Wärme- und Stoffübertragung I

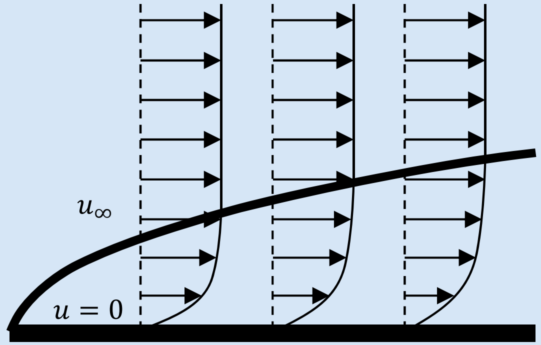
Grenzschichtgleichungen
– Erzwungene Konvektion

Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kneer
Dr.-Ing. Dr. rer. pol. Wilko Rohlfs

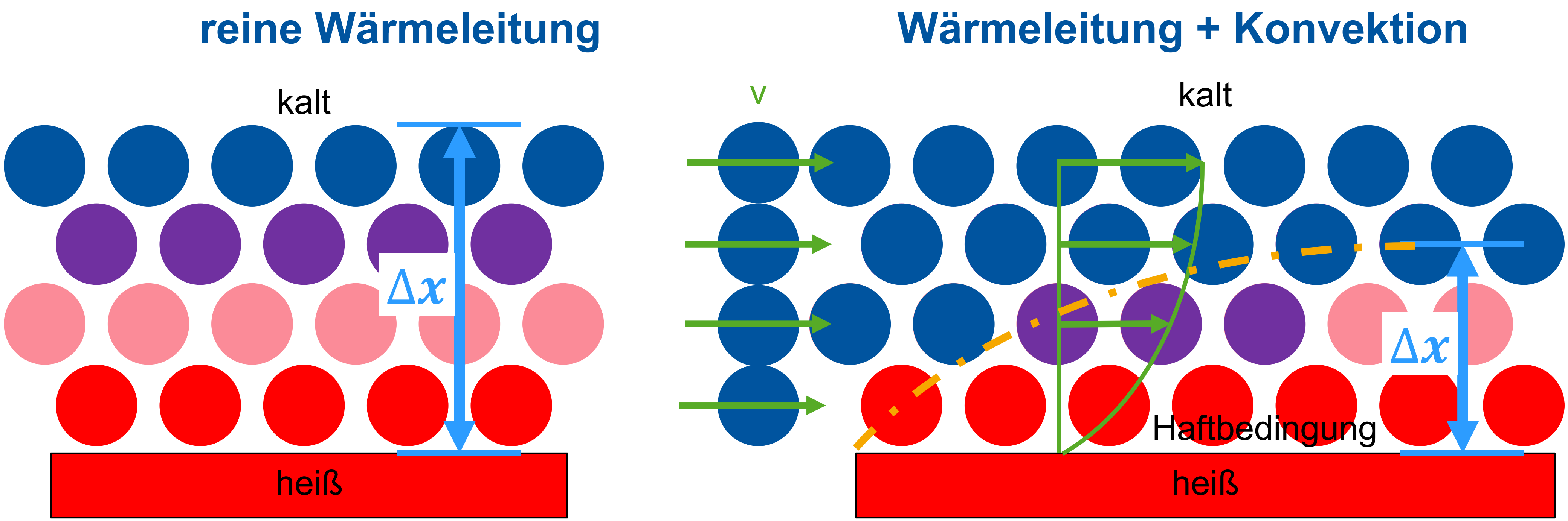
Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lernziele

- Grenzschicht bei der erzwungenen Konvektion
  - ➢ Verständnis des Grenzschichtkonzepts an einer ebenen Platte in einer kontanten laminaren Strömung
  - ➢ Ähnlichkeit der Geschwindigkeits- und Temperaturprofile und die Abhängigkeit des Wärmeübergangskoeffizienten von der Scherspannung



Was ist eine Grenzschicht?



