MEM155 - Métodos Matemáticos II

Mohit Karnani

Universidad de Chile

Otoño, 2016

Curso

Unidad 1

Unidad 2

Unidad 3

Unidad 4

Unidad 5

Unidad 1

Volver al Inicio

Módulo 2

▸ Volver al Inicio de la Sección

Definición de Incrementos

Definición 1

Sean x_1 y x_2 un primer y segundo valor de una variable x. Entonces el *incremento* de x es $\Delta x = x_2 - x_1$, esto es, el *cambio en el valor* de x.

Definición 2

Sea y una variable dependiente de x tal que $y = f(x)$, donde f está definida para los valores de x entre x_1 y x_2 y además se cumple que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Entonces el incremento de y es
$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$, esto es, el cambio en el valor de $y = f(x)$.

Ejemplo: Cantidad Demandada

Ejemplo 1

Considere que la cantidad de cereal que demanda una familia a la semana depende del precio de venta de éste. Así, $q(p) = 1000p^{-1}$, donde q son los kilos de cereal demandados y p es el precio en pesos. Si el precio de venta pasa de 500 a 1000 pesos, ¿cuál es el incremento en la demanda?

Ejemplo: Cantidad Demandada

Ejemplo 1

Considere que la cantidad de cereal que demanda una familia a la semana depende del precio de venta de éste. Así, $q(p) = 1000p^{-1}$, donde q son los kilos de cereal demandados y p es el precio en pesos. Si el precio de venta pasa de 500 a 1000 pesos, ¿cuál es el incremento en la demanda?

Solución 1

Utilizando la Definición 2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta q &= q_2 - q_1 \\
&= 1000p_2^{-1} - 1000p_1^{-1} \\
&= 1000 \cdot 1000^{-1} - 1000 \cdot 500^{-1} \\
&= 1 - 2 = -1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento en la cantidad demandada es de -1 (se demanda un kilo menos).

Gráfico: Cantidad Demandada

Figura 1: Incremento en precio y cantidad demandada

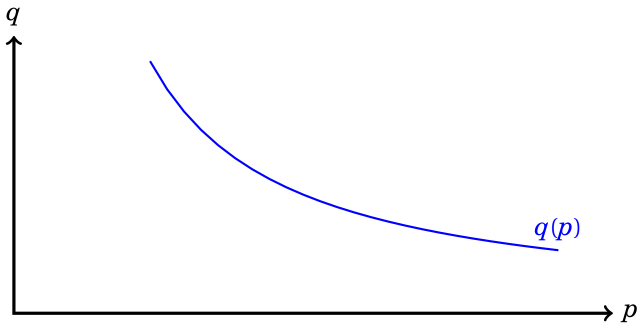


Gráfico: Cantidad Demandada

Figura 1: Incremento en precio y cantidad demandada

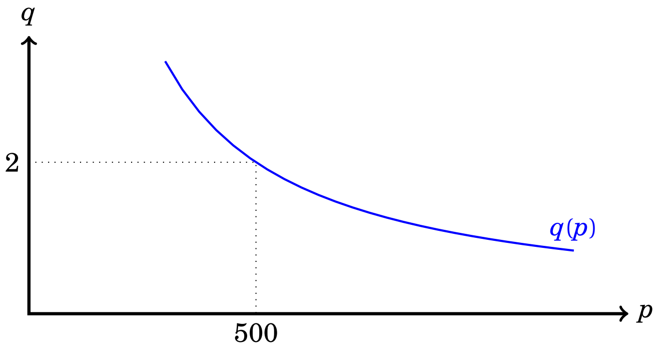
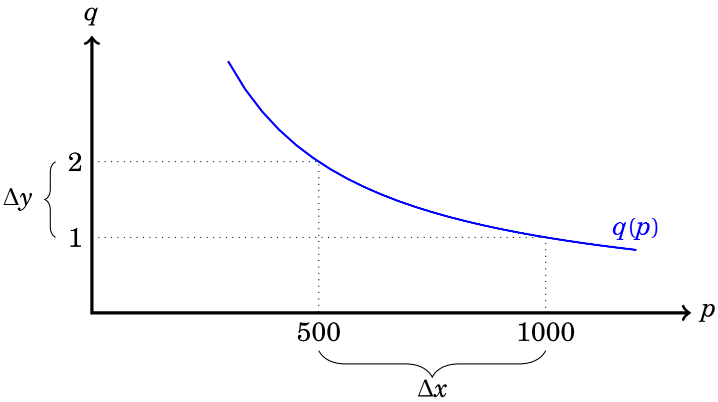


Gráfico: Cantidad Demandada

Figura 1: Incremento en precio y cantidad demandada



Reordenando Términos

Notar que de la Definición 1 se desprende que $x_2 = x_1 + \Delta x$. Reemplazando esto en la Definición 2 y considerando que x_1 puede ser cualquier valor de x se obtiene

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1}$$

La ecuación (1) puede ser útil para determinar el cambio en una variable dependiente y cuando la variable independiente x sufre un incremento de Δx, estando inicialmente en una situación descrita por el par (x, y).

Propuesto 1

Considere la función $y = f(x) = x^3$. Determine Δy dado cualquier x inicial y cualquier incremento Δx.

Tasa de Cambio Promedio

Definición 3

La tasa (o razón) de cambio promedio de una función $y = f(x)$ definida en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ corresponde al incremento generado en y sobre el incremento en x, es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2}$$

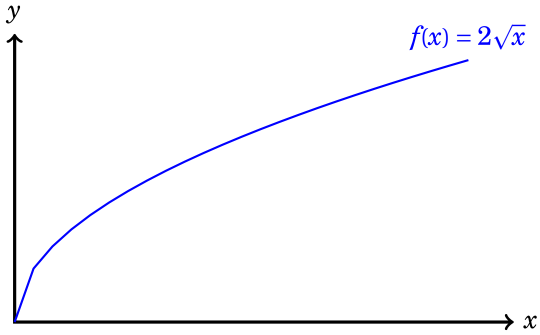
Esto equivale a *cuánto cambia en promedio la función* por cada una de las Δx unidades incrementadas. Esta tasa también es llamada cociente de la diferencia.

Notar que la ecuación (2) corresponde a la *pendiente de una recta* que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, o bien, por los puntos (x, y) y $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x, y) y $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

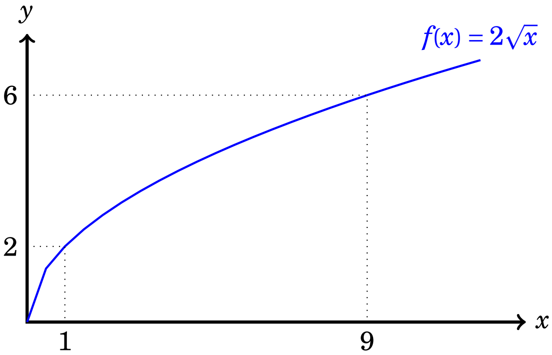
Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x,y) y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

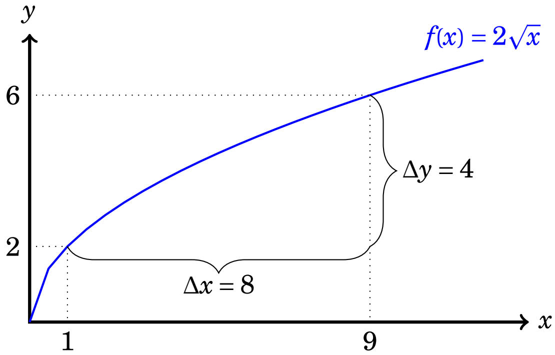
Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x,y) y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

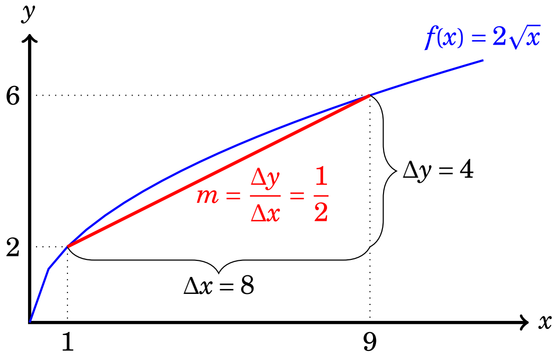
Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x,y) y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Tasa de una Función Cuadrática

Ejemplo 2

Obtenga la tasa de cambio promedio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Tasa de una Función Cuadrática

Ejemplo 2

Obtenga la tasa de cambio promedio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Solución 2

Utilizando la Definición 3 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.\end{aligned}$$

Notar que este resultado puede ser muy útil para dibujar funciones cuadráticas a mano alzada (de manera bastante precisa). (*Why?*)

Tasa de una Función Cuadrática

Ejemplo 2

Obtenga la tasa de cambio promedio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Solución 2

Utilizando la Definición 3 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.\end{aligned}$$

Notar que este resultado puede ser muy útil para dibujar funciones cuadráticas a mano alzada (de manera bastante precisa). (*Why?*)

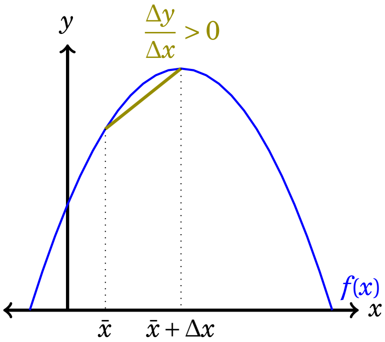
Propuesto 2

La recta secante que representa la tasa de cambio anterior es $y = x + 2$. Determine el intervalo sobre el que se obtuvo la tasa.

Análisis Marginal Discreto

Por ahora no hemos impuesto restricciones sobre la magnitud (el tamaño) de Δx. Sin embargo, es interesante notar qué ocurre cuando esta magnitud es *arbitrariamente pequeña* (marginal).
Por ejemplo, si una función es creciente en un intervalo, es de esperar que su tasa de cambio promedio sea positiva en él.

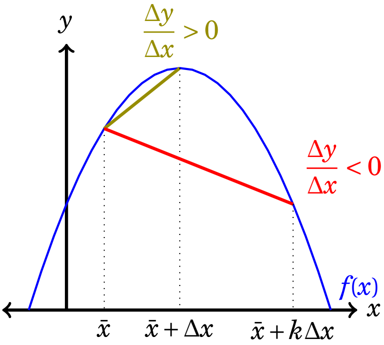
Figura 3: Tasa de cambio en un intervalo



Análisis Marginal Discreto (cont.)

Sin embargo, si ampliamos Δx de modo que el intervalo no sea siempre creciente, la conclusión sobre el signo de la tasa de cambio promedio *no se mantiene necesariamente*.

Figura 4: Tasa de cambio en otro intervalo



Acercamientos Arbitrarios

A pesar de que al rededor de $\bar{x}$ la función $f(x)$ es creciente, se necesita un Δx *pequeño* para poder capturar esto en la tasa de cambio promedio.

Ejemplo 3

Suponga que $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ y que $\bar{x} = 1$. Obtenga las tasas de cambio promedio para $\Delta x \in \{2; 1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}0001\}$.

Acercamientos Arbitrarios

A pesar de que al rededor de $\bar{x}$ la función $f(x)$ es creciente, se necesita un Δx *pequeño* para poder capturar esto en la tasa de cambio promedio.

Ejemplo 3

Suponga que $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ y que $\bar{x} = 1$. Obtenga las tasas de cambio promedio para $\Delta x \in \{2; 1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}0001\}$.

Solución 3

La tasa de cambio es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2x\Delta x - \Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = -2x - \Delta x + 6.$
Evaluando los distintos valores de Δx con $x = \bar{x} = 1$ tenemos:

Cuadro 1: Tasa de cambio ante intervalos menores

Δx	2	1	0,5	0,1	0,01	0,0001
Tasa	2	3	3,5	3,9	3,99	3,9999

Así, vemos que la tasa de cambio promedio *tiende* a 4...

Módulo 3

▸ Volver al Inicio de la Sección

Tender a Algo

Definición 4

Una variable x *tiende* a un valor k cuando x *toma una sucesión de valores que se acercan de manera arbitraria a dicho valor*, sin que x tome el valor k. Cuando x se aproxima de esta manera a k, entonces podemos denotar la situación por $x \to k$ (x *tiende a* k).

Definición 5

Si la (sub)sucesión de valores que toma x es mayor que el valor k, entonces diremos que x *tiende por la derecha* a k, y lo denotamos por $x \to k^+$. Si los valores están por debajo, diremos que x *tiende por la izquierda* a k y lo denotamos por $x \to k^-$.

Comentario: De manera similar, cuando una variable x tiende a un valor k, puede hacer que una función $f(x)$ tienda a algún valor L. Una primera (y apresurada) intuición nos diría que si $x \to k$, entonces $f(x) \to f(k) = L$. **¡Esto no es necesariamente cierto!**

Ejemplos de Sucesiones

Ejemplo 4

Suponga que x,y y z son tres variables que toman las siguientes sucesiones de valores $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1,$$

$$y_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} + 1 \text{ y}$$

$$z_n = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} + 1.$$

Ejemplos de Sucesiones

Ejemplo 4

Suponga que x,y y z son tres variables que toman las siguientes sucesiones de valores $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1,$$

$$y_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} + 1 \text{ y}$$

$$z_n = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} + 1.$$

Dado lo anterior, $x_n \to 1$, $y_n \to 1^+$ y $z_n \to 1^-$. Comente.

Ejemplos de Sucesiones

Ejemplo 4

Suponga que x,y y z son tres variables que toman las siguientes sucesiones de valores $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1,$$

$$y_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} + 1 \text{ y}$$

$$z_n = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} + 1.$$

Dado lo anterior, $x_n \to 1$, $y_n \to 1^+$ y $z_n \to 1^-$. Comente.

Solución 4

Verdadero. A medida que aumenta n, x_n se acerca arbitrariamente a 1, al igual que y_n y z_n. Sin embargo, la primera sucesión toma valores tanto por sobre como por debajo de 1, mientras que las últimas dos, que son subsucesiones de la primera, toman valores sólo por sobre 1 o sólo por debajo de 1, respectivamente.

Definición de Vecindad

Definición 6

Una vecindad o entorno de un punto $k \in \mathbb{R}$ es un intervalo en torno a k con semiamplitud δ, o bien, es el intervalo $(k-\delta, k+\delta)$, con $\delta > 0$. Así, cualquier x *suficientemente cerca* de k está en su vecindad si $|x-k| < \delta$[1].

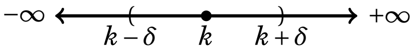
[1] Se habla de la vecindad o entorno reducido de k a la vecindad que no incorpora al elemento k, es decir, a todos los $x \neq k$ tal que $|x-k| < \delta$.

Definición de Vecindad

Definición 6

Una vecindad o entorno de un punto $k \in \mathbb{R}$ es un intervalo en torno a k con semiamplitud δ, o bien, es el intervalo $(k-\delta, k+\delta)$, con $\delta > 0$. Así, cualquier x *suficientemente cerca* de k está en su vecindad si $|x-k| < \delta$[1].

Figura 5: Vecindad de k



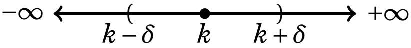
[1] Se habla de la vecindad o entorno reducido de k a la vecindad que no incorpora al elemento k, es decir, a todos los $x \neq k$ tal que $|x-k| < \delta$.

Definición de Vecindad

Definición 6

Una vecindad o entorno de un punto $k \in \mathbb{R}$ es un intervalo en torno a k con semiamplitud δ, o bien, es el intervalo $(k-\delta, k+\delta)$, con $\delta > 0$. Así, cualquier x *suficientemente cerca* de k está en su vecindad si $|x-k| < \delta$[1].

Figura 5: Vecindad de k



Notar que, bajo la Definición 6, para que $x \to k$, es necesario que x tome valores en la vecindad de k para cualquier $\delta > 0$ (por pequeño que sea). Dicho de otro modo, si $x \to k$, entonces $|x_n - k| < \delta$ para una cantidad infinita de valores de n.

[1] Se habla de la vecindad o entorno reducido de k a la vecindad que no incorpora al elemento k, es decir, a todos los $x \neq k$ tal que $|x-k| < \delta$.

Definición de Límite

Definición 7

(*Épsilon-Delta*) Sea $f(x)$ una función definida para todos los x en la vecindad de k, excepto posiblemente k (esto es, en la vecindad reducida). El límite de $f(x)$ cuando $x \to k$ es L si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - k| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

esto es, si la distancia entre $f(x)$ y L se puede hacer tan pequeña como se desee dejando a x suficientemente cerca de k.

Definición de Límite

Definición 7

(*Épsilon-Delta*) Sea $f(x)$ una función definida para todos los x en la vecindad de k, excepto posiblemente k (esto es, en la vecindad reducida). El límite de $f(x)$ cuando $x \to k$ es L si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - k| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

esto es, si la distancia entre $f(x)$ y L se puede hacer tan pequeña como se desee dejando a x suficientemente cerca de k.
Esto se denota

$$\lim_{x \to k} f(x) = L,$$

o bien

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to k.$$

Gráfico: Definición de Límite

Figura 6: Intuición Gráfica de la Definición Épsilon-Delta

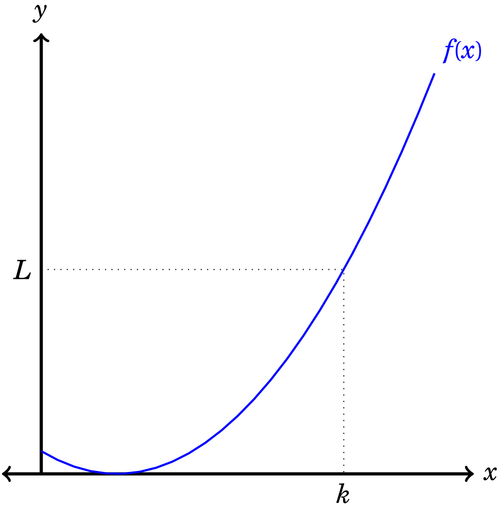


Gráfico: Definición de Límite

Figura 6: Intuición Gráfica de la Definición Épsilon-Delta

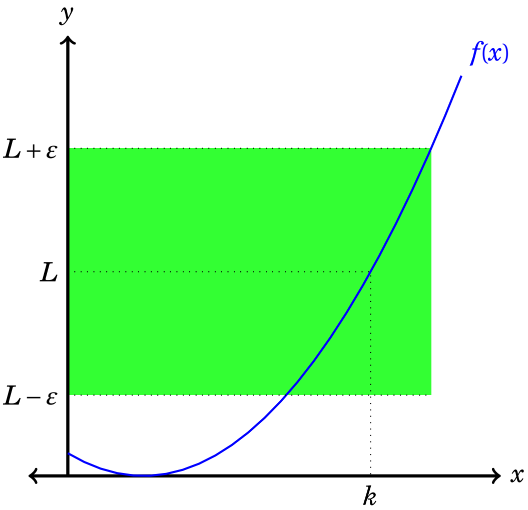
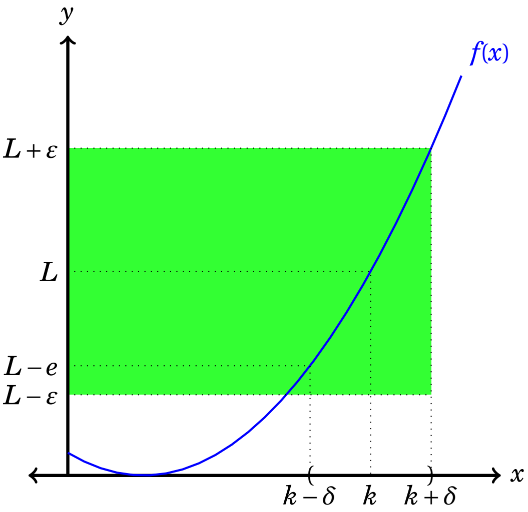


Gráfico: Definición de Límite

Figura 6: Intuición Gráfica de la Definición Épsilon-Delta



Ejemplo: Límite por Definición

Ejemplo 5

Demuestre que el límite de $f(x) = 3x + 5$ cuando $x \to 1$ es 8.

Ejemplo: Límite por Definición

Ejemplo 5

Demuestre que el límite de $f(x) = 3x + 5$ cuando $x \to 1$ es 8.

Solución 5

Si $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$, entonces, por la Definición 7 se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \implies |3x + 5 - 8| < \varepsilon.$$

Luego, basta encontrar un δ que satisfaga la Definición 7 ante cualquier ε (en efecto, δ será función de ε).

Ejemplo: Límite por Definición

Ejemplo 5

Demuestre que el límite de $f(x) = 3x + 5$ cuando $x \to 1$ es 8.

Solución 5

Si $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$, entonces, por la Definición 7 se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \implies |3x + 5 - 8| < \varepsilon.$$

Luego, basta encontrar un δ que satisfaga la Definición 7 ante cualquier ε (en efecto, δ será función de ε).
Notamos que $|3x + 5 - 8| = |3x - 3|$

Ejemplo: Límite por Definición

Ejemplo 5

Demuestre que el límite de $f(x) = 3x + 5$ cuando $x \to 1$ es 8.

Solución 5

Si $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$, entonces, por la Definición 7 se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \implies |3x + 5 - 8| < \varepsilon.$$

Luego, basta encontrar un δ que satisfaga la Definición 7 ante cualquier ε (en efecto, δ será función de ε).
Notamos que $|3x + 5 - 8| = |3x - 3| = 3|x - 1|$

Ejemplo: Límite por Definición

Ejemplo 5

Demuestre que el límite de $f(x) = 3x + 5$ cuando $x \to 1$ es 8.

Solución 5

Si $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$, entonces, por la Definición 7 se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \implies |3x + 5 - 8| < \varepsilon.$$

Luego, basta encontrar un δ que satisfaga la Definición 7 ante cualquier ε (en efecto, δ será función de ε).
Notamos que $|3x + 5 - 8| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon$.

Ejemplo: Límite por Definición

Ejemplo 5

Demuestre que el límite de $f(x) = 3x + 5$ cuando $x \to 1$ es 8.

Solución 5

Si $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$, entonces, por la Definición 7 se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \implies |3x + 5 - 8| < \varepsilon.$$

Luego, basta encontrar un δ que satisfaga la Definición 7 ante cualquier ε (en efecto, δ será función de ε).
Notamos que $|3x + 5 - 8| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon$.
Pero lo anterior equivale a indicar que $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Es decir, ante cualquier ε, podemos definir un $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ tal que se cumpla la definición para el límite indicado. $\square$

Ejemplo: Límite por Definición

Ejemplo 5

Demuestre que el límite de $f(x) = 3x + 5$ cuando $x \to 1$ es 8.

Solución 5

Si $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$, entonces, por la Definición 7 se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \implies |3x + 5 - 8| < \varepsilon.$$

Luego, basta encontrar un δ que satisfaga la Definición 7 ante cualquier ε (en efecto, δ será función de ε).
Notamos que $|3x + 5 - 8| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon$.
Pero lo anterior equivale a indicar que $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Es decir, ante cualquier ε, podemos definir un $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ tal que se cumpla la definición para el límite indicado. $\square$

Propuesto 3

Demuestre que el límite de $f(x) = x^2$ cuando $x \to 5$ es 25.

Existencia de un Límite

Definición 8

El límite de $f(x)$ cuando $x \to k$ es L si y sólo si los límites por la derecha y por la izquierda (con $x \to k^+$ y $x \to k^-$, respectivamente) son ambos iguales a L[2].

[2]Esta definición aplica sólo cuando es posible obtener los límites laterales, es decir, cuando se trabaja sobre el dominio de la función. Un ejemplo donde no aplica esta definición es $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$: si bien el límite por la derecha es 0, el límite por la izquierda no existe (x no puede ser negativo). A pesar de lo anterior, el límite es 0, pues sólo se considera el límite definido en el dominio de la función, es decir, el límite por la derecha.

Existencia de un Límite

Definición 8

El límite de $f(x)$ cuando $x \to k$ es L si y sólo si los límites por la derecha y por la izquierda (con $x \to k^+$ y $x \to k^-$, respectivamente) son ambos iguales a L[2]. En símbolos:

$$\lim_{x\to k} f(x) = L \iff \lim_{x\to^+ k} f(x) = \lim_{x\to k^-} f(x) = L.$$

[2] Esta definición aplica sólo cuando es posible obtener los límites laterales, es decir, cuando se trabaja sobre el dominio de la función. Un ejemplo donde no aplica esta definición es $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$: si bien el límite por la derecha es 0, el límite por la izquierda no existe (x no puede ser negativo). A pesar de lo anterior, el límite es 0, pues sólo se considera el límite definido en el dominio de la función, es decir, el límite por la derecha.

Existencia de un Límite

Definición 8

El límite de $f(x)$ cuando $x \to k$ es L si y sólo si los límites por la derecha y por la izquierda (con $x \to k^+$ y $x \to k^-$, respectivamente) son ambos iguales a L[2].En símbolos:

$$\lim_{x\to k} f(x) = L \iff \lim_{x\to^+ k} f(x) = \lim_{x\to k^-} f(x) = L.$$

Lo anterior se cumple para todo polinomio y el límite corresponde a la función evaluada en $x = k$. Sin embargo, hay casos donde no se cumple...

[2]Esta definición aplica sólo cuando es posible obtener los límites laterales, es decir, cuando se trabaja sobre el dominio de la función. Un ejemplo donde no aplica esta definición es $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$: si bien el límite por la derecha es 0, el límite por la izquierda no existe (x no puede ser negativo). A pesar de lo anterior, el límite es 0, pues sólo se considera el límite definido en el dominio de la función, es decir, el límite por la derecha.

Encontrar un Límite por Reemplazo

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Encuentre $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Encontrar un Límite por Reemplazo

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Encuentre $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Solución 6

En este caso, no se puede evaluar directamente en $x = 2$, pues tendríamos algo de la forma $f(2) = 0/0$. Sin embargo, en este tipo de situaciones se puede realizar una simplificación conveniente:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

Encontrar un Límite por Reemplazo

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Encuentre $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Solución 6

En este caso, no se puede evaluar directamente en $x = 2$, pues tendríamos algo de la forma $f(2) = 0/0$. Sin embargo, en este tipo de situaciones se puede realizar una simplificación conveniente:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$$

Encontrar un Límite por Reemplazo

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$.

Solución 6

En este caso, no se puede evaluar directamente en $x=2$, pues tendríamos algo de la forma $f(2)=0/0$. Sin embargo, en este tipo de situaciones se puede realizar una simplificación conveniente:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2.$$

Esta última simplificación se puede hacer porque, como bien dice la Definición 4, x no toma el valor 2 y por ende $x-2 \neq 0$. Como este término es no nulo, es *legal* simplificar.

Encontrar un Límite por Reemplazo

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Encuentre $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Solución 6

En este caso, no se puede evaluar directamente en $x = 2$, pues tendríamos algo de la forma $f(2) = 0/0$. Sin embargo, en este tipo de situaciones se puede realizar una simplificación conveniente:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2.$$

Esta última simplificación se puede hacer porque, como bien dice la Definición 4, x no toma el valor 2 y por ende $x - 2 \neq 0$. Como este término es no nulo, es *legal* simplificar.

Por último, como $x+2$ es un polinomio de primer grado, su límite existe y corresponde a dicha función evaluada en $x = 2$.

Encontrar un Límite por Reemplazo

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Encuentre $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Solución 6

En este caso, no se puede evaluar directamente en $x=2$, pues tendríamos algo de la forma $f(2)=0/0$. Sin embargo, en este tipo de situaciones se puede realizar una simplificación conveniente:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2.$$

Esta última simplificación se puede hacer porque, como bien dice la Definición 4, x no toma el valor 2 y por ende $x-2\neq 0$. Como este término es no nulo, es *legal* simplificar.

Por último, como $x+2$ es un polinomio de primer grado, su límite existe y corresponde a dicha función evaluada en $x=2$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} x+2 = 4.$

Sobre las Funciones Simplificables

¿Es cierto que las funciones $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y $g(x) = x + 2$ son equivalentes?

Sobre las Funciones Simplificables

¿Es cierto que las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x+2$ son equivalentes? **¡NO!**

Sobre las Funciones Simplificables

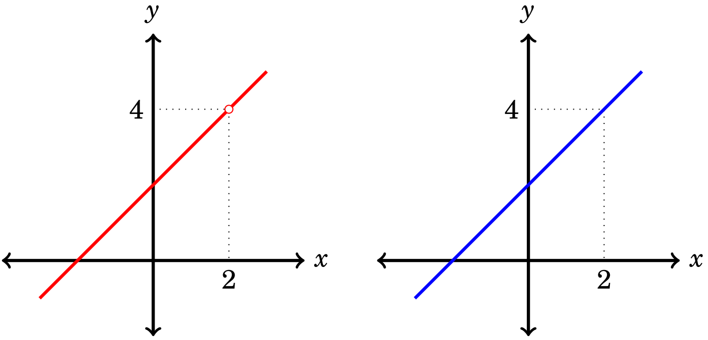
¿Es cierto que las funciones $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y $g(x) = x + 2$ son equivalentes? **¡NO!**

Las funciones tienen dominios diferentes, pues $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$, mientras que $\text{Dom}\, g(x) = \mathbb{R}$. Luego, $\nexists f(2)$, a pesar de que $g(2) = 4$.

Sobre las Funciones Simplificables

¿Es cierto que las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x+2$ son equivalentes? **¡NO!**
Las funciones tienen dominios diferentes, pues Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$, mientras que Dom $g(x) = \mathbb{R}$. Luego, $\nexists f(2)$, a pesar de que $g(2) = 4$.

Figura 7: Gráficos de $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x+2$



(a) $f(x)$ (b) $g(x)$

Ejemplo: Límite que No Existe

Ejemplo 7

Encuentre, caso exista, el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. En caso de que no exista, justifique su respuesta.

Ejemplo: Límite que No Existe

Ejemplo 7

Encuentre, caso exista, el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. En caso de que no exista, justifique su respuesta.

Solución 7

Tal como en el Ejemplo 6, en este caso no podemos evaluar directamente la función en $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, en esta ocasión tampoco es trivial simplificar la expresión, pues el valor del numerador va a depender de si x es negativo o no negativo.

