MEM155 - Métodos Matemáticos II

Mohit Karnani

Universidad de Chile

Otoño, 2016

Curso

Control 1

Volver al Inicio

Módulo 2

▸ Volver al Inicio de la Sección

Definición de Incrementos

Definición 1

Sean x_1 y x_2 un primer y segundo valor de una variable x. Entonces el *incremento* de x es $\Delta x = x_2 - x_1$, esto es, el *cambio en el valor* de x.

Definición 2

Sea y una variable dependiente de x tal que $y = f(x)$, donde f está definida para los valores de x entre x_1 y x_2 y además se cumple que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Entonces el incremento de y es $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$, esto es, el cambio en el valor de $y = f(x)$.

Ejemplo: Cantidad Demandada

Ejemplo 1

Considere que la cantidad de cereal que demanda una familia a la semana depende del precio de venta de éste. Así, $q(p) = 1000p^{-1}$, donde q son los kilos de cereal demandados y p es el precio en pesos. Si el precio de venta pasa de 500 a 1000 pesos, ¿cuál es el incremento en la demanda?

Solución 1

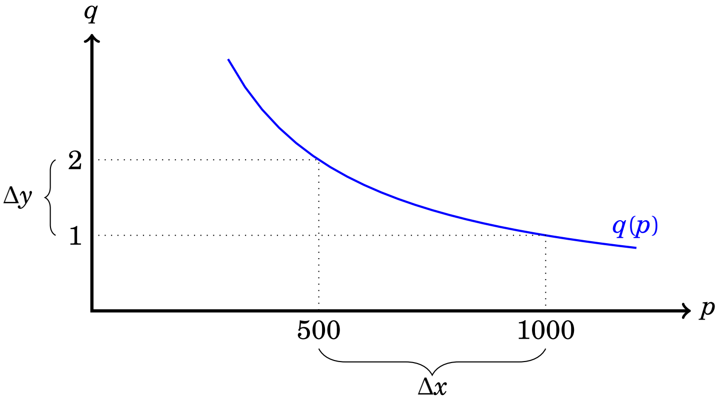
Utilizando la Definición 2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta q &= q_2 - q_1 \\
&= 1000p_2^{-1} - 1000p_1^{-1} \\
&= 1000 \cdot 1000^{-1} - 1000 \cdot 500^{-1} \\
&= 1 - 2 = -1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento en la cantidad demandada es de -1 (se demanda un kilo menos).

Gráfico: Cantidad Demandada

Figura 1: Incremento en precio y cantidad demandada



Reordenando Términos

Notar que de la Definición 1 se desprende que $x_2 = x_1 + \Delta x$. Reemplazando esto en la Definición 2 y considerando que x_1 puede ser cualquier valor de x se obtiene

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1}$$

La ecuación (1) puede ser útil para determinar el cambio en una variable dependiente y cuando la variable independiente x sufre un incremento de Δx, estando inicialmente en una situación descrita por el par (x, y).

Propuesto 1

Considere la función $y = f(x) = x^3$. Determine Δy dado cualquier x inicial y cualquier incremento Δx.

Tasa de Cambio Promedio

Definición 3

La tasa (o razón) de cambio promedio de una función $y = f(x)$ definida en el intervalo $[x, x+\Delta x]$ corresponde al incremento generado en y sobre el incremento en x, es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2}$$

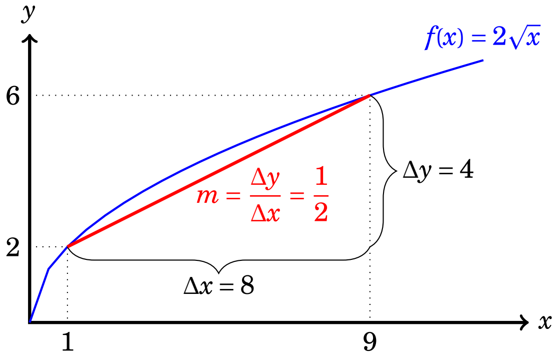
Esto equivale a *cuánto cambia en promedio la función* por cada una de las Δx unidades incrementadas. Esta tasa también es llamada cociente de la diferencia.

