

Wärme- und Stoffübertragung I

Übungsskript

„Wärme- und Stoffübertragung I“ (Übungsskript)

Ausgabe vom 30. September 2020

RWTH Aachen University
Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Kneer
Augustinerbach 6
52056 Aachen
Telefax 0241/80-95400
Telefon 0241/80-92143
www.wsa.rwth-aachen.de
info@wsa.rwth-aachen.de

Inhaltsverzeichnis

I. Aufgaben	1
1. Wärmestrahlung	3
1.1. Sonnenkollektor	3
1.2. Flächenhelligkeiten & Energiebilanzen	5
1.3. Kugelförmige, evakuierte Glühlampe*	7
1.4. Strahlung in einem keilförmigen Spalt	9
1.5. Feuerfester Bleitiegel*	10
1.6. Schwarz strahlender Hohlkörper	12
1.7. Quarzglasfenster im Ofen	13
1.8. Netto-Strahlungswärmestrom zwischen zwei Platten*	15
1.9. Deckenheizung	16
1.10. Kuppel	18
2. Wärmeleitung	19
2.1. Instationäres Temperaturfeld*	19
2.2. Poensgengerät*	20
2.3. Temperaturverläufe in ebener Wand	22
2.4. Zwiebelprinzip	23
2.5. Feuerofen*	24
2.6. Wärmer Wohnen*	25
2.7. Hohlzylinder*	27
2.8. Soleleitung	28
2.9. Warmwasserleitung	29
2.10. Rohrbefestigung*	30
2.11. Beschlagene Heckscheibe	32
2.12. Veränderliche Kreisrippe*	34
2.13. Doppelwandiger Behälter*	35
2.14. Brennelement eines Hochtemperaturreaktors	37
2.15. Kupferstab*	38
2.16. Kritischer Sprengstoff	39
2.17. Kupferkugel	41
2.18. Gerührter Tank*	42
2.19. Schwingungsproblem*	44

2.20. Speicherofen*	45
2.21. Eiskugelkühlung*	47
2.22. Kontakt der halbunendlichen Körper	49
2.23. Gewalztes Blech	50
3. Konvektion	53
3.1. Heißer Draht*	53
3.2. Bleileitung	54
3.3. Drahtgewebe in der Strömung	56
3.4. Beheiztes Rohr	57
3.5. Absorbtion einer porösen Wand*	58
3.6. Lotrechtes Rohr	59
3.7. Wasserversorgungsleitung	60
3.8. Wärmeübergang an einer beheizten Platte	62
4. Strahlung und Konvektion	63
4.1. Thermoelement	63
4.2. Stutzen im Rohr*	65
4.3. Methanolbehälter*	67
4.4. Luftspalt	68
4.5. Beatmungsgerät*	69
5. Stoffübertragung	71
5.1. Glasrohr	71
5.2. Feuchtes Holz	73
5.3. Kondensation von Wasserdampf	74
5.4. Haialarm auf Mallorca*	75
5.5. Noch kritischerer Sprengstoff*	77
5.6. Perowskite*	79
5.7. Geteertes Holz*	81
5.8. Gaswäscher*	83
II. Ausgewählte Musterlösungen	85
1. Musterlösungen Wärmestrahlung	87
1.3. Kugelförmige, evakuierte Glühlampe	87
1.5. Feuerfester Bleitiegel	96
1.8. Netto-Strahlungswärmestrom zwischen zwei Platten	103
2. Musterlösungen Wärmeleitung	107
2.1. Instationäres Temperaturfeld	107
2.2. Poensengerät	111

2.5. Feuerofen	113
2.6. Wärmer Wohnen	116
2.7. Hohlzylinder	118
2.10. Rohrbefestigung	122
2.12. Veränderliche Kreisrippe	126
2.13. Doppelwandiger Behälter	130
2.15. Kupferstab	134
2.18. Gerührter Tank	140
2.19. Schwingungsproblem	144
2.20. Speicherofen	148
2.21. Eiskugelkühlung	154
3. Musterlösungen Konvektion	161
3.1. Heißer Draht	161
3.5. Absorbtion einer porösen Wand	166
4. Musterlösungen Strahlung und Konvektion	175
4.2. Stutzen im Rohr	175
4.3. Methanolbehälter	184
4.5. Beatmungsgerät	191
5. Musterlösungen Stoffübertragung	201
5.4. Haialarm auf Mallorca	201
5.5. Noch kritischerer Sprengstoff	207
5.6. Perowskite	210
5.7. Geteertes Holz	215
5.8. Gaswäscher	225
III. Ergebnisse	233
1. Ergebnisse Wärmestrahlung	235
1.1. Sonnenkollektor	235
1.2. Flächenhelligkeiten & Energiebilanzen	235
1.3. Kugelförmige, evakuierte Glühlampe	236
1.4. Strahlung in einem keilförmigen Spalt	236
1.5. Feuerfester Bleitiegel	237
1.6. Schwarz strahlender Hohlkörper	237
1.7. Quarzglasfenster im Ofen	237
1.8. Netto-Strahlungswärmestrom zwischen zwei Platten	237
1.9. Deckenheizung	238
1.10. Kuppel	238

2. Ergebnisse Wärmeleitung	239
2.1. Instationäres Temperaturfeld	239
2.2. Poensgengerät	240
2.3. Temperaturverläufe in ebener Wand	240
2.4. Zwiebelprinzip	241
2.5. Feuerofen	241
2.6. Wärmer Wohnen	241
2.7. Hohlzylinder	241
2.8. Soleleitung	242
2.9. Warmwasserleitung	242
2.10. Rohrbefestigung	243
2.11. Beschlagene Heckscheibe	243
2.12. Veränderliche Kreisrippe	243
2.13. Doppelwandiger Behälter	243
2.14. Brennelement eines Hochtemperaturreaktors	243
2.15. Kupferstab	244
2.16. Kritischer Sprengstoff	244
2.17. Kupferkugel	244
2.18. Gerührter Tank	245
2.19. Schwingungsproblem	246
2.20. Speicherofen	246
2.21. Eiskugelkühlung	247
2.22. Kontakt der halbunendlichen Körper	248
2.23. Gewalztes Blech	248
3. Ergebnisse Konvektion	249
3.1. Heißer Draht	249
3.2. Bleileitung	250
3.3. Drahtgewebe in der Strömung	251
3.4. Beheiztes Rohr	251
3.5. Absorbtion einer porösen Wand	252
3.6. Lotrechtes Rohr	253
3.7. Wasserversorgungsleitung	253
3.8. Wärmeübergang an einer beheizten Platte	254
4. Ergebnisse Strahlung und Konvektion	255
4.1. Thermoelement	255
4.2. Stutzen im Rohr	255
4.3. Methanolbehälter	256
4.4. Luftspalt	256
4.5. Beatmungsgerät	256

5. Ergebnisse Stoffübertragung	257
5.1. Glasrohr	257
5.2. Feuchtes Holz	257
5.3. Kondensation von Wasserdampf	258
5.4. Haialarm auf Mallorca	258
5.5. Noch kritischerer Sprengstoff	258
5.6. Perowskite	258
5.7. Geteertes Holz	259
5.8. Gaswäscher	259

Teil I.

Aufgaben

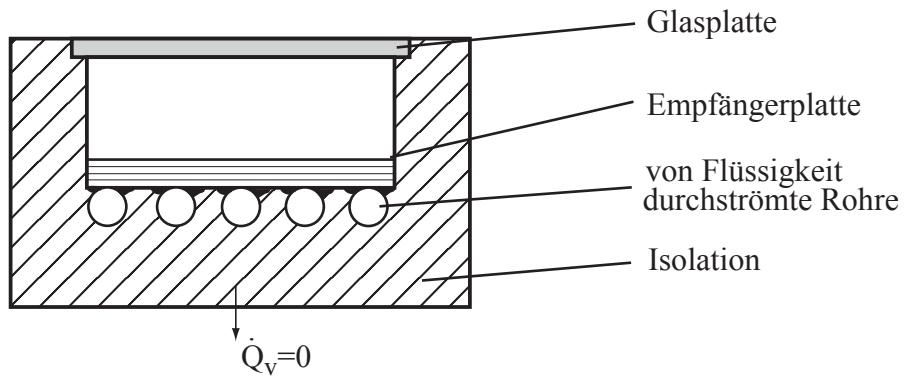
Kapitel 1.

Wärmestrahlung

1.1. Sonnenkollektor

Betrachtet wird der prinzipielle Aufbau eines Sonnenkollektors. Die Empfängerplatte des Kollektors (Absorptionsgrad $\alpha_E = 1$) liegt in einem vollkommen wärmeisolierten Kasten, der mit einer Glasplatte abgedeckt ist. Der Raum zwischen Empfänger- und Glasplatte ist als evakuiert zu betrachten. Das Glas hat bei Strahlung, die von einer Strahlungsquelle hoher Temperatur stammt (hier ausschließlich als kurzwellige Strahlung angenommen), einen Absorptionsgrad $\alpha_{GK} = 0,05$ und einen Transmissionsgrad $\tau_{GK} = 0,88$ bei Strahlung, die von einer Quelle niedriger Temperatur herrührt (hier ausschließlich als langwellige Strahlung angenommen), ist $\alpha_{GL} = 0,90$ und $\tau_{GL} = 0,05$. Der Emissionsgrad des Glases bei der sich einstellenden Glastemperatur beträgt $\varepsilon_G = 0,84$.

Die Empfängerplatte ist senkrecht gegen die Sonne gerichtet. Die Umgebung, welche die Glas- bzw. Empfängerplatte sieht, ist als schwarz anzunehmen. Die von der Sonne zugestrahlte Wärmestromdichte beträgt $\dot{q}_s'' = 920 \text{ W/m}^2$ die von der Umgebung $\dot{q}_U'' = 80 \text{ W/m}^2$. Die Wärme wird über an der Rückseite der Empfängerplatte angeordnete Rohre, durch die Flüssigkeit strömt, abgeführt. Der Kontakt zwischen der Empfängerplatte und den Rohren ist thermisch widerstandsfrei und der Flüssigkeitsstrom so gewählt, dass die Empfängerplatte näherungsweise eine konstante Temperatur von $T_E = 60^\circ\text{C}$ annimmt.



Aufgaben:

- Welche Temperatur T_G nimmt die Glasplatte an?
- Wie groß ist der Wärmegewinn pro Zeit- und Flächeneinheit \dot{q}_{Nutz}'' ?
- Welcher Wärmegewinn pro Zeit- und Flächeneinheit $\dot{q}_{\text{Nutz},0}''$ ergibt sich ohne die Glasplatte?

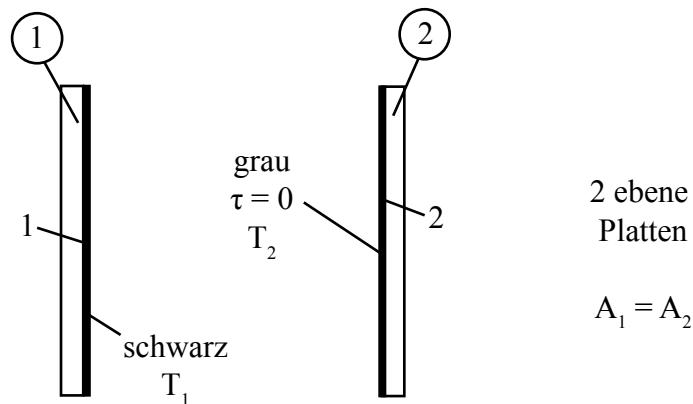
Annahmen:

- Randeinflüsse wie Reflexionen an den Seitenwänden des Kollektors sind zu vernachlässigen.
- Die Wärmeübertragung durch Leitung und Konvektion soll unberücksichtigt bleiben.

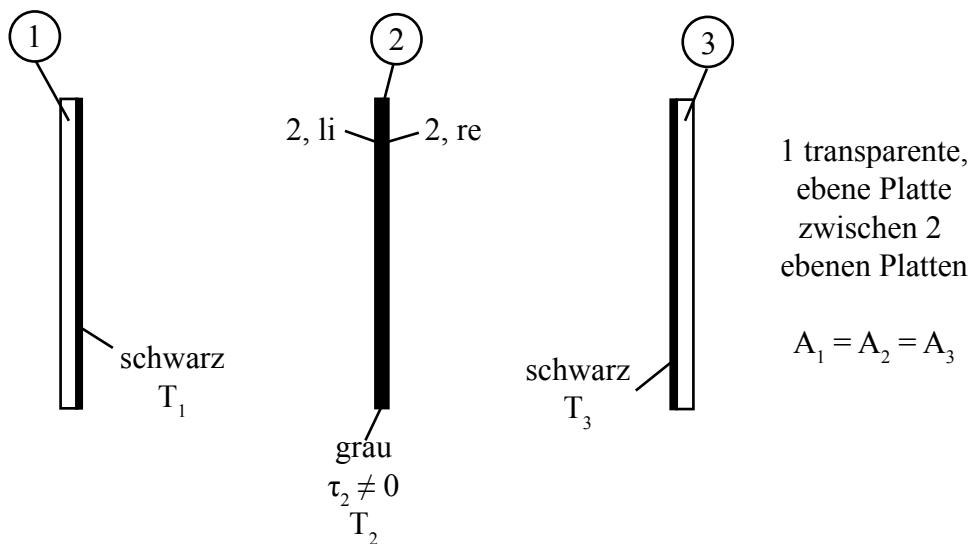
1.2. Flächenhelligkeiten & Energiebilanzen

Bestimmen Sie für folgende Anordnungen die geforderten Flächenhelligkeiten und Energiebilanzen. Die jeweiligen Einstrahlzahlen sind bekannt und alle Strahlungseigenschaften ($\rho, \tau, \alpha, \varepsilon$) sind gegeben. Die Temperaturen der Objekte sind bekannt und konstant. Die Strahlung an den Kopfseiten der Objekte und aus der Umgebung ist zu vernachlässigen.

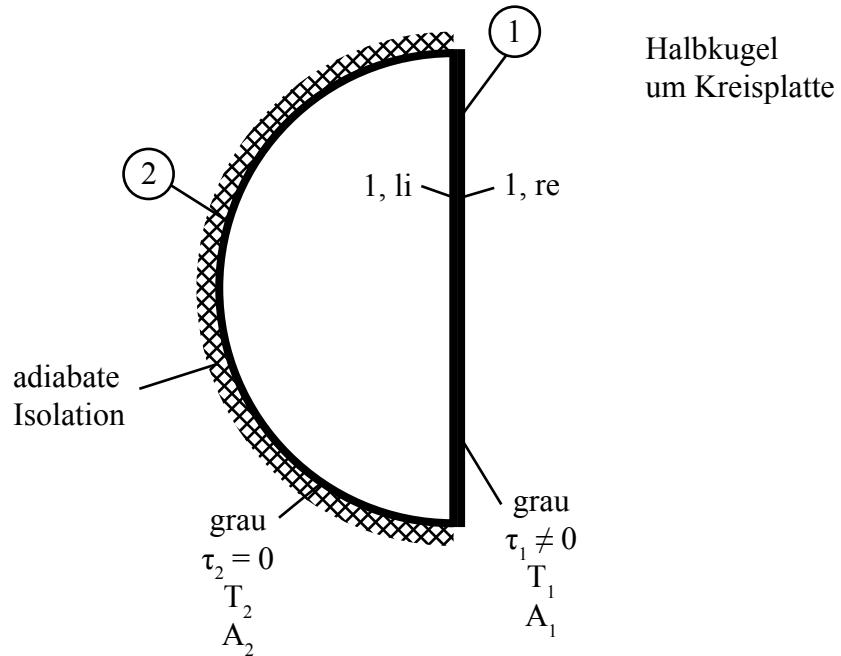
- a) Bestimmen Sie für beide Flächen die jeweilige Flächenhelligkeit.



- b) Bestimmen Sie für alle Flächen die jeweiligen Flächenhelligkeiten und formulieren Sie die Energiebilanz für den mittleren Körper.



- c) Bestimmen Sie für alle angegebenen Flächen die Flächenhelligkeiten und geben Sie die jeweilige Energiebilanz um die Halbkugel und Kreisplatte an.

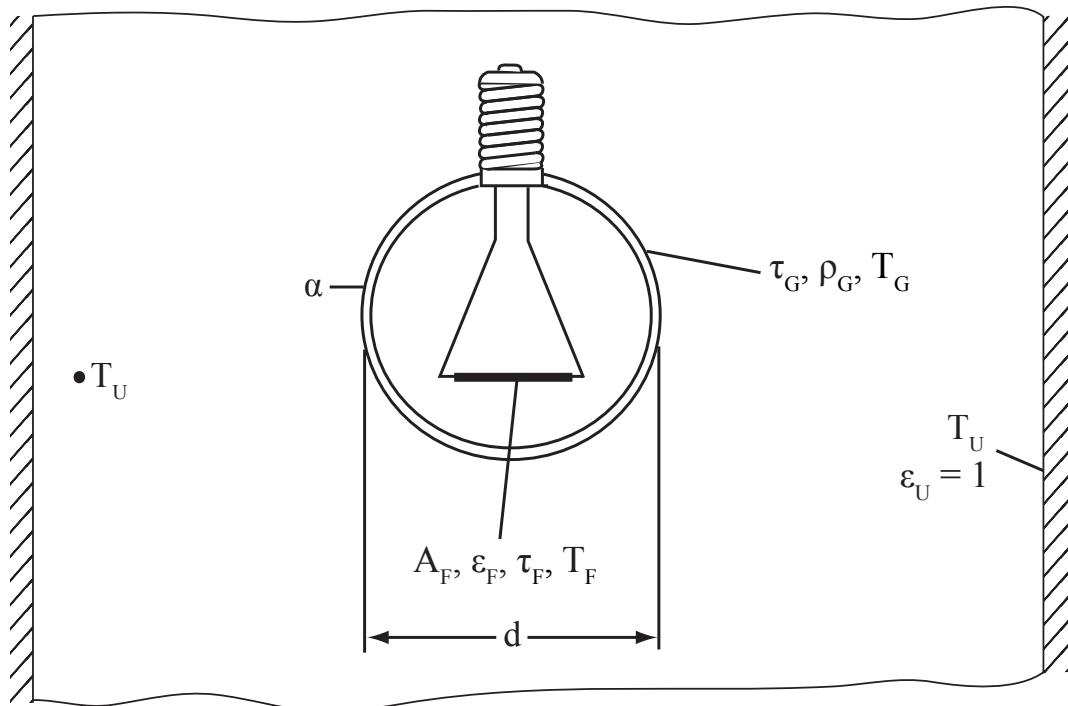


1.3. Kugelförmige, evakuierte Glühlampe*

Es sind folgende Daten einer kugelförmigen, evakuierten Glühlampe bekannt:

d	30	mm	Durchmesser der Glaskugel
τ_G	0,97	-	Transmissionsgrad der Glaswandung
ρ_G	0	-	Reflexionsgrad der Glaswandung
A_F	40	mm^2	Strahlungsüberfläche des Glühfadens
ε_F	0,25	-	Emissionsgrad der Glühfadenoberfläche
τ_F	0	-	Transmissionsgrad der Glühfadenoberfläche

Die Glaskugeltemperatur der frei in der Luft aufgehängten Glühlampe soll $T_G = 70^\circ\text{C}$ bei einer Umgebungslufttemperatur von $T_U = 20^\circ\text{C}$ nicht überschreiten. Der Wärmeübergangskoeffizient an der Glaskugeloberfläche ist dann $\alpha = 11 \text{ W/m}^2\text{K}$.



Aufgaben:

- a) Ermitteln Sie die Temperatur des Glühfadens T_F .
- b) Ermitteln Sie die elektrische Leistung \dot{Q}_{el} , welche der Glühfaden aufnehmen kann.
- c) Ermitteln Sie die Wellenlänge λ_{max} , bei der vom Glühfaden die maximale Strahlungsenergiedichte emittiert wird.
- d) Wie sehen die zur Berechnung der Glühfadentemperatur T_F und der elektrischen Leistung \dot{Q}_{el} erforderlichen Bilanzgleichungen aus, wenn die Eigenemission der Glaskugel und die der Umgebungswände mitberücksichtigt werden? Die Temperatur der Wandoberflächen sei $T_U = 20^\circ\text{C}$, der Emissionsgrad $\varepsilon_U = 1$. Berechnen Sie für diesen Fall die Glühfadentemperatur T_F und die elektrische Leistung \dot{Q}_{el} .

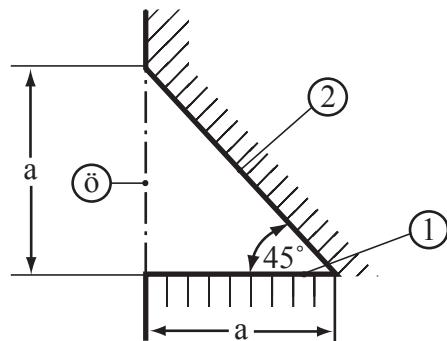
Annahmen:

- Glaskörper und Glühfaden sind graue Körper.
- Der Lampensockel hat keinen Einfluss.
- Der Wärmewiderstand der dünnen Glaswandung ist vernachlässigbar.
- Die Eigenstrahlung (Emission) der Glaskugel ist vernachlässigbar (gilt nur für a)-c)).
- Strahlung aus der Umgebung bleibt unberücksichtigt (gilt nur für a)-c)).

1.4. Strahlung in einem keilförmigen Spalt

Für einen Spalt mit keilförmigem Querschnitt (entsprechend der Skizze) und unendlich großer Längsausdehnung sind folgende Daten bekannt:

Die Oberfläche (1) ist $a = 30 \text{ cm}$ breit, hat einen Emissionsgrad von $\varepsilon_1 = 1$ und eine Temperatur von $T_1 = 1000 \text{ K}$. Die Öffnung des Spaltes ist ebenfalls 30 cm groß und liegt senkrecht zur Oberfläche (1). Die Oberfläche (2) ist grau und auf der Rückseite adiabat isoliert. Der Raum außerhalb des Spaltes kann als schwarz mit einer Temperatur von 0 K angenommen werden. Konvektionsflüsse sollen unberücksichtigt bleiben.

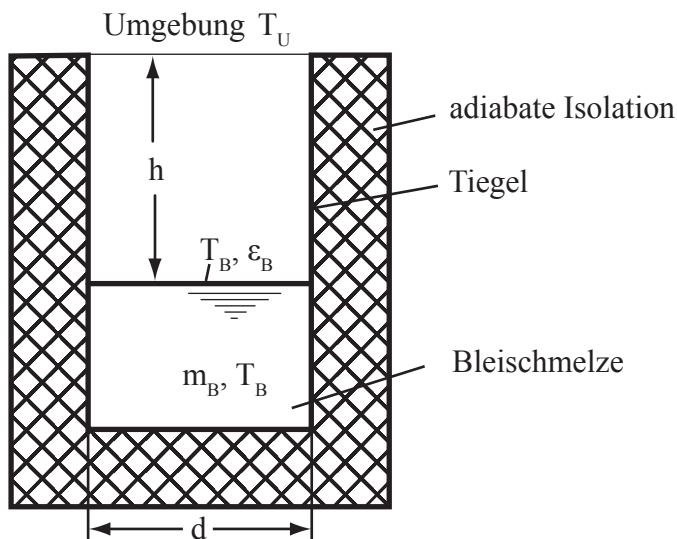


Aufgaben:

- Berechnen Sie die Einstrahlzahlen $\Phi_{1,2}, \Phi_{2,1}, \Phi_{1,\ddot{o}}, \Phi_{2,\ddot{o}}$
- Ermitteln Sie den Energieverlust der Oberfläche (1) $\dot{q}'_{1,V}$ und des Spaltes $\dot{q}'_{\ddot{o},V}$ bezogen auf die Längeneinheit des Spaltes.
- Bestimmen Sie die Temperatur T_2 der Oberfläche (2).

1.5. Feuerfester Bleitiegel*

In einem feuerfesten, zylindrischen Tiegel befindet sich flüssiges Blei auf Schmelztemperatur $T_B = 327^\circ\text{C}$. Der Durchmesser des Tiegels ist $d = 25 \text{ mm}$, die lichte Höhe zwischen der Oberfläche der Bleischmelze und der Tiegelöffnung beträgt $h = 25 \text{ mm}$. Die Tiegelwände sind adiabat isoliert. Mit den Abmessungen d und h ergibt sich für die Einstrahlzahl zwischen Bleioberfläche und Tiegelöffnung $\Phi_{1,\text{O}} = 0,38$.



Aufgaben:

- Berechnen Sie den aus der Bleischmelze abfließenden Strahlungswärmestrom \dot{Q}_K unter folgenden Annahmen:
 - Die Temperatur der Bleioberfläche ist konstant und gleich der Schmelztemperatur T_B , die Oberfläche ist grau mit dem Emissionsgrad $\varepsilon_B = 0,8$.
 - Umgebung der Tiegelöffnung schwarz, Umgebungstemperatur $T_U = 0 \text{ K}$
 - Konvektive Wärmeflüsse bleiben unberücksichtigt.
- Welche Wärmeströme $\dot{Q}_{K,0}$, $\dot{Q}_{K,\infty}$ ergeben sich für die beiden Grenzfälle $h = 0$ und $h = \infty$ bei sonst gleichen Bedingungen wie in a)?
- Ermitteln Sie für die drei Fälle $h = 25 \text{ mm}$, 0 und ∞ näherungsweise (Bleioberflächentemperatur zeitlich konstant und gleich Schmelztemperatur) die Zeit t_E

nach welcher die Schmelze erstarrt ist. Der Bleiinhalt des Tiegels ist $m_B = 90 \text{ g}$, die spezifische Schmelzenthalpie des Bleis ist $h_B = 23,3 \text{ kJ/kg}$.

1.6. Schwarz strahlender Hohlkörper

Schwarze Strahlung kann man näherungsweise durch gleichmäßig temperierte Hohlkörper mit einer kleinen Öffnung erzeugen.

Aufgabe:

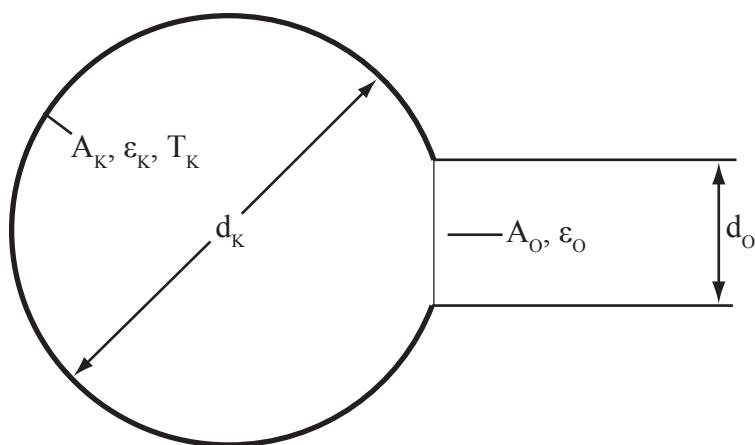
Welchen Durchmesser d_O muss die Öffnung einer nach außen gut isolierten, auf T_K gleichmäßig temperierten Kupferhohlkugel mit einem Durchmesser von $d_K = 20\text{ cm}$ haben, damit aus der Öffnung Strahlung der Temperatur T_K austritt, die sich nur um 1 % von schwarzer Strahlung dieser Temperatur unterscheidet?

Hinweis:

Das bedeutet, dass der Öffnung ein effektiver Emissionsgrad von $\varepsilon_O = 0,99$ zugeordnet werden kann. Die innere Oberfläche der Hohlkugel sei oxidiert (grau und diffus), der Emissionsgrad $\epsilon_K = 0,55$.

Annahmen:

Die Strahlungswechselwirkungen zwischen der Hohlkugel bzw. Öffnung und der Umgebung können unberücksichtigt bleiben ($\epsilon_U = 1$, $T_U = 0\text{ K}$).

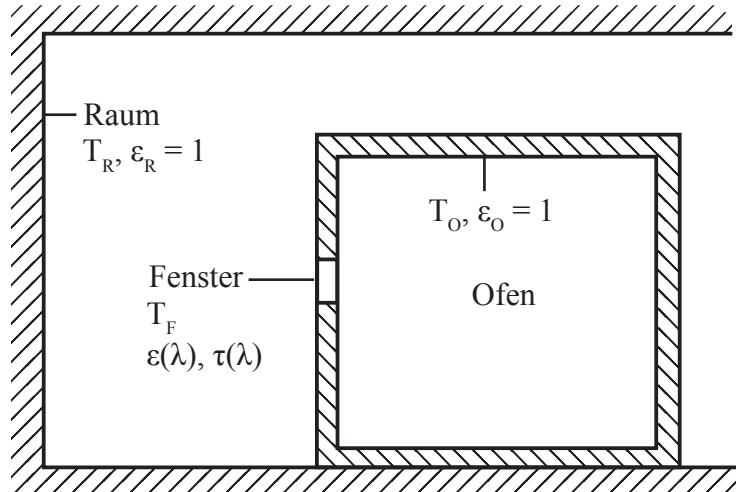


1.7. Quarzglasfenster im Ofen

In die Wand eines Ofens ist als Sichtöffnung ein Quarzglasfenster von $d = 20\text{ cm}$ Durchmesser eingebaut. Das Quarzglas besitzt die folgenden von der Wellenlänge abhängigen Strahlungseigenschaften:

Wellenlänge	Strahlungseigenschaften		
$0 < \lambda_K \leq 4\text{ }\mu\text{m}$	$\tau_K = 0,9$	$\varepsilon_K = 0,1$	$\rho_K = 0$
$4\text{ }\mu\text{m} < \lambda_L < \infty$	$\tau_L = 0$	$\varepsilon_L = 0,8$	$\rho_L = 0,2$

Die innere Oberfläche des Ofens ist schwarz und hat eine Temperatur von $T_O = 1000\text{ K}$. Die Oberfläche des den Ofens umschließenden Raumes kann ebenfalls als schwarzer Strahler behandelt werden, ihre Temperatur beträgt $T_R = 300\text{ K}$.



Gegebene Größen:

$\lambda \cdot T [\mu\text{m K}]$	1111,1	1222,2	3000	3111,1	3222,2	3555,6	4000
$\frac{\int_0^\lambda \dot{q}_s'' \lambda(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4}$	0,00101	0,00252	0,27322	0,29825	0,32300	0,39445	0,48085

Aufgaben:

- a) Berechnen Sie die einseitige Strahlungsemision des Quarzglasfensters pro Flächeneinheit $\dot{q}_{F,\varepsilon}''$ aus einer Bilanz um das Fenster (**nicht** die gesamte Flächenhelligkeit).
- b) Berechnen Sie den Strahlungswärmeverlust des Ofens durch das Glasfenster \dot{Q}_V für den stationären Fall.
- c) Berechnen Sie die Temperatur des Fensters T_F .

Annahmen:

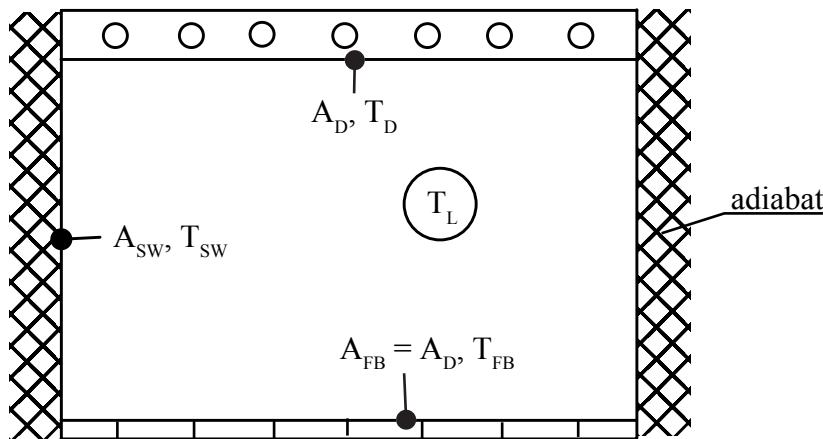
- Wärmetransport durch Leitung und Konvektion sind zu vernachlässigen (d. h. der Ofen hat lediglich Wärmeverluste über das Fenster).

1.8. Netto-Strahlungswärmestrom zwischen zwei Platten*

Es ist zu zeigen, in welcher Weise sich der Netto-Strahlungswärmestrom zwischen zwei planparallelen, unendlich ausgedehnten Flächen ändert, wenn zwischen diese Strahlungsschirme gestellt werden, deren Emissionsgrad gleich demjenigen der äußeren Flächen ist. Der Raum zwischen den Flächen sei evakuiert.

1.9. Deckenheizung

Der Innenraum eines Gebäudes mit $7 \text{ m} \times 7 \text{ m}$ Grundfläche und $3,6 \text{ m}$ Höhe ist mit einer Deckenstrahlungsheizung ausgestattet. Die Beheizung der Decke erfolgt durch Rohre, die in ihr verlegt sind und von Heizwasser durchströmt werden. Für den Holzfußboden wird eine Oberflächentemperatur von $T_{FB} = 26^\circ\text{C}$ gefordert. Aufgrund empirischer Behaglichkeitsbedingungen soll der Nettostrahlungswärmefluss durch die Fußbodenoberfläche $\dot{Q}_S = 1750 \text{ W}$ betragen (Nettostrahlungswärmefluss durch die Fußbodenfläche = Differenz der insgesamt pro Zeiteinheit zufließenden und abfließenden Strahlungsenergien). Die Emissionsgrade aller Raumumschließungsflächen können näherungsweise zu Eins gesetzt werden.



Aufgaben:

- Ermitteln Sie die notwendige mittlere Deckentemperatur T_D unter Vernachlässigung der Seitenwände, d.h. mit der Voraussetzung, dass die Einstrahlzahlen $\Phi_{FB,D} = \Phi_{D,FB} = 1$ sind.
- Bestimmen Sie die mittlere Deckentemperatur T_D unter Berücksichtigung der Seitenwände. Hierzu ist anzunehmen, dass die Seitenwände nach außen adiabat sind und im Raum durch einen entsprechenden Luftwechsel eine Lufttemperatur von $T_L = 22^\circ\text{C}$ herrscht. Für den konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten an den Raumoberflächen kann ein mittlerer Wert von $\alpha = 3 \text{ W/m}^2\text{K}$ verwendet werden. Die Einstrahlzahlen zwischen Decke und Fußboden betragen $\Phi_{D,FB} = \Phi_{FB,D} = \Phi = 0,41$.

Anleitung:

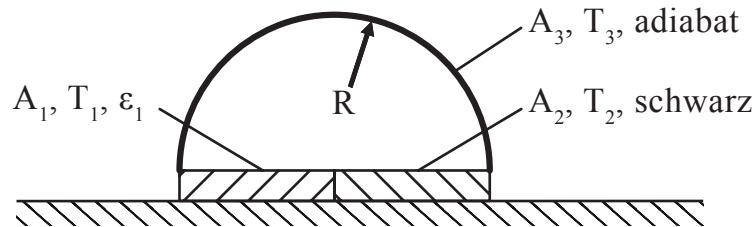
1. Behandeln Sie die Seitenwände als eine zusammenhängende Strahlungs-oberfläche.
2. Berechnen Sie zunächst die Temperatur der Seitenwände T_{SW} .
3. Benutzen Sie zur Auflösung der Bestimmungsgleichung für T_{SW} die Näherung

$$\left(\frac{T_{SW}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{FB}}{100}\right)^4 \approx \frac{1}{25} \left(\frac{T_{FB}}{100}\right)^3 \cdot (T_{SW} - T_{FB})$$

- c) Welche Gesamtwärmeleistung \dot{Q}_H muss die Deckenheizung unter den Bedingungen des Aufgabenteils b) für den betrachteten Raum liefern?
- d) Wie groß ist der durch den Fußboden in den darunter liegenden Raum abgeleitete Wärmestrom $\dot{Q}_{L_{FB}}$?

1.10. Kuppel

Die beiden halbkreisförmigen Grundflächenhälften A_1 und A_2 der nachstehend skizzierten Anordnung werden auf zeitlich konstanter Temperatur von $T_1 = 150^\circ\text{C}$ bzw. $T_2 = 20^\circ\text{C}$ gehalten. Die Oberfläche A_1 hat einen Emissionsgrad von $\varepsilon_1 = 0,6$, die Oberfläche A_2 ist schwarz und die über der Grundfläche angeordnete Halbkugelfläche A_3 vom Radius $R = 3\text{ m}$ adiabat. Die Flächen A_1 und A_3 senden graue und diffuse Strahlung aus. In dem halbkugelförmigen Raum herrscht Vakuum. Alle Oberflächen sind strahlungsundurchlässig.



Aufgaben:

- Berechnen Sie den Strahlungswärmeaustausch \dot{Q} zwischen den beiden Oberflächen A_1 und A_2 (= Nettostrahlungsfluss durch die Fläche A_2).
- Welche Temperatur T_3 stellt sich auf der Fläche A_3 ein?

Kapitel 2.

Wärmeleitung

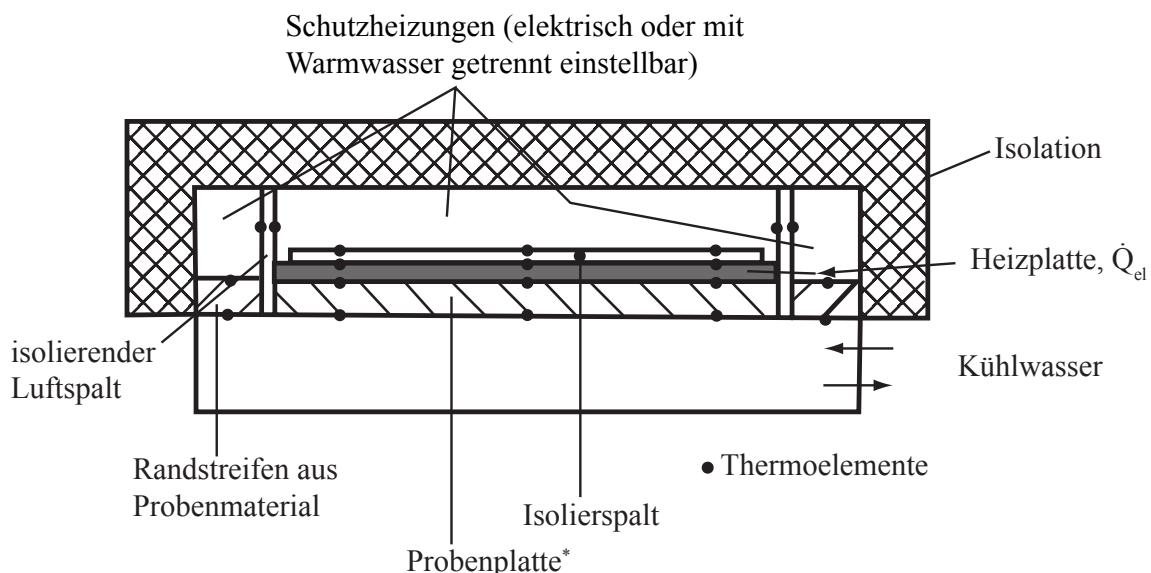
2.1. Instationäres Temperaturfeld*

Leiten Sie die Differentialgleichung für das instationäre Temperaturfeld in einem unendlich langen zylindrischen und isotropen Körper unter Berücksichtigung einer sich lokal ändernden Wärmeleitfähigkeit λ her. Die Dichte ρ und die spezifische Wärmekapazität c sind konstant. Im Körper befinden sich vom Ort abhängige Wärmequellen der Quelldichte $\dot{\Phi}''$.

2.2. Poensgengerät*

Für die Messung der Wärmeleitfähigkeit fester Stoffe mit Wärmeleitfähigkeiten bis zu etwa $2,5 \text{ W/mK}$ benutzt man das sogenannte Poensgengerät. Grundlage des Messverfahrens bilden die Beziehungen für die stationäre eindimensionale Wärmeleitung in Platten.

Die plattenförmige Probe wird zwischen einer auf gleichmäßige und konstante Temperatur gekühlten Kupferplatte und einer mit konstanter elektrischer Leistung beheizten Kupferplatte angeordnet. Damit der Wärmefluss in der Probe eindimensional ist und die gesamte Leistung der Heizplatte durch die Probe fließt, sind der Probekörper und die Heizplatte zur Verminderung bzw. Deckung der Wärmeverluste von Randstreifen bzw. Schutzheizungen umgeben. Zur Einregulierung der Schutzheizung dienen Thermoelemente, die im Isolierspalt zwischen Schutzheizung und Heizplatte bzw. am Probekörper und an den Randstreifen angebracht sind.



*kreisförmig ca. 10 cm Durchmesser oder quadratisch mit $30 \times 30 \text{ cm}^2$ bzw. $50 \times 50 \text{ cm}^2$

Die Schutzheizungen sind dann richtig eingestellt, wenn die jeweils in einer Ebene liegenden Thermoelemente übereinstimmende Werte anzeigen. Die Messung des

treibenden Temperaturgefälles zwischen Probenober- und Probenunterseite erfolgt ebenfalls mit Thermoelementen.

Messwerte	
geometrische Größen	$\delta_{\text{Probe}}, A_{\text{Probe}}$
Strom	U, I
Temperaturen	$T_{\text{Oberseite}}, T_{\text{Unterseite}}$

Aufgaben:

- a) Welche Messunsicherheit bewirken Luftspalte von jeweils $\delta_L = 0,05 \text{ mm}$ zwischen Proben- und Kühlplatte und zwischen Probe- und Heizplatte, wenn man davon ausgeht, dass die Thermoelemente die Temperatur der Heiz- bzw. der Kühlplatte anzeigen:

- bei Beton $\lambda = 1,2 \text{ W/mK}$
- bei Kork $\lambda = 0,051 \text{ W/mK}$

Die Probendicke betrage $\delta_{\text{Probe}} = 20 \text{ mm}$, die Wärmeleitfähigkeit der Luft in den Spalten $\lambda_L = 0,026 \text{ W/mK}$.

- Anleitung: Bestimmen Sie das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeit der Probe, die sich ohne Berücksichtigung der Luftspalte (λ_P) und der, die sich mit Berücksichtigung der Spalte ($\lambda_{P,\text{Korr}} = \lambda_{P,\text{Tats}}$) ergibt.

- b) Welche weiteren Messfehler können bei dem beschriebenen Messverfahren entstehen, und wie kann diesen entgegengewirkt werden?

2.3. Temperaturverläufe in ebener Wand

Die beiden Seiten einer ebenen Wand werden auf zeitlich konstanter Temperatur T_1 bzw T_2 gehalten, wobei $T_1 > T_2$ ist.

Aufgaben:

Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der Temperatur im Beharrungszustand,

- a) wenn die Wärmeleitfähigkeit konstant ist, und
- b) wenn die Wärmeleitfähigkeit nach der Beziehung $\lambda = \lambda_0(1 + \gamma(T - T_0))$ mit $\gamma > 0$ temperaturabhängig ist (λ_0 = Wärmeleitfähigkeit bei der Bezugstemperatur T_0)

Begründen Sie die skizzierten Verläufe.

2.4. Zwiebelprinzip

Die Messung der Oberflächentemperatur einer ebenen Wand, die aus einer $\delta_A = 12,5 \text{ cm}$ dicken Schicht des Materials A und einer $\delta_B = 20 \text{ cm}$ dicken Schicht des Materials B besteht, ergab folgende Werte:

T_A	260	°C	Oberflächentemperatur der Schicht A
T_B	32	°C	Oberflächentemperatur der Schicht B

Nachdem die äußere Oberfläche der Schicht B mit einer $\delta_{\text{iso}} = 2,5 \text{ cm}$ dicken Isolierschicht ($\lambda_{\text{iso}} = 0,075 \text{ W/mK}$) belegt wurde, werden folgende Temperaturen festgestellt:

T_A^*	305	°C	Oberflächentemperatur der Schicht A
T_B^*	219	°C	Temperatur der Kontaktfläche von Schicht B und Isolierschicht (vorher Oberflächentemperatur der Schicht B)
T_{iso}	27	°C	Oberflächentemperatur der Isolierschicht

Aufgaben:

- Berechnen Sie den im stationären Zustand durch die Wand hindurchtretenden Wärmestrom pro Flächeneinheit \dot{q}'' mit und ohne Isolierschicht.

2.5. Feuerofen*

Es ist die Wanddicke eines Feuerungsofens unter den nachstehenden Bedingungen für stationäre Verhältnisse zu minimieren. Als Baumaterialien für die Ofenwand stehen die in der Tabelle aufgeführten Stoffe zur Verfügung. Die Außenhaut des Ofens soll zum mechanischen Schutz aus einer 8 mm starken Stahlplatte bestehen. Die Oberflächentemperatur auf der Außenseite der Ofenwand (Stahlplatte) darf $T_{st} = 60^\circ\text{C}$ nicht übersteigen, die auf der Innenseite der Ofenwand beträgt $T_i = 1000^\circ\text{C}$. Der maximal zugelassene Wärmeverlust ist $\dot{q}'' = 1,5 \text{ kW/m}^2$.

In der folgenden Tabelle sind zwei Fälle (A) und (B) der möglichen Materialkombinationen angegeben.

Gegebene Größen:

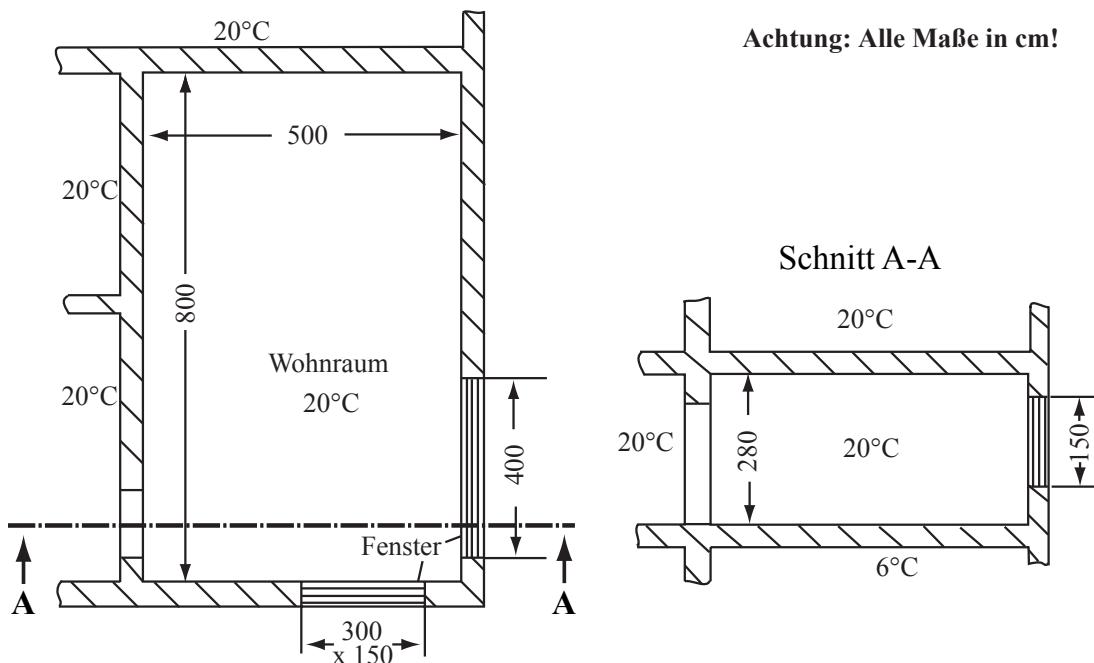
Material	zulässige Temperatur	Wärmeleitfähigkeit λ [W/mK]					
		Fall (A)			Fall (B)		
		60 °C	800 °C	1200 °C	60 °C	800 °C	1200 °C
Schamottestein	1500 °C	0,9	1,3	1,5	0,9	1,3	1,5
Feuerstein	1200 °C				0,4	0,6	0,7
Isolierstein	800 °C	0,2	0,25				
Stahl		45			45		

Aufgabe:

Bestimmen Sie für beide Fälle den Wandaufbau und die Wanddicke der einzelnen Schichten unter der Bedingung möglichst kleiner Gesamtwanddicke.

2.6. Wärmer Wohnen*

Ein Wohnraum eines Einfamilienhauses wird im Winter beheizt und die Bewohner interessiert, wie viel Wärme wohl an diesem kalten Wintertag ungenutzt bleibt.



Aufgabe:

Berechnen Sie den insgesamt über die Umschließungsflächen des skizzierten Wohnraums abfließenden Wärmestrom bei einer Außentemperatur von $T_a = -15^\circ\text{C}$ und einer Raumlufttemperatur von $T_i = 20^\circ\text{C}$.

Hinweis:

- Unterstellen Sie dabei eindimensionalen Wärmefluss.
- Die Temperaturen der angrenzenden Räume und die Maße (in cm) sind in der Skizze eingetragen. Der Aufbau der Wände und der Decken sowie die Wärmeleitfähigkeiten der Baustoffe sind der Tabelle auf der nächsten Seite zu entnehmen.

Gegebene Größen:

α_a	20	$\text{W/m}^2 \text{K}$	Wärmeübergangskoeffizient* Raumaußenseiten
α_i	{	$\begin{array}{l} 8 \\ 6 \end{array} \text{ W/m}^2 \text{K}$	Wärmeübergangskoeffizienten* Rauminnenseiten: - Wandflächen, Decken bei Wärmefluss von unten nach oben - Decken bei Wärmefluss von oben nach unten
k_F	2,9	$\text{W/m}^2 \text{K}$	Wärmedurchgangskoeffizient der Holz-Doppelfenster

Außenwände

$d_{P,A}$	1,5	cm	Dicke Außenputz
$\lambda_{P,A}$	0,87	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Außenputz
$d_{WD,A}$	2,0	cm	Dicke Wärmedämmplatten
$\lambda_{WD,A}$	0,09	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Wärmedämmplatten
d_Z	34	cm	Dicke Ziegelmauerwerk
λ_Z	1,05	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Ziegelmauerwerk
$d_{P,I}$	1,5	cm	Dicke Innenputz
$\lambda_{P,I}$	0,87	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Innenputz

Decken

$d_{P,D}$	1,5	cm	Dicke Putz
$\lambda_{P,D}$	0,87	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Putz
$d_{WD,D}$	2,0	cm	Dicke Wärmedämmplatten
$\lambda_{WD,D}$	0,09	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Wärmedämmplatten
d_B	20	cm	Dicke Betondecke
λ_B	1,4	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Betondecke
d_E	4	cm	Dicke Estrich
λ_E	0,7	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Estrich
d_H	1	cm	Dicke Holzfußboden
λ_H	0,2	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Holzfußboden

*Konvektion und Strahlung zusammengefasst

2.7. Hohlzylinder*

Ein Hohlzylinder mit Innenradius r_i , Außenradius r_a und der Länge L wird so beheizt, dass seine innere und äußere Oberfläche jeweils eine stationäre und gleichmäßige Temperatur T_i bzw. T_a besitzt. Das Material, aus dem der Zylinder besteht, hat eine Wärmeleitfähigkeit, die sich nach folgender Beziehung mit der Temperatur ändert:

$$\lambda = \lambda_0(1 + \gamma(T - T_0))$$

(λ_0 = Wärmeleitfähigkeit bei der Bezugstemperatur T_0)

Aufgaben:

- a) Leiten Sie eine Gleichung für den Wärmefluss durch die Zylinderwand ab. Vergleichen Sie diese Beziehung mit derjenigen, die man bei Annahme konstanter Wärmeleitfähigkeit erhält. Bei welcher Mitteltemperatur T_m müsste die Wärmeleitfähigkeit λ in der Wärmestromgleichung für konstante Wärmeleitfähigkeit eingesetzt werden, um diese zur Berechnung des Wärmestroms bei linear von der Temperatur abhängiger Wärmeleitfähigkeit benutzen zu können?
- b) Geben Sie eine Gleichung für die Temperaturverteilung im Hohlzylinder an.

2.8. Soleleitung

Eine durch einen Raum geführte isolierte Soleleitung aus Stahl mit einem Innen-durchmesser von $d_i = 50 \text{ mm}$ und einer Wanddicke von $\delta = 5 \text{ mm}$ wird von Sole mit einer mittleren Temperatur $T_s = -20^\circ\text{C}$ durchströmt. Die Temperatur der Raumluft und der Raumumschließungsflächen beträgt $T_R = 20^\circ\text{C}$.

Gegebene Größen:

α_i	2300	$\text{W/m}^2\text{K}$	Wärmeübergangskoeffizient Innenseite des Rohres
α_a	6	$\text{W/m}^2\text{K}$	Wärmeübergangskoeffizient Außenseite des isolierten Rohres
λ_R	54	W/mK	Wärmeleitfähigkeit Stahl
λ_{iso}	0,042	W/mK	Wärmeleitfähigkeit Isolierung

Aufgaben:

- Berechnen Sie die Dicke der Isolierung δ_{iso} so, dass an der Oberfläche der Isolierung bei der maximal auftretenden Taupunktstemperatur der Umgebungsluft von $T_\tau = 15^\circ\text{C}$ kein Wasser auskondensiert.
- Welche Wärme \dot{q}' nimmt unter dieser Bedingung die Sole pro m Rohrlänge und Zeiteinheit auf?

2.9. Warmwasserleitung

Durch eine Warmwasserleitung aus Kupfer, die in einem Raum mit einer Temperatur von $T_R = 20^\circ\text{C}$ verlegt ist, fließt Wasser mit einer mittleren Temperatur von $T_w = 80^\circ\text{C}$. Das Kupferrohr ($\lambda = 372 \text{ W/mK}$) hat einen Innendurchmesser von $d_i = 6 \text{ mm}$ und eine Wanddicke von $\delta = 1 \text{ mm}$.

Gegebene Größen:

α_i	2300	$\text{W/m}^2\text{K}$	Wärmeübergangskoeffizient Innenseite des Rohres
α_a	6	$\text{W/m}^2\text{K}$	Wärmeübergangskoeffizient Außenseite des Rohres

Aufgaben:

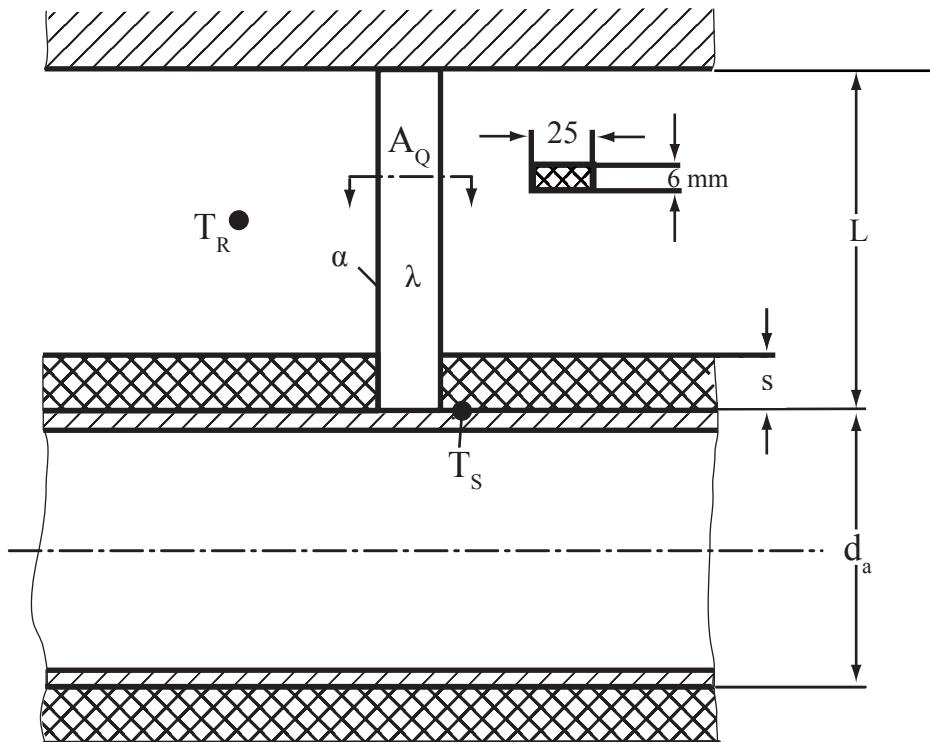
- a) Berechnen Sie die Wärmeabgabe pro m Rohrlänge \dot{q}' .
 - bei nicht isolierter Leitung, und
 - wenn die Leitung mit einer $s = 4 \text{ mm}$ dicken Korkschicht $\lambda = 0,042 \text{ W/mK}$ isoliert ist.
- b) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Wärmeabgabe \dot{q}' in Abhängigkeit von der Isolierungsdicke für verschiedene Wärmeleitfähigkeiten des Isolationsmaterials, und geben Sie eine physikalische Erklärung für den Verlauf an.
- c) Welche Wärmeleitfähigkeit λ_{iso} muss das Isolationsmaterial haben, damit die Isolation der Leitung generell eine Verringerung der Wärmeabgabe bewirkt?

Annahmen:

- Änderungen des äußeren Wärmeübergangskoeffizienten mit dem Außendurchmesser der Leitung bleiben unberücksichtigt.

2.10. Rohrbefestigung*

Eine mit Kork isolierte Soleleitung ist mit Flacheisen, die auf das Rohr aufgeschweißt sind, an der Decke eines Raumes befestigt. Die Außenwandtemperatur der Soleleitung beträgt $T_s = -23,5^\circ\text{C}$, die Raumtemperatur $T_R = 20^\circ\text{C}$.



Gegebene Größen:

d_a	50	mm	Außendurchmesser des Rohres
s	40	mm	Dicke der Isolierung
A_Q	25×6	mm	Querschnitt des Flacheisens
L	290	mm	Länge des Flacheisens
α	6	$\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$	Wärmeübergangskoeffizient an der Flacheisenoberfläche
λ	58	W/mK	Wärmeleitfähigkeit des Flacheisenmaterials

Aufgaben:

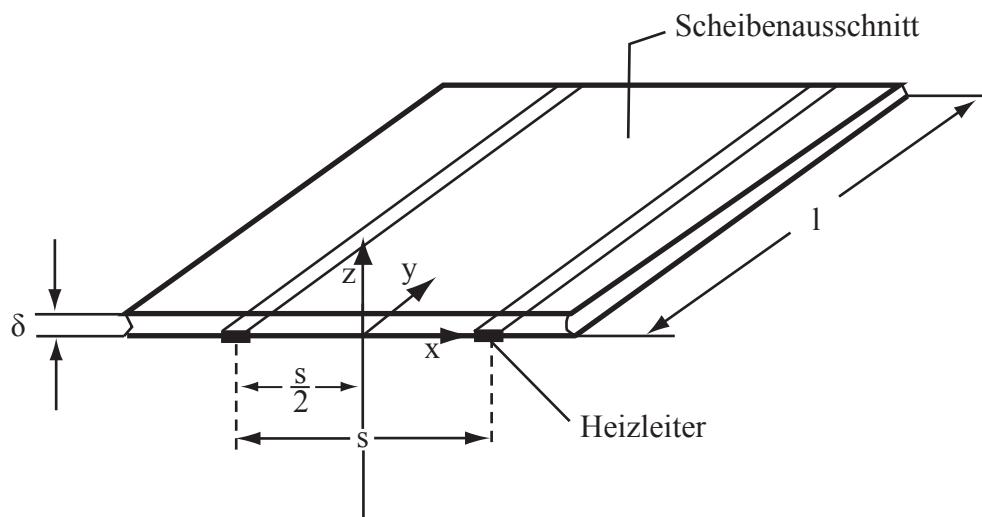
- a) Berechnen Sie den infolge eines Flacheisens von der Sole aufgenommenen Wärmestrom \dot{Q} .
- b) Bis zu welcher Höhe h_0 (gerechnet von der äußeren Oberfläche der Soleleitung) bereift das Flacheisen?

Annahmen:

- Die Temperatur über dem Flacheisenquerschnitt ist konstant.
- Der Wärmefluss vom Flacheisen in die Decke und vom Flacheisen in die Rohrisolierung ist vernachlässigbar

2.11. Beschlagene Heckscheibe

Zur Vermeidung von Tau- oder Reifbildung werden an der Innenseite von Autoheckscheiben dünne elektrische Heizleiter angebracht. Mit diesen kann bei niedrigen Außentemperaturen der Scheibe soviel Energie zugeführt werden, dass auf ihr an keiner Stelle die Taupunktstemperatur unterschritten wird.



