Wärme- und Stoffübertragung I

Beispiel zur Analogie: Instationäre 1-D Wärmeleitung / Diffusion

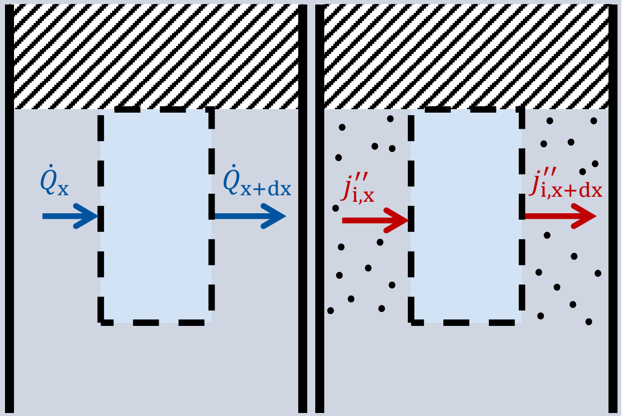
Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

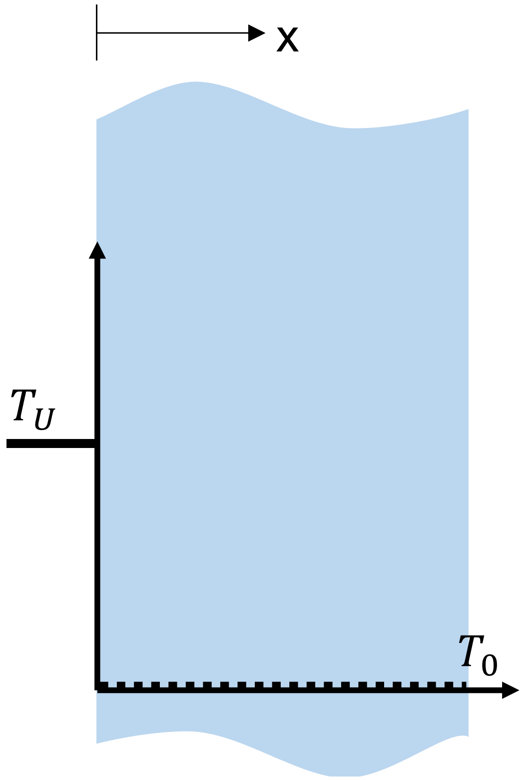
Lernziele

Beispiel Analogie instationäre Wärmeleitung und Diffusion

- Rekapitulation der Lösung des eindimensionalen Wärmeleitungsproblems
- Verständnis der Schritte zur Lösung des eindimensionalen Diffusionsproblems
- Transferwissen zwischen Wärmeleitungs- und Diffusionsproblemen entwickeln



Beschreibung des 1-D instationären Wärmeleitungsproblems



Platte

DGL → Halbunendliche Platte

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Substitution: $$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + 2\eta\,\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0$$

