Wärme- und Stoffübertragung I

Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung

mit Quelle

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer

Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

Video Übersicht

Stationäre 1-D Wärmeleitung mit Quelle

- Wie wird eine Quelle/Senke berücksichtigt?
- Herleitung der DGL über Energiebilanzen

Ermittlung des Temperaturverlaufs

- Definition von Randbedingungen
- Lösung der DGL durch einsetzen der RB

Verallgemeinerte Form des Temperaturverlaufs für verschiedene Geometrien

- Finale DGL
- Berechnung der Maximal- und Minimaltemperatur in einem Körper

Erklärung Quelle

Was ist eine Quelle?

- Wärmeproduktion innerhalb eines Körper
- Bespiele:
  - (Elektrische) Heizkörper
  - Toaster
  - Brennelement
  - …

Was ist eine Senke?

- Wärmeaufnahme innerhalb eines Körper
- Bespiele:
  - Phasenwechselmaterial
    - Salzspeicher
    - Verdampfendes Wasser
    - …

Wie wird der Wärmestrom (einer Quelle/Senke) ausgedrückt?

- Wärmeproduktion $\dot{\Phi}'''$ verteilt sich gleichmäßig auf das Volumenelement V

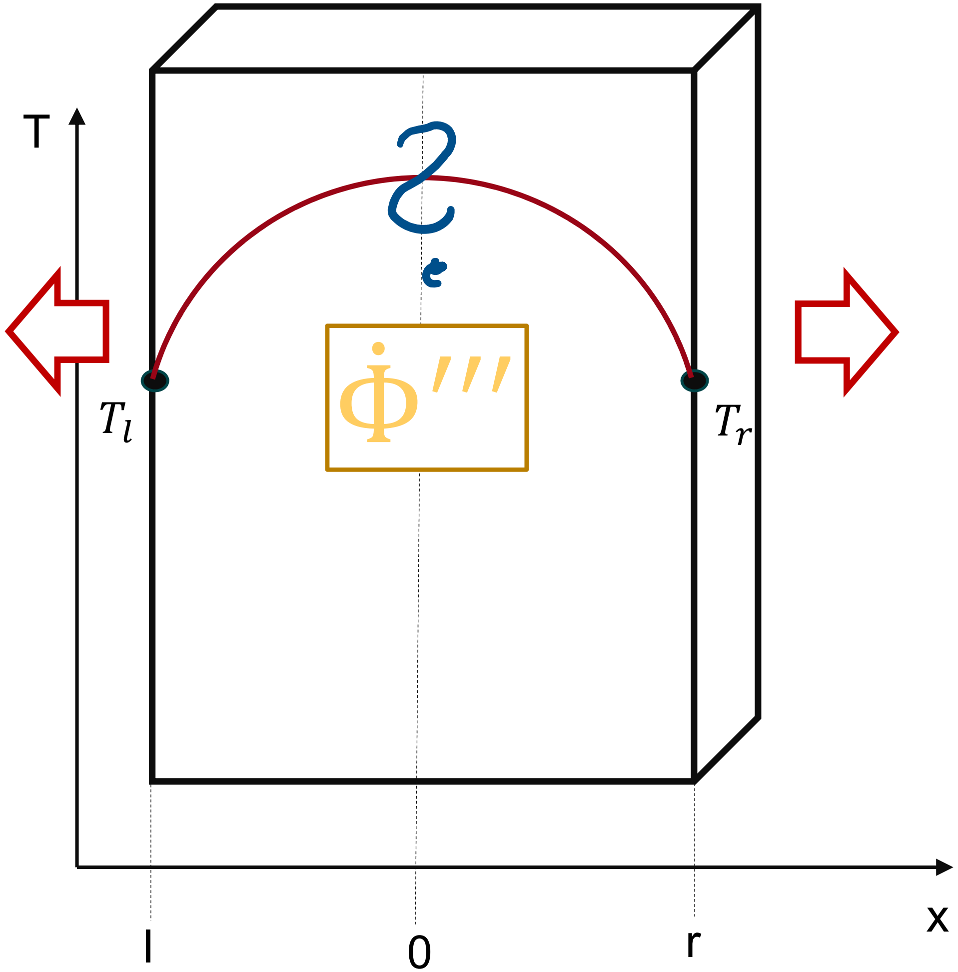
$$\dot{Q} = \dot{\Phi}''' \cdot V$$

$$\boxed{\rightarrow \dot{\Phi}''' = \frac{\dot{Q}}{V}}$$

Senke: $\dot{\Phi}''' = -\frac{\dot{Q}}{V}$

Einführung: Temperaturverlauf einem Körper mit Quelle (kartesische Koordinaten)

Durch die Quelle erzeugte Wärme kann nur nach außen abgegeben werden.