Gegebene Größen:

δ	5 mm	Dicke der Glasscheibe
s	30 mm	Heizleiterabstand
λ	1,16 $\text{W}/\text{m K}$	Wärmeleitfähigkeit der Glasscheibe
T_A	5 $^{\circ}\text{C}$	Lufttemperatur an der Außenseite der Scheibe
α_A	30 $\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$	Wärmeübergangskoeffizient an der Außenseite der Scheibe
T_I	20 $^{\circ}\text{C}$	Lufttemperatur an der Innenseite der Scheibe
α_I	3 $\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$	Wärmeübergangskoeffizient an der Innenseite der Scheibe
T_τ	13 $^{\circ}\text{C}$	Zulässige Minimaltemperatur der Scheibe = Taupunkttemperatur

Aufgaben:

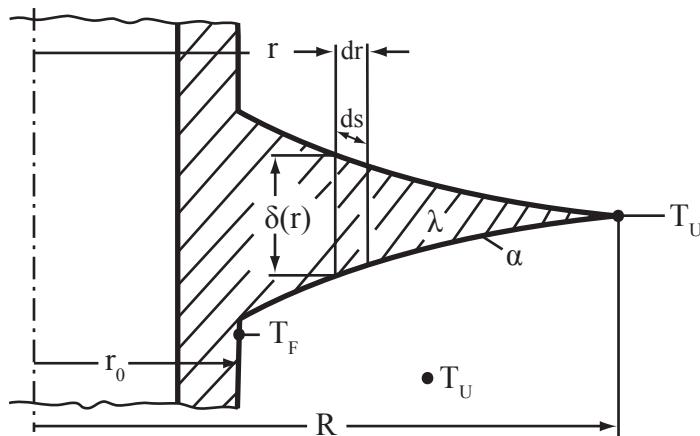
- a) Ermitteln Sie für die nachfolgend angegebenen Bedingungen die auf die Leiterlänge bezogene Heizleistung \dot{q}'_H , die erforderlich ist, damit die Scheibe nicht beschlägt.

Annahmen/Hinweise:

- Stationäre Verhältnisse.
- Randeinflüsse bleiben unberücksichtigt. Aus Symmetriegründen genügt es dann, einen Ausschnitt der Scheibe mit zwei Leiterbahnen – entsprechend der Skizze – zu betrachten.
- Eindimensionale Behandlung des Problems. Nennenswerte Temperaturänderungen treten nur in x-Richtung auf.
- Gleichmäßiger Zufluss der Heizenergie über der Scheibendicke δ .
- Wahl des Koordinatensprungs zweckmäßigerweise in der Mitte zwischen zwei Heizleitern.

2.12. Veränderliche Kreisrippe*

Die Form einer neuen Rohrrippe soll ausgelegt werden. Folgende Überlegungen wurden bereits angestellt:

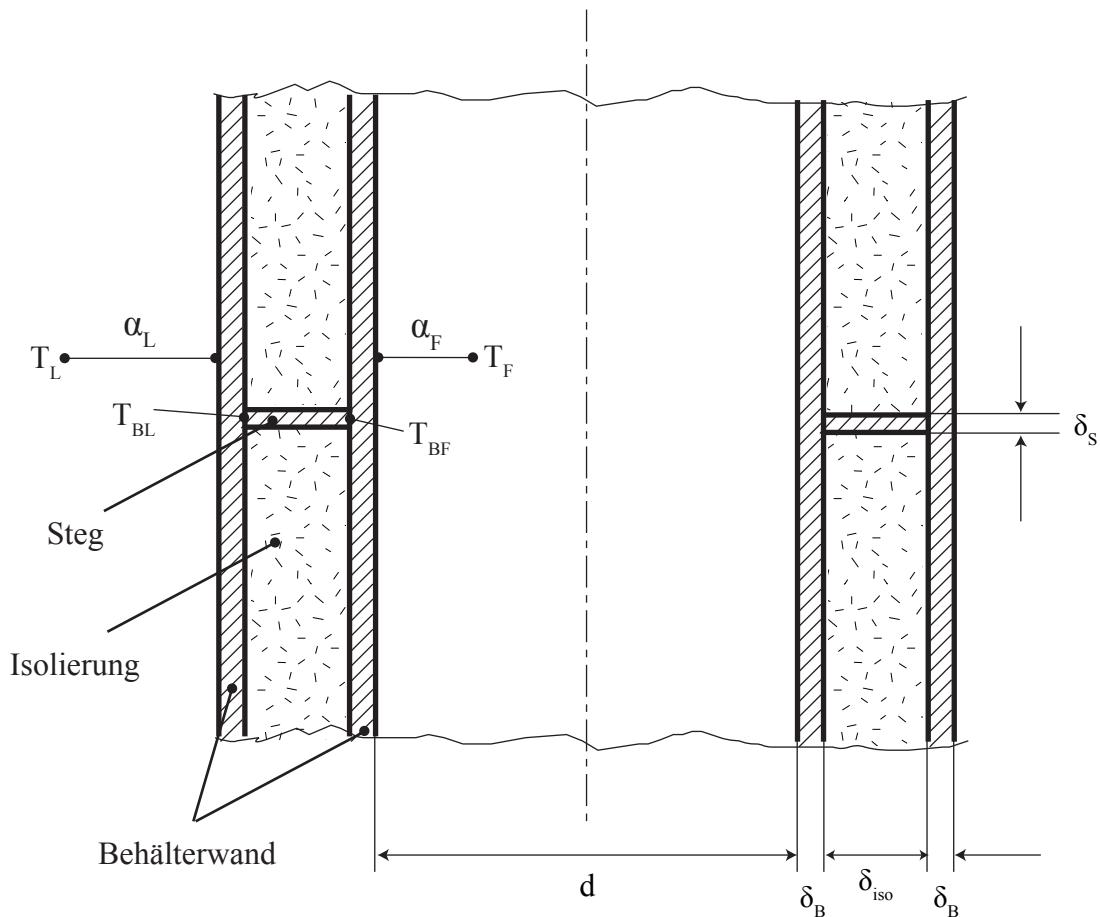


Aufgaben:

- Stellen Sie die Differentialgleichung für die stationäre Temperaturverteilung in einer dünnen Kreisrippe mit veränderlicher Dicke $\delta(r)$ auf, wenn die Wärmeleitfähigkeit λ der Rippenmaterials und der Wärmeübergangskoeffizient an der Rippenoberfläche konstant sind. Die Umgebungstemperatur T_U ist ebenfalls konstant und gegeben. Das Bogenelement ds der Rippenflanke kann vereinfachend durch das Radienelement dr ersetzt werden. Die Temperaturunterschiede im Rippenquerschnitt sind als vernachlässigbar klein anzunehmen.
- Berechnen Sie unter den angegebenen Voraussetzungen die Profilform $\delta(r)$ für eine spitz auslaufende Kreisrippe, die gleichmäßig thermisch belastet ist, das heißt, in der die radiale Wärmestromdichte \dot{q}_r'' konstant ist. Eine solche Rippe erfordert den geringsten Materialaufwand für eine vorgegebene Wärmeübertragungsleistung. Der innere Durchmesser der Rippe sei dabei $2 \cdot r_0$, der äußere $2 \cdot R$. Die Rippenspitze nimmt Umgebungstemperatur an.
- Welchen Wärmestrom kann die unter b) berechnete Kreisrippe übertragen, wenn die Rippenfußtemperatur T_F beträgt?

2.13. Doppelwandiger Behälter*

Die nachstehende Skizze zeigt den Ausschnitt eines zylindrischen doppelwandigen Behälters. Die Behälterwände bestehen aus Edelstahl und sind durch umlaufende Stege aus gleichem Material miteinander verbunden. Der Abstand zwischen zwei Stegen ist so groß, dass wärmetechnisch keine gegenseitige Beeinflussung eintritt. Im Doppelmantelzwischenraum befindet sich Glaswolle. Der Behälter ist mit Flüssigkeit konstanter Temperatur gefüllt. Die Umgebungslufttemperatur ist ebenfalls konstant.



Gegebene Größen:

d	2	m	Behälter-Innendurchmesser
δ_B	3	mm	Dicke der Behälterwände
δ_S	1,5	mm	Stegdicke
δ_{iso}	80	mm	Isolationsdicke
λ_B	16	W/mK	Wärmeleitfähigkeit des Behälter- und Stegmaterials
λ_{iso}	0,04	W/mK	Wärmeleitfähigkeit der Isolierung
α_L	84	W/m²K	Wärmeübergangskoeffizient an der Behälteraußenseite
α_F	400	W/m²K	Wärmeübergangskoeffizient an der Behälterinnenseite
T_F	-40	°C	Temperatur Flüssigkeit
T_L	20	°C	Temperatur Luft

Aufgaben:

- Entwickeln Sie eine Beziehung zur Berechnung des über den Steg an die Flüssigkeit übergehenden Wärmestroms. Dabei kann vorausgesetzt werden, dass der Wärmefluss zwischen dem Steg und der Isolierung vernachlässigbar ist. Außerdem kann der radiale Wärmewiderstand der Behälterwände unberücksichtigt bleiben. Welcher Wärmeeinfall ergibt sich unter den angegebenen zahlenmäßigen Bedingungen?
- Wie groß ist der Temperaturabfall $T_{BL} - T_{BF}$ zwischen Behälteraußenseite und -innenwand am Steg?
- Welchen Abstand müssen die Stege mindestens aufweisen, damit die Berechnungsannahme eines „sehr großen“ Abstandes zulässig ist? Als Kriterium hierfür soll der Abbau der Temperaturdifferenz zwischen Behälterwand und jeweiliger Umgebung herangezogen werden. Der Einflussbereich eines Steges wird so festgelegt, dass in diesem der Temperaturunterschied auf 1 % des maximalen abgebaut ist.
- Schätzen Sie den insgesamt einfallenden Wärmestrom und damit die zur Aufrechterhaltung der Flüssigkeitstemperatur notwendige Kühlleistung pro m Behälterlänge ab, wenn jeweils im Abstand von 1,5 m ein Steg angebracht ist. Nehmen Sie für diese Abschätzung an, dass der Wärmeeinfall über die Behälterwände von den Stegen nicht beeinflusst wird.

2.14. Brennelement eines Hochtemperaturreaktors

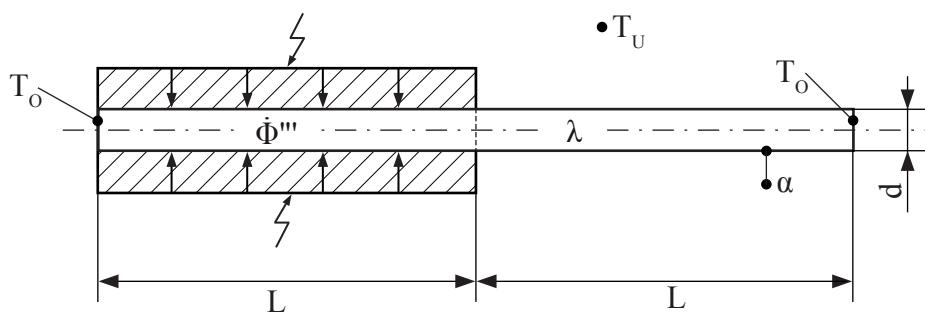
Der Brennstoff eines Reaktorbrennelements für Hochtemperaturreaktoren liegt zwischen einer Graphitkugel von 25 mm Außendurchmesser und einer Hohlkugel aus Graphit von 60 mm Außen- und 31 mm Innendurchmesser. Das Brennelement hat eine Wärmeleistung von $\dot{Q}_R = 2,5 \text{ kW}$. Die Wärmeleitfähigkeit des Graphits beträgt $\lambda_G = 126 \text{ W/mK}$ (Elektrodengraphit), die Wärmeleitfähigkeit der Brennstoffschicht $\lambda_B = 12 \text{ W/mK}$.

Aufgaben:

- a) Wie groß ist die Temperaturdifferenz zwischen Mitte und Oberfläche des Brennelements?
- b) Skizzieren Sie den Temperaturverlauf von der Kugelmitte bis zur Umgebung qualitativ.

2.15. Kupferstab*

Die beiden Enden eines Kupferstabes mit der Länge L und dem Durchmesser d werden auf der gleichen Temperatur T_O gehalten. In der linken Hälfte des Stabes, die gegen radialem Wärmeverlust vollständig isoliert ist, wird durch elektrischen Strom Joulesche Wärme der Dichte $\dot{\Phi}'''$ erzeugt. Die rechte, nicht isolierte Seite wird von Luft mit der Temperatur T_U quer angeblasen, wobei ein Wärmeübergangskoeffizient α auftritt. Die Wärmeleitfähigkeit des Stabes ist λ .



Aufgaben:

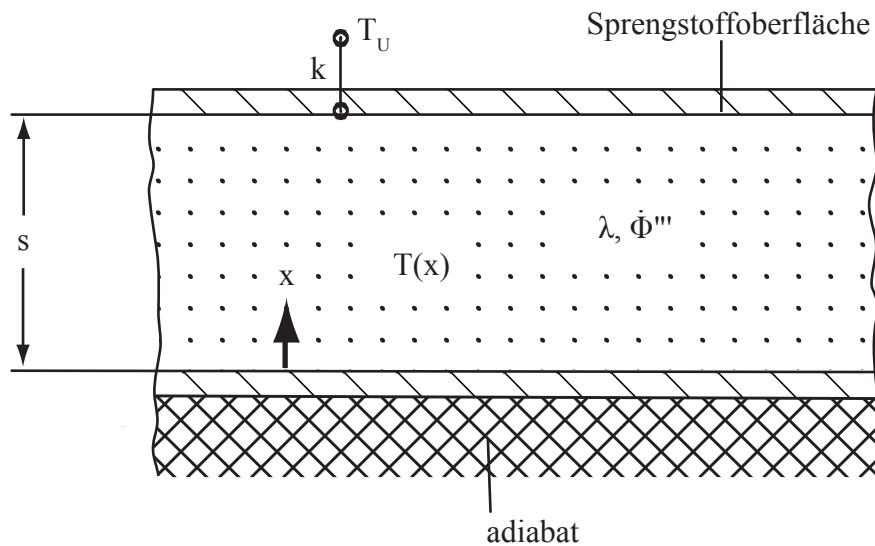
- Leiten Sie die Gleichung für den Temperaturverlauf im Stab her.
- Ermitteln Sie den Wert für $\dot{\Phi}'''$ so, dass die Temperatur in der Mitte des Stabes gleich der Temperatur an den Stabenden T_O ist.
- Berechnen Sie $\dot{\Phi}'''$ für folgende Zahlenwerte: $L = 1\text{ m}$; $d = 5,2\text{ mm}$; $T_O = 120^\circ\text{C}$; $T_U = 100^\circ\text{C}$; $\alpha = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$; $\lambda = 372 \text{ W/mK}$ und für die Forderung unter b).
- Bestimmen Sie für die angegebenen Zahlenwerte die Extremwerte der Temperaturverteilung nach Lage und Größe, und zeichnen Sie damit den Temperaturverlauf.

Hinweis:

- Legen Sie das Koordinatensystem in die Stabmitte.

2.16. Kritischer Sprengstoff

Ein Sprengstoff, der in Form einer Platte gelagert wird und von einem schützenden Metall- und Isoliermantel umgeben ist, liegt auf einer adiabaten Unterlage. Die Wärmeleitfähigkeit des Sprengstoffes beträgt $\lambda = 0,85 \text{ W/mK}$, der Wärmedurchgangskoeffizient zwischen der Sprengstoffoberfläche und der Umgebung T_U beträgt $k = 0,2 \text{ W/m}^2\text{K}$.



Die unvermeidliche Reaktionsrate im Sprengstoff verursacht eine ständige, von der Temperatur abhängige Wärmeentwicklung, die durch folgende Beziehung beschrieben werden kann:

$$\dot{\Phi}''' = \dot{\Phi}_U''' \cdot (1 + \gamma(T - T_U))$$

Gegebene Größen:

T	Sprengstofftemperatur	
T_U	Umgebungstemperatur	
$\dot{\Phi}_U'''$	$0,3 \text{ W/m}^3$	Quellterm
γ	$0,2 \text{ } ^1/\text{K}$	

Aufgabe:

- a) Welche Sprengstoffschichtdicke s_{krit} führt mit Sicherheit zur Explosion?

Anleitung:

Leiten Sie zunächst für eine beliebige Schichtdicke s die Gleichung für den statio-nären Temperaturverlauf im Sprengstoff ab. Explosion tritt ein, wenn die Tempera-tur über alle Grenzen anwachsen kann.

2.17. Kupferkugel

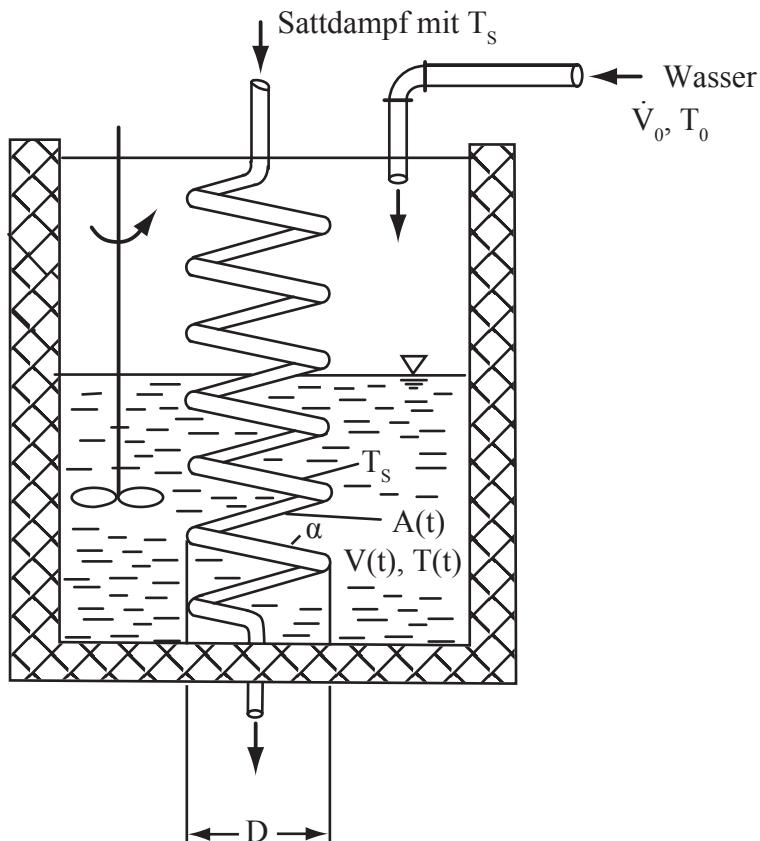
Eine Kupferkugel mit einem Durchmesser von $d = 1 \text{ cm}$ und einer Anfangstemperatur von $T_0 = 15^\circ\text{C}$ wird plötzlich in einen Luftstrom anderer Temperatur T_L gehängt. Der Wärmeübergangskoeffizient an der Kugeloberfläche beträgt $\alpha = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$. Die spezifische Wärmekapazität von Kupfer ist $c = 0,419 \text{ kJ/kgK}$ und die Dichte $\rho = 8300 \text{ kg/m}^3$.

Aufgaben:

- a) Nach welcher Zeit ist die Temperatur der Kugel auf $T_K = 17,5^\circ\text{C}$ gestiegen, wenn die Lufttemperatur konstant $T_L = 20^\circ\text{C}$ bleibt?
- b) Die Temperatur der Luft steigt linear mit der Zeit mit der Geschwindigkeit $\kappa = 360 \text{ K/h}$ und hat zur Zeit $t = 0$ den Wert $T_{L0} = 20^\circ\text{C}$.
 - Wie groß ist die Differenz der Temperaturen zwischen Luft und Kupferkugel $T_L - T_K$ nach 1 h?
 - Zeichnen Sie qualitativ den zeitlichen Verlauf der Temperatur der Luft und der Kugel.
- c) Die Temperatur der Luft schwankt sinusförmig mit einer Amplitude $\Theta_{L,\max} = 5 \text{ K}$ und einer Frequenz von $f = \frac{1}{6} \text{ min}^{-1}$ (Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$) um den Mittelwert $T_{L,m} = 20^\circ\text{C}$.
 - 1) Leiten Sie eine Beziehung für den zeitlichen Temperaturverlauf in der Kupferkugel ab.
 - 2) Wie groß ist die Amplitude $\Theta_{K,\max}$ der Temperaturschwingung der Kugel?
 - 3) Um welche Zeit hinkt die Temperaturschwingung der Kugel der Luft nach? Skizzieren Sie qualitativ den zeitlichen Verlauf der Temperatur der Luft und der Kugel.

2.18. Gerührter Tank*

In einen zylindrischen Tank mit $V_{\text{ges}} = 27 \text{ m}^3$ Inhalt fließen in der Minute $\dot{V}_0 = 9 \text{ dm}^3$ Wasser von $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Zur Zeit $t = 0$ ist der Tank leer. Das im Tank befindliche Wasser wird durch ein Rührwerk gut durchmischt, so dass die Temperatur im Tank überall gleich ist. Der Wasserinhalt wird mit einer dampfbeheizten Rohrschlange der Fläche A erwärmt, wobei die an der Wärmeübertragung beteiligte Fläche dem augenblicklichen Wasserinhalt proportional ist. Die Rohrschlange besteht aus $n = 10$ Windungen und hat einen Durchmesser von $D = 1,2 \text{ m}$. Der äußere Rohrdurchmesser beträgt $d = 25 \text{ mm}$, die Sättigungstemperatur des Dampfes $T_S = 105^\circ\text{C}$ und die Wärmeübergangszahl an der Rohrschlange (Wasserseite) $\alpha = 600 \text{ W/m}^2\text{K}$.



Aufgaben:

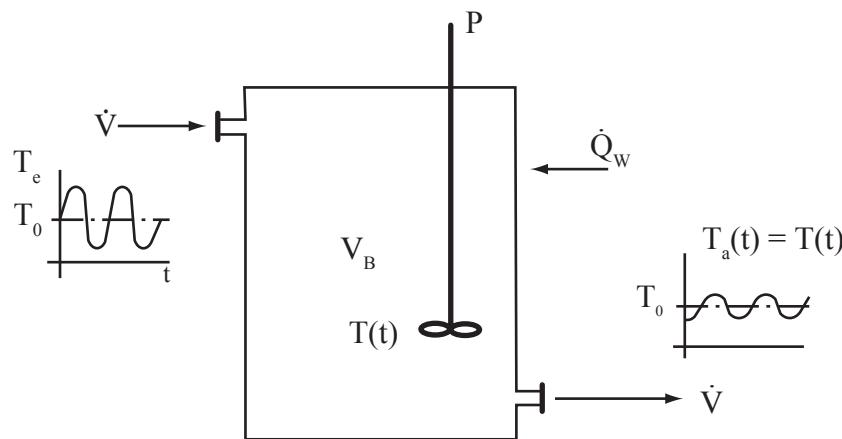
- Geben Sie eine Gleichung für den zeitlichen Verlauf der Wassertemperatur an.
- Wie groß ist die Wassertemperatur T_{We} , wenn der Tank gefüllt ist?

Annahmen:

- Die Dampftemperatur in der Rohrschlange bleibt konstant.
- Die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte kann unberücksichtigt bleiben.
- Die Rührwerksarbeit ist vernachlässigbar.
- Der Wärmeübergangskoeffizient ist konstant.
- Der Wärmewiderstand der Rohrleitung ist vernachlässigbar.
- Die Tankwände sind adiabat isoliert.

2.19. Schwingungsproblem*

Ein Behälter zum Ausgleich von Temperaturschwankungen wird von einem Volumenstrom $\dot{V} = 1 \text{ m}^3/\text{h}$ durchflossen, dessen Eintrittstemperatur T_e sinusförmig schwankt. Die Schwingungsdauer (der Schwankung) ist $t_s = 0,25 \text{ h}$, die Mitteltemperatur T_0 und die Amplitude $\theta_{e,\max}$.



Aufgabe:

Bestimmen Sie das Volumen V_B des Ausgleichsbehälters so, dass bei maximalen Temperaturschwankungen am Austritt aus dem Behälter $\theta_{a,\max}$ nur noch 0,1 % der maximalen Eintrittstemperaturschwankungen $\theta_{e,\max}$ betragen.

Annahmen:

- Die Flüssigkeit wird im Behälter durch ein Rührwerk so gut durchmischt, dass sie im ganzen Behälter eine einheitliche Temperatur besitzt.
- Die durch das Rührwerk eingebrachte Energie ist P . Über die Behälterwände wird der Flüssigkeit aus der Umgebung ein Wärmestrom \dot{Q}_W zugeführt.
- Es ist der quasistationäre, das heißt eingeschwungene Zustand ($t \rightarrow \infty$) zu betrachten.

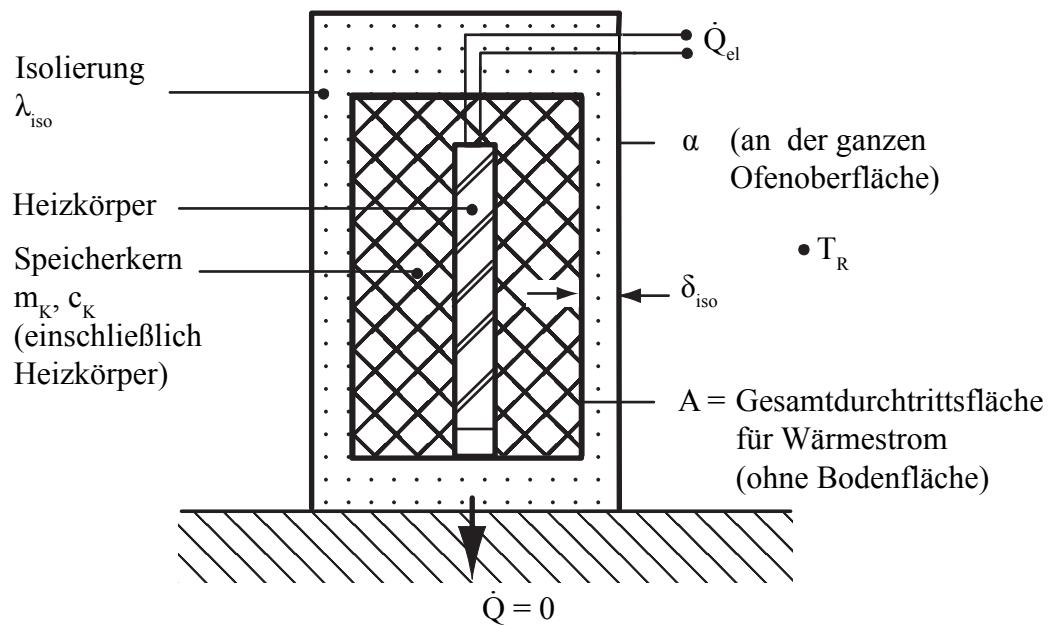
Anleitung:

Eine partikuläre Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten findet man durch einen Ansatz in Form des Störgliedes:

$$\Theta_p = k_1 \sin(\omega t + \varphi) + k_2$$

2.20. Speicherofen*

In nachstehender Skizze ist der prinzipielle Aufbau eines Nachtstromspeicheroftens der einfachsten Bauart dargestellt. Er besteht aus einem Speicherkerne, der von einem Mantel aus isolierendem Material (Dicke δ_{iso} , Wärmeleitfähigkeit λ_{iso}) umgeben ist, und in den ein elektrischer Heizkörper (Heizleistung \dot{Q}_{el}) eingebettet ist (Masse des Speicherkerne einschließlich Heizkörper m_K , spezifische Wärmekapazität c_K).



Gegebene Größen (nur für Aufgabenteil c-d):

m_K	90	kg	Masse des Speicherkerne einschließlich Heizkörper
c_K	1,2	kJ/kg K	spezifische Wärmekapazität des Speicherkerne einschließlich Heizkörper
δ_{iso}	0,04	m	Dicke des Isolierungsmaterials
A	0,8	m^2	Gesamtdurchtrittsfläche für Wärmestrom (ohne Bodenfläche)
α	10	$\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$	Wärmeübergangskoeffizient an der ganzen Ofenoberfläche
λ_{iso}	0,08	$\text{W}/\text{m K}$	Wärmeleitfähigkeit der Isolierung

Aufgaben:

- a) Ermitteln Sie für periodischen Betrieb des Ofens (eingeschwungener Zustand) den zeitlichen Verlauf der Kerntemperatur $T_K(t)$ im Aufheiz- und Abkühlzyklus, wenn die Aufheizzeit t_L beträgt, und während dieser der Speicherkern mit konstanter elektrischer Leistung \dot{Q}_{el} aufgeladen wird. Die Gesamtzyklusdauer ist $t_g = t_L + t_E = 24 \text{ h}$ ($t_E = \text{Entlade- bzw. Abkühlzeit}$). Die Raumtemperatur T_R , die Stoffwerte c_K , λ_{iso} und der Wärmeübergangskoeffizient α an der Oberfläche sind bekannt und über alle Perioden zeitlich konstant anzusetzen. Weitere gegebene Größen sind m_K , A , δ_{iso} .

Hinweis: Setzen Sie den Beginn des Aufladevorgangs $t = 0$!

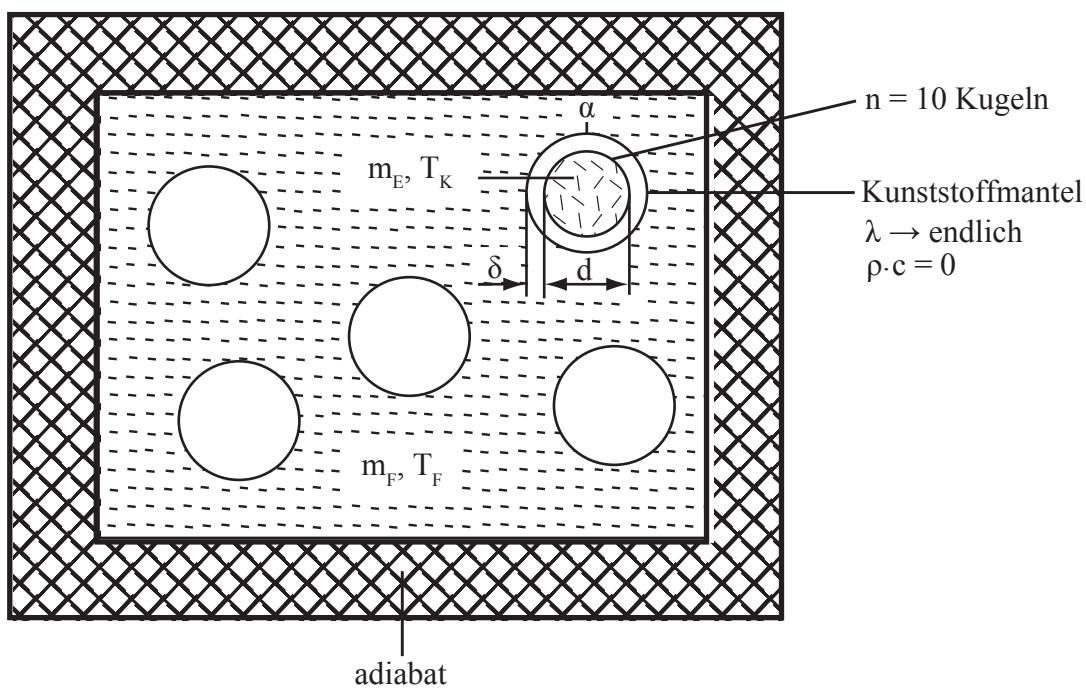
- b) Skizzieren Sie den qualitativen Kerntemperaturverlauf für zwei Zyklen.
- c) Welche Aufladezeit t_L ist erforderlich, wenn die täglich (d.h. während eines ganzen Zyklus) benötigte Wärmeenergie $Q_H = 13,5 \text{ kWh}$ und die Heizkörperleistung $\dot{Q}_{el} = 1,5 \text{ kW}$ beträgt? Welche Kernübertemperaturen stellen sich dabei jeweils zu Beginn und am Ende des Ladezyklus ein?
Nutzen Sie die in der Tabelle gegebene Zahlenwerte.
- d) Bestimmen Sie die prozentualen Anteile der Wärmeabgaben während des Ladezyklus und des Entladezyklus bezogen auf den täglichen Heizenergiebedarf Q_H .

Annahmen:

- Der Wärmewiderstand des Speicherkerns einschließlich Heizkörper ist gegenüber den übrigen Wärmewiderständen vernachlässigbar, so dass im Kern praktisch keine Temperaturunterschiede auftreten.
- Die Wärmespeicherfähigkeit der Isolierhülle ist näherungsweise Null.
- Ebener Wärmefluss im Isoliermantel mit der Speicherkernoberfläche A (abzüglich Bodenfläche) als Durchtrittsfläche für den Wärmestrom.

2.21. Eiskugelkühlung*

Zur Kühlung einer Flüssigkeitsmenge $m_F = 0,5 \text{ kg}$, die sich in einem adiabat isolierten Behälter befindet, werden $n = 10$ gleiche, mit Eis von $T_E = 0^\circ\text{C}$ gefüllte, dünnwandige Kunststoffkugeln in die Flüssigkeit geworfen. Die Kugeln haben einen Durchmesser von $d = 20 \text{ mm}$ und eine Wanddicke von $\delta = 0,5 \text{ mm}$. Die Anfangstemperatur der Flüssigkeit ist gleich der Umgebungstemperatur $T_U = 20^\circ\text{C}$. Der zeitlich konstante, mittlere Wärmeübergangskoeffizient zwischen den Kugeloberflächen und der Flüssigkeit beträgt $\alpha = 400 \text{ W/m}^2\text{K}$.



Gegebene Größen:

$\rho_F = \rho_W$	1000	kg/m^3	Dichte Flüssigkeit/Wasser
$c_F = c_W$	4180	J/kg K	spez. Wärmekapazität Flüssigkeit/Wasser
ρ_E	917	kg/m^3	Dichte Eis
r	$333 \cdot 10^3$	J/kg	spez. Schmelzenthalpie Eis
λ	0,2	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Kunststoff (Kugelmaterial)

Aufgaben:

- a) Wie hoch sind die Temperaturen der Flüssigkeit und des Inhalts der Kugeln
 - zum Zeitpunkt t_s , wenn gerade alles Eis geschmolzen ist (T_{Fs} , T_{Ks}) und
 - nach sehr langer Zeit ($T_{F,\infty}, T_{K,\infty}$)
- b) Bestimmen Sie formelmäßig die zeitlichen Temperaturverläufe des Inhalts der Kugeln $T_K(t)$ und der Flüssigkeit $T_F(t)$ vom Zeitpunkt des Eintauchens der Kugeln bis zum Zeitpunkt, bei dem gerade alles Eis geschmolzen ist.
- c) Nach welcher Zeit t_s ist alles Eis geschmolzen?
- d) Stellen Sie die Differentialgleichungen für den Verlauf der Flüssigkeitstemperatur und der Temperatur des Inhalts der Kugeln im Zeitbereich $t_s \leq t \leq \infty$ auf, und geben Sie die notwendigen Anfangsbedingungen an.
- e) Ermitteln Sie die Beziehungen für die Temperaturverläufe der Flüssigkeit und des Inhalts der Kugeln für $t_s \leq t \leq \infty$.
- f) Skizzieren Sie qualitativ die Temperaturverläufe im gesamten Zeitbereich $0 \leq t \leq \infty$.

Annahmen:

- Temperaturunterschiede innerhalb der Flüssigkeit und der Kunststoffkugeln gleichen sich sehr schnell aus.
- Der Wärmeübergangswiderstand auf der Innenseite der Kunststoffkugeln ist vernachlässigbar.
- Die Wärmekapazität der kugelförmigen Kunststoffschalen und des Flüssigkeitsbehälters können unberücksichtigt bleiben.
- Wegen $\delta \ll d$ kann die Krümmung der Kugeln vernachlässigt werden.
- Während des Schmelzvorgangs besteht der Inhalt der Kugeln aus einer Mischung von Wasser und schmelzendem Eis.

2.22. Kontakt der halbunendlichen Körper

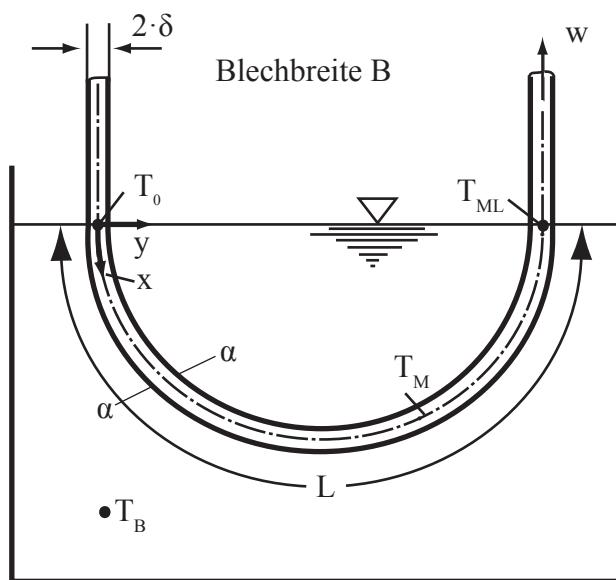
Zwei halbunendlich ausgedehnte Körper mit verschiedenen Stoffwerten λ , ρ , c und verschiedener, aber jeweils einheitlicher Temperatur T_{10} bzw. T_{20} werden plötzlich in Berührung gebracht (Kontaktwiderstand = Null).

Aufgaben:

- a) Wie verläuft die Temperatur abhängig von Ort und Zeit in beiden Körpern?
- b) Welche Temperatur T_M stellt sich in der Berührungsebene ein?

2.23. Gewalztes Blech

Ein gewalztes Stahlblech der Breite B und der Dicke $2 \cdot \delta$ mit den Stoffwerten λ, ρ, c durchläuft nach dem Walzvorgang mit konstanter Geschwindigkeit w ein Ölbad mit sich zeitlich und örtlich nicht ändernder Temperatur T_B . Am Eintritt in das Bad hat das Stahlblech eine gleichmäßige Temperatur T_0 . Über die gesamte Eintauchlänge L ist der Wärmeübergangskoeffizient α zwischen Blechoberfläche und Öl konstant. Die Stirnflächen des Stahlbleches sind als adiabat zu betrachten.



Aufgabe:

Berechnen Sie die Blechgeschwindigkeit w , wenn die Temperaturdifferenz zwischen Stahlblechmitte und Ölbad $T_m - T_B$ am Austritt aus dem Bad auf die Hälfte der Anfangstemperaturdifferenz abgebaut sein soll. Es sind dabei die beiden folgenden Fälle zu betrachten:

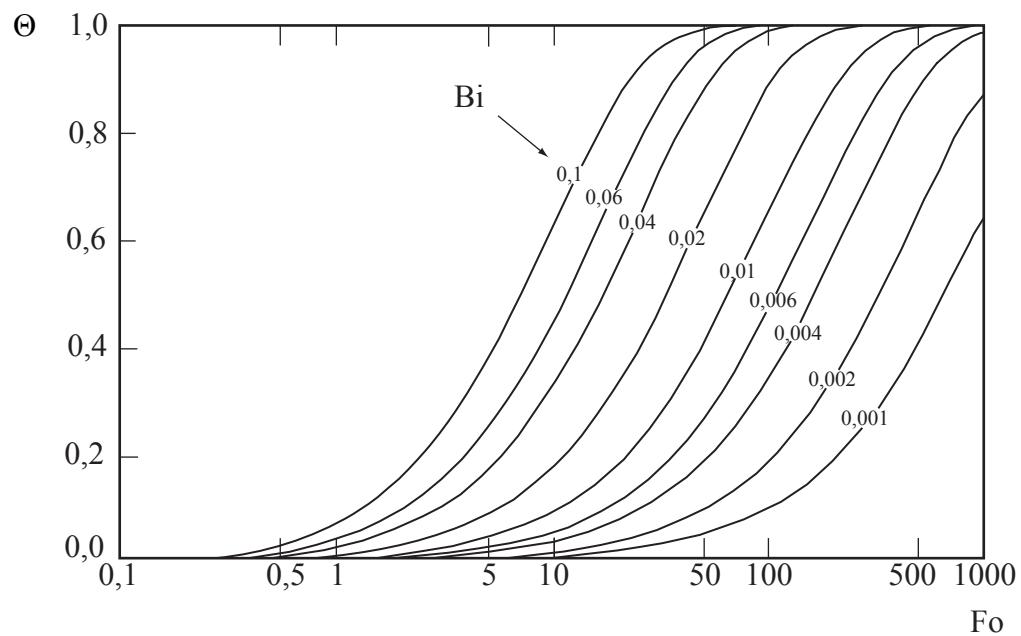
- a) – Wärmeleitung in Längsrichtung x vernachlässigbar.
– Temperatur über die Blechquerschnittsfläche $2 \cdot \delta \cdot B$ ist konstant.
- b) – Wärmeleitung in Längsrichtung x vernachlässigbar.
– Temperaturverteilung in y -Richtung ist zu berücksichtigen (unter Verwendung des nachfolgenden Diagramms). Mit $\Theta = \frac{T(y=0) - T_B}{T_0 - T_B}$

Die Krümmung des Stahlbleches kann in beiden Fällen unberücksichtigt bleiben.

Gegebene Größen:

B	1	m	Breite des Bleches
$2 \cdot \delta$	20	mm	Dicke des Bleches
L	5	m	Eingetauchte Länge des Bleches
α	400	$\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$	Wärmeübergang
λ	40	$\text{W}/\text{m K}$	Wärmeleitfähigkeit Blech
c	0,5	$\text{kJ}/\text{kg K}$	spez. Wärmekapazität Blech
ρ	8000	kg/m^3	Dichte Blech

Hinweis: Temperaturverlust in einer Platte

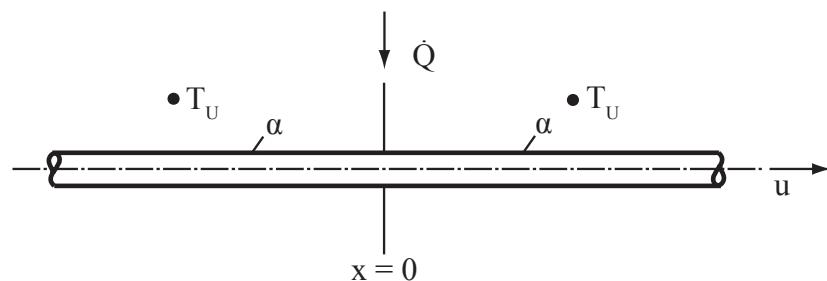


Kapitel 3.

Konvektion

3.1. Heißer Draht*

Ein Draht vom Durchmesser d wird zur Wärmebehandlung mit konstanter Geschwindigkeit u durch eine ortsfeste Wärmequelle gezogen. Der am Umfang des Drahtes zugeführte Wärmestrom ist \dot{Q} . In großer Entfernung von der Wärmequelle hat der Draht Umgebungstemperatur T_U . Der Wärmeübergangskoeffizient α zwischen Drahtoberfläche und Umgebung ist bekannt und konstant. Im Draht sollen in radialer Richtung keine Temperaturunterschiede auftreten. Die Stoffwerte sind als konstant anzunehmen.

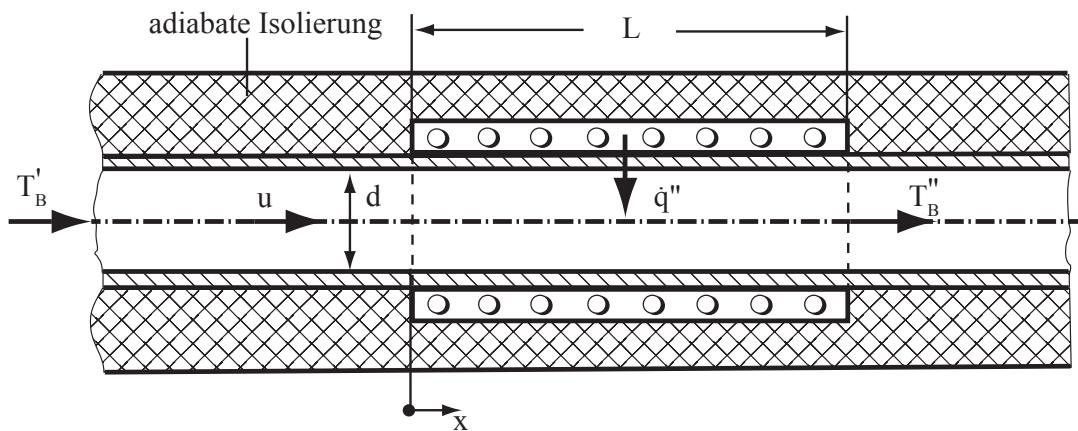


Aufgaben:

- Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf der Drahttemperatur vor und hinter der Wärmequelle und erläutern Sie Ihre Skizze.
- Leiten Sie eine Gleichung für die Temperatur im Draht vor und hinter der Wärmequelle her.

3.2. Bleileitung

In einer Versuchsanlage wird aus einem Vorratsbehälter flüssiges Blei durch eine Rohrleitung vom Durchmesser $d = 20 \text{ mm}$ gepumpt. Der erste, sehr lange Teil der Rohrleitung ist adiabat isoliert. Daran anschließend folgt eine mit konstanter Wärmestromdichte $\dot{q}'' = 80 \text{ kW/m}^2$ beheizte Rohrstrecke der Länge $L = 1 \text{ m}$. Hinter der Heizstrecke ist die Rohrleitung wieder adiabat isoliert. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ist $u = 0,1 \text{ m/s}$. Das flüssige Blei hat im Vorratsbehälter die konstante Temperatur $T'_B = 600^\circ\text{C}$.



Gegebene Größen:

λ_{st}	16,7	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Blei
ρ	10300	kg/m^3	Dichte Blei
c	147	J/kg K	Wärmekapazität Blei

Aufgaben:

- a) Wie hoch ist die mittlere Austrittstemperatur T_B'' des flüssigen Bleis, mit der es die Heizstrecke verlässt?
- b) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der mittleren Bleitemperatur mit und ohne Berücksichtigung der axialen Wärmeleitung.
- c) Ermitteln Sie Gleichungen für den Verlauf der mittleren Temperatur des flüssigen Bleis längs der gesamten Rohrleitung.

Ansatz für die partikuläre Lösung y_p der DGL:

$$y'' + ay' + b = 0 : \quad y_p = -\frac{b}{a} \cdot x$$

- d) Bestimmen Sie das Verhältnis des Wärmestroms, der durch Wärmeleitung in die adiabate Rohrstrecke $x < 0$ abfließt zum insgesamt in der Heizstrecke zugeführten Wärmestrom und kommentieren Sie das zahlenmäßige Ergebnis. Von welcher dimensionslosen Kennzahl hängt dieses Verhältnis ab?

3.3. Drahtgewebe in der Strömung

In einer unendlich ausgedehnten Fluidströmung ist ein dünnes, sehr feinmaschiges Drahtgewebe senkrecht zur Strömungsrichtung aufgespannt. Das Fluid durchströmt das Drahtgewebe mit der Geschwindigkeit u . Weit vor dem Drahtgewebe herrscht im Fluid die Temperatur T_0 . Das Drahtgewebe ist elektrisch geheizt und gibt eine zeitlich und örtlich konstante Wärme pro Flächen- und Zeiteinheit \dot{q}'' an das Fluid ab. Hinter dem Drahtgewebe befindet sich keine Wärmesenke.

Aufgaben:

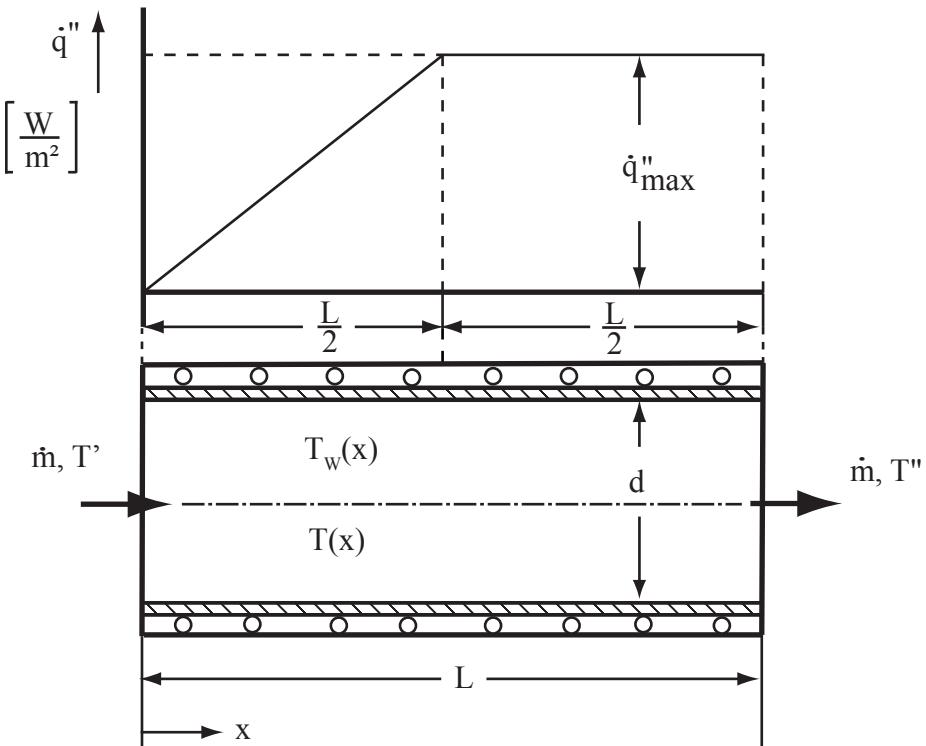
- a) Welche Temperatur T_1 nimmt das Fluid beim Durchströmen des Drahtgewebes an?
- b) Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf der Fluidtemperatur in Strömungsrichtung mit und ohne Berücksichtigung des diffusiven Wärmetransportes in Strömungsrichtung im selben Diagramm.
- c) Leiten Sie eine Gleichung für den Fluidtemperaturverlauf vor dem Drahtgewebe unter Berücksichtigung des diffusiven Wärmetransportes her.

Annahmen:

- Die Stoffwerte des Fluids ρ , c , λ sind bekannt und temperaturunabhängig.

3.4. Beheiztes Rohr

Durch ein beheiztes Rohr (Durchmesser d , Länge L) fließt der Fluidstrom \dot{m} (Dichte ρ , spez. Wärmekapazität c) mit der Eintrittstemperatur T' . Die Heizflächenbelastung \dot{q}'' hat den in nachfolgender Skizze angegebenen Verlauf.



Aufgaben:

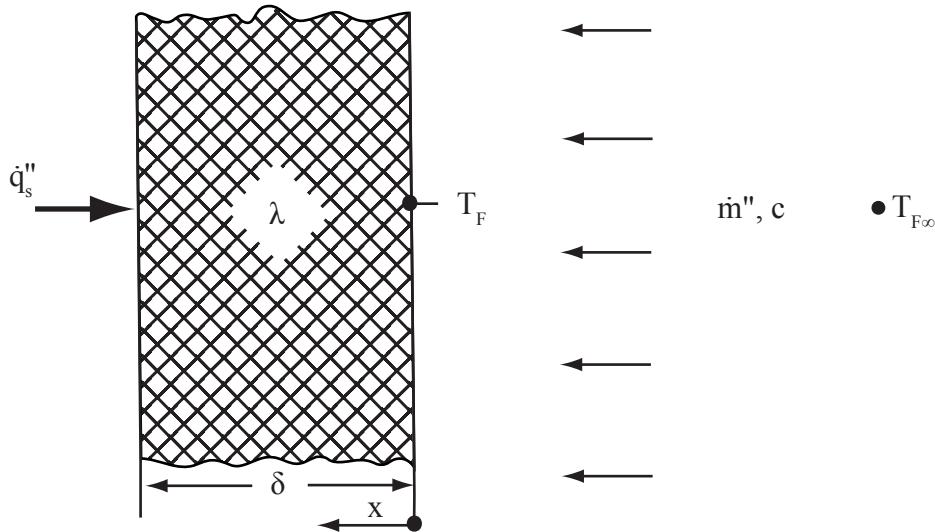
- Wie groß ist die mittlere Temperatur T'' des Fluids am Austritt aus dem Rohr?
- Berechnen Sie den Verlauf der mittleren Fluidtemperatur $T(x)$ längs der Rohrstrecke.
- Ermitteln Sie den Verlauf der Rohrinnenwandtemperatur $T_w(x)$. Der Wärmeübergangskoeffizient α ist bekannt und unabhängig vom Strömungsweg anzunehmen.
- Skizzieren Sie die Temperaturverläufe $T(x)$ und $T_w(x)$ im selben Diagramm.

Annahmen:

- Axiale Wärmeleitung ist zu vernachlässigen.

3.5. Absorbtion einer porösen Wand*

Die Oberfläche einer porösen, strahlungsundurchlässigen Wand absorbiert pro Flächeneinheit einen Strahlungswärmestrom von $\dot{q}_s'' = 150 \text{ kW/m}^2$. Die Wand ist $\delta = 50 \text{ mm}$ dick und hat eine effektive Wärmeleitfähigkeit von $\lambda = 8 \text{ W/mK}$. Sie wird zur Kühlung von einem Fluid mit einer spez. Wärmekapazität von $c = 1 \text{ kJ/kgK}$ durchströmt. Die Temperatur des Fluids am Eintritt beträgt $T_F = -15^\circ\text{C}$.



Aufgaben:

- Ermitteln Sie allgemein den Temperaturverlauf $T(x)$ in der porösen Wand.
- Welche maximale Temperatur T_{\max} stellt sich in der Wand ein, wenn pro Flächeneinheit ein Fluidstrom von $\dot{m}'' = 0,6 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$ durchgesetzt wird?
- Wie groß ist die Wärmestromdichte \dot{q}_F'' , die an der Stelle $x = 0$ ins Kühlfluid abgeleitet wird?
- Welche Temperatur $T_{F,\infty}$ hat das Kühlfluid weit vor der porösen Wand?
- Skizzieren Sie den Temperaturverlauf für zwei verschiedenen großen Massenstromdichten und kennzeichnen Sie die Kurven.

Annahme:

- In der Wand ist der Wärmefluss durch Leitung im Kühlfluid vernachlässigbar klein.
- Die lokalen Fluid- und Wandtemperaturen sind als gleich anzunehmen.

3.6. Lotrechtes Rohr

In ein lotrechtes Rohr mit $d = 18 \text{ mm}$ lichter Weite, dessen innere Oberfläche durch eine Heizung auf einer konstanten Temperatur von $T_W = 110^\circ\text{C}$ gehalten wird, tritt von unten Wasser mit einer Temperatur von $T_0 = 90^\circ\text{C}$, einem absoluten Druck von $p_0 = 1,098 \text{ bar}$ und einer Geschwindigkeit von $w = 0,8 \text{ m/s}$ ein. In welcher Höhe erreicht die mittlere Wassertemperatur Siedetemperatur, wenn die Annahme gemacht wird, dass kein örtliches Sieden (an der Rohrwand) auftritt?

Es kann mit einer Stoffwerttemperatur von $T_{st} = 100^\circ\text{C}$ gerechnet werden. Der Druckabfall in der Rohrleitung durch den Reibungswiderstand ist im Vergleich zur hydrostatischen Druckabnahme vernachlässigbar klein.

Die Siedetemperatur des Wassers beträgt bei

$p_s \text{ [bar]}$	$T_s \text{ [}^\circ\text{C}]$
0,9095	97
0,9430	98
0,9776	99
1,0132	100
1,4327	110

Im hier interessierenden Bereich kann die Dampfdruckkurve durch folgende Beziehung approximiert werden:

$$T_s = T_W - A \cdot \exp\left(-\frac{B}{p_W - p_s}\right)$$

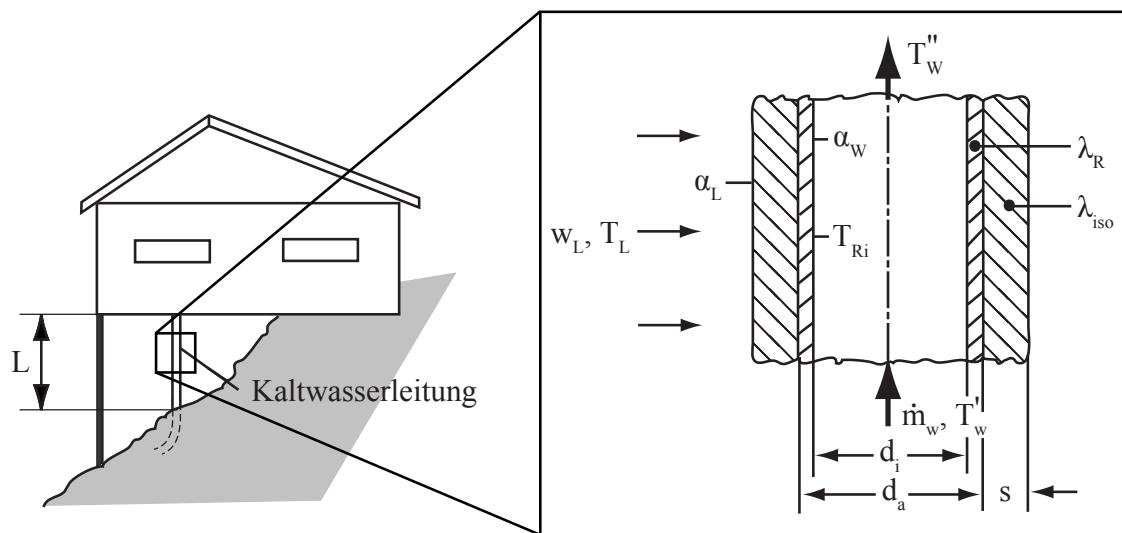
Hierin bedeutet p_W den Sättigungsdampfdruck in bar bei der Rohrwandtemperatur T_W . Die Anpassungskonstanten sind

$$A = 37,565 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$B = 0,56 \text{ bar}$$

3.7. Wasserversorgungsleitung

Die Wasserversorgungsleitung ($d_a = 50 \text{ mm}$ $d_i = 44 \text{ mm}$ $\lambda_R = 60 \text{ W/mK}$) einer am Hang stehenden Berghütte ist auf einer Länge von $L = 1,54 \text{ m}$ freistehend verlegt. Sie hat eine $s = 20 \text{ mm}$ dicke Wärmedämmung ($\lambda_{\text{iso}} = 0,04 \text{ W/mK}$). Die Windgeschwindigkeit (quer zur Leitung) beträgt $w_L = 12 \text{ m/s}$, die Temperatur der Umgebungsluft $T_L = -10^\circ\text{C}$. Das Wasser besitzt am Eintritt in die freistehende Leitung eine Temperatur von $T'_W = 4^\circ\text{C}$.



Gegebene Größen:

λ_L	0,024	W/mK	Wärmeleitfähigkeit Luft
ν_L	$13 \cdot 10^{-6}$	m^2/s	Kinematische Viskosität Luft
Pr_L	0,71		Prandtl-Zahl Luft
λ_W	0,57	W/mK	Wärmeleitfähigkeit Wasser
c_W	4200	J/kg K	Wärmekapazität Wasser
ρ_W	1000	kg/m^3	Dichte Wasser

Aufgaben:

- a) Wie groß muss bei stationären Verhältnissen der ständige Wassermassenstrom sein, damit sich an der kältesten Stelle der Rohrleitung gerade kein Eis bildet?
- b) Ist bei hydrodynamisch und thermisch noch nicht vollständig ausgebildeter Strömung im Rohr ein größerer oder kleinerer Wassermengenstrom erforderlich? Begründen Sie die Antwort!

Annahmen:

- Axialer Wärmefluss in der Rohrleitung und im Wasser vernachlässigbar.
- Als mittleres treibendes Temperaturgefälle zwischen Wasser und Luft längs der Rohrleitung kann das arithmetische Mittel verwendet werden.
- Laminare, hydrodynamisch und thermisch ausgebildete Strömung.
- Zur Ermittlung der Wärmeübergangskoeffizienten kann näherungsweise eine konstante Wandtemperatur angenommen werden.

3.8. Wärmeübergang an einer beheizten Platte

Eine auf konstante Oberflächentemperatur von $T_P = 100^\circ\text{C}$ geheizte Platte der Größe $50 \times 50 \text{ cm}^2$ wird beiderseits parallel zur Oberfläche mit Luft von $T_L = 20^\circ\text{C}$, $p_L = 1 \text{ bar}$ und $w_L = 20 \text{ m/s}$ angeblasen.

Aufgaben:

- a) Wie groß sind der örtliche Wärmeübergangskoeffizient am Plattenende $\alpha(L)$ und der mittlere Wärmeübergangskoeffizient α der Platte bei Annahme laminarer Strömung und bei Annahme turbulenter Strömung von der Plattenvorderkante beginnend?
- b) Welcher Wärmestrom \dot{Q} wird bei laminarer und welcher bei turbulenter Strömung abgegeben?
- c) Wie groß ist die Wärmeabgabe der Platte, wenn die Strömung bis $\text{Re}_{\text{krit}} = 200\,000$ laminar bleibt und dann turbulent wird?

Annahmen:

- Bei Beginn der turbulenten Strömung hat der Wärmeübergangskoeffizient den Wert, der sich ergibt, wenn die Strömung von der Vorderkante der Platte an turbulent ist.

Kapitel 4.

Strahlung und Konvektion

4.1. Thermoelement

In einer sehr langen Rohrleitung mit von $D = 20 \text{ mm}$ Durchmesser, die eine Wandtemperatur von $T_W = 80^\circ\text{C}$ hat, strömt Luft von $T_L = 100^\circ\text{C}$ und $p_L = 1 \text{ bar}$ mit einer Geschwindigkeit von $w_L = 2 \text{ m/s}$. In die Leitung ist eine Thermoelement von $d = 1 \text{ mm}$ Durchmesser eingebaut, dessen Achse in Strömungsrichtung weist.

