Wärme- und Stoffübertragung I

Wärmeleitung im zylindrischen Koordinatensystem

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Video Übersicht

Stationäre 1-D Wärmeleitung in Rohrwand

- Schematischer Temperatur-, Querschnitts- und Wärmstromverlauf
- Herleitung der DGL über Energiebilanzen
- Mathematische Lösung der DGL

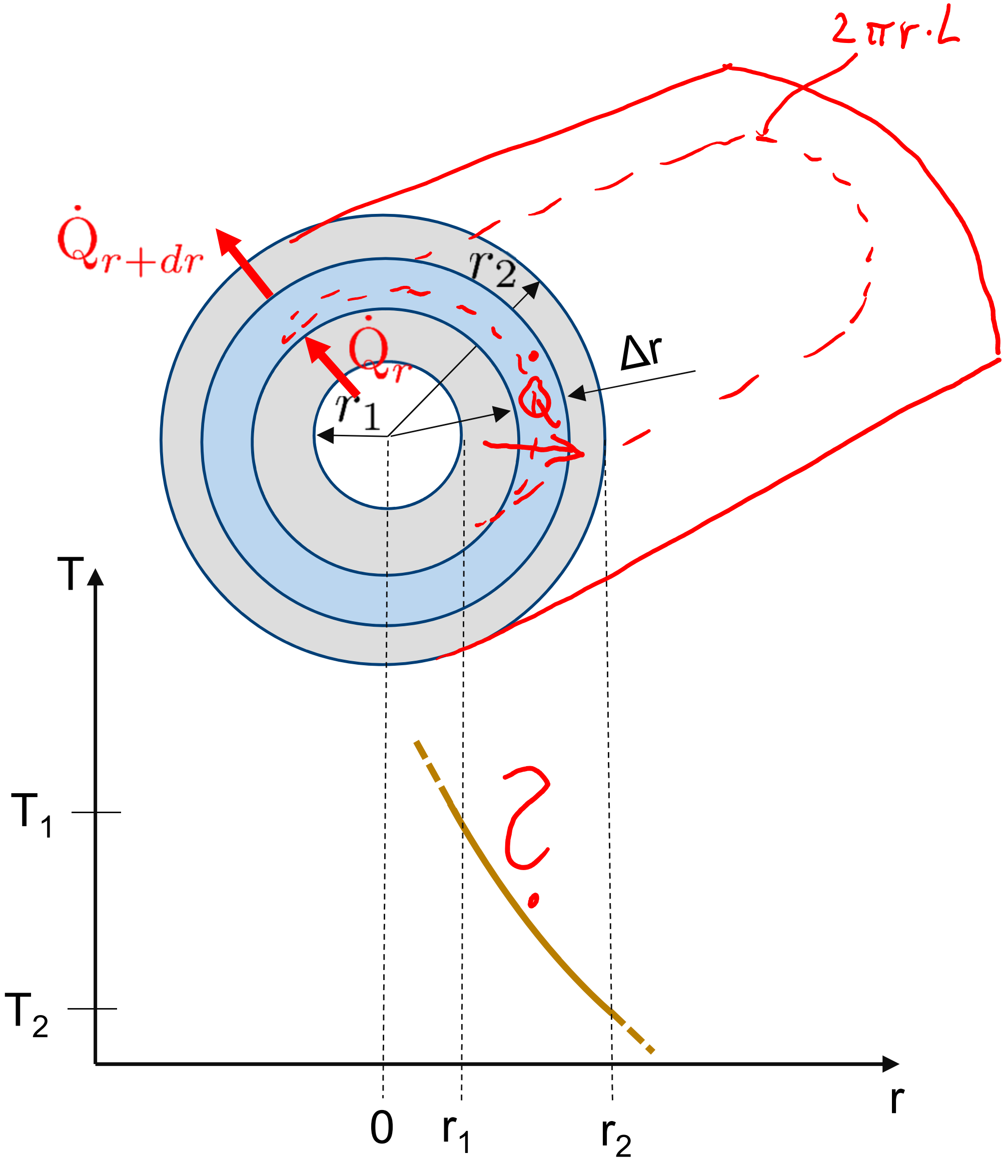
Stationäre 1-D Wärmeleitung für mehrschichtige Rohrwände