DGL für Temperaturfeld im x-Richtung

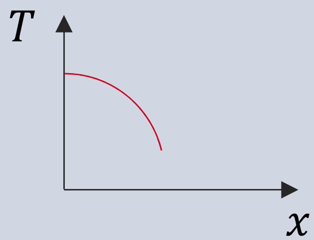
$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} + d\dot{\Phi}'''$$

Nach zweifacher Integration folgt:

$$T = -\frac{\dot{\Phi}'''}{2}x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

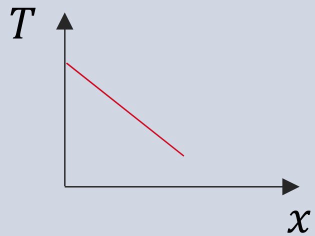
$\dot{\Phi}'''$> 0 : Parabolisch

$$T = -\frac{\dot{\Phi}'''}{2}x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$



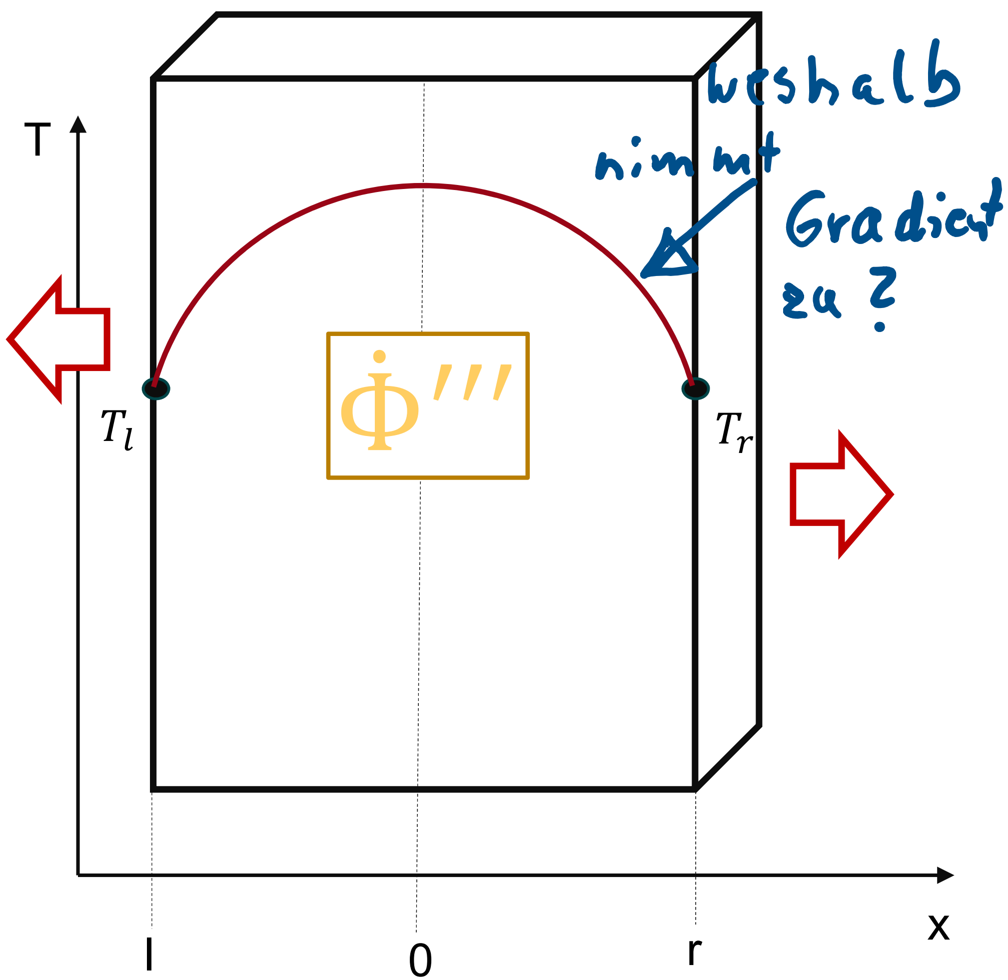
$\dot{\Phi}'''$ = 0 : Linear

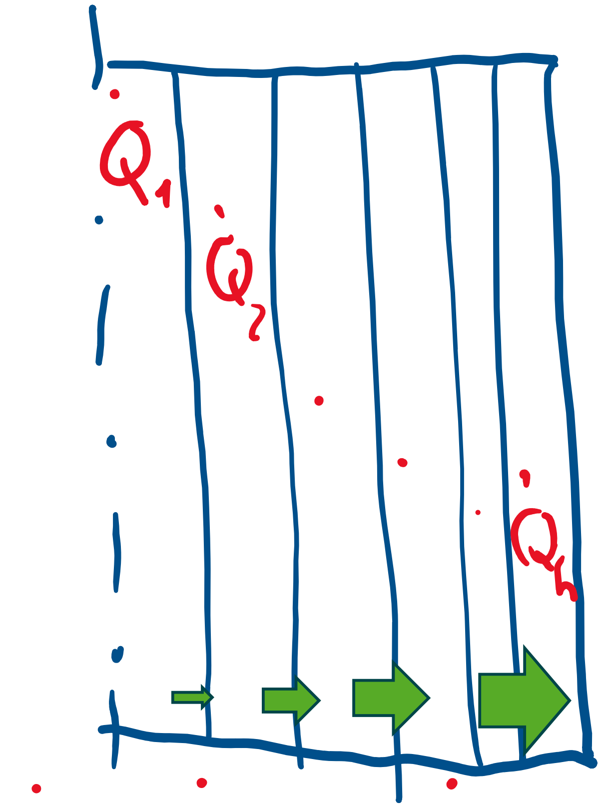
$$T = C_1 \cdot x + C_2$$



Einführung: Temperaturverlauf einem Körper mit Quelle (kartesische Koordinaten)

Durch die Quelle erzeugte Wärme kann nur nach außen abgegeben werden.





$$\underbrace{\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dots \dot{Q}_n}_{\text{durch Quelle}}$$

