Wärme- und Stoffübertragung I

Einführung in die instationäre Wärmeleitung

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

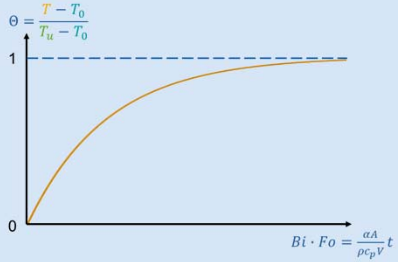
Lernziele

- Kategorisierung von instationären Problemen

  ➢ Verständnis und Abstraktion des Problems
  ➢ Problemreduktion und Auswahl der geeigneten Lösungsstrategie

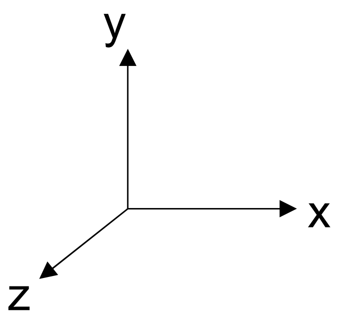
- Körper homogener Temperatur

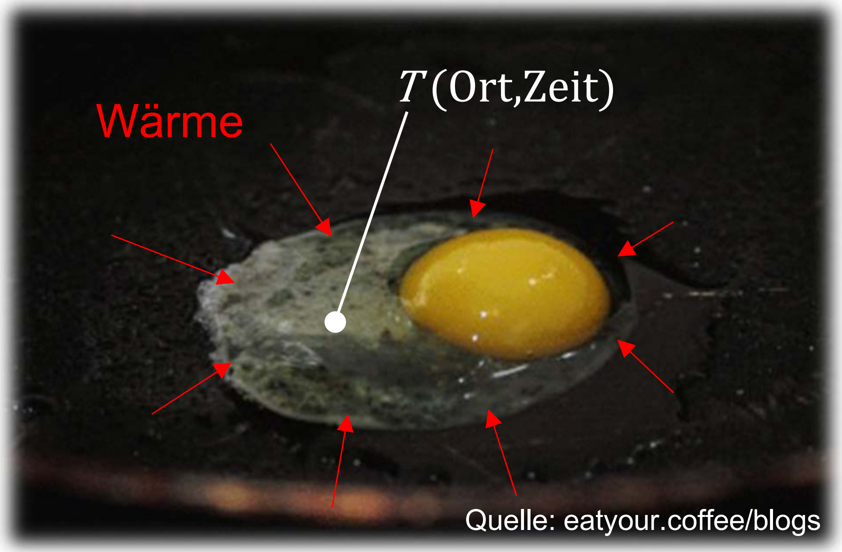
  ➢ Ent-Dimensionierung des Problems
  ➢ Dimensionslose Kennzahlen
  ➢ Mathematisches Lösen der DGL



Rückblick: Fourier'sche Differentialgleichung

„Spiegelei braten“





Quelle: eatyour.coffee/blogs

Instationäre Wärmeleitung

3-D Erhaltungsgleichung ohne Advektion und Quelle

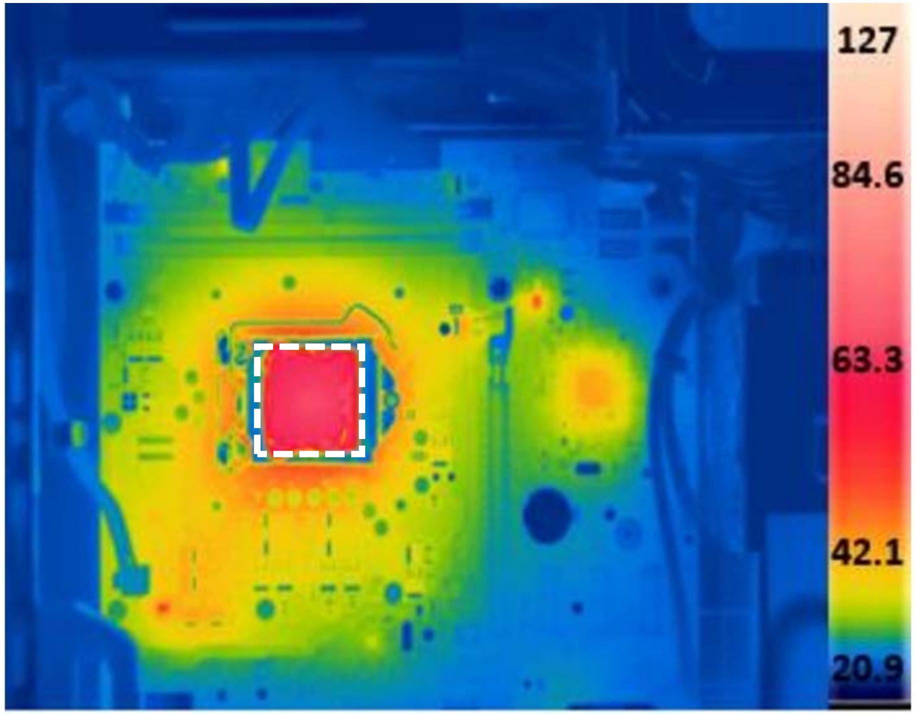
$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Wie lassen sich instationäre Probleme kategorisieren?

