Wärme- und Stoffübertragung I

Rippenwirkungsgrad

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

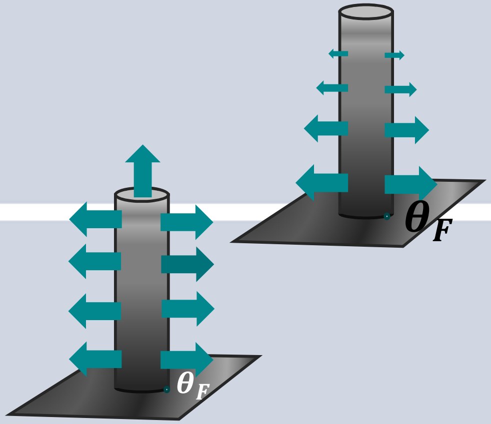
Lernziel

Auslegung von Rippen

- Rippenmaterial
- Geometrie

Rippenwirkungsgrad

- Bedeutung



Wiederholung: Temperaturverlauf bei Rippen

Randbedingungen

Bei $x = 0$:

$$\theta(x) = \theta_F$$

Bei $x = L$:

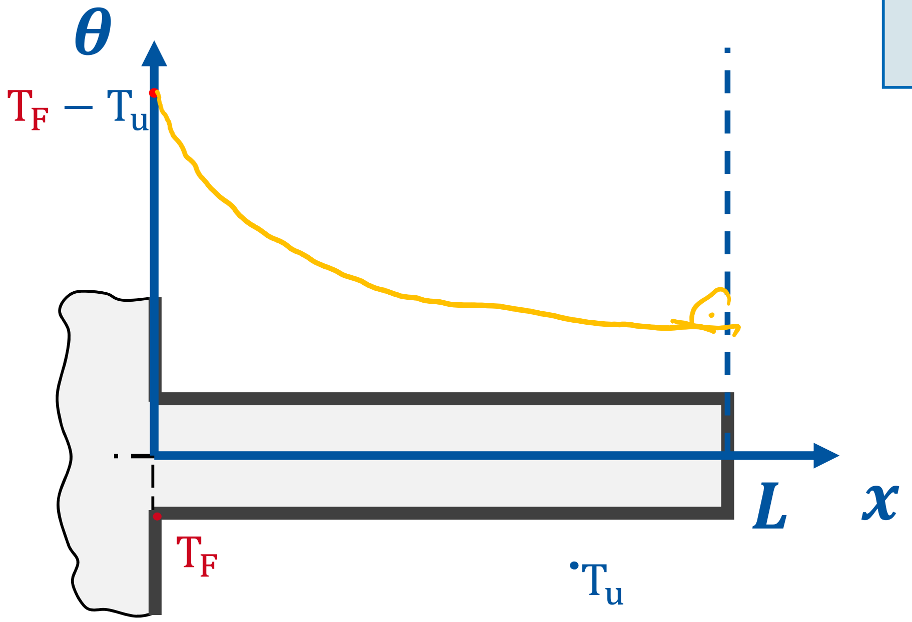
$$\dot{Q}_{\text{Kopf}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

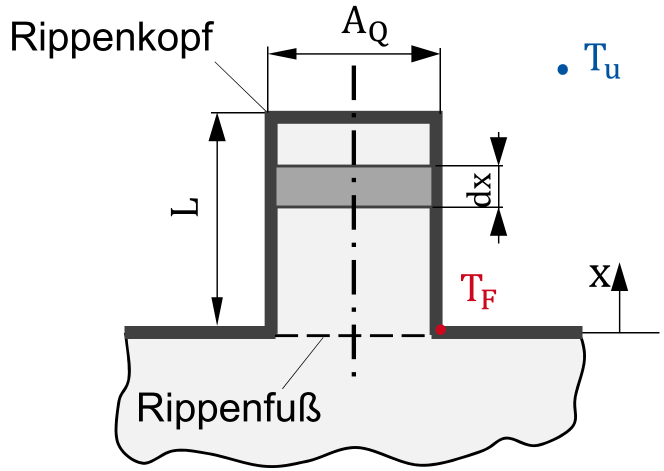
Rippen Temperaturprofil bei gegebenen Randbedingungen:

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \left(\frac{e^{m\,(L-x)} + e^{-m\,(L-x)}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}}\right)$$

oder:

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \left(\frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(mL)}\right)$$





Wiederholung: Temperaturverlauf bei Rippen

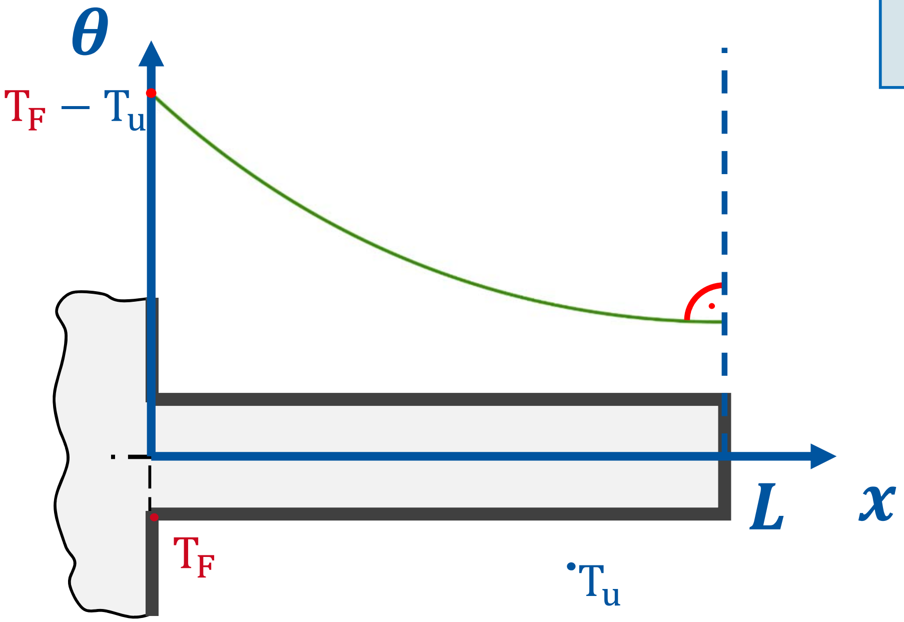
Randbedingungen

Bei $x = 0$:

$$\theta(x) = \theta_F$$

Bei $x = L$:

$$\dot{Q}_{\mathrm{Kopf}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

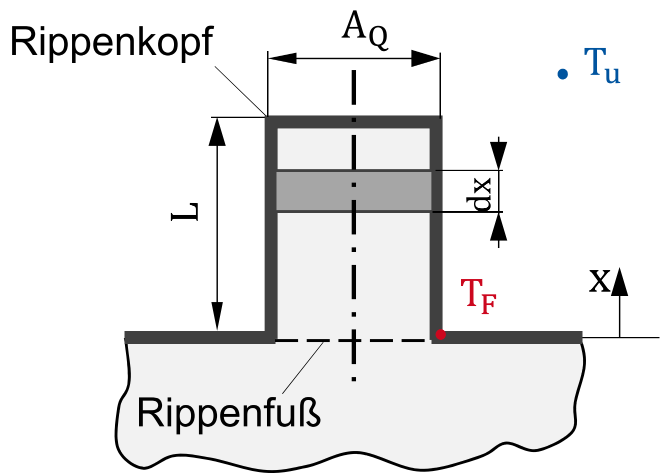


Rippen Temperaturprofil bei gegebenen Randbedingungen:

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \left(\frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}}\right)$$

oder:

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \left(\frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(mL)}\right)$$



Temperaturverlauf: Vergleich für verschiedene Rippenmaterialien

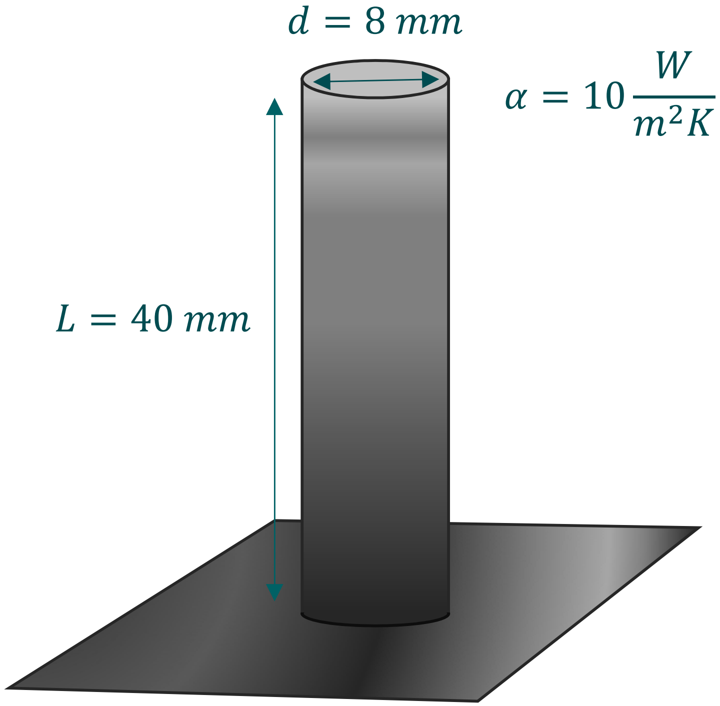
Materialien:

Kupfer: $\lambda_{Cu} = 385 \frac{W}{m\,K}$

Chrom-Nickel-Stahl: $\lambda_{Cr-Ni} = 16 \frac{W}{m\,K}$

Glas: $\lambda_{Glas} = 0{,}8 \frac{W}{m\,K}$

Zylindrische Rippe ⇨ $$m^2 = \frac{4\,\alpha}{\lambda\, d}$$



Temperaturverlauf: Vergleich für verschiedene Rippenmaterialien

$$\theta(x) = \theta_F \cdot \left(\frac{e^{m\,(L-x)} + e^{-m\,(L-x)}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}} \right)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_F} = \left(\frac{e^{m\,(L-x)} + e^{-m\,(L-x)}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}} \right)$$

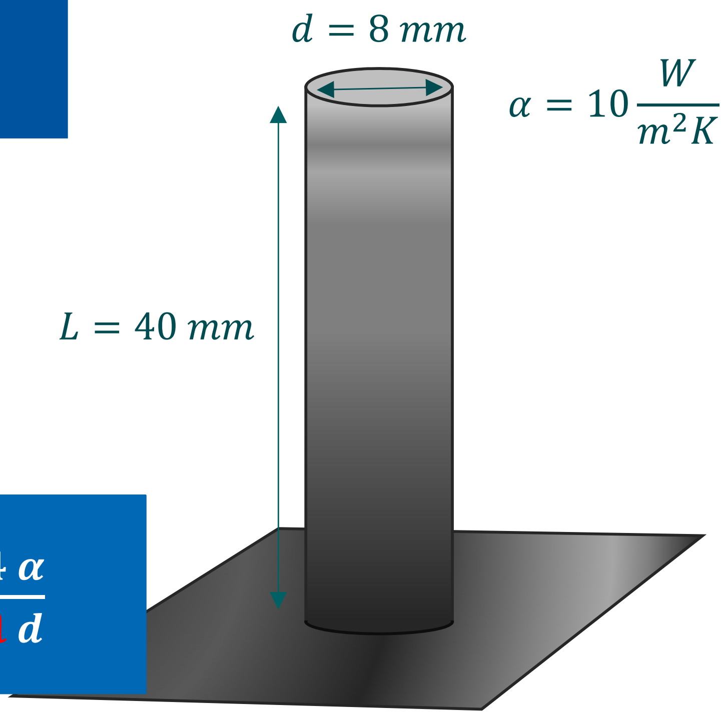
Bei $x = 0$:

$$\frac{\theta(x=0)}{\theta_F} = 1$$

Bei $x = L$:

$$\frac{\theta(x=L)}{\theta_F} = \frac{e^0 + e^0}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}} = \frac{2}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}}$$

$$m^2 = \frac{4\,\alpha}{\lambda\,d}$$



Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Temperaturverlauf: Vergleich für verschiedene Rippenmaterialien

$$\frac{\theta(L)}{\theta_F} = \frac{2}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}}$$

$$m^2 = \frac{4\,\alpha}{\lambda\,d} \qquad \left[\frac{1}{m}\right]$$

Kupfer:

$$\lambda_{Cu} = 385\,\frac{W}{m\,K}$$

$$m^2_{Cu} = 13\,m^{-1}$$

$$(m \cdot L)_{Cu} = 0,144$$

$$\left(\frac{\theta(L)}{\theta_F}\right)_{Cu} = 0,9887$$

Chrom-Nickel-Stahl:

$$\lambda_{Cr-Ni} = 16\,\frac{W}{m\,K}$$

$$m^2_{Cr-Ni} = 312,5\,m^{-1}$$

$$(m \cdot L)_{Cr-Ni} = 0,707$$

$$\left(\frac{\theta(L)}{\theta_F}\right)_{Cr-Ni} = 0,7939$$

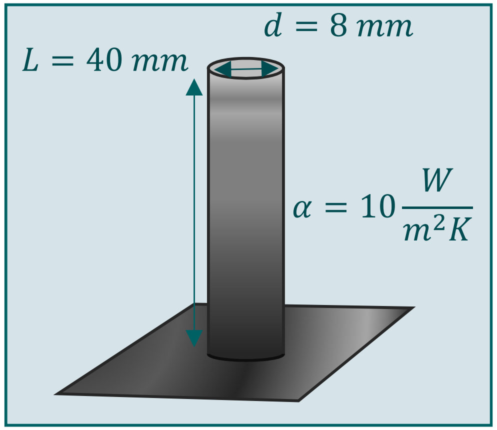
Glas:

$$\lambda_{Glas} = 0{,}8\,\frac{W}{m\,K}$$

$$m^2_{Cr-Ni} = 6250\,m^{-1}$$

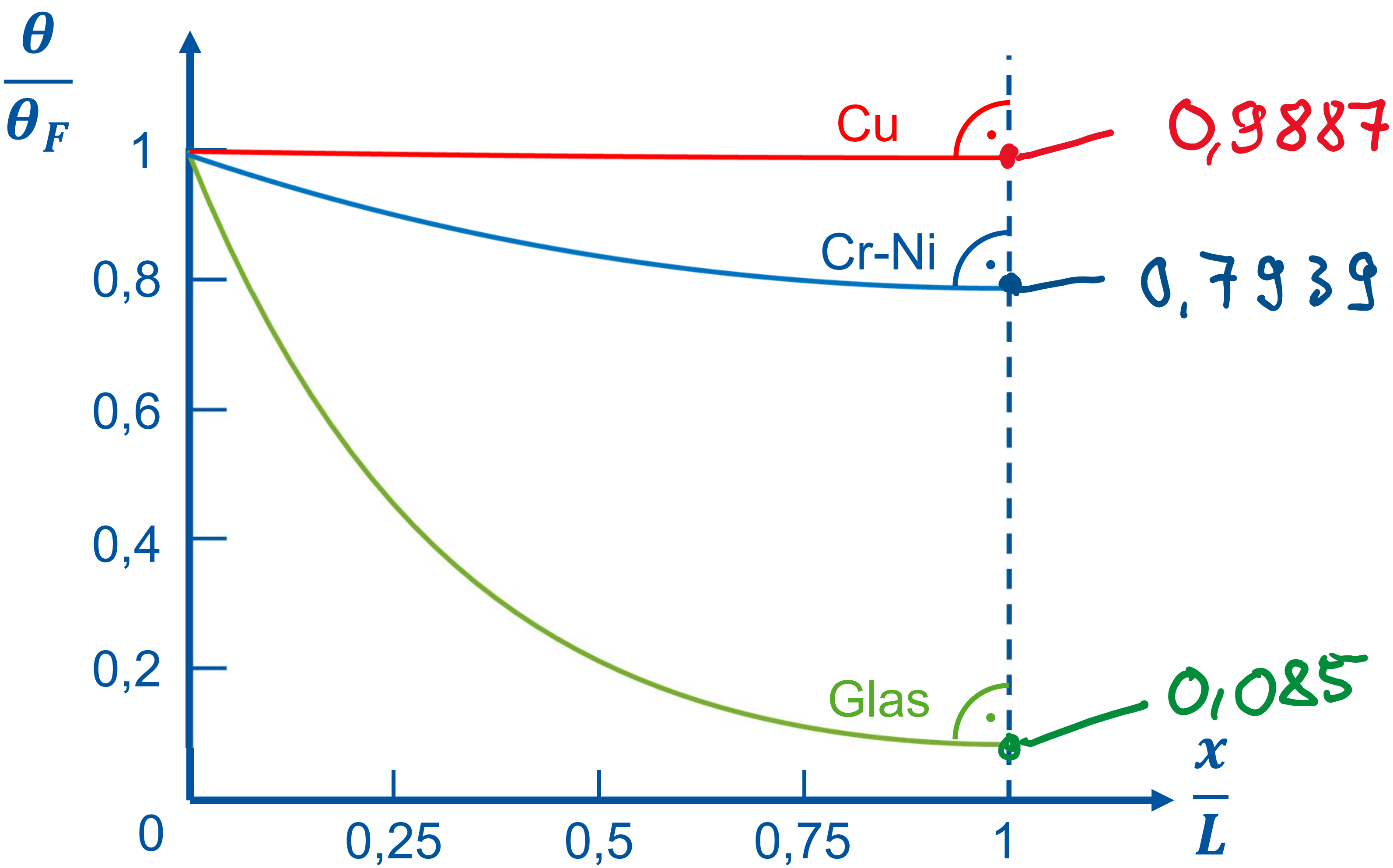
$$(m \cdot L)_{Cr-Ni} = 3,16$$

$$\left(\frac{\theta(L)}{\theta_F}\right)_{Glass} = 0,085$$



Temperaturverlauf über der Länge einer Stabrippe

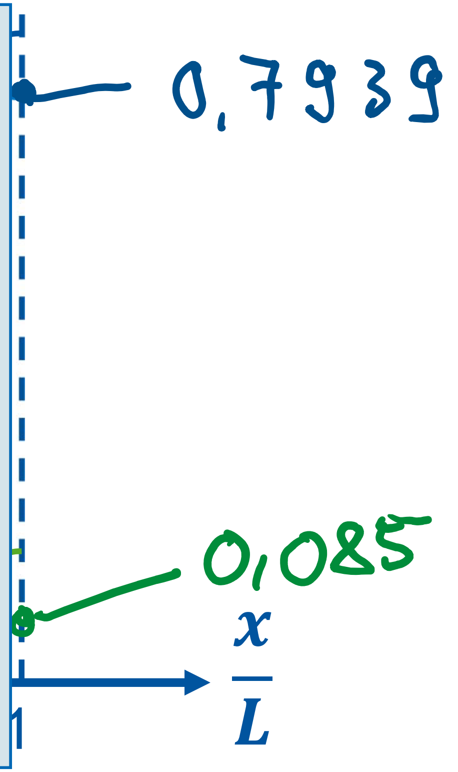
Dimensionsloser Temperaturverlauf für die drei verschiedene Materialien:



Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Temperaturverlauf über der Länge einer Stabrippe