$$\dot{Q}_{Leit,1} = \dot{Q}_1$$

$$\dot{Q}_{Leit,2} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$$

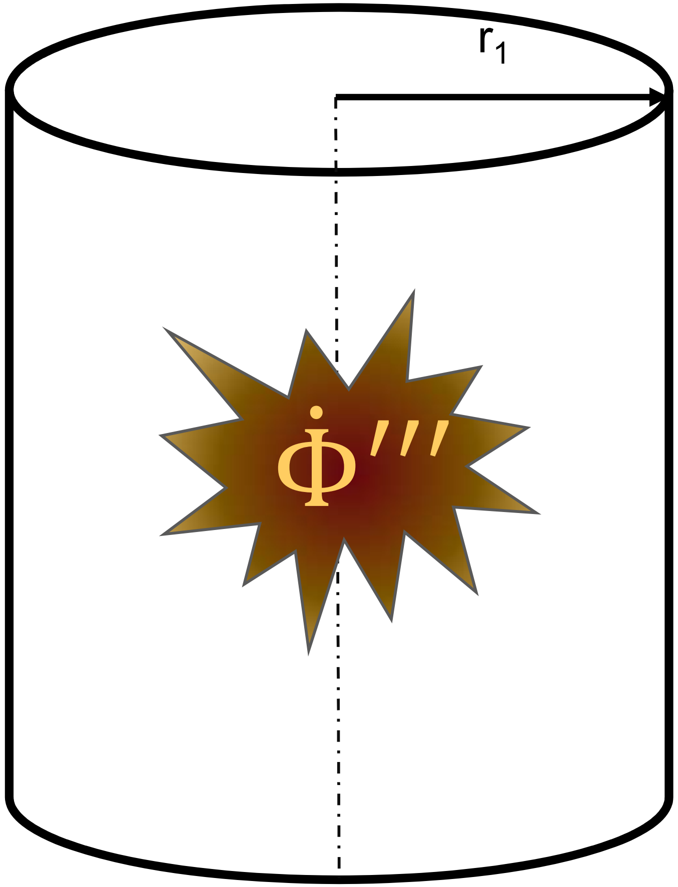
$$\vdots$$

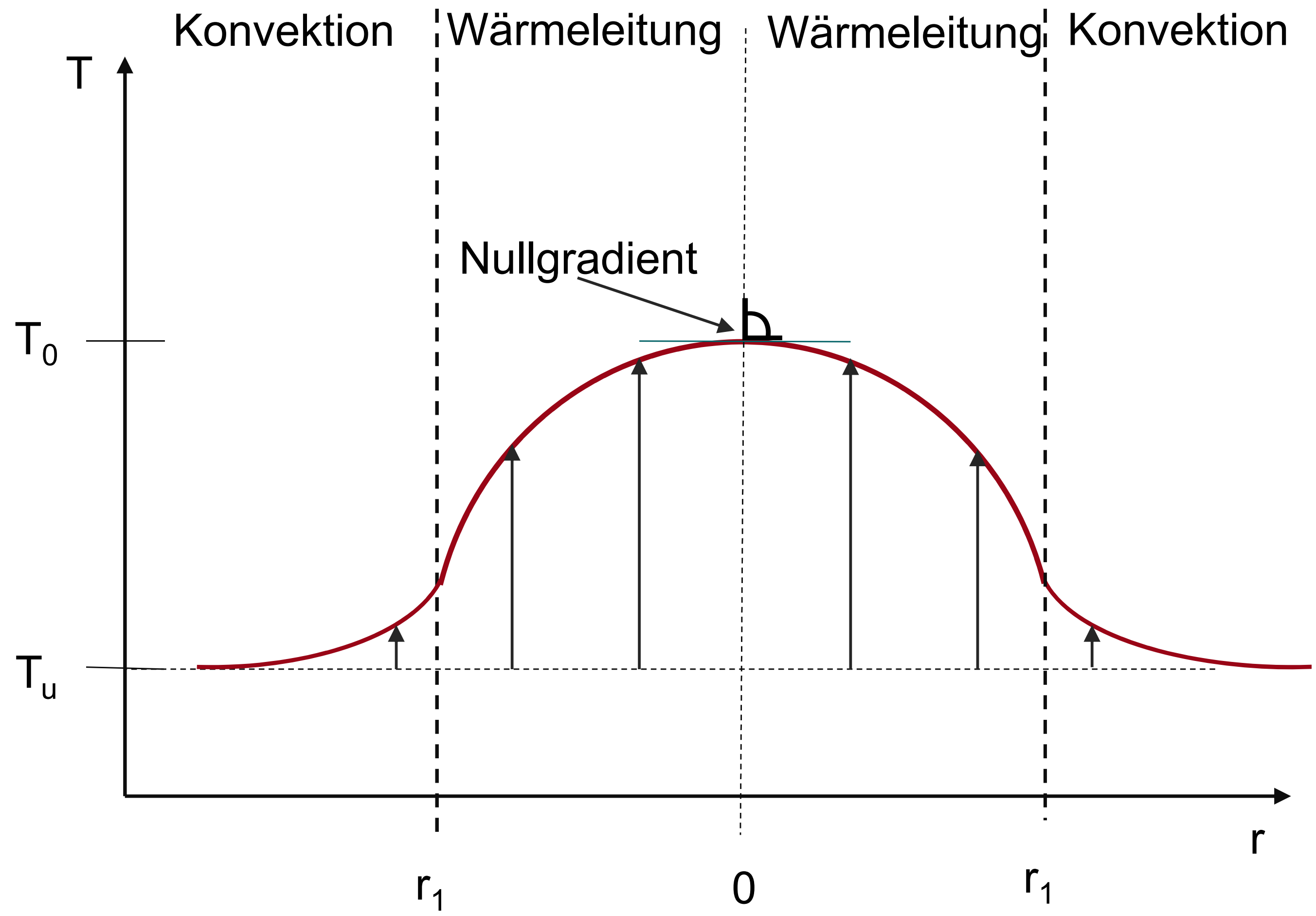
$$\dot{Q}_{Leit,n} = \sum \dot{Q}_{Prod}$$

