

---

# Wärme- und Stoffübertragung I

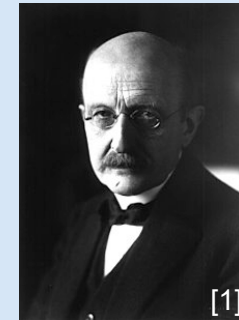
## Schwarzkörperstrahlung

Prof. Dr. -Ing. Reinhold Kneer  
Dr. -Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlf

# Lernziele

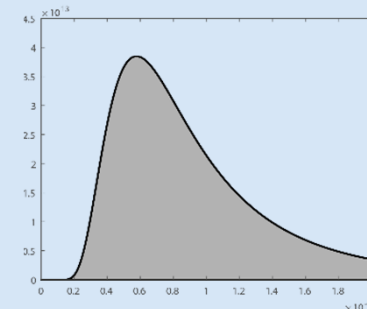
- Strahlungseigenschaften

- Verständnis des Welle-Teilchen Dualismus
- Schwarzer Körper:  
Beschreibung der spektralen Strahlungsintensität nach Planck



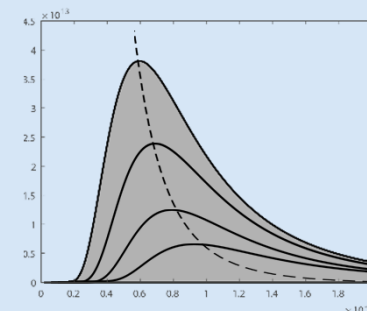
- Stefan-Boltzmann-Gesetz

- Lösungsansatz zur Integration des Planckschen Verteilungsgesetzes
- Nutzung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes



- Wien'sches Verschiebungsgesetz

- Verknüpfung von Temperatur und Lage des Maximums der spektralen Strahlungsintensität

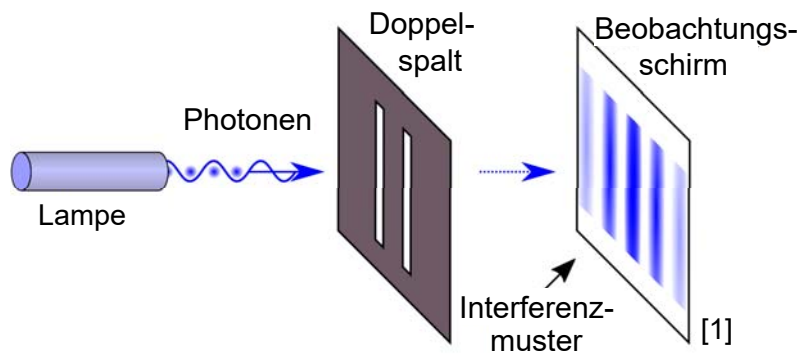


Quelle: [1] Max Planck

# Was ist Strahlung?

---

## Beschreibung von Strahlung (Welle-Teilchen-Dualismus)



[2]

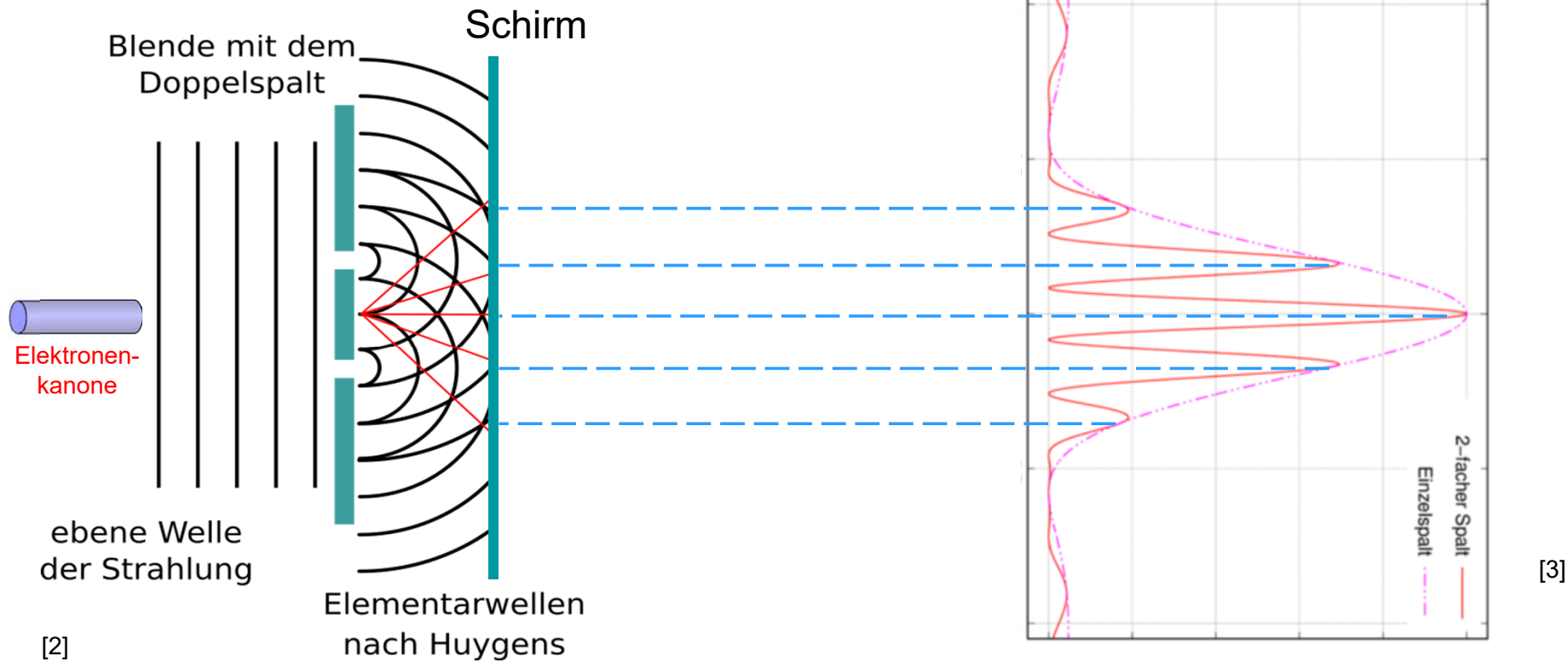
[1] An illustration of the 'Double-slit experiment' in physics. Johannes Kalliauer

[2] <http://mondbrand.de/Doppelspaltexperiment.htm>

[3] [wwwex.physik.uni-ulm.de](http://wwwex.physik.uni-ulm.de) / Interferenz- und Beugungsmuster

