Wärme- und Stoffübertragung I

Herleitung der Energieerhaltungsgleichung

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Video Übersicht

Stationäre Energieerhaltungsgleichung ohne Quellen

- Stationäre 1-D Wärmeleitung ohne Quellen
- Stationäre 2-D Wärmeleitung ohne Quellen

Stationäre Energieerhaltungsgleichung mit Quellen

- Stationäre 2-D Wärmeleitung mit Quellen

Instationäre Energieerhaltungsgleichung

- Instationäre 2-D Wärmeleitung mit Quellen

Instationäre 3-D Energieerhaltungsgleichung mit Quellen

- 3-D Erhaltungsgleichung ohne Advektion

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lernziele

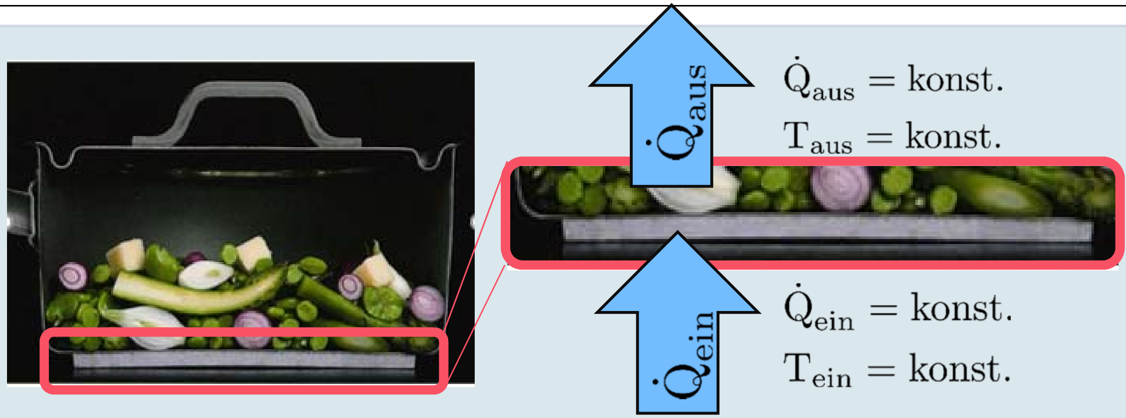
Energiebilanzen

- Aufstellen von Energiebilanzen für unterschiedliche Fälle
- Entwicklung einer Differenzialgleichung aus der Energiebilanz unter Verwendung der Taylorreihenentwicklung
- Aufstellen notwendiger Randbedingungen
- Lösen der Differenzialgleichung für einfache Fälle

Beispiele aus unserem Alltag

Stationär

Wärme wird durch den Topfboden geleitet. Sowohl die Temperaturdifferenz als auch der Wärmestrom sind zeitlich konstant.



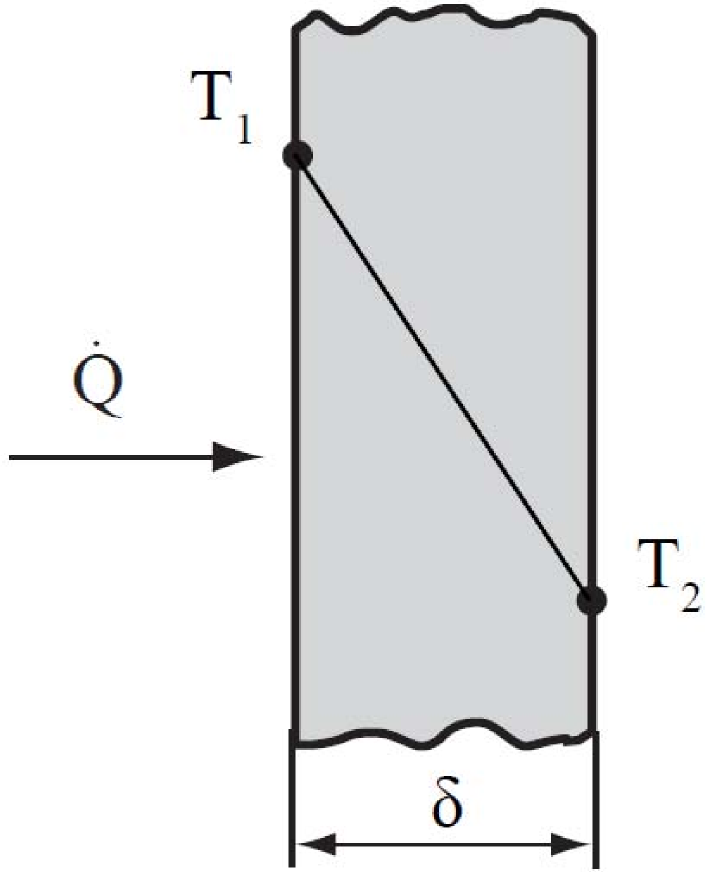
Instationär

Die Wärmemenge/Temperatur eines Objektes verändert sich über die Zeit.
Beispiel: Der Kaffee kühlt ab.