- Erweiterung der Gleichung auf mehrere Widerstände

Sonderfall Stationäre 1-D Wärmeleitung für sehr dünne Rohrwände $\delta \ll r_1$

- Vereinfachung des Problems (ingenieurmäßige Vorgehensweise)

DGL Herleitung
Stationäre 1-D Wärmeleitung in zylindrischen Körpern ohne Quelle



Fourier für zylindrische Körper

$$\dot{Q}_r = -\lambda\, A \frac{dT}{dr}$$

Änderung der Fläche

$$A(r) \uparrow \quad \text{mit } r \uparrow$$

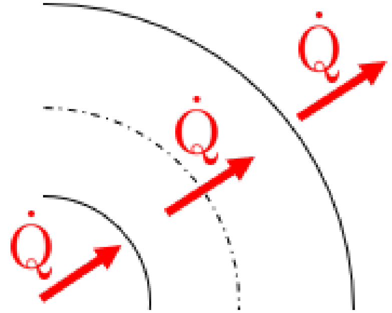
Resultierender Temperaturgradient

$$\dot{Q}_r = \text{konst.} \quad \Longrightarrow \frac{dT}{dr} \downarrow$$

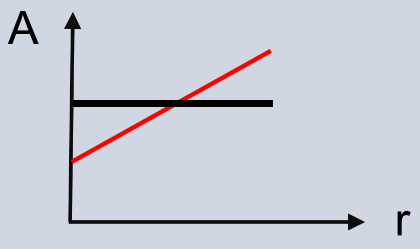
EB um Ringelement

$$0 = \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr}$$

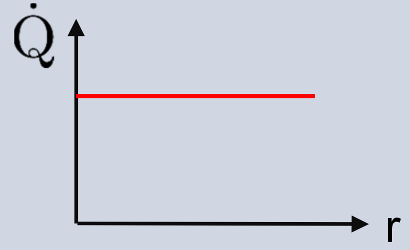
DGL Herleitung
Stationäre 1-D Wärmeleitung in zylindrischen Körpern ohne Quelle



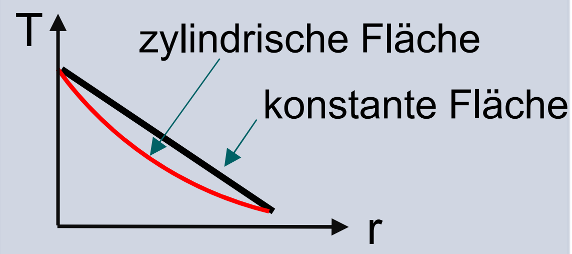
Fläche A



Wärmestrom $\dot{Q}$



Temperatur T



Fourier für zylindrische Körper

$$\dot{Q}_r = -\lambda \frac{dT}{dr} A(r)$$

Lokaler Temp.gradient für zyl. Körper

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{Q}_r}{\lambda\, A(r)}$$

Aufteilung des Temperaturgradienten in konstante und variable Terme

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{Q}_r}{\lambda\, 2\, \pi\, r\, L}$$

DGL Herleitung
Stationäre 1-D Wärmeleitung ohne Quelle

Integration des Temperaturverlaufs (diese Herangehensweise ist weniger etabliert)

$$\int_{T_0}^{T_r} dT = -konst. \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \qquad \Longrightarrow T_0 - T_r = \cdots$$

DGL Herleitung
Stationäre 1-D Wärmeleitung ohne Quelle

Integration des Temperaturverlaufs (diese Herangehensweise ist weniger etabliert)

$$\int_{T_0}^{T_r} dT = -konst. \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \qquad \Longrightarrow T_0 - T_r = \cdots$$

Bewährte Methode: Temperaturverlauf über Energiebilanz um infinitesimales Element

$$\dot{Q}_{ein} = -\lambda\, A(r) \frac{dT}{dr} = -\lambda\, 2\, \pi\, r\, L \frac{dT}{dr}$$

$$\dot{Q}_{aus} = \dot{Q}_{ein} + \frac{d\,\dot{Q}_{ein}}{dr} \Delta r$$

$$0 = -\frac{d\dot{Q}_{ein}}{dr}$$

DGL Herleitung
Stationäre 1-D Wärmeleitung in zylindrischen Körpern ohne Quelle

Integrand

$$\frac{d\left(r\,\frac{dT}{dr}\right)}{dr}$$

1. Integration liefert

$$r\,\frac{dT}{dr} = konst. = C_1$$

2. Integration liefert

$$T(r) = C_1 \ln(\mathrm{r}) + C_2$$

Randbedingungen

$$r = r_1 : T = T_1$$
$$r = r_2 : T = T_2$$

Eingesetzt in Ergebnis 2. Int.