Temperaturverlauf in einem zylindrischen Körper mit Quelle (z.B. Brennstab)

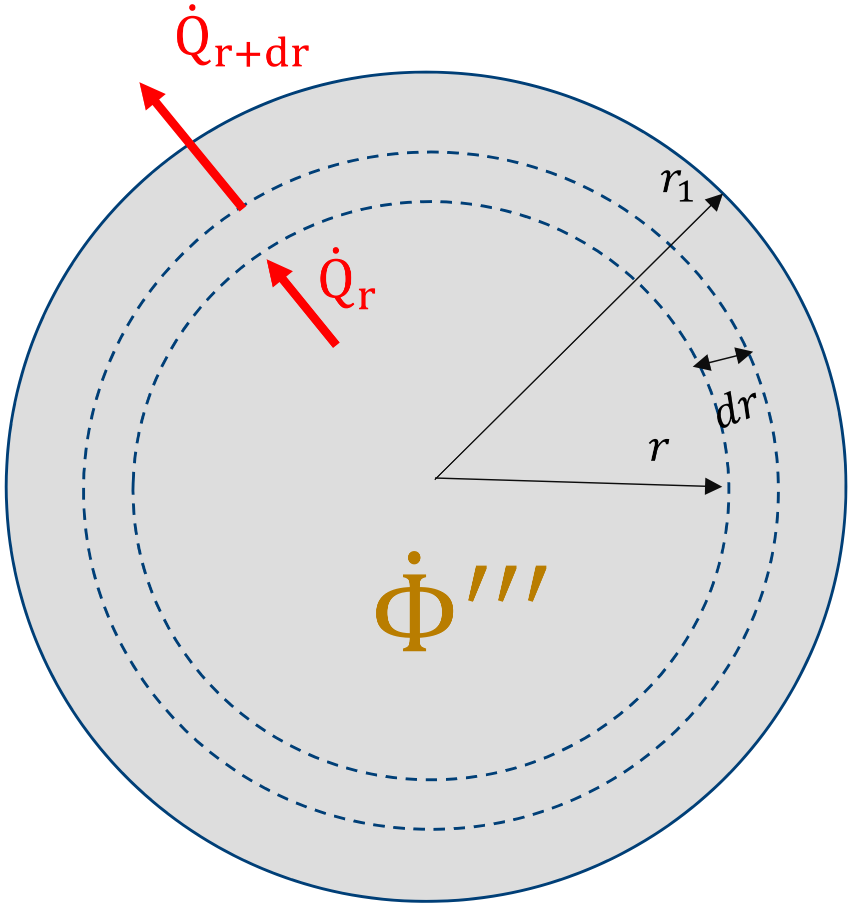
Durch die Quelle erzeugte Wärme kann nur nach außen abgegeben werden.

Wärmeproduktion $\dot{\Phi}'''$





DGL Herleitung
Stationäre 1-D Wärmeleitung in zylindrischen Körpern mit Quelle



Zylinderlänge L

Wärmeleitung (Fourier) für Zylinder

$$\dot{Q}_r = -\lambda \cdot A(r) \cdot \frac{dT}{dr}$$

Quellterm

$$d\dot{Q}_{Quelle} = \dot{\Phi}''' \cdot dV$$

Infinitesimales Volumenelement

$$dV = 2\,\pi \cdot r \cdot dr \cdot L$$

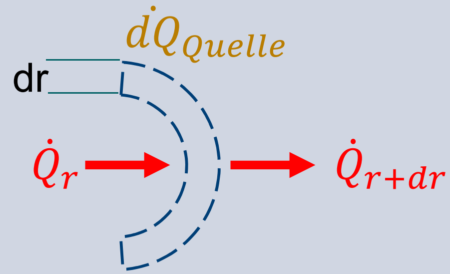
EB um infinitesimales Ringelement

$$0 = \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} + d\dot{Q}_{Quelle}$$

