Wärme- und Stoffübertragung I

Dimensionslose Kennzahlen
und Heisler Diagramme

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

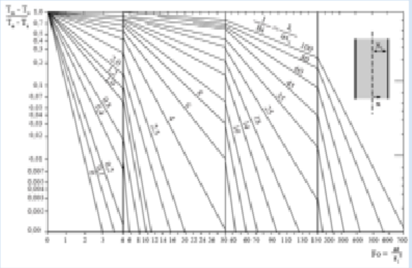
Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lernziele

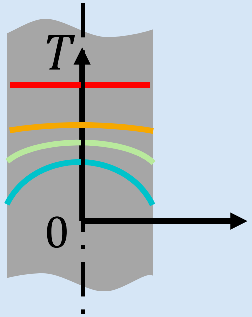
- **Dimensionslose Kennzahlen**
  - Bedeutung dimensionsloser Kennzahlen, insbesondere der Fourier- und Biot-Zahl für den instationären Wärmetransport.

$$\Theta^* = \Theta^*(x^*, y^*, z^*, t^*, Fo, Bi)$$

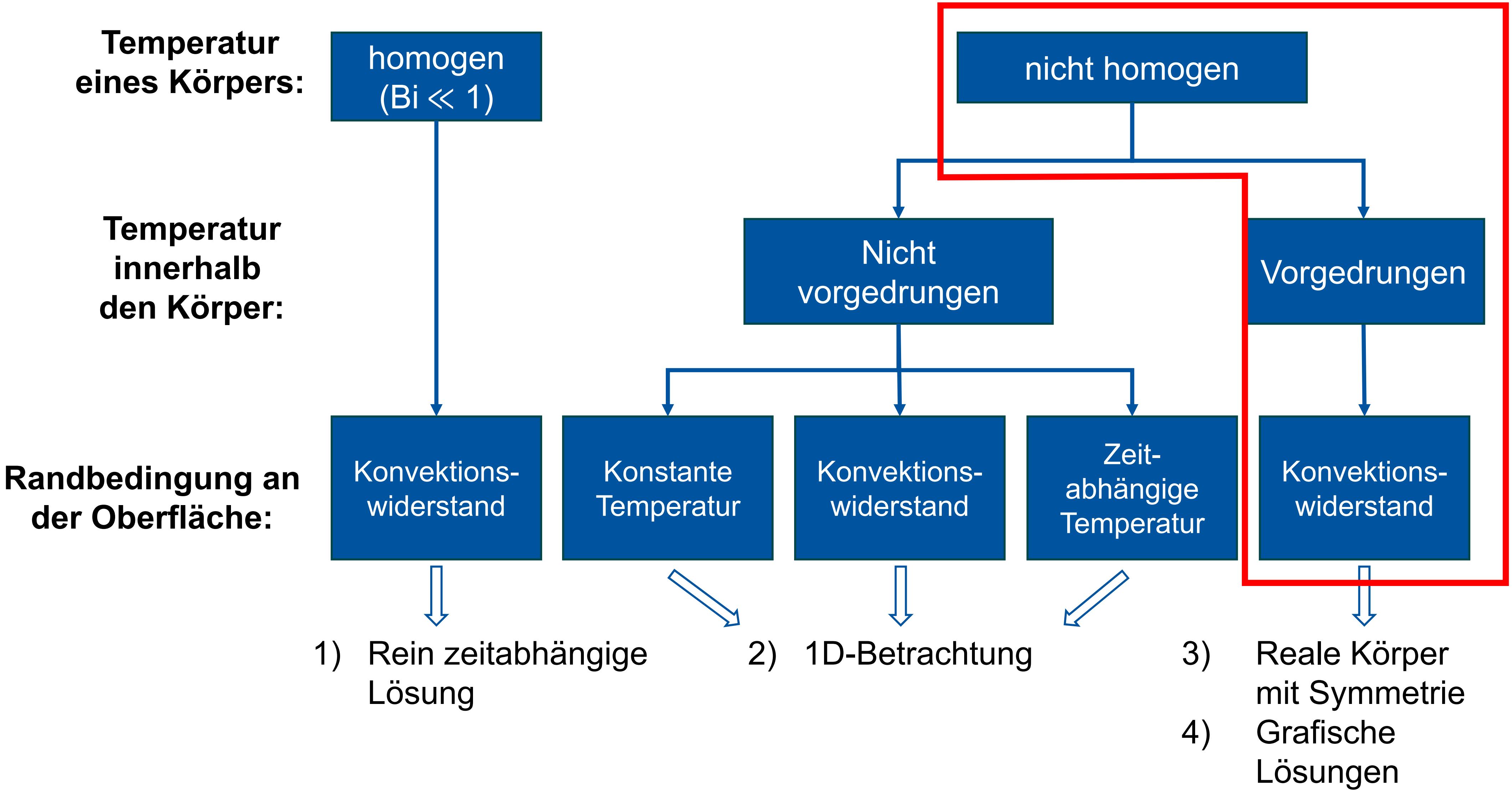
- **Heisler Diagramme**
  - Verständnis der Heisler Diagramme zur Bestimmung der Körperkerntemperatur, des örtlichen Temperaturverlaufs und des Wärmestroms.



- **Beispiel: Abschrecken einer Stahlplatte**
  - Anwendung der Heisler Diagramme.



Wie lässt sich das Problem vereinfachen?



Dimensionslose Form

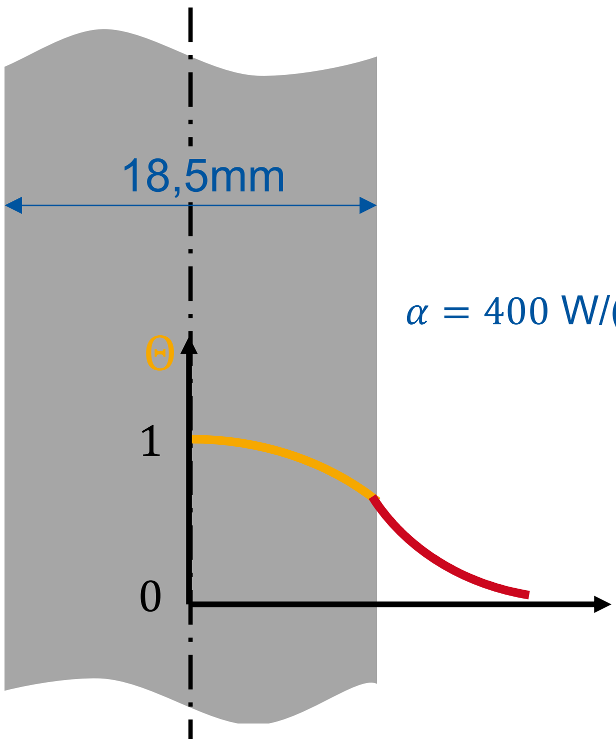
Kann die Temperaturverteilung in zwei unterschiedlichen abgekühlten bzw. aufgeheizten Systemen ähnlich aussehen?

System A

Edelstahl   Wasser

$\lambda = 15$ W/(m·K)
$\rho = 7900$ kg/m³
$c_p = 500$ J/(kg·K)
$\downarrow$
$a = 3{,}8 \times 10^{-6}$ m²/s

$\alpha = 400$ W/(m²·K)

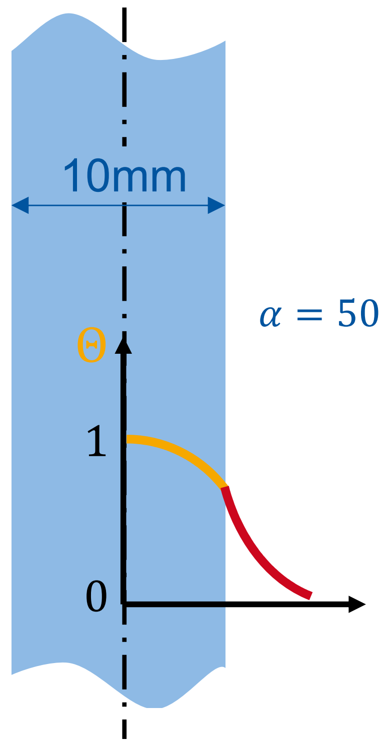


System B

Glas   Luft

$\lambda = 1$ W/(m·K)
$\rho = 2500$ kg/m³
$c_p = 850$ J/(kg·K)
$\downarrow$
$a = 4{,}7 \times 10^{-7}$ m²/s

$\alpha = 50$ W/(m²·K)



Dimensionslose Form

Instationäre Wärmeleitung

3-D Erhaltungsgleichung ohne Advektion und Quelle

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Dimensionslose Gleichung

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} = Fo \left(\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial {x^*}^2} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial {y^*}^2} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial {z^*}^2}\right)$$

Lösung

$$T = T(x, y, z, t, \rho, c_p, \lambda, \underbrace{\text{Anfangs} -}_{T_0} \text{ und } \underbrace{\text{Randbedingungen}}_{\alpha, T_u})$$

Dimensionslose Lösung

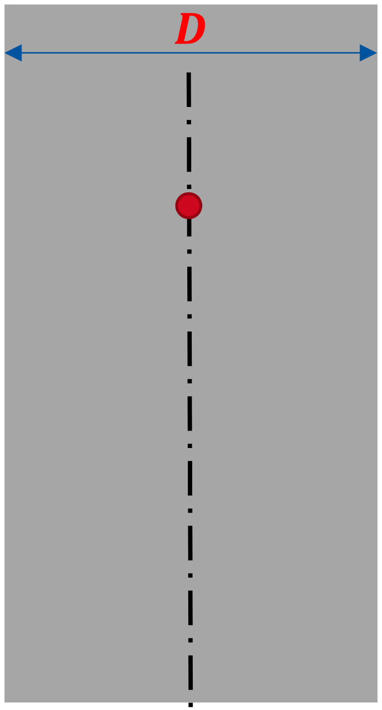
$$\Theta^* = \Theta^*(x^*, y^*, z^*, t^*, Fo, Bi)$$

Dimensionslose Variablen

$$x^* = \frac{x}{\delta_x} \quad y^* = \frac{y}{\delta_y} \quad z^* = \frac{z}{\delta_z} \quad t^* = \frac{t}{\tau} \quad \Theta^* = \frac{T - T_u}{T_0 - T_u}$$

