MEM155 - Métodos Matemáticos II

Mohit Karnani

Universidad de Chile

Otoño, 2016

Curso

Control 1

▸ Volver al Inicio

Módulo 2

▸ Volver al Inicio de la Sección

Definición de Incrementos

Definición 1

Sean x_1 y x_2 un primer y segundo valor de una variable x. Entonces el *incremento* de x es $\Delta x = x_2 - x_1$, esto es, el *cambio en el valor* de x.

Definición 2

Sea y una variable dependiente de x tal que $y = f(x)$, donde f está definida para los valores de x entre x_1 y x_2 y además se cumple que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Entonces el incremento de y es $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$, esto es, el cambio en el valor de $y = f(x)$.

Ejemplo: Cantidad Demandada

Ejemplo 1

Considere que la cantidad de cereal que demanda una familia a la semana depende del precio de venta de éste. Así, $q(p) = 1000p^{-1}$, donde q son los kilos de cereal demandados y p es el precio en pesos. Si el precio de venta pasa de 500 a 1000 pesos, ¿cuál es el incremento en la demanda?

Ejemplo: Cantidad Demandada

Ejemplo 1

Considere que la cantidad de cereal que demanda una familia a la semana depende del precio de venta de éste. Así, $q(p) = 1000p^{-1}$, donde q son los kilos de cereal demandados y p es el precio en pesos. Si el precio de venta pasa de 500 a 1000 pesos, ¿cuál es el incremento en la demanda?

Solución 1

Utilizando la Definición 2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta q &= q_2 - q_1 \\
&= 1000p_2^{-1} - 1000p_1^{-1} \\
&= 1000 \cdot 1000^{-1} - 1000 \cdot 500^{-1} \\
&= 1 - 2 = -1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento en la cantidad demandada es de -1 (se demanda un kilo menos).

Gráfico: Cantidad Demandada

Figura 1: Incremento en precio y cantidad demandada

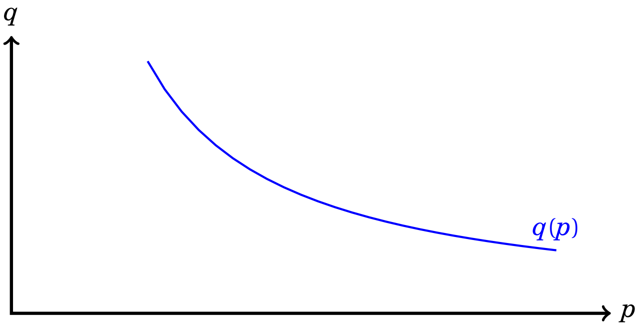


Gráfico: Cantidad Demandada

Figura 1: Incremento en precio y cantidad demandada

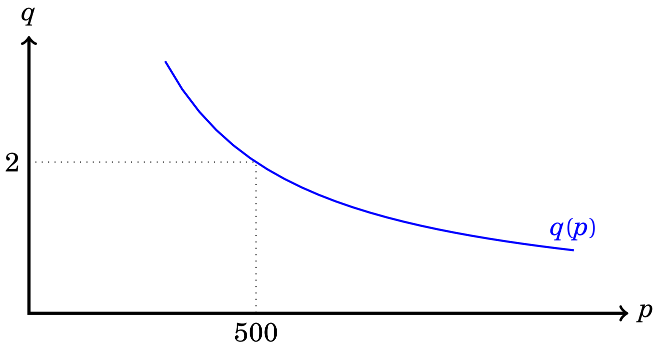
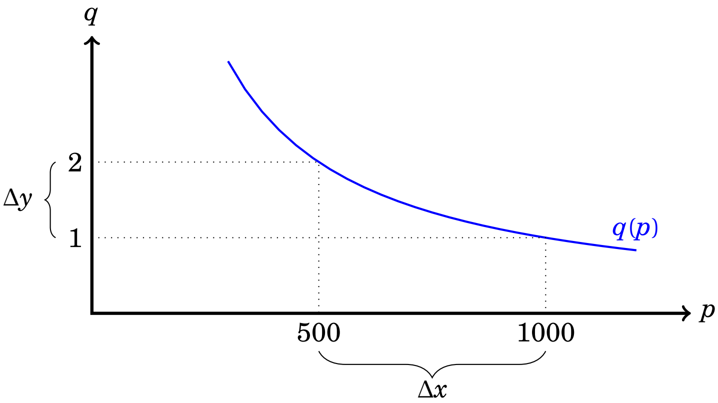


