MEM155 - Métodos Matemáticos II

Mohit Karnani

Universidad de Chile

Otoño, 2016

Curso

Unidad 1

Volver al Inicio

Módulo 2

▸ Volver al Inicio de la Sección

Definición de Incrementos

Definición 1

Sean x_1 y x_2 un primer y segundo valor de una variable x. Entonces el *incremento* de x es $\Delta x = x_2 - x_1$, esto es, el *cambio en el valor* de x.

Definición 2

Sea y una variable dependiente de x tal que $y = f(x)$, donde f está definida para los valores de x entre x_1 y x_2 y además se cumple que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Entonces el incremento de y es
$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$, esto es, el cambio en el valor de $y = f(x)$.

Ejemplo: Cantidad Demandada

Ejemplo 1

Considere que la cantidad de cereal que demanda una familia a la semana depende del precio de venta de éste. Así, $q(p) = 1000p^{-1}$, donde q son los kilos de cereal demandados y p es el precio en pesos. Si el precio de venta pasa de 500 a 1000 pesos, ¿cuál es el incremento en la demanda?

Solución 1

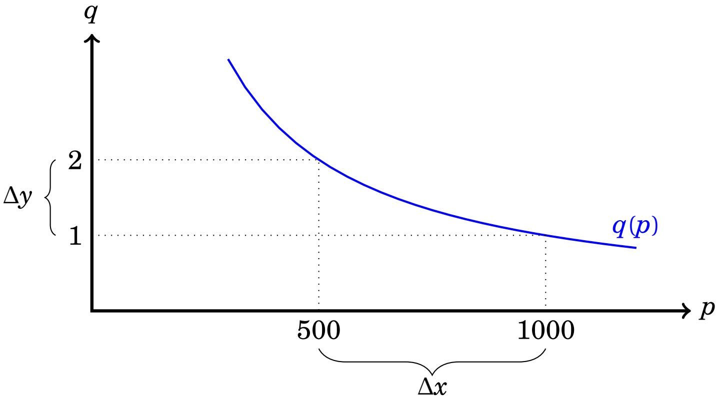
Utilizando la Definición 2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta q &= q_2 - q_1 \\
&= 1000p_2^{-1} - 1000p_1^{-1} \\
&= 1000 \cdot 1000^{-1} - 1000 \cdot 500^{-1} \\
&= 1 - 2 = -1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento en la cantidad demandada es de -1 (se demanda un kilo menos).

Gráfico: Cantidad Demandada

Figura 1: Incremento en precio y cantidad demandada



Reordenando Términos

Notar que de la Definición 1 se desprende que $x_2 = x_1 + \Delta x$. Reemplazando esto en la Definición 2 y considerando que x_1 puede ser cualquier valor de x se obtiene

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1}$$

La ecuación (1) puede ser útil para determinar el cambio en una variable dependiente y cuando la variable independiente x sufre un incremento de Δx, estando inicialmente en una situación descrita por el par (x, y).

Propuesto 1

Considere la función $y = f(x) = x^3$. Determine Δy dado cualquier x inicial y cualquier incremento Δx.

Tasa de Cambio Promedio

Definición 3

La tasa (o razón) de cambio promedio de una función $y = f(x)$ definida en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ corresponde al incremento generado en y sobre el incremento en x, es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2}$$

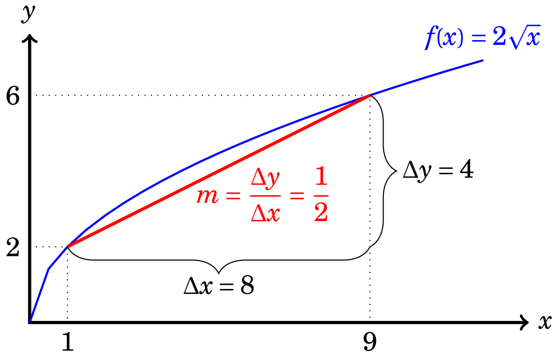
Esto equivale a *cuánto cambia en promedio la función* por cada una de las Δx unidades incrementadas. Esta tasa también es llamada cociente de la diferencia.

Notar que la ecuación (2) corresponde a la *pendiente de una recta* que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, o bien, por los puntos (x, y) y $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x,y) y $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Tasa de una Función Cuadrática

Ejemplo 2

Obtenga la tasa de cambio promedio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Solución 2

Utilizando la Definición 3 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.\end{aligned}$$

Notar que este resultado puede ser muy útil para dibujar funciones cuadráticas a mano alzada (de manera bastante precisa). (*Why?*)

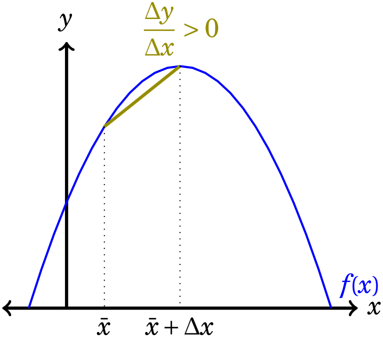
Propuesto 2

La recta secante que representa la tasa de cambio anterior es $y = x + 2$. Determine el intervalo sobre el que se obtuvo la tasa.

Análisis Marginal Discreto

Por ahora no hemos impuesto restricciones sobre la magnitud (el tamaño) de Δx. Sin embargo, es interesante notar qué ocurre cuando esta magnitud es *arbitrariamente pequeña* (marginal).
Por ejemplo, si una función es creciente en un intervalo, es de esperar que su tasa de cambio promedio sea positiva en él.

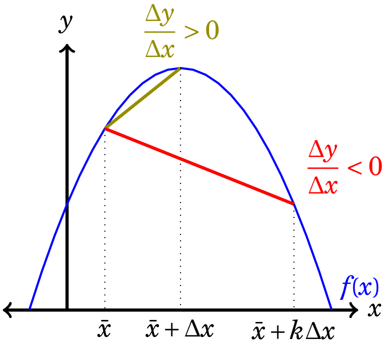
Figura 3: Tasa de cambio en un intervalo



Análisis Marginal Discreto (cont.)

Sin embargo, si ampliamos Δx de modo que el intervalo no sea siempre creciente, la conclusión sobre el signo de la tasa de cambio promedio *no se mantiene necesariamente*.

Figura 4: Tasa de cambio en otro intervalo



Acercamientos Arbitrarios

A pesar de que al rededor de $\bar{x}$ la función $f(x)$ es creciente, se necesita un Δx *pequeño* para poder capturar esto en la tasa de cambio promedio.

Ejemplo 3

Suponga que $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ y que $\bar{x} = 1$. Obtenga las tasas de cambio promedio para $\Delta x \in \{2; 1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}0001\}$.

Solución 3

La tasa de cambio es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2x\Delta x - \Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = -2x - \Delta x + 6$.
Evaluando los distintos valores de Δx con $x = \bar{x} = 1$ tenemos:

Tabla 1: Tasa de cambio ante intervalos menores

Δx	2	1	0,5	0,1	0,01	0,0001
Tasa	2	3	3,5	3,9	3,99	3,9999

Así, vemos que la tasa de cambio promedio *tiende* a 4...

Módulo 3

▸ Volver al Inicio de la Sección

Tender a Algo

Definición 4

Una variable x *tiende* a un valor k cuando x *toma una sucesión de valores que se acercan de manera arbitraria a dicho valor*, sin que x tome el valor k. Cuando x se aproxima de esta manera a k, entonces podemos denotar la situación por $x \to k$ (x *tiende a* k).

Definición 5

Si la (sub)sucesión de valores que toma x es mayor que el valor k, entonces diremos que x *tiende por la derecha* a k, y lo denotamos por $x \to k^+$. Si los valores están por debajo, diremos que x *tiende por la izquierda* a k y lo denotamos por $x \to k^-$.

COMENTARIO: De manera similar, cuando una variable x tiende a un valor k, puede hacer que una función $f(x)$ tienda a algún valor L. Una primera (y apresurada) intuición nos diría que si $x \to k$, entonces $f(x) \to f(k) = L$. **¡Esto no es necesariamente cierto!**

Ejemplos de Sucesiones

Ejemplo 4

Suponga que x,y y z son tres variables que toman las siguientes sucesiones de valores $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1,$$

$$y_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} + 1 \text{ y}$$

$$z_n = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} + 1.$$

Dado lo anterior, $x_n \to 1$, $y_n \to 1^+$ y $z_n \to 1^-$. Comente.

Solución 4

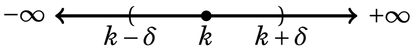
Verdadero. A medida que aumenta n, x_n se acerca arbitrariamente a 1, al igual que y_n y z_n. Sin embargo, la primera sucesión toma valores tanto por sobre como por debajo de 1, mientras que las últimas dos, que son subsucesiones de la primera, toman valores sólo por sobre 1 o sólo por debajo de 1, respectivamente.

Definición de Vecindad

Definición 6

Una vecindad o entorno de un punto $k \in \mathbb{R}$ es un intervalo en torno a k con semiamplitud δ, o bien, es el intervalo $(k-\delta, k+\delta)$, con $\delta > 0$. Así, cualquier x *suficientemente cerca* de k está en su vecindad si $|x-k| < \delta$[1].

Figura 5: Vecindad de k



Notar que, bajo la Definición 6, para que $x \to k$, es necesario que x tome valores en la vecindad de k para cualquier $\delta > 0$ (por pequeño que sea). Dicho de otro modo, si $x \to k$, entonces $|x_n - k| < \delta$ para una cantidad infinita de valores de n.

[1] Se habla de la vecindad o entorno reducido de k a la vecindad que no incorpora al elemento k, es decir, a todos los $x \neq k$ tal que $|x-k| < \delta$.

Definición de Límite

Definición 7

(*Épsilon-Delta*) Sea $f(x)$ una función definida para todos los x en la vecindad de k, excepto posiblemente k (esto es, en la vecindad reducida). El límite de $f(x)$ cuando $x \to k$ es L si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - k| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

esto es, si la distancia entre $f(x)$ y L se puede hacer tan pequeña como se desee dejando a x suficientemente cerca de k.
Esto se denota

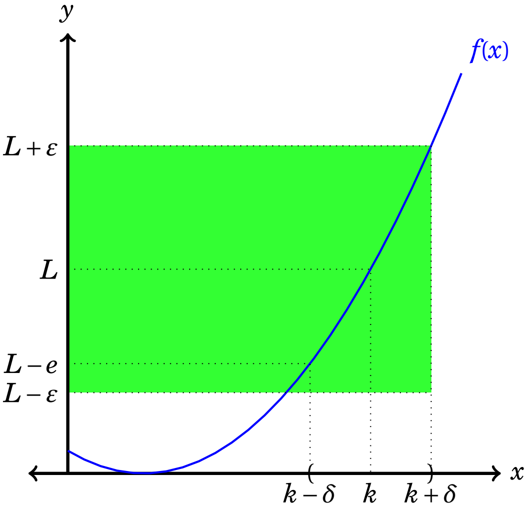
$$\lim_{x \to k} f(x) = L,$$

o bien

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to k.$$

Gráfico: Definición de Límite

Figura 6: Intuición Gráfica de la Definición Épsilon-Delta



Ejemplo: Límite por Definición

Ejemplo 5

Demuestre que el límite de $f(x) = 3x + 5$ cuando $x \to 1$ es 8.