Aus Energiebilanz folgt mit Taylorreihenentwicklung und eingesetztem Quellterm die DGL

$$0 = \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} + d\dot{Q}_{Quelle}$$

$$0 = \dot{Q}_r - \left(\dot{Q}_r + \frac{\partial \dot{Q}_r}{\partial r} \cdot dr\right) + d\dot{Q}_{Quelle} \quad \text{(Taylorreihenentwicklung)}$$



$$0 = -\frac{d\dot{Q}_r}{dr} \cdot dr + d\dot{Q}_{Quelle}$$

$$0 = \cancel{-}\frac{d\left(\cancel{-}\lambda \cdot \cancel{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)\right)}{dr} \cdot \cancel{dr} + \dot{\Phi}''' \cdot \cancel{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot r \cdot \cancel{dr}$$

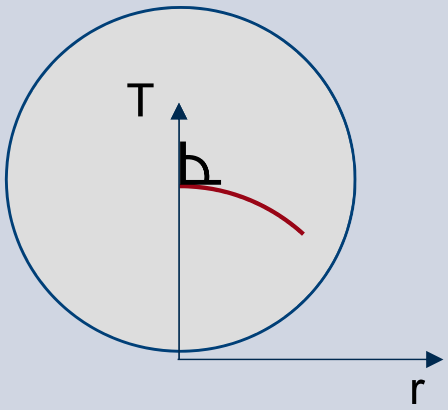
$$\longrightarrow \boxed{0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(r \frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda}} \quad \text{oder} \quad \boxed{0 = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda}}$$

Randbedingungen für Temperaturverlauf
Stationäre 1-D Wärmeleitung in zylindrischen Körpern mit Quelle

RB innen $r = 0$

Nullgradient:

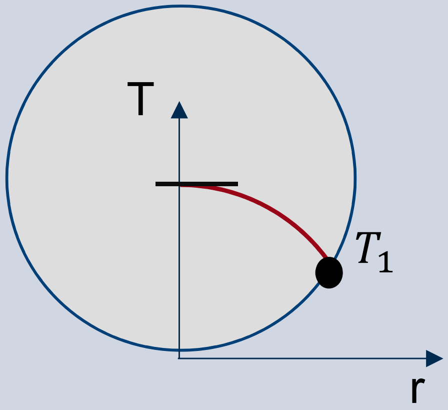
$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=0} = 0$$



Randbedingungen für Zylinderoberfläche $r = r_1$

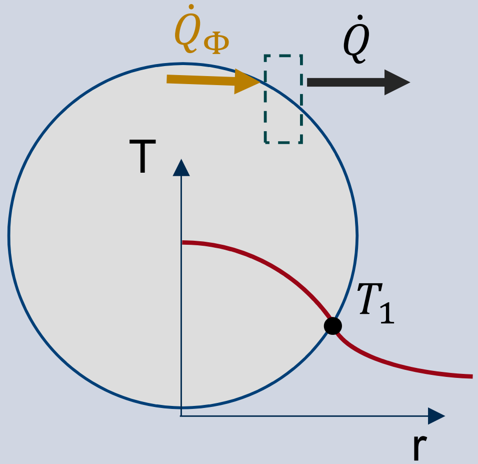
Fall 1:
eine Temperatur

$$T = T_1$$



Fall 2:
ein Wärmeübergangskoeffizient α

$$\dot{Q} = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot L \cdot \alpha \cdot (T_1 - T_u)$$



Wenn stationär:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_\Phi$$

$$2\pi r_1 L\alpha(T_1 - T_u) = \dot{\Phi}''' 2\pi {r_1}^2 L$$

$$\rightarrow \boxed{T_1 = T_u + \frac{r_1 \, \dot{\Phi}'''}{2\,\alpha}}$$

Temperaturverlauf Herleitung
Stationäre 1-D Wärmeleitung in zylindrischen Körpern mit Quelle

DGL

$$0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(r \frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda}$$

1. Integration

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} + C_1$$

Einsetzen von 1.RB $r = 0; \frac{dT}{dr} = 0$

$$r \frac{dT}{dr} = 0 = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} + C_1$$

$$\boxed{\rightarrow C_1 = 0}$$

Gleichung nach eingesetzter 1. Integrationskonstante

$$\cancel{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{1}{2} r^{\cancel{2}} \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda}$$

Bestimmung der Integrationskonstanten
Stationäre 1-D Wärmeleitung in zylindrischen Körpern mit Quelle