Notar que la ecuación (2) corresponde a la *pendiente de una recta* que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$, o bien, por los puntos (x, y) y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x,y) y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Tasa de una Función Cuadrática

Ejemplo 2

Obtenga la tasa de cambio promedio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Solución 2

Utilizando la Definición 3 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.\end{aligned}$$

Notar que este resultado puede ser muy útil para dibujar funciones cuadráticas a mano alzada (de manera bastante precisa). (*Why?*)

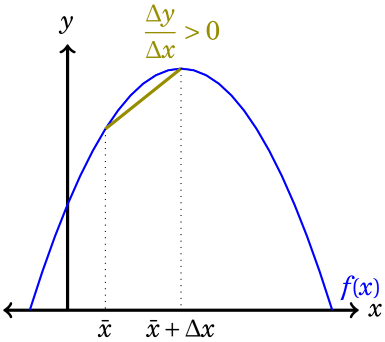
Propuesto 2

La recta secante que representa la tasa de cambio anterior es $y = x + 2$. Determine el intervalo sobre el que se obtuvo la tasa.

Análisis Marginal Discreto

Por ahora no hemos impuesto restricciones sobre la magnitud (el tamaño) de Δx. Sin embargo, es interesante notar qué ocurre cuando esta magnitud es *arbitrariamente pequeña* (marginal). Por ejemplo, si una función es creciente en un intervalo, es de esperar que su tasa de cambio promedio sea positiva en él.

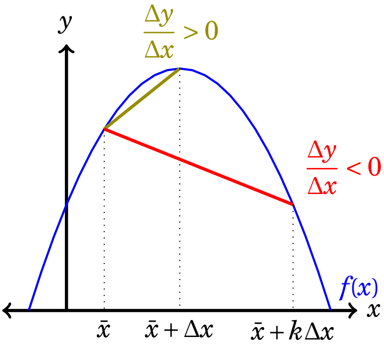
Figura 3: Tasa de cambio en un intervalo



Análisis Marginal Discreto (cont.)

Sin embargo, si ampliamos Δx de modo que el intervalo no sea siempre creciente, la conclusión sobre el signo de la tasa de cambio promedio *no se mantiene necesariamente*.

Figura 4: Tasa de cambio en un intervalo



Acercamientos Arbitrarios

A pesar de que al rededor de $\bar{x}$ la función $f(x)$ es creciente, se necesita un Δx *pequeño* para poder capturar esto en la tasa de cambio promedio.

Ejemplo 3

Suponga que $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ y que $\bar{x} = 1$. Obtenga las tasas de cambio promedio para $\Delta x \in \{2; 1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}0001\}$.

Solución 3

La tasa de cambio es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2x\Delta x - \Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = -2x - \Delta x + 6$.
Evaluando los distintos valores de Δx con $x = \bar{x} = 1$ tenemos:

Cuadro 1: Tasa de cambio ante intervalos menores

Δx	2	1	0,5	0,1	0,01	0,0001
Tasa	2	3	3,5	3,9	3,99	3,9999

Así, vemos que la tasa de cambio promedio *tiende* a 4...

Módulo 3

▸ Volver al Inicio de la Sección

Tender a Algo

Definición 4

Una variable x *tiende* a un valor k cuando x *toma una sucesión de valores que se acercan de manera arbitraria a dicho valor*, sin que x tome el valor k. Cuando x se aproxima de esta manera a k, entonces podemos denotar la situación por $x \to k$ (x *tiende a* k).

Definición 5

Si la (sub)sucesión de valores que toma x es mayor que el valor k, entonces diremos que x *tiende por la derecha* a k, y lo denotamos por $x \to k^+$. Si los valores están por debajo, diremos que x *tiende por la izquierda* a k y lo denotamos por $x \to k^-$.

Comentario: De manera similar, cuando una variable x tiende a un valor k, puede hacer que una función $f(x)$ tienda a algún valor L. Una primera (y apresurada) intuición nos diría que si $x \to k$, entonces $f(x) \to f(k) = L$. **¡Esto no es necesariamente cierto!**

Ejemplos de Sucesiones

Ejemplo 4

Suponga que x, y y z son tres variables que toman las siguientes sucesiones de valores $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1,$$

$$y_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} + 1 \text{ y}$$

$$z_n = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} + 1.$$

Dado lo anterior, $x_n \to 1$, $y_n \to 1^+$ y $z_n \to 1^-$. Comente.

Solución 4

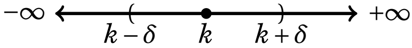
Verdadero. A medida que aumenta n, x_n se acerca arbitrariamente a 1, al igual que y_n y z_n. Sin embargo, la primera sucesión toma valores tanto por sobre como por debajo de 1, mientras que las últimas dos, que son subsucesiones de la primera, toman valores sólo por sobre 1 o sólo por debajo de 1, respectivamente.