Solución 5

Si $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$, entonces, por la Definición 7 se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \implies |3x + 5 - 8| < \varepsilon.$$

Luego, basta encontrar un δ que satisfaga la Definición 7 ante cualquier ε (en efecto, δ será función de ε).
Notamos que $|3x + 5 - 8| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon$.
Pero lo anterior equivale a indicar que $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Es decir, ante cualquier ε, podemos definir un $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ tal que se cumpla la definición para el límite indicado. $\square$

Propuesto 3

Demuestre que el límite de $f(x) = x^2$ cuando $x \to 5$ es 25.

Existencia de un Límite

Definición 8

El límite de $f(x)$ cuando $x \to k$ es L si y sólo si los límites por la derecha y por la izquierda (con $x \to k^+$ y $x \to k^-$, respectivamente) son ambos iguales a L[2].En símbolos:

$$\lim_{x \to k} f(x) = L \iff \lim_{x \to^+ k} f(x) = \lim_{x \to k^-} f(x) = L.$$

Lo anterior se cumple para todo polinomio y el límite corresponde a la función evaluada en $x = k$. Sin embargo, hay casos donde no se cumple...

---

[2]Esta definición aplica sólo cuando es posible obtener los límites laterales, es decir, cuando se trabaja sobre el dominio de la función. Un ejemplo donde no aplica esta definición es $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$: si bien el límite por la derecha es 0, el límite por la izquierda no existe (x no puede ser negativo). A pesar de lo anterior, el límite es 0, pues sólo se considera el límite definido en el dominio de la función, es decir, el límite por la derecha.

Encontrar un Límite por Reemplazo

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Encuentre $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Solución 6

En este caso, no se puede evaluar directamente en $x = 2$, pues tendríamos algo de la forma $f(2) = 0/0$. Sin embargo, en este tipo de situaciones se puede realizar una simplificación conveniente:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x + 2.$$

Esta última simplificación se puede hacer porque, como bien dice la Definición 4, x no toma el valor 2 y por ende $x - 2 \neq 0$. Como este término es no nulo, es *legal* simplificar.

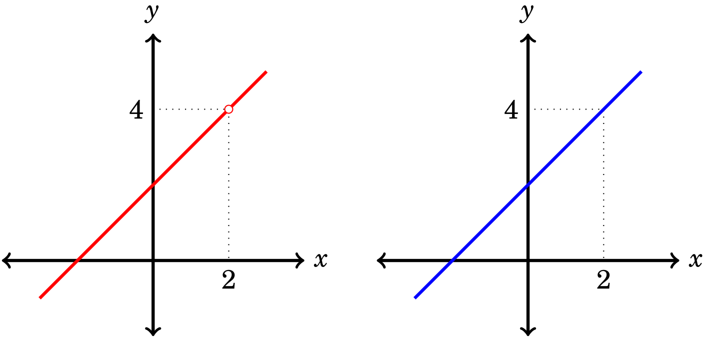
Por último, como $x + 2$ es un polinomio de primer grado, su límite existe y corresponde a dicha función evaluada en $x = 2$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 4$.

Sobre las Funciones Simplificables

¿Es cierto que las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x+2$ son equivalentes? **¡NO!**
Las funciones tienen dominios diferentes, pues Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$, mientras que Dom $g(x) = \mathbb{R}$. Luego, $\nexists f(2)$, a pesar de que $g(2) = 4$.

Figura 7: Gráficos de $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x+2$



(a) $f(x)$ (b) $g(x)$

Ejemplo: Límite que No Existe

Ejemplo 7

Encuentre, caso exista, el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$. En caso de que no exista, justifique su respuesta.

Solución 7

Tal como en el Ejemplo 6, en este caso no podemos evaluar directamente la función en $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, en esta ocasión tampoco es trivial simplificar la expresión, pues el valor del numerador va a depender de si x es negativo o no negativo.

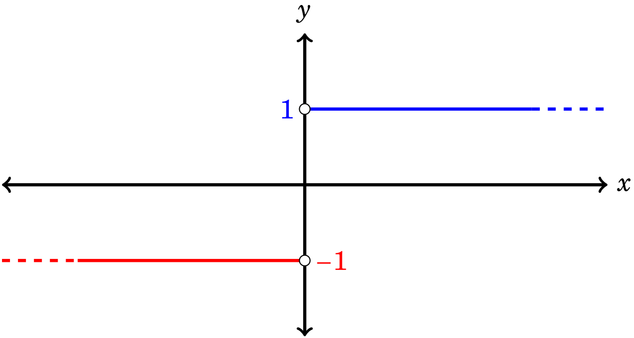
Recordar que el valor absoluto se define como $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

En efecto, el límite por la izquierda es $\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, mientras que por la derecha es $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$.

Como los límites laterales son distintos, el límite no existe.

Gráfico: Límite que No Existe

Figura 9: Gráfico de $y = \dfrac{|x|}{x}$



Módulo 4

▸ Volver al Inicio de la Sección

Propiedades de los Límites

Proposición 1

Sea c una constante cualquiera. Entonces, el límite de dicha constante cuando x tiende a k es la misma constante:

$$\lim_{x \to k} c = c.$$

Proposición 2

Sea b una constante cualquiera y $f(x)$ una función cuyo límite existe cuando $x \to k$. Entonces, el límite de dicha función ponderada por b cuando x tiende a k es b por el límite de la función:

$$\lim_{x \to k} bf(x) = b \lim_{x \to k} f(x).$$

Propiedades de los Límites (cont.)

Proposición 3

Sea n un entero positivo. Entonces, el límite de x elevado a n cuando x tiende a k es k elevado a n:

$$\lim_{x \to k} x^n = k^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 4

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite de la suma (o resta) de ambas funciones cuando x tiende a k es la suma (o resta) de los límites individuales de las funciones:

$$\lim_{x \to k} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to k} f(x) \pm \lim_{x \to k} g(x).$$

Propuesto 4

Utilizando las Proposiciones 1, 2, 3 y 4, demuestre que el límite de cualquier polinomio $P(x)$ cuando $x \to k$ equivale a $P(k)$.

Propiedades de los Límites (cont.')

Proposición 5

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite del producto de ambas funciones cuando x tiende a k es el producto de los límites individuales de las funciones:

$$\lim_{x\to k} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to k} f(x)\cdot \lim_{x\to k} g(x).$$

Proposición 6

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite del cociente de ambas funciones cuando x tiende a k es el cociente de los límites individuales de las funciones, siempre y cuando el límite del denominador sea distinto de 0:

$$\lim_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to k} f(x)}{\lim\limits_{x\to k} g(x)}, \qquad si \ \lim_{x\to k} g(x) \neq 0.$$

Propiedades de los Límites (cont.")

Proposición 7

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \to k$. Entonces, el límite de una función elevada a la otra cuando x tiende a k es el límite de la primera elevado al límite de la segunda, siempre y cuando la base sea positiva:

$$\lim_{x \to k} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to k} f(x)^{\lim\limits_{x \to k} g(x)}, \qquad si\ f(x) > 0.$$

Notar que de lo anterior se obtiene $\lim\limits_{x \to k} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to k} f(x)} \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposición 8

Sea a una constante positiva y $f(x)$ una función cuyo límite existe cuando $x \to k$. Entonces, el límite del logaritmo con base a de la función cuando x tiende a k es el logaritmo con base a del límite de la función, siempre y cuando la función sea positiva:

$$\lim_{x \to k} \log_a f(x) = \log_a \lim_{x \to k} f(x), \qquad si\ f(x) > 0.$$

Ejemplo

Ejemplo 8

Obtenga el límite de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ cuando $x \to 0$.

Solución 8

En efecto, no podemos evaluar directamente $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, podemos utilizar un *1 conveniente*...

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, podemos simplemente evaluar en $x = 0$ para obtener como resultado $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

Más Ejemplos

Ejemplo 9

Obtenga $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{3}}{x}$.

Solución 9

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{3-x-3}{3(x+3)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{3(x+3)} = -\frac{1}{9}.$$

Ejemplo 10

Sea $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x < 2 \\ ax+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. ¿Qué relación deben satisfacer a y b para que exista $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

Solución 10

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \iff 4a = 2a + b \iff a = \frac{b}{2}.$$

Módulo 5

▸ Volver al Inicio de la Sección

Cambio de Variable

En la Definición 7 vimos que $\lim\limits_{x \to k} f(x) = L$ es lo mismo que $f(x) \to L$ cuando $x \to k$.

Ahora bien, podríamos considerar a $f(x)$ como una variable de la cual depende la función g.

Luego, podemos plantear la posible existencia de $\lim\limits_{f(x) \to L} g\left(f(x)\right) = M$, o bien, $g\left(f(x)\right) \to M$ cuando $f(x) \to L$.

Combinando las ideas anteriores tenemos

$$[x \to k \implies f(x) \to L] \wedge [f(x) \to L \implies g\left(f(x)\right) \to M] \implies [x \to k \implies g\left(f(x)\right) \to M].$$

Ejemplo 11

Obtenga $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} + 2{,}5} - \dfrac{1}{3} \right) \div \left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} - 0{,}5 \right)$.

Solución 11

Usando las Soluciones 8 y 9 tenemos que el límite es $-\dfrac{1}{9}$.

Número e como Límite

Proposición 9

El número $e \approx 2{,}718281828459\ldots$ *(número de Euler o constante de Napier) se puede definir de la siguiente manera:*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \left(=^{3} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)$$

A este límite, junto con los de las Proposiciones 10 y 11, los llamaremos *límites especiales*[4].

Propuesto 5

Verifique esto evaluando la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ para valores de x arbitrariamente cercanos a 0.

[3] Próximamente le daremos énfasis a los límites cuando x tiende al infinito.

[4] Hay otros límites especiales que no abarcaremos en este curso.

Límites Especiales

Proposición 10

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Demostración.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$\square$

Límites Especiales (cont.)

Proposición 11

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$$

Demostración.

Sea $\exp(x)-1=y$, *de modo que* $x\to 0 \implies y\to 0$. *A partir de esto podemos despejar* $x=\ln(1+y)$. *Por lo tanto, utilizando el cambio de variable, el límite es equivalente a*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1.$$

$\square$

Ejercicios: Límites Especiales

Propuesto 6

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Hint: Proceda de manera análoga a la demostración de la Proposición 11.

Propuesto 7

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \exp(a).$$

Hint: Utilice un 1 conveniente en el exponente y luego aplique la Proposición 9.

Ejercicios: Límites Especiales (cont.)

Propuesto 8

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + ax)}{x} = a.$$

Hint: Proceda de manera análoga a la demostración de la Proposición 10 y utilice el resultado del Propuesto 7.

Propuesto 9

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a.$$

Hint: Utilice un 1 conveniente en el exponente y aplique la Proposición 9. Luego, utilice otro 1 conveniente sobre su resultado para finalmente aplicar la Proposición 11 con un cambio de variable.

Módulo 6

Volver al Inicio de la Sección

Límites al Infinito

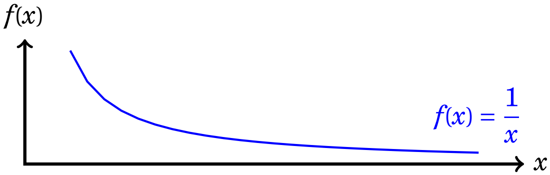
Hasta ahora hemos revisado cómo se comporta una función $f(x)$ a medida que x tiende a algún valor constante k.
Sin embargo, en ocasiones nos puede interesar qué ocurre con la función cuando x crece (o decrece) indeterminadamente, es decir, qué le pasa a $f(x)$ cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$).

