Wärme- und Stoffübertragung I

Grenzschichtgleichungen
– Natürliche Konvektion

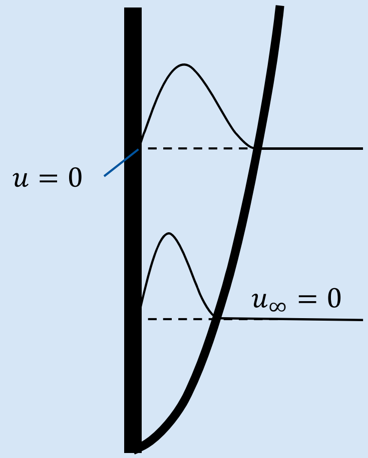
Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

Lehrstuhl
für Wärme-
und Stoff-
übertragung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lernziele

- Grenzschicht bei der natürlichen Konvektion
  - ➢ Verständnis des Grenzschichtprofils (Temperatur und Geschwindigkeit) an einer ebenen Platte mit freier Konvektion
  - ➢ Herleitung und Bedeutung der Grashof-Zahl
  - ➢ Kenntnis der Unterschiede zwischen den Grenzschichtprofilen bei erzwungener und freier Konvektion



(Note: „natürliche“ oder „freie“ Konvektion, beiden Begriffe sind identisch und können äquivalent verwendet werden.)

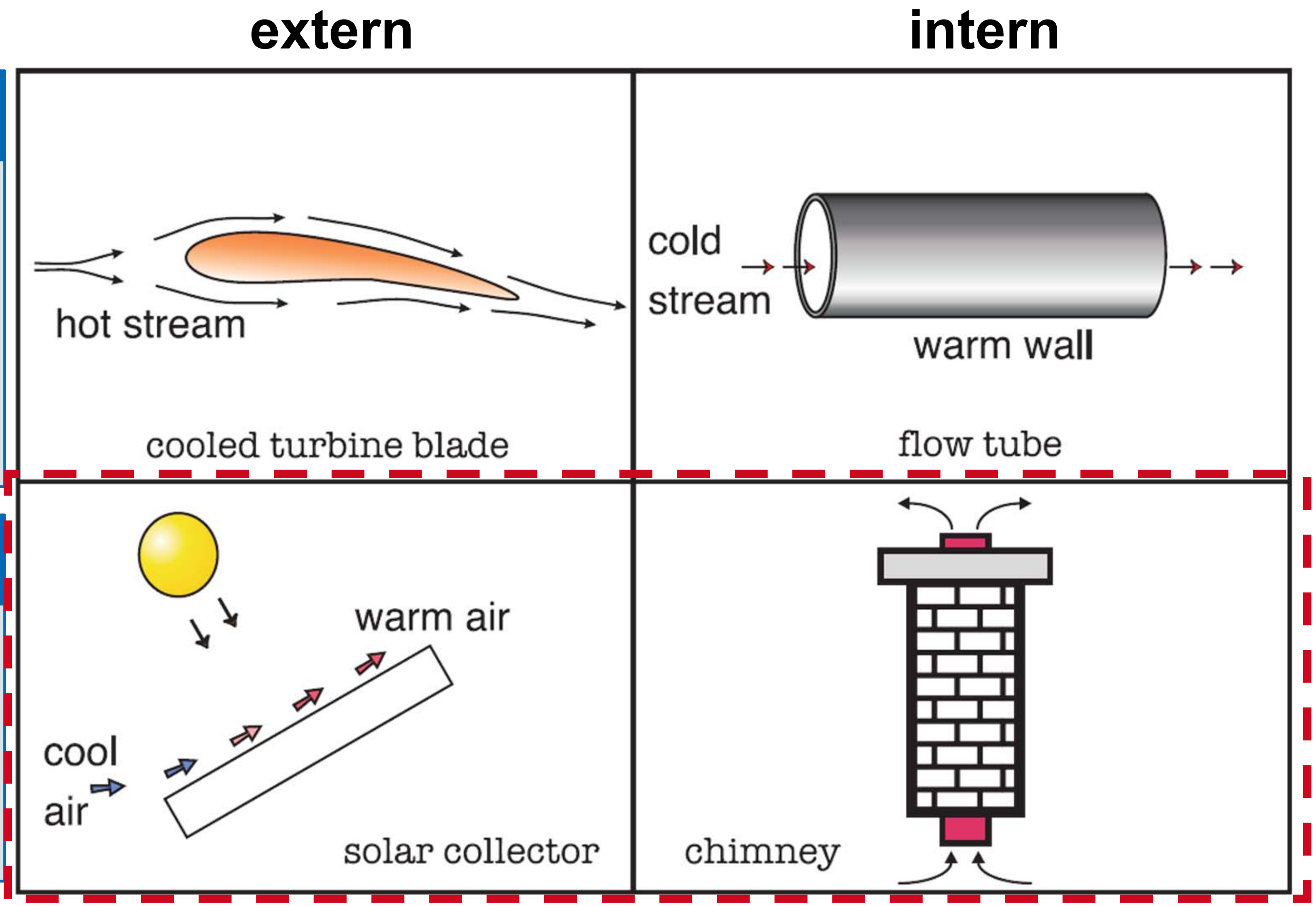
Klassifikationen nach Strömungsbedingung