Quellen und Senken

Wärmeenergie innerhalb eines Körpers wird generiert oder absorbiert durch die Umwandlung von anderen Energiearten in Wärme.

Wiederholung Fourier-Gesetz:
Stationäre 1-D Wärmeleitung in einer ebenen Wand ohne Quelle



Fourier Gesetz

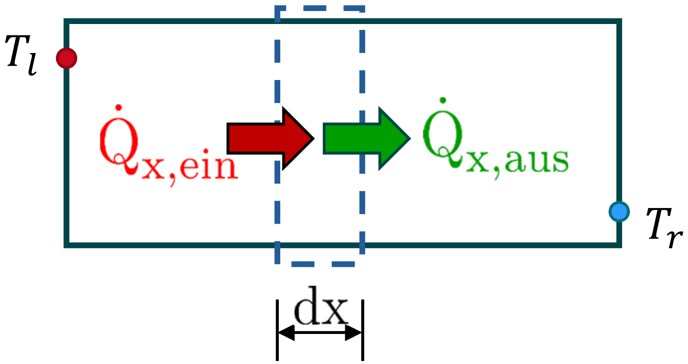
$$\boxed{\dot{q}'' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}}$$

Wärmestrom durch die Wand

$$\dot{Q} = \dot{q}'' \cdot A = -\lambda \cdot A \cdot \frac{T_2 - T_1}{\delta} \quad [\mathrm{W}]$$

DGL Herleitung:
Stationäre 1-D Wärmeleitung ohne Quellen

Stationär: thermische Energie verändert sich nicht über die Zeit!



Energiebilanz das Element dx

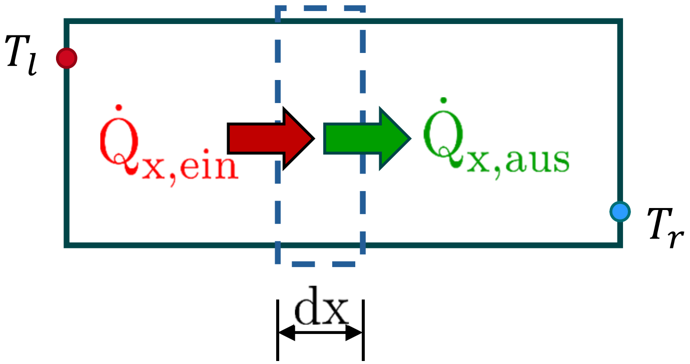
$$0 = \dot{Q}_{\mathrm{x,ein}} - \dot{Q}_{\mathrm{x,aus}}$$

Definition von $\dot{Q}_{\mathrm{x,aus}}$ mittels Taylorreihenentwicklung

$$\dot{Q}_{\mathrm{x,aus}} = \dot{Q}_{\mathrm{x,ein}} + \frac{\partial \dot{Q}_{\mathrm{x,ein}}}{\partial x} dx$$

DGL Herleitung:
Stationäre 1-D Wärmeleitung ohne Quellen

Stationär: Thermische Energie verändert sich nicht über die Zeit!