Ejemplo 12

Grafique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Solución 12

Figura 10: Límite hacia el infinito



A medida que x se vuelve arbitrariamente grande, la función se acerca cada vez más a 0...

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

Límites al Infinito (cont.)

Al igual que en los casos anteriores, es importante notar que no nos interesa “evaluar x en infinito” (de hecho, esto es conceptualmente imposible), sino que queremos saber cómo se comporta la función cuando x “se aproxima” al infinito, ya sea positivo o negativo.

Ejemplo 13

Obtenga $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x+1}$.

Solución 13

Notamos que no tiene sentido hablar de “evaluar x en menos infinito”, pues tendríamos un resultado de la forma ∞/∞.
Sin embargo, podemos reescribir el límite como

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x/x}{x/x + 1/x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1 + 1/x},$$

donde esto lo podemos hacer porque “no evaluamos x en infinito”.
Por último, notamos que el segundo término en el denominador tiende a 0 (al igual que en el Ejemplo 12). $\therefore \lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x+1} = 2$.

Convergencia v.s. Divergencia

converger (Del lat. convergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas: Tender a unirse en un punto.
2. intr. Coincidir en la misma posición ante algo controvertido.
3. intr. Mat. Dicho de una sucesión: Aproximarse a un límite.
4. intr. Med. Confluir distintos impulsos sensoriales en una sola neurona, como en la actividad motora.

divergir (Del lat. divergĕre):

1. intr. Dicho de dos o más líneas o superficies: Irse apartando sucesivamente unas de otras.
2. intr. Discordar, discrepar.

Hasta ahora sólo hemos trabajado con límites convergentes, es decir, funciones que se acercan a un valor dado cuando la variable tiende a algún punto. Sin embargo, esto no tiene por qué ser siempre así...

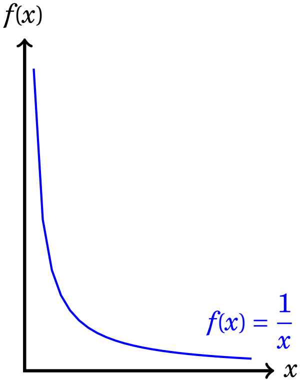
Límites Infinitos

Ejemplo 14

Similar al Ejemplo 12, grafique $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Solución 14

Figura 11: Límite infinito



En efecto, a medida que x se acerca a 0 por la derecha, el valor de $\dfrac{1}{x}$ se vuelve arbitrariamente grande, esto es, tiende a infinito positivo...

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}$$

En este caso se dice que $f(x)$ *diverge* cuando $x \to 0^+$.

Divergencia en el Infinito

Además de divergir cuando x tiende a algún valor particular, puede darse que una función diverja cuando x tienda a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 15

Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{5x^2 - 6x + 7}$. Obtenga $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Solución 15

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3/x^2 - 2x^2/x^2 + 3x/x^2 - 4/x^2}{5x^2/x^2 - 6x/x^2 + 7/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{5} = \infty$$

Propuesto 10

Grafique cualquier polinomio y observe qué ocurre cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Propuesto 11

Repita lo anterior con el logaritmo de cualquier polinomio positivo.

Propuesto 12

Ahora con la raíz de cualquier polinomio positivo.

Convergencia en el Infinito

Tal como vimos en el Ejemplo 12, pueden existir distintas funciones que convergen cuando x tiende a infinito positivo o negativo.

Ejemplo 16

En macroeconomía se habla de la idea de "convergencia en crecimiento" (crecimiento en el PIB), que básicamente indica que en el largo plazo, todos los países tienden a crecer a la misma tasa[5] (y la brecha entre sus productos será menor). Suponga que el crecimiento de cualquier economía depende de su nivel de producto Y de la forma $f(Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{Y}}$. ¿Por qué se justificaría esta hipótesis de convergencia en crecimiento?

Solución 16

Porque a medida que el nivel del producto crece, el crecimiento de este producto es cada vez menor. En el límite, un país con un PIB arbitrariamente grande simplemente no crecerá, de modo que los países más pequeños, que sí tienen crecimiento positivo, lo van a alcanzar, esto es, van a converger.

[5] Más adelante veremos cómo calcular estas tasas de crecimiento.

Cambio de Variable (cont.)

Utilizando límites infinitos y en el infinito se pueden hacer cambios de variables muy útiles.

En la Proposición 9, indicamos que $\lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$. Con un cambio de variable se puede obtener una versión alternativa de este límite...

Proposición 12

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Demostración.

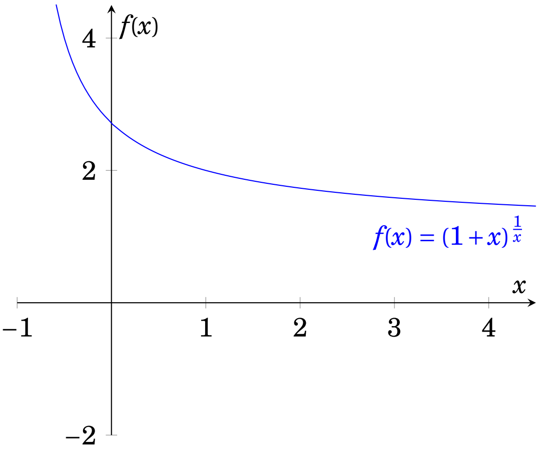
Sea $x = \dfrac{1}{y}$, *de modo que* $y \to 0^{+} \implies x \to \infty$. *Reemplazando esto en la Proposición 9 se obtiene* $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$. $\square$

Propuesto 13

Mostrar que lo anterior también se cumple cuando $x \to -\infty$.

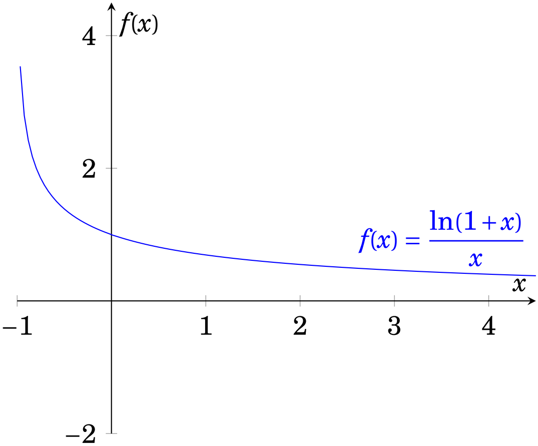
Gráficos: Límites Especiales

Figura 12: Proposición 9



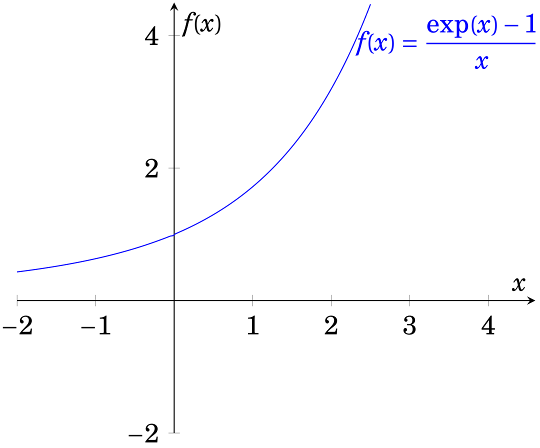
Gráficos: Límites Especiales

Figura 13: Proposición 10



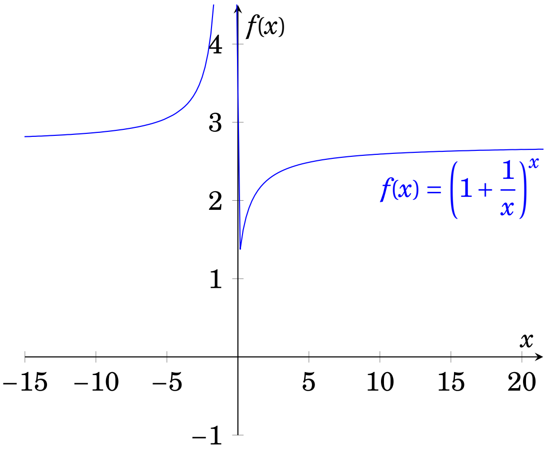
Gráficos: Límites Especiales

Figura 14: Proposición 11



Gráficos: Límites Especiales

Figura 15: Proposición 12



Aplicación: Interés Compuesto

Ejemplo 17

Suponga que se le ofrece un proyecto de inversión que paga una tasa anual igual a r. Se le permite capitalizar de manera compuesta esta inversión n veces (las que usted quiera), de modo que en cada uno de los n períodos se obtiene una rentabilidad de r/n. Uno podría pensar que al aumentar n indefinidamente se pueden obtener ganancias arbitrariamente grandes, pues el interés compuesto se capitalizaría de manera exponencial. Sin embargo, la institución que le ofrece esta inversión no está preocupada por que haga tender n a infinito. *¿Por qué?*

Solución 17

No le preocupa porque $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ converge...

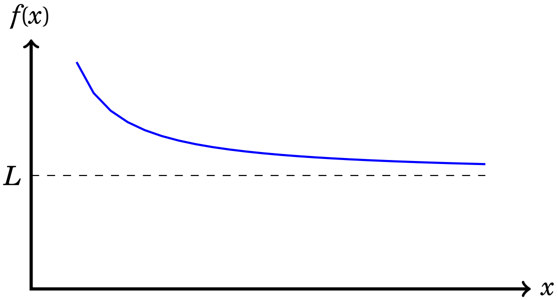
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/r}\right)^{rn/r} = e^r.$$

Asíntotas Horizontales

Definición 9

$y = L$ es una *asíntota horizontal* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o bien $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

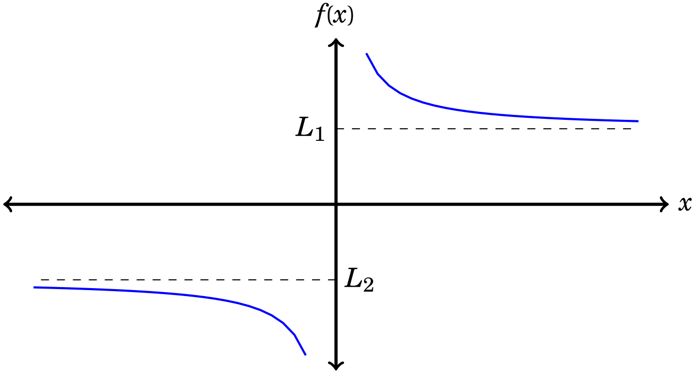
Figura 16: Asíntota horizontal



Asíntotas Horizontales (cont.)

Estas asíntotas horizontales pueden ser múltiples (dos):

Figura 17: Múltiples asíntotas horizontales



¿Por qué no pueden ser más de dos?

Ejemplo: Asíntotas Horizontales

Ejemplo 18

Obtenga las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Grafique.

Solución 18

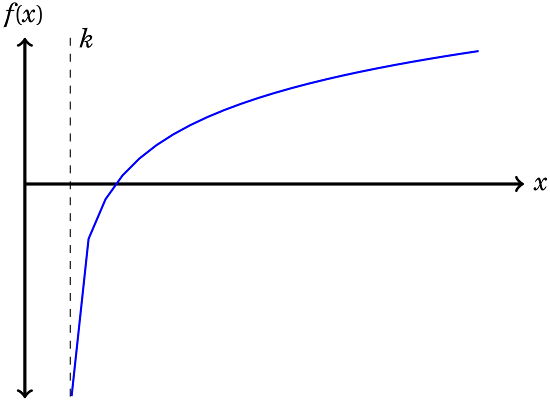
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (*¿por qué?*), por lo que las asíntotas son $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$. El gráfico es equivalente al de la Figura 17.