Gráfico: Cantidad Demandada

Figura 1: Incremento en precio y cantidad demandada



Reordenando Términos

Notar que de la Definición 1 se desprende que $x_2 = x_1 + \Delta x$. Reemplazando esto en la Definición 2 y considerando que x_1 puede ser cualquier valor de x se obtiene

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1}$$

La ecuación (1) puede ser útil para determinar el cambio en una variable dependiente y cuando la variable independiente x sufre un incremento de Δx, estando inicialmente en una situación descrita por el par (x, y).

Propuesto 1

Considere la función $y = f(x) = x^3$. Determine Δy dado cualquier x inicial y cualquier incremento Δx.

Tasa de Cambio Promedio

Definición 3

La tasa (o razón) de cambio promedio de una función $y = f(x)$ definida en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ corresponde al incremento generado en y sobre el incremento en x, es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2}$$

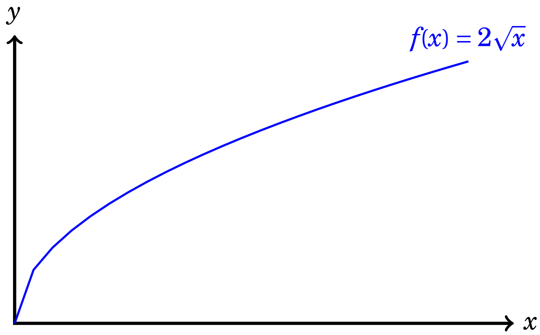
Esto equivale a *cuánto cambia en promedio la función* por cada una de las Δx unidades incrementadas. Esta tasa también es llamada cociente de la diferencia.

Notar que la ecuación (2) corresponde a la *pendiente de una recta* que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, o bien, por los puntos (x, y) y $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x, y) y $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

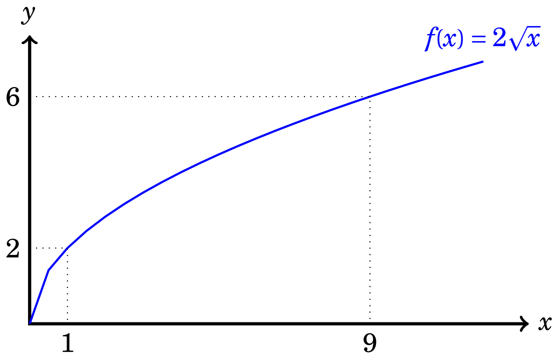
Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x, y) y $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

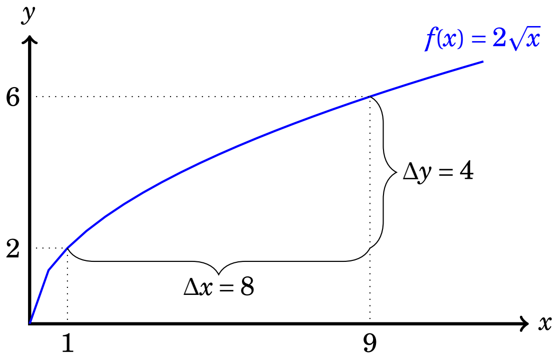
Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x, y) y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

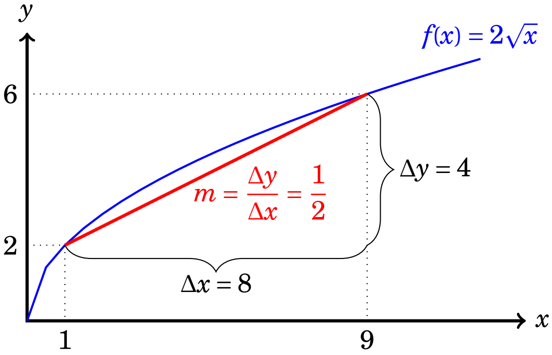
Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x,y) y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Tasa de una Función Cuadrática