Ejemplo: Límite que No Existe

Ejemplo 7

Encuentre, caso exista, el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. En caso de que no exista, justifique su respuesta.

Solución 7

Tal como en el Ejemplo 6, en este caso no podemos evaluar directamente la función en $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, en esta ocasión tampoco es trivial simplificar la expresión, pues el valor del numerador va a depender de si x es negativo o no negativo.

Recordar que el valor absoluto se define como $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Ejemplo: Límite que No Existe

Ejemplo 7

Encuentre, caso exista, el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. En caso de que no exista, justifique su respuesta.

Solución 7

Tal como en el Ejemplo 6, en este caso no podemos evaluar directamente la función en $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, en esta ocasión tampoco es trivial simplificar la expresión, pues el valor del numerador va a depender de si x es negativo o no negativo.

Recordar que el valor absoluto se define como $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

En efecto, el límite por la izquierda es $\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, mientras que por la derecha es $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$.

Ejemplo: Límite que No Existe

Ejemplo 7

Encuentre, caso exista, el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. En caso de que no exista, justifique su respuesta.

Solución 7

Tal como en el Ejemplo 6, en este caso no podemos evaluar directamente la función en $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, en esta ocasión tampoco es trivial simplificar la expresión, pues el valor del numerador va a depender de si x es negativo o no negativo.

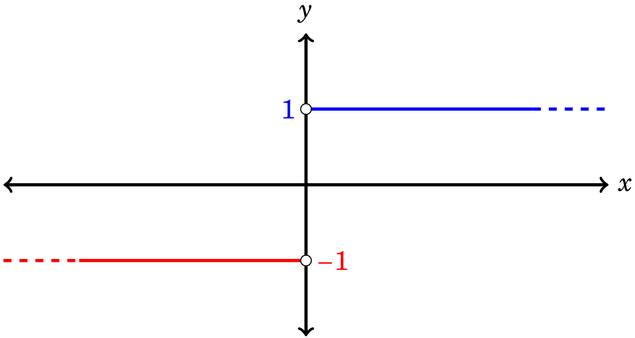
Recordar que el valor absoluto se define como $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

En efecto, el límite por la izquierda es $\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, mientras que por la derecha es $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$.

Como los límites laterales son distintos, el límite no existe.

Gráfico: Límite que No Existe

Figura 9: Gráfico de $y = \frac{|x|}{x}$



Módulo 4

▸ Volver al Inicio de la Sección

Propiedades de los Límites

Proposición 1

Sea c una constante cualquiera. Entonces, el límite de dicha constante cuando x tiende a k es la misma constante:

$$\lim_{x \to k} c = c.$$

Propiedades de los Límites

Proposición 1

Sea c una constante cualquiera. Entonces, el límite de dicha constante cuando x tiende a k es la misma constante:

$$\lim_{x \to k} c = c.$$

Proposición 2

Sea b una constante cualquiera y $f(x)$ una función cuyo límite existe cuando $x \to k$. Entonces, el límite de dicha función ponderada por b cuando x tiende a k es b por el límite de la función:

$$\lim_{x \to k} bf(x) = b \lim_{x \to k} f(x).$$

Propiedades de los Límites (cont.)

Proposición 3

Sea n un entero positivo. Entonces, el límite de x elevado a n cuando x tiende a k es k elevado a n:

$$\lim_{x \to k} x^n = k^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Propiedades de los Límites (cont.)

Proposición 3

Sea n un entero positivo. Entonces, el límite de x elevado a n cuando x tiende a k es k elevado a n:

$$\lim_{x \to k} x^n = k^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 4

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite de la suma (o resta) de ambas funciones cuando x tiende a k es la suma (o resta) de los límites individuales de las funciones:

$$\lim_{x \to k} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to k} f(x) \pm \lim_{x \to k} g(x).$$

Propiedades de los Límites (cont.)

Proposición 3

Sea n un entero positivo. Entonces, el límite de x elevado a n cuando x tiende a k es k elevado a n:

$$\lim_{x \to k} x^n = k^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 4

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite de la suma (o resta) de ambas funciones cuando x tiende a k es la suma (o resta) de los límites individuales de las funciones:

$$\lim_{x \to k} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to k} f(x) \pm \lim_{x \to k} g(x).$$

Propuesto 4

Utilizando las Proposiciones 1, 2, 3 y 4, demuestre que el límite de cualquier polinomio $P(x)$ cuando $x \to k$ equivale a $P(k)$.

Propiedades de los Límites (cont.')

Proposición 5

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite del producto de ambas funciones cuando x tiende a k es el producto de los límites individuales de las funciones:

$$\lim_{x \to k} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to k} f(x) \cdot \lim_{x \to k} g(x).$$

Propiedades de los Límites (cont.')

Proposición 5

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite del producto de ambas funciones cuando x tiende a k es el producto de los límites individuales de las funciones:

$$\lim_{x \to k} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to k} f(x) \cdot \lim_{x \to k} g(x).$$

Proposición 6

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite del cociente de ambas funciones cuando x tiende a k es el cociente de los límites individuales de las funciones, siempre y cuando el límite del denominador sea distinto de 0:

$$\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to k} f(x)}{\lim_{x \to k} g(x)}, \qquad \textit{si} \ \lim_{x \to k} g(x) \neq 0.$$

Propiedades de los Límites (cont.”)

Proposición 7

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite de una función elevada a la otra cuando x tiende a k es el límite de la primera elevado al límite de la segunda, siempre y cuando la base sea positiva:

$$\lim_{x\to k} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to k} f(x)^{\lim\limits_{x\to k} g(x)}, \qquad si\ f(x) > 0.$$

Propiedades de los Límites (cont.")

Proposición 7

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite de una función elevada a la otra cuando x tiende a k es el límite de la primera elevado al límite de la segunda, siempre y cuando la base sea positiva:

$$\lim_{x \to k} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to k} f(x)^{\lim_{x \to k} g(x)}, \qquad si\ f(x) > 0.$$

Notar que de lo anterior se obtiene $\lim_{x \to k} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to k} f(x)} \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposición 8

Sea a una constante positiva y $f(x)$ una función cuyo límite existe cuando $x \to k$. Entonces, el límite del logaritmo con base a de la función cuando x tiende a k es el logaritmo con base a del límite de la función, siempre y cuando la función sea positiva:

$$\lim_{x \to k} \log_a f(x) = \log_a \lim_{x \to k} f(x), \qquad si\ f(x) > 0.$$

Ejemplo

Ejemplo 8

Obtenga el límite de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ cuando $x \to 0$.

Ejemplo

Ejemplo 8

Obtenga el límite de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ cuando $x \to 0$.

Solución 8

En efecto, no podemos evaluar directamente $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma 0/0. Sin embargo, podemos utilizar un *1 conveniente*...

Ejemplo

Ejemplo 8

Obtenga el límite de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ cuando $x \to 0$.

Solución 8

En efecto, no podemos evaluar directamente $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, podemos utilizar un *1 conveniente...*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos simplemente evaluar en $x = 0$ para obtener como resultado $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

Más Ejemplos

Ejemplo 9

Obtenga $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{3}}{x}$.

Más Ejemplos

Ejemplo 9

Obtenga $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3}}{x}$.

Solución 9

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{3-x-3}{3(x+3)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3(x+3)} = -\frac{1}{9}.$$

Más Ejemplos

Ejemplo 9

Obtenga $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3}}{x}$.

Solución 9

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{3-x-3}{3(x+3)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3(x+3)} = -\frac{1}{9}.$$

Ejemplo 10

Sea $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x < 2 \\ ax+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. ¿Qué relación deben satisfacer a y b para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

Más Ejemplos

Ejemplo 9

Obtenga $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3}}{x}$.

Solución 9

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{3-x-3}{3(x+3)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3(x+3)} = -\frac{1}{9}.$$

Ejemplo 10

Sea $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x < 2 \\ ax+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. ¿Qué relación deben satisfacer a y b para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

Solución 10

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \iff 4a = 2a+b \iff a = \frac{b}{2}.$$

Módulo 5

▸ Volver al Inicio de la Sección

Cambio de Variable

En la Definición 7 vimos que $\lim_{x \to k} f(x) = L$ es lo mismo que $f(x) \to L$ cuando $x \to k$.

Cambio de Variable

En la Definición 7 vimos que $\lim_{x \to k} f(x) = L$ es lo mismo que $f(x) \to L$ cuando $x \to k$.
Ahora bien, podríamos considerar a $f(x)$ como una variable de la cual depende la función g.

Cambio de Variable

En la Definición 7 vimos que $\lim_{x \to k} f(x) = L$ es lo mismo que $f(x) \to L$ cuando $x \to k$.

Ahora bien, podríamos considerar a $f(x)$ como una variable de la cual depende la función g.

Luego, podemos plantear la posible existencia de $\lim_{f(x) \to L} g\left(f(x)\right) = M$, o bien, $g\left(f(x)\right) \to M$ cuando $f(x) \to L$.

Cambio de Variable

En la Definición 7 vimos que $\lim_{x \to k} f(x) = L$ es lo mismo que $f(x) \to L$ cuando $x \to k$.
Ahora bien, podríamos considerar a $f(x)$ como una variable de la cual depende la función g.
Luego, podemos plantear la posible existencia de $\lim_{f(x) \to L} g\left(f(x)\right) = M$, o bien, $g\left(f(x)\right) \to M$ cuando $f(x) \to L$.
Combinando las ideas anteriores tenemos

$$[x \to k \implies f(x) \to L] \wedge [f(x) \to L \implies g\left(f(x)\right) \to M] \implies [x \to k \implies g\left(f(x)\right) \to M].$$

Cambio de Variable

En la Definición 7 vimos que $\lim\limits_{x\to k} f(x) = L$ es lo mismo que $f(x) \to L$ cuando $x \to k$.
Ahora bien, podríamos considerar a $f(x)$ como una variable de la cual depende la función g.
Luego, podemos plantear la posible existencia de $\lim\limits_{f(x)\to L} g\left(f(x)\right) = M$, o bien, $g\left(f(x)\right) \to M$ cuando $f(x) \to L$.
Combinando las ideas anteriores tenemos

$$\left[x \to k \implies f(x) \to L\right] \wedge \left[f(x) \to L \implies g\left(f(x)\right) \to M\right] \implies \left[x \to k \implies g\left(f(x)\right) \to M\right].$$

Ejemplo 11

Obtenga $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} + 2{,}5} - \dfrac{1}{3} \right) \div \left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} - 0{,}5 \right)$.

Cambio de Variable

En la Definición 7 vimos que $\lim\limits_{x\to k} f(x) = L$ es lo mismo que $f(x) \to L$ cuando $x \to k$.
Ahora bien, podríamos considerar a $f(x)$ como una variable de la cual depende la función g.
Luego, podemos plantear la posible existencia de $\lim\limits_{f(x)\to L} g\left(f(x)\right) = M$, o bien, $g\left(f(x)\right) \to M$ cuando $f(x) \to L$.
Combinando las ideas anteriores tenemos

$$[x \to k \implies f(x) \to L] \wedge [f(x) \to L \implies g\left(f(x)\right) \to M] \implies [x \to k \implies g\left(f(x)\right) \to M].$$

Ejemplo 11

Obtenga $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} + 2{,}5} - \dfrac{1}{3} \right) \div \left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} - 0{,}5 \right)$.

Solución 11

Usando las Soluciones 8 y 9 tenemos que el límite es $-\dfrac{1}{9}$.

Número e como Límite

Proposición 9

El número $e \approx 2{,}718281828459\ldots$ (número de Euler o constante de Napier) se puede definir de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \left(=^{3} \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \right)$$

[3]Próximamente le daremos énfasis a los límites cuando x tiende al infinito.

[4]Hay otros límites especiales que no abarcaremos en este curso.

Número *e* como Límite

Proposición 9

El número e $\approx 2{,}718281828459\ldots$ *(número de Euler o constante de Napier) se puede definir de la siguiente manera:*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \left(=^{3} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \right)$$

A este límite, junto con los de las Proposiciones 10 y 11, los llamaremos *límites especiales*[4].

---

[3]Próximamente le daremos énfasis a los límites cuando x tiende al infinito.

[4]Hay otros límites especiales que no abarcaremos en este curso.

Número e como Límite

Proposición 9

El número $e \approx 2{,}718281828459\ldots$ (número de Euler o constante de Napier) se puede definir de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \left(=^{3} \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \right)$$

A este límite, junto con los de las Proposiciones 10 y 11, los llamaremos *límites especiales*[4].

Propuesto 5

Verifique esto evaluando la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ para valores de x arbitrariamente cercanos a 0.

[3] Próximamente le daremos énfasis a los límites cuando x tiende al infinito.

[4] Hay otros límites especiales que no abarcaremos en este curso.

Límites Especiales

Proposición 10

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Límites Especiales

Proposición 10

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Demostración.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$\square$

Límites Especiales (cont.)

Proposición 11

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Límites Especiales (cont.)

Proposición 11

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Demostración.

Sea $\exp(x) - 1 = y$*, de modo que* $x \to 0 \implies y \to 0$*. A partir de esto podemos despejar* $x = \ln(1 + y)$*. Por lo tanto, utilizando el cambio de variable, el límite es equivalente a*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1 + y)}{y}} = 1.$$

$\square$

Ejercicios: Límites Especiales

Propuesto 6

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Hint: Proceda de manera análoga a la demostración de la Proposición 11.

Propuesto 7

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \exp(a).$$

Hint: Utilice un 1 conveniente en el exponente y luego aplique la Proposición 9.

Ejercicios: Límites Especiales (cont.)

Propuesto 8

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a.$$

Hint: Proceda de manera análoga a la demostración de la Proposición 10 y utilice el resultado del Propuesto 7.

Propuesto 9

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

Hint: Utilice un 1 conveniente en el exponente y aplique la Proposición 9. Luego, utilice otro 1 conveniente sobre su resultado para finalmente aplicar la Proposición 11 con un cambio de variable.

Módulo 6

▸ Volver al Inicio de la Sección

Límites al Infinito

Hasta ahora hemos revisado cómo se comporta una función $f(x)$ a medida que x tiende a algún valor constante k.

Límites al Infinito

Hasta ahora hemos revisado cómo se comporta una función $f(x)$ a medida que x tiende a algún valor constante k.
Sin embargo, en ocasiones nos puede interesar qué ocurre con la función cuando x crece (o decrece) indeterminadamente, es decir, qué le pasa a $f(x)$ cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$).

Límites al Infinito

Hasta ahora hemos revisado cómo se comporta una función $f(x)$ a medida que x tiende a algún valor constante k.
Sin embargo, en ocasiones nos puede interesar qué ocurre con la función cuando x crece (o decrece) indeterminadamente, es decir, qué le pasa a $f(x)$ cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$).

Ejemplo 12

Grafique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Límites al Infinito

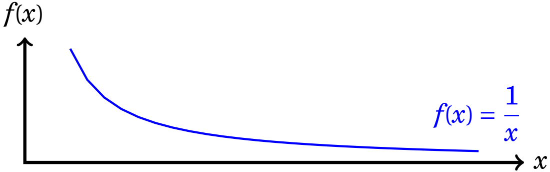
Hasta ahora hemos revisado cómo se comporta una función $f(x)$ a medida que x tiende a algún valor constante k.
Sin embargo, en ocasiones nos puede interesar qué ocurre con la función cuando x crece (o decrece) indeterminadamente, es decir, qué le pasa a $f(x)$ cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$).

Ejemplo 12

Grafique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Solución 12

Figura 10: Límite hacia el infinito



Límites al Infinito

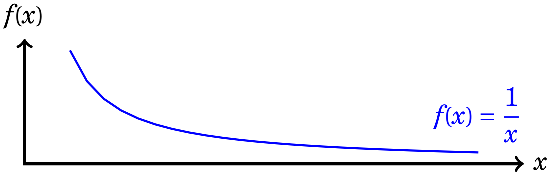
Hasta ahora hemos revisado cómo se comporta una función $f(x)$ a medida que x tiende a algún valor constante k.
Sin embargo, en ocasiones nos puede interesar qué ocurre con la función cuando x crece (o decrece) indeterminadamente, es decir, qué le pasa a $f(x)$ cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$).

Ejemplo 12

Grafique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Solución 12

Figura 10: Límite hacia el infinito



A medida que x se vuelve arbitrariamente grande, la función se acerca cada vez más a 0...

Límites al Infinito

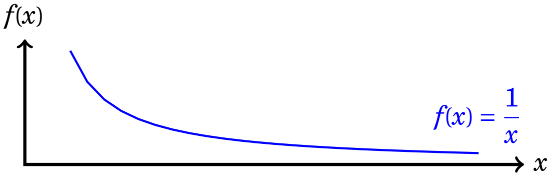
Hasta ahora hemos revisado cómo se comporta una función $f(x)$ a medida que x tiende a algún valor constante k.
Sin embargo, en ocasiones nos puede interesar qué ocurre con la función cuando x crece (o decrece) indeterminadamente, es decir, qué le pasa a $f(x)$ cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$).

Ejemplo 12

Grafique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Solución 12

Figura 10: Límite hacia el infinito



A medida que x se vuelve arbitrariamente grande, la función se acerca cada vez más a 0...

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

Límites al Infinito (cont.)

Al igual que en los casos anteriores, es importante notar que no nos interesa "evaluar x en infinito" (de hecho, esto es conceptualmente imposible), sino que queremos saber cómo se comporta la función cuando x "se aproxima" al infinito, ya sea positivo o negativo.

Límites al Infinito (cont.)

Al igual que en los casos anteriores, es importante notar que no nos interesa "evaluar x en infinito" (de hecho, esto es conceptualmente imposible), sino que queremos saber cómo se comporta la función cuando x "se aproxima" al infinito, ya sea positivo o negativo.

Ejemplo 13

Obtenga $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}$.

Límites al Infinito (cont.)

Al igual que en los casos anteriores, es importante notar que no nos interesa “evaluar x en infinito” (de hecho, esto es conceptualmente imposible), sino que queremos saber cómo se comporta la función cuando x “se aproxima” al infinito, ya sea positivo o negativo.

Ejemplo 13

Obtenga $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x+1}$.

Solución 13

Notamos que no tiene sentido hablar de “evaluar x en menos infinito”, pues tendríamos un resultado de la forma ∞/∞.

Límites al Infinito (cont.)

Al igual que en los casos anteriores, es importante notar que no nos interesa "evaluar x en infinito" (de hecho, esto es conceptualmente imposible), sino que queremos saber cómo se comporta la función cuando x "se aproxima" al infinito, ya sea positivo o negativo.

Ejemplo 13

Obtenga $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x+1}$.

Solución 13

Notamos que no tiene sentido hablar de "evaluar x en menos infinito", pues tendríamos un resultado de la forma ∞/∞.
Sin embargo, podemos reescribir el límite como

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x/x}{x/x + 1/x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1 + 1/x},$$

Límites al Infinito (cont.)

Al igual que en los casos anteriores, es importante notar que no nos interesa "evaluar x en infinito" (de hecho, esto es conceptualmente imposible), sino que queremos saber cómo se comporta la función cuando x "se aproxima" al infinito, ya sea positivo o negativo.

Ejemplo 13

Obtenga $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x+1}$.

Solución 13

Notamos que no tiene sentido hablar de "evaluar x en menos infinito", pues tendríamos un resultado de la forma ∞/∞.
Sin embargo, podemos reescribir el límite como

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x/x}{x/x+1/x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1+1/x},$$

donde esto lo podemos hacer porque "no evaluamos x en infinito".

Límites al Infinito (cont.)

Al igual que en los casos anteriores, es importante notar que no nos interesa "evaluar x en infinito" (de hecho, esto es conceptualmente imposible), sino que queremos saber cómo se comporta la función cuando x "se aproxima" al infinito, ya sea positivo o negativo.

Ejemplo 13

Obtenga $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x+1}$.

Solución 13

Notamos que no tiene sentido hablar de "evaluar x en menos infinito", pues tendríamos un resultado de la forma ∞/∞.
Sin embargo, podemos reescribir el límite como

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x/x}{x/x + 1/x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1 + 1/x},$$

donde esto lo podemos hacer porque "no evaluamos x en infinito".
Por último, notamos que el segundo término en el denominador tiende a 0 (al igual que en el Ejemplo 12).

Límites al Infinito (cont.)

Al igual que en los casos anteriores, es importante notar que no nos interesa "evaluar x en infinito" (de hecho, esto es conceptualmente imposible), sino que queremos saber cómo se comporta la función cuando x "se aproxima" al infinito, ya sea positivo o negativo.

Ejemplo 13

Obtenga $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x+1}$.

Solución 13

Notamos que no tiene sentido hablar de "evaluar x en menos infinito", pues tendríamos un resultado de la forma ∞/∞.
Sin embargo, podemos reescribir el límite como

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x/x}{x/x+1/x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+1/x},$$

donde esto lo podemos hacer porque "no evaluamos x en infinito".
Por último, notamos que el segundo término en el denominador tiende a 0 (al igual que en el Ejemplo 12). $\therefore \lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x+1}=2$.

Convergencia v.s. Divergencia

converger (Del lat. convergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas: Tender a unirse en un punto.
2. intr. Coincidir en la misma posición ante algo controvertido.
3. intr. Mat. Dicho de una sucesión: Aproximarse a un límite.
4. intr. Med. Confluir distintos impulsos sensoriales en una sola neurona, como en la actividad motora.

Convergencia v.s. Divergencia

converger (Del lat. convergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas: Tender a unirse en un punto.
2. intr. Coincidir en la misma posición ante algo controvertido.
3. intr. Mat. Dicho de una sucesión: Aproximarse a un límite.
4. intr. Med. Confluir distintos impulsos sensoriales en una sola neurona, como en la actividad motora.

divergir (Del lat. divergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas o superficies: Irse apartando sucesivamente unas de otras.
2. intr. Discordar, discrepar.

Convergencia v.s. Divergencia

converger (Del lat. convergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas: Tender a unirse en un punto.
2. intr. Coincidir en la misma posición ante algo controvertido.
3. intr. Mat. Dicho de una sucesión: Aproximarse a un límite.
4. intr. Med. Confluir distintos impulsos sensoriales en una sola neurona, como en la actividad motora.

divergir (Del lat. divergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas o superficies: Irse apartando sucesivamente unas de otras.
2. intr. Discordar, discrepar.

Convergencia v.s. Divergencia

converger (Del lat. convergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas: Tender a unirse en un punto.
2. intr. Coincidir en la misma posición ante algo controvertido.
3. intr. Mat. Dicho de una sucesión: Aproximarse a un límite.
4. intr. Med. Confluir distintos impulsos sensoriales en una sola neurona, como en la actividad motora.

divergir (Del lat. divergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas o superficies: Irse apartando sucesivamente unas de otras.
2. intr. Discordar, discrepar.

Hasta ahora sólo hemos trabajado con límites convergentes, es decir, funciones que se acercan a un valor dado cuando la variable tiende a algún punto.

Convergencia v.s. Divergencia

converger (Del lat. convergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas: Tender a unirse en un punto.
2. intr. Coincidir en la misma posición ante algo controvertido.
3. intr. Mat. Dicho de una sucesión: Aproximarse a un límite.
4. intr. Med. Confluir distintos impulsos sensoriales en una sola neurona, como en la actividad motora.

divergir (Del lat. divergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas o superficies: Irse apartando sucesivamente unas de otras.
2. intr. Discordar, discrepar.

Hasta ahora sólo hemos trabajado con límites convergentes, es decir, funciones que se acercan a un valor dado cuando la variable tiende a algún punto. Sin embargo, esto no tiene por qué ser siempre así...

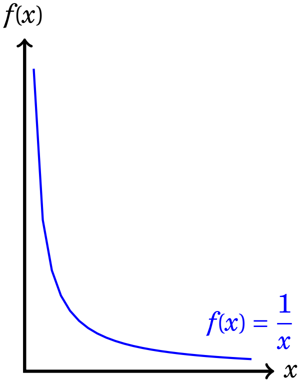
Límites Infinitos

Ejemplo 14

Similar al Ejemplo 12, grafique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Solución 14

Figura 11: Límite infinito



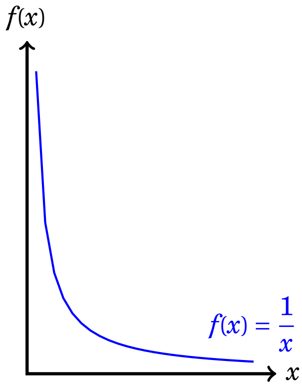
Límites Infinitos

Ejemplo 14

Similar al Ejemplo 12, grafique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Solución 14

Figura 11: Límite infinito



En efecto, a medida que x se acerca a 0 por la derecha, el valor de $\dfrac{1}{x}$ se vuelve arbitrariamente grande, esto es, tiende a infinito positivo...

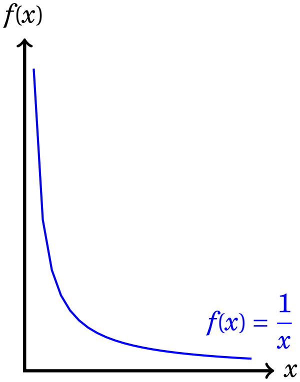
Límites Infinitos

Ejemplo 14

Similar al Ejemplo 12, grafique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Solución 14

Figura 11: Límite infinito



En efecto, a medida que x se acerca a 0 por la derecha, el valor de $\dfrac{1}{x}$ se vuelve arbitrariamente grande, esto es, tiende a infinito positivo...

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}$$

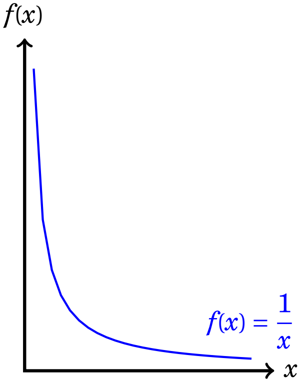
Límites Infinitos

Ejemplo 14

Similar al Ejemplo 12, grafique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Solución 14

Figura 11: Límite infinito



En efecto, a medida que x se acerca a 0 por la derecha, el valor de $\dfrac{1}{x}$ se vuelve arbitrariamente grande, esto es, tiende a infinito positivo...

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}$$

En este caso se dice que $f(x)$ *diverge* cuando $x \to 0^+$.

Divergencia en el Infinito

Además de divergir cuando x tiende a algún valor particular, puede darse que una función diverja cuando x tienda a $+\infty$ o $-\infty$.

Divergencia en el Infinito

Además de divergir cuando x tiende a algún valor particular, puede darse que una función diverja cuando x tienda a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 15

Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{5x^2 - 6x + 7}$. Obtenga $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Divergencia en el Infinito

Además de divergir cuando x tiende a algún valor particular, puede darse que una función diverja cuando x tienda a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 15

Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{5x^2 - 6x + 7}$. Obtenga $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Solución 15

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3/x^2 - 2x^2/x^2 + 3x/x^2 - 4/x^2}{5x^2/x^2 - 6x/x^2 + 7/x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x - 2}{5} = \infty$$

Divergencia en el Infinito

Además de divergir cuando x tiende a algún valor particular, puede darse que una función diverja cuando x tienda a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 15

Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{5x^2 - 6x + 7}$. Obtenga $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Solución 15

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3/x^2 - 2x^2/x^2 + 3x/x^2 - 4/x^2}{5x^2/x^2 - 6x/x^2 + 7/x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{5} = \infty$$

Propuesto 10

Grafique cualquier polinomio y observe qué ocurre cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Divergencia en el Infinito

Además de divergir cuando x tiende a algún valor particular, puede darse que una función diverja cuando x tienda a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 15

Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{5x^2 - 6x + 7}$. Obtenga $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Solución 15

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3/x^2 - 2x^2/x^2 + 3x/x^2 - 4/x^2}{5x^2/x^2 - 6x/x^2 + 7/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{5} = \infty$$

Propuesto 10

Grafique cualquier polinomio y observe qué ocurre cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Propuesto 11

Repita lo anterior con el logaritmo de cualquier polinomio positivo.

Divergencia en el Infinito

Además de divergir cuando x tiende a algún valor particular, puede darse que una función diverja cuando x tienda a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 15

Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{5x^2 - 6x + 7}$. Obtenga $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Solución 15

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3/x^2 - 2x^2/x^2 + 3x/x^2 - 4/x^2}{5x^2/x^2 - 6x/x^2 + 7/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{5} = \infty$$

Propuesto 10

Grafique cualquier polinomio y observe qué ocurre cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Propuesto 11

Repita lo anterior con el logaritmo de cualquier polinomio positivo.

Propuesto 12

Ahora con la raíz de cualquier polinomio positivo.

Convergencia en el Infinito

Tal como vimos en el Ejemplo 12, pueden existir distintas funciones que convergen cuando x tiende a infinito positivo o negativo.

[5] Más adelante veremos cómo calcular estas tasas de crecimiento.

Convergencia en el Infinito

Tal como vimos en el Ejemplo 12, pueden existir distintas funciones que convergen cuando x tiende a infinito positivo o negativo.

Ejemplo 16

En macroeconomía se habla de la idea de "convergencia en crecimiento" (crecimiento en el PIB), que básicamente indica que en el largo plazo, todos los países tienden a crecer a la misma tasa[5] (y la brecha entre sus productos será menor). Suponga que el crecimiento de cualquier economía depende de su nivel de producto Y de la forma $f(Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{Y}}$. ¿Por qué se justificaría esta hipótesis de convergencia en crecimiento?

[5] Más adelante veremos cómo calcular estas tasas de crecimiento.

Convergencia en el Infinito

Tal como vimos en el Ejemplo 12, pueden existir distintas funciones que convergen cuando x tiende a infinito positivo o negativo.

Ejemplo 16

En macroeconomía se habla de la idea de "convergencia en crecimiento" (crecimiento en el PIB), que básicamente indica que en el largo plazo, todos los países tienden a crecer a la misma tasa[5] (y la brecha entre sus productos será menor). Suponga que el crecimiento de cualquier economía depende de su nivel de producto Y de la forma $f(Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{Y}}$. ¿Por qué se justificaría esta hipótesis de convergencia en crecimiento?