$$T_1 = C_1 \ln(r_1) + C_2$$
$$T_2 = C_1 \ln(r_2) + C_2$$

Subtraktion der Temperaturgl.

$$T_1 - T_2 = C_1\left(\ln(r_1) - \ln(r_2)\right)$$

1. Integrationskonstante

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Einsetzen in eine Temperaturgl.

$$C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\ln(r_1)$$

DGL Herleitung
Stationäre 1-D Wärmeleitung in zylindrischen Körpern ohne Quelle

1. Integrationskonstante

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

2. Integrationskonstante

$$C_2 = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \ln r_1$$

Finaler Temperaturverlauf

$$T(r) = C_1 \cdot \ln \mathrm{r} + \mathrm{C}_2$$

$$T(r) = C_1 \cdot \frac{T_2 - T_1}{ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot ln\, r + T_1 - \frac{T_2 - T_1}{ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot ln\, r_1$$

$$\boxed{T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot ln \frac{r}{r_1}}$$

DGL Herleitung
Stationäre 1-D Wärmeleitung in zylindrischen Körpern ohne Quelle

Temperaturverlauf

$$T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \cdot \ln\frac{r}{r_1}$$

Wärmestrom

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot 2\pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{dT(r)}{dr}$$

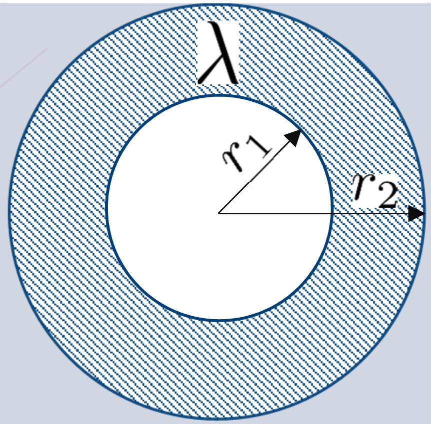
$$\boxed{\frac{dT(r)}{dr} = \frac{T_2 - T_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{1}{r}}$$

Sonderfall: Mehrschichtige Rohrwand
Stationäre 1-D Wärmeleitung mehrschichtigen Wänden ohne Quelle

Wärmeleitwiderstand W_L für einschichtige Rohrwand

$$\dot{Q} = +\frac{T_1 - T_2}{\underbrace{\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L}}_{W_L}} = +\frac{T_1 - T_2}{W_L}$$

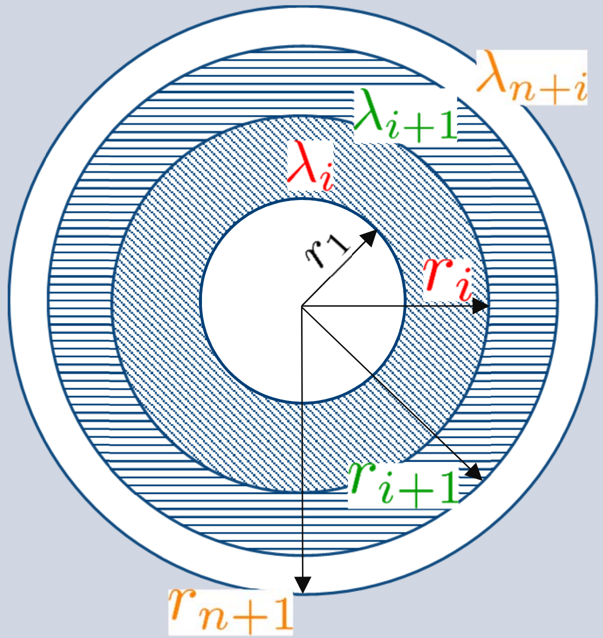
$$\boxed{W_L = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L}}$$