Gegebene Größen:

ϵ_W	0,8	Emissionsgrad Rohrwand
ϵ_{Th}	0,6	Emissionsgrad Thermoelement
ϵ_S	0,04	Emissionsgrad Strahlungsschutzschirm, verspiegelt
ϵ_S	0,06	Emissionsgrad Strahlungsschutzschirm, nicht verspiegelt

Aufgaben:

- a) Welche Temperatur T_{Th} zeigt ein nicht strahlungsgeschütztes Thermoelement an?
- b) Durch welche Maßnahmen kann der Messfehler verkleinert werden?
- c) Welche Temperatur T_{Th} zeigt ein strahlungsgeschütztes Thermoelement an?
Der Strahlungsschutz bestehe aus einem $l' = 30 \text{ mm}$ langen innen und außen verspiegelten Röhrchen von $d' = 10 \text{ mm}$ Durchmesser mit sehr geringer Wanddicke.

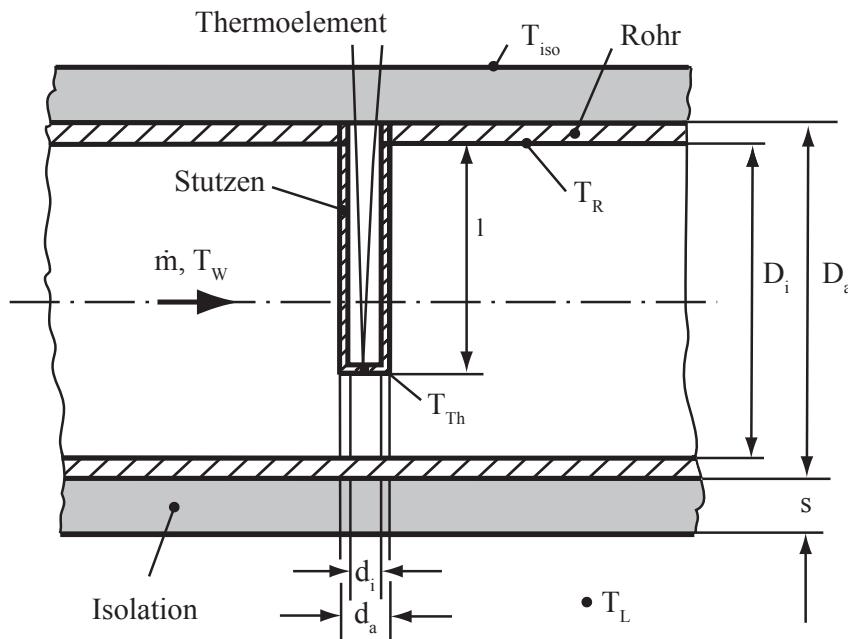
- d) Wie groß ist die Thermoelementtemperatur bei unverspiegeltem Strahlungsschutzschirm?

Annahmen:

- Die Wärmeverluste der Rohrleitung nach außen sind so gering, dass sich die Temperatur der Luft im betrachteten Rohrabschnitt nicht merklich ändert.
- Die Einstrahlzahlen zwischen Thermoelement und Rohrwand, Thermoelement und Strahlungsschutz sowie Strahlungsschutz und Rohrwand können näherungsweise zu Eins gesetzt werden.
- Zur Abschätzung der Wärmeübergangskoeffizienten am Thermoelement und am Strahlungsschutzschirm werden beide Körper als längsangeströmte ebene Platte behandelt. Die sich entwickelnden Grenzschichten sollen nicht zusammenwachsen. Die Anströmlänge beim Thermoelement betrage $l = 10 \text{ mm}$.

4.2. Stutzen im Rohr*

Durch ein mit Glaswolle isoliertes Kupferrohr, das frei in einem Raum verlegt ist, fließt Wasser, dessen Temperatur mit einem Thermoelement gemessen wird. Das Thermoelement steckt in einem ebenfalls aus Kupfer bestehenden Stutzen und hat sehr guten Kontakt mit dem geschlossenen Ende des Stutzens. Der Stutzen ist senkrecht zur Rohrachse an der Rohrwand angelötet.



Gegebene Größen:

D_i	50	mm	Rohrinnendurchmesser
D_a	54	mm	Rohraußendurchmesser
s	10	mm	Dicke der Isolierung
d_i	6	mm	Innendurchmesser des Thermoelementstutzens
d_a	8	mm	Außendurchmesser des Thermoelementstutzens
\dot{m}_W	0,2	kg/s	Wassermassenstrom
T_W	80	°C	mittlere Wassertemperatur
T_L	15	°C	Raumlufttemperatur
λ_{iso}	0,046	W/mK	Wärmeleitfähigkeit der Isolierung
ϵ_{iso}	0,9	-	Emissionsgrad der Isolierung

Die Raumwände haben ungefähr dieselbe Temperatur wie die Raumluft, ihre Oberfläche ist groß im Vergleich zu der des isolierten Rohres.

Aufgaben:

- a) Ermitteln Sie die Eintauchlänge l des Thermoelementstutzens, die erforderlich ist, damit der Temperaturmessfehler $T_W - T_{Th} \leq 0,05 \text{ K}$ beträgt.
- b) Diskutieren Sie Maßnahmen für den Stutzeneinbau zur Einhaltung bzw. Verkleinerung des Messfehlers, wenn sich bei der unter a) betrachteten Anordnung eine Eintauchlänge von $l \geq D_i$ ergibt.

Annahmen:

- Die Berechnung der inneren Rohrwandtemperatur erfolgt ohne Berücksichtigung des Thermoelementstutzens.
- Der Thermoelementstutzen besitzt an der Einbaustelle des Rohres Rohrwandtemperatur.
- Der Wärmeabfluss durch die innere Mantelfläche des Stutzenrohres, durch das Stutzenende und durch den Thermoelementdraht ist vernachlässigbar.
- Das Thermoelement zeigt die Temperatur des Stutzenendes an.
- Ausgebildete Rohrströmung.

4.3. Methanolbehälter*

Aus einem Behälter strömen $\dot{m} = 1600 \text{ kg/h}$ Methanol durch ein $L = 18 \text{ m}$ langes Rohr von $d_i = 2 \text{ cm}$ Innendurchmesser und $d_a = 2,4 \text{ cm}$ Außendurchmesser in einen Kühler. Die Rohrleitung ist waagerecht in einem Raum mit einer Lufttemperatur von $T_L = 20^\circ\text{C}$ verlegt. Das Kupferrohr ist mit einer $s = 2 \text{ cm}$ dicken Korkschicht wärmegedämmt. Die Temperaturen des Methanols im Behälter und vor Eintritt in den Kühler wurden gemessen und betragen $T_1 = -32,8^\circ\text{C}$ bzw. $T_2 = -32,2^\circ\text{C}$.

Gegebene Größen:

ρ_M	850	kg/m^3	Dichte Methanol
λ_M	0,221	W/mK	Wärmeleitfähigkeit Methanol
c_M	2,26	kJ/K	Wärmekapazität Methanol
η_M	$2,2 \cdot 10^{-3}$	kg/m s	Dynamische Viskosität Methanol
λ_K	0,043	W/mK	Wärmeleitfähigkeit Kork
α_a^*	10	$\text{W/m}^2\text{K}$	Schätzwert für den Gesamtwärmeübergangskoeffizienten auf der Rohrleitungsaußenseite

Aufgabe:

- a) Ist die Wärmedämmwirkung einwandfrei oder infolge Durchfeuchtung herabgesetzt?

Hinweis:

Strahlungsanteile sind zu berücksichtigen.

4.4. Luftspalt

Gegeben ist eine unendlich ausgedehnte Luftsicht zwischen zwei ebenen, horizontal liegenden Platten. Die Oberflächentemperatur der oberen Platte beträgt $T_1 = 40^\circ\text{C}$, die der unteren Platte $T_2 = 20^\circ\text{C}$. Die Temperaturen sind zeitlich konstant. Die Oberflächen haben einen Emissionsgrad von $\epsilon = 0,1$. Die Dicke des Luftspaltes ist $\delta = 50 \text{ mm}$.

Aufgaben:

- a) Berechnen Sie die scheinbare Wärmeleitfähigkeit im Spalt λ_S , die sich bei Berücksichtigung der Strahlung ergibt.
- b) Wie groß ist die scheinbare Wärmeleitfähigkeit, wenn in der Mitte des Luftspaltes eine sehr dünne, strahlungsundurchlässige Folie aufgespannt wird? Der Emissionsgrad der Folie ist gleich dem der Plattenoberfläche.

Welche Temperatur T_F nimmt die Folie an?

- c) Leiten Sie eine Beziehung für die scheinbare Wärmeleitfähigkeit im Spalt her, wenn dieser durch n Folien (Eigenschaften wie in b) in gleich große Schichten aufgeteilt wird.

Anleitung:

Die scheinbare Wärmeleitfähigkeit im Spalt λ_S ergibt sich, wenn man sich den insgesamt durch den Spalt fließenden Wärmestrom durch reine Wärmeleitung übertragen denkt.

4.5. Beatmungsgerät*

Im Anschluss an ein Beatmungsgerät wird ein kontinuierlicher Luftstrom $\dot{m}_L = 0,5 \text{ kg/h}$ mit einem Taupunkt (= Wasserdampfsättigungstemperatur) von $T_\tau = 35^\circ\text{C}$ durch eine Kunststoffleitung gefördert. Die Leitung besteht aus dem luftführenden Innenschlauch, der konzentrisch von einer Weichschaumstoffisolierung umschlossen wird. Um Wasserdampfkondensation an der inneren Schlauchwand zu vermeiden, soll der Luftstrom vor Eintritt in den Schlauch so weit aufgeheizt werden, dass die Schlauchwandtemperatur an der kondensationsgefährdetsten Stelle 1 K über der Taupunktstemperatur des Luftstroms liegt. Die Schlauchleitung ist waagerecht in Umgebungsluft von $T_U = 20^\circ\text{C}$ verlegt.

Gegebene Größen:

d_i	10	mm	Innendurchmesser des Schlauches
d_a	15	mm	Außendurchmesser des Schlauches
D	60	mm	Außendurchmesser der Isolierung
L	1,5	m	Länge der Leitung
$\rho_{L,U}$	1,18	kg/m^3	Dichte Umgebungsluft
$\nu_{L,U}$	$15,5 \cdot 10^{-6}$	m^2/s	Kinematische Viskosität Umgebungsluft
$c_{L,U}$	1000	J/kg K	Wärmekapazität Umgebungsluft
$\lambda_{L,U}$	0,026	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Umgebungsluft
$\Pr_{L,U}$	0,71	—	Prandtl-Zahl Umgebungsluft
$\rho_{L,S}$	1,0	kg/m^3	Dichte Luftströmung
$\nu_{L,S}$	$20 \cdot 10^{-6}$	m^2/s	Kinematische Viskosität Luftströmung
$c_{L,S}$	1000	J/kg K	Wärmekapazität Luftströmung
$\lambda_{L,S}$	0,029	W/m K	Wärmeleitfähigkeit Luftströmung
$\Pr_{L,S}$	0,71	—	Prandtl-Zahl Luftströmung
λ_S	0,2	W/m K	Wärmeleitfähigkeit des Schlauches
λ_{iso}	0,04	W/m K	Wärmeleitfähigkeit der Isolierung
η_{iso}	0,95	—	Emissionsgrad der Isolierung
α_a	9	$\text{W/m}^2 \text{K}$	Gesamtwärmeübergangskoeffizient auf der Außenseite der Leitung

Aufgaben:

- a) Bestimmen Sie den Wärmeübergangskoeffizienten α_i auf der Innenseite der Schlauchleitung und den Wärmedurchgangskoeffizienten k zwischen der Luftströmung und der Umgebungsluft bezogen auf die innere Schlauchoberfläche. Vernachlässigen Sie bei der Berechnung die Korrektur für den Zähigkeitseinfluss.
- b) Geben Sie die Gleichung für den Verlauf der mittleren Luftstromtemperatur an und stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Luftstrom- und der Schlauchwandtemperatur für die kritische Stelle her. Ermitteln Sie daraus eine Gleichung für die Lufteintrittstemperatur T'_L so, dass keine Kondensation auftritt. Wie groß ist die Lufteintrittstemperatur T'_L unter den gegebenen Bedingungen?
- c) Bestimmen Sie den Wärmeverlust \dot{Q}_L der Luftströmung.

Überprüfen Sie, ob der angegebene mittlere Gesamtwärmeübergangskoeffizient α_a auf der Außenseite zutrifft. Die Temperaturen der Raumumschließungsoberflächen und der Umgebungsluft weichen nur geringfügig voneinander ab.

- d) Begrenzt man die Lufteintrittstemperatur auf $T'_{L*} = 60^\circ\text{C}$, nach welcher Strecke L_0 müsste die Strömung durch eine an dieser Stelle eingebaute elektrische Heizwendel nachgewärmt werden, um weiterhin Kondensation zu vermeiden?

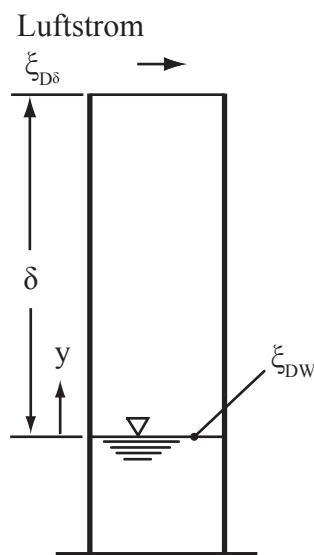
Welche elektrische Heizleistung \dot{Q}_{el} ist mindestens zu installieren, und welcher Gesamtwärmeverlust \dot{Q}_V der Leitung ergibt sich in diesem Fall? Der Wärmedurchgangskoeffizient k und der Wärmeübergangskoeffizient α_i können näherungsweise konstant, wie im Aufgabeteil a) berechnet, angenommen werden.

Kapitel 5.

Stoffübertragung

5.1. Glasrohr

In einem senkrechten Glasröhren mit $A = 5 \text{ cm}^2$ Querschnitt befindet sich eine Wasserschicht. Die Höhe des Röhrchens von der Wasserschicht bis zum oberen Ende beträgt $\delta = 64 \text{ mm}$. Durch Wägung wird ermittelt, dass bei der herrschenden Temperatur von $T = 30,8^\circ\text{C}$ und dem Gesamtdruck von $p = 0,98 \text{ bar}$ pro Stunde eine Wassermenge von $25,5 \text{ mg}$ verdunstet. Über das Glasröhren hinweg strömt vollkommen trockene Luft.



Gegebene Größen:

p_s	0,0445	bar	Sättigungsdampfdruck des Wassers bei 30,8 °C
r	2429	kJ/kg	Spezifische Verdampfungsenthalpie von Wasser
R_D	461	J/kgK	Gaskonstante von Wasserdampf
R_L	287	J/kgK	Gaskonstante von Luft

Aufgaben:

- a) Bestimmen Sie den Massenkonzentrationsverlauf des Wasserdampfes im Gläserchen, und leiten Sie den Zusammenhang zwischen dem verdunstenden Wassermengenstrom und den Massenkonzentrationsrandwerten her.
- b) Ermitteln Sie das Verhältnis der Stoffübergangskoeffizienten mit und ohne Berücksichtigung der sogenannten Stefan-Korrektur.
- c) Berechnen Sie aus den angegebenen Daten den Diffusionskoeffizienten D von Wasserdampf in Luft für die hier vorliegenden Bedingungen.

5.2. Feuchtes Holz

Eine $\delta = 75 \text{ mm}$ dicke, große Holzplatte enthält einen Massenanteil an Wasser von $\xi_0 = 0,218$. Im Gleichgewicht mit der Umgebung würde sich der Massenanteil auf $\xi_U = 0,064$ verringern. Der Diffusionskoeffizient von Wasser in Holz ist $D = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$.

Aufgaben:

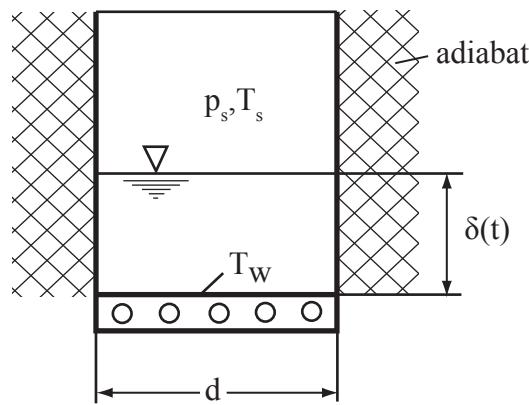
- a) Stellen Sie die Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf der Wassermassenkonzentration in der Holzplatte auf, wenn Randeffekte vernachlässigbar sind.
- b) Wie lange dauert es, bis der Massenanteil des Wassers in der Plattenmitte auf $\xi_m = 0,08$ gesunken ist?

Hinweis:

- Benutzen Sie die Analogie zur Wärmeleitung.
- $g \rightarrow \infty$

5.3. Kondensation von Wasserdampf

Ein zylindrisches Gefäß mit einem ebenen Boden und $d = 0,3\text{ m}$ Durchmesser steht auf einer waagerechten Fläche. Durch Kühlkanäle, die in dem Boden eingebettet sind, wird die Bodenoberfläche auf eine zeitlich konstante Temperatur $T_W = 20^\circ\text{C}$ gekühlt.



Das Gefäß wird plötzlich einer luftfreien, gesättigten Wasserdampfatmosphäre mit $p_s = 0,2\text{ bar}$ und $T_s = 60^\circ\text{C}$ ausgesetzt. Die spezifische Verdampfungsenthalpie von Wasser bei diesen Bedingungen beträgt $r = 2358\text{ kJ/kg}$.

Aufgabe:

Welche Dampfmenge m_D^* ist nach $t^* = 1\text{ h}$ auf dem Boden des Gefäßes kondensiert?

Annahmen:

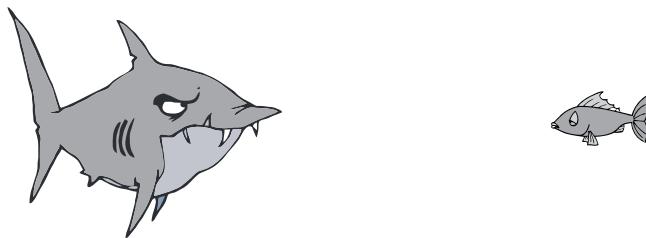
- Keine Kondensation an den Seitenwänden des Gefäßes.
- Der Wärmeübergangswiderstand an der Phasengrenze Dampf/Wasser ist gleich Null.
- Die Zeitliche Änderung der inneren Energie der sich bildenden Kondensatschicht ist vernachlässigbar (\rightarrow quasistationäres Temperaturprofil im Kondensat).

Hinweis:

- T_s ist konstant.

5.4. Haialarm auf Mallorca*

Ein Fisch wird verletzt und verliert Blut. Er ist damit der Gefahr ausgesetzt, von einem Hai entdeckt und gefressen zu werden. Der Fisch befindet sich in stehendem Wasser und bewegt sich nicht, so dass Konvektionseffekte keinen Einfluss auf die Verteilung des Blutes im Wasser nehmen. Der Hai kann das Blut wahrnehmen, sobald eine kritische Konzentration ξ_K im Wasser überschritten wird.



Aufgaben:

- Leiten Sie, ausgehend von einer differentiellen Bilanz, eine allgemeine Transportgleichung für das Blut in Kugelkoordinaten her. Diffusion, instationäre Effekte und Quellterme sollen berücksichtigt werden, Konvektion hingegen nicht. Eine Winkelabhängigkeit ist nicht gegeben.
- Erläutern Sie anhand der in a) abgeleiteten Differentialgleichung die Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung. Vergleichen Sie die in a) ermittelte Gleichung mit der Differentialgleichung für das Temperaturfeld in Kugelkoordinaten aus dem Vorlesungsumdruck:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \Phi} \right) \right) + \dot{\Phi}'''$$

und stellen Sie alle Variablen in einer Tabelle gegenüber.

- In welcher Entfernung vom Fisch r_K kann der Hai diesen riechen? Nehmen sie an, dass der Fisch rund ist, den Radius r_F hat und stationär gleichmäßig nach allen Seiten insgesamt den Blutmassenstrom \dot{m}_B verliert. Beim Radius r_F herrscht im Wasser die Blutkonzentration ξ_F . Ermitteln Sie eine Beziehung für die Entfernung r_K in Abhängigkeit von diesen Größen.

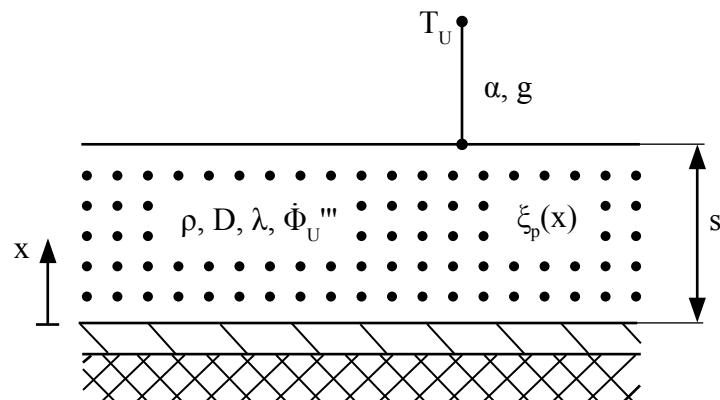
- d) Bei der Blutkomponente, die vom Hai gerochen werden kann, handelt es sich um die Aminosäure Serin ($\text{C}_3\text{H}_3(\text{OH})(\text{NH}_2)(\text{OOH})$). Der Massenanteil von Serin in Blut ist ξ_S . Die Stoffeigenschaften von Blut gleichen denen von Wasser. Berechnen Sie – mit den in folgender Tabelle gegebenen Zahlenwerten – den Blutmassenanteil ξ_F an der Haut des Fisches für die gegebene kritische Konzentration ξ_K .

$D_{\text{Serin}, \text{Wasser}}$	$1,78 \cdot 10^{-7}$	m^2/s	Diffusionskoeffizient Serin in Wasser
ξ_K	$1,05 \cdot 10^{-15}$	kgs/kg	Kritische Blutkonzentration
\dot{m}_B	$2,78 \cdot 10^{-6}$	kg_B/s	Blutmassenstrom
r_F	0,106	m	Radius des Fisches
ρ_{ges}	999	kg/m^3	Dichte Blut und Wasser
r_K	400	m	Kritische Entfernung zum Fisch
ξ_S	$1,05 \cdot 10^{-4}$	kgs/kg_B	Massenanteil Serin im Blut

5.5. Noch kritischerer Sprengstoff*

Ein Sprengstoff wird wie in Aufgabe 2.16 beschrieben in Form einer Platte gelagert. Zusätzlich zur Überhitzung des Sprengstoffs, die zur Explosion führen kann, muss auch die Kontaminierung des Sprengstoffs durch die ebenfalls in Aufgabe 2.16 beschriebene chemische Reaktion kontrolliert werden. Dies geschieht durch Entfernung des oberen Metallmantels, wodurch die Diffusion des Reaktionsproduktes an die Oberseite der Platte möglich wird. Der Stofftransport des Produktes von der Oberfläche an die Umgebung wird durch den Stoffübergangskoeffizienten g beschrieben. Durch das Entfernen des Mantels herrscht an der Oberseite der Platte nun nicht mehr der Wärmedurchgangskoeffizient k , sondern der Wärmeübergangskoeffizient α . Der Massenanteil des Produktes im Sprengstoff darf einen Wert nicht überschreiten, da sonst eine weitere Reaktion einsetzt, deren Produkt nicht durch den Sprengstoff diffundieren kann und diesen somit unbrauchbar macht. Die Temperaturverteilung im Sprengstoff ist gegeben durch:

$$T - T_U = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\cos(m \cdot x)}{\cos(m \cdot s) - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot m \cdot \sin(m \cdot s)} - \frac{1}{\gamma} \quad \text{mit } m = \sqrt{\frac{\gamma \cdot \dot{\Phi}_U'''}{\lambda}}$$



Gegebene Größen:

$\dot{\Phi}'''$	$= \dot{\Phi}_U''' \cdot (1 + \gamma(T - T_U))$	Wärmeentwicklung durch Reaktion
$\dot{\Phi}_U'''$	0,3 W/m ³	Quellterm
γ	0,21 1/K	
T_U	20 °C	Umgebungstemperatur
λ	0,85 W/mK	Wärmeleitfähigkeit Sprengstoff
Δh	7000 kJ/kg _P	Reaktionsenthalpie
α	3 W/m ² K	Wärmeübergangskoeffizient
ρ	3000 kg _{ges,SP} /m ³	Dichte Sprengstoff
D	10^{-9} m ² /s	Diffusionskoeffizient des Produktes im Sprengstoff
g	0,001 kg _{ges,SP} /m ² s	Stoffübergangskoeffizient
$\xi_{P,krit}$	0,001 kg _P /kg _{ges,SP}	Kritische Konzentration

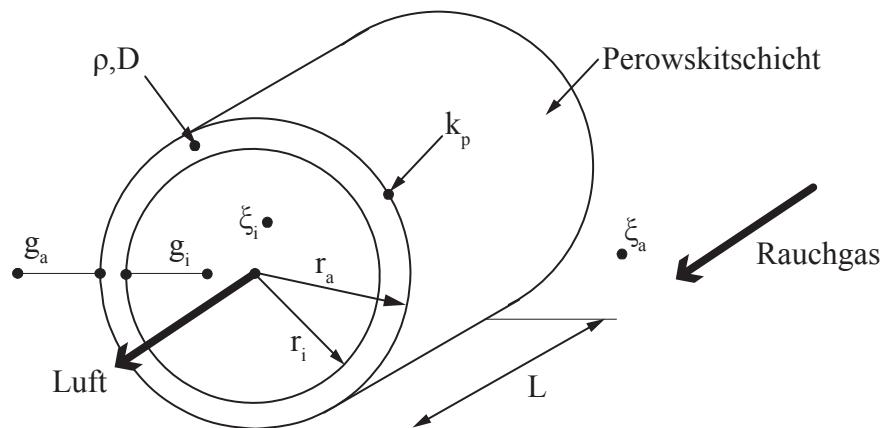
Aufgabe:

- a) Wie groß darf die Dicke der Sprengstoffplatte s höchstens sein, damit der Sprengstoff nicht kontaminiert wird?

5.6. Perowskite*

Einige keramische Materialien, so genannte Perowskite, können genutzt werden, um Rauchgase mit Sauerstoff anzureichern. Hierzu werden dünne Perowskitschichten auf die Außenseiten von kurzen Rohren aufgetragen, die aus einem Trägermaterial bestehen. Durch die Rohre wird Luft geleitet. Sowohl der Sauerstoff als auch der Stickstoff der Luft können durch das Trägermaterial diffundieren. An der Perowskischicht wird der Sauerstoff hindurchgelassen, der Stickstoff jedoch nicht.

Der effektive Transport des Sauerstoffs durch das Trägermaterial wird durch die Diffusionskoeffizienten D (gemessen ohne Perowskischicht) und D^{St} (gemessen mit Perowskischicht) beschrieben. Diese sind jeweils auf die Dichte ρ zu beziehen. Außerhalb des Rohres strömt das anzureichernde heiße Rauchgas. Die Perowskischicht ist für das Rauchgas undurchlässig.



Gegebene Größen:

r_i	0,005	m	Innenradius
r_a	0,006	m	Außenradius
k_p	$5 \cdot 10^{-4}$	$\text{kgL}/\text{m}^2 \text{s}$	Stofftransportkoeffizient Perowskitschicht
ρ	1,25	kgL/m^3	Dichte ¹
D	$4 \cdot 10^{-7}$	m^2/s	Diffusionskoeffizient ohne Perowskitschicht
D^{St}	$4,6 \cdot 10^{-7}$	m^2/s	Diffusionskoeffizient mit Perowskitschicht
ξ_i	0,232	kgO_2/kgL	Sauerstoffanteil Luft
ξ_a	0,08	kgO_2/kgRG	Sauerstoffanteil Rauchgas
ρ_{RG}	1,6	kgRG/m^3	Rauchgasdichte
g_i	0,007	$\text{kgL}/\text{m}^2\text{s}$	Stoffübergangskoeffizient innen (ohne Stefankorrektur)
g_a	0,003	$\text{kgL}/\text{m}^2\text{s}$	Stoffübergangskoeffizient außen (ohne Stefankorrektur)
L	0,05	m	Rohrlänge

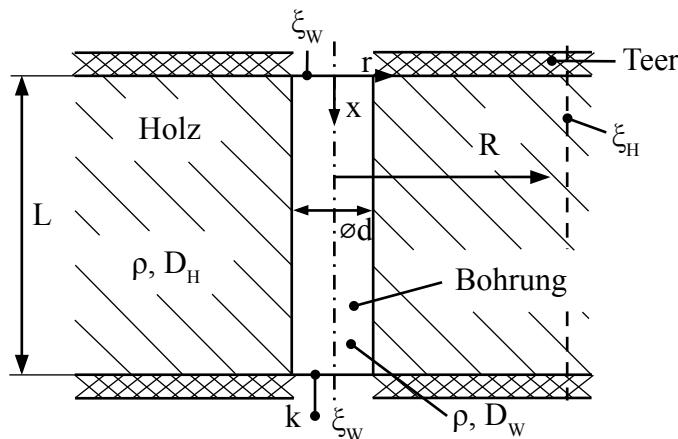
Aufgaben:

- a) Wie hoch ist der durch die Rohrwand hindurchtretende Sauerstoff-Massenstrom?
Vernachlässigen Sie die Stefankorrektur.
- b) Wie hoch ist der Massenstrom bei Berücksichtigung der Stefankorrektur?

¹Obwohl die Dichte ρ zur Berechnung der Diffusion im Trägermaterial verwendet wird, handelt es sich nicht um die Gesamtdichte des Trägermaterials inklusive der enthaltenen Luft, sondern die der reinen Luft. Dies ermöglicht die Verwendung von Massenanteilen ξ , die einheitlich auf die Masse der Luft kg_L bezogen werden. Aus diesem Grund handelt es sich auch bei den Einheiten von k_p , g_i und g_a um Luftmassen. Der Tatsache, dass Sauerstoff, der durch Stickstoff in einem Trägermaterial diffundiert, sich anders verhält als Sauerstoff, der durch Stickstoff diffundiert, wird hier durch die Werte von D und D^{St} Rechnung getragen.

5.7. Geteertes Holz*

Eine im Wasser auf dem Boden liegende Holzplatte der Dicke L ist mit einer durchgehenden Bohrung mit dem Durchmesser d versehen. Das Holz ist mit Naphthalin gesättigt (Massenanteil ξ_H), weil die Platte an allen Seiten mit einer dünnen Teerschicht bedeckt ist. Das Naphthalin in der Platte diffundiert zur Bohrung und wird dort im Wasser gelöst. An der Unterseite der Platte herrscht der Stoffübergangskoeffizient k zwischen der unteren Öffnung der Bohrung und der Stelle im Boden, an der Umgebungsbedingungen herrschen (Naphthalinkonzentration im Wasser $\xi_W = 0$). An der Oberseite herrschen bereits unmittelbar über der Bohrung Umgebungsbedingungen. Die Gesamtdichte des Holzes und die des Wassers in der Bohrung beträgt ρ .



Gegebene Größen:

L	0,2	m	Dicke der Holzplatte
d	0,01	m	Durchmesser der Bohrung
ξ_H	10^{-4}	kg_N/kg	Massenanteil Naphthalin im Holz
k	0,005	$\text{kg}/\text{m}^2 \text{s}$	Stoffübergangskoeffizient an der Plattenunterseite
ρ	1000	kg/m^3	Gesamtdichte Holz + Wasser in der Bohrung
D_H	$3 \cdot 10^{-10}$	m^2/s	Diffusionskoeffizient Naphthalin in Holz
D_W	$7 \cdot 10^{-6}$	m^2/s	Diffusionskoeffizient Naphthalin in Wasser
R	0,08	m	Abstand von Achse der Bohrung, an der Sättigungskonzentration erreicht wird.

Aufgaben:

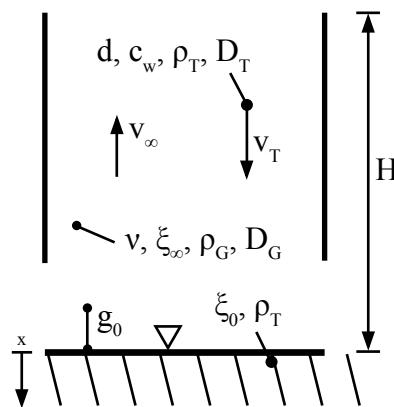
- a) Berechnen Sie die Biot-Zahl. Kann ξ innerhalb der Bohrung als in radialer Richtung konstant angesehen werden?
- b) Wie groß ist der Naphthalinmassenstrom, der insgesamt aus der Bohrung austritt?
- c) Wie groß ist der Massenstrom, wenn die Platte senkrecht im Wasser steht?
- d) Wie groß ist der Massenstrom, wenn die Unterseite der Bohrung als undurchlässig angesehen wird?
- e) Zeichnen Sie die qualitativ die Funktion $\xi(x)$ für die drei in den Aufgabenteilen b) bis d) betrachteten Fälle. Hinweise:
 - Setzen Sie stationäre Verhältnisse voraus.
 - Konvektionseffekte innerhalb der Bohrung sind zu vernachlässigen.
 - Axialer Naphthalintransport im Holz soll vernachlässigt werden.

Annahmen:

- Der Konzentrationsverlauf an der Phasengrenze zwischen Holz und Wasser ist als stetig anzunehmen.
- Der Einfluss der Naphthalinkonzentration auf die Dichten ist vernachlässigbar. Die Diffusionskoeffizienten von Naphthalin in Holz bzw. in Wasser sind D_H und D_W .
- Der Bohrungsdurchmesser ist klein gegenüber den Abmessungen der Platte. Es kann näherungsweise davon ausgegangen werden, dass die Sättigungskonzentration ξ_H im Holz ab einem Abstand R von der Achse der Bohrung erreicht wird.

5.8. Gaswäscher*

Ein Gas, das aus Ethanol mit Spuren von CO₂ besteht, soll von CO₂ gereinigt werden. Hierzu wird das Gas durch einen mehrstufigen Wäscher geleitet, von dem jedoch nur eine Stufe betrachtet werden soll. Das Gas strömt dabei mit der Geschwindigkeit v_∞ nach oben durch ein senkrechttes Rohr, während runde Tropfen des Lösungsmittels durch das Rohr nach unten in einen tiefen Sumpf fallen und auf dem Weg CO₂ aufnehmen. Die Tropfen enthalten zu Beginn ihres Falls kein CO₂. Der CO₂-Gehalt im Freistrom beträgt ξ_∞ .



Gegebene Größen:

d	10^{-3} m	Tropfendurchmesser
c_W	0,4 —	Widerstandsbeiwert
v_∞	0,05 m/s	Geschwindigkeit des Gases
H	0,2 m	Höhe des Rohres
g_E	9,81 m/s ²	Erdbeschleunigung
ρ_G	1,86 kg _G /m ³	Gasdichte
ρ_T	1020 kg _T /m ³	Dichte des Tropfens
ν	$4,63 \cdot 10^{-6}$ m ² /s	Kinematische Viskosität des Gases
ξ_∞	0,05 kg _{CO₂} /kg _G	CO ₂ -Anteil im Freistrom
D_T	10^{-5} m ² /s	Diffusionskoeffizient CO ₂ in Lösungsmittel
D_G	$5,4 \cdot 10^{-6}$ m ² /s	Diffusionskoeffizient CO ₂ in Ethanol
ξ_0	10^{-5} kg _{CO₂} /kg _T	Anfänglicher CO ₂ -Massenanteil im Sumpf
g_0	0,0032 kg _G /m ² s	Stoffübergangskoeffizient am Sumpf

Aufgaben:

- Wie groß ist die Endgeschwindigkeit v_T eines Tropfens mit einem Durchmesser von d relativ zur Gasströmung? Die Dichte des Gases ist klein gegenüber der des Tropfens.
- Welche CO₂-Masse nimmt der in a) beschriebene Tropfen während des Falls auf? Die Beschleunigungsphase des Tropfens ist verglichen mit dessen Verweilzeit kurz und kann deshalb vernachlässigt werden.
- Beim Abschalten des Wäschers herrscht im Sumpf überall der CO₂-Massenanteil ξ_0 . Mit dem Abschalten endet auch das Durchmischen des Sumpfes, so dass dort nur Diffusion eine Rolle spielt. Oberhalb der Lösungsmitteloberfläche befindet sich immer noch das CO₂-haltige Gas. Der CO₂-Transport in den Sumpf wird durch den Stoffübergangskoeffizienten g_0 beschrieben. Welcher CO₂-Massenanteil ξ_S herrscht 10 Sekunden nach dem Abschalten des Wäschers in einer Tiefe von 0,005 m?

Hinweise:

- Konvektion innerhalb des Tropfens soll vernachlässigt werden.
- Der Stefanstrom kann aufgrund der allgemein niedrigen CO₂-Massenanteile im System vernachlässigt werden.
- Da nur eine Stufe des Wäschers betrachtet wird, soll ξ_∞ über den gesamten Weg des Tropfens als konstant angesehen werden. Dies gilt auch für Aufgabenteil c).
- Der Widerstandsbeiwert ist definiert als

$$c_W = \frac{F_W}{A \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_G \cdot v^2} \quad (5.1)$$

wobei F_W die durch den Strömungswiderstand verursachte Kraft am Tropfen und A die projizierte Tropfenfläche ist.

- Die Henry-Konstante h für den Transport von CO₂ über die Phasengrenze zwischen Gas und Lösungsmittel ist 1, so dass an der Phasengrenze für die CO₂-Massenanteile in Gas ($\xi_{W,a}$) und Lösungsmittel ($\xi_{W,i}$) gilt:

$$\xi_{W,i} = h \cdot \frac{\rho_G}{\rho_T} \cdot \xi_{W,a} = \frac{\rho_G}{\rho_T} \cdot \xi_{W,a}$$

Teil II.

Ausgewählte Musterlösungen

Kapitel 1.

Musterlösungen Wärmestrahlung

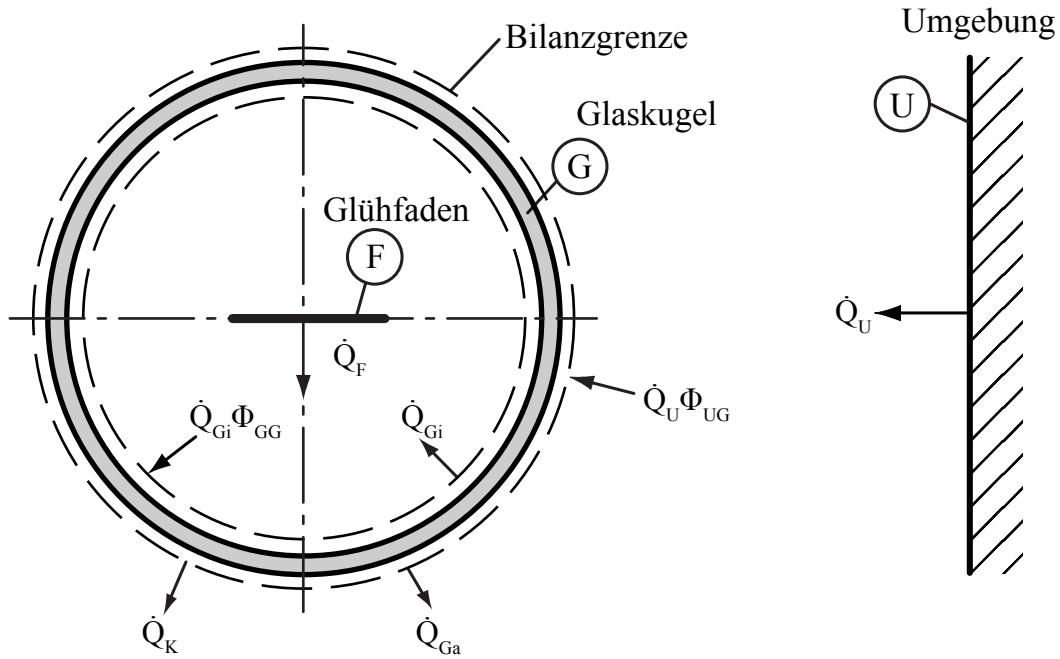
1.3. Kugelförmige, evakuierte Glühlampe

a) Problemart:

Anwendung der Strahlungsgesetze, Flächenhelligkeit, Strahlungsbilanzen.

1. Systemabgrenzung und Wärmebilanz

Die Wahl des Bilanzaumes richtet sich nach der Zielgröße. Aufgrund der hier gesuchten Glühfadentemperatur würde man daher die Bilanzgrenzen um den Glühfaden legen. Da jedoch gleichzeitig die Leistungsaufnahme des Glühfadens unbekannt ist, führt dieser Weg nicht unmittelbar zum Ziel. Die Leistungsaufnahme ist durch die an der Glaskugel einzuhaltenen Bedingungen begrenzt. Daher führt man zweckmäßiger die Bilanzierung an der Glaskugel durch, in welche die Glühfadentemperatur über die dort auftreffende Strahlungsemision des Glühfadens eingeht.



Wärmebilanz um die Glaskugel

$$\dot{Q}_U \Phi_{UG} + \dot{Q}_F - \dot{Q}_{Ga} - \dot{Q}_{Gi} + \dot{Q}_{Gi} \Phi_{GG} - \dot{Q}_K = 0 \quad (1.1)$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{Q}_U, \dot{Q}_F, \dot{Q}_{Gi}, \dot{Q}_{Ga} &= \text{Flächenhelligkeiten der Oberflächen} \\ \dot{Q}_K &= \text{Wärmeübergang} \end{aligned}$$

2. Formulierung der Bilanzgrößen

2.1 Flächenhelligkeiten

Unter der Voraussetzung, dass die Eigenstrahlung der Glaskugel und die Umgebungsstrahlung unberücksichtigt bleiben, sowie mit $\rho_G = 0$ und $\tau_F = 0$ lauten die Ansätze für die Flächenhelligkeiten:

- Umgebungsfläche

$$\dot{Q}_U = \dot{q}_U'' \cdot A_U = 0 \quad (1.2)$$

- Glühfaden

$$\dot{Q}_F = \dot{q}_F'' A_F = \varepsilon_F \cdot \dot{q}_{SF}'' \cdot A_F + ((1 - \varepsilon_F) \cdot \dot{q}_{Gi} A_G \Phi_{GF}) \quad (1.3)$$

- Innere Glaskugeloberfläche

$$\dot{Q}_{Gi} = \dot{q}_{Gi}'' \cdot A_G = 0 \quad (1.4)$$

- Äußere Glaskugeloberfläche

$$\dot{Q}_{Ga} = \dot{q}_{Ga}'' A_G = \tau_G \cdot \dot{q}_F'' \cdot A_F \quad (1.5)$$

2.2 Emissionsstrahlung schwarzer Oberflächen

$$\dot{q}_{SF}'' = \sigma T_F^4 \quad (1.6)$$

2.3 Einstrahlzahlen

Wegen $\dot{Q}_{Gi} = 0$ und $\dot{Q}_U = 0$ werden die auftretenden Einstrahlzahlen nicht benötigt.

2.4 Wärmeübergang

$$\dot{Q}_K = \alpha \cdot A_G (T_G - T_U) \quad (1.7)$$

3. Glühfadentemperatur

Durch Einsetzen der Beziehungen 1.2 bis 1.5 und 1.7 in die Bilanzgleichung 1.1 erhält man

$$\varepsilon_F \cdot \dot{q}_{SF}'' A_F - \tau_G \cdot \underbrace{\dot{q}_F'' A_F}_{\varepsilon_F \cdot \dot{q}_{SF}'' A_F} - \alpha \cdot A_G (T_G - T_U) = 0$$

$$\rightarrow \dot{q}_{SF}'' = \frac{\alpha \cdot A_G (T_G - T_U)}{\varepsilon_F \cdot (1 - \tau_G) \cdot A_F}$$

und mit Gl. 1.6

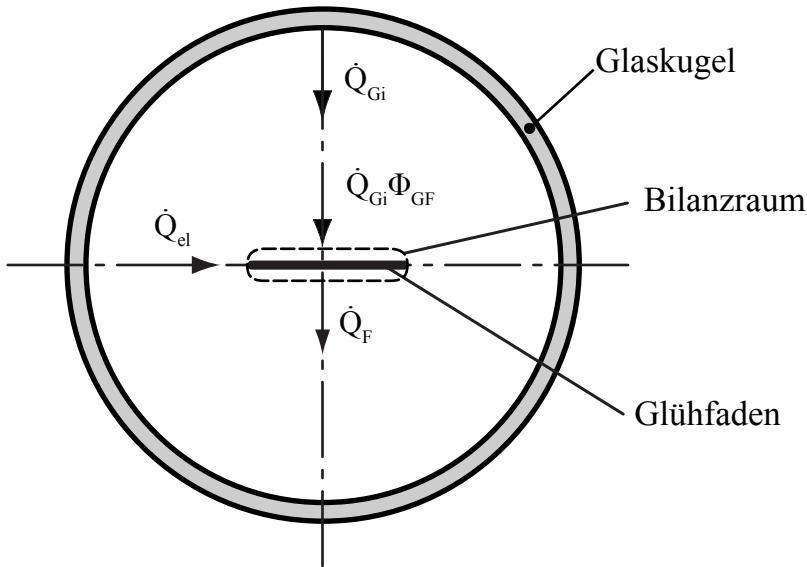
$$T_F^4 = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot d^2 (T_G - T_U)}{\varepsilon_F \cdot A_F \cdot \sigma (1 - \tau_G)} \quad (1.8)$$

Zahlenwerte:

$$T_F^4 = 91,4 \cdot 10^{12} \text{ K}^4 \rightarrow T_F = 3092 \text{ K} = 2819^\circ\text{C}$$

b) 1. Systemabgrenzung und Wärmebilanz

Zielgröße ist die Leistungsaufnahme des Glühfadens. Dementsprechend legt man die Bilanzgrenzen um den Glühfaden. Nachdem die Glühfaden-temperatur und damit die Strahlungsemmission des Fadens ermittelt ist, bildet die Leistungsaufnahme des Glühfadens die einzige unbekannte Bilanzgröße.



Wärmebilanz:

$$\dot{Q}_{el} + Q_{Gi}\Phi_{GF} - \dot{Q}_F = 0 \quad (1.9)$$

2. Formulierung der Bilanzgrößen

Siehe Gl. 1.3 und 1.4.

3. Leistungsaufnahme des Glühfadens

Einsetzen von Gl. 1.3, 1.4 und 1.6 in 1.9 ergibt

$$\dot{Q}_{\text{el}} = \varepsilon_F \cdot \dot{q}_{\text{SF}}'' A_F = \varepsilon_F \cdot \sigma \cdot T_F^4 \cdot A_F \quad (1.10)$$

oder mit Gl. 1.8

$$\dot{Q}_{\text{el}} = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot d^2 (T_G - T_U)}{(1 - \tau_G)} \quad (1.11)$$

Zahlenwert:

$$\dot{Q}_{\text{el}} = 52 \text{ W} \quad (1.12)$$

- c) Den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge, in der das Maximum der Strahlungsemmission liegt, und der Strahlertemperatur beschreibt das Wiensche Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{\max} \cdot T_F = 2898 \mu\text{m K} \quad (1.13)$$

Darus folgt

$$\lambda_{\max} = \frac{2898}{T_F} = 0,94 \mu\text{m}. \quad (1.14)$$

- d) 1. Systemabgrenzung und Bilanzgleichungen

Da die Fragestellung dieselbe ist wie in den Aufgabenteilen a) und b) und in den dort aufgestellten Wärmebilanzen die vereinfachenden Annahmen bezüglich der Strahlungsemmission des Glühfadens und der Umgebungsstrahlung noch nicht eingegangen sind, bleiben die prinzipiellen Bilanzgleichungen 1.1 und 1.9 unverändert. Der Unterschied in der Betrachtung liegt in der Beschreibung der Flächenhelligkeiten.

2. Formulierung der Bilanzgrößen

2.1 Flächenhelligkeiten

- Umgebungsfläche ($\varepsilon_U = 1$)

$$\dot{Q}_U = \dot{q}_{SU}'' \cdot A_U = \dot{q}_U'' \cdot A_U \quad (1.15)$$

- Glühfaden (Gl. 1.3 bleibt gültig)

$$\dot{Q}_F = \dot{q}_F'' \cdot A_F = \varepsilon_F \cdot \dot{q}_{SF}'' A_F + (1 - \varepsilon_F) \dot{q}_{Gi}'' A_G \cdot \Phi_{GF} \quad (1.16)$$

- Innere Glaskugeloberfläche

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{Gi} &= \dot{q}_{Gi}'' \cdot A_G \\ &= \varepsilon_G \dot{q}_{SG}'' \cdot A_G + \rho (\dot{q}_{Gi}'' A_G \Phi_{GG} + \dot{q}_F'' A_F) + \tau_G \cdot \dot{q}_U'' A_U \Phi_{UG} \end{aligned}$$

Mit $\rho_G = 0$, $\varepsilon_G = 1 - \tau_G$ und damit

$$\dot{Q}_{Gi} = \dot{q}_{Gi}'' \cdot A_G = (1 - \tau_G) \dot{q}_{SG}'' \cdot A_G + \tau_G \cdot \dot{q}_U'' A_U \Phi_{UG} \quad (1.17)$$

- Äußere Glaskugeloberfläche

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{Ga} &= \dot{q}_{Ga}'' \cdot A_G \\ &= \varepsilon_G \dot{q}_{SG}'' \cdot A_G + \rho_G \cdot \dot{q}_U'' A_U \Phi_{UG} + \tau_G (\dot{q}_F'' \cdot A_F + \dot{q}_{Gi}'' A_G \Phi_{GG}) \end{aligned}$$

Mit $\rho_G = 0$, $\varepsilon_G = 1 - \tau_G$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{Ga} &= \dot{q}_{Ga}'' \cdot A_G \\ &= (1 - \tau_G) \dot{q}_{SG}'' \cdot A_G + \tau_G (\dot{q}_F'' \cdot A_F + \dot{q}_{Gi}'' A_G \Phi_{GG}) \quad (1.18) \end{aligned}$$

2.2 Emissionsstrahlung schwarzer Oberflächen

$$\dot{q}_{SF}'' = \sigma \cdot T_F^4 \quad (1.19)$$

$$\dot{q}_{SG}'' = \sigma \cdot T_G^4 \quad (1.20)$$

$$\dot{q}_{SU}'' = \sigma \cdot T_U^4 \quad (1.21)$$

2.3 Einstrahlzahlen

Aus der Vertauschungsbeziehung folgt mit $\Phi_{GU} = 1$ und $\Phi_{FG} = 1$

$$\Phi_{UG} = \frac{A_G}{A_U} \quad (1.22)$$

$$\Phi_{GF} = \frac{A_F}{A_G} \quad (1.23)$$

und aus der Summenbeziehung

$$\Phi_{GG} = 1 - \Phi_{GF} \quad (1.24)$$

2.4 Wärmeübergang (Gl. 1.7 bleibt gültig)

$$\dot{Q}_K = \alpha \cdot A_G (T_G - T_U) \quad (1.25)$$

3. Gleichung für die Glühfadentemperatur

Einsetzen von Gl. 1.25, 1.15 und 1.18 und Gl. 1.1 und Auflösung nach $\dot{q}_F'' A_F$ liefert unter Verwendung von Gl. 1.22, 1.23 und 1.24

$$(1 - \tau_G) \dot{q}_F'' A_F = \alpha \cdot A_G (T_G - T_U) + (1 - \tau_G) \cdot \dot{q}_{SG}'' \cdot A_G + \dots \\ \dots + \dot{q}_{Gi}'' A_G \left(\tau_G + (1 - \tau_G) \frac{A_F}{A_G} \right) - \dot{q}_{SU}'' A_G$$

Mit Gl. 1.16 folgt daraus

$$(1 - \tau_G) \varepsilon_F \cdot \dot{q}_F'' A_F = \alpha \cdot A_G (T_G - T_U) + (1 - \tau_G) \cdot \dot{q}_{SG}'' A_G + \dots \\ \dots + \dot{q}_{Gi}'' A_G \left(\tau_G + (1 - \tau_G) \varepsilon_F \cdot \frac{A_F}{A_G} \right) - \dot{q}_{SU}'' A_G$$

Ersetzt man schließlich hierin $\dot{q}_{Gi}'' A_G$ durch Gl. 1.17, so erhält man nach einigen algebraischen Umformungen

$$\dot{q}_{SF}'' = \frac{\alpha \cdot A_G (T_G - T_U)}{(1 - \tau_G) \cdot \varepsilon_F \cdot A_F} + \left(1 - \tau_G + \frac{1 + \tau_G}{\varepsilon_F} \cdot \frac{A_G}{A_F} \right) \cdot \dot{q}_{SG}'' - \dots \\ \dots - \left(-\tau_G + \frac{1 + \tau_G}{\varepsilon_F} \cdot \frac{A_G}{A_F} \right) \cdot \dot{q}_{SU}'' \quad (1.26)$$

und nach additiver Erweiterung des \dot{q}_{SU} -Terms ($+1 - 1$) und den Gleichungen 1.19 bis 1.21

$$\begin{aligned} T_{\text{F}}^4 &= \frac{\alpha \cdot A_{\text{G}} (T_{\text{G}} - T_{\text{U}})}{(1 - \tau_{\text{G}}) \cdot \varepsilon_{\text{F}} \cdot \sigma \cdot A_{\text{F}}} + \dots \\ &\dots + \left(1 - \tau_{\text{G}} + \frac{1 + \tau_{\text{G}}}{\varepsilon_{\text{F}}} \cdot \frac{A_{\text{G}}}{A_{\text{F}}}\right) \cdot (T_{\text{G}}^4 - T_{\text{U}}^4) + T_{\text{U}}^4 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Näherungsbeziehungen

Für

$$\begin{aligned} \frac{A_{\text{G}}}{A_{\text{F}}} &\gg 1 \text{ ist} \\ \frac{1 + \tau_{\text{G}}}{\varepsilon_{\text{F}}} \cdot \frac{A_{\text{G}}}{A_{\text{F}}} &\gg 1 - \tau_{\text{G}} \text{ bzw. } \gg 1 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$T_{\text{F}}^4 \approx \frac{1}{\varepsilon_{\text{F}}} \cdot \frac{A_{\text{G}}}{A_{\text{F}}} \left[\frac{\alpha (T_{\text{G}} - T_{\text{U}})}{(1 - \tau_{\text{G}}) \cdot \sigma} + (1 + \tau_{\text{G}}) \cdot (T_{\text{G}}^4 + T_{\text{U}}^4) \right] \quad (1.28)$$

Für $\frac{A_{\text{G}}}{A_{\text{F}}} \gg 1$ und $\tau_{\text{G}} \approx 1$ geht Gl. 1.27 bzw. 1.28 in Gl. 1.8 über.

4. Gleichung für die Leistungsaufnahme des Glühfadens

Einsetzen von Gl. 1.16 in die Bilanzgleichung 1.9 liefert unter Verwendung von Gl. 1.23

$$\dot{Q}_{\text{el}} = \varepsilon_{\text{F}} \cdot A_{\text{F}} (\dot{q}_{\text{SF}}'' - \dot{q}_{\text{Gi}}'')$$

und mit Gl. 1.17, 1.15 und 1.22

$$\dot{Q}_{\text{el}} = \varepsilon_{\text{F}} \cdot A_{\text{F}} (\dot{q}_{\text{SF}}'' - (1 - \tau_{\text{G}}) \dot{q}_{\text{SG}}'' - \tau_{\text{G}} \dot{q}_{\text{SU}}'')$$

Mit Gl. 1.26 erhält man daraus

$$\dot{Q}_{\text{el}} = \frac{\alpha \cdot A_{\text{G}} (T_{\text{G}} - T_{\text{U}})}{(1 - \tau_{\text{G}})} + (1 + \tau_{\text{G}}) \cdot A_{\text{G}} \cdot \sigma (T_{\text{G}}^4 + T_{\text{U}}^4) \quad (1.29)$$

Die in Aufgabenteil b) abgeleitete Gl. 1.11 stellt eine Näherungsbeziehung dar, die für $\tau_G \rightarrow 1$ aus Gl. 1.29 folgt. Man erkennt ferner das bemerkenswerte Ergebnis, dass die Leistungsaufnahme des Glühfadens im Gegensatz zu dessen Temperatur nicht vom Flächenverhältnis $\frac{A_G}{A_F}$ abhängt. Dies wird durch folgende Überlegung verständlich. Die die Leistungsaufnahme bestimmende, vorgegebene Glaskugeltemperatur stellt sich aufgrund des Gleichgewichts von Wärmeaufnahme durch Absorption und Wärmeabgabe durch Emission und Konvektion ein. Sowohl die vom Glühfaden aufgenommene elektrische Leistung und der von der Umgebung zugestrahlte Wärmestrom als auch die von der inneren Glaskugeloberfläche ausgehende Strahlungsemision treffen letztlich (teilweise via Glühfadenoberfläche) vollständig auf der Glaskugel auf, so dass die Größe der Glühfadenoberfläche ohne Einfluss bleibt. Eine Vergrößerung des Verhältnisses von Glaskugel- zu Glühfadenoberfläche bei fester Glaskugeloberfläche führt lediglich zu einer Erhöhung der GlühfadenTemperatur, um dieselbe elektrische Leistung abführen zu können.

5. Zahlenwerte

5.1 GlühfadenTemperatur

$$\text{Nach Gl. 1.27 ist } T_F = 3122 \text{ K} = 2849^\circ\text{C} \quad (1.30)$$

Die Näherungsgleichung 1.28 liefert dasselbe Resultat, da im vorliegenden Fall die Bedingung $\frac{A_G}{A_F} \gg 1$ ($\frac{A_G}{A_F} = 70,69$) gut erfüllt ist. Auch die Abweichung gegenüber der noch weiter vereinfachten Gl. 1.8 (siehe Aufgabe Teil a) ist unbedeutend, da hier zusätzlich τ_G sehr nahe bei Eins liegt.

5.2 Leistungsaufnahme des Glühfadens

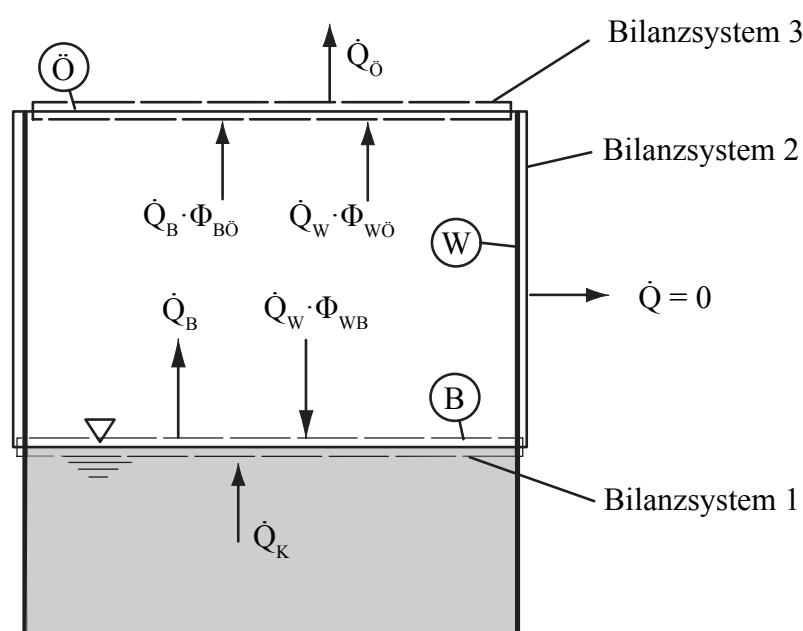
$$\dot{Q}_{\text{el}} = 54 \text{ W.} \quad (1.31)$$

1.5. Feuerfester Bleitiegel

a) Abfließender Strahlungswärmestrom \dot{Q}_K

1. Problematik

Reiner Strahlungsaustausch, Berechnung mit Hilfe der Flächenhelligkeiten



2. Systemabgrenzung und Energiebilanz

Der aus der Bleischmelze abfließende Strahlungswärmestrom \dot{Q}_K entspricht dem Nettostrahlungsfluss durch die Bleioberfläche und ergibt sich aus der Wärmebilanz um die Bleioberfläche (Bilanzsystem 1)

$$0 = \dot{Q}_K - \dot{Q}_B + \dot{Q}_W \cdot \Phi_{WB}$$

$$\rightarrow \dot{Q}_K = \dot{Q}_B - \dot{Q}_W \cdot \Phi_{WB} \quad (1.32)$$

mit

\dot{Q}_B = Flächenhelligkeit der Bleioberfläche

\dot{Q}_W = Flächenhelligkeit der Tiegelwände

Φ_{ij} = Einstrahlzahl von der Fläche i auf die Fläche j

Aufgrund der adiabaten Tiegelwände liefert die Gesamtbilanz (Bilanzsystem 2)

$$\dot{Q}_K = \dot{Q}_{\ddot{O}} \quad (1.33)$$

und die Bilanz für die Tiegelöffnung (Bilanzsystem 3)

$$-\dot{Q}_{\ddot{O}} + \dot{Q}_B \cdot \Phi_{B\ddot{O}} + \dot{Q}_W \cdot \Phi_{W\ddot{O}} = 0 \quad (1.34)$$

das heißt mit Gl. 1.33

$$\dot{Q}_K = \dot{Q}_B \cdot \Phi_{B\ddot{O}} + \dot{Q}_W \cdot \Phi_{W\ddot{O}} \quad (1.35)$$

Der gesuchte Wärmestrom \dot{Q}_K kann somit nach Gl. 1.32 oder (1.35) berechnet werden. Hier wird Gl. 1.32 benutzt.

