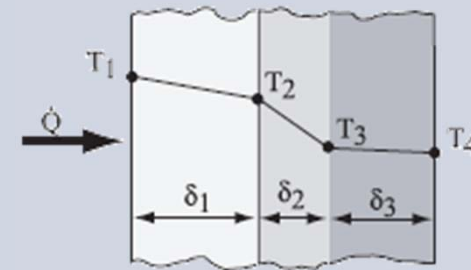

Wärme- und Stoffübertragung I

Wärmeleitung in einer mehrschichtigen ebenen Wand

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlf

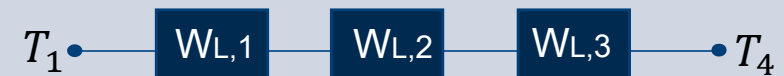
- Temperaturprofil mehrschichtige Wand

- Betrachtung eines beispielhaften Temperaturprofils einer mehrschichtigen Wand unter stationären Bedingungen

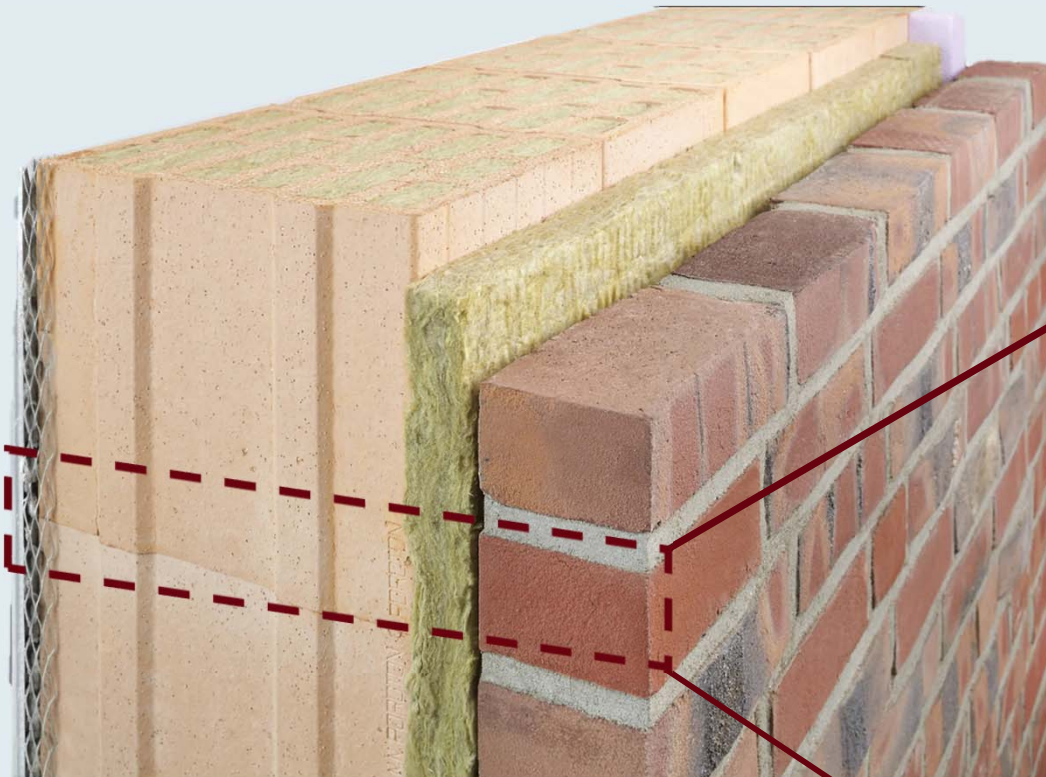


- Thermische Widerstände in mehrschichtiger Wand

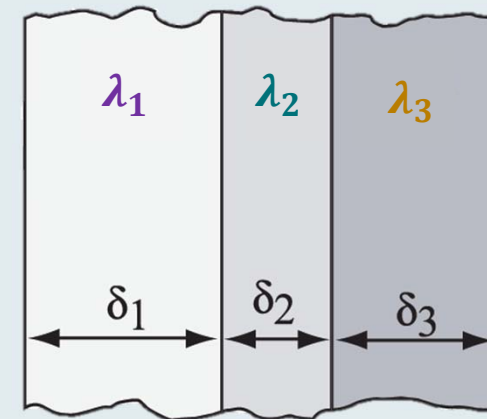
- Zusammenfassen der in Reihe geschalteten thermischen Widerstände zur Definition des Gesamtwiderstands