Erzwungene Konvektion

- Antrieb durch von außen erzeugte Bewegung des Fluides/Objekts

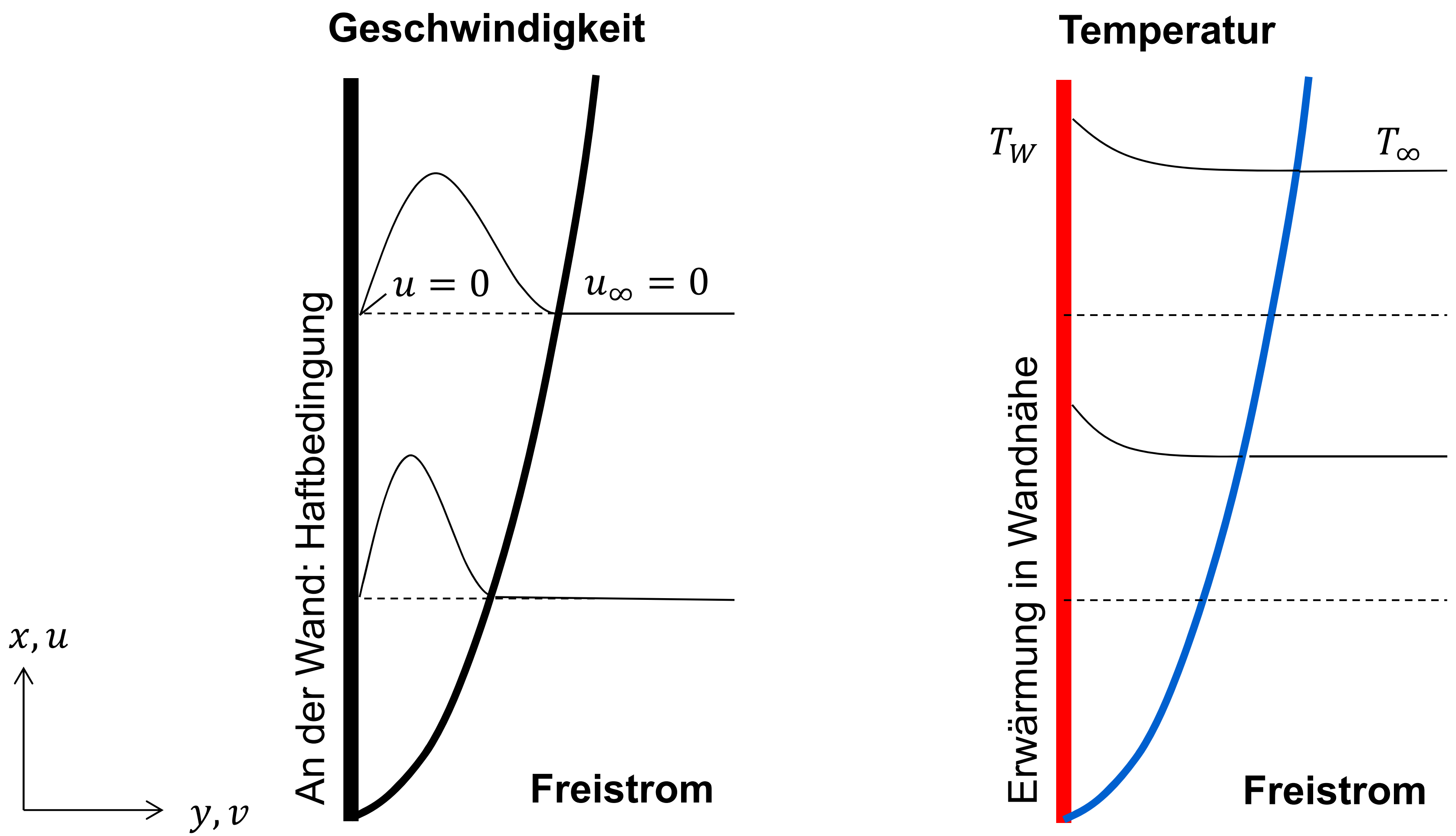
Freie Konvektion

- Inhärenter Antrieb aufgrund der Wärmeübertragung (Dichteunterschiede)