# Was ist Strahlung?

## Beschreibung von Strahlung (Welle-Teilchen-Dualismus)

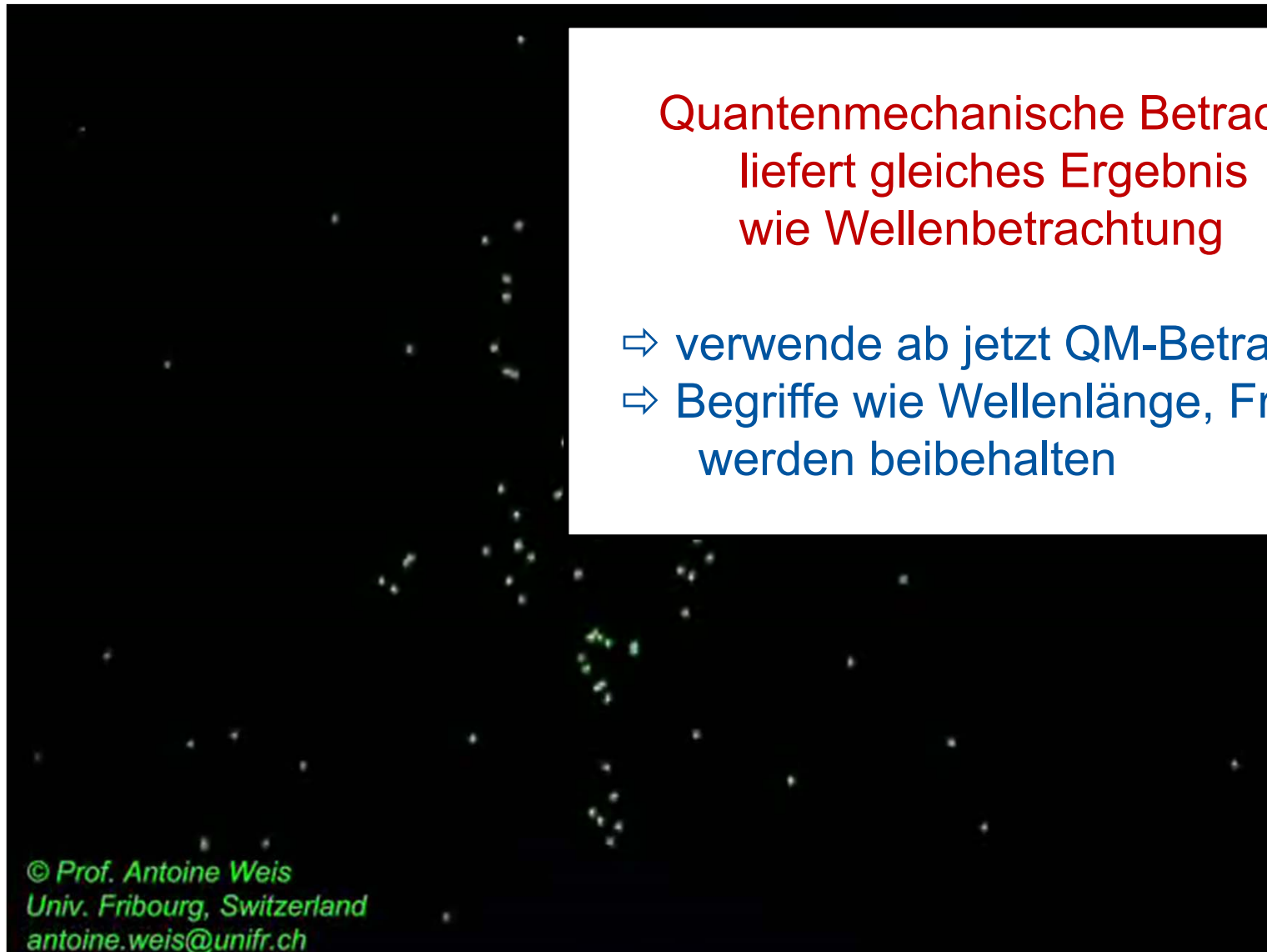


[1] An illustration of the 'Double-slit experiment' in physics. Johannes Kalliauer

[2] <http://mondbrand.de/Doppelspaltexperiment.htm>

[3] [wwwex.physik.uni-ulm.de](http://wwwex.physik.uni-ulm.de) / Interferenz- und Beugungsmuster

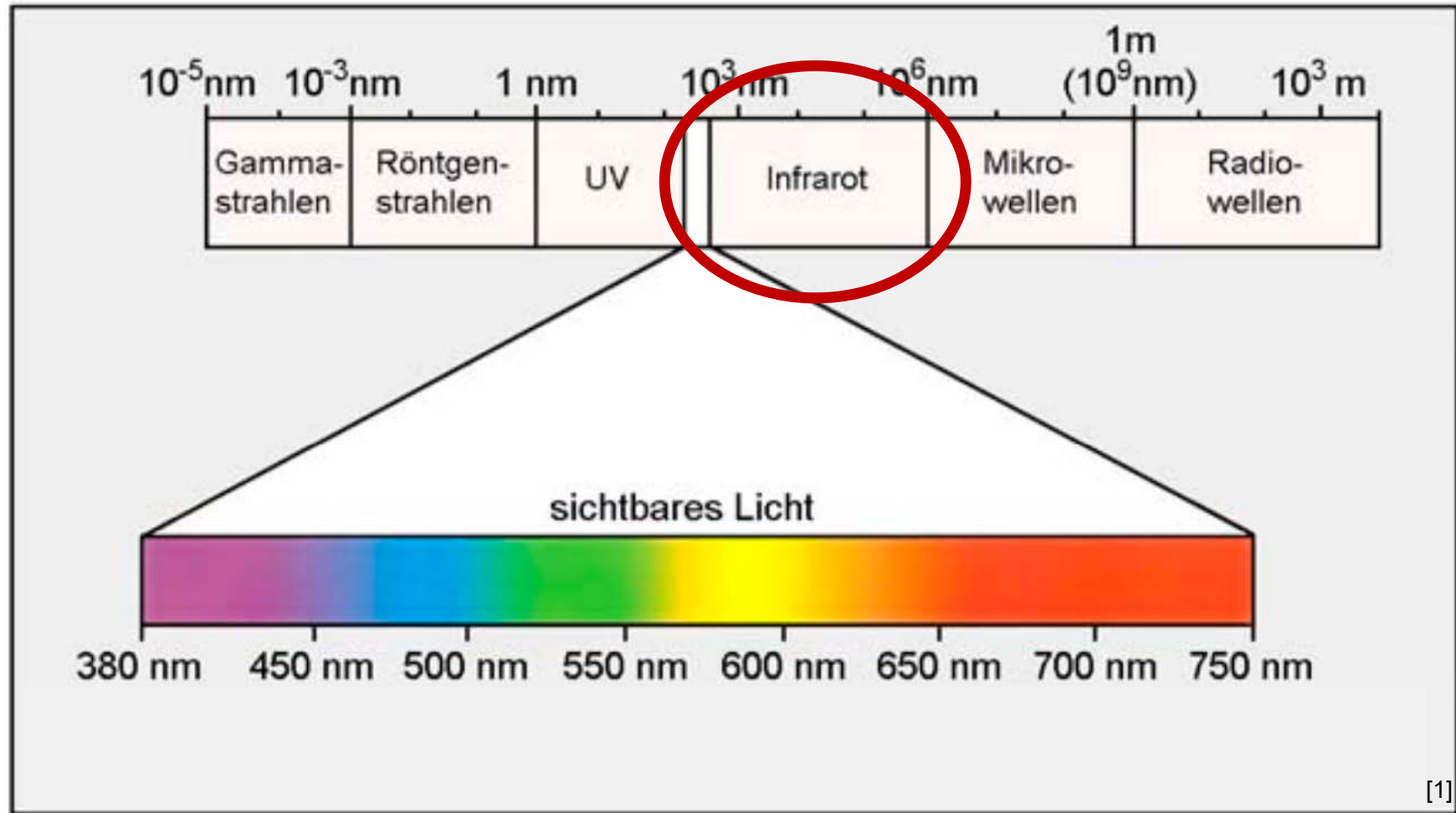
# Doppelspalt-Experiment



Quantenmechanische Betrachtung  
liefert gleiches Ergebnis  
wie Wellenbetrachtung

- ⇒ verwende ab jetzt QM-Betrachtung
- ⇒ Begriffe wie Wellenlänge, Frequenz werden beibehalten

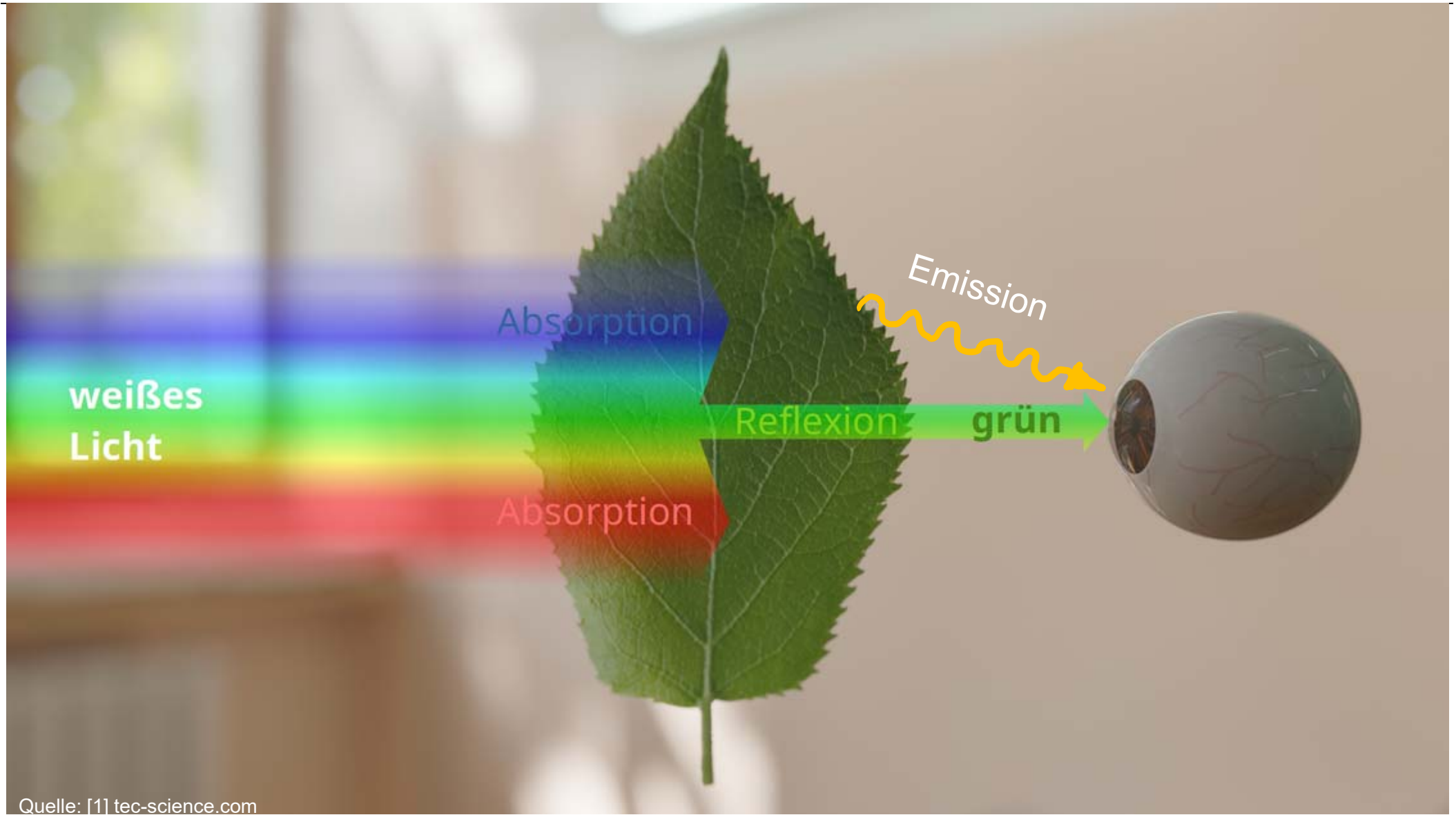
# Quantenmechanische Beschreibung der Strahlung