Solución 16

Porque a medida que el nivel del producto crece, el crecimiento de este producto es cada vez menor. En el límite, un país con un PIB arbitrariamente grande simplemente no crecerá, de modo que los países más pequeños, que sí tienen crecimiento positivo, lo van a alcanzar, esto es, van a converger.

[5] Más adelante veremos cómo calcular estas tasas de crecimiento.

Cambio de Variable (cont.)

Utilizando límites infinitos y en el infinito se pueden hacer cambios de variables muy útiles.

Cambio de Variable (cont.)

Utilizando límites infinitos y en el infinito se pueden hacer cambios de variables muy útiles.

En la Proposición 9, indicamos que $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Cambio de Variable (cont.)

Utilizando límites infinitos y en el infinito se pueden hacer cambios de variables muy útiles.

En la Proposición 9, indicamos que $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$. Con un cambio de variable se puede obtener una versión alternativa de este límite...

Cambio de Variable (cont.)

Utilizando límites infinitos y en el infinito se pueden hacer cambios de variables muy útiles.

En la Proposición 9, indicamos que $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$. Con un cambio de variable se puede obtener una versión alternativa de este límite...

Proposición 12

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Cambio de Variable (cont.)

Utilizando límites infinitos y en el infinito se pueden hacer cambios de variables muy útiles.

En la Proposición 9, indicamos que $\lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$. Con un cambio de variable se puede obtener una versión alternativa de este límite...

Proposición 12

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Demostración.

Sea $x = \frac{1}{y}$*, de modo que* $y \to 0^+ \implies x \to \infty$.

Cambio de Variable (cont.)

Utilizando límites infinitos y en el infinito se pueden hacer cambios de variables muy útiles.

En la Proposición 9, indicamos que $\lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$. Con un cambio de variable se puede obtener una versión alternativa de este límite...

Proposición 12

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Demostración.

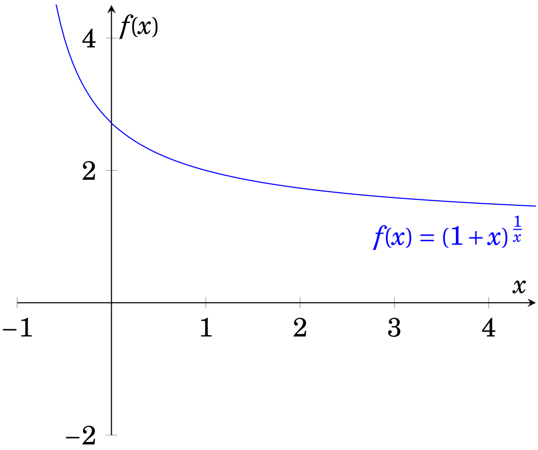
Sea $x = \frac{1}{y}$*, de modo que* $y \to 0^+ \implies x \to \infty$*. Reemplazando esto en la Proposición 9 se obtiene* $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. □

Propuesto 13

Mostrar que lo anterior también se cumple cuando $x \to -\infty$.

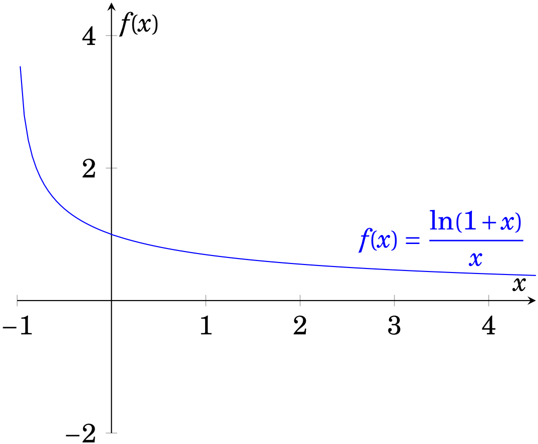
Gráficos: Límites Especiales

Figura 12: Proposición 9



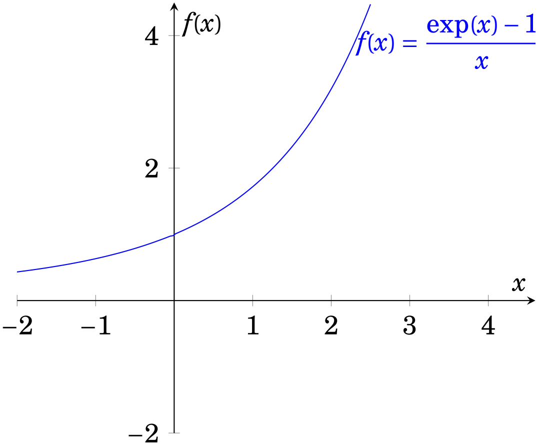
Gráficos: Límites Especiales

Figura 13: Proposición 10



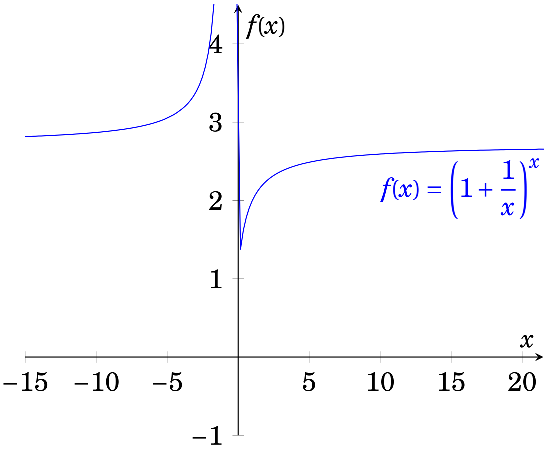
Gráficos: Límites Especiales

Figura 14: Proposición 11



Gráficos: Límites Especiales

Figura 15: Proposición 12



Aplicación: Interés Compuesto

Ejemplo 17

Suponga que se le ofrece un proyecto de inversión que paga una tasa anual igual a r. Se le permite capitalizar de manera compuesta esta inversión n veces (las que usted quiera), de modo que en cada uno de los n períodos se obtiene una rentabilidad de r/n. Uno podría pensar que al aumentar n indefinidamente se pueden obtener ganancias arbitrariamente grandes, pues el interés compuesto se capitalizaría de manera exponencial. Sin embargo, la institución que le ofrece esta inversión no está preocupada por que haga tender n a infinito. *¿Por qué?*

Aplicación: Interés Compuesto

Ejemplo 17

Suponga que se le ofrece un proyecto de inversión que paga una tasa anual igual a r. Se le permite capitalizar de manera compuesta esta inversión n veces (las que usted quiera), de modo que en cada uno de los n períodos se obtiene una rentabilidad de r/n. Uno podría pensar que al aumentar n indefinidamente se pueden obtener ganancias arbitrariamente grandes, pues el interés compuesto se capitalizaría de manera exponencial. Sin embargo, la institución que le ofrece esta inversión no está preocupada por que haga tender n a infinito. *¿Por qué?*

Solución 17

No le preocupa porque $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ converge...

Aplicación: Interés Compuesto

Ejemplo 17

Suponga que se le ofrece un proyecto de inversión que paga una tasa anual igual a r. Se le permite capitalizar de manera compuesta esta inversión n veces (las que usted quiera), de modo que en cada uno de los n períodos se obtiene una rentabilidad de r/n. Uno podría pensar que al aumentar n indefinidamente se pueden obtener ganancias arbitrariamente grandes, pues el interés compuesto se capitalizaría de manera exponencial. Sin embargo, la institución que le ofrece esta inversión no está preocupada por que haga tender n a infinito. *¿Por qué?*

Solución 17

No le preocupa porque $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ converge...

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/r}\right)^{rn/r} = e^r.$$

Asíntotas Horizontales

Definición 9

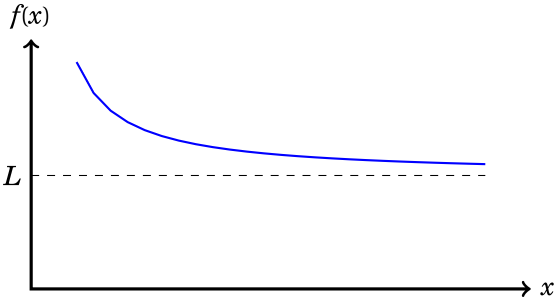
$y = L$ es una *asíntota horizontal* de $f(x)$ si se cumple que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ o bien $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Asíntotas Horizontales

Definición 9

$y = L$ es una *asíntota horizontal* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o bien $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Figura 16: Asíntota horizontal



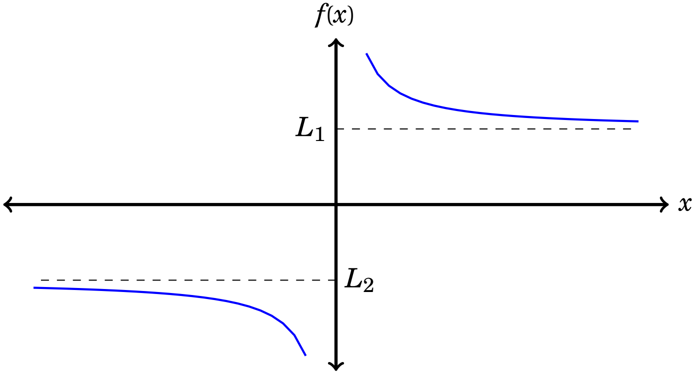
Asíntotas Horizontales (cont.)

Estas asíntotas horizontales pueden ser múltiples (dos):

Asíntotas Horizontales (cont.)

Estas asíntotas horizontales pueden ser múltiples (dos):

Figura 17: Múltiples asíntotas horizontales



¿Por qué no pueden ser más de dos?

Ejemplo: Asíntotas Horizontales

Ejemplo 18

Obtenga las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Grafique.

Ejemplo: Asíntotas Horizontales

Ejemplo 18

Obtenga las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Grafique.

Solución 18

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (*¿por qué?*), por lo que las asíntotas son $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$. El gráfico es equivalente al de la Figura 17.

Asíntotas Verticales

Definición 10

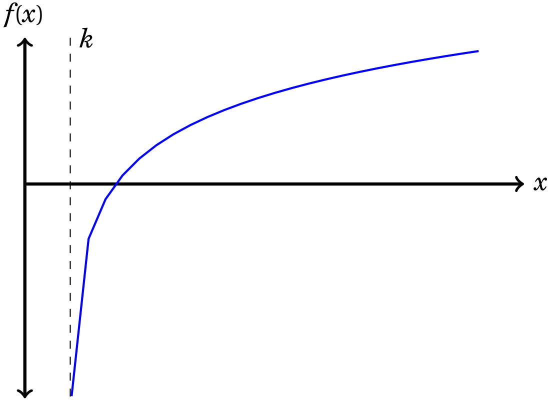
$x = k$ es una *asíntota vertical* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x \to k} f(x) = \infty$ o bien $\lim_{x \to k} f(x) = -\infty$.

Asíntotas Verticales

Definición 10

$x = k$ es una *asíntota vertical* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x \to k} f(x) = \infty$ o bien $\lim_{x \to k} f(x) = -\infty$.

Figura 18: Asíntota vertical



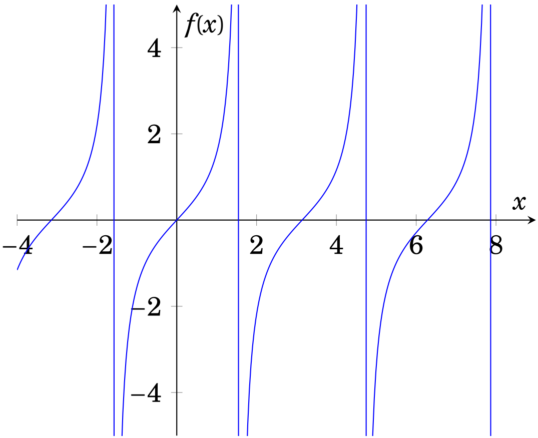
Asíntotas Verticales (cont.)

Estas asíntotas verticales también pueden ser múltiples (dos o más):

Asíntotas Verticales (cont.)

Estas asíntotas verticales también pueden ser múltiples (dos o más):

Figura 19: Múltiples asíntotas verticales



Ejemplo: Asíntotas Verticales

Ejemplo 19

Obtenga todas las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$. Grafique.

Ejemplo: Asíntotas Verticales

Ejemplo 19

Obtenga todas las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$. Grafique.

Solución 19

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, por lo que $y = 1$ es la única asíntota horizontal. Por último, la función diverge cuando $x \to 2$ y cuando $x \to -2$, por lo que $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$ son ambas asíntotas verticales.

Ejemplo: Asíntotas Verticales

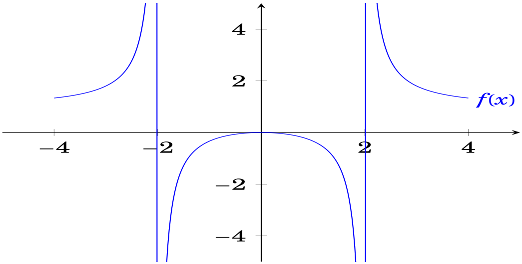
Ejemplo 19

Obtenga todas las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$. Grafique.

Solución 19

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, por lo que $y = 1$ es la única asíntota horizontal. Por último, la función diverge cuando $x \to 2$ y cuando $x \to -2$, por lo que $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$ son ambas asíntotas verticales.

Figura 20: Asíntotas verticales y horizontales



Asíntotas Oblicuas

Definición 11

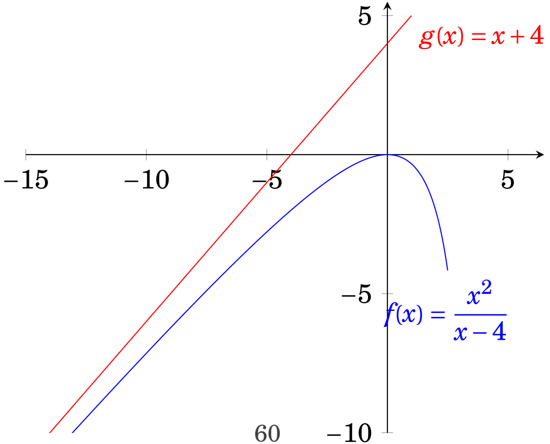
$g(x) = mx + n$ es una *asíntota oblicua* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0$ o bien $\lim_{x\to-\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Asíntotas Oblicuas

Definición 11

$g(x) = mx + n$ es una *asíntota oblicua* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0$ o bien $\lim_{x\to-\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Figura 21: Asíntota oblicua



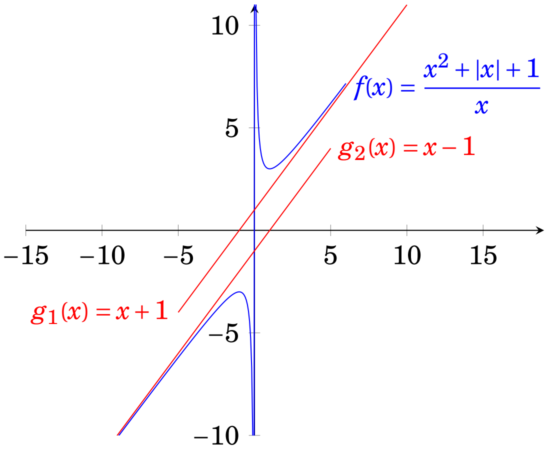
Asíntotas Oblicuas (cont.)

Estas asíntotas oblicuas pueden ser múltiples (dos):

Asíntotas Oblicuas (cont.)

Estas asíntotas oblicuas pueden ser múltiples (dos):

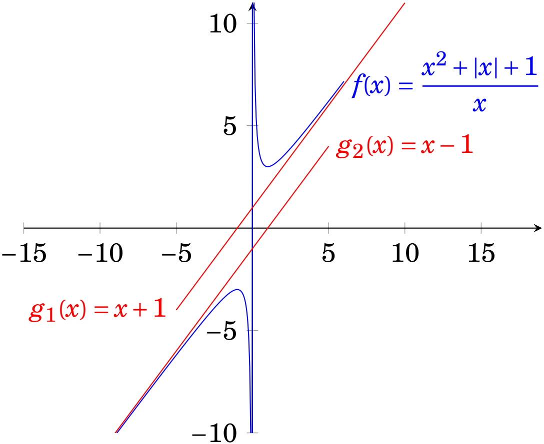
Figura 22: Múltiples asíntotas oblicuas



Asíntotas Oblicuas (cont.)

Estas asíntotas oblicuas pueden ser múltiples (dos):

Figura 22: Múltiples asíntotas oblicuas



¿Por qué no pueden ser más de dos?

Álgebra: Asíntotas Oblicuas

En base a la Definición 11, sabemos que se debe cumplir que si $g(x)$ es la asíntota oblicua de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Álgebra: Asíntotas Oblicuas

En base a la Definición 11, sabemos que se debe cumplir que si $g(x)$ es la asíntota oblicua de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Luego, si la asíntota existe, se cumple que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} = 0$.

Álgebra: Asíntotas Oblicuas

En base a la Definición 11, sabemos que se debe cumplir que si $g(x)$ es la asíntota oblicua de $f(x)$, entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Luego, si la asíntota existe, se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} = 0$.

Pero sabemos que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{mx+n}{x} = m$.

Álgebra: Asíntotas Oblicuas

En base a la Definición 11, sabemos que se debe cumplir que si $g(x)$ es la asíntota oblicua de $f(x)$, entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Luego, si la asíntota existe, se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} = 0$.

Pero sabemos que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{mx+n}{x} = m$.

Por lo tanto, $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m}$, siempre que la asíntota exista.

Álgebra: Asíntotas Oblicuas

En base a la Definición 11, sabemos que se debe cumplir que si $g(x)$ es la asíntota oblicua de $f(x)$, entonces $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-g(x)=0$.

Luego, si la asíntota existe, se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}-\frac{g(x)}{x}=0$.

Pero sabemos que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{mx+n}{x}=m$.

Por lo tanto, $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=m}$, siempre que la asíntota exista.

Finalmente, tras computar m sabemos que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}-(mx+n)=0$

$\iff \boxed{n=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}-mx}$.

Álgebra: Asíntotas Oblicuas

En base a la Definición 11, sabemos que se debe cumplir que si $g(x)$ es la asíntota oblicua de $f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-g(x)=0$.

Luego, si la asíntota existe, se cumple que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{g(x)}{x}=0$.

Pero sabemos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{mx+n}{x}=m$.

Por lo tanto, $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=m}$, siempre que la asíntota exista.

Finalmente, tras computar m sabemos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}-(mx+n)=0$

$\iff \boxed{n=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}-mx}$.

Con m y n computados podemos determinar $g(x)$.

Ejemplo: Asíntotas Oblicuas

Ejemplo 20

Obtenga la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x + 2x^2}{x}$.

Ejemplo: Asíntotas Oblicuas

Ejemplo 20

Obtenga la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} + 2x^2}{x}$.

Solución 20

Sea $g(x) = mx + n$ la asíntota oblicua.

Ejemplo: Asíntotas Oblicuas

Ejemplo 20

Obtenga la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x + 2x^2}{x}$.

Solución 20

Sea $g(x) = mx + n$ la asíntota oblicua.

Notamos que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, de modo que $m = 2$.

Ejemplo: Asíntotas Oblicuas

Ejemplo 20

Obtenga la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x + 2x^2}{x}$.

Solución 20

Sea $g(x) = mx + n$ la asíntota oblicua.

Notamos que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, de modo que $m = 2$.

Por último, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = 0$, por lo que $n = 0$.

Ejemplo: Asíntotas Oblicuas

Ejemplo 20

Obtenga la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x + 2x^2}{x}$.

Solución 20

Sea $g(x) = mx + n$ la asíntota oblicua.

Notamos que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, de modo que $m = 2$.

Por último, $\lim_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 0$, por lo que $n = 0$.

Así, $g(x) = 2x$ es la asíntota oblicua.

Módulo 7

▸ Volver al Inicio de la Sección

Sin Levantar el Lápiz

Anteriormente comentamos la existencia de funciones que “se pueden dibujar sin levantar el lápiz”.

Sin Levantar el Lápiz

Anteriormente comentamos la existencia de funciones que “se pueden dibujar sin levantar el lápiz”.
Una de las ventajas de estas funciones es que el cálculo de cualquier límite en su dominio se podía obtener simplemente reemplazando el argumento de la función por el valor hacia el cual tiende la variable independiente en el límite que se desea calcular.

Sin Levantar el Lápiz

Anteriormente comentamos la existencia de funciones que “se pueden dibujar sin levantar el lápiz”.
Una de las ventajas de estas funciones es que el cálculo de cualquier límite en su dominio se podía obtener simplemente reemplazando el argumento de la función por el valor hacia el cual tiende la variable independiente en el límite que se desea calcular.
Dicho de otro modo, en estas funciones se cumple que

$$\lim_{x\to k} f(x) = f(k).$$

Definición de Continuidad

Definición 12

Una función $f(x)$ se dice *continua* en $x = k$ si se cumple que $k \in \operatorname{Dom} f$ (i.e. la función está definida en k) y además

$$\lim_{x \to k} f(x) = f(k).$$

Definición de Continuidad

Definición 12

Una función $f(x)$ se dice *continua* en $x = k$ si se cumple que $k \in \mathrm{Dom}\, f$ (i.e. la función está definida en k) y además

$$\lim_{x \to k} f(x) = f(k).$$

Definición 13

Una función $f(x)$ se dice continua en el intervalo $[a, b]$ si es continua en cualquier $k \in [a, b]$.

Definición de Continuidad

Definición 12

Una función $f(x)$ se dice *continua* en $x = k$ si se cumple que $k \in \mathrm{Dom}\, f$ (i.e. la función está definida en k) y además

$$\lim_{x \to k} f(x) = f(k).$$

Definición 13

Una función $f(x)$ se dice continua en el intervalo $[a, b]$ si es continua en cualquier $k \in [a, b]$.

Las funciones continuas son justamente aquellas que “se pueden dibujar sin levantar el lápiz”, esto es, son funciones que no tienen “hoyos” ni “saltos”.

Definición de Continuidad

Definición 12

Una función $f(x)$ se dice *continua* en $x = k$ si se cumple que $k \in \mathrm{Dom}\, f$ (i.e. la función está definida en k) y además

$$\lim_{x \to k} f(x) = f(k).$$

Definición 13

Una función $f(x)$ se dice continua en el intervalo $[a, b]$ si es continua en cualquier $k \in [a, b]$.

Las funciones continuas son justamente aquellas que "se pueden dibujar sin levantar el lápiz", esto es, son funciones que no tienen "hoyos" ni "saltos".

Otra forma de interpretarlas es como funciones en las cuales *pequeños cambios en el argumento generan pequeños cambios en el valor de la función*.

Definición de Continuidad

Definición 12

Una función $f(x)$ se dice *continua* en $x = k$ si se cumple que $k \in \operatorname{Dom} f$ (i.e. la función está definida en k) y además

$$\lim_{x \to k} f(x) = f(k).$$

Definición 13

Una función $f(x)$ se dice continua en el intervalo $[a,b]$ si es continua en cualquier $k \in [a,b]$.

Las funciones continuas son justamente aquellas que "se pueden dibujar sin levantar el lápiz", esto es, son funciones que no tienen "hoyos" ni "saltos".

Otra forma de interpretarlas es como funciones en las cuales *pequeños cambios en el argumento generan pequeños cambios en el valor de la función*.

Una función que no cumple esto se dice *discontinua*.

Gráfico: Continuidad

Figura 23: Funciones Continuas en $\mathbb{R}$

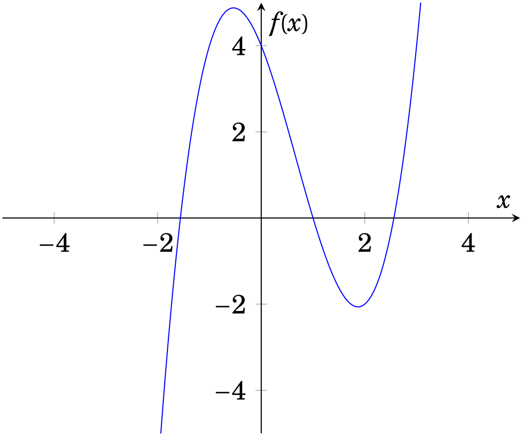


Gráfico: Continuidad

Figura 23: Funciones Continuas en $\mathbb{R}$

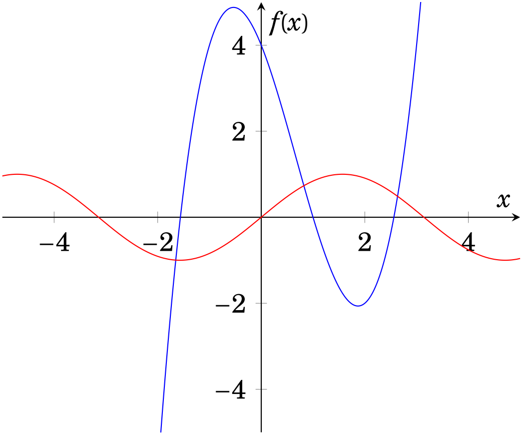


Gráfico: Continuidad

Figura 23: Funciones Continuas en $\mathbb{R}$

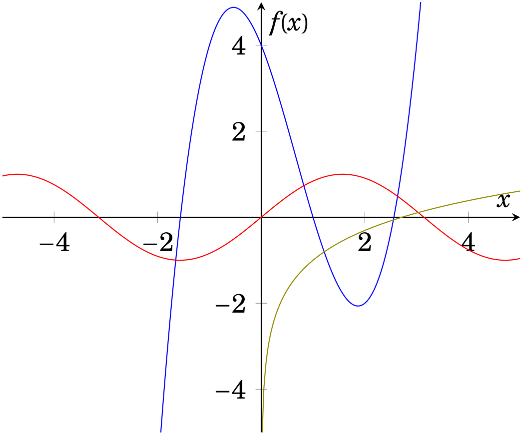


Gráfico: Continuidad

Figura 23: Funciones Continuas en $\mathbb{R}$

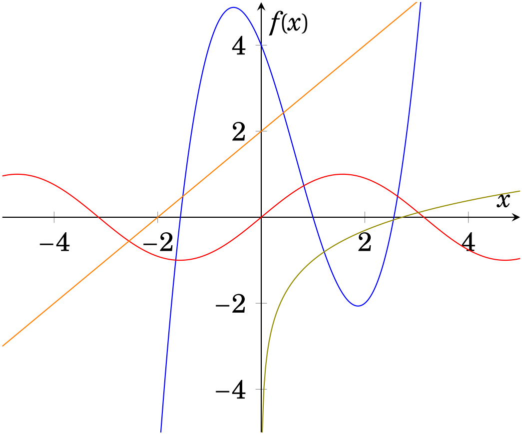


Gráfico: Discontinuidad

Figura 24: Funciones Discontinuas en $\mathbb{R}$

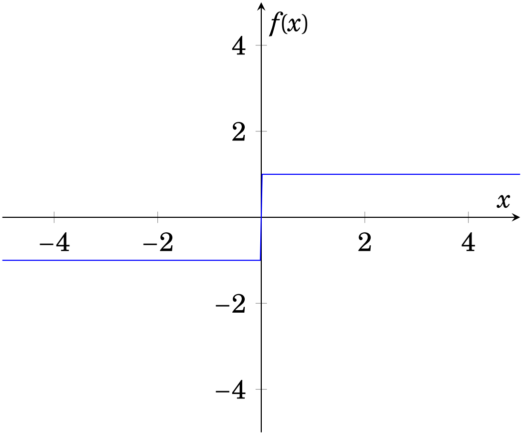


Gráfico: Discontinuidad

Figura 24: Funciones Discontinuas en $\mathbb{R}$

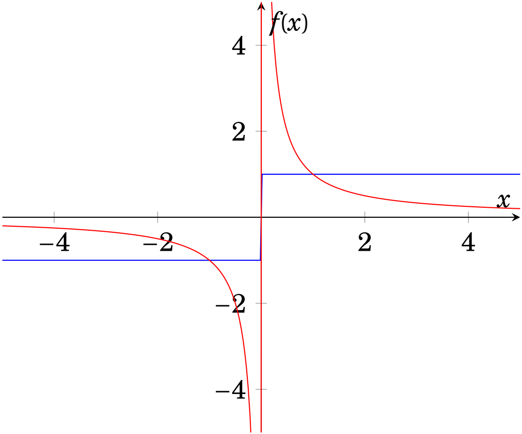


Gráfico: Discontinuidad

Figura 24: Funciones Discontinuas en $\mathbb{R}$

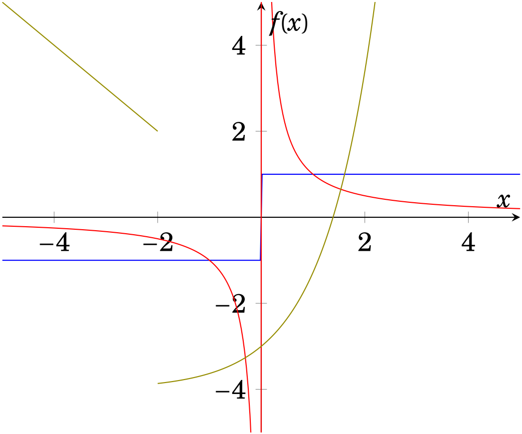
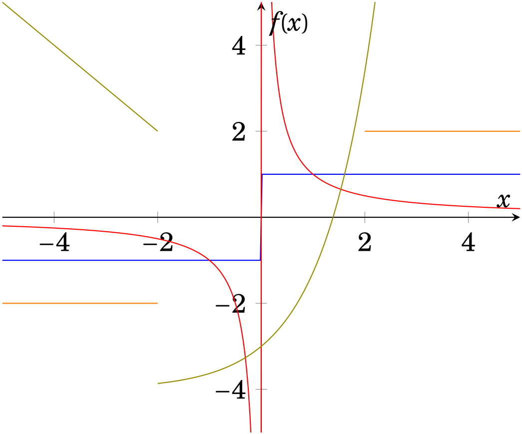


Gráfico: Discontinuidad

Figura 24: Funciones Discontinuas en $\mathbb{R}$



Propiedades de Funciones Continuas

Proposición 13

La suma o resta de dos funciones continuas es también una función continua. Esto es, si f *y* g *son continuas, entonces* $f \pm g$ *también es continua.*

Propiedades de Funciones Continuas

Proposición 13

La suma o resta de dos funciones continuas es también una función continua. Esto es, si f y g son continuas, entonces $f \pm g$ también es continua.