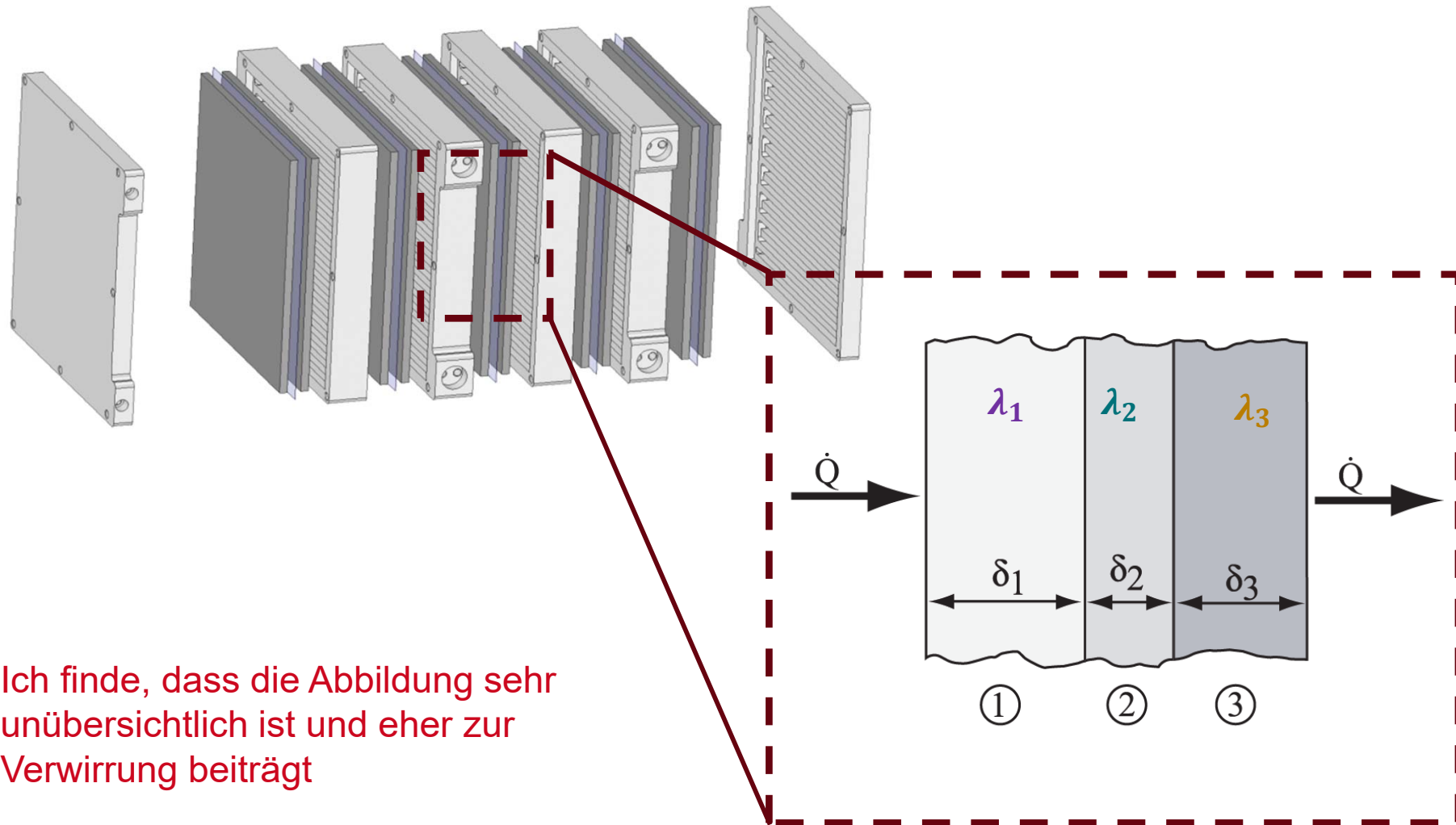
Mehrschichtige Wand – Beispiel: Außenwand