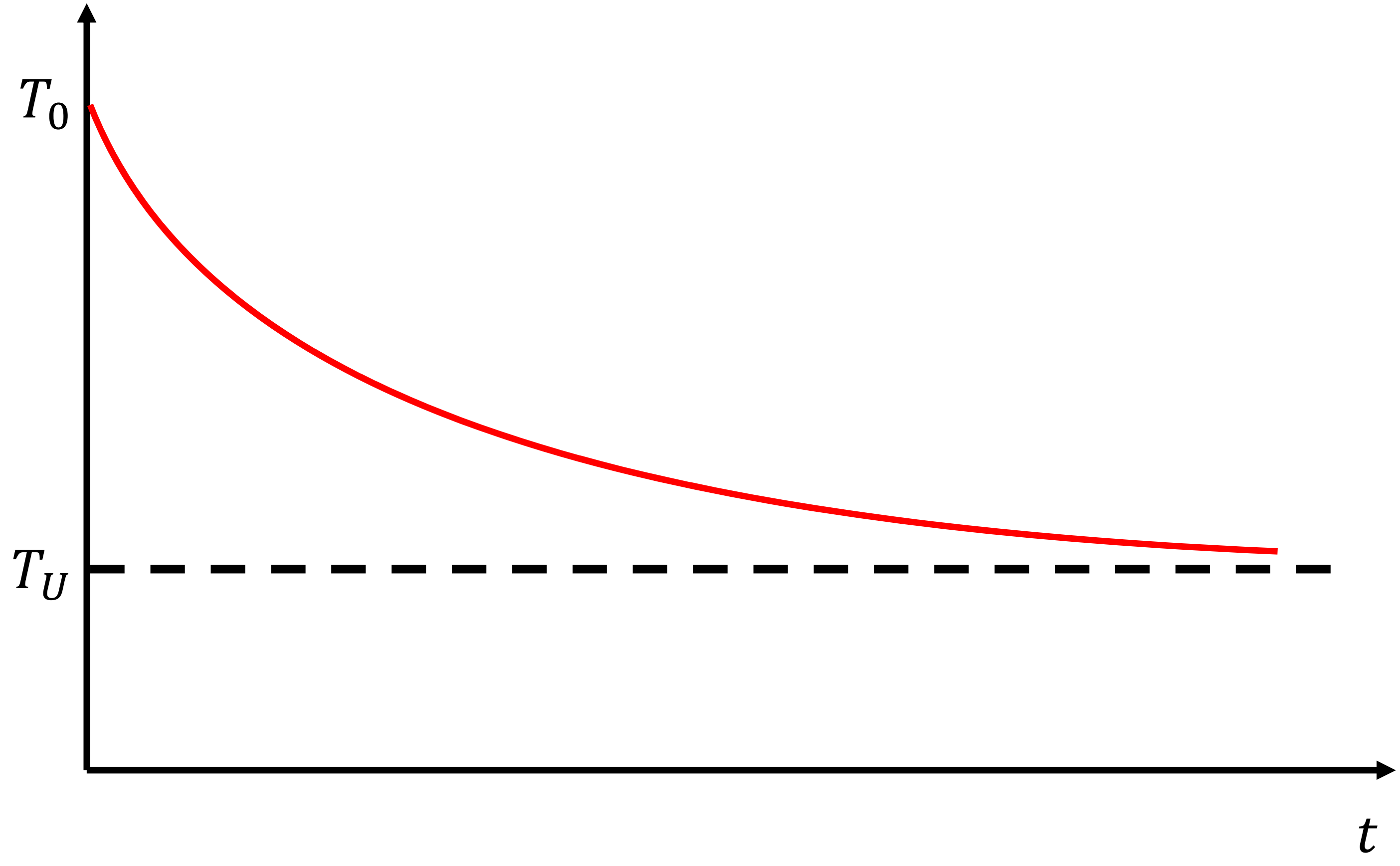
$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} \quad Fo = \frac{a \tau}{\delta^2} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\tau}{\delta^2}$$

Zeitlicher Verlauf der Körperkerntemperatur

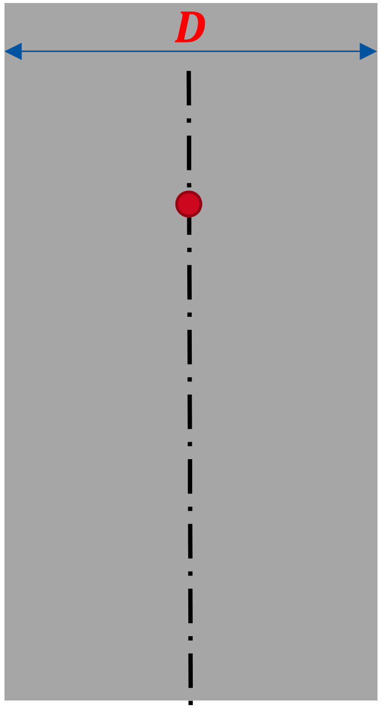


Platte
(unendlicher Ausdehnung)

Relevante Abhängigkeiten: $Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda}$ $\quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\tau}{\delta^2}$

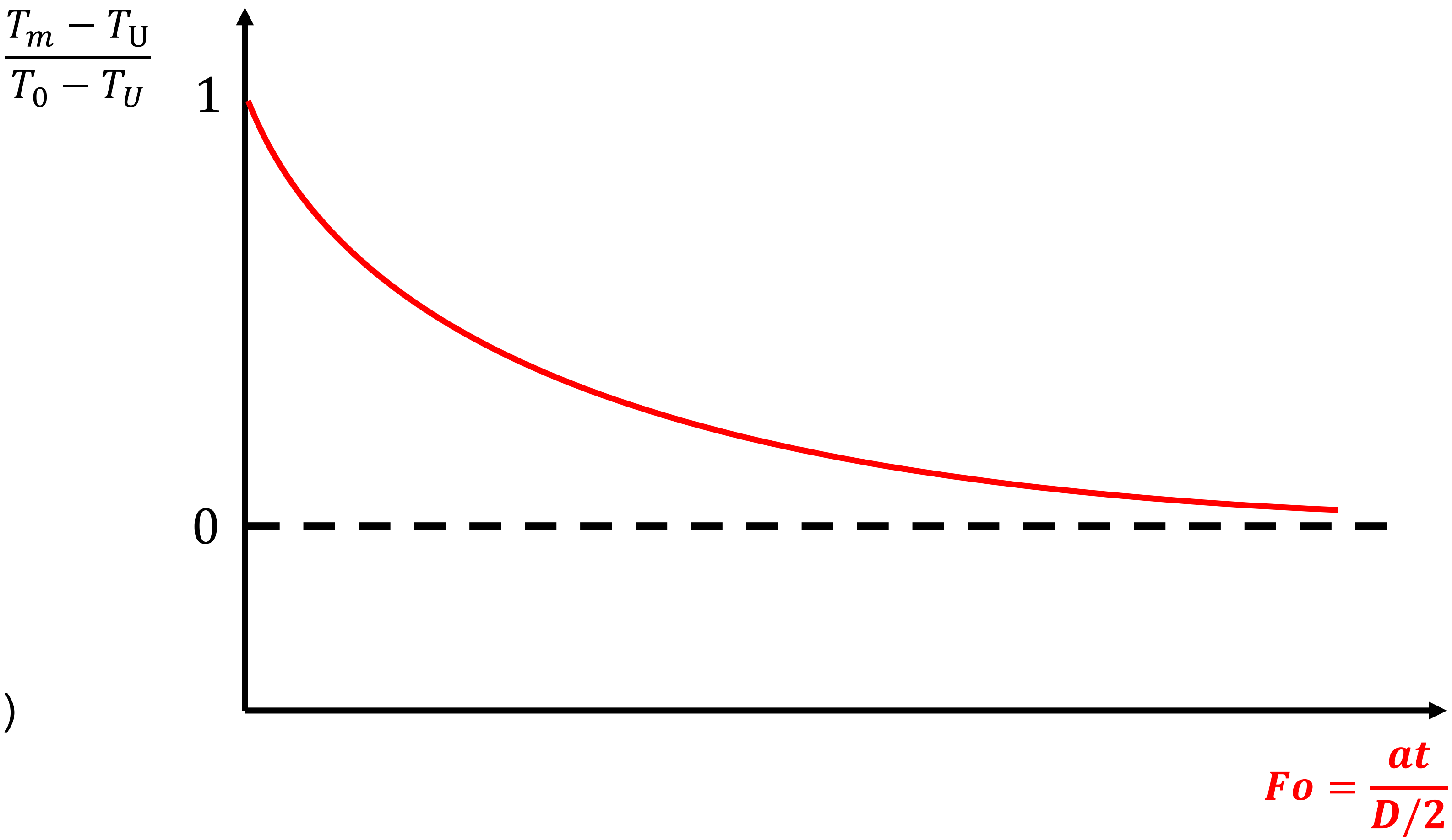


Zeitlicher Verlauf der Körperkerntemperatur

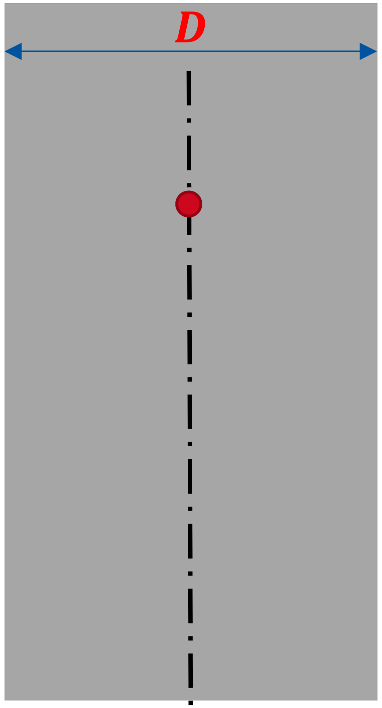


Platte
(unendlicher Ausdehnung)

Relevante Abhängigkeiten: $Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda}$ $\quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\tau}{\delta^2}$

