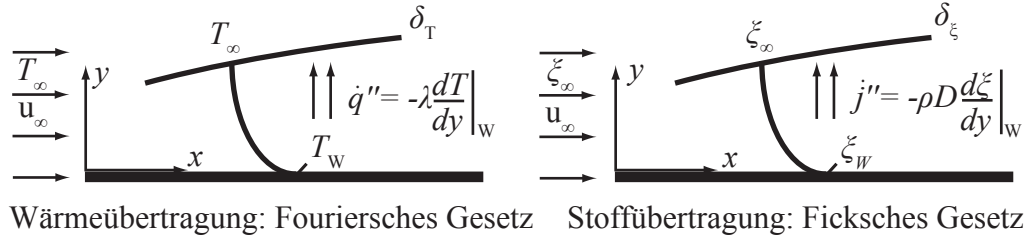


Abbildung 6.5: Analogie zwischen Wärme- und Stofftransport

$$\dot{q}'' \equiv \alpha(T_W - T_\infty) \quad (6.41)$$

kann auch in der Stoffübertragung ein Stoffübergangskoeffizient g definiert werden:

$$j_A'' \equiv g(\xi_W - \xi_\infty) \quad (6.42)$$

Um eine dimensionslose Kennzahl für diesen Übergangskoeffizienten zu finden, ist es sinnvoll, sich die Definition des Wärmeübergangskoeffizienten noch einmal vor Augen zu führen. Die Wärmestromdichte konnte dort durch eine Bilanz in unmittelbarer Nähe zur Wand mit dem örtlichen Temperaturgradienten bestimmt werden. Eine Entdimensionierung mit $T^* = \frac{T}{T_\infty - T_W}$ und $y^* = \frac{y}{L}$ ² führte dann zu

$$\dot{q}_W'' = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\lambda \frac{T_\infty - T_W}{L} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6.43)$$

Durch den Vergleich von Gleichung (6.41) und (6.43) konnte die dimensionslose Nusselt-Zahl eingeführt werden

$$\frac{\alpha L}{\lambda} \equiv \text{Nu} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = f(\text{Re}, \text{Pr}) \quad (6.44)$$

² L beschreibt eine charakteristische Länge des betrachteten Problems.

wobei für diese für verschiedenste Anwendungsfälle Korrelationen in folgender Form vorliegen:

$$\text{Nu} = C \text{Re}^m \text{Pr}^n \quad (6.45)$$

Analog wird bei der Beschreibung des Stoffübertragungskoeffizienten vorgegangen. Für die diffusive Stoffstromdichte wird das Fick'sche Gesetz mit bezogenen Größen dargestellt:

$$j_A'' = -\rho D \left. \frac{\partial \xi}{\partial y} \right|_{y=0} = -\rho D \frac{\xi_\infty - \xi_W}{L} \left. \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6.46)$$

Wird dieses mit dem bereits in Gleichung (6.42) eingeführten Stoffübertragungskoeffizienten verglichen, so ergibt sich die dimensionslose Stoffübertragungs-Kennzahl, die Sherwood-Zahl Sh:

$$\frac{gL}{\rho D} \equiv \text{Sh} = \left. \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = f(\text{Re}, \text{Sc}) \quad (6.47)$$

Sherwood-Zahlen lassen sich wiederum in Form von Kennzahl-Gesetzen für den Stoffübergang

$$\text{Sh} = C \text{Re}^m \text{Sc}^n \quad (6.48)$$

darstellen. Da der Gleichungstyp der Stoffhaltungsgleichung und der Energiegleichung übereinstimmt, müssen bei vergleichbaren Randbedingungen die Konstante C und die Exponenten m und n der beiden Kennzahl-Beziehungen gleich sein.

Tabelle 6.2: 1-D Bilanz, keine Konvektion, konstante Stoffeigenschaften

Wärmetransport	Stofftransport	Impulstransport
$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$	$\rho \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = D \rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2}$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

6.4.1 Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung

Ein Vergleich der Kennzahl-Beziehungen für den Wärme- und Stoffübergang zeigt, dass das Verhältnis der beiden Kennzahlen

$$\frac{\text{Sh}}{\text{Nu}} = \left(\frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} \right)^n \quad (6.49)$$

und damit

$$\frac{g}{\alpha/c_p} = \left(\frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} \right)^{n-1} \quad (6.50)$$

Bei Gasen sind die Prandtl-Zahl und die Schmidt-Zahl nahezu gleich groß. Für diesen Fall kann als Näherung ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Stoff- und dem Wärmeübergangskoeffizienten, das sogenannte Lewis'sche Gesetz, hergeleitet werden.

$$\frac{g}{\alpha/c_p} = 1 \quad \text{Lewis'sche Gesetz (für Gase)} \quad (6.51)$$

6.4.2 Lösung des eindimensionalen instationären Wärmeleitungs- bzw. Diffusionsproblems

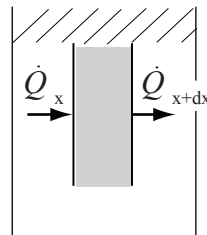


Abbildung 6.6: Instationäre Wärmeleitung

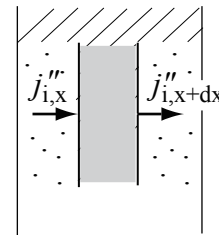


Abbildung 6.7: Instationäre Diffusion

Die Energieerhaltung für die Bestimmung des Temperaturprofils bei der instationären Wärmeleitung in einer halbinfinityen Platte (links) und die Transportgleichung für die Stoffkomponente i bei der Betrachtung reiner Diffusion zur Bestimmung des Konzentrationsfelds (rechts) sind nahezu identisch. Daher sollen im folgenden beide Probleme parallel beschrieben und gelöst werden um auch die Ähnlichkeit deren Lösungen darzulegen.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\rho \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \rho D \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2}$$

Ein Umformen der beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2}$$

wobei die Anfangs- und Randbedingungen wie folgt zu formulieren sind

$$T(t=0, x) = T_o$$

$$\xi_i(t=0, x) = \xi_{i,o}$$

$$T(t > 0, x = 0) = T_u$$

$$\xi_i(t > 0, x = 0) = \xi_{i,u}$$

$$T(t > 0, x \rightarrow \infty) = T_o$$

$$\xi_i(t > 0, x \rightarrow \infty) = \xi_{i,o}$$

Die Einführung einer Übertemperatur und einer dimensionslosen Konzentration sowie eines Koeffizienten a

$$\theta^* = \frac{T - T_o}{T_u - T_o}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

$$\theta^* = \frac{\xi_i - \xi_{i,o}}{\xi_{i,u} - \xi_{i,o}}, \quad a = D$$

führt schließlich zu der gleichen zu lösenden Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2} \quad (6.52)$$

mit den transformierten Anfangs- und Randbedingungen

$$\theta^*(t > 0, x \rightarrow \infty) = 0$$

$$\theta^*(t > 0, x = 0) = 1$$

$$\theta^*(t = 0, x) = 0$$

Durch die Substitution mit

$$\eta \equiv \frac{x}{\sqrt{4at}} \quad (6.53)$$

lässt sich die Gleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung umformen

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \eta^2} = 2\eta \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} \quad (6.54)$$

dessen Lösung

$$\theta^* = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$$

bzw.

$$\theta^* = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right)$$

sowohl für das Temperatur- als auch das Konzentrationsprofil gilt. Eine Rücktransformation liefert wieder in dimensionsbehafteter Form

$$\frac{T - T_o}{T_u - T_o} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4 \frac{\lambda}{\rho c_p} t}}\right) \quad \frac{\xi_i - \xi_{i,o}}{\xi_{i,u} - \xi_{i,o}} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

Die Abbildung 6.8 und 6.9 zeigen hier qualitativ den Verlauf der Profile.

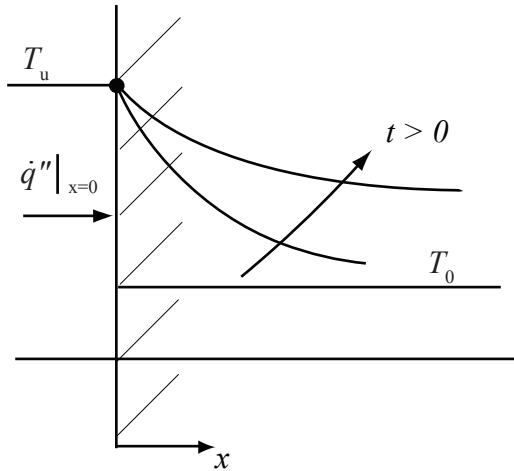


Abbildung 6.8: Temperaturfeld

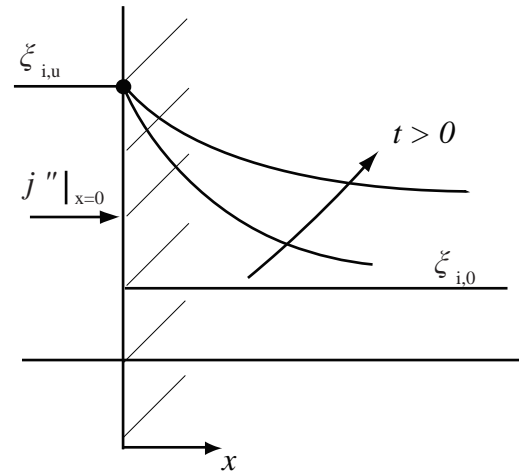


Abbildung 6.9: Konzentrationsfeld

Aus dem Temperaturgradienten folgt der Wärmestrom an der Wand

$$\dot{q}''|_{x=0} = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi a t}} (T_u - T_o) = \sqrt{\frac{\lambda c_p \rho}{\pi t}} (T_u - T_o) \quad (6.55)$$

Für den Diffusionsstrom der Komponente i an der Oberfläche folgt

$$\dot{j}_i''|_{x=0} = \frac{\rho D}{\sqrt{\pi D t}} (\xi_{i,u} - \xi_{i,o}) \quad (6.56)$$

6.5 Verdunstung an einer flüssigen Oberfläche

Wenn von der Oberfläche einer Flüssigkeit A ein dampfförmiger Massenstrom in ein umgebendes Gasgemisch, bestehend aus den Komponenten A und B, übergeht, so wird von Verdunstung gesprochen. Für diesen Stoffübergang sind diffusive Vorgänge, das heißt, diffusive Widerstände bestimmend. Im Gegensatz wird von Verdampfung gesprochen, wenn die übergehende Dampfkomponekte eine reine Dampfumgebung vorfindet, so dass Diffusionswiderstände keine Rolle spielen.

6.5.1 Stefanstrom

Im Folgenden soll ein verdunstender Massenstrom betrachtet werden, wobei angenommen wird, dass die Komponente B im Gasgemisch nicht in die Flüssigphase übergeht, die Flüssigkeitsoberfläche ist also semipermeabel. Dieser Prozess wird auch mit dem Begriff der einseitigen Diffusion in der Literatur beschrieben (siehe Mersmann (1986)).

Abbildung 6.10 zeigt das betrachtete System. Hier wird angenommen, dass die Kon-

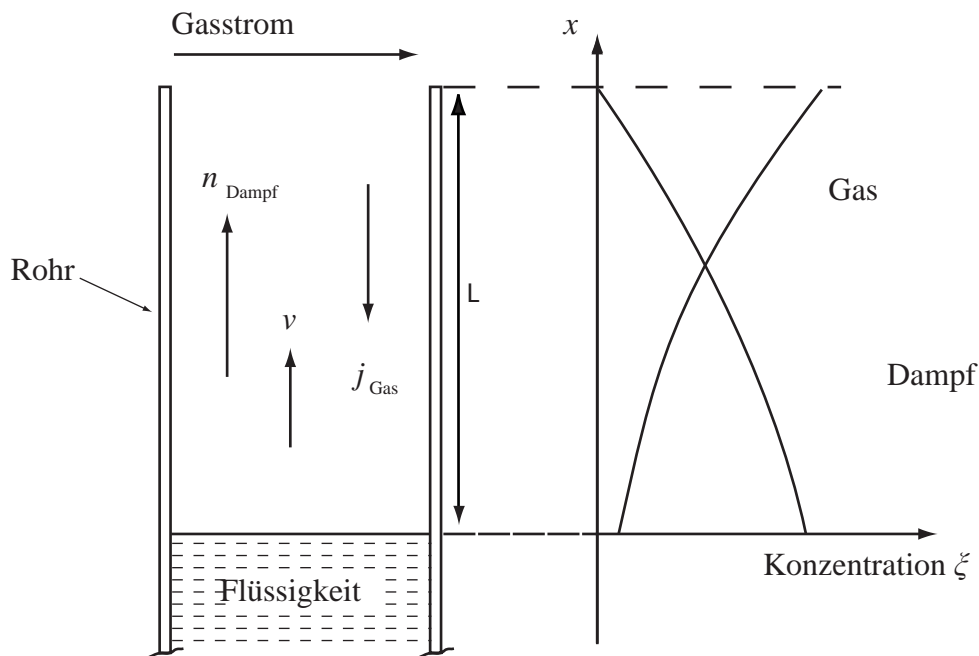


Abbildung 6.10: Stefanstrom

zentration der Komponente A an der Stelle L dauerhaft konstant ist, vereinfachend gilt $\xi(L) = 0$. Des weiteren bleibt die Phasengrenze durch einen konstant nachlaufenden Massenstrom, der dem der Verdunstung entspricht, dauerhaft bei $x = 0$. In diesem stationären Zustand gilt

$$\frac{\partial \xi_A}{\partial t} = \frac{\partial \xi_B}{\partial t} = 0 \quad (6.57)$$

Eine Bilanz an der Phasengrenze liefert für den Massenstrom der Komponente B $\dot{m}_B''(x=0) = 0$, weil sich die Komponente B nicht in der Flüssigkeit löst. Da im Bereich $0 < x < L$ keine Querströmungen auftreten folgt $\dot{m}_B''(0 < x < L) = 0$. Für die verdunstende Komponente A, kann der Massenstrom, wie in Abschnitt 6.3 eingeführt, durch die effektive Geschwindigkeit der Teilchen w_A , die Dichte und den Massenanteil ξ der Komponente A beschrieben werden.

$$\dot{m}_A'' = w_A \rho \xi_A \quad (6.58)$$

Da sich die effektive Teilchengeschwindigkeit wiederum durch die Überlagerung der Schwerpunktsgeschwindigkeit w und des Diffusionstroms j_A'' zusammensetzt (siehe Gl. (6.28)) folgt für den Massenstrom von A

$$\dot{m}_A'' = w \rho \xi_A + j_A'' \quad (6.59)$$

Für den Massenstrom der Komponente B kann eine analoge Beziehung aufgestellt werden. Da die Oberfläche jedoch, wie oben beschrieben, undurchlässig für die Komponente B ist, folgt, dass der Massenstrom in Summe Null ergibt.

$$\dot{m}_B'' = w_B \rho \xi_B = w \rho \xi_B + j_B'' = 0 \quad (6.60)$$

Der Gesamtmassenstrom ergibt sich aus der Summe der beiden Teilmassenströme

$$\dot{m}'' = \dot{m}_A'' + \dot{m}_B'' = w \rho \xi_A + j_A'' + w \rho \xi_B + j_B'' \quad (6.61)$$

Mit der Bedingung aus Gleichung (6.29), dass die Summe der Diffusionsströme Null ergibt und mit $\xi_A + \xi_B = 1$ folgt

$$\dot{m}'' = \dot{m}_A'' + \dot{m}_B'' = w \rho \quad (6.62)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (6.62) in Gleichung (6.59) folgt für den gesamten Massenstrom sowie für den der Komponente A:

$$\dot{m}'' = \dot{m}_A'' = \underbrace{\frac{1}{1 - \xi_A}}_F j_A'' \quad (6.63)$$

Der Nettomassenstrom ist offensichtlich um den Faktor F , den **Stefan-Faktor**, größer als der Diffusionsstrom. Dieser Faktor berücksichtigt, dass die Oberfläche nur für die verdunstende Komponente durchlässig ist („halbdurchlässige Wand“) und deshalb der diffusive Massenstrom der Komponente B auf Grund des Konzentrationsgradienten hin zur Wand durch einen konvektiven Stoffstrom ausgeglichen werden muss.

Wenn der diffusive Stoffstrom j_A'' mit (6.42) durch den Stoffübergangskoeffizienten und die Konzentrationsdifferenz ausgedrückt wird, so folgt:

$$\dot{m}_A'' = g \frac{\xi_{A,W} - \xi_{A,\infty}}{1 - \xi_{A,W}} \quad (6.64)$$

oder in dimensionsloser Schreibweise:

$$\frac{\dot{m}_A''}{\rho u_\infty} = \frac{\text{Sh}}{\text{Re} \cdot \text{Sc}} \underbrace{\frac{\xi_{A,W} - \xi_{A,\infty}}{1 - \xi_{A,W}}}_B \quad (6.65)$$

B ist das treibende Potenzial für den Stoffübergang.

6.5.2 Stoffübergangskoeffizient und Konzentrationsprofil[†]

Mit der bisherigen Lösung des Verdunstungsproblems an einer freien Oberfläche (6.64) kann der Massenstrom nur bestimmt werden, falls der Konzentrationsgradient an der Oberfläche bekannt ist. Nun soll der Massenstrom in Abhängigkeit der Konzentration an der Oberfläche $\xi(x=0)$ und von $\xi(x=L)$ bestimmt werden. Zunächst kann in Gleichung (6.63) der Diffusionsstrom durch das Fick'sche Gesetz beschrieben werden.

$$\dot{m}'' = \dot{m}_A'' = -\frac{1}{1 - \xi_A} \rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \quad (6.66)$$

Da der Massenstrom an jeder Stelle x konstant ist, kann die obige Gleichung an der Stelle $x=0$ (an der Oberfläche) ausgewertet werden.

$$\dot{m}''|_O = \dot{m}_A''|_O = -\frac{1}{1 - \xi_{A,O}} \rho D \left(\frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right)_O \quad (6.67)$$

Ein Einsetzen dieses Massenstroms in Gleichung (6.59) ergibt unter Berücksichtigung von Gleichung 6.62:

$$\dot{m}_A'' = -\rho D \frac{\partial \xi_A}{\partial x} - \frac{\xi_A}{1 - \xi_{A,O}} \rho D \left(\frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right)_O \quad (6.68)$$

Ein Differenzieren dieser Gleichung nach x führt zu

$$\frac{\partial \dot{m}_A''}{\partial x} = -\rho D \left[\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - \xi_{A,O}} \left(\frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right)_O \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right] = 0, \quad (6.69)$$

wobei durch die Konstanz des Massenstroms dessen Ableitung Null ergibt. Zur Lösung dieser Differentialgleichung sollen zunächst die Randbedingungen definiert werden.

Auf Grund der Differentialgleichung zweiter Ordnung ist es notwendig zwei Randbedingungen zu definieren. Für $x = 0$ (an der Phasengrenze) kann der Massenanteil ξ_O z.B. durch das Raoult'sche Gesetz beschrieben werden. Es sei daher angenommen, dass dieser Massenanteil bekannt und damit ξ_{w0} ist. Desweiteren sei auch der Massenanteil im Freistrom an der Stelle $x = L$ mit $\xi(L) = 0$ gegeben. Die obige Differentialgleichung (6.69) lässt sich durch die Wahl geeigneter Bezugsgrößen entdimensionieren. Wir definieren $\phi = x/L$ und $\theta = \xi_A/\xi_{A,O}$. Die Randbedingungen ergeben sich dann wie folgt:

$$\text{RB1: für } \phi = \frac{0}{L} = 0 \text{ gilt: } \theta = \frac{\xi_{A,O}}{\xi_{A,O}} = 1 \quad (6.70)$$

$$\text{RB2: für } \phi = \frac{L}{L} = 1 \text{ gilt: } \theta = \frac{0}{\xi_{A,O}} = 0 \quad (6.71)$$

Mittels dieser Transformation und der Einführung der Konstanten

$$\Psi = -\frac{\xi_{A,O}}{1 - \xi_{A,O}} \left(\frac{\partial \theta_A}{\partial \phi} \right)_O \quad (6.72)$$

kann die folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} - \Psi \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad (6.73)$$

analytisch gelöst werden. Die Einführung der dimensionslosen Variablen in Gleichung (6.67) ergibt für den Massenstrom

$$\dot{m}'' = \dot{m}_A'' = \frac{\rho D}{L} \Psi \quad (6.74)$$

Zur Lösung der Differentialgleichung wird $\frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ durch K substituiert, so dass sich (6.73) vereinfacht zu.

$$\frac{\partial K}{\partial \phi} = \Psi K \quad (6.75)$$

Diese Gleichung ist durch Trennung der Variablen zu lösen.

$$K = e^{\Psi \phi + c_1} \quad (6.76)$$

Die Resubstitution von K und eine zweite Integration ergibt

$$\theta = \frac{1}{\Psi} e^{\Psi \phi + c_1} + c_2 \quad (6.77)$$

Diese Gleichung führt durch Einsetzen der beiden Randbedingungen und umformen zu:

$$\theta = \frac{e^{\Psi \phi} - e^{\Psi}}{1 - e^{\Psi}} \quad (6.78)$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach ϕ und Auswerten der Ableitung an der Stelle $\phi = 0$ (an der Wand) kann der Gradient in Gleichung (6.72) ersetzt werden. Dies führt auf die Beziehung

$$e^{\Psi} = \frac{1}{1 - \xi_{A,O}} \text{ oder: } \Psi = \ln \left(\frac{1}{1 - \xi_{A,O}} \right) \quad (6.79)$$

Hiermit ergibt sich für den Massenstrom aus Gleichung (6.74) in dimensionsbehafteter Schreibweise

$$\dot{m}'' = \dot{m}_A'' = \frac{\rho D}{L} \ln \left(\frac{1}{1 - \xi_{A,O}} \right) \quad (6.80)$$

Wie zu erwarten verläuft der Massenstrom in positive x-Richtung, da die Konzentration in x-Richtung abnimmt. Zudem lässt sich das Konzentrationsprofil angeben:

$$\ln \left(\frac{1 - \xi_A}{1 - \xi_{A,O}} \right) = \frac{x}{L} \ln \left(\frac{1}{1 - \xi_{A,O}} \right) \quad (6.81)$$

Hier sollte erwähnt werden, dass das Konzentrationsprofil logarithmisch und nicht linear ist. Dieser Verlauf ergibt sich aus der Konvektion, welche wiederum durch die Diffusion verursacht wird. Mit der Definition eines Stoffübergangskoeffizienten g^* , der bereits den Stefanstrom berücksichtigt, lässt sich für den Fall der Verdunstung an einer freien Oberfläche bestimmen zu

$$g^* = \rho \frac{D}{L} \frac{1}{\frac{\xi_{A,O}}{\ln\left(\frac{1}{1-\xi_{A,O}}\right)}} \quad (6.82)$$

An dieser Stelle soll noch einmal auf die Analogie zur Wärmeübertragung eingegangen werden. Im Fall reiner Wärmeleitung, d.h. ohne Konvektion, ist die Nusselt-Zahl gleich eins. In dem hier betrachteten Fall wurde ebenso von außen keine Strömung aufgeprägt, so dass, falls nur Diffusionsvorgänge stattfinden, auch die Sherwood-Zahl den Wert eins besitzt. Mit Gleichung (6.47) ergibt sich dann ein Stoffübertragungskoeffizient von $g = \frac{\rho D}{L}$. Ein Vergleich mit (6.82) zeigt, dass dort ein zweiter Term hinzugekommen ist. Dieser Term ist unter „high flux correction“ bekannt, da er die sich einstellende, diffusionsgetriebene Konvektion berücksichtigt. Um diesen Faktor erhöht sich der Stoffübergang im Vergleich zur reinen Diffusion.

6.6 Transportprozesse[†]

6.6.1 Diffusion

Der Diffusionskoeffizient D ist eine Funktion der Zusammensetzung, der Temperatur und des Drucks. Hier soll gezeigt werden, wie sich Diffusionskoeffizienten für binäre Gemische, sowie Mehrstoffgemische, aus der kinetischen Gastheorie herleiten lassen.

Die kinetische Gastheorie ist eine quantitative Beschreibung idealer Gase unter der Annahme, dass die Energie eines Gases allein aus der kinetischen Energie seiner Gasmoleküle besteht und die potentielle Energie der Molekülwechselwirkungen vernachlässigbar klein ist.

Die kinetische Gastheorie beruht auf den folgenden Annahmen:

- Gase bestehen aus Molekülen mit der Masse m und dem Durchmesser d , die sich in einer kontinuierlichen und zufälligen Bewegung befinden.
- Die Abmessung der Moleküle (d) ist klein gegenüber der mittleren freien Weglänge (die von einem Molekül zurückgelegte Strecke zwischen zwei Zusammenstößen).
- Außer den elastischen Stößen gibt es keine Wechselwirkung zwischen den Molekülen

6.6.1.1 Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle

Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle ist durch das Maxwell'sche Gleichgewicht gegeben:

$$\bar{w} = \left(\frac{8k_B N_A T}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.83)$$

wobei k_B wiederum die Boltzmann-Konstante ist. Bei dieser Geschwindigkeit handelt es sich um die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Gasmoleküle

$$\bar{w} = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} \quad (6.84)$$

Diese Geschwindigkeit ist keine exakte Beschreibung der Realität, da die einzelnen Geschwindigkeiten der Moleküle über einen weiten Bereich verteilt sind und es durch ständige Zusammenstöße zu Umverteilungen kommt. Die Verteilung der Geschwindigkeit ist durch die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung gegeben:

$$p(w) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} w^2 e^{-\frac{Mw^2}{2RT}} \quad (6.85)$$

Mit steigender Temperatur und sinkender molarer Masse wird die Geschwindigkeitsverteilung breiter.

6.6.1.2 Stoßhäufigkeit

Die Anzahl der Stöße eines Moleküls wird durch die Stoßhäufigkeit z beschrieben. Diese ist abhängig von der Kollisionsquerschnittsfläche eines Moleküls ($\pi \cdot d_k^2$), wobei

d_k im Fall von gleichgroßen Molekülen den Moleküldurchmesser beschreibt und von der Moleküldichte bzw. -konzentration N/V .

$$z = \sqrt{2\pi} \cdot d_k^2 \bar{w} \frac{N}{V} = \sqrt{2\pi} \cdot d_k^2 \bar{w} \frac{p}{k_B T} \quad (6.86)$$

6.6.1.3 Mittlere frei Weglänge

Die mittlere freie Weglänge l ist die Entfernung, die ein Molekül im Mittel zwischen zwei Stößen zurücklegt.

$$l = \frac{\bar{w}}{z} = \frac{k_B T}{\sqrt{2\pi} \cdot d_k^2 p} \quad (6.87)$$

6.6.1.4 Zwischenmolekulare Wechselwirkungen bei realen Gasen

Die zwischenmolekularen Wechselwirkungen von Molekülen können an Hand des Lennard-Jones Potenzials beschrieben werden. Dieses ergibt sich aus

$$\phi(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (6.88)$$

und ist in Abbildung 6.11 dargestellt. Dieses Potenzial basiert auf zwei Parametern, dem molekularen Durchmesser σ und der Tiefe der Potenzialmulde ϵ . Die Potenzialmulde beschreibt diejenige Energie, die dazu benötigt wird, zwei Moleküle voneinander zu trennen.

Innerhalb einer sehr kurzen Reichweite von Molekülen $r < r_m$ tritt die zwischenmolekulare Abstoßungskraft (z.B. durch Elektronen mit gleichem Spin) in Erscheinung. Bei relativ großem Druck dominieren folglich diese Abstoßungskräfte, wodurch die Expansion begünstigt wird. Reale Gase sind daher im Vergleich zu idealen Gasen schwerer zu komprimieren. Die zwischenmolekularen Anziehungskräfte (z.B. Van-der-Waals-Kräfte und Dipolkräfte) haben, verglichen zum Moleküldurchmesser eine hohe Reichweite. Diese Kräfte treten bei Abständen einiger Moleküldurchmesser signifikant in Erscheinung. Bei großen zwischenmolekularen Entfernungen spielen sie allerdings keine Rolle mehr. Daraus folgt, dass bei mäßigem Druck Anziehungskräfte dominieren, welche eine Kompression begünstigen.

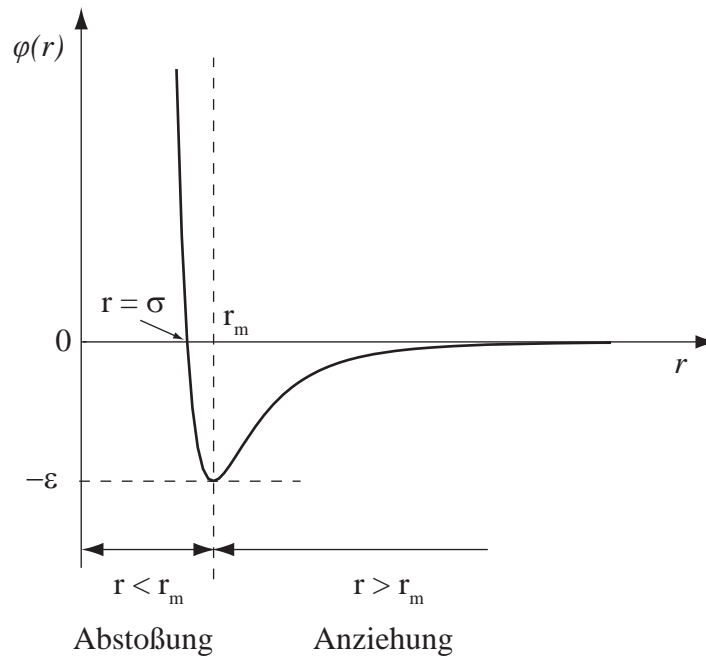


Abbildung 6.11: Lennard-Jones Potenzial

6.6.2 Berechnung von Diffusionskoeffizienten

Direkte Messungen von den Eigenschaften einer Mischung sind nicht immer für die Temperatur, den Druck und die Zusammensetzung vorhanden, für die sie benötigt werden. Daher muss oft auf theoretische Vorhersagen oder experimentelle Korrelationen zurückgegriffen werden. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie der Diffusionskoeffizient D in Gasen, ausgehend von der kinetischen Gastheorie, bestimmt werden kann. Dies beruht auf einer Theorie von Chapman-Enskog. Die nachfolgenden Inhalte stützen sich auf das Buch „A Heat Transfer Handbook“ von Lienhard (2008).

6.6.2.1 Diffusionskoeffizienten für binäre Gemische

Der Diffusionskoeffizient, der zu Beginn des Kapitels aufgezeigte Selbstdiffusion in verdünnten Gasen, (6.3) konnte durch die durchschnittliche Molekülgeschwindigkeit approximiert werden.

Einsetzen der Gleichungen (6.83) und (6.87) in (6.3) führt zu

$$D_{AA'} = (2\eta a)\bar{w}l = \frac{(k_B/\pi)^{\frac{3}{2}}}{d^2} \left(\frac{N_A}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{p}. \quad (6.89)$$

Der Diffusionskoeffizient ist somit, basierend auf dem einfachen Modell der Selbstdiffusion, proportional zu p^{-1} und $T^{3/2}$.

Um einen genaueren Wert des Diffusionskoeffizienten zu bestimmen, ist es notwendig, weitere Effekte mit zu berücksichtigen, wie z.B. die Tatsache, dass die Moleküle keine harten Kugeln darstellen. Zudem sollte berücksichtigt werden, dass zwischen den beiden betrachteten Gasen Unterschiede in der Größe der Moleküle und den Eigenschaften bestehen. Die kinetische Theorie von Chapman-Enskog berücksichtigt diese Faktoren und erlaubt durch folgende Gleichung den Diffusionskoeffizienten D_{AB} zu ermitteln:

$$D_{AB} = \frac{(1.8583 \cdot 10^{-7})T^{\frac{3}{2}}}{p\Omega_D^{AB}(T)} \sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}}, \quad (6.90)$$

wobei der Druck p in atm und die Temperatur T in Kelvin einzusetzen und der Diffusionskoeffizient D_{AB} dann in m^2/s angegeben ist. Die Funktion $\Omega_D^{AB}(T)$ beschreibt die Kollision zwischen den Molekülen der Species A und B. Dies hängt generell von der Temperatur sowie von den involvierten Molekülen ab. Der Typ der Moleküle ist entscheidend, da intermolekulare Anziehungs- bzw. Abstoßungskräfte auftreten, falls Moleküle kollidieren bzw. sich einander annähern. Eine gute Approximation dieser Kräfte ist durch das intermolekulare Potenzial (Lennard-Jones Potenzial, siehe Abb. 6.11) gegeben. Die benötigten Konstanten können aus Tabellen, wie z.B. Tabelle 9, entnommen werden. Eine akurate Approximierung von $\Omega_D^{AB}(T)$ ist somit durch die Lennard-Jones Potenzialfunktion gegeben:

$$\Omega_D^{AB}(T) = \sigma_{AB}^2 \Omega_D(k_B T / \epsilon_{AB}), \quad (6.91)$$

wobei der Kollisionsdurchmesser σ_{AB} als der effektive molekulare Durchmesser für die Kollision von A und B angesehen werden kann. Falls σ_A und σ_B als Querschnittsdurchmesser von A und B (in \AA^5) gegeben sind, so ergibt sich

$$\sigma_{AB} = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2}. \quad (6.92)$$

⁵Ein Angström (1 \AA) entspricht 0.1 nm .

Das Kollisions-Integral Ω_D ist das Resultat von Berechnungen der kinetischen Theorie, basierend auf dem Lennard-Jones Potenzial. In Tabelle 10 sind Werte für diese Integrale angegeben. Die effektive Potenzialmuldentiefe für die Kollision von A und B ist

$$\epsilon_{AB} = \sqrt{\epsilon_A \epsilon_B}. \quad (6.93)$$

Mit diesen Angaben und Gleichung (6.89) kann der Diffusionskoeffizient in Gasen temperatur- und druckabhängig bestimmt werden. Analog zu Gleichung (6.89) ist der Diffusionskoeffizient proportional zu p^{-1} . Wegen der Temperaturabhängigkeit von Ω_D ist D_{AB} nicht proportional zu $T^{3/2}$ sondern näherungsweise zu $T^{7/4}$.

Die Gleichung (6.90) ist nicht für alle Mischungen von Gasen gültig: So darf der Konzentrationsgradient nicht zu hoch sein und es dürfen keine Überschalleffekte auftreten ($Ma \ll 1$). Weiterhin gilt die Theorie nicht für hohe Drücke, in denen die Wechselwirkung der einzelnen Moleküle zunimmt. Die Moleküle dürfen ferner nicht polar sein und müssen annähernd Kugelform besitzen.

6.6.2.2 Diffusionskoeffizienten für Mehrstoffgemische

Ausgehend von der kinetischen Gastheorie leiten Hirschfelder u. a. (1954) für den allgemeinen Fall der Diffusion in nichtidealen Mehrkomponentengemischen die folgende Formulierung des Fick'schen Gesetzes her

$$j_i'' = \frac{\rho}{M^2 RT} \sum_{j=1}^n M_i M_j D'_{ij} \left[\psi_j \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial \psi_k} \right)_{T,p,\psi_S} \frac{\partial \psi_k}{\partial z} \right] \quad (6.94)$$

wobei μ das chemische Potenzial beschreibt und mit

$$M = \sum_{i=1}^n \psi_i M_i; \quad D'_{ii} = 0; \quad \sum_{i=1}^n (M_i M_h D'_{ih} - M_i M_k D'_{ik}) = 0 \quad (6.95)$$

Diese Gleichung zeigt, dass bei Mehrkomponentengemischen der Massendifusionsstrom einer Komponente von allen Konzentrationsgradienten der in der Mischung vorhandenen Spezies abhängt. Dabei beschreiben die polynären Diffusionskoeffizienten D'_{ij} den Diffusionsvorgang der Komponente i hinsichtlich der Komponente j

in einem n-Komponentengemisch. Im allgemeinen sind die polynären Diffusionskoeffizienten nicht symmetrisch, d.h. $D'_{ij} \neq D'_{ji}$.