Temperatur eines Körpers:

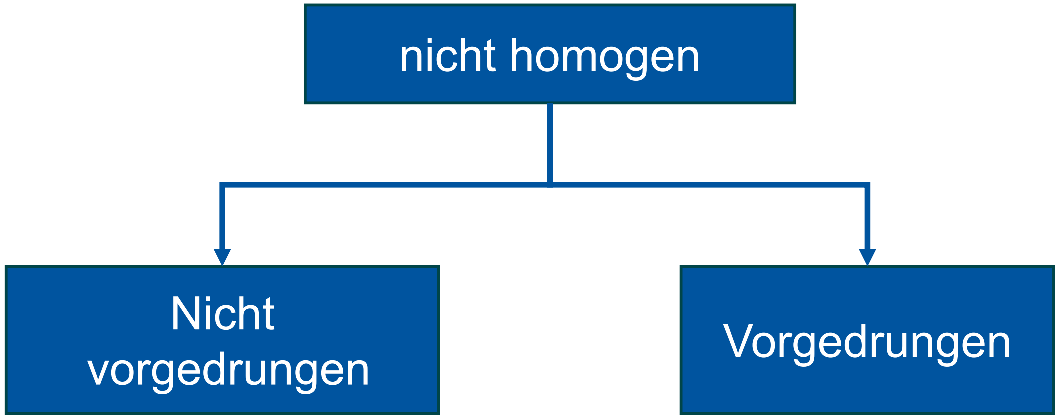
homogen (Bi ≪ 1)

nicht homogen



Quelle:
[1] Lee, Soochan et al. "Hot Spot Cooling and Harvesting CPU Waste Heat Using Thermoelectric Modules." (2014).
[2] www.travelportal.cz

Wie lassen sich instationäre Probleme kategorisieren?



Temperatur eines Körpers:

homogen (Bi ≪ 1)

nicht homogen

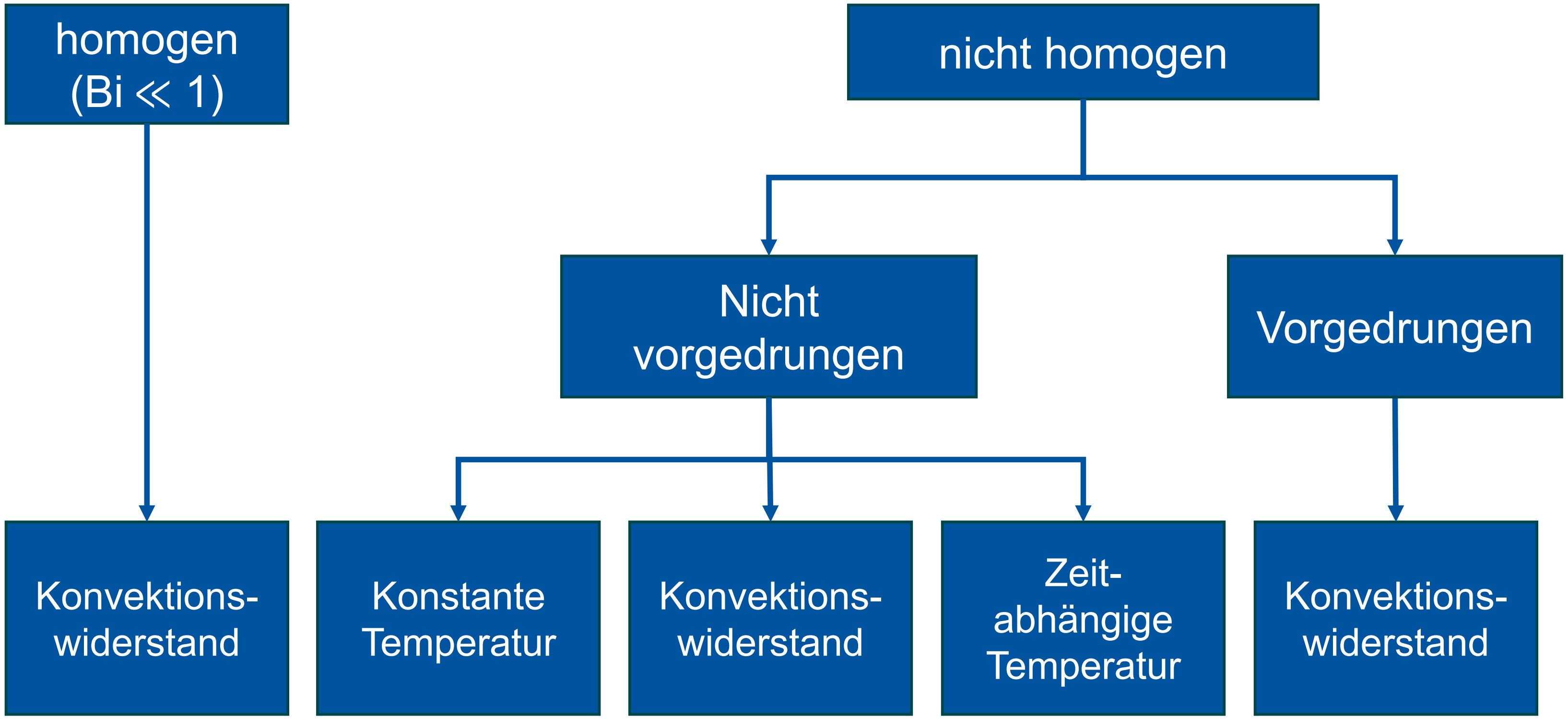
Temperature innerhalb den Körper:

Nicht vorgedrungen

Vorgedrungen

Quelle: www.mychicagosteak.com/steak-university/done-perfection-guide-steak-doneness/

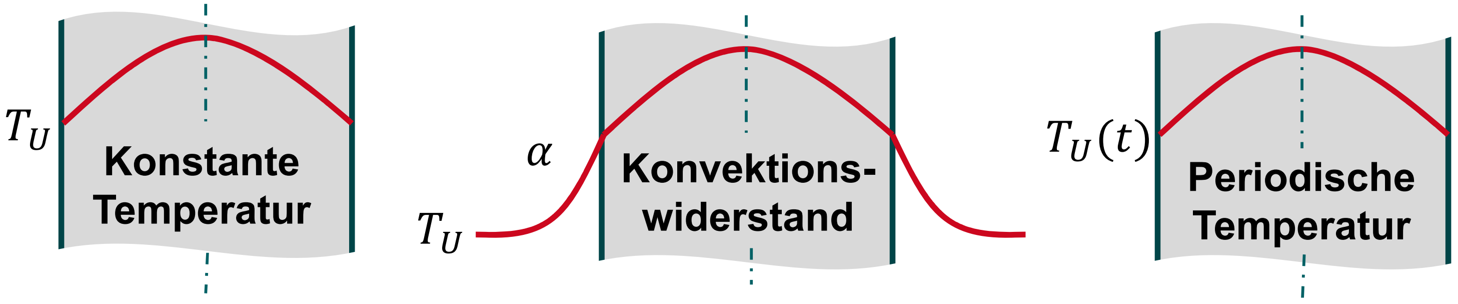
Wie lassen sich instationäre Probleme kategorisieren?



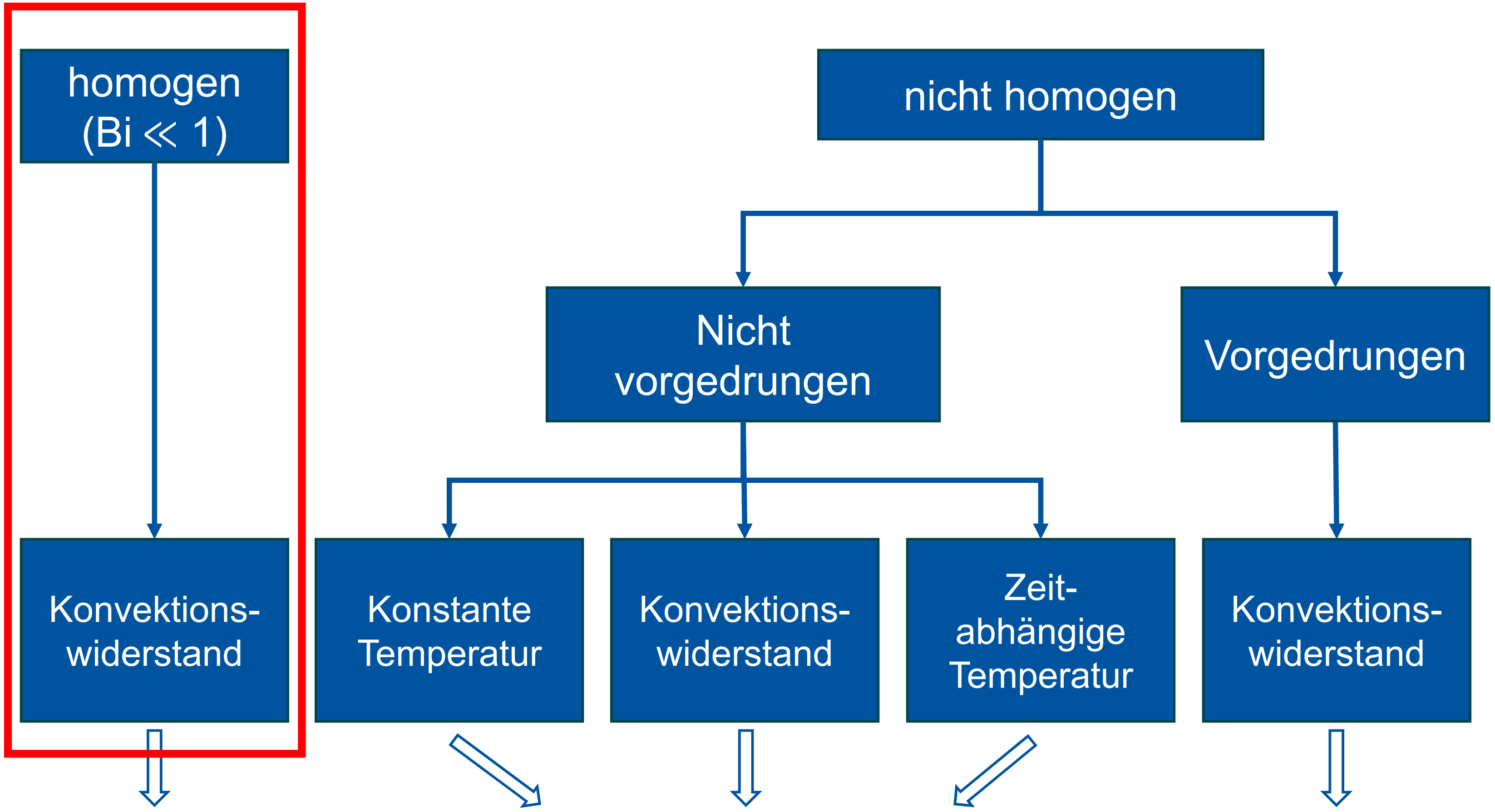
Temperatur eines Körpers:
- homogen ($Bi \ll 1$)
- nicht homogen

Temperature innerhalb den Körper:
- Nicht vorgedrungen
- Vorgedrungen

Randbedingung an der Oberfläche:
- Konvektionswiderstand
- Konstante Temperatur
- Konvektionswiderstand
- Zeitabhängige Temperatur
- Konvektionswiderstand



Wie lässt sich das Problem vereinfachen?