Lösung: $$\theta = 1 - \mathrm{erf}(\eta)$$

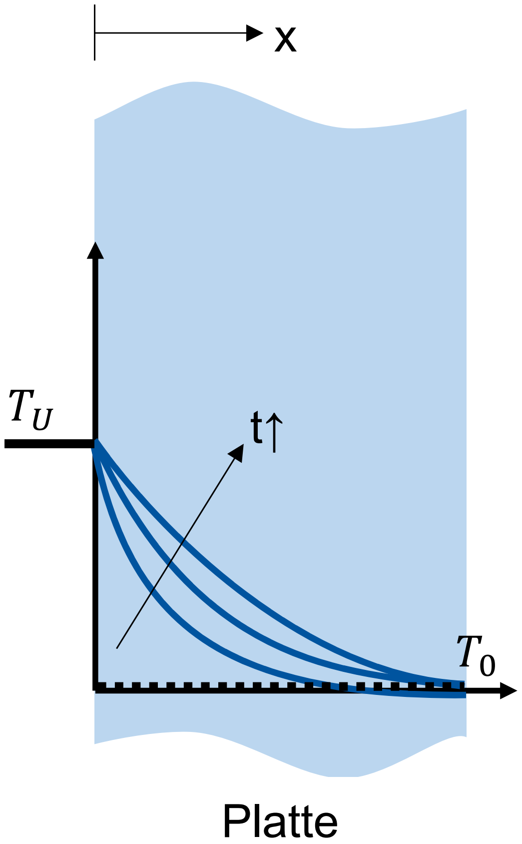
Anfangs- und Randbedingungen

- $T(t = 0, x) = T_0$
- $T(t > 0, x = 0) = T_\mathrm{U}$
- $T(t > 0, x \to \infty) = T_0$

Übertemperatur und Transformation

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_U - T_0} \qquad \eta = \frac{x}{\sqrt{4at}}$$

Lösung des 1-D instationären Wärmeleitungsproblems

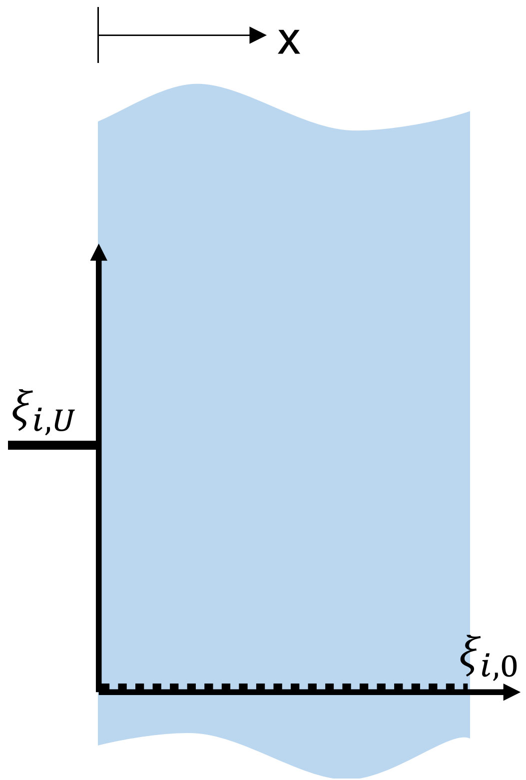


Wärmestrom an der Wand

$$\dot{q}''_{x=0} = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi a t}}(T_U - T_0)$$

$$\dot{q}''_{x=0} = \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t}}\,(T_U - T_0)$$

Lösung des 1-D instationären Diffusionsproblems



Platte

DGL → halbunendliche Platte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho D \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Substitution: $$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0$$

Lösung: $$\theta = 1 - \mathrm{erf}(\eta)$$

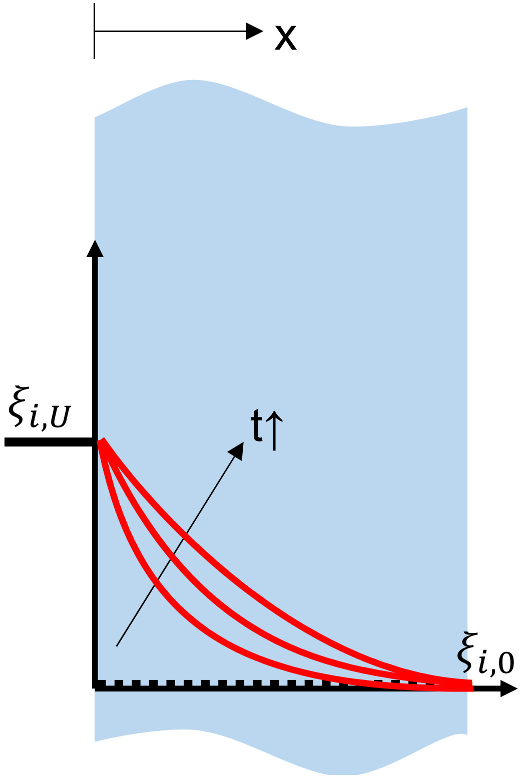
Anfangs- und Randbedingungen

- $\xi_i(t = 0, x) = \xi_{i,0}$
- $\xi_i(t > 0, x = 0) = \xi_{i,U}$
- $\xi_i(t > 0, x \to \infty) = \xi_{i,0}$