Bird u. a. (1960) diskutieren vereinfachte Formen der Gleichung 6.94 für die zwei Grenzfälle binärer Mischungen und idealen Stoffverhaltens. Für Zweikomponentengemische ergibt sich

$$j''_A = j''_B = -\frac{\rho}{M^2} M_A M_B D'_{AB} \left(\frac{\partial \ln a_A}{\partial \ln \psi_A} \right)_{T,p} \frac{\partial \psi_k}{\partial z} \quad (6.96)$$

Ein Vergleich mit dem Fick'schen Gesetz ergibt:

$$D_{AB} = D'_{AB} \left(\frac{\partial \ln a_A}{\partial \ln \psi_A} \right)_{T,p} \quad (6.97)$$

Bei idealen Mischungen gilt $D_{AB} = D'_{AB}$. Dies kann für viele Gasgemische in guter Näherung angenommen werden. In realen Mischungen, d.h. insbesondere in Flüssigkeitsgemischen, ist die gegenseitige Verschiebung der Moleküle jedoch nicht nur von den herrschenden Konzentrationsgradienten sondern auch von den zwischenmolekularen Kräften abhängig. Diese werden wiederum in stark nichtlinearer Weise sowohl von der Zusammensetzung als auch vom herrschenden Druck- und Temperaturniveau beeinflusst. Experimentelle Daten zeigen daher eine starke Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von der Gemischzusammensetzung. Dies äußert sich in Gleichung 6.97 durch die Aktivitätsabhängigkeit von D_{AB} . Der aktivitätskorrigierte Diffusionskoeffizient D'_{AB} ist hingegen wesentlich weniger konzentrationsabhängig. Experimentell bestimmte Diffusionskoeffizienten werden meist als D_{AB} angegeben, da in diesem Fall die aufwendige Messung des Aktivitäts-Konzentrations-Zusammenhanges nicht notwendig ist.

Für den Fall idealen Mischungsverhaltens lässt sich auch für Mehrkomponentengemische eine einfachere Formulierung des Fick'schen Gesetzes angeben,

$$j''_i = \frac{\rho}{M^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n M_i M_j D_{ij} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \quad (6.98)$$

bei der jedoch immer noch die Abhängigkeit des Massendiffusionsstromes einer Komponente von den Konzentrationsgradienten der übrigen n-1 Komponenten besteht. Darüber hinaus treten hier wieder polynäre Diffusionskoeffizienten D_{ij} auf. Dadurch

sind beispielsweise für die Beschreibung eines ternären Systems sechs Diffusionskoeffizienten notwendig.

Dies erfordert insbesondere für die Beschreibung flüssiger Mehrkomponentengemische einen beträchtlichen Aufwand, wobei zusätzlich beachtet werden muss, dass zur Bestimmung der polynären Diffusionskoeffizienten in Flüssigkeiten lediglich in wenigen Spezialfällen geeignete Methoden existieren.

Für ideale Gemische geben Bird u. a. (1960) Beziehungen an, mit denen die polynären Diffusionskoeffizienten auf die entsprechenden binären Diffusionskoeffizienten zurückgeführt werden können. Damit kann der Diffusionsprozess durch eine Stefan-Maxwell Gleichung beschrieben werden.

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z} = \sum_{\beta=1}^n \frac{c_\alpha c_\beta}{c^2 D_{\alpha\beta}} \left(\frac{j''_\alpha}{\rho_\alpha} - \frac{j''_\beta}{\rho_\beta} \right) \quad (6.99)$$

Die $D_{\alpha\beta}$ sind binäre Diffusionskoeffizienten. Daher wurde hier eine gänderte Indizierung verwendet, um Verwechslungen mit den polynären Diffusionskoeffizienten D_{ij} zu vermeiden. ρ_α und ρ_β sind Partialdichten, die nicht mit den Dichten der jeweiligen Komponenten verwechselt werden dürfen. Unter der Voraussetzung, dass die Gasphase als homogenes Medium vorliegt, d.h. bei stationären Prozessen, kann ein effektiver Diffusionskoeffizient definiert werden (siehe Bird u. a. (1960); Reid u. a. (1986)):

$$j''_\alpha = -\rho D_{\alpha m} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial z} \quad (6.100)$$

mit $\rho = \rho_\alpha + \rho_\beta$ Durch die Kopplung der Gleichungen 6.99 und 6.100 ergibt sich eine einfache Berechnungsvorschrift für den effektiven Diffusionskoeffizienten

$$D_{\alpha m} = \frac{1 - \psi_\alpha}{\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \frac{\psi_\beta}{D_{\alpha\beta}}} \quad (6.101)$$

In Fall einer schwach konzentrierten Komponente α ($\psi = 0$) folgt

$$D_{\alpha m} = \left(\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \frac{\psi_\beta}{D_{\alpha\beta}} \right)^{-1} \quad (6.102)$$

Diese Gleichung wird auch Blanc's Gesetz genannt.

6.6.2.3 Wärmeleitfähigkeit und Viskosität für verdünnte Gase

Zwei der wichtigsten Ergebnisse der kinetischen Gastheorie ist die Vorhersage von η und λ für reine, einatomige Gase:

$$\eta_A = (2.6693 \cdot 10^{-6}) \frac{\sqrt{M_A T}}{\sigma_A^2 \Omega_\eta} \quad (6.103)$$

und

$$\lambda_A = \frac{0.083228}{\sigma_A^2 \Omega_\lambda} \sqrt{\frac{T}{M_A}}, \quad (6.104)$$

wobei Ω_η und Ω_λ die Kollisionsintegrale für die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit darstellen. Ω_η und Ω_λ sind identisch, unterscheiden sich jedoch von Ω_D . In den obigen Gleichungen ist η in kg/ms, λ in W/mK, T in Kelvin und Ω in Å einzusetzen.

Die Gleichung für die Viskosität gilt für einatomige als auch für mehratomige Gase. Die Wärmeleitfähigkeit muss jedoch korrigiert werden um die Eigenrotation und die Vibration der Moleküle zu berücksichtigen. Eine einfache Korrektur für mehratomige, ideale Gase bei moderaten Temperaturen ist:

$$\lambda_A = \left(\frac{9\gamma - 5}{4\gamma} \right) \eta c_p \quad (6.105)$$

wobei $\gamma = c_p/c_v$. Für einatomige Gase ist $\gamma = 5/3$, für zweiatomige Gase $\gamma = 7/5$ und für sehr komplexe Atome gilt $\gamma = 1$. Für c_p sollten tabellierte Werte verwendet werden. Im Mittel werden die Wärmeleitfähigkeiten um 10 - 20% unterschätzt.

6.6.2.4 Wärmeleitfähigkeit und Viskosität für Mehrstoffgemische

Auch die Wärmeleitfähigkeit und die Viskosität können durch Mehrstoffgemische bestimmt werden. Nach einer Approximation von Wilke, basierend auf der kinetischen Gastheorie gilt für die Viskosität einer Mischung:

$$\eta_m = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_i \eta_i}{\sum_{j=1}^n \psi_j \phi_{ij}} \quad (6.106)$$

wobei ϕ_{ij} selbst

$$\phi_{ij} = \frac{\left[1 + (\eta_i/\eta_j)^{\frac{1}{2}} (M_j/M_i)^{\frac{1}{4}}\right]^2}{2\sqrt{2} [1 + (M_i/M_j)]^{\frac{1}{2}}} \quad (6.107)$$

Analog hierzu gilt für die Wärmeleitfähigkeit von Gasen nach Masons und Saxena

$$\lambda_m = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_i \lambda_i}{\sum_{j=1}^n \psi_j \phi_{ij}} \quad (6.108)$$

Gleichung (6.106) gilt in guter Näherung mit einem Fehler von ca. 2% für Mischungen nichtpolarer Gase. Der Fehler von Gleichung (6.108) liegt bei ca. 4%.

6.7 Phasengleichgewichte[†]

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Thema der Phasengleichgewichte. Da hier nur eine kurze und knappe Einführung in dieses Thema gegeben werden kann, sei an dieser Stelle auf die weiterführende Veranstaltung „Thermodynamik der Gemische“ von Prof. Pfennig verwiesen.

6.7.1 Thermodynamisches Gleichgewicht

Besteht ein System aus zwei unterschiedlichen Phasen (z.B. flüssig-gasförmig oder flüssig-flüssig) und mehreren Komponenten, so findet abhängig vom Gleichgewichtszustand ein Austausch der Moleküle der Komponente i über die Phasengrenze statt. Im thermodynamischen Gleichgewicht ist die Anzahl der Moleküle, die diesen Phasenwechsel vollziehen in beide Richtungen identisch und die innere Energie U eines

Systems mit dem Volumen V , der Entropie S und bestehend aus N Komponenten ist konstant.

$$U = f(V, S, n_1, \dots, n_N) = \text{konst.} \quad (6.109)$$

Dass heißt, für die Änderung der inneren Energie muss gelten:

$$dU = 0. \quad (6.110)$$

Da die Änderung der inneren Energie bestimmt wird durch die Zustandsgrößen Temperatur:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, n_i}, \quad (6.111)$$

Druck:

$$p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, n_i}, \quad (6.112)$$

und chemisches Potenzial der Komponente i :

$$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{V, S, n_j \neq i} \quad (6.113)$$

kann gezeigt werden, dass thermodynamisches Gleichgewicht dann eintritt, wenn diese Zustandsgrößen für alle Phasen ($\alpha, \beta, \dots, \pi$) identisch sind.

$$T^\alpha = T^\beta = \dots = T^\pi, \quad (6.114)$$

$$p^\alpha = p^\beta = \dots = p^\pi, \quad (6.115)$$

$$\mu_i^\alpha = \mu_i^\beta = \dots = \mu_i^\pi. \quad (6.116)$$

Beschreiben Druck p und Temperatur T das Potenzial für Impuls- und Wärmetransport, so charakterisiert das chemische Potenzial die Tendenz einer Komponente i zwischen zwei Phasen überzugehen.

6.7.2 Das Chemische Potenzial

Das chemische Potenzial einer Komponente i ist u.a. eine Funktion der Temperatur, des Drucks, des Aggregatzustandes, der Kompression, der Löslichkeit und der Zusammensetzung und somit messtechnisch schwer zu erfassen. Für ein **reales Gasgemisch** lässt sich das chemische Potenzial der Komponente i $\mu_{i,g}$ allgemein ausdrücken in der Form:

$$\mu_{i,g} = RT \cdot \ln \left[\varphi_i \cdot \frac{\psi_{i,g} \cdot p}{p^0} \right] + \mu_i^0 \quad (6.117)$$

mit dem Druck im Bezugszustand p^0 und dem Systemdruck p .

- Die Größe μ_i^0 beschreibt das Verhalten idealer Gase und deren Bildung. Da sie lediglich eine Funktion der Temperatur ist, kann sie beim Phasengleichgewicht für konstante Temperatur vernachlässigt werden.
- Der Korrekturfaktor (Fugazitätskoeffizient) φ_i , definiert als

$$\varphi_i = \frac{f_i}{\psi_i \cdot p} \hat{=} \frac{\text{Fugazität}}{\text{Partialdruck}}, \quad (6.118)$$

beschreibt die Abweichung vom Verhalten eines idealen Gasgemischs. Dabei ist f_i die Fugazität der Komponente i . Des weiteren ist der Aktivitätskoeffizient durch

$$a_i = \frac{f_i}{f_i^0} \hat{=} \frac{\text{Fugazität}}{\text{Standardfugazität}} \quad (6.119)$$

definiert.

- Der Zusammensetzung der Gasphase wird durch den Partialdruck $p_i = \psi_{i,g} \cdot p$ ($\psi_{i,g}$: Stoffmengenanteil in der Gasphase) der Komponente i im Gasgemisch Rechnung getragen.

Für ein **reales Flüssigkeitsgemisch** lässt sich das chemische Potenzial der Komponente i $\mu_{i,l}$ allgemein wie folgt definieren:

$$\mu_{i,l} = RT \cdot \ln \left[\gamma_i \cdot \psi_{i,l} \cdot F_{P,i} \cdot \varphi_i^0 \cdot \frac{p_{\text{sat},i}}{p^0} \right] + \mu_i^0 \quad (6.120)$$

- Der Zusammensetzung der Gasphase wird durch den sich im Dampf-Flüssigkeitsgleichgewicht einstellenden Sättigungsdampfdruck $p_{\text{sat},i}$ der Komponente i Rechnung getragen.
- Der Korrekturfaktor (Fugazitätskoeffizient) φ_i^0 beschreibt die Abweichung vom Verhalten idealer Gase für die reine Komponente i .
- Der Korrekturfaktor $F_{P,i}$ berücksichtigt den Effekt der Kompression der reinen flüssigen Komponente.
- Die Zusammensetzung der flüssigen Phase wird beschrieben durch den Stoffmengenanteil $\psi_{i,\text{fl}}$.
- Der Korrekturfaktor (Aktivitätskoeffizient) γ_i berücksichtigt Effekte einer realen flüssigen Mischung, wobei

$$\gamma_i = \frac{a_i}{\psi_i} \hat{=} \frac{\text{Aktivität}}{\text{Stoffmengenanteil}} \quad (6.121)$$

Für ein **reales Feststoffgemisch** lässt sich das chemische Potenzial der Komponente i $\mu_{i,\text{f}}$ allgemein wie folgt definieren: Voraussetzung, die Systemtemperatur T ist nahe der Schmelztemperatur $T_{\text{s},i}$. In diesem Fall kann die Änderung des chemischen Potenzials mit Temperaturänderung des Feststoffes vernachlässigt werden und es folgt:

$$\mu_{i,\text{f}} = RT \cdot \ln [\gamma_{i,\text{f}} \cdot \psi_{i,\text{f}}] + \underbrace{\Delta h_{\text{s},i} \cdot \left(\frac{T}{T_{\text{s},i}} - 1 \right) + RT \cdot \ln \left[F_{P,i} \cdot \varphi_i^0 \cdot \frac{p_{\text{sat},i}}{p^0} \right]}_{\text{reiner realer Feststoff bei } T_{i,\text{s}} \approx T \text{ und } p} + \mu_i^0 \quad (6.122)$$

- Die Schmelzenthalpie wird beschrieben durch $\Delta h_{\text{s},i}$.
- Die Zusammensetzung der festen Phase wird beschrieben durch den Stoffmengenanteil $\psi_{i,\text{f}}$.
- Der Korrekturfaktor (Aktivitätskoeffizient) $\gamma_{i,\text{f}}$ berücksichtigt Effekte einer realen festen Mischung.

6.7.3 Löslichkeit von Gasen in Flüssigkeiten

Im Dampf-Flüssigkeitsgleichgewicht gilt Gleichheit der Temperatur $T_g = T_f$, des Drucks $p_g = p_f$ und des chemischen Potentials $\mu_{i,g} = \mu_{i,f}$ in beiden Phasen. Werden die obigen chemischen Potentiale eingesetzt, ergibt sich:

$$RT \cdot \ln \left[\gamma_i \cdot \psi_{i,f} \cdot F_{P,i} \cdot \varphi_i^0 \cdot \frac{p_{\text{sat},i}}{p^0} \right] + \mu_i^0 = RT \cdot \ln \left[\varphi_i \cdot \frac{\psi_{i,g} \cdot p}{p^0} \right] + \mu_i^0 \quad (6.123)$$

bzw. nach Kürzung identischer Größen:

$$\gamma_i \cdot \psi_{i,f} \cdot F_{P,i} \cdot \varphi_i^0 \cdot p_{\text{sat},i} = \varphi_i \cdot \psi_{i,g} \cdot p. \quad (6.124)$$

Dies kann mit Hilfe der Definitionen des Fugazitätskoeffizienten, sowie der Aktivität und des Aktivitätskoeffizienten umgeformt werden zu:

$$\gamma_i \cdot \psi_{i,f} \cdot f_i^0 = \varphi_i \cdot \psi_{i,g} \cdot p. \quad (6.125)$$

wobei vereinfachend angenommen wird, dass der Korrekturfaktor $F_{P,i} = 1$ ist.

Zur Berechnung des Phasengleichgewichtes ist es notwendig die beiden Fugazitätskoeffizienten bzw. die Fugazitäten zu bestimmen. Hierzu existieren zwei Wege:

- A: Verwendung einer Zustandsgleichung, um φ_g und φ_f zu berechnen, d.h.

$$\ln f_i = \frac{1}{RT} \int_V^\infty \left[\left(\frac{\partial p}{\partial n_i} \right)_{T,V,n_j} - \frac{RT}{V} \right] dV - \ln \frac{V}{n_i RT} \quad (6.126)$$

in beiden Phasen.

- B: Verwendung einer Zustandsgleichung nur für die Gasphase und Verwendung von Aktivitätskoeffizienten in der Flüssigphase, d.h.

$$f_{i,g} = \psi_{i,g} \cdot \varphi_{i,g} \cdot p \quad (6.127)$$

$$f_{i,f} = \gamma_i \cdot \psi_{i,f} \cdot f_i^0 \quad (6.128)$$

Beide Methoden besitzen sowohl Vor- als auch Nachteile, welche in der Tabelle 6.3 zusammengefasst sind:

Tabelle 6.3: Vergleich der Methoden zur Berechnung des Phasengleichgewichtes.
Quelle: „vt-Hochschulkurs 3“, 1979

Methode	Vorteile	Nachteile
A	<ol style="list-style-type: none">1. Kein Standardzustand erforderlich2. Prinzipiell werden nur pVTz-Daten benötigt3. Korrespondenzprinzip kann leicht benutzt werden4. Anwendbar in der Nähe des kritischen Punktes	<ol style="list-style-type: none">1. Keine wirklich gute Zustandsgleichung für den gesamten Dichtebereich vorhanden2. Starker Einfluss von Mischungsregeln auf das Resultat3. Anwendung auf polare Moleküle, große Moleküle und Elektrolyte bereitet Schwierigkeiten
B	<ol style="list-style-type: none">1. Einfache Modelle für die flüssige Mischung ergeben oft gute Resultate2. Die Temperaturabhängigkeit ist in erster Linie in der Standardfugazität und nicht im Aktivitätskoeffizienten enthalten3. Anwendbar auf die unterschiedlichsten flüssigen Mischungen, einschließlich Polymere und Elektrolyte	<ol style="list-style-type: none">1. Benötigt bei hohem Druck eine unterschiedliche, unabhängige Methode zur Berechnung des partiellen Molvolumens in der flüssigen Phase2. Schwierig anwendbar auf Mischungen, welche überkritische Komponenten enthalten3. Schwierig anwendbar in der Nähe des kritischen Punktes

6.7.3.1 Vereinfachungen

Wird im Folgenden vereinfacht angenommen, dass sich der Dampf ideal verhält ($\varphi_i = 1$) und zusätzlich die Löslichkeit sehr gering ist ($\psi_{i,\text{fl}} \rightarrow 0$), kann die Gleichung vereinfacht geschrieben werden in der Form:

$$\psi_{i,\text{fl}} \cdot \underbrace{\gamma_i^\infty \cdot F_{\text{P},i} \cdot \varphi_i^0 \cdot p_{\text{sat},i}}_{H_{i,j} : \text{Henry-Koeffizient}} = \psi_{i,\text{g}} \cdot p = p_i \quad (6.129)$$

bzw.

$$\psi_{i,\text{fl}} \cdot H_{i,j} = p_i \quad (6.130)$$

Dieser Zusammenhang ist bekannt als das **Henry'sche Gesetz** für die Löslichkeit von idealen Gasen in Flüssigkeiten. wobei $H_{i,j}$ den Henry-Koeffizienten für die Komponente i in die Komponente j beschreibt. In Abbildung 6.12 ist die Henry Konstante als Funktion der Temperatur für verschiedene Gase in Wasser und Ethanol dargestellt. Es wird deutlich, dass die Henry Konstante und somit die Löslichkeit abhängig vom jeweiligen Stoffpaar mit der Temperatur steigen oder sinken kann. In vielen Fällen kann das Henry Gesetz vereinfacht werden. Denn wird nun zusätzlich angenommen, dass sich die flüssige Mischung ideal verhält ($\varphi_i^0 = 1$) und dass die Flüssigkeit inkompressibel ist ($F_{\text{P},i} = 1$) so vereinfacht sich obige Gleichung zu:

$$\psi_{i,\text{fl}} \cdot p_{\text{sat},i} = \psi_{i,\text{g}} \cdot p \quad (6.131)$$

Dieser Zusammenhang ist bekannt als das **Raoult'sche Gesetz**. Dieses Gesetz verknüpft den Sättigungsdampfdruck $p_{\text{sat},i}$ der Komponente i mit dem Partialdruck $p_i = \psi_{i,\text{g}} \cdot p$, wobei der Sättigungsdampfdruck mit dem Stoffmengenanteil in der Flüssigkeit $\psi_{i,\text{g}}$ skaliert wird. Für einen Reinstoff ergibt sich die bekannte Beziehung (7.23). Diese Betrachtungsweise vernachlässigt einige wichtige Effekte, so dass sich zwei große Fehler ergeben:

- die berechnete Löslichkeit ist unabhängig vom Lösungsmittel,
- die Löslichkeit sinkt stets mit steigender Temperatur.

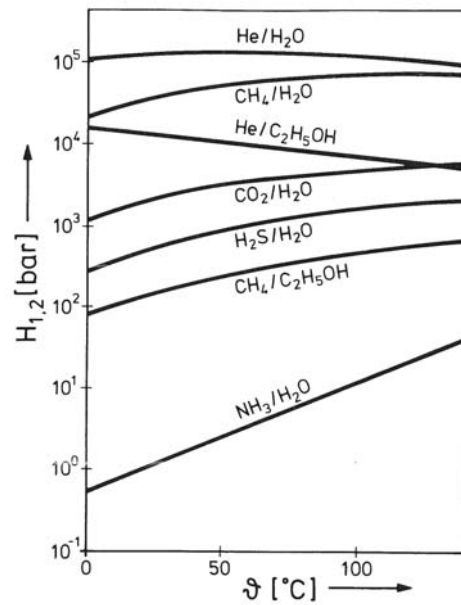


Abbildung 6.12: Henry-Konstanten [bar] für verschiedene Gase in Wasser bzw. Ethanol

Quelle: Gmehling, J. und Kolbe, B., Thermodynamik

6.7.4 Flüssig-Flüssig Gleichgewicht

Besteht ein System aus zwei flüssigen Phasen (‘ und ’’) so besteht ein Phasengleichgewicht für jede Komponente i zwischen beiden Phasen und folglich:

$$\mu'_{i,\text{fl}} = \mu''_{i,\text{fl}} \quad (6.132)$$

für $i = 1, 2, \dots, N$. Aus Gleichung 6.120 folgt sofort:

$$\psi'_{i,\text{fl}} \cdot \gamma'_i = \psi''_{i,\text{fl}} \cdot \gamma''_i \quad (6.133)$$

Das Verhältnis der Löslichkeit der Komponente i in beiden Phasen ist somit lediglich abhängig vom Verhältnis der Aktivitätskoeffizienten γ_i in beiden Phasen.

6.7.5 Fest-Flüssig Gleichgewicht

Durch Gleichsetzen der Gleichungen 6.122 und 6.120 ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$RT \cdot \ln [\gamma_{i,f} \cdot \psi_{i,f}] + \Delta h_{s,i} \cdot \left(\frac{T}{T_{i,s}} - 1 \right) = RT \cdot \ln [\gamma_i \cdot \psi_{i,f}] \quad (6.134)$$

Liegt der Feststoff als Reinstoff vor (Bsp. Kristall) und verhält sich die Komponente i in der Flüssigkeit ideal, so ergibt sich ein vereinfachter Ausdruck für den Stoffmengenanteil der Komponente i in der Flüssigkeit:

$$\ln \psi_{i,f} = \frac{\Delta h_{s,i}}{RT} \cdot \left(\frac{T}{T_{i,s}} - 1 \right) \quad (6.135)$$

6.8 Stoffdurchgang[†]

Unter Stoffdurchgang wird der Stofftransport einer Komponente aus einer fluiden Phase durch eine Phasengrenzfläche in eine zweite fluide Phase bezeichnet. In den vorangegangenen Abschnitten wurde im allgemeinen davon ausgegangen, dass die Konzentration an der Phasengrenze in derjenigen Phase bekannt ist, in der der Diffusionsprozess betrachtet wird. In vielen technischen Problemen ist diese Konzentration jedoch nicht gegeben. Daher ist es notwendig, die Beziehungen zwischen den Konzentrationen und der Phasengrenze zu untersuchen. Bei der Verdampfung konnten hier bereits Beziehungen für das Phasengleichgewicht im Einkomponentenfall aufgestellt werden. Zur Beschreibung des Stoffdurchgangs stehen verschiedene Modelle zur Verfügung, z.B. die Zweifilmtheorie (Abb. 6.13), die Penetrationstheorie oder die Oberflächenenerneuerungstheorie. Allen Modellen ist folgendes gemeinsam:

- Stoffübergang aus dem einen Medium an die Phasengrenzfläche
- Phasentransfer vom ersten ins zweite Medium
- Stoffübergang von der Phasengrenzfläche ins zweite Medium

6.8.1 Filmtheorie

Die Filmtheorie von Lewis u. Whitman (1924) beschreibt die älteste Stoffübergangstheorie. Um die Prinzipien dieser Theorie zu erklären, betrachten wir eine Substanz A, welche von einer ruhenden Wand in ein an der Wand entlang strömendes Fluid übertragen wird. Die Konzentration von A fällt von ξ_{A0} an der Plattenoberfläche auf $\xi_{A\delta}$ im Fluid. Die Filmtheorie geht davon aus, dass der Massentransfer in einer dünnen Schicht mit der Schichtdicke δ stattfindet. Die folgenden Voraussetzungen bzw. Annahmen liegen zugrunde:

- starre Grenzfläche
- eindimensionale Strömung parallel zur Grenzfläche ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$)
- Konzentrationsgefälle von ξ_{A0} auf $\xi_{A\delta}$ innerhalb der Grenzschicht δ_ξ
- vernachlässigbarer Stofftransport in x- oder z-Richtung
- $\xi = \text{konst.}$, $D_{AB} = \text{konst.}$, $\dot{n}_A''(y)$ ist hinreichend klein, stationäre Verhältnisse
- Stokesche Haftbedingung ist an der Grenzfläche erfüllt ($u(y=0) = 0$)
- Konzentrationsgrenzschicht \ll Geschwindigkeitsgrenzschicht ($\delta_\xi \ll \delta_u$)

Unter den oben genannten Voraussetzungen kann Gleichung (6.33) folgend vereinfacht werden:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\rho u}_{\approx 0} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \underbrace{\rho v}_{=0} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\rho w}_{=0} \frac{\partial \xi}{\partial z} - D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{\rho \frac{\partial \xi}{\partial x}}_{\approx 0} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\underbrace{\rho \frac{\partial \xi}{\partial z}}_{=0} \right) \right] = 0 \quad (6.136)$$

Daraus und unter Annahme konstanter Dichte folgt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.137)$$

Um die Geschwindigkeitskomponente u zu vernachlässigen, muss angenommen werden, dass die Konzentrationsgrenzschicht viel kleiner als die Geschwindigkeitsgrenzschicht ist, und daher die Geschwindigkeit in der Konzentrationsgrenzschicht auf Grund der starren Wand und der Haftbedingung vernachlässigbar klein ist. Diese Annahme ist eine Schwäche der Filmtheorie.

Zweimaliges Integrieren und Einsetzen der Randbedingungen $\xi(y = 0) = \xi_{A0}$ und $\xi(y = \delta_\xi) = \xi_{A\delta_\xi}$ führt auf

$$\frac{\xi_{A0} - \xi_A}{\xi_{A0} - \xi_{A\delta}} = \frac{y}{\delta_\xi} \quad (6.138)$$

Das Ergebnis ist ein lineares Konzentrationsprofil, welches auch mit dem der Diffusion in einer ruhenden Schicht übereinstimmt. Für die Diffusionsstromdichte ergibt sich aus Gleichung (6.30)

$$j_A'' = -\rho D \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right|_{y=0} = \rho D \frac{\xi_{A0} - \xi_{A\delta}}{\delta_\xi} \quad (6.139)$$

und für den Stoffübergangskoeffizienten g , definiert in Gleichung (6.42)

$$g = \rho \frac{D}{\delta_\xi} \quad (6.140)$$

Demnach ist der Stoffübergangskoeffizient proportional zum Diffusionskoeffizienten. Da die Konzentrationsgrenzschicht δ_ξ normalerweise nicht bekannt ist, kann der Stoffübergangskoeffizient g nicht durch die obige Gleichung bestimmt werden. Da jedoch der Stoffübergangskoeffizient für viele praktische Fälle bekannt ist, kann Gleichung (6.140) dazu dienen, die Konzentrationsgrenzschicht δ_ξ zu approximieren.

6.8.2 Zweifilmtheorie

In der von Lewis u. Whitman (1924) entwickelten Zweifilmtheorie wird angenommen, dass sich auf beiden Seiten der Phasengrenzfläche je eine dünne Konzentrationsgrenzschicht ausbildet, in welche die übergehende Komponente nur durch Diffusionsprozesse transportiert wird. Diese beiden Diffusionsgrenzschichten existieren nicht wirklich, sondern sind ein Gedankenmodell, um den Stoffdurchgang besser erfassen zu können. Weiterhin werden die folgenden Vereinfachungen in dieser Theorie gemacht:

- Der Stoffübergang vom einen ans andere Medium soll im Vergleich zu den Diffusionsvorgängen sehr schnell erfolgen, so dass der Widerstand des Phasentransfers gegenüber den diffusiven Widerständen vernachlässigt werden darf.

- An der Phasengrenze existiert ein stoffliches Gleichgewicht. Die Konzentration in der einen Phase steht somit zu jeder Zeit im Verteilungsgleichgewicht mit der Konzentration in der anderen Phase.

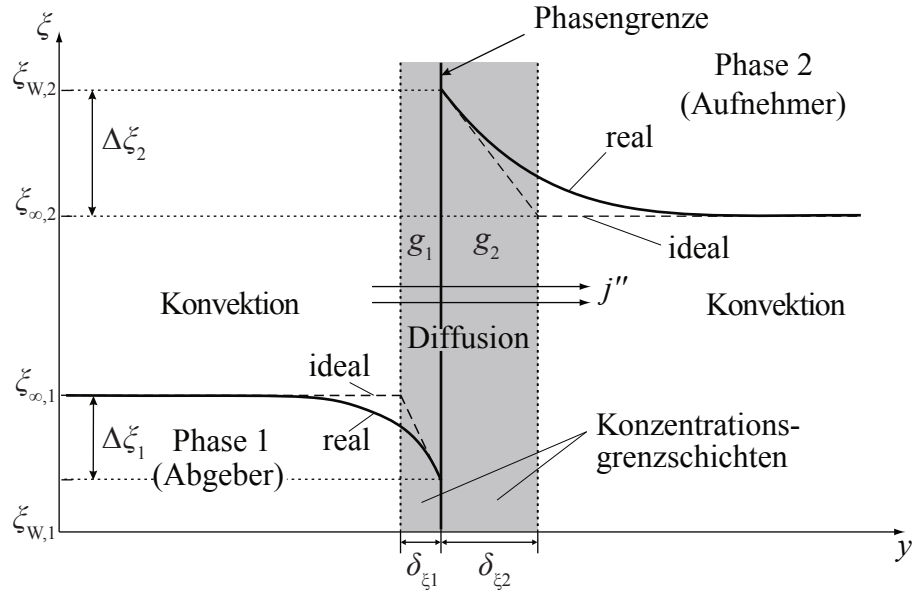


Abbildung 6.13: Konzentrationsverlauf und Grenzschichten gemäß der Zweifilmtheorie bei einem Stoffdurchgang durch eine Phasengrenze zwischen zwei fluiden Medien
Quelle: Christen (2010)

Der diffusive Stoffübergang aus dem ersten Medium an die Grenzfläche kann wie in Gleichung (6.42) mit Hilfe eines Stoffübergangskoeffizienten beschrieben werden als

$$j_1'' = g_1(\xi_{\infty,1} - \xi_{W,1}) \quad (6.141)$$

Analog folgt für den diffusiven Stoffübergang in der zweiten Phase

$$j_2'' = g_2(\xi_{W,2} - \xi_{\infty,2}) \quad (6.142)$$

Der Konzentrationssprung an der Phasengrenze ist abhängig von den beiden Fluiden welche die Phasengrenze umschließen.

6.8.2.1 Diffusion durch die Phasengrenze zweier flüssiger Phasen

Zwischen den Konzentration auf den beiden Seiten der Phasengrenzfläche besteht ein linearer Zusammenhang, der bei zwei flüssigen Phasen durch das Nernst'sche Verteilungsgesetz beschrieben werden kann:

$$K_N = \frac{\xi_{W,1}}{\xi_{W,2}} \quad (6.143)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (6.141) bis (6.143) und der Bedingung $j_1'' = j_2''$ folgt für den Stoffdurchgang durch die Phasengrenzfläche:

$$j'' = \frac{\xi_{\infty,1} - K_N \xi_{\infty,2}}{\frac{1}{g_1} + \frac{K_N}{g_2}} \quad (6.144)$$

Analog zum Wärmedurchgangskoeffizienten k kann auch hier ein Stoffdurchgangskoeffizient k_ξ bestimmt werden, so dass gilt

$$j'' = k_{\xi,1}(\xi_{\infty,1} - K_N \xi_{\infty,2}) \quad (6.145)$$

mit

$$\frac{1}{k_{\xi,1}} = \frac{1}{g_1} + \frac{K_N}{g_2} \quad (6.146)$$

6.8.2.2 Diffusion durch die Phasengrenze einer flüssigen und einer gasförmigen Phase

Ist die eine Fluidphase flüssig und die andere gasförmig, so wird das Gleichgewicht an der Phasengrenze durch das Gesetz von Henry bestimmt. Dabei ist der Partialdruck der Komponente i , p_i , proportional zur Stoffmengenkonzentration C_i der Komponente i in der flüssigen Phase $[\text{mol}/\text{m}^3]$. Der Proportionalitätsfaktor ist hierbei der Henry-Koeffizient $K_{Hc,i}$, welcher in der Einheit $[\text{Pa m}^3/\text{mol}]$ vorliegt:

$$p_i = K_{Hc,i} C_i \quad (6.147)$$

Die Henry-Koeffizienten sind stark Temperatur abhängig. Gemäß des Prinzips von Le Châtelier lösen sich bei tiefen Temperaturen mehr Gas in einer Flüssigkeit als bei hohen Temperaturen, da der Absorptionsvorgang eines Gases in einer Flüssigkeit

stets mit einer Freisetzung von Wärme (exothermer Prozess) verbunden ist (Absorptionskältemaschine). Die Temperaturabhängigkeit kann mit der Beziehung von Clausius-Clapeyron beschrieben werden (vgl. Abschnitt 7.1.1.1).

$$\frac{d \ln(K_{\text{Hc},i})}{dT} = -\frac{\Delta h_{\text{Abs},i}}{RT^2} \quad (6.148)$$

wobei $h_{\text{Abs},i}$ die Absorptionsenthalpie des Stoffs i in der Flüssigkeit [J/mol], R die universelle Gaskonstante und T die absolute Temperatur darstellt. Neben der Temperaturabhängigkeit zeigen die Henry-Koeffizienten auch eine gewisse Konzentrationsabhängigkeit.