Proposición 14

El producto de dos funciones continuas es también una función continua. Esto es, si f y g son continuas, entonces $f \cdot g$ también es continua.

Propiedades de Funciones Continuas

Proposición 13

La suma o resta de dos funciones continuas es también una función continua. Esto es, si f y g son continuas, entonces $f \pm g$ también es continua.

Proposición 14

El producto de dos funciones continuas es también una función continua. Esto es, si f y g son continuas, entonces $f \cdot g$ también es continua.

Proposición 15

El cociente entre dos funciones continuas es también una función continua si la función divisora es no nula. Esto es, si f y g son continuas, entonces $\frac{f}{g}$ también es continua si $g \neq 0$.

Funciones Continuas

Hay funciones "típicas" que son contínuas en su dominio.

Funciones Continuas

Hay funciones "típicas" que son contínuas en su dominio.

- Constantes: $f(x) = c$.

Funciones Continuas

Hay funciones “típicas” que son contínuas en su dominio.

- Constantes: $f(x) = c$.
- Polinomios: $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.

Funciones Continuas

Hay funciones "típicas" que son contínuas en su dominio.

- Constantes: $f(x) = c$.
- Polinomios: $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.
- Raíces: $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Funciones Continuas

Hay funciones "típicas" que son contínuas en su dominio.

- Constantes: $f(x) = c$.
- Polinomios: $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.
- Raíces: $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
- Logaritmos: $f(x) = \log_a x$.

Funciones Continuas

Hay funciones "típicas" que son contínuas en su dominio.

- Constantes: $f(x) = c$.
- Polinomios: $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.
- Raíces: $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
- Logaritmos: $f(x) = \log_a x$.
- Exponenciales: $f(x) = a^x$.

Funciones Continuas

Hay funciones "típicas" que son contínuas en su dominio.

- Constantes: $f(x) = c$.
- Polinomios: $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.
- Raíces: $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
- Logaritmos: $f(x) = \log_a x$.
- Exponenciales: $f(x) = a^x$.

Funciones Continuas

Hay funciones “típicas” que son contínuas en su dominio.

- Constantes: $f(x) = c$.
- Polinomios: $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.
- Raíces: $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
- Logaritmos: $f(x) = \log_a x$.
- Exponenciales: $f(x) = a^x$.

Juntando esto con la Proposición 16 podemos determinar fácilmente cómo son la mayoría de las funciones continuas:

Proposición 16

Sean $f : X \mapsto Y$ y $g : Y \mapsto Z$ dos funciones continuas. Entonces $g \circ f$ también es una función continua.

Funciones Continuas

Hay funciones "típicas" que son contínuas en su dominio.

- Constantes: $f(x) = c$.
- Polinomios: $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.
- Raíces: $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
- Logaritmos: $f(x) = \log_a x$.
- Exponenciales: $f(x) = a^x$.

Juntando esto con la Proposición 16 podemos determinar fácilmente cómo son la mayoría de las funciones continuas:

Proposición 16

Sean $f : X \mapsto Y$ y $g : Y \mapsto Z$ dos funciones continuas. Entonces $g \circ f$ también es una función continua. Esto es, la composición de funciones continuas también es una función continua ***siempre y cuando los dominios y codominios sean compatibles****.*

Ejemplo: Composición de Continuas

Ejemplo 21

Sea $f(x)$ un polinomio y sea $g(x) = \ln x$ una función logarítmica. Entonces $f(g(x))$ es continua en el dominio de g, pero $g(f(x))$ no es continua en el dominio de f. Comente.

Ejemplo: Composición de Continuas

Ejemplo 21

Sea $f(x)$ un polinomio y sea $g(x) = \ln x$ una función logarítmica. Entonces $f(g(x))$ es continua en el dominio de g, pero $g(f(x))$ no es continua en el dominio de f. Comente.

Solución 21

Incierto.

Ejemplo: Composición de Continuas

Ejemplo 21

Sea $f(x)$ un polinomio y sea $g(x) = \ln x$ una función logarítmica. Entonces $f(g(x))$ es continua en el dominio de g, pero $g(f(x))$ no es continua en el dominio de f. Comente.

Solución 21

Incierto. En efecto, tanto f como g son funciones continuas en sus dominios, donde el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el de g es $\mathbb{R}_{++}$.

Ejemplo: Composición de Continuas

Ejemplo 21

Sea $f(x)$ un polinomio y sea $g(x) = \ln x$ una función logarítmica. Entonces $f(g(x))$ es continua en el dominio de g, pero $g(f(x))$ no es continua en el dominio de f. Comente.

Solución 21

Incierto. En efecto, tanto f como g son funciones continuas en sus dominios, donde el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el de g es $\mathbb{R}_{++}$. La primera afirmación del comente es verdadera, pues como g toma valores en los reales, siempre se puede componer g en f y obtener una función continua por la Proposición 16.

Ejemplo: Composición de Continuas

Ejemplo 21

Sea $f(x)$ un polinomio y sea $g(x) = \ln x$ una función logarítmica. Entonces $f(g(x))$ es continua en el dominio de g, pero $g(f(x))$ no es continua en el dominio de f. Comente.

Solución 21

Incierto. En efecto, tanto f como g son funciones continuas en sus dominios, donde el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el de g es $\mathbb{R}_{++}$. La primera afirmación del comente es verdadera, pues como g toma valores en los reales, siempre se puede componer g en f y obtener una función continua por la Proposición 16. Sin embargo, la segunda afirmación se cumple si y sólo si el recorrido de f no es siempre positivo.

Ejemplo: Composición de Continuas

Ejemplo 21

Sea $f(x)$ un polinomio y sea $g(x) = \ln x$ una función logarítmica. Entonces $f(g(x))$ es continua en el dominio de g, pero $g(f(x))$ no es continua en el dominio de f. Comente.

Solución 21

Incierto. En efecto, tanto f como g son funciones continuas en sus dominios, donde el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el de g es $\mathbb{R}_{++}$. La primera afirmación del comente es verdadera, pues como g toma valores en los reales, siempre se puede componer g en f y obtener una función continua por la Proposición 16. Sin embargo, la segunda afirmación se cumple si y sólo si el recorrido de f no es siempre positivo. En caso de que el recorrido de f sea siempre positivo (e.g. $f(x) = x^2 + x + 1$) no se cumple la afirmación, pues $g(f(x))$ sí sería continua en el dominio de f.

Gráfico: Composición de Continuas

Figura 25: Composición Compatible de Funciones Continuas

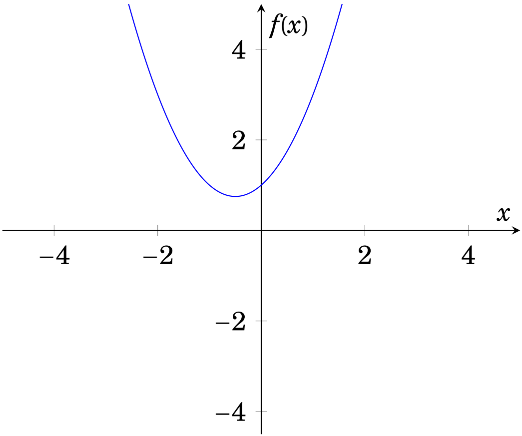


Gráfico: Composición de Continuas

Figura 25: Composición Compatible de Funciones Continuas

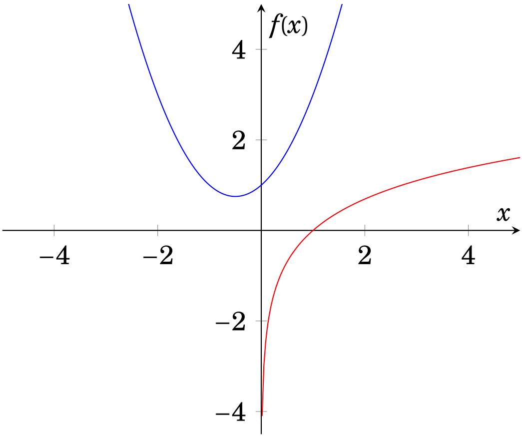


Gráfico: Composición de Continuas

Figura 25: Composición Compatible de Funciones Continuas

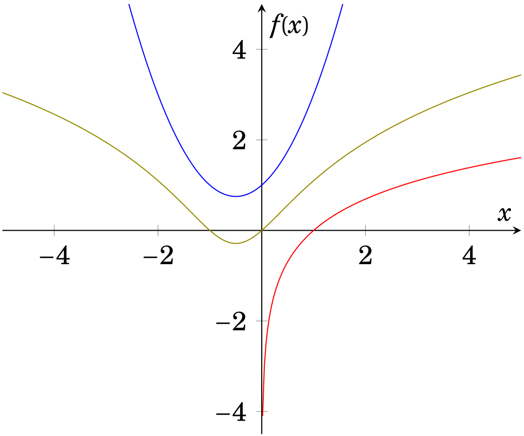


Gráfico: Composición de Continuas

Figura 25: Composición Compatible de Funciones Continuas

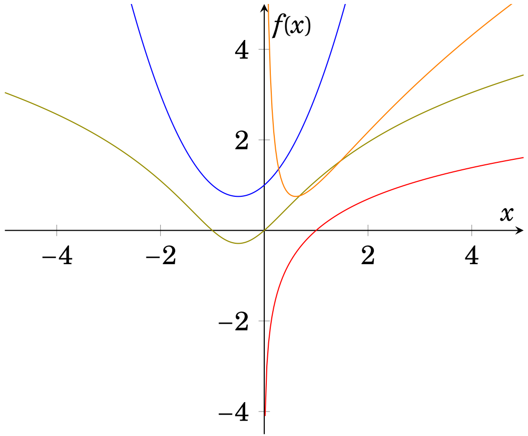


Gráfico: Composición de Continuas

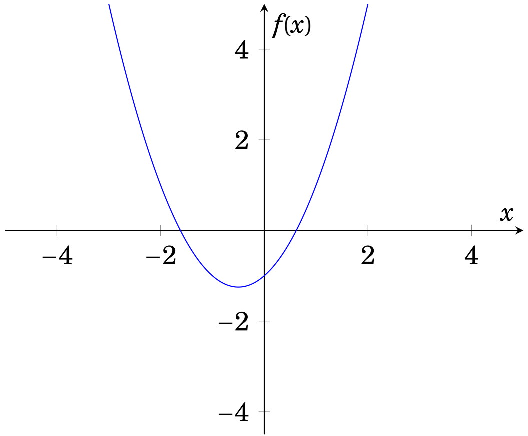


Figura 26: Composición Incompatible de Funciones Continuas

Gráfico: Composición de Continuas

Figura 26: Composición Incompatible de Funciones Continuas

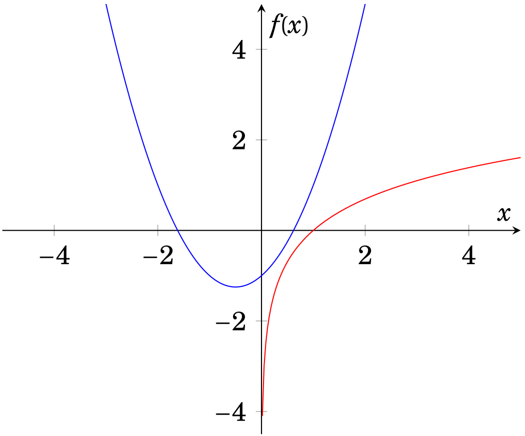


Gráfico: Composición de Continuas

Figura 26: Composición Incompatible de Funciones Continuas

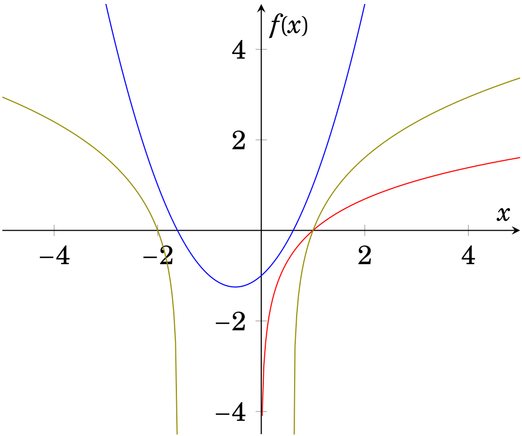
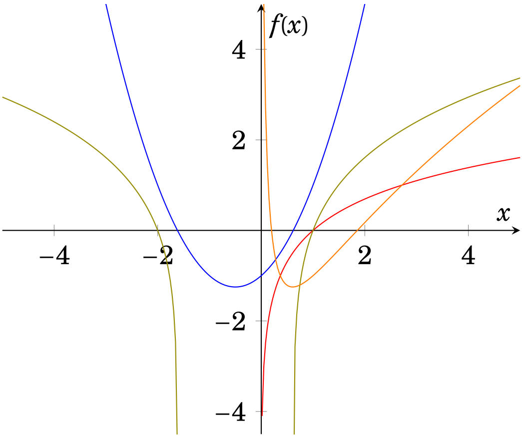


Gráfico: Composición de Continuas

Figura 26: Composición Incompatible de Funciones Continuas



Violaciones de Continuidad

En el Ejemplo 14 vimos que si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y comentamos que $f(x)$ no estaba definida en $x = 0$. Luego, $f(x)$ de ninguna manera puede ser continua en $x = 0$, pues sus límites laterales son distintos (i.e. $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$).

Violaciones de Continuidad

En el Ejemplo 14 vimos que si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y comentamos que $f(x)$ no estaba definida en $x = 0$. Luego, $f(x)$ de ninguna manera puede ser continua en $x = 0$, pues sus límites laterales son distintos (i.e. $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$).

Sin embargo, pueden existir funciones que tengan un límite bien definido en un punto y aun así no sean continuas.

Violaciones de Continuidad

En el Ejemplo 14 vimos que si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y comentamos que $f(x)$ no estaba definida en $x = 0$. Luego, $f(x)$ de ninguna manera puede ser continua en $x = 0$, pues sus límites laterales son distintos (i.e. $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$).

Sin embargo, pueden existir funciones que tengan un límite bien definido en un punto y aun así no sean continuas.

Este es el caso del Ejemplo 6, donde $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Violaciones de Continuidad

En el Ejemplo 14 vimos que si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y comentamos que $f(x)$ no estaba definida en $x = 0$. Luego, $f(x)$ de ninguna manera puede ser continua en $x = 0$, pues sus límites laterales son distintos (i.e. $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$).

Sin embargo, pueden existir funciones que tengan un límite bien definido en un punto y aun así no sean continuas.

Este es el caso del Ejemplo 6, donde $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$. Sin embargo, $x = 2$ no es parte del dominio de la función.

Violaciones de Continuidad

En el Ejemplo 14 vimos que si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y comentamos que $f(x)$ no estaba definida en $x = 0$. Luego, $f(x)$ de ninguna manera puede ser continua en $x = 0$, pues sus límites laterales son distintos (i.e. $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$).

Sin embargo, pueden existir funciones que tengan un límite bien definido en un punto y aun así no sean continuas.

Este es el caso del Ejemplo 6, donde $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$. Sin embargo, $x = 2$ no es parte del dominio de la función. Por lo tanto, $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ no es continua en $x = 2$.

Violaciones de Continuidad

En el Ejemplo 14 vimos que si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y comentamos que $f(x)$ no estaba definida en $x = 0$. Luego, $f(x)$ de ninguna manera puede ser continua en $x = 0$, pues sus límites laterales son distintos (i.e. $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$).

Sin embargo, pueden existir funciones que tengan un límite bien definido en un punto y aun así no sean continuas.

Este es el caso del Ejemplo 6, donde $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$. Sin embargo, $x = 2$ no es parte del dominio de la función. Por lo tanto, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ no es continua en $x = 2$. Esto también se aprecia en la Figura 7.

Aplicación: Costos de Ajuste

Ejemplo 22

Una firma tiene un stock de capital K_t en el periodo t. Si desea alcanzar un stock K_{t+1} en el periodo $t+1$, entonces debe invertir $I_t = K_{t+1} - K_t$. Sin embargo, si $K_{t+1} \neq K_t$, esto es, si $I_t \neq 0$, entonces debe pagar un costo fijo de ajuste de c unidades monetarias (por ejemplo, porque tiene que pagar un costo de transporte). Si $I_t = 0$, entonces el costo de ajustarse es cero. ¿Es la función de costos de ajuste continua en todo su dominio?

Aplicación: Costos de Ajuste

Ejemplo 22

Una firma tiene un stock de capital K_t en el periodo t. Si desea alcanzar un stock K_{t+1} en el periodo $t+1$, entonces debe invertir $I_t = K_{t+1} - K_t$. Sin embargo, si $K_{t+1} \neq K_t$, esto es, si $I_t \neq 0$, entonces debe pagar un costo fijo de ajuste de c unidades monetarias (por ejemplo, porque tiene que pagar un costo de transporte). Si $I_t = 0$, entonces el costo de ajustarse es cero. ¿Es la función de costos de ajuste continua en todo su dominio?

Solución 22

No lo es.

Aplicación: Costos de Ajuste

Ejemplo 22

Una firma tiene un stock de capital K_t en el periodo t. Si desea alcanzar un stock K_{t+1} en el periodo $t+1$, entonces debe invertir $I_t = K_{t+1} - K_t$. Sin embargo, si $K_{t+1} \neq K_t$, esto es, si $I_t \neq 0$, entonces debe pagar un costo fijo de ajuste de c unidades monetarias (por ejemplo, porque tiene que pagar un costo de transporte). Si $I_t = 0$, entonces el costo de ajustarse es cero. ¿Es la función de costos de ajuste continua en todo su dominio?

Solución 22

No lo es. Sea $f(I_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } I_t = 0 \\ c & \text{si } I_t \neq 0 \end{cases}$ la función de costos de ajuste.

Aplicación: Costos de Ajuste

Ejemplo 22

Una firma tiene un stock de capital K_t en el periodo t. Si desea alcanzar un stock K_{t+1} en el periodo $t+1$, entonces debe invertir $I_t = K_{t+1} - K_t$. Sin embargo, si $K_{t+1} \neq K_t$, esto es, si $I_t \neq 0$, entonces debe pagar un costo fijo de ajuste de c unidades monetarias (por ejemplo, porque tiene que pagar un costo de transporte). Si $I_t = 0$, entonces el costo de ajustarse es cero. ¿Es la función de costos de ajuste continua en todo su dominio?

Solución 22

No lo es. Sea $f(I_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } I_t = 0 \\ c & \text{si } I_t \neq 0 \end{cases}$ la función de costos de ajuste. A pesar de que $\lim\limits_{I_t \to 0} f(I_t) = c$, $f(0) = 0 \neq c$, por lo que la función no es continua en $I_t = 0$.

Aplicación: Impuestos Continuos

Propuesto 14

Para calcular el Impuesto Global Complementario, se toma la renta anual (3) de cada individuo en UTA (unidades tributarias anuales), se pondera por el factor (4) que corresponde según su tramo de ingreso (2) y luego se rebaja (resta) el monto correspondiente (5). En el Cuadro 2 (extraído del SII) se muestra la escala, donde falta el factor que corresponde al tramo 3.

Cuadro 2: Escala de tasas del Impuesto Global Complementario

VIGENCIA -1	N° DE TRAMOS -2	RENTA IMPONIBLE ANUAL DESDE HASTA -3	FACTOR -4	CANTIDAD A REBAJAR (SIN CRÉDITO DEL 10% DE 1 UTA, DEROGADO) -5
RIGE A CONTAR DEL AÑO TRIBUTARIO 2014	1	0,0 UTA a 13,5 UTA	Exento	-.-
	2	13,5 " a 30 "	4%	0,54 UTA
	3	30 " a 50 "		1,74 "
	4	50 " a 70 "	13,5%	4,49 "
	5	70 " a 90 "	23%	11,14 "
	6	90 " a 120 "	30,4%	17,80 "
	7	120 " a 150 "	35,5%	23,92 "
	8	150 " y MAS	40%	30,67 "

NOTA: Para convertir la tabla a pesos ($) basta con multiplicar los valores anotados en las columnas (3) y (5) por el valor de la UTA del mes respectivo.

Calcule el parámetro del tramo 3, para que la función sea continua (*why?*) con el tramo anterior (2) y el siguiente (4). Justifique.

Ejercicio Avanzado

Propuesto 15

Encuentre los valores de a y b para los cuales $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x) - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{-ax+b} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

¿Qué ocurre si la función se redefine de la siguiente manera?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x) - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{ax+b} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Continuidad Reparable

Definición 14

Una función $f(x)$ discontinua en $x = k$ se dice reparable si y sólo si se cumple que $\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$. Esto es, si la discontinuidad se originó porque $f(k) \neq \lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$.

Continuidad Reparable

Definición 14

Una función $f(x)$ discontinua en $x = k$ se dice reparable si y sólo si se cumple que $\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$. Esto es, si la discontinuidad se originó porque $f(k) \neq \lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$.

Para reparar la función, basta con imponer que $f(k) = \lim_{x \to k} f(x)$.

Continuidad Reparable

Definición 14

Una función $f(x)$ discontinua en $x = k$ se dice reparable si y sólo si se cumple que $\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$. Esto es, si la discontinuidad se originó porque $f(k) \neq \lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$.

Para reparar la función, basta con imponer que $f(k) = \lim_{x \to k} f(x)$.

Ejemplo 23

Muestre que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ tiene una discontinuidad reparable (apóyese en la Figura 7), pero que la discontinuidad de $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ no es reparable (apóyese en la Figura 9).

Continuidad Reparable

Definición 14

Una función $f(x)$ discontinua en $x = k$ se dice reparable si y sólo si se cumple que $\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$. Esto es, si la discontinuidad se originó porque $f(k) \neq \lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$.

Para reparar la función, basta con imponer que $f(k) = \lim_{x \to k} f(x)$.

Ejemplo 23

Muestre que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ tiene una discontinuidad reparable (apóyese en la Figura 7), pero que la discontinuidad de $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ no es reparable (apóyese en la Figura 9).

Solución 23

Notamos que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$, por lo que la función reparada es $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$.

Continuidad Reparable

Definición 14

Una función $f(x)$ discontinua en $x = k$ se dice reparable si y sólo si se cumple que $\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$. Esto es, si la discontinuidad se originó porque $f(k) \neq \lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$.

Para reparar la función, basta con imponer que $f(k) = \lim_{x \to k} f(x)$.

Ejemplo 23

Muestre que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ tiene una discontinuidad reparable (apóyese en la Figura 7), pero que la discontinuidad de $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ no es reparable (apóyese en la Figura 9).

Solución 23

Notamos que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$, por lo que la función reparada es $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$. Por otro lado, $\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$, distinto a $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1$, por lo que la discontinuidad no es reparable.

Proposiciones Adicionales

Proposición 17

Sea f continua en un punto k con $f(k) \neq 0$. Entonces existe una vecindad de radio δ (ver Definición 6) en torno a k tal que $\forall x \in (k-\delta, k+\delta)$, el signo de $f(x)$ es igual al de $f(k)$, esto es, $f(x)f(k) > 0$.

[6] Este (potente) resultado lo utilizaremos más adelante.

Proposiciones Adicionales

Proposición 17

Sea f continua en un punto k con $f(k) \neq 0$. Entonces existe una vecindad de radio δ (ver Definición 6) en torno a k tal que $\forall x \in (k-\delta, k+\delta)$, el signo de $f(x)$ es igual al de $f(k)$, esto es, $f(x)f(k) > 0$.

La Proposición 17 se conoce como "Conservación Local del Signo".

[6] Este (potente) resultado lo utilizaremos más adelante.

Proposiciones Adicionales

Proposición 17

Sea f continua en un punto k con $f(k) \neq 0$. Entonces existe una vecindad de radio δ (ver Definición 6) en torno a k tal que $\forall x \in (k-\delta, k+\delta)$, el signo de $f(x)$ es igual al de $f(k)$, esto es, $f(x)f(k) > 0$.

La Proposición 17 se conoce como "Conservación Local del Signo".

Proposición 18

Sea f continua en el intervalo $[a,b]$, con $f(a)f(b) < 0$, esto es, con signos contrarios al evaluar en ambos extremos. Entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

[6]Este (potente) resultado lo utilizaremos más adelante.

Proposiciones Adicionales

Proposición 17

Sea f continua en un punto k con $f(k) \neq 0$. Entonces existe una vecindad de radio δ (ver Definición 6) en torno a k tal que $\forall x \in (k-\delta, k+\delta)$, el signo de $f(x)$ es igual al de $f(k)$, esto es, $f(x)f(k) > 0$.

La Proposición 17 se conoce como "Conservación Local del Signo".

Proposición 18

Sea f continua en el intervalo $[a,b]$, con $f(a)f(b) < 0$, esto es, con signos contrarios al evaluar en ambos extremos. Entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

La Proposición 18 se conoce como "Teorema de Bolzano"[6].

[6]Este (potente) resultado lo utilizaremos más adelante.

Unidad 2

Volver al Inicio

Módulo 8

▸ Volver al Inicio de la Sección

Recordatorio: Tasas de Cambio

En la Definición 3, particularmente en la ecuación (2) planteamos que una tasa de cambio promedio para una función f en el intervalo $[x, x+\Delta]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Recordatorio: Tasas de Cambio

En la Definición 3, particularmente en la ecuación (2) planteamos que una tasa de cambio promedio para una función f en el intervalo $[x, x+\Delta]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Además, en la Figura 2 vimos que esta tasa de cambio promedio puede ser interpretada como la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+\Delta, f(x+\Delta))$.

Recordatorio: Tasas de Cambio

En la Definición 3, particularmente en la ecuación (2) planteamos que una tasa de cambio promedio para una función f en el intervalo $[x, x+\Delta]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Además, en la Figura 2 vimos que esta tasa de cambio promedio puede ser interpretada como la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+\Delta, f(x+\Delta))$.
Sin embargo, en las Figuras 3 y 4 vimos cómo al utilizar intervalos muy amplios podíamos dejar de capturar, por ejemplo, si la función es creciente o decreciente al rededor de algún valor x.

Recordatorio: Tasas de Cambio

En la Definición 3, particularmente en la ecuación (2) planteamos que una tasa de cambio promedio para una función f en el intervalo $[x, x+\Delta]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

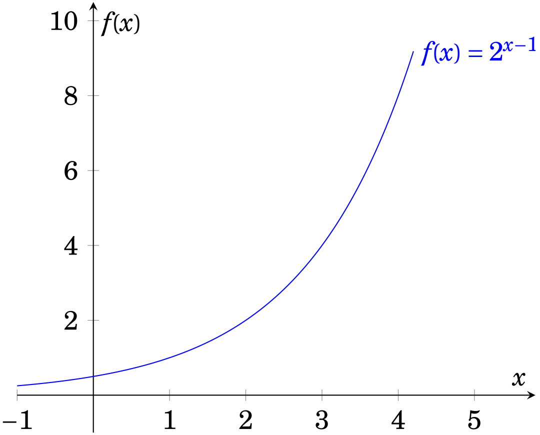
Además, en la Figura 2 vimos que esta tasa de cambio promedio puede ser interpretada como la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+\Delta, f(x+\Delta))$.

Sin embargo, en las Figuras 3 y 4 vimos cómo al utilizar intervalos muy amplios podíamos dejar de capturar, por ejemplo, si la función es creciente o decreciente al rededor de algún valor x.

En efecto, sería interesante saber *qué pasa con la tasa de cambio promedio cuando el intervalo se hace arbitrariamente pequeño*.

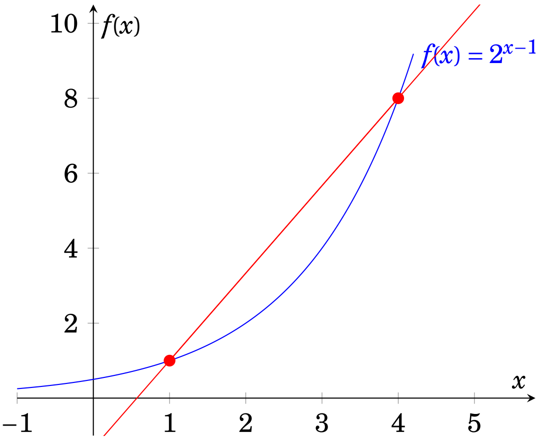
Tasas en Intervalos Pequeños

Figura 27: Tasa de Cambio Promedio en Distintos Intervalos



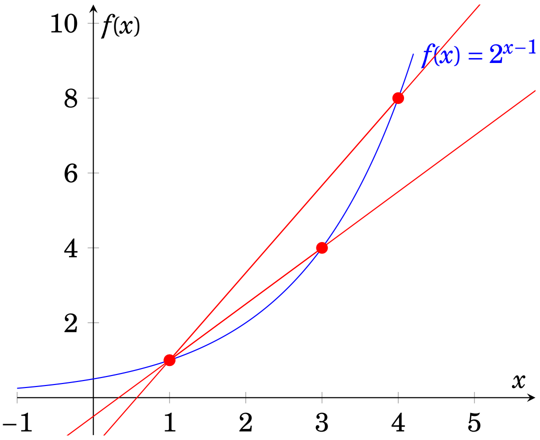
Tasas en Intervalos Pequeños

Figura 27: Tasa de Cambio Promedio en Distintos Intervalos



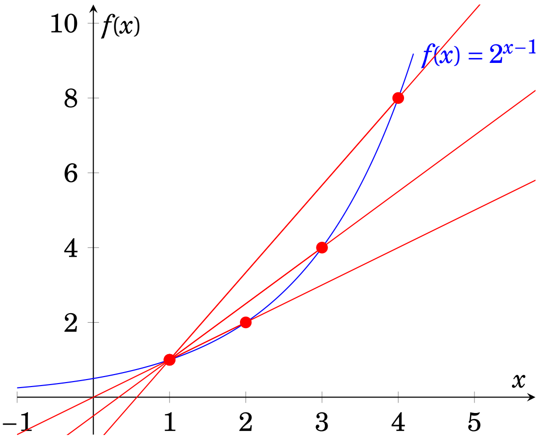
Tasas en Intervalos Pequeños

Figura 27: Tasa de Cambio Promedio en Distintos Intervalos



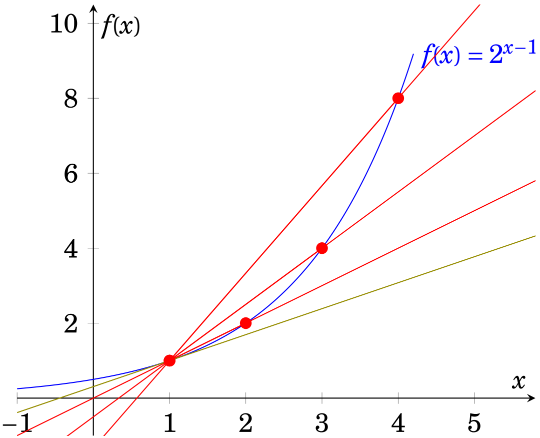
Tasas en Intervalos Pequeños

Figura 27: Tasa de Cambio Promedio en Distintos Intervalos



Tasas en Intervalos Pequeños

Figura 27: Tasa de Cambio Promedio en Distintos Intervalos



Límite de la Tasa de Cambio

Considerar un intervalo arbitrariamente pequeño a la hora de calcular una tasa de cambio promedio es lo mismo que calcular

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Límite de la Tasa de Cambio

Considerar un intervalo arbitrariamente pequeño a la hora de calcular una tasa de cambio promedio es lo mismo que calcular

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Cuando la amplitud del intervalo tiende a cero, se deja de llamar tasa (o razón) de cambio promedio y se utiliza el concepto de *tasa (o razón) de cambio instantánea*.

