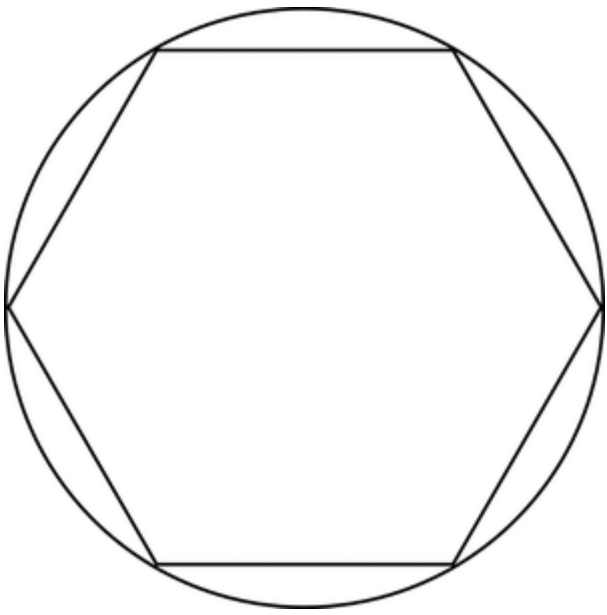


1-1. 원주율 구하기 - 아르키메데스

원주율

원주율은 원의 지름에 대한 원주(원둘레)의 비율이다. 모든 원은 닮음이므로 모든 원에 대해 이 값은 일정하다. (상수) 그러므로 특정 반지름(주로 1)에 대해 원의 둘레의 길이를 구하면 된다. 무한소수이므로 근사값을 구할 수 밖에 없는데, 소수점 아래 다섯 자리 3.14159까지 구하자.

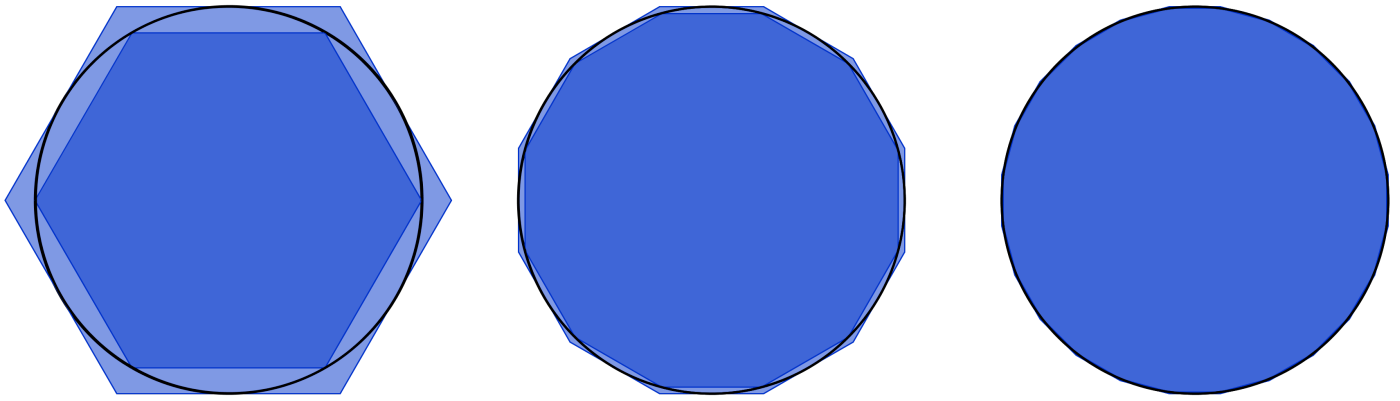
원의 둘레를 구하기



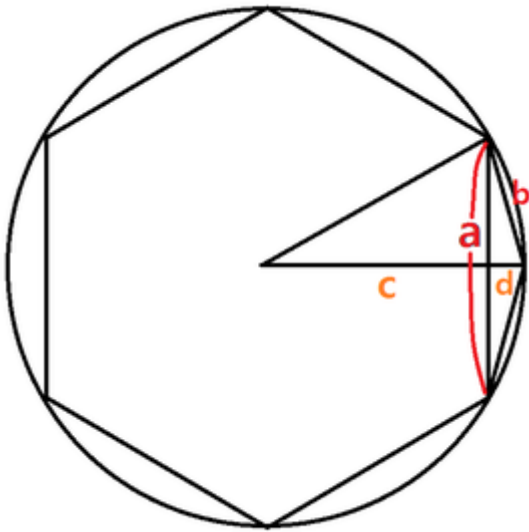
원의 둘레를 근사하는 방법은 원과 비슷하게 생긴 다각형의 둘레를 구하는 것이다. 아르키메데스는 96각형의 둘레를 구하였다. 원에 외접하는 다각형도 좋지만, 먼저 내접하는 다각형을 이용하자. 처음엔 정6각형을 구하고, 그것을 이용하여 계속 각을 늘려가는 방법으로 다각형의 둘레를 구하자. 정육각형으로 시작하는 이유는 반지름 1인 원에 내접하는 정육각형은 한 변의 길이가 1이기 때문에 변의 길이를 알고 시작할 수 있기 때문이다.