Dimensionslose Konzentration und Transformation

$$\theta = \frac{\xi_i - \xi_{i,0}}{\xi_{i,U} - \xi_{i,0}} \qquad \eta = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$$

Lösung des 1-D instationären Diffusionsproblems



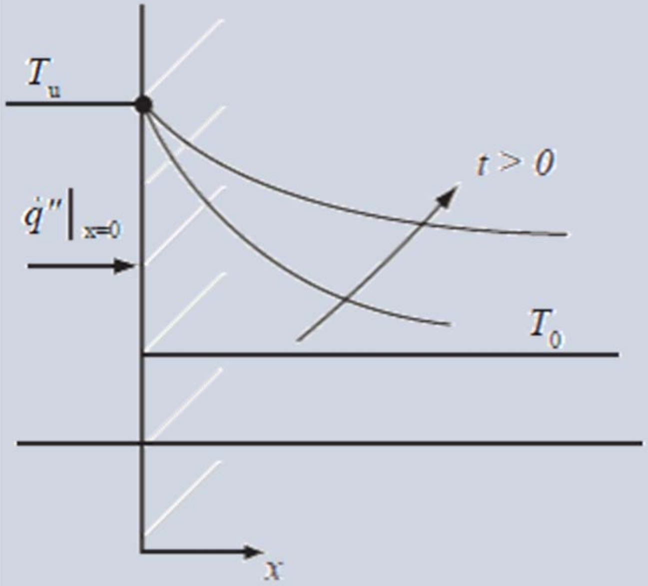
Diffusionsstrom an der Oberfläche

$$j_i''\Big|_{x=0} = j_{i,x=0}'' = \rho\sqrt{\frac{D}{\pi t}}\left(\xi_{i,U} - \xi_{i,0}\right)$$

Vergleich thermische Diffusion und Stoffdiffusion

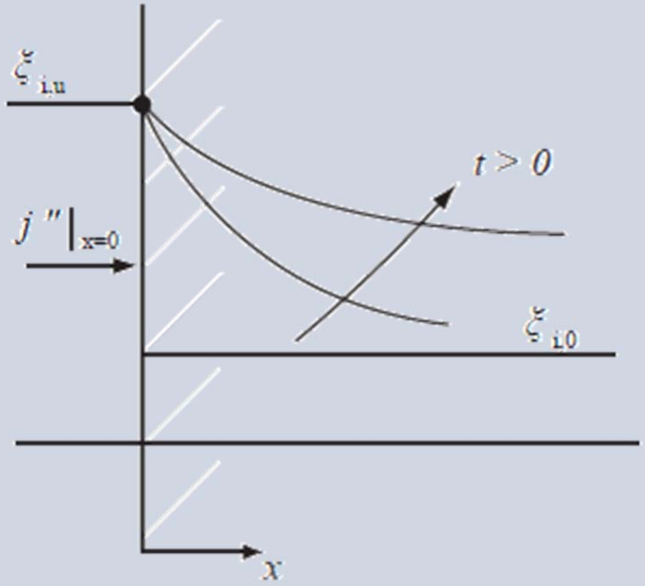
Thermische Diffusion

$$\dot{q}''_{x=0} = \sqrt{\frac{\lambda\rho c_p}{\pi t}}\,(T_U - T_0)$$



Stoffdiffusion

$$j''_{i,x=0} = \rho\sqrt{\frac{D}{\pi t}}\,(\xi_{i,U} - \xi_{i,0})$$



Verständnisfragen

Welche Anfangs- und Randbedingungen werden bei der Lösung des eindimensionalen instationären Diffusionsproblems gewählt?

Für welche Art von Problemen lassen sich die Heisler-Diagramme verwenden? Welche Randbedingungen müssen erfüllt werden?