Límite de la Tasa de Cambio

Considerar un intervalo arbitrariamente pequeño a la hora de calcular una tasa de cambio promedio es lo mismo que calcular

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Cuando la amplitud del intervalo tiende a cero, se deja de llamar tasa (o razón) de cambio promedio y se utiliza el concepto de *tasa (o razón) de cambio instantánea*.
A diferencia de una tasa de cambio promedio, la tasa de cambio instantánea no corresponde a la pendiente de una recta secante, sino que equivale a la *pendiente de la recta tangente* a la función $f(x)$ en el punto $(x, f(x))$.

Límite de la Tasa de Cambio

Considerar un intervalo arbitrariamente pequeño a la hora de calcular una tasa de cambio promedio es lo mismo que calcular

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Cuando la amplitud del intervalo tiende a cero, se deja de llamar tasa (o razón) de cambio promedio y se utiliza el concepto de *tasa (o razón) de cambio instantánea*.
A diferencia de una tasa de cambio promedio, la tasa de cambio instantánea no corresponde a la pendiente de una recta secante, sino que equivale a la *pendiente de la recta tangente* a la función $f(x)$ en el punto $(x, f(x))$.
Para acortar esto último, se suele afirmar que la tasa de cambio instantánea equivale a la *pendiente de la función* $f(x)$ en x (en vez de hablar de la pendiente de la recta tangente).

Definición de Derivada

TODO lo de la diapositiva anterior lo vamos a condensar en una única definición...

Definición de Derivada

TODO lo de la diapositiva anterior lo vamos a condensar en una única definición...

Definición 15

La derivada de una función $y = f(x)$ es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

siempre y cuando dicho límite exista.

Definición de Derivada

TODO lo de la diapositiva anterior lo vamos a condensar en una única definición...

Definición 15

La derivada de una función $y = f(x)$ es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

siempre y cuando dicho límite exista.

Importante:

Definición de Derivada

TODO lo de la diapositiva anterior lo vamos a condensar en una única definición...

Definición 15

La derivada de una función $y = f(x)$ es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

siempre y cuando dicho límite exista.

Importante:

- ¡$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \neq \dfrac{dy}{dx}$!

Definición de Derivada

TODO lo de la diapositiva anterior lo vamos a condensar en una única definición...

Definición 15

La derivada de una función $y = f(x)$ es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

siempre y cuando dicho límite exista.

Importante:

- ¡$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \neq \dfrac{dy}{dx}$!
- La notación de Leibniz (dy/dx) es sólo eso... notación.

Definición de Derivada

TODO lo de la diapositiva anterior lo vamos a condensar en una única definición...

Definición 15

La derivada de una función $y = f(x)$ es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

siempre y cuando dicho límite exista.

Importante:

- ¡$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \neq \dfrac{dy}{dx}$!
- La notación de Leibniz (dy/dx) es sólo eso... notación.
- $\dfrac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{df}{dx}(x) = \dfrac{df}{dx} = D_x f(x) = D_x f = Df(x) = Df.$

Definición de Derivada

TODO lo de la diapositiva anterior lo vamos a condensar en una única definición...

Definición 15

La derivada de una función $y = f(x)$ es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

siempre y cuando dicho límite exista.

Importante:

- ¡$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \neq \dfrac{dy}{dx}$!
- La notación de Leibniz (dy/dx) es sólo eso... notación.
- $\dfrac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{df}{dx}(x) = \dfrac{df}{dx} = D_x f(x) = D_x f = Df(x) = Df.$
- La derivada de una función, es otra función (caso exista).

Definición de Derivada

TODO lo de la diapositiva anterior lo vamos a condensar en una única definición...

Definición 15

La derivada de una función $y = f(x)$ es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

siempre y cuando dicho límite exista.

Importante:

- ¡$\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \frac{dy}{dx}$!
- La notación de Leibniz (dy/dx) es sólo eso... notación.
- $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{dx} = D_x f(x) = D_x f = Df(x) = Df.$
- La derivada de una función, es otra función (caso exista).
- Por lo tanto, la derivada se puede evaluar en distintos puntos.

Álgebra: Derivada de una Cuadrática

Ejemplo 24

Obtenga la derivada de la función $f(x) = (x-1)^2$ utilizando la definición de derivada (Definición 15).

Álgebra: Derivada de una Cuadrática

Ejemplo 24

Obtenga la derivada de la función $f(x) = (x-1)^2$ utilizando la definición de derivada (Definición 15).

Solución 24

Utilizando la Definición 15, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x-1)^2-(x-1)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2+(\Delta x)^2+1+2x\Delta x-2x-2\Delta-x^2+2x-1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2+2x\Delta x-2\Delta}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x+2x-2 \\
&= 2x-2.
\end{aligned}$$

Gráfico: Derivada de una Cuadrática

Figura 28: Derivada de una Función Cuadrática

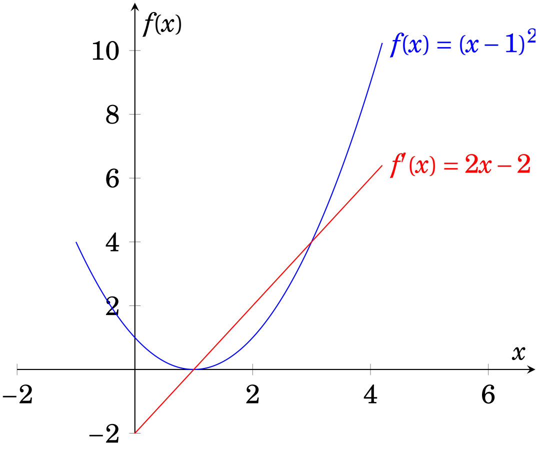


Gráfico: Derivada de una Cuadrática

Figura 28: Derivada de una Función Cuadrática

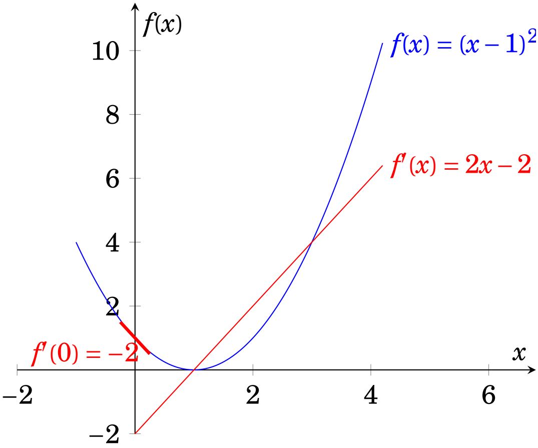


Gráfico: Derivada de una Cuadrática

Figura 28: Derivada de una Función Cuadrática

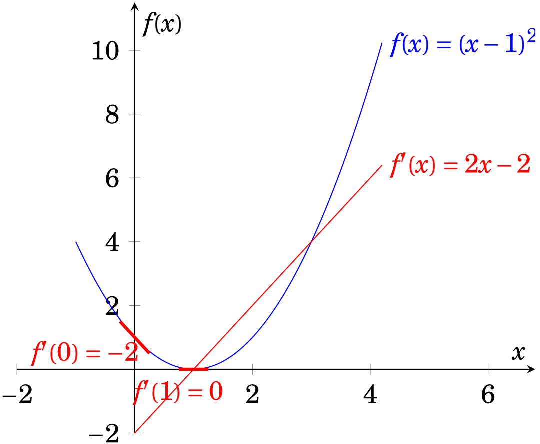


Gráfico: Derivada de una Cuadrática

Figura 28: Derivada de una Función Cuadrática

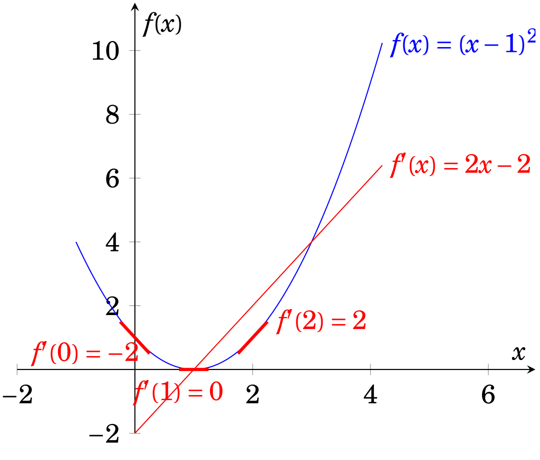


Gráfico: Derivada de una Cuadrática

Figura 28: Derivada de una Función Cuadrática

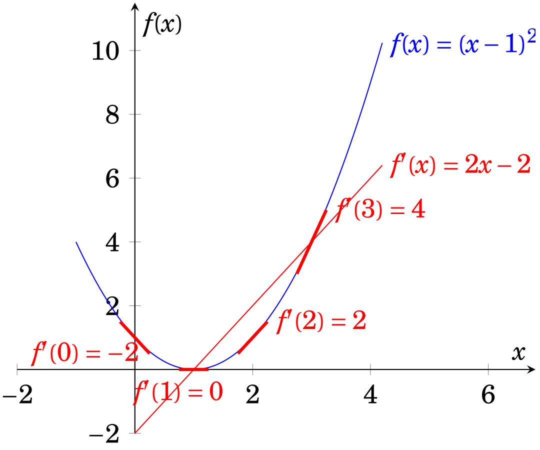
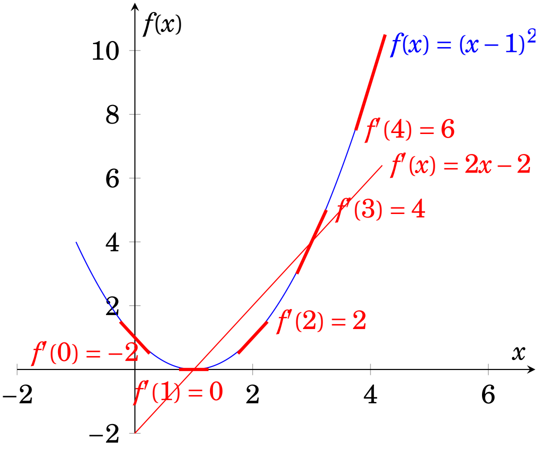


Gráfico: Derivada de una Cuadrática

Figura 28: Derivada de una Función Cuadrática



¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Si una función es continua en un punto, ¿es derivable en ese punto?

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Si una función es continua en un punto, ¿es derivable en ese punto?
¡NO!

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Si una función es continua en un punto, ¿es derivable en ese punto?
¡NO!
Contraejemplo: $f(x) = |x|$

Propuesto 16

Analice la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x|$ en todo su dominio (ponga atención en $x = 0$).

Gráfico: Función Continua No Derivable

Figura 29: Función No Derivable

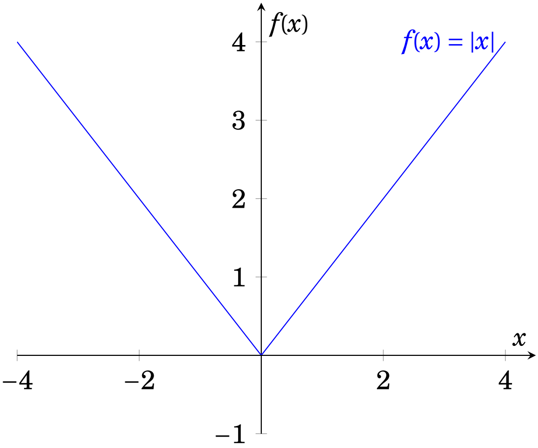


Gráfico: Función Continua No Derivable

Figura 29: Función No Derivable

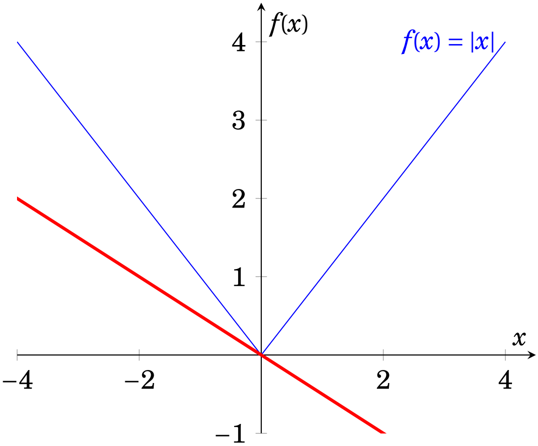


Gráfico: Función Continua No Derivable

Figura 29: Función No Derivable

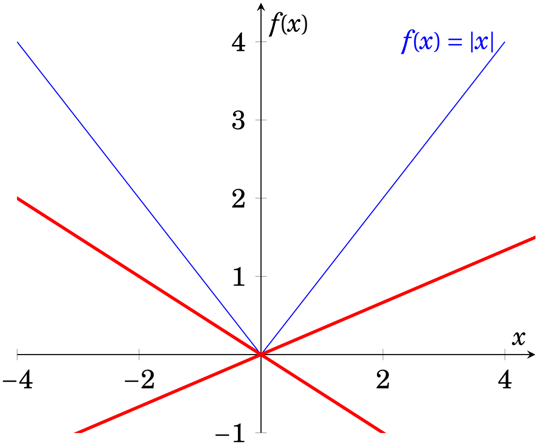


Gráfico: Función Continua No Derivable

Figura 29: Función No Derivable

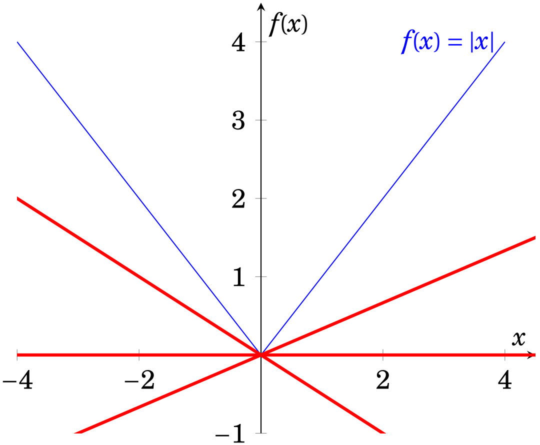


Gráfico: Función Continua No Derivable

Figura 29: Función No Derivable

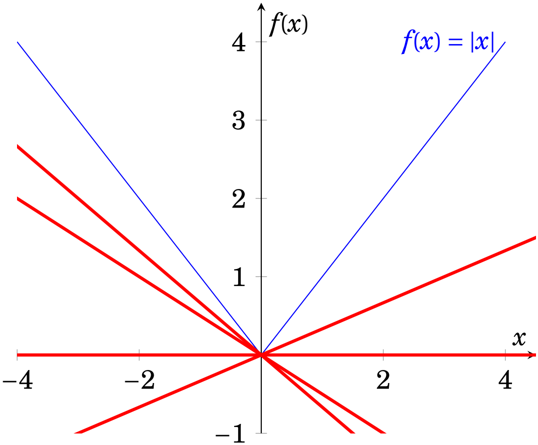
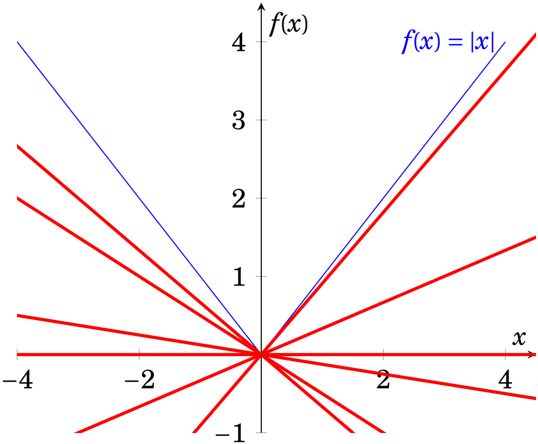


Gráfico: Función Continua No Derivable

Figura 29: Función No Derivable



¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

Demostración.

PD: $\exists f'(k) \implies \lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

Demostración.

PD: $\exists f'(k) \implies \lim_{x \to k} f(x) = f(k) \iff \lim_{x \to k} f(x) - f(k) = 0.$

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

Demostración.

PD: $\exists f'(k) \implies \lim_{x \to k} f(x) = f(k) \iff \lim_{x \to k} f(x) - f(k) = 0.$

En efecto, $\lim_{x \to k} f(x) - f(k) = \lim_{x \to k} \dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} \cdot (x - k).$

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

Demostración.

PD: $\exists f'(k) \implies \lim_{x\to k} f(x) = f(k) \iff \lim_{x\to k} f(x) - f(k) = 0.$

En efecto, $\lim_{x\to k} f(x) - f(k) = \lim_{x\to k} \frac{f(x)-f(k)}{x-k} \cdot (x-k).$
Sea $h = x - k$*, de modo que* $x \to k \implies h \to 0.$

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

Demostración.

PD: $\exists f'(k) \implies \lim_{x\to k} f(x) = f(k) \iff \lim_{x\to k} f(x) - f(k) = 0.$

En efecto, $\lim_{x\to k} f(x) - f(k) = \lim_{x\to k} \frac{f(x)-f(k)}{x-k} \cdot (x-k).$

Sea $h = x - k$*, de modo que* $x \to k \implies h \to 0.$

Luego, se tiene que el límite es equivalente a $\lim_{h\to 0} \frac{f(k+h)-f(k)}{h} \cdot (h).$

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

Demostración.

PD: $\exists f'(k) \implies \lim_{x \to k} f(x) = f(k) \iff \lim_{x \to k} f(x) - f(k) = 0.$

En efecto, $\lim_{x \to k} f(x) - f(k) = \lim_{x \to k} \dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} \cdot (x - k).$

Sea $h = x - k$*, de modo que* $x \to k \implies h \to 0.$

Luego, se tiene que el límite es equivalente a $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(k+h) - f(k)}{h} \cdot (h).$

¡Pero el límite de la fracción corresponde a $f'(k)$*!*

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

Demostración.

PD: $\exists f'(k) \implies \lim_{x \to k} f(x) = f(k) \iff \lim_{x \to k} f(x) - f(k) = 0.$

En efecto, $\lim_{x \to k} f(x) - f(k) = \lim_{x \to k} \dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} \cdot (x - k).$
Sea $h = x - k$*, de modo que* $x \to k \implies h \to 0.$
Luego, se tiene que el límite es equivalente a $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(k+h) - f(k)}{h} \cdot (h).$
¡Pero el límite de la fracción corresponde a $f'(k)$*! Como esta derivada existe (por hipótesis), el límite del producto es el producto de los límites,*

¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

Demostración.

PD: $\exists f'(k) \implies \lim_{x \to k} f(x) = f(k) \iff \lim_{x \to k} f(x) - f(k) = 0.$

En efecto, $\lim_{x \to k} f(x) - f(k) = \lim_{x \to k} \dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} \cdot (x - k).$

Sea $h = x - k$*, de modo que* $x \to k \implies h \to 0.$

Luego, se tiene que el límite es equivalente a $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(k+h) - f(k)}{h} \cdot (h).$

¡Pero el límite de la fracción corresponde a $f'(k)$*! Como esta derivada existe (por hipótesis), el límite del producto es el producto de los límites, esto es,* $f'(k) \cdot 0 = 0.$ $\square$

Módulo 9

▸ Volver al Inicio de la Sección

Derivadas Típicas

Proposición 20

La derivada de $f(x) = x^n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{R}$ *es* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Derivadas Típicas

Proposición 20

La derivada de $f(x) = x^n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{R}$ *es* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ *es*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Derivadas Típicas

Proposición 20

La derivada de $f(x) = x^n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{R}$ *es* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ *es*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Por el Binomio de Newton, sabemos que $(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} h^k$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$.

Derivadas Típicas

Proposición 20

La derivada de $f(x) = x^n$ para cualquier $n \in \mathbb{R}$ es $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Por el Binomio de Newton, sabemos que $(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} h^k$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Luego, el límite es

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} nx^{n-1} + h(\ldots) = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Derivadas Típicas

Proposición 20

La derivada de $f(x) = x^n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{R}$ *es* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ *es*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Por el Binomio de Newton, sabemos que $(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} h^k$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$. *Luego, el límite es*

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + h(\ldots) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Acto de fe: esto se cumple en todos los $\mathbb{R}$. $\square$

Derivadas Típicas

Proposición 20

La derivada de $f(x) = x^n$ para cualquier $n \in \mathbb{R}$ es $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Por el Binomio de Newton, sabemos que $(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} h^k$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Luego, el límite es

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + h(\ldots) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Acto de fe: esto se cumple en todos los $\mathbb{R}$. $\square$

¿Qué ocurre cuando $n = 0$?

Derivadas Típicas

Proposición 20

La derivada de $f(x) = x^n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{R}$ *es* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ *es*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Por el Binomio de Newton, sabemos que $(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} h^k$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$. *Luego, el límite es*

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} nx^{n-1} + h(\ldots) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Acto de fe: esto se cumple en todos los $\mathbb{R}$. $\square$

¿Qué ocurre cuando $n = 0$*? ¿y cuando* $n = 0{,}5$*?*

Derivadas Típicas (cont.)

Proposición 21

La derivada de $f(x) = e^x$ *es* $f'(x) = e^x$.

Derivadas Típicas (cont.)

Proposición 21

La derivada de $f(x) = e^x$ *es* $f'(x) = e^x$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ *es*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \exp(x)\frac{\exp(h)-1}{h}.$$

Derivadas Típicas (cont.)

Proposición 21

La derivada de $f(x) = e^x$ *es* $f'(x) = e^x$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ *es*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h}.$$

El primer término del límite (el factor común) es invariante en h, de modo que puede “salir como constante”. El resto es un límite conocido (Proposición 11)...

Derivadas Típicas (cont.)

Proposición 21

La derivada de $f(x) = e^x$ *es* $f'(x) = e^x$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ *es*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h}.$$

El primer término del límite (el factor común) es invariante en h*, de modo que puede "salir como constante". El resto es un límite conocido (Proposición 11)...*

Por lo tanto, $f'(x) = e^x$. $\square$

Derivadas Típicas (cont.')

Proposición 22

La derivada de $f(x) = \ln(x)$ *es* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Derivadas Típicas (cont.')

Proposición 22

La derivada de $f(x) = \ln(x)$ *es* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{h}.$$

Derivadas Típicas (cont.')

Proposición 22

La derivada de $f(x) = \ln(x)$ *es* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Notamos que podemos reescribir la expresión dentro del límite como $\dfrac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}}$.

Derivadas Típicas (cont.')

Proposición 22

La derivada de $f(x) = \ln(x)$ *es* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h}.$$

Notamos que podemos reescribir la expresión dentro del límite como $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h} = \ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}$. Así, tenemos un límite conocido (Proposición 9) "elevado a una constante" y con un logaritmo aplicado...

Derivadas Típicas (cont.')

Proposición 22

La derivada de $f(x) = \ln(x)$ *es* $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Notamos que podemos reescribir la expresión dentro del límite como $\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}$. Así, tenemos un límite conocido (Proposición 9) "elevado a una constante" y con un logaritmo aplicado...

Por lo tanto, $f'(x) = \frac{1}{x}$. $\square$

Propuestos: Derivadas Típicas

Sea $a \in \mathbb{R}$.

Propuesto 17

Encuentre la derivada de $f(x) = ax^n$.

Propuesto 18

Encuentre la derivada de $f(x) = e^{ax}$.

Propuesto 19

Encuentre la derivada de $f(x) = \log_a x$, con $0 < a \neq 1$.

Propuesto 20

Encuentre la derivada de $f(x) = \sqrt[a]{x}$, con $a \in \mathbb{N}$.

Intuición: Aproximación Afín

Sabemos que $(e^x)' = e^x$, esto es, la pendiente de esta función exponencial en cualquier punto corresponde simplemente al valor que toma la función en dicho punto.

[7]Más adelante veremos en detalle cómo podemos aproximar una función usando derivadas.

Intuición: Aproximación Afín

Sabemos que $(e^x)' = e^x$, esto es, la pendiente de esta función exponencial en cualquier punto corresponde simplemente al valor que toma la función en dicho punto. En efecto, la recta tangente a esta función cuando $x = 0$ será $x+1$, esto es, e^x y $x+1$ *se comportan parecido* cuando x está en una vecindad de 0[7].

---

[7]Más adelante veremos en detalle cómo podemos aproximar una función usando derivadas.

Intuición: Aproximación Afín

Sabemos que $(e^x)' = e^x$, esto es, la pendiente de esta función exponencial en cualquier punto corresponde simplemente al valor que toma la función en dicho punto. En efecto, la recta tangente a esta función cuando $x = 0$ será $x + 1$, esto es, e^x y $x + 1$ *se comportan parecido* cuando x está en una vecindad de 0[7].
Note que podemos hacer un ejercicio similar con cualquier función, no solo con esta exponencial.

[7] Más adelante veremos en detalle cómo podemos aproximar una función usando derivadas.

Intuición: Aproximación Afín

Sabemos que $(e^x)' = e^x$, esto es, la pendiente de esta función exponencial en cualquier punto corresponde simplemente al valor que toma la función en dicho punto. En efecto, la recta tangente a esta función cuando $x = 0$ será $x+1$, esto es, e^x y $x+1$ *se comportan parecido* cuando x está en una vecindad de 0[7].
Note que podemos hacer un ejercicio similar con cualquier función, no solo con esta exponencial. En efecto, la recta tangente a $\ln x$ en x_0 es $\dfrac{x-x_0}{x_0} + \ln x_0$.

[7] Más adelante veremos en detalle cómo podemos aproximar una función usando derivadas.

Intuición: Aproximación Afín

Sabemos que $(e^x)' = e^x$, esto es, la pendiente de esta función exponencial en cualquier punto corresponde simplemente al valor que toma la función en dicho punto. En efecto, la recta tangente a esta función cuando $x = 0$ será $x + 1$, esto es, e^x y $x + 1$ *se comportan parecido* cuando x está en una vecindad de 0[7].
Note que podemos hacer un ejercicio similar con cualquier función, no solo con esta exponencial. En efecto, la recta tangente a $\ln x$ en x_0 es $\dfrac{x - x_0}{x_0} + \ln x_0$. Si $x_0 = 1$, esta es simplemente $x - 1$.

[7] Más adelante veremos en detalle cómo podemos aproximar una función usando derivadas.

Gráfico: Aproximación Afín

Figura 30: Aproximación de e^x y $\ln x$

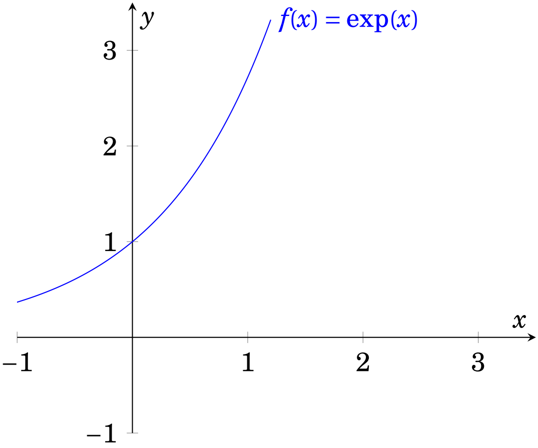


Gráfico: Aproximación Afín

Figura 30: Aproximación de e^x y $\ln x$

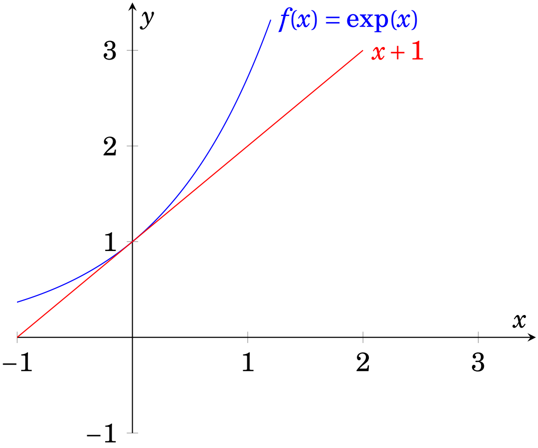


Gráfico: Aproximación Afín

Figura 30: Aproximación de e^x y $\ln x$

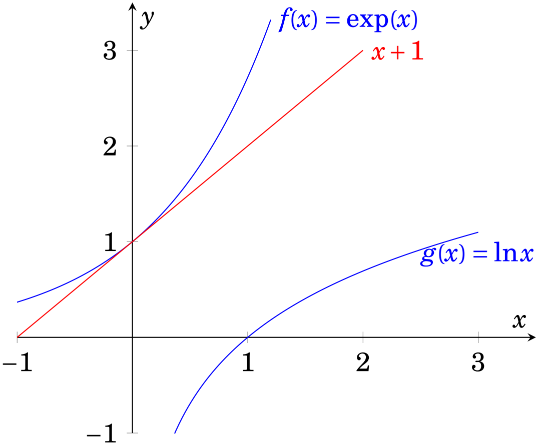
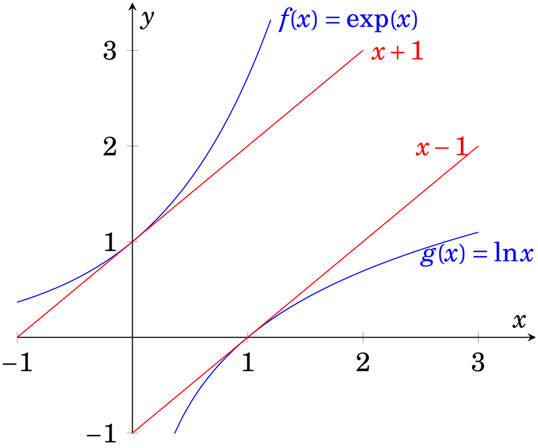


Gráfico: Aproximación Afín

Figura 30: Aproximación de e^x y $\ln x$



Álgebra: Aproximación Afín

Las aproximaciones afines que observamos anteriormente claramente "lo hacen mejor" cuando $x \to x_0$...