Freie Konvektion

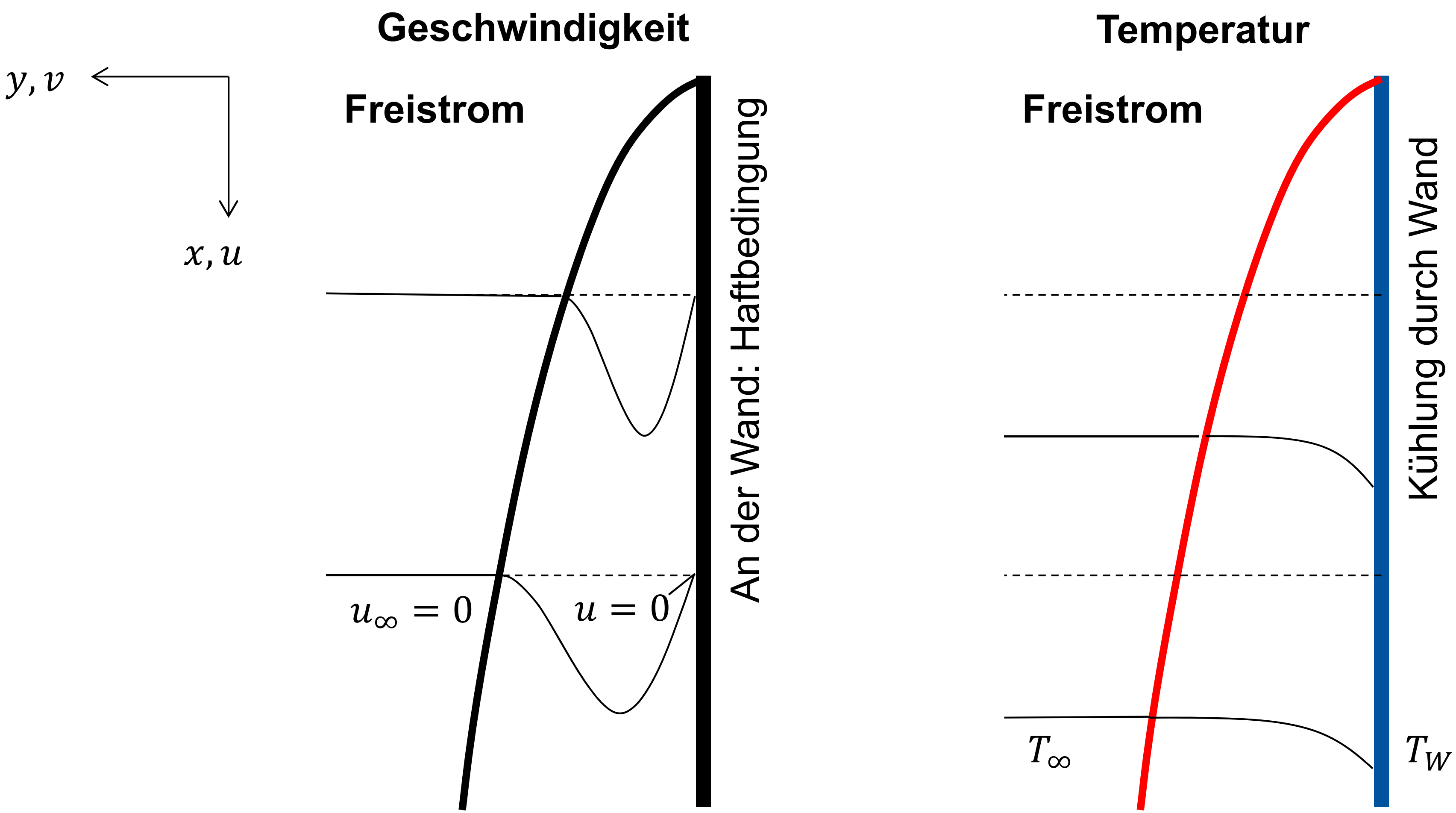
Freie Konvektion: Grenzschichten



Erwärmung in Wandnähe führt zu Dichteabnahme

Natürliche Konvektion = Auftriebsströmung

Freie Konvektion: Ausgangssituation



Abkühlung in Wandnähe führt zu Dichtezunahme

Natürliche Konvektion = Absinkströmung

Rückblick: Erhaltungsgleichungen (2D, stationär, inkompressibel)

Kontinuitätsgleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \gg v \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

Impulsgleichung

Impulsströme | Druck | Scherspannungen | Schwerkraft

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{g}{\rho}(\rho_\infty - \rho)$$

$$\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}$$

vernachlässigbar

Energiegleichung

Enthalpieströme | Wärmeleitung

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}\left(\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Erhaltungsgleichungen (2D, stationär, inkompressibel)

Volumetrischer Ausdehnungskoeffizient

$$\beta \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)}$$

Kontinuitätsgleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impulsgleichung

Impulsströme | Druck | Scherspannungen | Schwerkraft

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \beta g(T - T_\infty)$$

$$\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}$$

vernachlässigbar

Energiegleichung

Enthalpieströme | Wärmeleitung

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}\left(\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Volumetrischer Ausdehnungskoeffizient eines idealen Gases

$$p \cdot V = nRT$$

- n Stoffmenge
- $R = 8{,}314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}}$ Universelle Gaskonstante

$$\underbrace{\qquad\qquad}$$

$$\frac{V}{T} = \frac{nR}{p} = konst. \rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{V}{T}$$

Volumetrischer Ausdehnungskoeffizient

$$\beta \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)}$$

Für ideale Gase

$$\beta = \frac{1}{T} \approx \frac{1}{T_\infty}$$

Erhaltungsgleichungen (2D, stationär, inkompressibel, ebener Grenzschicht)

Kontinuitätsgleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L},\ y^* = \frac{y}{L},\ u^* = \frac{u}{u_\infty},\ v^* = \frac{v}{u_\infty},\ \Theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}$$

Impulsgleichung

Impulsströme | Scherspannungen | Schwerkraft

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \underbrace{\frac{\beta g L (T_W - T_\infty)}{{u_\infty}^2}}_{\frac{\beta g \rho^2 (T_W - T_\infty) L^3}{\eta^2} \cdot \left(\frac{\eta}{\rho u_\infty L}\right)^2} \Theta^*$$

$$\Rightarrow Gr \cdot \left(\frac{1}{Re}\right)^2$$

Energiegleichung

Enthalpieströme | Wärmeleitung

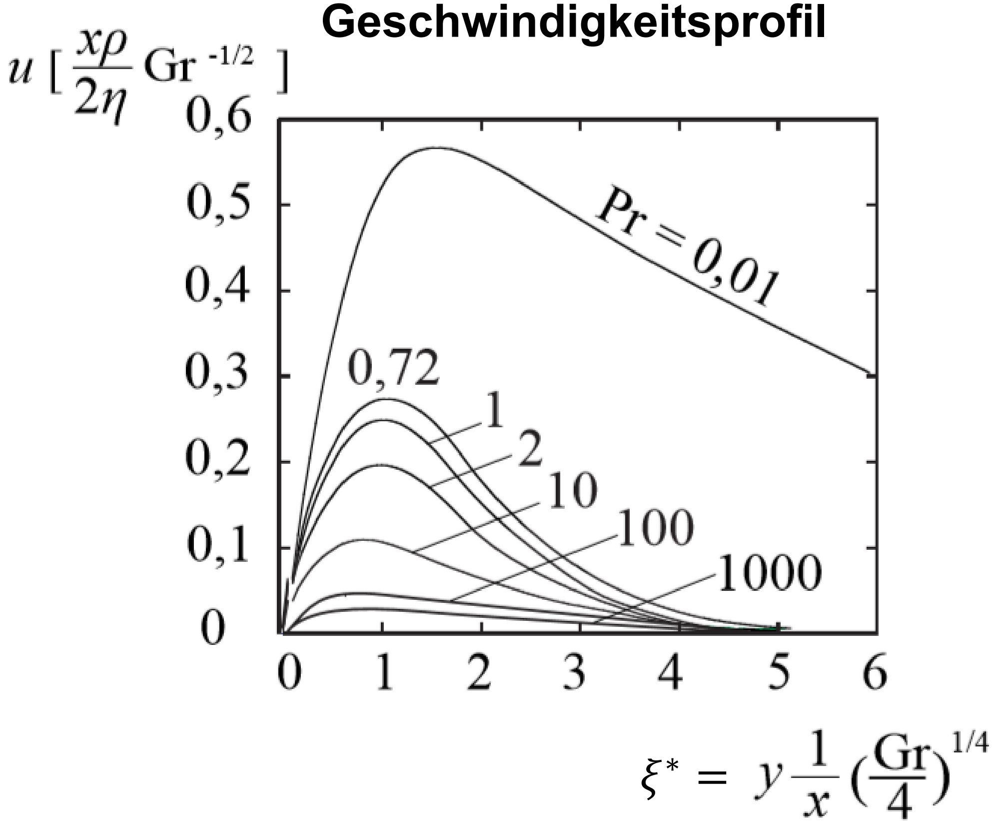
$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\underbrace{RePr}_{Pe}} \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial y^{*2}}$$