3. Bestimmung der Bilanzgrößen

Flächenhelligkeiten

Bleioberfläche:

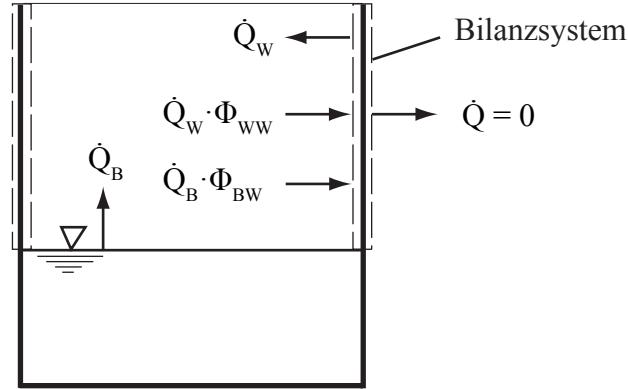
$$\dot{Q}_B = \dot{q}_B'' A_B = \varepsilon_B \cdot \dot{q}_{SB}'' A_B + (1 - \varepsilon_B) \dot{q}_W'' A_W \cdot \Phi_{WB} \quad (1.36)$$

$$\dot{q}_{SB}'' = \sigma T_B^4 \quad (1.37)$$

Tiegelwände:

Eine Beschreibung entsprechend Gl. 1.36 (Emission + Summe der Reflexionen) führt nicht zum Ziel, da die Strahlungseigenschaften der Tiegelwände nicht bekannt sind. Die Flächenhelligkeit folgt hier aus der Bedin-

gung der Adiabasie bzw. des Strahlungsgleichgewichts der Tiegelwände und somit aus einer Wärmebilanz um die Tiegelwände.



Es ist

$$0 = \dot{Q}_B \cdot \Phi_{BW} - \dot{Q}_W + \dot{Q}_W \cdot \Phi_{WW}$$

$$\Leftrightarrow \dot{Q}_W = \dot{q}_W'' A_W = \frac{\Phi_{BW}}{1 - \Phi_{WW}} \dot{q}_B'' A_B \quad (1.38)$$

Einstrahlzahlen

Bekannt ist die Einstrahlzahl $\Phi_{BÖ}$, auf die die übrigen auftretenden Einstrahlzahlen zurückgeführt werden müssen. Aus Symmetriegründen gilt

$$\Phi_{WB} = \Phi_{WÖ} \quad (1.39)$$

und mit der Summenbeziehung

$$1 - \Phi_{WW} = \Phi_{WÖ} + \Phi_{WB} = 2 \cdot \Phi_{WB} \quad (1.40)$$

Die Vertauschungsrelation liefert

$$\Phi_{WB} = \frac{A_B}{A_W} \Phi_{BW} \quad (1.41)$$

und durch weitere Anwendung der Summenbeziehung

$$\Phi_{BW} = 1 - \Phi_{BO} \quad (1.42)$$

da $\Phi_{BB} = 0$ ist

Mit Gl. 1.40, 1.41 und 1.42 erhält man dann für die Flächenhelligkeiten

$$\dot{q}_W'' A_W = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi_{BW}}{\Phi_{WB}} \cdot \dot{q}_B'' \cdot A_B \quad (1.43)$$

und durch Einsetzen in Gl. 1.36 und Auflösen nach $\dot{q}_B'' A_B$

$$\dot{q}_B'' A_B = \frac{\varepsilon_B \cdot \dot{q}_{SB}'' A_B}{1 - \frac{1}{2} \cdot (1 - \Phi_{BO}) (1 - \varepsilon_B)} \quad (1.44)$$

4. Bestimmung des abfließenden Strahlungswärmestroms

Mit Gl. 1.32 und 1.43 erhält man zunächst

$$\dot{Q}_K = \dot{q}_B'' A_B \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi_{BW}}{\Phi_{WB}} \Phi_{WB} \right) \quad (1.45)$$

Einsetzen der Beziehungen 1.41, 1.44 und 1.37 liefert schließlich

$$\begin{aligned} \dot{Q}_K &= \frac{1}{2} \dot{q}_B'' A_B \cdot (1 + \Phi_{BO}) = \frac{1}{2} \varepsilon_B A_B \cdot \sigma \cdot T_B^4 \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot \frac{1 + \Phi_{BO}}{1 - \frac{1}{2} \cdot (1 - \Phi_{BO}) (1 - \varepsilon_B)} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Zahlenrechnung:

$$\dot{Q}_K = \frac{0,8}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 0,025^2}{4} \cdot 5,67 \cdot 6^4 \cdot \frac{1,38}{1 - 0,5 \cdot 0,62 \cdot 0,2} = 2,1 \text{ W} \quad (1.47)$$

b) Behandlung der Grenzfälle $h = 0$ und $h \rightarrow \infty$

Die lichte Höhe zwischen Bleischmelze und Tiegelöffnung beeinflusst nur die Einstrahlzahlen. Es wird bei

$$\begin{aligned} h = 0 : \quad \Phi_{\text{BÖ}} &= 1 \\ h \rightarrow \infty : \quad \Phi_{\text{BÖ}} &= 0 \quad \Phi_{\text{BW}} = 1 \end{aligned}$$

Damit erhält man für den Nettostrahlungswärmeverlust durch die Bleioberfläche bei

$$\begin{aligned} h = 0 : \quad \dot{Q}_{K,0} &= \varepsilon_B \cdot A_B \cdot \sigma \cdot T_B^4 \\ h \rightarrow \infty : \quad \dot{Q}_{K,\infty} &= \frac{\varepsilon_B}{1 + \varepsilon_B} \cdot A_B \cdot \sigma \cdot T_B^4 \end{aligned} \quad (1.48)$$

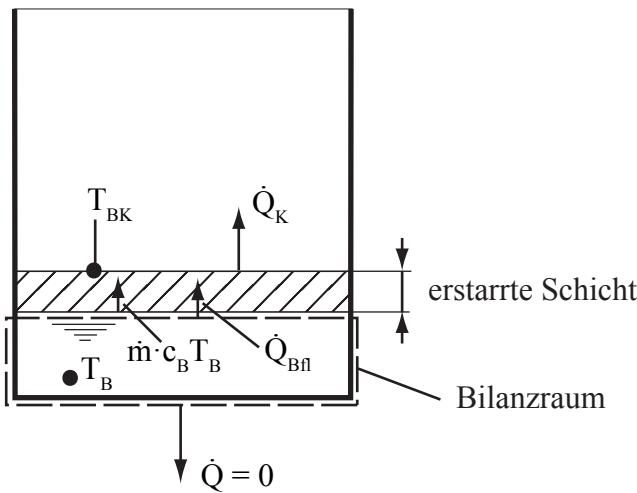
Zahlenwerte:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{K,0} &= 2,9 \text{ W} \\ \dot{Q}_{K,\infty} &= 1,6 \text{ W} \end{aligned}$$

c) Erstarrungszeit der Schmelze

1. Systemabgrenzung und Wärmebilanz

Wärmebilanz um die Bleischmelze



$$-\dot{m} \cdot c_B \cdot T_B - \dot{Q}_{Bfl} = \frac{dU_B}{dt} \text{ mit } \dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad (1.49)$$

2. Beschreibung der Bilanzgrößen

Unter der Annahme, dass der Wärmewiderstand zwischen der Schmelze und der erstarrten Bleioberfläche sowie die zeitliche Änderung der inneren Energie der erstarrten Schicht vernachlässigbar sind, gilt

$$T_{BK} = T_B \quad \dot{Q}_{Bfl} = \dot{Q}_K \quad (1.50)$$

Die innere Energie der flüssigen Bleimenge zur Zeit t ist

$$U_B(t) = (c_B \cdot T_B + h_B) \cdot m(t)$$

Während des Erstarrungsvorgangs, d. h. der *Reduktion* der Schmelze, ist T_B konstant, das heißt

$$\frac{dU_B}{dt} = - (c_B \cdot T_B + h_B) \cdot \dot{m} \quad (1.51)$$

3. Bestimmung der Erstarrungszeit

Gl. 1.50 und 1.51 in 1.49 eingesetzt, ergibt

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\dot{Q}_K}{h_B} \neq f(t) \quad (1.52)$$

mit \dot{Q}_K nach Gl. 1.46 und den beiden Fällen in Gl. 1.48. Die Integration von $t = 0$ bis $t = t_E$ liefert

$$\int_{m=0}^{m_B} dm = \frac{\dot{Q}_K}{h_B} \int_{t=0}^{t_E} dt \quad (1.53)$$

$$\Rightarrow m_B = \frac{\dot{Q}_K \cdot t_E}{h_B} \quad (1.54)$$

und durch Auflösen nach t_E

$$t_E = \frac{m_B \cdot h_B}{\dot{Q}_K} \quad (1.55)$$

$$h = 0 : \quad \dot{Q}_{K,0} = 2,9 \text{ W} \quad t_{E,0} = 0,2 \text{ h}$$

$$h = 25 \text{ mm} : \quad \dot{Q}_K = 2,1 \text{ W} \quad t_E = 0,28 \text{ h}$$

$$h \rightarrow \infty \quad \dot{Q}_{K,\infty} = 1,6 \text{ W} \quad t_{E,\infty} = 0,36 \text{ h}$$

1.8. Netto-Strahlungswärmestrom zwischen zwei Platten

1) Problemart

Strahlungsaustausch zwischen ebenen, planparallelen, unendlich ausgedehnten Platten mit vorgegebenen Oberflächentemperaturen der Platten.

2) Grundgleichung

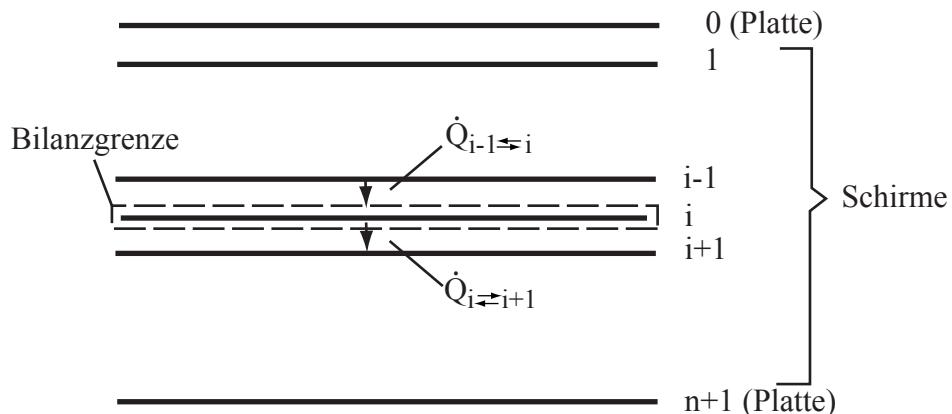
Für den Strahlungsaustausch zwischen ebenen, planparallelen, unendlich ausgedehnten, nicht strahlungsdurchlässigen Oberflächen A_i und A_{i+1} gilt mit $A_{i+1} = A_i = A$.

$$Q_{i \leftarrow i+1} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_{i+1}} - 1} \cdot (T_i^4 - T_{i+1}^4) \cdot A \quad (1.56)$$

3) Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächen A_0 und A_{n+1}

$$Q_{0 \leftarrow n+1} = \dot{Q}_0 = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - 1} \cdot (T_0^4 - T_{n+1}^4) \cdot A \quad (1.57)$$

4) Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächen A_0 und A_{n+1} mit n dazwischen angeordneten, strahlungsundurchlässigen Strahlungsschirmen



Die Wärmebilanz um den Schirm i ergibt bei stationärem Zustand, wenn kein Wärmetransport durch Leitung oder Konvektion auftritt (\rightarrow Vakuum):

$$\dot{Q}_{i-1 \leftarrow i} - \dot{Q}_{i \leftarrow i+1} = 0$$

wobei unter den Wärmeströmen $\dot{Q}_{i-1 \leftarrow i} - \dot{Q}_{i \leftarrow i+1} = 0$ jeweils der Nettostrahlungswärmeaustausch entsprechend Gl 1.56 zu verstehen ist.

Mit

$$\dot{Q}_{i-1 \leftarrow i} = \dot{Q}_{i \leftarrow i+1} = \dot{Q}_n = \text{konst.} \quad (1.58)$$

ergibt sich aus Gl. 1.57

$$\frac{\dot{Q}_n}{A \cdot \sigma} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_{i+1}} - 1 \right) = (T_i^4 - T_{i+1}^4) \quad (1.59)$$

Diese Beziehung gilt bei entsprechender Indizierung für den Strahlungswärmeaustausch zwischen jeweils zwei Oberflächen des betrachteten Systems, das aus $n+2$ Oberflächen besteht (2 Platten + n Schirme). Es ergeben sich somit $n+1$ Gleichungen mit den unbekannten Zwischentemperaturen T_i mit $i = 0 \dots n$. Die Elimination dieser Temperaturen erfolgt durch Summation der Gl. 1.59:

$$\frac{\dot{Q}_n}{A \cdot \sigma} \cdot \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_{i+1}} - 1 \right) = (T_0^4 - T_{n+1}^4) \quad (1.60)$$

Der Strahlungsaustausch zwischen zwei unendlich ausgedehnten, ebenen Platten und n dazwischen angeordneten Schirmen ist somit:

$$\dot{Q}_n = \frac{\sigma \cdot A}{\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_{i+1}} - 1 \right)} \cdot (T_0^4 - T_{n+1}^4) \quad (1.61)$$

- 5) Zusammenhang der Gleichungen für den Strahlungsaustausch mit und ohne Schirm

Mit den Gl. 1.61 und 1.57 ergibt sich,

$$\frac{\dot{Q}_n}{\dot{Q}_0} = \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - 1\right)}{\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_{i+1}} - 1\right)} \quad (1.62)$$

Sind alle Emissionsgrade gleich ($\varepsilon_i = \varepsilon$), so folgt daraus

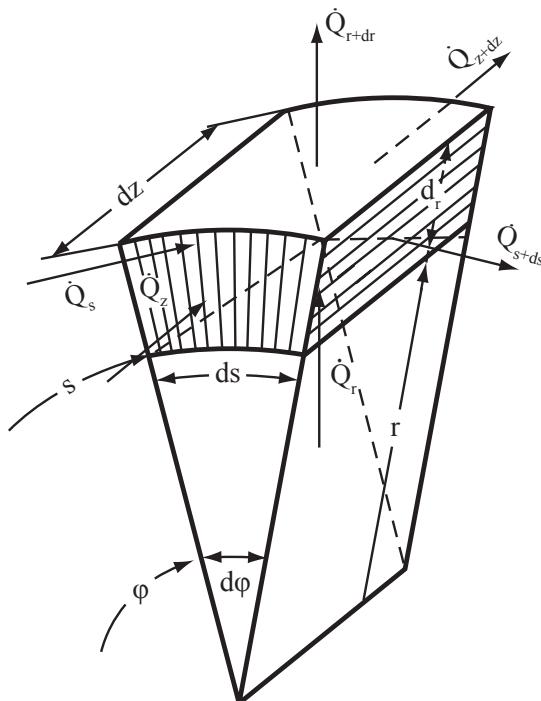
$$\frac{\dot{Q}_n}{\dot{Q}_0} = \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{\sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)} = \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{(n+1) \cdot \left[\frac{2}{\varepsilon} - 1\right]} = \frac{1}{n+1} \quad \text{q.e.d}$$

Kapitel 2.

Musterlösungen Wärmeleitung

2.1. Instationäres Temperaturfeld

Zur Herleitung der Differentialgleichung schneidet man aus dem zylindrischen Körper ein kleines Volumenelement $dr \cdot ds \cdot dz$ heraus und stellt für dieses Element die Wärmebilanz auf.



Durch die zur r -Richtung, s -(Umfangs)-Richtung und z -Richtung senkrechten Flächen fließen nach dem phänomenologischen Ansatz von Fourier die Wärmeströme

$$\begin{aligned}\dot{Q}_r &= -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \cdot ds \cdot dz \\ \dot{Q}_s &= -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial s} \cdot dr \cdot dz \\ \dot{Q}_z &= -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \cdot dr \cdot ds\end{aligned}\tag{2.1}$$

in das Volumenelement hinein und unter Berücksichtigung von $ds = r \cdot d\phi$ die Wärmeströme

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{r+dr} &= \dot{Q}_r + \frac{\partial \dot{Q}_r}{\partial r} \cdot dr = \dot{Q}_r - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr \cdot d\varphi \cdot dz \\ \dot{Q}_{s+ds} &= \dot{Q}_s + \frac{\partial \dot{Q}_s}{\partial s} \cdot ds = \dot{Q}_s - \frac{\partial}{\partial s} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial s} \right) r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot dz \\ \dot{Q}_{z+dz} &= \dot{Q}_z + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} \cdot dz = \dot{Q}_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \cdot dr \cdot r \cdot d\varphi\end{aligned}\tag{2.2}$$

aus dem Volumenelement heraus. Es ist dabei zu beachten, dass die Wärmeleitfähigkeit λ wegen ihrer Abhängigkeit vom Ort in die Differentiation miteinbezogen werden muss.

Liegen in dem Körper gleichmäßig verteilte Wärmequellen der Dichte $\dot{\Phi}'''$ [W/m^3] vor, so ist der im Volumenelement erzeugte Wärmestrom

$$\dot{\Phi}''' \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz\tag{2.3}$$

Nach dem Energiesatz ist die Differenz zwischen der pro Zeiteinheit in den Bilanzraum einströmenden und im Innern erzeugten Wärme und der pro Zeiteinheit abströmenden Wärme gleich der in der Zeiteinheit im Bilanzraum gespeicherten Wär-

me. Die gespeicherte Wärme, die eine Temperaturänderung des Volumenelements hervorruft, ist

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dr \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz \quad (2.4)$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} & \underbrace{\dot{Q}_r + \dot{Q}_s + \dot{Q}_z}_{\text{einst. Wärme}} + \underbrace{\dot{\Phi}''' \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz}_{\text{erzeugte Wärme}} - \underbrace{(\dot{Q}_{r+dr} + \dot{Q}_{s+ds} + \dot{Q}_{z+dz})}_{\text{ausst. Wärme}} \\ &= \underbrace{\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dr \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz}_{\text{gespeicherte Wärme}} \end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichung die Beziehungen 2.1 und 2.2 ein, und dividiert man durch das Volumenelement $r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$, so ergibt sich

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}''' = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.5)$$

Transformation des Differentials $\frac{\partial}{\partial s}$:

Dazu wird eine Funktion $f(s)$ auf dem Kreisbogen $s = r \cdot \varphi$ betrachtet. Nach den Regeln der partiellen Differentiation gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad (2.6)$$

Da sich der Radius in Umfangsrichtung s nicht ändert, ist

$$\frac{\partial r}{\partial s} = 0 \quad (2.7)$$

Außerdem ergibt sich aus $\varphi = \frac{s}{r}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{r} \quad (2.8)$$

Man erhält also

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (2.9)$$

und damit das Differential

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.10)$$

Eingesetzt in Gleichung 2.5 ergibt sich damit die gesuchte Differentialgleichung der Wärmeleitung in Zylinderkoordination:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}''' = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.11)$$

wobei die Stoffwerte Funktionen des Ortes und der Temperatur sein können. Für konstante Stoffwerte erhält man aus Gl. 2.11, wenn man den ersten Term noch ausdifferenziert

$$a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{\Phi}'''}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\text{mit } a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$$

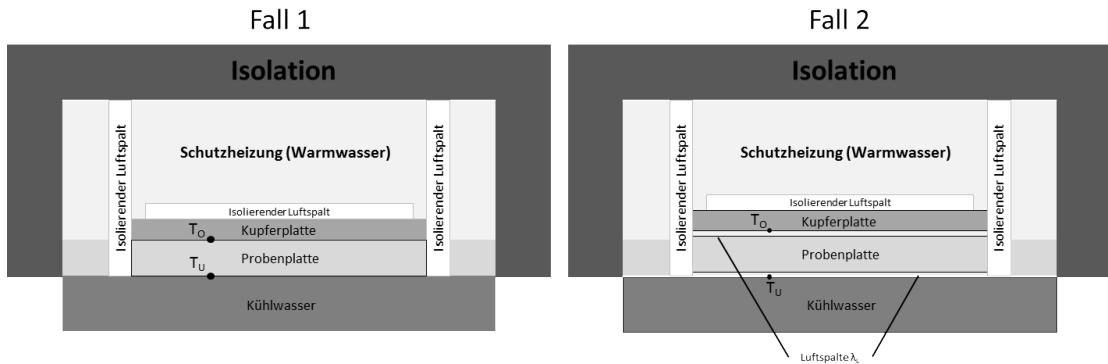
Die Gleichung 2.12 lässt sich in vielen Fällen vereinfachen. Bei kreiszylindrischen Körpern sind unter Annahme gleicher Randbedingungen am ganzen Körperumfang die isothermen Kreise, das heißt die Temperatur hängt nicht vom Winkel φ ab; es ist also $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$. Bei sehr langen Zylindern können Randeinflüsse von den Stirnflächen her vernachlässigt werden, so dass unter Annahme gleicher Umgebungsbedingungen am ganzen Zylinder $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ zu setzen ist. Für den Fall eines unendlichen langen, kreiszylindrischen Körpers mit konstanten Stoffwerten und gleichen Umgebungsbedingungen am ganzen Körper nimmt Gl. 2.12 damit die Gestalt

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{Q}'''}{\rho c} \quad \text{an.} \quad (2.13)$$

2.2. Poensgengerät

a) Problematik

Stationäre Wärmeleitung durch mehrere Ebenen.



Fall 1: ohne Luftspalte

$$\dot{Q}_{el} = \frac{\lambda_P}{\delta_P} \cdot A \cdot (T_O - T_U) \quad (2.14)$$

$$\lambda_P = \frac{\dot{Q}_{el} \cdot \delta_P}{A \cdot (T_O - T_U)} \quad (2.15)$$

Fall 2: Luftspalte oberhalb und unterhalb der Probenplatte

$$\dot{Q}_{el} = \frac{A \cdot (T_O - T_U)}{\frac{\delta_L}{\lambda_L} + \frac{\delta_P}{\lambda_P} + \frac{\delta_L}{\lambda_L}} \quad (2.16)$$

$$\delta_L = 0,0025 \cdot \delta_P \quad (2.17)$$

$$\lambda_{P,Korr} = \frac{\lambda_L \cdot \lambda_P}{0,005 \cdot \lambda_P + \lambda_L} = \frac{\dot{Q}_{el} \cdot \delta_P}{A \cdot (T_O - T_U)} \quad (2.18)$$

Die Messunsicherheit ergibt sich im Anschluss aus dem Verhältnis der gemessenen Wärmeleitfähigkeiten.

$$\frac{\lambda_{P,\text{Korr}}}{\lambda_P} = \frac{\lambda_L \cdot \lambda_P}{\lambda_P \cdot (0,005 \cdot \lambda_P + \lambda_L)} = \frac{\lambda_L}{0,005 \cdot \lambda_P + \lambda_L} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{P,\text{Korr}}}{\lambda_P} &= 0,81 && \text{bei Beton} \\ \frac{\lambda_{P,\text{Korr}}}{\lambda_P} &= 0,99 && \text{bei Kork}\end{aligned}$$

b) Fehlerursachen	Abhilfemaßnahmen
Temperaturmessung	$\Delta T > 10 \text{ K}$ $\delta > 10 \text{ mm}$ $\lambda < 2,5 \text{ W/mK}$
Mehrdimensionales Temperaturfeld	Guter Abgleich der Schutz- und Randheizung $\lambda > 125 \text{ mm}$
Inhomogenitäten in der Probenplatte	Kontrollproben
kein Beharrungszustand	Aufzeichnung von Referenztemperaturen

2.5. Feuerofen

1. Problemart

Stationäre Wärmeleitung durch eine geschichtete, ebene Wand.

2. Optimierungsstrategie

Wanddicke am kleinsten bei Wahl von Baumaterialien möglichst kleiner Wärmeleitfähigkeit. Beschränkung der Auswahl durch zulässige Materialtemperatur.

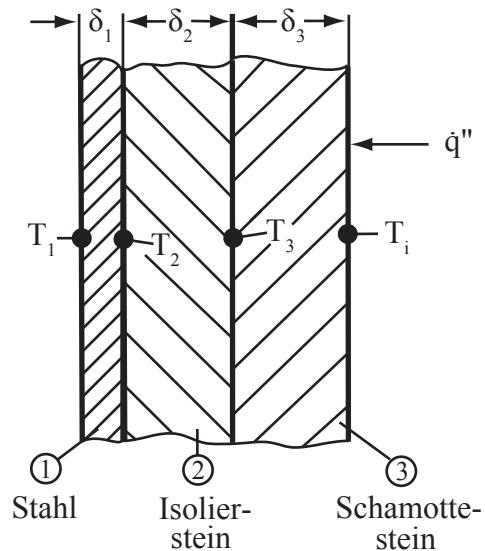
Auswahlbedingungen:

1. λ_{Schicht} möglichst klein
2. $T_{\text{Schicht}} \leq T_{\text{zul}}$
3. Lösung

- Fall A

Von den zur Verfügung stehenden Materialien erfüllt nur Schamottestein die Bedingung $T_{\text{zul}} > T_{\text{max}} = T_i$

Daraus folgt ein Aufbau in drei Schichten:



Mit $T_3 = T_{\text{Isolierstein,zul}} = T_{3,\text{zul}}$; $T_2 = \text{unbekannt}$

Bestimmung der Schamottesteindicke

Da der Wärmefluss und die Randtemperaturen bekannt sind, kann unmittelbar die Wärmeleitungsgleichung für eine ebene Wand angewandt werden.

$$\dot{q}'' = \frac{\lambda}{\delta_3} (T_i - T_{\text{zul}}) \Rightarrow \delta_3 = \frac{\lambda_3}{\dot{q}''} \cdot (T_i - T_{2,\text{zul}}) \quad (2.20)$$

Bestimmung der Dicke der Isoliersteinschicht:

Unter stationären Bedingungen ist \dot{Q} bzw. \dot{q}'' in jeder Schnittfläche gleich. T_2 ist jedoch unbekannt, T_1 dagegen bekannt. Daher wird die Stahlplatte in das System einbezogen. Es gilt:

$$\dot{q}'' = \frac{T_{2,\text{zul}} - T_1}{\frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_1}{\lambda_1}} \Rightarrow \delta_2 \quad (2.21)$$

Wegen $\frac{\delta_1}{\lambda_1} \ll \frac{\delta_2}{\lambda_2}$ ist jedoch $T_2 \approx T_1$ und damit

$$\delta_2 = \frac{\lambda_2}{\dot{q}''} \cdot (T_{2,\text{zul}} - T_1) \quad (2.22)$$

Gesamtdicke:

$$\delta = \delta_1 + \frac{\lambda_2 \cdot (T_{2,\text{zul}} - T_1) + \lambda_3 \cdot (T_i - T_{2,\text{zul}})}{\dot{q}''} \quad (2.23)$$

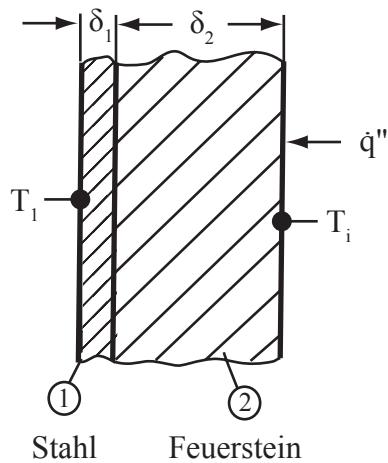
Zahlenrechnung:

Durch lineare Interpolation ergibt sich für die Wärmeleitfähigkeiten

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= f\left(\frac{T_1 + T_{2,\text{zul}}}{2}\right) = 0,225 \text{ W/mK} \\ \lambda_3 &= f\left(\frac{T_i + T_{2,\text{zul}}}{2}\right) = 1,35 \text{ W/mK} \\ \delta &= 0,008 + \frac{0,225 \cdot 740 + 1,35 \cdot 200}{1500} = 0,299 \text{ m} \\ \delta &= 30 \text{ cm} \quad (\delta_2 = 11,1 \text{ cm}; \delta_3 = 18 \text{ cm}) \end{aligned}$$

- Fall B

Das Material mit der kleinsten Wärmeleitfähigkeit, das die Bedingung $T_{zul} \geq T_{\max} = T_i$ erfüllt, ist Feuerstein.



Analog zu Fall A gilt

$$\dot{q}'' = \frac{T_i - T_1}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}} \quad (2.24)$$

und mit

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1}{\lambda_1} &\ll \frac{\delta_2}{\lambda_2} \\ \delta_2 &= \frac{\lambda_2}{\dot{q}''} \cdot (T_i - T_1) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Gesamtdicke

$$\delta = \delta_1 + \frac{\lambda_2}{\dot{q}''} \cdot (T_i - T_1) \quad (2.26)$$

Zahlenrechnung

Mittlere Wärmeleitfähigkeit von Feuerstein

$$\begin{aligned} \lambda_2 \left(\frac{T_1 + T_i}{2} \right) &= 0,527 \text{ W/mK} \\ \delta &= 0,008 + \frac{0,527 \cdot 940}{1500} = 0,338 \text{ m} \\ \delta &= 33,8 \text{ cm} \quad (\delta_2 = 33 \text{ cm}) \end{aligned}$$

2.6. Wärmer Wohnen

Zur Lösung des insgesamt abfließenden Wärmestroms, werden zunächst die abfließenden Wärmeströme der jeweiligen Teilflächen berechnet. Aus der Summe ergibt sich im Anschluss der Gesamtwärmestrom.

1. Problemart

Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung durch eine mehrschichtige ebene Wand mit konvektiven Wärmeübergängen innen und außen. Es gilt:

$$\dot{Q} = \frac{A}{\frac{1}{\alpha_A} + \sum_{i=0}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_B}} \cdot (T_i - T_a) \quad (2.27)$$

- Boden:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{V,\text{Boden}} &= \frac{5 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} \cdot (293,15 \text{ K} - 279,15 \text{ K})}{\frac{1}{6 \text{ W/m}^2 \text{ K}} + \frac{0,015 \text{ m}}{0,87 \text{ W/m K}} + \frac{0,04 \text{ m}}{0,7 \text{ W/m K}} + \frac{0,01 \text{ m}}{0,2 \text{ W/m K}} + \dots} \\ &\quad \dots + \frac{0,2 \text{ m}}{1,4 \text{ W/m K}} + \frac{0,02 \text{ m}}{0,09 \text{ W/m K}} + \frac{1}{6 \text{ W/m}^2 \text{ K}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$= 680,605 \text{ W} \quad (2.29)$$

- Seitenflächen:

$$A_{\text{Fenster}} = 4 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} + 3 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 10,5 \text{ m}^2 \quad (2.30)$$

$$\dot{Q}_{V,\text{Fenster}} = A_{\text{Fenster}} \cdot k_F \cdot (T_i - T_a) \quad (2.31)$$

$$= 10,5 \text{ m}^2 \cdot 2,9 \text{ W/m}^2 \text{ K} \cdot 35 \text{ K} = 1065,75 \text{ W} \quad (2.32)$$

$$A_{\text{Wand}} = 2,8 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} + 2,8 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} - A_{\text{Fenster}} = 25,9 \text{ m}^2 \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{V,\text{Wand}} &= \frac{25,9 \text{ m}^2 \cdot 35 \text{ K}}{\frac{1}{8 \text{ W/m}^2 \text{ K}} + \frac{0,015 \text{ m}}{0,87 \text{ W/m K}} + \frac{0,02 \text{ m}}{0,09 \text{ W/m K}} + \dots} \\ &\quad \dots + \frac{0,34 \text{ m}}{1,05 \text{ W/m K}} + \frac{0,015 \text{ m}}{0,87 \text{ W/m K}} + \frac{1}{20 \text{ W/m}^2 \text{ K}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$= 1199,85 \text{ W} \quad (2.35)$$

- Gesamtwärmestrom:

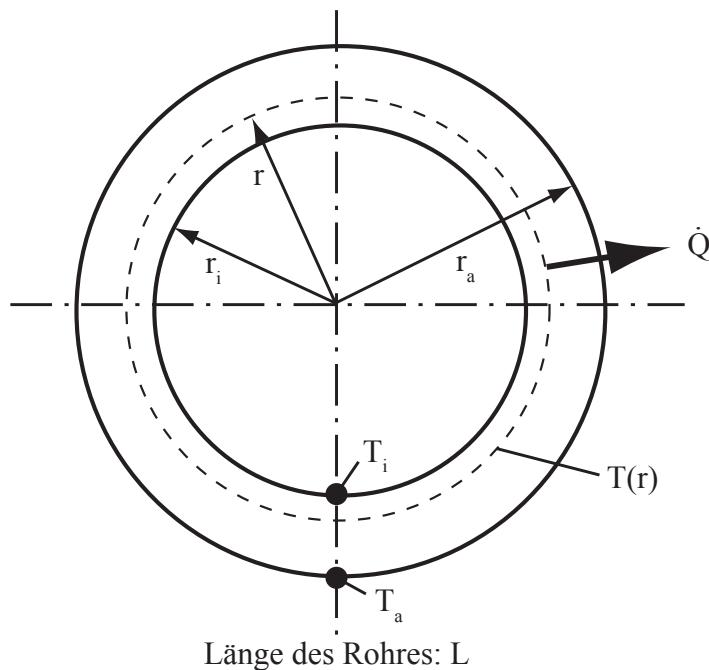
$$\dot{Q}_{V,\text{ges}} = 680,605 \text{ W} + 1065,75 \text{ W} + 1199,85 \text{ W} = 2946,2 \text{ W} \quad (2.36)$$

2.7. Hohlzylinder

1. Problemart

Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung durch eine Rohrwand ohne Wärmequellen.

2. Systemabgrenzung und Ansatz für die Zielgröße



Da sich die Temperaturen längs der Rohroberfläche nicht ändern, sind die Isothermen in einem Rohrquerschnitt Kreise, das heißt die Temperatur T hängt nur vom Radius r ab.

Bei stationärem Wärmefluss und Quellfreiheit ist der Wärmefluss in radialer Richtung konstant.

$$\dot{Q}_r = \dot{Q} = \text{konst.} \quad (2.37)$$

Für den Wärmefluss durch eine Mantelfläche vom Radius r gilt nach Fourier:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dr} \\ &= -\lambda \cdot 2\pi r \cdot L \cdot \frac{dT}{dr} \\ &= -2\pi L \cdot \lambda_0 (1 + \gamma(T - T_0)) \cdot r \cdot \frac{dT}{dr}\end{aligned}\quad (2.38)$$

Wegen $\dot{Q} = \text{konst}$ ist diese DGL unmittelbar durch Trennung der Variablen lösbar.

3. Randbedingungen

$$\begin{aligned}T(r = r_i) &= T_i \\ T(r = r_a) &= T_a\end{aligned}\quad (2.39)$$

4. Lösung

- a) Berechnung des Wärmestroms durch das Rohr bei variabler Wärmeleitfähigkeit

Separation der Variablen:

$$-\frac{\dot{Q}}{2\pi L \cdot \lambda_0} \cdot \frac{dr}{r} = (1 + \gamma(T - T_0)) \cdot dT \quad (2.40)$$

Mit den Randbedingungen gilt:

$$\frac{\dot{Q}}{2\pi L \cdot \lambda_0} \int_{r=r_i}^{r=r_a} \frac{dr}{r} = \int_{T=T_i}^{T=T_a} (1 + \gamma(T - T_0)) \cdot dT \quad (2.41)$$

Die Integration ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -\frac{2\pi L \cdot \lambda_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \left(T_a - T_i + \frac{\gamma}{2} \left((T_a - T_0)^2 - (T_i - T_0)^2 \right) \right) \\ \dot{Q} &= +\frac{2\pi L \cdot \lambda_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \left(T_i - T_a + \frac{\gamma}{2} \left(T_i^2 - T_a^2 - 2T_0 \cdot (T_i - T_a) \right) \right)\end{aligned}\quad (2.42)$$

Wärmefluss bei konstanter Wärmeleitfähigkeit:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L \cdot \lambda_m}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot (T_i - T_a) \quad (2.43)$$

Durch Umformung von Gl. 2.42 erhält man

$$\frac{2\pi L \cdot \lambda_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot (T_i - T_a) \cdot \left(1 + \gamma \left(\frac{T_i + T_a}{2} - T_0\right)\right) = \frac{2\pi L \cdot \lambda_m}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} (T_i - T_a) \quad (2.44)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \lambda_0 \cdot \left(1 + \gamma \left(\frac{T_i + T_a}{2} - T_0\right)\right) \\ &= \lambda_0 \cdot (1 + \gamma (T_m - T_0)) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\text{und } T_m = \frac{1}{2} (T_i + T_a) \quad (2.46)$$

5. Ergebnis

Bei linear mit der Temperatur veränderlicher Wärmeleitfähigkeit kann also die Beziehung für konstante Wärmeleitfähigkeit benutzt werden, wenn die Wärmeleitfähigkeit beim arithmetischen Mittelwert der Randtemperaturen eingesetzt wird.

b) Temperaturverteilung

Die Integration der Gl. 2.40 zwischen den Grenzen

$$\begin{array}{ll} r = r_i & T = T_i \\ r = r & T = T \end{array} \quad (2.47)$$

liefert

$$-\frac{\dot{Q}}{2\pi L \cdot \lambda_0} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) = T - T_i + \frac{\gamma}{2} \left(T^2 - T_i^2 - 2T_0 \cdot (T - T_i)\right) \quad (2.48)$$

Unter Benutzung der Beziehung für den Wärmestrom nach Gl. 2.44, 2.45 und 2.46

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L \cdot \lambda_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \left(1 + \gamma \cdot \left(\frac{T_i + T_a}{2} - T_0\right)\right) \cdot (T_i - T_a) \quad (2.49)$$

erhält man dann

$$T^2 + 2(T - T_i) \cdot \left(\frac{1}{\gamma} - T_0\right) - T_i^2 + \frac{2}{\gamma} \cdot (T_i - T_a) \cdot \dots \\ \dots \cdot \left(1 + \gamma \left(\frac{T_i + T_a}{2} - T_0\right)\right) \cdot \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} = 0$$

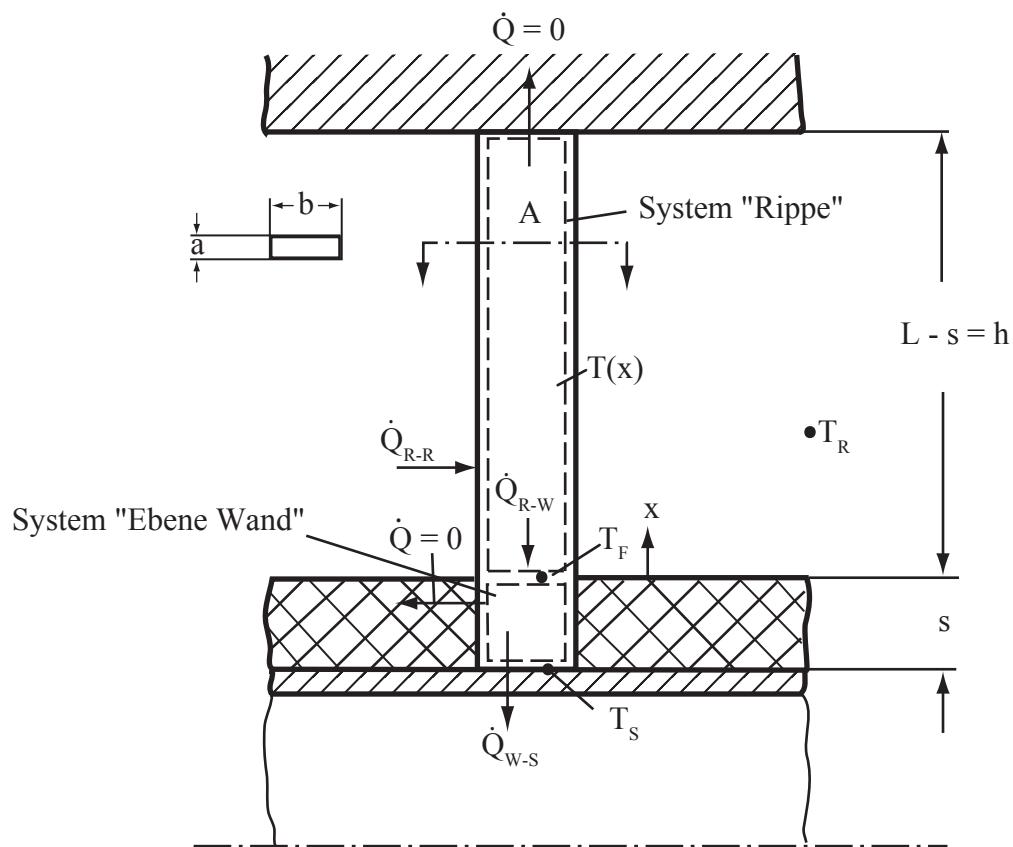
→ quadratische Gl. für T .

2.10. Rohrbefestigung

1. Problemart

Stationärer Wärmetransport durch eine Rippe mit Rechteckquerschnitt gekoppelt mit Wärmeleitung durch eine ebene Wand.

2. Systemabgrenzung



Aufgrund der verschiedenen Transportmechanismen müssen zwei Systeme betrachtet werden, die über die unbekannte Rippenfußtemperatur miteinander gekoppelt sind.

3. Wärmebilanzen

System **Rippe**

$$+\dot{Q}_{R-R} - \dot{Q}_{R-W} = 0 \quad \dot{Q}_{R-R} = \dot{Q}_{R-W} \quad (2.50)$$

System **Ebene Wand**

$$+\dot{Q}_{R-W} - \dot{Q}_{W-S} = 0 \quad \dot{Q}_{R-W} = \dot{Q}_{W-S} = \dot{Q} \quad (2.51)$$

4. Beschreibung der Bilanzgrößen

Wärmefluss durch die **Rippe** mit der Annahme, dass durch den Rippenkopf keine Wärme abfließt

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{R-W} &= \eta_R \cdot \dot{Q}_{R,\max} \\ &= \alpha \cdot U \cdot h \cdot (T_R - T_F) \cdot \eta_R \end{aligned} \quad (2.52)$$

mit

$$\eta_R = \frac{\tanh(m \cdot h)}{m \cdot h} \quad (2.53)$$

$$m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A}} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot 2(a+b)}{\lambda \cdot a \cdot b}} \quad (2.54)$$

Wärmefluss durch die **Ebene Wand**

$$\dot{Q}_{W-S} = \frac{\lambda}{s} \cdot A \cdot (T_F - T_S) \quad (2.55)$$

5. Lösung

- Wärmefluss in die Sole

Mit $\dot{Q}_{R-W} = \dot{Q}_{W-S} = \dot{Q}$ folgt aus der Elimination von T_F

$$\dot{Q} = \frac{T_R - T_S}{\frac{1}{\alpha \cdot U \cdot h \cdot \eta_R} + \frac{s}{\lambda \cdot A}} \quad (2.56)$$

- Zahlenrechnung:

$$m = 6,54 \text{ 1/m} \quad m \cdot h = 1,635$$

$$\eta_R = 0,567$$

$$\dot{Q} = \frac{43,5}{\frac{1}{6 \cdot 2 \cdot 0,031 \cdot 0,25 \cdot 0,567} + \frac{0,04}{58 \cdot 0,025 \cdot 0,006}} = 1,85 \text{ W}$$

- Bereifte Länge h_0 des Flacheisens

Bedingung für h_0 :

$$T(x = h_0) = T_0 = 0^\circ\text{C} \quad (2.57)$$

Die Bestimmung von h_0 erfordert also die Kenntnis des Temperaturverlaufs in der Rippe.

Bei den vorliegenden Bedingungen ist

$$\frac{T(x) - T_R}{T_F - T_R} = \frac{\cosh(m(h - x))}{\cosh(m \cdot h)} \quad (2.58)$$

Mit obiger Bedingung folgt daraus

$$\cosh(m(h - h_0)) = \frac{T_0 - T_R}{T_F - T_R} \cdot \cosh(m \cdot h) = z \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} h_0 &= h - \frac{1}{m} \cdot \operatorname{arcosh}(z) \\ &= h - \frac{1}{m} \cdot \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Unbekannt ist in dieser Gleichung noch die Fußtemperatur T_F . Sie folgt aus Gl. 2.55:

$$T_F = T_S + \frac{\dot{Q} \cdot s}{\lambda \cdot A} \quad (2.61)$$

- Zahlenrechnung:

$$T_F = -23,5 + \frac{1,85 \cdot 0,04}{58 \cdot 0,025 \cdot 0,006} = -15 \text{ } ^\circ\text{C}$$

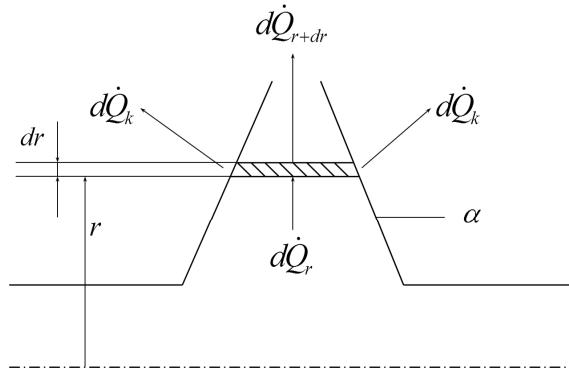
$$z = \frac{-20}{-35} \cdot \cosh(1,635) = 1,52$$

$$h_0 = 0,25 - \frac{1}{6,54} \ln(2,665) = 0,1 \text{ m}$$

$$h_0 = 10 \text{ cm}$$

2.12. Veränderliche Kreisrippe

a) ges.: Differentialgleichung der stationären Temperaturverteilung



Aus einer Energiebilanz um das infinitesimale Ringelement folgt

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} = d\dot{Q}_k \quad (2.62)$$

Der konvektive Wärmestrom an der Außenseite der Kreisrippe lässt sich dabei durch

$$d\dot{Q}_k = \alpha \cdot (T(r) - T_U) \cdot dA_k \quad \text{mit} \quad dA_k = 4 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \quad (2.63)$$

ausdrücken. Die Wärmeleitung in radialer Richtung folgt aus dem Fourierschen Gesetz.

$$\dot{Q}_r = -\lambda \cdot A(r) \cdot \frac{dT}{dr} \quad \text{mit} \quad A(r) = \delta(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \quad (2.64)$$

Mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung wird anschließend \dot{Q}_{r+dr} bestimmt.

$$\dot{Q}_{r+dr} = \dot{Q}_r + \frac{d\dot{Q}_r}{dr} \cdot dr \quad \text{mit} \quad \frac{d\dot{Q}_r}{dr} = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \delta \cdot \frac{dT}{dr} \right) \quad (2.65)$$

Des Weiteren folgt aus der Forderung, dass die Wärmestromdichte innerhalb der Kreisrippe konstant bleibt, die Schlussfolgerung, dass auch der Temperaturgradient konstant sein muss.

$$\dot{q}_r'' = \text{konst.} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \text{konst.} \Rightarrow \frac{dT^2}{dr^2} = 0 \quad (2.66)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen 2.63-2.65 in Gleichung 2.62 ergibt sich zunächst

$$\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \delta \cdot \frac{dT}{dr} \right) \cdot dr = \alpha \cdot (T(r) - T_U) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \quad (2.67)$$

und schließlich die gesuchte Differentialgleichung für die stationäre Temperaturverteilung.

$$\frac{d}{dr} \left(r \cdot \delta \cdot \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda} \cdot r \cdot (T(r) - T_U) = 0 \quad (2.68)$$

b) Gesucht ist das Rippenprofil $\delta(r)$

Zur Lösung von Gleichung 2.68 ist zunächst eine Bestimmung des Temperaturverlaufs $T(r)$ erforderlich.

Analog zum Aufgabenteil a) gilt weiterhin

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_r''}{\lambda} = \text{konst.} \quad (2.69)$$

Integration:

$$dT = -\frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \cdot dr \quad (2.70)$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \cdot r + c_1 \quad (2.71)$$

Im Anschluss folgt die Bestimmung von c_1 aus der Randbedingung $T(R) = T_U$.

$$T(r = R) = -\frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \cdot R + c_1 = T_U \rightarrow c_1 = T_U + \frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \cdot R \quad (2.72)$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \cdot r + T_U + \frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \cdot R \quad (2.73)$$

Nach Einsetzen von 2.69 und 2.73 in 2.68 erhält man folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dr} \left(\delta(r) \cdot r \cdot \left(-\frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \right) \right) - \dots \\ &\dots - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda} \cdot r \cdot \left(-\frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \cdot r + T_U + \frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \cdot R - T_U \right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$d \left(\delta(r) \cdot r \cdot \left(-\frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \right) \right) = \left(\frac{2 \cdot \alpha \cdot r \cdot \dot{q}_r'' \cdot R}{\lambda^2} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot r^2 \cdot \dot{q}_r''}{\lambda^2} \right) \cdot dr \quad (2.75)$$

$$\delta(r) \cdot r \cdot \left(-\frac{\dot{q}_r''}{\lambda} \right) = \frac{\alpha \cdot r^2 \cdot \dot{q}_r'' \cdot R}{\lambda^2} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot r^3 \cdot \dot{q}_r''}{3 \cdot \lambda^2} + c_2 \quad (2.76)$$

$$\delta(r) = -\frac{\alpha \cdot r \cdot R}{\lambda} + \frac{2 \cdot \alpha \cdot r^2}{3 \cdot \lambda} - \frac{c_2 \cdot \lambda}{r \cdot \dot{q}_r''} \quad (2.77)$$

Randbedingung: Spitz zulaufende Rippe $\delta(R) = 0$

$$\delta(R) = -\frac{\alpha \cdot R \cdot R}{\lambda} + \frac{2 \cdot \alpha \cdot R^2}{3 \cdot \lambda} - \frac{c_2 \cdot \lambda}{R \cdot \dot{q}_r''} = 0 \quad (2.78)$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \dot{q}_r''}{\lambda^2} \quad (2.79)$$

$$\Rightarrow \delta(r) = -\frac{\alpha \cdot r \cdot R}{\lambda} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha \cdot r^2}{\lambda} + \frac{1}{3} \cdot \frac{R^3 \cdot \alpha}{\lambda \cdot r} \quad (2.80)$$

$$= +\frac{\alpha}{3\lambda} \cdot (R - r)^2 \cdot \left(2 + \frac{R}{r} \right) \quad (2.81)$$

c)

Ansatz: Der Wärmestrom, der über die Flanken der Rippen abgegeben wird, wird vorher vollständig durch den Querschnitt am Rippenfuß A_F geleitet.

$$\dot{Q}_F = -\lambda \cdot A_F \cdot \left(\frac{dT}{dr} \right)_F \quad (2.82)$$

$$A_F = 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot \delta(r_0) \quad \text{mit} \quad \delta(r_0) = \frac{\alpha}{3\lambda} \cdot (R - r_0)^2 \cdot \left(2 + \frac{R}{r_0} \right) \quad (2.83)$$

$$T_F = T(r_0) = T_U + \frac{\dot{q}_r'' \cdot (R - r_0)}{\lambda} \quad (2.84)$$

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_F = -\frac{\dot{q}_r''}{\lambda} = -\frac{T_F - T_U}{R - r_0} \quad (2.85)$$

$$\dot{Q}_F = \lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot \frac{\alpha}{3 \cdot \lambda} \cdot (R - r_0)^2 \cdot \left(2 + \frac{R}{r_0} \right) \cdot \frac{T_F - T_U}{R - r_0} \quad (2.86)$$

$$= \alpha \cdot (T_F - T_U) \cdot \frac{2\pi R^2}{3} \cdot \left(1 - \frac{r_0}{R} \right) \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot r_0}{R} \right) \quad (2.87)$$

2.13. Doppelwandiger Behälter

Problemart Stationäre eindimensionale Wärmeleitung mit konvektivem Wärmeübergang innen und außen.

a) Ansatz:

Die äußere und innere Behälterwand wird jeweils oberhalb und unterhalb des Steges als eine Stabrippe mit adiabatem Rippenkopf betrachtet. Die gedachten Rippen enden also genau auf der Hälfte des Abstandes zwischen zwei Stegen. Temperaturverlauf und übertragener Wärmestrom können somit direkt aus der Formelsammlung (S. 10) entnommen werden.

$$\dot{Q}_{\text{Rippe}} = \lambda \cdot A_Q \cdot m \cdot \Theta_F \cdot \tanh(m \cdot L) \quad (2.88)$$

Pro Steg geht jeweils eine Rippe der Länge L nach oben und eine identische nach unten (der Abstand der Stege beträgt somit $2 \cdot L$). Folglich entspricht der an der Innen- beziehungsweise an der Außenseite übertragene Wärmestrom dem zweifachen des aus Gleichung 2.88 berechneten Rippenwärmestroms.

$$\dot{Q}_{i,a} = 2 \cdot \dot{Q}_{\text{Rippe}} \quad (2.89)$$

Die Rippen werden zunächst als unendlich lang angenommen.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tanh(m \cdot L) = 1 \quad (2.90)$$

Des Weiteren gilt für den Rippenparameter m , $A = U \cdot \delta_B$, da $\delta_B \ll d$. Daraus folgt:

$$m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda_B \cdot A}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_B \cdot \delta_B}} \quad (2.91)$$

Somit gilt für den Wärmestrom, der von der Umgebung an die Außenwand übertragen wird

$$\dot{Q}_a = 2 \cdot \lambda_B \cdot \pi \cdot (d + 2 \cdot \delta_{\text{iso}} + 2 \cdot \delta_B) \cdot \delta_B \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_B \cdot \delta_B}} \cdot (T_L - T_{BL}) \quad (2.92)$$

und analog dazu für den von der Innenwand und die Flüssigkeit übertragenen Wärmestrom

$$\dot{Q}_i = 2 \cdot \lambda_B \cdot \pi \cdot d \cdot \delta_B \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_B \cdot \delta_B}} \cdot (T_{BF} - T_F) \quad (2.93)$$

Diese müssen identisch sein mit dem Wärmestrom, der durch den Steg geleitet wird ($\dot{Q}_a = \dot{Q}_i = \dot{Q}_{Steg}$). Um diesen zu bestimmen, wird der Steg als die Rohrwand eines Rohres der Länge δ_s betrachtet.

$$\dot{Q}_{Steg} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \delta_s}{\frac{1}{\lambda_B} \cdot \ln \left(\frac{d + 2 \cdot \delta_B + 2 \cdot \delta_{iso}}{d + 2 \cdot \delta_B} \right)} \cdot (T_{BL} - T_{BF}) \quad (2.94)$$

Mit den Gleichungen 2.92-2.94 sowie der Voraussetzung identischer Wärmeströme liegen für drei unbekannte Größen drei Gleichungen vor. Die Bestimmungsgleichungen der Wärmeströme sind dabei jeweils gleichermaßen aufgebaut.

$$\dot{Q} = \text{konst} \cdot \Delta T \quad (2.95)$$

Daraus folgt vereinfachend

$$\dot{Q} = a \cdot (T_L - T_{BL}) = i \cdot (T_{BF} - T_F) = s \cdot (T_{BL} - T_{BF}) \quad (2.96)$$

Mit $T_{BF} = \frac{\dot{Q}}{i} + T_F$ und $T_{BL} = T_L - \frac{\dot{Q}}{a}$ folgt nach Einsetzen

$$\dot{Q} = \frac{(T_L - T_F)}{\frac{1}{s} + \frac{1}{i} + \frac{1}{a}} \quad (2.97)$$

Werden die Konstanten a , b und c wieder eingesetzt, folgt:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{(T_L - T_F)}{\frac{\ln \left(\frac{d+2 \cdot \delta_B + 2 \cdot \delta_{iso}}{d+2 \cdot \delta_B} \right)}{2 \cdot \pi \cdot \delta_s \cdot \lambda_B} + \frac{1}{2 \cdot \lambda_B \cdot \pi \cdot d \cdot \delta_B \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_B \cdot \delta_B}}} + \dots} \\ &\quad \dots + \frac{1}{2 \cdot \lambda_B \cdot \pi \cdot (d + 2 \cdot \delta_{iso} + 2 \cdot \delta_B) \cdot \delta_B \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_B \cdot \delta_B}}} \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$= 92,93 \text{ W} \quad (2.99)$$

- b) Der Temperaturabfall lässt sich direkt aus Gleichung 2.94 bestimmen, indem der in Aufgabenteil a) bestimmte Wärmestrom in diese eingesetzt und anschließend nach ΔT aufgelöst wird.

$$T_{BL} - T_{BF} = \frac{\dot{Q} \cdot \frac{1}{\lambda_B} \cdot \ln \left(\frac{d + 2 \cdot \delta_B + 2 \cdot \delta_{iso}}{d + 2 \cdot \delta_B} \right)}{2 \cdot \pi \cdot \delta_s} \quad (2.100)$$

$$= 47,3 \text{ K} \quad (2.101)$$

- c) Aus der Aufgabenstellung ist zu entnehmen, dass die Temperatur an der Stelle $x = L$ einem Prozent der Maximaltemperatur entspricht. Mit dem Temperaturverlauf aus der Formelsammlung für Rippen mit adiabatem Rippenkopf ergibt sich folgender Lösungsansatz:

$$\Theta(x = L) = \Theta_{max} \cdot \frac{\cosh(m \cdot (L - L))}{\cosh(m \cdot L)} = \frac{\Theta_{max}}{\cosh(m \cdot L)} \stackrel{!}{=} \frac{\Theta_{max}}{100} \quad (2.102)$$

$$L = \frac{\operatorname{arcosh}(100)}{m} = 0,41 \text{ m} \quad (2.103)$$

Der erforderliche Abstand zweier Stege beträgt somit $2 \cdot L = 0,82 \text{ m}$

- d) Ansatz:

Wärmeleitung durch mehrschichtige Rohrwand mit konvektiven Wärmeübergängen mit $2 \cdot L = 1,5 \text{ m}$.

$$\frac{\dot{Q}_{Wand}}{L} = \frac{\pi \cdot (T_L - T_F)}{\frac{1}{\alpha_F \cdot d} + \frac{\ln \left(\frac{d+2\delta_B}{d} \right)}{2 \cdot \lambda_B} + \frac{\ln \left(\frac{d+2\delta_B+2\delta_{iso}}{d+2\delta_B} \right)}{2 \cdot \lambda_{iso}} + \dots} \\ \dots + \frac{\ln \left(\frac{d+4\delta_B+2\delta_{iso}}{d+2\delta_B+2\delta_{iso}} \right)}{2 \cdot \lambda_B} + \frac{1}{\alpha_L \cdot (d + 4 \cdot \delta_B + 2 \cdot \delta_{iso})} \quad (2.104)$$

Der Wärmetransport durch Behälterwand inklusive Isolierung bleibt unbeeinflusst von dem durch die Stege transportierten Wärmestrom. Den insgesamt

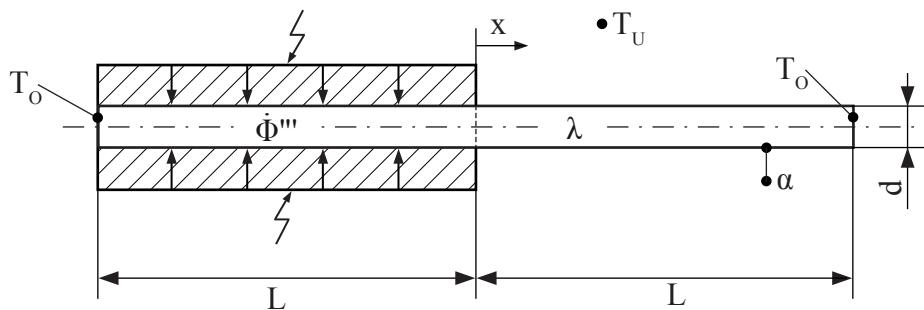
transportierten Wärmestrom erhält man somit durch Addition beider Wärmeströme.

$$\frac{\dot{Q}_{\text{ges}}}{L} = \frac{\frac{\dot{Q}_{\text{Wand}}}{L} \cdot 1,5m + \dot{Q}_{\text{Steg}}}{1,5 \text{ m}} = 247,1 \text{ W/m} \quad (2.105)$$

2.15. Kupferstab

1. Problemart

Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung mit Wärmequellen (linke Stabhälfte) bzw. stationäre, eindimensionale Wärmeleitung in einer Rippe (rechte Stabhälfte).