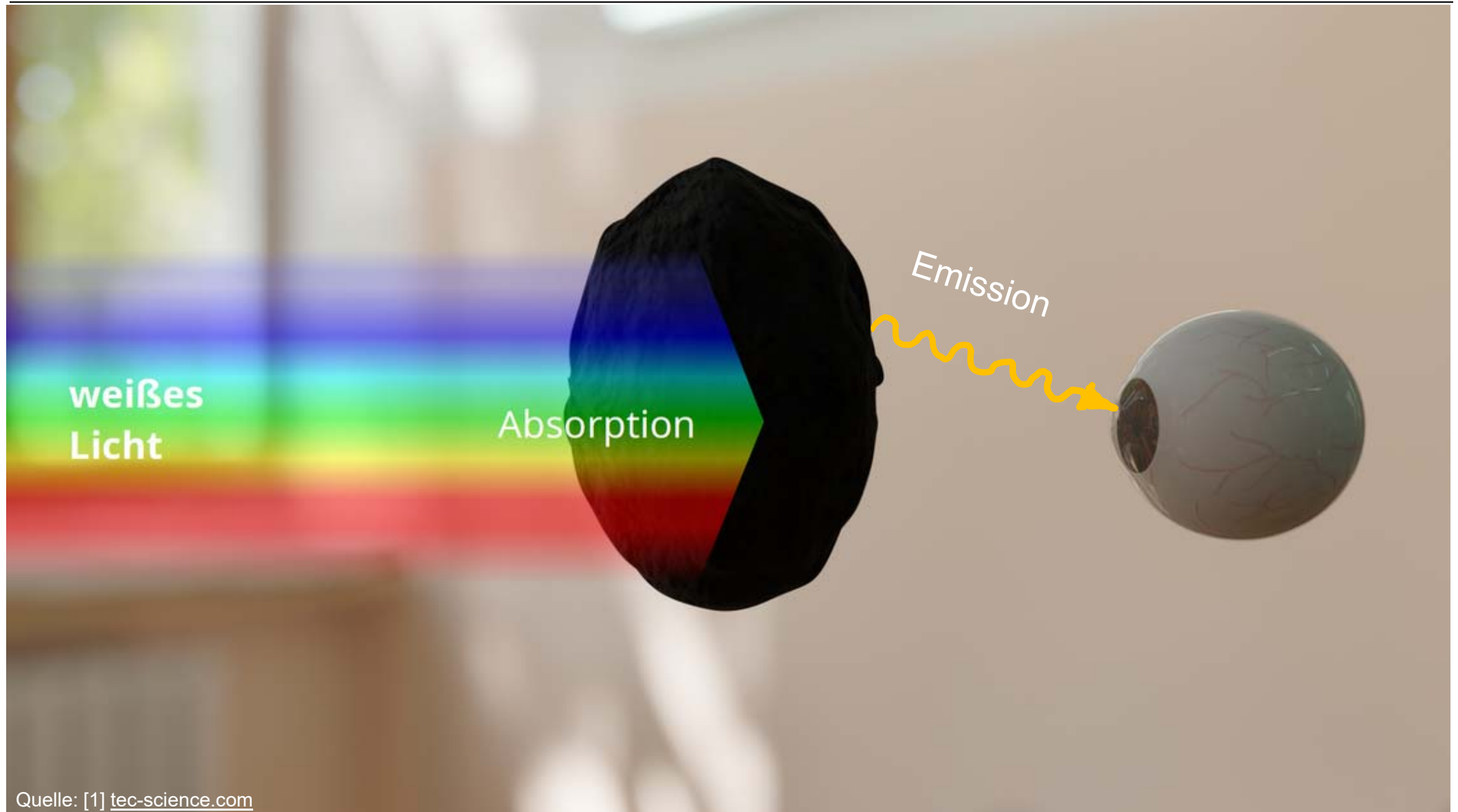
Zeichnung: © Karin Kiefer

Quelle: [1] Energie Wellenlänge

# Unsere Wahrnehmung von Objekten



## Spezielles Objekt: „schwarzer Körper“





# Plancksches Strahlungsgesetz

- Strahlung abhängig von der Temperatur des Körpers
  - Modellvorstellung „schwarze Körper“ (idealisierte thermische Strahlungsquelle):
    - **gesamte einfallende Strahlung wird absorbiert**
    - im ganzen Wellenlängenbereich wird emittiert
    - schwarzer Körper emittiert bei gegebener Temperatur maximal
- 
- Max Planck (aus Quantentheorie) => Verteilung der Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers als Funktion der Wellenlänge

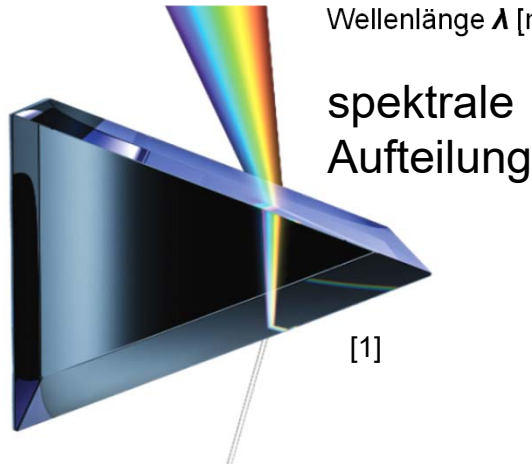
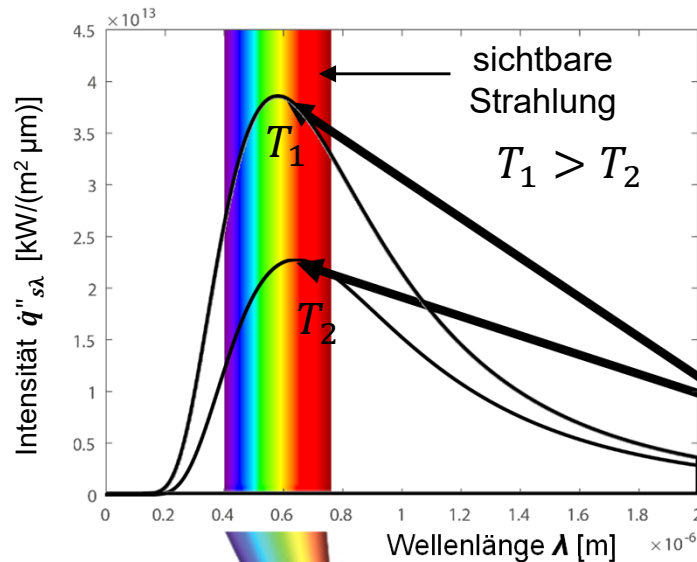
## Strahlungsgesetz nach Planck

$$\dot{q}''_{s\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp[c_2/(\lambda T)] - 1} \left[ \frac{W}{m^2 m} \right]$$

## Konstanten

$$c_1 = 3,741 \cdot 10^{-16} [Wm^2]$$
$$c_2 = 1,439 \cdot 10^{-2} [mK]$$

# Spektrale Intensitätsverteilung nach Planck



Quelle: [1] weisse-licht-scheint-durch-das-prisma

## Strahlungsgesetz nach Planck

$$\dot{q}''_{s\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp[c_2/(\lambda T)] - 1} \left[ \frac{W}{m^2 m} \right]$$