Gleichung nach 1. Integration

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{2} r \, \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda}$$

2. Integration

$$\mathrm{T} = -\frac{1}{4} r^2 \, \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} + C_2$$

Einsetzen von 2. RB $r = r_1$: $T(r_1) = T_u + \frac{r_1 \;\; \dot{\Phi}'''}{2 \; \alpha}$

$$T_u + \frac{r_1 \;\; \dot{\Phi}'''}{2 \; \alpha} = -\frac{1}{4} r_1^2 \, \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} + C_2$$

2. Integrationskonstante C_2

$$C_2 = T_u + \frac{r_1 \;\; \dot{\Phi}'''}{2 \; \alpha} + \frac{1}{4} r_1^2 \, \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda}$$

Temperaturverlauf endgültige Form
Stationäre 1-D Wärmeleitung in zylindrischen Körpern mit Quelle

Gleichung nach 2. Integration

$$T(r) = -\frac{1}{4} r^2 \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} + C_2$$

2. Integrationskonstante C_2

$$C_2 = T_u + \frac{r_1}{2\,\alpha}\frac{\dot{\Phi}'''}{} + \frac{1}{4} r_1^2 \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda}$$

2. Integrationskonstante C_2 in Gleichung eingesetzt

$$T(r) = -\frac{1}{4} r^2 \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} + T_u + \frac{r_1 \, \dot{\Phi}'''}{2\,\alpha} + \frac{1}{4} r^2 \frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda}$$

Endgültiger Temperaturverlauf für zylindrische Körper mit Quelle

$$T(r) = T_u + \frac{r_1^2 \cdot \dot{\Phi}'''}{4 \cdot \lambda}\left[1 + \frac{2 \cdot \lambda}{\alpha \cdot r_1} - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right]$$

Das ist ein Polynom 2. Ordnung (Parabel)

Temperaturverlauf in allgemeiner Form
Stationäre 1-D Wärmeleitung in beliebigen Geometrien mit Quelle

Allgemeiner Temperaturverlauf für ebene, zylindrische oder kugelsymmetrische Geometrie mit Quelle

$$T(\xi) = T_u + \frac{s^2 \cdot \dot{\Phi}'''}{2(n+1) \cdot \lambda} \left[1 + \frac{2 \cdot \lambda}{\alpha \cdot s} - \left(\frac{\xi}{s} \right)^2 \right]$$

Variablen für verschiedene Geometrien:

	Platte *)	**Zylinder**	**Kugel**
ξ	x	r	r
s	δ	r_1	r_1
n	0	1	2

* Bei der Platte ist x auf die Symmetrieebene zu beziehen, und $\delta = \frac{1}{2} \cdot \text{Plattendicke}$

Berechnung der Maximal- und Minimaltemperatur in einem Körper

Allgemeiner Temperaturverlauf

$$T(\xi) = T_u + \frac{s^2 \cdot \dot{\Phi}'''}{2(n+1)\cdot\lambda}\left[1 + \frac{2\cdot\lambda}{\alpha\cdot s} - \left(\frac{\xi}{s}\right)^2\right]$$

I) am größten bei ξ= 0 (Maximaltemperatur in Körpermitte)

$$T_{max} = T(\xi = 0) = T_u + \frac{s^2 \cdot \dot{\Phi}'''}{2(n+1)\cdot\lambda}\left[1 + \frac{2\cdot\lambda}{\alpha\cdot s}\right]$$

II) am kleinsten bei ξ= s (Minimaltemperatur an der Oberfläche)

$$T_{min} = T(\xi = s) = T_u + \frac{s^2 \cdot \dot{\Phi}'''}{(n+1)\cdot\alpha}$$

$$\alpha \uparrow \quad \rightarrow \quad T_{min} = Ts \downarrow$$

$$\dot{\Phi}''' \uparrow \quad \rightarrow \quad T_{min} = T_s \uparrow$$

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Verständnisfragen

Welches Temperaturprofil stellt sich für zylindrische Körper mit Quelle ein?

Welche unterschiedlichen Randbedingungen können an der Zylinderoberfläche existieren?

Wie wird die produzierte Wärme über die Zylinderoberfläche abgeführt?

Wie lassen sich Minimal- und Maximaltemperatur ermitteln?