다각형의 둘레 구하기

정6각형의 둘레의 길이는 6이므로, 정육각형으로 원의 둘레를 구하면 6이다. 아직은 원의 둘레의 길이와 큰 오차가 있다. (원의 반지름이 2이므로 3.14의 2배인 6.28 정도가 나와야 근사값이라고 볼 수 있다.) 각을 늘려 12각형의 둘레의 길이를 구하자. 각을 늘릴 때, 7각형이 아니라 12각형을 쓰는 이유는 6각형의 각각의 변을 나누는 방식으로 6각형과의 관계를 이용하여 12각형의 변의 길이를 구할 수 있기 때문이다. 또한, 각을 2배씩 빠르게 늘리는 것은 장점인데, 다각형은 원에 가까울 수록 좋기 때문에 빠르게 각을 늘릴 수록 좋다.



정n각형과 정2n각형의 관계식은 다음과 같다.



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 = 1^2 \quad (a/2)^2 + c^2 = 1 \quad \dots ①$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = b^2 \quad (a/2)^2 + d^2 = b^2 \quad \dots ②$$

$$c + d = 1 \quad c + d = 1 \quad \dots ③$$

위 세 식에서 ①을 c로 정리하고 ②를 d로 정리하여, ③에 대입하는 방식으로, c와 d를 제거하면, a와 b의 관계식을 얻는다.

$$b = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

$$b = 2 - 4 - a^2$$

코딩

이것을 코드로 표현하면

```
b = ( 2 - ( 4 - a**2 ) **.5 ) **.5
```

이다. 제곱근(sqrt)은 $\frac{1}{2}$ = 0.5를 제공하는 것으로 표현 가능하다.

그래서 코드는 아래와 같다.

```
diameter=2 # 원의 지름은 2
polygon=6 # 6각형으로 시작
side=1 # 6각형의 변의 길이는 1

n=10
for i in range(n):
    polygon = polygon * 2 # 다각형의 각을 2배로
    side = ( 2 - ( 4 - side**2 ) **.5 ) **.5 # 다각형 사이의 변 길이의 관계
    pi = side*polygon/diameter
    print(pi)
```

오차를 표시하자. 이를 위해 파이썬에 있는 pi 값을 가져온다. 그리고 각각의 근사값 앞에 어떤 다각형으로 구하였는지를 표시해주면 좋다.

```
import math

diameter=2
polygon=6
side=1

n=10
for i in range(n):
    polygon = polygon * 2
    side = ( 2 - ( 4 - side**2 ) **.5 ) **.5
    pi = side * polygon / diameter
    print(polygon, ":", pi, math.pi-pi)
```

결과 분석

```
12 : 3.1058285412302498 0.035764112359543354
24 : 3.132628613281237 0.008964040308556243
48 : 3.139350203046872 0.0022424505429210484
96 : 3.14103195089053 0.0005607026992633379
192 : 3.1414524722853443 0.0001401813044488165
384 : 3.141557607911622 3.504567817103066e-05
768 : 3.141583892148936 8.76144085726338e-06
1536 : 3.1415904632367617 2.1903530313949204e-06
3072 : 3.1415921060430483 5.475467448334825e-07
6144 : 3.1415925165881546 1.3700163847829572e-07
```

1536각형에서 우리가 구하는 1/100000 자리까지 정확한 3.14159를 구하였다. 6각형을 1단계라고 하였을 때, 9 단계에서

외접 다각형을 이용하자

외접하는 다각형을 이용하여 원의 둘레의 근사값을 구하자. 그리고 정6각형에서 출발해도 되지만, 변수 polygon 과 side의 초기값을 바꾸어서, 정4각형이나 정3각형에서 시작해서 각을 늘려가도 상관없이 파이값을 구할 수 있음을 확인하자.

외접 다각형과 내접 다각형의 둘레의 평균

외접 다각형과 내접 다각형의 둘레를 동시에 구해서, 그 평균을 원의 둘레값으로 채택하면 좀더 정확한 값을 구할 수 있다.