Zeitableitung (green arrow) → Flächenableitung (orange arrow)  
 Schwarzkörper (black arrow) → Wellenlängen-spezifisch (blue arrow)

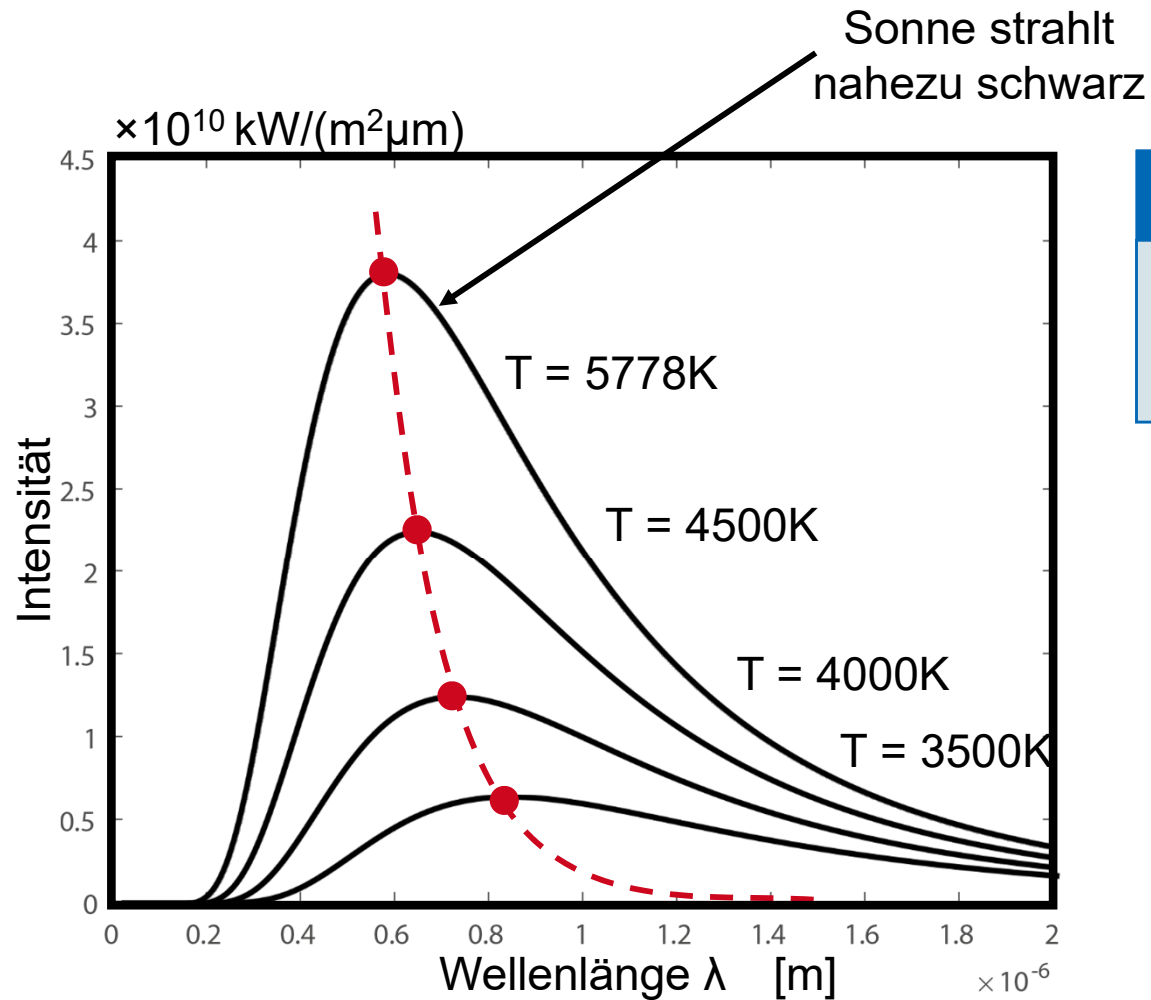


Quelle: [2] <http://www.steadfastfze.com>

# Temperaturfarben: Metallbearbeitung



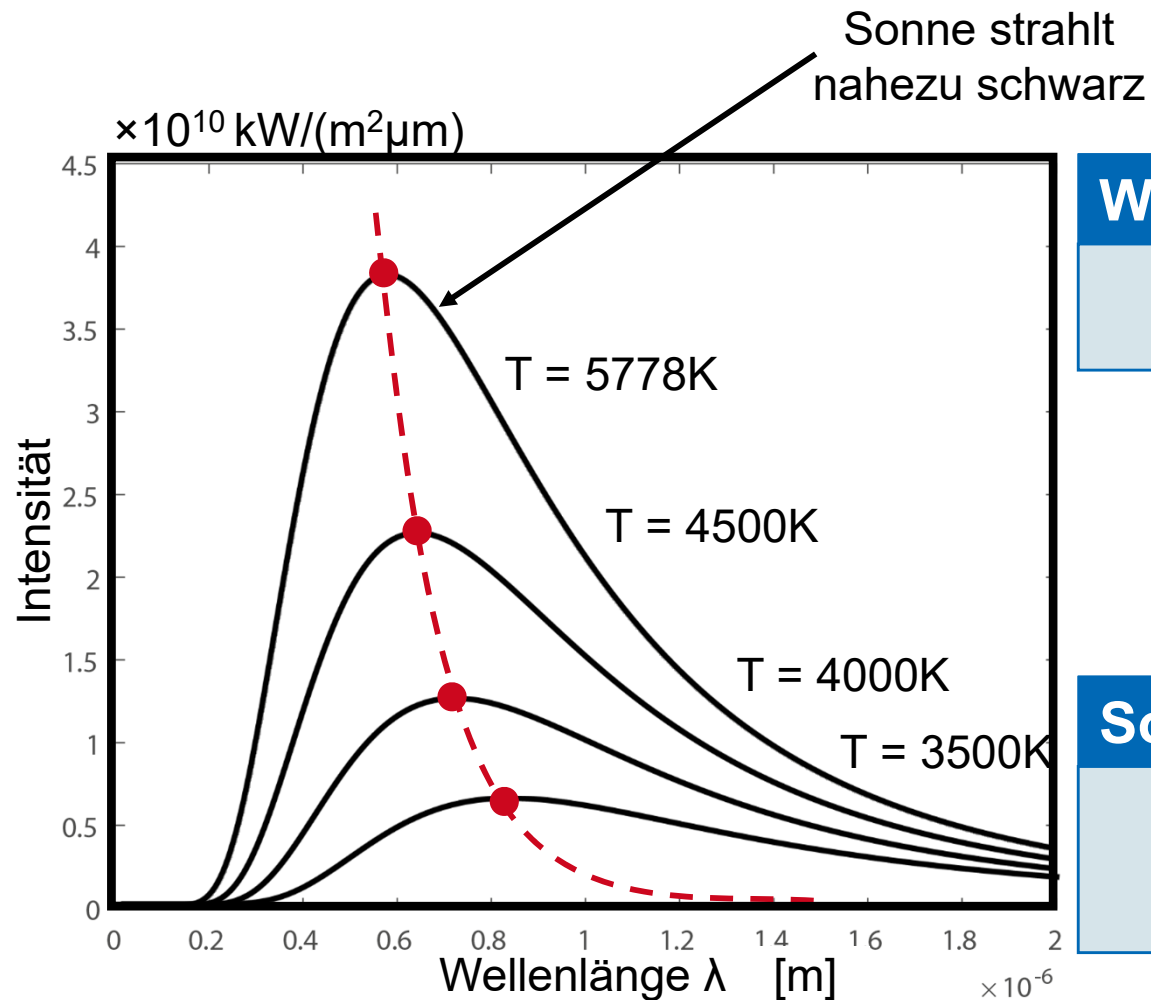
# Wien'sches Verschiebungsgesetz



## Strahlungsgesetz nach Planck

$$\dot{q}''_{s\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp[c_2/(\lambda T)] - 1} \left[ \frac{W}{m^2 m} \right]$$