Temperatur eines Körpers:

Temperature innerhalb den Körper:

Randbedingung an der Oberfläche:

1) Rein zeitabhängige Lösung

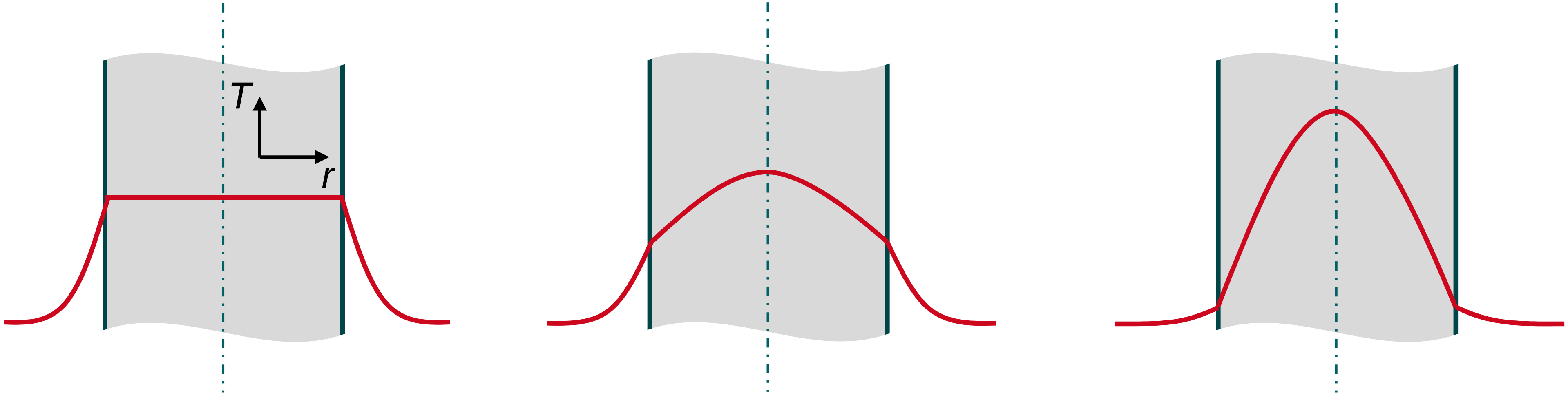
2) 1D-Betrachtung

3) Reale Körper mit Symmetrie

4) Grafische Lösungen

Rückblick der Biot-Zahl

→ Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein für eine homogene Körpertemperatur?



$\mathrm{Bi} \ll 1$

- homogene Temperatur im Körper
- W_λ vernachlässigbar
- häufig bei Körpern mit hoher Wärmeleitfähigkeit

$\mathrm{Bi} \approx 1$

- ähnliche Anteile von Wärmeleitung und Konvektion
- $W_\lambda \approx W_\alpha$

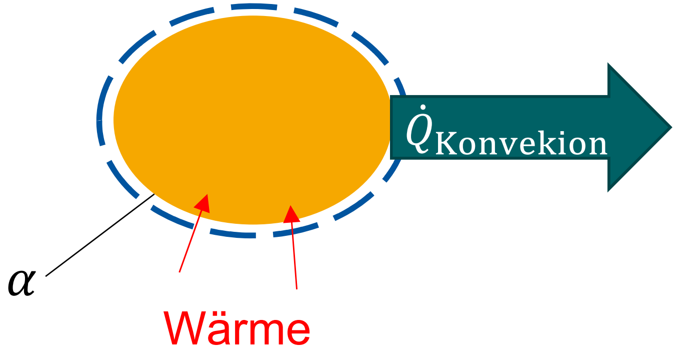
$\mathrm{Bi} \gg 1$

- Hoher Wärmeleitwiderstand
- $W_\lambda \gg W_\alpha$
- häufig bei Körpern mit niedriger Wärmeleitfähigkeit

Körper mit „hoher“ Wärmeleitfähigkeit (Modell: Blockkapazität)

Temperatur einer Kupferkugel $T(t)$

mit Anfangstemperatur T_0



Umgebung T_U

Energie Bilanz

Änderung innerer Energie = zugeführte Wärme

$$\frac{dU}{dt} = -\dot{Q}_{\text{Konvekion}}$$

$$\rho c_p V \frac{dT}{dt} = -\alpha A (T - T_U)$$

Dimensionslose Übertemperatur

$$\Theta^* = \frac{T - T_0}{T_U - T_0} \qquad \frac{d\Theta^*}{dt} = \frac{1}{T_U - T_0} \frac{dT}{dt}$$