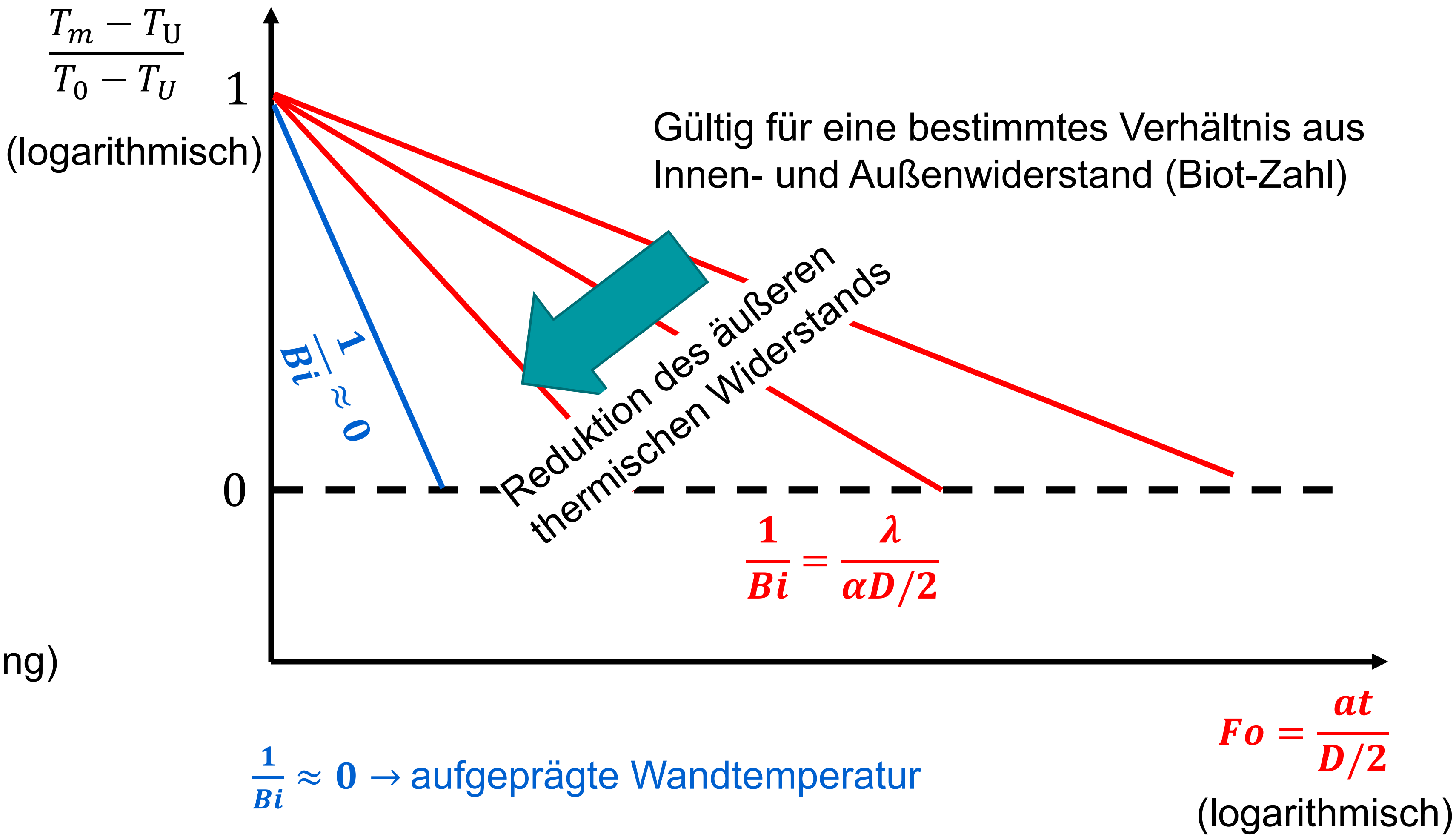


Zeitlicher Verlauf der Körperkerntemperatur (doppeltlogarithmische Auftragung)



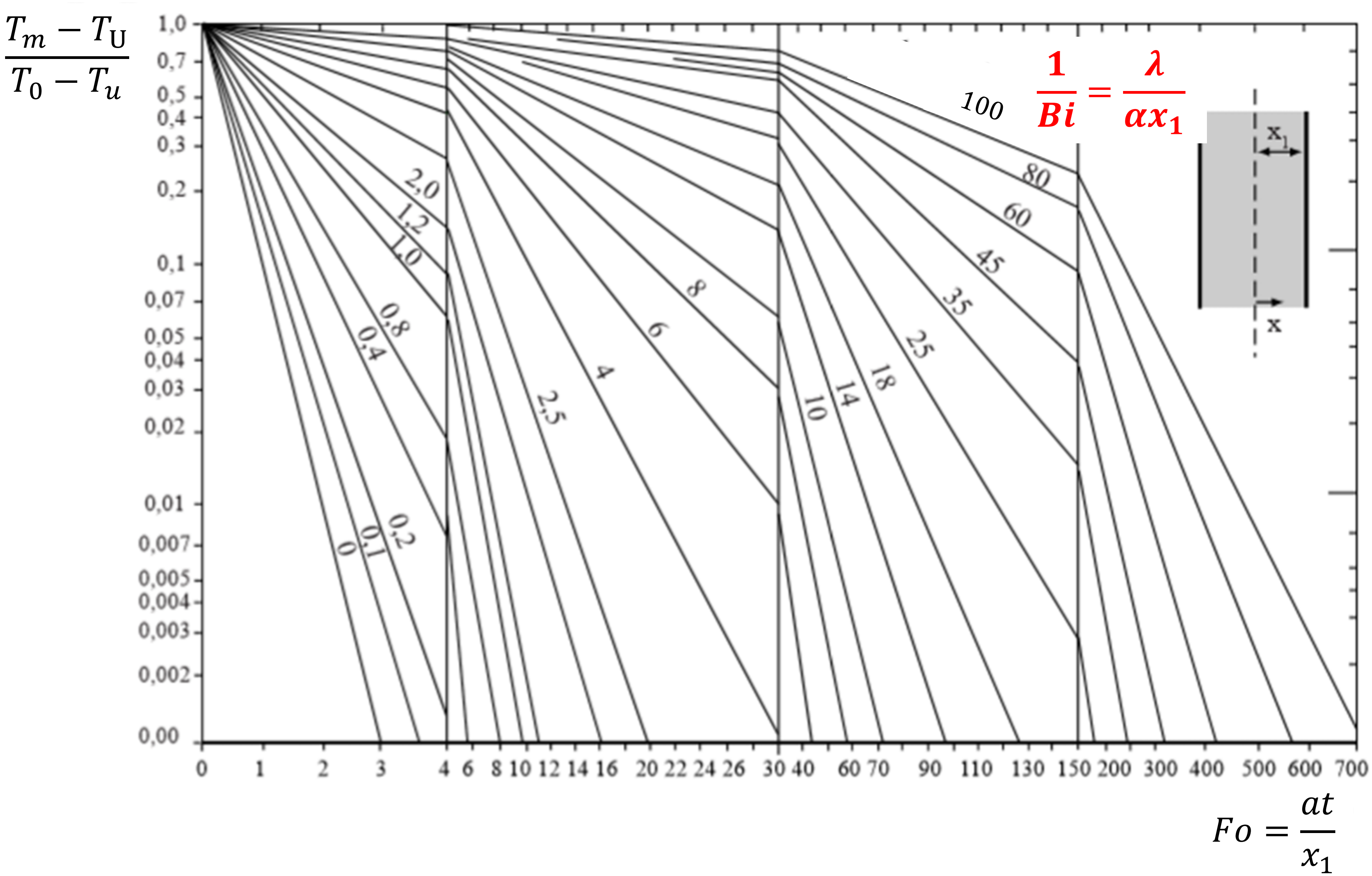
Platte
(unendlicher Ausdehnung)

Relevante Abhängigkeiten: $Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda}$ $\quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\tau}{\delta^2}$



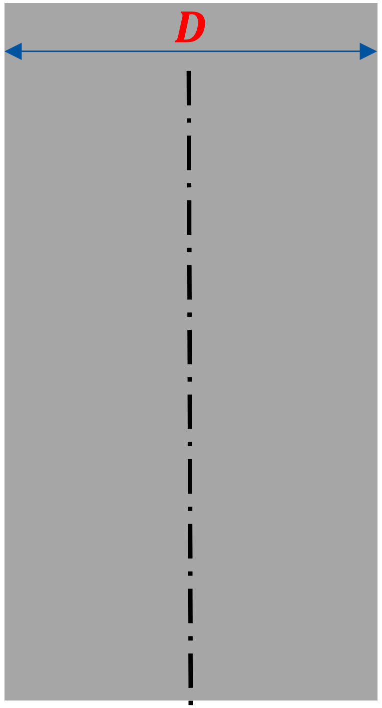
$\frac{1}{Bi} \approx 0 \rightarrow$ aufgeprägte Wandtemperatur