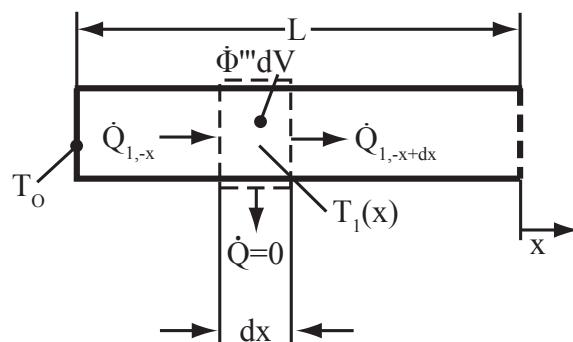


a)

2. Systemabgrenzung und Energiebilanzen

Da sich die thermischen Randbedingungen am Umfang der linken Stabhälfte (adiabate Wärmedämmung $\Rightarrow \dot{Q} = 0$) und der rechten Stabhälfte (konvektiver Wärmeübergang) unterscheiden, müssen die beiden Hälften getrennt betrachtet werden. Die Kopplung beider Systeme erfolgt über die Randbedingungen an der Stelle $x = 0$.

- Energiebilanz für ein Element der linken Stabhälfte:

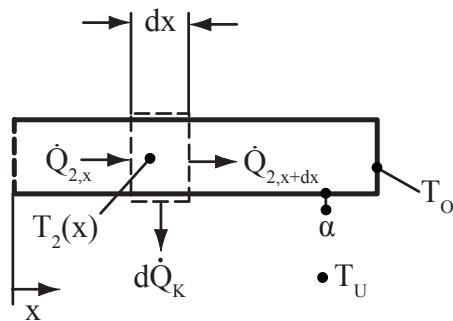


$$\dot{Q}_{1,-x} - \dot{Q}_{1,-x+dx} + \dot{\Phi}'''dV = 0$$

Systemelement:

Zylinderscheibe der Dicke dx (wegen vollkommener radialer Isolation kein Wärmefluss und damit keine Temperaturunterschiede in radialer Richtung).

- Energiebilanz für ein Element der rechten Stabhälfte



$$\dot{Q}_{2,x} - \dot{Q}_{2,x+dx} - d\dot{Q}_K = 0$$

Systemelement:

Zylinderscheibe der Dicke dx (Annahme: Wärmeleitwiderstand im Stabquerschnitt \ll Wärmeübergangswiderstand am Stabumfang ($Bi \ll 1$) \rightarrow keine Temperaturunterschiede im Stabquerschnitt).

3. Formulierung der Bilanzgrößen und Differentialgleichungen für den Temperaturverlauf

- Linke Stabhälfte

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{1,-x} &= -\lambda \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{dT_1}{dx}, & \dot{Q}_{1,-x+dx} &= \dot{Q}_{1,-x} + \frac{d\dot{Q}_{1,-x}}{dx} dx \\ \dot{\Phi}''' dV &= \dot{\Phi}''' \frac{\pi d^2}{4} dx\end{aligned}$$

Damit wird

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} = -\frac{\dot{\Phi}'''}{\lambda} \quad (2.106)$$

- Rechte Stabhälfte

$$\dot{Q}_{2,x} = -\lambda \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{dT_2}{dx}, \quad \dot{Q}_{2,x+dx} = \dot{Q}_{2,x} + \frac{d\dot{Q}_{2,x}}{dx} dx \\ d\dot{Q}_K = \alpha \cdot \pi d \cdot dx (T_2 - T_U)$$

Damit wird

$$\frac{d^2T_2}{dx^2} - \frac{4 \cdot \alpha}{\lambda \cdot d} (T_2 - T_U) = 0 \quad (2.107)$$

4. Randbedingungen

1. $T_1(x = -L) = T_O$
2. $T_1(x = 0) = T_2(x = 0)$
3. Der an der Stelle $x = 0$ von der linken Stabhälfte zufließende Wärmestrom muss in die rechte Stabhälfte abfließen.

$$\left(\frac{dT_1}{dx} \right)_{x=0} = \left(\frac{dT_2}{dx} \right)_{x=0}$$

4. $T_2(x = L) = T_O$

5. Lösung der Differentialgleichungen

- linke Stabhälfte

Zweimalige direkte Integration der Gl. 2.106 liefert

$$T_1 = -\frac{\dot{\Phi}'''}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_2 \quad (2.108)$$

- rechte Stabhälfte

Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, homogenierbar durch Einführung der Übertemperatur $\Theta_2 = T_2 - T_U$

$$\Rightarrow T_2 = T_U + c_3 \cdot \sinh(mx) + c_4 \cdot \cosh(mx) \quad (2.109)$$

$$\text{mit } m = \sqrt{\frac{4 \cdot \alpha}{\lambda \cdot d}}$$

- Bestimmung der Integrationskonstanten

$$\text{RB 1 ergibt: } T_O = -\frac{\dot{\Phi}''' \cdot L^2}{2\lambda} - c_1 \cdot L + c_2$$

$$\text{RB 2 ergibt: } c_2 = T_U + c_4$$

$$\text{RB 3 ergibt: } c_1 = m \cdot c_3$$

$$\text{RB 4 ergibt: } T_O = T_U + c_3 \cdot \sinh(m \cdot L) + c_4 \cdot \cosh(m \cdot L)$$

Für die Konstanten c_1 bis c_4 erhält man also ein lineares Gleichungssystem, dessen Auflösung folgende Beziehungen liefert:

$$c_1 = \frac{1}{L} \cdot \frac{(T_O - T_U) - \left(T_O - T_U + \frac{\dot{\Phi}'''}{2\lambda} L^2 \right) \cdot \cosh(m \cdot L)}{\frac{\sinh(m \cdot L)}{m \cdot L} + \cosh(m \cdot L)}$$

$$c_2 = T_U + \frac{(T_O - T_U) + \left(T_O - T_U + \frac{\dot{\Phi}'''}{2\lambda} L^2 \right) \cdot \frac{\sinh(m \cdot L)}{m \cdot L}}{\frac{\sinh(m \cdot L)}{m \cdot L} + \cosh(m \cdot L)}$$

$$c_3 = \frac{c_1}{m}$$

$$c_4 = c_2 - T_U$$

Damit liegt der Temperaturverlauf im gesamten Stab für eine vorgegebene Wärmequeldichte $\dot{\Phi}'''$ fest.

- b) Bestimmung der Quelldichte $\dot{\Phi}'''$ unter der Bedingung $T_1(x = 0) = T_2(x = 0) = T_O$

Für eine fest vorgegebene Quelldichte stellt sich die Temperatur in der Stabmitte aufgrund der Randbedingungen ein. Um einen bestimmten Wert dieser Temperatur zu erreichen, muss man die Quelldichte entsprechend anpassen.

Durch die Bedingung $T_1(x = 0) = T_2(x = 0) = T_O$ wird die Randbedingung 2 noch weiter festgelegt. Es ist dann

$$c_2 = T_U + c_4 = T_O \quad (2.110)$$

Mit der Beziehung für folgt daraus unmittelbar die Bedingung für die Quelldichte $\dot{\Phi}'''$.

$$c_2 = T_O = T_U + \frac{T_O - T_U + \left(T_O - T_U + \frac{\dot{\Phi}'''}{2\lambda} L^2\right) \cdot \frac{\sinh(mL)}{mL}}{\frac{\sinh(mL)}{mL} + \cosh(mL)} \quad (2.111)$$

Die Auflösung nach $\dot{\Phi}'''$ liefert

$$\dot{\Phi}''' = \frac{2 \cdot \lambda \cdot m}{L} \cdot (T_O - T_U) \cdot \frac{\cosh(mL) - 1}{\sinh(mL)} \quad (2.112)$$

und mit den Additionstheoremen der hyperbolischen Funktionen

$$\dot{\Phi}''' = \frac{2 \cdot \lambda \cdot m}{L} \cdot (T_O - T_U) \cdot \tanh\left(\frac{mL}{2}\right) \quad (2.113)$$

c) Zahlenrechnung:

$$m = \sqrt{\frac{4 \cdot \alpha}{\lambda \cdot d}} = 3,52 \text{ 1/m}$$

$$\dot{\Phi}''' = 49,4 \text{ kW/m}^3$$

d) Lage der Extremwerte unter der Bedingung $T_1(x=0) = T_2(x=0) = T_O$

Aus Symmetriegründen ergibt sich für die Lage der Maximaltemperatur

$$x_{\max} = -\frac{L}{2} \quad (2.114)$$

und für die Lage der Minimaltemperatur

$$x_{\min} = \frac{L}{2}. \quad (2.115)$$

Temperaturverlauf unter der Bedingung $T_1(x=0) = T_2(x=0) = T_O$

Mit $c_2 = T_O$ und RB 1 erhält man leicht für die linke Stabhälfte

$$T_1 = -\frac{\dot{\Phi}''' \cdot L^2}{2\lambda} \left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{x}{L} \right) + T_O \quad (2.116)$$

In der rechten Stabhälfte ist wegen der Symmetrie an der Stelle $x = \frac{L}{2}$ der Wärmefluss Null. Das bedeutet, dass dieser Teil eine Rippe mit der Höhe $\frac{L}{2}$ und der Übertemperatur am Fuß ($T_O - T_U$) darstellt. Nach Gl. (3.39) des Umdrucks folgt dann:

$$T_2 = T_U + (T_O - T_U) \cdot \frac{\cosh\left(m\left(\frac{L}{2} - x\right)\right)}{\cosh\left(\frac{mL}{2}\right)} \quad (2.117)$$

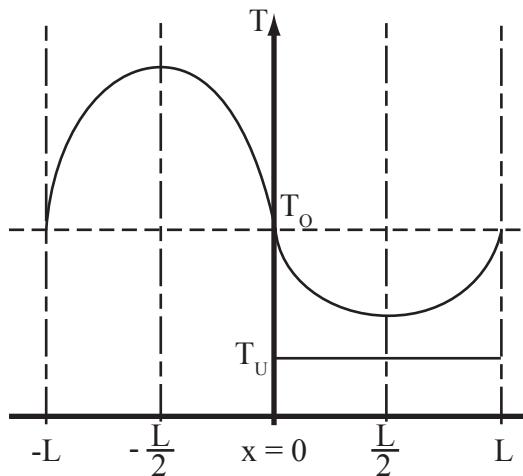
Zum selben Resultat kommt man nach einigen Umformungen, wenn man in den unter a) bestimmten Konstanten die Beziehung für $\dot{\Phi}'''$ aus b) einsetzt.

Maximaltemperatur

$$T_{\max} = T_1 \left(x = -\frac{L}{2} \right) = T_O + \frac{\dot{\Phi}''' \cdot L^2}{8\lambda} = 136,6 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (2.118)$$

Minimaltemperatur

$$T_{\min} = T_2 \left(x = \frac{L}{2} \right) = T_U + \frac{T_O - T_U}{\cosh\left(\frac{mL}{2}\right)} = 106,7 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (2.119)$$

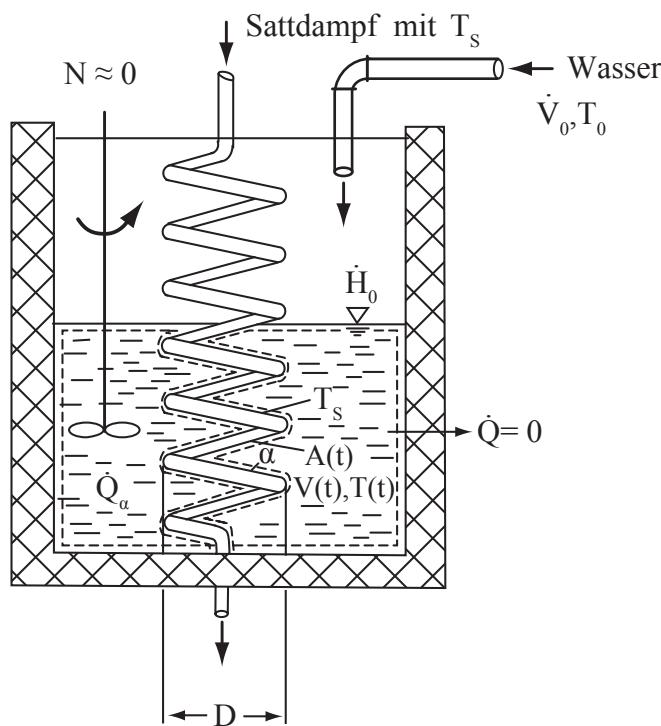


2.18. Gerührter Tank

1. Problemart:

Instationärer Wärmeübergang bei vernachlässigbar örtlichen Temperaturunterschieden
 (Aufheiz- und Abkühlvorgänge)

2. Systemabgrenzung und Energiebilanz



Flüssigkeitsmenge $\rho V(t)$ im Behälter. Energiespeicherung im Rührer, in der Rohrschlange und in der Behälterwand sowie Rührenergie vernachlässigbar.

Die Systemgrenze wird zweckmäßigerweise um die Rohrschlange gelegt, da die Oberflächentemperatur T_S bekannt ist.

Schneidet die Systemgrenze die Rohrschlange, so tritt an dieser Stelle der unbekannte Sattdampf- bzw. Kondensatmengenstrom in den Bilanzraum.

Energiebilanz

$$+\dot{Q}_\alpha + \dot{H}_0 = \frac{d(m \cdot u)}{dt} \quad (2.120)$$

3. Formulierung der Bilanzgrößen und Differentialgleichung für den Temperaturverlauf

Zeitliche Änderung der inneren Energie des Bilanzraumes

$$\frac{d(m \cdot u)}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho V \cdot u) = \rho u \frac{dV}{dt} + \rho \cdot V \frac{du}{dt} \quad (2.121)$$

Die spezifische innere Energie u lässt sich mit $c_v = c_p = c$ und $\rho = \text{konst.}$ (inkompressible Flüssigkeit) wie folgt schreiben

$$u = u_0(T_{\text{Bez}}) + c \cdot (T - T_{\text{Bez}}) \quad (2.122)$$

Da kein Phasenwechsel erfolgt, kann

$$u_0(T_{\text{Bez}}) = 0 \quad \text{und} \quad T_{\text{Bez}} = 0 \quad (2.123)$$

gesetzt werden:

$$\frac{d(m \cdot u)}{dt} = \rho c \frac{dV}{dt} \cdot T + \rho c \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} \quad (2.124)$$

Zufließender Enthalpiestrom

$$\dot{H}_0 = \rho \cdot \dot{V}_0 \cdot c \cdot T_0 \quad (2.125)$$

Über die Systemgrenze zufließender konvektiver Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{\alpha} = \alpha \cdot A (T_S - T) \quad (2.126)$$

Für den momentanen Flüssigkeitsinhalt und die momentane Austauschfläche gilt

$$V = \dot{V}_0 \cdot t \quad (2.127)$$

$$A = \frac{A_{\text{ges}}}{V_{\text{ges}}} \cdot V = \frac{A_{\text{ges}}}{V_{\text{ges}}} \cdot \dot{V}_0 \cdot t \quad (2.128)$$

Damit ergibt sich nach kleinen Umformungen für die DGL

$$\frac{\alpha \cdot A_{\text{ges}}}{\rho \cdot c \cdot V_{\text{ges}}} \cdot t \cdot (T_S - T) - (T - T_0) = t \cdot \frac{dT}{dt} \quad (2.129)$$

Die Einführung der dimensionslosen Variablen

$$\Theta^* = \frac{T - T_0}{T_S - T_0}, \quad t^* = \frac{t}{\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\rho \cdot c \cdot V_{\text{ges}}}{\alpha \cdot A_{\text{ges}}} \quad (2.130)$$

führt zu der DGL

$$\frac{d\Theta^*}{dt^*} + \left(1 + \frac{1}{t^*}\right) \cdot \Theta^* = 1 \quad (2.131)$$

3. Anfangsbedingung

$$T(t = 0) = T_0 \quad \Rightarrow \quad \Theta^*(t^* = 0) = 0 \quad (2.132)$$

4. Lösung der Differentialgleichung

DGL Typ: inhomogen, linear, 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \Theta^* &= \exp \left(- \int \left(1 + \frac{1}{t^*}\right) dt^* \right) \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot \left(c + \int 1 \cdot \exp \left(\int \left(1 + \frac{1}{t^*}\right) dt^* \right) dt^* \right) \quad (2.133) \\ &= \exp(-t^*) \cdot \exp(-\ln t^*) \cdot \left(c + \int \exp(t^*) \cdot \exp(\ln t^*) dt^* \right) \\ &= \frac{\exp(-t^*)}{t^*} \cdot (c + t^* \cdot \exp(t^*) - \exp(t^*)) \\ &= 1 + \frac{c \cdot \exp(-t^*) - 1}{t^*} \end{aligned}$$

Bestimmung der Integrationskonstanten

Setzt man die Anfangsbedingung formal in die allgemeine Lösung ein, so ergibt sich ein unbestimmter Ausdruck. Aus dieser Lösung folgt jedoch, dass zur Einhaltung der Anfangsbedingung

$$\Theta^*(t^* = 0) = 0$$

die Integrationskonstante folgende Bedingung erfüllen muss

$$\lim_{t^* \rightarrow 0} \frac{c \cdot \exp(-t^*) - 1}{t^*} = -1 \quad (2.134)$$

Ein endlicher Grenzwert kann sich aber nur ergeben, wenn für $t^* \rightarrow 0$ der Zähler von gleicher Größenordnung wie der Nennerausdruck ist. Dann erhält man nach der Regel von Bernoulli-L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{t^* \rightarrow 0} \frac{c \cdot \exp(-t^*) - 1}{t^*} &= \lim_{t^* \rightarrow 0} \frac{-c \cdot \exp(-t^*)}{1} \stackrel{?}{=} -1 \\ &\Rightarrow c = 1! \end{aligned} \quad (2.135)$$

Die Gleichung für den zeitlichen Temperaturverlauf lautet somit

$$\Theta^* = 1 + \frac{\exp(-t^*) - 1}{t^*} \quad (2.136)$$

5. Zahlenmäßige Bestimmung der Wassertemperatur

Für die Zeit, nach der der Tank gefüllt ist, gilt:

$$V_{\text{ges}} = \dot{V}_0 \cdot t_{\text{ges}} \quad t_{\text{ges}} = \frac{V_{\text{ges}}}{\dot{V}_0} \quad (2.137)$$

Damit wird

$$\frac{T_{\text{We}} - T_0}{T_{\text{S}} - T_0} = 1 + \frac{\exp\left(-\frac{\alpha \cdot A_{\text{ges}}}{\rho \cdot c \cdot \dot{V}_0}\right) - 1}{\frac{\alpha \cdot A_{\text{ges}}}{\rho \cdot c \cdot \dot{V}_0}} \quad (2.138)$$

Stoffwerte von Wasser bei ca. 50 °C:

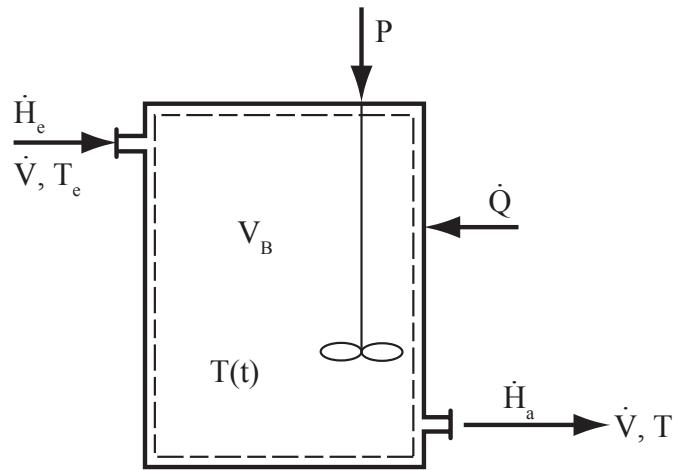
$$\begin{aligned} \rho &= 988 \text{ kg/m}^3, \\ c &= 4,184 \text{ kJ/kg K} \\ \Rightarrow \frac{\alpha \cdot A_{\text{ges}}}{\rho \cdot c \cdot \dot{V}_0} &= \frac{\alpha \cdot \pi^2 \cdot d \cdot D \cdot n}{\rho \cdot c \cdot \dot{V}_0} = 2,865 \\ \Rightarrow \frac{T_{\text{We}} - T_0}{T_{\text{S}} - T_0} &= 0,671 \\ \Rightarrow T_{\text{We}} &= 77 \text{ °C} \end{aligned}$$

2.19. Schwingungsproblem

1. Problemart

Periodischer Wärmetransport in einem gerührten Flüssigkeitsrührbehälter.

2. Systemabgrenzung und Energiebilanz



Da lokale Temperaturunterschiede durch das Rührwerk ausgeglichen werden, kann als Bilanzsystem das Behältervolumen V_B gewählt werden.

Energiebilanz:

$$\dot{H}_e + P + \dot{Q}_W - H_a = \frac{dU}{dt} \quad (2.139)$$

3. Bilanzgrößen und Differentialgleichungen für den Temperaturverlauf

eintretender Enthalpiestrom: $\dot{H}_e = \dot{V} \cdot \rho \cdot c \cdot T_e$

austretender Enthalpiestrom: $\dot{H}_a = \dot{V} \cdot \rho \cdot c \cdot T$

Dabei ist die spezifische Bezugsenthalpie $h_{Bez}(T_{Bez}) = 0$ gesetzt.

Änderung der inneren Enthalpie: $\frac{dU}{dt} = V_B \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{dT}{dt}$

Damit wird

$$\dot{V} \cdot \rho \cdot c \cdot (T_e - T) + P + \dot{Q}_W = V_B \cdot \rho \cdot c \frac{dT}{dt} \quad (2.140)$$

Mit

$$T_e = T_0 + \Theta_{e,max} \cdot \sin(\omega t) \quad (2.141)$$

lautet dann die DGL

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\dot{V}}{V_B}(T - T_0) = \frac{\dot{V}}{V_B}\Theta_{e,\max} \cdot \sin(\omega t) + \frac{P + \dot{Q}_W}{\rho \cdot c \cdot V_B} \quad (2.142)$$

Die Einführung einiger Substitutionen

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{V_B}{\dot{V}} & \kappa &= \frac{P + \dot{Q}_W}{\rho \cdot c \cdot V_B} \\ \Theta &= T - T_0 \end{aligned}$$

liefert

$$\frac{d\Theta}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot \Theta = \frac{\Theta_{e,\max}}{\tau} \cdot \sin(\omega t) + \kappa \quad (2.143)$$

4. Lösung der Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung setzt sich aus einer homogenen und einer partikulären Lösung zusammen

$$\Theta = \Theta_h + \Theta_p \quad (2.144)$$

Die homogene Lösung beschreibt den Einschwingvorgang ausgehend von einem bestimmten Anfangszustand $\rightarrow \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$. Im hier zu betrachtenden eingeschwungenen Zustand ($t \rightarrow \infty$) ist der homogene Lösungsanteil völlig abgeklungen. Der Anfangszustand spielt in diesem Falle keine Rolle und kann auch nicht mehr identifiziert werden. Das Temperaturverhalten wird dann allein durch die partikuläre Lösung bestimmt.

Ansatz für die partikuläre Lösung in Form des Störgliedes der Differentialgleichung:

$$\Theta = k_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi) + k_2 \quad (2.145)$$

Die Größen k_1 , k_2 und φ müssen nun so bestimmt werden, dass der Ansatz die DGL befriedigt. Durch Einsetzen in die DGL erhält man

$$\begin{aligned} \omega k_1 \cdot \underbrace{\cos(\omega t + \varphi)}_{\cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi)} + \frac{1}{\tau} \cdot k_1 \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \varphi)}_{\sin(\omega t) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi)} + \frac{k_2}{\tau} = \\ = \frac{\Theta_{e,\max}}{\tau} \cdot \sin(\omega t) + \kappa \end{aligned} \quad (2.146)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\text{Konstanten-Glieder: } \frac{k_2}{\tau} = \kappa \Rightarrow k_2 = \tau \cdot \kappa$$

$$\text{sin}(\omega t)\text{-Glieder: } -\omega k_1 \cdot \sin(\varphi) + \frac{1}{\tau} \cdot k_1 \cdot \sin(\varphi) = \frac{\Theta_{e,\max}}{\tau}$$

$$\text{cos}(\omega t)\text{-Glieder: } \omega k_1 \cdot \cos(\varphi) + \frac{1}{\tau} \cdot k_1 \cdot \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \tan(\varphi) = -\omega\tau$$

Die Auflösung der beiden letzten Gleichungen nach $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ ergibt

$$\begin{aligned} -\sin(\varphi) &= \frac{\Theta_{e,\max}}{k_1 \cdot \tau} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} \\ \cos(\varphi) &= \frac{\Theta_{e,\max}}{k_1 \cdot \tau^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} \end{aligned}$$

Quadrieren der beiden Gleichungen und Addition liefert:

$$\begin{aligned} \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 &= \frac{\Theta_{e,\max}^2}{k_1^2 \cdot \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)^2} \cdot \left(\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 + \frac{1}{\tau^4}\right) \\ &= \frac{\Theta_{e,\max}^2}{k_1^2 \cdot \tau^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}} \end{aligned}$$

Die gesuchten Anpassungskoeffizienten sind damit

$$\begin{aligned}\varphi &= -\arctan(\omega) \cdot \frac{V_B}{\dot{V}} \\ k_1 &= \Theta_{a,\max} = \frac{\Theta_{e,\max}}{\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}} \\ &= \frac{\Theta_{e,\max}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = \frac{\Theta_{e,\max}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot V_B}{\dot{V}}\right)^2}} \\ \rightarrow k_2 &= \kappa \cdot \tau = \frac{P + \dot{Q}_W}{\rho \cdot c \cdot \dot{V}} = \Delta T_0\end{aligned}$$

ΔT_0 stellt die Erhöhung des zeitlichen Mittelwertes der Flüssigkeitstemperatur vom Eintritt bis zum Austritt aus dem Behälter dar.

5. Bestimmung des Volumens des Ausgleichsbehälters

Bedingung:

$$\frac{\Theta_{a,\max}}{\Theta_{e,\max}} = p = 0.001 \quad (2.147)$$

Temperaturschwankungsamplitude am Austritt

$$\begin{aligned}\Theta_{a,\max} &= k_1 = \Theta_{e,\max} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega V_B}{\dot{V}}\right)^2}} \\ \frac{\Theta_{a,\max}}{\Theta_{e,\max}} &= p = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega V_B}{\dot{V}}\right)^2}}\end{aligned}$$

Die Auflösung nach V_B ergibt mit

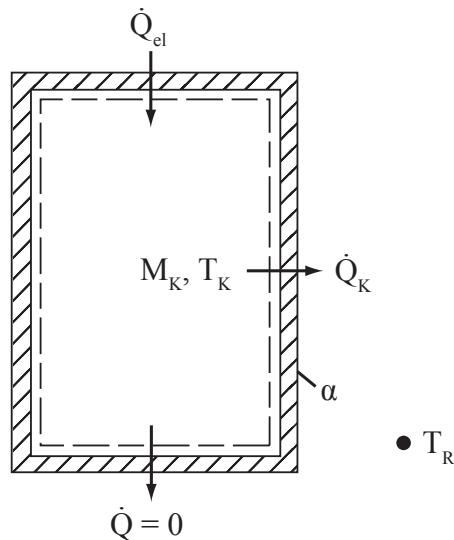
$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{t_s} \\ V_B &= \frac{\dot{V} \cdot t_s}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1} = 39,8 \text{ m}^3\end{aligned}$$

2.20. Speicherofen

1. Problemart

Instationäre Wärmeleitung mit Wärmeübergang, Aufheiz- und Abkühlvorgang.

2. Systemabgrenzung



System:

Da im Speicherkern keine Temperaturunterschiede auftreten, kann die Bilanzgrenze um den gesamten Speicherkern gelegt werden. Die Speicherfähigkeit der Ofenisolierung ist vernachlässigbar, so dass diese nicht als getrenntes Bilanzsystem behandelt werden muss. Energiebilanz:

$$\dot{Q}_{\text{el}} - \dot{Q}_K = \frac{dU_K}{dt} \quad (2.148)$$

3. Bilanzgrößen und Differentialgleichungen

Wärmestrom vom Speicherkern in den Raum:

$$\dot{Q}_K = k \cdot A \cdot (T_K - T_R) \quad (2.149)$$

Wärmedurchgangskoeffizient:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta_{\text{iso}}}{\lambda_{\text{iso}}} \quad (2.150)$$

Zeitliche Änderung der inneren Energie des Speicherkerne: Da kein Phasenwechsel auftritt, gilt:

$$\frac{dU_K}{dt} = M_K \cdot c_K \cdot \frac{dT_K}{dt} \quad (2.151)$$

Damit wird

$$M_K \cdot c_K \cdot \frac{dT_K}{dt} = \dot{Q}_{\text{el}} - k \cdot A \cdot (T_K - T_R) \quad (2.152)$$

Mit der Zeitkonstanten

$$\tau = \frac{M_K \cdot c_K}{k \cdot A} \quad (2.153)$$

der stationären Speicherkerntemperatur bei Dauerladung $\left(\frac{dT_K}{dt} = 0\right)$

$$T_{K,\text{stat}} = T_R + \frac{\dot{Q}_{\text{el}}}{k \cdot A} \quad (2.154)$$

und durch Einführung der Übertemperatur

$$\Theta_K = T_K - T_R \quad (2.155)$$

erhält man die Differentialgleichungen.

Ladezyklus: $0 < t < t_L$

$$\frac{d\Theta_{K,L}}{dt} + \frac{1}{\tau} \Theta_{K,L} = \frac{\dot{Q}_{\text{el}}}{M_K \cdot c_K} = \frac{1}{\tau} \cdot (T_{K,\text{stat}} - T_R) \quad (2.156)$$

Entladezyklus: $t_L < t < t_g$

$$\frac{d\Theta_{K,E}}{dt} + \frac{1}{\tau} \Theta_{K,E} = 0 \quad (2.157)$$

4. Anfangsbedingungen

Im quasistationären (eingeschwungenen) Zustand gilt

$$\begin{aligned} T_{K,L}(t=0) &= T_{K,E}(t=t_g) && \text{bzw. } \Theta_{K,L}(t=0) = \Theta_{K,E}(t=t_g) \\ T_{K,L}(t=t_L) &= T_{K,E}(t=t_L) && \text{bzw. } \Theta_{K,L}(t=t_L) = \Theta_{K,E}(t=t_L) \end{aligned}$$

5. Lösung der Differentialgleichungen

Die DGL im Ladezyklus stellt den allgemeinen Fall dar und enthält den Entladezyklus für $\dot{Q}_{el} = 0$.

Allgemeine Lösung der DGL:

$$\Theta_K = c \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\dot{Q}_{el}}{k \cdot A} \quad (2.158)$$

Ladezyklus

$$\Theta_{K,L} = c_L \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\dot{Q}_{el}}{k \cdot A} \quad (2.159)$$

Entladezyklus

$$\Theta_{K,E} = c_E \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.160)$$

Bestimmung der Integrationskonstanten

Aus Bed. 1 folgt

$$c_L + \frac{\dot{Q}_{el}}{k \cdot A} = c_E \cdot \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right) \quad (2.161)$$

und aus Bed. 2

$$c_L + \exp\left(-\frac{t_L}{\tau}\right) + \frac{\dot{Q}_{el}}{k \cdot A} = c_E \cdot \exp\left(-\frac{t_L}{\tau}\right) \quad (2.162)$$

Die Auflösung ergibt mit $t_E = t_g - t_L$

$$c_L = -\frac{\dot{Q}_{el}}{k \cdot A} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\frac{t_E}{\tau}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right)} \quad c_E = -\frac{\dot{Q}_{el}}{k \cdot A} \cdot \frac{1 - \exp\left(\frac{t_L}{\tau}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right)} \quad (2.163)$$

Zeitliche Temperaturverläufe

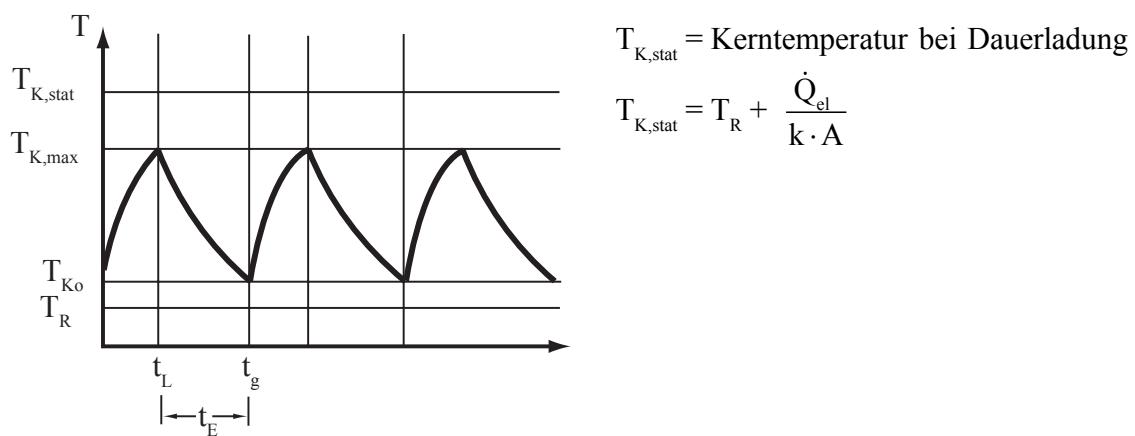
Ladezyklus

$$\Theta_{K,L} = \frac{\dot{Q}_{el}}{k \cdot A} \cdot \left(1 - \frac{1 - \exp\left(-\frac{t_E}{\tau}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (2.164)$$

Entladezyklus

$$\Theta_{K,E} = \frac{\dot{Q}_{el}}{k \cdot A} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\frac{t_L}{\tau}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{t - t_L}{\tau}\right) \quad (2.165)$$

b) Skizze des Temperaturverlaufs



c) Aufladetemperatur

Der tägliche Wärmebedarf ist $Q_H = 13,5 \text{ kWh}$. Dieser muss während der Ladezeit gespeichert werden. Mit der Leistungsaufnahme \dot{Q}_{el} des Heizkörpers ergibt sich dann:

$$t_L = \frac{Q_H}{\dot{Q}_{\text{el}}} = 9 \text{ h} \quad (2.166)$$

Kernübertemperaturen

Ladebeginn

$$\begin{aligned} \Theta_{K,0} &= \Theta_{K,L}(t = 0) = \Theta_{K,E}(t = t_g) \\ &= \frac{\dot{Q}_{\text{el}}}{k \cdot A} \cdot \frac{\exp\left(+\frac{t_L}{\tau}\right) - 1}{\exp\left(+\frac{t_g}{\tau}\right) - 1} \end{aligned} \quad (2.167)$$

Ladeende

$$\Theta_{\max} = \Theta_{K,L}(t = t_L) = \Theta_{K,E}(t = t_L) = \frac{\dot{Q}_{\text{el}}}{k \cdot A} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\frac{t_L}{\tau}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right)} \quad (2.168)$$

Zahlenrechnung

$$\frac{1}{k} = 0,1 + \frac{0,04}{0,08} = 0,6 \quad \Rightarrow \quad k = 1,67 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\tau = \frac{90 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{1,67 \cdot 0,8 \cdot 3600} = 22,5 \text{ h}$$

$$\Theta_{K,0} = 290 \text{ K}$$

$$\Theta_{K,\max} = 566 \text{ K}$$

d) Wärmeabgabe während des Entladezyklus

$$\begin{aligned}
 Q_{H,E} &= k \cdot A \cdot \int_{t_L}^{t_g} \Theta_{K,E} dt \\
 &= \dot{Q}_{el} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\frac{t_L}{\tau}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right)} \cdot \int_{t_L}^{t_g} \exp\left(-\frac{t - t_L}{\tau}\right) dt \\
 &= \dot{Q}_{el} \cdot \tau \cdot \frac{1 - \exp\left(-\frac{t_L}{\tau}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right)} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t_E}{\tau}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Prozentuale Anteile der Wärmeabgabe während des Entlade- und Ladezyklus
Entladezyklus

$$\frac{Q_{H,E}}{Q_H} \cdot 100 \% = 100 \cdot \frac{Q_{H,E}}{t_L \cdot \dot{Q}_{el}} = \frac{\tau}{t_L} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\frac{t_L}{\tau}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right)} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t_E}{\tau}\right)\right) \quad (2.169)$$

Ladezyklus

$$\frac{Q_{H,L}}{Q_H} \cdot 100 \% = 100 \cdot \frac{Q_H - Q_{H,E}}{Q_H} = 100 \cdot \left(1 - \frac{Q_{H,E}}{Q_H}\right) \quad (2.170)$$

Zahlenrechnung

$$\frac{Q_{H,E}}{Q_H} \cdot 100 \% = 61 \% \quad \frac{Q_{H,L}}{Q_H} \cdot 100 \% = 39 \% \quad (2.171)$$

2.21. Eiskugelkühlung

- Problemart

Instationäre Wärmeleitung mit Wärmeübergang, Phasenwechsel, Aufheiz- und Abkühlvorgang.

- Temperaturen der Flüssigkeit und des Inhalts der Kugeln:

$$t = t_s:$$

Zum Zeitpunkt t_s ist das Eis in den Kugeln gerade vollständig geschmolzen. Eine Erwärmung des nun in den Kugeln vorliegenden Wassers hat daher noch nicht stattgefunden. Folglich lässt sich die Temperatur in den Kugeln direkt bestimmen.

$$T_{k,s} = 0^\circ\text{C} \quad (2.172)$$

Mithilfe der spezifischen Schmelzenthalpie des Eises wird im Anschluss die der Flüssigkeit entzogene Wärmemenge berechnet.

$$Q_{E,s} = m_{Eis} \cdot r = 12787,2 \text{ J} \quad (2.173)$$

Der Behälter ist adiabat. Eine Energiebilanz um die Kugeln führt somit direkt zur Temperaturdifferenz der Flüssigkeit.

$$\Delta Q_{F,s} = Q_{E,s} = m_F \cdot c_F \cdot \Delta T_{F,s} \quad (2.174)$$

$$\Delta T_{F,s} = \frac{\Delta Q_{F,s}}{m_F \cdot c_F} = \frac{-12787,2 \text{ J}}{4180 \text{ J/kgK} \cdot 0,5 \text{ kg}} = -6,12 \text{ K} \quad (2.175)$$

$$T_{F,s} = T_U + \Delta T_{F,s} = 293,15 \text{ K} - 6,12 \text{ K} = 287,03 \text{ K} \hat{=} 13,88^\circ\text{C} \quad (2.176)$$

$$t = t_\infty:$$

Zum Zeitpunkt t_∞ liegt ein thermischer Gleichgewichtszustand vor. Das heißt, dass die Temperatur des Wassers und die Temperatur der Flüssigkeit identisch sind und kein Wärmetransport mehr stattfindet. ($T_{F,\infty} = T_{W,\infty} = T_\infty$) Des

Weiteren muss die von der Flüssigkeit abgegebene Wärmemenge gleich mit der vom Wasser aufgenommenen Wärmemenge sein.

$$m_F \cdot c_F \cdot (T_\infty - T_{F,s}) = m_W \cdot c_W \cdot (T_{K,s} - T_\infty) \quad (2.177)$$

$$T_\infty = \frac{m_W \cdot c_W \cdot T_{K,s} + m_F \cdot c_F \cdot T_{F,s}}{m_W \cdot c_W + m_F \cdot c_F} \quad \text{mit} \quad m_W = m_{Eis} \quad (2.178)$$

$$T_\infty = \frac{0,0384 \text{ kg} \cdot 4180 \text{ J/kg K} \cdot 273,15 \text{ K} + 0,5 \text{ kg} \cdot 4180 \text{ J/kg K} \cdot 287,03 \text{ K}}{0,0384 \text{ kg} \cdot 4180 \text{ J/kg K} + 0,5 \text{ kg} \cdot 4180 \text{ J/kg K}} \quad (2.179)$$

$$T_\infty = 286,042 \text{ K} \hat{=} 12,892 \text{ °C} \quad (2.180)$$

- b) Zeitlicher Temperaturverlauf des Inhalts der Kugeln, sowie der Flüssigkeit bis zum Zeitpunkt $t = t_s$:

Ansatz: Die Änderung der inneren Energie der Flüssigkeit entspricht dem durch Wärmeleitung übertragenen Wärmestrom.

$$\dot{Q} = n \cdot k \cdot A_{\text{Kugel}} \cdot (T_K(t) - T_F(t)) = m_F \cdot c_F \frac{dT_F(t)}{dt} \quad (2.181)$$

Die Kugeloberfläche berechnet sich zu $A_{\text{Kugel}} = \pi \cdot d^2$. Innerhalb des Zeitintervalls $t_0 \leq t \leq t_s$ gilt des Weiteren $T_K(t) = \text{konst.} = 273,15 \text{ K}$. Daraus folgt:

$$\frac{dT_F}{dt} = \frac{n \cdot k \cdot \pi \cdot d^2}{m_F \cdot c_F} \cdot (T_K - T_F) = \frac{1}{\tau_F} \cdot (T_K - T_F) \quad (2.182)$$

Die Lösung der Differentialgleichung folgt mit Hilfe der üblichen Annahme $\Theta_F = T_F - T_K$, sowie dem Lösungsansatz aus der Formelsammlung S. 52 zur Lösung linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau_F} \cdot \Theta_F = 0 \quad (2.183)$$

$$\Theta_F = \exp\left(-\int \frac{1}{\tau_F} dt\right) \cdot (c + \int(0 \cdot \exp\left(+\int \frac{1}{\tau_F} dt\right)) dt) \quad (2.184)$$

$$\Theta_F = \exp\left(-\int \frac{1}{\tau_F} dt\right) \cdot c \quad (2.185)$$

Als Randbedingung gilt zum Zeitpunkt t_0 :

Für $t = t_0$: $\Theta_F = 20 \text{ K} \hat{=} T_U - T_K$ sowie $\exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) = 1$. Daraus ergibt sich die Konstante c zu

$$c = \Theta_F = T_U - T_K \quad (2.186)$$

Daraus resultiert der zeitliche Temperaturverlauf

$$\frac{T_F - T_K}{T_U - T_K} = \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right) \quad (2.187)$$

- c) Gesucht ist die Zeit t_s , in der das Eis vollständig geschmolzen ist.

Ansatz:

Das Eis ist vollständig geschmolzen, wenn $T_F = T_F(t_s) = 13,9 \text{ }^\circ\text{C}$. Bei Verwendung des zeitlichen Temperaturverlaufs aus Aufgabenteil b) gilt:

$$\ln\left(\frac{T_F - T_E}{T_U - T_E}\right) \cdot (-\tau_F) = t \quad (2.188)$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{400 \text{ W/m}^2\text{K}} + \frac{0,0005 \text{ m}}{0,2 \text{ W/mK}} \quad k = 200 \text{ W/m}^2\text{K} \quad (2.189)$$

$$\tau_F = \frac{m_F \cdot c_F}{n \cdot k \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{0,5 \text{ kg} \cdot 4180 \text{ J/kgK}}{10 \cdot 200 \text{ W/m}^2\text{K} \pi (0,02 \text{ m} + 0,001 \text{ m})^2} = 754 \text{ s} \quad (2.190)$$

$$t_s = -754 \text{ s} \ln \frac{13,9 \text{ K}}{20 \text{ K}} = 274 \text{ s} = 4,6 \text{ min} \quad (2.191)$$

- d) Gesucht sind die Differentialgleichungen der Flüssigkeit und des Wassers innerhalb der Kugeln für den Zeitraum $t_s \leq t \leq \infty$

Differentialgleichung der Flüssigkeit:

$$m_F \cdot c_F \cdot \frac{dT_F}{dt} = k \cdot n \cdot \pi \cdot d_K^2 \cdot (T_K - T_F) \quad (2.192)$$

$$\frac{dT_F}{dt} - \frac{k \cdot n \cdot \pi \cdot d_K^2}{m_F \cdot c_F} \cdot (T_K - T_F) = 0 \quad (2.193)$$

$$\frac{dT_F}{dt} - \frac{1}{\tau_F} \cdot (T_K - T_F) = 0 \quad (2.194)$$

Differentialgleichung des Wassers innerhalb der Kugeln:

$$\frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot \rho_E \cdot c_W \cdot \frac{dT_K}{dt} = -k \cdot \pi \cdot (d + 2 \cdot \delta)^2 \cdot (T_K - T_F) \quad (2.195)$$

$$\frac{dT_K}{dt} + \frac{6 \cdot k \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \delta}{d}\right)^2}{\pi \cdot d^3 \cdot \rho_E \cdot c_W} \cdot (T_K - T_F) = 0 \quad (2.196)$$

$$\frac{dT_K}{dt} + \frac{1}{\tau_K} (T_K - T_F) = 0 \quad (2.197)$$

$$\frac{dT_K}{dt} = -\mu \cdot \frac{dT_F}{dt} \quad (2.198)$$

$$\text{mit } \mu = \frac{\tau_F}{\tau_K} \quad \text{sowie} \quad \tau_K = \frac{\rho_E \cdot c_W \cdot d}{6 \cdot k \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \delta}{d}\right)^2} \quad (2.199)$$

- e) Gesucht sind die Temperaturverläufe der Flüssigkeit und des Wassers innerhalb der Kugeln für den Zeitraum $t_s \leq t \leq \infty$

Temperaturverlauf des Wassers innerhalb der Kugeln:

Integration der DGL aus Aufgabenteil d) mit dem Zeitintervall zwischen t_s und t liefert:

$$\int_{T_{K,s}}^{T_K} d\tilde{T}_K = -\mu \cdot \int_{T_{F,s}}^{T_F} d\tilde{T}_F \quad (2.200)$$

$$T_K - T_{K,s} = -\mu(t) \cdot (T_F - T_{F,s}) \quad (2.201)$$

$$T_K(t) = T_E - \mu \cdot (T_F(t) - T_{F,s}) \quad (2.202)$$

Temperaturverlauf Flüssigkeit: $T_K(t)$ wird in die DGL für $T_F(t)$ eingesetzt.
Eine anschließende Lösung ergibt:

$$\frac{dT_F}{dt} = \frac{1}{\tau_F} \cdot (T_E - \mu \cdot (T_F - T_{F,s}) - T_F) \quad (2.203)$$

$$\frac{dT_F}{dt} + \frac{1}{\tau_F} \cdot (1 + \mu) \cdot T_F = \frac{1}{\tau_F} \cdot (T_E + \mu \cdot T_{F,s}) \quad (2.204)$$

$$T_F = c \cdot \exp \left(-(1 + \mu) \cdot \frac{t}{\tau_F} \right) + \frac{T_E + \mu \cdot T_{F,s}}{1 + \mu} \quad (2.205)$$

Mit der Anfangsbedingung $T_F(t_s) = T_{F,s}$ gilt:

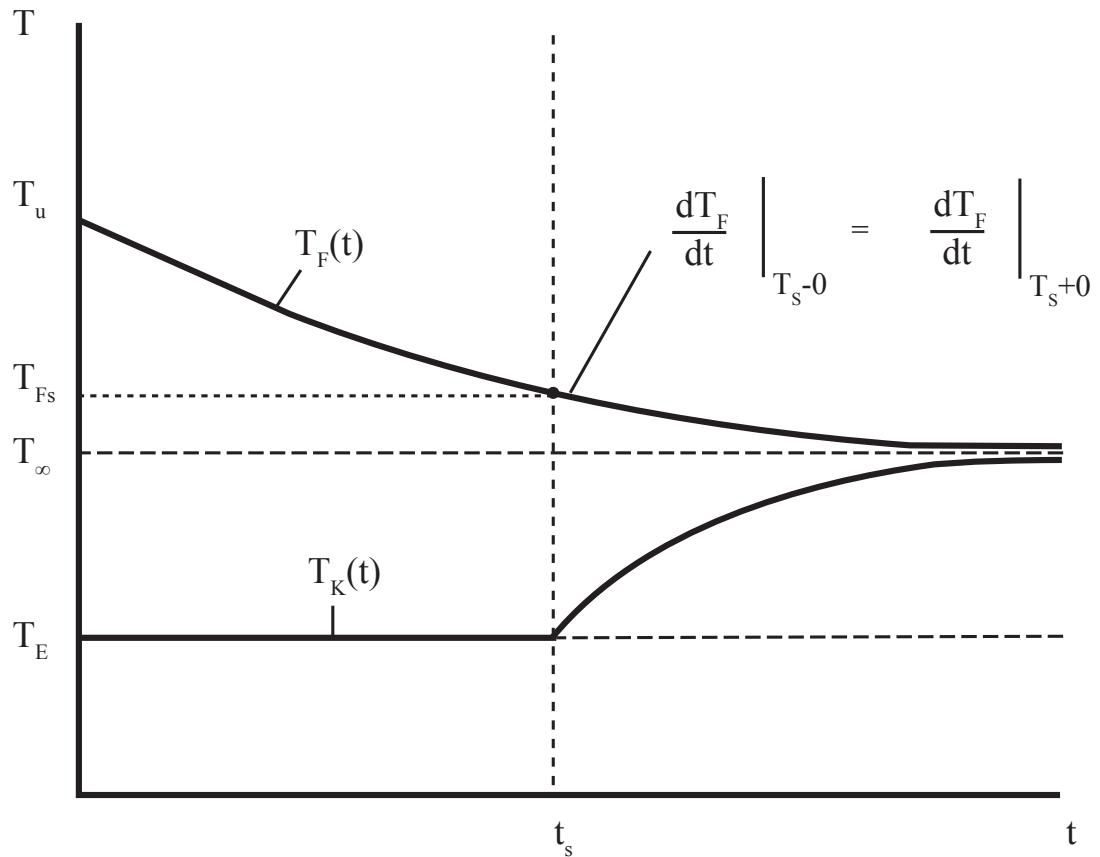
$$T_{F,s} = c \cdot \exp \left(-(1 + \mu) \cdot \frac{t_s}{\tau_F} \right) + \frac{T_E + \mu \cdot T_{F,s}}{1 + \mu} \quad (2.206)$$

$$c = \frac{T_{F,s} - T_E}{1 + \mu} \cdot \exp \left((1 + \mu) \cdot \frac{t_s}{\tau_F} \right) \quad (2.207)$$

$$T_F = \frac{T_{F,s} - T_E}{1 + \mu} \cdot \exp \left(-(1 + \mu) \cdot \frac{t - t_s}{\tau_F} \right) + \frac{T_E + \mu \cdot T_{F,s}}{1 + \mu} \quad (2.208)$$

$$T_F(t) = T_{F,s} - \frac{T_{F,s} - T_E}{1 + \mu} \cdot \left(1 - \exp \left(-(1 + \mu) \cdot \frac{t - t_s}{\tau_F} \right) \right) \quad (2.209)$$

f) Temperaturverläufe



Kapitel 3.

Musterlösungen Konvektion

3.1. Heißer Draht

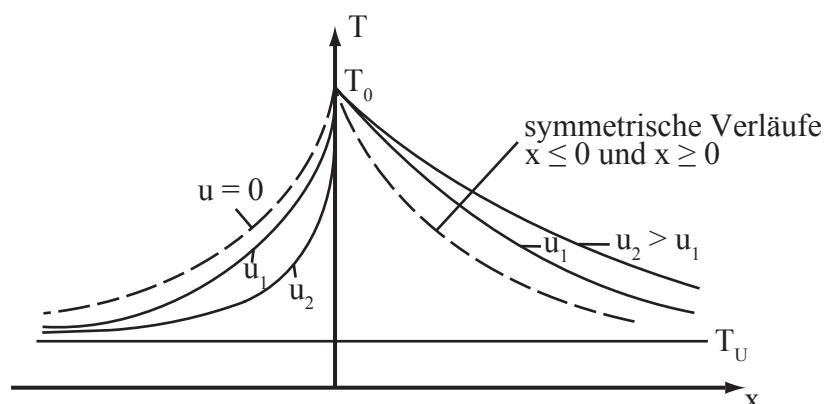
1. Problemart

Beschreibung des Vorgangs abhängig von der Wahl des Koordinatensystems:

- Mit der Geschwindigkeit u bewegtes System: instationäre, eindimensionale Wärmeleitung in einem ruhenden Körper mit Wärmeübergang an der Oberfläche.
- Ortsfestes System: stationäre, eindimensionale Wärmeleitung in einem bewegten Körper (Fluid) mit Wärmeübergang an der Berandung; wird hier verwendet.

a)

2. Skizze des Temperaturverlaufs



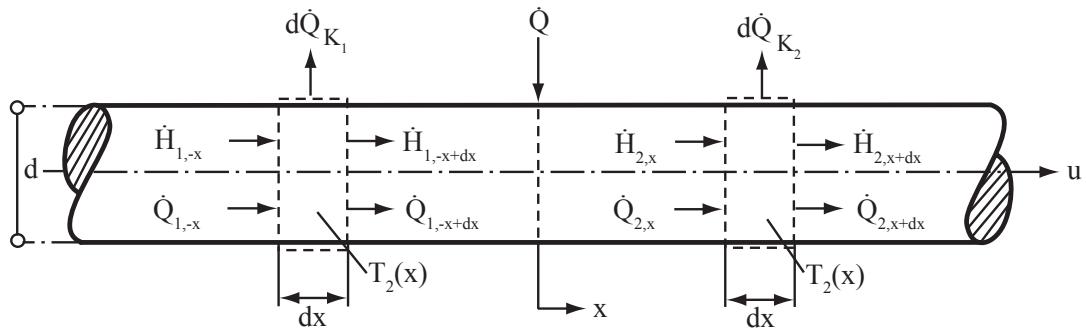
Begründung des asymmetrischen Verlaufs bei $u > 0$:

Die beiden maßgebenden Transportmechanismen Wärmeleitung und Konvektion sind auf der linken Seite ($x < 0$) entgegengesetzt und auf der rechten Seite ($x > 0$) gleich gerichtet.

b)

3. Systemabgrenzung und Energiebilanzen

Aufgrund der unterschiedlichen Richtung der Transportmechanismen bzw. des unstetigen Wärmestromverlaufs bei $x = 0$ müssen die beiden Seiten $x < 0$ und $x > 0$ als getrennte Systeme behandelt werden.



Energiebilanzen für die Bilanzelemente $\frac{\pi d^2}{4} \cdot dx$:

$$x < 0 : 0 = \dot{H}_{1,-x} + \dot{Q}_{1,-x} - \dot{H}_{1,-x+dx} - \dot{Q}_{1,-x+dx} - d\dot{Q}_{K,1} \quad (3.1)$$

$$x > 0 : 0 = \dot{H}_{2,x} + \dot{Q}_{2,x} - \dot{H}_{2,x+dx} - \dot{Q}_{2,x+dx} - d\dot{Q}_{K,2} \quad (3.2)$$

4. Beschreibung der Bilanzgrößen und Differentialgleichungen für den Temperaturverlauf

$$\begin{aligned} x < 0 : \dot{Q}_{1,-x} &= -\lambda \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{dT_1}{dx} & \dot{Q}_{1,-x+dx} &= \dot{Q}_{1,-x} + \frac{d\dot{Q}_{1,-x}}{dx} dx \\ \dot{H}_{1,-x} &= \rho \cdot c \cdot u \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot T_1 & \dot{H}_{1,-x+dx} &= \dot{H}_{1,-x} + \frac{d\dot{H}_{1,-x}}{dx} dx \\ d\dot{Q}_{K,1} &= \alpha \cdot \pi d \cdot dx \cdot (T_1 - T_U) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T_1}{dx^2} - \frac{u}{a} \cdot \frac{dT_1}{dx} - m^2 (T_1 - T_U) \quad (3.3)$$

mit

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad \text{und} \quad m = \sqrt{\frac{4 \cdot \alpha}{\lambda \cdot d}}$$

$$\begin{aligned} x > 0 : \dot{Q}_{2,x} &= -\lambda \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{dT_2}{dx} & \dot{Q}_{2,x+dx} &= \dot{Q}_{2,x} + \frac{d\dot{Q}_{2,x}}{dx} dx \\ \dot{H}_{2,x} &= \rho \cdot c \cdot u \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot T_2 & \dot{H}_{2,x+dx} &= \dot{H}_{2,x} + \frac{d\dot{H}_{2,x}}{dx} dx \\ d\dot{Q}_{K,2} &= \alpha \cdot \pi d \cdot dx \cdot (T_2 - T_U) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T_2}{dx^2} - \frac{u}{a} \cdot \frac{dT_2}{dx} - m^2 (T_2 - T_U) \quad (3.4)$$

Einführung der Übertemperaturen

$$\Theta_1 = T_1 - T_U \quad \Theta_2 = T_2 - T_U \quad (3.5)$$

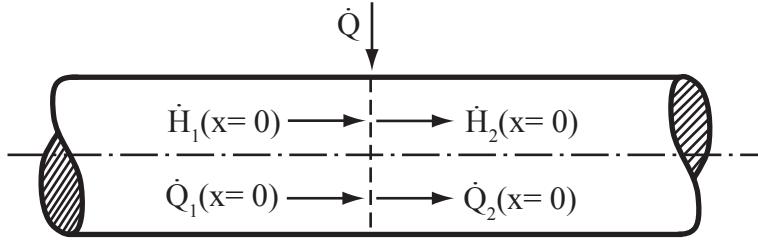
liefert

$$x < 0 : \frac{d^2\Theta_1}{dx^2} - \frac{u}{a} \cdot \frac{d\Theta_1}{dx} - m^2 \cdot \Theta_1 = 0 \quad (3.6)$$

$$x > 0 : \frac{d^2\Theta_2}{dx^2} - \frac{u}{a} \cdot \frac{d\Theta_2}{dx} - m^2 \cdot \Theta_2 = 0 \quad (3.7)$$

5. Randbedingungen

1. $\Theta_1(x = -\infty) = T_1(-\infty) - T_U = 0$
2. $\Theta_2(x = \infty) = T_2(\infty) - T_U = 0$
3. $\Theta_1(x = 0) = \Theta_2(x = 0) = \Theta_0$
4. Bilanz für den Drahtquerschnitt $x = 0$:



$$\dot{Q} + \dot{H}_1(x=0) + \dot{Q}_1(x=0) - \dot{H}_2(x=0) - \dot{Q}_2(x=0) = 0 \quad (3.8)$$

Wegen $H_1(0) = H_2(0)$ gilt:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -\dot{Q}_1(x=0) + \dot{Q}_2(x=0) \\ \dot{Q} &= \lambda \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \left[\left. \frac{dT_1}{dx} \right|_{x=0} - \left. \frac{dT_2}{dx} \right|_{x=0} \right]\end{aligned} \quad (3.9)$$

6. Lösung der Differentialgleichungen

Differentialgleichungstyp: linear, 2. Ordnung, mit konstanten Koeffizienten.
Der Lösungsansatz liefert

$$x < 0 : \quad \Theta_1 = c_1 \cdot \exp(\mu_1 x) + c_2 \cdot \exp(\mu_2 x) \quad (3.10)$$

$$x > 0 : \quad \Theta_2 = c_3 \cdot \exp(\mu_1 x) + c_4 \cdot \exp(\mu_2 x) \quad (3.11)$$

mit

$$\mu_1 = \frac{u}{2a} + \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2} > 0! \quad (3.12)$$

$$\mu_2 = \frac{u}{2a} - \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2} < 0! \quad (3.13)$$

Bestimmung der Integrationskonstanten:

Aus RB 1. folgt wegen $\mu_2 x \rightarrow +\infty \quad c_2 = 0$ und

aus RB 2. folgt wegen $\mu_1 x \rightarrow +\infty \quad c_3 = 0$

Damit gilt

$$\Theta_1 = c_1 \cdot \exp(\mu_1 x) \quad (3.14)$$

$$\Theta_2 = c_4 \cdot \exp(\mu_2 x) \quad (3.15)$$

RB 3. liefert:

$$c_1 = c_4$$

und RB 4:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \lambda \cdot A_Q \cdot (\mu_1 \cdot c_1 - \mu_2 \cdot c_4) \\ &= \lambda \cdot A_Q \cdot c_1 \cdot (\mu_1 - \mu_2) \\ &= 2\lambda \cdot A_Q \cdot c_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2} \\ \implies c_1 = c_4 = \Theta_0 &= \frac{\dot{Q}}{2 \cdot \lambda \cdot A_Q \cdot \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

7. Temperaturverläufe

$$x < 0 : \quad \Theta_1 = \frac{2\dot{Q}}{\lambda \cdot \pi d^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2}} \cdot \dots \quad (3.17)$$

$$\dots \cdot \exp\left(\left(\frac{u}{2a} + \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2}\right) \cdot x\right) \quad (3.18)$$

$$x > 0 : \quad \Theta_2 = \frac{2\dot{Q}}{\lambda \cdot \pi d^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2}} \cdot \dots \quad (3.19)$$

$$\dots \cdot \exp\left(\left(\frac{u}{2a} - \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2}\right) \cdot x\right) \quad (3.20)$$

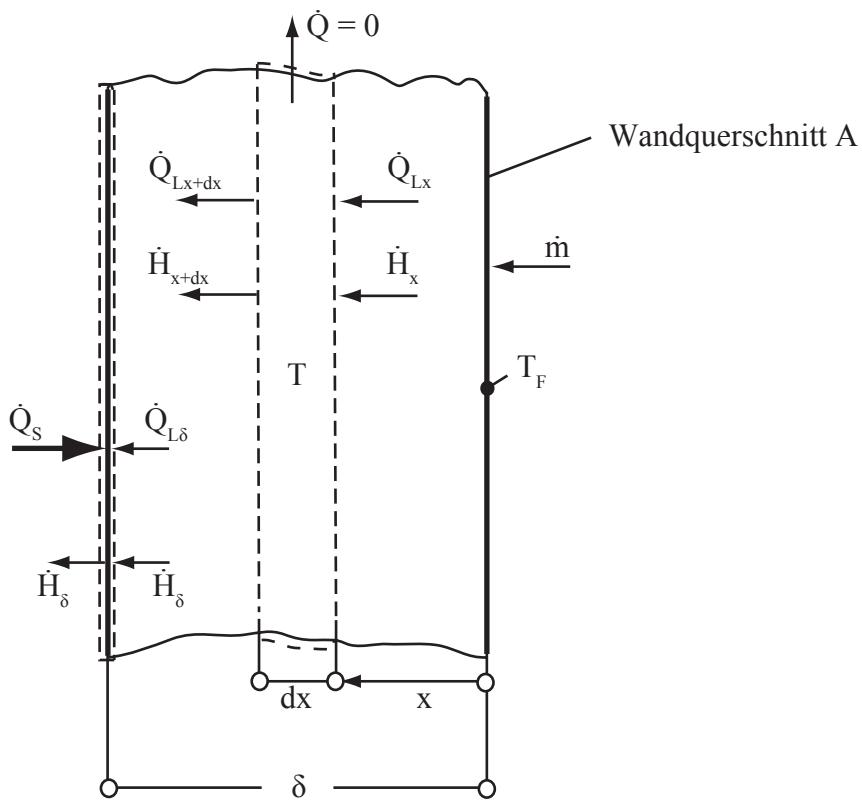
3.5. Absorbtion einer porösen Wand

a) 1. Problematik

Stationärer, eindimensionaler Wärmetransport durch Leitung und Konvektion.