Des weiteren ist es üblich, den Henry-Koeffizienten auf den Molanteil bzw. Stoffmengenanteil ψ der Komponente i in der flüssigen Phase zu beziehen.

$$p_i = H_{i,j} \psi_i \quad (6.149)$$

wobei in Lösungen sehr geringer Konzentration der folgende Zusammenhang zwischen den beiden Henry-Koeffizienten besteht

$$K_{\text{Hc},i} = H_{i,j} \frac{M_l}{\rho_l} \quad (6.150)$$

mit ρ_L als der Dichte und M_l als der molaren Masse der Flüssigkeit.

Für den Stoffmengenstrom ergibt sich damit:

$$\dot{n}_i'' = \frac{K_{\text{Hc},i} C_{i,\infty} - p_{i,\infty}}{R \frac{T}{\beta_2} + \frac{K_{\text{Hc},i}}{\beta_1}} \quad (6.151)$$

wobei β den Stoffübergangskoeffizient analog zu g bezogen auf die Stoffmenge darstellt⁶.

⁶Quelle: Christen (2010)

6.9 Stoffübertragung im Rieselfilm[†]

6.9.1 Konvektiver Stoffübergang zwischen Wand und laminarem Rieselfilm

In Analogie zu der in Abschnitt 7.3.1 eingeführten „Nusseltsche Wasserhauttheorie“ soll hier der wandseitige Stoffübergang an einen laminaren Rieselfilm betrachtet werden, wobei angenommen wird, dass sich an der Stelle $x = 0$, an der der Stofftransport beginnt, das Geschwindigkeitsprofil des Rieselfilmes bereits ausgebildet hat. Abbildung 6.14 veranschaulicht das Problem. Für nähere Erläuterungen, sowie die Lösung für den Fall der Stoffübergang zwischen Rieselfilm und Gas sei auf Mersmann (1986) verwiesen.

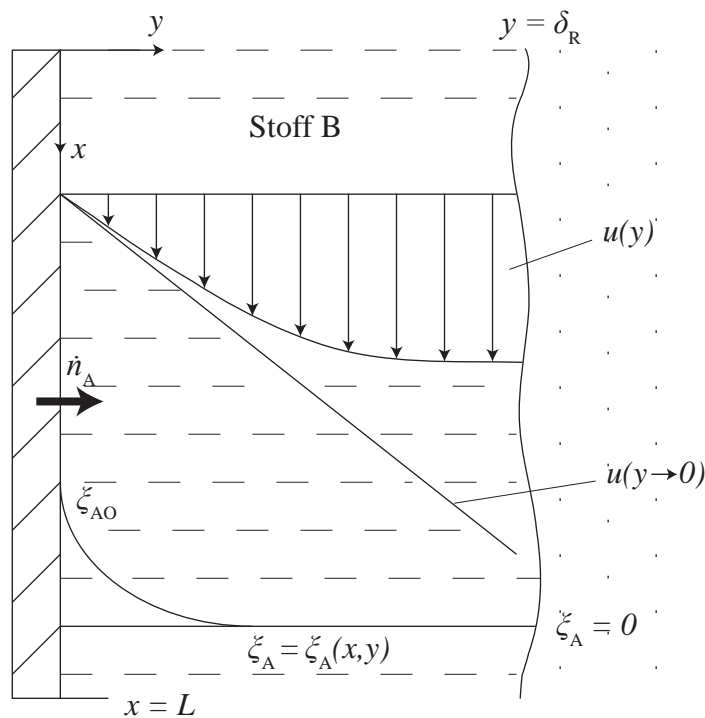


Abbildung 6.14: Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofil an einer starren Grenzfläche

Unter der Annahme, dass die Konzentrationsgrenzschicht δ_ζ viel geringer ist als die Geschwindigkeitsgrenzschicht δ_u , kann für den Geschwindigkeitsverlauf an der Wand

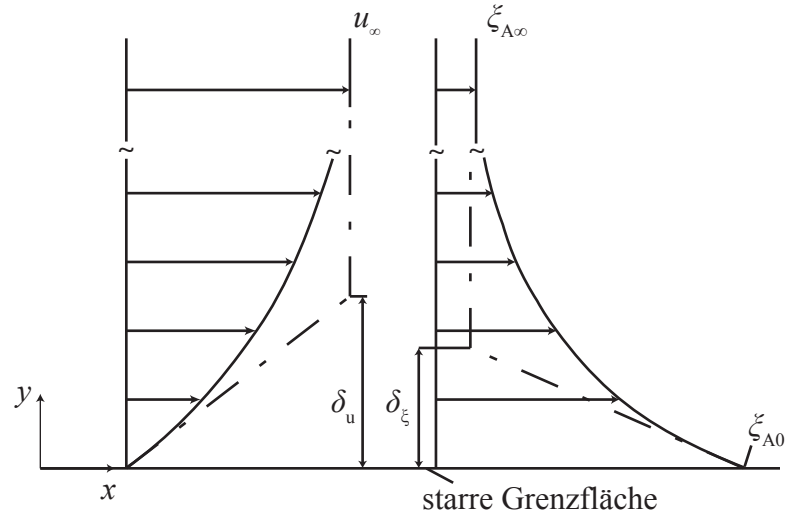


Abbildung 6.15: Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofil an einer starren Grenzfläche

vereinfacht ein lineares Profil angenommen werden (soll auf diese Annahme verzichtet werden, so muss mit dem vollständigen Geschwindigkeitsprofil innerhalb der Grenzschicht nach Gl. (7.51) gerechnet werden). Für $u = u(y)$ gilt demnach:

$$u(y) = \frac{g(\rho - \rho_d)}{2\eta} \delta^2 \left(2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) \approx \frac{g(\rho - \rho_d) \delta_{\text{Film}}}{\eta} y \quad (6.152)$$

Unter der Voraussetzung eines zweidimensionalen, zeitlich stationären Problems, einer vernachlässigbar kleinen Geschwindigkeit in Wandnormalenrichtung ($v \approx 0$) und $\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \gg \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$ kann Gleichung (6.33) folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=0} + \rho u \frac{\partial \xi}{\partial x} + \underbrace{\rho v}_{=0} \frac{\partial \xi}{\partial y} - D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{\rho \frac{\partial \xi}{\partial x}}_{\approx 0} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (6.153)$$

so dass für den inkompressiblen Fall

$$\frac{g(\rho - \rho_d) \delta_{\text{Film}}}{\eta} y \frac{\partial \xi}{\partial x} = D_{\text{AB}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \quad (6.154)$$

folgt. Die Randbedingungen lauten:

$$\text{RB1: für } x = 0 \text{ gilt: } \xi_A = 0 \quad (6.155)$$

$$\text{RB2: für } y = 0 \text{ gilt: } \xi_A = \xi_{A0} \quad (6.156)$$

$$\text{RB3: für } y = \infty \text{ gilt: } \xi_A = 0 \quad (6.157)$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, empfiehlt es sich wieder, eine geeignete Substitution durchzuführen:

$$\Phi = y \left(\frac{g(\rho - \rho_d)\delta_{\text{Film}}}{9\eta D_{\text{AB}}x} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.158)$$

Durch diese Substitution hängt ξ_A nur noch von Φ ab:

$$\xi_A = \xi_{A0}f(\Phi) \text{ statt } \xi_A = \xi_A(x,y) \quad (6.159)$$

Wie bei den selbst ähnlichen Profilen einer Grenzschichtströmung ist auch hier eine Verknüpfung zwischen den beiden Koordinaten x und y gegeben. Daher verschwindet auch eine Randbedingung. Für die transformierten Randbedingungen gilt:

$$\text{RB1: für } \Phi = 0 \text{ gilt: } f = 1 \quad (6.160)$$

$$\text{RB2: für } \Phi = \infty \text{ gilt: } f = 0 \quad (6.161)$$

Die Transformation der Differentialgleichung (6.153) ergibt sich durch Ableiten von $\xi_A = \xi_{A0}f$ unter Anwendung der Kettenregel:

$$\frac{\partial \xi_A}{\partial x} = \xi_{A0} \frac{df}{d\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ mit } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{y}{3x} \left(\frac{g(\rho - \rho_d)\delta_{\text{Film}}}{9\eta D_{\text{AB}}x} \right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{y}{3x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (6.162)$$

und

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial y^2} = \xi_{A0} \left[\frac{d^2 f}{d\Phi^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \underbrace{\frac{df}{d\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}}_{=0} \right] \text{ mit } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(\frac{g(\rho - \rho_d) \delta_{\text{Film}}}{9\eta D_{AB} x} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.163)$$

Einsetzen der Gleichungen (6.161) und (6.162) in (6.153) ergibt:

$$\frac{d^2 f}{d\Phi^2} = -3\Phi^2 \frac{df}{d\Phi} \quad (6.164)$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung ist wiederum eine Substitution $A = df/d\Phi$ notwendig

$$\frac{dA}{d\Phi} = -3\Phi^2 A \rightarrow \frac{dA}{A} = -3\Phi^2 d\Phi \quad (6.165)$$

Dessen Integration und Rücktransformation führt zu

$$Ac_1 = \exp(-\Phi^3) \Rightarrow c_1 \frac{df}{d\Phi} = \exp(-\Phi^3). \quad (6.166)$$

Eine weitere Integration liefert:

$$f = \frac{1}{c_1} \int_0^\Phi \exp(-\Phi^3) d\Phi + c_2 \quad (6.167)$$

Die Integrationskonstante c_1 und c_2 ergeben sich aus den Randbedingungen Gln. (6.160) und (6.161). Aus Randbedingung (6.160) folgt $c_2 = 1$ und aus Randbedingung (6.161) folgt $c_1 = -\int_0^\infty \exp(-\Phi^3) d\Phi$.

Somit ist das Konzentrationsprofil definiert durch

$$\xi_A = \xi_{A0} \left(1 - \frac{\int_0^\Phi \exp(-\Phi^3) d\Phi}{\int_0^\infty \exp(-\Phi^3) d\Phi} \right) \quad (6.168)$$

Das bestimmte Integral im Nenner ist auf die Gammafunktion $\Gamma(x)$ zurückzuführen. Der Wert ist $\Gamma(4/3) \approx 0.893$. Um den mittleren, von der Wand an den laminaren

Rieselfilm abgegebenen Stoffmassenstrom zu bestimmen, ist Gleichung (6.30) über die Lauflänge des Films L zu integrieren.

$$j''_{Ay} = -\frac{\rho D_{AB}}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (6.169)$$

Für den Konzentrationsgradienten an der Wand in Abhängigkeit der x -Koordinate ergibt sich

$$\left(\frac{\partial \xi_A}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \xi_A}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\rho \xi_{A0}}{\Gamma(4/3)} \underbrace{\exp(-\Phi^3)}_{=0 \text{ für } y=0} \left(\frac{g(\rho - \rho_d) \delta_{\text{Film}}}{9\eta D_{AB} x} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.170)$$

und somit für den gemittelten Massenstrom

$$j''_{Ay} = \frac{3D_{AB}\rho\xi_{A0}}{2\Gamma(\frac{4}{3})} \left(\frac{g(\rho - \rho_d) \delta_{\text{Film}}}{9\eta D_{AB} L} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.171)$$

Mit einem mittleren Stoffübergangskoeffizienten, der hier wegen $\xi_{A\infty} = 0$ wie folgt definiert ist

$$j''_{Ay} = g(\xi_{A0} - \xi_{A\infty}) = g\xi_{A0} \quad (6.172)$$

und der mittleren Geschwindigkeit des Rieselfilms (Gl. (7.53)) folgt:

$$\frac{g\delta_{\text{Film}}}{D_{AB}\rho} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2\Gamma(\frac{4}{3})} \left(\frac{u_m \delta_{\text{Film}}^2}{D_{AB} L} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.173)$$

Dies führt mit den bereits bekannten Kennzahlen, Sherwood-Zahl (Sh), Reynoldszahl (Re) und Schmidt-Zahl (Sc) auf den folgenden Zusammenhang:

$$\text{Sh} = 1,16 \left(\text{Re}_{\text{Film}} \text{Sc} \frac{\delta_{\text{Film}}}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.174)$$

Wie Gleichung (6.173) zeigt, ist der Stoffübergangskoeffizient g nicht direkt proportional zum Diffusionskoeffizienten. Es gilt:

$$g \propto D_{AB}^{\frac{2}{3}} \quad (6.175)$$

Diese Beziehung ist gültig, falls starre Grenzflächen überströmt werden und wenn die Konzentrationsgrenzschicht kleiner als die Geschwindigkeitsgrenzschicht ist. Dies ist der Fall für $Sc > 1$, was für Flüssigkeiten im allgemeinen gilt, während in Gasen in der Regel $Sc < 1$ ist.

Frage zum Verständnis:

- Was unterscheidet die Herleitung dieses Stoffübergangskoeffizienten von dem in Kapitel Konvektion (WSÜ 1) hergeleiteten Wärmeübergangskoeffizienten?

Kapitel 7

Wärmeübertragung bei Verdampfung und Kondensation[†]

Während die Konvektion durch physikalische Größen wie Viskosität, Dichte, Wärmeleitfähigkeit, thermische Ausdehnungskoeffizienten und durch geometrische Größen beschrieben werden kann, sind bei Siedevorgängen darüber hinaus diejenigen Variablen von Bedeutung, die mit der Phasenumwandlung verknüpft sind, wie die Verdampfungsenthalpie, Siedetemperatur, Dichte des Dampfes und Grenz- bzw. Oberflächenspannung. Zudem können die Mikrostruktur und der Werkstoff der Heizfläche eine Rolle spielen. Auf Grund der Vielzahl von Variablen ist es schwieriger als bei anderen Problemen der Wärmeübertragung, Gleichungen zur Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten herzuleiten.

Dieses Kapitel beschäftigt sich daher zunächst mit der Betrachtung des Phasengleichgewichtes, der Existenz metastabiler Zustände und des Phasengleichgewichtes an gekrümmten Oberflächen, wie z.B. eines Tropfens oder einer Dampfblase. Im Anschluss wird die Verdampfung in Behältern ohne von außen aufgeprägte Strömungsbewegungen und die Verdampfung in konvektiv durchströmten Geometrien behandelt. Bei der Kondensation wird auf die Filmkondensation an einer senkrechten Platte und auf die Tropfenkondensation eingegangen.

7.1 Physikalische Grundlagen

7.1.1 Phasengleichgewicht

An der Grenzfläche zwischen flüssiger und gasförmiger Phase finden gleichzeitig zwei Prozesse statt: Zum einen können Teilchen in der flüssigen Phase diese an der Oberfläche in Richtung Gasphase verlassen (verdampfen), zum anderen können Teilchen aus der Gasphase, die auf die Oberfläche treffen, in die flüssige Phase übergehen (kondensieren). Ist der Teilchenstrom in beide Richtungen gleich groß, so stehen beide Phasen im Gleichgewicht. In einer Flüssigkeit, die lediglich aus einer Komponente besteht, ist die Anzahl der verdampfenden Teilchen proportional zur Temperatur. In der Gasphase ist die Anzahl der kondensierenden Teilchen proportional zum Druck. Da die Temperatur der beiden Phasen im thermodynamischen Gleichgewicht übereinstimmt ist der Sättigungsdampfdruck, der in der Gasphase im Gleichgewicht vorherrschen muss, abhängig von der Temperatur.

Diese Abhängigkeit des Sättigungsdrucks von der Temperatur wird für Wasser in Abb. 7.1 durch ein Phasendiagramm beschrieben. In den folgenden Abschnitten werden verschiedene mathematische Beschreibungen für den Sättigungsdruck in Abhängigkeit der Temperatur gegeben.

7.1.1.1 Die Flüssigkeits-Dampf Phasengrenze – Clausius-Clapeyron Gleichung

Beim Verdampfen muss Arbeit gegen die intermolekularen Anziehungskräfte zwischen den Teilchen in der Flüssigkeit geleistet werden. Bei der Kondensation wird die gleiche Energiemenge wieder frei. In der Thermodynamik wird die bei konstantem Druck von einem System aufgenommene oder abgegebene Wärme als Enthalpieänderung ΔH bezeichnet. Bezogen auf die Menge von einem Mol wird die Energie, die bei konstanter Temperatur zur Verdampfung notwendig ist, molare Verdampfungsenthalpie $\Delta h_{V,m}$ genannt.

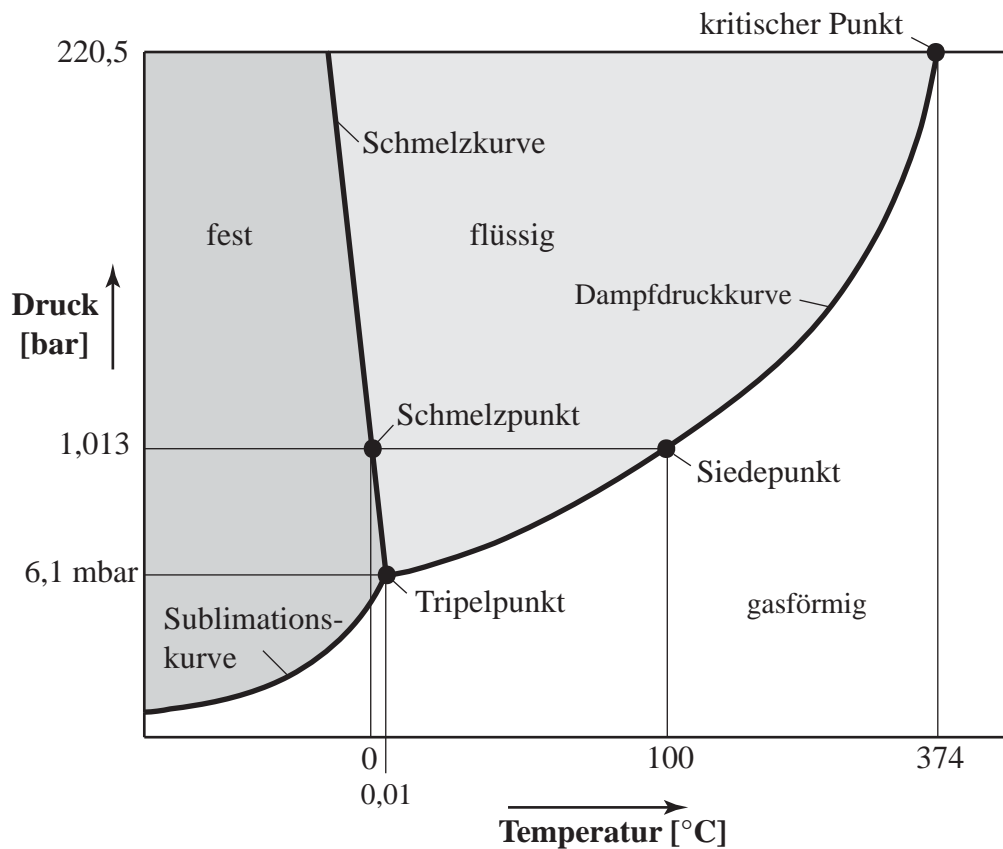


Abbildung 7.1: Phasendiagramm für Wasser (schematisch)

Eine Beziehung zwischen der molaren Verdampfungsenthalpie, dem Dampfdruck p und der absoluten Temperatur T wurde 1834 von Clapeyron empirisch gefunden und 1850 von Clausius thermodynamisch begründet.

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta h_{V,m}}{T(v_{d,m} - v_{fl,m})} \quad (7.1)$$

Hierbei sind $v_{d,m}$ und $v_{fl,m}$ die Molvolumina des Dampfes (d) bzw. der Flüssigkeit (fl), wobei sowohl v_d und v_{fl} als auch $\Delta h_{V,m}$ Funktionen der Temperatur sind. **Bei geringen Dampfdrücken** ($p \leq 1\text{bar}$) kann $\Delta h_{V,m}$ in guter Näherung als temperaturunabhängig angenommen werden. Da zudem das Molvolumen des Dampfes um ein Vielfaches grösser ist als das der Flüssigkeit, kann die Differenz ($v_{d,m} - v_{fl,m}$)

durch $v_{d,m}$ ersetzt werden. Unter Verwendung der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$v_{d,m} = \frac{RT}{p} \quad (7.2)$$

lässt sich Gleichung (7.1) zu folgender Näherung vereinfachen

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta h_{V,m} p}{RT^2}. \quad (7.3)$$

Eine Integration ergibt:

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{\Delta h_{V,m}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad (7.4)$$

Wird als erstes Wertepaar T_1, p_1 die Gleichgewichtstemperatur $T_1 = T_{\text{sat},0}$ bei Standarddruck $p_1 = p_{\text{sat},0}$ (Standardsiedepunkt) gewählt, so folgt:

$$\ln \frac{p_2}{p_{\text{sat},0}} = \frac{\Delta h_{V,m}}{R} \left(\frac{1}{T_{\text{sat},0}} - \frac{1}{T_2} \right) \quad (7.5)$$

Mit dieser Gleichung kann zum einen durch experimentelle Untersuchungen der Verdampfungstemperatur bei verschiedenen Drücken die molare Verdampfungsenthalpie $\Delta h_{V,m}$ bestimmt werden. Zum anderen kann Gleichung (7.5) dazu verwendet werden, den Dampfdruck in Abhängigkeit der Temperatur zu beschreiben. Siehe auch Atkins (1990) und Kortüm u. Lachmann (1981).¹

7.1.1.2 Der Einfluss des Druckes auf den Dampfdruck

Wird die flüssige Phase einer Dampf-Flüssigkeits-Phasengrenze mit einem erhöhten Druck beaufschlagt, ohne dabei jedoch zunächst den Partialdruck der Dampfphase zu ändern, so verändert sich der Gleichgewichtszustand. Eine Erhöhung des Drucks auf die Flüssigphase kann z.B. durch einen zusätzlichen Inertgasanteil erfolgen, wobei an dieser Stelle Effekte ignoriert werden sollen, welche sich dadurch ergeben, dass dieser zusätzliche Gasanteil in der Flüssigphase in Lösung geht und die Stoffeigenschaften verändert. Wenn dieser zusätzliche Druck auf die Flüssigphase ausgeübt wird steigt der Sättigungsdampfdruck an. Anschaulich werden die Moleküle aus der

¹Beispiel: Dampfdruckkurve und Pomerantschuk-Kühlung

flüssigen Phase herausgedrückt und entflüchten in die Gasphase. Der Dampfdruck der mit Druck beaufschlagten Flüssigkeit kann durch die Gleichgewichtsbedingung $\mu_{\text{fl}} = \mu_{\text{d}}$ bestimmt werden. Eine detaillierte Beschreibung des Dampf-Flüssigkeits-Gleichgewichts auf Basis der chemischen Potentiale findet sich in Kapitel 6.7. Für jede den Gleichgewichtszustand beibehaltende Veränderung muss eine Veränderung in μ_{fl} gleich sein mit einer Veränderung in μ_{d} , so dass $d\mu_{\text{d}} = d\mu_{\text{fl}}$ gilt. Wird der Gesamtdruck P auf die Flüssigkeit um dP erhöht, so ändert sich das chemische Potenzial der Flüssigkeit um:

$$d\mu_{\text{fl}} = v_{\text{m,fl}} dP \quad (7.6)$$

Das chemische Potenzial des Dampfes ändert sich um:

$$d\mu_{\text{d}} = v_{\text{m,d}} dp_i \quad (7.7)$$

wobei dp_i die Veränderung des Sättigungsdampfdrucks p_i bzw. des Partialdrucks der Dampfphase ist. Wird die Dampfphase als ideales Gas behandelt so folgt:

$$d\mu_{\text{d}} = \frac{RT dp_i}{p_i} \quad (7.8)$$

Ein Gleichsetzen der Gln. 7.6 und 7.7 ergibt:

$$\frac{RT dp_i}{p_i} = v_{\text{m,fl}} dP \quad (7.9)$$

Diese Gleichung kann unter Kenntniss der Integrationsgrenzen integriert werden. Falls kein zusätzlicher Druck auf die Flüssigkeit ausgeübt wird, d.h. der Gesamtdruck P dem Partialdruck des Dampfes p_i entspricht, so entspricht der Partialdruck p_i auch dem normalen Sättigungsdampfdruck p_{sat} . Falls ein zusätzlicher Druck (ΔP) auf die Flüssigkeit wirkt, so ist der Gesamtdruck $P = p_i + \Delta P$. Bezeichnen wir den gesuchten Sättigungsdampfdruck mit p_{sat}^* so folgt für die Integration:

$$RT \int_{p_{\text{sat}}}^{p_{\text{sat}}^*} \frac{dp_i}{p_i} = \int_{p_{\text{sat}}}^{p_{\text{sat}} + \Delta P} v_{\text{m,fl}} dP \quad (7.10)$$

Unter der Annahme, dass das molare Volumen der Flüssigkeit konstant sei, führt die Integration zu

$$RT \ln \frac{p_{\text{sat}}^*}{p_{\text{sat}}} = v_{\text{m,fl}} \Delta P, \quad (7.11)$$

und der gesuchte Sättigungsdampfdruck bei einem zusätzlichen Druck auf die Flüssigkeit ist

$$p_{\text{sat}}^* = p_{\text{sat}} e^{v_{\text{m,fl}} \Delta P / RT} \quad (7.12)$$

7.1.1.3 Antoine-Gleichung

Eine zahlenmäßig genauere und damit häufiger verwendete empirische Gleichung für den Dampfdruck stellt die Antoine-Gleichung dar:

$$\log p = A - \frac{B}{T + C} \quad (7.13)$$

Hier ist p der Zahlenwert des Drucks und A, B und C sind stoffabhängige Konstanten, die durch Anpassung an experimentell ermittelte Dampfdruckkurven bestimmt werden. Im Anhang 8 sind Zahlenwerte der Konstanten für eine Auswahl von Stoffen gegeben.

7.1.1.4 Zustandsgleichung von „van der Waals“

Experimentelle Beobachtungen zeigen, dass das Gesetz für ideale Gase bei höheren Drücken das Verhältnis aus Druck, Volumen und Temperatur nicht mehr korrekt beschreibt, da es bei zunehmendem Druck zu Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Molekülen kommt. Eine allgemeinere Gleichung hat „van der Waals“ im Jahr 1873 veröffentlicht (van der Waals (1873)). Ausgehend von der Vorstellung, dass Gase von herumschwirrenden Molekülen aufgebaut sind, ist der Druck des Gases auf die Wand als Resultierende einer großen Zahl von Molekülstößen aufzufassen. Da die Moleküle nicht nur gegen die Wand prallen sondern sich bei hohen Drücken auch gegenseitig beeinflussen muss dieser Effekt in einer Zustandsgleichung mit berücksichtigt werden. Die Bahnlänge zwischen je zwei Stößen eines Moleküls ist im Verhältnis zur Größe des Moleküls gewöhnlich sehr groß, da das Molekül selbst einen sehr kleinen Raum einnimmt, in welchen ein anderes Molekül nicht eindringen kann. Der Molekülbewegung steht daher ein Raum zur Verfügung der nur etwas kleiner

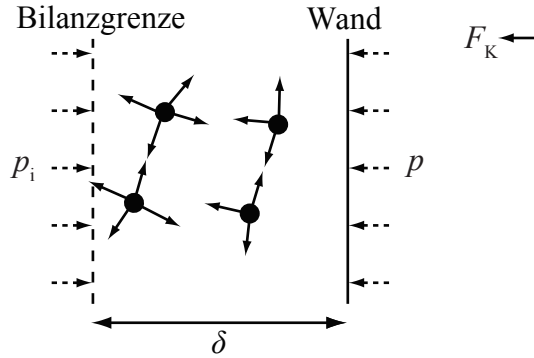


Abbildung 7.2: Schematische Darstellung der Kohäsionskräfte zwischen Molekülen

ist als das gesamte Gasvolumen. Im Fall sehr hoher Dichten macht sich dieses Molekülvolumen bemerkbar, da hier Drucksteigerungen nicht mehr ausreichen, um den Gasraum noch weiter zu verkleinern, d.h. um die Moleküle ineinander zu schieben. Wird das Grenzvolumen hier mit b bezeichnet, so beschreibt $(v_m - b)$ den freien Raum zwischen den Molekülen bezogen auf die Stoffmenge und die erste berichtigte Zustandsgleichung ergibt sich zu:

$$p(v_m - b) = RT \quad (7.14)$$

Diese Gleichung geht für $b \ll v_m$ in die ideale Gasgleichung über und zeigt, dass p sehr groß werden muss wenn $v_m \approx b$ ist.

Eine weitere Berichtigung ergibt sich aus der Betrachtung der gegenseitigen Fernbeeinflussung der Moleküle, die unter dem Begriff Kohäsion bekannt ist. Bei großen Entfernungen (ideale Gase) verschwinden diese Kohäsionskräfte. Bei großer Dichte nehmen diese Kräfte jedoch schnell zu. Abbildung 7.2 zeigt schematisch wie diese Kräfte im Innern des Gases und in der Nähe der Wand wirken. Für ein Molekül im Innern des Gases heben sich diese Kräfte im Mittel auf, da sie auf diese aus allen Richtungen wirken. Auf ein Molekül an der Gasoberfläche, d.h. in Wandnähe, wirken diese Kräfte einseitig in Richtung des Gasinnern, so dass nach außen hin ein geringerer Druck wirkt als ohne diese Kräfte. Diese Fernkraft (Kohäsionskraft, F_K), die auf ein Molekül wirkt, ist proportional zur Anzahl der Moleküle aus der nächsten Umgebung und somit proportional zur Dichte $1/v_m$. Die Druckdifferenz $\Delta p = p_i - p_a$ ist aus dem Kräftegleichgewicht $A \cdot \Delta p = F_K \cdot n/\delta$ zu ermitteln, wobei n die Anzahl der Moleküle beschreibt. Da $n/(A \cdot \delta)$ wiederum die Dichte des Gases ist, ergibt

sich für den im Innern des Gases herrschenden Druck p_i eine Proportionalität von $(1/v_m)^2$:

$$p_i = p + \frac{a}{v_m^2}, \quad (7.15)$$

wobei a eine stoffspezifische Konstante darstellt. Da für das Verhalten des Gases der Innendruck maßgeblich ist, kann die Gl. (7.14) zu:

$$\left(p + \frac{a}{v_m^2}\right)(v_m - b) = RT \quad (7.16)$$

oder zu:

$$p = \frac{RT}{v_m - b} - \frac{a}{v_m^2}. \quad (7.17)$$

erweitert werden. Diese kubische Zustandsgleichung beschreibt den Verlauf der Isothermen im p-v-Diagramm in kontinuierlicher Form. Für nähere Erläuterungen sei auf Bosnjakovic u. Knoche (1998a) verwiesen.

7.1.2 Phasengleichgewicht bei Kondensation und Verdampfung

Befindet sich ein System mit einer Dampf- und einer Flüssigphase im Sättigungszustand, so sind die Temperaturen und die Drücke des Dampfes und der Flüssigkeit gleich, soweit sie im thermodynamischen Gleichgewicht stehen. Dieser Zustand kann auch als „statischer Siedezustand“ bezeichnet werden. Die vorherrschende Temperatur entspricht der Sättigungstemperatur für den gegebenen Druck (siehe Abb. 7.1). Der Verdampfungsvorgang ist hingegen ein dynamischer Prozess, da an der Phasengrenze, an der die Umwandlung der Flüssigkeit in Dampf stattfindet, die hierzu notwendige Verdampfungswärme ($\Delta h_{V,m}$) zugeführt werden muss. Für diese Wärmezufuhr ist, wie für jeden anderen Wärmeübergang, ein treibendes Potenzial in Form einer Temperaturdifferenz notwendig. Daher können bei dem dynamischen Verdampfungsvorgang die Temperaturen der Flüssig- und der Dampfphase nicht mehr gleich sein. Dies macht den Verdampfungsvorgang zu einem weitaus komplexeren Phänomen als z.B. den statischen Sättigungszustand.

7.1.2.1 Metastabile Zustände

Wird in einem System mit einer einzigen flüssigen Phase der Druck reduziert, so bilden sich erste Dampfblasen, z.B. an kleinen Gaseinschlüssen in mikroskopischen Vertiefungen an der rauhen Behälterwand (Siedekeim), siehe Abb. 7.3 (links). Wird umgekehrt in einem System aus einer einzigen gasförmigen Phase der Druck erhöht, so bilden sich erste Flüssigkeitstropfen, z.B. an kleinen Feststoffpartikeln oder Verunreinigungen (Kondensatkeime), siehe Abb. 7.3 (rechts). Diese beiden Prozesse fin-

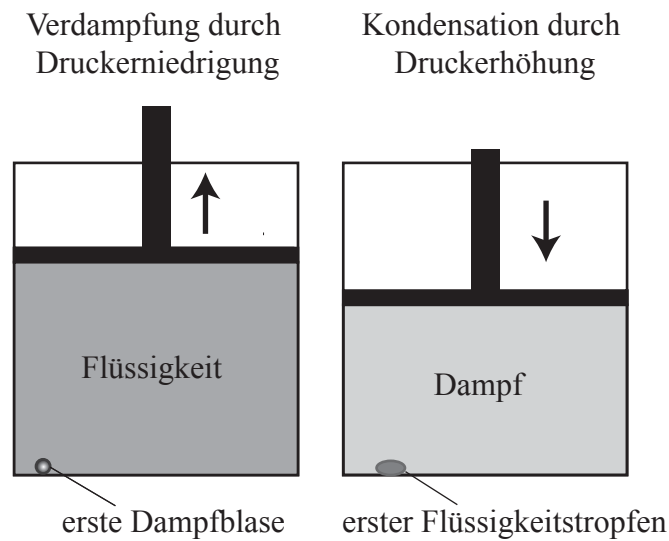


Abbildung 7.3: Verdampfung durch Druckreduzierung und Kondensation durch Druckerhöhung

den außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichtes statt, da zum Phasenübergang eine bestimmte „Potenzialschwelle“ bzw. „Aktivierungsenergie“ überschritten werden muss. Zur Veranschaulichung ist in Abb. 7.4 das Dampf-Flüssigkeits-Gleichgewicht eines Einstoffsystems im p - v -Diagramm dargestellt. Zusätzlich zu den Phasengrenzlinien des Nassdampfgebietes ist eine, mit einer kubischen Zustandsgleichung berechnete, Isotherme gezeigt. Die Punkte A und B entsprechen dem Dampf-Flüssigkeits-Gleichgewicht beim Dampfdruck $p_{\text{sat}}(T)$. Zwischen den Punkten C und D besitzt die Isotherme eine positive Steigung, d.h.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v_m} \right)_T > 0 \quad (7.18)$$

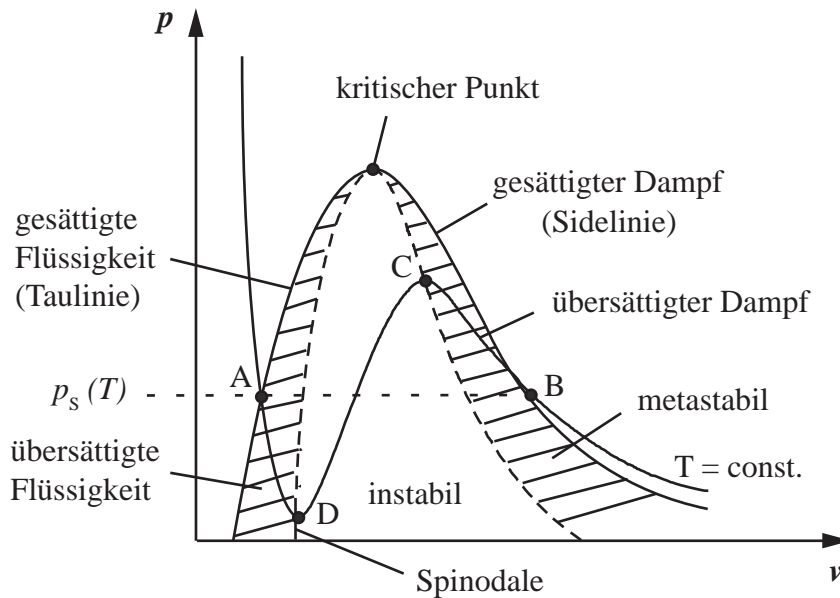


Abbildung 7.4: Phasengleichgewicht mit metastabilen Zuständen
Quelle: Stephan u. a. (2010)

Diese Bedingung widerspricht der mechanischen Stabilität, da hier eine Volumenzunahme zu einer Druckzunahme führt und umgekehrt. Die Zustände zwischen diesen Punkten sind deshalb thermodynamisch instabil und nicht existent. Die Verbindungskurve der Minima und Maxima aller Isothermen, welche die instabilen von den stabilen Zuständen abgrenzt wird als Spinodale bezeichnet. Zwischen der Spinodalen und den Phasengrenzkurven (Siede- und Taulinie) liegt das sogenannte metastabile Gebiet. Diese metastabilen Zustände sind im Sinne der thermodynamischen Stabilitätstheorie stabil. Um ein System, das sich im metastabilen Zustand befindet in ein stabiles Gleichgewicht hin zu überführen sind endliche Störungen notwendig. Diese Störungen sind, wie oben bereits beschrieben, Keimstellen, die die notwendige Potenzienschwelle reduzieren. Diese metastabilen Zustände sind für das Phänomen des Siedeverzugs verantwortlich. Flüssigkeiten lassen sich, im Falle geringer Störungen, über ihren Siedepunkt hinaus erhitzen, ohne dass ein Sieden beginnt. Dieser Zustand ist jedoch auf Grund seiner Gefährlichkeit oftmals unerwünscht, da die überhitzte Flüssigkeit bei einer geringen Störung spontan verdampfen und damit sehr große Gasvolumina erzeugen kann. Für weitergehende Informationen sei hier auf Stephan u. a. (2010) verwiesen.