Heisler Diagramm: Zeitlicher Verlauf der Körperkerntemperatur

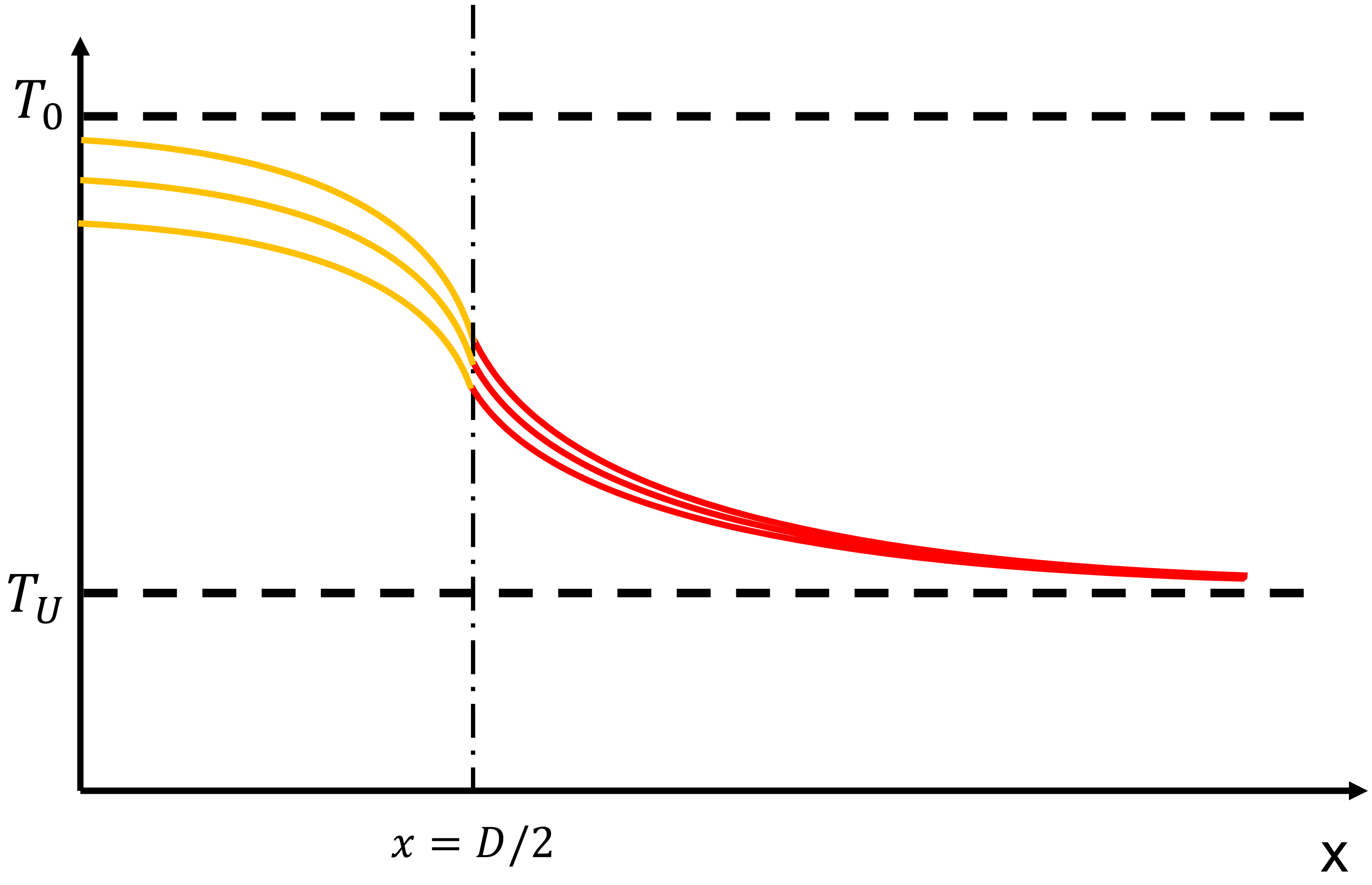


Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

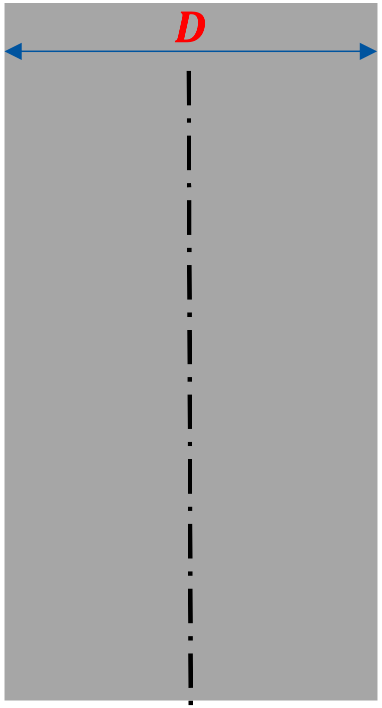
Örtlicher Verlauf der Körpertemperatur



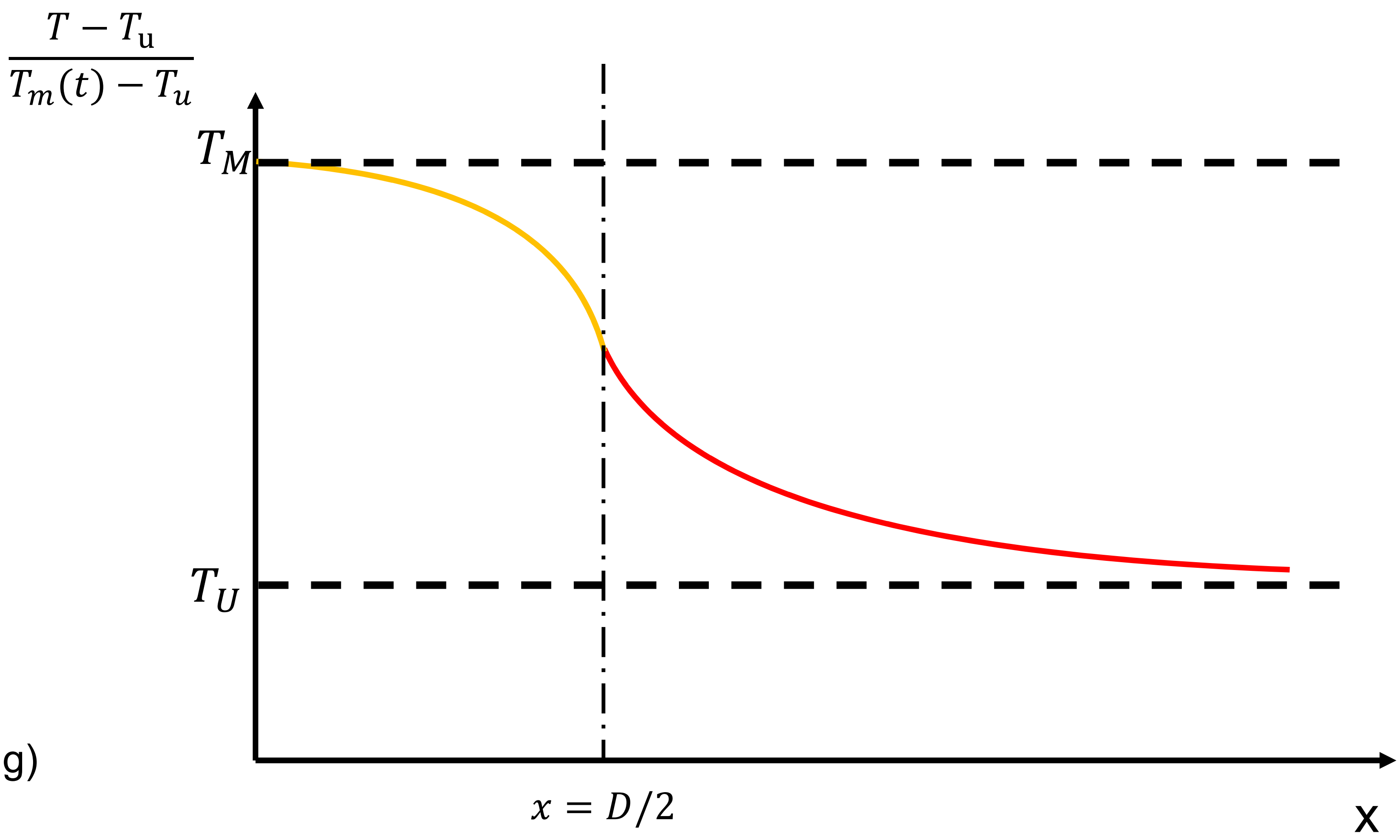
Platte
(unendlicher Ausdehnung)



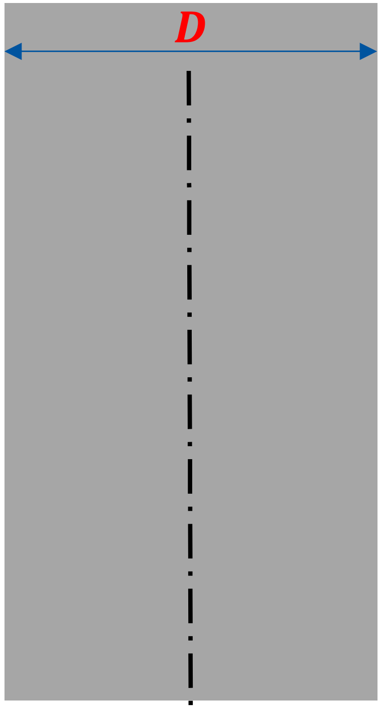
Örtlicher Verlauf der Körpertemperatur



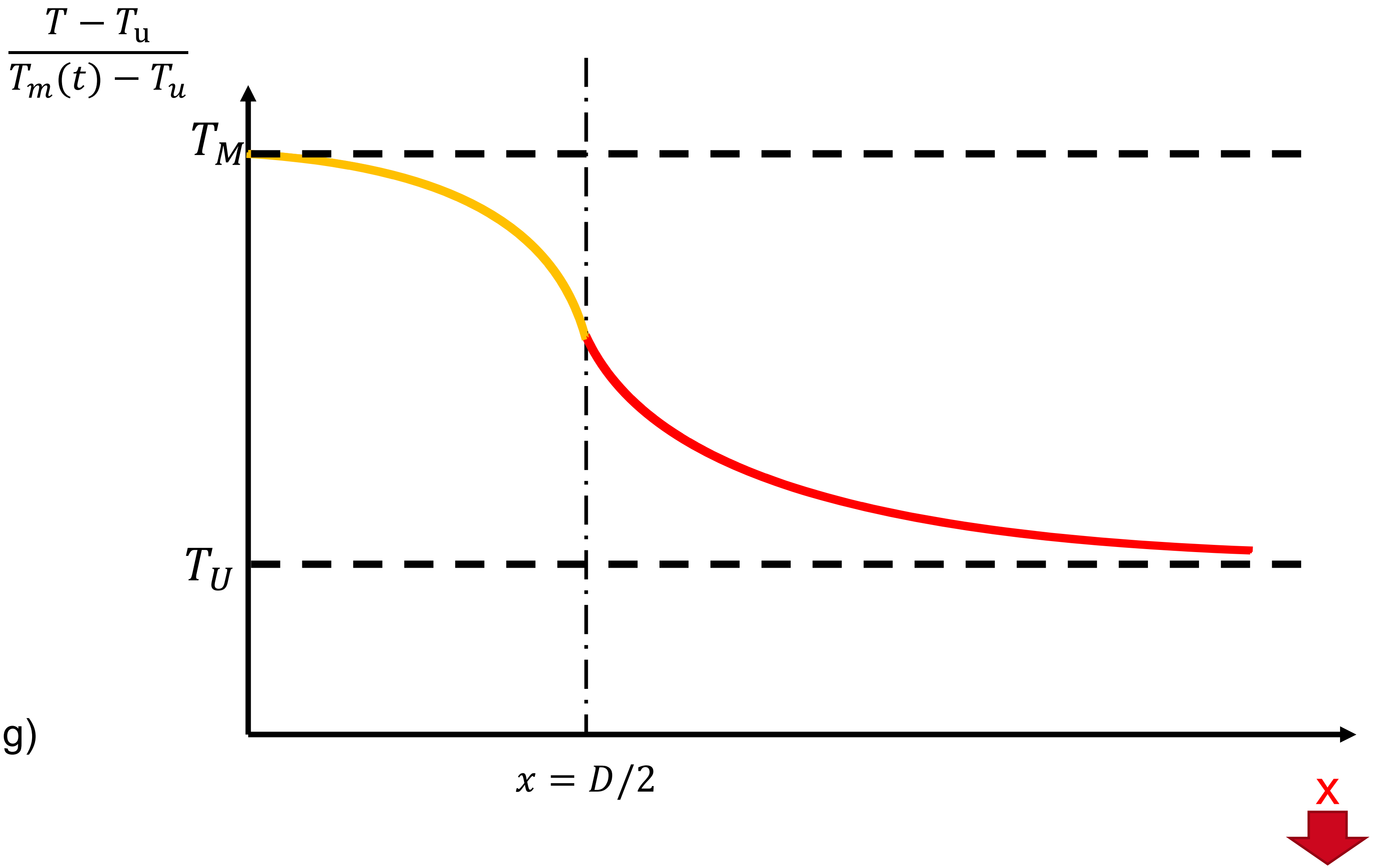
Platte
(unendlicher Ausdehnung)