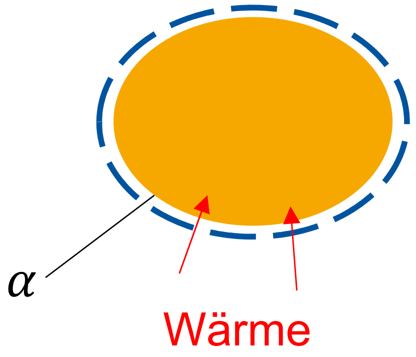
Einsetzen

$$\frac{d\Theta^*}{dt} + \frac{\alpha A}{\rho c_p V} \cdot \underbrace{\frac{(T - T_0) - (T_U - T_0)}{T_U - T_0}}_{\Theta^* - 1} = 0$$

Körper mit „hoher“ Wärmeleitfähigkeit (Modell: Blockkapazität)

Temperatur einer Kupferkugel $T(t)$

mit Anfangstemperatur T_0



Umgebung T_U

Gleichung für die Temperatur T(t)

$$\frac{d\Theta^*}{\Theta^* - 1} = -\frac{\alpha A}{\rho c_p V} dt$$

Integration mit Anfangsbedingung

$$\Theta^*_0 = \frac{T_0 - T_0}{T_U - T_0} = 0$$

$$\int_{\Theta^*_0}^{\Theta^*} \frac{d\Theta^*}{\Theta^* - 1} = -\frac{\alpha A}{\rho c_p V} \int_0^t dt$$

Ergebnis

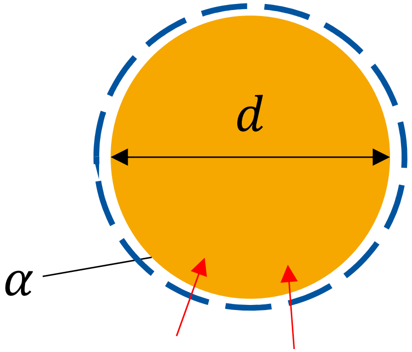
$$\ln\left(\frac{\Theta^* - 1}{\Theta^*_0 - 1}\right) = \ln(1 - \Theta^*) = -\frac{\alpha A}{\rho c_p V} t$$

$$\Theta^* = 1 - e^{-\frac{\alpha A}{\rho c_p V} t}$$

Körper mit „hoher“ Wärmeleitfähigkeit (Modell: Blockkapazität)

Temperatur einer Kupferkugel $T(t)$

mit Anfangstemperatur T_0



Wärme

Umgebung T_U

Ergebnis

$$\Theta^* = 1 - e^{-\frac{\alpha A}{\rho c_p V} t}$$

Rückblick: Biot-Zahl

$$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} \qquad \text{mit} \qquad L = \frac{d}{2}$$

ggf. $Bi = \frac{\text{äußeren}}{\text{inneren}}$ Widerstand $\ll 1$

Definition: Fourier-Zahl

$$Fo = \frac{\lambda t}{\rho c_p L^2} = \frac{at}{L^2} \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

Einschub: Fourier-Zahl

Ent-Dimensionierung der Erhaltungsgleichung

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$T = T^* \cdot T_{\mathrm{ref}}$$

$$t = t^* \cdot t_{\mathrm{ref}}$$

$$x = x^* \cdot L$$

Hinweis: Mit * gekennzeichnete Größen sind dimensionslos
T_{ref}, t_{ref} und L sind Referenzgrößen

$$\frac{\rho c_p T_{\mathrm{ref}}}{t_{\mathrm{ref}}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{T_{\mathrm{ref}} \lambda}{L^2} \frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \boxed{\frac{\lambda t_{\mathrm{ref}}}{\rho c_p L^2}} \frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = Fo \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

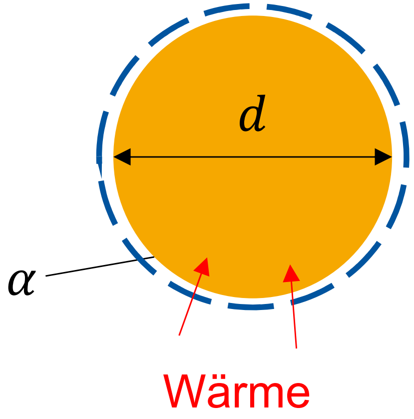
Definition

Die Fourier-Zahl ist ein dimensionsloser Zeitparameter.

Sie beschreibt die Dauer eines thermischen Prozesses im Verhältnis zur Dauer des Wärmetransportes.

Körper mit „hoher“ Wärmeleitfähigkeit (Modell: Blockkapazität)