Wärmeleitwiderstand W_L für mehrschichtige Rohrwand

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{W}_{\mathrm{L},i} = \frac{1}{2\,\pi\,L}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\cdot\ln\frac{r_{i+1}}{r_i}}$$

$$\boxed{\dot{Q}_r = \frac{T_1 - T_{n+1}}{W_{L,i}} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\frac{1}{2\,\pi\,L}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\cdot\ln\frac{r_{i+1}}{r_i}}}$$



Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Sonderfall der dünnen Rohrwand ($\delta \ll r$)

Einführung der Rohrdicke δ für den Fall: $\delta \ll r$

$$\ln\frac{r_2}{r_1} = \ln\left(\frac{r_1+\delta}{r_1}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ln\left(1+\frac{\delta}{r_1}\right)}$$

Mathematische Umformung

$\ln\left(1+\frac{\delta}{r_1}\right)$ entspricht $\ln(1+x)$

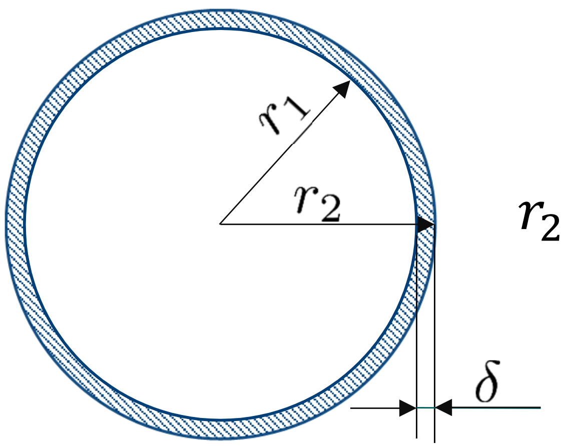
Für $\delta \ll r$ vereinfacht sich der ln-Term

$\ln(1+x) \approx x$ Für kleine x

$\ln(1{,}1) = 0{,}0953\ldots$
$x = 0{,}1$ $\Big\}$ $F \approx 5\%$

$\ln(1{,}05) \rightarrow F \approx 2{,}5\%$

$\ln(1{,}2) \rightarrow F \approx 10\%$



$$\delta \ll r_1$$
$$r_2 = r_1 + \delta$$

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Sonderfall der dünnen Rohrwand ($\delta \ll r$)

Einführung der Rohrdicke δ für den Fall: $\delta \ll r$

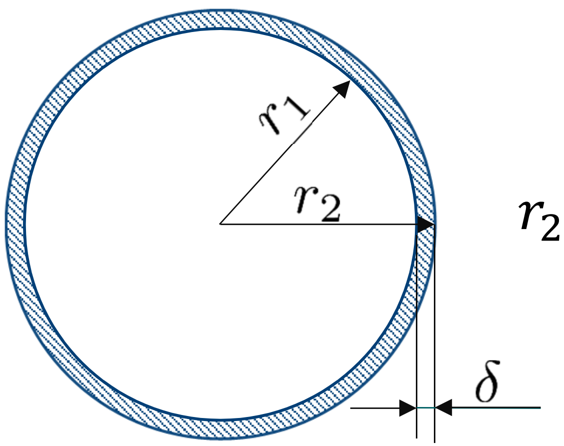
$$\ln\frac{r_2}{r_1} = \ln\left(\frac{r_1+\delta}{r_1}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ln\left(1+\frac{\delta}{r_1}\right)}$$

Mathematische Umformung

$\ln\left(1+\frac{\delta}{r_1}\right)$ entspricht $\ln(1+x)$

Für $\delta \ll r$ vereinfacht sich der ln-Term

$\ln(1+x) \approx x$ Für kleine x



$$\delta \ll r_1$$
$$r_2 = r_1 + \delta$$

Vereinfachte Gleichung für den Fall: $\delta \ll r$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi L}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\delta}{r_1}} = \underbrace{\boxed{A\cdot\lambda\cdot\frac{\Delta T}{\delta}}}_{\text{Gl. Ebene Wand}}$$

Verständnisfragen

Welches Temperaturprofil stellt sich für zylindrische Körper ein?

Worin unterscheidet sich der Temperaturverlauf eines zylindrischen Körper im Vergleich zum Temperaturverlauf in einer ebenen Wand? Was ist der Grund dafür?

Unter welchen Voraussetzungen kann die Krümmung des Rohres und damit die Änderung der Fläche innerhalb der Rohrwand vernachlässigt werden?