Dimensionsloser Temperaturverlauf für die drei verschiedene Materialien:



Erkenntnisse aus diesem Beispiel:

1. **Temperaturverlauf** mit Kenntnis der Endpunkte und des ungefähren Verlaufs **gut zeichenbar**

2. **Material mit hohem λ** ⇨ Temperatur am Rippenkopf ist hoch ⇨ ΔT ($T(x)_{Rippe} - T_{Umgebung}$) bleibt hoch ⇨ **mehr Wärme wird übertragen**

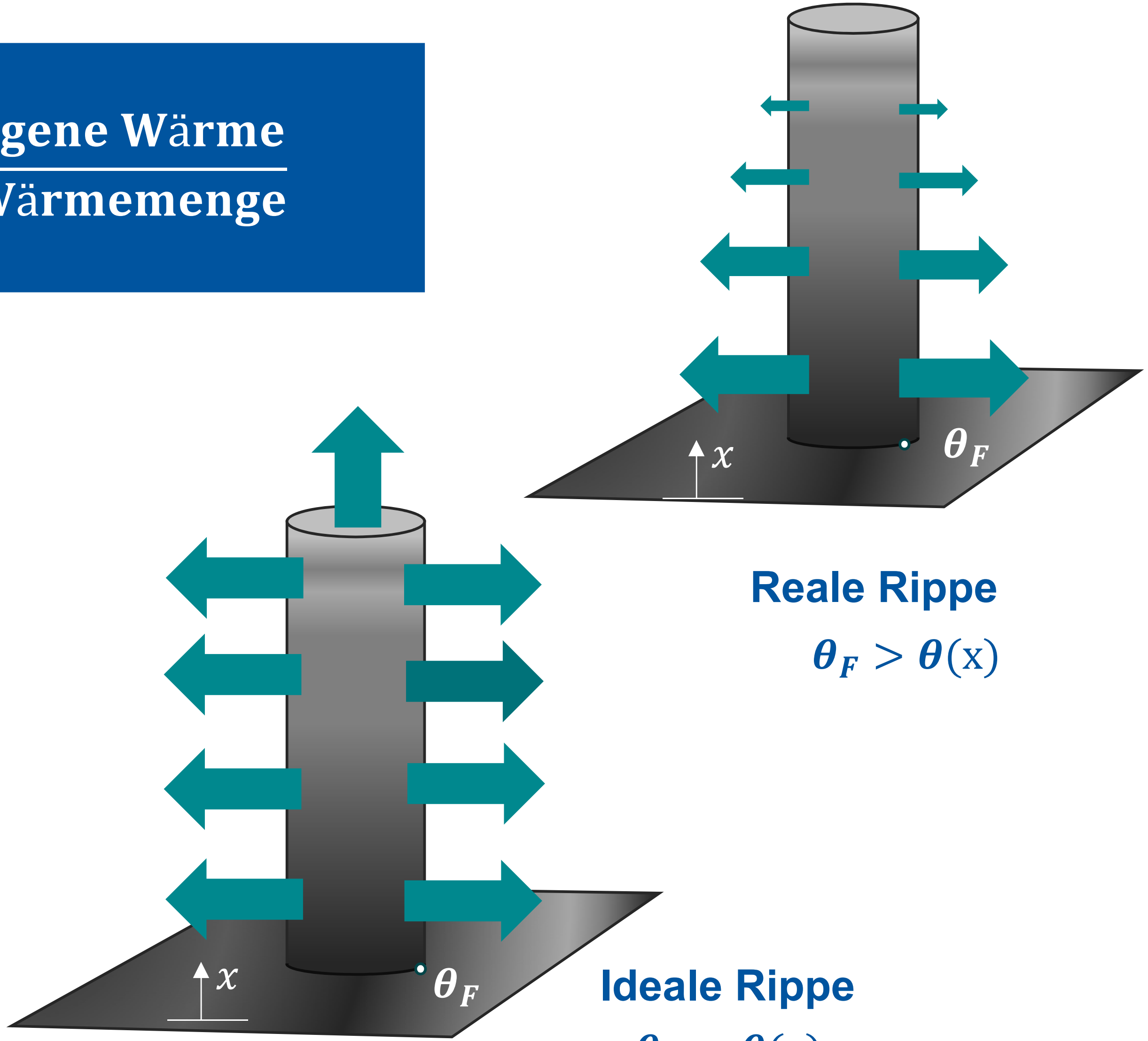
3. **Welche Rippe ist denn besser?**
   Die aus Kupfer oder die aus Glas?

Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{\textbf{Von einer Rippe übertragene Wärme}}{\textbf{Maximal übertragbare Wärmemenge}}$$

Maximal übertragbarer Wärmestrom wird erreicht, wenn die Temperatur über die gesamte Länge der Rippe gleich der Fußtemperatur bleibt.

$$\boxed{\begin{aligned} T &= T_{fuß} \\ &\neq f(x) \end{aligned}}$$



Reale Rippe

$\theta_F > \theta(\mathrm{x})$

Ideale Rippe

$\theta_F = \theta(\mathrm{x})$

Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{\text{Von einer Rippe übertragene Wärme}}{\text{Maximal übertragbare Wärmemenge}}$$

Von der Rippe übertragener Wärmestrom:

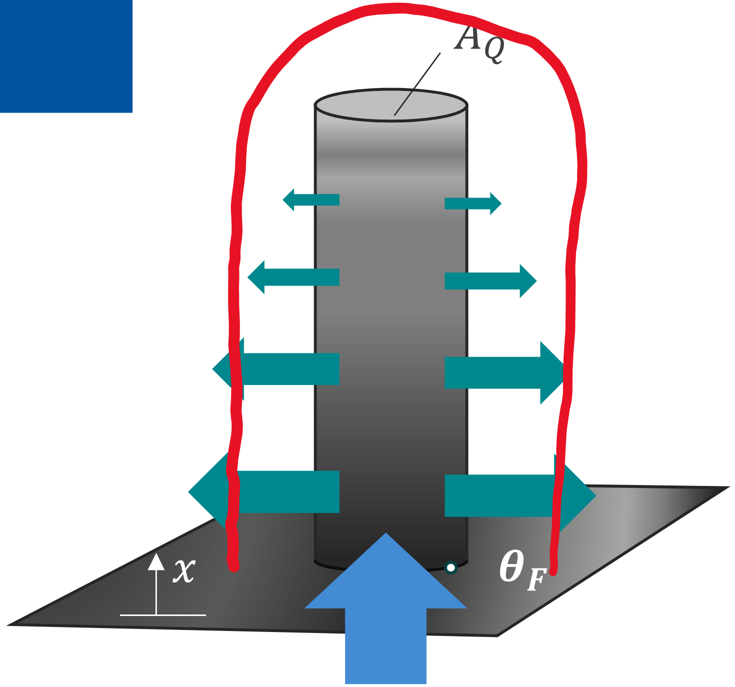
Übertragener (konvektiver) Wärmestrom auf der Mantelfläche:

$$\dot{Q}_{Konv} = \int_0^L \dot{q}_{konv.}\, dx = \pi d \cdot \int_0^L \alpha \cdot \underbrace{(T(x) - T_u)}_{\theta(x)} dx$$