# Wien'sches Verschiebungsgesetz



## Wiensches Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{\max} T = 2898 [\mu\text{m K}]$$

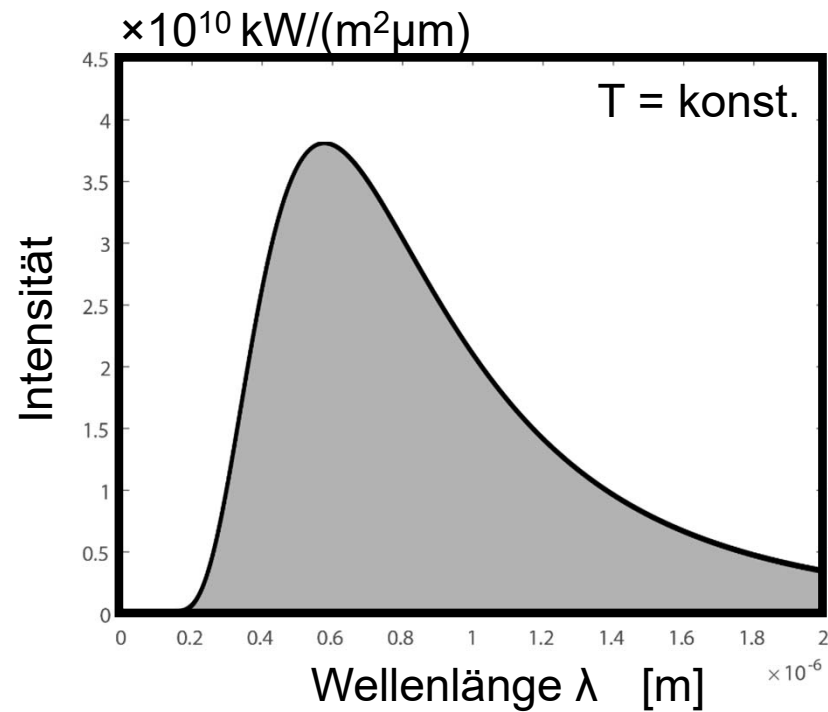
- Beschreibt die Lage des Maximums der spektralen Emissionen

## Sonnentemperatur

$$T = \frac{2898}{0,5} [\text{K}] \approx 5800 [\text{K}]$$

$$\lambda \approx 0,4 - 0,7 [\mu\text{m}]$$

# Stefan-Boltzmann Gesetz

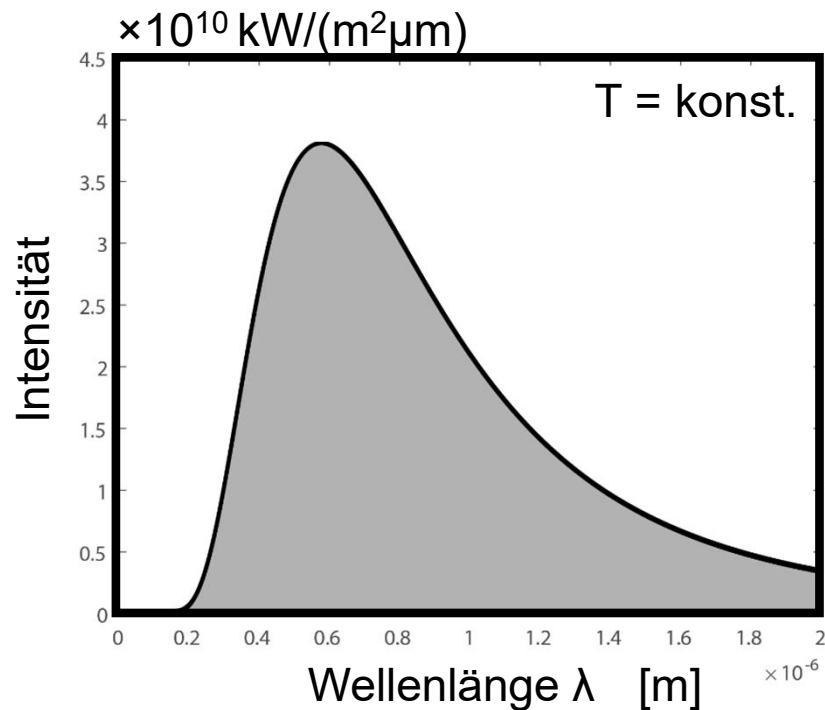


## Integration der Planck-Verteilung

$$\dot{q}''_s = \int_0^\infty \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp[c_2/(\lambda T)] - 1} d\lambda$$

Integration

# Stefan-Boltzmann Gesetz



## Integration der Planck-Verteilung

$$\dot{q}''_s = \int_0^\infty \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp[c_2/(\lambda T)] - 1} d\lambda$$



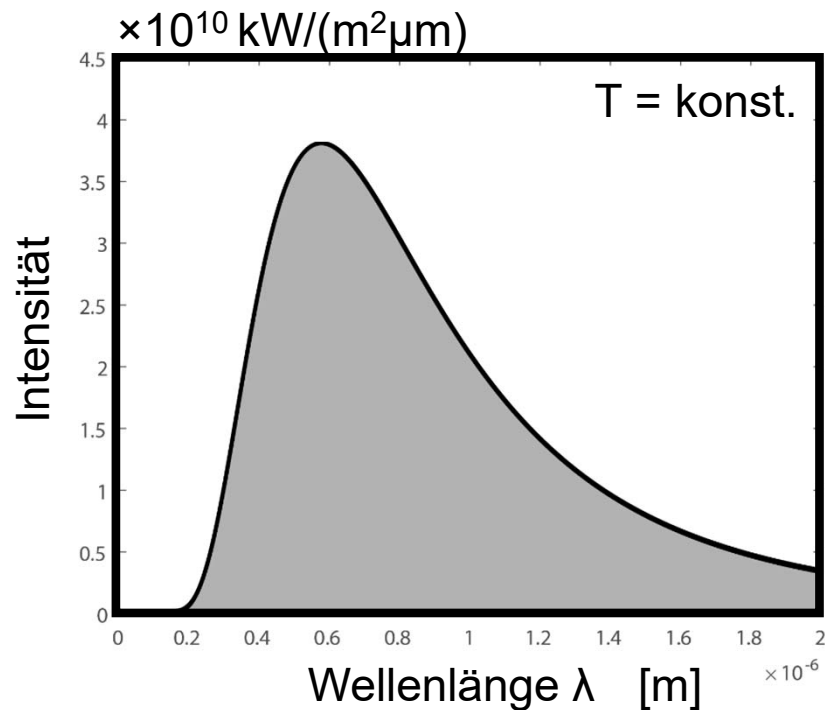
## Stefan - Boltzmann Gesetz

$$\dot{q}''_s = \sigma T^4 \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \right]$$

- Gesamter Strahlungswärmestrom (eines schwarzen Körpers, bei einer bestimmten Temperatur)



# Stefan-Boltzmann Gesetz



## Integration der Planck-Verteilung

$$\dot{q}''_s = \int_0^\infty \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp[c_2/(\lambda T)] - 1} d\lambda$$