Energiebilanz das Element dx

$$0 = \dot{Q}_{\mathrm{x,ein}} - \dot{Q}_{\mathrm{x,aus}}$$

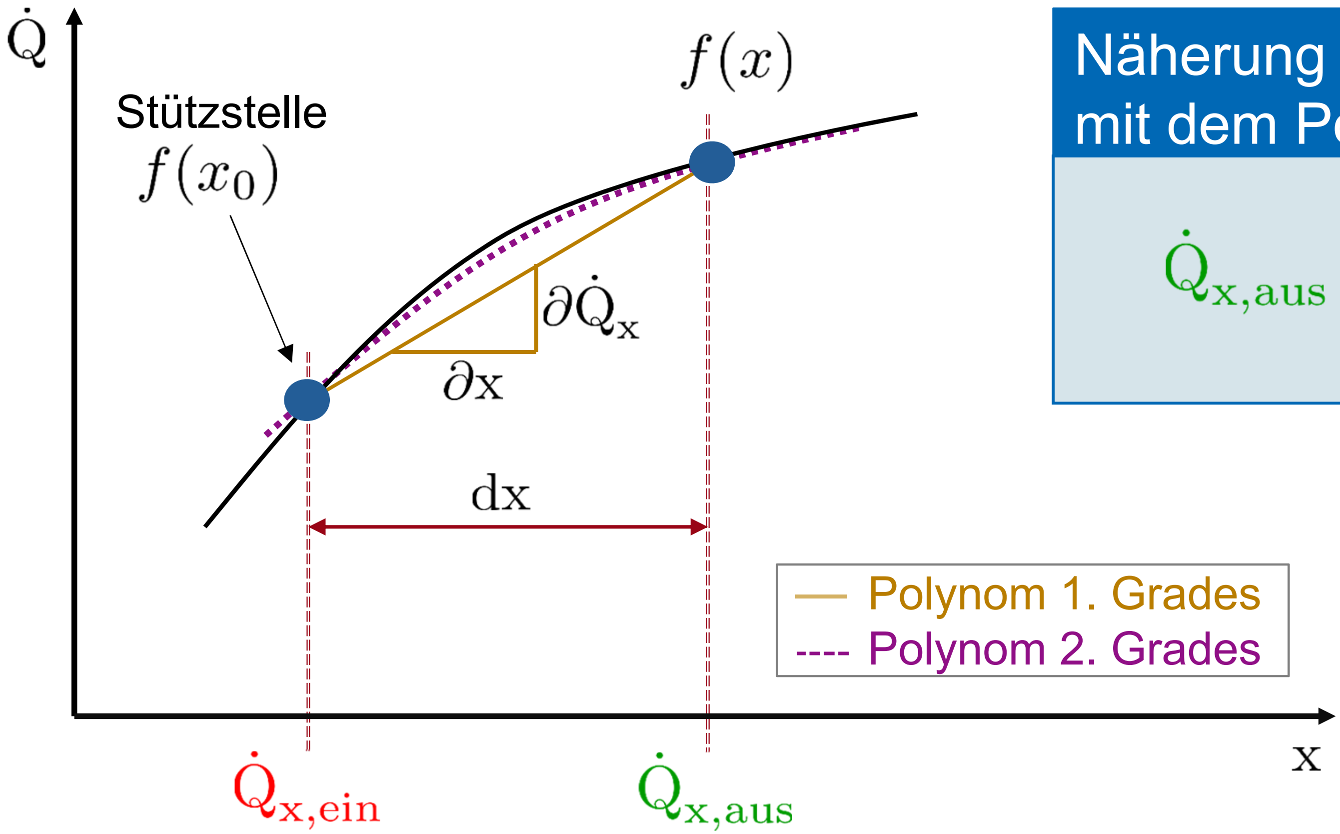
Definition von $\dot{Q}_{\mathrm{x,aus}}$ mittels Taylorreihenentwicklung

$$\dot{Q}_{\mathrm{x,aus}} = \dot{Q}_{\mathrm{x,ein}} + \frac{\partial \dot{Q}_{\mathrm{x,ein}}}{\partial x} dx$$

Mathematischer Einschub: Taylorreihenentwicklung

Approx. einer Funktion *f (x)* an der Stelle $x = x_0$ mit Taylorreihenentwicklung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

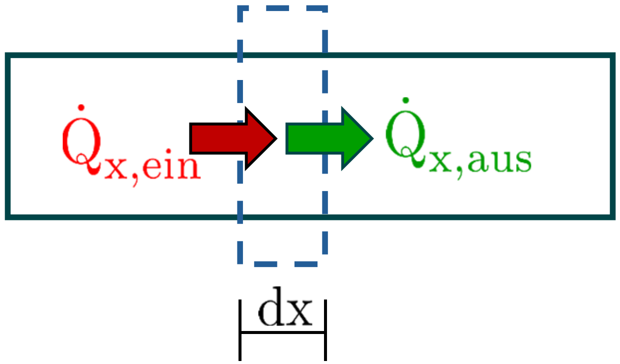


Näherung des Wärmestroms $\dot{Q}_{x,aus}$ mit dem Polynom 1. Grades

$$\dot{Q}_{x,aus} = \dot{Q}_{x,ein} + \frac{\partial \dot{Q}_{x,ein}}{\partial x} dx$$

DGL Herleitung:
Stationäre 1-D Wärmeleitung ohne Quellen

Stationär: thermische Energie verändert sich nicht über die Zeit!



Energiebilanz um ein infinitesimales Element

$$0 = \dot{Q}_{x,ein} - \dot{Q}_{x,aus}$$

Taylorreihenentwicklung

$$\dot{Q}_{x,aus} = \dot{Q}_{x,ein} + \frac{\partial \dot{Q}_{x,ein}}{\partial x} dx$$

Taylor-Reihe in EB eingesetzt

$$\cancel{\dot{Q}_{x,ein}} = \cancel{\dot{Q}_{x,ein}} + \frac{\partial \dot{Q}_{x,ein}}{\partial x} \cancel{dx}$$