2. Systemabgrenzung

Es wird der Temperaturverlauf in der Wand gesucht. Die Bilanzierung ist daher lokal durchzuführen. Bei vernachlässigbaren Wärmeströmen an den Wandstirnflächen stellt sich ein eindimensionales Temperaturfeld ein. Daraus folgt die Wahl des Bilanzelementes:



3. Energiebilanz

$$\dot{Q}_{L,x} + \dot{H}_x - \dot{Q}_{L,x+dx} - \dot{H}_{x+dx} = 0 \quad (3.21)$$

Mit

$$\dot{H}_{x+dx} = \dot{H}_x + \frac{d\dot{H}_x}{dx} dx \quad (3.22)$$

$$\dot{Q}_{L,x+dx} = \dot{Q}_{L,x} + \frac{d\dot{Q}_{L,x}}{dx} dx \quad (3.23)$$

wird

$$\frac{d\dot{Q}_{L,x}}{dx} + \frac{d\dot{H}_x}{dx} = 0 \quad (3.24)$$

4. Beschreibung der Bilanzgrößen und Differentialgleichung

Wärmeleitung in der Wand

$$\dot{Q}_{L,x} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad (3.25)$$

Enthalpiestrom

$$\dot{H}_x = H_0 + A \cdot \dot{m}'' \cdot c \cdot T \quad (3.26)$$

Gl. 3.25 und Gl. 3.26 Eingesetzt in Gl. 3.24 ergibt die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot \frac{dT}{dx} = 0 \quad (3.27)$$

5. Randbedingungen

Stelle $x = 0$:

$$T(x = 0) = T_F \quad (3.28)$$

Stelle $x = \delta$:

Die Wärmebilanz für die Wandquerschnittsfläche A liefert

$$\dot{Q}_{L,\delta} + \dot{Q}_S + \dot{H}_\delta - \dot{H}_\delta = 0 \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_S = -\dot{Q}_{L,\delta} = \lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \Big|_{x=\delta} \quad (3.30)$$

$$\dot{q}_S'' = \lambda \cdot \frac{dT}{dx} \Big|_{x=\delta} \quad (3.31)$$

6. Lösung der Differentialgleichung

Dgl. Typ: Linear, homogen, 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Ansatz $T = \exp(\mu x)$ liefert:

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \quad (3.32)$$

Allgemeine Lösung

$$T = c_1 + c_2 \cdot \exp\left(\frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot x\right) \quad (3.33)$$

Bestimmung der Integrationskonstanten

Aus RB 3.28 folgt:

$$c_1 = T_F - c_2 \quad (3.34)$$

RB 3.31 ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{q}_S'' &= \lambda \cdot \frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot c_2 \cdot \exp\left(\frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot \delta\right) \\ \Rightarrow c_2 &= \frac{\dot{q}_S''}{\dot{m}'' \cdot c} \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot \delta\right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Temperaturverlauf

$$T = T_F - \frac{\dot{q}_s''}{\dot{m}'' \cdot c} \cdot \exp \left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot \delta \right) \cdot \left(1 - \exp \left(\frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot x \right) \right) \quad (3.36)$$

- b) Maximale Temperatur in der Wand

$$\begin{aligned} T_{\max} &= T(x = \delta) \\ &= T_F + \frac{\dot{q}_s''}{\dot{m}'' \cdot c} \cdot \left(1 - \exp \left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c \cdot \delta}{\lambda} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Zahlenrechnung

$$T_{\max} = -15 + \frac{150 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 1000} \cdot (1 - \exp(-3,75)) = 229 \text{ } ^\circ\text{C}$$

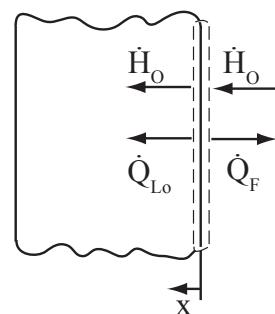
- c) Wärmefluss in das Kühlmedium an der Stelle $x = 0$

1. Systemabgrenzung und Energiebilanz

Die Bilanzgrenzen sind möglichst so zu legen, dass sie den gesuchten Wärmestrom schneiden und dass die anderen auftretenden Energieströme bekannt sind.

Alternative 1

Bilanzraum: Querschnitt A an der Stelle $x = 0$



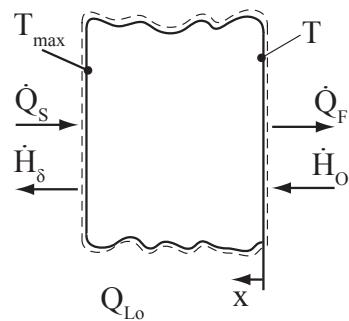
Bilanz:

$$\dot{H}_0 - \dot{H}_0 - \dot{Q}_{L,0} - \dot{Q}_F = 0 \quad (3.38)$$

$$\dot{q}_F'' = -\dot{q}_{L,0}'' \quad (3.39)$$

Alternative 2

Bilanzraum: gesamte Wand



Bilanz:

$$\dot{Q}_s - \dot{Q}_F + \dot{H}_0 - \dot{H}_\delta = 0 \quad (3.40)$$

$$\dot{q}_F'' = \dot{q}_s'' + \dot{h}_0'' - \dot{h}_\delta'' \quad (3.41)$$

2. Beschreibung der Bilanzgrößen und Bestimmungsgleichung

Alternative 1

Wärmefluss durch Leitung an der Stelle $x = 0$:

$$\dot{q}_{L0}'' = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}$$

Mit Gl. 3.35 und Gl. 3.38 wird dann

$$\dot{q}_F'' = \lambda \cdot \frac{\dot{q}_s''}{\dot{m}'' \cdot c} \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c \cdot \delta}{\lambda}\right) \cdot \frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot 1 \quad (3.42)$$

$$= \dot{q}_s'' \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c \cdot \delta}{\lambda}\right) \quad (3.43)$$

Alternative 2

Enthalpieströme bei $x = 0$ und $x = \delta$

$$h_0'' = \dot{m}'' \cdot c \cdot T_F \quad (3.44)$$

$$h_\delta'' = \dot{m}'' \cdot c \cdot T(x = \delta) = \dot{m}'' \cdot c \cdot T_{\max} \quad (3.45)$$

Damit wird aus Gl. 3.39

$$\dot{q}_F'' = \dot{q}_s'' + \dot{m}'' \cdot c \cdot (T_F - T_{\max}) \quad (3.46)$$

und mit Gl. 3.36

$$\dot{q}_F'' = \dot{q}_s'' - \dot{q}_s'' \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c \cdot \delta}{\lambda}\right)\right) = \dot{q}_s'' \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c \cdot \delta}{\lambda}\right) \quad (3.47)$$

3. Zahlenrechnung

$$\dot{q}_F'' = 150 \cdot \exp(-3,75) = 3,5 \text{ kW/m}^2$$

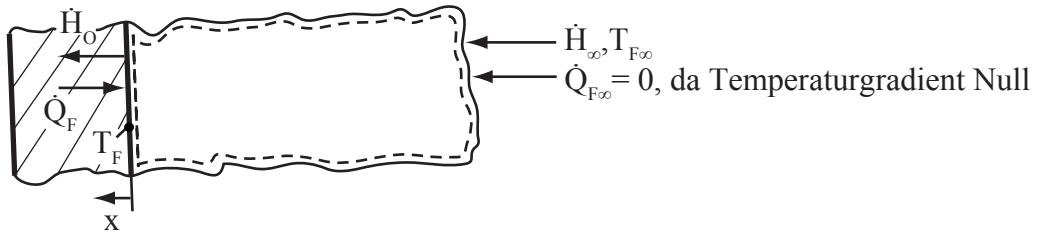
d) Kühlmediumtemperatur vor der Wand ($x = -\infty$)

1. Systemabgrenzung und Energiebilanz

Für die Wahl des Bilanzraumes gilt die selbe Vorgehensweise wie bei Aufgabenteil c). Es ergeben sich wiederum 2 sinnvolle Möglichkeiten.

Alternative 1

Bilanzraum: Fluidstrombereich $0 \leq x \leq -\infty$

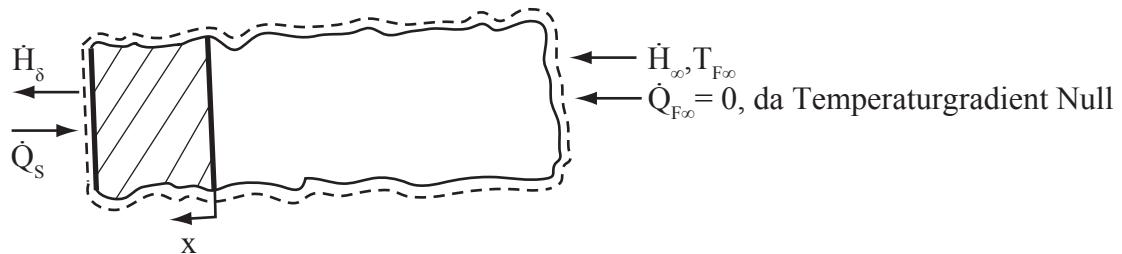


Bilanz:

$$+\dot{Q}_F - \dot{H}_0 + \dot{H}_{\infty} = 0 \\ \dot{h}_{\infty}'' = \dot{h}_0'' - \dot{q}_F'' \quad (3.48)$$

Alternative 2

Bilanzraum: Wand und Fluidstrombereich $0 \leq x \leq -\infty$



Bilanz:

$$+\dot{Q}_s - \dot{H}_{\delta} + \dot{H}_{\infty} = 0 \\ \dot{h}_{\infty}'' = \dot{h}_{\delta}'' - \dot{q}_F'' \quad (3.49)$$

2. Beschreibung der Bilanzgrößen und Bestimmungsgleichung

Enthalpieströme:

$$\begin{aligned} \dot{h}_{\infty}'' &= \dot{m}'' \cdot c \cdot T_{F_{\infty}} \\ \dot{h}_0'' &\quad , \quad \dot{h}_{\delta}'' \quad \text{siehe Gl. 3.45 und Gl. 3.45} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Damit wird nach

Alternative 1

$$T_{F_{\infty}} = T_F - \frac{\dot{q}_F''}{\dot{m}'' \cdot c} \quad (3.51)$$

und mit Gl. 3.42

$$T_{F_{\infty}} = T_F - \frac{\dot{q}_s''}{\dot{m}'' \cdot c} \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m} \cdot c}{\lambda}\right) \quad (3.52)$$

und nach

Alternative 2

$$T_{F_{\infty}} = T_{\max} - \frac{\dot{q}_s''}{\dot{m}'' \cdot c} \quad (3.53)$$

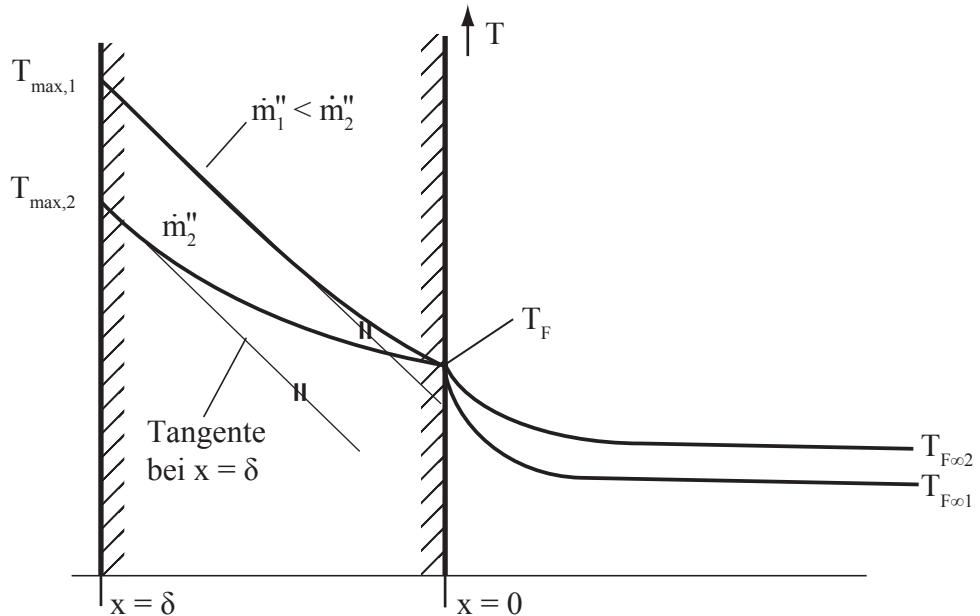
und mit Gl. 3.36

$$\begin{aligned} T_{F_{\infty}} &= T_F + \frac{\dot{q}_s''}{\dot{m}'' \cdot c} \left(1 - \exp\left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot \delta\right) - 1 \right) \\ &= T_F - \frac{\dot{q}_s''}{\dot{m}'' \cdot c} \exp\left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot \delta\right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

3. Zahlenrechnung

$$T_F = -15 - \frac{150 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 10^3} \exp(-3,75) = -21 \text{ } ^\circ\text{C}$$

e) Skizze des Temperaturverlaufs



Kapitel 4.

Musterlösungen Strahlung und Konvektion

4.2. Stutzen im Rohr

a) 1. Problemart bzw. -analyse

Der Messfehler kommt durch den Wärmeabfluss in dem als Rippe wirken- den Thermoelementstutzen zustande, der eine Temperaturdifferenz zwischen Strömung und Stutzen bedingt.

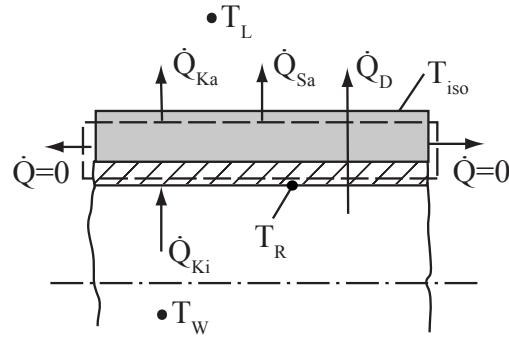
→ Wärmeleitung in einer Rippe.

Ursache des Wärmeabflusses ist das Temperaturgefälle zwischen der Rohrströmung und der Umgebung, aufgrund dessen sich entsprechend dem Verhältnis von Wärmedurchgangswiderstand des Rohres und innerem Wärmeübergangswiderstand eine von der Fluidtemperatur abweichende innere Rohrwandtemperatur einstellt. Diese Rohrwandtemperatur wird dem Stutzenfuß aufgeprägt und ist somit maßgebend für die Temperaturnverteilung entlang des Stutzens und die gesuchte Temperatur am Stutzenende. Sie muss daher zunächst ermittelt werden.

→ Wärmedurchgang durch eingeschichtetes Rohr, gekoppelt mit Strahlungsaustausch an der äußeren Oberfläche.

2. Bestimmungsgleichung für die Rohrinnenwandtemperatur

Systemabgrenzung und Wärmebilanz



Die Bilanzgrenzen werden so gelegt, dass sie die gesuchte Temperatur T_R und darüber hinaus nur bekannte Temperaturen bzw. Wärmeströme enthalten. Die unter diesem Gesichtspunkt zweckmäßige Bilanzierung um die innere Rohrandoberfläche und Verwendung der Wärmedurchgangsbeziehung für ein mehrschichtiges Rohr ist im vorliegenden Fall nur unter der später ersichtlichen Voraussetzung möglich, dass die an der Rohraußenseite parallel ablaufenden Transportvorgänge durch Strahlung und konvektiven Wärmeübergang zu einem Gesamtwärmeübergang zusammengefasst werden. Aus diesem Grund wird der Bilanzraum zunächst zwischen der inneren und äußeren Rohroberfläche gewählt. Hierfür ergibt sich im stationären Zustand

$$\dot{Q}_{Ki} - \dot{Q}_{Ka} - \dot{Q}_{Sa} = 0 \quad (4.1)$$

Fasst man \dot{Q}_{Ka} und \dot{Q}_{Sa} zu einem Gesamtwärmeübergang der üblichen Definition zusammen

$$\dot{Q}_{Ka} + \dot{Q}_{Sa} = \dot{Q}_{Ka,ges} = \alpha_{a,ges} \cdot \pi (D_a + 2s) \cdot L \cdot (T_{iso} - T_L) \quad (4.2)$$

so erhält man

$$\dot{Q}_{Ki} = \dot{Q}_{Ka,ges} = \dot{Q}_D \quad (4.3)$$

wobei der Wärmedurchgangsstrom \dot{Q}_D mit $\alpha_{a,ges}$ zu bilden ist.

Beschreibung der Bilanzgrößen

- innerer Wärmeübergang

$$\dot{Q}_{Ki} = \alpha_i \cdot \pi \cdot D_i \cdot L (T_W - T_R) \quad (4.4)$$

- Gesamtwärmeübergang außen (bzgl. des Strahlungsaustausches kann die Anordnung als sich umschließende Flächen angesehen werden, wobei $\frac{A_{iso}}{A_{Raumwände}} \approx 0$ ist)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{Ka,ges} &= \pi (D_a + 2s) \cdot L \cdot \dots \\ &\dots \cdot \left\{ \alpha_a (T_{iso} - T_L) + \epsilon_{iso} \cdot \sigma \cdot (T_{iso}^4 - T_L^4) \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

- Wärmedurchgang

$$\dot{Q}_D = \frac{\pi \cdot L (T_W - T_L)}{\frac{1}{\alpha_i D_i} + \frac{1}{2\lambda_R} \ln \left(\frac{D_a}{D_i} \right) + \frac{1}{2\lambda_{iso}} \ln \left(\frac{D_a + 2s}{D_a} \right) + \frac{1}{\alpha_{a,ges} \cdot (D_a + 2s)}} \quad (4.6)$$

Mit der Definitionsgleichung 4.2 folgt aus 4.5 für den Gesamtwärmeübergangskoeffizienten

$$\alpha_{a,ges} = \alpha_a + \underbrace{\epsilon_{iso} \cdot \sigma \cdot \frac{T_{iso}^4 - T_L^4}{T_{iso} - T_L}}_{\alpha_{Sa}} \quad (4.7)$$

Gleichung für die Rohrinnenwandtemperatur

Aus Gl. 4.3 und 4.4 erhält man

$$T_R = T_W - \frac{\dot{Q}_D}{L} \cdot \frac{1}{\alpha_i \cdot \pi D_i} \quad (4.8)$$

wobei $\frac{\dot{Q}_D}{L}$ mit Hilfe von Gl. 4.6 bestimmbar ist. In Gl. 4.8 und 4.6 sind die Wärmeübergangskoeffizienten α_i bzw. α_i und $\alpha_{a,ges}$ unbekannt. Während α_i aus den strömungstechnischen Daten unmittelbar berechnet werden kann, da bei der innen vorliegenden erzwungenen Konvektion der Temperaturinfluss gering ist, erfordert die Ermittlung von $\alpha_{a,ges}$ ein iteratives Vorgehen, weil sowohl der Wärmeübergangskoeffizient bei freier Konvek-

tion α_a als auch der Strahlungswärmeübergangskoeffizient α_{Sa} von der unbekannten Temperatur T_{iso} abhängen und die hierfür aufstellbare Gleichung nicht analytisch auflösbar ist.

3. Berechnung der Wärmeübergangskoeffizienten und der Oberflächentemperatur der Isolierung

Rohrinnenseite: erzwungene Rohrströmung

Stoffwerttemperatur $T_{st} = T_W = 80^\circ\text{C}$

Stoffwerte von Wasser:

$$\begin{aligned}\rho_W &= 972 \text{ kg/m}^3 & \Pr_W &= 2,22 \\ \lambda_W &= 0,669 \text{ W/m K} & \nu_W &= 0,364 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}\end{aligned}$$

Strömungszustand:

$$\text{Re}_{D_i} = \frac{u_m \cdot D_i}{\nu_W} = \frac{4 \cdot \dot{m}_W}{\pi \cdot D_i \cdot \rho_W \cdot \nu_W} = 14400 \quad \rightarrow \text{turbulente Strömung} \quad (4.9)$$

Thermische Randbedingung: konstante Wandtemperatur

Wärmeübergangsgesetz WÜK.14:

$$\overline{\text{Nu}_{D_i}} = \frac{\alpha_i \cdot D_i}{\lambda_W} = 0,0235 \left(\text{Re}_{D_i}^{0,8} - 230 \right) \left(1,8 \cdot \Pr_W^{0,3} - 0,8 \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \left(\frac{D_i}{L} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \left(\frac{\eta_W}{\eta_R} \right)^{0,14} \quad (4.10)$$

Da die Rohrströmung ausgebildet ist und keine großen Temperaturunterschiede zwischen Strömung und Rohrwand zu erwarten sind ($\eta_W \approx \eta_R$), gilt:

$$\overline{\text{Nu}_{D_i}} = 0,0235 \left(\text{Re}_{D_i}^{0,8} - 230 \right) \left(1,8 \cdot \Pr_W^{0,3} - 0,8 \right) = 66 \quad (4.11)$$

$$\rightarrow \alpha_i = 884 \text{ W/m}^2\text{K} \quad (4.12)$$

Rohraußenseite: freie Konvektion + Strahlung

Wegen der gegenseitigen Abhängigkeit der Wärmeübergangskoeffizienten und der Oberflächentemperatur, muss zunächst dieser Zusammenhang durch eine Wärmebilanz, die nur diese Größen als Unbekannte enthält, hergestellt werden. Eine solche Bilanz stellt Gl. 4.3

$$\dot{Q}_{\text{Ka,ges}} = \dot{Q}_D \quad (4.13)$$

in Verbindung mit Gl. 4.5 und 4.6 bzw. 4.2 und 4.6 dar. Zur Auflösung dieser Gleichung kann entweder $\alpha_{\text{a,ges}}$ oder T_{iso} geschätzt, die jeweils andere Größe ermittelt und damit die Schätzgröße nachgerechnet werden. Hier wird die Vorgehensweise bei Schätzung von $\alpha_{\text{a,ges}}$ gezeigt. Die dabei benötigte Bestimmungsgleichung für die Temperatur T_{iso} folgt aus Gl. 4.3 und 4.2.

$$T_{\text{iso}} = T_L + \frac{\dot{Q}_D}{L} \cdot \frac{1}{\alpha_{\text{a,ges}} \cdot \pi (D_a + 2s)} \quad (4.14)$$

mit $\frac{\dot{Q}_D}{L}$ aus Gl. 4.6

1. Schätzung: $\alpha_{\text{a,ges}}^* = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

$$\begin{aligned} \text{Gl. 4.6 : } \left(\frac{\dot{Q}_D}{L} \right)^* &= \frac{\pi \cdot 65}{\frac{1}{884 \cdot 0,05} + \frac{1}{2 \cdot 372} \ln \left(\frac{54}{50} \right) + \frac{1}{2 \cdot 0,046} \ln \left(\frac{74}{55} \right) + \frac{1}{10 \cdot 0,074}} \\ &= \frac{\pi \cdot 65}{3,45 + 1,35} = 42,6 \text{ W/m} \\ \rightarrow \text{Gl. 4.14 : } T_{\text{iso}} &= 15 + \frac{42,6}{10 \cdot \pi \cdot 0,074} = 33,3 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Konvektiver Wärmeübergang: freie Konvektion an waagerechtem Zylinder

Stoffwerttemperatur: $T_{\text{st}} = 0,5 \cdot (T_{\text{iso}}^* + T_L) = 24 \text{ }^\circ\text{C}$

Stoffwerte von Luft:

$$\nu_L = 15,68 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \lambda_L = 0,026 \text{ W/m K} \quad \Pr_L = 0,71$$

Strömungszustand:

$$\text{Gr}_{D_a+2s} \cdot \text{Pr} = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_{\text{iso}}^* - T_L) \cdot (D_a + 2s)^3}{\nu_L^2} \cdot \text{Pr}_L = 7,07 \cdot 10^5 \quad (4.15)$$

$$\left(\beta = \frac{1}{T_{\text{st}}} \text{ bei idealen Gasen} \right)$$

Wärmeübergangsgesetz WÜK.20:

$$\overline{\text{Nu}}_{D_a}^* = \frac{\alpha_a^* (D_a + 2s)}{\lambda_L} = 0,53 \cdot (\text{Gr}_{D_a+2s} \cdot \text{Pr})^{\frac{1}{4}} = 15,4 \quad (4.16)$$

$$\alpha_a^* = 5,4 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad (4.17)$$

→ Gesamtwärmeübertragungskoeffizient (Gl. 7)

$$\alpha_{a,\text{ges}} = 5,4 + 0,9 \cdot 5,67 \cdot \frac{3,063^4 - 2,88^4}{18,3} = 10,8 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad (4.18)$$

Vergleich zwischen Schätzung und Rechnung:

$$\text{Schätzung: } \alpha_{a,\text{ges}}^* = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\text{Nachrechnung: } \alpha_{a,\text{ges}} = 10,8 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Die Übereinstimmung ist im Prinzip ausreichend.

Der nächste Iterationsschritt mit $\alpha_a^* = 10,8 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ergibt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{Q}_D}{L} \right)^* &= 43,4 \text{ W/m} & \alpha_a^* &= 5,33 \text{ W/m}^2 \text{ K} \\ T_{\text{iso}}^* &= 32,2^\circ \text{C} & \alpha_{a,\text{ges}}^* &= 10,7 \text{ W/m}^2 \text{ K} \\ \alpha_{a,\text{ges}} &= 10,7 \text{ W/m}^2 \text{ K} = \alpha_a^* \end{aligned}$$

4. Berechnung der Rohrinnenwandtemperatur

Mit Gl. 4.6 wird

$$\frac{\dot{Q}_D}{L} = \frac{\pi \cdot 65}{3,45 + \frac{1}{10,7 \cdot 0,074}} = 43,3 \text{ W/m} \quad (4.19)$$

und mit Gl. 4.8

$$T_R = 80 - \frac{43,3}{884 \cdot \pi \cdot 0,05} = 79,71 \text{ °C} \quad (4.20)$$

$$T_W - T_R = 0,31 \text{ K} \quad (4.21)$$

5. Ermittlung der Einbaulänge des Thermoelementstutzens

Dimensionierungsbedingung und Lösungsweg

Die Eintauchlänge ist so zu bestimmen, dass bei der Temperaturdifferenz zwischen Strömung und Stutzen an der Rohrwand (Befestigungsstelle) von

$$T_W - T_R = 0,31 \text{ K}$$

der Temperaturunterschied am Stutzenende

$$T_W - T_{Th} \leq 0,05 \text{ K}$$

beträgt. Der Thermoelementstutzen kann als Stabrippe mit Fußtemperatur T_R und vernachlässigbarem Wärmefluss durch den Rippenkopf (s. Aufgabenstellung, Annahme 3) betrachtet werden. Damit lässt sich aus der hierfür bekannten Beziehung für den Temperaturverlauf längs der Rippe

$$\frac{\Theta(x)}{\Theta_F} = \frac{\cosh(m(l-x))}{\cosh(m \cdot l)} \quad (4.22)$$

die Länge l berechnen.

Gleichung für die Einbaulänge

Mit Gl. 4.22 wird

$$\frac{T_W - T_{Th}}{T_W - T_R} = \frac{T_W - T(x=l)}{T_W - T_R} = \frac{1}{\cosh(m \cdot l)} \quad (4.23)$$

Auflösung nach l liefert

$$\cosh(m \cdot l) = \frac{T_W - T_R}{T_W - T_{Th}} \quad (4.24)$$

$$l = \frac{1}{m} \cdot \operatorname{arcosh} \frac{T_W - T_R}{T_W - T_{Th}} \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \ln \left[\frac{1}{m} \cdot \frac{T_W - T_R}{T_W - T_{Th}} + \sqrt{\left(\left(\frac{T_W - T_R}{T_W - T_{Th}} \right)^2 - 1 \right)} \right] \quad (4.26)$$

mit

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_{d_a} \cdot \pi \cdot d_a}{\lambda_{Cu} \cdot \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \alpha_{d_a} \cdot d_a}{\lambda_{Cu} \cdot (d_a^2 - d_i^2)}} \quad (4.27)$$

Unbekannt ist noch der Wärmeübergangskoeffizient α_{d_a} .

Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten an der Stutzenoberfläche

Einordnung des Vorgangs: erzwungen umströmter Zylinder

Stoffwerttemperatur: $T_{st} = 0,5 (T_W + \overline{T}_{Stutzen}) \approx T_W = 80^\circ C$

Stoffwerte von Wasser: wie unter Punkt 3

Strömungszustand:

$$Re_{d_a} = \frac{w \cdot d_a}{\nu_W} = \frac{4 \cdot \dot{m}_W}{\pi \cdot D_i^2 \cdot \rho_W} \cdot \frac{d_a}{\nu_W} = 2300 \quad (4.28)$$

$$\rightarrow WÜK.7: Nu_{d_a} = \frac{\alpha_{d_a} \cdot d_a}{\lambda_W} = 0,683 \cdot Re_{d_a}^{0,466} \cdot Pr_W^{0,4} \quad (4.29)$$

$$Nu_{d_a} = 34,7 \quad \alpha_{d_a} = 2900 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad (4.30)$$

Berechnung der Einbaulänge

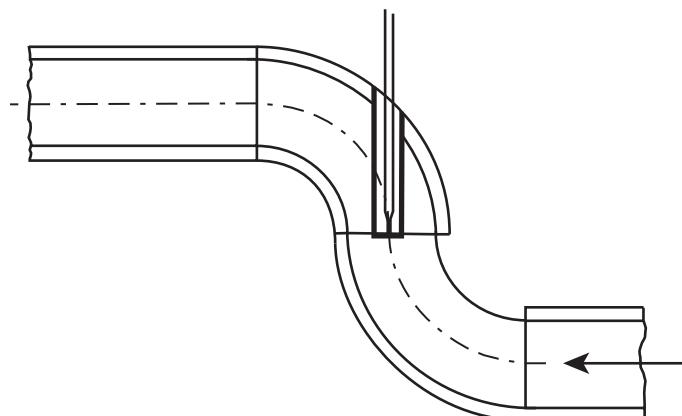
$$m = \sqrt{\frac{4 \cdot 2900 \cdot 0,008}{399 \cdot (0,008^2 - 0,006^2)}} = 91,14 \text{ l/m} \quad (4.31)$$

$$\frac{T_W - T_R}{T_W - T_{Th}} = \frac{0,31}{0,05} = 6,2 \quad (4.32)$$

$$l = \frac{1,82}{91,14} = 0,020 \text{ m} \quad \rightarrow \quad l = 20 \text{ mm} \quad (4.33)$$

b) Mögliche Maßnahmen sind:

- Dickere Isolation des Rohres. Dadurch verringert sich der Wärmefluss durch das Rohr und damit auch die treibende Temperaturdifferenz zwischen dem Fluidstrom und der Rohrinnenwand, die dem Messfehler proportional ist (Gl. 4.23).
- Schräger Einbau des Stutzens. Dadurch wird die Einbaulänge größer, gleichzeitig verringert sich jedoch der Wärmeübergangskoeffizient am Stutzen infolge des größeren Umströmungsweges (Grenzschichtdichte steigt), ein Effekt, der in entgegengesetzter Richtung wirkt. Der Einfluss der größeren Eintauchlänge wird aber dominieren.
- Einbau des Thermometerstutzens in einem Rohrknie.



4.3. Methanolbehälter

1. Problemart

Wärmeübergang bei freier und erzwungener Konvektion mit Rohrgeometrie. Strahlung bleibt unberücksichtigt.

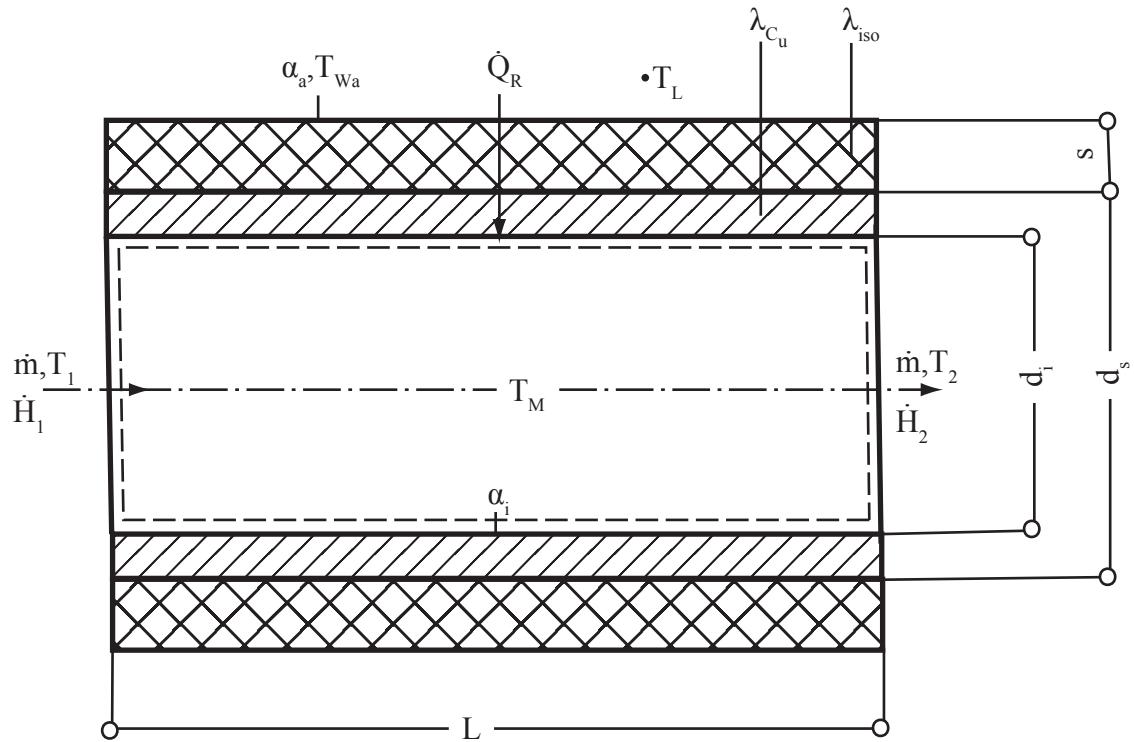
2. Lösungsstrategie und Systemabgrenzung

Die Temperaturänderung des Methanols resultiert aus dem Wärmestrom der von außen durch die isolierte Rohrwand hindurchtritt. Im Beharrungszustand stehen also Enthalpiestromänderung im Methanol $\Delta\dot{H}$ und Wärmedurchgang durch das Rohr \dot{Q}_R im Gleichgewicht. Zur Beantwortung der Frage, ob die Isolation noch in Ordnung ist, gibt es somit zwei Lösungsmöglichkeiten.

1. Man ermittelt aus dem festgestellten Wärmedurchgang durch das Rohr die zugehörige Wärmeleitfähigkeit der Isolierung λ_{iso} und vergleicht diese mit der von Kork. Ist $\lambda_{iso} > \lambda_{Kork}$, so ist die Isolierung durchfeuchtet (da $\lambda_{Wasser} > \lambda_{Kork}!$).
2. Man berechnet den sich bei einwandfreier Isolierung ($\lambda_{Kork} = 0,043 \text{ W/m K}$) einstellenden Wärmedurchgang durch das Rohr $\dot{Q}_{R,Kork}$ und vergleicht diesen mit dem tatsächlichen \dot{Q}_R . Bei $\dot{Q}_{R,Kork} < \dot{Q}_R$ ist eine Durchfeuchtung der Isolierung eingetreten.

Hier wird Lösungsweg 1 dargestellt.

Die Bilanzgrenzen werden zweckmäßigerweise so gelegt, dass sich möglichst die dort auftretenden Energieströme unmittelbar angeben lassen und nur die gesuchte Wärmeleitfähigkeit λ_{iso} als Unbekannte eingeht. Dazu müssen an den Bilanzgrenzen die Temperaturen bzw. die Temperaturgefälle bekannt sein. Diese Bedingung erfüllt am besten der Bilanzraum, der die Methanolströmung umfasst.



3. Energiebilanz und Beschreibung der Bilanzgrößen

$$\dot{H}_1 - \dot{H}_2 + \dot{Q}_R = 0 \quad (4.34)$$

Enthalpieströme

$$\dot{H}_1 = \dot{m} \cdot c \cdot T_1 \quad (4.35)$$

$$\dot{H}_2 = \dot{m} \cdot c \cdot T_2 \quad (4.36)$$

Wärmedurchgang durch das Rohr

$$\dot{Q}_R = \frac{\pi \cdot L (T_L - T_M)}{\frac{1}{\alpha_i d_i} + \frac{1}{2\lambda_{Cu}} \ln \left(\frac{d_a}{d_i} \right) + \frac{1}{2\lambda_{iso}} \ln \left(\frac{d_a + 2s}{d_a} \right) + \frac{1}{\alpha_a \cdot (d_a + 2s)}} \quad (4.37)$$

4. Bestimmungsgleichung für λ_{iso}

Kombination von 4.34 bis 4.37 ergibt

$$\frac{\pi \cdot L}{\dot{m} \cdot c} \cdot \frac{T_L - T_M}{T_2 - T_1} = \frac{1}{\alpha_i d_i} + \frac{1}{2\lambda_{Cu}} \ln \left(\frac{d_a}{d_i} \right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{2\lambda_{iso}} \ln \left(\frac{d_a + 2s}{d_a} \right) + \frac{1}{\alpha_a \cdot (d_a + 2s)} \quad (4.38)$$

Neben der gesuchten Größe sind in dieser Gleichung zunächst nicht bekannt:

$$T_M, \alpha_i \text{ und } \alpha_a \quad (4.39)$$

$T_L - T_M$ stellt das für den Wärmeübergang maßgebende mittlere treibende Gefälle dar. Da im vorliegenden Fall die Temperaturänderung längs der Strömung klein ist im Vergleich zu diesem Gefälle, kann hierfür das arithmetische Mittel eingesetzt werden.

$$T_L - T_M = T_L - \frac{1}{2} (T_1 + T_2) \quad (4.40)$$

Im Rohrinnern liegt erzwungene Konvektion vor, bei der der Wärmeübergang im wesentlichen von der Geschwindigkeit und vom Strömungszustand abhängt. Der Temperatureinfluss ist im allgemeinen relativ schwach.

Auf der Rohraußenseite herrscht natürlich Strömung, bei der der Wärmeübergang von der anliegenden treibenden Temperaturdifferenz $T_L - T_{Wa}$ abhängt. Da die Temperatur T_{Wa} nicht bekannt ist, muss diese oder der Wärmeübergangskoeffizient α_a zunächst geschätzt werden.

5. Bestimmung der Wärmeübergangskoeffizienten

Rohrinnenseite: durchströmtes Rohr, erzwungene Konvektion

Stoffbezugstemperatur: $T_{st} = \frac{T_1 + T_2}{2} = -32,5^\circ\text{C}$

→ zugehörige Stoffwerte: siehe Aufgabenstellung

Strömungszustand:

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{u_m \cdot d_i \cdot \rho}{\eta} = \frac{4 \cdot \dot{m} \cdot d_i \cdot \rho}{\rho \cdot \pi \cdot d_i^2 \cdot \eta} = \frac{4 \cdot \dot{m}}{\pi \cdot d_i \cdot \eta} \\ &= 12860 \rightarrow \text{turbulente Strömung} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Thermische Randbedingung: \approx konstante Wandtemperatur

Wärmeübergangsgesetz WÜK.14:

$$\overline{\text{Nu}_{d_i}} = \frac{\alpha_i \cdot d_i}{\lambda} = 0,0235 \cdot \left(\text{Re}_{d_i}^{0,8} - 230 \right) \cdot \left(1,8 \cdot \text{Pr}^{0,3} - 0,8 \right) \cdot \dots \cdot \dots \cdot \left(1 + \left(\frac{d_i}{L} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \cdot \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad (4.42)$$

Da keine großen Temperaturunterschiede über dem Rohrquerschnitt zu erwarten sind und die Rohreinlaufeffekte wegen $d_i \ll L$ nahezu abgeklungen sind, kann

$$\frac{\eta}{\eta_w} \approx 1 \quad \text{und} \quad 1 + \left(\frac{d_i}{L} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 1 \quad (4.43)$$

gesetzt werden.

$$\begin{aligned} \overline{\text{Nu}_{d_i}} &= 0,0235 \cdot \left(\text{Re}_{d_i}^{0,8} - 230 \right) \cdot \left(1,8 \cdot \text{Pr}^{0,3} - 0,8 \right) \\ \text{Pr} &= \frac{\nu}{a} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda} = 22,5 \\ \overline{\text{Nu}_{d_i}} &= 152 \\ \alpha_i &= 1677 \text{ W/m}^2 \text{ K} \end{aligned}$$

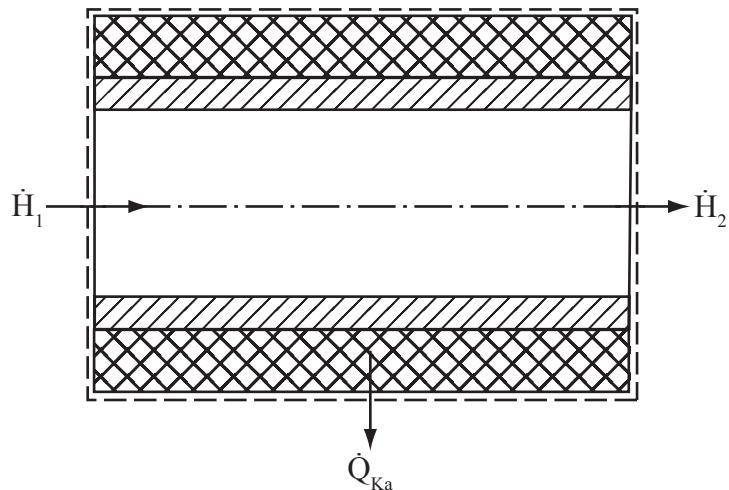
Rohraußenseite: umströmtes (waagerechtes) Rohr, freie Konvektion

Wie bereits unter Punkt 3 dargelegt, ist eine iterative Berechnung durch Schätzung von T_{Wa} oder α_a erforderlich. Hier:

$$\alpha_a^* = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad (4.44)$$

Zur Nachrechnung von α_a muss zunächst die äußere Oberflächentemperatur T_{Wa} ermittelt werden. Diese ergibt sich bei geschickter Wahl des Bilanzraums unmittelbar aus einer Energiebilanz.

Systemabgrenzung



Versteht man unter α_a den Gesamtwärmeübergangskoeffizienten, schließt man also den Strahlungsaustausch zwischen der äußeren Mantelfläche und der Umgebung ein, so gilt

$$\dot{H}_1 - \dot{H}_2 = \dot{Q}_{Ka} \quad (4.45)$$

mit den Enthalpieströmen nach 4.35 und 4.36 und dem Wärmeübergang

$$\dot{Q}_{Ka} = \alpha_a^* \cdot \pi \cdot (d_a + 2s) \cdot L \cdot (T_{Wa}^* - T_L) \quad (4.46)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} T_{\text{Wa}} &= T_L - \frac{\dot{m} \cdot c \cdot (T_2 - T_1)}{\alpha_a^* \cdot \pi \cdot (d_a + 2s) \cdot L} \\ T_{\text{Wa}}^* &= 3,35^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Nachrechnung des Wärmeübergangskoeffizienten

Konvektiver Wärmeübergang:

Stoffbezugstemperatur: $T_{\text{st}} = \frac{T_{\text{Wa}}^* + T_L}{2} = 11,7^\circ\text{C}$

Stoffwerte von Luft:

$$\nu = 14,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \lambda = 0,0251 \text{ W/mK} \quad \text{Pr}_L = 0,71 \quad (4.47)$$

Strömungszustand:

$$\begin{aligned} \text{Gr} \cdot \text{Pr} &= \frac{g \cdot \beta (T_L - T_{\text{Wa}}^*) \cdot (d_a + 2s)^3}{\nu^2} \cdot \text{Pr}_L \\ &= \frac{g \cdot (T_L - T_{\text{Wa}}^*) \cdot (d_a + 2s)^3}{T_L \cdot \nu^2} \cdot \text{Pr}_L \\ &= 0,49 \cdot 10^6 \rightarrow \text{laminare Strömung} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Thermische Randbedingung: \approx konstante Wandtemperatur

Wärmeübergangsgesetz WÜK.20

$$\overline{\text{Nu}_{d_a+2s}} = \frac{\alpha_K (d_a + 2s)}{\lambda} = 0,53 \cdot (\text{Gr}_{d_a+2s} \cdot \text{Pr})^{\frac{1}{4}} = 14 \quad (4.49)$$

$$\alpha_K = \frac{12,9 \cdot 0,0251}{0,0645} = 5,5 \text{ W/m}^2\text{K} \quad (4.50)$$

Wärmeübergang durch Strahlung:

Für eine Abschätzung wird angenommen, dass die äußere Oberfläche der Rohrleitung schwarz ist. Für den Wärmeübergangskoeffizienten ergibt sich dann näherungsweise

$$\alpha_S = 4\sigma \cdot (T_{Wa}^*)^3 = 4,8 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad (4.51)$$

Gesamtwärmeübergangskoeffizient

$$\alpha_a = \alpha_K + \alpha_S = 10,3 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad (4.52)$$

$$\Rightarrow \alpha_a \approx \alpha_a^* = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad T_{Wa} \approx T_{Wa}^* \quad (4.53)$$

6. Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit der Isolierung

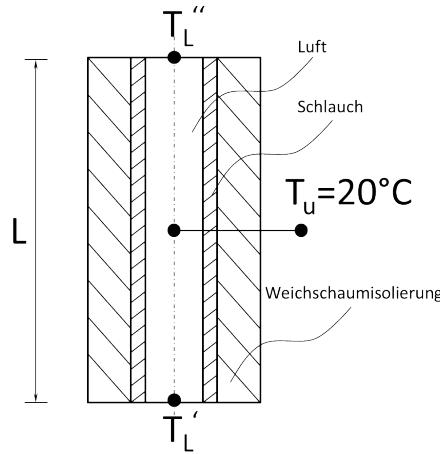
Unter den hier vorliegenden Bedingungen sind der Wärmeübergangswiderstand auf der Rohrinnenseite und der Wärmeleitwiderstand im Kupferrohr vernachlässigbar klein gegenüber den beiden übrigen Wärmewiderständen. Nach Gl. 4.38 ist dann

$$\begin{aligned} \lambda_{iso} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{d_a+2s}{d_a} \right)}{\frac{\pi \cdot L}{m \cdot c} \cdot \frac{T_L - 0,5 \cdot (T_1 + T_2)}{T_2 - T_1} - \frac{1}{\alpha_a \cdot (d_a + 2s)}} \\ &= \frac{0,5 \cdot \ln \left(\frac{0,064}{0,024} \right)}{\frac{\pi \cdot 18 \cdot 3600}{1600 \cdot 2260} \cdot \frac{52,5}{0,6} - \frac{1}{10 \cdot 0,064}} \\ &= 0,15 \text{ W/mK} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\lambda_{iso} > \lambda_{Kork} \Rightarrow \text{Isolierung ist durchfeuchtet!}$$

4.5. Beatmungsgerät

1. Problemart Wärmeübergang bei erzwungener Konvektion mit Rohrgeometrie.



- Gesucht wird der Wärmeübergangskoeffizient auf der Innenseite der Schlauchleitung, sowie im Anschluss der Gesamtwärmedurchgangskoeffizient k .

Zur Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten ist die Bestimmung der Nusseltzahl erforderlich. Dazu wird zunächst die Strömungsgeschwindigkeit bestimmt, die zur Berechnung der Reynoldszahl erforderlich ist.

Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit:

$$u = \frac{\dot{m}_L}{\rho} \cdot \frac{4}{d_i^2 \cdot \pi} = \frac{0,5 \text{ kg}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1 \text{ kg} \cdot (0,01 \text{ m})^2 \cdot \pi} = 1,768 \text{ m/s} \quad (4.55)$$

Daraus folgt die Reynoldszahl:

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot u \cdot d_i}{\eta} = \frac{u \cdot d_i}{\nu} = \frac{1,768 \text{ m/s} \cdot 0,01 \text{ m}}{20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 884 < 2300 \quad (4.56)$$

Aufgrund der in der Aufgabenstellung geforderten Vernachlässigung des Zähigkeitseinflusses gilt:

$$\frac{\eta}{\eta_W} = 1 \quad (4.57)$$

Die Nusseltzahl lässt sich daher mit WÜK.13 für einen hydrodynamischen und thermischen Anlauf bei laminarer Strömung wie folgt berechnen.

$$Nu = 3,66 + \frac{0,0677 \cdot (884 \cdot 0,71 \cdot \frac{0,01}{1,5})^{1,33}}{1 + 0,1 \cdot 0,71 \cdot (884 \cdot \frac{0,01}{1,5})^{0,83}} = 4,0069 \approx 4 \quad (4.58)$$

$$\alpha_i = \frac{Nu \cdot \lambda_L}{d_i} = \frac{4 \cdot 0,029 \text{ W/m K}}{0,01 \text{ m}} = 11,6 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad (4.59)$$

Der vom Luftstrom an die Umgebungsluft übertragene Wärmestrom lässt sich als Wärmeleitung mit konvektivem Wärmeübergang an der Innen- und Außenseite beschreiben.

$$\dot{Q} = \frac{d_i \cdot \pi \cdot L \cdot \Delta T}{\frac{1}{\alpha_i \cdot d_i} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_s} \cdot \ln \left(\frac{d_a}{d_i} \right) + \frac{1}{\lambda_{iso}} \cdot \ln \left(\frac{D}{d_a} \right) \right) + \frac{1}{\alpha_a \cdot D}} \quad (4.60)$$

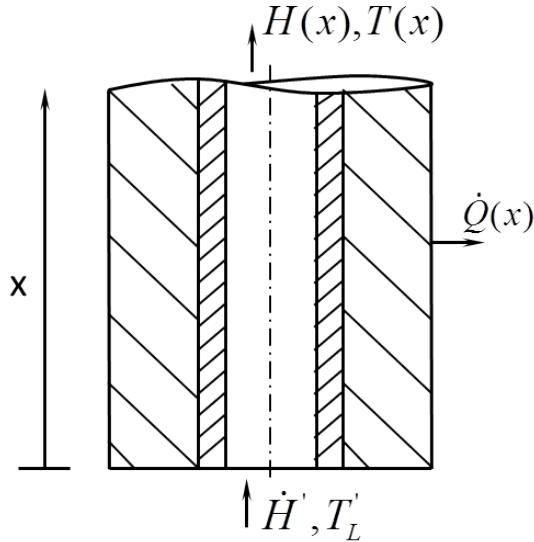
Bei Verwendung des Wärmedurchgangskoeffizienten vereinfacht sich die Beziehung wie folgt:

$$\frac{\dot{Q}}{A_i} = \frac{k \cdot \pi \cdot d_i \cdot L \cdot \Delta T}{\pi \cdot d_i \cdot L} \quad (4.61)$$

Aus einem Koeffizientenvergleich resultiert anschließend die Bestimmungsgleichung für den Wärmedurchgangskoeffizienten k .

$$\begin{aligned} k &= \left[\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d_i}{2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_s} \cdot \ln \left(\frac{d_a}{d_i} \right) + \frac{1}{\lambda_{iso}} \cdot \ln \left(\frac{D}{d_a} \right) \right) + \frac{d_i}{\alpha_a \cdot D} \right]^{-1} \\ &= \left[\frac{1}{11,6 \text{ W/m}^2 \text{ K}} + \frac{0,01 \text{ m}}{2} \cdot \left(\frac{1}{0,2 \text{ W/m K}} \cdot \ln \left(\frac{0,015}{0,01} \right) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots + \frac{1}{0,04 \text{ W/m K}} \cdot \ln \left(\frac{0,06}{0,015} \right) \right) + \frac{0,01 \text{ m}}{9 \text{ W/m}^2 \text{ K} \cdot 0,06 \text{ m}} \right]^{-1} \\ &= 3,47 \text{ W/m}^2 \text{ K} \end{aligned} \quad (4.62)$$

b) Temperaturverlauf der mittleren Luftstromtemperatur



Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik folgt, dass der übertragene Wärmestrom an der Stelle x der Enthal piedifferenz zwischen Schlauch eintritt und x entspricht

$$\dot{Q}(x) = \dot{H}' - \dot{H}(x) = \dot{m} \cdot c_L \cdot (T'_L - T_L(x)) \quad (4.63)$$

Zusätzlich gilt weiterhin:

$$\dot{Q}(x) = k \cdot A_i(x) \cdot \Delta T \quad (4.64)$$

mit

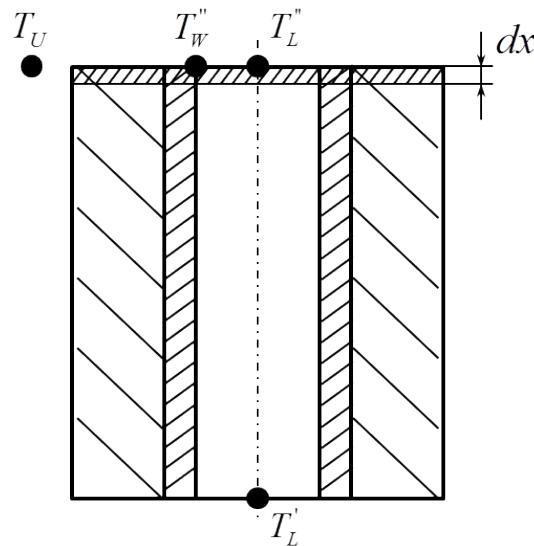
$$\Delta T = (T_L - T_U)_m = \frac{((T'_L - T_U) - (T_L(x) - T_U))}{\ln \left(\frac{T'_L - T_U}{T_L(x) - T_U} \right)} \quad (4.65)$$

Der Temperaturverlauf wird anschließend durch Gleichsetzen von 4.63 und 4.64 und anschließendem Auflösen bestimmt.

$$\dot{m} \cdot c_L \cdot (T'_L - T_L(x)) = \frac{k \cdot \pi \cdot d_i \cdot x \cdot (T'_L - T_L(x))}{\ln \left(\frac{T'_L - T_U}{T_L(x) - T_U} \right)} \quad (4.66)$$

$$\frac{T_L(x) - T_U}{T'_L - T_U} = \left[\exp \left(\frac{k \cdot \pi \cdot d_i \cdot L}{\dot{m} \cdot c_L} \cdot \frac{x}{L} \right) \right]^{-1} = \exp \left(- \frac{k \cdot \pi \cdot d_i \cdot L}{\dot{m} \cdot c_L} \cdot \frac{x}{L} \right) \quad (4.67)$$

Im zweiten Aufgabenteil von b) ist der Zusammenhang zwischen der Luftstrom- und der Schlauchwandtemperatur für die kritische Stelle gesucht. Im gesamten Schlauch soll keine Kondensation stattfinden. Der Luftstrom wird entlang der gesamten Schlauchlänge abgekühlt. Die kritische Stelle befindet sich somit an der Schlauchinnenwand am Austritt der Leitung (Index "').