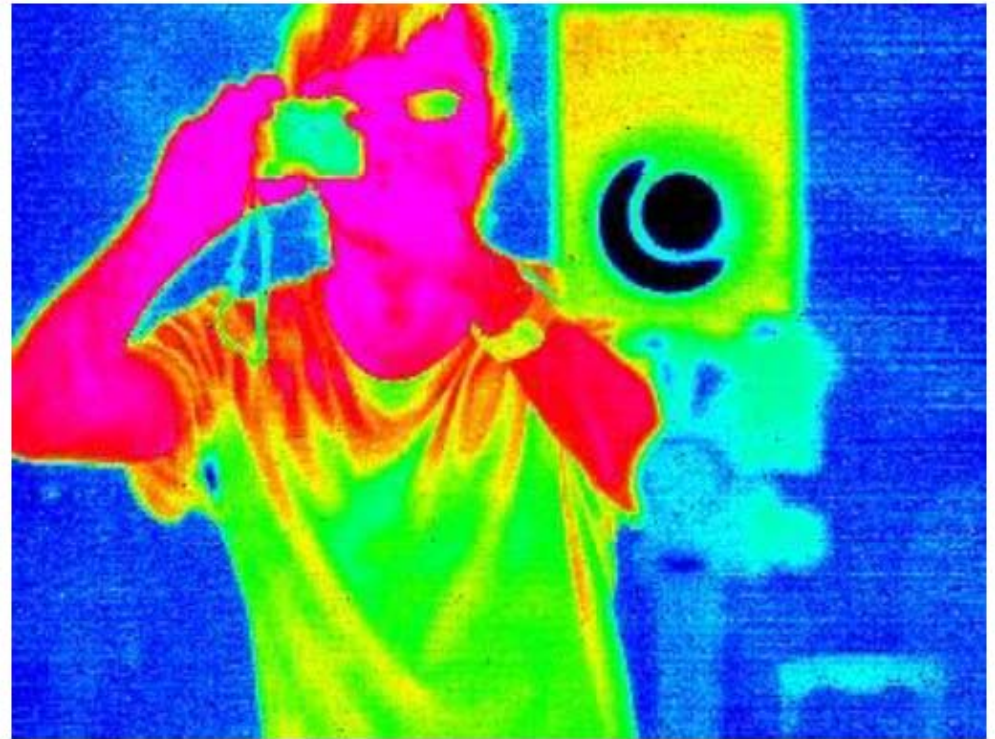
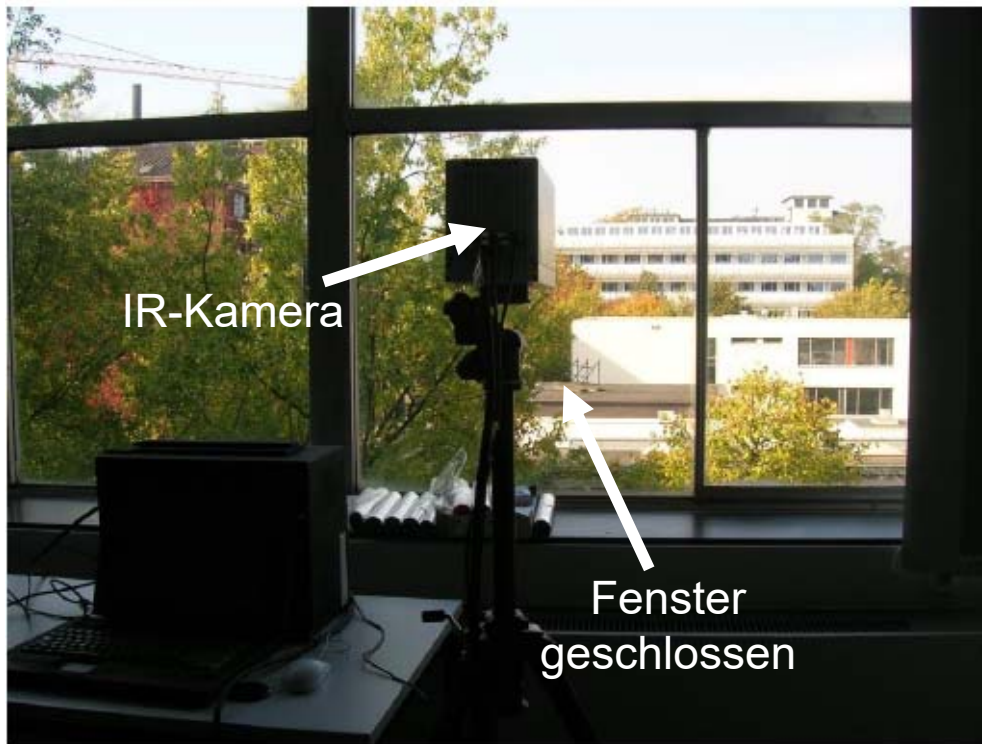
## Stefan - Boltzmann Gesetz

$$\dot{q}''_s = \sigma T^4 \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \right]$$

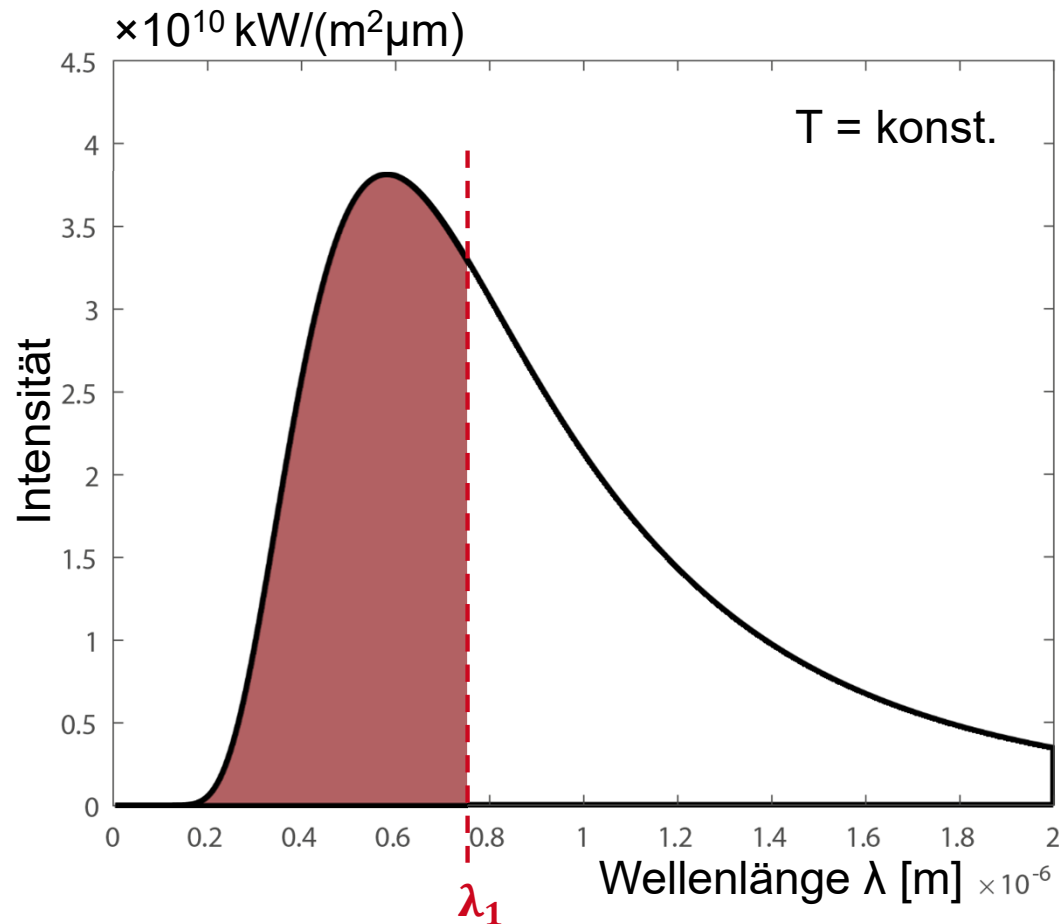
- Stefan-Boltzmann-Konstante:  $\sigma$



# Wellenlängenabhängigkeit der Strahlungseigenschaften



# Strahlung in einem bestimmten Wellenlängenbereich



## Schwarzkörperstrahlung in einem bestimmten Wellenlängenbereich

$$\dot{q}''_{s,0-\lambda_1} = \int_0^{\lambda_1} \dot{q}''_{s\lambda} \cdot d\lambda$$
$$\dot{q}''_{s,0-\lambda_1} = \int_0^{\lambda_1} \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp[c_2/(\lambda T)] - 1} d\lambda$$

## Relativer Strahlungsanteil bezogen auf die gesamte Strahlung

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda_1} \dot{q}''_{s\lambda} \cdot d\lambda$$

# Strahlung in einem bestimmten Wellenlängenbereich

## WSÜ Formelsammlung

$\lambda T$ in $\mu\text{m K}$	1000,0	1250,0	1500,0	1750,0	2000,0	2500,0
$F(\lambda)$	0,00031	0,00308	0,01283	0,03363	0,06663	0,16115
$\lambda T$ in $\mu\text{m K}$	3000,0	3500,0	4000,0	5000,0	6000,0	8000,0
$F(\lambda)$	0,27322	0,38250	0,48085	0,63315	0,73715	0,85556

Verteilung der Schwarzkörperstrahlung mit  $F(\lambda) = \int_0^\lambda \dot{q}_{\lambda s}'' d\lambda / \sigma T^4$