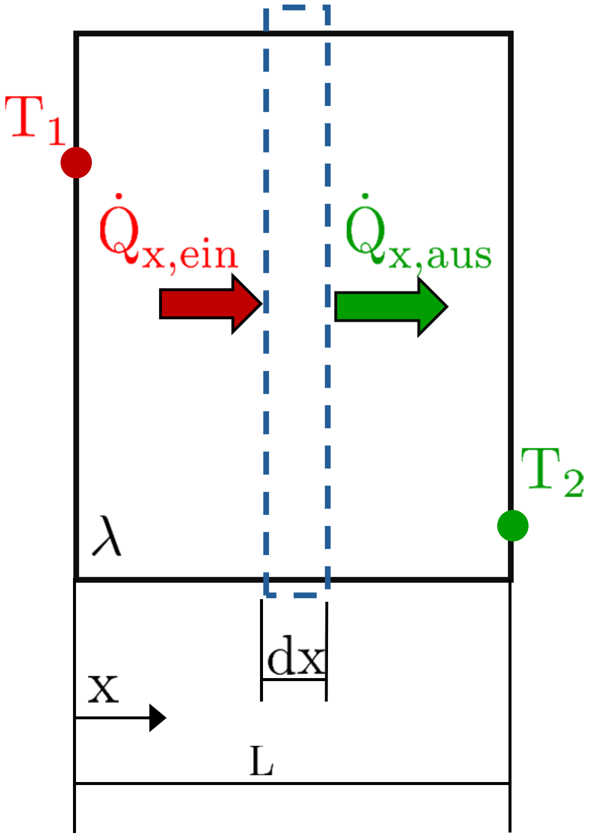
Fourier-Gesetz einsetzen

$$\dot{Q} = \dot{q}'' \cdot A = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Resultierende DGL

$$0 = \frac{\partial \dot{Q}_{x,ein}}{\partial x} = \boxed{-\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Temperaturprofil
stationäre 1-D Wärmeleitung ohne Quellen



DGL 2. Ordnung → 2 RB notwendig

$$0 = \frac{\partial \dot{Q}_{\mathrm{x,ein}}}{\partial x} = \boxed{-\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Randbedingungen

$$x = 0 \quad , \quad T = T_1$$

$$x = L \quad , \quad T = T_2$$

2-fache Integration liefert Temperaturverlauf

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

Wärmestrom

$$\dot{Q}_{\mathrm{x}} = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda A \frac{\partial \left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x\right)}{\partial x} = -\lambda A \frac{T_2 - T_1}{L} \quad [\mathrm{W}]$$

Stationäre 2-D Wärmeleitung ohne Quellen

Energiebilanz

$$0 = (\dot{Q}_{x,ein} - \dot{Q}_{x,aus}) + (\dot{Q}_{y,ein} - \dot{Q}_{y,aus})$$

$$0 = (\dot{q}''_{x,ein} - \dot{q}''_{x,aus}) \cdot dy \cdot 1 + (\dot{q}''_{y,ein} - \dot{q}''_{y,aus}) \cdot dx \cdot 1$$

$\dot{q}''_{x,aus}$ und $\dot{q}''_{y,aus}$ mit Taylorreihenentwicklung

$$\dot{q}''_{x,aus} = \dot{q}''_{x,ein} + \frac{\partial \dot{q}''_{x,ein}}{\partial x} dx + \ldots$$

$$\dot{q}''_{y,aus} = \dot{q}''_{y,ein} + \frac{\partial \dot{q}''_{y,ein}}{\partial y} dy + \ldots$$

Einsetzen in die Energiebilanz

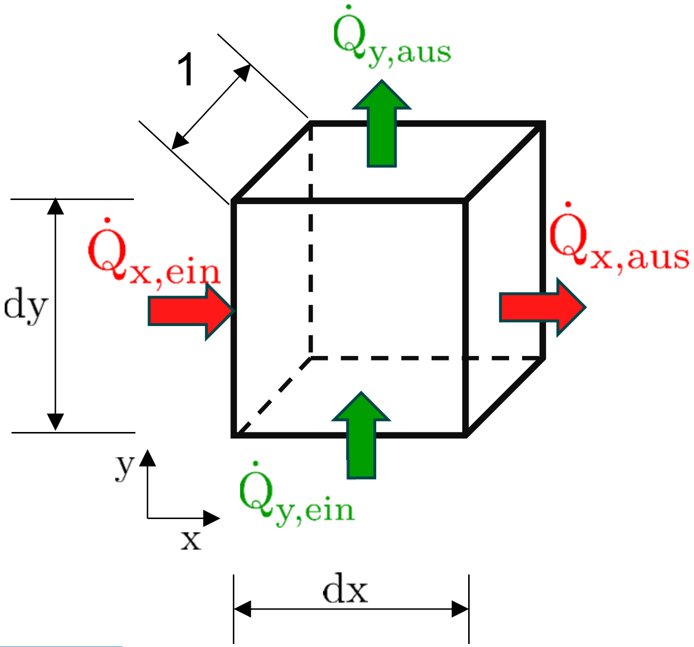
$$0 = -\frac{\partial \dot{q}''_{x,ein}}{\partial x} + -\frac{\partial \dot{q}''_{y,ein}}{\partial y}$$

mit Fourier-Gesetz

$$0 = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

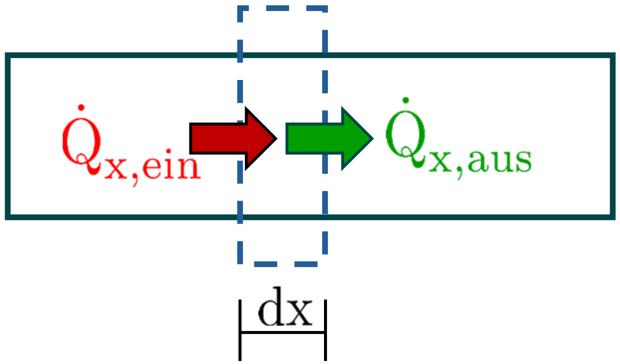
Laplace-Gleichung

$$0 = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$



Einschub zur Erklärung 1

Die Gleichungen von Folie 9 und Folie 11 weisen ein unterschiedliches Vorzeichen auf ⇨ liegt hier ein Fehler vor?