Álgebra: Aproximación Afín

Las aproximaciones afines que observamos anteriormente claramente "lo hacen mejor" cuando $x \to x_0$...

En efecto, tomando la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, podemos definir $h = x - x_0$, de modo que $h \to 0 \implies x \to x_0$.

Álgebra: Aproximación Afín

Las aproximaciones afines que observamos anteriormente claramente "lo hacen mejor" cuando $x \to x_0$...

En efecto, tomando la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, podemos definir $h = x - x_0$, de modo que $h \to 0 \implies x \to x_0$.

La derivada ahora es $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + x - x_0) - f(x)}{x - x_0}$.

Álgebra: Aproximación Afín

Las aproximaciones afines que observamos anteriormente claramente “lo hacen mejor” cuando $x \to x_0$...

En efecto, tomando la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

podemos definir $h = x - x_0$, de modo que $h \to 0 \implies x \to x_0$.

La derivada ahora es $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + x - x_0) - f(x)}{x - x_0}$.

Olvidémonos (informalmente) del límite, pero tengamos en mente que x se acerca mucho a x_0. Así, despejamos $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Álgebra: Aproximación Afín

Las aproximaciones afines que observamos anteriormente claramente "lo hacen mejor" cuando $x \to x_0$...

En efecto, tomando la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, podemos definir $h = x - x_0$, de modo que $h \to 0 \implies x \to x_0$.

La derivada ahora es $f'(x) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x+x-x_0)-f(x)}{x-x_0}$.

Olvidémonos (informalmente) del límite, pero tengamos en mente que x se acerca mucho a x_0. Así, despejamos $f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Esto es exactamente lo mismo que calcular la ecuación de la recta con pendiente $f'(x_0)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Álgebra: Aproximación Afín

Las aproximaciones afines que observamos anteriormente claramente "lo hacen mejor" cuando $x \to x_0$...

En efecto, tomando la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, podemos definir $h = x - x_0$, de modo que $h \to 0 \implies x \to x_0$.

La derivada ahora es $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + x - x_0) - f(x)}{x - x_0}$.

Olvidémonos (informalmente) del límite, pero tengamos en mente que x se acerca mucho a x_0. Así, despejamos $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Esto es exactamente lo mismo que calcular la ecuación de la recta con pendiente $f'(x_0)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Definición 16

Si es que existe, la recta $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ es la *mejor aproximación afín* de la función $f(x)$ en torno a $x = x_0$.

Ejemplo: Aproximación Afín

Ejemplo 25

Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $x = 4$.

Ejemplo: Aproximación Afín

Ejemplo 25

Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $x = 4$.

Solución 25

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ejemplo: Aproximación Afín

Ejemplo 25

Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $x = 4$.

Solución 25

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Luego, $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

Ejemplo: Aproximación Afín

Ejemplo 25

Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $x = 4$.

Solución 25

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Luego, $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.
Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$g(x) = \frac{(x-4)}{4} + 2 = \frac{x}{4} + 1.$$

Propiedades de las Derivadas

Proposición 23

Sea $f(x)$ *una función derivable y* $a \in \mathbb{R}$. *Entonces la derivada de la función ponderada equivale a la ponderada de la función derivada. Esto es,* $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$.

Propiedades de las Derivadas

Proposición 23

Sea $f(x)$ *una función derivable y* $a \in \mathbb{R}$. *Entonces la derivada de la función ponderada equivale a la ponderada de la función derivada. Esto es,* $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$.

Proposición 24

Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ *dos funciones derivables. Entonces la derivada de la suma (o resta) de ambas funciones equivale a la suma (o resta) de las derivadas de las funciones. Esto es,* $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

Propiedades de las Derivadas

Proposición 23

Sea $f(x)$ *una función derivable y* $a \in \mathbb{R}$*. Entonces la derivada de la función ponderada equivale a la ponderada de la función derivada. Esto es,* $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$.

Proposición 24

Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ *dos funciones derivables. Entonces la derivada de la suma (o resta) de ambas funciones equivale a la suma (o resta) de las derivadas de las funciones. Esto es,* $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

Proposición 25

Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ *dos funciones derivables. Entonces la derivada del producto de ambas funciones es* $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Propiedades de las Derivadas

Proposición 23

Sea $f(x)$ *una función derivable y* $a \in \mathbb{R}$*. Entonces la derivada de la función ponderada equivale a la ponderada de la función derivada. Esto es,* $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$.

Proposición 24

Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ *dos funciones derivables. Entonces la derivada de la suma (o resta) de ambas funciones equivale a la suma (o resta) de las derivadas de las funciones. Esto es,* $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

Proposición 25

Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ *dos funciones derivables. Entonces la derivada del producto de ambas funciones es* $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Proposición 26

Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ *dos funciones derivables. Entonces la derivada del cociente entre ambas funciones es* $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Ejercitación: Derivadas

Propuesto 21

Obtenga las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{mx+n}{\exp(x)}$, con $m, n \in \mathbb{R}$.

Ejercitación: Derivadas

Propuesto 21

Obtenga las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{mx+n}{\exp(x)}$, con $m, n \in \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x\exp(x)\ln x$.

Ejercitación: Derivadas

Propuesto 21

Obtenga las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{mx+n}{\exp(x)}$, con $m,n \in \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x\exp(x)\ln x$.
3. $h(t) = \dfrac{Y(t)}{N(t)}$, donde $Y(t)$ y $N(t)$ son funciones positivas, crecientes y derivables que dependen de t.

Ejercitación: Derivadas

Propuesto 21

Obtenga las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{mx+n}{\exp(x)}$, con $m, n \in \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x\exp(x)\ln x$.
3. $h(t) = \dfrac{Y(t)}{N(t)}$, donde $Y(t)$ y $N(t)$ son funciones positivas, crecientes y derivables que dependen de t.

Ejercitación: Derivadas

Propuesto 21

Obtenga las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{mx+n}{\exp(x)}$, con $m,n \in \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x\exp(x)\ln x$.
3. $h(t) = \dfrac{Y(t)}{N(t)}$, donde $Y(t)$ y $N(t)$ son funciones positivas, crecientes y derivables que dependen de t.
   Aplicación: Imagine que $h(t)$ es el PIB per cápita de un país (o las ventas por trabajador, productividad media de una central de sistemas de información, errores contables sobre estados de resultado, etc.) en el periodo t. ¿Qué puede concluir?

Módulo 10

▸ Volver al Inicio de la Sección

Derivada de una Función Compuesta

Proposición 27

Si $y = f(z)$ y $z = g(x)$, siendo ambas funciones diferenciables, entonces la derivada de y respecto a x es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Derivada de una Función Compuesta

Proposición 27

Si $y = f(z)$ y $z = g(x)$, siendo ambas funciones diferenciables, entonces la derivada de y respecto a x es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Esto se llama la ***regla de la cadena****.*

Derivada de una Función Compuesta

Proposición 27

Si $y = f(z)$ y $z = g(x)$, siendo ambas funciones diferenciables, entonces la derivada de y respecto a x es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

*Esto se llama la **regla de la cadena**.*

Demostración.

Prueba informal:

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Derivada de una Función Compuesta

Proposición 27

Si $y = f(z)$ y $z = g(x)$, siendo ambas funciones diferenciables, entonces la derivada de y respecto a x es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

*Esto se llama la **regla de la cadena**.*

Demostración.

Prueba informal:

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$\Longrightarrow (f \circ g)'(x) \cdot \frac{1}{g'(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{h}{g(x+h) - g(x)}$$

Derivada de una Función Compuesta

Proposición 27

Si $y = f(z)$ y $z = g(x)$, siendo ambas funciones diferenciables, entonces la derivada de y respecto a x es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Esto se llama la ***regla de la cadena****.*

Demostración.

Prueba informal:

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$\Longrightarrow (f \circ g)'(x) \cdot \frac{1}{g'(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{h}{g(x+h) - g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = f'(g(x)).$$

□

Ejercicios: Regla de la Cadena

Propuesto 22

Derive $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es diferenciable y $n \in \mathbb{R}$.

Ejercicios: Regla de la Cadena

Propuesto 22

Derive $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es diferenciable y $n \in \mathbb{R}$.

Propuesto 23

Derive $g(x) = \exp[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Ejercicios: Regla de la Cadena

Propuesto 22

Derive $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es diferenciable y $n \in \mathbb{R}$.

Propuesto 23

Derive $g(x) = \exp[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 24

Derive $h(x) = \ln[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Ejercicios: Regla de la Cadena

Propuesto 22

Derive $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es diferenciable y $n \in \mathbb{R}$.

Propuesto 23

Derive $g(x) = \exp[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 24

Derive $h(x) = \ln[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 25

Derive $i(x) = \sqrt{u(x)}$, donde u es diferenciable.

Ejercicios: Regla de la Cadena

Propuesto 22

Derive $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es diferenciable y $n \in \mathbb{R}$.

Propuesto 23

Derive $g(x) = \exp[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 24

Derive $h(x) = \ln[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 25

Derive $i(x) = \sqrt{u(x)}$, donde u es diferenciable.

Propuesto 26

Demuestre la regla de la derivada de un cociente (Proposición 26) utilizando la regla de la derivada de un producto (Proposición 25) y la regla de la cadena (Proposición 27).

Ejercicios: Regla de la Cadena

Propuesto 22

Derive $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es diferenciable y $n \in \mathbb{R}$.

Propuesto 23

Derive $g(x) = \exp[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 24

Derive $h(x) = \ln[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 25

Derive $i(x) = \sqrt{u(x)}$, donde u es diferenciable.

Propuesto 26

Demuestre la regla de la derivada de un cociente (Proposición 26) utilizando la regla de la derivada de un producto (Proposición 25) y la regla de la cadena (Proposición 27).

Propuesto 27

Aplicación: Demuestre que la elasticidad-precio de la demanda es simplemente $\dfrac{d \ln Q}{d \ln P}$.

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...
Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?*

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...
Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?* En general, **sí**.

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...
Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?* En general, **sí**.
Si derivamos la derivada de una función $f(x)$, llamaremos al resultado, caso exista, la **segunda derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por $f''(x)$ o $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ (ojo con la notación).

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...
Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?* En general, **sí**.
Si derivamos la derivada de una función $f(x)$, llamaremos al resultado, caso exista, la **segunda derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por $f''(x)$ o $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ (ojo con la notación).
Similarmente, existe la posibilidad de computar una tercera derivada, o una cuarta, o una n-ésima.

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...
Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?* En general, **sí**.
Si derivamos la derivada de una función $f(x)$, llamaremos al resultado, caso exista, la **segunda derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por $f''(x)$ o $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ (ojo con la notación).
Similarmente, existe la posibilidad de computar una tercera derivada, o una cuarta, o una n-ésima.
Así, a las derivadas de orden mayor a uno (dos, tres, cuatro, etc.) se les llaman **derivadas de orden superior**.

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...
Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?* En general, **sí**.
Si derivamos la derivada de una función $f(x)$, llamaremos al resultado, caso exista, la **segunda derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por $f''(x)$ o $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ (ojo con la notación).
Similarmente, existe la posibilidad de computar una tercera derivada, o una cuarta, o una n-ésima.
Así, a las derivadas de orden mayor a uno (dos, tres, cuatro, etc.) se les llaman **derivadas de orden superior**.

Ejemplo 26

Obtenga la segunda derivada de la función $f(x) = \exp(ax)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...
Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?* En general, **sí**.
Si derivamos la derivada de una función $f(x)$, llamaremos al resultado, caso exista, la **segunda derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por $f''(x)$ o $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ (ojo con la notación).
Similarmente, existe la posibilidad de computar una tercera derivada, o una cuarta, o una n-ésima.
Así, a las derivadas de orden mayor a uno (dos, tres, cuatro, etc.) se les llaman **derivadas de orden superior**.

Ejemplo 26

Obtenga la segunda derivada de la función $f(x) = \exp(ax)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Solución 26

La segunda derivada de una función es simplemente la derivada de la derivada de la función.

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...
Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?* En general, **sí**.
Si derivamos la derivada de una función $f(x)$, llamaremos al resultado, caso exista, la **segunda derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por $f''(x)$ o $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ (ojo con la notación).
Similarmente, existe la posibilidad de computar una tercera derivada, o una cuarta, o una n-ésima.
Así, a las derivadas de orden mayor a uno (dos, tres, cuatro, etc.) se les llaman **derivadas de orden superior**.

Ejemplo 26

Obtenga la segunda derivada de la función $f(x) = \exp(ax)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Solución 26

La segunda derivada de una función es simplemente la derivada de la derivada de la función. En este caso tenemos que
$f'(x) = a\exp(ax)$.

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...
Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?* En general, **sí**.
Si derivamos la derivada de una función $f(x)$, llamaremos al resultado, caso exista, la **segunda derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por $f''(x)$ o $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$ (ojo con la notación).
Similarmente, existe la posibilidad de computar una tercera derivada, o una cuarta, o una n-ésima.
Así, a las derivadas de orden mayor a uno (dos, tres, cuatro, etc.) se les llaman **derivadas de orden superior**.

Ejemplo 26

Obtenga la segunda derivada de la función $f(x) = \exp(ax)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Solución 26

La segunda derivada de una función es simplemente la derivada de la derivada de la función. En este caso tenemos que
$f'(x) = a\exp(ax)$. Luego, la segunda derivada es $f''(x) = a^2\exp(ax)$.

Ejercicios: Derivadas de Orden Superior

Propuesto 28

Obtenga la n-ésima derivada de la función anterior ($f(x) = \exp(ax)$).

Ejercicios: Derivadas de Orden Superior

Propuesto 28

Obtenga la n-ésima derivada de la función anterior ($f(x) = \exp(ax)$).
Repita el ejercicio con la función $g(x) = \ln x$.

Ejercicios: Derivadas de Orden Superior

Propuesto 28

Obtenga la n-ésima derivada de la función anterior ($f(x) = \exp(ax)$). Repita el ejercicio con la función $g(x) = \ln x$.

Propuesto 29

¿Se le ocurre alguna función que no sea infinitamente derivable?

Ejercicios: Derivadas de Orden Superior

Propuesto 28

Obtenga la n-ésima derivada de la función anterior ($f(x) = \exp(ax)$). Repita el ejercicio con la función $g(x) = \ln x$.

Propuesto 29

¿Se le ocurre alguna función que no sea infinitamente derivable? Esto es, alguna función que tras alguna cantidad finita de derivadas de como resultado otra función que no es derivable en todo su dominio.

Regla de la Función Inversa

Proposición 28

Sea $y = g(x)$ una función, cuya inversa es f, de modo que $f(y) = x$. Si ambas funciones son derivables, entonces

$$f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))}.$$

Demostración.

Como f y g son inversas entre sí, se da que $f(g(x)) = x$.

Regla de la Función Inversa

Proposición 28

Sea $y = g(x)$ *una función, cuya inversa es* f*, de modo que* $f(y) = x$*. Si ambas funciones son derivables, entonces*

$$f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))}.$$

Demostración.

Como f *y* g *son inversas entre sí, se da que* $f(g(x)) = x$*.*
Podemos derivar esto (why?) para obtener $f'(g(x))g'(x) = 1$*.*

Regla de la Función Inversa

Proposición 28

Sea $y = g(x)$ una función, cuya inversa es f, de modo que $f(y) = x$. Si ambas funciones son derivables, entonces

$$f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))}.$$

Demostración.

Como f y g son inversas entre sí, se da que $f(g(x)) = x$.
Podemos derivar esto (why?) para obtener $f'(g(x))g'(x) = 1$.
Pero lo anterior implica que $f'(g(x)) = \dfrac{1}{g'(x)}$, que es equivalente a lo que queremos demostrar. $\square$

Regla de la Función Inversa

Proposición 28

Sea $y = g(x)$ una función, cuya inversa es f, de modo que $f(y) = x$. Si ambas funciones son derivables, entonces

$$f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))}.$$

Demostración.

Como f y g son inversas entre sí, se da que $f(g(x)) = x$.
Podemos derivar esto (why?) para obtener $f'(g(x))g'(x) = 1$.
Pero lo anterior implica que $f'(g(x)) = \dfrac{1}{g'(x)}$, que es equivalente a lo que queremos demostrar. $\square$

Propuesto 30

Demuestre que $\left(x^2\right)' = 2x$ utilizando la regla de la función inversa. Acote el dominio a los $x > 0$.

Dependencia Implícita

Hasta ahora hemos trabajado con variables dependientes que dependen *explícitamente* de una variable independiente, i.e. $y = f(x)$.

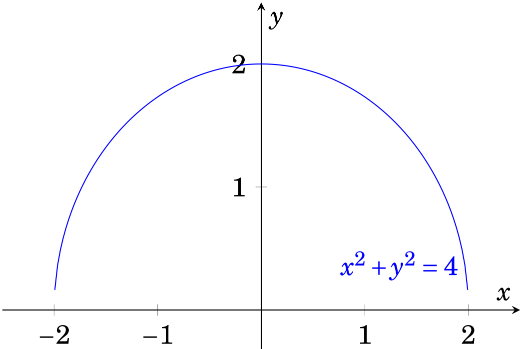
Dependencia Implícita

Hasta ahora hemos trabajado con variables dependientes que dependen *explícitamente* de una variable independiente, i.e. $y = f(x)$. Sin embargo, podríamos estar interesados en trabajar con variables dependientes que dependen de manera implícita de otra variable.

Dependencia Implícita

Hasta ahora hemos trabajado con variables dependientes que dependen *explícitamente* de una variable independiente, i.e. $y = f(x)$. Sin embargo, podríamos estar interesados en trabajar con variables dependientes que dependen de manera implícita de otra variable. Por ejemplo, tomemos la relación definida por $x^2 + y^2 = 4$ con $y > 0$. En esta ecuación, y depende *implícitamente* de x.

Figura 31: Gráfico de $x^2 + y^2 = 4$ (con $y > 0$)



Derivación Implícita

Siguiendo con el mismo ejemplo, podemos estar interesados en calcular la derivada de esta función.

Derivación Implícita

Siguiendo con el mismo ejemplo, podemos estar interesados en calcular la derivada de esta función.
Una forma de hacer esto es *despejando* y para que dependa explícitamente de x y calcular la derivada como en cualquier otro caso, obteniendo como resultado $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Derivación Implícita

Siguiendo con el mismo ejemplo, podemos estar interesados en calcular la derivada de esta función.

Una forma de hacer esto es *despejando y* para que dependa explícitamente de x y calcular la derivada como en cualquier otro caso, obteniendo como resultado $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Sin embargo, despejar la variable dependiente no es siempre tan trivial, por lo que puede ser más cómodo **derivar implícitamente**.

Derivación Implícita

Siguiendo con el mismo ejemplo, podemos estar interesados en calcular la derivada de esta función.
Una forma de hacer esto es *despejando y* para que dependa explícitamente de x y calcular la derivada como en cualquier otro caso, obteniendo como resultado $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Sin embargo, despejar la variable dependiente no es siempre tan trivial, por lo que puede ser más cómodo **derivar implícitamente**.

Ejemplo 27

Derive implícitamente $x^2+y^2=4$ respecto a x.

Solución 27

Utilizando la regla de la cadena y las derivadas conocidas tenemos que la derivada es $2x+2y\cdot y'=0$.

Derivación Implícita

Siguiendo con el mismo ejemplo, podemos estar interesados en calcular la derivada de esta función.

Una forma de hacer esto es *despejando* y para que dependa explícitamente de x y calcular la derivada como en cualquier otro caso, obteniendo como resultado $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Sin embargo, despejar la variable dependiente no es siempre tan trivial, por lo que puede ser más cómodo **derivar implícitamente**.

Ejemplo 27

Derive implícitamente $x^2+y^2=4$ respecto a x.

Solución 27

Utilizando la regla de la cadena y las derivadas conocidas tenemos que la derivada es $2x+2y\cdot y'=0$. Notar como al derivar el término y^2 respecto a x se aplica la regla de la cadena, pues y depende de x.

Derivación Implícita

Siguiendo con el mismo ejemplo, podemos estar interesados en calcular la derivada de esta función.
Una forma de hacer esto es *despejando* y para que dependa explícitamente de x y calcular la derivada como en cualquier otro caso, obteniendo como resultado $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Sin embargo, despejar la variable dependiente no es siempre tan trivial, por lo que puede ser más cómodo **derivar implícitamente**.

Ejemplo 27

Derive implícitamente $x^2+y^2=4$ respecto a x.

Solución 27

Utilizando la regla de la cadena y las derivadas conocidas tenemos que la derivada es $2x+2y\cdot y'=0$. Notar como al derivar el término y^2 respecto a x se aplica la regla de la cadena, pues y depende de x. Por lo tanto, al despejar y' tenemos $y'=-\frac{x}{y}$.

Derivación Implícita

Siguiendo con el mismo ejemplo, podemos estar interesados en calcular la derivada de esta función.
Una forma de hacer esto es *despejando* y para que dependa explícitamente de x y calcular la derivada como en cualquier otro caso, obteniendo como resultado $\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Sin embargo, despejar la variable dependiente no es siempre tan trivial, por lo que puede ser más cómodo **derivar implícitamente**.

Ejemplo 27

Derive implícitamente $x^2+y^2=4$ respecto a x.

Solución 27

Utilizando la regla de la cadena y las derivadas conocidas tenemos que la derivada es $2x+2y\cdot y'=0$. Notar como al derivar el término y^2 respecto a x se aplica la regla de la cadena, pues y depende de x. Por lo tanto, al despejar y' tenemos $y'=-\dfrac{x}{y}$.

¿Podemos dejar el resultado dependiendo de y?

Derivación Implícita

Siguiendo con el mismo ejemplo, podemos estar interesados en calcular la derivada de esta función.

Una forma de hacer esto es *despejando* y para que dependa explícitamente de x y calcular la derivada como en cualquier otro caso, obteniendo como resultado $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Sin embargo, despejar la variable dependiente no es siempre tan trivial, por lo que puede ser más cómodo **derivar implícitamente**.

Ejemplo 27

Derive implícitamente $x^2+y^2=4$ respecto a x.

Solución 27

Utilizando la regla de la cadena y las derivadas conocidas tenemos que la derivada es $2x+2y\cdot y'=0$. Notar como al derivar el término y^2 respecto a x se aplica la regla de la cadena, pues y depende de x. Por lo tanto, al despejar y' tenemos $y'=-\frac{x}{y}$.

¿Podemos dejar el resultado dependiendo de y? ¿Son equivalentes los resultados de la derivación implícita y la derivación explícita?

Ejercicios: Derivación Implícita

Propuesto 31

Derive implícitamente $\ln y + x^2 = 8x$.

Ejercicios: Derivación Implícita

Propuesto 31

Derive implícitamente $\ln y + x^2 = 8x$.

Propuesto 32

Obtenga la derivada de x^x utilizando derivación implícita.
HINT: Puede ser útil partir el ejercicio aplicando un logaritmo sobre una relación.

Ejercicios: Derivación Implícita

Propuesto 31

Derive implícitamente $\ln y + x^2 = 8x$.

Propuesto 32

Obtenga la derivada de x^x utilizando derivación implícita.
HINT: Puede ser útil partir el ejercicio aplicando un logaritmo sobre una relación.

Propuesto 33

Obtenga implícitamente la segunda derivada de y del Ejemplo 27.

Módulo 11

▸ Volver al Inicio de la Sección

Aproximaciones a una Función

Anteriormente vimos que a partir de la definición de derivada podemos obtener una expresión para la *mejor aproximación afín* a una función al rededor de un punto...

Aproximaciones a una Función

Anteriormente vimos que a partir de la definición de derivada podemos obtener una expresión para la *mejor aproximación afín* a una función al rededor de un punto...
En general, cuando nos enfrentamos a una función derivable, tenemos la opción de *realizar una aproximación polinómica* a esta (en efecto, la aproximación afín es un caso particular).

Aproximaciones a una Función

Anteriormente vimos que a partir de la definición de derivada podemos obtener una expresión para la *mejor aproximación afín* a una función al rededor de un punto...
En general, cuando nos enfrentamos a una función derivable, tenemos la opción de *realizar una aproximación polinómica* a esta (en efecto, la aproximación afín es un caso particular).
Así, teniendo una función diferenciable $f(x)$, un punto x_0 al rededor del cual haremos la aproximación y un grado n para el polinomio que queramos, podemos establecer una función polinómica de grado n que *se parece mucho* a f en torno a x_0.

Aproximaciones a una Función

Anteriormente vimos que a partir de la definición de derivada podemos obtener una expresión para la *mejor aproximación afín* a una función al rededor de un punto...
En general, cuando nos enfrentamos a una función derivable, tenemos la opción de *realizar una aproximación polinómica* a esta (en efecto, la aproximación afín es un caso particular).
Así, teniendo una función diferenciable $f(x)$, un punto x_0 al rededor del cual haremos la aproximación y un grado n para el polinomio que queramos, podemos establecer una función polinómica de grado n que *se parece mucho* a f en torno a x_0.
A estas funciones polinómicas que se aproximan a otra función las llamaremos *Series (o Aproximaciones o Expansiones o Polinomios) de Taylor*.

Gráfico: Aproximaciones a una Función

Figura 32: Aproximaciones a $\sqrt{x}$ en torno a 1

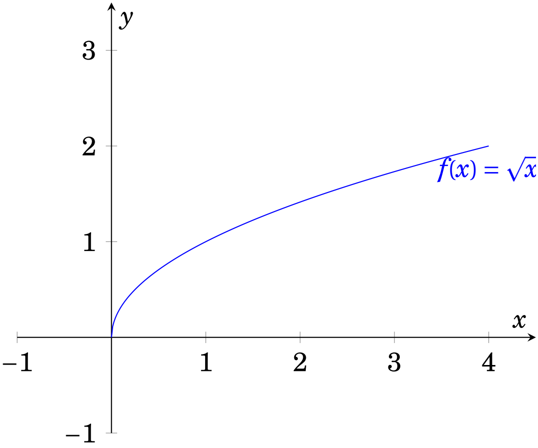


Gráfico: Aproximaciones a una Función

Figura 32: Aproximaciones a $\sqrt{x}$ en torno a 1

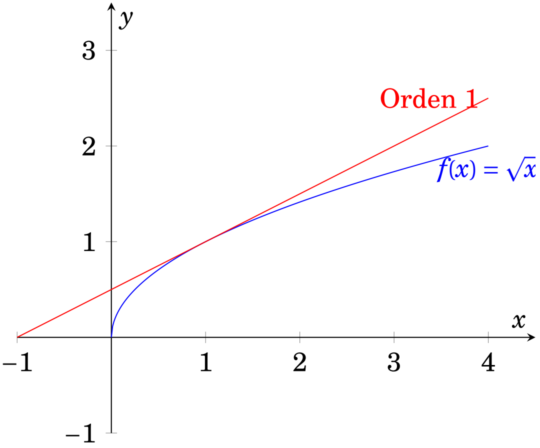


Gráfico: Aproximaciones a una Función

Figura 32: Aproximaciones a $\sqrt{x}$ en torno a 1

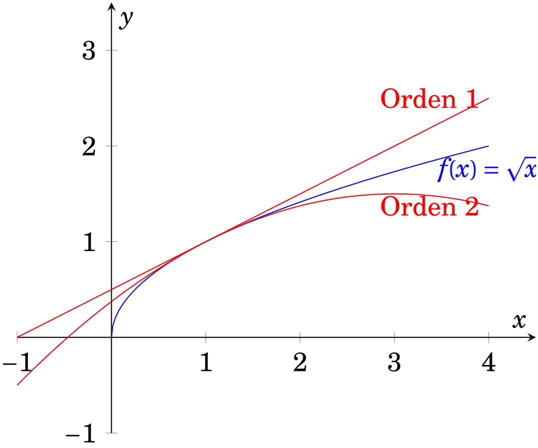


Gráfico: Aproximaciones a una Función

Figura 32: Aproximaciones a $\sqrt{x}$ en torno a 1

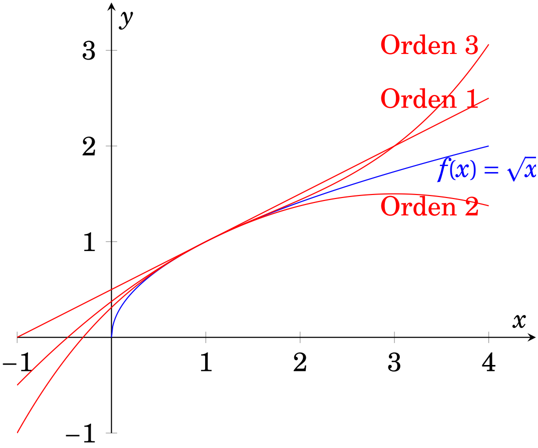
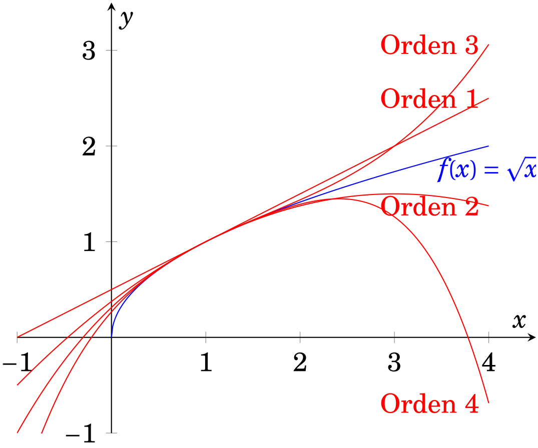


Gráfico: Aproximaciones a una Función

Figura 32: Aproximaciones a $\sqrt{x}$ en torno a 1



Aproximación de Taylor

Definición 17

Una Aproximación de Taylor de grado n en torno a x_0 es un polinomio tal que si se aproxima la función $f(x)$ se cumple que

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Aproximación de Taylor

Definición 17

Una Aproximación de Taylor de grado n en torno a x_0 es un polinomio tal que si se aproxima la función $f(x)$ se cumple que

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Así, una aproximación de primer grado es $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,

Aproximación de Taylor

Definición 17

Una Aproximación de Taylor de grado n en torno a x_0 es un polinomio tal que si se aproxima la función $f(x)$ se cumple que

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Así, una aproximación de primer grado es $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, una de segundo grado se parece a $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$,

Aproximación de Taylor

Definición 17

Una Aproximación de Taylor de grado n en torno a x_0 es un polinomio tal que si se aproxima la función $f(x)$ se cumple que

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.$$

Así, una aproximación de primer grado es $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, una de segundo grado se parece a $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$, una de tercer grado sería $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3$, etc.