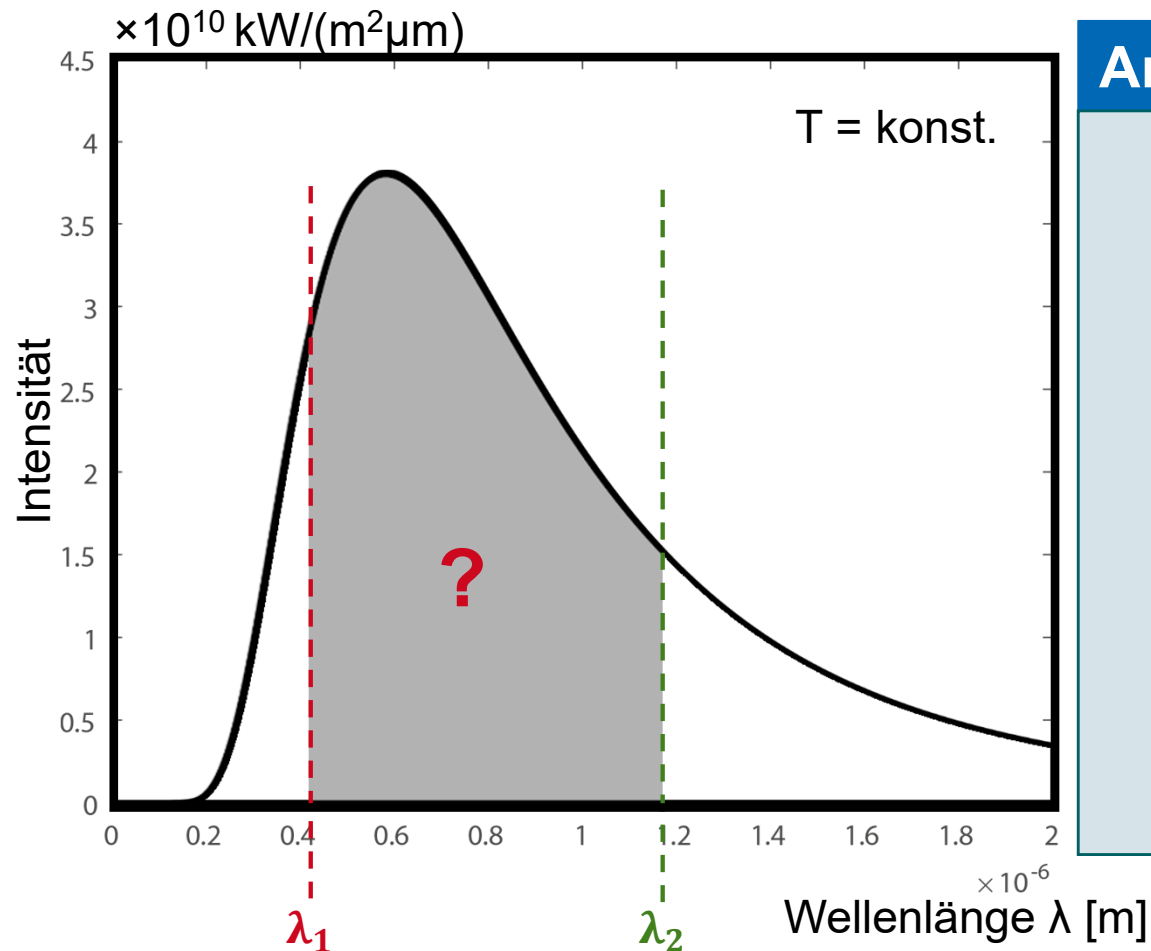
Obere Integrationsgrenze

(Multiplikation von Wellenlänge und Temperatur)

### Relativer Strahlungsanteil bezogen auf die gesamte Strahlung

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda_1} \dot{q}_{s\lambda}'' \cdot d\lambda$$

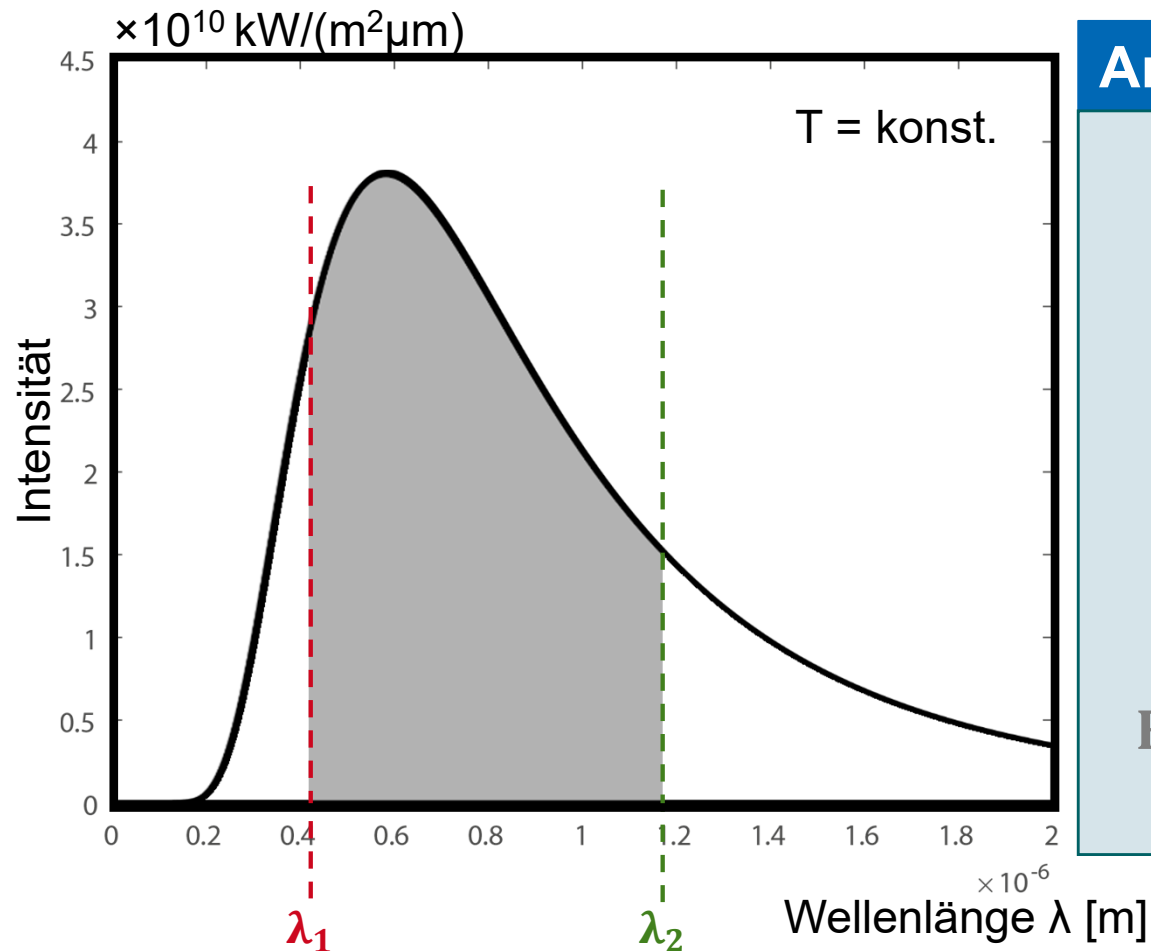
# Strahlung in einem bestimmten Wellenlängenbereich



## Anteil in einem Wellenlängenbereich

$$F(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{q}''_{s\lambda} \cdot d\lambda$$

# Strahlung in einem bestimmten Wellenlängenbereich



## Anteil in einem Wellenlängenbereich

$$F(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{q}''_{s\lambda} \cdot d\lambda$$

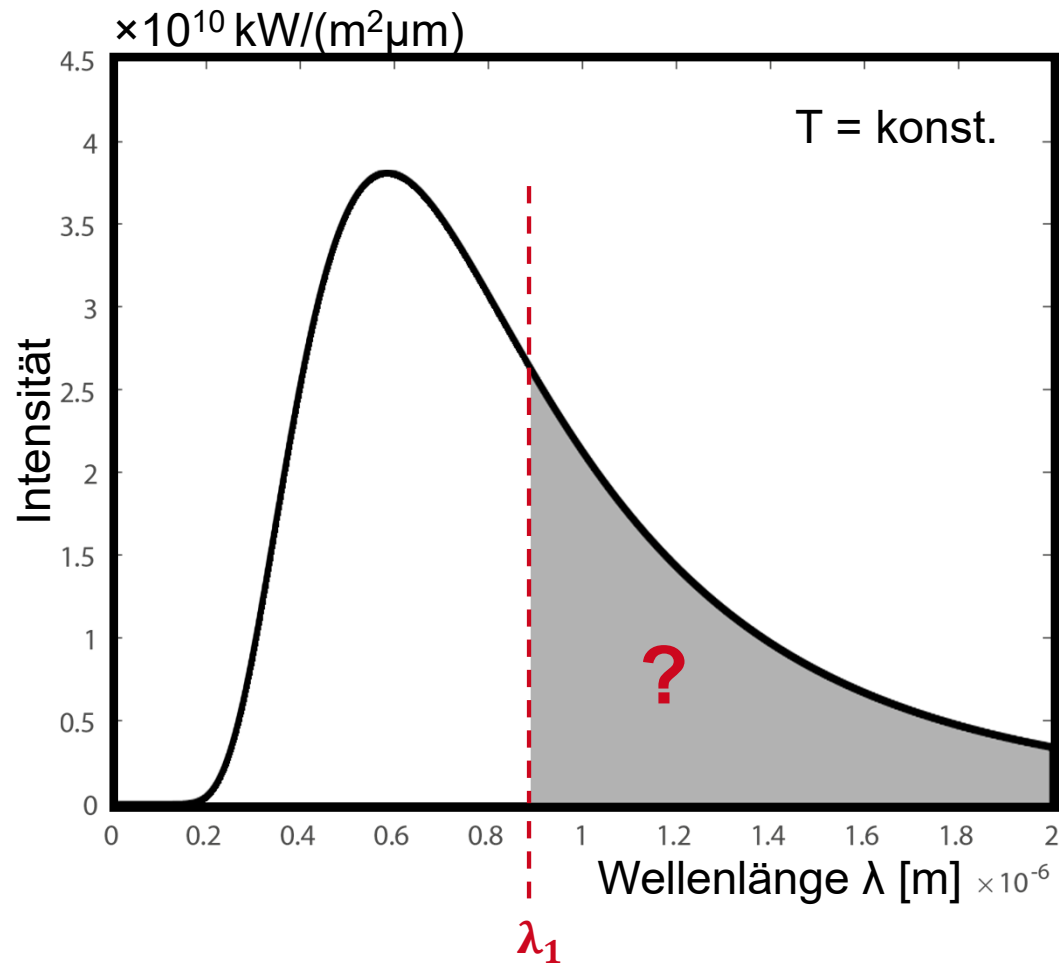
$$F(0 \rightarrow \lambda_2) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda_2} \dot{q}''_{s\lambda} \cdot d\lambda$$

$$F(0 \rightarrow \lambda_1) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda_1} \dot{q}''_{s\lambda} \cdot d\lambda$$

$$F(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2) = F(0 \rightarrow \lambda_2) - F(0 \rightarrow \lambda_1)$$