Definición de Vecindad

Definición 6

Una vecindad o entorno de un punto $k \in \mathbb{R}$ es un intervalo en torno a k con semiamplitud δ, o bien, es el intervalo $(k-\delta, k+\delta)$, con $\delta > 0$. Así, cualquier x *suficientemente cerca* de k está en su vecindad si $|x-k| < \delta$[1].

Figura 5: Vecindad de k



Notar que, bajo la Definición 6, para que $x \to k$, es necesario que x tome valores en la vecindad de k para cualquier $\delta > 0$ (por pequeño que sea). Dicho de otro modo, si $x \to k$, entonces $|x_n - k| < \delta$ para una cantidad infinita de valores de n.

[1]Se habla de la vecindad o entorno reducido de k a la vecindad que no incorpora al elemento k, es decir, a todos los $x \neq k$ tal que $|x-k| < \delta$.

Definición de Límite

Definición 7

(*Épsilon-Delta*) Sea $f(x)$ una función definida para todos los x en la vecindad de k, excepto posiblemente k (esto es, en la vecindad reducida). El límite de $f(x)$ cuando $x \to k$ es L si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - k| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

esto es, si la distancia entre $f(x)$ y L se puede hacer tan pequeña como se desee dejando a x suficientemente cerca de k.
Esto se denota

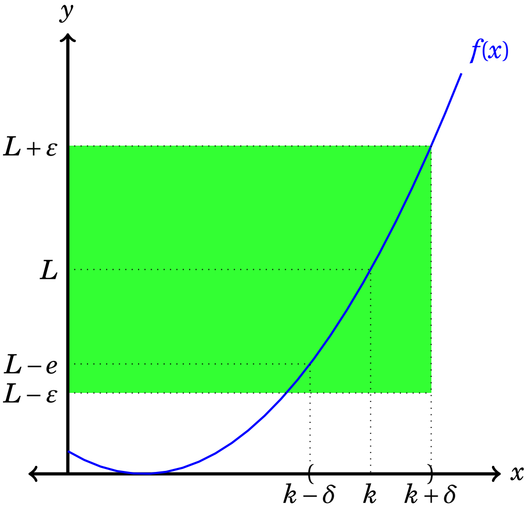
$$\lim_{x \to k} f(x) = L,$$

o bien

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to k.$$

Gráfico: Definición de Límite

Figura 6: Intuición Gráfica de la Definición Épsilon-Delta



Ejemplo: Límite por Definición

Ejemplo 5

Demuestre que el límite de $f(x) = 3x + 5$ cuando $x \to 1$ es 8.

Solución 5

Si $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$, entonces, por la Definición 7 se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \implies |3x + 5 - 8| < \varepsilon.$$

Luego, basta encontrar un δ que satisfaga la Definición 7 ante cualquier ε (en efecto, δ será función de ε).
Notamos que $|3x + 5 - 8| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon$.
Pero lo anterior equivale a indicar que $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Es decir, ante cualquier ε, podemos definir un $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ tal que se cumpla la definición para el límite indicado. $\square$

Propuesto 3

Demuestre que el límite de $f(x) = x^2$ cuando $x \to 5$ es 25.

Existencia de un Límite

Definición 8

El límite de $f(x)$ cuando $x \to k$ es L si y sólo si los límites por la derecha y por la izquierda (con $x \to k^+$ y $x \to k^-$, respectivamente) son ambos iguales a L[2].En símbolos:

$$\lim_{x\to k} f(x) = L \iff \lim_{x\to^+ k} f(x) = \lim_{x\to k^-} f(x) = L.$$

Lo anterior se cumple para todo polinomio y el límite corresponde a la función evaluada en $x = k$. Sin embargo, hay casos donde no se cumple...

---

[2]Esta definición aplica sólo cuando es posible obtener los límites laterales, es decir, cuando se trabaja sobre el dominio de la función. Un ejemplo donde no aplica esta definición es $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$: si bien el límite por la derecha es 0, el límite por la izquierda no existe (x no puede ser negativo). A pesar de lo anterior, el límite es 0, pues sólo se considera el límite definido en el dominio de la función, es decir, el límite por la derecha.