Grashof-Zahl

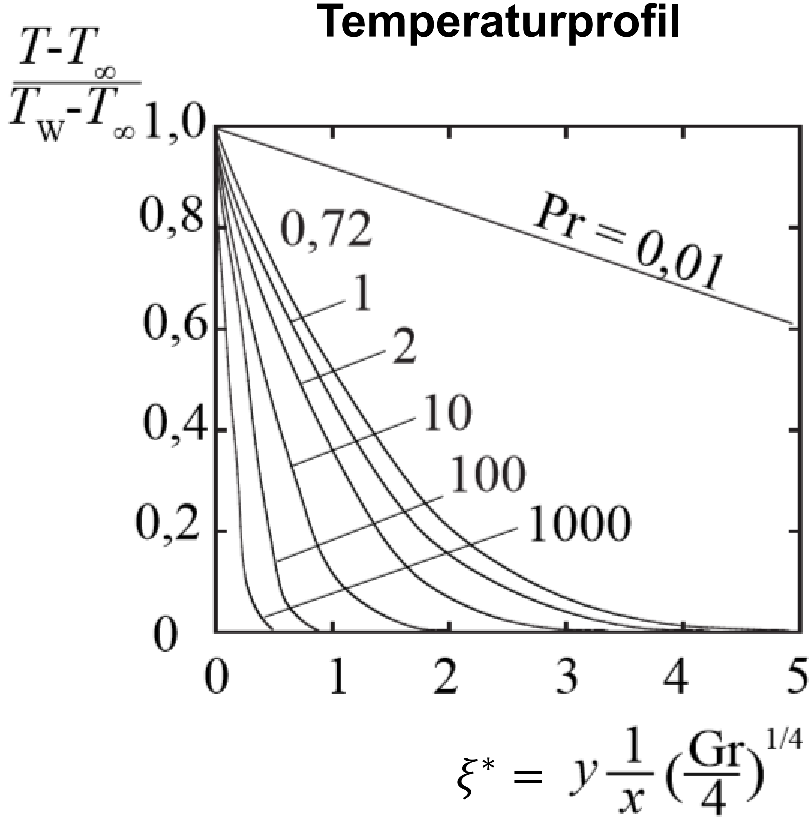
$$Gr \equiv \frac{\beta g \rho^2 (T_W - T_\infty) L^3}{\eta^2} = \frac{\text{Auftriebskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}}$$

Exakte Lösungen

Geschwindigkeitsprofil



Temperaturprofil



Dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient

$$Nu = \frac{\alpha x}{\lambda} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} \right) \frac{x}{\lambda} = \left(\frac{Gr}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\partial \Theta^*}{\partial \xi^*}\bigg|_{\xi^*=0} = Nu(Gr, Pr)$$

Vergleich zwischen erzwungener und freier Konvektion

Konvektion	erzwungene (laminar $Re_x < 2 \cdot 10^5$ isotherm $0{,}6 < Pr < 10$)	freie (laminar, isotherm $GrPr < 4 \cdot 10^9$)
Abhängigkeit	$Nu(Re, Pr)$	$Nu(Gr, Pr)$
lokal	$Nu = 0{,}332 Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$	$Nu = 0{,}508 \left(\frac{Pr}{0{,}952 + Pr}\right)^{\frac{1}{4}} (Gr_x Pr)^{\frac{1}{4}}$
gemittelt	$\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda} = \int_0^L \frac{Nu}{x} dx = 0{,}664 Re_L^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$	$\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda} = \int_0^L \frac{Nu}{x} dx = \underbrace{0{,}677 \left(\frac{Pr}{0{,}952 + Pr}\right)^{\frac{1}{4}}}_{C} (Gr_L Pr)^{\frac{1}{4}}$

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Verständnisfragen

Welches ist das treibende Potential der natürlichen Konvektion?

Warum sind Auftriebskräfte bei erzwungener Konvektion vernachlässigbar?