7.1.2.2 Phasengleichgewicht an einer gekrümmten Phasengrenze

Auf Grund der Oberflächenspannung bilden sich im ruhenden Zustand Dampfblasen oder Flüssigkeitstropfen in Form einer Kugel. Das thermodynamische Gleichgewicht unterscheidet sich hier von dem an einer ebenen Phasengrenze.

Für eine sich in einer Flüssigkeit befindenden Dampfblase gilt sowohl das thermische

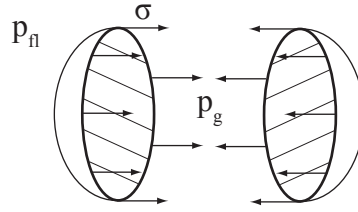


Abbildung 7.5: Oberflächenspannung an einer Kugel

Gleichgewicht $T_g = T_{fl}$ als auch das mechanische Gleichgewicht. Die Kräftebilanz einer beliebigen, die Kugel halbiegenden Schnittebene in Normalenrichtung ergibt, dass die Oberflächenkräfte σ , gewichtet mit dem Umfang $2\pi R$ und die Druckkräfte, gewichtet mit der Schnittfläche πR^2 , gleich sein müssen.

$$(p_g - p_{fl})\pi R^2 = 2\pi R\sigma \quad (7.19)$$

dabei ist R der Blasenradius und σ die Oberflächenspannung [N/m]. Für den Überdruck in der Blase folgt die Young-Laplace-Gleichung

$$\Delta p = p_g - p_{fl} = \frac{2\sigma}{R} \quad (7.20)$$

Für den Dampfdruck gilt daher in Abhängigkeit vom Sättigungsdruck $p_{sat}(T)$ und Blasenradius nach Thomson²

$$p_g = p_{sat}(T) - \frac{\rho_g}{\rho_{fl} - \rho_g} \frac{2\sigma}{R} \quad (7.21)$$

und für den Flüssigkeitsdruck

$$p_{fl} = p_{sat}(T) - \frac{\rho_{fl}}{\rho_{fl} - \rho_g} \frac{2\sigma}{R}. \quad (7.22)$$

²Eine Herleitung dieser Gleichung findet sich in Stephan (1988)

Die Gleichungen (7.21) und (7.22) beschreiben den Zusammenhang zwischen dem

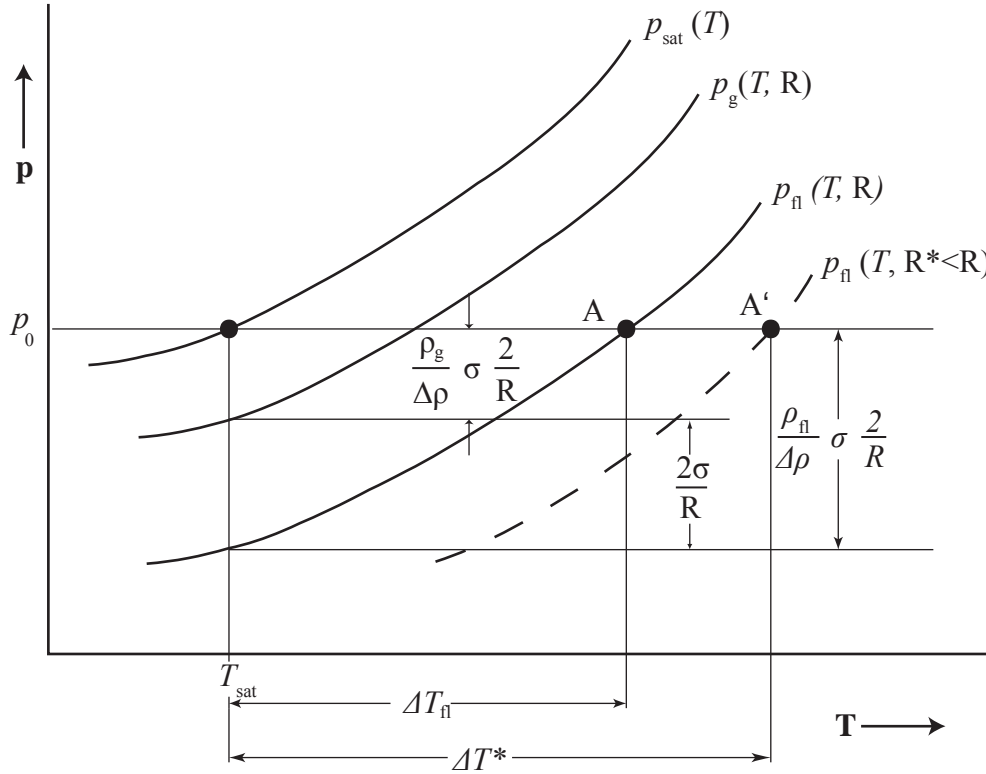


Abbildung 7.6: Dampf- und Flüssigkeitsdruck bei Gleichgewicht zwischen Flüssigkeit und einer kugelförmigen Dampfblase
Quelle: Stephan (1988)

Dampfdruck $p_{\text{sat}}(T)$ an einer ebenen Phasengrenzfläche, dem Flüssigkeitsdruck $p_l(T, R)$ und dem Dampfdruck $p_g(T, R)$ an der Oberfläche einer kugelförmigen Dampfblase mit dem Radius R . In Abb. 7.6 sind die Zusammenhänge anschaulich dargestellt. Bei vorgegebener Temperatur T ist der Dampfdruck p_g entsprechend (7.21) kleiner als der Dampfdruck p_{sat} an der ebenen Phasengrenze. Auf Grund der temperaturabhängigen Oberflächenspannung verlaufen die Kurven für den Dampfdruck p_g und den Flüssigkeitsdruck p_l nicht parallel zur Dampfdruckkurve p_{sat} . In guter Näherung gilt mit $\rho_g \ll \rho_l$

$$p_g(T) = p_{\text{sat}}(T) \quad (7.23)$$

$$p_{\text{fl}}(T) = p_{\text{sat}}(T) - \frac{2\sigma}{R}. \quad (7.24)$$

Wird nicht die Siedetemperatur T des Systems Flüssigkeit-Dampfblase sondern dessen Druck p_0 vorgegeben, so muss die Flüssigkeit um ΔT_{fl} gegenüber dem System mit ebener Phasengrenze überhitzt sein, damit eine Dampfblase vom Radius R mit der Flüssigkeit im Gleichgewicht (siehe 7.6, Punkt A) ist.

$$\Delta T_{\text{fl}} = T_{\text{fl}} - T_{\text{sat}}(p_0) \quad (7.25)$$

Weiterhin zeigt Abb. 7.6 (Punkt A'), dass die erforderliche Überhitzung (ΔT_{fl}) umso größer sein muss, je kleiner der Radius R der Dampfblase ist.

Um die notwendige Überhitzungstemperatur der Flüssigkeit und des Dampfes zu bestimmen, lässt sich die Gleichung (7.1) mit der Definition des Molvolumens umformen zu:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta h_{\text{V,m}}}{T(v_{\text{g,m}} - v_{\text{fl,m}})} = \frac{\Delta h_{\text{V,m}} \rho_{\text{g}} \rho_{\text{fl}}}{T(\rho_{\text{fl}} - \rho_{\text{g}})M}. \quad (7.26)$$

Aus der Differenzenform ergibt sich

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{p_{\text{sat}}(T) - p_{\text{fl}}(T, R)}{\Delta T_{\text{fl}}} = \frac{\Delta h_{\text{V,m}} \rho_{\text{g}} \rho_{\text{fl}}}{T(\rho_{\text{fl}} - \rho_{\text{g}})M} \quad (7.27)$$

und durch Einsetzen des Drucks (7.22)

$$\Delta T_{\text{fl}} = \frac{\rho_{\text{fl}}}{\rho_{\text{fl}} - \rho_{\text{g}}} \frac{2\sigma}{R} \frac{TM(\rho_{\text{fl}} - \rho_{\text{g}})}{\Delta h_{\text{V,m}} \rho_{\text{g}} \rho_{\text{fl}}} = \frac{TM}{\Delta h_{\text{V,m}} \rho_{\text{g}}} \frac{2\sigma}{R}. \quad (7.28)$$

Analog gilt für die Überhitzung des Dampfes

$$\Delta T_{\text{g}} = \frac{TM}{\Delta h_{\text{V,m}} \rho_{\text{fl}}} \frac{2\sigma}{R}. \quad (7.29)$$

Die Überhitzung eines von Dampf umgebenen Flüssigkeitstropfens lässt sich analog herleiten, jedoch mit einer anderen Krümmung an der Phasengrenze ($\frac{1}{R} < 0$).

7.2 Wärmeübertragung bei der Verdampfung

7.2.1 Behältersieden — pool boiling

Beim Behältersieden findet der Siedevorgang in einem ruhenden, beheizten Behälter statt, in dem das Fluid allenfalls durch den Siedevorgang in Bewegung gerät. Von außen, wie z.B. durch ein mechanisch betriebenes Rührwerk, wird dem Fluid keine Strömung aufgeprägt. Abbildung 7.7 zeigt den Prototypen einer solchen Anordnung, bei der Wärme über die Bodenfläche an das Fluid abgegeben wird, die Seitenwände adiabat sind und über der Flüssigkeitsoberfläche entweder

- eine reine Dampfatmosphäre herrscht, oder
- eine Gas-Dampfatmosphäre vorliegt.

Da das zusätzlich vorhandene Gas in dem interessierenden Druck- und Temperaturbereich nicht kondensieren kann wird dieses als **Inertgas** bezeichnet.

Des Weiteren wird angenommen, dass der Abstand zwischen Behälterboden und Flüssigkeitsoberfläche so gering ist, dass die hydrostatische Druckänderung im Fluid vernachlässigt werden kann. Für den Siedevorgang ist erforderlich, dass die Siedetemperatur T_{sat} an der Phasengrenze erreicht bzw. geringfügig überschritten wird (siehe 7.1.2.1), um einen Phasenwechsel zu ermöglichen. In Abhängigkeit der Wandüberhitzung $T_{\text{W}} - T_{\text{sat}}$ können unterschiedliche Formen des Siedens auftreten, welche im Folgenden näher erläutert werden.

7.2.1.1 Bereiche des Behältersiedens

Die Bereiche des zweiphasigen Wärmeübergangs beim Behältersiedens können durch Siedekennlinien, erstmals ermittelt von Nukiyama (1934), beschrieben werden. Diese, siehe Abb. 7.8, zeigen den Zusammenhang zwischen dem übertragenen Wärmestrom pro Fläche (Wärmestromdichte \dot{q}'') und der Differenz zwischen Wandtemperatur und Sättigungstemperatur des Fluids (Wandüberhitzung $\Delta T = T_{\text{W}} - T_{\text{sat}}$).

Der Verlauf einer Siedekennlinie hängt unter anderem von

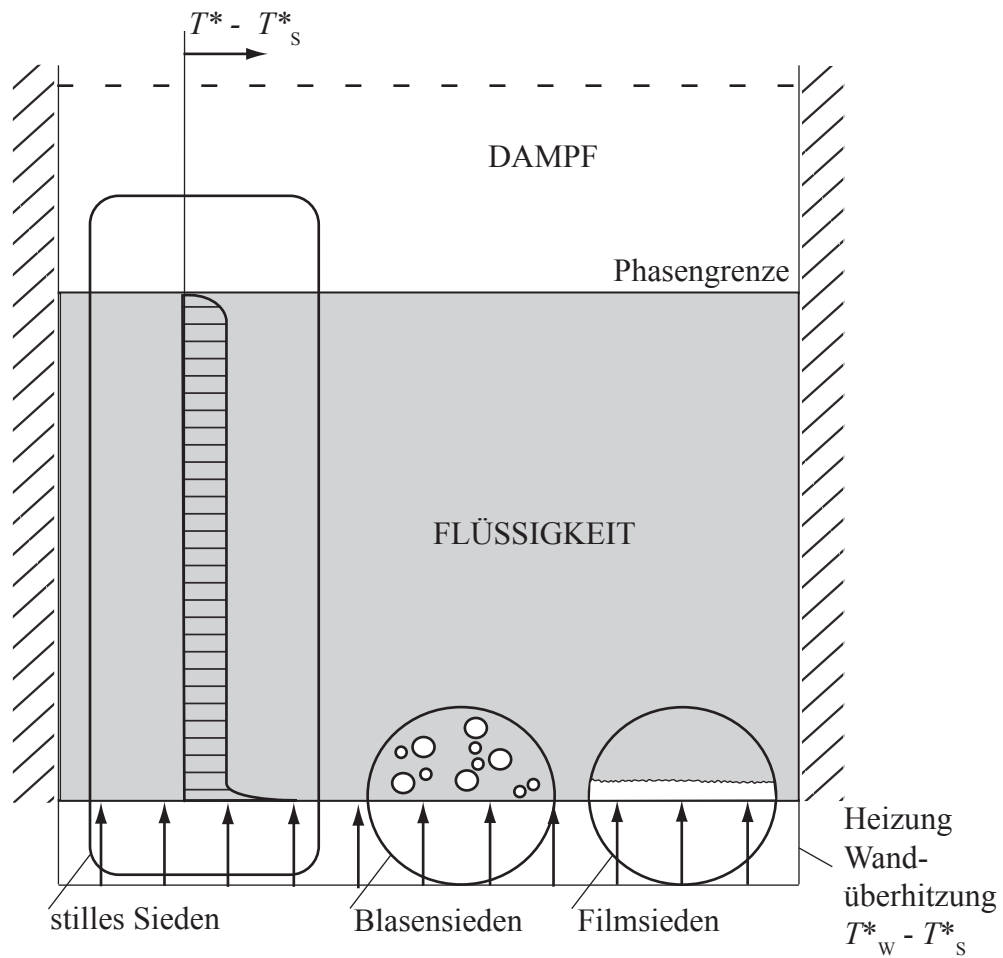


Abbildung 7.7: Behältersieden eines Fluides. Die drei eingezeichneten Siedeformen treten abhängig von der Wandüberhitzung $T_w - T_{\text{sat}}$ auf. Quelle: Herwig u. Moschallski (2009)

- der verwendeten Flüssigkeit (z.B. Wasser oder Niedersieder, wie z.B. Kältemittel)
- dem thermodynamischen Zustand des Fluids (Dampfvolumenteil, Unterkühlung)
- der Anordnung (z.B. vertikal, horizontal) und Geometrie der Heizfläche (z.B. ebene Heizfläche im Rechteckkanal, Rohr)
- den Eigenschaften des Heizflächenmaterials (z.B. Wärmeleitfähigkeit) sowie
- der Beschaffenheit der Oberfläche (poliert, beschichtet, verschmutzt etc.).

ab. Bei kleinen Wandüberhitzungen erfolgt der Wärmeübergang durch freie, einpha-

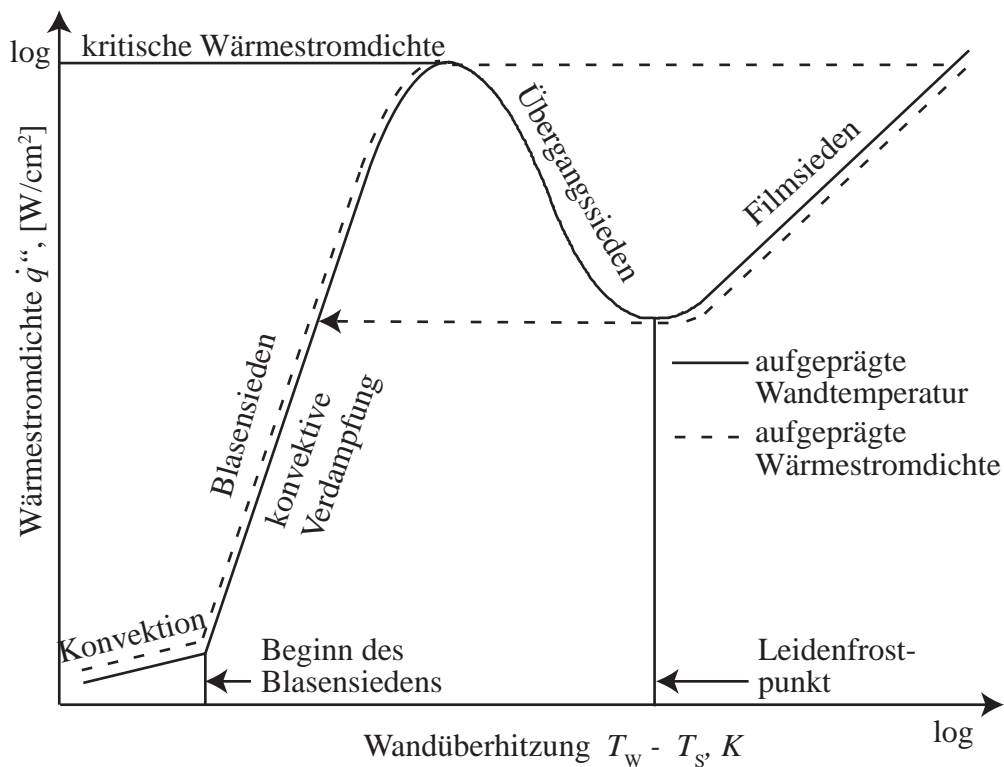


Abbildung 7.8: Prinzipieller Verlauf einer Siedekennlinie (siehe hierzu auch: Vorlesung Wärmeübertrager und Dampferzeuger)

sige Konvektion, die mit steigender Temperaturdifferenz zu besseren Wärmeübergangskoeffizienten und somit zu einem leichten Anstieg der Siedekennlinie führt. Die

eigentliche Verdampfung findet an der Phasengrenze zwischen Wasser und Dampf statt. In Abhängigkeit von der Benetzbarkeit der Heizfläche bilden sich nach einem unterschiedlich ausgeprägten Siedeverzug erste Dampfblasen an bestimmten Stellen auf der Heizfläche, deren Anzahl und Größe mit steigender Wandüberhitzung wächst (Beginn des Blasensiedens; eng.: Onset of Nucleate Boiling, ONB). Mit dem Ablösen der ersten Blasen von der Heizfläche beginnt das **Blasensieden**. Die Heizfläche ist in diesem Bereich noch vollständig von der Flüssigkeit benetzt. Durch die vermehrte Dampfproduktion und die intensive Rührwirkung der miteinander koaleszierenden (zusammenwachsenden) Dampfblasen steigt die Wärmestromdichte steil an. Die starke Steigung der Siedekennlinie flacht sich kurz vor Ihrem Maximum etwas ab, weil sich aufgrund der Blasenwechselwirkungen kurzzeitig kleine Dampfpolster an der Heizfläche bilden. In den meisten technischen Siedeprozessen werden das Blasensieden oder, im Falle hoher Dampfgehalte, die erzwungene konvektive Verdampfung angewendet. Der maximal bei einer benetzten Oberfläche zu übertragende Wärmestrom (**maximale Wärmestromdichte**) ist durch eine Änderung des Wärmeübergangsmechanismus', der sogenannten **Siedekrise**, begrenzt. Eine anschließende Verschlechterung des Wärmeübergangs ist darin begründet, dass die Flüssigkeit teilweise den unmittelbaren Kontakt mit der Wand verliert und somit die Wärme nicht mehr an die flüssige, sondern an die dampfförmige Phase mit einer geringeren Wärmeleitfähigkeit übertragen wird. Dieser Effekt äußert sich in Abhängigkeit vom technischen Beheizungssystem auf unterschiedliche Weise:

- Bei Systemen mit aufgeprägter Wärmestromdichte (gestrichelte Linie in Abb. 7.8), wie z.B. elektrischer Beheizung, Strahlungsheizung oder nuklearer Wärmeerzeugung, führt eine kleine Erhöhung von \dot{q}'' im kritischen Bereich zu einem schnellen Anstieg der Wandtemperatur, was zu einer thermischen Zerstörung (**Burnout**) der Heizfläche führen kann. Wird die Leistungszuführung vor dem Burnout gestoppt bzw. verringert, so wird zunächst der stabile Filmsiedebereich durchlaufen. Nach der Wiederbenetzung bei Leidenfrosttemperatur erfolgt ein schneller Übergang zum Blasensieden.
- Bei Systemen mit vorgegebener Wandtemperatur (durchgezogene Linie in Abb. 7.8), wie z.B. Wärmeübertrager, Kondensatoren oder eine elektrische Beheizung mit Temperaturregelung, führt eine geringe Erhöhung der Wandtemperatur zunächst zu einem starken Rückgang der Wärmestromdichte.

Aus Sicherheitsgründen ist daher die Kenntnis der **kritischen Wärmestromdichte** \dot{q}_{krit}'' (eng.: Critical Heat Flux, CHF) von großer Relevanz, um ein Burnout der Heizfläche bzw. eine unerwünschte Verschlechterung des Wärmeübergangs zu vermeiden. Dies ist besonders wichtig bei Anlagenkomponenten mit hohen Wärmeleistungen pro Flächeneinheit wie z.B. Verdampfern, Kern- und Fusionsreaktoren, sowie bei Kühlkreisläufen von Raketentriebwerken, Hochleistungsmagneten und elektronischen Bauteilen.

Nach der Siedekrise (**postkritischer Bereich**) existieren bei aufgeprägter Wandtemperatur vereinfacht zwei Hauptbereiche des Wärmeübergangs: Das **partielle Filmsieden** (Übergangssieden, Transition Boiling) und der Bereich des **stabilen Filmsiedens**. Das Übergangssieden ist gekennzeichnet durch einen intermittierenden Flüssigkeitskontakt mit nachfolgender Verdampfung an der Heizfläche, was zu heftigen Fluktuationen und Schwingungen führen kann. Der Dampfanteil an der Heizfläche nimmt mit steigender Temperatur zu und der Wärmeübergang verschlechtert sich weiter, bis eine Wandtemperatur erreicht ist, bei der nur noch Dampf an der Heizfläche vorliegt (**Leidenfrosttemperatur** oder **minimale Filmsiedetemperatur**). Dieser Bereich des Übergangssiedens ist der einzige Wärmeübertragungsmechanismus, bei dem eine Erhöhung der treibenden Temperaturdifferenz zu einer Verringerung des Wärmestroms führt. Er kann bei elektrischer Beheizung unter **stationären** Bedingungen nur mit einer Temperaturregelung durchfahren werden. Mit dem Erreichen der Leidenfrosttemperatur beginnt idealisiert das Filmsieden. Ab dieser Temperatur ist die Heizfläche nur noch mit einem Dampffilm bedeckt. Infolge der Wärmestrahlung, Konvektion und Wärmeleitung zwischen Wand, Dampf und Flüssigkeit steigt die Wärmestromdichte mit wachsender Temperaturdifferenz wieder leicht an. Technisch interessant ist die Leidenfrosttemperatur bei Vorgängen, bei denen die Wiederbenetzung der Heizfläche mit Flüssigkeit und die damit verbundene Verbesserung des Wärmeübergangs wichtig ist, wie bei den schon erwähnten Wiederbeflutungen von heißen Kernbrennstäben oder beim Abschrecken von Stahl. Könnte die Leidenfrosttemperatur durch Maßnahmen, wie zum Beispiel durch die Verwendung poröser Beschichtungen, erhöht werden, würde das Wiederbenetzen der Heizfläche früher einsetzen, der Wärmeübergang also verbessert.

Quelle: Stein (2004)

Im Folgenden werden die verschiedenen Bereiche und die in diesen Bereichen gültigen Korrelationen näher beschrieben:

7.2.1.2 Stilles Sieden — Free Convection Boiling

Beim stillen Sieden liegt die Flüssigkeitstemperatur an der beheizten Wand nur wenig oberhalb der Sättigungstemperatur, so dass sich keine Dampfblasen bilden und der Wärmetransport durch Auftriebskräfte konvektiv erfolgt. In einem von unten beheizten und mit Flüssigkeit gefüllten Gefäß stellt sich ein Temperaturverlauf ein, wie er schematisch in Bild 7.9 dargestellt ist. Über dem Boden mit der Temperatur

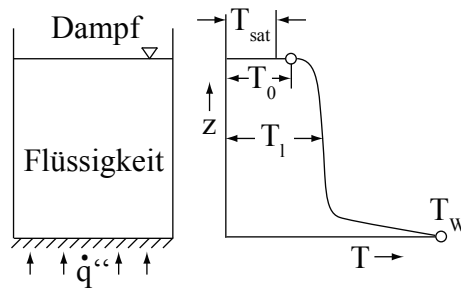


Abbildung 7.9: Stilles Sieden

T_w bildet sich eine Grenzschicht mit einem starken Temperaturabfall aus, während im Kern die Flüssigkeitstemperatur auf Grund eines starken konvektiven Wärmetransports nahezu konstant über der Höhe ist. Für den Wärmeübergang gilt für den laminaren Fall der freien Konvektion

$$\text{Nu} = 0,6 \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{\frac{1}{4}} \quad (7.30)$$

und für den Fall, dass eine turbulente Grenzschicht an den Grenzflächen vorherrscht

$$\text{Nu} = 0,15 \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{\frac{1}{3}} \quad (7.31)$$

jeweils bei Prandtl-Zahlen von etwa 2 bis 100. Als charakteristische Länge ist in die Nusselt-Zahl Nu und in die Grashof-Zahl Gr die Überströmlänge einzusetzen, bei waagerechten Zylindern vereinfachend deren Durchmesser, bei einer Rechteckfläche $l = \frac{a \cdot b}{2(a+b)}$, bei einer Kreisfläche $l = d/4$. Der Umschlag von der laminaren zur turbulenten Grenzschicht wird zwischen $10^7 < \text{Gr} \cdot \text{Pr} < 10^8$ angenommen.

7.2.1.3 Blasensieden — Nucleate Boiling

Blasensieden ist gekennzeichnet durch das periodische Anwachsen und Abreißen individueller Blasen an einzelnen Stellen der Heizwand. Bei geringen bis mittleren Wärmestromdichten bilden sich periodisch einzelne Blasen an bestimmten, isolierten Stellen der Wand, den sogenannten Keimstellen. Bei größeren Überhitzungen wachsen einzelne Blasen zusammen, und das isolierte Blasensieden geht zunächst in voll entwickeltes Blasensieden und schließlich in Filmsieden über. Der Wärmetransport von der Heizfläche in den wandfernen Teil der Flüssigkeit erfolgt hauptsächlich durch Verdampfen von Flüssigkeit sowie durch erzwungene Konvektion in der Umgebung der Keimstellen, hervorgerufen durch die Bewegung der Blasen während ihres Wachstums sowie durch den Abtransport von überhitzter Flüssigkeit durch aufsteigende Blasen. Die zur Bildung einer Blase nötige Wärme wird der Blase entweder direkt durch einen flüssigen, nur wenige Moleküllängen dicken Film unterhalb der Blase oder indirekt über ihre Oberfläche zugeführt. Nach dem Abreißen der Blase und dem Abklingen der durch sie hervorgerufenen Strömungen regeneriert sich die thermische Grenzschicht an der Wand durch instationäre Wärmeleitung, und der Prozess wiederholt sich.

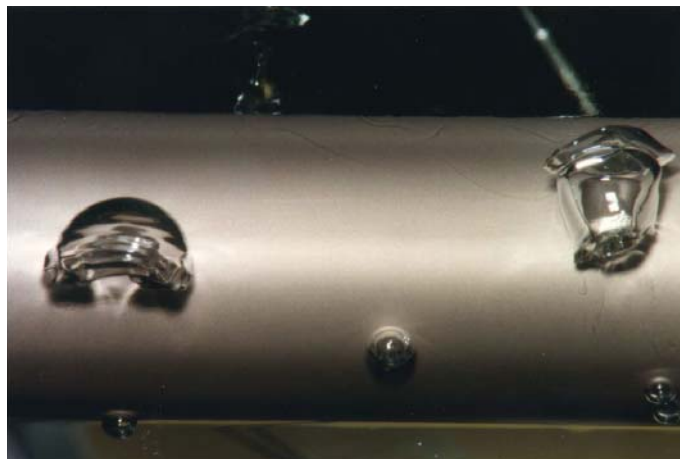


Abbildung 7.10: Blasensieden am Rohr, Isopropanol bei $p = 0,0476$ MPa und $\dot{q}'' = 10 \text{ kW/m}^2$. Aufnahme von S. Kotthoff und A. Luke, Universität Paderborn

Bereits in Abschnitt 7.1.2.2 wurde der Verdampfungsprozess an der gekrümmten Oberfläche einer Kugel beschrieben. Beim Blasensieden wächst eine an der Wand

gebildete Dampfblase an, bis sie nach Erreichen eines Grenzvolumens abreißt und zur Flüssigkeitsoberfläche hin aufsteigt. Dieses Grenzvolumen ist abhängig von der Kontur der Dampfblase, welche bei langsamem Blasenwachstum durch das Gleichgewicht von Auftriebs- und Oberflächenkräften und durch die Haftbedingung an der Wand bestimmt ist. Das Verhältnis aus Auftriebs- und Oberflächenkraft wird durch die **Bond-Zahl** beschrieben:

$$\text{Bo} = \frac{\rho g h}{\frac{2\sigma}{R}} \quad (7.32)$$

Hierbei beschreibt h die vertikale Längenskala, die verantwortlich für die Auftriebskraft ist und R den Krümmungsradius, der die Oberflächenspannungskraft bestimmt. Für eine Kugel mit dem Radius R kann die entsprechende Längenskalen in der Auftriebskraft mit $h = 2R$ ersetzt werden, so dass sich

$$\text{Bo} = \frac{\rho g R^2}{\sigma} \quad (7.33)$$

ergibt. Nach Fritz (1935) gibt es ein größtes Volumen V_A einer Dampfblase, das in

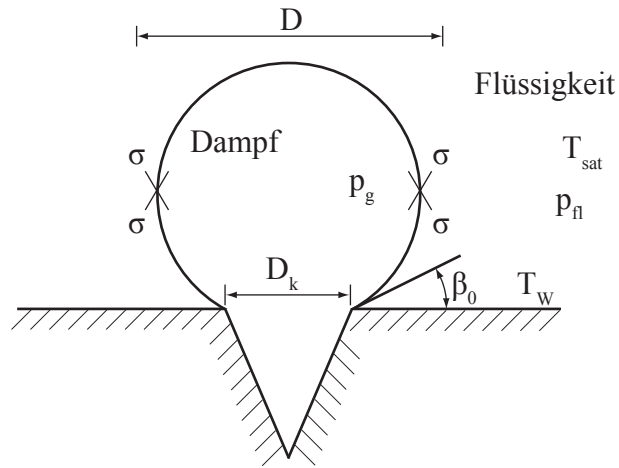


Abbildung 7.11: Entstehung einer Dampfblase
Quelle: v. Böckh (2006)

folgender Form geschrieben werden kann,

$$\left(\frac{V_A}{b^3}\right)^{\frac{1}{3}} = f(\beta_0) \quad (7.34)$$

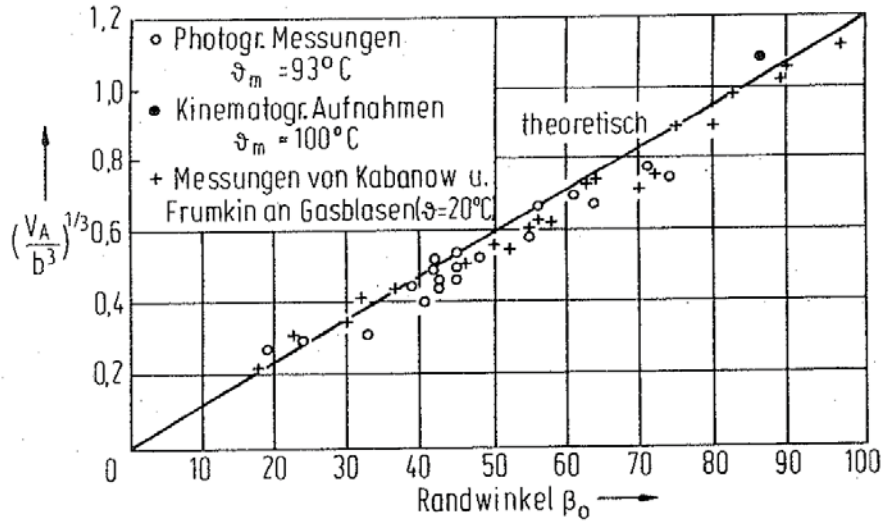


Abbildung 7.12: Abreißvolumen V_A von Dampf- und Gasblasen über einer waagerechten Heizfläche, nach Fritz und Ende, entnommen aus Baehr u. Stephan (2006). Der Parameter b bezeichnet die Laplace-Konstante

wobei β_0 der Randwinkel zwischen Blase und Heizwand im Bogenmaß ist und b die sogenannte Laplacesche Konstante (im englischen: capillary constant), ein Längenmaß, beschreibt:

$$b = \sqrt{\frac{2\sigma}{g(\rho_{fl} - \rho_g)}} \quad (7.35)$$

Die Beziehung aus Gleichung (7.34) konnte durch Ausmessung von Filmaufnahmen bestätigt werden. Abbildung 7.12 zeigt den Vergleich mit experimentellen Daten, aus dem sich mit der dort eingezeichneten Ausgleichsgeraden eine lineare Funktion für $f(\beta_0)$ mit der Steigung 0,686 finden lässt. Daher folgt:

$$\left(\frac{V_A}{b^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,686 \beta_0 \quad (7.36)$$

Für den Abreißdurchmesser ergibt sich bei Annahme einer kugelförmigen Blase mit $d_A = (6V_A/\pi)^{1/3}$:

$$d_A = 0,851 \beta_0 \sqrt{\frac{2\sigma}{g(\rho_{fl} - \rho_g)}} \quad (7.37)$$

Tatsächliche Abreißdurchmesser weichen hiervon etwas ab und sind zudem noch von der Oberflächenbeschaffenheit und der Wandüberhitzung abhängig, so dass in der

Literatur weitere Korrelationen mit besserer Vorhersagegenauigkeit zu finden sind.