Encontrar un Límite por Reemplazo

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Encuentre $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Solución 6

En este caso, no se puede evaluar directamente en $x = 2$, pues tendríamos algo de la forma $f(2) = 0/0$. Sin embargo, en este tipo de situaciones se puede realizar una simplificación conveniente:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 2.$$

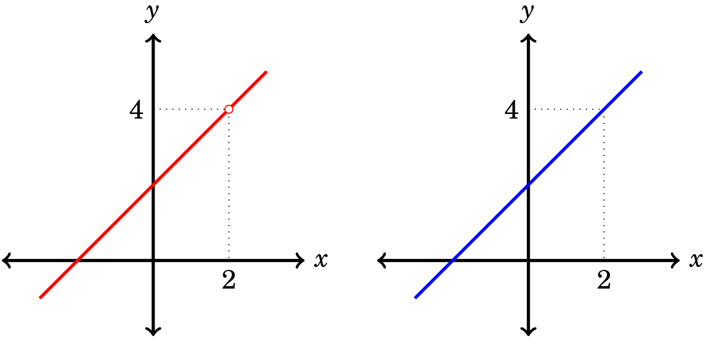
Esta última simplificación se puede hacer porque, como bien dice la Definición 4, x no toma el valor 2 y por ende $x - 2 \neq 0$. Como este término es no nulo, es *legal* simplificar.
Por último, como $x + 2$ es un polinomio de primer grado, su límite existe y corresponde a dicha función evaluada en $x = 2$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 4$.

Sobre las Funciones Simplificables

¿Es cierto que las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x+2$ son equivalentes? **¡NO!**
Las funciones tienen dominios diferentes, pues Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$, mientras que Dom $g(x) = \mathbb{R}$. Luego, $\nexists f(2)$, a pesar de que $g(2) = 4$.

Figura 7: Gráficos de $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x+2$



(a) $f(x)$ (b) $g(x)$

Ejemplo: Límite que No Existe

Ejemplo 7

Encuentre, caso exista, el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. En caso de que no exista, justifique su respuesta.

Solución 7

Tal como en el Ejemplo 6, en este caso no podemos evaluar directamente la función en $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, en esta ocasión tampoco es trivial simplificar la expresión, pues el valor del numerador va a depender de si x es negativo o no negativo.

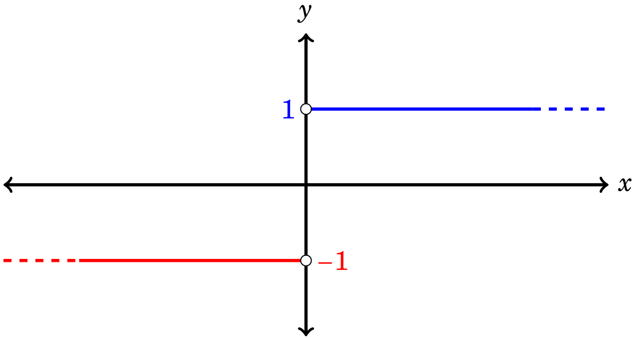
Recordar que el valor absoluto se define como $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

En efecto, el límite por la izquierda es $\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, mientras que por la derecha es $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$.

Como los límites laterales son distintos, el límite no existe.

Gráfico: Límite que No Existe

Figura 9: Gráfico de $y = \frac{|x|}{x}$



Módulo 4

▸ Volver al Inicio de la Sección

Propiedades de los Límites

Proposición 1

Sea c una constante cualquiera. Entonces, el límite de dicha constante cuando x tiende a k es la misma constante:

$$\lim_{x \to k} c = c.$$

Proposición 2

Sea b una constante cualquiera y $f(x)$ una función cuyo límite existe cuando $x \to k$. Entonces, el límite de dicha función ponderada por b cuando x tiende a k es b por el límite de la función:

$$\lim_{x \to k} bf(x) = b \lim_{x \to k} f(x).$$

Propiedades de los Límites (cont.)

Proposición 3

Sea n un entero positivo. Entonces, el límite de x elevado a n cuando x tiende a k es k elevado a n:

$$\lim_{x \to k} x^n = k^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 4

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite de la suma (o resta) de ambas funciones cuando x tiende a k es la suma (o resta) de los límites individuales de las funciones:

$$\lim_{x \to k} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to k} f(x) \pm \lim_{x \to k} g(x).$$

Propuesto 4

Utilizando las Proposiciones 1, 2, 3 y 4, demuestre que el límite de cualquier polinomio $P(x)$ cuando $x \to k$ equivale a $P(k)$.

Propiedades de los Límites (cont.')

Proposición 5

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite del producto de ambas funciones cuando x tiende a k es el producto de los límites individuales de las funciones:

$$\lim_{x \to k} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to k} f(x) \cdot \lim_{x \to k} g(x).$$

Proposición 6

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite del cociente de ambas funciones cuando x tiende a k es el cociente de los límites individuales de las funciones, siempre y cuando el límite del denominador sea distinto de 0:

$$\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to k} f(x)}{\lim_{x \to k} g(x)}, \qquad si \ \lim_{x \to k} g(x) \neq 0.$$

Propiedades de los Límites (cont.")