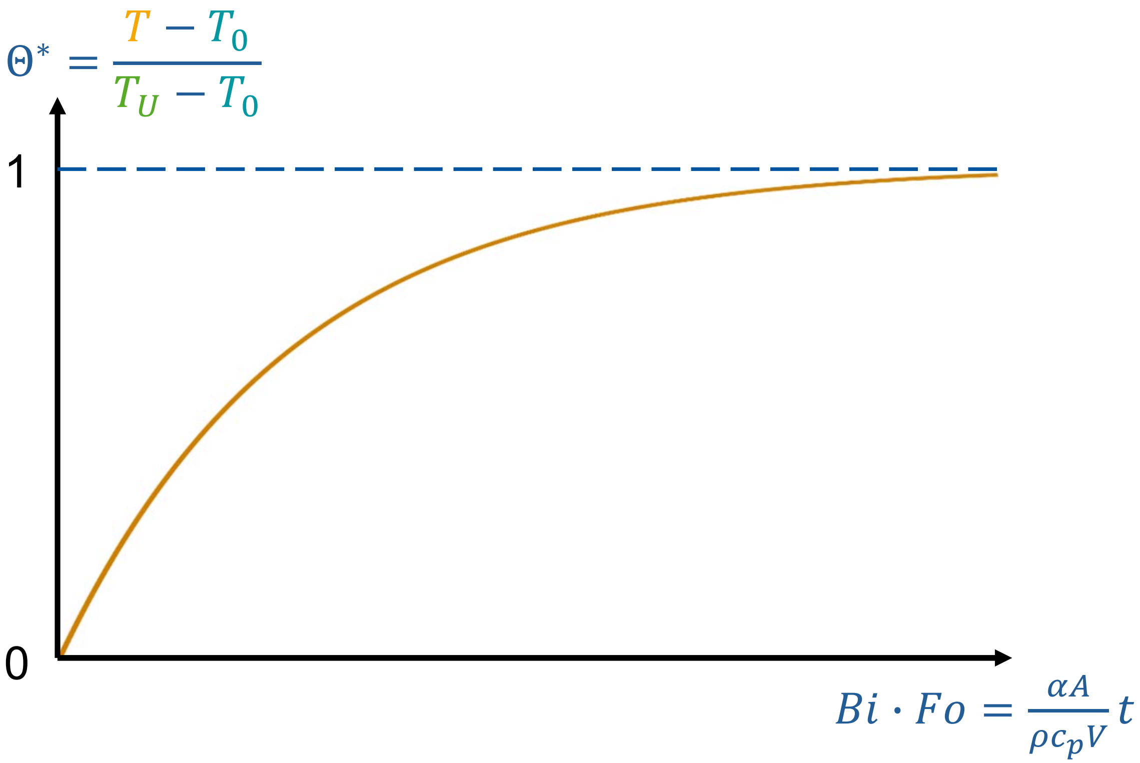
Temperatur einer Kupferkugel $T(t)$ mit Anfangstemperatur T_0



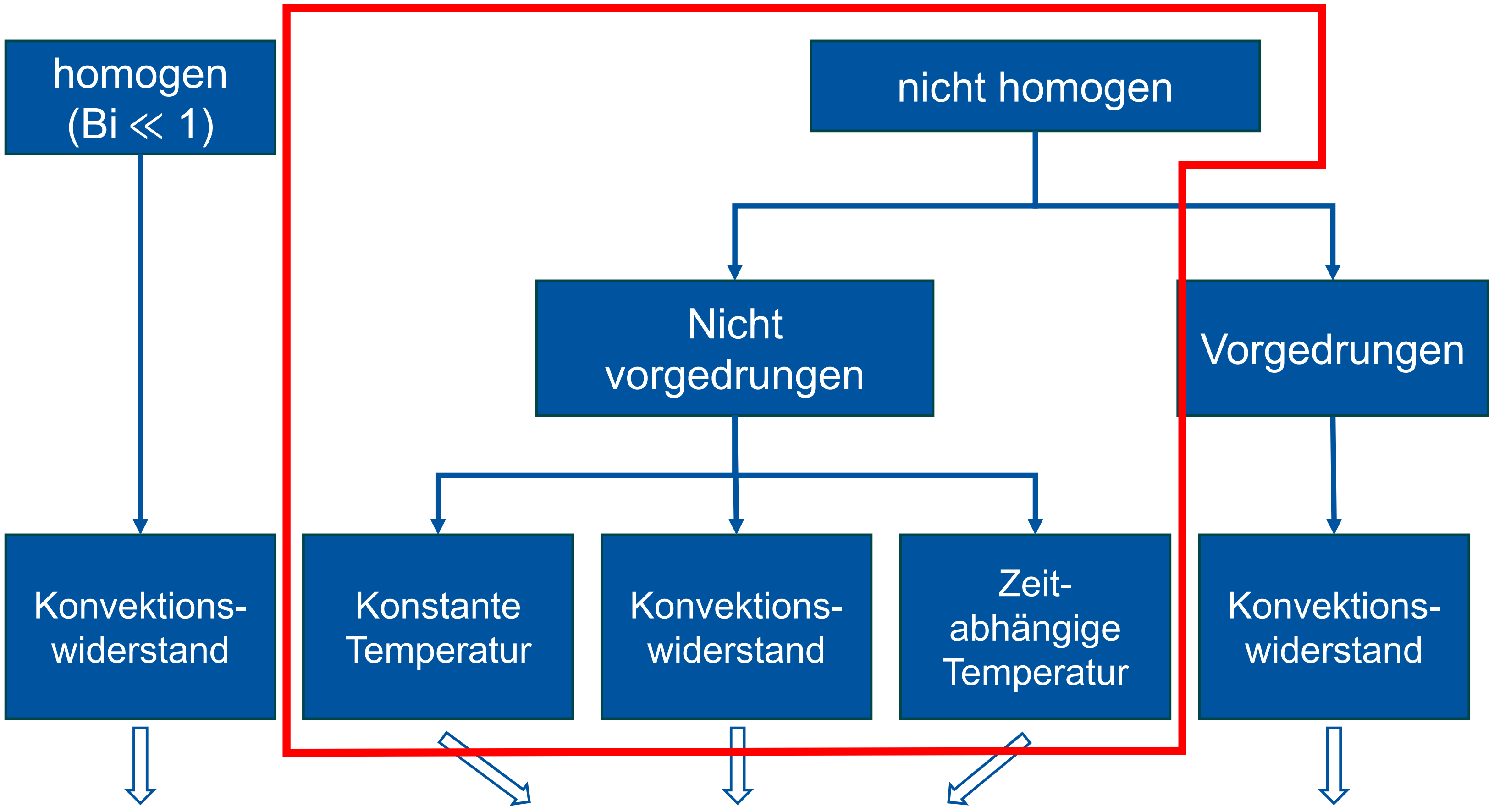
Umgebung T_U

Ergebnis

$$\Theta^* = 1 - e^{-[Bi \cdot Fo]}$$



Wie lässt sich das Problem vereinfachen?