Eine Korrelation für den Wärmeübergang beim Blasensieden ist von Stephan u. Preusser (1979) durch Auswertung einer sehr großen Zahl von experimentellen Ergebnissen in der Nähe des Umgebungsdruckes ermittelt worden. Sie lautet:

$$\text{Nu} = \frac{\bar{\alpha} d_A}{\lambda_{\text{fl}}} = 0,0871 \left(\frac{\dot{q}'' d_A}{\lambda_{\text{fl}} T_{\text{sat}}} \right)^{0,674} \left(\frac{\rho_{\text{g}}}{\rho_{\text{fl}}} \right)^{0,156} \left(\frac{\Delta h_V d_A^2}{a_{\text{fl}}^2} \right)^{0,371} \left(\frac{a_{\text{fl}}^2 \rho_{\text{fl}}}{\sigma d_A} \right)^{0,350} \text{Pr}_{\text{fl}}^{-0,162} \quad (7.38)$$

mit $\dot{q}'' = \bar{\alpha}(T_{\text{W}} - T_{\text{sat}})$ und $a_{\text{fl}} = \lambda_{\text{fl}}/(\rho_{\text{fl}} c_p)$. Für den Randwinkel β_0 ist bei Wasser $\pi/4 = 45^\circ$ einzusetzen. Δh_V entspricht der spezifischen Verdampfungsenthalpie.

7.2.1.4 Maximale Wärmestromdichte

Mit zunehmender Wandüberhitzung steigt die Anzahl und die Frequenz der sich je Flächeneinheit an den Heizflächen bildenden Blasen an. Ein Zusammenwachsen einer großen Anzahl von Blasen führt dazu, dass sich ein nahezu geschlossener Dampffilm ausbildet, was wiederum zu einer Verringerung des Wärmeübergangs und der Wärmestromdichte führt. Haupteinflussfaktoren auf die mit der kritischen Wärmestromdichte verknüpfte Überhitzungstemperatur sind die Verdampfungsenthalpie und das Verhältnis aus Druck und kritischem Druck. Der Einfluss des Drucks ist in zwei Bereiche zu unterteilen: Ausgehend von einem niedrigen Druck führen Drucksteigerungen dazu, dass die Anzahl der Dampfblasen je Flächeneinheit steigt und somit die maximale Wärmestromdichte wächst. Durch weitere Druckerhöhung kommt es jedoch zur Ausbildung eines den Wärmeübergang behindernden Dampffilms auf der Heizeroberfläche. Entsprechend nimmt auch die maximale Wärmestromdichte \dot{q}''_{max} mit dem Druck zu, erreicht ein relatives Maximum und nimmt dann wieder ab. Messungen der maximalen Wärmestromdichte werden meist an elektrisch beheizten Rohren durchgeführt. Diese lassen sich recht gut durch eine von Kutateladze (1948) und in ähnlicher Form auch von Zuber (1958) aus Stabilitätsanalysen hergeleitete Beziehung wiedergeben,

$$\dot{q}''_{\text{max}} = K \Delta h_V \sqrt{\rho_{\text{g}}} [\sigma(\rho_{\text{fl}} - \rho_{\text{g}})g]^{1/4} \quad (7.39)$$

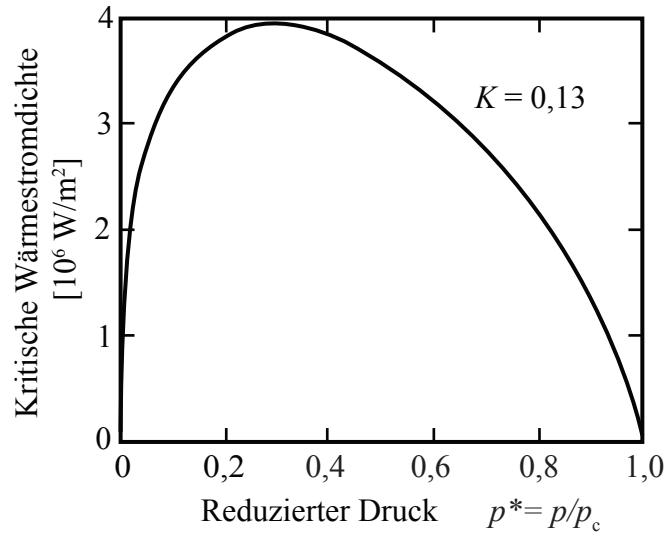


Abbildung 7.13: Maximale Wärmestromdichte beim Blasensieden von Wasser, berechnet nach (7.39) mit $K=0,13$

worin K eine aus Versuchen zu ermittelnde Konstante ist, die zwischen 0,13 und 0,16 liegt. Bild 7.13 zeigt als Beispiel die maximale Wärmestromdichte beim Blasensieden von Wasser, die mit der obigen Gleichung ermittelt worden ist.

Die Druckabhängigkeit der maximalen Wärmestromdichte lässt sich für viele Stoffe durch einen annähernd einheitlichen Kurvenverlauf darstellen, wenn man eine Auftragung $q_{\max}/q_{\max,0}$ über dem normierten Druck $p^* = p/p_{\text{krit}}$ wählt. Für die Bezugswärmestromdichte $q_{\max,0}$ gilt der Bezugsdruck $p^* = 0,03$. Die experimentellen Ergebnisse lassen sich durch die folgende Korrelation gut wiedergeben:

$$\frac{\dot{q}_{\max}''}{\dot{q}_{\max,0}''} = 3,51 p^{*0,35} (1 - p^*)^{0,9} \quad (7.40)$$

wobei fast alle Messergebnisse innerhalb eines Fehlerbereiches von $\pm 15\%$ liegen (Stephan (1988)).

7.2.1.5 Instabiler Siedebereich — Transition Boiling

Wird die Wandtemperatur der Heizfläche weiter erhöht, so dass eine Überschreitung von \dot{q}_{\max}'' stattfindet, so behindert der sich bildende Dampf den Zustrom von Flüssigkeit zur Wand und es entsteht ein geschlossener Dampffilm. Beobachtungen zeigen,

dass die Phasengrenze zwischen Dampf und Flüssigkeit anfänglich noch unregelmäßig ist und sich intensiv bewegt. Je mehr der Dampffilm mit der Wandtemperatur anwächst, desto glatter und ruhiger wird die Phasengrenze und der übertragene Wärmestrom nimmt ab, durchläuft einen Minimalwert und steigt dann bei weiterer Erhöhung der Wandtemperatur wieder an. Die Wärme wird dann durch Leitung, Konvektion und Strahlung durch den Dampffilm übertragen. Durch die Auswertung von Messungen fanden Nikolaev u. Skripov (1968) heraus, dass auch die minimale Wärmestromdichte vom Druck abhängt. Die Messwerte lassen sich analog zu Gleichung (7.40) durch eine Ausgleichskurve

$$\frac{\dot{q}_{\min}''}{\dot{q}_{\min,0}''} = 2,36 p^{*0,24} (1 - p^*)^{0,61} \quad (7.41)$$

beschreiben, wobei die Bezugswärmestromdichte $\dot{q}_{\min,0}''$ wiederum auf den Druck $p^* = 0,03$ bezogen ist (Stephan (1988)).

7.2.1.6 Filmsieden — Film Boiling

Beim Filmsieden sind die Heizflächen von einem durchgehenden Film überhitzten Dampfes bedeckt, der Wand und Flüssigkeit trennt. Für diesen Bereich haben Bromley (1950) und Roetzel (1979) eine Theorie entwickelt, die auf ähnlichen Voraussetzungen beruht wie die Nusselt'sche Wasserhautthorie. Hierbei wird die Wandtemperatur als konstant und für die Grenzfläche zwischen Dampf und Flüssigkeit die Sättigungstemperatur angenommen. Für den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten im Dampffilm an einer vertikalen Platte gilt:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_L + \alpha_S \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5} \frac{1}{1 + 3\bar{\alpha}_L/\alpha_S} \right) \quad (7.42)$$

mit

$$\bar{\alpha}_L = \frac{2}{3} \left(\frac{\rho_g(\rho_{fl} - \rho_g)g\Delta h_{V,m}\lambda_g^3}{\eta_g\Delta T} \frac{1}{H} \right)^{1/4} \quad (7.43)$$

für den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten durch Wärmeleitung und Konvektion wobei H die Plattenhöhe (bei einer senkrecht stehenden Platte) bzw. $H = d\pi/2$

für waagrechte Rohre ist. Für den Wärmeübergangskoeffizienten durch Strahlung gilt:

$$\alpha_S = \frac{\sigma_S}{\frac{1}{\epsilon_W} + \frac{1}{\epsilon_H} - 1} \frac{T_W^4 - T_{\text{sat}}^4}{T_W - T_{\text{sat}}} \quad (7.44)$$

7.2.2 Strömungssieden — Forced Convection Boiling

Während die Konvektionsströmungen des Fluids beim Behältersieden primär durch die auftriebsgetriebene Bewegung der Blasen zur Oberfläche hin entstehen, wird dem Fluid beim Strömungssieden eine Bewegung durch äußere Kräfte aufgeprägt. Der Wärmeübergang ist stark abhängig von der Geometrie, wie z.B. bei Strömungen über eine beheizte Platte, Zylinder oder innerhalb von Kanälen. Internes Strömungssieden ist gekennzeichnet durch den schnellen Übergang von Flüssigkeit zu Dampf in Strömungsrichtung.

Eine detailliertere Beschreibung des Strömungssiedens findet sich in der Vorlesung „Wärmeübertrager und Dampferzeuger“.

7.3 Wärmeübertragung bei der Kondensation

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Kondensation an festen Wänden, wenn deren Temperatur unterhalb der Sättigungstemperatur des umgebenden Dampfes liegt. Der Dampf wird dabei zunächst als gesättigt angenommen, d.h. seine Temperatur entspricht derjenigen eines Zustandes auf der Dampfdruckkurve. Im Folgenden soll unterschieden werden, ob der Kondensationsvorgang in einer (weitestgehend) ruhenden Umgebung stattfindet, wobei es in Abhängigkeit von den Benetzungseigenschaften zur Film- oder Tropfenkondensation kommen kann, oder ob er durch eine Strömung des kondensationsfähigen Fluides beeinflusst wird (Strömungskondensation).

7.3.1 Laminare Filmkondensation an einer vertikalen Platte

Kondensiert ein reiner Dampf unter Bildung eines laminar abfließenden Kondensationsfilms, kann der Wärmeübertragungsmechanismus auf der Grundlage der Erhal-

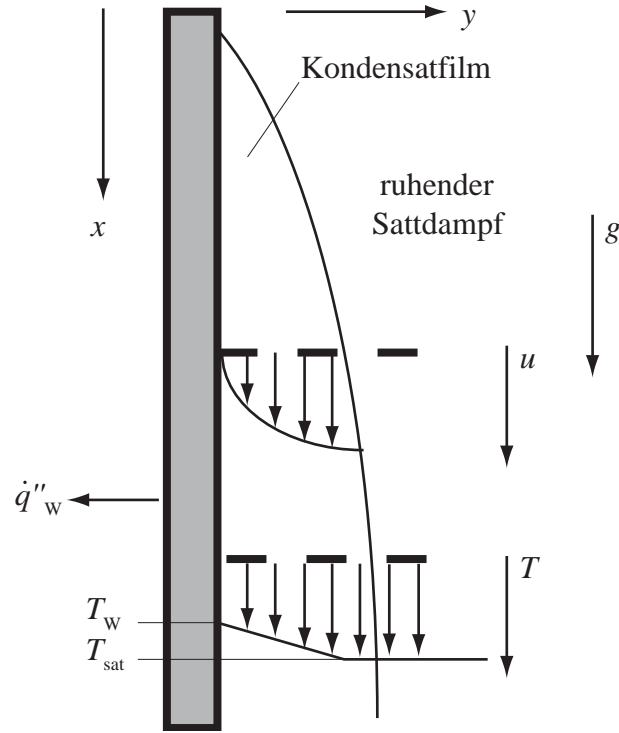


Abbildung 7.14: Nusselt'sche Wasserhauttheorie: Abfließender Kondensatfilm

tungsgleichungen für den Impuls- und die Energie theoretisch vorausgesagt werden. Die Grundlagen dieser Berechnungen wurden von Nusselt im Jahr 1916 (Nusselt (1916)) zusammengestellt und sind als Nusselt'sche Wasserhauttheorie in die Literatur eingegangen. Diese Ableitungen und die notwendigen Annahmen sind im Folgenden wiedergegeben:

Die Strömung eines dünnen, abfließenden Films kann mit großer Genauigkeit durch die Grenzschichtgleichungen beschrieben werden ((4.22) und (4.23)). Die Impulserhaltungsgleichung tangential zur Wand lautet:

$$\rho_{\text{fl}} u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_{\text{fl}} v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho_{\text{fl}} g_x \quad (7.45)$$

Der hydrostatische Druck wird durch die Dampfphase aufgeprägt, so dass sich für den Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{\text{d}} g_x$ ergibt. Da bei den relativ langsam abfließenden Filmen die Änderung des Impulsstroms klein gegenüber den Reibungsgliedern und

den Druck- und Massenkraften ist kann die obige Gleichung für einen abfließenden Film zu

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(\rho_{\text{fl}} - \rho_{\text{d}}) = 0. \quad (7.46)$$

vereinfacht werden. Die Energiegleichung für Grenzschichtströmungen lautet:

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7.47)$$

Diese Energiegleichung wird wieder unter der Annahme, dass der konvektive Energietransport gegenüber der Wärmeleitung normal zur Strömungsrichtung klein ist, vereinfacht zu

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (7.48)$$

Diese Vereinfachung beruht auf der Annahme einer vernachlässigbar geringen Geschwindigkeit in Wandnormalenrichtung und einer geringen Temperaturdifferenz in Strömungsrichtung.

Die Impuls- (7.46) und die Energiegleichung (7.48) des abfließenden Kondensatfilms können unter Berücksichtigung der folgenden Randbedingungen gelöst werden:

An der Wand ($y = 0$) wird zum einen die Haftbedingung und zum anderen die Gleichheit der Temperatur von Wand und Film gefordert:

$$u = 0 \quad \text{und} \quad T = T_{\text{W}} \quad (7.49)$$

An der Phasengrenze ($y = \delta$) wird angenommen, dass sich die Dampfphase an der Filmoberfläche mit Filmoberflächengeschwindigkeit bewegt, so dass hier keine Schubspannungen (τ) auftreten. Des Weiteren wird angenommen, dass die Filmoberflächentemperatur der Dampftemperatur, und somit der Sättigungstemperatur, entspricht:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{fl}} = \tau_{\text{d}} = 0 \quad & \text{(2. Nusseltsche Vereinfachung)} \\ \text{oder} \quad \left(\eta \frac{du}{dy} \right)_{y=\delta} &= 0 \\ \text{und} \quad (T = T_{\text{sat}})_{y=\delta} & \end{aligned} \quad (7.50)$$

Berechnung des Geschwindigkeitsverlaufs im Kondensatfilm Die doppelte Integration der Impulsgleichung führt auf das Geschwindigkeitsprofil im Film

$$u = \frac{g(\rho - \rho_d)}{2\eta} \delta^2 \left(2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right) \quad (7.51)$$

Daraus lassen sich die **Filmoberflächengeschwindigkeit**

$$u_\delta = u(y = \delta) = \frac{g(\rho - \rho_d)}{2\eta} \delta^2, \quad (7.52)$$

die **mittlere Filmgeschwindigkeit**

$$u_m = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u dy = \frac{g(\rho - \rho_d)}{3\eta} \delta^2 \quad (7.53)$$

und der **Massenstrom im Kondensatfilm**

$$\dot{m} = \rho u_m \delta B = \frac{g\rho(\rho - \rho_d)}{3\eta} \delta^3 B \quad (7.54)$$

errechnen, wobei B die Breite des Films bezeichnet. Ein Einsetzen der mittleren Filmgeschwindigkeit in die Definition der Reynolds-Zahl führt auf die „Film-Reynolds-Zahl“:

$$\text{Re}_{\text{Film}} = \frac{\rho u_m \delta}{\eta} = \frac{g\rho(\rho - \rho_d)}{3\eta^2} \delta^3. \quad (7.55)$$

Berechnung des Temperaturverlaufs und des Wärmestroms im Kondensatfilm

Die doppelte Integration der Energiegleichung (7.48) ergibt

$$\lambda T + c_1 \lambda y + c_2 = 0 \quad (7.56)$$

und unter Berücksichtigung der beiden Temperatur-Randbedingungen folgt für den **Temperaturverlauf im Film** die lineare Beziehung

$$T = T_W + \frac{T_{\text{sat}} - T_W}{\delta} y \quad (7.57)$$

Aus dem Temperaturverlauf lässt sich durch die Ableitung der obigen Gleichung der vom Dampf an die gekühlte Wand übertragene Wandwärmestrom ermitteln:

$$\dot{q}_W'' = + \left(\lambda \frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{\text{sat}} - T_W) \quad (7.58)$$

Das positive Vorzeichen ergibt sich aus der Formulierung des Wärmestroms entgegen der Koordinatenrichtung. Wird der Wärmeübergangskoeffizienten für die Filmkondensation wie folgt definiert:

$$\dot{q}_W'' \equiv \alpha (T_{\text{sat}} - T_W), \quad (7.59)$$

so ergibt ein Vergleich mit (7.58):

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} \quad (7.60)$$

Die bisherigen Ableitungen ergaben Beziehungen zur Ermittlung von Geschwindigkeiten und Temperaturen, von Wärme- und Stoffströmen in Abhängigkeit von der noch unbekannten Filmdicke.

Berechnung der Kondensatfilmdicke Die Kondensatfilmdicke ist durch die Stoff- und Energiebilanz festgelegt. Die Stoffbilanz am Film (siehe Abb. 7.15) führt auf:

$$\dot{m}(x) - \dot{m}(x + dx) + \dot{m}_K'' B dx = 0 \quad (7.61)$$

Die Änderung des Massenstroms ergibt sich daher zu

$$\frac{d\dot{m}}{dx} = \frac{\dot{m}(x + dx) - \dot{m}(x)}{dx} = \dot{m}_K'' B \quad (7.62)$$

und die Energiebilanz an der Phasengrenze zu

$$\dot{m}_K'' h_{d,s} = \dot{m}_K'' h_{fl,s} + \dot{q}_\lambda'' \quad (7.63)$$

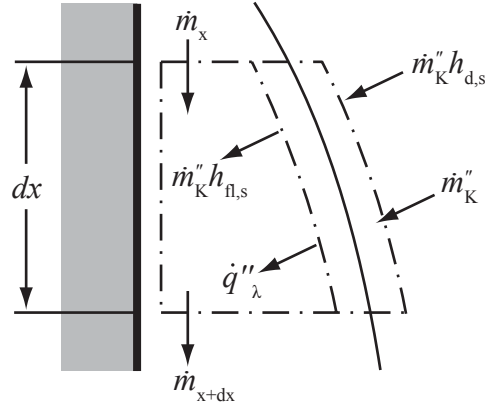


Abbildung 7.15: Nusselt'sche Wasserhauttheorie: Massenbilanz an der Phasengrenze

oder

$$\dot{m}_K'' = \frac{\dot{q}_\lambda''}{h_{d,s} - h_{f,s}} = \frac{\dot{q}_\lambda''}{\Delta h_V} \quad (7.64)$$

mit Δh_V als der Verdampfungs- bzw. Kondensationsenthalpie.

Aus (7.59), (7.62) und (7.64) folgt:

$$\frac{d\dot{m}}{dx} = \frac{\dot{q}_\lambda''}{\Delta h_V} B = \frac{\lambda B}{\delta \Delta h_V} (T_{\text{sat}} - T_W) \quad (7.65)$$

Diese Beziehung ist mit dem aus (7.54) abzuleitenden Ausdruck

$$\frac{d\dot{m}}{dx} = \frac{g(\rho - \rho_d)\rho}{3\eta} \frac{d}{dx} (\delta^3) B = \frac{g(\rho - \rho_d)\rho}{\eta} \frac{\delta^2 d\delta}{dx} B \quad (7.66)$$

zu vergleichen und führt auf

$$\delta^3 d\delta = \frac{\eta \lambda (T_{\text{sat}} - T_W)}{g(\rho - \rho_d)\rho \Delta h_V} dx \quad (7.67)$$

Durch Integration mit der Bedingung $\delta = 0$ für $x = 0$ ergibt sich die **örtliche Filmdicke**

$$\delta(x) = \left(\frac{4\eta \lambda (T_{\text{sat}} - T_W)}{g(\rho - \rho_d)\rho \Delta h_V} x \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (7.68)$$

woraus sich schließlich der **örtliche Wärmeübergangskoeffizient für laminare, wellenfreie Filme** ergibt

$$\alpha(x) = \frac{\lambda}{\delta(x)} = \left(\frac{g(\rho - \rho_d)\rho\lambda^3\Delta h_V}{4\eta(T_{\text{sat}} - T_W)x} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (7.69)$$

Für den über der Höhe gemittelten Wert ergibt sich

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx = \frac{4}{3} \left(\frac{g(\rho - \rho_d)\rho\lambda^3\Delta h_V}{4\eta(T_{\text{sat}} - T_W)L} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\alpha(L) \quad (7.70)$$

oder

$$\bar{\alpha} = 0,943 \left(\frac{g(\rho - \rho_d)\rho\lambda^3\Delta h_V}{\eta(T_{\text{sat}} - T_W)L} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7.71)$$

Die Stoffwerte sind bei der arithmetisch gemittelten Filmtemperatur $T_{\text{St}} = 0,5(T_w + T_{\text{sat}})$ zu ermitteln.

Die lokale Nusselt Zahl ist gegeben durch

$$\text{Nu}(x) = \frac{\alpha(x)x}{\lambda} = \left(\frac{g(\rho - \rho_d)\rho\Delta h_V}{4\eta\lambda(T_{\text{sat}} - T_W)} x^3 \right)^{\frac{1}{4}} \quad (7.72)$$

und durch Integration folgt für die gemittelte Nusselt Zahl

$$\overline{\text{Nu}} \equiv \frac{\bar{\alpha}L}{\lambda} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx \frac{L}{\lambda} = \frac{4}{3} \left(\frac{g(\rho - \rho_d)\rho\Delta h_V}{4\eta\lambda(T_{\text{sat}} - T_W)} L^3 \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\text{Nu}_L \quad (7.73)$$

Um eine dimensionslose Darstellung der Nusselt-Zahl zu erhalten, wird die Film-Reynolds-Zahl (7.55) durch Einsetzen der Kondensatfilmdicke (7.68) umgeformt zu

$$\text{Re}_F = \frac{\rho u_m \delta}{\eta} = \frac{g\rho(\rho - \rho_d)}{3\eta^2} \delta^3 = \frac{g\rho(\rho - \rho_d)}{\eta^2} \frac{1}{3} \left(\frac{4\eta\lambda(T_{\text{sat}} - T_W)}{g(\rho - \rho_d)\rho\Delta h_V} x \right)^{\frac{3}{4}} \quad (7.74)$$

und für den örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten

$$\alpha(x) = \frac{\lambda}{\delta(x)} = \left(\frac{g(\rho - \rho_d)\rho\lambda^3\Delta h_V}{4\eta(T_{\text{sat}} - T_W)x} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \lambda \left(\frac{g\rho(\rho - \rho_d)}{\eta^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \text{Re}_{\text{Film}}^{-\frac{1}{3}} \quad (7.75)$$

geschrieben, so dass sich für die Nusselt Zahl folgendes ergibt:

$$\text{Nu}_{\text{Film}} \equiv \frac{\alpha \left(\frac{\eta^2}{g(\rho - \rho_d)\rho} \right)^{1/3}}{\lambda} \quad (7.76)$$

Dabei wurde die „kennzeichnende Länge“ durch eine Stoffwertkombination mit der Einheit [m] ersetzt. Hiermit ergibt sich die Kennzahl-Beziehung für die örtliche Film-Nusselt-Zahl des laminaren Kondensatfilms zu

$$\text{Nu}_{\text{Film}} = 0,69 \text{ Re}_{\text{Film}}^{-1/3} \quad (7.77)$$

Entsprechend folgt aus (7.73) für die mittlere Film-Nusselt-Zahl des laminaren Kondensatfilms

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{Film}} = 0,92 \text{ Re}_{\text{Film}}^{-1/3} \quad (7.78)$$

7.3.1.1 Regime der Filmkondensation an einer vertikalen Platte

Die Gleichungen (7.77) und (7.78) sind gültig für einen laminaren, nicht welligen Rieselfilm. Diese Strömungsform liegt vor wenn $\text{Re}_{\text{Film}} < 10$ ist. Mit zunehmender Lauflänge wird die Kondensatmenge und damit die Filmstärke größer. Es treten zunächst Wellen an der Filmoberfläche auf und schließlich schlägt der Film von der laminaren in die turbulente Strömungsform um.

Für laminare, wellige Regime ($7,5 < \text{Re}_F < 450$) gibt Kutateladze³ eine Korrelation in der folgenden Form an

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\alpha \left(\frac{\eta^2}{(\rho - \rho_d)\rho g} \right)^{1/3}}{\lambda} = \frac{\text{Re}_F}{1,47 \text{ Re}_F^{1,22} - 1,3} \quad (7.79)$$

und für das turbulente Regime ($\text{Re}_F > 450$) folgt nach Labuntsov⁴

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\alpha \left(\frac{\eta^2}{(\rho - \rho_d)\rho g} \right)^{1/3}}{\lambda} = \frac{\text{Re}_F}{2188 + 58 \text{ Pr}^{-0,5} (\text{Re}_F^{0,75} - 63)} \quad (7.80)$$

³Kutateladze, S. S., Fundamentals of Heat Transfer, Academic Press, New York, 1963

⁴Labuntsov, D.A.; Heat Transfer in Film Condensation of Pure Steam on Vertical Surfaces and Horizontal Tubes; Teploenergetika, 4, 72, 1957

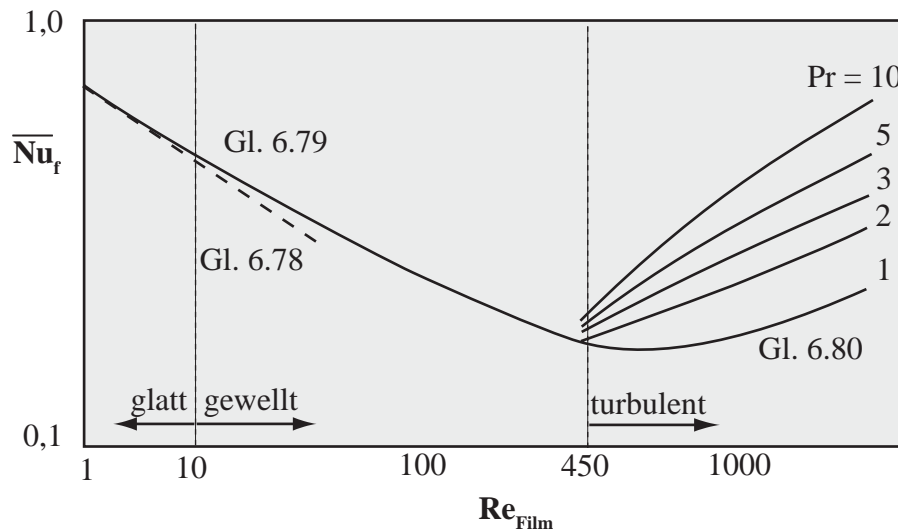


Abbildung 7.16: Film-Nusselt-Zahl für den laminaren und turbulenten Kondensatfilm nach Nusselt bzw. nach Chun und Seban
Quelle: Incropera u. DeWitt (1996)

Eine graphische Darstellung dieser Korrelationen zeigt die Abb. 7.16.

7.3.2 Kondensation reiner Dämpfe — Tropfenkondensation

Bei der Tropfenkondensation kondensiert der Dampf nicht mehr als ein geschlossener Film, sondern in vielen kleinen Tröpfchen, die mit der Zeit anwachsen und bei Erreichen einer gewissen Größe an der gekühlten Wand herunterlaufen. Da die Wärmeübergangskoeffizienten bei der Tropfenkondensation wegen des fehlenden Filmwiderstandes wesentlich größer sind als bei der Filmkondensation, ist man in technischen Anwendungen bestrebt, den Dampf in Tropfen kondensieren zu lassen.

Ob es zu einer stabilen Tropfenbildung kommt, ist von den Kräfteverhältnissen an der Kontaktlinie zwischen der Wand und dem (zumindest kurzfristig existierenden) Tropfen abhängig. In Abb. 7.18 sind die drei Grenzflächenspannungen zwischen jeweils zwei Phasen (fest=Wand, „W“, flüssig „f“, gasförmig „g“) gezeigt. Danach ist die Kraft aufgrund der sog. Benetzungsspannung $\sigma_{W,g}^* - \sigma_{W,f}^*$ im Gleichgewicht mit der wandparallelen Komponente der Kraft aufgrund der Grenzflächenspannung $\sigma_{f,g}^*$

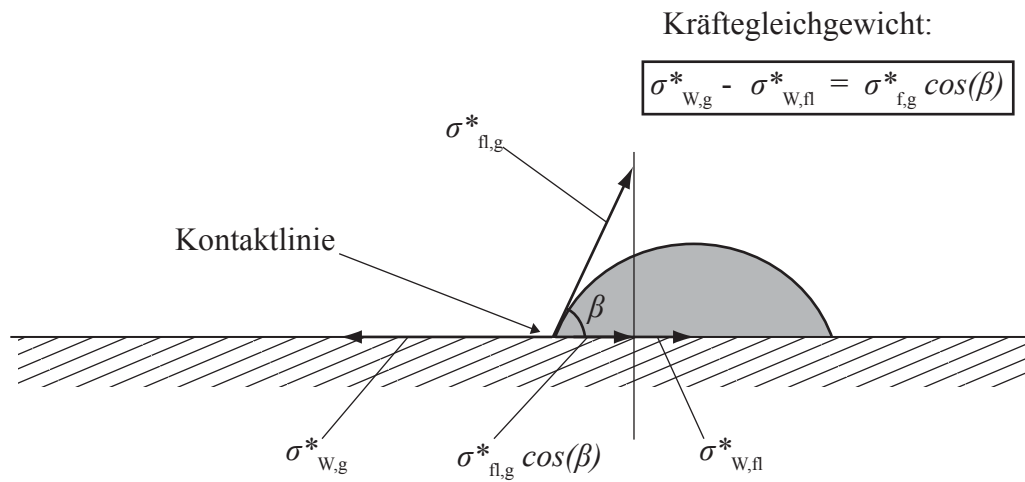


Abbildung 7.17: Grenzflächenspannungen an der Kontaktlinie eines Flüssigkeitstropfens mit einer festen Wand
Quelle: Herwig u. Moschallski (2009)

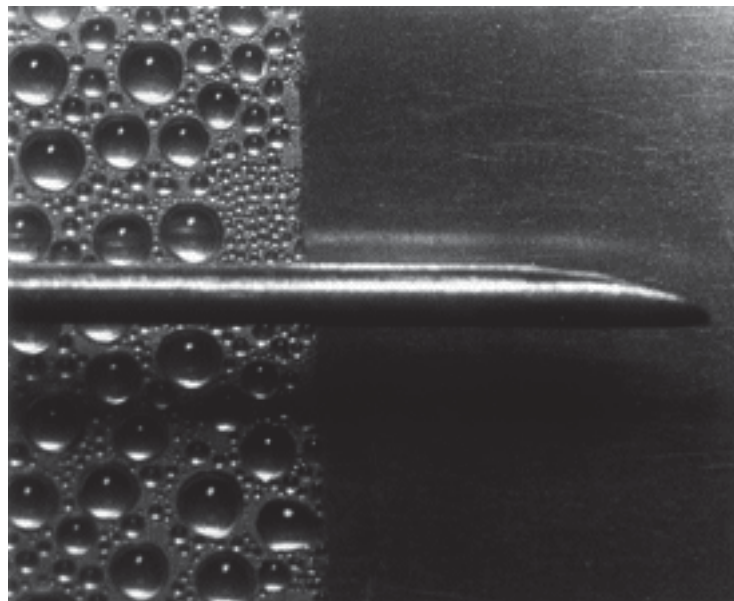


Abbildung 7.18: Kondensierender Dampf an einer vertikalen Kupferwand bei atmosphärischen Bedingungen. Die Filmkondensation ist auf der rechten Seite sichtbar, die Tropfenkondensation auf der linken Seite. Der horizontale Stab ist ein Thermoelement.
Quelle: J.F. Welch und J. W. Westwater, Department of Chemical Engineering, Universität von Illinois, Urbana

(=Oberflächenspannung des Fluides). Dieses Gleichgewicht, und damit eine stabile Tropfenbildung existieren nur, wenn

$$\sigma_{W,g}^* - \sigma_{W,f}^* < \sigma_{f,g}^* \quad (7.81)$$

gilt. Um eine Tropfenbildung an Stelle der Filmkondensation zu ermöglichen, müssen die Grenzflächenspannungen $\sigma_{W,g}^*$ und $\sigma_{W,f}^*$ im Sinne von (7.81) beeinflusst werden. Da bei reinen Dämpfen und reinen Oberflächen die Benetzung jedoch meist sehr gut ist, kann durch eine Verunreinigung des Dampfes mit sogenannten Impfstoffen und eine Behandlung der Oberflächen mit Öl, Fettsäuren, Wachs und ähnlichem (Promoter) eine Tropfenkondensation hervorgerufen werden. Diese Maßnahmen führen insbesondere bei Kupfer und seinen Legierungen zum Erfolg, während bei Stahl und Aluminium Tropfenkondensation schwer zu verwirklichen ist. Weiterhin begünstigen rauhe Oberflächen die Filmkondensation. Die Unsicherheit in der Voraussage, wann Tropfenkondensation oder auch Mischkondensation auftritt, macht eine Berechnung des Wärmeübergangs schwierig. Zur Sicherheit sollte beim Entwurf gerechnet werden, als ob Filmkondensation vorliegt, da hierbei stets die kleineren Wärmeübergangskoeffizienten auftreten.

Kapitel 8

Kontaktwärmeübertragung[†]

Der Wärmetransport innerhalb homogener Medien, sowie in mehrschichtigen Wänden ist bereits in Kapitel 3 behandelt worden. Unberücksichtigt blieb dabei jedoch der Wärmeübergang an der Kontaktfläche zwischen zwei Medien. Während bei der Grenzfläche zweier unmischbarer Flüssigkeiten davon ausgegangen werden kann, dass kein zusätzlicher thermischer Widerstand existiert, kommt es bei zwei in Kontakt stehenden Festkörpern zu einem zusätzlichen Kontaktwiderstand. In der Praxis treten Kontaktwärmeübergänge beispielsweise bei der Kühlung von Mikroprozessoren oder am Zylinderkopf eines Verbrennungsmotors auf.

In vielen technischen Anwendungen - wie beispielsweise der Auslegung thermisch und mechanisch belasteter Bauteilverbindungen - ist die Kenntnis des thermischen Kontaktwiderstandes zwischen zwei benachbarten Teilen von großer Relevanz. Sein Wert hängt vom Werkstoff, der Temperatur, dem Kontaktdruck und der Oberflächenbeschaffenheit an der Kontaktstelle ab.