Asíntotas Verticales

Definición 10

$x = k$ es una *asíntota vertical* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x \to k} f(x) = \infty$ o bien $\lim_{x \to k} f(x) = -\infty$.

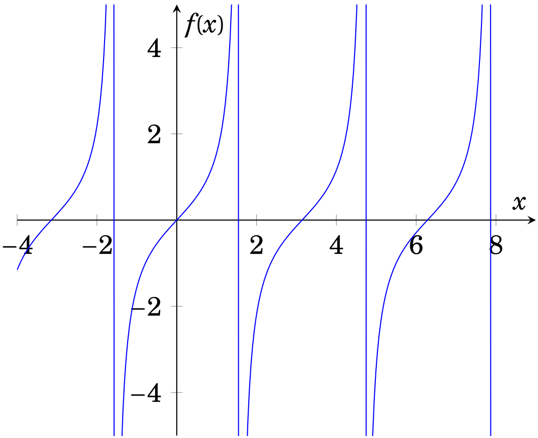
Figura 18: Asíntota vertical



Asíntotas Verticales (cont.)

Estas asíntotas verticales también pueden ser múltiples (dos o más):

Figura 19: Múltiples asíntotas verticales



Ejemplo: Asíntotas Verticales

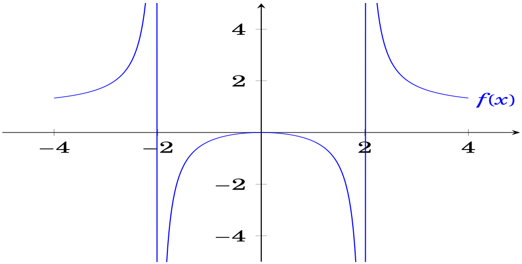
Ejemplo 19

Obtenga todas las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$. Grafique.

Solución 19

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, por lo que $y = 1$ es la única asíntota horizontal. Por último, la función diverge cuando $x \to 2$ y cuando $x \to -2$, por lo que $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$ son ambas asíntotas verticales.

Figura 20: Asíntotas verticales y horizontales

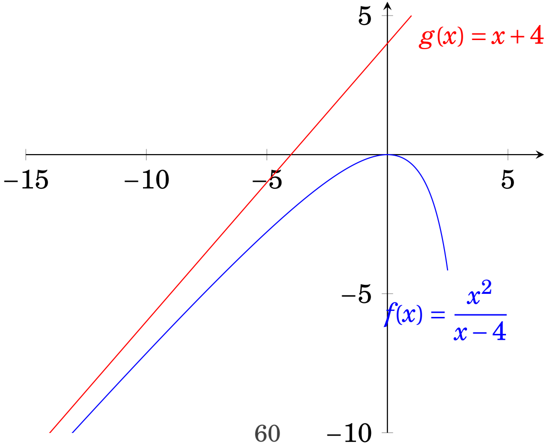


Asíntotas Oblicuas

Definición 11

$g(x) = mx + n$ es una *asíntota oblicua* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0$ o bien $\lim_{x\to-\infty} f(x) - g(x) = 0$.

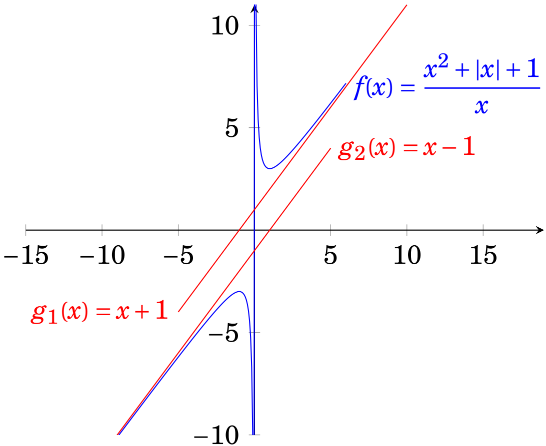
Figura 21: Asíntota oblicua



Asíntotas Oblicuas (cont.)

Estas asíntotas oblicuas pueden ser múltiples (dos):

Figura 22: Múltiples asíntotas oblicuas



¿Por qué no pueden ser más de dos?

Álgebra: Asíntotas Oblicuas

En base a la Definición 11, sabemos que se debe cumplir que si $g(x)$ es la asíntota oblicua de $f(x)$, entonces $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Luego, si la asíntota existe, se cumple que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} = 0$.

Pero sabemos que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{mx+n}{x} = m$.

Por lo tanto, $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m}$, siempre que la asíntota exista.

Finalmente, tras computar m sabemos que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - (mx+n) = 0$

$\iff \boxed{n = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - mx}$.

Con m y n computados podemos determinar $g(x)$.

Ejemplo: Asíntotas Oblicuas

Ejemplo 20

Obtenga la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x + 2x^2}{x}$.

Solución 20

Sea $g(x) = mx + n$ la asíntota oblicua.

Notamos que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, de modo que $m = 2$.

Por último, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 0$, por lo que $n = 0$.

Así, $g(x) = 2x$ es la asíntota oblicua.

Módulo 7

▸ Volver al Inicio de la Sección

Sin Levantar el Lápiz

Anteriormente comentamos la existencia de funciones que "se pueden dibujar sin levantar el lápiz".
Una de las ventajas de estas funciones es que el cálculo de cualquier límite en su dominio se podía obtener simplemente reemplazando el argumento de la función por el valor hacia el cual tiende la variable independiente en el límite que se desea calcular.
Dicho de otro modo, en estas funciones se cumple que

$$\lim_{x \to k} f(x) = f(k).$$

Definición de Continuidad

Definición 12

Una función $f(x)$ se dice *continua* en $x = k$ si se cumple que $k \in \operatorname{Dom} f$ (i.e. la función está definida en k) y además

$$\lim_{x \to k} f(x) = f(k).$$

Definición 13

Una función $f(x)$ se dice continua en el intervalo $[a, b]$ si es continua en cualquier $k \in [a, b]$.

Las funciones continuas son justamente aquellas que "se pueden dibujar sin levantar el lápiz", esto es, son funciones que no tienen "hoyos" ni "saltos".
Otra forma de interpretarlas es como funciones en las cuales *pequeños cambios en el argumento generan pequeños cambios en el valor de la función*.
Una función que no cumple esto se dice *discontinua*.

Gráfico: Continuidad

Figura 23: Funciones Continuas en $\mathbb{R}$

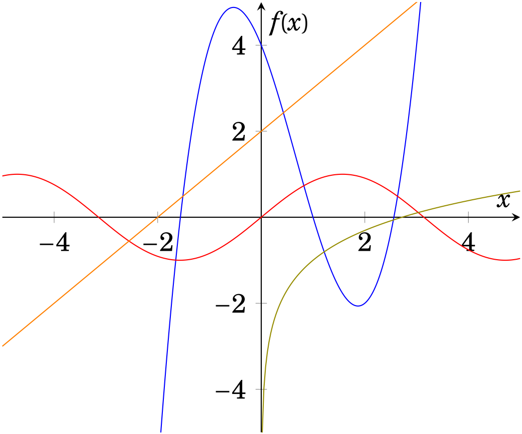
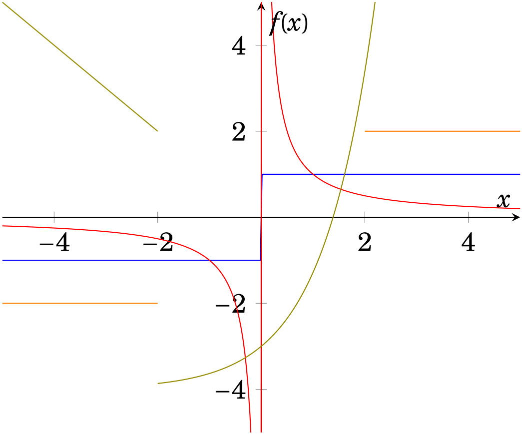


Gráfico: Discontinuidad

Figura 24: Funciones Discontinuas en $\mathbb{R}$



Propiedades de Funciones Continuas

Proposición 13

La suma o resta de dos funciones continuas es también una función continua. Esto es, si f y g son continuas, entonces $f \pm g$ también es continua.

Proposición 14

El producto de dos funciones continuas es también una función continua. Esto es, si f y g son continuas, entonces $f \cdot g$ también es continua.

Proposición 15

El cociente entre dos funciones continuas es también una función continua si la función divisora es no nula. Esto es, si f y g son continuas, entonces $\dfrac{f}{g}$ también es continua si $g \neq 0$.

Funciones Continuas

Hay funciones "típicas" que son contínuas en su dominio.

- Constantes: $f(x) = c$.
- Polinomios: $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.
- Raíces: $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
- Logaritmos: $f(x) = \log_a x$.
- Exponenciales: $f(x) = a^x$.

Juntando esto con la Proposición 16 podemos determinar fácilmente cómo son la mayoría de las funciones continuas:

Proposición 16

Sean $f : X \mapsto Y$ y $g : Y \mapsto Z$ dos funciones continuas. Entonces $g \circ f$ también es una función continua. Esto es, la composición de funciones continuas también es una función continua ***siempre y cuando los dominios y codominios sean compatibles***.

Ejemplo: Composición de Continuas

Ejemplo 21

Sea $f(x)$ un polinomio y sea $g(x) = \ln x$ una función logarítmica. Entonces $f(g(x))$ es continua en el dominio de g, pero $g(f(x))$ no es continua en el dominio de f. Comente.

Solución 21

Incierto. En efecto, tanto f como g son funciones continuas en sus dominios, donde el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el de g es $\mathbb{R}_{++}$. La primera afirmación del comente es verdadera, pues como g toma valores en los reales, siempre se puede componer g en f y obtener una función continua por la Proposición 16. Sin embargo, la segunda afirmación se cumple si y sólo si el recorrido de f no es siempre positivo. En caso de que el recorrido de f sea siempre positivo (e.g. $f(x) = x^2 + x + 1$) no se cumple la afirmación, pues $g(f(x))$ sí sería continua en el dominio de f.

Gráfico: Composición de Continuas

Figura 25: Composición Compatible de Funciones Continuas

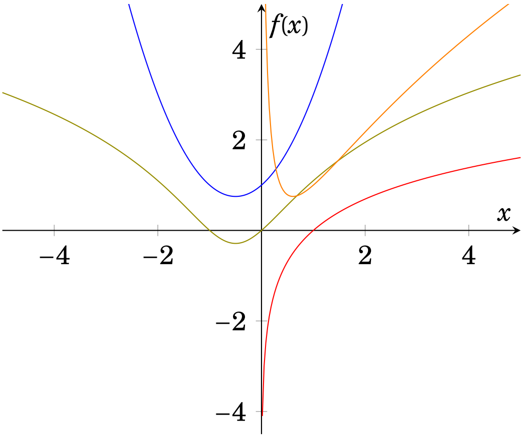
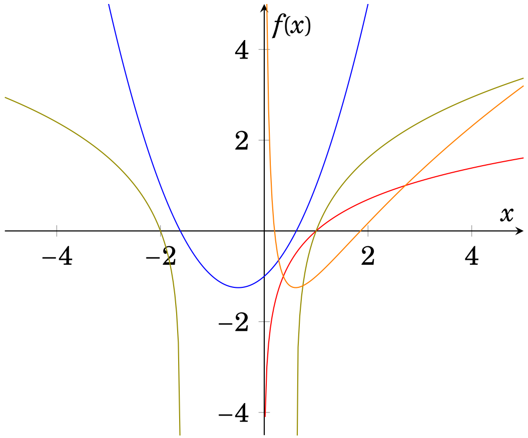


Gráfico: Composición de Continuas

Figura 26: Composición Incompatible de Funciones Continuas



Violaciones de Continuidad

En el Ejemplo 14 vimos que si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y comentamos que $f(x)$ no estaba definida en $x = 0$. Luego, $f(x)$ de ninguna manera puede ser continua en $x = 0$, pues sus límites laterales son distintos (i.e. $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$).