In **Folie 9** wurde die Bilanz umgestellt

von: $$0 = \dot{Q}_{x,ein} - \dot{Q}_{x,aus}$$

auf: $$\dot{Q}_{x,ein} = \dot{Q}_{x,aus}$$

⋮

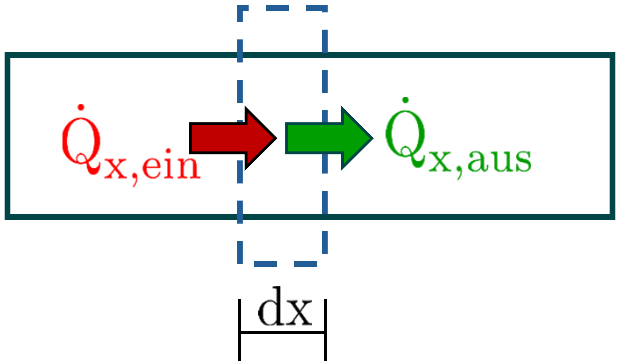
Resultierende DGL

$$\frac{\partial \dot{Q}_{x,ein}}{\partial x} = 0 = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lambda \cdot A \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

da links die "0" steht ⇒ Division durch −1 ändert nichts

Einschub zur Erklärung 2

Die Gleichungen von Folie 9 und Folie 11 weisen ein unterschiedliches Vorzeichen auf ⇨ liegt hier ein Fehler vor?



In Folie 11 wurde die Bilanz nicht umgestellt

also: $$0 = (\dot{Q}_{x,ein} - \dot{Q}_{x,aus}) + (\dot{Q}_{y,ein} - \dot{Q}_{y,aus})$$

⇨ die „0“ bleibt also stets links dabei

Resultierende DGL

$$0 = -\frac{\partial \dot{q}''_{x,ein}}{\partial x} + -\frac{\partial \dot{q}''_{y,ein}}{\partial y} \quad ⇨ \quad 0 = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

hier bleibt alles vorzeichenrichtig erhalten

Stationäre 2-D Wärmeleitung mit Quellen

Energiebilanz

$$0 = (\dot{Q}_{\mathrm{x,ein}} - \dot{Q}_{\mathrm{x,aus}}) + (\dot{Q}_{\mathrm{y,ein}} - \dot{Q}_{\mathrm{y,aus}}) + \dot{\Phi}''' \cdot V$$

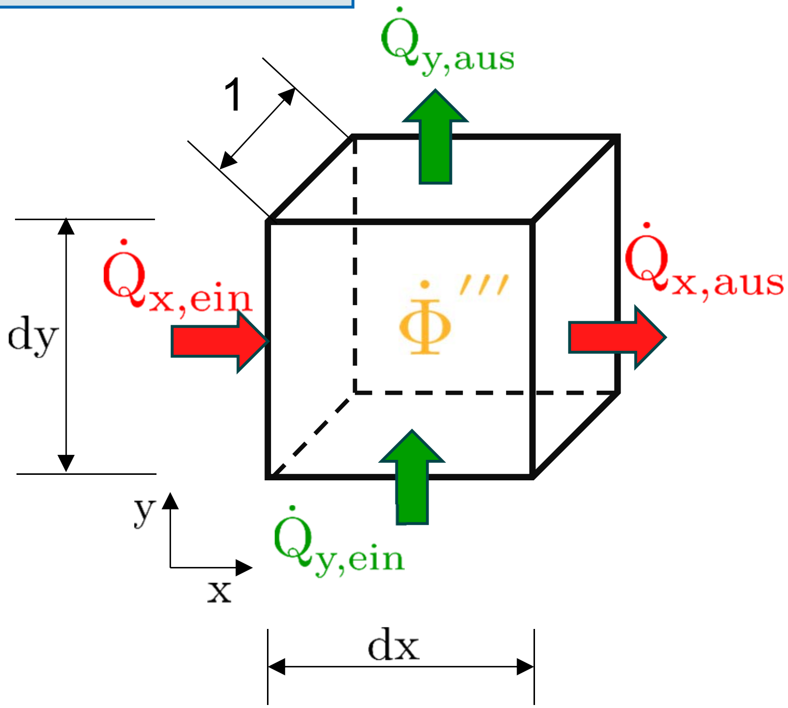
$$0 = (\dot{q}''_{\mathrm{x,ein}} - \dot{q}''_{\mathrm{x,aus}}) \cdot dy \cdot 1 + (\dot{q}''_{\mathrm{y,ein}} - \dot{q}''_{\mathrm{y,aus}}) \cdot dx \cdot 1 + \dot{\Phi}''' \cdot dx \cdot dy \cdot 1$$

mit

- Taylorreihenentwicklung
- Fourier-Gesetz

Poisson-Gleichung

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \dot{\Phi}''' = 0$$



$\dot{\Phi}''' \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right]$: volumetrischer Quellterm, kann positiv (Quelle) oder negativ (Senke) sein