Alternative:

Wärmeleitstrom am Fuß:

$$\dot{Q}_{WL,Fuß} = -\lambda \cdot A_Q \cdot \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -\lambda \cdot A_Q \cdot \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$



$$\boxed{\dot{Q}_{Konv} = \dot{Q}_{WL,Fuß}}$$

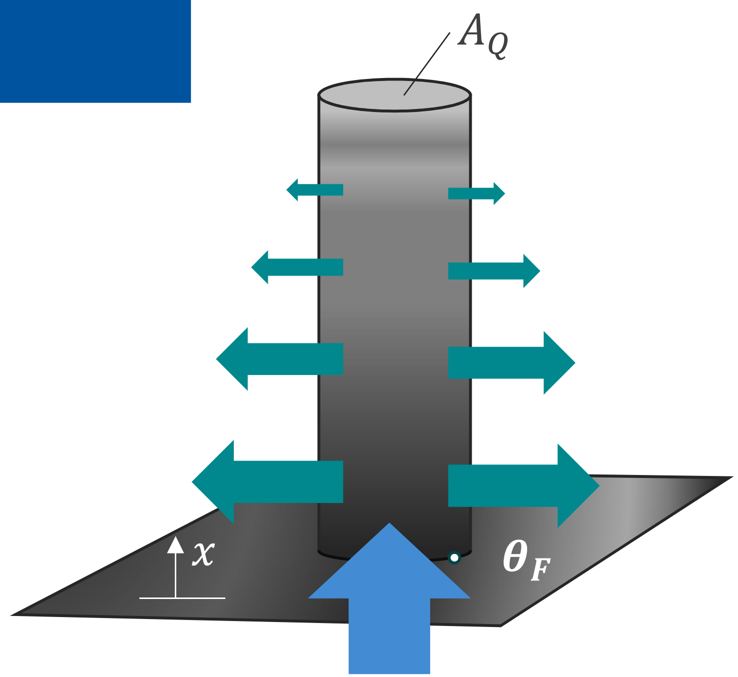
Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{\text{Von einer Rippe übertragene Wärme}}{\text{Maximal übertragbare Wärmemenge}}$$

Von der Rippe übertragener Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{WL,Fuß} = -\lambda \cdot A_Q \cdot \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -\lambda \cdot A_Q \cdot \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$

$$\boxed{\dot{Q}_{WL,Fuß} = -\lambda \cdot A_Q \cdot m \cdot \theta_F \cdot \tanh(mL)}$$



$$\boxed{\dot{Q}_{Konv} = \dot{Q}_{WL,Fuß}}$$

Rippenwirkungsgrad

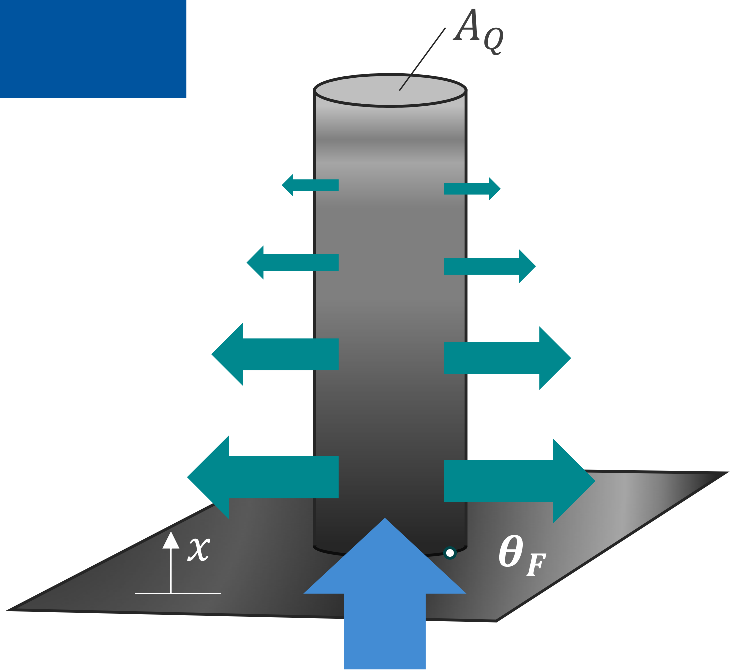
$$\eta_R = \frac{\text{Von einer Rippe übertragene Wärme}}{\text{Maximal übertragbare Wärmemenge}}$$

Von der Rippe übertragener Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{WL,Fuß} = -\lambda \cdot A_Q \cdot \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = -\lambda \cdot A_Q \cdot \frac{d\theta}{dx}\bigg|_{x=0}$$

$$\frac{d\theta}{dx}\bigg|_{x=0} = -m \cdot \theta_F \cdot \left(\frac{e^{m\,L} + e^{-m\,L}}{e^{m\,L} + e^{-m\,L}}\right) = -m \cdot \theta_F \cdot \tanh(mL)$$

$$\boxed{\dot{Q}_{WL,Fuß} = -\lambda \cdot A_Q \cdot m \cdot \theta_F \cdot \tanh(mL)}$$