Sin embargo, pueden existir funciones que tengan un límite bien definido en un punto y aun así no sean continuas.

Este es el caso del Ejemplo 6, donde $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$. Sin embargo, $x = 2$ no es parte del dominio de la función. Por lo tanto, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ no es continua en $x = 2$. Esto también se aprecia en la Figura 7.

Aplicación: Costos de Ajuste

Ejemplo 22

Una firma tiene un stock de capital K_t en el periodo t. Si desea alcanzar un stock K_{t+1} en el periodo $t+1$, entonces debe invertir $I_t = K_{t+1} - K_t$. Sin embargo, si $K_{t+1} \neq K_t$, esto es, si $I_t \neq 0$, entonces debe pagar un costo fijo de ajuste de c unidades monetarias (por ejemplo, porque tiene que pagar un costo de transporte). Si $I_t = 0$, entonces el costo de ajustarse es cero. ¿Es la función de costos de ajuste continua en todo su dominio?

Solución 22

No lo es. Sea $f(I_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } I_t = 0 \\ c & \text{si } I_t \neq 0 \end{cases}$ la función de costos de ajuste. A pesar de que $\lim_{I_t \to 0} f(I_t) = c$, $f(0) = 0 \neq c$, por lo que la función no es continua en $I_t = 0$.

Aplicación: Impuestos Continuos

Propuesto 14

Para calcular el Impuesto Global Complementario, se toma la renta anual (3) de cada individuo en UTA (unidades tributarias anuales), se pondera por el factor (4) que corresponde según su tramo de ingreso (2) y luego se rebaja (resta) el monto correspondiente (5). En la Tabla 2 (extraído del SII) se muestra la escala, donde falta el factor que corresponde al tramo 3.

Tabla 2: Escala de tasas del Impuesto Global Complementario

VIGENCIA -1	N° DE TRAMOS -2	RENTA IMPONIBLE ANUAL DESDE HASTA -3	FACTOR -4	CANTIDAD A REBAJAR (SIN CRÉDITO DEL 10% DE 1 UTA, DEROGADO) -5
RIGE A CONTAR DEL AÑO TRIBUTARIO 2014	1	0,0 UTA a 13,5 UTA	Exento	-.-
	2	13,5 " a 30 "	4%	0,54 UTA
	3	30 " a 50 "		1,74 "
	4	50 " a 70 "	13,5%	4,49 "
	5	70 " a 90 "	23%	11,14 "
	6	90 " a 120 "	30,4%	17,80 "
	7	120 " a 150 "	35,5%	23,92 "
	8	150 " y MAS	40%	30,67 "

NOTA: Para convertir la tabla a pesos ($) basta con multiplicar los valores anotados en las columnas (3) y (5) por el valor de la UTA del mes respectivo.

Calcule el parámetro del tramo 3, para que la función sea continua (*why?*) con el tramo anterior (2) y el siguiente (4). Justifique.

Ejercicio Avanzado

Propuesto 15

Encuentre los valores de a y b para los cuales $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x) - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{-ax+b} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

¿Qué ocurre si la función se redefine de la siguiente manera?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(x) - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{ax+b} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Continuidad Reparable

Definición 14

Una función $f(x)$ discontinua en $x = k$ se dice reparable si y sólo si se cumple que $\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^+} f(x)$. Esto es, si la discontinuidad se originó porque $f(k) \neq \lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^+} f(x)$.

Para reparar la función, basta con imponer que $f(k) = \lim_{x\to k} f(x)$.

Ejemplo 23

Muestre que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ tiene una discontinuidad reparable (apóyese en la Figura 7), pero que la discontinuidad de $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ no es reparable (apóyese en la Figura 9).

Solución 23

Notamos que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$, por lo que la función reparada es $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$. Por otro lado, $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -1$, distinto a $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$, por lo que la discontinuidad no es reparable.

Proposiciones Adicionales

Proposición 17

Sea f continua en un punto k con $f(k) \neq 0$. Entonces existe una vecindad de radio δ (ver Definición 6) en torno a k tal que $\forall x \in (k-\delta, k+\delta)$, el signo de $f(x)$ es igual al de $f(k)$, esto es, $f(x)f(k) > 0$.

La Proposición 17 se conoce como “Conservación Local del Signo”.

Proposición 18

Sea f continua en el intervalo $[a,b]$, con $f(a)f(b) < 0$, esto es, con signos contrarios al evaluar en ambos extremos. Entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

La Proposición 18 se conoce como “Teorema de Bolzano”[6].

[6] Este (potente) resultado lo utilizaremos más adelante.

Unidad 2

Volver al Inicio

Módulo 8

Volver al Inicio de la Sección

Recordatorio: Tasas de Cambio

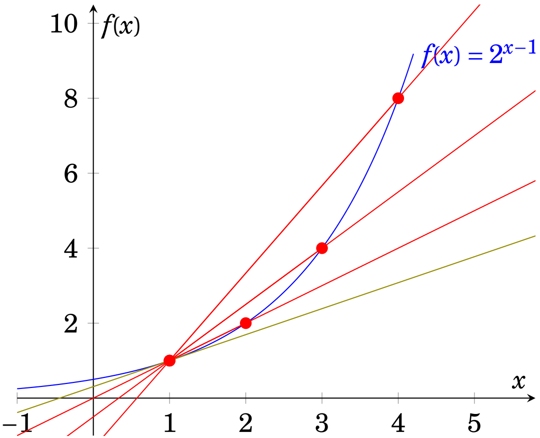
En la Definición 3, particularmente en la ecuación (2) planteamos que una tasa de cambio promedio para una función f en el intervalo $[x, x+\Delta]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Además, en la Figura 2 vimos que esta tasa de cambio promedio puede ser interpretada como la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+\Delta, f(x+\Delta))$.
Sin embargo, en las Figuras 3 y 4 vimos cómo al utilizar intervalos muy amplios podíamos dejar de capturar, por ejemplo, si la función es creciente o decreciente al rededor de algún valor x.
En efecto, sería interesante saber *qué pasa con la tasa de cambio promedio cuando el intervalo se hace arbitrariamente pequeño*.

Tasas en Intervalos Pequeños

Figura 27: Tasa de Cambio Promedio en Distintos Intervalos



Límite de la Tasa de Cambio

Considerar un intervalo arbitrariamente pequeño a la hora de calcular una tasa de cambio promedio es lo mismo que calcular

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Cuando la amplitud del intervalo tiende a cero, se deja de llamar tasa (o razón) de cambio promedio y se utiliza el concepto de *tasa (o razón) de cambio instantánea*.
A diferencia de una tasa de cambio promedio, la tasa de cambio instantánea no corresponde a la pendiente de una recta secante, sino que equivale a la *pendiente de la recta tangente* a la función $f(x)$ en el punto $(x, f(x))$.
Para acortar esto último, se suele afirmar que la tasa de cambio instantánea equivale a la *pendiente de la función* $f(x)$ en x (en vez de hablar de la pendiente de la recta tangente).

Definición de Derivada

TODO lo de la diapositiva anterior lo vamos a condensar en una única definición...

Definición 15

La derivada de una función $y = f(x)$ es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

siempre y cuando dicho límite exista.

Importante:

- ¡$\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \frac{dy}{dx}$!
- La notación de Leibniz (dy/dx) es sólo eso... notación.
- $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{dx} = D_x f(x) = D_x f = Df(x) = Df.$
- La derivada de una función, es otra función (caso exista).
- Por lo tanto, la derivada se puede evaluar en distintos puntos.

Álgebra: Derivada de una Cuadrática

Ejemplo 24

Obtenga la derivada de la función $f(x) = (x-1)^2$ utilizando la definición de derivada (Definición 15).

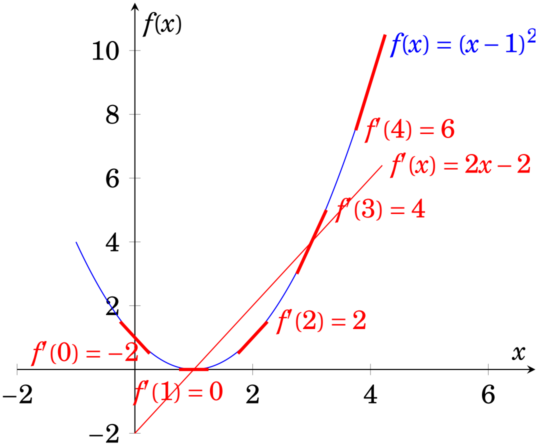
Solución 24

Utilizando la Definición 15, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x-1)^2-(x-1)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2+(\Delta x)^2+1+2x\Delta x-2x-2\Delta-x^2+2x-1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2+2x\Delta x-2\Delta}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x+2x-2 \\
&= 2x-2.
\end{aligned}$$

Gráfico: Derivada de una Cuadrática

Figura 28: Derivada de una Función Cuadrática



¿Continuidad Implica Derivabilidad?

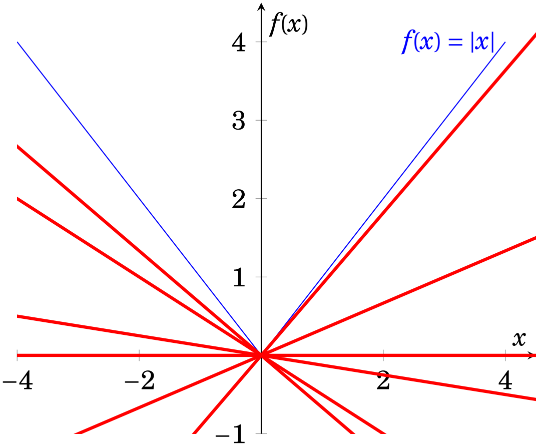
Si una función es continua en un punto, ¿es derivable en ese punto?
¡NO!
Contraejemplo: $f(x) = |x|$

Propuesto 16

Analice la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x|$ en todo su dominio (ponga atención en $x = 0$).

Gráfico: Función Continua No Derivable

Figura 29: Función No Derivable



¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: *Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?*
¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

Demostración.

PD: $\exists f'(k) \implies \lim_{x \to k} f(x) = f(k) \iff \lim_{x \to k} f(x) - f(k) = 0.$

En efecto, $\lim_{x \to k} f(x) - f(k) = \lim_{x \to k} \dfrac{f(x) - f(k)}{x - k} \cdot (x - k).$

Sea $h = x - k$, *de modo que* $x \to k \implies h \to 0.$

Luego, se tiene que el límite es equivalente a $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(k+h) - f(k)}{h} \cdot (h).$

¡Pero el límite de la fracción corresponde a $f'(k)$*! Como esta derivada existe (por hipótesis), el límite del producto es el producto de los límites, esto es,* $f'(k) \cdot 0 = 0.$ □

Módulo 9

▸ Volver al Inicio de la Sección

Derivadas Típicas

Proposición 20

La derivada de $f(x) = x^n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{R}$ *es* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ *es*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Por el Binomio de Newton, sabemos que $(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} h^k$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$. *Luego, el límite es*

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} nx^{n-1} + h(\ldots) = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Acto de fe: esto se cumple en todos los $\mathbb{R}$. $\square$

¿Qué ocurre cuando $n = 0$*? ¿y cuando* $n = 0{,}5$*?*

Derivadas Típicas (cont.)