Definition der inneren Energie für die instationäre Wärmeleitung

Änderung der inneren Energie des Systems

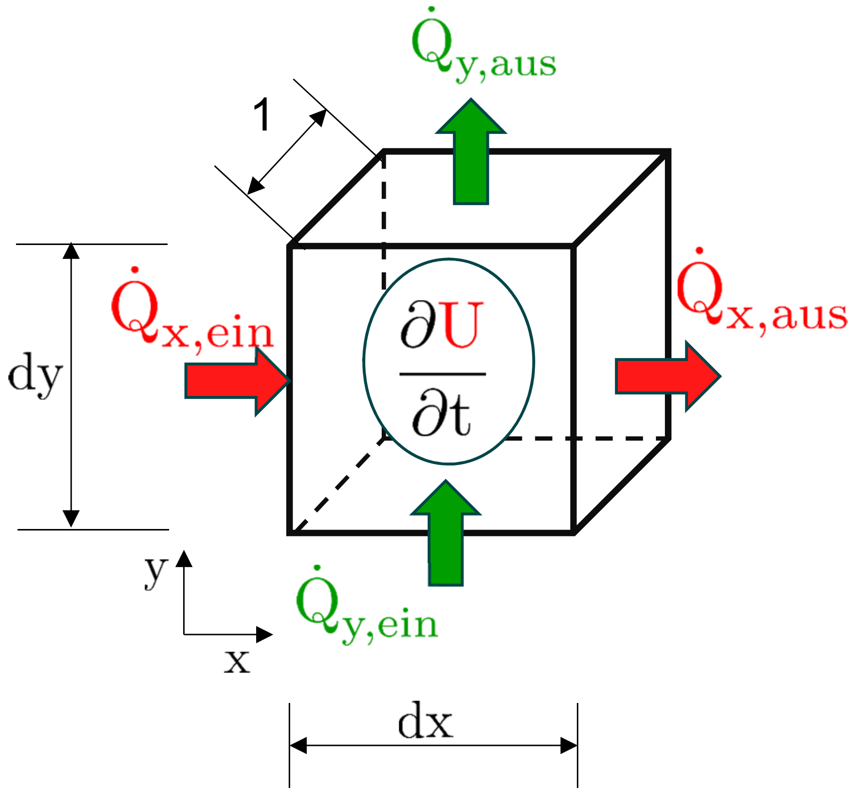
$$U = m \cdot c_v \cdot T$$

$$U = \rho \cdot c_v \cdot T \cdot dx \cdot dy \cdot \underbrace{dz}_{1}$$

U $[\mathrm{J}]$: Innere Energie

ρ $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$: Dichte

c_v $\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}\right]$: spez. Wärmekapazität bei konst. Volumen



Einheiten – Check!

$$\dot{Q} = \underbrace{\dot{q}''}_{\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]} \cdot \underbrace{dx \cdot dy}_{\left[\mathrm{m}^2\right]} \quad [\mathrm{W}] \quad \Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial t} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}\right]}$$

Die innere Energie U muss sich über die Zeit verändern, damit die Einheiten übereinstimmen!

Energiebilanz für instationäre 2-D Wärmeleitung mit Quellen

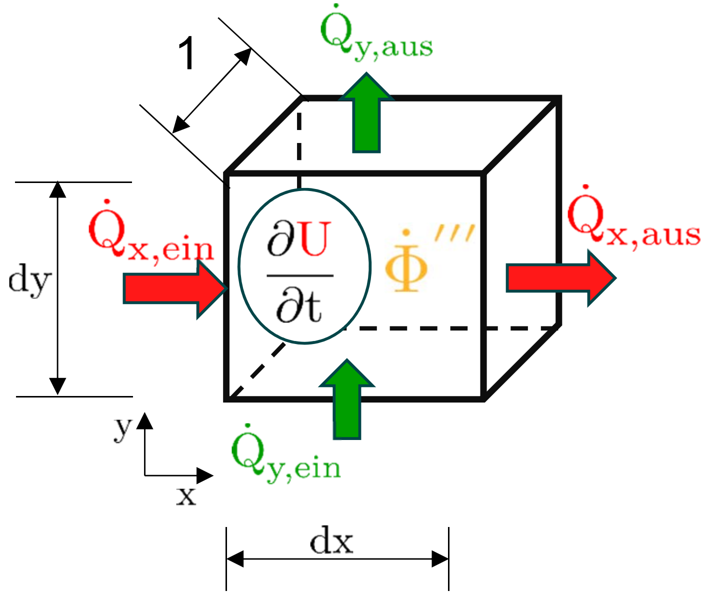
Definition der inneren Energie

Betrachtete Änderung der inneren Energie nur durch Temperaturänderungen! (c_v und ρ sind konstant)