Örtlicher Verlauf der Körpertemperatur

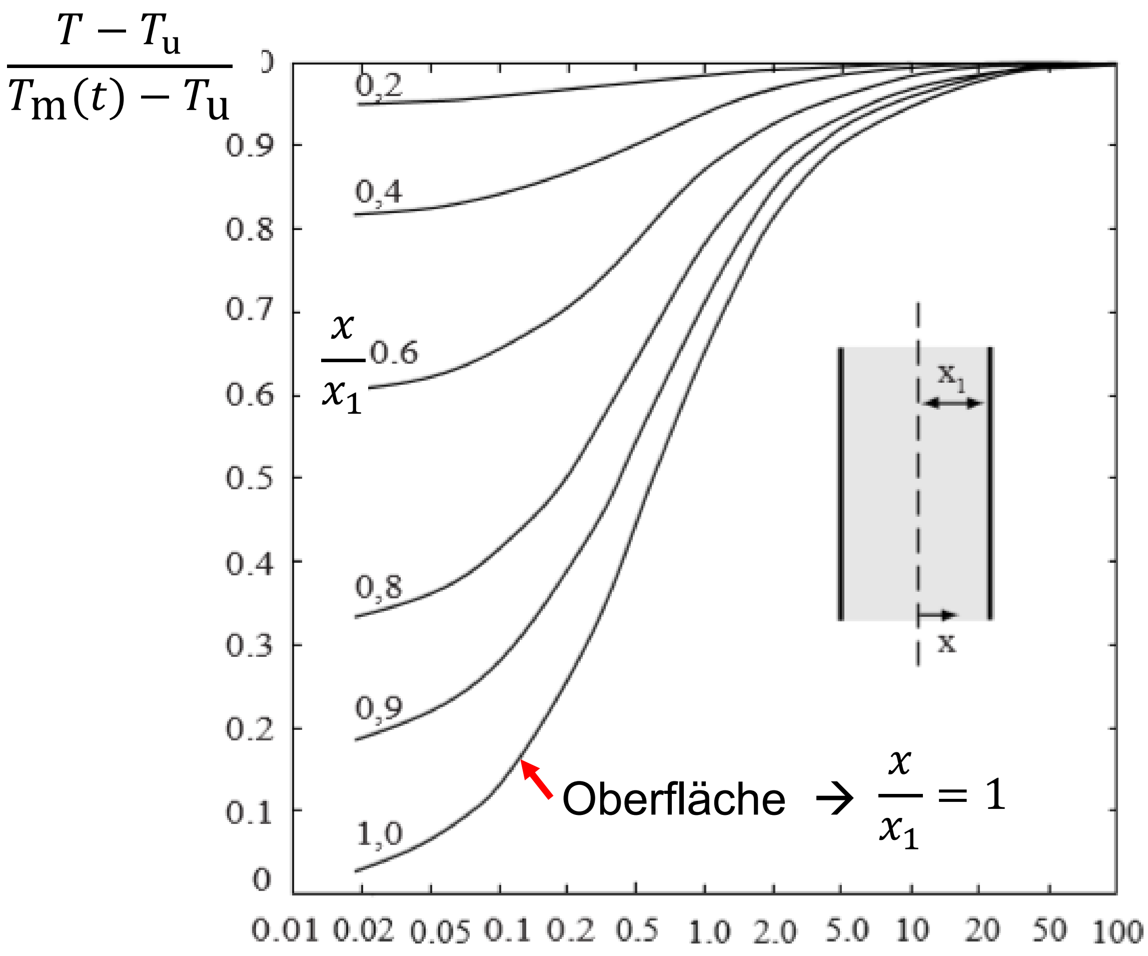


Platte
(unendlicher Ausdehnung)



$$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha x_1}$$

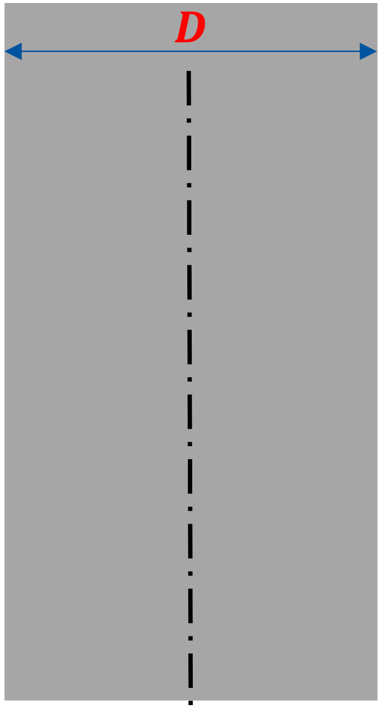
Heisler Diagramm: Örtlicher Temperaturverlauf



Körpermitte: → $\frac{x}{x_1} = 0$

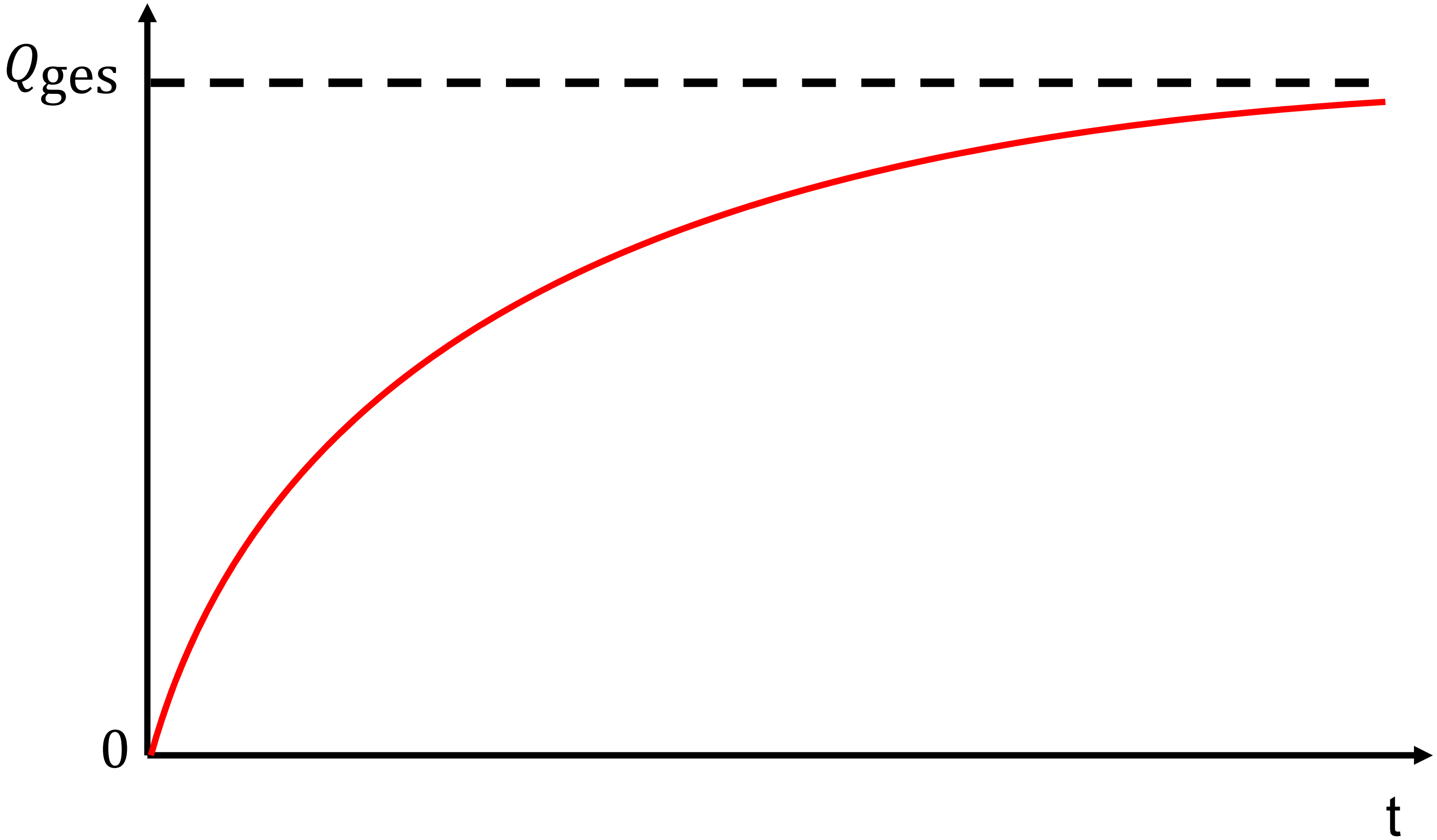
$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha x_1}$ (logarithmisch)