Proposición 21

La derivada de $f(x) = e^x$ *es* $f'(x) = e^x$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ *es*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h}.$$

El primer término del límite (el factor común) es invariante en h, de modo que puede "salir como constante". El resto es un límite conocido (Proposición 11)...
Por lo tanto, $f'(x) = e^x$. $\square$

Derivadas Típicas (cont.')

Proposición 22

La derivada de $f(x) = \ln(x)$ *es* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Notamos que podemos reescribir la expresión dentro del límite como $\dfrac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}$. Así, tenemos un límite conocido (Proposición 9) "elevado a una constante" y con un logaritmo aplicado...

Por lo tanto, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. $\square$

Propuestos: Derivadas Típicas

Sea $a \in \mathbb{R}$.

Propuesto 17

Encuentre la derivada de $f(x) = ax^n$.

Propuesto 18

Encuentre la derivada de $f(x) = e^{ax}$.

Propuesto 19

Encuentre la derivada de $f(x) = \log_a x$, con $0 < a \neq 1$.

Propuesto 20

Encuentre la derivada de $f(x) = \sqrt[a]{x}$, con $a \in \mathbb{N}$.

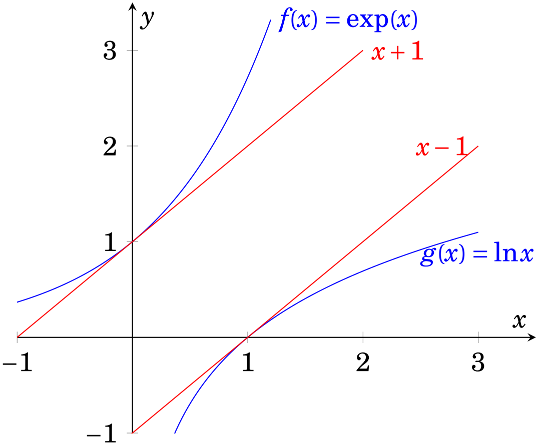
Intuición: Aproximación Afín

Sabemos que $(e^x)' = e^x$, esto es, la pendiente de esta función exponencial en cualquier punto corresponde simplemente al valor que toma la función en dicho punto. En efecto, la recta tangente a esta función cuando $x = 0$ será $x + 1$, esto es, e^x y $x + 1$ *se comportan parecido* cuando x está en una vecindad de 0[7].
Note que podemos hacer un ejercicio similar con cualquier función, no solo con esta exponencial. En efecto, la recta tangente a $\ln x$ en x_0 es $\dfrac{x - x_0}{x_0} + \ln x_0$. Si $x_0 = 1$, esta es simplemente $x - 1$.

[7]Más adelante veremos en detalle cómo podemos aproximar una función usando derivadas.

Gráfico: Aproximación Afín

Figura 30: Aproximación de e^x y $\ln x$



Álgebra: Aproximación Afín

Las aproximaciones afines que observamos anteriormente claramente "lo hacen mejor" cuando $x \to x_0$...

En efecto, tomando la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, podemos definir $h = x - x_0$, de modo que $h \to 0 \implies x \to x_0$.

La derivada ahora es $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + x - x_0) - f(x)}{x - x_0}$.

Olvidémonos (informalmente) del límite, pero tengamos en mente que x se acerca mucho a x_0. Así, despejamos $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Esto es exactamente lo mismo que calcular la ecuación de la recta con pendiente $f'(x_0)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Definición 16

Si es que existe, la recta $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ es la *mejor aproximación afín* de la función $f(x)$ en torno a $x = x_0$.

Ejemplo: Aproximación Afín

Ejemplo 25

Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $x = 4$.

Solución 25

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Luego, $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.
Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$g(x) = \frac{(x-4)}{4} + 2 = \frac{x}{4} + 1.$$

Propiedades de las Derivadas

Proposición 23

Sea $f(x)$ *una función derivable y* $a \in \mathbb{R}$*. Entonces la derivada de la función ponderada equivale a la ponderada de la función derivada. Esto es,* $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$.

Proposición 24

Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ *dos funciones derivables. Entonces la derivada de la suma (o resta) de ambas funciones equivale a la suma (o resta) de las derivadas de las funciones. Esto es,* $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

Proposición 25

Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ *dos funciones derivables. Entonces la derivada del producto de ambas funciones es* $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Proposición 26

Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ *dos funciones derivables. Entonces la derivada del cociente entre ambas funciones es* $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Ejercitación: Derivadas

Propuesto 21

Obtenga las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{mx+n}{\exp(x)}$, con $m,n \in \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x\exp(x)\ln x$.
3. $h(t) = \dfrac{Y(t)}{N(t)}$, donde $Y(t)$ y $N(t)$ son funciones positivas, crecientes y derivables que dependen de t.
   Aplicación: Imagine que $h(t)$ es el PIB per cápita de un país (o las ventas por trabajador, productividad media de una central de sistemas de información, errores contables sobre estados de resultado, etc.) en el periodo t. ¿Qué puede concluir?

Módulo 10

▸ Volver al Inicio de la Sección

Derivada de una Función Compuesta

Proposición 27

Si $y = f(z)$ y $z = g(x)$, siendo ambas funciones diferenciables, entonces la derivada de y respecto a x es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

*Esto se llama la **regla de la cadena**.*

Demostración.

Prueba informal:

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$\Longrightarrow (f \circ g)'(x) \cdot \frac{1}{g'(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{h}{g(x+h) - g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = f'(g(x)).$$

□

Ejercicios: Regla de la Cadena

Propuesto 22

Derive $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es diferenciable y $n \in \mathbb{R}$.

Propuesto 23

Derive $g(x) = \exp[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 24

Derive $h(x) = \ln[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 25

Derive $i(x) = \sqrt{u(x)}$, donde u es diferenciable.

Propuesto 26

Demuestre la regla de la derivada de un cociente (Proposición 26) utilizando la regla de la derivada de un producto (Proposición 25) y la regla de la cadena (Proposición 27).

Propuesto 27

Aplicación: Demuestre que la elasticidad-precio de la demanda es simplemente $\dfrac{d\ln Q}{d\ln P}$.

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...
Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?* En general, **sí**.
Si derivamos la derivada de una función $f(x)$, llamaremos al resultado, caso exista, la **segunda derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por $f''(x)$ o $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ (ojo con la notación).
Similarmente, existe la posibilidad de computar una tercera derivada, o una cuarta, o una n-ésima.
Así, a las derivadas de orden mayor a uno (dos, tres, cuatro, etc.) se les llaman **derivadas de orden superior**.

Ejemplo 26

Obtenga la segunda derivada de la función $f(x) = \exp(ax)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Solución 26

La segunda derivada de una función es simplemente la derivada de la derivada de la función. En este caso tenemos que $f'(x) = a\exp(ax)$. Luego, la segunda derivada es $f''(x) = a^2\exp(ax)$.

Ejercicios: Derivadas de Orden Superior

Propuesto 28

Obtenga la n-ésima derivada de la función anterior ($f(x) = \exp(ax)$). Repita el ejercicio con la función $g(x) = \ln x$.

Propuesto 29

¿Se le ocurre alguna función que no sea infinitamente derivable? Esto es, alguna función que tras alguna cantidad finita de derivadas de como resultado otra función que no es derivable en todo su dominio.

Regla de la Función Inversa

Proposición 28

Sea $y = g(x)$ una función, cuya inversa es f, de modo que $f(y) = x$. Si ambas funciones son derivables, entonces

$$f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))}.$$

Demostración.

Como f y g son inversas entre sí, se da que $f(g(x)) = x$.
Podemos derivar esto (why?) para obtener $f'(g(x))g'(x) = 1$.
Pero lo anterior implica que $f'(g(x)) = \dfrac{1}{g'(x)}$, que es equivalente a lo que queremos demostrar. $\square$

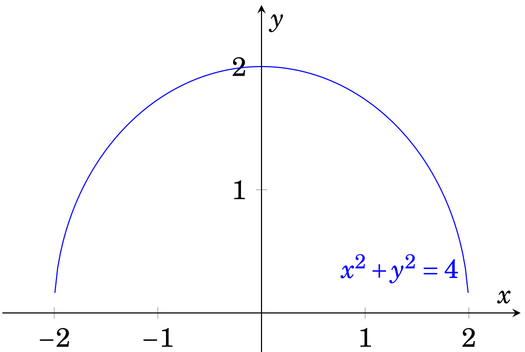
Propuesto 30

Demuestre que $\left(x^2\right)' = 2x$ utilizando la regla de la función inversa. Acote el dominio a los $x > 0$.

Dependencia Implícita

Hasta ahora hemos trabajado con variables dependientes que dependen *explícitamente* de una variable independiente, i.e. $y = f(x)$. Sin embargo, podríamos estar interesados en trabajar con variables dependientes que dependen de manera implícita de otra variable. Por ejemplo, tomemos la relación definida por $x^2 + y^2 = 4$ con $y > 0$. En esta ecuación, y depende *implícitamente* de x.

Figura 31: Gráfico de $x^2 + y^2 = 4$ (con $y > 0$)



Derivación Implícita

Siguiendo con el mismo ejemplo, podemos estar interesados en calcular la derivada de esta función.
Una forma de hacer esto es *despejando* y para que dependa explícitamente de x y calcular la derivada como en cualquier otro caso, obteniendo como resultado $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Sin embargo, despejar la variable dependiente no es siempre tan trivial, por lo que puede ser más cómodo **derivar implícitamente**.

Ejemplo 27

Derive implícitamente $x^2+y^2=4$ respecto a x.

Solución 27

Utilizando la regla de la cadena y las derivadas conocidas tenemos que la derivada es $2x+2y\cdot y'=0$. Notar como al derivar el término y^2 respecto a x se aplica la regla de la cadena, pues y depende de x. Por lo tanto, al despejar y' tenemos $y'=-\frac{x}{y}$.

¿Podemos dejar el resultado dependiendo de y? ¿Son equivalentes los resultados de la derivación implícita y la derivación explícita?

Ejercicios: Derivación Implícita

Propuesto 31

Derive implícitamente $\ln y + x^2 = 8x$.

Propuesto 32

Obtenga la derivada de x^x utilizando derivación implícita.
HINT: Puede ser útil partir el ejercicio aplicando un logaritmo sobre una relación.

Propuesto 33

Obtenga implícitamente la segunda derivada de y del Ejemplo 27.