Der auf den Umfang bezogene Wärmestrom $\dot{q}'_{W \rightarrow U}$ zwischen der Wand und der Umgebungsluft entlang des Teilabschnitts dx lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$\dot{q}'_{W \rightarrow U} = \frac{dx}{\frac{1}{k} - \frac{1}{\alpha_i}} \cdot (T_W'' - T_U) \quad (4.68)$$

Dieser muss identisch sein mit dem vom Luftstrom an die Umgebungsluft übertragenen Wärmestrom $\dot{q}'_{L \rightarrow U}$

$$\dot{q}'_{L \rightarrow U} = k \cdot dx \cdot (T_L'' - T_U) = \frac{dx}{\frac{1}{k} - \frac{1}{\alpha_i}} \cdot (T'' - T_U) = \dot{q}'_{W \rightarrow U} \quad (4.69)$$

Daraus resultiert der zeitliche Zusammenhang zwischen der Luftstrom- und der Schlauchwandtemperatur.

$$T_L'' - T_U = \frac{1}{1 - \frac{k}{\alpha_i}} \cdot (T_W'' - T_U) \quad (4.70)$$

Durch Auflösen von 4.67 nach $T_L(x) - T_U$, Auswerten an der Stelle $x = L$ und anschließendem Gleichsetzen mit Gleichung 4.70 lässt sich schließlich die erforderliche Lufteintrittstemperatur bestimmen.

$$T_L'' - T_U = \frac{1}{1 - \frac{k}{\alpha_i}} \cdot (T_W'' - T_U) = \exp \left(-\frac{k \cdot \pi \cdot d_i \cdot L}{\dot{m} \cdot c_L} \cdot \frac{x}{L} \right) \cdot (T_L' - T_U) \quad (4.71)$$

$$T_L' = \frac{\exp \left(\frac{k \cdot \pi \cdot d_i \cdot L}{\dot{m} \cdot c_L} \right)}{1 - \frac{k}{\alpha_i}} \cdot (T_W'' - T_U) + T_U \quad (4.72)$$

- c) Wärmeverlust \dot{Q}_L der Luftströmung Der Wärmeverlust der Luftströmung entspricht der Enthalpiedifferenz der Luftströmung zwischen Schlauchein- und Schlauchaustritt.

$$\dot{Q}_L = \dot{m} \cdot c_L \cdot (T_L'' - T_L') \quad (4.73)$$

Aus der Aufgabenstellung ist zu entnehmen, dass die Wandtemperatur an der kritischen Stelle 1 K über der Taupunktstemperatur des Luftstrom liegen muss ($T_W'' = 36^\circ\text{C}$). Mit dieser Angabe lässt sich die Lufttemperatur am Schlauchaustritt direkt mit Gleichung 4.70 berechnen.

$$T_L'' = \frac{T_W'' - T_U}{1 - \frac{k}{\alpha_i}} + T_U \quad (4.74)$$

$$= \frac{(309,15 \text{ K} - 293,15 \text{ K})}{1 - \frac{3,5}{11,6}} + 293,15 \text{ K} = 316,06 \text{ K} \hat{=} 42,91^\circ\text{C} \quad (4.75)$$

Aus Gleichung 4.72 berechnet sich die Luftstromtemperatur am Schlaucheingang zu:

$$T'_L = \frac{\exp\left(\frac{3,5 \text{ W/m}^2 \text{ K} \cdot \pi \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m}}{0,5 \text{ kg/3600 s} \cdot 1000 \text{ J/kg K}}\right)}{1 - \frac{3,5}{11,6}} \cdot (309,15 \text{ K} - 293,15 \text{ K}) + 293,15 \text{ K}$$

$$= 368,28 \text{ K} \quad (4.76)$$

Mit den Temperaturen am Eintritt und Austritt der Schlauchleitung lässt sich anschließend der Verlustwärmestrom berechnen.

$$\dot{Q}_L = 0,5 \text{ kg/3600 s} \cdot 1000 \text{ J/kg K} \cdot (368,28 \text{ K} - 316,06 \text{ K}) = 7,253 \text{ W} \quad (4.77)$$

$$\rightarrow T_{W,\text{iso}} = T_U + \frac{\dot{Q}_L}{\alpha_a \cdot \pi \cdot D \cdot L} = 296 \text{ K} \quad (4.78)$$

Mit dem Hinweis geringfügiger Temperaturabweichungen ist folgende Linearisierung anwendbar (vgl. Vorrechenübung):

$$T_a^4 - T_b^4 \approx 4 \cdot T_b^3 \cdot (T_a - T_b) \quad (4.79)$$

Für den Wärmeübergangskoeffizienten der Strahlung gilt somit die Beziehung

$$\alpha_{a,\text{Str}} \cdot (T_{W,\text{iso}} - T_U) = \epsilon_{\text{iso}} \cdot \sigma \cdot 4 \cdot T_U^3 \cdot (T_{W,\text{iso}} - T_U) \quad (4.80)$$

$$\alpha_{a,\text{Str}} = \epsilon_{\text{iso}} \cdot \sigma \cdot 4 \cdot T_U^3 \quad (4.81)$$

$$\alpha_{a,\text{Str}} = 0,95 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4 \cdot 4 \cdot (293,15 \text{ K})^3 = 5,43 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad (4.82)$$

Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten der Konvektion

$$\text{Gr} \cdot \text{Pr} = \frac{g \cdot (T_{W,\text{iso}} - T_U) \cdot D^3}{T_U \cdot \nu_L} \cdot \text{Pr}_L = 60910,89 \quad (4.83)$$

$$\text{WÜK.20: } \text{Nu} = 0,53 \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{0,25} = 8,32 \quad (4.84)$$

$$\alpha_{a,\text{Konv}} = \frac{\lambda_L}{D} \cdot \text{Nu} = 3,608 \text{ W/m}^2\text{ K} \quad (4.85)$$

$$\alpha_{\text{ges}} = \alpha_{a,\text{Str}} + \alpha_{a,\text{Konv}} = 9,04 \text{ W/m}^2\text{ K} \quad (4.86)$$

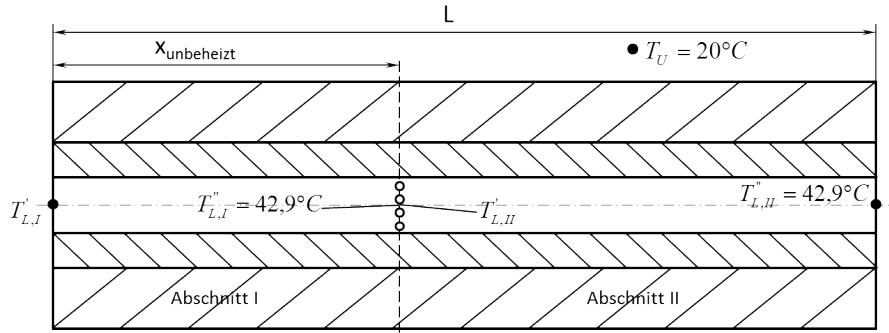
$$(4.87)$$

Alternativer Lösungsweg für den Strahlungswärmeübergangskoeffizienten

$$\varepsilon_{\text{iso}} \cdot \sigma \cdot (T_{W,\text{iso}}^4 - T_U^4) = \alpha_{a,\text{Str}} \cdot (T_{W,\text{iso}} - T_U) \quad (4.88)$$

$$\alpha_{a,\text{Str}} = \frac{\varepsilon_{\text{iso}} \cdot (T_{W,\text{iso}}^4 - T_U^4)}{T_{W,\text{iso}} - T_U} = 5,6 \text{ W/m}^2\text{ K} \quad (4.89)$$

- d) Installation einer Heizwendel aufgrund begrenzter Schlaucheneintrittstemperatur T_L^{*}



Die Heizwendel muss ab der Stelle x installiert werden, an der die Lufttemperatur ohne Heizung die geforderte Mindesttemperatur des Luftstroms ($T_{L,\min} = 42,91^\circ\text{C}$ (vgl. 4.75)) unterschreiten würde. Eine passende Bestimmungsgleichung lässt sich durch Auflösen der Gleichung 4.66 nach x ermitteln.

$$x_{\text{unbeheizt}} = \frac{-\ln\left(\frac{T_{L,\min} - T_U}{T'_L} - T_U\right) \cdot \dot{m} \cdot c_L}{k \cdot \pi \cdot d_i} \quad (4.90)$$

$$= \frac{-\ln\left(\frac{22,91}{40}\right) \cdot 0,5 \text{ kg/3600 s} \cdot 1000 \text{ J/kg K}}{3,5 \text{ W/m}^2 \text{ K} \cdot \pi \cdot 0,01 \text{ m}} = 0,704 \text{ m} \quad (4.91)$$

Bestimmung der erforderlichen Heizleistung der Heizwendel:

Es gilt: $\dot{Q}_{V,II} = -\dot{Q}_{el}$ wobei $\dot{Q}_{V,II}$ den Verlustwärmestrom im Abschnitt II darstellt. Zur Bestimmung des Verlustwärmestroms $\dot{Q}_{V,II}$ muss zunächst die erforderliche Temperatur der Luftströmung unmittelbar nach der Heizwendel ermittelt werden. Diese lässt sich direkt aus Gleichung 4.67 bestimmen.

$$\frac{T''_{L,II} - T_U}{T'_{L,II} - T_U} = \exp\left(\frac{k \cdot \pi \cdot d_i \cdot (L - x_{\text{unbeheizt}})}{\dot{m}_L \cdot c_L}\right) \quad (4.92)$$

$$T'_{L,II} = T_U + (T''_{L,II} - T_U) \cdot \exp\left(\frac{k \cdot \pi \cdot d_i \cdot (L - x_{\text{unbeheizt}})}{\dot{m}_L \cdot c_L}\right) = 336,25 \text{ K} \quad (4.93)$$

Die erforderliche Heizleistung ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_{\text{el}} &= \dot{m}_L \cdot c_L \cdot (T'_{L,\text{II}} - T''_{L,\text{II}}) \\
 &= 0,5 \frac{\text{kg}}{3600 \text{s}} \cdot 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot (336,25 \text{K} - 316,05 \text{K}) \\
 &= 2,8 \text{ W}
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Der Verlustwärmestrom im Abschnitt I berechnet sich analog zum Abschnitt II zu

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_{V,I} &= \dot{m} \cdot c_L \cdot (T''_{L,I} - T'_{L,I}) \\
 &= 0,5 \frac{\text{kg}}{3600 \text{s}} \cdot 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot (316,06 \text{K} - 333,15 \text{K}) \\
 &= -2,375 \text{ W}
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\dot{Q}_{V,\text{ges}} = \dot{Q}_{V,I} + \dot{Q}_{V,\text{II}} = -5,175 \text{ W} \tag{4.96}$$

Kapitel 5.

Musterlösungen Stoffübertragung

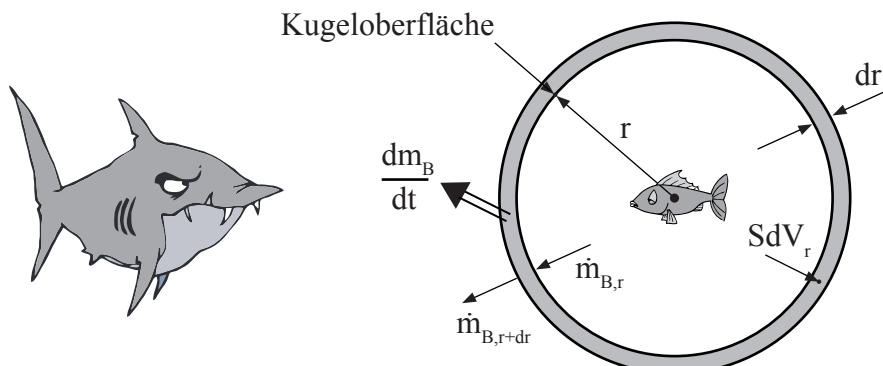
5.4. Haialarm auf Mallorca

1. Problemart

Diffusion in einer radialsymmetrischen Geometrie, daher Verwendung von Kugelkoordinaten. Konvektion bleibt unberücksichtigt.

2. Lösung

- In der differentiellen Bilanz zur Herleitung der DGL sind zunächst neben dem grundlegenden Diffusionsmechanismus die Zeitabhängigkeit des Blutstroms (Index B) sowie evtl. vorhandene Quellterme zu berücksichtigen (siehe Abbildung).



Für die einzelnen in der Bilanz auftretenden Terme gilt

$$\dot{m}_{B,r} = j''_B \cdot A_r = -\rho_{ges} \cdot D_{B,W} \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial r} \cdot A_r \quad (1. \text{ Ficksches Gesetz}) \quad (5.1)$$

$$\dot{m}_{B,r+dr} = \dot{m}_{B,r} + \frac{\partial \dot{m}_{B,r}}{\partial r} dr \quad (\text{Taylorreihenentwicklung}) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial m_B}{\partial t} = \rho_{ges} \cdot dV_r \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$S \cdot dV_r = S \cdot A_r \cdot dr = S \cdot 4\pi r^2 \cdot dr \quad [S] = \text{kg}_B/\text{m}^3\text{s} \quad (5.4)$$

wobei S ein volumenspezifischer Quellterm ist. Für die Bilanz gilt:

$$\dot{m}_{B,r} - \dot{m}_{B,r+dr} + S \cdot dV_r - \frac{\partial m_B}{\partial t} = 0 \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_{ges} \cdot D_{B,W} \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \right) dr + \dots \\ & \dots + S \cdot 4\pi r^2 dr - \rho_{ges} \cdot dV_r \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\rho_{ges} \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_{ges} \cdot D_{D,W} \cdot r^2 \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial r} \right) + S \quad (5.7)$$

- b) Die Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung wird deutlich, wenn die abgeleitete Gleichung mit der allgemeinen Gleichung für Wärmeleitung in Kugelkoordinaten verglichen wird:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \cdot \sin \theta \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{\Phi}''' \end{aligned} \quad (5.8)$$

bzw. ohne Winkelabhängigkeit ($\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$):

$$\rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{\Phi}''' \quad (5.9)$$

Die Einheiten dieser Gleichungen sind die Einheiten der Erhaltungsgrößen Masse und Energie, bezogen auf Volumen und Zeit, also [$\text{kg}_B/\text{m}^3\text{s}$] und [$\text{J}/\text{m}^3\text{s}$]. Hinsichtlich der Stofftransportgleichung ist zu beachten, dass die erhaltene Masse die des betrachteten Stoffes, nicht die Gesamtmasse ist. Dies erklärt auch das Auftreten von Quelltermen. Wenn in einem System z.B. chemische Reaktionen stattfinden, so findet dies Ausdruck in negativen Quelltermen in den Transportgleichungen für die Edukte und positiven Quelltermen in denen für die Produkte.

Die Analogie wird noch deutlicher, wenn konstante Stoffwerte unterstellt und die Gleichungen auf die zeitliche Änderung der abhängigen Variable normiert werden:

$$\frac{\partial \xi_B}{\partial t} = D_{B,W} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial r} \right) + \frac{S}{\rho_{\text{ges}}} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{\Phi}'''}{\rho_{\text{ges}} \cdot c_p} \quad (5.11)$$

Die einzelnen Größen lassen sich nun wie folgt gegenüberstellen:

Bedeutung	Stoffübertragung (hier reine Diffusion)	Wärmeleitung
Unabhängige Variablen	r,t	r,t
Abhängige Variable (Potenzial)	ξ_B [kg _B /kg]	T [K]
Quellterm	S [kg _B /kg]	$\dot{\Phi}''' \left[\frac{J}{m^3 s} \right] = \left[\frac{W}{m^3} \right]$
Beschreibung des Zusammenhangs zwischen zeitlicher Änderung des Potenzials und Krümmung des Potenzialfeldes durch Proportionalitätskonstante	$D_{B,W}$ [m ² /s] (Diffusionskoeffizient)	$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$ [m ² /s] (Temperaturleitfähigkeit, engl. „thermal diffusivity“)
Faktor zur Umrechnung vom Potenzial (ξ_B , T) auf die volumenbezogene Erhaltungsgröße (Masse des Blutes, Energie)	ρ_{ges} [kg/m ³]	$\rho \cdot c_p$ [J/m ³ K]

- c) Da stationäre Verhältnisse vorliegen, ist $\frac{\partial \xi_B}{\partial t} = 0$ zu setzen. Da zur Lösung der Aufgabe der Bereich $r > r_F$ betrachtet wird und es in diesem Bereich keine Quellen gibt, gilt $S = 0$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial r} \right) \quad (5.12)$$

Durch Integration erhält man

$$\frac{\partial \xi_B}{\partial r} = \frac{c_1}{r^2} \quad \text{und} \quad \xi_B = -\frac{c_1}{r} + c_2 \quad (5.13)$$

Mit dem 1. Fickschen Gesetz, formuliert für die Haut des Fisches (Zustand F),

$$\dot{m}_B = -4\pi r_F^2 \cdot \rho_{ges} \cdot D_{B,W} \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial r} \Big|_{r=r_F} \quad (5.14)$$

und den Randbedingungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_B}{\partial r} \Big|_{r=r_F} &= -\frac{\dot{m}_B}{4\pi r_F^2 \cdot \rho_{\text{ges}} \cdot D_{B,W}} \\ &= \frac{c_1}{r_F^2} \quad \xi_B(r=r_F) = \xi_F = -\frac{c_1}{r_F} + c_2\end{aligned}\quad (5.15)$$

Erhält man

$$c_1 = \frac{\dot{m}_B}{4\pi \cdot \rho_{\text{ges}} \cdot D_{B,W}} \quad \text{und} \quad c_2 = \xi_F - \frac{\dot{m}_B}{4\pi r_F \cdot \rho_{\text{ges}} \cdot D_{B,W}} \quad (5.16)$$

und damit

$$\xi = \xi_F + B \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_F} \right) \quad \text{mit} \quad B \equiv \frac{\dot{m}_B}{4\pi \cdot \rho_{\text{ges}} \cdot D_{B,W}} \quad (5.17)$$

Mit $\xi(r_K) = \xi_K$ erhält man schließlich für den gesuchten Sicherheitsabstand

$$r_K = \frac{1}{(\xi_K - \xi_F) B^{-1} + r_F^{-1}} \quad (5.18)$$

d) Vorgehen:

Da die kritischen Werte ξ_K und r_K für Serin gelten und nicht für Blut, erfolgt zunächst die Berechnung der Serinkonzentration an der Haut des Fisches ξ_{SF} durch Berechnung der Diffusion von Serin in Wasser. In allen bereits abgeleiteten Formeln muss deshalb Blut durch Serin ersetzt werden. Die Diffusion der restlichen Blutkomponenten im Wasser ist nicht relevant, da sie sich laut Aufgabenstellung selbst wie Wasser verhalten. Diffusion des Serins innerhalb des Blutes spielt ebenfalls keine Rolle, da das Serin homogen im Blut verteilt ist.

$$\xi_{SF} = \xi - B \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_F} \right) \quad (5.19)$$

$$B = \frac{\xi_S \dot{m}_B}{4\pi \cdot \rho_{ges} \cdot D_{B,W}} = \frac{1,05 \cdot 10^{-4} \text{ kg}_S/\text{kg}_B \cdot 2,78 \cdot 10^{-6} \text{ kg}_B/\text{s}}{4\pi \cdot 999 \text{ kg/m}^3 \cdot 1,78 \cdot 10^{-7} \text{ kg}_S\text{m/kg}} \\ = 1,302 \cdot 10^{-7} \text{ kg}_S\text{m/kg} \quad (5.20)$$

$$\xi_{SF} = \xi_K - B \left(\frac{1}{r_K} - \frac{1}{r_F} \right) \\ = 1,05 \cdot 10^{-15} \text{ kg}_S/\text{kg} - 1,302 \cdot 10^{-7} \text{ kg}_S\text{m/kg} \cdot \left(\frac{1}{400 \text{ m}} - \frac{1}{0,106 \text{ m}} \right) \\ = 1,228 \cdot 10^{-6} \text{ kg}_S/\text{kg} \quad (5.21)$$

Berechnung des gesuchten Blutanteils aus dem Serinanteil:

$$\xi_F = \frac{\xi_{SF}}{\xi_S} = \frac{1,228 \cdot 10^{-6} \text{ kg}_S/\text{kg}}{1,05 \cdot 10^{-4} \text{ kg}_S/\text{kg}_B} = 0,0117 \text{ kg}_B/\text{kg} \quad (5.22)$$

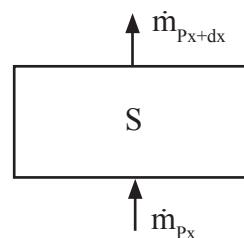
5.5. Noch kritischerer Sprengstoff

1. Problemart

Eindimensionale stationäre Diffusion mit Quellen.

2. Lösung

a) Bilanz am differentiellen Volumenelement:



$$0 = \dot{m}_{P,x} - \dot{m}_{P,x+dx} + S \cdot dV \quad (5.23)$$

$$0 = -\frac{d\dot{m}_{P,x}}{dx} dx + S \cdot A \cdot dx \quad (5.24)$$

$$\dot{m}_{P,x} = -\rho \cdot D \cdot A \cdot \frac{d\xi_P}{dx} \quad (1. \text{ Ficksches Gesetz}) \quad (5.25)$$

$$\Rightarrow 0 = \rho \cdot D \cdot \frac{d^2\xi_P}{dx^2} + S \quad (5.26)$$

Berechnung des Quellterms S :

Das gegebene Temperaturprofil gilt unter der Voraussetzung der temperaturabhängigen Stärke des Quellterms wie in der Aufgabenstellung beschrieben. Demzufolge kann aus dem sich ergebenden Temperaturverlauf auf die lokale Quellstärke geschlossen werden. Durch diese lokale Wärmeproduktion wird jedoch nicht nur die lokale Temperatur festgelegt, sondern auch die Quellstärke des Produktes P in der Stoffbilanz, die über die Reaktionsenthalpie direkt zur Wärmeproduktion korreliert ist:

$$S = \frac{\dot{\Phi}'''}{\Delta h} = \frac{\dot{\Phi}_{\text{U}}'''}{\Delta h} (1 + \gamma(T - T_{\text{U}})) \\ = \frac{\dot{\Phi}_{\text{U}}'''}{\Delta h} \cdot \frac{\cos(m \cdot x)}{\cos(m \cdot s) - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot m \cdot \sin(m \cdot s)} \quad (5.27)$$

Einsetzen in DGL:

$$\Rightarrow \frac{d^2\xi_{\text{P}}}{dx^2} = -\frac{\dot{\Phi}_{\text{U}}'''}{\Delta h} \cdot \frac{1}{\cos(m \cdot s) - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot m \cdot \sin(m \cdot s)} \cdot \frac{1}{\rho \cdot D} \cdot \cos(m \cdot x) \\ \equiv \underbrace{B}_{\text{konst.}} \cdot \cos(m \cdot x) \quad (5.28)$$

Integration der DGL:

$$\Rightarrow \frac{d\xi_{\text{P}}}{dx} = \frac{B}{m} \cdot \sin(m \cdot x) + c_1 \quad (5.29)$$

$$\Rightarrow \xi_{\text{P}} = -\frac{B}{m^2} \cdot \cos(m \cdot x) + c_1 \cdot x + c_2 \quad (5.30)$$

Randbedingungen:

1. Undurchlässiger unterer Metallmantel:

$$\left. \frac{d\xi_{\text{P}}}{dx} \right|_{x=0} = \frac{B}{m} \cdot \sin(m \cdot 0) + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

2. Stoffübergang an der Plattenoberseite:

$$g \cdot \left(\xi_{\text{P}}(x = s) - \xi_{\text{U}} \frac{\rho_{\text{L}}}{\rho} \right) = -\rho D \cdot \left. \frac{d\xi_{\text{P}}}{dx} \right|_{x=s} {}^1$$

¹Eine Anmerkung zu den Massenanteilen in Systemen, die Phasen unterschiedlicher Dichte enthalten wie in diesem Fall Sprengstoff und Luft: Die hier verwendeten ξ_{P} -Werte haben die Einheit $\text{kg}_{\text{P}}/\text{kg}_{\text{ges,SP}}$, wobei der Index ges,SP für die Gesamtmasse des Sprengstoffes inklusive des diffundierenden Produktes steht. (Der Einfluss der lokalen Produktkonzentration auf die Gesamtdichte wird hier vernachlässigt.) Der Massenanteil ξ_{U} muss generell, obwohl er die Produktkonzentration in der Luft beschreibt, von der Einheit $\text{kg}_{\text{P}}/\text{kg}_{\text{ges,L}}$ auf die Einheit $\text{kg}_{\text{P}}/\text{kg}_{\text{ges,SP}}$ umgerechnet werden, da in der zweiten Randbedingung eine Differenz berechnet werden muss. Dies geschieht bei Annahme einer stetigen Konzentrationsfunktion über die Phasengrenze hinweg mit Hilfe des Dichtequotienten $\frac{\rho_{\text{L}}}{\rho}$. Wegen $\xi_{\text{U}} = 0$ kann die Umrechnung hier entfallen.

Da das Reaktionsprodukt im Freistrom nicht vorkommt, gilt $\xi_U = 0$.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow c_2 &= -\frac{\dot{\Phi}_U'''}{\Delta h} \cdot \frac{\cos(m \cdot s) - \frac{\rho \cdot D}{g} \cdot m \cdot \sin(m \cdot s)}{\cos(m \cdot s) - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot m \cdot \sin(m \cdot s)} \cdot \frac{1}{\rho \cdot D} \cdot \frac{1}{m^2} \\
 &= -\frac{B}{m^2} \cdot \cos(m \cdot x) - \dots \\
 &\quad \dots - \frac{\dot{\Phi}_U'''}{\Delta h} \cdot \frac{\cos(m \cdot s) - \frac{\rho \cdot D}{g} \cdot m \cdot \sin(m \cdot s)}{\cos(m \cdot s) - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot m \cdot \sin(m \cdot s)} \cdot \frac{1}{\rho \cdot D} \cdot \frac{1}{m^2} \\
 &= \frac{\dot{\Phi}_U'''}{\Delta h} \cdot \frac{1}{\rho \cdot D} \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \dots \\
 &\quad \dots \cdot \frac{\cos(m \cdot x) - \cos(m \cdot s) + \frac{\rho \cdot D}{g} \cdot m \cdot \sin(m \cdot s)}{\cos(m \cdot s) - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot m \cdot \sin(m \cdot s)} \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

Zahlenwerte:

$$m = \sqrt{\frac{\gamma \cdot \dot{\Phi}_U'''}{\lambda}} = \sqrt{\frac{0,2 \text{ J/K} \cdot 0,3 \text{ W/m}^3}{0,85 \text{ W/mK}}} = 0,2657 \text{ m}^{-1} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \xi_P &= 0,20238 \text{ kg}_P/\text{kg} \cdot \dots \\
 &\quad \dots \cdot \frac{\cos(0,2657 \text{ m}^{-1} \cdot x) - \cos(0,2657 \text{ m}^{-1} \cdot s) + 7,971 \cdot 10^{-4} \cdot \sin(0,2657 \text{ m}^{-1} \cdot s)}{\cos(0,2657 \text{ m}^{-1} \cdot s) - 0,07528 \cdot \sin(0,2657 \text{ m}^{-1} \cdot s)}
 \end{aligned}$$

Da der höchste Produktanteil bei $x = 0$ vorherrscht, muss $\xi_{P,\text{krit}} = 0,001$ an dieser Stelle unterschritten werden, um sicherzustellen, dass der Wert überall in der Platte unterschritten wird.

$$\begin{aligned}
 \xi_P(x = 0) &= 0,001 \\
 &= 0,20238 \text{ kg}_P/\text{kg} \cdot \dots \\
 &\quad \dots \cdot \frac{1 - \cos(0,2657 \text{ m}^{-1} \cdot s_{\max}) + 7,971 \cdot 10^{-4} \cdot \sin(0,2657 \text{ m}^{-1} \cdot s_{\max})}{\cos(0,2657 \text{ m}^{-1} \cdot s_{\max}) - 0,07528 \cdot \sin(0,2657 \text{ m}^{-1} \cdot s_{\max})}
 \end{aligned}$$

s_{\max} kann iterativ ermittelt werden:

$$s_{\max} = 0,373 \text{ m} \quad (5.33)$$

5.6. Perowskite

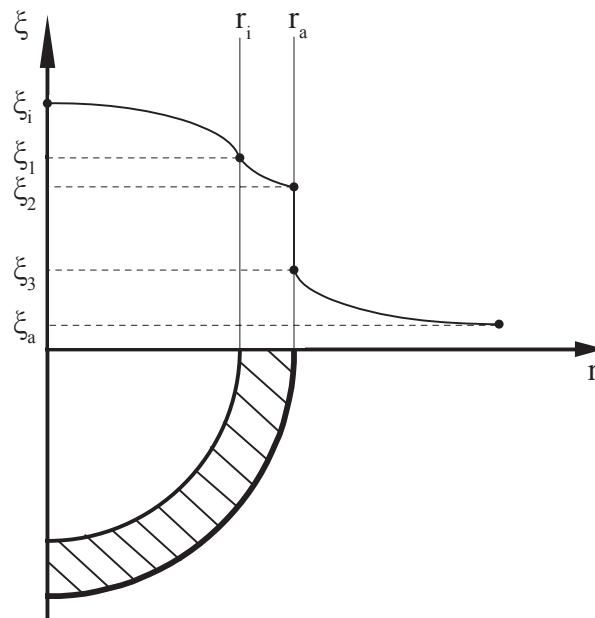
1. Problemart

Stofftransport durch eine Rohrwand: Konvektiver Transport innen und außen, Diffusion in einer gekrümmten Rohrwand, Transportkoeffizient an einer Schicht unbekannter Dicke, Anwendung der Stefankorrektur an einer halbdurchlässigen Oberfläche.

2. Lösung

- a) Da das Rohr kurz ist, kann die Abhängigkeit der Massenanteile von der axialen Koordinate vernachlässigt werden. Der Transport des Sauerstoffs in radialer Richtung wird durch vier separate Faktoren bestimmt:

Mechanismus	Beschreibung durch
Konvektiver Transport an der Rohrinnenseite	g_i
Diffusion in der gekrümmten Rohrwand	$\rho \cdot D$ bzw. $\rho \cdot D^{\text{St}}$
Transport durch die Perowskitschicht (Dicke unbekannt)	k_p
Konvektiver Transport an der Rohraußenseite	g_a



Zunächst einmal gilt also:

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_{O_2} &= A_i \cdot g_i \cdot (\xi_i - \xi_1) && \text{(Innenseite)} \\
 &= A_i \cdot k_T \cdot (\xi_1 - \xi_2) && \text{(Rohrwand)} \\
 &= A_a \cdot k_p \cdot (\xi_2 - \xi_3) && \text{(Perowskite)} \\
 &= A_a \cdot g_a \cdot (\xi_3 - \xi_a) = A_a \cdot g_a \cdot \left(\xi_3 - \xi_a^* \cdot \frac{\rho_{RG}}{\rho_L} \right) && \text{(Außenseite)}
 \end{aligned}$$

$$A_i = 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L$$

$$A_a = 2 \cdot \pi \cdot r_a \cdot L$$

Zu klären ist hierbei die genaue Definition des effektiven Transportkoeffizienten k_T in der Rohrwand in Abhängigkeit von ρ und D . Hierzu muss die Differentialgleichung zum stationären Stofftransport ohne Quellen in zylindrischen Koordinaten betrachtet werden (analog zu Gleichung 3.7b im Vorlesungsumdruck; hier stationär, keine axiale Abhängigkeit aufgrund des kurzen Rohres, keine Winkelabhängigkeit, keine Quellen):

$$\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d\xi}{dr} \right) = 0 \quad (5.34)$$

Durch Integration erhält man:

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{c_1}{r} \quad \text{und} \quad \xi = c_1 \cdot \ln r + c_2 \quad (5.35)$$

Das Einsetzen der Randbedingungen führt auf

$$\xi_1 = c_1 \cdot \ln r_i + c_2 \quad (5.36)$$

$$\xi_2 = c_1 \cdot \ln r_a + c_2 \quad (5.37)$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen erhält man:

$$\begin{aligned}\xi_1 - \xi_2 &= c_1 \cdot \ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right) \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)} \\ &\Rightarrow \quad \frac{d\xi}{dr} = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)} \cdot \frac{1}{r}\end{aligned}\quad (5.38)$$

Der diffusive Massenstrom durch die Rohrwand kann nun mit dem 1. Fickschen Gesetz beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\dot{m}_{O_2} &= -A \cdot \rho \cdot D \cdot \frac{d\xi}{dr} = -A_i \cdot \rho \cdot D \cdot \frac{d\xi}{dr} \Big|_{r=r_i} \\ &= -A_i \cdot \rho \cdot D \cdot \frac{\xi_1 - \xi_2}{\ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)} \cdot \frac{1}{r_i} = A_i \cdot k_T \cdot (\xi_1 - \xi_2)\end{aligned}\quad (5.39)$$

$$\Rightarrow k_T = -\frac{\rho \cdot D}{\ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right)} \cdot \frac{1}{r_i} = \frac{\rho \cdot D}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \frac{1}{r_i}\quad (5.40)$$

Die obigen vier Gleichungen zur Beschreibung des Massenstroms können genutzt werden, um durch Elimination der unbekannten Massenanteile ξ_1 , ξ_2 und ξ_3 den Massenstrom in Abhängigkeit von den bekannten Anteilen ξ_i und ξ_a zu ermitteln:

$$\dot{m}_{O_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (\xi_i - \xi_a)}{\frac{1}{g_i \cdot r_i} + \frac{1}{k_T \cdot r_i} + \frac{1}{k_p \cdot r_a} + \frac{1}{g_a \cdot r_a}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (\xi_i - \xi_a)}{\frac{1}{g_i \cdot r_i} + \frac{1}{\rho \cdot D} \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{k_p \cdot r_a} + \frac{1}{g_a \cdot r_a}}\quad (5.41)$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man

$$\dot{m}_{O_2} = 5,206 \cdot 10^{-8} \text{ kg}_{O_2}/\text{s}\quad (5.42)$$

- b) Die Stefankorrektur muss bei halbdurchlässigen Oberflächen berücksichtigt werden. Dies gilt beim vorliegenden Problem in mehrfacher Hinsicht: Die Innenseite der Perowskitschicht ist undurchlässig für den Luftstickstoff, während die Außenseite undurchlässig für das Rauchgas ist. Deshalb

muss die Stefankorrektur sowohl im Hinblick auf den Sauerstofftransport zur Perowskischicht in der Rohrwand als auch auf den Sauerstofftransport von der Perowskischicht ins Rauchgas angewandt werden.

Darüber hinaus ist auch die Innenseite der Rohrwand de facto eine halbdurchlässige Oberfläche: Da der Stickstoff-Nettostrom über diese Grenze im stationären Zustand Null ist, gilt die Stefankorrektur auch hier. Für den gesuchten Sauerstoff-Massenstrom gilt deshalb:

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_{O_2}^{St} &= A_i \cdot g_i \cdot \frac{\xi_i - \xi_1^{St}}{1 - \xi_1^{St}} && \text{(Innenseite)} \\
 &= A_i \cdot k_T^{St} \cdot (\xi_1^{St} - \xi_2^{St}) && \text{(Rohrwand)} \quad k_T^{St} = \frac{\rho \cdot D^{St}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \cdot \frac{1}{r_i} \\
 &= A_a \cdot g_a \cdot \frac{\xi_3^{St} - \xi_a}{1 - \xi_3^{St}} && \text{(Außenseite)}
 \end{aligned}$$

Für den Transport in der Rohrwand ist der Diffusionskoeffizient D^{St} zu verwenden. Eine Korrektur mit Hilfe des Stefanfaktors $\frac{1}{1-\xi}$ wie auf der Innen- und Außenseite ist hier nicht möglich, da keine binäre, sondern ternäre Diffusion (drei Komponenten) vorliegt. Keine dieser drei Komponenten kann mit einer anderen zusammengefasst werden, um so die Vorgänge als binäre Diffusion zu modellieren:

- Der Sauerstoff ist die transportierte Größe.
- Der Stickstoff ist die Größe, die nicht durch die Perowskischicht diffundieren kann und die somit eine Stefankorrektur notwendig macht.
- Das Trägermaterial ist ortsfest und damit nicht von der Stefankorrektur betroffen.

Statt einer vollständigen Elimination der Größen ξ_1^{St} und ξ_3^{St} aus der Gleichungskette bietet sich an, diese teilweise zu eliminieren: In der vor-

ausgegangenen Rechnung werden g_i , k_T und g_a durch $\frac{g_a}{1-\xi_1^{\text{St}}}$, k_T^{St} und $\frac{g_a}{1-\xi_3^{\text{St}}}$ ersetzt. ξ_2^{St} wird wie schon zuvor eliminiert. Analog erhält man:

$$\dot{m}_{O_2}^{\text{St}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (\xi_i - \xi_a)}{\frac{1-\xi_1^{\text{St}}}{g_i \cdot r_i} + \frac{1}{\rho D^{\text{St}}} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) + \frac{1}{k_p \cdot r_a} + \frac{1-\xi_3^{\text{St}}}{g_a \cdot r_a}} \quad (5.43)$$

Mit diesem Ansatz kann der gesuchte Massenstrom iterativ ermittelt werden. Die Berechnung der Massenanteile ξ_1^{St} und ξ_3^{St} erfolgt mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1^{\text{St}} &= \frac{\xi_i - \frac{\dot{m}_{O_2}^{\text{St}}}{g_i \cdot A_i}}{1 - \frac{\dot{m}_{O_2}^{\text{St}}}{g_i \cdot A_i}} \quad \text{und} \quad \xi_3^{\text{St}} = \xi_2^{\text{St}} - \frac{\dot{m}_{O_2}^{\text{St}}}{A_i \cdot k_p} \cdot \frac{r_i}{r_a} \\ \text{mit} \quad \xi_2^{\text{St}} &= \xi_1^{\text{St}} - \frac{\dot{m}_{O_2}^{\text{St}}}{k_T^{\text{St}} \cdot A_i} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Wird als Startwert für den Massenstrom der in a) errechnete Wert verwendet, so verläuft die Iteration wie folgt:

$\dot{m}_{O_2}^{\text{St}} [10^{-8} \text{ kg O}_2/\text{s}]$	$\xi_1^{\text{St}} [\text{kg O}_2/\text{kg}]$	$\xi_2^{\text{St}} [\text{kg O}_2/\text{kg}]$	$\xi_3^{\text{St}} [\text{kg O}_2/\text{kg}]$
$\dot{m}_{O_2} = 5,206$	0,2283	0,1758	0,1206
5,645	0,2280	0,1711	0,1112
5,640	0,2280	0,1711	0,1113
5,640	0,2280	0,1711	0,1113

Aufgrund der relativ hohen Sauerstoffkonzentration im System führt die Vernachlässigung der Stefankorrektur zu einem Fehler von ca. 8 %. Wäre k_p relativ zu den drei verbleibenden, mit der Stefankorrektur behafteten Transportkoeffizienten kleiner, so wäre der Fehler noch größer.

5.7. Geteertes Holz

1. Problemart

Stationärer diffusiver Stofftransport mit verschiedenen Randbedingungen.

2. Lösung

- a) Die radialen Konzentrationsunterschiede innerhalb der Bohrung können vernachlässigt werden, wenn diese wesentlich kleiner sind als die maximale Differenz der Naphthalinkonzentration im Holz. Ein Maß für dieses Verhältnis stellt die Biot-Zahl Bi dar. Diese ist im vorliegenden Fall definiert als:

$$Bi = \frac{g \cdot \frac{d}{2}}{\rho \cdot D_W} \quad (5.45)$$

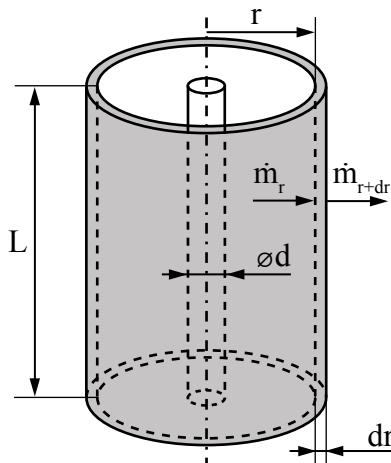
g ist hierbei ein effektiver Stoffübergangskoeffizient, der den Naphthalintransport innerhalb des Holzes (von R nach $\frac{d}{2}$) beschreibt. Als charakteristische Länge ist ein radiales Maß zu wählen und nicht etwa die Dicke der Platte, da durch die Biot-Zahl ja radialer Stofftransport betrachtet wird. Da die maximale ξ -Differenz in der Bohrung zwischen deren Wand und deren Mitte auftritt, muss die charakteristische Länge $\frac{d}{2}$ betragen und nicht etwa d . Der radiale Stofftransport innerhalb der Bohrung wird schließlich durch den Term $\rho \cdot D_W$ beschrieben.

Je größer $\rho \cdot D_W$, desto geringer der radiale Diffusionswiderstand in der Bohrung und desto kleiner die radiale ξ -Differenz in der Bohrung. Je kleiner g , desto größer der Unterschied zwischen ξ an der Stelle $\frac{d}{2}$ und der Stelle R . Bei kleinen Biot-Zahlen kann also die radiale Differenz in der Bohrung gegenüber der im Holz vernachlässigt werden.

Die Größe g ist zunächst unbekannt. Sie muss mit folgendem Ansatz berechnet werden:

$$g \cdot (\xi_H - \xi_{\frac{d}{2}}) = +\rho \cdot D_H \cdot \left. \frac{d\xi}{dr} \right|_{r=\frac{d}{2}} \quad (5.46)$$

Die linke und rechte Seite der Bilanz stellen zwei alternative Formulierungen für den auf die Mantelfläche der Bohrung bezogenen Massenstrom dar, der zu dieser hinfließt. (Links die Definition des Stoffübergangskoeffizienten, rechts das 1. Ficksche Gesetz.) Für die rechte Seite der Gleichung ist die holzseitige Darstellung zu wählen, da der wasserseitige Gradient aus der Massenanteils-Funktion $\xi(x,r)$ berechnet werden müsste, deren Berechnung durch die Vernachlässigung der radialen Abhängigkeit ja gerade vermieden werden soll. Das Ficksche Gesetz ist hier mit einem positiven Vorzeichen anzusetzen, da das Naphthalin in negative Koordinatenrichtung fließt und der Gradient damit positiv ist.



Die Diffusion des Naphthalins im Holz wird beschrieben durch

$$\dot{m}_r - \dot{m}_{r+dr} = 0 \Leftrightarrow \dot{m}_r - \dot{m}_r - \frac{d\dot{m}_r}{dr} dr = 0 \quad (5.47)$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dr} \left(-\rho \cdot D_H \cdot 2\pi r \cdot L \cdot \frac{d\xi}{dr} \right) dr = 0 \quad (5.48)$$

$$\Leftrightarrow \rho \cdot D_H \cdot 2\pi \cdot L \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\xi}{dr} \right) dr = 0 \quad (5.49)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d\xi}{dr} \right) = 0 \quad (5.50)$$

Als axiale Länge wird hier L verwendet, es hätte aber auch ein Δx oder dx angesetzt werden können. Letztendlich spielt das keine Rolle, da laut Aufgabenstellung axiale Diffusion im Holz zu vernachlässigen und der Massenstrom damit unabhängig von x ist. Dies kommt auch darin zum Ausdruck, dass L zuletzt in der Gleichung nicht mehr vorkommt.

Das Ficksche Gesetz muss hier wiederum mit negativem Vorzeichen verwendet werden, da die Taylorreihe in der Bilanz in positiver Koordinatenrichtung entwickelt wird. In der Bilanz bzw. der abgeleiteten DGL spielt es keine Rolle, wo die Bilanzgröße (der Massenstrom) welches Vorzeichen hat, da dies erst durch die Randbedingungen festgelegt wird.

Hieraus folgt:

$$\Rightarrow \frac{d\xi}{dr} = \frac{c_1}{r} \quad (5.51)$$

$$\Rightarrow \xi = c_1 \cdot \ln(r) + c_2 \quad (5.52)$$

Als Randbedingungen werden zwei Massenanteile verwendet, wobei die axiale Koordinate nicht spezifiziert wird:

$$\xi(r = R) = \xi_H \quad (5.53)$$

$$\xi\left(r = \frac{d}{2}\right) = \xi_{\frac{d}{2}} \quad (5.54)$$

Die erste Randbedingung gilt unabhängig von x immer, der Wert $\xi_{\frac{d}{2}}$ stellt einen generischen Massenanteil dar, der bei einem beliebigen x -Wert an der Stelle $r = \frac{d}{2}$ gilt und nicht näher bestimmt wird.

Durch Einsetzen der Randbedingungen erhält man

$$c_1 = \frac{\xi_H - \xi_{\frac{d}{2}}}{\ln\left(\frac{2R}{d}\right)} \quad c_2 = \xi_H - \ln(R) \cdot \frac{\xi_H - \xi_{\frac{d}{2}}}{\ln\left(\frac{2R}{d}\right)} \quad (5.55)$$

Damit folgt für g :

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{\rho \cdot D_H \cdot \left. \frac{d\xi}{dr} \right|_{r=\frac{d}{2}}}{\xi_H - \xi_{\frac{d}{2}}} = \frac{\rho \cdot D_H \cdot \frac{2}{d} \cdot c_1}{\xi_H - c_1 \ln \left(r = \frac{d}{2} \right) + c_2} \\
 &= \frac{\rho \cdot D_H \cdot \frac{2}{d} \cdot \frac{\xi_H - \xi_{\frac{d}{2}}}{\ln \left(\frac{2R}{d} \right)}}{\xi_H - \left(\frac{\xi_H - \xi_{\frac{d}{2}}}{\ln \left(\frac{2R}{d} \right)} \ln \left(\frac{d}{2} \right) + \xi_H - \ln R \cdot \frac{\xi_H - \xi_{\frac{d}{2}}}{\ln \frac{2R}{d}} \right)} \\
 &= \frac{\rho \cdot D_H \cdot \frac{2}{d} \cdot \frac{\xi_H - \xi_{\frac{d}{2}}}{\ln \left(\frac{2R}{d} \right)}}{-\frac{\xi_H - \xi_{\frac{d}{2}}}{\ln \left(\frac{2R}{d} \right)} \ln \left(\frac{d}{2} \right) + \ln(R) \cdot \frac{\xi_H - \xi_{\frac{d}{2}}}{\ln \left(\frac{2R}{d} \right)}} \\
 &= \frac{\rho \cdot D_H \cdot \frac{2}{d}}{-\ln \left(\frac{d}{2} \right) + \ln R} \\
 &= \frac{\rho \cdot D_H \cdot \frac{2}{d}}{\ln \left(\frac{2R}{d} \right)} \cdot \frac{2}{d} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}}{\ln \frac{2 \cdot 0,08 \text{ m}}{0,01 \text{ m}}} \cdot \frac{2}{0,01 \text{ m}} = 2,164 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^2\text{s}
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von jeglichen ξ -Werten, d. h. es war zulässig, $\xi_{\frac{d}{2}}$ nicht zu bestimmen.

Die Biot-Zahl ist

$$\text{Bi} = \frac{g \cdot \frac{d}{2}}{\rho \cdot D_W} = \frac{2,164 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^2\text{s} \cdot \frac{0,01 \text{ m}}{2}}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,546 \cdot 10^{-5} \tag{5.57}$$

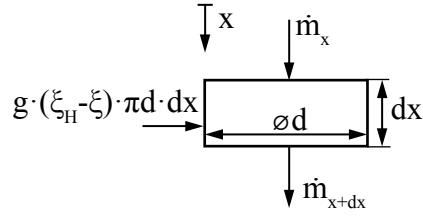
Damit sind radiale Konzentrationsunterschiede innerhalb der Bohrung in der Tat vernachlässigbar.

- b) Der gesuchte Massenstrom setzt sich aus den Massenströmen an der Ober- und Unterseite der Bohrung zusammen. Diese können bestimmt werden durch

$$\dot{m}_o = +\rho \cdot D_W \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{x=0} \tag{5.58}$$

$$\dot{m}_u = k \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot (\xi(x=L) - \xi_w) \tag{5.59}$$

Aus den bereits erläuterten Gründen muss auch hier das Ficksche Gesetz mit positivem Vorzeichen angesetzt werden.



Zur Berechnung ist die Kenntnis des Verlaufes des Naphtalin-Massenanteils innerhalb der Bohrung notwendig. Diese Funktion wird ermittelt durch eine differentielle Bilanz:

$$0 = \dot{m}_x - \dot{m}_{x+dx} + g \cdot (\xi_H - \xi) \cdot \pi d \cdot dx \quad (5.60)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \rho \cdot D_W \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \frac{d^2 \xi}{dx^2} + g \cdot (\xi_H - \xi) \cdot \pi d \quad (5.61)$$

Mit

$$\xi^* = \xi - \xi_H \quad (5.62)$$

erhält man

$$\Rightarrow \frac{d^2 \xi^*}{dx^2} - \underbrace{\frac{4 \cdot g}{\rho \cdot D_W \cdot d}}_{m^2} \cdot \xi^* = 0 \quad (5.63)$$

Diese Differentialgleichung lässt sich lösen mit dem Ansatz

$$\xi^* = c_3 \cdot \sinh(m \cdot x) + c_4 \cdot \cosh(m \cdot x) \quad (5.64)$$

Als Randbedingungen gelten

$$x = 0 : \quad \xi^* = \xi_W - \xi_H = \xi_W^* \quad (5.65)$$

$$x = L : \quad k \cdot (\xi(x = L) - \xi_W) = -\rho \cdot D_W \cdot \frac{d\xi}{dx} \Big|_{x=L} \quad (5.66)$$

$$\Rightarrow k \cdot (\xi^*(x = L) + \xi_H - \xi_W) = -\rho \cdot D_W \cdot \frac{d\xi^*}{dx} \Big|_{x=L} \quad (5.67)$$

Einsetzen ergibt

$$\xi_W^* = c_3 \cdot \sinh(0) + c_4 \cdot \cosh(0) \quad \Rightarrow \quad c_4 = \xi_W^* \quad (5.68)$$

und mit

$$\frac{d\xi^*}{dx} = c_3 \cdot m \cdot \cosh(m \cdot x) + c_4 \cdot m \cdot \sinh(m \cdot x) \quad (5.69)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & k \cdot ([c_3 \cdot \sinh(m \cdot L) + c_4 \cdot \cosh(m \cdot L)] + \xi_H - \xi_W) \\ &= -\rho \cdot D_W \cdot (c_3 \cdot m \cdot \cosh(m \cdot L) + c_4 \cdot m \cdot \sinh(m \cdot L)) \\ \Leftrightarrow & k \cdot (c_3 \cdot \sinh(m \cdot L) + \xi_W^* \cdot \cosh(m \cdot L) - \xi_W^*) \\ &= -\rho \cdot D_W \cdot (c_3 \cdot m \cdot \cosh(m \cdot L) + \xi_W^* \cdot m \cdot \sinh(m \cdot L)) \\ \Rightarrow & c_3 = -\xi_W^* \cdot \frac{\sinh(m \cdot L) + \frac{k}{\rho \cdot D_W \cdot m} [\cosh(m \cdot L) - 1]}{\cosh(m \cdot L) + \frac{k}{\rho \cdot D_W \cdot m} \sinh(m \cdot L)} \end{aligned} \quad (5.70)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \xi^* &= \xi_W^* \cdot \left[\cosh(m \cdot x) - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \frac{\sinh(m \cdot L) + \frac{k}{\rho \cdot D_W \cdot m} [\cosh(m \cdot L) - 1]}{\cosh(m \cdot L) + \frac{k}{\rho \cdot D_W \cdot m} \sinh(m \cdot L)} \cdot \sinh(m \cdot x) \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^*}{dx} &= \xi_W^* \cdot m \cdot \left[\sinh(m \cdot x) - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \frac{\sinh(m \cdot L) + \frac{k}{\rho \cdot D_W \cdot m} [\cosh(m \cdot L) - 1]}{\cosh(m \cdot L) + \frac{k}{\rho \cdot D_W \cdot m} \sinh(m \cdot L)} \cdot \cosh(m \cdot x) \right] \end{aligned} \quad (5.72)$$

und damit

$$\begin{aligned}\dot{m}_o &= -\rho \cdot D_W \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \xi_W^* \cdot m \cdot \dots \\ &\dots \cdot \frac{\sinh(m \cdot L) + \frac{k}{\rho \cdot D_W \cdot m} [\cosh(m \cdot L) - 1]}{\cosh(m \cdot L) + \frac{k}{\rho \cdot D_W \cdot m} \sinh(m \cdot L)}\end{aligned}\quad (5.73)$$

$$\dot{m}_u = k \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot (\xi(x=L) - \xi_W) \quad (5.74)$$

$$= k \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot (\xi^*(x=L) + \xi_H - \xi_W) \quad (5.75)$$

$$= k \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot (\xi^*(x=L) - \xi_W^*) \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned}&= k \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \xi_W^* \cdot (\cosh(m \cdot L) - 1) - k \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \xi_W^* \cdot \dots \\ &\dots \cdot \frac{\sinh(m \cdot L) + \frac{k}{\rho \cdot D_W \cdot m} [\cosh(m \cdot L) - 1]}{\cosh(m \cdot L) + \frac{k}{\rho \cdot D_W \cdot m} \sinh(m \cdot L)} \sinh(m \cdot L)\end{aligned}\quad (5.77)$$

Mit

$$\xi_W^* = \xi_W - \xi_H = -10^{-4} \text{ kg}_N/\text{kg} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned}m &= \sqrt{\frac{4 \cdot g}{\rho \cdot D_W \cdot d}} \\ &= \sqrt{\frac{4 \cdot 2,164 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^2 \text{s}^{-2}}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 0,01 \text{ m}}} \\ &= 1,112 \text{ 1/m}\end{aligned}\quad (5.79)$$

ergibt sich

$$\dot{m}_o = 1,2563 \cdot 10^{-11} \text{ kg}_N/\text{s} \quad (5.80)$$

$$\dot{m}_u = 8,3433 \cdot 10^{-13} \text{ kg}_N/\text{s} \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \dot{m}_o + \dot{m}_u \\ &= 1,3397 \cdot 10^{-11} \text{ kg}_N/\text{s}\end{aligned}\quad (5.82)$$

- c) Um den Massenstrom bei undurchlässiger Unterseite zu berechnen, wird $\dot{m}_u = 0$ gesetzt und in der Formel für \dot{m}_o $k = 0$ gesetzt:

$$\begin{aligned}\dot{m}_o^* &= -\rho \cdot D_W \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \xi_W^* \cdot m \cdot \frac{\sinh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L)} \\ &= -\rho \cdot D_W \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \xi_W^* \cdot m \cdot \tanh(m \cdot L)\end{aligned}\quad (5.83)$$

Auffällig bei dieser Formel ist die Ähnlichkeit zu Gl. 3.33a im Vorlesungsumdruck, die für die Randbedingung eines adiabaten Rippenkopfes hergeleitet wurde, wie sie hier analog auch gilt ($k = 0$). Das negative Vorzeichen ergibt sich aus der Definition von ξ_W^* , bzw. aus der Tatsache, dass im vorliegenden Fall der Naphthalinmassenstrom zum „Fuss der Rippe“ (zur oberen Öffnung) und nicht wie der Wärmestrom in einer Kühlrippe in die entgegengesetzte Richtung fließt.

Der Massenstrom beträgt

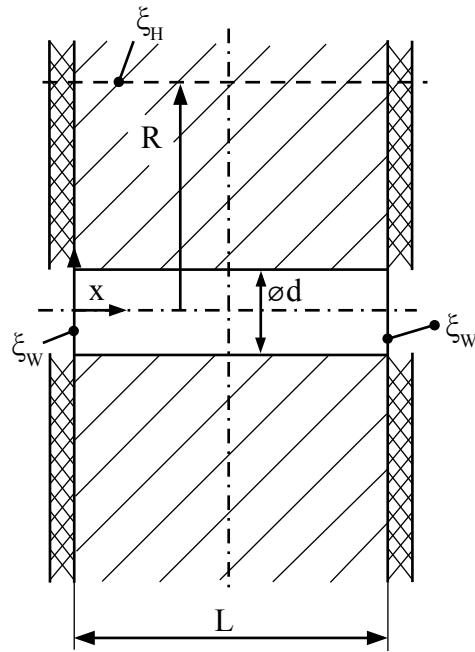
$$\dot{m}_o^* = 1,3377 \cdot 10^{-11} \quad (5.84)$$

Dieses Ergebnis weicht kaum von dem in Aufgabenteil a) ermittelten ab. Der Grund hierfür ist, dass die Verringerung des Gesamtmassenstroms, die sich durch das Wegfallen des Massenstroms an der Unterseite ergibt, **bei den gegebenen Zahlenwerten** fast ausgeglichen wird. Dies geschieht durch das „Aufstauen“ des Naphthalins an der nun undurchdringlichen Unterseite der Bohrung, wodurch der Gradient überall ≥ 0 wird, die Konzentration überall steigt und damit der Gradient an der Oberseite (d.h. der Massenstrom) steigt (s. Aufgabenteil e)).

Die Existenz dieser beiden gegenläufigen Effekte stellt ein weiteres Argument dafür dar, dass bei Rippen die Annahme eines adiabaten Rippenkopfes oft gerechtfertigt ist, zumindest im Hinblick auf die Berechnung des Massenstroms bzw. der Kühlleistung.

- d) Zur Berechnung dieses Falles kann man die in b) abgeleitete Differentialgleichung mit einer veränderten zweiten Randbedingung ($\xi(x = L) = \xi_W$) lösen.

Wesentlich weniger aufwändig ist allerdings die Nutzung der nun vorhandenen Symmetrie:

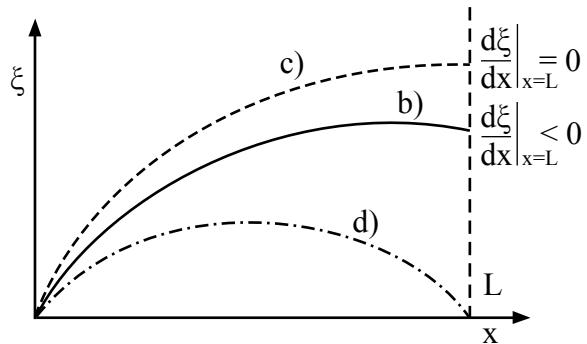


Da nun links und rechts die gleiche Randbedingung gilt und alle relevanten Parameter (ρ , D_w , g , d) unabhängig von x sind, muss das sich einstellende ξ -Profil symmetrisch um $x = \frac{L}{2}$ sein. Auf Grund der Symmetrie herrscht bei $x = \frac{L}{2}$ ein Nullgradient. Die beiden symmetrischen Hälften der Bohrung entsprechen zwei Rippen der Länge $\frac{L}{2}$ mit einer adiabaten Randbedingung am Kopf, über deren Füße ($x = 0$ bzw. $x = L$) jeweils die Hälfte des Gesamtmassenstroms abgegeben wird.

$$\dot{m}_o^{**} = -2 \cdot \rho \cdot D_w \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \xi_w^* \cdot m \cdot \tanh \left(m \cdot \frac{L}{2} \right) = 1,3541 \cdot 10^{-11} \text{ kg}_N/\text{s} \quad (5.85)$$

Auch hier gibt es zwei gegenläufige Effekte, die dazu führen, dass (**in diesem Fall**) der Gesamtmassenstrom nahezu konstant bleibt: Die Verringerung der Rippenlänge und die Tatsache, dass de facto plötzlich zwei Rippen für den Stofftransport zur Verfügung stehen.

e)



5.8. Gaswäscher

1. Problemart

Instationärer konvektiver und diffusiver Stoffübergang in kugelförmigen und ebenen Geometrien.

2. Lösung

- a) Die Endgeschwindigkeit kann durch eine Kräftebilanz am Tropfen berechnet werden. Für den Strömungswiderstand ist dabei die gesuchte Geschwindigkeit relativ zur Gasphase maßgeblich:

$$0 \stackrel{!}{=} m_T \cdot a = F_G - F_W = m_{T,\text{eff}} \cdot g_E - c_W \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_G \cdot v_T^2 \quad (5.86)$$

$$\Leftrightarrow c_W \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_G \cdot v_T^2 = (\rho_T - \rho_G) \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d^3 \cdot g_E \quad (5.87)$$

$$\Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{d \cdot g_E}{c_W} \cdot \frac{\rho_T - \rho_G}{\rho_G}} \quad (5.88)$$

Damit ergibt sich:

$$v_T = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{10^{-3} \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,4} \cdot \frac{1020 \text{ kg/m}^3 - 1,86 \text{ kg/m}^3}{1,86 \text{ kg/m}^3}} = 4,24 \text{ m/s} \quad (5.89)$$

- b) Der Übergang des CO₂ vom Gas in die flüssige Phase des Tropfens wird grundsätzlich sowohl von Konvektionseffekten außerhalb als auch von der Diffusion innerhalb des Tropfens bestimmt. Es handelt sich hierbei um ein instationäres eindimensionales Problem in Kugelkoordinaten, für das im Vorlesungsumdruck keine analytische Lösung vorgestellt wird. Es ist deshalb ein Diagramm nach Heisler zu verwenden. Relevant ist hierbei Bild 3.35 („Wärmeverlust einer Kugel“). Dieses Diagramm kann aufgrund der Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung auch für den CO₂-Transport am Tropfen verwendet werden. Das unterschiedliche Vorzeichen (Aufnahme statt Verlust) spielt hierbei keine Rolle, da das Diagramm nur

Aufschluss über den relativen Fortschritt eines Ausgleichsprozesses gibt, wie er in beiden Fällen vorliegt. Das Vorzeichen wird dabei anderweitig, nämlich durch die unterschiedlichen Potenziale ξ bzw. T an jeweils zwei Orten bestimmt.

Wieviel CO₂ bis zum Erreichen des Sumpfes übertragen worden ist, hängt von der Dauer des Falls und von der Qualität des konvektiven und diffusiven Stoffübergangs ab. Beschrieben wird dies durch die Fourier- bzw. die Biot-Zahl:

$$Fo = \frac{D_T \cdot t}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad Bi = \frac{g \cdot \frac{d}{2}}{\rho_T \cdot D_T} \cdot \frac{\rho_T}{\rho_G} = \frac{g \cdot \frac{d}{2}}{\rho_G \cdot D_T}^2 \quad (5.90)$$

²Die herkömmliche Schreibweise der Biot-Zahl muss hier mit dem Faktor $\frac{\rho_T}{\rho_G}$ multipliziert werden. Die Begründung lautet, dass Bi ohne diesen Korrekturfaktor nicht dimensionslos wäre, sondern die Einheit $\frac{k_{G,G}}{k_{G,T}}$ hätte. Das wiederum würde bedeuten, dass die Ähnlichkeitstheorie nicht anwendbar wäre.

Die Notwendigkeit der Korrektur wird deutlich, wenn man analog zur Herleitung der Biot-Zahl im Zusammenhang mit Wärmeübertragung in Kapitel 3.5.3 die gas- und tropfenseitige CO₂-Bilanz aufstellt:

$$g \cdot (\xi_{CO_2,G,W} - \xi_\infty) = -\rho_T \cdot D_T \frac{d\xi_{CO_2,T}}{dr} \Big|_W$$

Da die Masse des CO₂ in der Gasphase auf die des Gases, in der flüssigen Phase jedoch auf die des Tropfens bezogen wird, gilt bei Annahme eines stetigen Konzentrationsverlaufs an der Phasengrenze ($h = 1$):

$$\xi_{CO_2,G} \cdot \rho_G = \xi_{CO_2,T} \cdot \rho_T$$

und damit

$$\begin{aligned} g \cdot (\xi_{CO_2,G,W} - \xi_\infty) &= -\rho_T \cdot D_T \cdot \frac{d \left(\frac{\rho_G}{\rho_T} \cdot \xi_{CO_2,G,W} \right)}{dr} \\ &= -\rho_T \cdot D_T \cdot \frac{d \left(\frac{\rho_G}{\rho_T} \cdot \xi_{CO_2,G,W} - \underbrace{\frac{\rho_G}{\rho_T} \cdot \xi_\infty}_{konst.} \right)}{dr} \end{aligned}$$

Mit $r \equiv \frac{2 \cdot r}{d}$ und $\xi_W^* \equiv \frac{\xi_{CO_2,G,W} - \xi_\infty}{\Delta \xi}$ erhält man:

$$\frac{d\xi_W^*}{dr^*} = - \underbrace{\frac{g \cdot \frac{d}{2}}{\rho_T \cdot D_T} \cdot \frac{\rho_T}{\rho_G}}_{Bi} \cdot \xi_W^*$$

Während die Fourier-Zahl die Dauer des Falls und damit die Abhängigkeit der CO₂-Masse vom zeitlichen Fortschritt berücksichtigt, stellt die Biot-Zahl einen Maßstab für die Stärke von konvektivem und diffusivem Stofftransport **relativ zueinander** dar. Die **absolute** Güte des Stofftransports ist damit noch nicht beschrieben. Dies geschieht wiederum durch die Fourier-Zahl, genauer gesagt durch den darin enthaltenen Parameter D_T .