Errores de Aproximación

Claramente, una aproximación no tiene por qué ser exacta, pues perfectamente puede existir un *error de aproximación*.

Errores de Aproximación

Claramente, una aproximación no tiene por qué ser exacta, pues perfectamente puede existir un *error de aproximación*.
Este error va a corresponder a la diferencia entre la función verdadera y el polinomio que la aproxima.

Errores de Aproximación

Claramente, una aproximación no tiene por qué ser exacta, pues perfectamente puede existir un *error de aproximación*.
Este error va a corresponder a la diferencia entre la función verdadera y el polinomio que la aproxima.
Si denotamos este error por ε_x, entonces tenemos que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \varepsilon_x.$$

Errores de Aproximación

Claramente, una aproximación no tiene por qué ser exacta, pues perfectamente puede existir un *error de aproximación*.
Este error va a corresponder a la diferencia entre la función verdadera y el polinomio que la aproxima.
Si denotamos este error por ε_x, entonces tenemos que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \varepsilon_x.$$

¿Qué pasa si se evalúa la función $f(x)$ en $x = x_0$?

Errores de Aproximación

Claramente, una aproximación no tiene por qué ser exacta, pues perfectamente puede existir un *error de aproximación*.
Este error va a corresponder a la diferencia entre la función verdadera y el polinomio que la aproxima.
Si denotamos este error por ε_x, entonces tenemos que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \varepsilon_x.$$

¿Qué pasa si se evalúa la función $f(x)$ en $x = x_0$?
¿Qué pasa si la función $f(x)$ es un polinomio?

Errores de Aproximación

Claramente, una aproximación no tiene por qué ser exacta, pues perfectamente puede existir un *error de aproximación*.
Este error va a corresponder a la diferencia entre la función verdadera y el polinomio que la aproxima.
Si denotamos este error por ε_x, entonces tenemos que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \varepsilon_x.$$

¿Qué pasa si se evalúa la función $f(x)$ en $x = x_0$?
¿Qué pasa si la función $f(x)$ es un polinomio?
¿Para qué nos podría servir esto?

Aplicación: Aproximando Irracionales

Ejemplo 28

Aproxime el valor de $e^{0,1}$ con un Polinomio de Taylor de segundo orden.
HINT: Piense que $f(x) = e^x$ y elija algún valor conveniente de x_0.

Aplicación: Aproximando Irracionales

Ejemplo 28

Aproxime el valor de $e^{0,1}$ con un Polinomio de Taylor de segundo orden.
HINT: Piense que $f(x) = e^x$ y elija algún valor conveniente de x_0.

Solución 28

Partimos eligiendo $x_0 = 0$ por dos razones:

Aplicación: Aproximando Irracionales

Ejemplo 28

Aproxime el valor de $e^{0,1}$ con un Polinomio de Taylor de segundo orden.
HINT: Piense que $f(x) = e^x$ y elija algún valor conveniente de x_0.

Solución 28

Partimos eligiendo $x_0 = 0$ por dos razones:

1. conocemos el valor de $f(x_0)$ y

Aplicación: Aproximando Irracionales

Ejemplo 28

Aproxime el valor de $e^{0,1}$ con un Polinomio de Taylor de segundo orden.
HINT: Piense que $f(x) = e^x$ y elija algún valor conveniente de x_0.

Solución 28

Partimos eligiendo $x_0 = 0$ por dos razones:

1. conocemos el valor de $f(x_0)$ y
2. es un valor cercano a $x = 0,1$.

Aplicación: Aproximando Irracionales

Ejemplo 28

Aproxime el valor de $e^{0,1}$ con un Polinomio de Taylor de segundo orden.
HINT: Piense que $f(x) = e^x$ y elija algún valor conveniente de x_0.

Solución 28

Partimos eligiendo $x_0 = 0$ por dos razones:

1. conocemos el valor de $f(x_0)$ y
2. es un valor cercano a $x = 0,1$.

Aplicación: Aproximando Irracionales

Ejemplo 28

Aproxime el valor de $e^{0,1}$ con un Polinomio de Taylor de segundo orden.
HINT: Piense que $f(x) = e^x$ y elija algún valor conveniente de x_0.

Solución 28

Partimos eligiendo $x_0 = 0$ por dos razones:

1. conocemos el valor de $f(x_0)$ y
2. es un valor cercano a $x = 0,1$.

Luego, calculamos las primeras dos derivadas de la función (por tratarse de una aproximación de segundo orden):

Aplicación: Aproximando Irracionales

Ejemplo 28

Aproxime el valor de $e^{0,1}$ con un Polinomio de Taylor de segundo orden.
HINT: Piense que $f(x) = e^x$ y elija algún valor conveniente de x_0.

Solución 28

Partimos eligiendo $x_0 = 0$ por dos razones:

1. conocemos el valor de $f(x_0)$ y
2. es un valor cercano a $x = 0,1$.

Luego, calculamos las primeras dos derivadas de la función (por tratarse de una aproximación de segundo orden): $f'(x) = f''(x) = e^x$.

Aplicación: Aproximando Irracionales

Ejemplo 28

Aproxime el valor de $e^{0,1}$ con un Polinomio de Taylor de segundo orden.
HINT: Piense que $f(x) = e^x$ y elija algún valor conveniente de x_0.

Solución 28

Partimos eligiendo $x_0 = 0$ por dos razones:

1. conocemos el valor de $f(x_0)$ y
2. es un valor cercano a $x = 0,1$.

Luego, calculamos las primeras dos derivadas de la función (por tratarse de una aproximación de segundo orden): $f'(x) = f''(x) = e^x$.
Por último, sólo debemos reemplazar lo que tenemos en la expresión de una Aproximación de Taylor de segundo grado:

Aplicación: Aproximando Irracionales

Ejemplo 28

Aproxime el valor de $e^{0,1}$ con un Polinomio de Taylor de segundo orden.
HINT: Piense que $f(x) = e^x$ y elija algún valor conveniente de x_0.

Solución 28

Partimos eligiendo $x_0 = 0$ por dos razones:

1. conocemos el valor de $f(x_0)$ y
2. es un valor cercano a $x = 0,1$.

Luego, calculamos las primeras dos derivadas de la función (por tratarse de una aproximación de segundo orden): $f'(x) = f''(x) = e^x$.
Por último, sólo debemos reemplazar lo que tenemos en la expresión de una Aproximación de Taylor de segundo grado:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$

$$\Longrightarrow f(0,1) \approx 1 + 1 \cdot 0,1 + \frac{1}{2}0,1^2 = 1,105 \approx 1,10517091808.$$

Series de Maclaurin

Definición 18

Una Serie de Maclaurin es una Serie de Taylor en torno a $x_0 = 0$.

Series de Maclaurin

Definición 18

Una Serie de Maclaurin es una Serie de Taylor en torno a $x_0 = 0$.

Propuesto 34

Obtenga la Serie de Maclaurin de grado 2 de la función $f(x) = (1-x)^{-1}$. ¿Cómo sería la serie de grado n?

Propuesto 35

Obtenga la Serie de Maclaurin de grado 2 de la función $g(x) = e^x$. ¿Cómo sería la serie de grado n?

Aplicación: Interés Compuesto

Propuesto 36

¿Por qué cuando en Chile se calcula la inflación anual a partir de las inflaciones mensuales, la gente suele simplemente sumarlas en vez de utilizar una fórmula tipo “interés compuesto”? Puede hacerse la misma pregunta con un depósito a plazo.
HINT: Suponga que la tasa es constante.

Regla de L'Hôpital

Muchas veces nos vamos a enfrentar a límites cuyo resultado al evaluar directamente es de la forma $0/0$ o ∞/∞.

Regla de L'Hôpital

Muchas veces nos vamos a enfrentar a límites cuyo resultado al evaluar directamente es de la forma $0/0$ o ∞/∞.
En estas situaciones podemos aplicar la regla de L'Hôpital, que básicamente indica que

$$\lim_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema de Rolle

Proposición 29

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a)=f(b)$. Entonces, existe al menos un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Demostración.

Prueba informal: Suponga que f no es una función constante (si lo fuera, su derivada siempre sería 0).

Teorema de Rolle

Proposición 29

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a)=f(b)$. Entonces, existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Demostración.

Prueba informal: Suponga que f no es una función constante (si lo fuera, su derivada siempre sería 0).
Luego, existe algún valor máximo mayor que $f(a)=f(b)$ o algún valor mínimo menor que $f(a)=f(b)$ en el intervalo (a,b).

Teorema de Rolle

Proposición 29

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a)=f(b)$. Entonces, existe al menos un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Demostración.

Prueba informal: Suponga que f no es una función constante (si lo fuera, su derivada siempre sería 0).
Luego, existe algún valor máximo mayor que $f(a)=f(b)$ o algún valor mínimo menor que $f(a)=f(b)$ en el intervalo (a,b).
Pero como f es continua, la derivada a la izquierda de un máximo debe ser no negativa y a la derecha del máximo debe ser no negativa. La única forma de que se alcance el máximo es que en ese punto la derivada sea 0 (ver Figura 33).

Teorema de Rolle

Proposición 29

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a)=f(b)$. Entonces, existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Demostración.

Prueba informal: Suponga que f no es una función constante (si lo fuera, su derivada siempre sería 0).
Luego, existe algún valor máximo mayor que $f(a)=f(b)$ o algún valor mínimo menor que $f(a)=f(b)$ en el intervalo (a,b).
Pero como f es continua, la derivada a la izquierda de un máximo debe ser no negativa y a la derecha del máximo debe ser no negativa. La única forma de que se alcance el máximo es que en ese punto la derivada sea 0 (ver Figura 33). La explicación es análoga para el caso de un valor mínimo.

Teorema de Rolle

Proposición 29

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a)=f(b)$. Entonces, existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Demostración.

Prueba informal: Suponga que f no es una función constante (si lo fuera, su derivada siempre sería 0).
Luego, existe algún valor máximo mayor que $f(a)=f(b)$ o algún valor mínimo menor que $f(a)=f(b)$ en el intervalo (a,b).
Pero como f es continua, la derivada a la izquierda de un máximo debe ser no negativa y a la derecha del máximo debe ser no negativa. La única forma de que se alcance el máximo es que en ese punto la derivada sea 0 (ver Figura 33). La explicación es análoga para el caso de un valor mínimo.
Esto se puede justificar más formalmente utilizando la Proposición 18. □

Gráfico: Teorema de Rolle

Figura 33: Teorema de Rolle

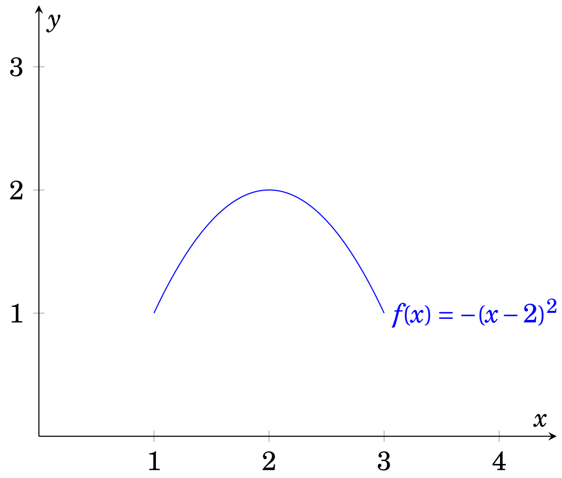
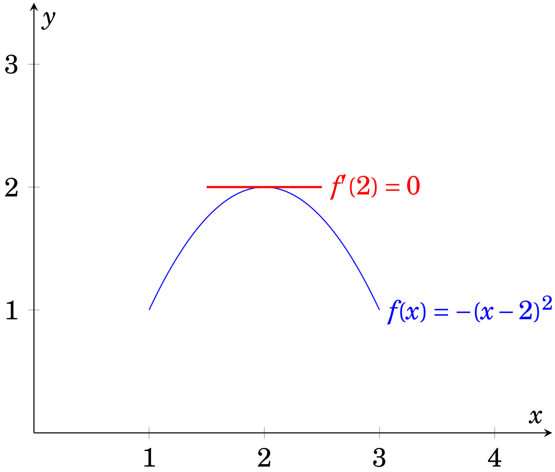


Gráfico: Teorema de Rolle

Figura 33: Teorema de Rolle



Teorema del Valor Medio

Es una generalización del Teorema de Rolle...

Teorema del Valor Medio

Es una generalización del Teorema de Rolle...

Proposición 30

Sea f una función continua en $[a,b]$ *y derivable en* (a,b). *Entonces, existe al menos un* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración.

La ecuación de la recta que pasa entre los puntos $(a,f(a))$ *y* $(b,f(b)$ *es* $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ *(ver Figura 34).*

Teorema del Valor Medio

Es una generalización del Teorema de Rolle...

Proposición 30

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces, existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración.

La ecuación de la recta que pasa entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b)$ es $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ (ver Figura 34).
Sea $g(x) = f(x) - y$, de modo que esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

Teorema del Valor Medio

Es una generalización del Teorema de Rolle...

Proposición 30

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces, existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración.

La ecuación de la recta que pasa entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b)$ es $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ (ver Figura 34).
Sea $g(x) = f(x) - y$, de modo que esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).
Luego, notamos que $g(a) = g(b)$, por lo que, por la Proposición 29, debe existir algún $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio

Es una generalización del Teorema de Rolle...

Proposición 30

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces, existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración.

La ecuación de la recta que pasa entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b)$ es $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ (ver Figura 34).
Sea $g(x) = f(x) - y$, de modo que esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).
Luego, notamos que $g(a) = g(b)$, por lo que, por la Proposición 29, debe existir algún $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$.
Pero $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, por lo que necesariamente $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Gráfico: Teorema del Valor Medio

Figura 34: Teorema de Rolle

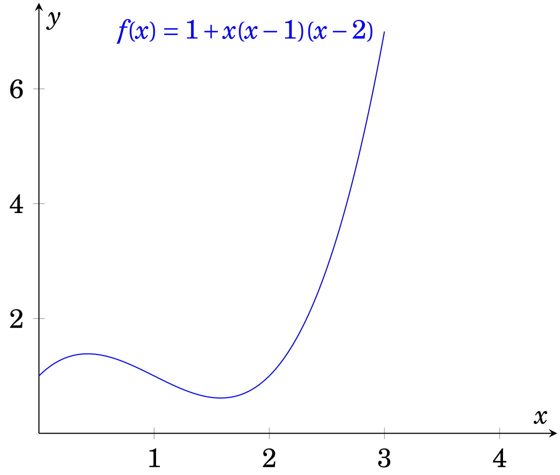


Gráfico: Teorema del Valor Medio

Figura 34: Teorema de Rolle

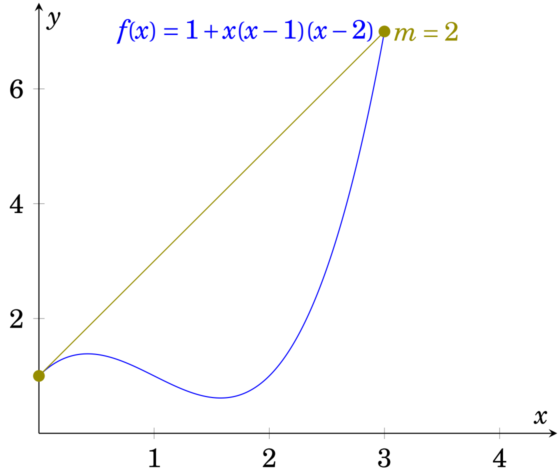
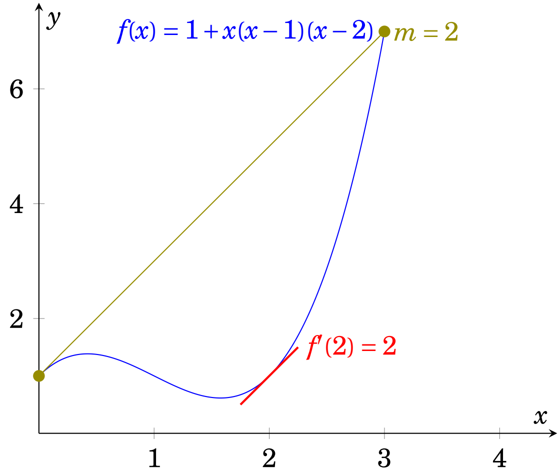


Gráfico: Teorema del Valor Medio

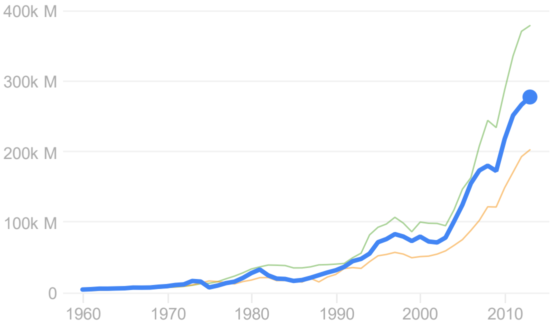
Figura 34: Teorema de Rolle



Aplicación: Teorema del Valor Medio

Ejemplo 29

Figura 35: PIB de Chile

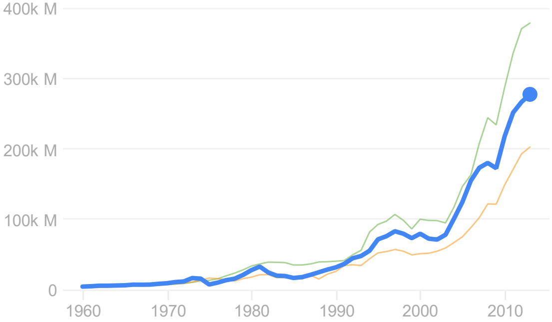


El PIB chileno era de 77 mil millones de dólares en 2003, mientras que en 2013 era de 277 mil millones de dólares. Considerando que el PIB es una función continua en el tiempo, es imposible que hayamos tenido una tasa de crecimiento instantánea de 20 mil millones de dólares, pues eso superaría nuestro máximo crecimiento histórico de un 12,3%. Comente.

Aplicación: Teorema del Valor Medio

Ejemplo 29

Figura 35: PIB de Chile



El PIB chileno era de 77 mil millones de dólares en 2003, mientras que en 2013 era de 277 mil millones de dólares. Considerando que el PIB es una función continua en el tiempo, es imposible que hayamos tenido una tasa de crecimiento instantánea de 20 mil millones de dólares, pues eso superaría nuestro máximo crecimiento histórico de un 12,3 %. Comente.

Solución 29

Falso. En algún momento el crecimiento instantáneo fue de
$\dfrac{277-77}{10} = 20$ mil millones de dólares.

Módulo 12

▸ Volver al Inicio de la Sección

Comportamientos Locales

Anteriormente discutimos cómo podíamos inferir ciertas propiedades de una función utilizando incrementos (ver Figura 3).

Comportamientos Locales

Anteriormente discutimos cómo podíamos inferir ciertas propiedades de una función utilizando incrementos (ver Figura 3).
Sin embargo, también vimos que estas propiedades se distorsionan cuando utilizamos intervalos muy amplios (Figura 4).

Comportamientos Locales

Anteriormente discutimos cómo podíamos inferir ciertas propiedades de una función utilizando incrementos (ver Figura 3).
Sin embargo, también vimos que estas propiedades se distorsionan cuando utilizamos intervalos muy amplios (Figura 4).
Por último, comentamos que cuando utilizábamos derivadas, i.e. intervalos arbitrariamente pequeños, podíamos estar seguros de que estábamos capturando el correcto comportamiento de la función en un punto (Figura 27).

Comportamientos Locales

Anteriormente discutimos cómo podíamos inferir ciertas propiedades de una función utilizando incrementos (ver Figura 3).
Sin embargo, también vimos que estas propiedades se distorsionan cuando utilizamos intervalos muy amplios (Figura 4).
Por último, comentamos que cuando utilizábamos derivadas, i.e. intervalos arbitrariamente pequeños, podíamos estar seguros de que estábamos capturando el correcto comportamiento de la función en un punto (Figura 27).
Particularmente, nos vamos a preocupar de estudiar dos comportamientos locales muy importantes de las funciones: *crecimiento* y *concavidad*.

Comportamientos Locales

Anteriormente discutimos cómo podíamos inferir ciertas propiedades de una función utilizando incrementos (ver Figura 3).
Sin embargo, también vimos que estas propiedades se distorsionan cuando utilizamos intervalos muy amplios (Figura 4).
Por último, comentamos que cuando utilizábamos derivadas, i.e. intervalos arbitrariamente pequeños, podíamos estar seguros de que estábamos capturando el correcto comportamiento de la función en un punto (Figura 27).
Particularmente, nos vamos a preocupar de estudiar dos comportamientos locales muy importantes de las funciones: *crecimiento* y *concavidad*.
En base a estas propiedades locales, podremos eventualmente inferir propiedades globales.

Crecimiento y Decrecimiento Local

Definición 19

Una función derivable $f(x)$ es **creciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \geq 0$.

Crecimiento y Decrecimiento Local

Definición 19

Una función derivable $f(x)$ es **creciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \geq 0$.

Definición 20

Una función derivable $f(x)$ es **decreciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \leq 0$.

Crecimiento y Decrecimiento Local

Definición 19

Una función derivable $f(x)$ es **creciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \geq 0$.

Definición 20

Una función derivable $f(x)$ es **decreciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \leq 0$.

Definición 21

Una función derivable $f(x)$ es **estrictamente creciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) > 0$.

Crecimiento y Decrecimiento Local

Definición 19

Una función derivable $f(x)$ es **creciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \geq 0$.

Definición 20

Una función derivable $f(x)$ es **decreciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \leq 0$.

Definición 21

Una función derivable $f(x)$ es **estrictamente creciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) > 0$.

Definición 22

Una función derivable $f(x)$ es **estrictamente decreciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) < 0$.

Crecimiento y Decrecimiento Local

Definición 19

Una función derivable $f(x)$ es **creciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \geq 0$.

Definición 20

Una función derivable $f(x)$ es **decreciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \leq 0$.

Definición 21

Una función derivable $f(x)$ es **estrictamente creciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) > 0$.

Definición 22

Una función derivable $f(x)$ es **estrictamente decreciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) < 0$.

Esto implica que toda función derivable permea el crecimiento o el decrecimiento de la recta tangente a ella en cada punto.

Ejemplo: Crecimiento y Decrecimiento

Ejemplo 30

Determine si la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es creciente o decreciente en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Ejemplo: Crecimiento y Decrecimiento

Ejemplo 30

Determine si la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es creciente o decreciente en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Solución 30

Derivamos la función para obtener $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Ejemplo: Crecimiento y Decrecimiento

Ejemplo 30

Determine si la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es creciente o decreciente en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Solución 30

Derivamos la función para obtener $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.
Luego, evaluamos en los puntos pedidos, obteniendo $f'(-1) = 11$, $f'(1) = -1$ y $f(3) = 11$.

Ejemplo: Crecimiento y Decrecimiento

Ejemplo 30

Determine si la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es creciente o decreciente en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Solución 30

Derivamos la función para obtener $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.
Luego, evaluamos en los puntos pedidos, obteniendo $f'(-1) = 11$, $f'(1) = -1$ y $f(3) = 11$.
Por lo tanto, f es creciente en -1, decreciente en 1 y creciente en 3.

Gráfico: Crecimiento y Decrecimiento

Figura 36: Crecimiento y Decrecimiento

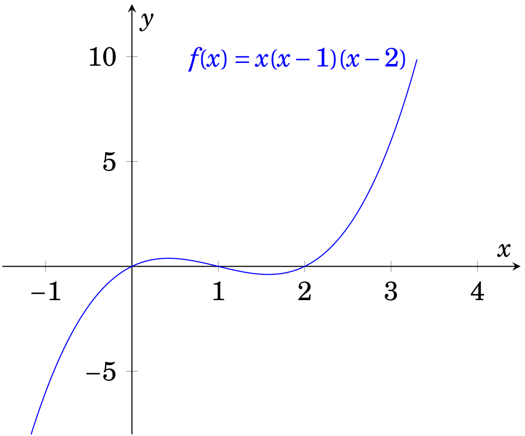


Gráfico: Crecimiento y Decrecimiento

Figura 36: Crecimiento y Decrecimiento

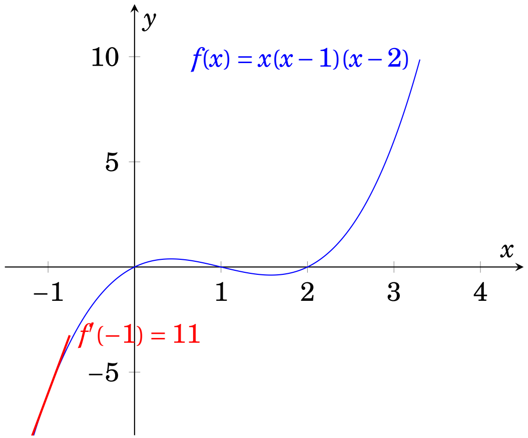


Gráfico: Crecimiento y Decrecimiento

Figura 36: Crecimiento y Decrecimiento

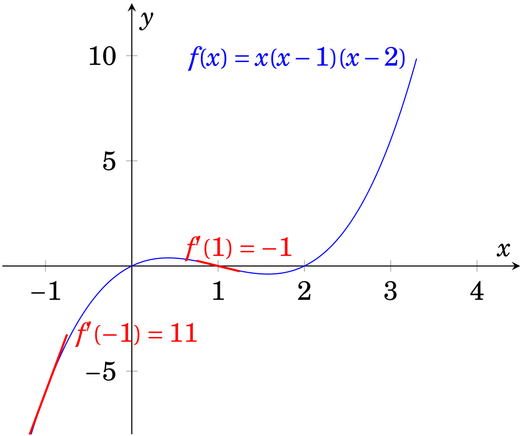
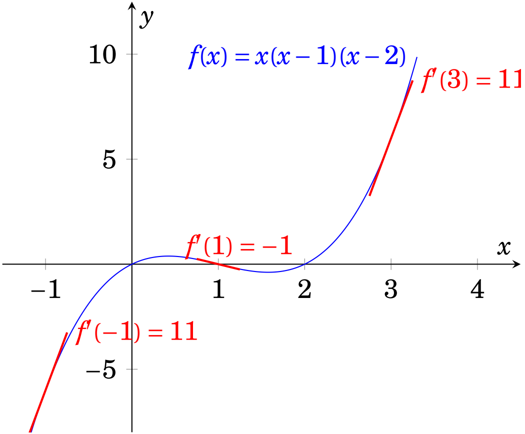


Gráfico: Crecimiento y Decrecimiento

Figura 36: Crecimiento y Decrecimiento



Crecimiento en Intervalos

Definición 23

Una función derivable $f(x)$ es creciente (resp. estrictamente creciente) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Crecimiento en Intervalos

Definición 23

Una función derivable $f(x)$ es creciente (resp. estrictamente creciente) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 24

Una función derivable $f(x)$ es decreciente (resp. estrictamente decreciente) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Crecimiento en Intervalos

Definición 23

Una función derivable $f(x)$ es creciente (resp. estrictamente creciente) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 24

Una función derivable $f(x)$ es decreciente (resp. estrictamente decreciente) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 25

Una función derivable $f(x)$ es globalmente creciente (o bien, monótona creciente) si y sólo si $f'(x) \geq 0$ en todo su dominio.

Crecimiento en Intervalos

Definición 23

Una función derivable $f(x)$ es creciente (resp. estrictamente creciente) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 24

Una función derivable $f(x)$ es decreciente (resp. estrictamente decreciente) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 25

Una función derivable $f(x)$ es globalmente creciente (o bien, monótona creciente) si y sólo si $f'(x) \geq 0$ en todo su dominio.

Definición 26

Una función derivable $f(x)$ es globalmente decreciente (o bien, monótona decreciente) si y sólo si $f'(x) \leq 0$ en todo su dominio.

Ejemplo: Crecimiento en Intervalos

Ejemplo 31

Determine el/los intervalo(s) donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es creciente y el/los intervalo(s) donde es decreciente.