<https://www.baunetzwissen.de>



Mehrschichtige Wand – Beispiel: Battery stack



Ich finde, dass die Abbildung sehr unübersichtlich ist und eher zur Verwirrung beiträgt

<https://www.crtech.com/applications/flow-battery>

Temperaturprofil in einer mehrschichtigen Wand

Bedingungen:

- Stationär
- Eindimensionaler Wärmetransport
- Konstante Materialeigenschaften
- Konstante Querschnittsfläche

Weshalb treten Unstetigkeiten auf?

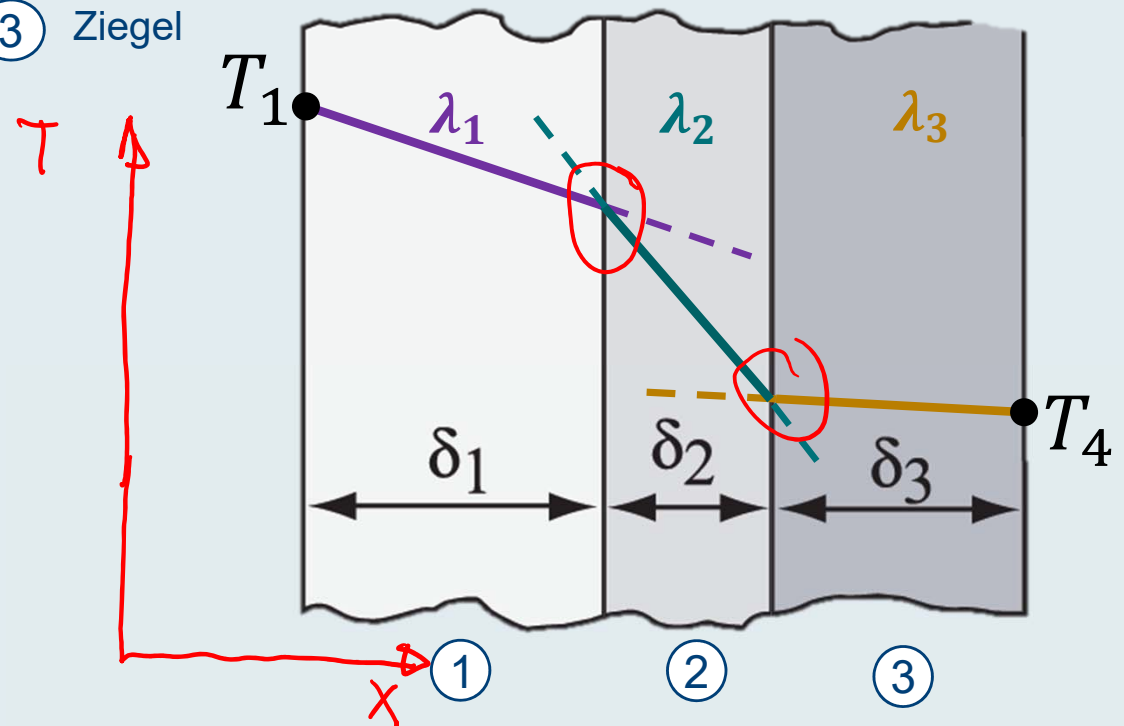
$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}$$

Konstant

Beispiel:

- ① Kalksandstein
- ② Isolierung
- ③ Ziegel

$$\lambda_1 > \lambda_2, \lambda_3 \gg \lambda_1, \lambda_2$$



Temperaturprofil in einer mehrschichtigen Wand

Bedingungen:

- Stationär
- Eindimensionaler Wärmetransport
- Konstante Materialeigenschaften
- Konstante Querschnittsfläche

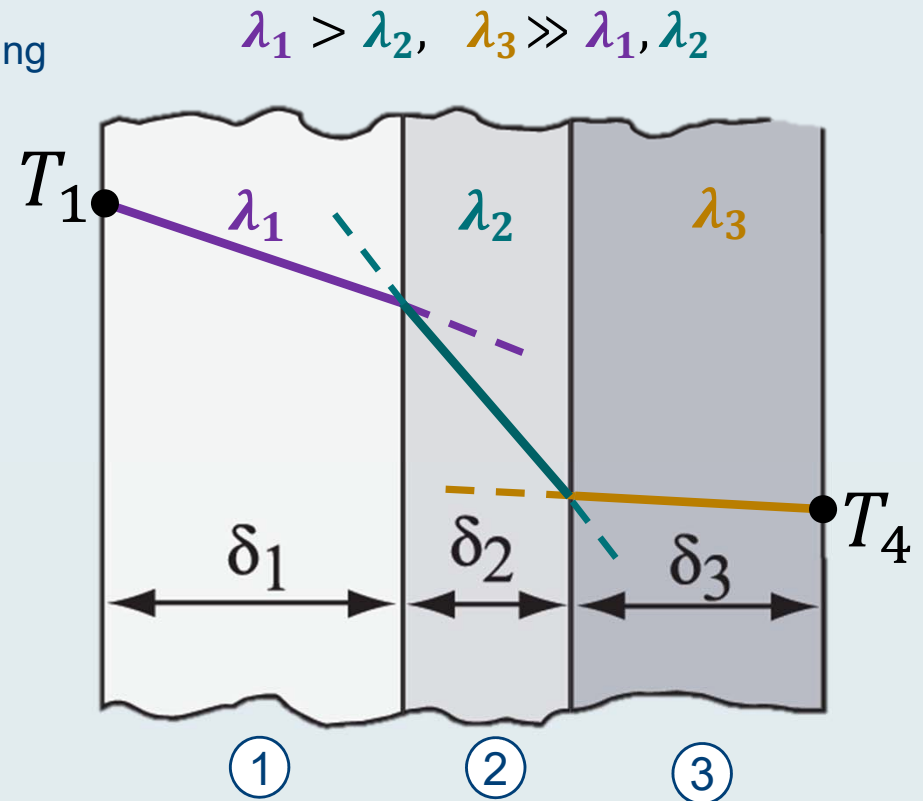
Weshalb treten Unstetigkeiten auf?

$$\lambda \uparrow \longrightarrow \frac{dT}{dx} \downarrow$$

$$\lambda \downarrow \longrightarrow \frac{dT}{dx} \uparrow$$

Beispiel:

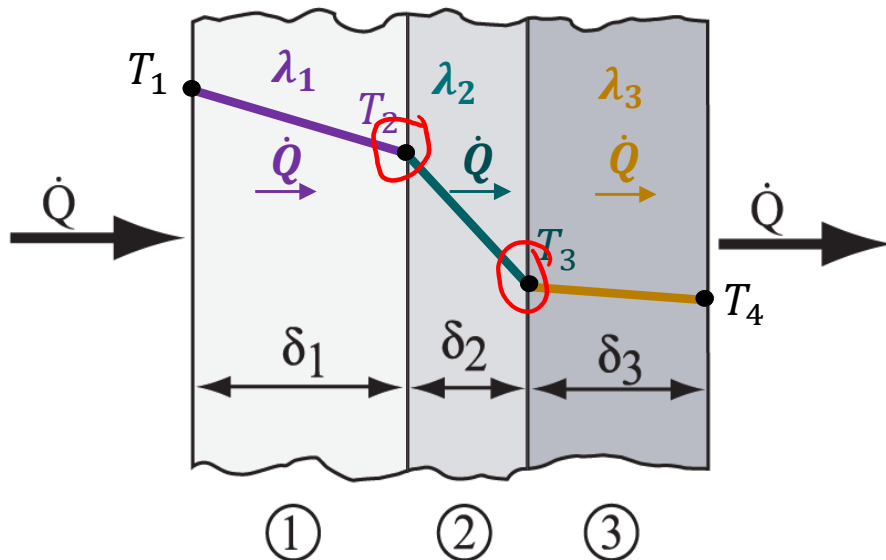
- ① Kalksandstein
- ② Isolierung
- ③ Ziegel



Wärmestrom in mehrschichtiger Wand

Fragestellung:

Wie kann der Wärmestrom bestimmt werden, wenn nur die Temperaturen T_1 und T_4 bekannt sind?



1. Wärmestrom Schicht 1:

$$\dot{Q} = \lambda_1 \cdot \frac{A}{\delta_1} (T_1 - T_2)$$

2. Wärmestrom Schicht 2:

$$\dot{Q} = \lambda_2 \cdot \frac{A}{\delta_2} (T_2 - T_3)$$

3. Wärmestrom Schicht 3:

$$\dot{Q} = \lambda_3 \cdot \frac{A}{\delta_3} (T_3 - \underline{T_4})$$

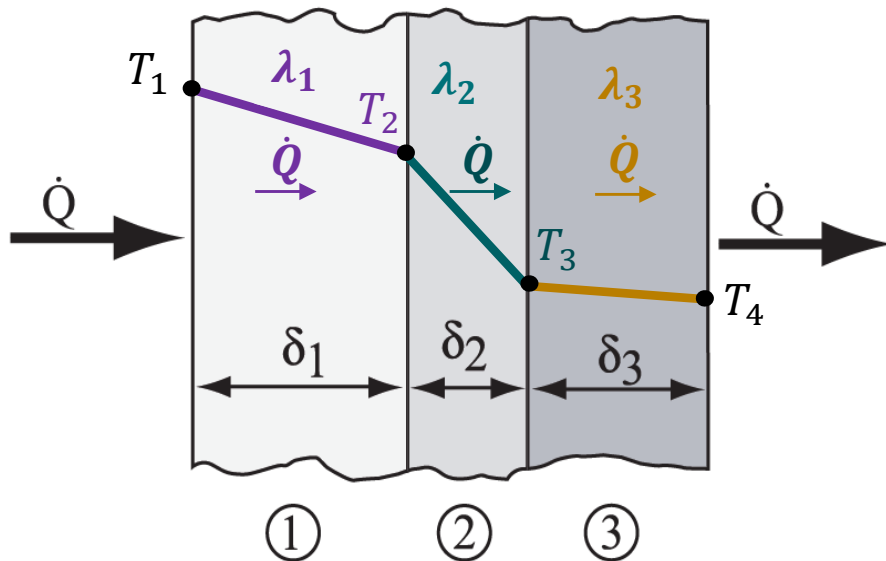
Im stationären Zustand ohne Quellen und Senken gilt:

$$\dot{Q} = \dot{Q} = \dot{Q}$$

Wärmestrom in mehrschichtiger Wand

Fragestellung:

Wie kann der Wärmestrom bestimmt werden, wenn nur die Temperaturen T_1 und T_4 bekannt sind?