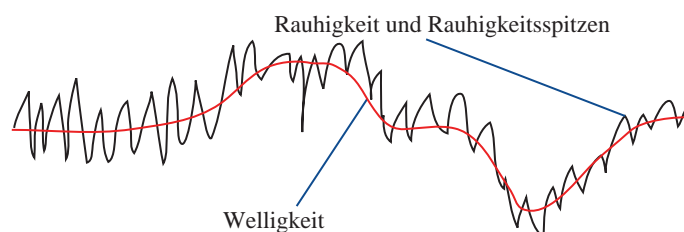


Abbildung 8.1: Oberflächenbeschaffenheit

Ansätze zur Beschreibung dieses Kontaktwiderstandes beruhen auf der Annahme, dass sich zwei benachbarte Oberflächen aufgrund ihrer Rauheit nur an wenigen

Punkten, den so genannten Rauigkeitsspitzen (siehe Abbildung. 8.1), berühren. Experimentelle und numerische Untersuchungen auf diesem Gebiet existieren bereits seit über 100 Jahren. In vielen Anwendungsfällen werden heute (oft empirische) Modelle zur Beschreibung des Kontaktwärmeübergangs eingesetzt. Auf eine Beschreibung dieser Modelle soll hier verzichtet werden, eine Zusammenstellung findet sich in Fieberg (2008).

8.1 Grundlegende Überlegungen

Im Falle eines idealen Kontakts, wenn sich kein thermischer Kontaktwiderstand in der Schnittstellenlinie ergibt, kann die Randbedingung der Kontaktstelle wie folgt geschrieben werden:

$$\dot{q}_{\text{Kontakt}}'' = -\lambda_A \frac{\partial T_A}{\partial x} \Big|_{x=-0} = -\lambda_B \frac{\partial T_B}{\partial x} \Big|_{x=+0} \quad (8.1)$$

Hierbei steht die Koordinatenrichtung x normal auf der Kontaktfläche und zeigt aus dem Körper A heraus in den Körper B hinein. Der Wärmefluss über eine Kontaktstelle muss im stationären Fall genau dem Wärmefluss entsprechen, der in Körper A eingeleitet und aus Körper B abgeführt wird. Die Wärmestromdichte durch die in Kontakt stehenden Körper ist somit konstant:

$$\dot{q}_{\text{ein}}'' = \dot{q}_{\text{aus}}'' = \dot{q}_{\text{Kontakt}}'' \quad (8.2)$$

In der Literatur wird häufig der Ausdruck des thermischen Kontaktwiderstandes W_{Kontakt} verwendet. Für viele Betrachtung kann dieser jedoch nur bedingt eingesetzt werden, da er sich auf eine bestimmte Kontaktstelle bezieht und somit keinen flächenbezogenen Wärmestrom beschreibt.

$$\dot{Q}_{\text{Kontakt}} = \frac{T_{A,\text{Kontakt}} - T_{B,\text{Kontakt}}}{W_{\text{Kontakt}}} \quad (8.3)$$

$T_{A,\text{Kontakt}}$ beziehungsweise $T_{B,\text{Kontakt}}$ bezeichnen hierbei die Temperatur des jeweiligen Körpers an der Kontaktstelle. Im Folgenden sollen folgende drei Fälle betrachtet werden: Ein nichtvorhandener, ein unendlich groß und ein realer Kontaktwiderstand W_{Kontakt} . Abbildung 8.2 zeigt den jeweiligen Temperaturverlauf.

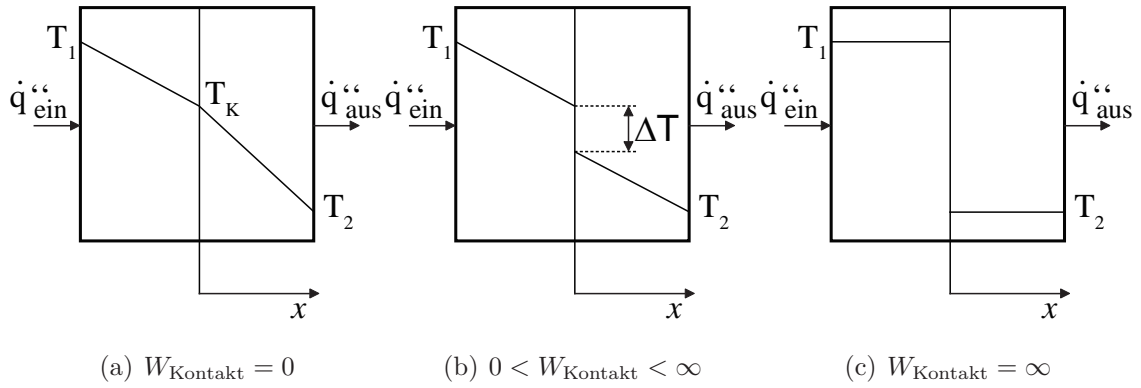


Abbildung 8.2: Temperaturprofile in Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes

Nicht vorhandener Kontaktwiderstand, $W_{\text{Kontakt}} = 0$ Bei diesem idealisierten Fall (Abbildung 8.2(a)) sind die beiden Kontakttemperaturen identisch:

$T_{A,\text{Kontakt}} = T_{B,\text{Kontakt}} = T_K$. Die Steigung des Temperaturprofils hängt von der Wärmeleitfähigkeit des jeweiligen Körpers ab.

Unendlich großer Kontaktwiderstand, $W_{\text{Kontakt}} = \infty$ Wärme kann nicht von Körper A in Körper B fließen, es ist $\dot{q}_{\text{ein}}'' = \dot{q}_{\text{aus}}'' = 0$. Der Temperaturverlauf dieses Falls ist in Abbildung 8.2(c) dargestellt. Gemäß Gleichung 8.2 sind die Temperaturgradienten $\frac{\partial T_A}{\partial x}$ und $\frac{\partial T_B}{\partial x}$ null (keine Wärmeleitung). Die konstanten Temperaturen der Körpern entsprechen der Temperatur an ihren Rändern: $T_A = \text{konstant} = T_1$ beziehungsweise $T_B = \text{konstant} = T_2$.

Realer Kontaktwiderstand, $0 < W_{\text{Kontakt}} < \infty$ Der reale Fall (Abbildung 8.2(b)) liegt zwischen den beiden Extrema. An der Kontaktstelle stellt sich ein Temperatursprung $\Delta T = T_{A,\text{Kontakt}} - T_{B,\text{Kontakt}}$ ein.

Für die Berechnung eines flächenbezogenen Wärmestroms werden in der Praxis alle Effekte der Kontaktwärmeübertragung in den Kontakt-Wärmeübergangskoeffizienten α_K zusammengefasst. Dieser beschreibt analog zu Gleichung 8.3 den Wärmefluss:

$$\dot{q}_{\text{Kontakt}}'' = \alpha_K \Delta T = \alpha_K (T_{A,\text{Kontakt}} - T_{B,\text{Kontakt}}) \quad (8.4)$$

Aus Energieerhaltungsüberlegungen folgt für den Wärmestrom zwischen den beiden in mechanischem Kontakt stehenden Körpern A und B:

$$\dot{Q}_{\text{Kontakt}} = \frac{(T_1 - T_2)A}{\left(\frac{l_A}{\lambda_A} + \frac{1}{\alpha_K} + \frac{l_B}{\lambda_B}\right)} \quad (8.5)$$

$\frac{l_A}{\lambda_A}$ beschreibt die Wärmeleitung durch Körper A, $\frac{l_B}{\lambda_B}$ die durch Körper B. Hierbei ist l_A die Länge des Körpers A, l_B analog dazu die Länge des Körpers B. Bestehende Kontaktwärmemodelle gehen meist auf die Grundlagen der Wärmeleitung zurück. Hierbei kann der Wärmestrom gemäß Gleichung 8.4 durch folgenden Zusammenhang wiedergegeben werden:

$$\dot{Q} = \alpha_K A_{\text{nom}} \Delta T \quad (8.6)$$

Dabei ist A_{nom} die nominelle Kontaktfläche zwischen den beiden Körpern. Die reale Kontaktfläche A_{real} bezeichnet hingegen nur die punktuellen mechanischen Kontakte zwischen den Rauigkeitensspitzen. Sie beträgt lediglich 1-5% der nominellen Kontaktfläche (Madhusudana (1996)) und ist unter Anderem abhängig vom anliegenden Kontaktdruck. Der Wärmestrom über die Kontaktstelle kann auch als Aufsummierung der Wärmeflüsse (Wärmeleitung durch die einzelnen Oberflächenspitzen) formuliert werden:

$$\dot{Q}_{\text{Kontakt}} = \frac{\lambda}{\delta} A_{\text{real}} \Delta T \quad (8.7)$$

δ bezeichnet hierbei die Dicke des Spaltes, der durch die Rauigkeitsspitzen verursacht wird. Ihre Wärmeleitfähigkeit wird durch λ angegeben. Es ist offensichtlich, dass bei dieser Formulierung die Bestimmung der realen Kontaktfläche sehr schwierig ist. Aus den Gleichungen 8.7 und 8.6 ergibt sich nun folgender Zusammenhang, in welchem der Einfluss der Temperaturdifferenz verschwindet.

$$\alpha_K A_{\text{nom}} \Delta T = \frac{\lambda}{\delta} A_{\text{real}} \Delta T \quad (8.8)$$

Umgestellt nach α_K ergibt sich folgende Gleichung, auf der die meisten Modelle in der Literatur basieren:

$$\alpha_K = \frac{\lambda}{\delta} \frac{A_{\text{real}}}{A_{\text{nom}}} \quad (8.9)$$

Das Verhältnis der realen zur nominellen Kontaktfläche kann nach Cooper u. a. (1969) mit dem Verhältnis zwischen Kontaktdruck P und Materialhärte H (in MPa) korreliert werden.

$$\frac{A_{\text{real}}}{A_{\text{nom}}} = \frac{P}{H} \quad (8.10)$$

Dieser lineare Zusammenhang wurde aus experimentellen Untersuchungen abgeleitet (Kumar u. a. (2004)), ist jedoch nur für verhältnismäßig geringe Kontaktdrücke unterhalb von 7 MPa validiert. Wird eine Rauigkeitsspitze in eine Fläche gedrückt, so stellt sich für diese zunächst eine elastische, bei höherem Druck eine plastische Verformung ein. Bei Überschreitung eines bestimmten Druckes beginnt das Material zu fließen und die Fläche zu reißen (Fieberg (2008)).

8.2 Wärmetransportmechanismen im Kontaktstellenbereich

Der Wärmetransport zwischen zwei Bauteilen erfolgt an den Kontaktstellen hauptsächlich durch Wärmeleitung an den Kontaktpunkten. Ein geringerer Teil der Wärme wird jedoch durch die mit Gas gefüllten Hohlräume (Lufttaschen) transportiert. Bei geringen Temperaturen ($T < 500\text{K}$) ist auch hier der vorherrschende Transportmechanismus Wärmeleitung durch das Gas. Ein konvektiver Wärmeübergang findet auf Grund der geringen Abstände (im Bereich der Oberflächenrauigkeit, typischerweise 0,1 - 20 μm) kaum statt. Eine Kennzahl zur Überprüfung dieser Annahme ist die Rayleigh-Zahl. Sie ist das Produkt der Prandtl- und der Grashof-Zahl und setzt damit die durch Temperaturdifferenzen auftretenden Auftriebskräfte ins Verhältnis zu den viskosen Kräften.

$$\text{Ra} = \text{Pr} \cdot \text{Gr} \quad (8.11)$$

Liegt $\text{Ra} \ll 1000$, so sind Konvektionsströmungen nicht vorhanden oder vernachlässigbar. Bei Temperaturen ab $T > 500\text{K}$ gewinnt schließlich der Wärmetransport durch Strahlung an Bedeutung und muss daher ebenfalls berücksichtigt werden. Sind die Hohlräume nicht mit einem Gas gefüllt, sondern beispielsweise bei der Wärmeübertragung in Gleitlagern mit einem Schmiermittel, ändert sich der Kontaktwärmeübergang komplett.

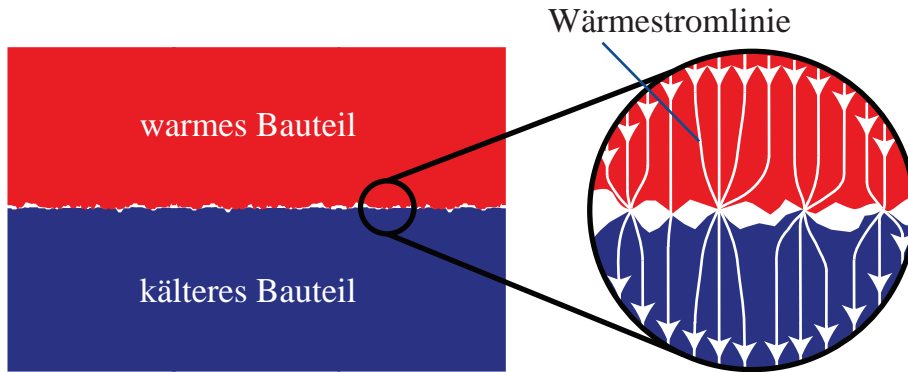


Abbildung 8.3: Wärmestrom durch eine Kontaktfläche

Wie bereits beschrieben, ist Konvektion in den Lufttaschen aufgrund der geringen Abstände meistens zu vernachlässigen, die Wärme wird hauptsächlich durch Leitung übertragen. Zu beachten ist, dass die Spaltbreite zwischen den beiden Bauteilen zum Teil in der Größenordnung der freien Weglänge von Gasmolekülen liegt. Dies führt dazu, dass die Kontinuumsannahmen der Wärmeleitung im Gas nur noch bedingt gelten. Nach Springer (1971) kann die Wärmeleitung in einer Gasschicht zwischen zwei parallelen Platten in vier Bereiche eingeteilt werden. Die dimensionslose Kennzahl, die eben diese Unterscheidung ermöglicht, ist die Knudsen-Zahl Kn . Sie beschreibt das Verhältnis der freien Weglänge eines Gasmoleküls zum Abstand zwischen den beiden Oberflächen. Alternativ kann die Knudsen-Zahl auch als Verhältnis von Mach-Zahl zu Reynolds-Zahl geschrieben werden.

$$Kn = \frac{\Lambda}{\delta} = \frac{Ma}{Re} \quad (8.12)$$

Die mittlere freie Weglänge Λ ist definiert als die Wegstrecke, die ein Molekül durchschnittlich zurücklegt, bevor es mit einem anderen Molekül in Wechselwirkung tritt (Kennard (1938)). In Springer (1971) ist sie als Funktion der Temperatur und des Drucks angegeben:

$$\Lambda = \left(\frac{p_{\text{ref}}}{p_{\text{Gas}}} \right) \left(\frac{T_{\text{Gas}}}{T_{\text{ref}}} \right) \Lambda_{\text{ref}} \quad (8.13)$$

Dabei ist Λ_{ref} die mittlere freie Weglänge bei bestimmten Referenzrandbedingungen für Druck p_{ref} und Temperatur T_{ref} . Die vier Bereiche in Abhängigkeit der Knudsen-Zahl können wie folgt beschrieben werden:

Kontinuum, $Kn \ll 1$ Der Spalt zwischen den beiden Platten ist deutlich größer als die mittlere freie Weglänge. Damit herrschen die bekannten Kontinuumsbedingungen wie beispielsweise Fouriersche Wärmeleitung mit einer effektiven Wärmeleitfähigkeit des Gases.

Temperatursprung, $0,01 \leq Kn \leq 0,1$ Der Energietransport zwischen Gas und Oberfläche der Festkörper findet nicht vollständig statt und führt damit zu einem Temperatursprung beim Übergang von Oberfläche zum Gas.

Übergangsbereich, $0,1 \leq Kn \leq 10$ In diesem Bereich sind die Zusammenstöße der Gasmoleküle und der Wärmeübergang von der Oberfläche an das umgebende Gas (Temperatursprung) die beiden dominierenden Mechanismen.

Freie Molekularströmung, $10 < Kn$ Bei der freien Molekularströmung sind die Zusammenstöße zwischen den Gasmolekülen sehr selten und der Wärmetransport findet ausschließlich zwischen den Gasmolekülen und den Festkörperoberflächen statt.

Beim Kontakt typischer, technisch rauer Oberflächen beträgt der effektive Abstand im Gasspalt einige Mikrometer, während die mittlere freie Weglänge für Luft bei etwa 65 nm liegt. Damit ist die Knudsen-Zahl im Bereich des Temperatursprungs ($0,01 \leq Kn \leq 0,1$). Zur Beschreibung der Wärmeleitfähigkeiten in allen vier Fällen sei an dieser Stelle auf weiterführende Literatur, wie zum Beispiel Yovanovich (1982) verwiesen.

8.3 Experimentelle Untersuchungen

Der thermische Kontaktwiderstand lässt sich auf verschiedene Weisen experimentell bestimmen. Wesentliches Unterscheidungsmerkmal ist dabei die aufgeprägte Lastform. Einmal verpresste Bauteile werden mit einem konstanten Anpressdruck beaufschlagt. Bei zyklische Belastungen finden sich immer wiederkehrende, bei gänzlich instationären hingegen zeitlich schwankende Anpressdrücke. Springer (1971) hat gezeigt, dass die instationären Effekte bei transienten Belastungen meistens im Bereich

einiger hundertstel Sekunden liegen. Sie spielen damit nur bei Lastspielen mit einer Frequenz von $f > 10\text{Hz}$ eine Rolle. Daher besteht die Möglichkeit, Kontaktwiderstände mit transienten Messmethoden als stationäre Werte zu ermitteln, solange die Kontaktzeit entsprechend hoch ist ($t_{\text{Kontakt}} > 0,1\text{s}$).

8.3.1 Stationäre Messverfahren

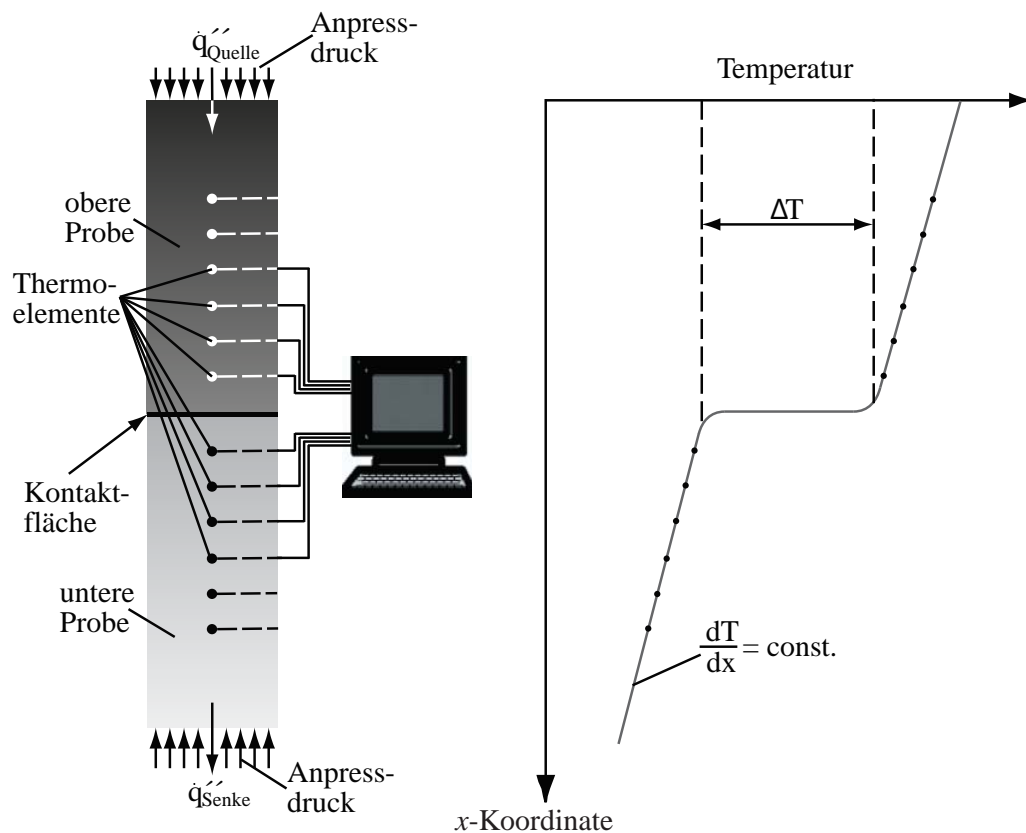


Abbildung 8.4: Prinzipskizze des experimentellen Aufbaus zur stationären Bestimmung des Kontakt-Wärmeübergangskoeffizienten

Die häufigsten Kontaktwärmeleitungsprobleme sind stationärer Natur. Daher liegt es nahe, diese auch mit Hilfe stationärer Verfahren experimentell zu bestimmen. Zumeist geschieht dies mit zwei axial aufeinander gepressten zylindrischen Proben. An dem der Kontaktfläche gegenüberliegenden Ende wird definiert jeweils die Wärme \dot{q}'' zu- beziehungsweise abgeführt (siehe Abbildung 8.4). Je nach Temperaturniveau und gewünschter Genauigkeit werden die Versuche in einer evakuierten Umgebung

durchgeführt und die Proben mit einem Strahlungsschutz versehen. Im stationären Zustand und bei einer entsprechenden radialen Isolierung stellt sich entlang der Zylinderachse ein lineares Temperaturprofil mit einem Sprung an der Kontaktstelle ein (siehe Abbildung 8.4 rechts). Dieses Temperaturprofil wird mit Hilfe mehrerer Thermoelemente gemessen. Durch Extrapolation der Messdaten lassen sich die Temperaturen an der Kontaktstelle und somit der Temperatursprung ΔT bestimmen. Der Kontakt-Wärmeübergangskoeffizient ist nun:

$$\alpha_K = \frac{\dot{q}''}{\Delta T} = \frac{1}{W_{\text{Kontakt}} \cdot A_{\text{nom}}} \quad (8.14)$$

Stationäre Versuche sind jedoch sehr zeitaufwändig. Je nach Temperaturniveau und untersuchten Materialien kann es mehrere Stunden dauern, bis sich ein stationärer Zustand eingestellt hat (McWaid u. Marschall (1992)). Die Thermoelemente müssen sehr sorgfältig in die Proben eingebracht werden, um die Temperatur an der gewünschten Position exakt bestimmen zu können. Darüber hinaus beeinflussen die Messfühler das sich einstellende Temperaturfeld und erzeugen somit Abweichungen vom gewünschten, linearen Temperaturverlauf entlang der Probenachse.

Neben axialen existieren auch radiale Apparate zur Bestimmung des thermischen Kontaktwiderstands. Diese entsprechen vom Prinzip dem beschriebenen Versuch. Allerdings wird der Wärmefluss nun radial durch die Bauteile geführt, die sich entsprechen an ihren Mantelflächen berühren. Weiterführende Informationen zu diesen Messverfahren finden sich beispielsweise bei Madhusudana u. Litvak (1990).

8.3.2 Instationäre Messverfahren

Neben den beschriebenen stationären Messverfahren existieren eine Reihe von instationären Methoden zur Bestimmung des Kontaktwärmeübergangskoeffizienten. Jedoch können alle transienten Verfahren den Übergangskoeffizienten nicht direkt berechnen, da hierzu gemäß Gleichung 8.14 eine Bestimmung des Wärmeflusses notwendig ist. Dieser lässt sich wegen seiner Zeitabhängigkeit jedoch nicht direkt messen. Um ihn zu bestimmen, muss ein instationäres Temperaturfeld aufgenommen werden, welches einen Rückschluss auf den Wärmefluss zulässt. Mathematisch wird dieses Vorgehen als Lösung des inversen Wärmeübertragungsproblems bezeichnet,

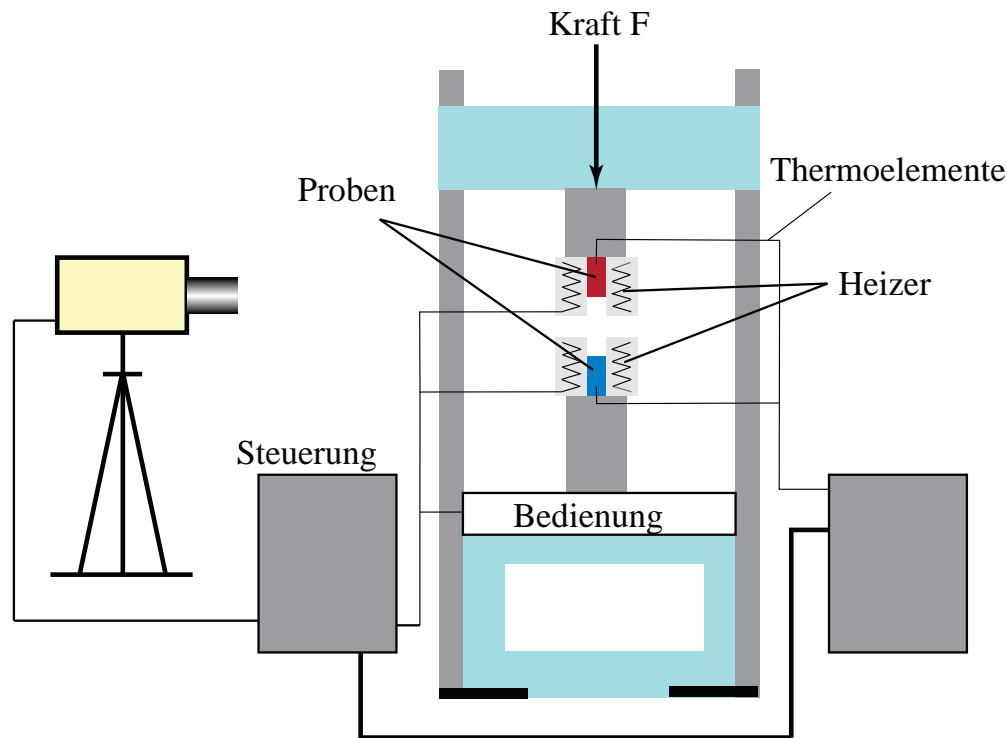


Abbildung 8.5: Prinzipskizze des experimentellen Aufbaus zur instationären Bestimmung des Kontakt-Wärmeübergangskoeffizienten.

da hier ausgehend von einer Wirkung (einer Temperatur) auf eine Ursache (einem Wärmestrom) geschlossen wird.

Bei transienten Versuchen kommt meistens ein thermografisches und somit berührungsloses Aufnahmeverfahren zum Einsatz, Fieberg (2008) verwendet beispielsweise eine Hochgeschwindigkeitsinfrarotkamera (siehe Abbildung 8.5). Eine heiße und eine kalte Probe werden mit definiertem Druck aufeinander gepresst und der transiente Verlauf der Temperaturen an der Kontaktstelle aufgenommen. Zwei verschiedene Lösungsalgorithmen erlauben die inverse Rückrechnung auf den Wärmefluss und somit auf den Kontakt-Wärmeübergangskoeffizienten: Neben einer analytisch basierten, sequentiellen Methode, die ausschließlich Wärmeleitung innerhalb der Proben berücksichtigt, erlaubt das iterative Verfahren der „konjugierten Gradienten“ auch die Berücksichtigung von Strahlungs- und Konvektionsverlusten. Für detaillierte Informationen sei auf Fieberg (2008) verwiesen.

Kapitel 9

Infrarotthermographie[†]

9.1 Einleitung

Die Infrarotthermographie ist ein nicht-invasives Verfahren zur Temperaturbestimmung. Das zu Grunde liegende Phänomen ist die Wärmestrahlung, die der Astronom William Herschel im Jahr 1800 entdeckt hatte (Herschel, 1800, S. 292). Die ersten bildgebenden Infrarotkameras entstanden Mitte der 1950er Jahre (Fouad u. Richter, 2006, S. 31). Heute wird diese Technik in einer Vielzahl von Einsatzbereichen, wie z. B. in der Forschung, Überwachung, energetische Sanierung von Gebäuden und Qualitätskontrolle angewendet.

Aufbauend auf Kapitel 2 zur Wärmestrahlung liefert dieses Kapitel eine Einführung in die IR-Thermographie. Zunächst behandelt Abschnitt 9.2 die notwendigen physikalischen Grundlagen. Im Anschluss behandelt Abschnitt 9.3 die Voraussetzungen für eine korrekte Anwendung der Thermographie. Auf Grund ihrer deutlich höheren Relevanz im wissenschaftlichen Bereich beziehen sich alle Ausführungen zunächst auf Detektoren, die den photoelektrischen Effekt nutzen, sogenannte Quantendetektoren. Den Abschluss bildet daher Abschnitt 9.9 mit einer Übersicht über die am häufigsten verwendeten Detektoren. Dort werden auch eventuelle Unterschiede diskutiert, die die Funktionsweise der Infrarotkamera betreffen.

9.2 Physikalische Grundlagen

Die Infrarotmesstechnik beruht darauf, dass jeder Körper ab einer Temperatur größer als 0 K Wärmestrahlung emittiert. Der Begriff der Infrarotstrahlung bezeichnet dabei die gesamte elektromagnetische Strahlung mit einer Wellenlänge λ von 0,78 μm bis 1 mm. Diese lässt sich in die Bereiche des nahen, mittleren und fernen Infrarot (IR) unterteilen. Ein anderes Einteilungsmuster ist die Unterscheidung in IR-A und IR-B (beides nahes Infrarot), sowie IR-C (mittleres und fernes Infrarot), siehe Tabelle 9.1.

Tabelle 9.1: Einteilung des Infrarotspektrums nach DIN 5031 Teil 7 (1984)

Einteilung		Wellenlänge [μm]		
nahes IR	IR-A	0,78	bis	1,40
	IR-B	1,40	bis	3,00
mittleres IR	IR-C	3,00	bis	50,00
fernes IR		50,00	bis	1.000,00

Eine weitere weit verbreitete Unterteilung sieht die Einordnung in fünf Abstufungen vor, vgl. Tab. 9.2.

Tabelle 9.2: Alternative Einteilung des Infrarotspektrums (Byrnes, 2009, S. 22)

Einteilung	Wellenlänge [μm]		
nahes IR	0,78	bis	1,40
kurzwelliges IR	1,40	bis	3,00
mittelwelliges IR	3,00	bis	8,00
langwelliges IR	8,00	bis	15,00
fernes IR	15,00	bis	1.000,00

Für Messungen im infraroten Teil des Spektrums kommen drei Strahlungsbänder zum Einsatz, die sich im Wesentlichen an dem Schema aus Tabelle 9.2 orientieren. Je nach Art des verwendeten Detektors nimmt die Kamera Strahlung innerhalb eines kurz- (KW; von 0,7 bis 1,4 μm), mittel- (MW; von 3,0 bis 5,0 μm) oder langwelligem (LW; von 7,0 bis 14,0 μm) Bandes auf (Vollmer u. Möllmann, 2010, S. 10).

Ein Vergleich der Messbänder mit der Verteilung der spektralen Strahlungsstromdichte eines Schwarzkörpers in Abbildung 9.1 zeigt, dass die Wahl des Bandes

(und damit des Detektors) direkt mit den zu erwartenden Temperaturen verknüpft ist. Während bei Raumtemperaturen eine Langwellenkamera notwendig ist, können Kurzwellenkameras erst bei hohen Temperaturen sinnvoll eingesetzt werden.

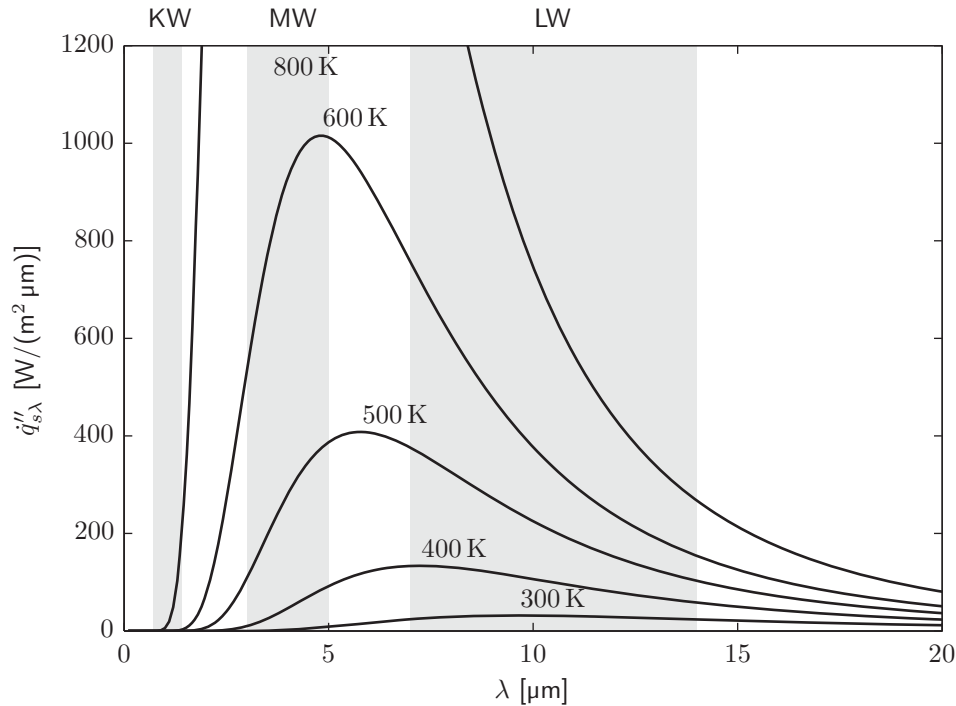


Abbildung 9.1: Spektrale Strahlungsstromdichte des schwarzen Körpers nach Planck

Des Weiteren zeigt sich, dass Mittelwellenkameras im Falle eines schwarzen Strahlers bis etwa 600 K mit der linken Flanke der Verteilung arbeiten. Der im Vergleich zur rechten Flanke steilere Gradient im Verlauf der spektralen Strahlungsstromdichte ermöglicht genauere Messergebnisse, da sich die unterschiedlichen Temperaturen deutlicher voneinander abheben. Umgekehrt können die Detektoren nicht beliebig hohe Intensitäten erfassen, so dass die flacheren Kurvenverläufe im langwelligen Bereich das Erfassen eines größeren Temperaturintervalls erlauben.

9.3 Messverfahren

Durch ihre Funktionsweise, d. h. das Erfassen von elektromagnetischer Strahlung in einem bestimmten Spektrum, erfasst eine IR-Kamera keine Temperatur, sondern

eine Flächenhelligkeit. Diese hängt unmittelbar mit dem abgestrahlten Wärmestrom der betrachteten Oberfläche zusammen, vgl. Abbildung 9.2.

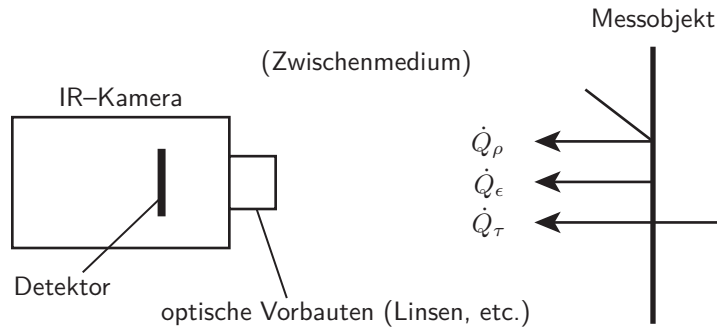


Abbildung 9.2: Prinzipielle Messung einer Oberflächentemperatur mit einer IR-Kamera

Um eine Aussage über die Temperatur des betrachteten Messobjekts treffen zu können ist daher der Emissionsgrad von entscheidender Bedeutung. Eine Fehlerquelle bilden Wärmeströme durch Transmission (\dot{Q}_τ) und Reflexion (\dot{Q}_ρ), die einen scheinbar höheren Wärmestrom durch Emission (\dot{Q}_ϵ) und damit eine höhere Temperatur vortäuschen können. Allerdings sind auch Fälle denkbar, in denen diese Wärmeströme gezielt erfasst werden sollen. Ein Beispiel ist die Messung durch ein Schutzglas um die Kamera vor äußeren Einflüssen zu bewahren. Ein weiterer Faktor ist der Einfluss des Mediums zwischen Objekt und IR-Kamera, über z. B. Gasstrahlung.