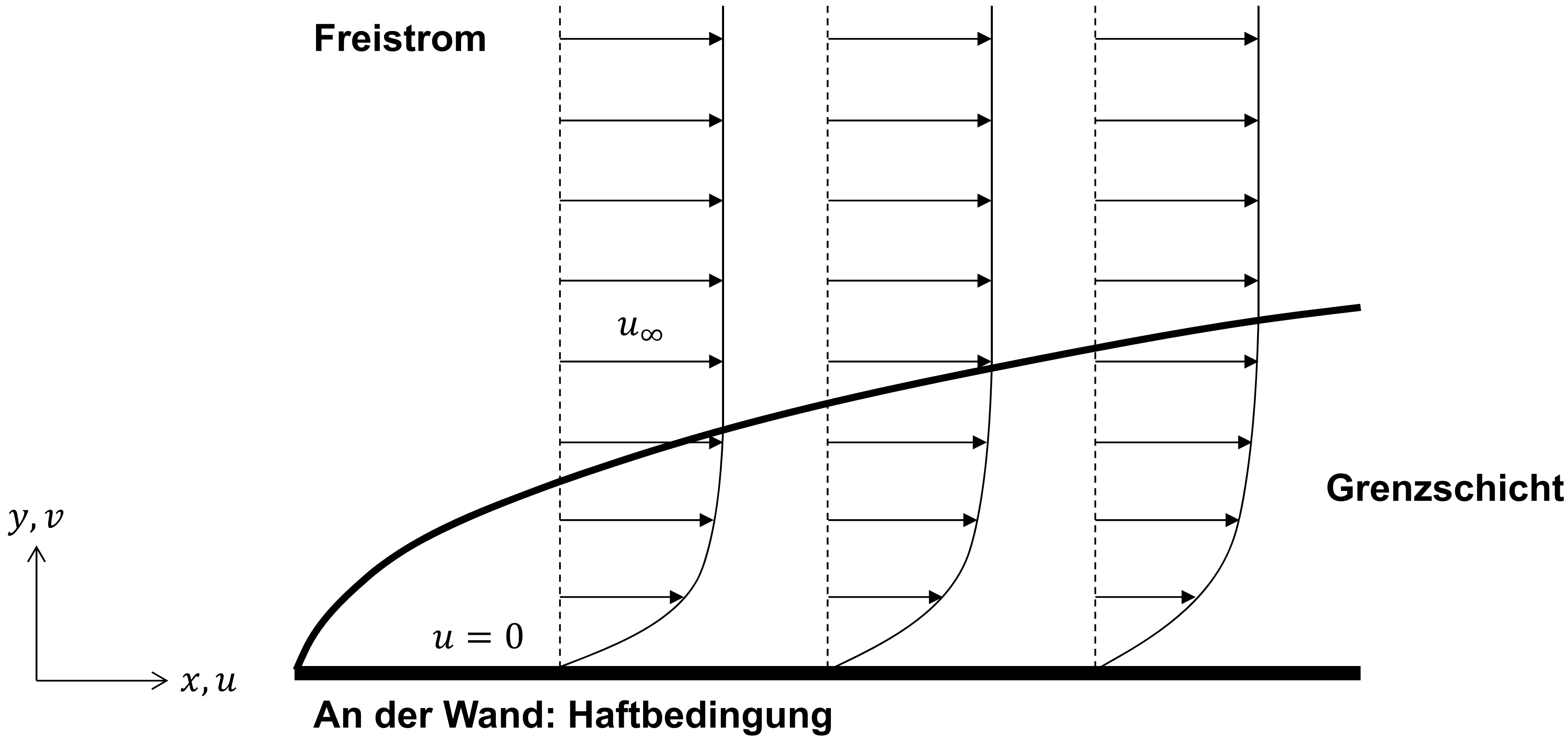
- Die „Temperaturgrenzschicht" endet dort, wo sich die Temperatur zu 99% der Umgebungsübertemperatur angenähert hat.
- Konvektion erhöht den Wärmeübergang.