Prinzip der Superposition

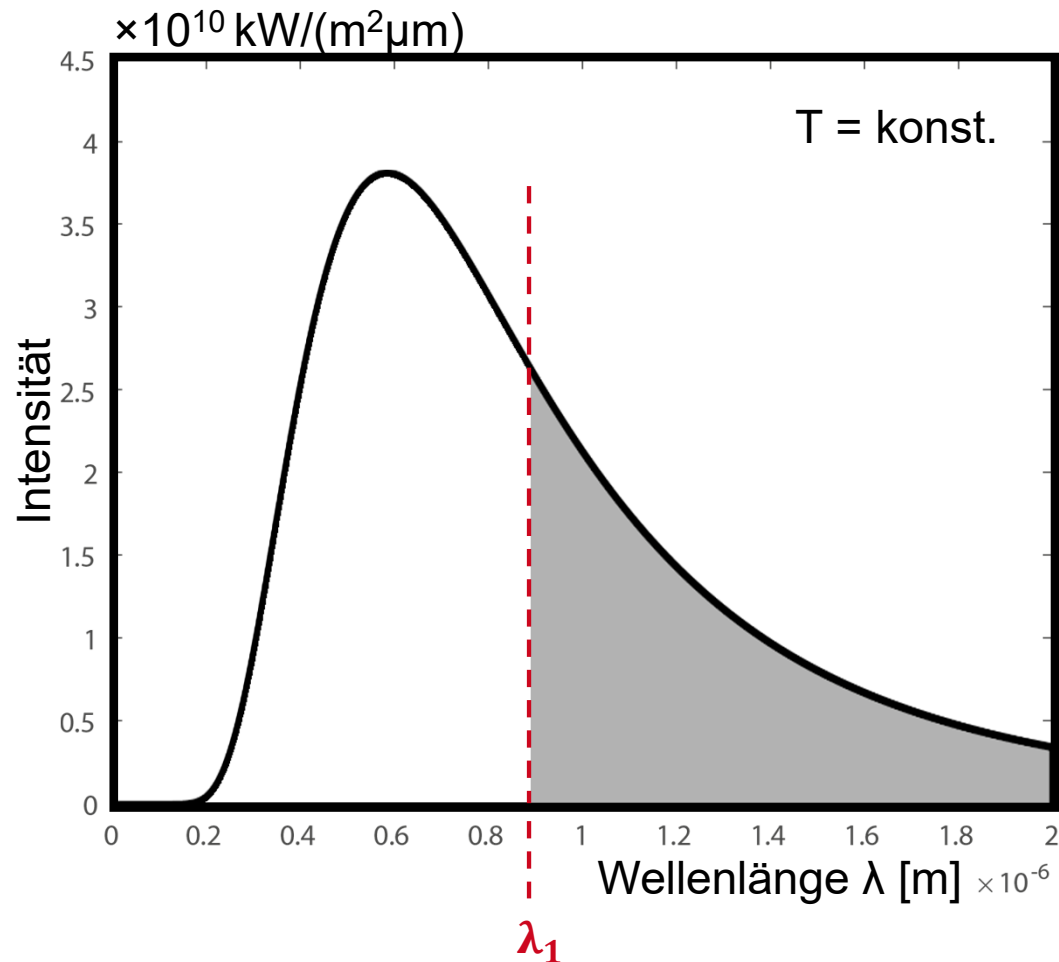
# Strahlung in einem bestimmten Wellenlängenbereich



## Anteil in einem Wellenlängenbereich

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_{\lambda_1}^{\infty} \dot{q}''_{s\lambda} \cdot d\lambda$$

# Strahlung in einem bestimmten Wellenlängenbereich



## Anteil in einem Wellenlängenbereich

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_{\lambda_1}^{\infty} \dot{q}''_{s\lambda} \cdot d\lambda$$

$$F(0 \rightarrow \infty) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\infty} \dot{q}''_{s\lambda} \cdot d\lambda = 1$$

$$F(0 \rightarrow \lambda_1) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda_1} \dot{q}''_{s\lambda} \cdot d\lambda$$

$$F(\lambda_1 \rightarrow \infty) = F(0 \rightarrow \infty) - F(0 \rightarrow \lambda_1)$$

# Verständnisfragen

---

**Was ist ein schwarzer Körper?**

**Welche Annahmen gelten für die Berechnung von „schwarzen Körpern“?**

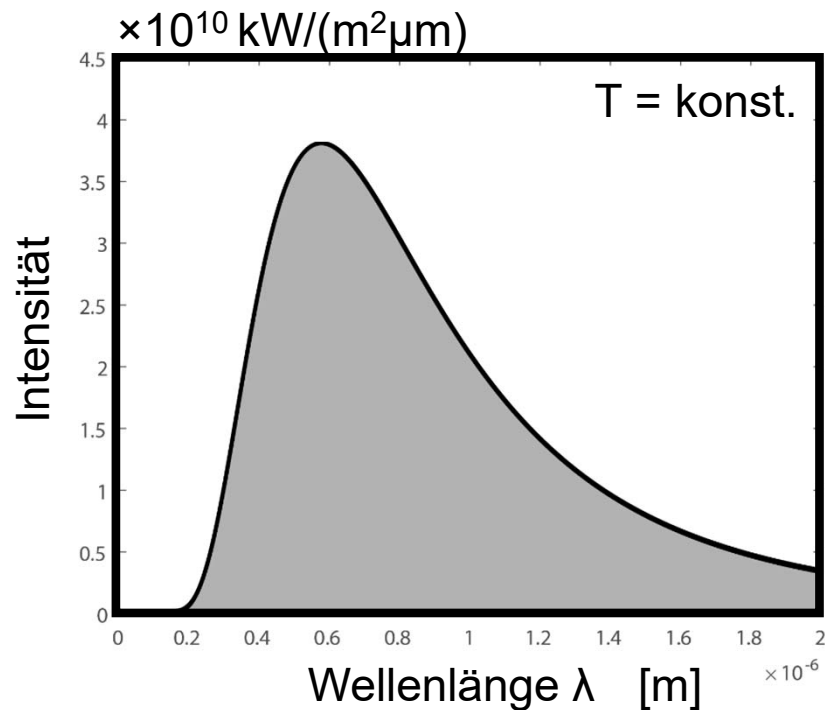
**Mit welchem Gesetz kann die Wellenlänge bei dem Intensitätsmaximum eines schwarzen Körpers bestimmt werden?**

**Über welchen Ansatz wurde die Stefan-Boltzmann-Konstante ermittelt?**

**Wie kann die Strahlungsintensität in einem bestimmten Wellenlängenbereich  $\lambda_1 - \lambda_2$  berechnet werden?**



# Stefan-Boltzmann Gesetz



zurück

## Integration der Planck-Verteilung

$$\dot{q}''_s = \int_0^\infty \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp[c_2/(\lambda T)] - 1} d\lambda$$

$$\text{Substitution: } x = \frac{\lambda T}{c_2} \rightarrow d\lambda = \frac{c_2}{T} dx$$

$$\text{einsetzen in Gl.: } \dot{q}''_s = c_2 \int_0^\infty \frac{c_1 T^4}{c_2^5 x^5 (\exp\left[\frac{1}{x}\right] - 1)} dx$$

$$\dot{q}''_s = \frac{c_1}{c_2^4} T^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{dx}{x^5 (\exp\left[\frac{1}{x}\right] - 1)}}_{= \frac{\pi^4}{15}}$$

$$\dot{q}''_s = \sigma T^4 \rightarrow \sigma = \frac{c_1 \pi^4}{c_2^4 15}$$