$$\boxed{\dot{Q}_{Konv} = \dot{Q}_{WL,Fuß}}$$

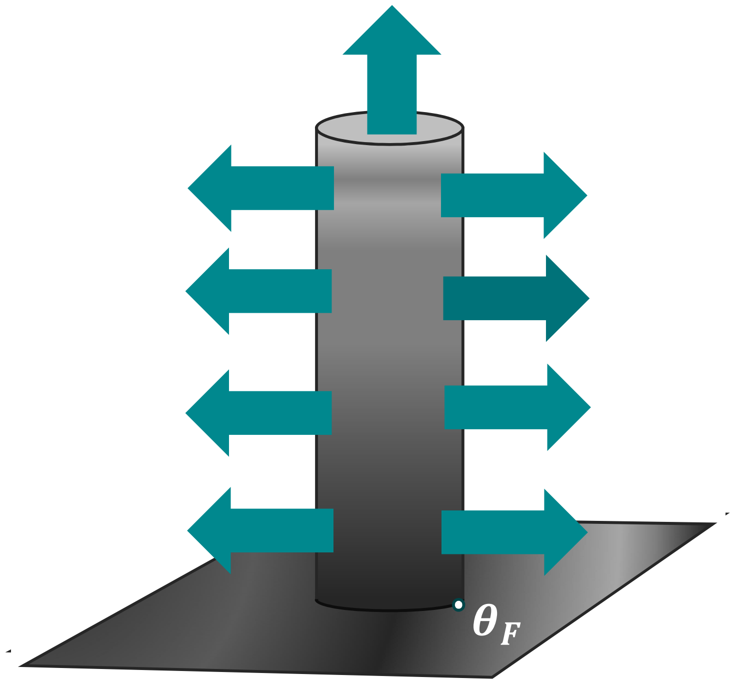
Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{\text{Von einer Rippe übertragene Wärme}}{\text{Maximal übertragbare Wärmemenge}}$$

Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{\dot{Q}_{WL,Fuß}}{\dot{Q}_{max}}$$

$$\dot{Q}_{max} = \pi \cdot d \cdot \alpha \underbrace{\int_0^L \theta_F dx}_{\theta_F \cdot L} = \underbrace{\pi \cdot d}_{u} \cdot \alpha \cdot \theta_F \cdot L$$



$$\dot{Q}_{Konv} = \dot{Q}_{WL,Fuß}$$

Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{\text{Von einer Rippe übertragene Wärme}}{\text{Maximal übertragbare Wärmemenge}}$$

$$A_Q = \pi \frac{d^2}{4}$$

Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{\dot{Q}_{WL,Fuß}}{\dot{Q}_{max}}$$

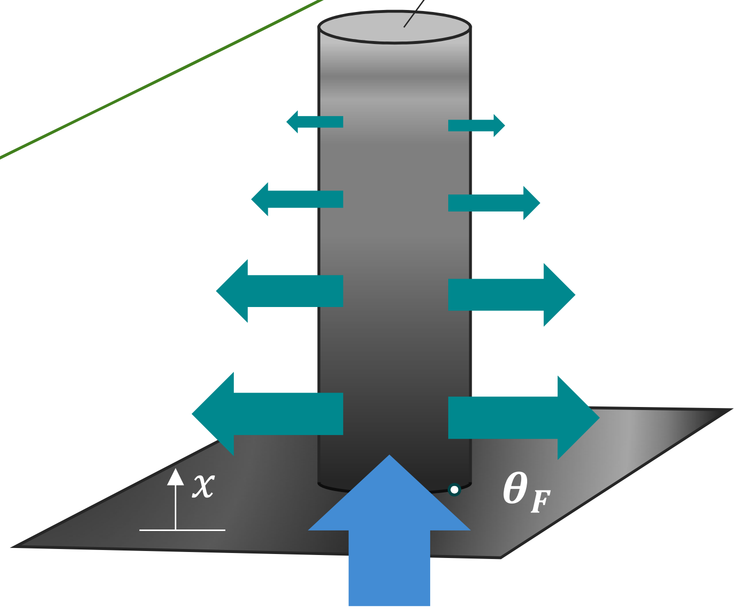
$$\dot{Q}_{max} = \pi \cdot d \cdot \alpha \underbrace{\int_0^L \theta_F dx}_{\theta_F \cdot L} = \underbrace{\pi \cdot d}_{u} \cdot \alpha \cdot \theta_F \cdot L$$

$$m^2 = \frac{4\,\alpha}{\lambda\, d}$$

$$\frac{1}{m^2} \cdot m$$

$$\eta_R = \frac{\lambda \cdot A_Q \cdot m \cdot \cancel{\theta_F} \cdot \tanh(mL)}{\pi \cdot d \cdot \alpha \cdot \cancel{\theta_F} \cdot L}$$