Módulo 11

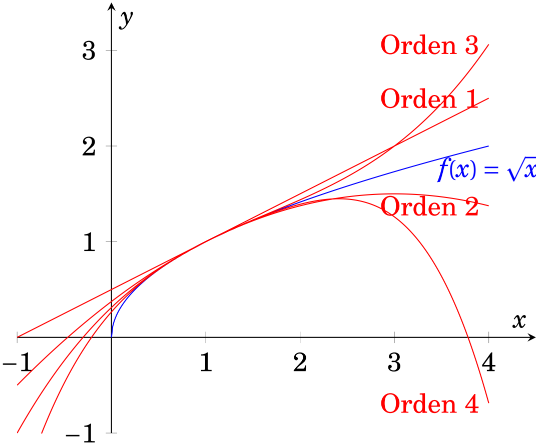
▸ Volver al Inicio de la Sección

Aproximaciones a una Función

Anteriormente vimos que a partir de la definición de derivada podemos obtener una expresión para la *mejor aproximación afín* a una función al rededor de un punto...
En general, cuando nos enfrentamos a una función derivable, tenemos la opción de *realizar una aproximación polinómica* a esta (en efecto, la aproximación afín es un caso particular).
Así, teniendo una función diferenciable $f(x)$, un punto x_0 al rededor del cual haremos la aproximación y un grado n para el polinomio que queramos, podemos establecer una función polinómica de grado n que *se parece mucho* a f en torno a x_0.
A estas funciones polinómicas que se aproximan a otra función las llamaremos *Series (o Aproximaciones o Expansiones o Polinomios) de Taylor*.

Gráfico: Aproximaciones a una Función

Figura 32: Aproximaciones a $\sqrt{x}$ en torno a 1



Aproximación de Taylor

Definición 17

Una Aproximación de Taylor de grado n en torno a x_0 es un polinomio tal que si se aproxima la función $f(x)$ se cumple que

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Así, una aproximación de primer grado es $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, una de segundo grado se parece a $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$, una de tercer grado sería $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3$, etc.

Errores de Aproximación

Claramente, una aproximación no tiene por qué ser exacta, pues perfectamente puede existir un *error de aproximación*.
Este error va a corresponder a la diferencia entre la función verdadera y el polinomio que la aproxima.
Si denotamos este error por ε_x, entonces tenemos que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \varepsilon_x.$$

¿Qué pasa si se evalúa la función $f(x)$ en $x = x_0$?
¿Qué pasa si la función $f(x)$ es un polinomio?
¿Para qué nos podría servir esto?

Aplicación: Aproximando Irracionales

Ejemplo 28

Aproxime el valor de $e^{0,1}$ con un Polinomio de Taylor de segundo orden.
HINT: Piense que $f(x) = e^x$ y elija algún valor conveniente de x_0.

Solución 28

Partimos eligiendo $x_0 = 0$ por dos razones:

1. conocemos el valor de $f(x_0)$ y
2. es un valor cercano a $x = 0,1$.

Luego, calculamos las primeras dos derivadas de la función (por tratarse de una aproximación de segundo orden): $f'(x) = f''(x) = e^x$.
Por último, sólo debemos reemplazar lo que tenemos en la expresión de una Aproximación de Taylor de segundo grado:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$

$$\implies f(0,1) \approx 1 + 1 \cdot 0,1 + \frac{1}{2}0,1^2 = 1,105 \approx 1,10517091808.$$

Series de Maclaurin

Definición 18

Una Serie de Maclaurin es una Serie de Taylor en torno a $x_0 = 0$.

Propuesto 34

Obtenga la Serie de Maclaurin de grado 2 de la función $f(x) = (1-x)^{-1}$. ¿Cómo sería la serie de grado n?

Propuesto 35

Obtenga la Serie de Maclaurin de grado 2 de la función $g(x) = e^x$. ¿Cómo sería la serie de grado n?

Aplicación: Interés Compuesto

Propuesto 36

¿Por qué cuando en Chile se calcula la inflación anual a partir de las inflaciones mensuales, la gente suele simplemente sumarlas en vez de utilizar una fórmula tipo "interés compuesto"? Puede hacerse la misma pregunta con un depósito a plazo.
HINT: Suponga que la tasa es constante.

Regla de L'Hôpital

Muchas veces nos vamos a enfrentar a límites cuyo resultado al evaluar directamente es de la forma $0/0$ o ∞/∞.
En estas situaciones podemos aplicar la regla de L'Hôpital, que básicamente indica que

$$\lim_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema de Rolle

Proposición 29

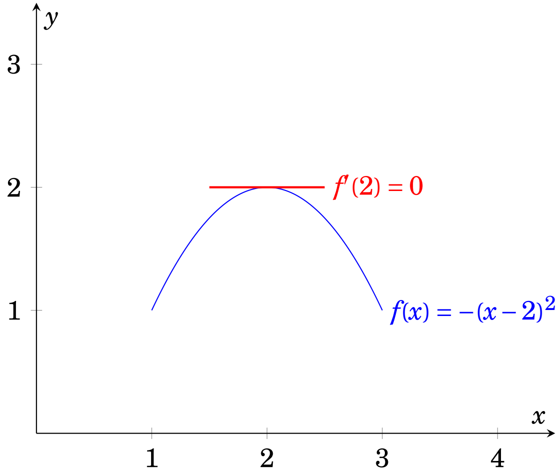
Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a)=f(b)$. Entonces, existe al menos un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Demostración.

Prueba informal: Suponga que f no es una función constante (si lo fuera, su derivada siempre sería 0).
Luego, existe algún valor máximo mayor que $f(a)=f(b)$ o algún valor mínimo menor que $f(a)=f(b)$ en el intervalo (a,b).
Pero como f es continua, la derivada a la izquierda de un máximo debe ser no negativa y a la derecha del máximo debe ser no negativa. La única forma de que se alcance el máximo es que en ese punto la derivada sea 0 (ver Figura 33). La explicación es análoga para el caso de un valor mínimo.
Esto se puede justificar más formalmente utilizando la Proposición 18. □

Gráfico: Teorema de Rolle

Figura 33: Teorema de Rolle



Teorema del Valor Medio

Es una generalización del Teorema de Rolle...

Proposición 30

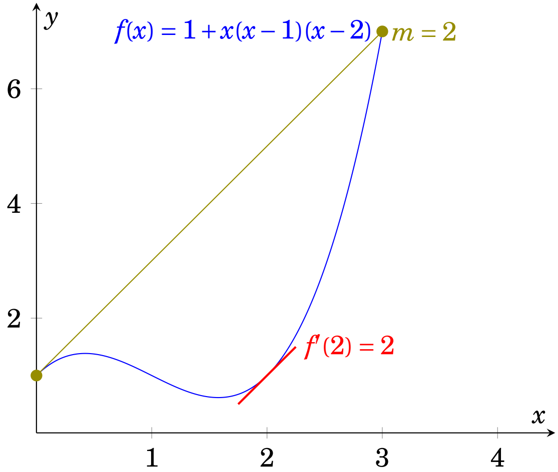
Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces, existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración.

La ecuación de la recta que pasa entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b)$ es $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ (ver Figura 34).
Sea $g(x) = f(x) - y$, de modo que esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).
Luego, notamos que $g(a) = g(b)$, por lo que, por la Proposición 29, debe existir algún $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$.
Pero $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, por lo que necesariamente
$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Gráfico: Teorema del Valor Medio

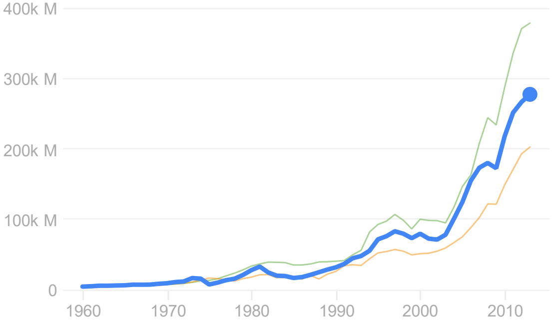
Figura 34: Teorema de Rolle



Aplicación: Teorema del Valor Medio

Ejemplo 29

Figura 35: PIB de Chile



El PIB chileno era de 77 mil millones de dólares en 2003, mientras que en 2013 era de 277 mil millones de dólares. Considerando que el PIB es una función continua en el tiempo, es imposible que hayamos tenido una tasa de crecimiento instantánea de 20 mil millones de dólares, pues eso superaría nuestro máximo crecimiento histórico de un 12,3%. Comente.

Solución 29

Falso. En algún momento el crecimiento instantáneo fue de

$$\frac{277-77}{10} = 20 \text{ mil millones de dólares.}$$

Módulo 12

▸ Volver al Inicio de la Sección

Comportamientos Locales

Anteriormente discutimos cómo podíamos inferir ciertas propiedades de una función utilizando incrementos (ver Figura 3).
Sin embargo, también vimos que estas propiedades se distorsionan cuando utilizamos intervalos muy amplios (Figura 4).
Por último, comentamos que cuando utilizábamos derivadas, i.e. intervalos arbitrariamente pequeños, podíamos estar seguros de que estábamos capturando el correcto comportamiento de la función en un punto (Figura 27).
Particularmente, nos vamos a preocupar de estudiar dos comportamientos locales muy importantes de las funciones: *crecimiento* y *concavidad*.
En base a estas propiedades locales, podremos eventualmente inferir propiedades globales.

Crecimiento y Decrecimiento Local

Definición 19

Una función derivable $f(x)$ es **creciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \geq 0$.

Definición 20

Una función derivable $f(x)$ es **decreciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) \leq 0$.

Definición 21

Una función derivable $f(x)$ es **estrictamente creciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) > 0$.

Definición 22

Una función derivable $f(x)$ es **estrictamente decreciente** en $x = k$ si y sólo si $f'(k) < 0$.

Esto implica que toda función derivable permea el crecimiento o el decrecimiento de la recta tangente a ella en cada punto.

Ejemplo: Crecimiento y Decrecimiento

Ejemplo 30

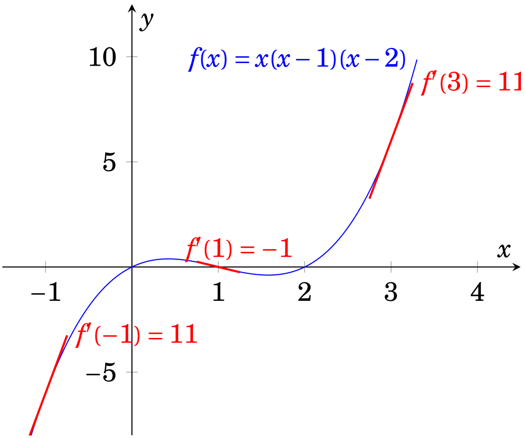
Determine si la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es creciente o decreciente en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Solución 30

Derivamos la función para obtener $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.
Luego, evaluamos en los puntos pedidos, obteniendo $f'(-1) = 11$, $f'(1) = -1$ y $f(3) = 11$.
Por lo tanto, f es creciente en -1, decreciente en 1 y creciente en 3.

Gráfico: Crecimiento y Decrecimiento

Figura 36: Crecimiento y Decrecimiento



Crecimiento en Intervalos

Definición 23

Una función derivable $f(x)$ es creciente (resp. estrictamente creciente) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 24

Una función derivable $f(x)$ es decreciente (resp. estrictamente decreciente) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 25

Una función derivable $f(x)$ es globalmente creciente (o bien, monótona creciente) si y sólo si $f'(x) \geq 0$ en todo su dominio.

Definición 26

Una función derivable $f(x)$ es globalmente decreciente (o bien, monótona decreciente) si y sólo si $f'(x) \leq 0$ en todo su dominio.

Ejemplo: Crecimiento en Intervalos

Ejemplo 31

Determine el/los intervalo(s) donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es creciente y el/los intervalo(s) donde es decreciente.

Solución 31

Derivamos la función para obtener $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$. Por lo tanto, f es siempre creciente en su dominio, i.e. es una función globalmente creciente.