Umstellen von Gleichung [2.] und [3.] nach den unbekannten Temperaturen T_2 und T_3

Aus Gleichung [2.] :

$$T_2 = \frac{\dot{Q}}{\lambda_2 \cdot \frac{A}{\delta_2}} + T_3$$

Aus Gleichung [3.] :

$$T_3 = \frac{\dot{Q}}{\lambda_3 \cdot \frac{A}{\delta_3}} + T_4$$

Zum Eliminieren von T_3 , Einsetzen von [3.] in [2.]

$$[4.] \quad T_2 = \frac{\dot{Q}}{\lambda_2 \cdot \frac{A}{\delta_2}} + \frac{\dot{Q}}{\lambda_3 \cdot \frac{A}{\delta_3}} + T_4$$

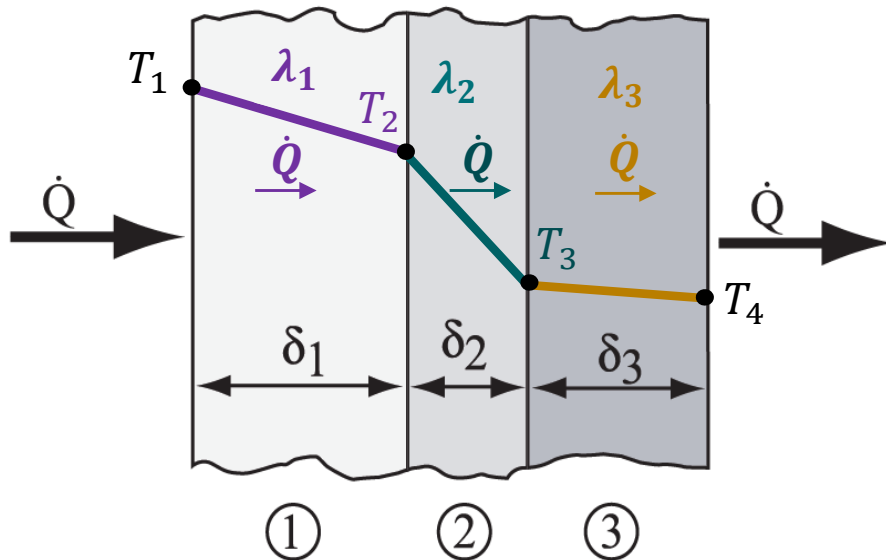
Zum Eliminieren von T_2 , Einsetzen von [4.] in [1.]

$$[5.] \quad \dot{Q} = \lambda_1 \cdot \frac{A}{\delta_1} \left[\underline{T_1} - \frac{\dot{Q}}{\lambda_2 \frac{A}{\delta_2}} - \frac{\dot{Q}}{\lambda_3 \frac{A}{\delta_3}} - \underline{T_4} \right]$$

Wärmestrom in mehrschichtiger Wand

Fragestellung:

Wie kann der Wärmestrom bestimmt werden, wenn nur die Temperaturen T_1 und T_4 bekannte Größen sind?



Umstellen von Gleichung [2.] und [3.] nach den unbekannten Temperaturen T_2 und T_3

[5.]

ausklammern

$$\dot{Q} = \lambda_1 \cdot \frac{A}{\delta_1} \left[T_1 - \frac{\dot{Q}}{\lambda_2 \frac{A}{\delta_2}} - \frac{\dot{Q}}{\lambda_3 \frac{A}{\delta_3}} - T_4 \right]$$