Temperatur eines Körpers:

- homogen ($Bi \ll 1$)
- nicht homogen

Temperature innerhalb den Körper:

- Nicht vorgedrungen
- Vorgedrungen

Randbedingung an der Oberfläche:

- Konvektionswiderstand
- Konstante Temperatur
- Konvektionswiderstand
- Zeitabhängige Temperatur
- Konvektionswiderstand

1) Rein zeitabhängige Lösung

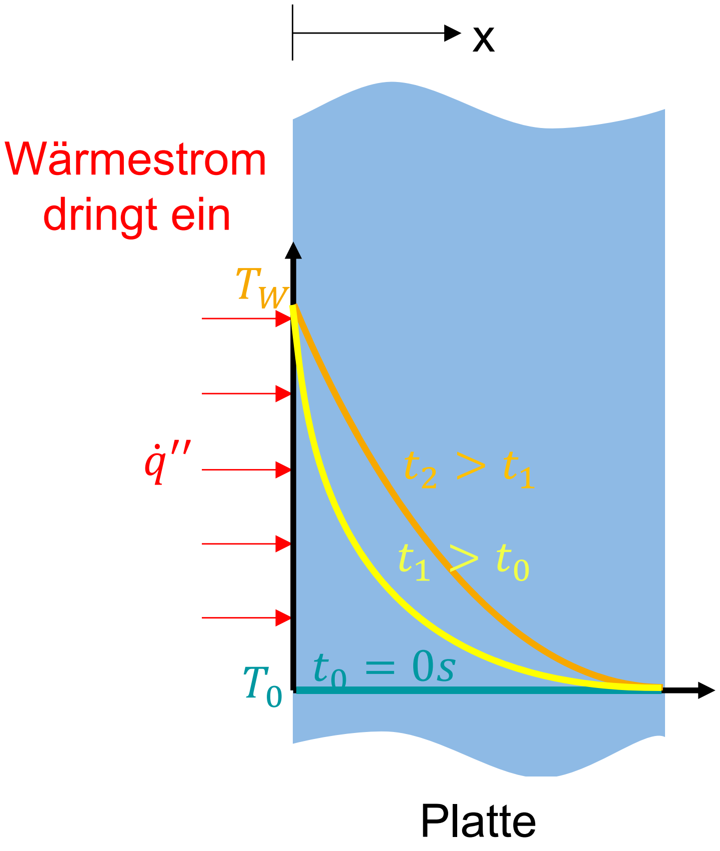
2) 1D-Betrachtung

3) Reale Körper mit Symmetrie

4) Grafische Lösungen

Halbunendliche Körper

Wo ändert sich die Temperatur zu Beginn des Experiments?
→ mathematisch gesehen überall!!



Solange sich die Temperatur „rechts“ nicht signifikant geändert hat, ist die Randbedingung auf der rechten Seite unerheblich