Änderung innerhalb des Kontrollvolumens: $$\frac{\partial U}{\partial t} = \rho \cdot c_v \cdot dx \cdot dy \cdot 1 \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Energiebilanz

$$\frac{\partial U}{\partial t} = (\dot{Q}_{\mathrm{x,ein}} - \dot{Q}_{\mathrm{x,aus}}) + (\dot{Q}_{\mathrm{y,ein}} - \dot{Q}_{\mathrm{y,aus}}) + \dot{\Phi}''' \cdot V$$



Die Änderung der Wärmeströme und der Quellterm stehen auf der rechten Seite der EB **(Ursache)**

Die zeitliche Änderung der inneren Energie steht auf der linken Seite der EB **(Wirkung)**

Energiebilanz für instationäre 2-D Wärmeleitung mit Quellen

Definition der inneren Energie

Betrachtete Änderung der inneren Energie nur durch Temperaturänderungen! (c_v und ρ sind konstant)

Änderung innerhalb des Kontrollvolumens: $$\frac{\partial U}{\partial t} = \rho \cdot c_v \cdot dx \cdot dy \cdot 1 \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Energiebilanz

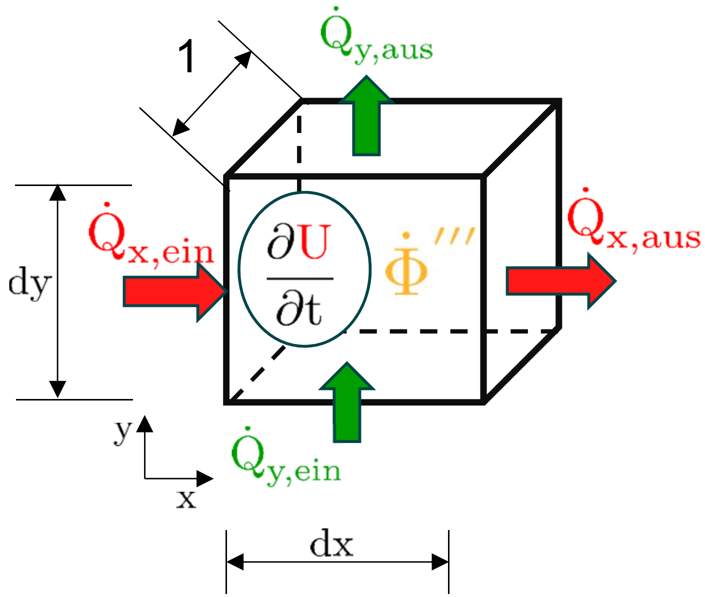
$$\frac{\partial U}{\partial t} = (\dot{Q}_{\mathrm{x,ein}} - \dot{Q}_{\mathrm{x,aus}}) + (\dot{Q}_{\mathrm{y,ein}} - \dot{Q}_{\mathrm{y,aus}}) + \dot{\Phi}''' \cdot V$$

Definition aller Terme liefert DGL

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \dot{\Phi}'''$$

$$\rho \cdot c_v \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \dot{\Phi}'''$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c_v}\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \dot{\Phi}'''\right]$$



Endgültige 3-D Energieerhaltungsgleichung mit Quellen

Energiebilanz

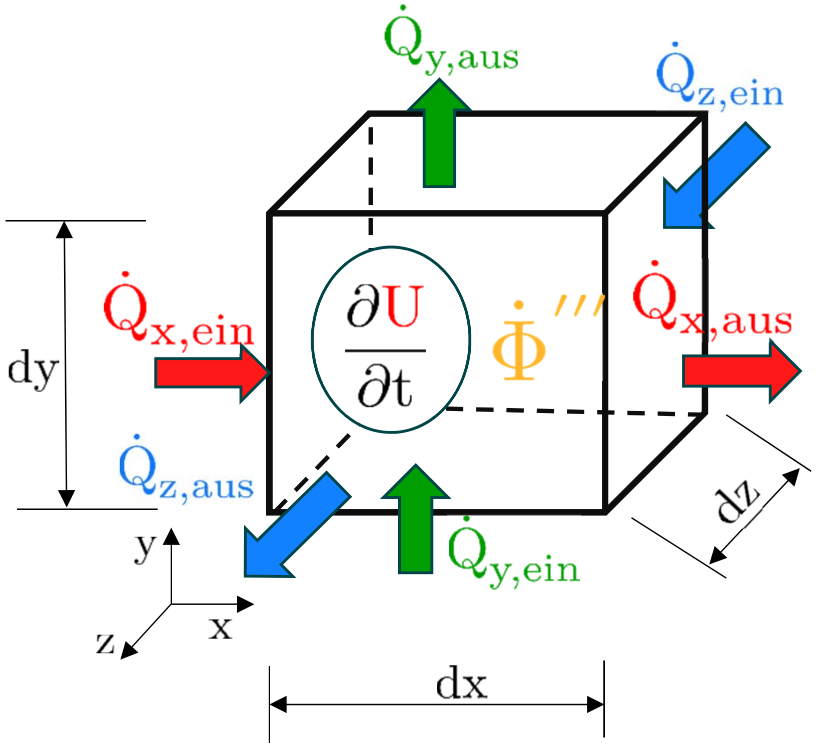
$$\frac{\partial U}{\partial t} = (\dot{Q}_{x,ein} - \dot{Q}_{x,aus}) + (\dot{Q}_{y,ein} - \dot{Q}_{y,aus}) + (\dot{Q}_{z,ein} - \dot{Q}_{z,aus}) + \dot{\Phi}''' \cdot V$$