Da der Detektor selbst eine Temperatur über 0 K aufweist, sendet auch dieser Wärmestrahlung aus. Bei einem reflektierenden Messobjekt wird diese Strahlung als Teil des gesamten \dot{Q}_ρ zurück reflektiert, so dass sich der Detektor selbst sieht. Dieses Phänomen wird als Narziss-Effekt bezeichnet, vgl. Abbildung 9.3.

Für einen einzelnen Messpunkt erfasst der Detektor die über einen vorher definierten Zeitraum (Integrationszeit, vgl. Abschnitt 9.4) einfallende Strahlung. Das Ergebnis ist ein bestimmtes Energieniveau auf dem Sensor, welches die Kamera in ein digitales Level (DL; auch *Digital Values*, DV) umrechnet und als Messergebnis zurückgibt. Ausgehend von einer typischen, maximalen Auflösung von 14 Bit stehen etwa 16.000 dieser Level zur Verfügung. Diese bilden eine Obergrenze für die Dynamik bzw. thermische Auflösung der Aufnahmen. Effektiv wird allerdings nur das Intervall zwischen 3.000 und 13.000 DL genutzt, da der Detektor nur in diesem Bereich ein weitestge-

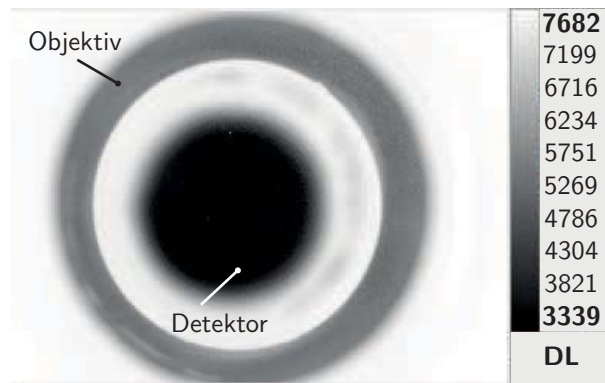


Abbildung 9.3: Der Detektor erfasst sich selber (Narziss-Effekt)

hend lineares Antwortverhalten aufweist, vgl. Abbildung 9.4. In den Randbereichen erzeugt eine Temperaturänderung eine vergleichbar geringe Änderung im Ausgangssignal, so dass die Messfehler ansteigen.

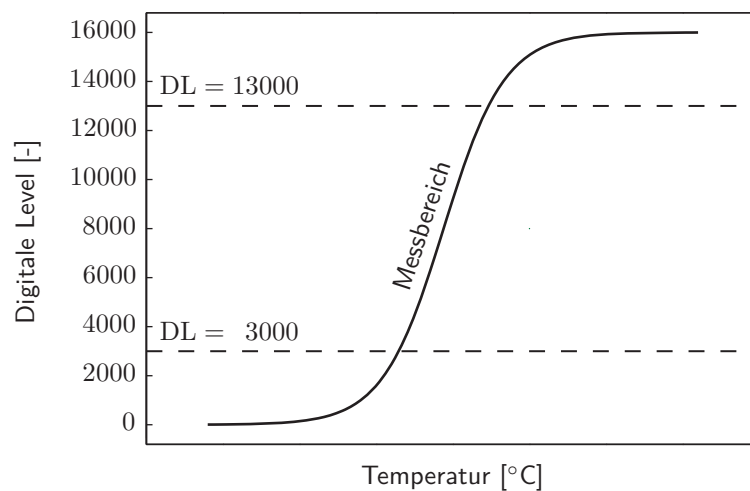


Abbildung 9.4: Antwortverhalten des Detektors

9.4 Integrationszeit

Der zuvor erwähnte definierte Zeitraum wird als Integrationszeit (engl. Integration Time, IT) bezeichnet. Der Name beschreibt direkt die Aufgabe des Zeitintervalls: Hierüber wird festgelegt, über welche Zeitperiode der Detektor die einfallenden

de Wärmestrahlung integriert bzw. sammelt. Da der Dynamikumfang des Detektors begrenzt ist, orientiert sich die Länge der Integrationszeit an der zu erwartenden Höchsttemperatur. Ansonsten würde der höhere Strahlungswärmestrom die 13.000 DL des Detektors vollständig in Anspruch nehmen. Das Ergebnis wäre auch bei starken Temperaturunterschieden das Erfassen einer vermeintlich konstanten Temperatur. Ist die Integrationszeit zu kurz gewählt, erreicht das Energieniveau nicht die Untergrenze von 3.000 DL, so dass eine zuverlässige Messung nicht möglich ist.

Neben der Einschränkung durch die gegebene Anzahl an festen Ausleseniveaus ergibt sich auch die Einschränkung, dass mit einer festen Integrationszeit nicht beliebig große Temperaturintervalle abgedeckt werden können. Abhilfe schafft die sogenannte Multi Integration Time (MIT). Hierbei erfolgt die Aufnahme jedes Messpunkts bzw. jedes Infrarotbilds mit verschiedenen Integrationszeiten. Im Nachhinein lässt sich dann für jedes Bild einzeln die beste Einstellung auswählen, vgl. Abb. 9.5. Nachteil

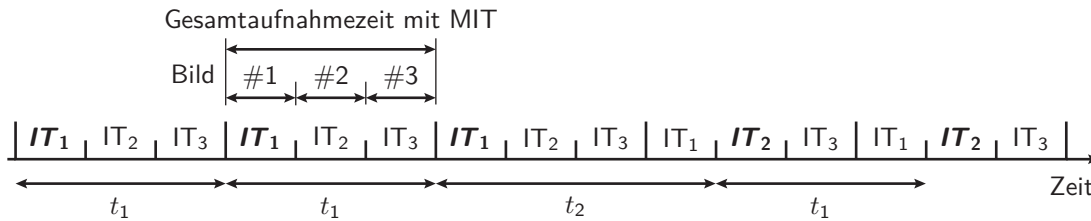


Abbildung 9.5: Beispiel für den Einsatz der Multi Integration Time mit $\Delta t_2 > \Delta t_1$

dieses Verfahrens ist eine reduzierte Aufnahmefrequenz, da bei einer Aufnahme Frequenz von zum Beispiel 100 Hz mit drei Integrationszeiten effektiv Bilder mit 300 Hz aufgezeichnet werden. Zusätzlich verändert sich bei Wechsel der Integrationszeiten der zeitliche Abstand der ausgewerteten Aufnahmen zueinander, vgl. Abb 9.5.

Im Falle von (schnell) bewegten Objekten ergibt sich ähnlich zu der Belichtungszeit bei herkömmlichen Aufnahmen eine weitere Randbedingung. Ist die Integrationszeit zu lang, zeigen die resultierenden Aufnahmen eine Bewegungsunschärfe, vgl. Abb. 9.6. Gleichzeitig integriert der Detektor auch den einfallenden Strahlungswärmestrom weiter auf, obwohl das Objekt den Sichtbereich bereits verlassen hat. Bei Messung eines heißen (kalten) Objekts in einer kalten (heißen) Umgebung folgt daraus, dass die erfasste Wärmestrahlung geringer (höher) als bei einer durchgehenden

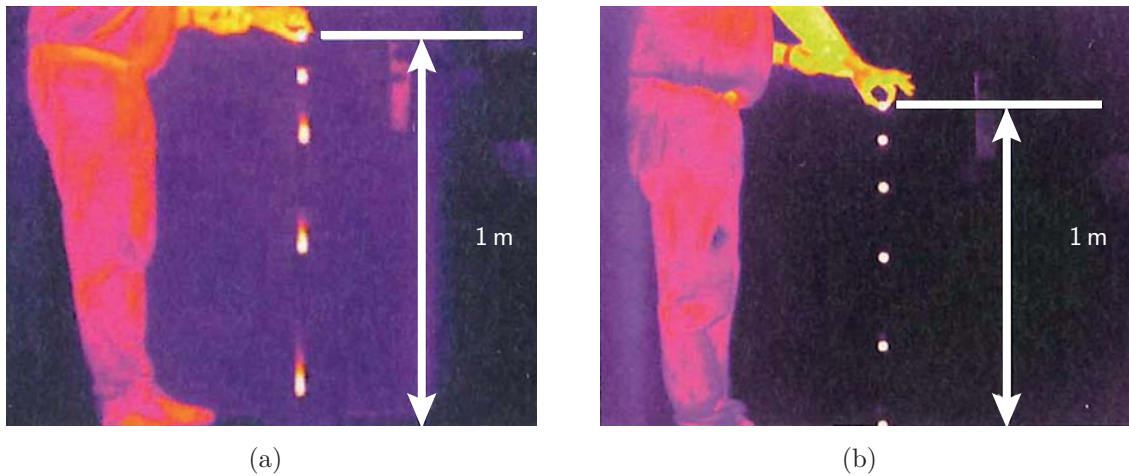


Abbildung 9.6: Bedeutung der Integrationszeit für die Aufzeichnung bewegter Messobjekte mit $IT_{(a)} > IT_{(b)}$ (Vollmer u. Möllmann, 2010, S. 151)

Beobachtung ist (Vollmer u. Möllmann, 2010, S. 152). Das Messergebnis ist somit fehlerbehaftet.

Ein weiterer Aspekt der zeitlichen Auflösung liegt darin, dass die Integrationszeit durch die geforderte Aufnahmefrequenz f limitiert ist:

$$\frac{1}{\text{Frequenz}} = \text{Gesamtzeit} / \text{Bild} > \text{Integrationszeit} + \text{Datenverarbeitungszeit} \quad (9.1)$$

Insbesondere bei niedrigen Temperaturen ergibt sich so eine Obergrenze der nutzbaren digitalen Level beziehungsweise der Dynamik des Detektors.

9.5 Räumliche Auflösung

Sowohl sichtbares Licht als auch Infrarotstrahlung sind elektromagnetische Strahlung und lassen sich dementsprechend durch die Maxwell-Gleichungen beschreiben. Um optische Berechnungen durchführen zu können sind diese Gleichungen jedoch zu umfangreich, deshalb wird zum Beispiel zur Auslegung von IR-Kameras gerne die geometrische Optik eingesetzt. Die geometrische Optik basiert jedoch auf dem Strahlenmodell des Lichts und kann Beugung, Interferenz, Polarisierung, Absorption

und Streuung nicht wiedergeben. Nur wenn diese Effekte vernachlässigbar sind kann die geometrische Optik herangezogen werden.

Der kleinste Abstand Δl_{\min} zwischen zwei Punkten bzw. Punktquellen, den eine Optik noch auflösen kann, lässt sich nach dem Kriterium von Lord Rayleigh (Rayleigh-Kriterium) mit der Wellenlänge λ , der Linsenbrennweite f und der Öffnungsweite der Optik (Apertur) D zu

$$\Delta l_{\min} = 1,22 \cdot \frac{f\lambda}{D}, \quad (9.2)$$

bestimmen, vgl. Abb. 9.7 und 9.8 (Hecht, 2005, S. 759f.). Der Vorfaktor von 1,22

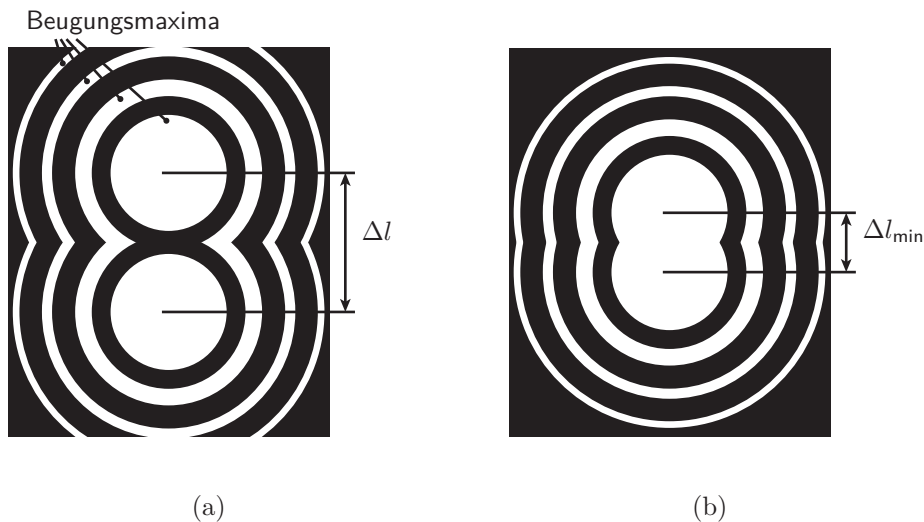
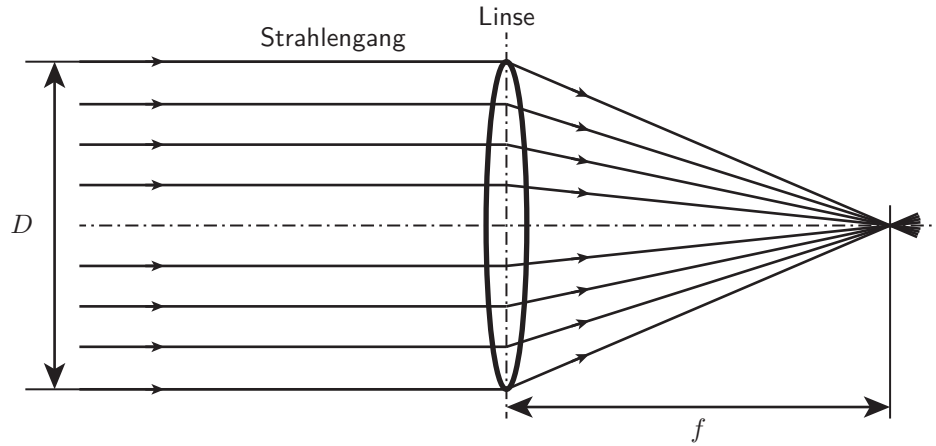


Abbildung 9.7: Auflösungsvermögen zweier Punktquellen anhand der ersten Maxima der beiden Beugungsmuster (Rayleigh-Kriterium; Hecht (2005, S. 760))

ergibt sich dabei aus der Intensitätsverteilung der Beugungsmuster, wie in Abbildung 9.7(a) beziehungsweise 9.7(b) gezeigt. Mathematisch können diese Beugungsmuster durch eine Besselfunktion erster Ordnung beschrieben werden. Entscheidungskriterium des Kriteriums ist die Fähigkeit der Optik, die ersten Intensitätsmaxima der beiden Punktquellen gerade noch voneinander unterscheiden zu können.

Durch die deutlich größeren Wellenlängen im infraroten Bereich (bis $1.000 \mu\text{m}$, vgl. auch Tab. 9.1 und 9.2) im Vergleich zum sichtbaren Licht (etwa $0,38$ bis $0,78 \mu\text{m}$) ergibt sich eine wesentlich geringere örtliche Auflösung des Messsystems.

Abbildung 9.8: Apertur D und Brennweite f einer Linse

9.6 Auflösung der Temperatur

Wie jedes andere (Mess-) System besitzen IR-Kameras ein Grundrauschen, welches das gemessene thermische Signal S überlagert. Sind die betrachteten Temperaturdifferenzen zu gering, sind diese von dem Rauschen des Systems nicht mehr zu unterscheiden. Damit besitzt jedes IR-System eine maximale thermische Auflösung. Die Größe, die diese minimale Temperaturdifferenz beschreibt, ist die sogenannte Noise Equivalent Temperature Difference (NETD). Experimentell ergibt sie sich aus dem quadratische Mittelwert (root mean square, rms) der scheinbar gemessenen Temperaturschwankungen beim Beobachten einer Oberfläche mit homogener Temperatur, das heißt

$$\text{NETD} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} \quad \text{mit} \quad \bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i, \quad (9.3)$$

vgl. auch Abb. 9.9(a). Im Falle normalverteilter Schwankungen entspricht die NETD der halben Breite der Verteilungsfunktion und damit deren Standardabweichung, vgl. Abb. 9.9(b) (Vollmer u. Möllmann, 2010, S. 140).

Theoretisch ist die NETD als das Verhältnis des Signalrauschens zur Signalübertragungsfunktion (Änderung des Signal durch optische Vorbauten, etc.) beziehungsweise zum Gradienten dS/dT , das heißt der Änderung des Signals über einer Änderung der Temperatur, definiert. Während das Rauschen des Systems bedingt durch De-

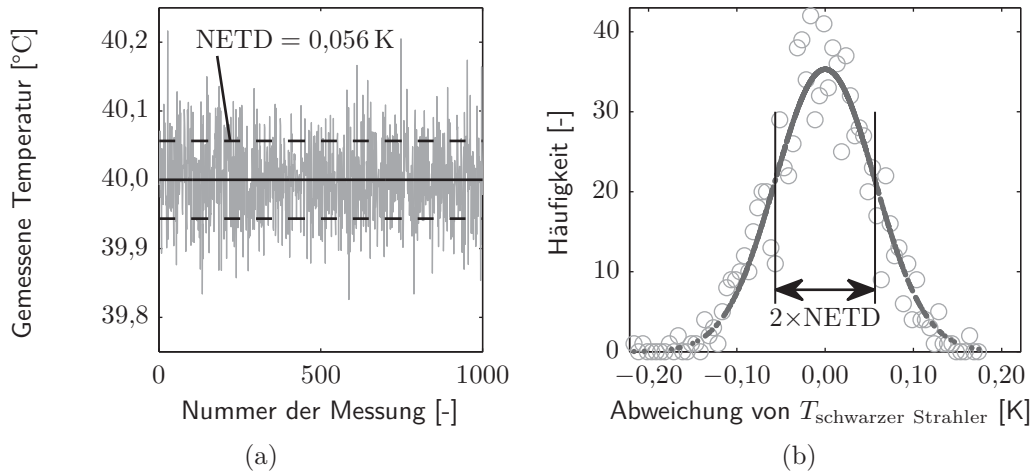


Abbildung 9.9: Bestimmen der NETD aus Temperaturmessungen eines schwarzen Strahlers mit $T_{\text{schwarzer Strahler}} = \text{konst.}$ (Vollmer u. Möllmann, 2010, S. 140)

tektor, Signalverstärker, etc. gegeben ist, nimmt das empfangene Signal mit höheren Temperaturen zu. Als Ergebnis sinkt die NETD mit steigenden Objekttemperaturen. Bei Betrachten des gesamten Wellenlängenspektrums von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \infty$ sogar mit T^{-3} , da für das Signal $S \sim T^4$ gilt (Vollmer u. Möllmann, 2010, S. 140f.).

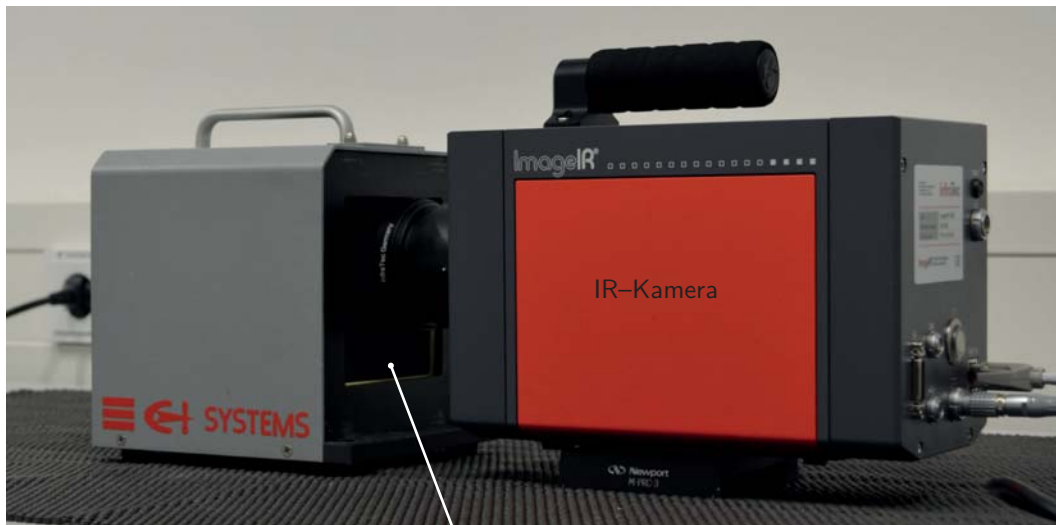
Das Gegenteil tritt auf, wenn durch einen Filter (vgl. Abschnitt 9.10) oder kürzere Integrationszeiten die Empfindlichkeit des Systems verringert werden muss. Da das Rauschen der IR-Kamera gegeben ist, steigt die NETD als Verhältnis zwischen Rauschen und Übertragungsfunktion an (Vollmer u. Möllmann, 2010, S. 141). Gründe für die Reduktion der Sensitivität sind zum Beispiel hohe Temperaturen (vgl. Dynamikumfang in Abschnitt 9.4) oder auch sehr schnelle Prozesse.

9.7 Inhomogenitätskorrektur

Der Detektor einer IR-Kamera besteht in der Regel aus einer Vielzahl von Elementen oder auch Subdetektoren. Jedes Einzelelement erfasst für sich den einfallenden Strahlungswärmestrom, so dass in Summe das Gesamtbild entsteht. Da das Antwortverhalten der einzelnen Pixel voneinander abweicht, muss dieses vor jeder Messung mit den restlichen Teildetektoren abgeglichen werden. Dies geschieht bei-

spielsweise mittels einer Inhomogenitätskorrektur, der sogenannten Non-Uniformity Correction (NUC).

Dabei liefert ein schwarzer Flächenstrahler eine Oberfläche mit bekannter Temperatur, vgl. Abbildung 9.10. So empfängt jeder Pixel den gleichen, definierten Strahlungswärmestrom Φ .



Schwarzer Flächenstrahler für die Referenzintensität

Abbildung 9.10: Aufbau für einen Inhomogenitätsabgleich (Non-Uniformity Correction)

Dieses Vorgehen erlaubt das Normieren des Ausgangssignals der IR-Kamera. Ergebnis ist eine lineare Antwortfunktion der Form

$$S = \alpha \cdot \Phi + \beta \quad (9.4)$$

für jedes einzelne Pixel bzw. jeden Teildetektor. Effektiv wird das Signal der Teildetektoren zunächst in den Dynamikbereich der Elektronik verschoben (Korrekturwert β). Im nächsten Schritt lässt sich die Steigung α für den gesamten Detektor vereinheitlichen (Vollmer u. Möllmann, 2010, S. 109). Das Ergebnis ist spezifisch für den konkreten optischen Aufbau mit allen Linsen, Filtern und Objektiven und für das erwartete Temperaturintervall. Ursache ist der unterschiedliche Effekt auf die vom Detektor erfasste Strahlung und das nicht-lineare Antwortverhalten der Pixel. So-

mit fällt die Prozedur für jede individuelle Konfiguration an. Die notwendigen zwei Stützstellen bzw. -temperaturen lassen sich über

$$T_1 = T_{\min} + 0,3 (T_{\max} - T_{\min}) \quad \text{und} \quad (9.5)$$

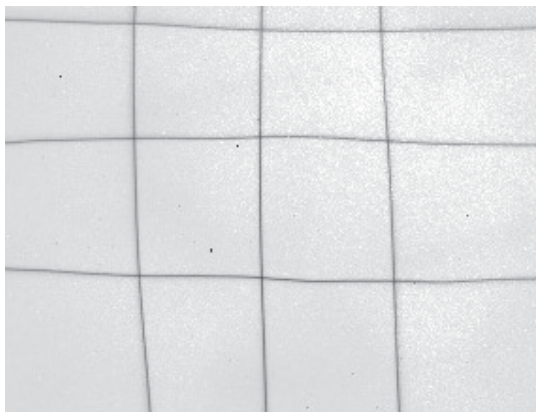
$$T_2 = T_{\min} + 0,7 (T_{\max} - T_{\min}) \quad (9.6)$$

ermitteln. Auf Grund der Anzahl der Stützstellen heißt diese Variante der Korrektur auch zwei-Punkt-NUC.

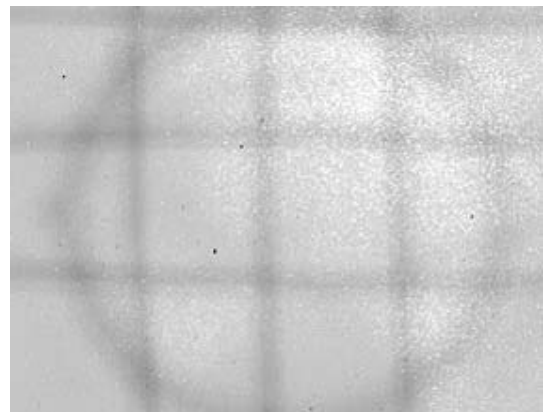
Abschließend müssen vor jeder Messung die Antwortkurven aller Pixel übereinandergelegt werden um den vorliegenden Umgebungsbedingungen zu entsprechen. Diese Signalverschiebung (engl. Offset) liefert eine allgemeingültige Antwortfunktion. Da hierfür nur eine Temperatur notwendig ist, heißt dieser Schritt ein-Punkt-NUC bzw. Offsetkorrektur. Gleichzeitig reicht eine homogene Fläche beliebiger Temperatur aus, die das gesamte Sichtfeld der Kamera abdeckt. Praktisch wird in der Regel eine homogen temperierte, möglichst schwarze Oberfläche, zwei bis drei Zentimeter vor das Objektiv gehalten und der Abgleich durchgeführt.

Dieser letzte Schritt erlaubt im Wesentlichen das aktuelle Bild als Referenz festzulegen. Auf diese Weise lassen sich auch Störungen heraus filtern. Ein Beispiel dazu liefert der Vergleich der Abbildungen 9.11(a) und 9.11(b): Nach der Offsetkorrektur liefert die Kamera das Bild des Drahtgitters ohne weitere Störungen. Die Software subtrahiert die Wärmestrahlung des Objektivs und filtert so dessen Einfluss heraus, vgl. Abbildung 9.11(a). Durch Verschieben des Fokuspunkts verändert sich der optische Weg zwischen Objekt und Detektor. Der Einfluss des Objektivs ändert sich (Abb. 9.11(b)) und wird mit dem ursprünglichen Offset nicht mehr korrekt korrigiert.

Abbildung 9.12 fasst die einzelnen Schritte der NUC noch einmal zusammen. Eine Übersicht über die Notwendigkeiten der ein- beziehungsweise zwei-Punkt-Korrektur liefert Tabelle 9.3.



(a) Ein-Punkt-NUC im Fokus



(b) Ein-Punkt-NUC außerhalb des Fokus mit erkennbarem Einfluss des Objektivs

Abbildung 9.11: IR Aufnahme eines Drahtgitters vor einem Schwarzkörper

Tabelle 9.3: Notwendige Inhomogenitätskorrektur bei unterschiedlichen Änderungen

Veränderter Parameter	2-Punkt-NUC	1-Punkt-NUC
Integrationszeit	×	
optischer Weg (Fokussierung, Filter, Linsen, etc.)	×	
Gehäuseabdeckung	×	
Bildformat, -ausschnitt		×
Einschalten		×
Aufnahmefrequenz	kein Einfluss	

9.8 Kalibrierung

Um die gemessenen digitalen Level in Temperaturen überführen zu können muss die Kamera kalibriert sein. Ähnlich zu der Non-Uniformity Correction liefert ein schwarzer Flächenstrahler das Referenzsignal um die Kamera mit definierten Strahlungswärmeströmen anzusprechen. Da auch hier der Einfluss der optischen Vorbauten eine Rolle spielt, ist jede Kalibration spezifisch für einen konkreten Aufbau des IR-Systems. Im Unterschied zur Inhomogenitätskorrektur befindet sich die Referenzfläche jedoch im Fokus der IR-Kamera. Dieses ist darin begründet, dass ein Abgleich zwischen den erfassten digitalen Leveln und vorliegenden Temperaturen und keine Normierung der Subdetektoren erfolgen soll.

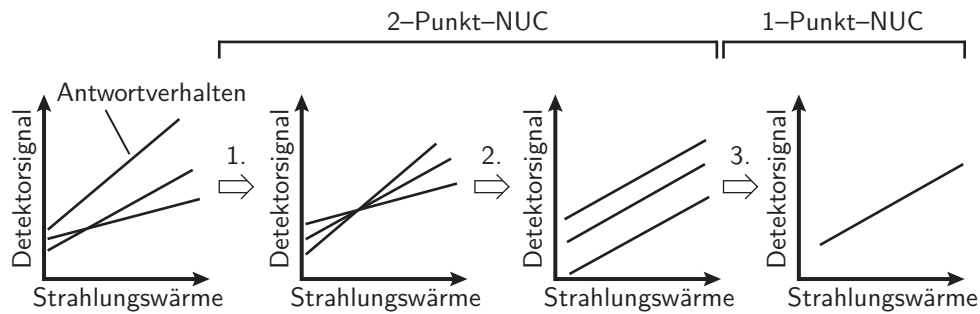


Abbildung 9.12: Ablauf einer vollständigen Non-Uniformity Correction mit 1.: Signalantwort der Pixel in den aktuellen Temperaturbereich verschieben, 2.: Anpassen der Steigung, 3.: Offset korrigieren (Vollmer u. Möllmann, 2010, S. 109)

In der Regel wird der Flächenstrahler für jede Stützstelle über ein kurzes Zeitintervall aufgenommen, so dass jeweils etwa 100 Einzelbilder vorliegen. Um Fehler durch Rauschen zu reduzieren, erfolgt eine zeitliche und räumliche Mittlung der Schwarzkörperaufnahmen. Ergebnis ist ein durchschnittliches digitales Level, welches als Stützstelle in die Kalibration eingeht. Aus einer ausreichend großen Menge dieser Zuordnungen von Temperaturen zu digitalen Leveln ergibt sich im Anschluss eine Kalibrationskurve, vgl. Abb. 9.13. Außerhalb des kalibrierten Temperaturbereichs

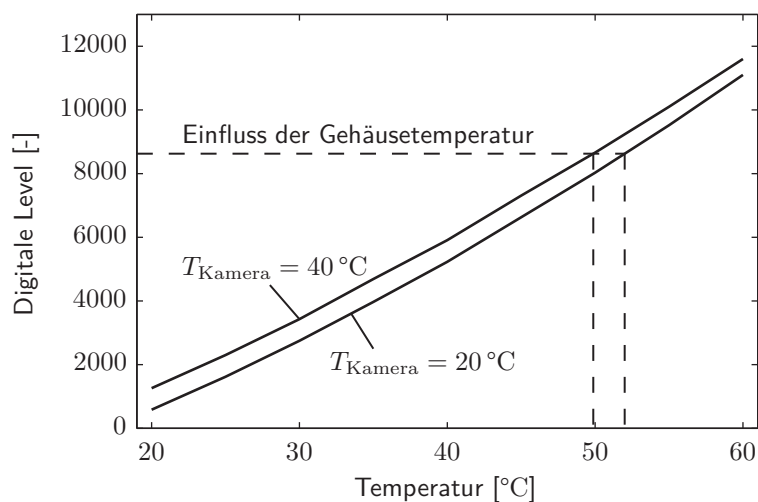


Abbildung 9.13: Kalibrationskurven bei verschiedenen Kamertemperaturen

wird von Seiten der Kamerasoftware extrapoliert. Durch das nicht-lineare Verhalten

des Detektors treten daher zunehmend Fehler bei der Umrechnung von digitalen Leveln in Temperaturen auf.

Da die den Detektor unmittelbar umgebenden Bauelemente ebenfalls Strahlung emittieren, sollte die Kalibrierung bei verschiedenen Gehäusetemperaturen zu wiederholt werden. Dadurch lässt sich dieser Einfluss herausfiltern. Wenngleich diese Störgröße bei aktiv gekühlten Kameras (vgl. Abschnitt 9.9) in der Regel gering ist, bietet sie doch eine Quelle für fehlerhafte Messergebnisse, vgl. Abb. 9.13.

9.9 Detektoren

Die eingesetzten IR-Detektoren unterscheiden sich in zwei Hauptgruppen, Quantendetektoren (vgl. Abschnitt 9.10) und thermische Detektoren (vgl. Abschnitt 9.11).

9.10 Quantendetektoren

Quantendetektoren nutzen den photoelektrischen Effekt, bei dem die einfallenden Photonen der Wärmestrahlung absorbiert und damit Elektronen aus ihrer Bindung gelöst werden. Die Folge ist ein messbares elektrisches Signal auf Grund der veränderten Ladungsverteilung im Detektor. Kennzeichnend für diese Art Detektor ist eine deutliche Begrenzung auf ein konkretes Wellenlängenspektrum bei sehr schnellem Ansprechverhalten mit sehr gutem Signal-Rausch-Verhältnis (Rogalski, 2002, S. 188). Dementsprechend sind Aufnahmefrequenzen von mehreren Kilohertz möglich. Die variablen Integrationszeiten erlauben zusätzlich die genaue Anpassung an das beobachtete Phänomen.

Heutzutage übliche Materialien sind unter anderem Quecksilber-Cadmium-Tellurid (HgCdTe bzw. engl. Mercury-Cadmium-Telluride, MCT) oder Indium-Antimon (InSb), die für den Betrieb auf 76 K heruntergekühlt werden.

In Bezug auf mögliche Einsätze ist MCT die deutlich vielseitigere Verbindung, da seine Leistung über das gesamte Infrarotspektrum nahezu konstant ist. Des Weiteren zeigt es sich relativ unempfindlich gegenüber Abweichungen in der chemischen Zusammensetzung. Daher ist MCT das zur Zeit wichtigste Ausgangsmaterial im Wel-

lenlängenbereich von 3 bis 30 μm (Rogalski, 2002, S. 193). Gleichzeitig lassen sich damit im Vergleich zu InSb deutlich schnellere Infrarotdetektoren herstellen. Der Vorteil von InSb liegt darin, dass es von der Verarbeitung her wesentlich einfacher zu handhaben ist.

Im praktischen Einsatz benötigen MCT Kameras ab einer Temperatur von 200 °C, InSb Kameras ab einer Temperatur von 300 °C einen Graufilter um die einfallende Strahlungsintensität zu reduzieren.

9.11 Thermische Detektoren

Im Gegensatz zu Quantendetektoren absorbieren thermische Detektoren Photonen nicht nur in einem begrenzten Wellenlängenband, sondern über das gesamte Spektrum. Die folgende thermische Erwärmung bewirkt die Änderung einer physikalischen Eigenschaft, über die ein elektrisches Signal generiert wird.

Im Falle der sogenannten Bolometer ändert sich der elektrische Widerstand (Rogalski, 2002, S. 188). Die Ausgangsmaterialien bilden in den meisten Fällen Silizium und Vanadiumdioxid (Rogalski, 2002, S. 201). Alternativ fallen auch pyroelektrische Detektoren in diese Kategorie. Hierbei führt die Temperaturänderung zu einer Spannungsdifferenz, die abgegriffen werden kann (Rogalski, 2002, S. 188).

Der Betriebspunkt dieser Art von IR-Sensoren liegt bei Umgebungstemperatur (Rogalski, 2002, S. 188). Damit entfällt der notwendige Kühlaufwand der Quantendetektoren, was einen Beitrag zum wesentlich günstigeren Anschaffungspreis leistet. Die deutlich geringere Geschwindigkeit und unveränderliche Integrationszeit schränken den Anwendungsbereich jedoch merklich ein.