⇒ steilerer Temperaturgradient ⇒ höherer Wärmeübergang

Geschwindigkeitsgrenzschicht (Wdh. Strömungslehre)

Definition

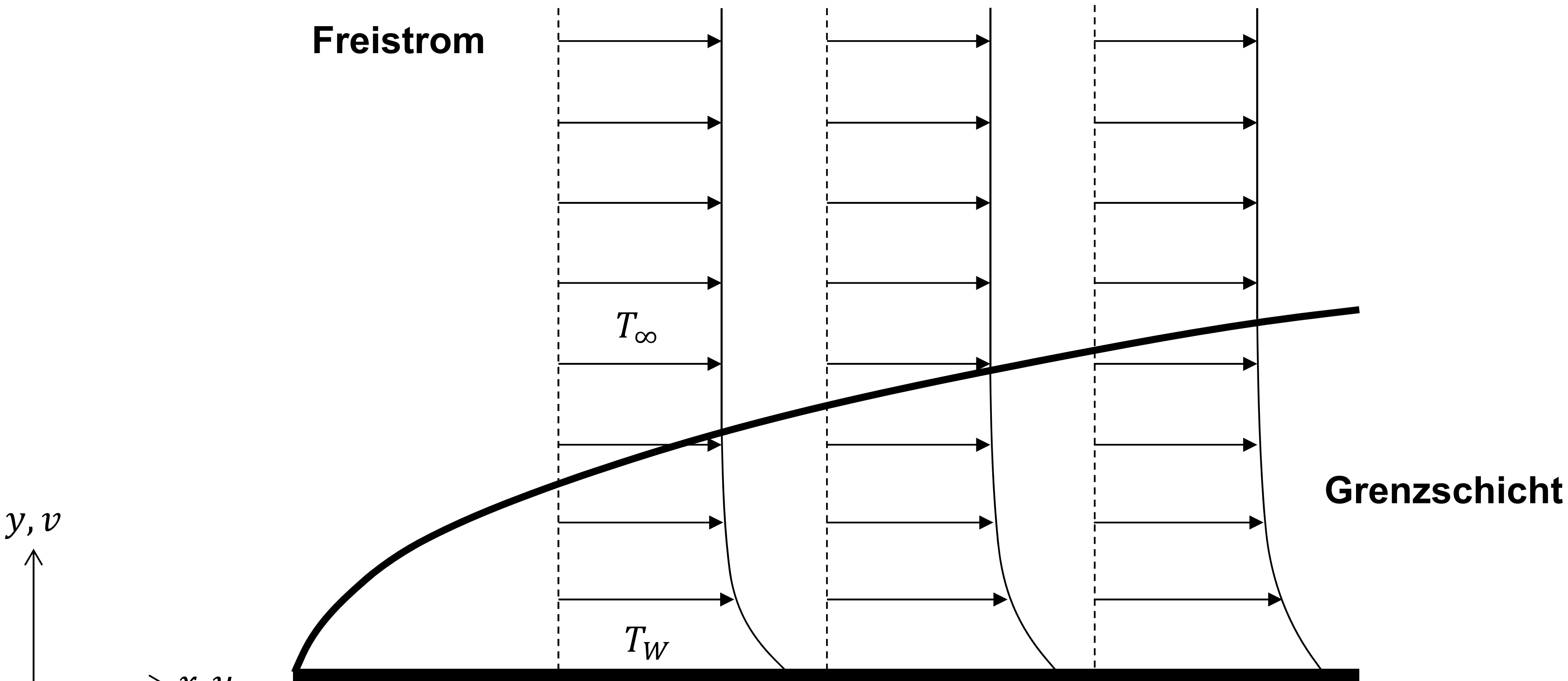
Die Ausdehnung der „Geschwindigkeitsgrenzschicht“ δ_u ist mit dem Erreichen von 99% der Umgebungsgeschwindigkeit definiert: $u(y = \delta_u) = 0{,}99 u_\infty$



Temperaturgrenzschicht

Definition

Die Ausdehnung der „Temperaturgrenzschicht“ δ_T ist mit dem Erreichen von 99% der Umgebungsübertemperatur definiert: $T_W - T(y = \delta_T) = 0{,}99(T_W - T_\infty)$



An der Wand: Vorgegebene Temperatur T_W, hier $T_W > T_\infty$

Rückblick: Erhaltungsgleichungen (2D, stationär, inkompressibel)

Kontinuitäts-
gleichung

Massenströme

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

$$u \gg v \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

- In Strömungsrichtung überwiegt die absolute Geschwindigkeit.
- Senkrecht zur Oberfläche (normale Richtung) dominieren Gradienten.