Zeitlicher Verlauf der abgegebenen Wärme

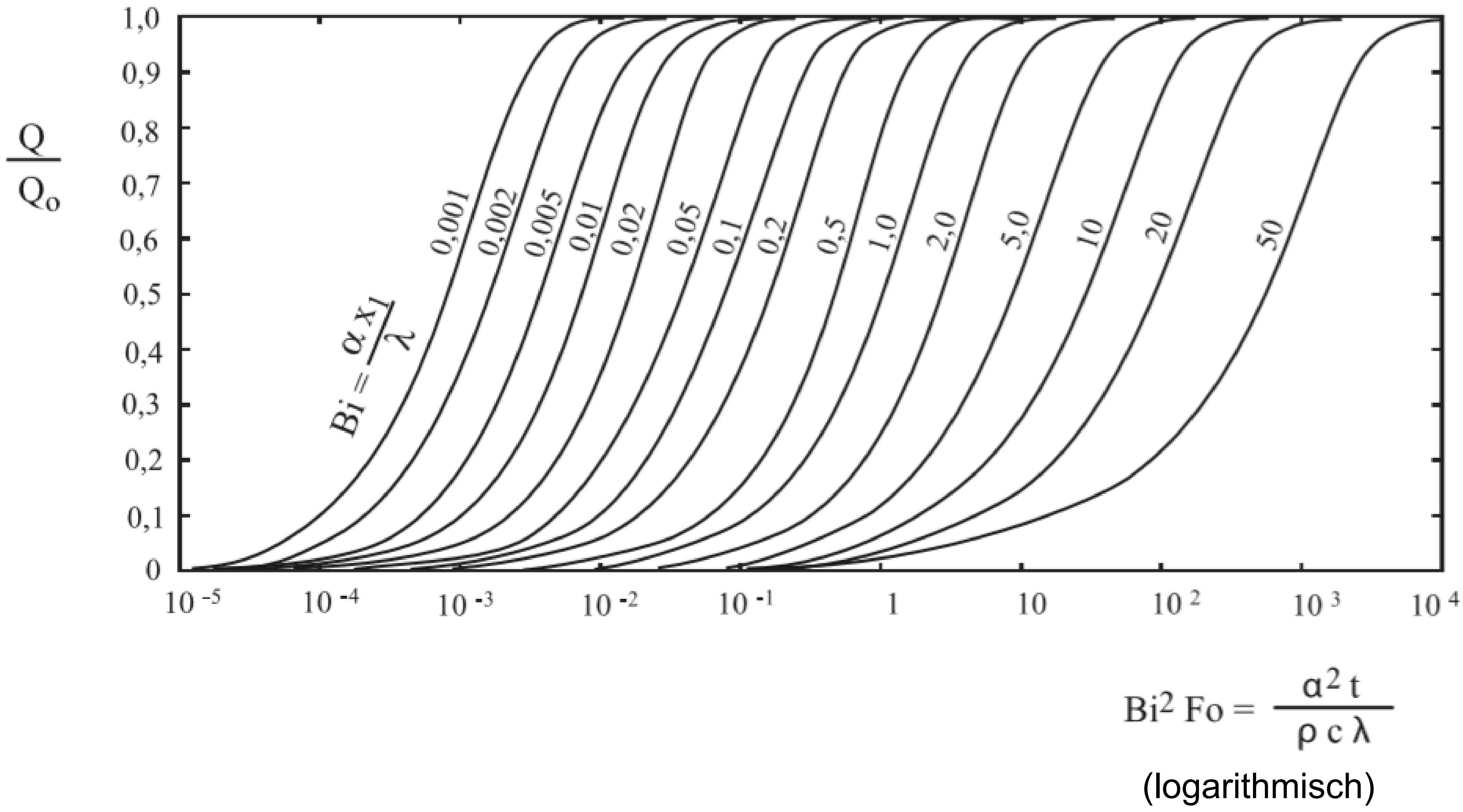


Platte
(unendlicher Ausdehnung)

Insgesamt im Objekt gespeichert Wärme: $Q_{ges} = mc_p(T_0 - T_u)$



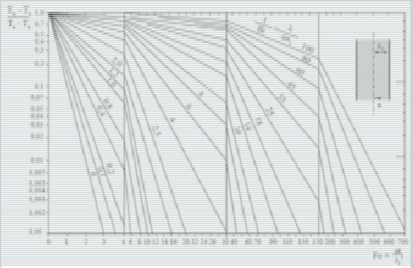
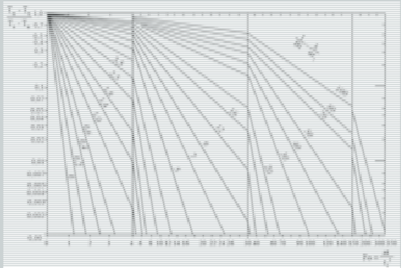
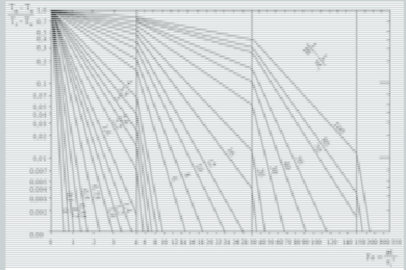
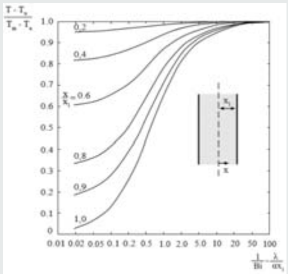
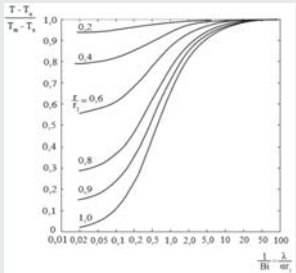
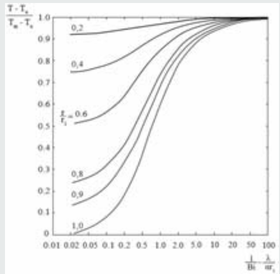
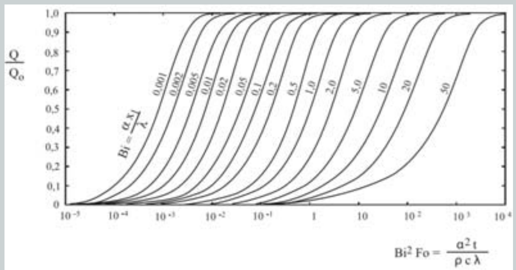
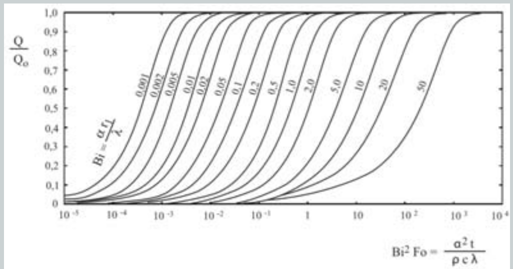
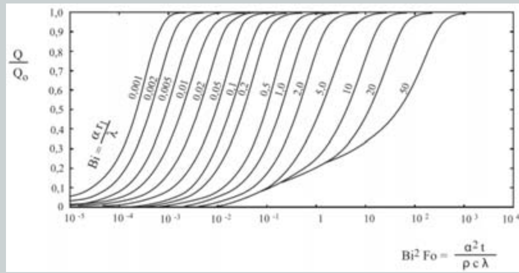
Heisler Diagramm: Zeitlicher Verlauf der abgegebenen Wärme



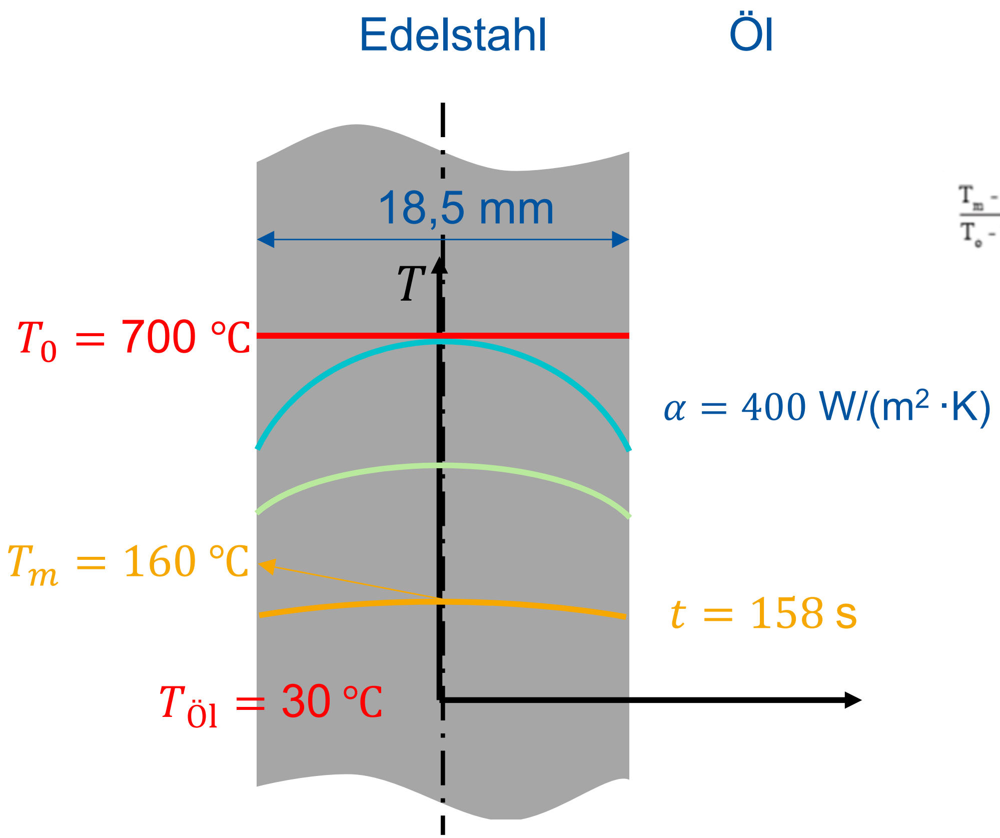
Heisler Diagramme verschiedener symmetrischer Körper