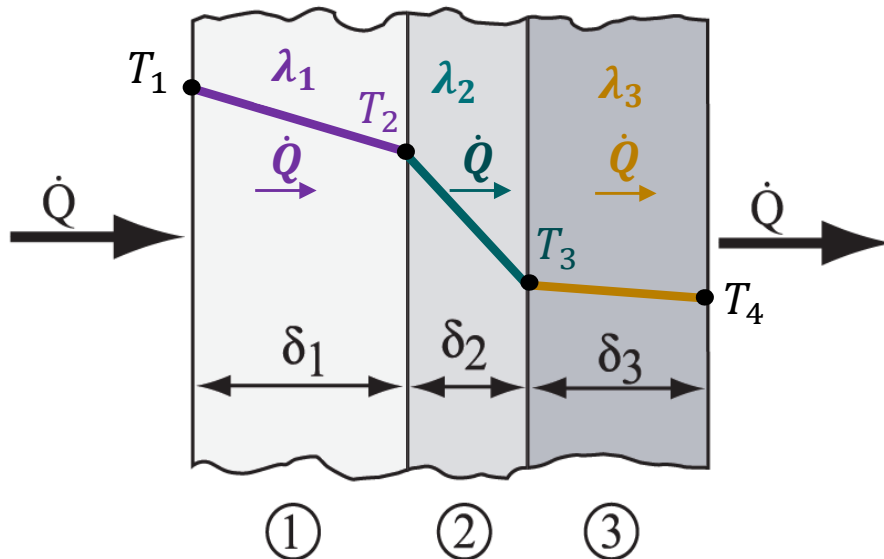
$$\dot{Q} \left[\frac{1}{\lambda_1 \cdot \frac{A}{\delta_1}} + \frac{1}{\lambda_2 \frac{A}{\delta_2}} + \frac{1}{\lambda_3 \frac{A}{\delta_3}} \right] = [T_1 - T_4]$$

$$\dot{Q} = \frac{A}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} (T_1 - T_4)$$

Wärmestrom in mehrschichtiger Wand

Fragestellung:

Wie kann der Wärmestrom bestimmt werden, wenn nur die Temperaturen T_1 und T_4 bekannte Größen sind?



Umstellen von Gleichung [2.] und [3.] nach den unbekannten Temperaturen T_2 und T_3

[5.]

ausklammern

$$\dot{Q} = \lambda_1 \cdot \frac{A}{\delta_1} \left[T_1 - \frac{\dot{Q}}{\lambda_2 \frac{A}{\delta_2}} - \frac{\dot{Q}}{\lambda_3 \frac{A}{\delta_3}} - T_4 \right]$$

$$\dot{Q} \left[\frac{1}{\lambda_1 \cdot \frac{A}{\delta_1}} + \frac{1}{\lambda_2 \frac{A}{\delta_2}} + \frac{1}{\lambda_3 \frac{A}{\delta_3}} \right] = [T_1 - T_4]$$

$$\dot{Q} = \frac{A}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} (T_1 - T_4)$$