Rückblick: Erhaltungsgleichungen (2D, stationär, inkompressibel)

Massenströme

Kontinuitäts-
gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \gg v \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

Impulsströme | Druck | Scherspannungen

Impuls-
gleichung

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cancelto{0}{\frac{\partial p}{\partial x}} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)}$$

vernachlässigbar

Enthalpieströme | Wärmeleitung

Energie-
gleichung

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}\left(\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

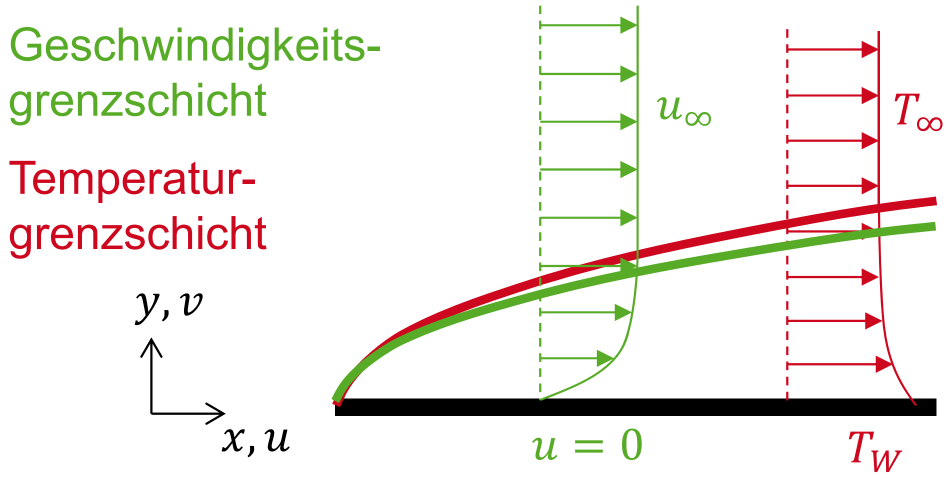
Wenn $Pr = 1$, sind Impuls- und Energiegleichung identisch.

Prandtl-Zahl

Kontinuitäts-
gleichung

Impuls-
gleichung

Energie-
gleichung



Erinnerung: Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{Diffusiver Impulstransport}}{\text{Diffusiver Wärmetransport}} \quad \begin{matrix} \rightarrow u \text{ relevant} \\ \rightarrow T \text{ relevant} \end{matrix}$$

$$Pr = 1$$

$$\Updownarrow$$

Identität zwischen der viskosen und der thermischen Grenzschicht (Dicke $\delta_u = \delta_T$, Gradient $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$ usw.)

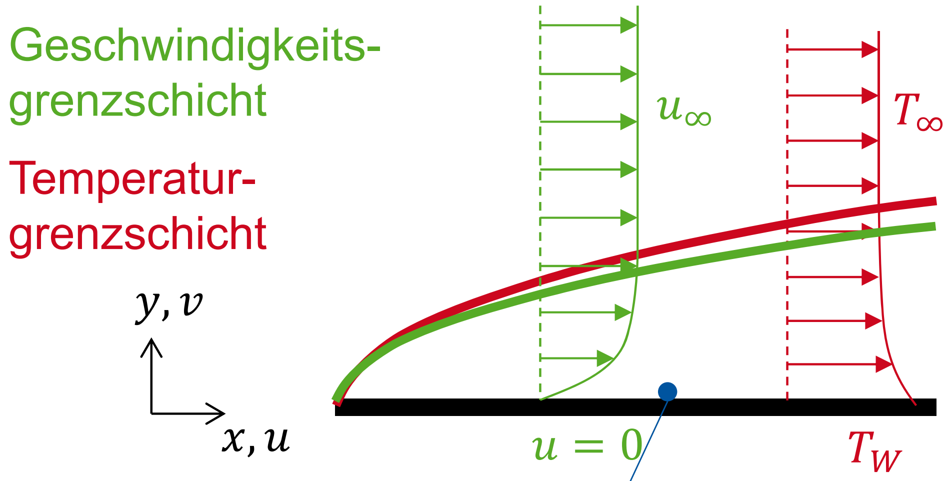
Verständnisfragen

Worin unterscheiden sich Nusselt- und Biot-Zahl?

Welche Relevanz hat die Prandtl-Zahl für die Grenzschichttheorie?