Dimensionslose Lösung

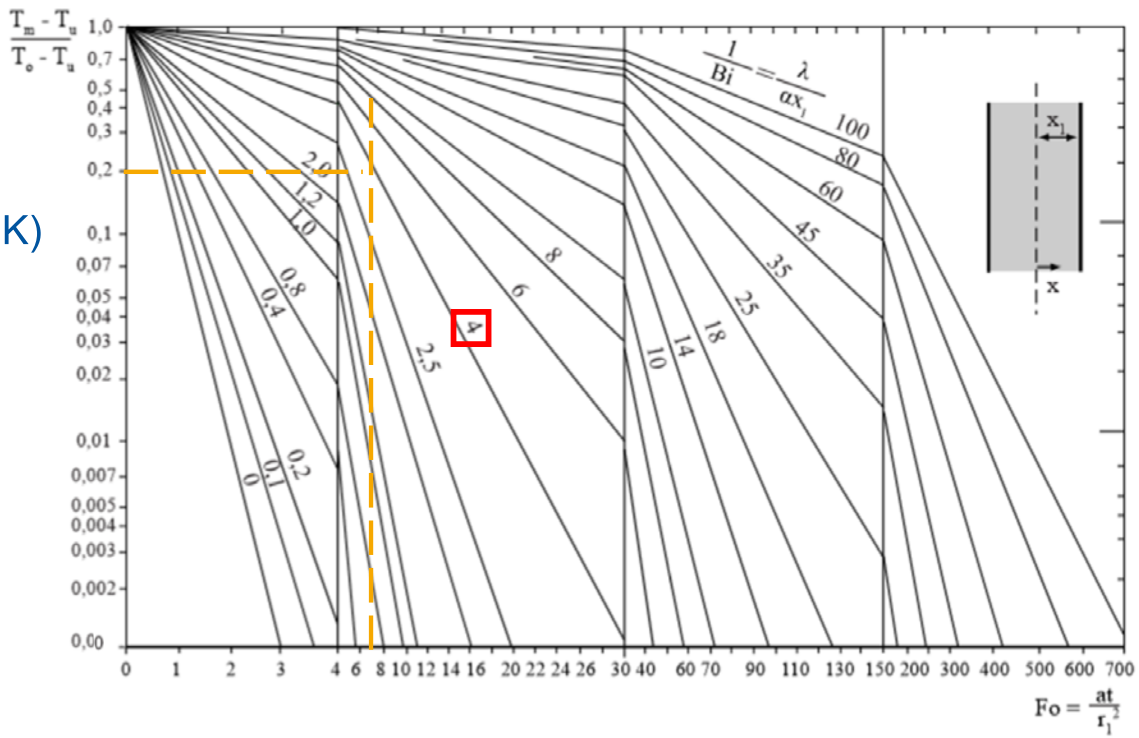
$$\Theta^* = \Theta^*(x^*, t^*, Fo, Bi)$$

Geometrie	Platten	Zylinder	Kugel
Temperatur in der Objektmitte			
Temperatur-verteilung			
Wärmefluss Anteil			

Beispiel: Abschrecken einer Stahlplatte



a) Nach welcher Zeit ist die Mitteltemperatur T_m auf 160 °C abgekühlt?

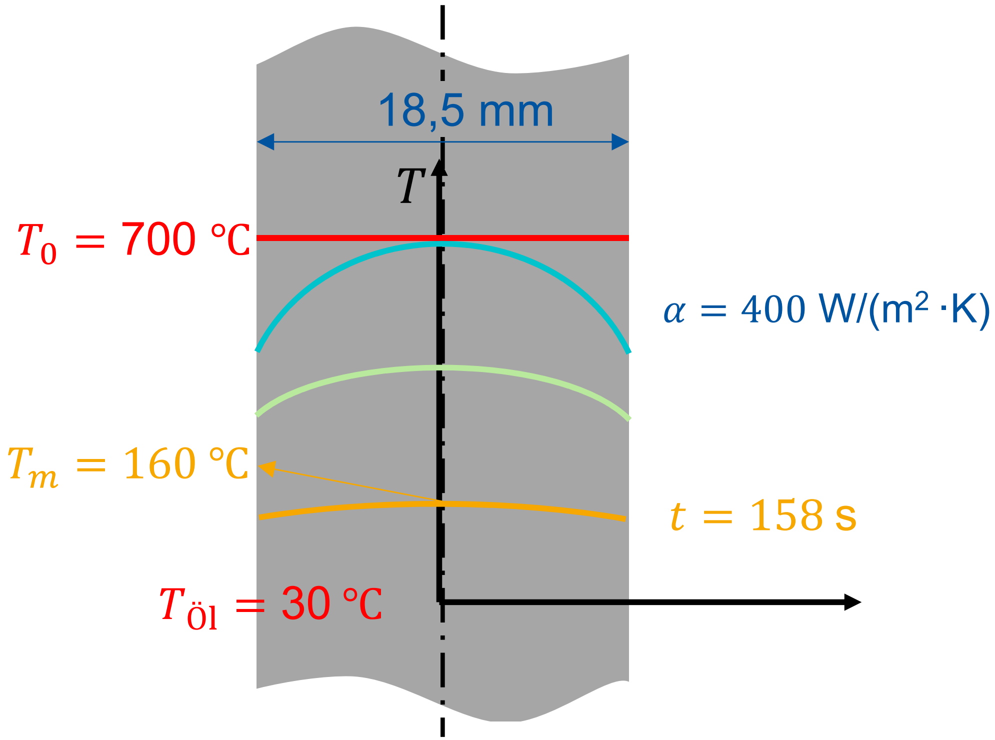


$\lambda = 15$ W/(m·K)
$\rho = 7900$ kg/m³
$c_p = 500$ J/(kg·K)
↓
$a = 3{,}8 \times 10^{-6}$ m²/s

$$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha x_1} = 4.05$$
$$x_1 = D/2$$

$$\frac{T_m - T_{Öl}}{T_0 - T_{Öl}} = 0{,}19 \quad \Rightarrow \quad Fo = \frac{at}{{x_1}^2} = 7 \quad \Rightarrow \quad t = 158\text{s}$$

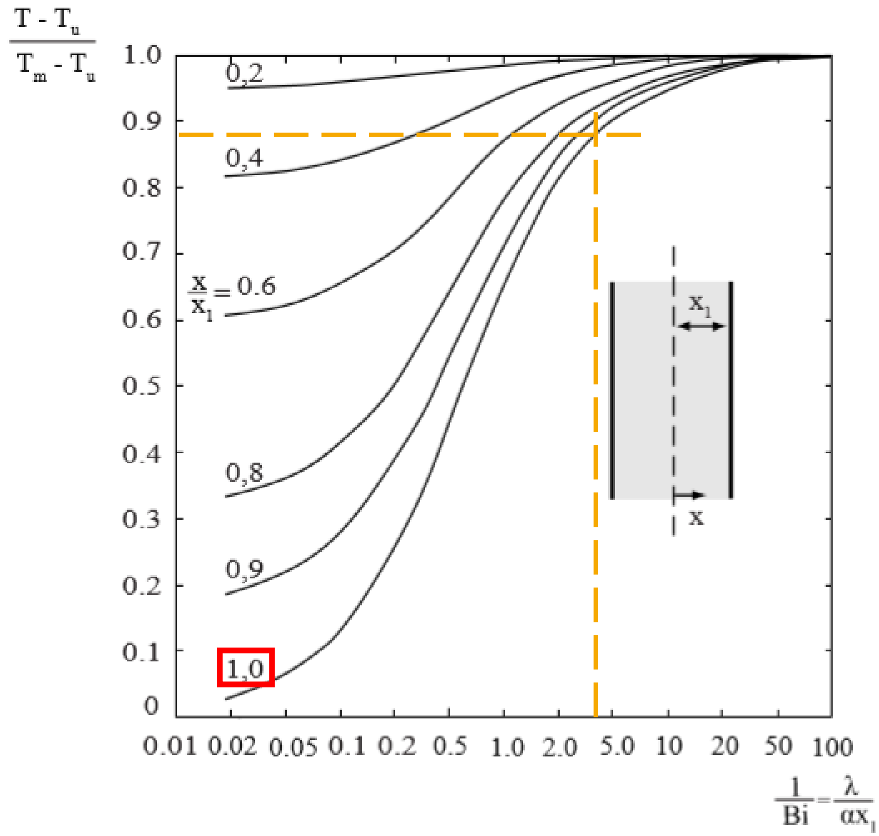
Beispiel: Abschrecken einer Stahlplatte



$\lambda = 15$ W/(m·K)
$\rho = 7900$ kg/m³
$c_p = 500$ J/(kg·K)
↓
$a = 3{,}8 \times 10^{-6}$ m²/s

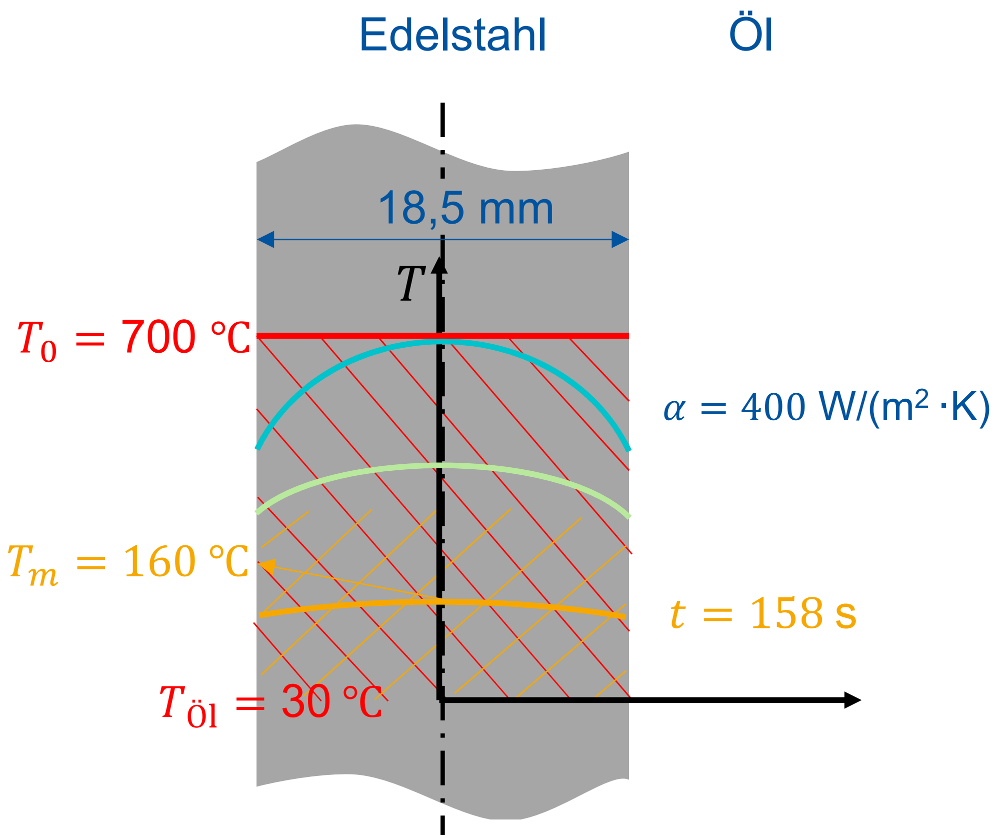
$$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha x_1} = 4.05$$
$$x_1 = D/2$$

b) Welchen Wert hat die Temperatur T an der Plattenoberfläche nach $t = 158$s?