Literaturverzeichnis

- [Atkins 1990] ATKINS, P.W. ; WILLIAMS, Peter (Hrsg.): *Physical Chemistry*. Oxford University Press, Oxford, 1990
- [Baehr u. Stephan 2006] BAEHR, H.D. ; STEPHAN, K.: *Wärme- und Stoffübertragung*. Springer-Verlag, Berlin, 2006
- [Bayley u. a. 1972] BAYLEY, F. J. ; OWEN, J. M. ; TURNER, A. B.: *Heat Transfer*. William Clowes & Sons, Ltd., London, 1972
- [v. Böckh 2006] BÖCKH, P. v.: *Wärmeübertragung - Grundlagen und Praxis*. Springer-Verlag, Berlin, 2006
- [Bird u. a. 1960] BIRD, R.N. ; STEWARD, W.E. ; LIGHTFOOT, E.N.: *Transport phenomena*. J. Wiley & Sons, New York, 1960
- [Blasius 1908] BLASIUS, H.: Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. In: *Z. Math. Phys.* 56 (1908), S. 1–37
- [Bosnjakovic u. Knoche 1998a] BOSNJAKOVIC, F. ; KNOCHE, K. F. ; KNOCHE, Prof. Dr.-Ing. K. F. (Hrsg.): *Technische Thermodynamik - Teil 1*. Steinkopff, Darmstadt, 1998
- [Bosnjakovic u. Knoche 1998b] BOSNJAKOVIC, F. ; KNOCHE, K. F. ; KNOCHE, Prof. Dr.-Ing. K. F. (Hrsg.): *Technische Thermodynamik - Teil 2*. Steinkopff, Darmstadt, 1998
- [Bromley 1950] BROMLEY, L. A.: Heat transfer in table film boiling. In: *Chem. Eng. Prog.* 46 (1950), S. 221–227
- [Byrnes 2009] BYRNES, J. (Hrsg.): *Unexploded Ordnance Detection and Mitigation*. Springer, 2009

- [Carlslaw u. Jaeger 1948] CARLSLAW, H. S. ; JAEGER, J. C.: *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford, 1948
- [Christen 2010] CHRISTEN, D. S. ; CHRISTEN, D. S. (Hrsg.): *Praxiswissen der chemischen Verfahrenstechnik: Handbuch für Chemiker und Verfahreningenieure*. Springer, Berlin, 2010
- [Cooper u. a. 1969] COOPER, M.G. ; MIKIC, B. B. ; YOVANOVICH, M. M.: Thermal Contact Conductance. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 12 (1969), S. 279–300
- [Croft u. Lilley 1977] CROFT, D. R. ; LILLEY, D. G.: *Heat Transfer Calculations Using Finite Difference Equations*. Appl. Sci. Publ. Ltd., London, 1977
- [DIN 5031 Teil 7 1984] DIN 5031 TEIL 7: *Strahlungphysik im optischen Bereich und Lichttechnik - Benennung der Wellenlängenbereiche*. Januar 1984
- [Eckert 1966] ECKERT, Ernst R. G.: *Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch*. Springer, Berlin, 1966
- [Einstein 1905] EINSTEIN, Albert: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: *Annalen der Physik* 322 (1905), Nr. 8, S. 549–560
- [Fick 1855] FICK, Adolf: On liquid diffusion. In: *Phil. Mag. and Jour. Sci.* 10 (1855), S. 31–39
- [Fieberg 2008] FIEBERG, C.: *Kontaktwärmeübertragung unter hohen Druck- und Temperaturbedingungen*, RWTH, Dissertation, 2008. – ISBN 978-3-86844-085-0
- [Fouad u. Richter 2006] FOUAD, N. A. ; RICHTER, T.: *Leitfaden Thermografie im Bauwesen*. 1. Fraunhofer IRB Verlag, 2006
- [Fritz 1935] FRITZ, W.: Berechnung des Maximalvolumens von Dampfblasen. In: *Phys. Z.* 36 (1935), S. 379–384
- [Hecht 2005] HECHT, E.: *Optik*. 4. Oldenburg, 2005
- [Heisler 1947] HEISLER, M.P.: Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating. In: *Trans. ASME* (1947), S. 227–236
- [Herschel 1800] HERSCHEL, W.: Experiments on the Refrangibility of the Invisible Rays of the Sun. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*

90 (1800), S. 284–292

- [Herwig u. Moschallski 2009] HERWIG, Heinz ; MOSCHALLSKI, Andreas: *Wärmeübertragung*. Vieweg + Teubner, 2009
- [Hirschfelder u. a. 1954] HIRSCHFELDER, J.O. ; CURTISS, C.F. ; BIRD, R.B.: *Molecular theory of gases and liquids*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1954
- [Holman 1976] HOLMAN, J. P.: *Heat Transfer*. 4. McGraw-Hill Book Company, 1976
- [Incropera u. DeWitt 1996] INCROPERA, Frank P. ; DEWITT, David P. ; RO-BICHAUD, Cliff (Hrsg.): *Introduction to heat transfer*. John Wiley & Sons, New York, 1996
- [Jakob 1949] JAKOB, M.: *Heat Transfer*. John Wiley & Sons, New York, 1949
- [Jischa 1982] JISCHA, M.: *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1982
- [Kennard 1938] KENNARD, E. H.: *Kinetic Theorie of Gases*. New York : McGraw-Hill, 1938
- [Kestin u. a. 1961] KESTIN, J. ; MAEDER, P. F. ; WANG, H. E.: Influence of turbulence on the transfer of heat from plates with and without a pressure gradient. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 3 (1961), Nr. 2, 133 - 154. [http://dx.doi.org/DOI:10.1016/0017-9310\(61\)90076-X](http://dx.doi.org/DOI:10.1016/0017-9310(61)90076-X). – DOI DOI: 10.1016/0017-9310(61)90076-X. – ISSN 0017-9310
- [Kortüm u. Lachmann 1981] KORTÜM, G. ; LACHMANN, H.: *Einführung in die chemische Thermodynamik, Phänomenologie und statistische Behandlung*. Verlag Chemie, 1981. – 575–575 S. <http://dx.doi.org/10.1002/bbpc.19820860629>. <http://dx.doi.org/10.1002/bbpc.19820860629>. ISSN 0005-9021
- [Kumar u. a. 2004] KUMAR, S.Sunil ; ABILASH, P.M. ; RAMAMURTHI, K.: Thermal Contact Conductance for Cylindrical and Spherical Contacts. In: *Journal of Heat and Mass Transfer* 40 (2004), S. 679–688
- [Kutateladze 1948] KUTATELADZE, S. S.: On the Transition to Film Boiling Under Natural Convection. In: *Kotloturbostroenie* 3 (1948), Nr. 10

- [Lewis u. Whitman 1924] LEWIS, W. K. ; WHITMAN, W. G.: Principles of Gas Absorption. In: *Ind. Eng. Chem.* 16 (1924), Nr. 12, S. 1215–1220
- [Lienhard 2008] LIENHARD, John H. ; LIENHARD, John H. (Hrsg.): *A Heat Transfer Textbook, Third Edition*. Phlogiston Press, Cambridge Massachusetts, 2008
- [Madhusudana 1996] MADHUSUDANA, C. V.: *Thermal Contact Conductance*. New York : Springer Verlag, 1996
- [Madhusudana u. Litvak 1990] MADHUSUDANA, C.V. ; LITVAK, A.: Thermal Contact Conductance of Composite Cylinders: An Experimental Study. In: *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 4 (1990), S. 79–85
- [McAdams 1954] MCADAMS, W. H.: *Heat Transmission, 3rd Ed.* McGraw-Hill Publishing Company, London, 1954
- [McWaid u. Marschall 1992] MCWAID, T. H. ; MARSCHALL, E.: Thermal Contact Resistance across Pressed Metal Contacts in a Vacuum Environment. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 35 (11) (1992), S. 2911–2920
- [Mersmann 1986] MERSMANN, A. ; MERSMANN, A. (Hrsg.): *Stoffübertragung*. Springer, Berlin, 1986
- [Nikolaev u. Skripov 1968] NIKOLAEV, G. P. ; SKRIPOV, V. P.: Generalization of the experimental data on boiling crisis at submerged surfaces using the theory of thermodynamic similarity. In: *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal* 15 (1968), S. 46–51
- [Nukiyama 1934] NUKIYAMA, S.: Maximum and Minimum Values of heat Transmitted from Metal to Boiling Water Under Atmospheric Pressure. In: *Journal of the Japanese Society of Mechanical Engineers* 37 (1934), S. 367
- [Nusselt 1916] NUSSELT, W.: Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes. In: *Zeitschrift VDI* 60 (1916), S. 541 ff
- [Ostrach 1953] OSTRACH, S.: An Analysis of Laminar Free Convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force. In: *NACA Rep. 1111* (1953)
- [Pohlhausen 1921] POHLHAUSEN, K.: Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 1

- (1921), Nr. 4
- [Reid u. a. 1986] REID, R.C. ; PRAUSNITZ, J.M. ; POLING, B.E.: *The properties of gases and liquids*. McGraw-Hill, New York, 1986
- [Roetzel 1979] ROETZEL, W.: Berechnung der Leitung und Strahlung bei der Filmverdampfung an der ebenen Platte. In: *Wärme und Stoffübertragung* 12 (1979), S. 1–4
- [Rogalski 2002] ROGALSKI, A.: Infrared detectors: An overview. In: *Infrared Physics & Technology* 43 (2002), Nr. 3–5, S. 187–210
- [Rohsenow u. Harnett 1973] ROHSENOW, W. M. ; HARNETT, J. P.: *Handbook of Heat Transfer*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1973
- [Schlichting u. Gersten 2006] SCHLICHTING, H. ; GERSTEN, K.: *Grenzschichttheorie*. Springer, Berlin, 2006
- [Schneider 1955] SCHNEIDER, P.J.: *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley Publishing Comp., 1955
- [Siegel u. Howell 2002] SIEGEL, Robert ; HOWELL, John: *Thermal Radiation Heat Transfer*. 4th. Taylor & Francis, New York, 2002
- [Springer 1971] SPRINGER, G. S.: Heat Transfer in Rarefied Gases. In: *Advances in Heat Transfer* 7 (1971), S. 163–218
- [Stein 2004] STEIN, Michael: *Systematische Untersuchung der kritischen Wärmestromdichte beim Strömungssieden von Wasser in lotrechten Kreisrohren mit und ohne poröser Beschichtung*, Technische Universität Berlin, Diss., 2004
- [Stephan 1988] STEPHAN, K. ; STEPHAN, K. (Hrsg.): *Wärmeübertragung beim Kondensieren und beim Sieden*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. – 46–46 S. <http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19890690120>. <http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19890690120>. ISSN 1521–4001
- [Stephan u. Preusser 1979] STEPHAN, K. ; PREUSSER, P.: Wärmeübergang und maximale Wärmestromdichte beim Behältersieden binärer und ternärer Flüssigkeitsgemische. In: *Chemie Ingenieur Technik* 51 (1979), Nr. 1
- [Stephan u. a. 2010] STEPHAN, Karl ; MAYINGER, Franz ; SCHABER, Karlheinz ; STEPHAN, Peter ; STEPHAN, Karl (Hrsg.): *Thermodynamik - Band 2: Mehrstoff-*

- systeme und chemische Reaktionen*. Springer, Berlin, 2010
- [Vollmer u. Möllmann 2010] VOLLMER, M. ; MÖLLMANN, K.-P.: *Infrared thermal imaging*. Wiley-VCH Verlag, 2010
- [van der Waals 1873] WAALS, J. D. d.: *Over de Continuïteit van den Gas- en Vloeistoofteestand (Die Kontinuität des flüssigen und gasförmigen Zustands)*, Universität Leiden, Diss., 1873
- [Whitaker 1974] WHITAKER, S.: *Fundamental Principles of Heat Transfer*. Pergamon Press Inc., New York, 1974
- [Whitaker 1976] WHITAKER, S.: *Fundamental Principles of Heat Transfer*. Pergamon Press Inc., New York, 1976
- [Whitaker 1977] WHITAKER, Stephen: *Fundamental Principles of Heat Transfer*. Pergamon Press Inc., New York, 1977
- [Witte 1974] WITTE, U.: *Dampfzeugertechnik*. Vulkan-Verlag, Essen, 1974
- [Yovanovich 1982] YOVANOVICH, M. M. ; HORTON, T.E. (Hrsg.): *Thermal Contact Correlations*. Bd. 80. Spacecraft Radiative Transfer and Temperature Control, Progress in Aeronautics and Aerodynamics, AIAA, New York, 1982. – 83–95 S.
- [Zuber 1958] ZUBER, N.: On the Stability of Boiling Heat Transfer. In: *Trans. ASME* 80 (1958), S. 711

Anhang

Stoffwerte

Tabelle 1: Metalle bei 20°C

	ρ $10^3 \frac{kg}{m^3}$	c $\frac{kJ}{kgK}$	λ $\frac{W}{mK}$	a $10^{-6} \frac{m^2}{s}$
Aluminium	2,70	0,888	237	98,80
Blei	11,34	0,129	35	23,90
Chrom	6,92	0,440	91	29,90
Eisen	7,86	0,452	81	22,80
Gold	19,26	0,129	316	127,20
Kupfer	8,93	0,382	399	117,00
Magnesium	1,74	1,020	156	87,90
Mangan	7,42	0,473	21	6,00
Molybdän	10,20	0,251	138	53,90
Natrium	9,71	1,220	133	11,20
Nickel	8,85	0,448	91	23,00
Platin	21,37	0,133	71	25,00
Silber	10,50	0,235	427	173,00
Titan	4,50	0,522	22	9,40
Wolfram	19,00	0,134	173	67,90
Zink	7,10	0,387	121	44,00
Zinn, weiß	7,29	0,225	67	40,80
Bronze	8,80	0,377	62	18,70
Gusseisen	7,80	0,540	42... 50	10... 12
Kohlenstoffstahl (< 0,4%C)	7,85	0,465	42... 50	12... 15
Cr-Ni-Stahl (X12CrNi 18,8)	7,80	0,500	15	3,80

Tabelle 2: Nichtmetallische Festkörper bei 20°C

	ρ $10^3 \frac{kg}{m^3}$	c $\frac{kJ}{kgK}$	λ $\frac{W}{mK}$	a $10^{-6} \frac{m^2}{s}$
Acrylglas (Plexiglas)	1,18	1,44	0,184	0,108
Asphalt	2,12	0,92	0,7	0,36
Beton	2,1	0,88	1	0,54
Eis (0°C)	0,917	2,04	2,25	1,203
Erdreich, grobkiesig	2,04	1,84	0,52	0,14
Sandboden, trocken	1,65	0,8	0,27	0,2
Sandboden, feucht	1,75	1	0,58	0,33
Tonboden	1,45	0,88	1,28	1
Glas, Fenster-	2,48	0,7	0,87	0,5
Spiegel-	2,7	0,8	0,76	0,35
Quarz	2,21	0,73	1,4	0,87
Glaswolle	1,2	0,66	0,046	0,58
Gips	1	1,09	0,51	0,47
Granit	2,75	0,89	2,9	1,18
Korkplatten	0,19	1,88	0,041	0,115
Marmor	2,6	0,8	2,8	1,35
Mörtel	1,9	0,8	0,93	0,61
Papier	0,7	1,2	0,12	0,14
Polyethylen	0,92	2,3	0,35	0,17
Polytetrafluoräthylen	2,2	1,04	0,23	0,1
PVC	1,38	0,96	0,15	0,11
Porzellan (95°C)	2,4	1,08	1,03	0,4
Steinkohle	1,35	1,26	0,26	0,15
Tannenholz (radial)	0,415	2,72	0,14	0,12
Verputz	1,69	0,8	0,79	0,58
Ziegelstein	1,6...1,8	0,84	0,38...0,52	0,28...0,34

Tabelle 3: Flüssigkeiten bei 1 bar

	T	ρ	c_p	λ	ν	a	Pr
	$^{\circ}C$	$10^3 \frac{kg}{m^3}$	$\frac{kJ}{kgK}$	$\frac{W}{mK}$	$10^{-6} \frac{m^2}{s}$	$10^{-6} \frac{m^2}{s}$	-
Stickstoff	-190	0,861	1,988	0,161	0,321	0,0939	3,42
Wasser	0	0,9998	4,218	0,561	1,793	0,133	13,48
	20	0,9982	4,181	0,598	1,004	0,1434	7,001
	40	0,9922	4,177	0,631	0,658	0,1521	4,3280
	60	0,9832	4,184	0,654	0,475	0,1591	2,983
	80	0,9718	4,197	0,67	0,365	0,1643	2,221
	99,63	0,9586	4,216	0,679	0,295	0,168	1,757
wässrige anorg. Lösung 21% NaCl	-10	1,187	3,312	0,528	4,02	0,136	29,5
Benzol	20	0,879	1,738	0,154	0,74	0,101	7,33
Methanol	20	0,792	2,495	0,22	0,737	0,111	6,57
Heizöl	20	0,819	2	0,116	1,82	0,0709	25,7
	100	0,766	2,38	0,104	0,711	0,0572	12,4
Quecksilber	20	13,55	0,139	9,3	0,115	4,9	0,023

Tabelle 4: Gase bei 1 bar

	T	ρ	c_p	λ	ν	a	Pr
	$^{\circ}C$	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{kJ}{kgK}$	$10^{-3} \frac{W}{mK}$	$10^{-6} \frac{m^2}{s}$	$10^{-6} \frac{m^2}{s}$	-
Argon	26,85	1,624	0,5215	17,87	14,1	21,1	0,667
Helium	27	0,1625	5,193	155,7	122,6	184,5	0,655
Kohlendioxid	0	1,95	0,829	14,3	7,1	8,86	0,8
	50	1,648	0,875	17,8	9,8	12,3	0,8
	100	1,428	0,925	21,3	12,4	16,1	0,8
Luft	-200	5,106	1,186	6,886	0,979	1,137	0,8606
	-100	2,019	1,011	16,2	5,829	7,851	0,7423
	0	1,275	1,006	24,18	13,52	18,83	0,7179
	20	1,188	1,007	25,69	15,35	21,47	0,7148
	40	1,112	1,007	27,16	17,26	24,24	0,7122
	80	0,9859	1,01	30,01	21,35	30,14	0,7083
	100	0,9329	1,012	31,39	23,51	33,26	0,707
	200	0,7356	1,026	37,95	35,47	50,3	0,7051
	400	0,517	1,069	49,96	64,51	90,38	0,7137
	600	0,3986	1,116	61,14	99,63	137,5	0,7247
	800	0,3243	1,155	71,54	140,2	191	0,7342
	1000	0,2734	1,185	80,77	185,9	249,2	0,7458
Sauerstoff	26,85	1,301	0,9417	26,15	15,95	21,9	0,73
Stickstoff	26,85	1,138	1,041	26	15,8	21,9	0,721
Wasserdampf	100	0,5896	2,042	25,08	20,81	20,83	0,999
	200	0,4604	1,975	33,28	35,14	36,6	0,96
	400	0,3223	2,07	54,76	75,86	82,07	0,9243
	600	0,2483	2,203	79,89	131,4	146,1	0,8993
	800	0,2019	2,343	107,3	199,9	226,8	0,8816
	1000	0,1702	2,478	163,3	280	323,2	0,8665
Wasserstoff	0	0,0886	14,24	176	95	139	0,68
	50	0,0748	14,36	202	126	188	0,67
	100	0,0649	14,44	229	159	244	0,65

Tabelle 5: Gase, Durchgangskoeffizienten

Stoffe	T	D
	K	$10^{-4} \frac{m^2}{s}$
Luft- CO_2	276	0,144
	317	0,179
Luft- C_2H_5OH	313	0,147
Luft- He	276	0,632
Luft- H_2O	313	0,292
$CO_2 - H_2O$	307	0,201
$He - H_2O$	352	1,136
$H_2 - H_2O$	307	0,927
$CH_4 - H_2O$	352	0,361

Tabelle 6: Verdünnte wässrige Lösungen, Durchgangskoeffizienten

Stoffe	T	D
	K	$10^{-9} \frac{m^2}{s}$
$CH_4 - H_2O$	275	0,85
	333	3,55
$CO_2 - H_2O$	298	2
$CH_3OH - H_2O$	288	1,26
$C_2H_5OH - H_2O$	288	1
$O_2 - H_2O$	298	2,4
$N_2 - H_2O$	298	2,6
$H_2 - H_2O$	298	6,3

Tabelle 7: Emissionsgrad (ε) von Festkörpern
 (ε_n) : in Richtung der Flächennormalen
 (ε) : Gesamtemissionsgrad

Oberfläche	T K	(ε_n)	(ε)	Oberfläche	T K	(ε_n)	(ε)
1. Metalle				Zink, rein poliert	500		0,045
Aluminium, walzblank	443	0,039	0,049		600		0,055
-, poliert	373	0,095		verzinktes Eisenblech			
-, stark oxidiert	366	0,2		-, blank	301	0,228	
	777	0,31		-, grau oxidiert	297	0,276	
Aluminiumoxid	550	0,63		Zinn, nicht oxidiert	298		0,043
	1100	0,26			373	0,05	
	1089	0,052		2. Nichtmetalle			
Chrom, poliert	423	423	423	Asbest, Pappe	296	0,96	
				-, Papier	311	0,93	
					644	0,94	
Gold, hochglanzpoliert	500	0,018		Dachpappe	294	0,91	
Kupfer, poliert	293	0,03		Gips	293	0,8 - 0,9	
-, leicht angelaufen	293	0,037		Glas	293	0,94	
-, schwarz oxidiert	293	0,78		Quarzglas /7 mm dick)	555	0,93	
-, oxidiert	403	0,76			1111	0,47	
Inconel, gewalzt	1089		0,69	Gummi	293	0,92	
-, sandgestrahlt	1089		0,79	Holz,			
Eisen und Stahl,				-, Buche	343	0,94	0,91
-, poliert	700	0,144		Keramik, feuerfest			
	1300	0,377		weißes AL_2O_3	366		0,9
-, geschmirlgelt	293	0,242		Kohlenstoff,			
Gusseisen, poliert	473	0,21		nicht oxidiert	298		0,81
Stahlguss, poliert	1044	0,52			773		0,79
	1311	0,56		-, Fasern	533		0,95
Eisenblech				-, graphitisch	373		0,76
-, stark verrostet	292	0,685		Korund, Schmirgel rau	353	0,85	0,84
-, Walzhaut	294	0,657		Lacke, Farben:			
Gusseisen,				Ölfarbe schwarz	366		0,92
oxidiert bei 866 K	472	0,64		-, grün	366		0,95
	872	0,78		-, rot	366		0,97
Stahl,				-, weiß	373		0,94
oxidiert bei 866 K	472	0,79		Lack, weiß	373	0,925	
	872	0,79		-, matt schwarz	353		0,97
Messing, nicht oxidiert	298	0,035		Bakelitlack	353	0,935	
	373	0,035		Menniganstrich	373	0,93	
-, oxidiert	473	0,61		Heizkörper (nach VDI-74)	373	0,925	
	873	0,59		Emaile, weiß auf Eisen	292	0,897	
	1673	0,17		Marmor			
Nickel, nicht oxidiert	298	0,045		hellgrau poliert	273-366		0,9
	373	0,06		Papier	273		0,92
	873	0,478			366		0,94
-, oxidiert	473	0,37		Porzellan, weiß	295		0,924
Platin	422	0,022		Ton, glasiert	298		0,9
	1089	0,123		-, matt	298		0,93
Quecksilber,				Wasser	273	0,95	
nicht oxidiert	298	0,1			373	0,96	
	373	0,12		Eis, glatt mit Wasser	273	0,966	0,92
Silber, poliert	311	0,022		-, rauer Reifbelag	273	0,985	
	644	0,031		Ziegelstein rot	273-366		0,93
Wolfram	298		0,024				
	1273		0,15				
	1773		0,23				

Tabelle 8: Dampfdrücke reiner Stoffe: Antoine-Gleichung (p^* in mbar, T in $^{\circ}\text{C}$)
 $\log p^* = A - \frac{B}{T+C}$

Stoffe	Temperaturbereich	A	B	C
	$[^{\circ}\text{C}]$	-	-	-
Aceton	-13-55	7,24208	1210,595	229,664
Aceton	57-205	7,75624	1566,690	273,419
Ethanol	20-93	8,23714	1592,864	226,184
Benzol	8-80	7,00481	1196,760	219,161
i-Butanol	72-107	7,32625	1157,000	168,270
Chloroform	-10-60	7,07959	1170,966	226,232
n-Heptan	-3-127	7,01880	1264,370	216,640
Methanol	15-84	8,20591	1582,271	239,726
Methanol	25-56	7,89373	1408,360	223,600
i-Octan	24-100	6,92798	1252,590	220,119
Propan		6,95467	813,200	248,000
Sauerstoff		7,11577	370,757	273,200
Stickstoff		6,99100	308,365	273,200
Wasser	1-100	8,19625	1730,630	233,426

Tabelle 9: Lennard-Jones Konstanten und Molekulargewicht von ausgewählten Stoffen

Stoffe	$\sigma(\text{\AA})$	$\varepsilon/k_B(K)$	$M(\frac{kg}{kmol})$	Species	$\sigma(\text{\AA})$	$\varepsilon/k_B(K)$	$M(\frac{kg}{kmol})$
Al	2,655	2750	26,98	H ₂	2,827	59,7	2,016
Luft	3,711	78,6	28,96	H ₂ O	2,655 ^a	363 ^a	18,02
Ar	3,542	93,3	39,95	H ₂ O	2,641 ^b	809,1 ^b	
Br ₂	4,296	507,9	159,8	H ₂ O ₂	4,196	289,3	34,01
C	3,385	30,6	12,01	H ₂ S	3,623	301,1	34,08
CCl ₂ F ₂	5,25	253	120,9	He	2,551	10,22	4,003
CCl ₄	5,947	322,7	153,8	Hg	2,969	750	200,6
CH ₃ OH	3,626	481,8	32,04	I ₂	5,16	474,2	253,8
CH ₄	3,758	148,6	16,04	Kr	3,655	178,9	83,8
CN	3,856	75	26,02	Mg	2,926	1614	24,31
CO	3,69	91,7	28,01	NH ₃	2,9	558,3	17,03
CO ₂	3,941	195,2	44,01	N ₂	3,798	71,4	28,01
C ₂ H ₆	4,443	215,7	30,07	N ₂ O	3,828	232,4	44,01
C ₂ H ₅ OH	4,53	362,6	46,07	Ne	2,82	32,8	20,18
CH ₃ COCH ₃	4,6	560,2	58,08	O ₂	3,467	106,7	32
C ₆ H ₆	5,349	412,3	78,11	SO ₂	4,112	335,4	64,06
Cl ₂	4,217	316	70,91	Xe	4,047	231	131,3
F ₂	3,357	112,6	38				

^a Basierend auf Massendiffusionsdaten

^b Basierend auf Viskositäts- und Wärmeleitfähigkeitsdaten

Tabelle 10: Kollisionsdurchmesser für Diffusivität, Viskosität und Wärmeleitfähigkeit basierend auf dem Lennard-Jones Potential.

$k_B T/\varepsilon$	Ω_D	$\Omega_\eta = \Omega_\lambda$	$k_B T/\varepsilon$	Ω_D	$\Omega_\eta = \Omega_\lambda$
0,30	2,662	2,785	2,70	0,9770	1,069
0,35	2,476	2,628	2,80	0,9672	1,058
0,40	2,318	2,492	2,90	0,9576	1,048
0,45	2,184	2,368	3,00	0,9490	1,039
0,50	2,066	2,257	3,10	0,9406	1,030
0,55	1,966	2,156	3,20	0,9328	1,022
0,60	1,877	2,065	3,30	0,9256	1,014
0,65	1,789	1,982	3,40	0,9186	1,007
0,70	1,729	1,908	3,50	0,9120	0,9999
0,75	1,667	1,841	3,60	0,9058	0,9932
0,80	1,612	1,780	3,70	0,8998	0,9870
0,85	1,562	1,725	3,80	0,8942	0,9811
0,90	1,517	1,675	3,90	0,8888	0,9755
0,95	1,476	1,629	4,00	0,8836	0,9700
1,00	1,439	1,587	4,10	0,8788	0,9649
1,05	1,406	1,549	4,20	0,8740	0,9600
1,10	1,375	1,514	4,30	0,8694	0,9553
1,15	1,346	1,482	4,40	0,8652	0,9507
1,20	1,320	1,452	4,50	0,8610	0,9464
1,25	1,296	1,424	4,60	0,8568	0,9422
1,30	1,273	1,399	4,70	0,8530	0,9382
1,35	1,253	1,375	4,80	0,8492	0,9343
1,40	1,233	1,353	4,90	0,8456	0,9305
1,45	1,215	1,333	5,0	0,8422	0,9269
1,50	1,198	1,314	6,0	0,8124	0,8963
1,55	1,182	1,296	7,0	0,7896	0,8727
1,60	1,167	1,279	8,0	0,7712	0,8538
1,65	1,153	1,264	9,0	0,7556	0,8379
1,70	1,140	1,248	10,0	0,7424	0,8242
1,75	1,128	1,234	20,0	0,6640	0,7432
1,80	1,116	1,221	30,0	0,6232	0,7005
1,85	1,105	1,209	40,0	0,5960	0,6718
1,90	1,094	1,197	50,0	0,5756	0,6504
1,95	1,084	1,186	60,0	0,5596	0,6335
2,00	1,075	1,175	70,0	0,5464	0,6194
2,10	1,057	1,156	80,0	0,5352	0,6076
2,20	1,041	1,138	90,0	0,5256	0,5973
2,30	1,026	1,122	100,0	0,5170	0,5882
2,40	1,012	1,107	200,0	0,4644	0,5320
2,50	0,9996	1,093	300,0	0,4360	0,5016
2,60	0,9878	1,081	400,0	0,4172	0,4811

Tabelle 11: Molares Volumen und Verdampfungsenthalpie für ausgewählte Stoffe an deren normalen Siedepunkten

Substance	$V_m(m^3/kmol)$	$h_{fg}(MJ/kmol)$
Methanol	0,042	35,53
Ethanol	0,064	39,33
<i>n</i> -Propanol	0,081	41,97
Isopropanol	0,072	40,71
<i>n</i> -Butanol	0,103	43,76
tert-Butanol	0,103	40,63
<i>n</i> -Pentan	0,118	25,61
Cyclopentan	0,100	27,32
Isopentan	0,118	24,73
Neopentan	0,118	22,72
<i>n</i> -Hexan	0,141	28,85
Cyclohexan	0,117	33,03
<i>n</i> -Heptan	0,163	31,69
<i>n</i> -Oktan	0,185	34,14
<i>n</i> -Nonan	0,207	36,53
<i>n</i> -Decan	0,229	39,33
Aceton	0,074	28,90
Benzin	0,096	30,76
Carbon tetrachloride	0,102	29,93
Ethyl bromid	0,075	27,41
Nitromethan	0,056	25,44
Wasser	0,0187	40,62

Besselfunktion

Fehlerfunktionen (error function)

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi=\eta}^{\xi=0} e^{-\xi^2} d\xi$$

Komplimentäre Fehlerfunktion (complimentary error function)

$$\operatorname{erf} c(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi=\eta}^{\xi=\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

Wichtige Eigenschaften

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1 \quad \operatorname{erf}(-\eta) = -\operatorname{erf}(\eta) \quad \frac{d}{d\eta} [\operatorname{erf}(\eta)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}$$

Tabelle 1:

η	$erf(\eta)$	$erfc(\eta)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}$
0	0	1	1,128
0,05	0,0564	0,944	1,126
0,1	0,112	0,888	1,117
0,15	0,168	0,832	1,103
0,2	0,223	0,777	1,084
0,25	0,276	0,724	1,06
0,3	0,329	0,671	1,031
0,35	0,379	0,621	0,998
0,4	0,428	0,572	0,962
0,45	0,475	0,525	0,922
0,5	0,52	0,48	0,879
0,55	0,563	0,437	0,834
0,6	0,604	0,396	0,787
0,65	0,642	0,378	0,74
0,7	0,678	0,322	0,691
0,75	0,711	0,289	0,643
0,8	0,742	0,258	0,595
0,85	0,771	0,229	0,548
0,9	0,797	0,203	0,502
0,95	0,821	0,179	0,458
1	0,843	0,157	0,415
1,1	0,88	0,12	0,337
1,2	0,91	0,09	0,267
1,3	0,934	0,066	0,208
1,4	0,952	0,048	0,159
1,5	0,966	0,034	0,119
1,6	0,976	0,024	0,087
1,7	0,984	0,016	0,063
1,8	0,989	0,011	0,044
1,9	0,993	0,007	0,03
2	0,995	0,005	0,021

Tabelle 2: Bessel-Funktionen 1. und 2. Art, $0 \leq x \leq 5$

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$2/\pi \cdot K_0(x)$	$2/\pi \cdot K_1(x)$
0	1	0	∞	
0,2	1,01	0,1005	1,116	3,041
0,4	1,0404	0,204	0,7095	1,391
0,6	1,092	0,3137	0,495	0,8294
0,8	1,1665	0,4329	0,3599	0,5486
1	1,2661	0,5652	0,268	0,3832
1,2	1,3937	0,7147	0,2028	0,2768
1,4	1,5534	0,8861	0,1551	0,2043
1,6	1,75	1,0848	0,1197	0,1532
1,8	1,9896	1,3172	$0,9290 \times 10^{-1}$	0,1163
2	2,2796	1,5906	0,7251	$0,8904 \times 10^{-1}$
2,2	2,6291	1,9141	0,5683	0,6869
2,4	3,0493	2,2981	0,447	0,533
2,6	3,5533	2,7554	0,3527	0,4156
2,8	4,1573	3,3011	0,279	0,3254
3	4,8808	3,9534	0,2212	0,2556
3,2	5,7472	4,7343	0,1757	0,2014
3,4	6,7848	5,6701	0,1398	0,1592
3,6	8,0277	6,7028	0,1114	0,1261
3,8	9,5169	8,1404	$0,8891 \times 10^{-2}$	$0,9999 \times 10^{-2}$
4	11,302	9,7595	0,7105	0,7947
4,2	13,443	11,706	0,5684	0,6327
4,4	16,01	14,046	0,4551	0,5044
4,6	19,093	16,863	0,3648	0,4027
4,8	22,794	20,253	0,2927	0,3218
5	27,24	24,336	0,235	0,2575

Tabelle 3: Bessel-Funktionen 1. und 2. Art, $5 \leq x \leq 10$

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$2/\pi \cdot K_0(x)$	$2/\pi \cdot K_1(x)$
5	27,24	24,336	0,235	0,2575
5,2	32,584	29,254	0,1888	0,2062
5,4	39,009	35,182	0,1518	0,1653
5,6	46,738	42,328	0,1221	0,1326
5,8	56,038	50,946	$0,9832 \times 10^{-3}$	0,1064
6	67,234	61,342	0,792	$0,8556 \times 10^{-3}$
6,2	80,718	73,886	0,6382	0,6879
6,4	96,962	89,026	0,5146	0,5534
6,6	116,54	107,31	0,4151	0,4455
6,8	140,14	129,38	0,335	0,3588
7	168,59	156,04	0,2704	0,2891
7,2	202,92	188,25	0,2184	0,2331
7,4	244,34	227,18	0,1764	0,188
7,6	294,33	274,22	0,1426	0,1517
7,8	354,69	331,1	0,1153	0,1424
8	427,56	399,87	$0,9325 \times 10^{-4}$	$0,9891 \times 10^{-4}$
8,2	515,59	483,05	0,7543	0,7991
8,4	621,94	583,66	0,6104	0,6458
8,6	750,46	705,38	0,4941	0,522
8,8	905,8	852,66	0,4	0,4221
9	1.093	1.030,90	0,3239	0,3415
9,2	1.320,70	1.246,70	0,2624	0,2763
9,4	1.595,30	1.507,90	0,2126	0,2236
9,6	1.927,50	1.824,10	0,1722	0,181
9,8	2.329,40	2.207,10	0,1396	0,1465
10	2.815,70	2.671,00	0,1131	0,1187