Bestimmung von Geschwindigkeits- und Temperaturprofil in der Grenzschicht

Kontinuitäts-
gleichung



Impuls-
gleichung

Energie-
gleichung

Wie kann die Geschwindigkeit sowie Temperatur innerhalb Grenzschichten quantitativ bestimmt werden, damit die Schubspannung (Geschwindigkeitsgradient) sowie der Wärmeübergangskoeffizient (Temperaturgradient) auf der Oberfläche erfasst werden können?

Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Erhaltungsgleichungen (2D, stationär, inkompressibel, ebene Grenzschicht)

Kontinuitätsgleichung

Massenströme

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Impulsgleichung

Impulsströme | Scherspannungen

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Energiegleichung

Enthalpieströme | Wärmeleitung

$$u^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \Theta^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\underbrace{RePr}_{Pe}} \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial y^{*2}}$$

Entdimensionierung

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$y^* = \frac{y}{L}$$

$$u^* = \frac{u}{u_\infty}$$

$$v^* = \frac{v}{u_\infty}$$

$$\Theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}$$

Exakte Lösungen – Impulsgleichung (nicht klausurrelevant)

Impulsströme | Scherspannungen

Impulsgleichung

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

dimensionsloser Wandabstand

$$\xi^* = y \left(\frac{\rho u_\infty}{\eta x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{x} Re_x{}^{\frac{1}{2}}$$

Stromfunktion ψ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}\ , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dimensionslose Stromfunktion f

$$f = \psi \left(\frac{\rho}{\eta u_\infty x} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f' = \frac{df}{d\xi^*} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi^*} \left(\frac{\rho}{\eta u_\infty x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

daraus

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi^*} \cdot \frac{\partial \xi^*}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi^*} \cdot \left(\frac{\rho u_\infty}{\eta x} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow f' = \frac{u}{u_\infty}$$