Als charakteristische Länge in der Fourier-Zahl ist laut der Definition der Parameter Bi und Bi² · Fo im Diagramm der Radius und nicht der Durchmesser des Tropfens zu wählen. Der Grund ist, dass der Radius der maximalen Eindringtiefe des CO₂ entspricht. Zur Berechnung von Fo wird zunächst die Falldauer des Tropfens benötigt. Relevant ist hierbei die Geschwindigkeit im Absolutsystem.

$$t = \frac{H}{\nu_T - \nu_\infty} = \frac{0,2 \text{ m}}{(4,24 - 0,05) \text{ m/s}} = 0,0477 \text{ s} \quad (5.91)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Fo} = \frac{10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 0,0477 \text{ s}}{\left(\frac{10^{-3}}{2} \text{ m}\right)^2} = 1,909 \quad (5.92)$$

Zur Berechnung der Biot-Zahl ist die Kenntnis des Stoffübergangskoeffizienten g notwendig. Dieser ergibt sich für die gegebene Geometrie und die Strömungsverhältnisse aus einer Beziehung für die Sherwood-Zahl Sh:

$$\begin{aligned} \text{Sh} &= \frac{g \cdot d}{\rho_G \cdot D_G} \\ &= 2 + \left(0,4 \cdot \text{Re}_d^{\frac{1}{2}} + 0,06 \cdot \text{Re}_d^{\frac{2}{3}}\right) \text{Sc}^{0,4} \cdot \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_W}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{WÜK.11})^3 \end{aligned} \quad (5.93)$$

³Im Allgemeinen muss der Einfluss des CO₂-Massenanteilsgradienten in der Tropfengrenzschicht auf die Kennzahlen Re, Sc und Sh berücksichtigt werden, indem über die Grenzschicht arithmetisch gemittelt wird (zwischen Zustand und Zustand an der Wand).

$$\rho = \frac{\rho_\infty + \rho_W}{2} \quad \rho_x = \frac{p_{\text{ges},x} - p_{\text{CO}_2,x}}{R_{\text{Eth}} T} + \frac{p_{\text{CO}_2,x}}{T_{\text{CO}_2} T} \quad x = \infty, W$$

Da das Problem isotherm ist und der Einfluss der Änderung der CO₂-Konzentration in der Grenzschicht auf die Viskosität vernachlässigbar ist, gilt $\eta_\infty = \eta_W$. Re und Sc sind definiert als

$$Re_d = \frac{\nu_T \cdot d}{\nu} = \frac{4,24 \text{ m/s} \cdot 10^{-3} \text{ m}}{4,63 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 915,8 \quad (5.94)$$

$$Sc = \frac{\nu}{D_G} = \frac{4,63 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}{5,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 0,857 \quad (5.95)$$

Sowohl Re_d als auch Sc erfüllen die Voraussetzungen für die Anwendung von WÜK.11. Damit gilt:

$$Sh = 2 + \left(0,4 \cdot 915,8^{\frac{1}{2}} + 0,06 \cdot 915,8^{\frac{2}{3}} \right) 0,857^{0,4} = 18,70 \quad (5.96)$$

$$g = \frac{Sh \cdot \rho_G \cdot D_G}{d} = \frac{18,70 \cdot 1,86 \text{ kg}_G/\text{m}^3 \cdot 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}{10^{-3} \text{ m}} = 0,188 \text{ kg}_G/\text{m}^2\text{s} \quad (5.97)$$

$$Bi = \frac{g \cdot \frac{d}{2}}{\rho_G \cdot D_T} = \frac{0,188 \text{ kg}_G/\text{m}^2\text{s} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}}{1,86 \text{ kg}_G/\text{m}^3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 5,05 \quad (5.98)$$

Der Einfluss kommt über ρ_G zum Tragen, das auch in den Definitionen von Re und Sc vorkommt ($\nu = \frac{\eta}{\rho}$). Im vorliegenden Fall sind konstante Werte für ρ_G und ν vorgegeben. Der Einfluss der Gaszusammensetzung kann hier aus zwei Gründen vernachlässigt werden:

1. Der maximale CO₂-Massenanteil im System beträgt nur 5 %, das maximale $\Delta\xi_{CO_2}$ zwischen den Zuständen ∞ und W beträgt deshalb auch nur 0,05. Wegen

$$p_{CO_2,x} = \frac{1}{1 + \frac{1 - \xi_{CO_2,x}}{\xi_{CO_2,x}} \frac{T_{Eth}}{T_{CO_2}}} p_{ges,x}$$

kann es deshalb auch nur zu kleinen Änderungen der Partialdrücke $p_{ges,x} - p_{CO_2,x}$ und $p_{CO_2,x}$ relativ zum Gesamtdruck $p_{ges,x}$ kommen.

2. Die Molmassen von Ethanol (46 g/mol) und CO₂ (44 g/mol) unterscheiden sich nur geringfügig. Demzufolge unterscheiden sich auch R_{Eth} und R_{CO_2} nur geringfügig. Damit ist der Einfluss der Gaszusammensetzung auf die Dichte grundsätzlich begrenzt:

$$\lim_{R_{CO_2} \rightarrow R_{Eth}} \frac{\rho_\infty + \rho_W}{2} = \frac{p_{ges,\infty}}{R_{Eth} \cdot T} = \frac{p_{ges,W}}{R_{Eth} \cdot T} = \rho \neq \rho(\xi_{CO_2})$$

Die Biot-Zahl ist im vorliegenden Fall ca. 5. Damit ist die Änderung von ξ weder im Gas noch im Tropfen vernachlässigbar. Für den Parameter auf der Abszisse von Bild. 3.35 gilt:

$$Bi^2 \cdot Fo = 5,05^2 \cdot 1,909 = 48,7 \quad (5.99)$$

Für die gegebene Kombination von Bi und Fo ergibt sich aus Bild 3.35 $\frac{Q}{Q_0} = 1$. Das bedeutet, dass in der gegebenen Zeit die Wärme, die überhaupt übertragen werden kann, auch in guter Näherung vollständig übertragen wird. Auf die Stoffübertragung bezogen heißt das, dass die gesamte Masse, die aufgrund der Randbedingungen übertragen werden kann, näherungsweise auch übertragen wird ($\frac{m}{m_0} = 1$). Zu klären ist hierbei allerdings noch die Definition von m_0 .

Im Extremfall einer unendlich langen Falldauer und bei Annahme eines stetigen Konzentrationsverlaufs an der Phasengrenze würde der Ausgleichsprozess, der dem Stoffdurchgang zugrunde liegt, einen Endzustand erreichen, der dadurch gekennzeichnet ist, dass im Tropfen pro Volumen genau so viel CO₂ vorhanden ist wie im Gas (wegen $h = 1$). Das heißt aber nicht, dass die Massenanteile ξ im Gas und im Tropfen gleich sind, denn in beiden Fällen wird die CO₂-Masse ja auf unterschiedliche Gesamtmasse (die des Gases und die des Tropfens) bezogen. Die des Gases ist die Summe aus CO₂- und Ethanolmasse, die des Tropfens die Summe aus CO₂- und Lösungsmittelmasse.

Der zweite Hauptsatz besagt unter unseren Annahmen, dass im thermodynamischen Gleichgewicht bei $h = 1$ die Konzentrationen c , also die Anzahl der **Moleküle pro Volumeneinheit** überall dieselbe sein müssen. Damit gilt

$$c_{\text{CO}_2,\text{G}} \Big|_{t \rightarrow \infty} = c_{\text{CO}_2,\text{T}} \Big|_{t \rightarrow \infty} \quad \left[\frac{\text{mol}_{\text{CO}_2}}{\text{m}^3} \right] \quad (5.100)$$

$$\Rightarrow M_{\text{CO}_2} \cdot c_{\text{CO}_2,\text{G}} \Big|_{t \rightarrow \infty} = M_{\text{CO}_2} \cdot c_{\text{CO}_2,\text{T}} \Big|_{t \rightarrow \infty} \quad \left[\frac{\text{kg}_{\text{CO}_2}}{\text{m}^3} \right] \quad (5.101)$$

$$\Leftrightarrow \rho_{\text{CO}_2,\text{G}} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \rho_{\text{CO}_2,\text{T}} \Big|_{t \rightarrow \infty} \quad (5.102)$$

$$\Leftrightarrow \rho_{\text{G}} \cdot \xi_{\text{CO}_2,\text{G}} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \rho_{\text{T}} \cdot \xi_{\text{CO}_2,\text{T}} \Big|_{t \rightarrow \infty} \quad (5.103)$$

$$\Leftrightarrow \xi_{\text{CO}_2,\text{T}} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\rho_{\text{G}}}{\rho_{\text{T}}} \cdot \xi_{\text{CO}_2,\text{G}} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\rho_{\text{G}}}{\rho_{\text{T}}} \cdot \xi_{\infty} \quad (5.104)$$

Die Masse des nach unendlich langer Zeit im Tropfen enthaltenen CO₂ ist deshalb definiert als

$$\begin{aligned} m_{\text{CO}_2,\text{T}} \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \xi_{\text{CO}_2,\text{T}} \Big|_{t \rightarrow \infty} \cdot m_{\text{T}} \\ &= \frac{\rho_{\text{G}}}{\rho_{\text{T}}} \cdot \xi_{\infty} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d^3 \cdot \rho_{\text{T}} = \rho_{\text{G}} \cdot \xi_{\infty} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d^3. \end{aligned}$$

Wegen

$$m_{\text{CO}_2,\text{T}} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0$$

gilt:

$$\begin{aligned} m_0 &= m_{\text{CO}_2,\text{T}} \Big|_{t \rightarrow \infty} - m_{\text{CO}_2,\text{T}} \Big|_{t=0} = \rho_{\text{G}} \cdot \xi_{\infty} \cdot \frac{\pi}{6} d^3 \\ m &= m_0 = 1,86 \text{ kg}_{\text{G}}/\text{m}^3 \cdot 0,05 \text{ kg}_{\text{CO}_2}/\text{kg}_{\text{G}} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (10^{-3} \text{ m})^3 \\ &= 4,87 \cdot 10^{-11} \text{ kg}_{\text{CO}_2} \end{aligned}$$

- c) Da der Sumpf tief ist, kann das Lösungsmittel als halbunendlicher Körper angesehen werden. Die CO₂-Konzentration an der Oberfläche ist unbekannt und ändert sich im Verlauf der Zeit. Damit ist der Stoffübergangs-

widerstand im Gas nicht vernachlässigbar. Es gilt Gleichung 3.66 nach Schneider:

$$\frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\infty,S} - \xi_0} = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{4 \cdot \text{Fo}}} \right) - \exp \left(\text{Bi} + \text{Bi}^2 \cdot \text{Fo} \right) \cdot \dots \\ \dots \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{4 \cdot \text{Fo}}} + \sqrt{\text{Fo}} \text{Bi} \right) \right] \quad (5.105)$$

Der Term auf der linken Seite von Gleichung 5.105 beschreibt eine Differenz von Massenanteilen **im Sumpf**, bezogen auf die maximale **im Sumpf** mögliche Differenz von Massenanteilen $\xi_{\infty,S} - \xi_0$. Bei dem Wert $\xi_{\infty,S}$ handelt es sich nicht um den Wert ξ_{∞} im Gas-Freistrom, sondern um den Wert, der sich an der Innenseite der Phasengrenze (also im Sumpf) einstellen würde, wenn an deren Außenseite (also gasseitig) ξ_{∞} herrschen würde (bei $g_0 \rightarrow \infty$). Es gilt also $\xi_{\infty,S} = \frac{\rho_G}{\rho_T} \cdot \xi_{\infty}$.

$$\text{Fo} = \frac{D_T \cdot t}{x^2} = \frac{10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \cdot 10 \text{ s}}{(0,005 \text{ m})^2} = 4 \quad (5.106)$$

$$\text{Bi} = \frac{g_0 \cdot x}{\rho_T \cdot D_T} \cdot \frac{\rho_T}{\rho_G} \\ = \frac{g_0 \cdot x}{\rho_G \cdot D_T} = \frac{0,0032 \text{ kg}_G/\text{m}^2\text{s} \cdot 0,005 \text{ m}}{1,86 \text{ kg}_G/\text{m}^3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 0,861 \quad (5.107)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \text{Fo}}} = 0,25 \Rightarrow \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{4 \cdot \text{Fo}}} \right) = 0,276 \quad (5.108)$$

$$\text{Bi} + \text{Bi}^2 \cdot \text{Fo} = 3,8256 \quad (5.109)$$

$$\sqrt{\text{Fo}} \text{Bi} = 1,72184 \Rightarrow \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{4 \cdot \text{Fo}}} + \sqrt{\text{Fo}} \text{Bi} \right) = 0,9944 \quad (5.110)$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_S - \xi_0}{\frac{\rho_G}{\rho_T} \xi_{\infty} - \xi_0} = 1 - 0,276 - \exp(3,8256) \cdot [1 - 0,9944] = 0,467 \quad (5.111)$$

$$\Leftrightarrow \xi_S = 4,791 \cdot 10^{-5} \text{ kg}_{\text{CO}_2}/\text{kg}_T \quad (5.112)$$

Teil III.

Ergebnisse

Kapitel 1.

Ergebnisse Wärmestrahlung

1.1. Sonnenkollektor

- a) $T_G = 24^\circ\text{C}$
- b) $\dot{q}_{\text{Nutz}}'' = 522 \text{ W/m}^2$
- c) $\dot{q}_{\text{Nutz},0}'' = 303 \text{ W/m}^2$

1.2. Flächenhelligkeiten & Energiebilanzen

- a)
$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= A_1 \cdot \sigma T_1^4 \\ \dot{Q}_2 &= A_2 \cdot \sigma T_2^4 \cdot \varepsilon_2 + \dot{Q}_1 \Phi_{12} \rho_2\end{aligned}$$
- b)
$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= A_1 \sigma T_1^4 \\ \dot{Q}_{2\text{Li}} &= A_2 \cdot \sigma T_2^4 \cdot \varepsilon_2 + \dot{Q}_1 \Phi_{12\text{Li}} \rho_2 + \dot{Q}_3 \Phi_{32\text{Re}} \tau_2 \\ \dot{Q}_{2\text{Re}} &= A_2 \cdot \sigma T_2^4 \cdot \varepsilon_2 + \dot{Q}_1 \Phi_{12\text{Li}} \tau_2 + \dot{Q}_3 \Phi_{32\text{Re}} \rho_2 \\ \dot{Q}_3 &= A_3 \sigma T_3^4\end{aligned}$$

äußere Energiebilanz: $\dot{Q}_1 \Phi_{12\text{Li}} + \dot{Q}_3 \Phi_{32\text{Re}} - \dot{Q}_{2\text{Li}} - \dot{Q}_{2\text{Re}} = 0$

innere Energiebilanz: $\dot{Q}_1 \Phi_{12\text{Li}} \alpha_2 + \dot{Q}_3 \Phi_{32\text{Re}} \alpha_2 - 2 \cdot A_2 \cdot \sigma T_2^4 \varepsilon_2 = 0$
- c)
$$\begin{aligned}\dot{Q}_{1\text{Re}} &= A_1 \sigma T_1^4 \varepsilon_1 + \dot{Q}_2 \Phi_{21\text{Li}} \tau_1 \\ \dot{Q}_{1\text{Li}} &= A_1 \sigma T_1^4 \varepsilon_1 + \dot{Q}_2 \Phi_{21\text{Li}} \rho_1 \\ \dot{Q}_2 &= \frac{\epsilon_2 \sigma T_2^4 A_2 + \rho_2 \dot{Q}_{1\text{Li}} \phi_{12}}{1 - \rho \phi_{22}}\end{aligned}$$

Halbkugel:

$$\text{äußere Energiebilanz: } \dot{Q}_{1\text{Li}}\Phi_{1\text{Li}2} + \dot{Q}_2\Phi_{22} - \dot{Q}_2 = 0$$

$$\text{innere Energiebilanz: } \dot{Q}_{1\text{Li}}\Phi_{1\text{Li}2}\alpha_2 + \dot{Q}_2\Phi_{22}\alpha_2 - A_2 \cdot \sigma T_2^4 \varepsilon_2 = 0$$

Platte:

$$\text{äußere Energiebilanz: } \dot{Q}_2\Phi_{21\text{Li}} - \dot{Q}_{1\text{Li}} - \dot{Q}_{1\text{Re}} = 0$$

$$\text{innere Energiebilanz: } \dot{Q}_2\Phi_{21\text{Li}}\alpha_1 - 2 \cdot A_1 \cdot \sigma T_1^4 \varepsilon = 0$$

1.3. Kugelförmige, evakuierte Glühlampe

a) $T_F = 3092 \text{ K} \stackrel{\wedge}{=} 2819^\circ\text{C}$

b) $\dot{Q}_{\text{el}} = 52 \text{ W}$

c) $\lambda_{\max} = \frac{2898}{T_F} = 0,94 \mu\text{m}$

d) $T_F = 3122 \text{ K} \stackrel{\wedge}{=} 2849^\circ\text{C}$

$\dot{Q}_{\text{el}} = 54 \text{ W}$

1.4. Strahlung in einem keilförmigen Spalt

a) $\Phi_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Phi_{1\ddot{O}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Phi_{21} = \Phi_{2\ddot{O}} = \frac{1}{2}$$

b) $\dot{q}'_{1\dot{V}} = \dot{q}'_{\ddot{O}\dot{V}} = 11 \text{ kW/m}$

c) $T_2 = 840 \text{ K}$

1.5. Feuerfester Bleitiegel

- a) $\dot{Q}_K = 2,1 \text{ W}$
- b) $\dot{Q}_{K,0} = 2,9 \text{ W}$
 $\dot{Q}_{K,\infty} = 1,6 \text{ W}$
- c) $\dot{Q}_{K,0} = 2,9 \text{ W}$
 $t_{E,0} = 0,2 \text{ h}$ } für $h = 0$
 $\dot{Q}_K = 2,1 \text{ W}$
 $t_E = 0,28 \text{ h}$ } für $h = 25 \text{ mm}$
 $\dot{Q}_{K,\infty} = 1,6 \text{ W}$
 $t_{E,\infty} = 0,36 \text{ h}$ } für $h \rightarrow \infty$

1.6. Schwarz strahlender Hohlkörper

$$d_O = 4,4 \text{ cm}$$

1.7. Quarzglasfenster im Ofen

- a) $\dot{q}_{F\epsilon}'' = 13,3 \text{ kW/m}^2$
- b) $\dot{Q}_V = 1,2 \text{ kW}$
- c) $T_F = 798 \text{ K}$

1.8. Netto-Strahlungswärmestrom zwischen zwei Platten

Bitte beachten Sie die Musterlösung zu dieser Aufgabe.

1.9. Deckenheizung

- a) $T_D = 32^\circ\text{C}$
- b) $T_{SW} = 27,4^\circ\text{C}$
 $T_D = 37,6^\circ\text{C}$
- c) $\dot{Q}_H = 5,7 \text{ kW}$
- d) $\dot{Q}_{L,FB} = 1162 \text{ W}$

1.10. Kuppel

- a) $\dot{Q} = 7,4 \text{ kW}$
- b) $T_3 = 359 \text{ K}$

Kapitel 2.

Ergebnisse Wärmeleitung

2.1. Instationäres Temperaturfeld

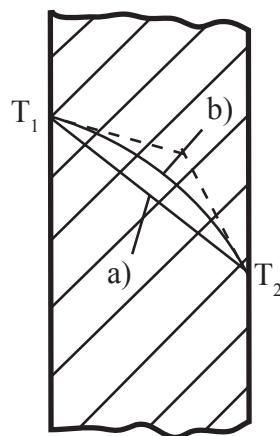
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}''' = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

2.2. Poensgengerät

a) $\frac{\lambda_p}{\lambda_{p,korr}} = 0,81 \text{ bei Beton}$
 $= 0,99 \text{ bei Kork}$

b)	Fehlerursachen	Abhilfemaßnahmen
	Temperaturmessung	$\Delta T > 10 \text{ K}$ $\delta > 10 \text{ mm}$ $\lambda < 2,5 \text{ W/mK}$
	Mehrdimensionales Temperaturfeld	Guter Abgleich der Schutz- und Randheizung $\lambda > 125 \text{ mm}$
	Inhomogenitäten in der Probenplatte	Kontrollproben
	kein Beharrungszustand	Aufzeichnung von Referenztemperaturen

2.3. Temperaturverläufe in ebener Wand



2.4. Zwiebelprinzip

$$\dot{q}_{\text{o.iso}}'' = 1527 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_{\text{m.iso}}'' = 576 \text{ W/m}^2$$

2.5. Feuerofen

Die Wanddicke ist am kleinsten bei der Wahl von Baumaterialien möglichst kleiner Wärmeleitfähigkeit. δ_1 = Stahl, δ_2 = Isolierstein, δ_3 = Feuerstein, δ_4 = Schamottestein.

Fall A) $\delta_1 = 8 \text{ mm}$
 $\delta_2 = 111 \text{ mm}$
 $\delta_4 = 180 \text{ mm}$
 $\delta = 299 \text{ mm}$

Fall B) $\delta_1 = 8 \text{ mm}$
 $\delta_3 = 330 \text{ mm}$
 $\delta = 338 \text{ mm}$

2.6. Wärmer Wohnen

$$\dot{Q}_{V,\text{ges}} = 2946 \text{ W}$$

2.7. Hohlzylinder

a) Siehe Musterlösung zu dieser Aufgabe

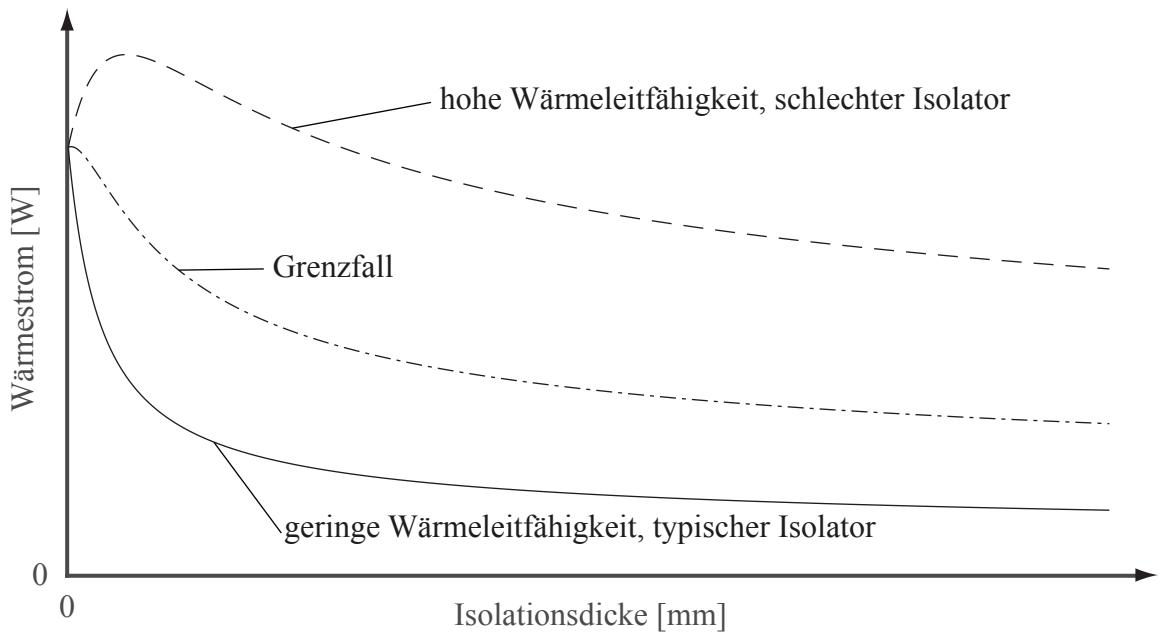
b) $T^2 + 2 \cdot (T - T_i) \cdot \left(\frac{1}{\gamma} - T_0\right) - T_i^2 + \dots$
 $\dots \frac{2}{\gamma} \cdot (T_i - T_a) \cdot \left(1 + \gamma \cdot \left(\frac{T_i + T_a}{2} - T_0\right)\right) \cdot \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} = 0$

2.8. Soleleitung

- a) $\delta_{\text{iso}} = 34 \text{ mm}$
- b) $\dot{q}' = 12 \text{ W/m}$

2.9. Warmwasserleitung

- a) $\dot{q}'_{\text{o.iso}} = 9 \text{ W/m}$
 $\dot{q}''_{\text{m.iso}} = 10 \text{ W/m}$
- b)



- c) $\lambda_{\text{iso}} \leq 0,024 \text{ W/m K}$

2.10. Rohrbefestigung

- a) $\dot{Q} = 1,85 \text{ W}$
- b) $h_0 = 10 \text{ cm}$

2.11. Beschlagene Heckscheibe

$$\dot{q}'_{\text{H}} = 8 \text{ W/m}$$

2.12. Veränderliche Kreisrippe

- a) $\frac{d}{dr} \left(r \cdot \delta \cdot \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2\alpha}{\lambda} \cdot r \cdot (T - T_{\text{U}}) = 0$
- b) $\delta(r) = \frac{\alpha}{3\lambda} \cdot (R - r)^2 \cdot \left(2 + \frac{R}{r} \right)$
- c) $\dot{Q} = \alpha (T_{\text{F}} - T_{\text{U}}) \cdot \frac{2\pi R^2}{3} \cdot \left(1 - \frac{r_0}{R} \right) \cdot \left(1 + \frac{2r_0}{R} \right)$

2.13. Doppelwandiger Behälter

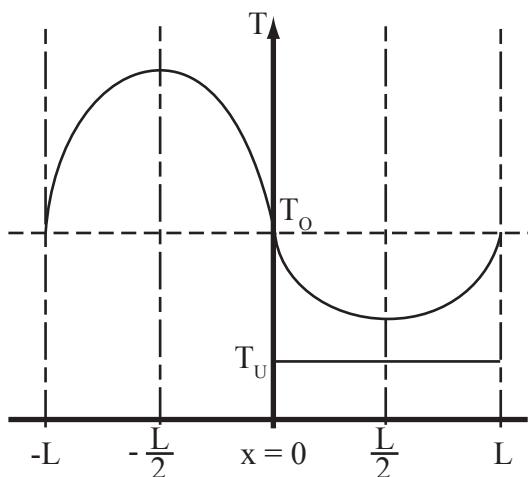
- a) $\frac{d}{dr} \left(r \cdot \delta \cdot \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2\alpha}{\lambda} \cdot r \cdot (T - T_{\text{U}}) = 0$
 $Bi_F = \frac{\alpha_F \cdot \delta_B}{\lambda_B} \quad Bi_L = \frac{\alpha_L \cdot \delta_B}{\lambda_B}$
 $Bi_F = 0,075 \quad Bi_L = 0,0015 \quad \rightarrow \quad \dot{Q} = 93 \text{ W}$
- b) $T_{\text{BL}} - T_{\text{BF}} = 47 \text{ K}$
- c) Mindestabstand der Stege: $2 \cdot L_{\infty} = 0,82 \text{ m}$
- d) $\frac{\dot{Q}_{\text{ges}}}{L} = 247 \text{ W/m}$

2.14. Brennelement eines Hochtemperaturreaktors

$$T_{\text{i}} - T_{\text{O}} = 159 \text{ K}$$

2.15. Kupferstab

- a) Siehe Musterlösung zu dieser Aufgabe
- b) $\dot{\Phi}''' = \frac{2 \cdot \lambda \cdot m}{L} \cdot (T_O - T_U) \cdot \tanh\left(\frac{m \cdot L}{2}\right)$
- c) $\dot{\Phi}''' = 49,4 \text{ kW/m}^3$
- d) $T_{\max} = 136,6^\circ\text{C}$
 $T_{\min} = 106,7^\circ\text{C}$

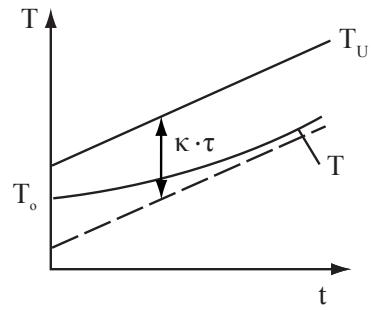


2.16. Kritischer Sprengstoff

$$s_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\dot{\Phi}_U''' \cdot \gamma}} \cdot \arctan \frac{k}{\sqrt{\dot{\Phi}_U''' \cdot \gamma \cdot \lambda}} = 2,7 \text{ m}$$

2.17. Kupferkugel

- a) $t_K = 80 \text{ s}$
- b) $T_L - T_K = 11,6 \text{ K}$



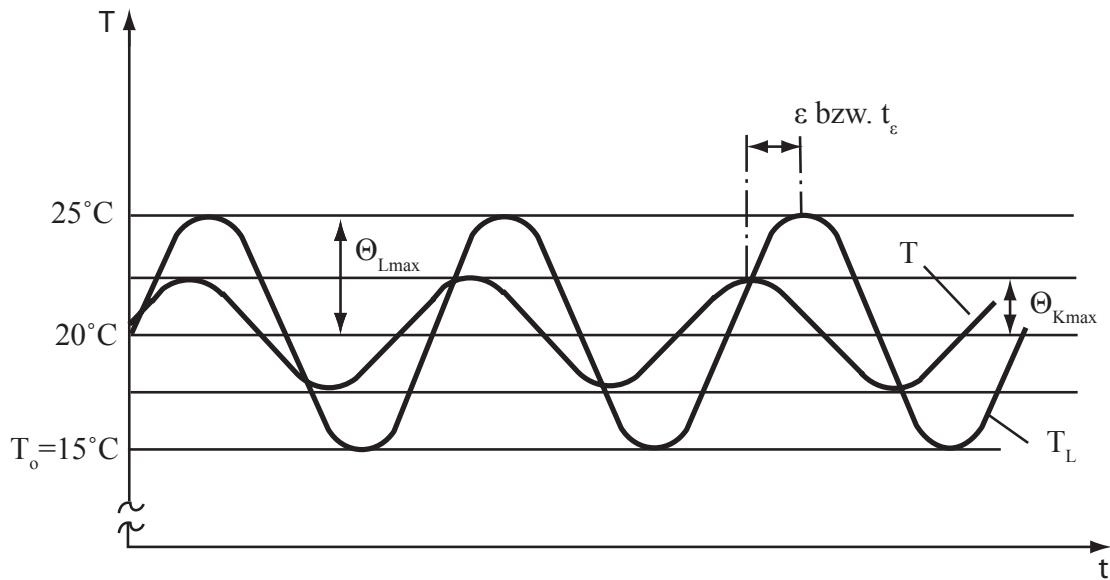
$$c) \quad \frac{T - T_{L,m}}{\Theta_{L,max}} = \left[\frac{T_0 - T_{L,m}}{\Theta_{L,max}} + \frac{\omega \cdot \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \right] \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cdot \sin(\omega \tau + \epsilon)$$

$$\tau = \frac{\rho \cdot c \cdot d}{6 \cdot \alpha}$$

$$\epsilon = -\arctan(\omega \tau) = -\omega \cdot t_\epsilon$$

$$\Theta_{K,max} = \frac{\Theta_{L,max}}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} = 2,2 \text{ K}$$

$$t_\epsilon = 1,1 \text{ min}$$



2.18. Gerührter Tank

$$a) \quad \Theta^* = 1 + \frac{\exp(-t^*) - 1}{t^*}$$

$$b) \quad T_{We} = 77^\circ\text{C}$$

2.19. Schwingungsproblem

$$V_B = \frac{\dot{V} \cdot t_s}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1} = 39,8 \text{ m}^3$$

mit $p = \frac{\Theta_{a,\max}}{\Theta_{e,\max}} = 0,001$

2.20. Speicherofen

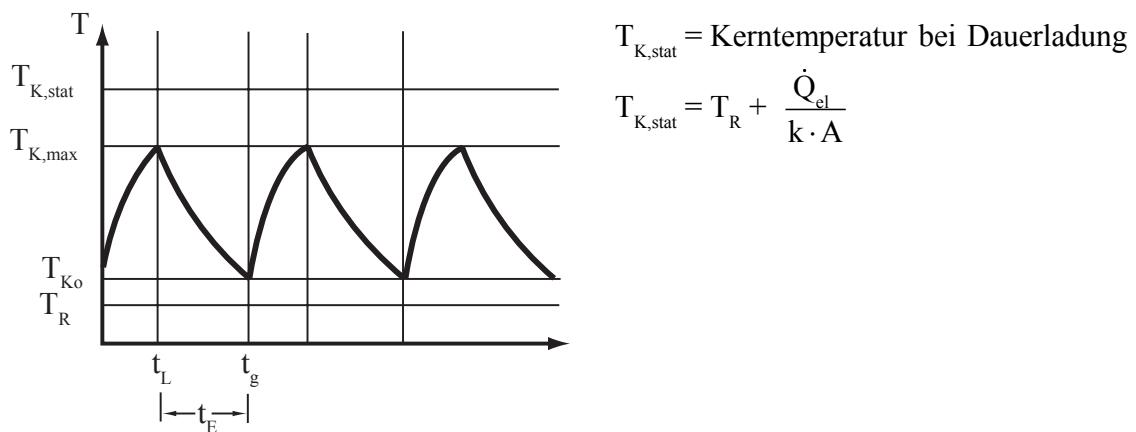
a) Ladezyklus:

$$\Theta_{KL} = \frac{\dot{Q}_{el}}{k \cdot A} \cdot \left(1 - \frac{1 - \exp\left(-\frac{t_E}{\tau}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{t-t_L}{\tau}\right) \right)$$

Entladezyklus:

$$\Theta_{KL} = \frac{\dot{Q}_{el}}{k \cdot A} \cdot \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{t_L}{\tau}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\tau}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{t-t_L}{\tau}\right) \right)$$

b) Skizze des Temperaturverlaufs:



c) $t_L = \frac{Q_H}{\dot{Q}_{el}} = 9h$

$\Theta_{K0} = \Theta_{KL}(t=0) = \Theta_{KE}(t=t_g) = 290 \text{ K}$

$\Theta_{max} = \Theta_{KL}(t=t_L) = \Theta_{KE}(t=t_L) = 566 \text{ K}$

d) $\frac{Q_{HL}}{Q_H} \cdot 100\% = 39\%$

2.21. Eiskugelkühlung

a) $T_{Ks} = T_E = 0^\circ\text{C}$
 $T_{Fs} = 13,9^\circ\text{C}$
 $T_{F,\infty} = T_{K,\infty} = 12,9^\circ\text{C}$

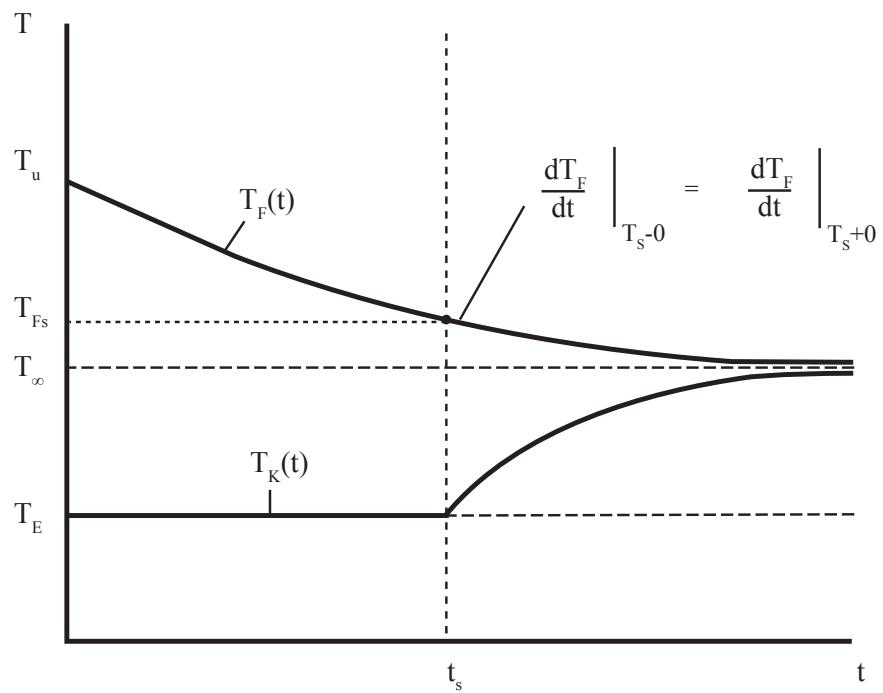
b) $T_K(t) = T_E$
 $\frac{T_F(t) - T_E}{T_U - T_E} = \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right)$
mit $\tau_F = \frac{\dot{m}_F \cdot c_F}{n \cdot k \cdot \pi \cdot d^2}$

c) $t_s = 4,6 \text{ min}$

d) $\frac{dT_F}{dt} + \frac{1}{\tau_F} \cdot (T_F - T_K) = 0$
 $\frac{dT_K}{dt} = -\mu \cdot \frac{dT_F}{dt}$
mit $\mu = \frac{\tau_F}{\tau_K}$
 $\tau_K = \frac{\rho_E \cdot c_W \cdot d}{6k \cdot (1 + \frac{2\delta}{d})^2}$

e) $T_K(t) = T_E - \mu \cdot (T_F(t) - T_{Fs})$
 $T_F(t) = T_{Fs} - \frac{T_{Fs} - T_E}{1 + \mu} \cdot \left(1 - \exp\left(-(1 + \mu) \cdot \frac{t - t_s}{\tau_F}\right)\right)$

f)



2.22. Kontakt der halbunendlichen Körper

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{T_1 - T_{20}}{T_{10} - T_{20}} = -\frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_2}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 \cdot t}}\right) & x \geq 0 \\
 & \frac{T_2 - T_{20}}{T_{10} - T_{20}} = \frac{1}{1 + \frac{b_2}{b_1}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{a_2 \cdot t}}\right) & x \leq 0 \\
 & \frac{T_M - T_{20}}{T_{10} - T_{20}} = \frac{1}{1 + \frac{b_2}{b_1}} & b_1 = \sqrt{(\lambda \cdot \rho \cdot c)_1} \\
 & & b_2 = \sqrt{(\lambda \cdot \rho \cdot c)_2}
 \end{aligned}$$

2.23. Gewalztes Blech

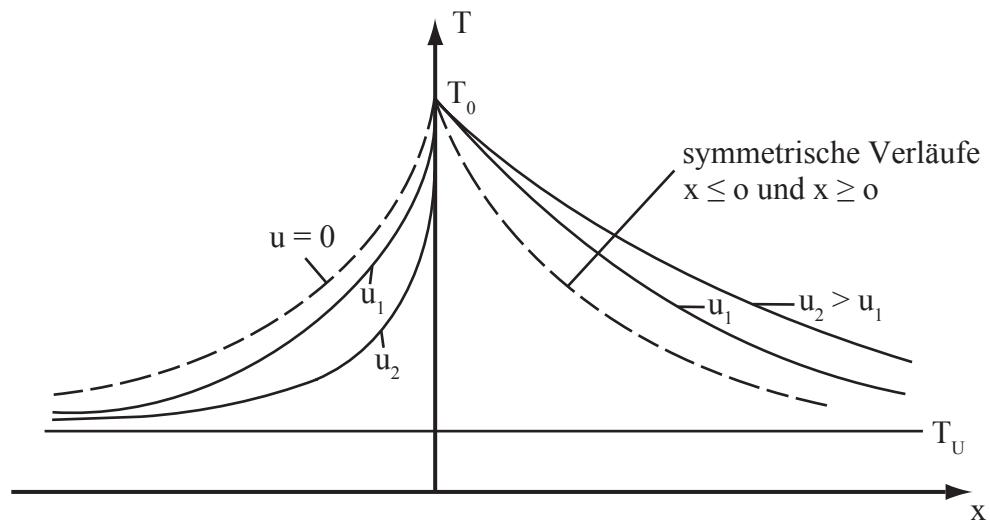
$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad w &= \frac{\alpha \cdot L}{\rho \cdot c \cdot \delta} \cdot \frac{1}{\ln 2} = 0,072 \text{ m/s} \\
 \text{b)} \quad w &= \frac{1}{7,3} \cdot \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \frac{L}{\delta^2} = 0,068 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Kapitel 3.

Ergebnisse Konvektion

3.1. Heißer Draht

a) Skizze des Temperaturverlaufs:



b) für $x < 0$:

$$\Theta_1 = \frac{2\dot{Q}}{\lambda \cdot \pi d^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2}} \cdot \exp\left(\frac{u}{2a} + \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2}\right) \cdot x$$

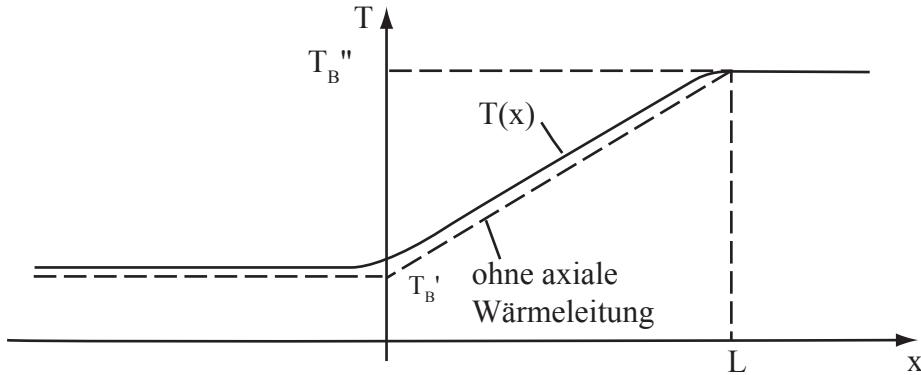
für $x > 0$:

$$\Theta_2 = \frac{2\dot{Q}}{\lambda \cdot \pi d^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2}} \cdot \exp\left(\frac{u}{2a} - s\sqrt{\left(\frac{u}{2a}\right)^2 + m^2}\right) \cdot x$$

3.2. Bleileitung

a) $T_B'' = 706 \text{ } ^\circ\text{C}$

b)



c) $\frac{T - T_B'}{T_B'' - T_B'} = \frac{1}{\beta} \cdot (1 - \exp -\beta) \cdot \exp \left(\beta \cdot \frac{x}{L} \right) \quad x < 0$

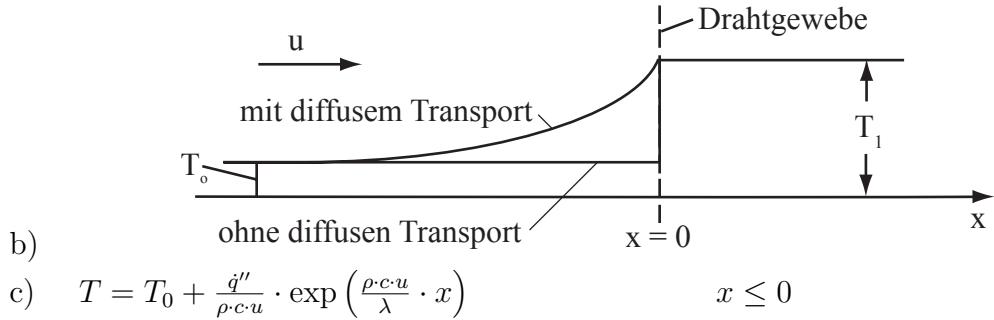
$$\frac{T - T_B}{T_B'' - T_B} = \frac{1}{\beta} \cdot \left(1 - \exp \left(-\beta \cdot \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right) \right) + \frac{x}{L} \quad x \geq 0$$

$$\beta = \frac{u \cdot L}{a}$$

d)
$$\frac{|\dot{Q}_L|}{\dot{Q}} = \frac{1 - \exp -\beta}{\beta} \approx 10^{-4} \quad \beta = \text{Pé} = \text{Péclét-Zahl}$$

3.3. Drahtgewebe in der Strömung

a) $T_1 = T_0 + \frac{\dot{q}''}{\rho \cdot c \cdot u}$



b)

c) $T = T_0 + \frac{\dot{q}''}{\rho \cdot c \cdot u} \cdot \exp\left(\frac{\rho \cdot c \cdot u}{\lambda} \cdot x\right) \quad x \leq 0$

3.4. Beheiztes Rohr

a) $T'' = T' + \frac{3}{4} \cdot \frac{\dot{q}_{\max}'' \cdot A}{\dot{m} \cdot c}$

b) $0 \leq x \leq \frac{L}{2}:$

$$T = T' + \frac{\dot{q}_{\max}'' \cdot A}{\dot{m} \cdot c} \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad A = \pi \cdot d \cdot L$$

$\frac{L}{2} \leq x \leq L:$

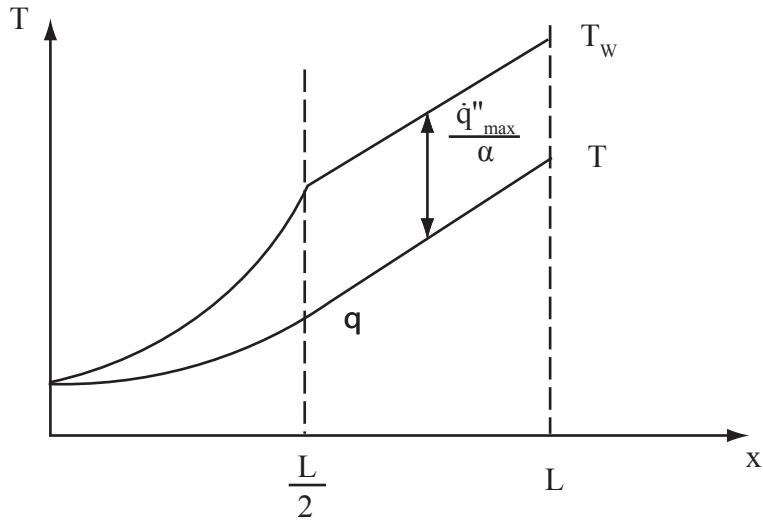
$$T = T' + \frac{\dot{q}_{\max}'' \cdot A}{\dot{m} \cdot c} \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{4}\right)$$

c) $0 \leq x \leq \frac{L}{2}:$

$$T_W = T' + \frac{\dot{q}_{\max}''}{\alpha} \cdot \left[2 + \frac{\alpha \cdot A}{\dot{m} \cdot c} \cdot \frac{x}{L}\right] \cdot \frac{x}{L}$$

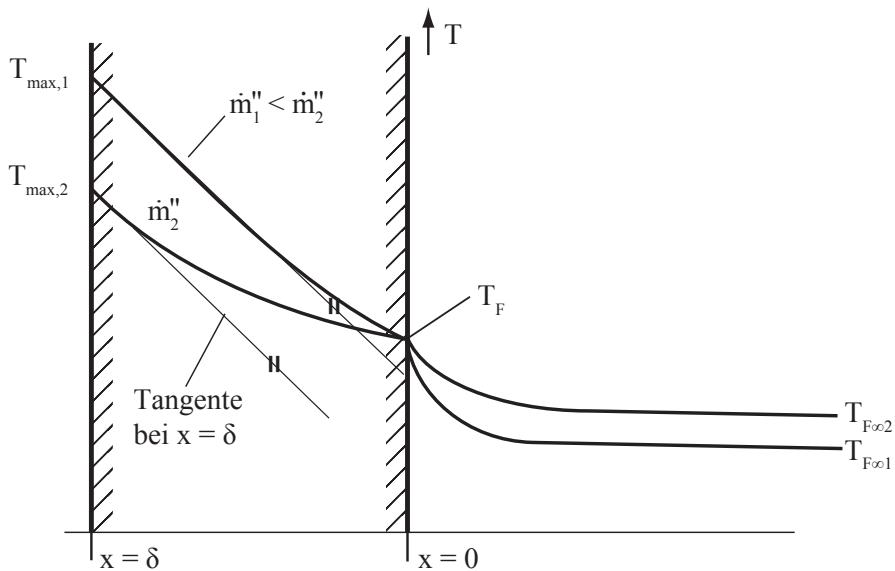
$\frac{L}{2} \leq x \leq L:$

$$T_W = T' + \frac{\dot{q}_{\max}''}{\alpha} \cdot \left[1 + \frac{\alpha \cdot A}{\dot{m} \cdot c} \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{4}\right)\right]$$



3.5. Absorbtion einer porösen Wand

- $T = T_F - \frac{\dot{q}''_s}{\dot{m}'' \cdot c} \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot \delta\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{\dot{m}'' \cdot c}{\lambda} \cdot x\right)\right)$
- $T_{\max} = -15 + \frac{150 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 1000} \cdot (1 - \exp(-3,75)) = 229 \text{ }^\circ\text{C}$
- $\dot{q}''_F = 150 \cdot \exp(-3,75) = 3,5 \text{ kW/m}^2$
- $T_F = -15 - \frac{150 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 1000} \cdot \exp(-3,75) = -21 \text{ }^\circ\text{C}$
-



3.6. Lotrechtes Rohr

$$H_s = 1,33$$

$$T_s = 99 \text{ } ^\circ\text{C}$$

3.7. Wasserversorgungsleitung

a) $\alpha_L = 56,4 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

$$T''_W = 0,64 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\alpha_W = 47,4 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\dot{m}_W = 0,5 \text{ g/s}$$

- b) Es ist ein geringerer Wassermengenstrom erforderlich.

Begründung: Bei nicht ausgebildetem Wärmeübergang ist α_W lokal und im Mittel größer. Der durch die innere Rohrwandtemperatur T''_{Ri} festgelegte Wärmestrom am Rohrende ist dann bei kleinerer Temperaturdifferenz übertragbar, das heißt, das Wasser kann auf niedrigere Temperatur abgekühlt werden. Da die Wärmedämmsschicht den dominierenden Wärmewiderstand bildet, wird der Gesamtwärmeverlust durch den verbesserten wasserseitigen Wärmeübergang nur unwesentlich vergrößert. Aus $\dot{Q} \approx \text{konst.}$ und ΔT_W größer folgt \dot{m}_W kleiner. Beweis ist auch analytisch führbar!

3.8. Wärmeübergang an einer beheizten Platte

a) $\alpha_{\text{lam}}(L) = 12 \text{ W/m}^2\text{K}$

$\alpha_{\text{turb}}(L) = 55 \text{ W/m}^2\text{K}$

$\bar{\alpha}_{\text{lam}} = 24 \text{ W/m}^2\text{K}$

$\bar{\alpha}_{\text{turb}} = 68 \text{ W/m}^2\text{K}$

b) $\dot{Q}_{\text{lam}} = 976 \text{ W}$

$\dot{Q}_{\text{turb}} = 2720 \text{ W}$

c) Nach Gl. (WÜK 6)

$\dot{Q} = 1980 \text{ W}$

Nach Anleitung unter Verwendung von (WÜK.1) und (WÜK.5)

$\dot{Q} = 2036 \text{ W}$

Kapitel 4.

Ergebnisse Strahlung und Konvektion

4.1. Thermoelement

- a) $T_L - T_{Th} = 2 \text{ K}$
- b) Steigerung der Anströmgeschwindigkeit, Verkleinerung des Thermoelements, Verspiegelung des Elements, Strahlungsschutzschirm
- c) $T_L - T_{Th} = 0,01 \text{ K}$

4.2. Stutzen im Rohr

- a) $l = 0,020 \text{ m}$
- b) Mögliche Maßnahmen:
 - Dickere Isolation des Rohres. Dadurch verringert sich der Wärmefluss durch das Rohr und damit auch die treibende Temperaturdifferenz zwischen dem Fluidstrom und der Rohrinnenwand, der der Messfehler proportional ist (Gl.(11)).
 - Schräger Einbau des Stutzens. Dadurch wird die Einbaulänge größer, gleichzeitig verringert sich jedoch der Wärmeübergangskoeffizient am Stutzen infolge des größeren Umströmungsweges (Grenzschichtdichte steigt), ein Effekt, der in entgegengesetzter Richtung wirkt. Der Einfluss der größeren Eintauchlänge wird aber dominieren.
 - Einbau des Thermometerstutzens in einem Rohrknie.

4.3. Methanolbehälter

a) $\lambda_{\text{iso}} > \lambda_{\text{Kork}} \rightarrow$ Isolierung ist durchfeuchtet!

4.4. Luftspalt

- a) $\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_L}\right)_0 = 1,63$
- b) $\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_L}\right)_1 = 1,31$
- c) $T_F = 30,1 \text{ }^\circ\text{C}$
- d) $\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_L}\right)_n = 1 + \frac{1}{n+1} \cdot \left[\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_L}\right)_0 - 1 \right]$

4.5. Beatmungsgerät

a) $\alpha_i = 11,6 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

$$k = 3,5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

b) Verlauf der Luftstromtemperatur:

$$\frac{T_L - T_U}{T'_L - T_U} = \exp\left(-\frac{k \cdot \pi d_i \cdot L}{\dot{m}_L \cdot c_L} \cdot \frac{x}{L}\right)$$

Zusammenhang zwischen Luftstrom- und Schlauchwandtemperatur:

$$T''_L - T_U = \frac{1}{1 - \frac{k}{\alpha_i}} \cdot (T''_W - T_U)$$

Erforderliche Lufteintrittstemperatur:

$$T'_L = T_U + \frac{\exp\left(\frac{k \cdot \pi d_i \cdot L}{\dot{m}_L \cdot c_L}\right)}{1 - \frac{k}{\alpha_i}} \cdot (T''_W - T_U)$$

c) $\dot{Q}_L = 7,2 \text{ W}$

Überprüfung des äußeren Gesamtwärmeübergangskoeffizienten:

$$\alpha_{a,\text{Konv}} = 3,6 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\alpha_{a,\text{Str}} = 5,5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

bei $T_{\text{iso},a} = 22,8 \text{ }^\circ\text{C}$

d) $L_0 = 0,7 \text{ m } (T''_L = 42,9 \text{ }^\circ\text{C})$

$$\dot{Q}_{\text{el}} = 2,8 \text{ W}$$

$$\dot{Q}_V = 5,2 \text{ W}$$

Kapitel 5.

Ergebnisse Stoffübertragung

5.1. Glasrohr

- a) $\xi_D(x) = 1 + (\xi_{D0} - 1) \cdot \dots \cdot \left(\frac{\xi_{D\delta} - 1}{\xi_{D0} - 1} \right)^{\frac{x}{\delta}}$
 $\dot{m}_{D,\text{Stefan}} = \rho_{\text{ges}} \cdot \frac{D}{\delta} \cdot A_Q \cdot \ln \frac{1 - \xi_{D\delta}}{1 - \xi_{D0}}$
- b) $\frac{\dot{m}_{D,\text{Stefan}}}{\dot{m}_{D,\text{Diff}}} \quad \text{mit} \quad \dot{m}_{D,\text{Stefan}} \text{ aus a) und}$
 $\dot{m}_{D,\text{Diff}} = \rho_{\text{ges}} \cdot \frac{D}{\delta} \cdot A_Q (\xi_{D0} - \xi_{D\delta})$
- c) $\xi_{D\delta} = 0$
 $\xi_{D0} = \frac{\frac{p_s}{R_D}}{\frac{p_s}{R_D} + \frac{(p - p_s)}{R_L}} = 0,0288$
 $\rho_{\text{ges}} \approx \frac{p}{R_L \cdot T} = 1,12 \text{ kg/m}^3$
 $\dot{m}_{D,\text{Stefan}} = \frac{25,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{3600 \text{ s}} = 7,08 \cdot 10^{-9} \text{ kg/s}$
 $D = \frac{\frac{\dot{m}_{D,\text{Stefan}} \cdot \delta}{\rho_{\text{ges}} \cdot A}}{\ln \frac{1 - \xi_{D\delta}}{1 - \xi_{D0}}} = 27,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

5.2. Feuchtes Holz

- a) $\frac{d\xi_W}{dt} = D \cdot \frac{d^2\xi_W}{dx^2}$
- b) $t = \frac{\delta^2}{4 \cdot D} = 13,56 \text{ Tage}$

5.3. Kondensation von Wasserdampf

$$\delta = \left[2 \cdot \frac{\lambda \Delta T}{\rho_w \Delta h_v} \cdot t \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta h_v = r = 2358 \text{ kJ/kg K}$$

$$\lambda \approx \lambda(40^\circ\text{C}) = 0,631 \text{ W/m K}$$

$$\rho_w \approx 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\delta(t = 3600 \text{ s}) = 8,78 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow m = \rho_w \frac{\pi}{4} D^2 \delta = 0,621 \text{ kg}$$

5.4. Haialarm auf Mallorca

a) $\rho_{\text{ges}} \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_{\text{ges}} \cdot D_{B,W} \cdot r^2 \cdot \frac{\partial \xi_B}{\partial r} \right) + S$

b) siehe Musterlösung

c) $r_K = \frac{1}{\frac{\xi_K - \xi_F}{B} + \frac{1}{r_F}}$

d) $\xi_F = \frac{\xi_{SF}}{\xi_S} = \frac{1,228 \cdot 10^{-6} \text{ kg}_S/\text{kg}}{1,05 \cdot 10^{-4} \text{ kg}_S/\text{kg}} = 0,0117 \text{ kg}_B/\text{kg}$

5.5. Noch kritischerer Sprengstoff

a) $s_{\max} = 0,373 \text{ m}$

5.6. Perowskite

a) $\dot{m}_{O_2} = 5,206 \cdot 10^{-8} \text{ kg}_{O_2}/\text{s}$

b) $\dot{m}_{O_2,\text{St}} = 5,640 \cdot 10^{-8} \text{ kg}_{O_2}/\text{s} \longrightarrow$ Aufgrund der relativ hohen Sauerstoffkonzentration im System führt die Vernachlässigung der Stefankorrektur zu einem Fehler von ca. 8 %.

5.7. Geteertes Holz

a) $Bi = \frac{g \cdot \frac{d}{2}}{\rho \cdot D_W} = \frac{2,164 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^2 \text{s} \cdot \frac{0,01 \text{ m}}{2}}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,546 \cdot 10^{-5}$

Radiale Konzentrationsunterschiede innerhalb der Bohrung sind vernachlässigbar (Begründung siehe Musterlösung).

b) $\dot{m} = \dot{m}_O + \dot{m}_U$

$$= 1,2563 \cdot 10^{-11} \text{ kg}_N/\text{s} + 8,3433 \cdot 10^{-13} \text{ kg}_N/\text{s} = 1,3397 \cdot 10^{-11} \text{ kg}_N/\text{s}$$

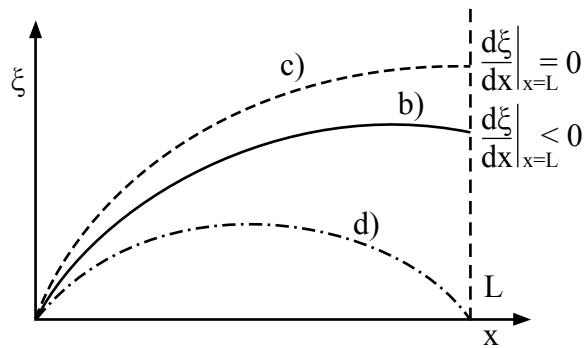
\dot{m}_O, \dot{m}_U = Massenstrom an der Ober- bzw. Unterseite der Bohrung.

c) Unterseite der Bohrung undurchlässig $\rightarrow \dot{m}_U = 0$

$$\dot{m}_O^* = 1,3377 \cdot 10^{-11} \text{ kg}_N/\text{s}$$

d) $\dot{m}_O^{**} = 1,3541 \cdot 10^{-11} \text{ kg}_N/\text{s}$

e)



5.8. Gaswäscher

a) $v_T = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{10^{-3} \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,4} \cdot \frac{1020 \text{ kg/m}^3 - 1,86 \text{ kg/m}^3}{1,86 \text{ kg/m}^3}} = 4,24 \text{ m/s}$

b) $m = m_0 = 1,86 \text{ kg}_G/\text{m}^3 \cdot 0,05 \text{ kg}_{CO_2}/\text{kg}_G \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (10^{-3} \text{ m})^3 = 4,87 \cdot 10^{-11} \text{ kg}_{CO_2}$

c) $\xi_S = 4,791 \cdot 10^{-5} \text{ kg}_{CO_2}/\text{kg}_T$