Ejemplo 2

Obtenga la tasa de cambio promedio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Solución 2

Utilizando la Definición 3 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.\end{aligned}$$

Notar que este resultado puede ser muy útil para dibujar funciones cuadráticas a mano alzada (de manera bastante precisa). (*Why?*)

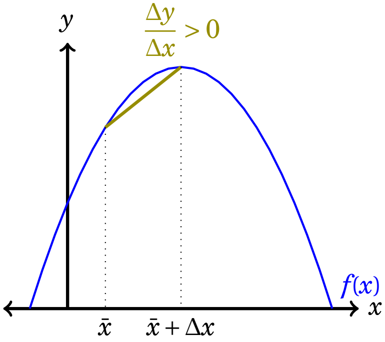
Propuesto 2

La recta secante que representa la tasa de cambio anterior es $y = x + 2$. Determine el intervalo sobre el que se obtuvo la tasa.

Análisis Marginal Discreto

Por ahora no hemos impuesto restricciones sobre la magnitud (el tamaño) de Δx. Sin embargo, es interesante notar qué ocurre cuando esta magnitud es *arbitrariamente pequeña* (marginal). Por ejemplo, si una función es creciente en un intervalo, es de esperar que su tasa de cambio promedio sea positiva en él.

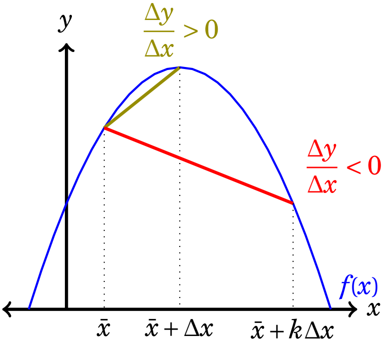
Figura 3: Tasa de cambio en un intervalo



Análisis Marginal Discreto (cont.)

Sin embargo, si ampliamos Δx de modo que el intervalo no sea siempre creciente, la conclusión sobre el signo de la tasa de cambio promedio *no se mantiene necesariamente*.

Figura 4: Tasa de cambio en un intervalo



Acercamientos Arbitrarios

A pesar de que al rededor de $\bar{x}$ la función $f(x)$ es creciente, se necesita un Δx *pequeño* para poder capturar esto en la tasa de cambio promedio.

Ejemplo 3

Suponga que $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ y que $\bar{x} = 1$. Obtenga las tasas de cambio promedio para $\Delta x \in \{2; 1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}0001\}$.

Solución 3

La tasa de cambio es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2x\Delta x - \Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = -2x - \Delta x + 6$.
Evaluando los distintos valores de Δx con $x = \bar{x} = 1$ tenemos:

Cuadro 1: Tasa de cambio ante intervalos menores

Δx	2	1	0,5	0,1	0,01	0,0001
Tasa	2	3	3,5	3,9	3,99	3,9999

Así, vemos que la tasa de cambio promedio *tiende* a 4...

Módulo 3

▸ Volver al Inicio de la Sección

Tender a Algo

Definición 4

Diremos que una variable x *tiende* a un valor k cuando x *toma una sucesión de valores que se acercan de manera arbitraria a dicho valor*, sin que x tome el valor k. Cuando x se aproxima de esta manera a k, entonces podemos denotar la situación por $x \to k$, esto es, "*x tiende a k*".

Comentario: De manera similar, cuando una variable x tiende a un valor k, puede hacer que una función $f(x)$ tienda a algún valor L. Una primera (y apresurada) intuición nos diría que si $x \to k$, entonces $f(x) \to f(k) = L$. **¡Esto no es necesariamente cierto!**

Control 2

Control 2

- Módulo 11
- Módulo 12
- Módulo 13
- Módulo 14

Volver al Inicio

Control 3

▸ Volver al Inicio

Control 4

Volver al Inicio

Examen

▸ Volver al Inicio

MEM155 - Métodos Matemáticos II

Mohit Karnani

Universidad de Chile

Otoño, 2016