$$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha x_1} = 8 \Rightarrow \frac{T - T_{Öl}}{T_m - T_{Öl}} = 0{,}88 \Rightarrow T = 144°\text{C}$$

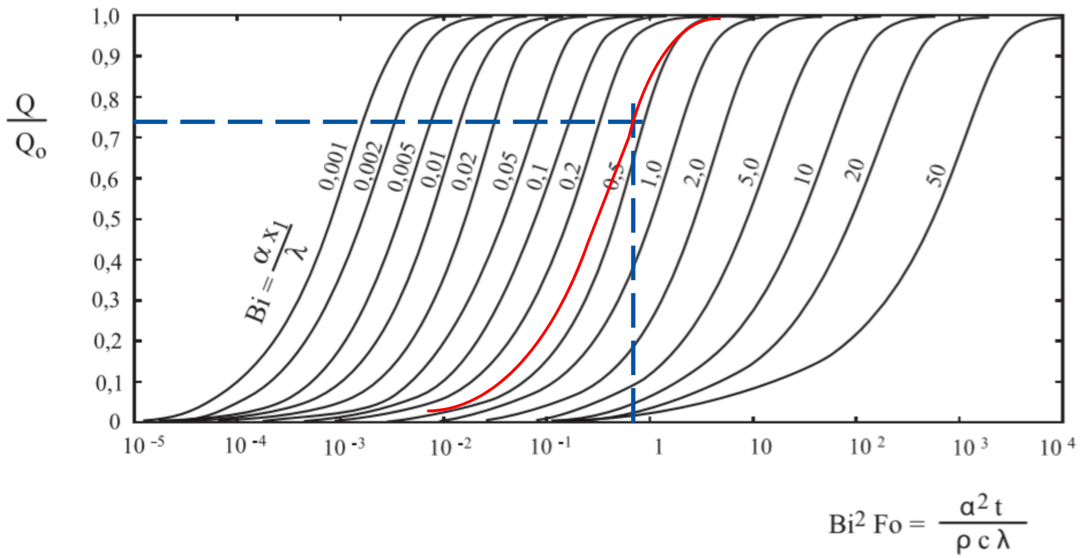
Beispiel: Abschrecken einer Stahlplatte



c) Wieviel Wärme hat die Platte nach $t = 158$ s abgegeben?

totale Wärme Q_0 verbleibende Wärme Q_t

abgegebene Wärme $Q = Q_0 - Q_t$



$\lambda = 15$ W/(m·K)
$\rho = 7900$ kg/m³
$c_p = 500$ J/(kg·K)
$\downarrow$
$a = 3{,}8 \times 10^{-6}$ m²/s

$Bi = 0.25$
$Fo = 7$

$$Bi^2 Fo = \frac{\alpha^2 t}{\rho c_p \lambda} = 0{,}43 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{Q_0} = 0{,}74 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{m} = 247{,}9 \, \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

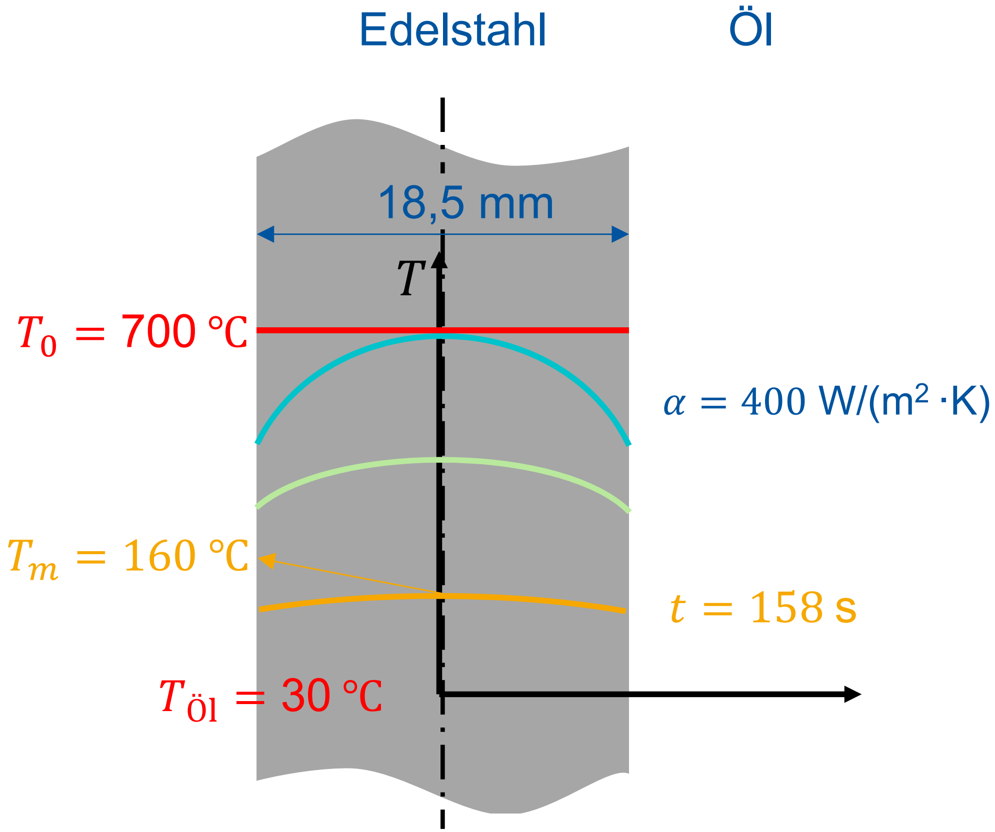
mit $Q_0 = m c_p (T_0 - T_{\ddot{O}l})$

Verständnisfragen

Durch welche beiden Kennzahlen ist das instationäre Wärmeübertragungsproblem eines Körpers mit zusätzlichem äußerem thermischem Widerstand beschrieben?

Welches Hilfsmittel erlaubt eine Bestimmung des Temperaturverlaufs oder der übertragenen Wärmemenge für ausgedehnte Platten, lange Zylinder oder Kugeln?

Beispiel: Abschrecken einer Stahlplatte



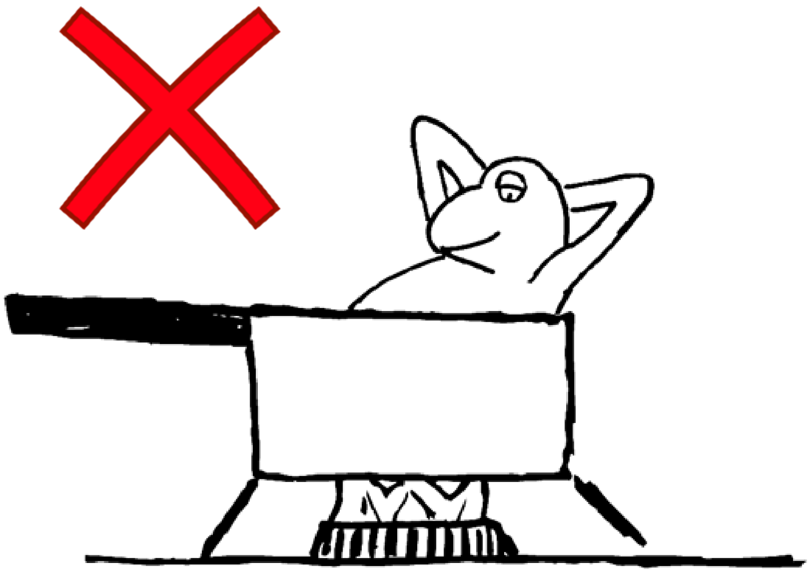
$\lambda = 15\ W/(m \cdot K)$
$\rho = 7900\ kg/m^3$
$c_p = 500\ J/(kg \cdot K)$
$\downarrow$
$a = 3{,}8 \times 10^{-6}\ m^2/s$

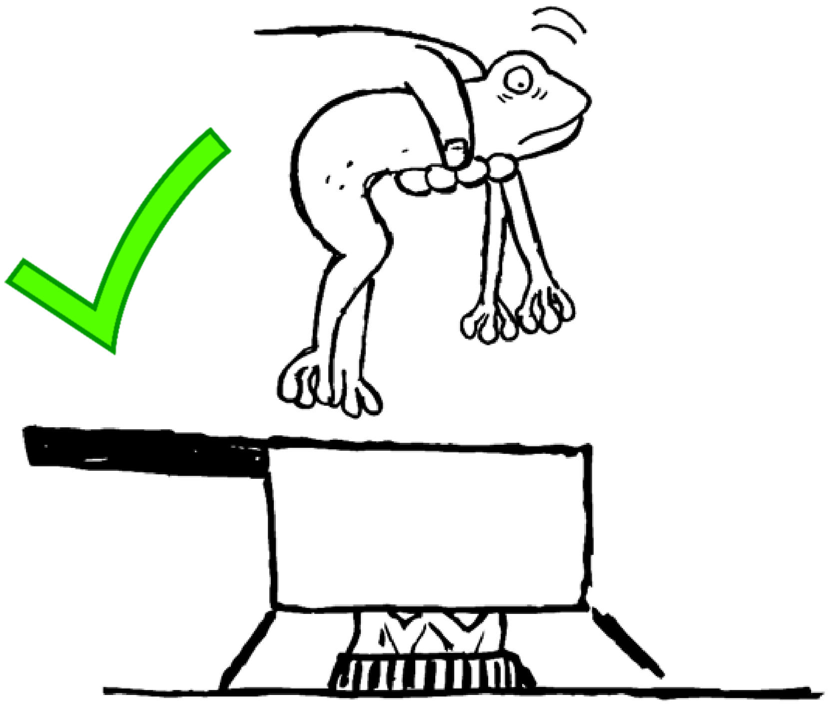
d) Wie hoch ist die mittele spezifische Kühlleistung des Ölbads im Zeitraum $0 < t < 158\ s$?

$$\frac{\dot{Q}}{m} = \frac{Q/_{\Delta t}}{m} = \frac{247{,}9\,\frac{kJ}{kg}}{158 s} = 1{,}57\,\frac{kW}{kg}$$

Situation

Abschätzung des Temperaturverlaufs in Körpern bestimmter Geometrie, deren Umgebungstemperatur bei $t = 0$ plötzlich geändert wird.





Quelle: https://i.gifer.com/4ej9