Proposición 7

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite de una función elevada a la otra cuando x tiende a k es el límite de la primera elevado al límite de la segunda, siempre y cuando la base sea positiva:

$$\lim_{x \to k} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to k} f(x)^{\lim_{x \to k} g(x)}, \qquad si\ f(x) > 0.$$

Notar que de lo anterior se obtiene $\lim_{x \to k} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to k} f(x)} \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposición 8

Sea a una constante positiva y $f(x)$ una función cuyo límite existe cuando $x \to k$. Entonces, el límite del logaritmo con base a de la función cuando x tiende a k es el logaritmo con base a del límite de la función, siempre y cuando la función sea positiva:

$$\lim_{x \to k} \log_a f(x) = \log_a \lim_{x \to k} f(x), \qquad si\ f(x) > 0.$$

Ejemplo

Ejemplo 8

Obtenga el límite de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ cuando $x \to 0$.

Solución 8

En efecto, no podemos evaluar directamente $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, podemos utilizar un *1 conveniente*...

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos simplemente evaluar en $x = 0$ para obtener como resultado $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

Más Ejemplos

Ejemplo 9

Obtenga $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{3}}{x}$.

Solución 9

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{3-x-3}{3(x+3)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3(x+3)} = -\frac{1}{9}.$$

Ejemplo 10

Sea $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x < 2 \\ ax+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. ¿Qué relación deben satisfacer a y b para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

Solución 10

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \iff 4a = 2a + b \iff a = \frac{b}{2}.$$

Módulo 5

▸ Volver al Inicio de la Sección

Cambio de Variable

En la Definición 7 vimos que $\lim_{x\to k} f(x) = L$ es lo mismo que $f(x) \to L$ cuando $x \to k$.
Ahora bien, podríamos considerar a $f(x)$ como una variable de la cual depende la función g.
Luego, podemos plantear la posible existencia de $\lim_{f(x)\to L} g\left(f(x)\right) = M$,
o bien, $g\left(f(x)\right) \to M$ cuando $f(x) \to L$.
Combinando las ideas anteriores tenemos

$$[x \to k \implies f(x) \to L] \wedge [f(x) \to L \implies g\left(f(x)\right) \to M] \implies [x \to k \implies g\left(f(x)\right) \to M].$$

Ejemplo 11

Obtenga $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} + 2{,}5} - \dfrac{1}{3} \right) \div \left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} - 0{,}5 \right)$.

Solución 11

Usando las Soluciones 8 y 9 tenemos que el límite es $-\dfrac{1}{9}$.

Número e como Límite

Proposición 9

El número $e \approx 2{,}718281828459\ldots$ (número de Euler o constante de Napier) se puede definir de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \left(=^{3} \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \right)$$

A este límite, junto con los de las Proposiciones 10 y 11, los llamaremos *límites especiales*[4].

Propuesto 5

Verifique esto evaluando la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ para valores de x arbitrariamente cercanos a 0.

---

[3] Próximamente le daremos énfasis a los límites cuando x tiende al infinito.

[4] Hay otros límites especiales que no abarcaremos en este curso.

Límites Especiales

Proposición 10

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Demostración.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$\square$

Límites Especiales (cont.)

Proposición 11

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$$

Demostración.

Sea $\exp(x)-1=y$*, de modo que* $x\to 0 \implies y\to 0$. *A partir de esto podemos despejar* $x=\ln(1+y)$. *Por lo tanto, utilizando el cambio de variable, el límite es equivalente a*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1.$$

$\square$

Ejercicios: Límites Especiales

Propuesto 6

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Hint: Proceda de manera análoga a la demostración de la Proposición 11.

Propuesto 7

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \exp(a).$$

Hint: Utilice un 1 conveniente en el exponente y luego aplique la Proposición 9.

Ejercicios: Límites Especiales (cont.)

Propuesto 8

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a.$$

Hint: Proceda de manera análoga a la demostración de la Proposición 10 y utilice el resultado del Propuesto 7.

Propuesto 9

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

Hint: Utilice un 1 conveniente en el exponente y aplique la Proposición 9. Luego, utilice otro 1 conveniente sobre su resultado para finalmente aplicar la Proposición 11 con un cambio de variable.

Control 2

Volver al Inicio

Control 3

▸ Volver al Inicio

Control 4

Volver al Inicio

Examen

Volver al Inicio

MEM155 - Métodos Matemáticos II

Mohit Karnani

Universidad de Chile

Otoño, 2016