Definition: Halbunendlicher Körper

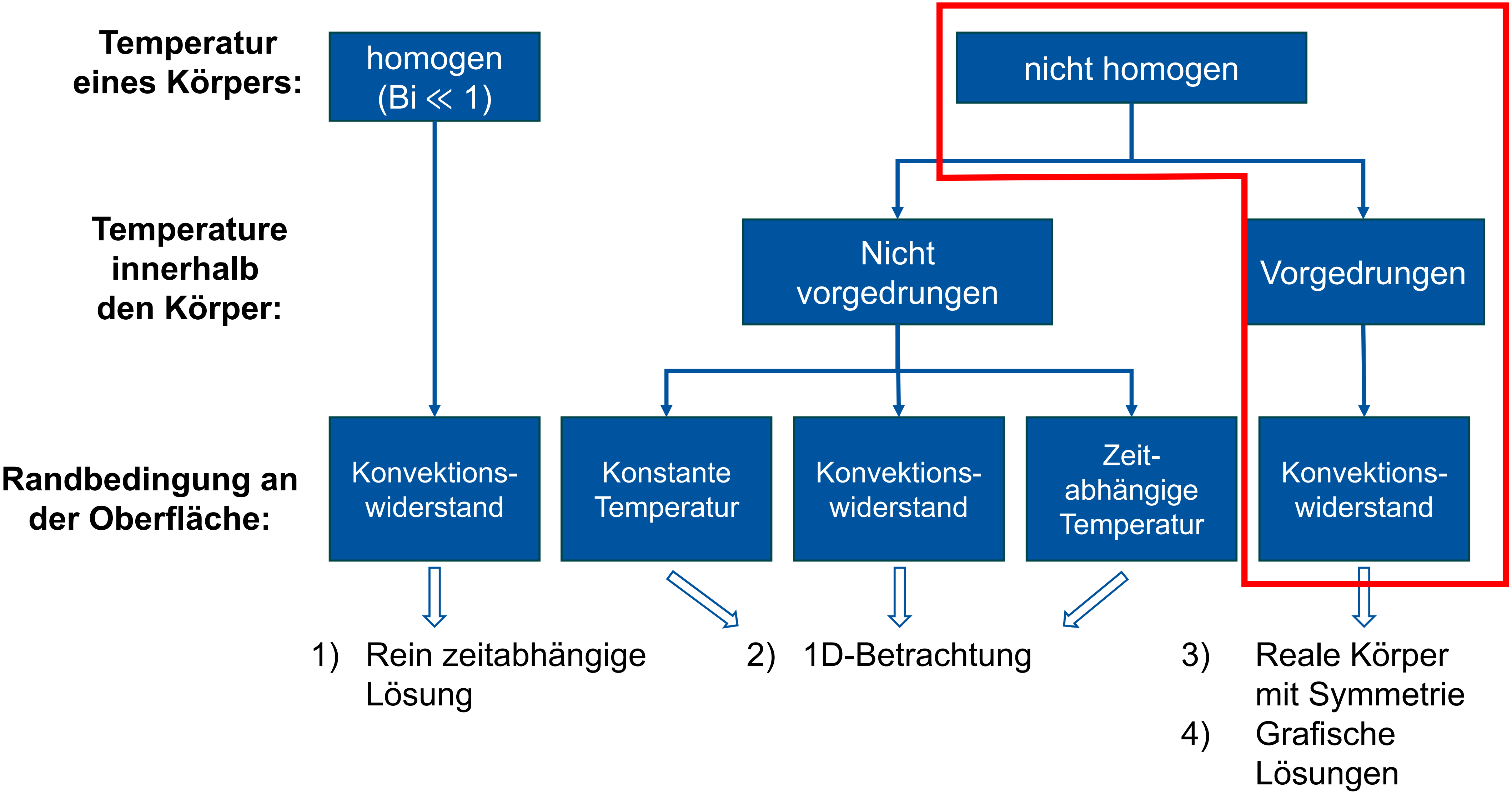
Objekt, bei dem eine Temperaturänderung, die auf der einen Seite aufgeprägt wird, noch nicht signifikant zur anderen Seite vorgedungen ist.

Differenzialgleichung in 1D

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ → analytische Lösung

(Video „Halbunendliche-Platte“)

Wie lässt sich das Problem vereinfachen?



Temperatur eines Körpers:

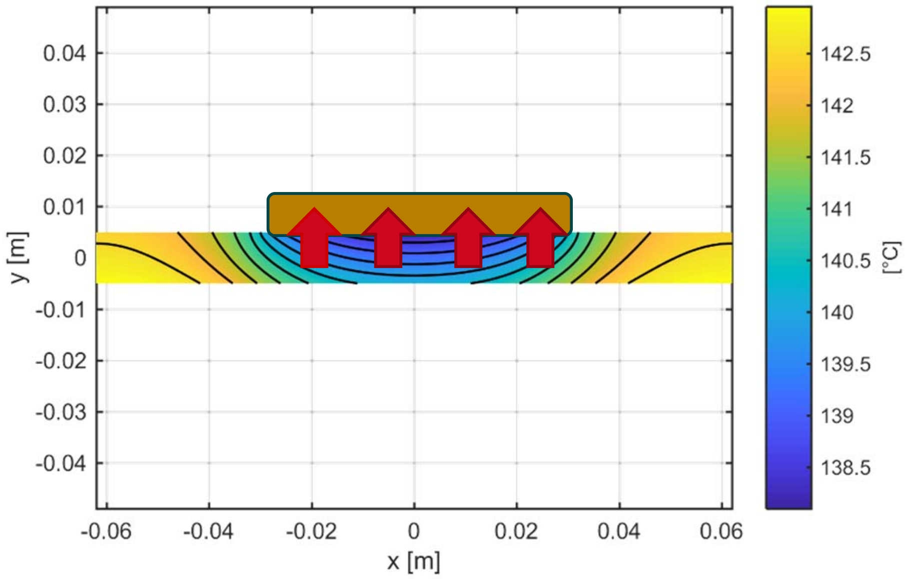
- homogen ($Bi \ll 1$)
  - **Randbedingung an der Oberfläche:** Konvektionswiderstand ⇩ 1) Rein zeitabhängige Lösung
- nicht homogen
  - **Temperature innerhalb den Körper:** Nicht vorgedrungen
    - Konstante Temperatur ⇨ 2) 1D-Betrachtung
    - Konvektionswiderstand ⇩ 2) 1D-Betrachtung
    - Zeitabhängige Temperatur ⇨ 2) 1D-Betrachtung
  - Vorgedrungen
    - Konvektionswiderstand ⇩ 3) Reale Körper mit Symmetrie; 4) Grafische Lösungen

Sonstiges

Vorgefertigte Lösungen: Heisler Diagramm in dimensionsloser Form
(im Video „Dimensionslose Kennzahlen und Heisler Diagramme“)

Lässt sich das Problem nicht vereinfachen, so sind numerische Verfahren das Mittel der Wahl.

Aufheizen einer Pfanne mit Bratgut



Verständnisfragen

Unter welcher Voraussetzung ist die Temperatur innerhalb eines Körpers als homogen anzunehmen? Welche dimensionslose Kennzahl kann hierfür herangezogen werden?

Was beschreibt die Fourier-Zahl?