Resultierender 3-D Temperaturverlauf

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \dot{\Phi}'''$$

$$\rho \cdot c_v \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \dot{\Phi}'''$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c_v}\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \dot{\Phi}'''\right]$$



Übersicht der Differenzialgleichungen aller Fälle

1-D Stationär ohne Quellen

$$0 = -\lambda \cdot A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

2-D Stationär ohne Quellen (Laplace)

$$0 = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

2-D Stationär mit Quellen (Poisson)

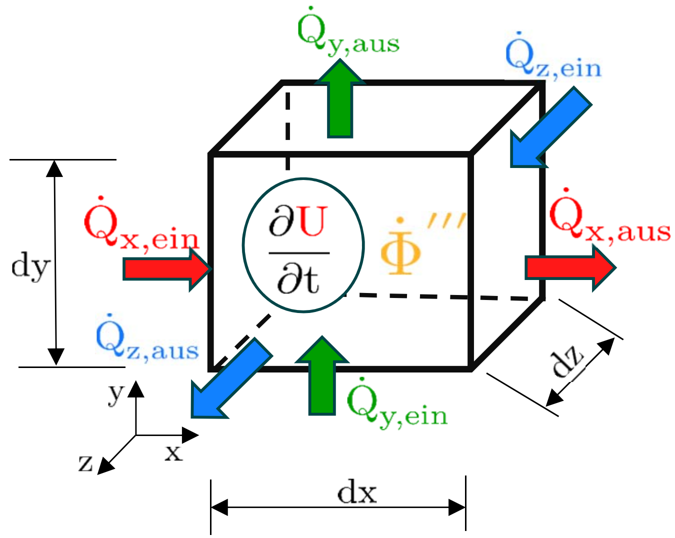
$$0 = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \dot{\Phi}'''$$

2-D instationär mit Quellen

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c_v} \left[\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \dot{\Phi}''' \right]$$

3-D instationär mit Quellen (allg. DGL)

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c_v} \left[\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{\Phi}''' \right]$$

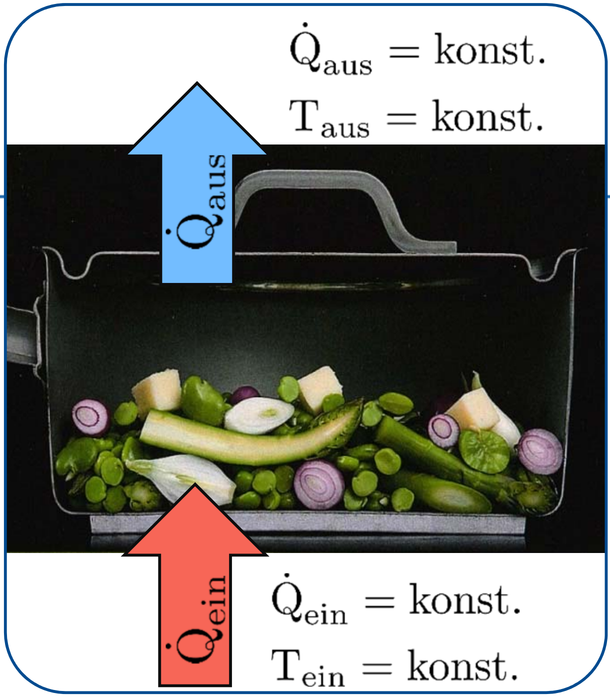


Verständnisfragen

Welcher Temperaturverlauf stellt sich im stationären Zustand für eine homogene, eindimensionale, ebene Wand ohne Wärmequellen ein?

Unter welchen Voraussetzungen wird die Poisson-Gleichung zur Laplace-Gleichung (Wärmeleitung)?

Beispiele aus unserem Alltag



Stationär (Wärme wird durch den Topfboden geleitet)

Instationär (Kaffee kühlt ab)

Quelle (elektrischer Strom wird in Wärme umgewandelt)