Strom

Potentialdifferenz

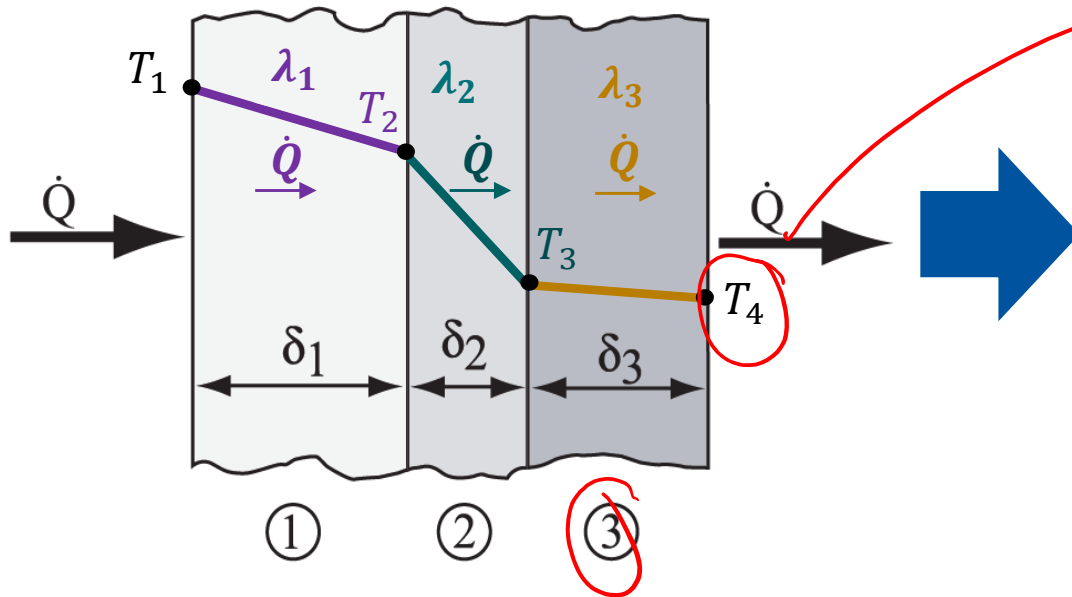
Kehrwert Widerstand

$$\text{Strom} = \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Widerstand}}$$

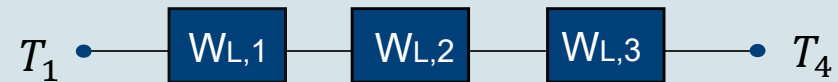
Definition thermische Widerstände

$$\text{Strom} = \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Widerstand}}$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{W_{L,ges}} (T_1 - T_{n+1})$$



Ersatzschaltbild Reihenschaltung der Wärmeleitwiderstände



$$\underline{W_{L,ges}} = \sum_{i=1}^n W_{Li} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\underline{A_i} \lambda_i}$$

Analogie zur Elektrotechnik

Wärmestrom kann in Analogie zum elektrischen Strom betrachtet werden!

$$\dot{Q} \equiv I$$

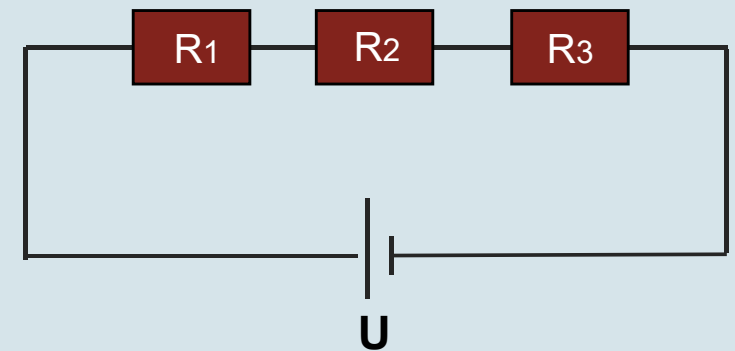
$$\dot{Q} = I = \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Widerstand}}$$

Elektrische Schaltung

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

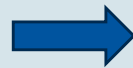


$$I = \frac{U}{R}$$

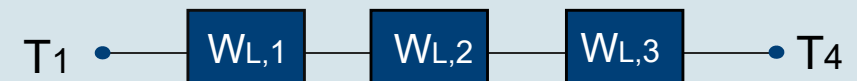
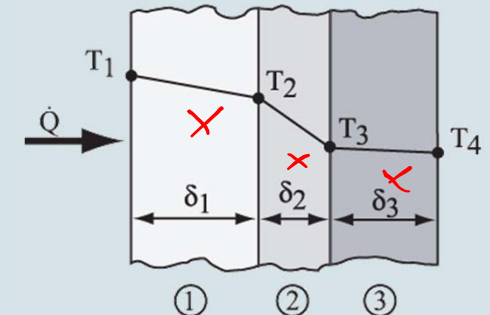


Mehrschichtige Wand

$$W_{L,ges} = \sum_{i=1}^n W_{Li} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{A_i \lambda_i}$$



$$\dot{Q} = \frac{1}{W_{L,ges}} (T_1 - T_{n+1})$$



Verständnisfragen

Was für ein Temperaturprofil stellt sich in einer ebenen Wand ohne Wärmequellen und –senken im stationären Zustand ein?

Unter welchen Voraussetzungen kann davon ausgegangen werden, dass der Wärmestrom in allen Schichten konstant bleibt?

Wie ist der thermische Widerstand einer ebenen Wand definiert? Wie kann der thermische Widerstand für eine Wand aus n Schichten berechnet werden.