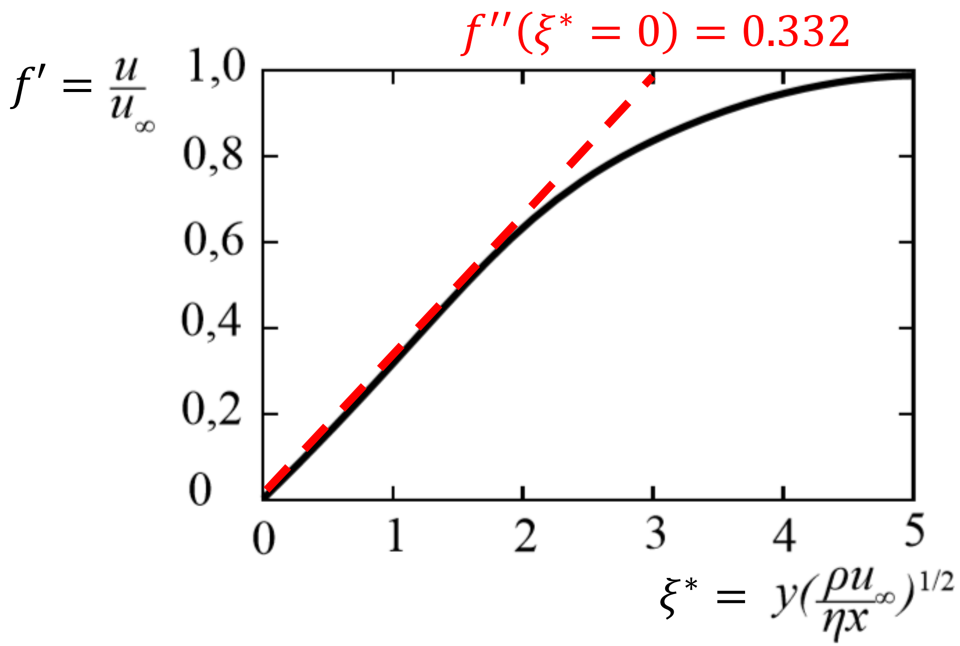
Umformungen

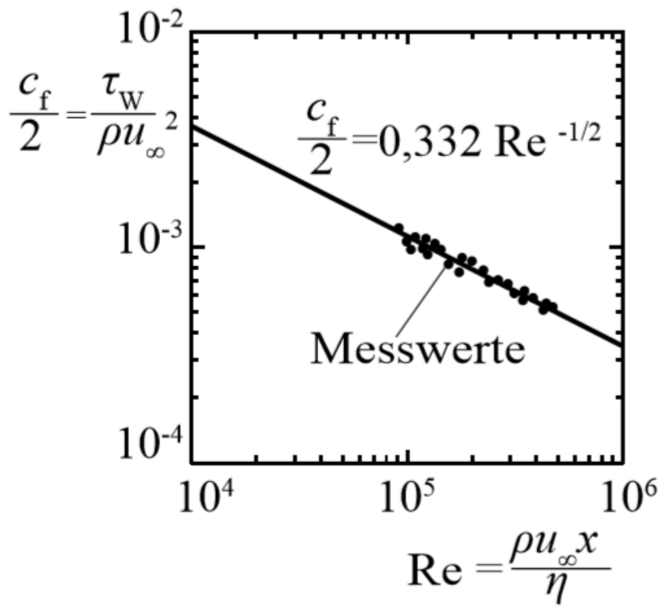
$$f''' + f'' \cdot f = 0$$

Lösungsweg

$f(\xi^*)$⇒Geschwindigkeit Profil f'⇒Rücktransformation $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$ ⇒Wandschubspannung τ_W

Exakte Lösungen – Impulsgleichung (nicht klausurrelevant)





Dimensionslose Wandschubspannung

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_W}{\rho u_\infty{}^2} = \frac{\eta \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}}{\rho u_\infty{}^2} = \frac{\eta}{\rho u_\infty}\left(\frac{\rho u_\infty}{\eta x}\right)^{\frac{1}{2}} \left.\frac{\partial f'}{\partial \xi^*}\right|_{\xi^*=0} = Re^{-\frac{1}{2}} f''(\xi^* = 0)$$

Exakte Lösungen – Energiegleichung (nicht klausurrelevant)

Enthalpieströme Wärmeleitung

Energie-gleichung

$$u^*\frac{\partial\Theta^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial\Theta^*}{\partial y^*}=\frac{1}{\underbrace{RePr}_{Pe}}\frac{\partial^2\Theta^*}{\partial y^{*2}}$$