$$\eta_R = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

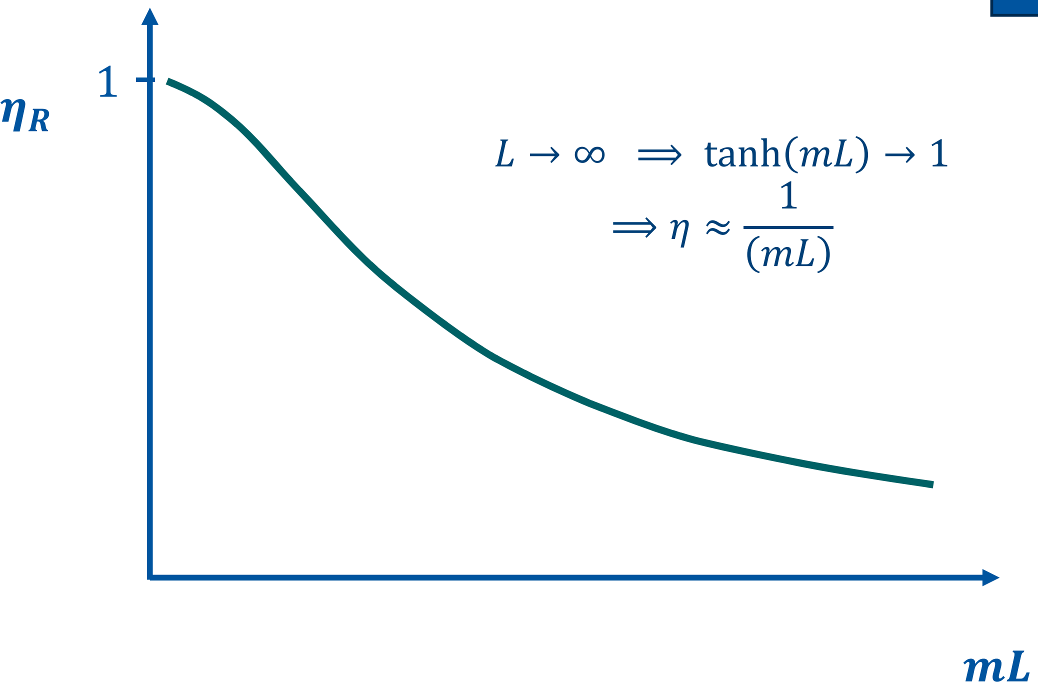


$$\dot{Q}_{Konv} = \dot{Q}_{WL,Fuß}$$

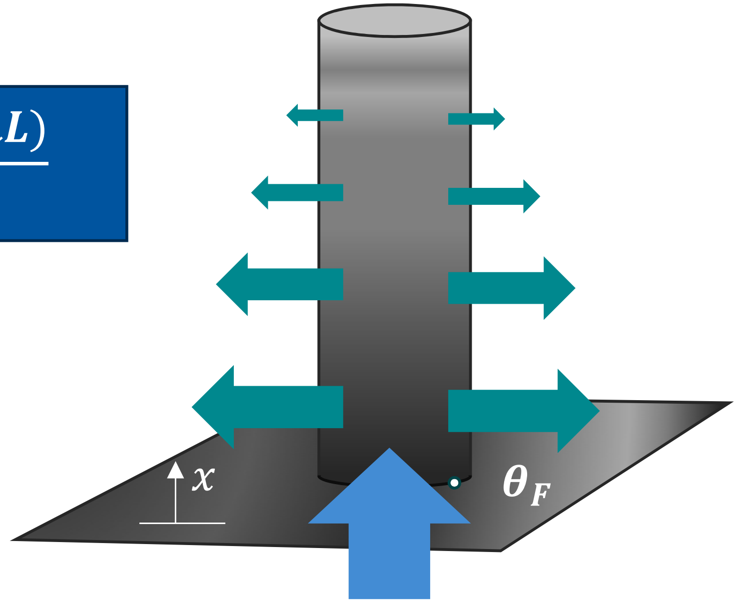
Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{\textbf{Von einer Rippe übertragene Wärme}}{\textbf{Maximal übertragbare Wärmemenge}}$$

$$\eta_R = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$



$$L \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \tanh(mL) \to 1$$
$$\Longrightarrow \eta \approx \frac{1}{(mL)}$$



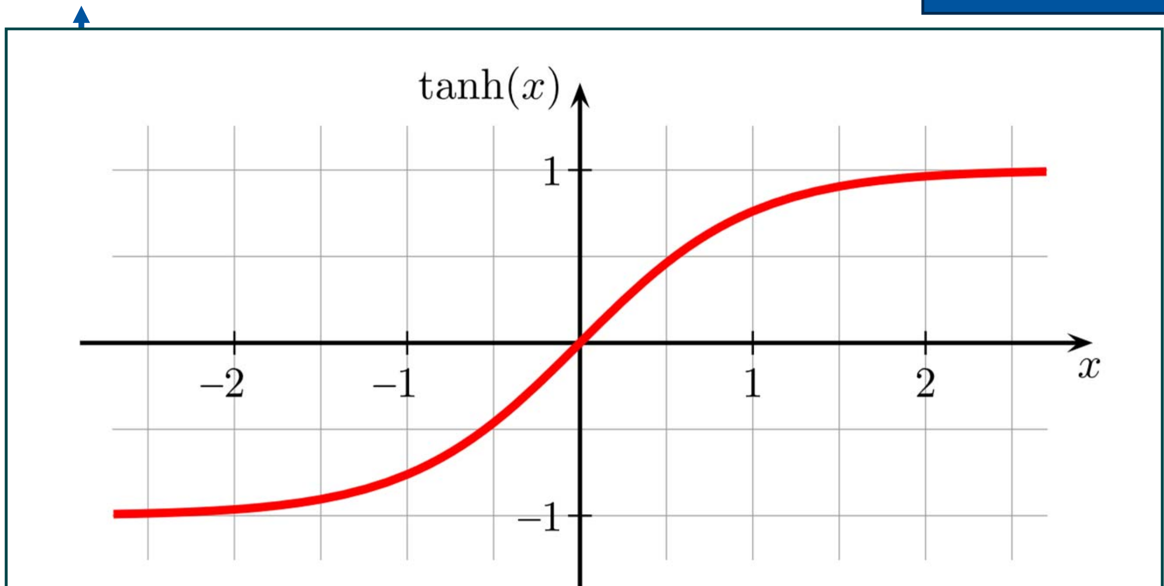
$$\dot{Q}_{Konv} = \dot{Q}_{WL,Fuß}$$

Rippenwirkungsgrad

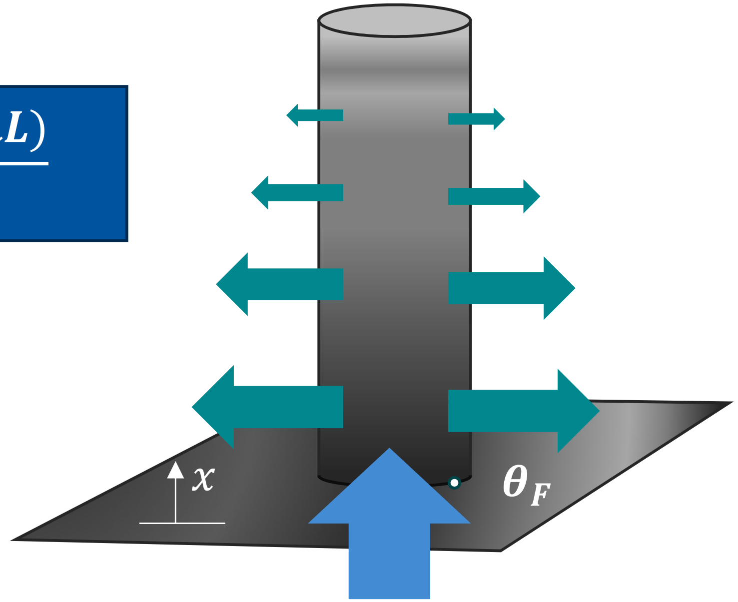
$$\eta_R = \frac{\text{Von einer Rippe übertragene Wärme}}{\text{Maximal übertragbare Wärmemenge}}$$

$$\eta_R = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

η_R



mL



$$\dot{Q}_{Konv} = \dot{Q}_{WL,Fuß}$$

Rippenwirkungsgrad

Rippenparameter m:

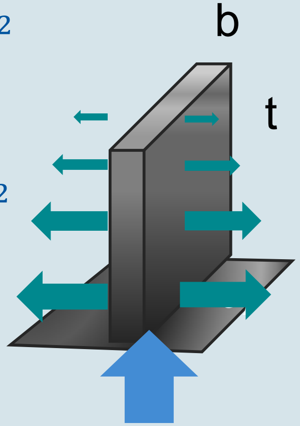
$$m = \left(\frac{\alpha\, U}{\lambda\, AQ}\right)^{1/2}$$

$$\eta_R = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

Ebene Rippe:

$$m = \left(\frac{2\,(b+t)\,\alpha}{\lambda\, b\, t}\right)^{1/2}$$

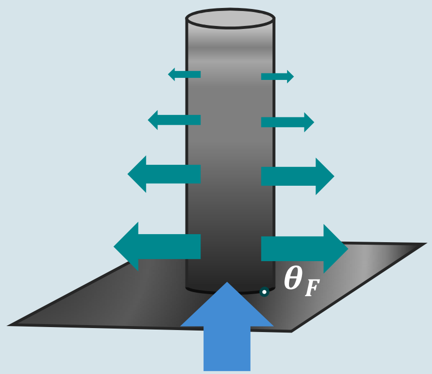
$$= \left(\frac{2\,\alpha}{\lambda}\,\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{b}\right)\right)^{1/2}$$



$$mit\ \ \frac{1}{b} \gg \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad m \approx \left(\frac{2\,\alpha}{\lambda\, b}\right)^{1/2}$$

Zyl. Stabrippe:

$$m = \left(\frac{\alpha\, \pi d}{\lambda\, \pi \frac{d^2}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4\,\alpha}{\lambda\, d}\right)^{1/2}$$



Rippenwirkungsgrad erhöhen?

$$\eta_R = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

$$\eta_R \propto 1/mL$$

- Material:

$$\lambda \uparrow \quad \Longrightarrow \quad m^2 \downarrow \quad \Longrightarrow \quad \eta \uparrow$$

- Rippengeometrie ($L = konst.$):

$$d \uparrow \quad \Longrightarrow \quad m^2 \downarrow \quad \Longrightarrow \quad \eta \uparrow$$

- Anströmung:

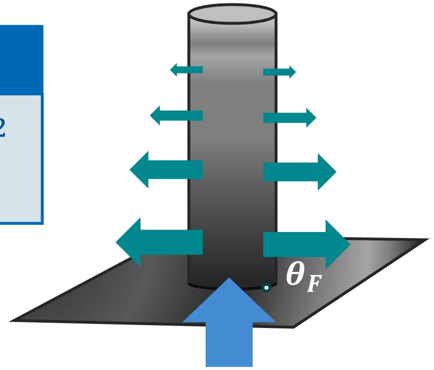
$$\alpha \downarrow \quad \Longrightarrow \quad m^2 \downarrow \quad \Longrightarrow \quad \eta \uparrow$$

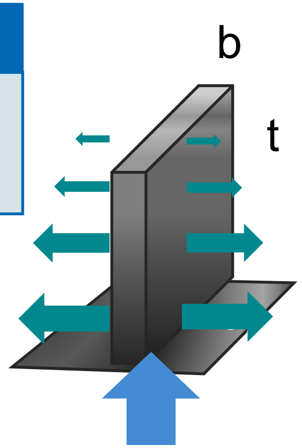
Stabrippe:

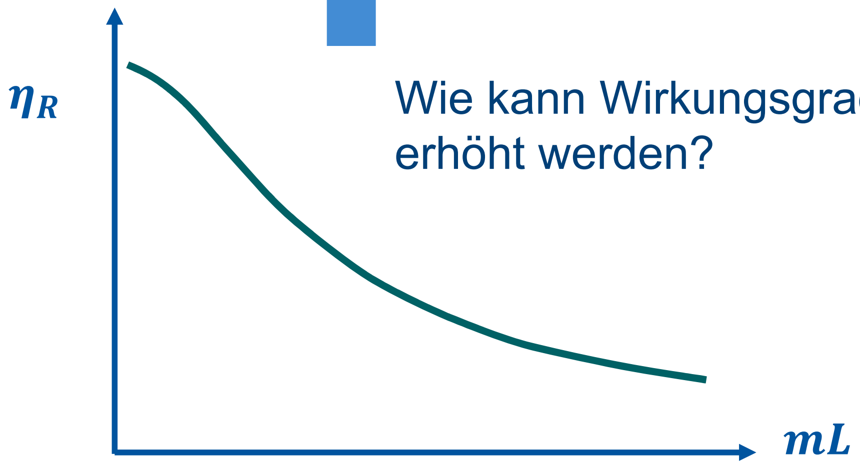
$$m = \left(\frac{4\,\alpha}{\lambda\,d}\right)^{1/2}$$

Ebene Rippe:

$$m = \left(\frac{2\,\alpha}{\lambda\,\delta}\right)^{1/2}$$





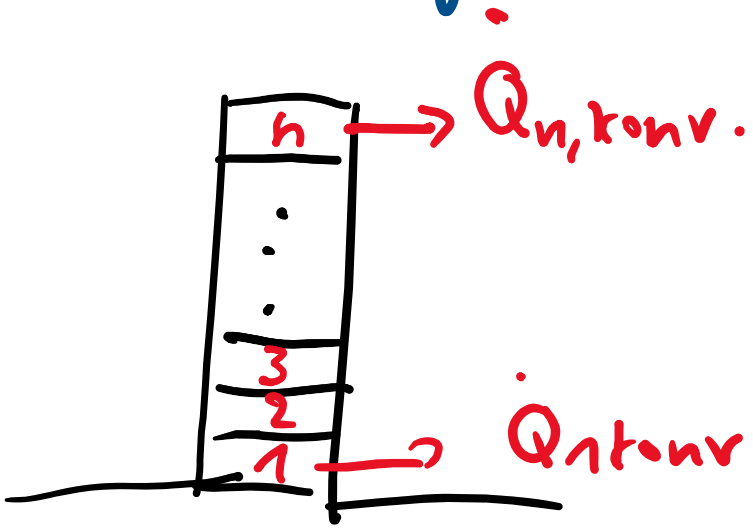


Wie kann Wirkungsgrad erhöht werden?

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Rippenwirkungsgrad

Rippenwirkungsgrad gibt lediglich an wie gut einzelne Abschnitte einer Rippe ausgenutzt werden!



für $\eta \uparrow \Rightarrow \dot{Q}_{1konv} \approx \dot{Q}_{n\,konv}$

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Rippenwirkungsgrad

Rippenwirkungsgrad gibt lediglich an wie gut einzelne Abschnitte einer Rippe ausgenutzt werden!

η_R macht keine Aussage über den übertragenen Wärmestrom ⇒ obwohl bei Verlängerung einer Rippe η_R sinkt

⇒ $\dot{Q}_{übertragen}$ steigt!

Verständnisfragen

Welchen Zusammenhang beschreibt der Rippenwirkungsgrad?

Was ist die Annahme für die theoretisch maximal übertragbare Wärme einer Rippe?

Wie lässt sich der Rippenwirkungsgrad erhöhen?