Ejemplo: Crecimiento en Intervalos

Ejemplo 31

Determine el/los intervalo(s) donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es creciente y el/los intervalo(s) donde es decreciente.

Solución 31

Derivamos la función para obtener $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 > 0$.

Ejemplo: Crecimiento en Intervalos

Ejemplo 31

Determine el/los intervalo(s) donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es creciente y el/los intervalo(s) donde es decreciente.

Solución 31

Derivamos la función para obtener $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 > 0$. Por lo tanto, f es siempre creciente en su dominio, i.e. es una función globalmente creciente.

Ejemplo: Crecimiento en Intervalos

Ejemplo 31

Determine el/los intervalo(s) donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es creciente y el/los intervalo(s) donde es decreciente.

Solución 31

Derivamos la función para obtener $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 > 0$. Por lo tanto, f es siempre creciente en su dominio, i.e. es una función globalmente creciente.

Propuesto 37

Repita el ejercicio anterior con la función del Ejemplo 30.

Aplicación: Funciones Monótonas

Cuando a una función se le compone en una transformación monotónica (e.g. una función globalmente creciente), *se mantiene la ordinalidad de los valores*, esto es, si $f(x)$ es una transformación monotónica, entonces $A \leq B$ si y sólo si $f(A) \leq f(B)$.

Aplicación: Funciones Monótonas

Cuando a una función se le compone en una transformación monotónica (e.g. una función globalmente creciente), *se mantiene la ordinalidad de los valores*, esto es, si $f(x)$ es una transformación monotónica, entonces $A \leq B$ si y sólo si $f(A) \leq f(B)$.

Ejemplo 32

Considere una firma que debe elegir entre los planes de producción A, B y C para decidir cómo producir. Se sabe que la firma busca maximizar sus beneficios, sin embargo, no dispone de la función de beneficios $\pi(y)$ con $y \in \{A, B, C\}$, sólo dispone de los valores de $\ln \pi(y)$. En base a esto, ¿podrá determinar cuál es el plan de producción que le conviene?

Aplicación: Funciones Monótonas

Cuando a una función se le compone en una transformación monotónica (e.g. una función globalmente creciente), *se mantiene la ordinalidad de los valores*, esto es, si $f(x)$ es una transformación monotónica, entonces $A \leq B$ si y sólo si $f(A) \leq f(B)$.

Ejemplo 32

Considere una firma que debe elegir entre los planes de producción A, B y C para decidir cómo producir. Se sabe que la firma busca maximizar sus beneficios, sin embargo, no dispone de la función de beneficios $\pi(y)$ con $y \in \{A, B, C\}$, sólo dispone de los valores de $\ln \pi(y)$. En base a esto, ¿podrá determinar cuál es el plan de producción que le conviene?

Solución 32

Sí, podrá. Notamos que $f(x) = \ln x$ tiene derivada $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ en todo el dominio de la función. Por lo tanto, si conoce los valores de $\ln \pi(y)$ y puede determinar cuál es el mejor en términos logarítmicos, entonces también sabe cuál es el mejor sin el logaritmo.

Recordatorio: Parábolas

Conocemos el concepto de una parábola cóncava y una parábola convexa.

Recordatorio: Parábolas

Conocemos el concepto de una parábola cóncava y una parábola convexa.
En efecto, una parábola definida por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es cóncava si $a < 0$ y es convexa si $a > 0$.

Recordatorio: Parábolas

Conocemos el concepto de una parábola cóncava y una parábola convexa.
En efecto, una parábola definida por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es cóncava si $a < 0$ y es convexa si $a > 0$.
Notamos que la derivada de esta función es $f'(x) = 2ax+b$, que es una recta creciente si $a > 0$ y es una recta decreciente si $a < 0$...

Recordatorio: Parábolas

Conocemos el concepto de una parábola cóncava y una parábola convexa.
En efecto, una parábola definida por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es cóncava si $a < 0$ y es convexa si $a > 0$.
Notamos que la derivada de esta función es $f'(x) = 2ax + b$, que es una recta creciente si $a > 0$ y es una recta decreciente si $a < 0$...
Si tomamos la segunda derivada de la función obtenemos $f''(x) = 2a$, que será positiva si $a > 0$ y será negativa si $a < 0$.

Recordatorio: Parábolas

Conocemos el concepto de una parábola cóncava y una parábola convexa.
En efecto, una parábola definida por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es cóncava si $a < 0$ y es convexa si $a > 0$.
Notamos que la derivada de esta función es $f'(x) = 2ax + b$, que es una recta creciente si $a > 0$ y es una recta decreciente si $a < 0$...
Si tomamos la segunda derivada de la función obtenemos $f''(x) = 2a$, que será positiva si $a > 0$ y será negativa si $a < 0$.
Esto se da precisamente porque la segunda derivada de una función identifica el crecimiento/decrecimiento de la primera derivada de la función.

Recordatorio: Parábolas

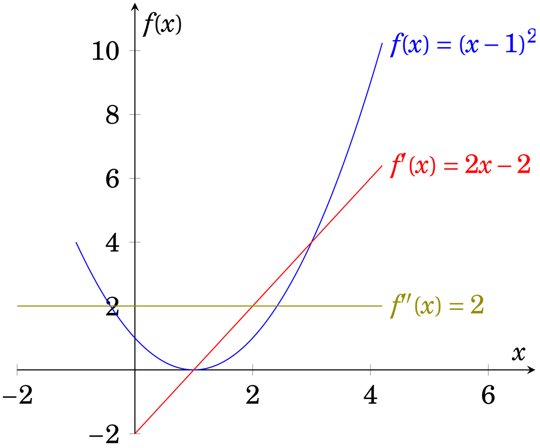
Conocemos el concepto de una parábola cóncava y una parábola convexa.
En efecto, una parábola definida por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es cóncava si $a < 0$ y es convexa si $a > 0$.
Notamos que la derivada de esta función es $f'(x) = 2ax + b$, que es una recta creciente si $a > 0$ y es una recta decreciente si $a < 0$...
Si tomamos la segunda derivada de la función obtenemos $f''(x) = 2a$, que será positiva si $a > 0$ y será negativa si $a < 0$.
Esto se da precisamente porque la segunda derivada de una función identifica el crecimiento/decrecimiento de la primera derivada de la función.
Así, diremos que si la primera derivada es creciente, i.e. la segunda derivada es positiva, la función es convexa. Por otro lado, si la primera derivada es decreciente, i.e. la segunda derivada es negativa, diremos que la función es cóncava.

Recordatorio: Parábolas

Conocemos el concepto de una parábola cóncava y una parábola convexa.
En efecto, una parábola definida por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es cóncava si $a < 0$ y es convexa si $a > 0$.
Notamos que la derivada de esta función es $f'(x) = 2ax + b$, que es una recta creciente si $a > 0$ y es una recta decreciente si $a < 0$...
Si tomamos la segunda derivada de la función obtenemos $f''(x) = 2a$, que será positiva si $a > 0$ y será negativa si $a < 0$.
Esto se da precisamente porque la segunda derivada de una función identifica el crecimiento/decrecimiento de la primera derivada de la función.
Así, diremos que si la primera derivada es creciente, i.e. la segunda derivada es positiva, la función es convexa. Por otro lado, si la primera derivada es decreciente, i.e. la segunda derivada es negativa, diremos que la función es cóncava.
Esto es válido para cualquier función derivable, no solo las parábolas.

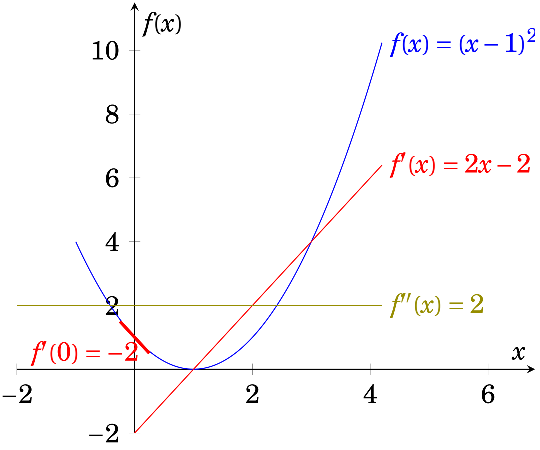
Convexidad de una Función Cuadrática

Figura 37: Convexidad de una Función Cuadrática



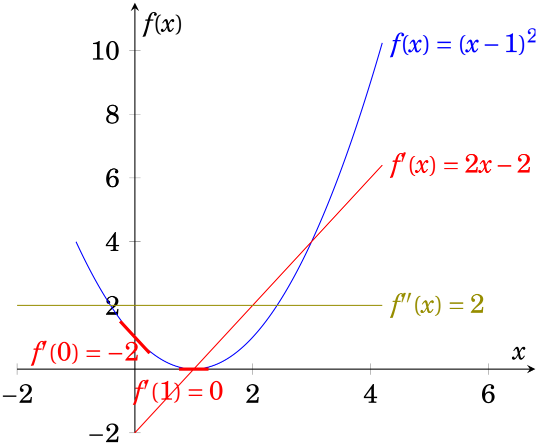
Convexidad de una Función Cuadrática

Figura 37: Convexidad de una Función Cuadrática



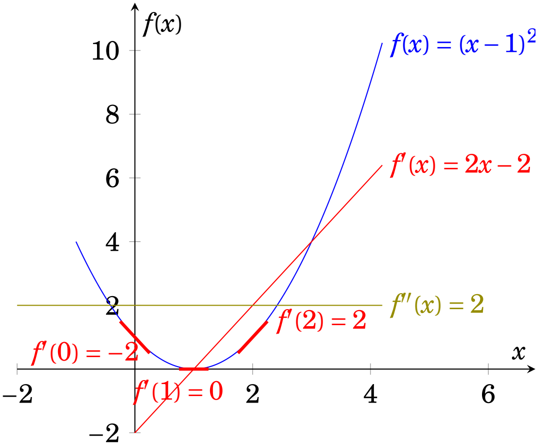
Convexidad de una Función Cuadrática

Figura 37: Convexidad de una Función Cuadrática



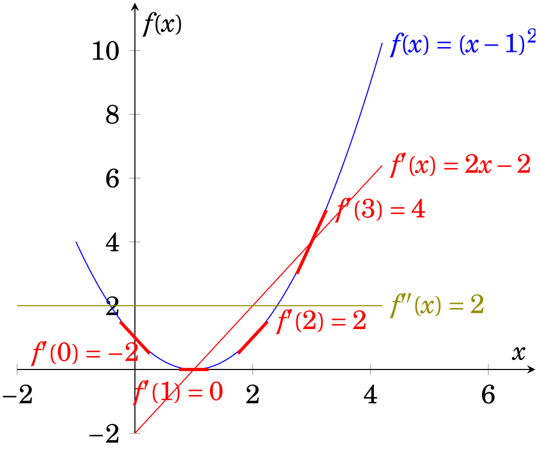
Convexidad de una Función Cuadrática

Figura 37: Convexidad de una Función Cuadrática



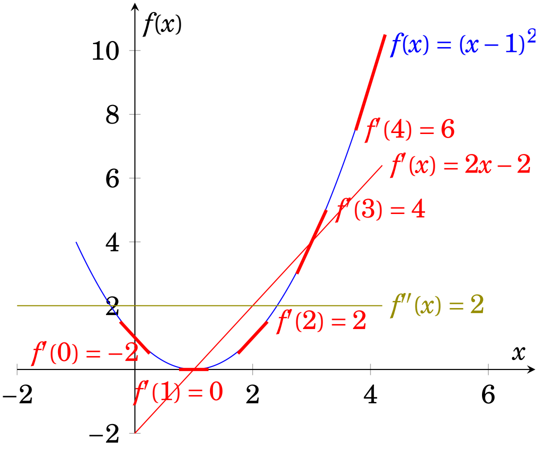
Convexidad de una Función Cuadrática

Figura 37: Convexidad de una Función Cuadrática



Convexidad de una Función Cuadrática

Figura 37: Convexidad de una Función Cuadrática



Concavidad y Convexidad Local

Definición 27

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **convexa** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) \geq 0$.

Concavidad y Convexidad Local

Definición 27

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **convexa** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) \geq 0$.

Definición 28

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **cóncava** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) \leq 0$.

Concavidad y Convexidad Local

Definición 27

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **convexa** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) \geq 0$.

Definición 28

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **cóncava** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) \leq 0$.

Definición 29

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **estrictamente convexa** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) > 0$.

Concavidad y Convexidad Local

Definición 27

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **convexa** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) \geq 0$.

Definición 28

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **cóncava** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) \leq 0$.

Definición 29

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **estrictamente convexa** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) > 0$.

Definición 30

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **estrictamente cóncava** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) < 0$.

Ejemplo: Concavidad y Convexidad

Ejemplo 33

Determine si la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es cóncava o convexa en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Ejemplo: Concavidad y Convexidad

Ejemplo 33

Determine si la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es cóncava o convexa en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Solución 33

Derivamos la función dos veces para obtener $f''(x) = 6x - 6$.

Ejemplo: Concavidad y Convexidad

Ejemplo 33

Determine si la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es cóncava o convexa en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Solución 33

Derivamos la función dos veces para obtener $f''(x) = 6x - 6$.
Luego, evaluamos en los puntos pedidos, obteniendo
$f''(-1) = -12 < 0$, $f''(1) = 0$ y $f''(3) = 12 > 0$.

Ejemplo: Concavidad y Convexidad

Ejemplo 33

Determine si la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es cóncava o convexa en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Solución 33

Derivamos la función dos veces para obtener $f''(x) = 6x - 6$.
Luego, evaluamos en los puntos pedidos, obteniendo
$f''(-1) = -12 < 0$, $f''(1) = 0$ y $f''(3) = 12 > 0$.
Por lo tanto, f es cóncava en -1, *cóncava y convexa* en 1 y convexa en 3.

Concavidad en Intervalos

Definición 31

Una función doblemente derivable $f(x)$ es convexa (resp. estrictamente convexa) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Concavidad en Intervalos

Definición 31

Una función doblemente derivable $f(x)$ es convexa (resp. estrictamente convexa) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 32

Una función doblemente derivable $f(x)$ es cóncava (resp. estrictamente cóncava) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f''(x) \leq 0$ (resp. $f''(x) < 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Concavidad en Intervalos

Definición 31

Una función doblemente derivable $f(x)$ es convexa (resp. estrictamente convexa) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 32

Una función doblemente derivable $f(x)$ es cóncava (resp. estrictamente cóncava) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f''(x) \leq 0$ (resp. $f''(x) < 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 33

Una función doblemente derivable $f(x)$ es globalmente convexa si y sólo si $f''(x) \geq 0$ en todo su dominio.

Concavidad en Intervalos

Definición 31

Una función doblemente derivable $f(x)$ es convexa (resp. estrictamente convexa) en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in [a, b]$.

Definición 32

Una función doblemente derivable $f(x)$ es cóncava (resp. estrictamente cóncava) en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si $f''(x) \leq 0$ (resp. $f''(x) < 0$) para todo $x \in [a, b]$.

Definición 33

Una función doblemente derivable $f(x)$ es globalmente convexa si y sólo si $f''(x) \geq 0$ en todo su dominio.

Definición 34

Una función doblemente derivable $f(x)$ es globalmente cóncava si y sólo si $f''(x) \leq 0$ en todo su dominio.

Ejemplo: Concavidad en Intervalos

Ejemplo 34

Determine el/los intervalo(s) donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es cóncava y el/los intervalo(s) donde es convexa.

Ejemplo: Concavidad en Intervalos

Ejemplo 34

Determine el/los intervalo(s) donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es cóncava y el/los intervalo(s) donde es convexa.

Solución 34

Derivamos la función dos veces para obtener $f''(x) = 6x - 6$.

Ejemplo: Concavidad en Intervalos

Ejemplo 34

Determine el/los intervalo(s) donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es cóncava y el/los intervalo(s) donde es convexa.

Solución 34

Derivamos la función dos veces para obtener $f''(x) = 6x - 6$.
Para que $f'' \leq 0$, se tiene que dar que $x \leq 1$ y para que $f'' \geq 0$ se tiene que dar que $x \geq 1$.
Por lo tanto, f es cóncava en el intervalo $(-\infty, 1]$ y es convexa en el intervalo $[1, \infty)$.

Ejemplo: Concavidad en Intervalos

Ejemplo 34

Determine el/los intervalo(s) donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es cóncava y el/los intervalo(s) donde es convexa.

Solución 34

Derivamos la función dos veces para obtener $f''(x) = 6x - 6$.
Para que $f'' \leq 0$, se tiene que dar que $x \leq 1$ y para que $f'' \geq 0$ se tiene que dar que $x \geq 1$.
Por lo tanto, f es cóncava en el intervalo $(-\infty, 1]$ y es convexa en el intervalo $[1, \infty)$.

Propuesto 38

Repita el ejercicio anterior con la función del Ejemplo 33.

Aplicación: Rendimientos Decrecientes

En general, cuando se dice que una función (e.g. una función de producción) tiene rendimientos marginales decrecientes, es porque la función es cóncava. La idea de hablar de *rendimientos marginales decrecientes* es que el efecto de incrementar en una unidad marginal el argumento se vuelve cada vez menor, i.e. cada vez *rinde menos*.

Aplicación: Rendimientos Decrecientes

En general, cuando se dice que una función (e.g. una función de producción) tiene rendimientos marginales decrecientes, es porque la función es cóncava. La idea de hablar de *rendimientos marginales decrecientes* es que el efecto de incrementar en una unidad marginal el argumento se vuelve cada vez menor, i.e. cada vez *rinde menos*. Por ejemplo, en una función de producción, se dice que hay rendimientos marginales decrecientes al factor si la derivada de la función respecto a este factor es decreciente, i.e. si la segunda derivada de la función de producción es negativa.

Aplicación: Rendimientos Decrecientes

En general, cuando se dice que una función (e.g. una función de producción) tiene rendimientos marginales decrecientes, es porque la función es cóncava. La idea de hablar de *rendimientos marginales decrecientes* es que el efecto de incrementar en una unidad marginal el argumento se vuelve cada vez menor, i.e. cada vez *rinde menos*.
Por ejemplo, en una función de producción, se dice que hay rendimientos marginales decrecientes al factor si la derivada de la función respecto a este factor es decreciente, i.e. si la segunda derivada de la función de producción es negativa.
Análogamente, si la segunda derivada es positiva, se dice que la función tiene rendimientos crecientes.

Aplicación: Rendimientos Decrecientes

En general, cuando se dice que una función (e.g. una función de producción) tiene rendimientos marginales decrecientes, es porque la función es cóncava. La idea de hablar de *rendimientos marginales decrecientes* es que el efecto de incrementar en una unidad marginal el argumento se vuelve cada vez menor, i.e. cada vez *rinde menos*.
Por ejemplo, en una función de producción, se dice que hay rendimientos marginales decrecientes al factor si la derivada de la función respecto a este factor es decreciente, i.e. si la segunda derivada de la función de producción es negativa.
Análogamente, si la segunda derivada es positiva, se dice que la función tiene rendimientos crecientes.

Ejemplo 35

Determine si la función $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$ tiene rendimientos decrecientes.

Aplicación: Rendimientos Decrecientes

En general, cuando se dice que una función (e.g. una función de producción) tiene rendimientos marginales decrecientes, es porque la función es cóncava. La idea de hablar de *rendimientos marginales decrecientes* es que el efecto de incrementar en una unidad marginal el argumento se vuelve cada vez menor, i.e. cada vez *rinde menos*.
Por ejemplo, en una función de producción, se dice que hay rendimientos marginales decrecientes al factor si la derivada de la función respecto a este factor es decreciente, i.e. si la segunda derivada de la función de producción es negativa.
Análogamente, si la segunda derivada es positiva, se dice que la función tiene rendimientos crecientes.

Ejemplo 35

Determine si la función $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$ tiene rendimientos decrecientes.

Solución 35

Sí, pues la segunda derivada es negativa en todo el dominio.

Extra: Concavidad y Convexidad

Definición 35

Sean x_1 y x_2 dos valores y sea $\lambda \in (0, 1)$. Una combinación convexa entre x_1 y x_2 se define como $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$.

Extra: Concavidad y Convexidad

Definición 35

Sean x_1 y x_2 dos valores y sea $\lambda \in (0,1)$. Una combinación convexa entre x_1 y x_2 se define como $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

Definición 36

Una función es estrictamente convexa en un intervalo si cualquier combinación convexa de dos valores de la función evaluada en argumentos en el intervalo está siempre por sobre el valor de la función evaluada en la combinación convexa de los argumentos anteriores. Esto es $f(x)$ es estrictamente convexa en $[a,b]$, si $\forall \lambda \in (0,1)$ se tiene que para cualquier $x_1, x_2 \in [a,b]$ la siguiente desigualdad se satisface: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Se dirá que la función es convexa si la desigualdad no es estricta.

Extra: Concavidad y Convexidad

Definición 35

Sean x_1 y x_2 dos valores y sea $\lambda \in (0,1)$. Una combinación convexa entre x_1 y x_2 se define como $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

Definición 36

Una función es estrictamente convexa en un intervalo si cualquier combinación convexa de dos valores de la función evaluada en argumentos en el intervalo está siempre por sobre el valor de la función evaluada en la combinación convexa de los argumentos anteriores. Esto es $f(x)$ es estrictamente convexa en $[a,b]$, si $\forall \lambda \in (0,1)$ se tiene que para cualquier $x_1, x_2 \in [a,b]$ la siguiente desigualdad se satisface: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Se dirá que la función es convexa si la desigualdad no es estricta.

Definición 37

Análogo para concavidad estricta:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Se dirá que la función es cóncava si la desigualdad no es estricta.

Unidad 3

▸ Volver al Inicio

Unidad 4

Volver al Inicio

Unidad 5

Volver al Inicio

Unidad 5

Volver al Inicio

Problema 3

▸ Volver al Inicio

Problema 3: Enunciado

- **Contexto** introductorio (ex ante).

Problema 3: Enunciado

- **Contexto** introductorio (ex ante).
- Inducción del **problema**.

Problema 3: Enunciado

- **Contexto** introductorio (ex ante).
- Inducción del **problema**.
- Presentación de **variables**.

Problema 3: Enunciado

- **Contexto** introductorio (ex ante).
- Inducción del **problema**.
- Presentación de **variables**.
- Planteamiento de una **decisión**.

Problema 3: Enunciado

- **Contexto** introductorio (ex ante).
- Inducción del **problema**.
- Presentación de **variables**.
- Planteamiento de una **decisión**.
- Exigencia de **resultados** a partir de un **instrumento**.

Problema 3: Enunciado

- **Contexto** introductorio (ex ante).
- Inducción del **problema**.
- Presentación de **variables**.
- Planteamiento de una **decisión**.
- Exigencia de **resultados** a partir de un **instrumento**.
- Especificación de una **conclusión**.

Problema 3: Enunciado

- **Contexto** introductorio (ex ante).
- Inducción del **problema**.
- Presentación de **variables**.
- Planteamiento de una **decisión**.
- Exigencia de **resultados** a partir de un **instrumento**.
- Especificación de una **conclusión**.
- Ayudas, hints, indicaciones...

Problema 3: Respuesta

- **Definir** variables, parámetros y/o funciones.

Problema 3: Respuesta

- **Definir** variables, parámetros y/o funciones.
- **Plantear** el problema en base a las definiciones.

Problema 3: Respuesta

- **Definir** variables, parámetros y/o funciones.
- **Plantear** el problema en base a las definiciones.
- **Desarrollar** el problema planteado.

Problema 3: Respuesta

- **Definir** variables, parámetros y/o funciones.
- **Plantear** el problema en base a las definiciones.
- **Desarrollar** el problema planteado.
- **Resolver** lo desarrollado.

Problema 3: Respuesta

- **Definir** variables, parámetros y/o funciones.
- **Plantear** el problema en base a las definiciones.
- **Desarrollar** el problema planteado.
- **Resolver** lo desarrollado.
- **Concluir** en base a lo resuelto.

Contexto e Inducción

Javiera y Diego son dueños de Funcionsilandia, el parque de diversiones más connotado de la ciudad. Lo distintivo de este parque es que todas sus atracciones siguen comportamientos identificados por funciones matemáticas... Javiera y Diego planean adquirir una nueva atracción (montaña rusa) para su parque de diversiones, llamada CYD (Continua Y Derivable).

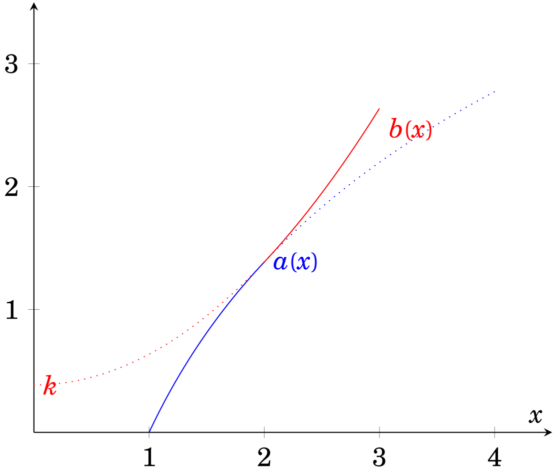
Variables

El comportamiento funcional de esta atracción es el de una función por tramos, donde el primer tramo (la primera pieza) se comporta como la función $a(x) = 2\ln x$ y el segundo tramo (la segunda pieza) se comporta como la función $b(x) = 0{,}25x^2 + k$, donde x corresponde a una medida de ancho de la atracción vista de perfil y ambas funciones miden la altura del riel.

Variables (cont.)

Esto queda representado en la Figura 38.

Figura 38: CYD (Continua Y Derivable)



Decisión, Resultados y Conclusión

Sin embargo, Javiera y Diego deben cumplir fuertes regulaciones de seguridad para poder estrenar su atracción. Particularmente, se les pide que el recorrido sea “suave”, cosa de que los carros puedan seguir una trayectoria sin quiebres en los rieles. Considerando que k es una constante técnica que deben determinar, ¿podrán estrenar la atracción?

Indicación

IND: apoye su respuesta en la Figura 38 (particularmente al elegir los tramos).

Definición de Variables y Función

Definición de variables y función:

Sea $c(x)$ la función por tramos que define a la atracción y $c'(x)$ su derivada:

$$c(x) = \begin{cases} 2\ln x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0{,}25x^2 + k & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

Definición de Variables y Función

Definición de variables y función:

Sea $c(x)$ la función por tramos que define a la atracción y $c'(x)$ su derivada:

$$c(x) = \begin{cases} 2\ln x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0{,}25x^2 + k & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

Sea k el parámetro técnico que podría permitir que la función sea suave (siempre derivable y continua).

Planteamiento del Problema

Planteamiento del problema:

El problema se define de esta manera:

Planteamiento del Problema

Planteamiento del problema:

El problema se define de esta manera:

-Si $\exists k : \forall x \in]1,3[\exists c'(x) \in \mathbb{R}$, entonces pueden estrenar la atracción.

Planteamiento del Problema

Planteamiento del problema:

El problema se define de esta manera:
-Si $\exists k : \forall x \in]1,3[\exists c'(x) \in \mathbb{R}$, entonces pueden estrenar la atracción.
-Si $\nexists k : \forall x \in]1,3[\exists c'(x) \in \mathbb{R}$, entonces no pueden estrenar la atracción.

Desarrollo

Desarrollo:
Como ambas subfunciones a y b son derivables y continuas en sus tramos, basta con encontrar las condiciones sobre k para que la función c sea derivable en torno a $x = 2$. La intuición detrás de esto es que cada riel por separado es suave, sin embargo, hay que encontrar la forma de que al unirlos la estructura completa también sea suave.

Desarrollo

Desarrollo:

Como ambas subfunciones a y b son derivables y continuas en sus tramos, basta con encontrar las condiciones sobre k para que la función c sea derivable en torno a $x = 2$. La intuición detrás de esto es que cada riel por separado es suave, sin embargo, hay que encontrar la forma de que al unirlos la estructura completa también sea suave.

Derivando cada tramo en la vecindad de $x = 2$ tenemos que $c'(x) = \dfrac{2}{x}$ cuando $x \leq 2$ y $c'(x) = 0{,}5x$ cuando $x > 2$.

Desarrollo

Desarrollo:

Como ambas subfunciones a y b son derivables y continuas en sus tramos, basta con encontrar las condiciones sobre k para que la función c sea derivable en torno a $x = 2$. La intuición detrás de esto es que cada riel por separado es suave, sin embargo, hay que encontrar la forma de que al unirlos la estructura completa también sea suave.

Derivando cada tramo en la vecindad de $x = 2$ tenemos que $c'(x) = \frac{2}{x}$ cuando $x \leq 2$ y $c'(x) = 0{,}5x$ cuando $x > 2$.

Luego, notamos que para $x = 2$ efectivamente ambas derivadas son iguales (a 1).

Desarrollo

Desarrollo:

Como ambas subfunciones a y b son derivables y continuas en sus tramos, basta con encontrar las condiciones sobre k para que la función c sea derivable en torno a $x = 2$. La intuición detrás de esto es que cada riel por separado es suave, sin embargo, hay que encontrar la forma de que al unirlos la estructura completa también sea suave.

Derivando cada tramo en la vecindad de $x = 2$ tenemos que $c'(x) = \dfrac{2}{x}$ cuando $x \leq 2$ y $c'(x) = 0{,}5x$ cuando $x > 2$.

Luego, notamos que para $x = 2$ efectivamente ambas derivadas son iguales (a 1).

Por último, encontramos si existe o no algún valor de k tal que la función sea continua. Dado que los límites laterales para ambas funciones a y b existen, basta con igualar ambas funciones dado $x = 2$:

$$a(x=2) = b(x=2) \implies 2\ln 2 = 1 + k \implies \boxed{k = 2\ln 2 - 1}$$

Conclusión

Conclusión:
Por lo tanto, $\exists k : \forall x \in]1, 3[\exists c'(x) \in \mathbb{R}$, por lo que Javiera y Diego podrán estrenar la atracción CYD.

MEM155 - Métodos Matemáticos II

Mohit Karnani

Universidad de Chile

Otoño, 2016