Nach ähnlichem Vorgehen wie bei der Impulsgleichung

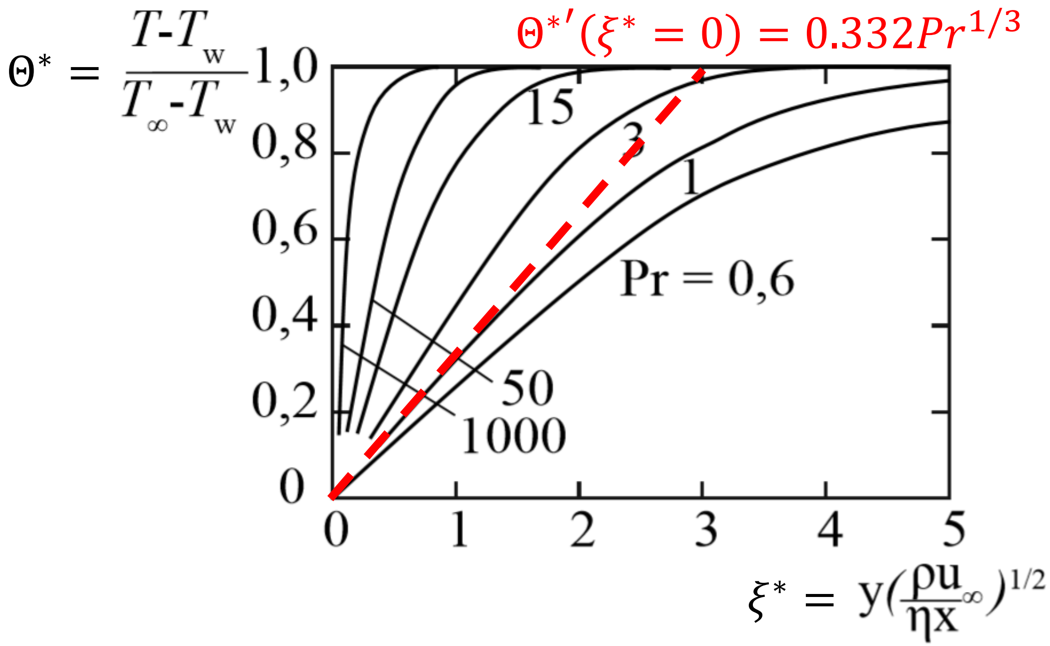
Umformungen

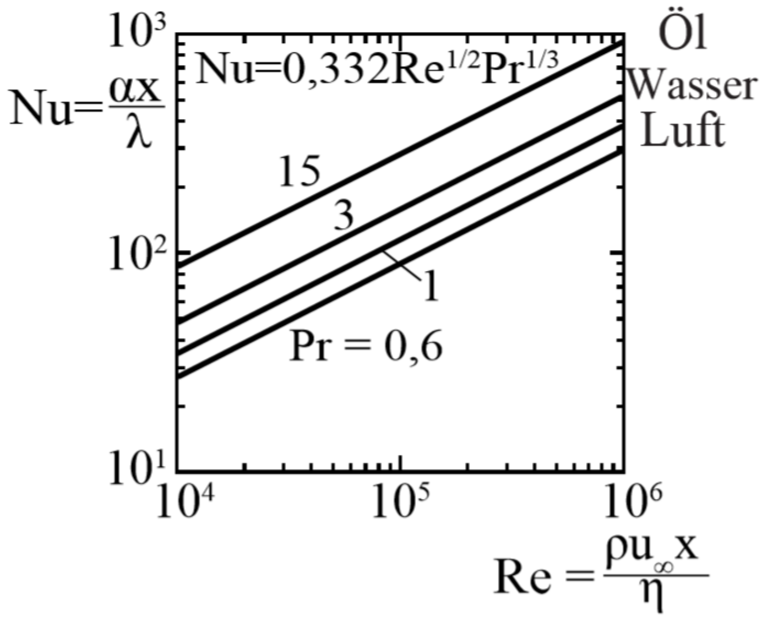
$$\Theta^{*\prime\prime}+\Theta^{*\prime}\cdot Pr\cdot f=0$$

Lösungsweg

Temperatur Profil Θ^* ⇒ Rücktransformation $\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$ ⇒ Wärmeübergangskoeffizient α

Exakte Lösungen – Energiegleichung (nicht klausurrelevant)





Dimensionslose Wärmeübergangskoeffizient

$$Nu = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{\left(\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}\right) x}{\lambda} = x\left(\frac{\rho u_\infty}{\eta x}\right)^{\frac{1}{2}} \left.\frac{\partial \Theta^*}{\partial \xi^*}\right|_{\xi^*=0} = Re^{\frac{1}{2}} \Theta^{*\prime}(\xi^* = 0)$$

Exakte Lösungen (nicht klausurrelevant)

Dimensionslose Geschwindigkeits- und Temperaturprofil identisch

$$\left.\frac{\partial f'}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial \Theta^*}{\partial y}\right|_{y=0} \quad \text{wenn } Pr = 1$$

Näherungsweise

$$Nu = \underbrace{0{,}332}_{\frac{c_f}{2} Re^{\frac{1}{2}}} Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} = \frac{c_f}{2} Re Pr^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow Nu = Nu(Re, Pr)$$

Lokale und gemittelte Wärmeübertragungskoeffizient

Entlang der gesamten Platten $\bar{\alpha} = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha(x)dx$

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda}$$

Verständnisfragen

Worin unterscheiden sich Nusselt- und Biot-Zahl?

Welche Relevanz hat die Prandtl-Zahl für die Grenzschichttheorie?

Falls Identität zwischen der Dicke der Strömungs- und der Temperaturgrenzschicht besteht ($\delta_u = \delta_T$), gilt welche Beziehung für die Nusselt-Zahl? (nicht klausurrelevant)

$$Pr = 1 \Rightarrow Nu = \frac{c_f}{2} Re Pr^{\frac{1}{3}} \sim Re \sim u_\infty$$

(Im beschriebenen Fall ist die Nusselt-Zahl direkt proportional zur Reynolds Zahl und, in Erweiterung dessen, der Strömungsgeschwindigkeit.)