Propuesto 37

Repita el ejercicio anterior con la función del Ejemplo 30.

Aplicación: Funciones Monótonas

Cuando a una función se le compone en una transformación monotónica (e.g. una función globalmente creciente), *se mantiene la ordinalidad de los valores*, esto es, si $f(x)$ es una transformación monotónica, entonces $A \leq B$ si y sólo si $f(A) \leq f(B)$.

Ejemplo 32

Considere una firma que debe elegir entre los planes de producción A, B y C para decidir cómo producir. Se sabe que la firma busca maximizar sus beneficios, sin embargo, no dispone de la función de beneficios $\pi(y)$ con $y \in \{A, B, C\}$, sólo dispone de los valores de $\ln \pi(y)$. En base a esto, ¿podrá determinar cuál es el plan de producción que le conviene?

Solución 32

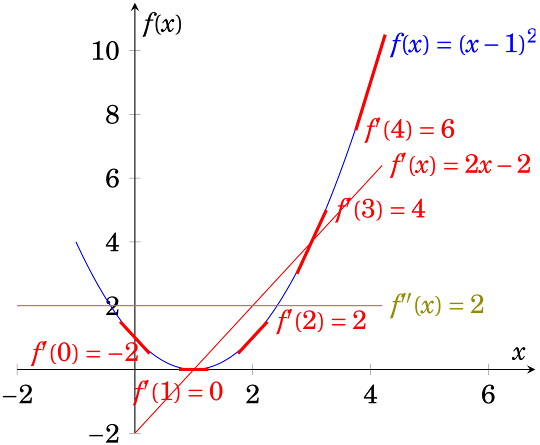
Sí, podrá. Notamos que $f(x) = \ln x$ tiene derivada $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ en todo el dominio de la función. Por lo tanto, si conoce los valores de $\ln \pi(y)$ y puede determinar cuál es el mejor en términos logarítmicos, entonces también sabe cuál es el mejor sin el logaritmo.

Recordatorio: Parábolas

Conocemos el concepto de una parábola cóncava y una parábola convexa.
En efecto, una parábola definida por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es cóncava si $a < 0$ y es convexa si $a > 0$.
Notamos que la derivada de esta función es $f'(x) = 2ax + b$, que es una recta creciente si $a > 0$ y es una recta decreciente si $a < 0$...
Si tomamos la segunda derivada de la función obtenemos $f''(x) = 2a$, que será positiva si $a > 0$ y será negativa si $a < 0$.
Esto se da precisamente porque la segunda derivada de una función identifica el crecimiento/decrecimiento de la primera derivada de la función.
Así, diremos que si la primera derivada es creciente, i.e. la segunda derivada es positiva, la función es convexa. Por otro lado, si la primera derivada es decreciente, i.e. la segunda derivada es negativa, diremos que la función es cóncava.
Esto es válido para cualquier función derivable, no solo las parábolas.

Convexidad de una Función Cuadrática

Figura 37: Convexidad de una Función Cuadrática



Concavidad y Convexidad Local

Definición 27

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **convexa** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) \geq 0$.

Definición 28

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **cóncava** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) \leq 0$.

Definición 29

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **estrictamente convexa** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) > 0$.

Definición 30

Una función doblemente derivable $f(x)$ es **estrictamente cóncava** en $x = k$ si y sólo si $f''(k) < 0$.

Ejemplo: Concavidad y Convexidad

Ejemplo 33

Determine si la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ es cóncava o convexa en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Solución 33

Derivamos la función dos veces para obtener $f''(x) = 6x - 6$.
Luego, evaluamos en los puntos pedidos, obteniendo
$f''(-1) = -12 < 0$, $f''(1) = 0$ y $f''(3) = 12 > 0$.
Por lo tanto, f es cóncava en -1, *cóncava y convexa* en 1 y convexa en 3.

Concavidad en Intervalos

Definición 31

Una función doblemente derivable $f(x)$ es convexa (resp. estrictamente convexa) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 32

Una función doblemente derivable $f(x)$ es cóncava (resp. estrictamente cóncava) en el intervalo $[a,b]$ si y sólo si $f''(x) \leq 0$ (resp. $f''(x) < 0$) para todo $x \in [a,b]$.

Definición 33

Una función doblemente derivable $f(x)$ es globalmente convexa si y sólo si $f''(x) \geq 0$ en todo su dominio.

Definición 34

Una función doblemente derivable $f(x)$ es globalmente cóncava si y sólo si $f''(x) \leq 0$ en todo su dominio.

Ejemplo: Concavidad en Intervalos

Ejemplo 34

Determine el/los intervalo(s) donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ es cóncava y el/los intervalo(s) donde es convexa.

Solución 34

Derivamos la función dos veces para obtener $f''(x) = 6x - 6$.
Para que $f'' \leq 0$, se tiene que dar que $x \leq 1$ y para que $f'' \geq 0$ se tiene que dar que $x \geq 1$.
Por lo tanto, f es cóncava en el intervalo $(-\infty, 1]$ y es convexa en el intervalo $[1, \infty)$.

Propuesto 38

Repita el ejercicio anterior con la función del Ejemplo 33.

Aplicación: Rendimientos Decrecientes

En general, cuando se dice que una función (e.g. una función de producción) tiene rendimientos marginales decrecientes, es porque la función es cóncava. La idea de hablar de *rendimientos marginales decrecientes* es que el efecto de incrementar en una unidad marginal el argumento se vuelve cada vez menor, i.e. cada vez *rinde menos*.
Por ejemplo, en una función de producción, se dice que hay rendimientos marginales decrecientes al factor si la derivada de la función respecto a este factor es decreciente, i.e. si la segunda derivada de la función de producción es negativa.
Análogamente, si la segunda derivada es positiva, se dice que la función tiene rendimientos crecientes.

Ejemplo 35

Determine si la función $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$ tiene rendimientos decrecientes.

Solución 35

Sí, pues la segunda derivada es negativa en todo el dominio.

Ejercicios: Crecimiento y Concavidad

Propuesto 39

Analice el crecimiento y la concavidad de las siguientes funciones en todo el dominio:

1. $f(x) = \sqrt{x} - x$
2. $g(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
3. $h(x) = \exp\left(-x^2\right)$

Extra: Concavidad y Convexidad

Definición 35

Sean x_1 y x_2 dos valores y sea $\lambda \in (0,1)$. Una combinación convexa entre x_1 y x_2 se define como $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

Definición 36

Una función es estrictamente convexa en un intervalo si cualquier combinación convexa de dos valores de la función evaluada en argumentos en el intervalo está siempre por sobre el valor de la función evaluada en la combinación convexa de los argumentos anteriores. Esto es $f(x)$ es estrictamente convexa en $[a,b]$, si $\forall \lambda \in (0,1)$ se tiene que para cualquier $x_1, x_2 \in [a,b]$ la siguiente desigualdad se satisface: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Se dirá que la función es convexa si la desigualdad no es estricta.

Definición 37

Análogo para concavidad estricta:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Se dirá que la función es cóncava si la desigualdad no es estricta.

Convexidad del Valor Absoluto

Ejemplo 36

Demuestre formalmente que la función $f(x) = |x|$ es siempre convexa.

Solución 36

Sean x_1 y x_2 dos números reales y sea $\lambda \in (0, 1)$.
Si planteamos una combinación convexa de estos valores tendríamos $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, mientras que una combinación convexa de la función evaluada en x_1 y x_2 sería $\lambda |x_1| + (1 - \lambda)|x_2|$.
Ahora bien, como $\lambda \geq 0$, tenemos que
$\lambda |x_1| + (1 - \lambda)|x_2| = |\lambda x_1| + |(1 - \lambda)x_2|$.
Pero por la desigualdad triangular sabemos que
$|\lambda x_1| + |(1 - \lambda)x_2| > |\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2|$.
Esta es precisamente la definición de convexidad aplicada a la función $f(x) = |x|$. $\square$

Propuesto 40

Demuestre formalmente que la función $g(x) = -|x|$ es siempre cóncava.

Derivadas Igualadas a Cero

Sabemos que cuando la derivada de una función es positiva, es porque dicha función es creciente y que si esta derivada es negativa, la función es decreciente.
Sin embargo, si la función pasó de tener una derivada positiva a tener una derivada negativa, es porque en algún momento dejó de crecer y comenzó a decrecer. En este punto, donde la derivada es 0, se forma una especie de “monte”.
Similarmente, si la función pasó de tener una derivada negativa a una positiva, debió dejar de caer para que valor pase a aumentar. En este punto, donde la derivada también es 0, se forma un valle.
En base a estas ideas, vamos a formalizar el concepto de un máximo o un mínimo local en una función. (Notar que, a priori, no podemos asegurar que una derivada igualada a cero genera los montes o los valles mencionados anteriormente.)

Gráfico: Derivadas Nulas

Figura 38: Montes y Valles

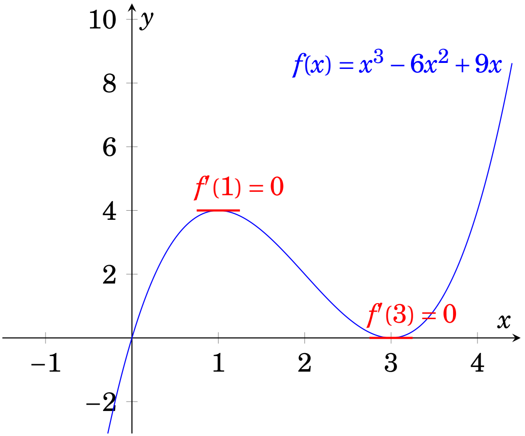
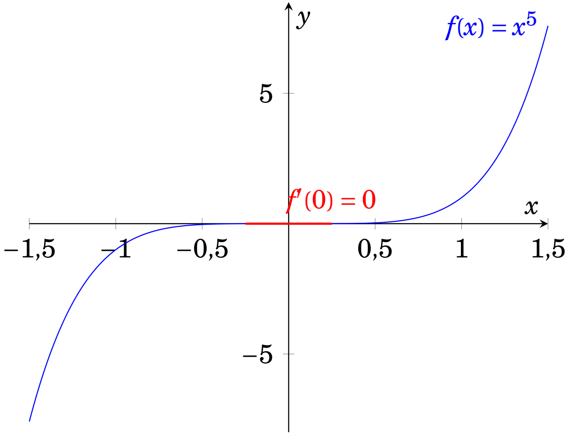


Gráfico: Derivadas Nulas (cont.)

Figura 39: Derivada Nula sin Monte ni Valle



Comentario: Derivadas Nulas

Como vimos en las Figuras 38 y 39, no es suficiente encontrar una derivada nula para identificar un monte o un valle.
En efecto, tenía que darse que la función pasara de ser estrictamente creciente a ser estrictamente decreciente, o al revés.
Sin embargo, si la derivada pasó se ser positiva a ser negativa, es porque *la derivada cayó*. Pero ya vimos que si la primera derivada es decreciente, entonces la función es cóncava.
Por lo tanto, para que encontremos un monte, es condición necesaria que la primera derivada sea nula, pero además necesitamos una *condición de suficiencia*, que es que la segunda derivada sea negativa.
Análogamente, encontraremos un valle si la primera derivada es nula y la segunda derivada es positiva, pues así nos aseguramos de que la función tenía pendiente negativa y pasó a ser positiva (i.e. que la primera derivada era creciente).

Módulo 13

▸ Volver al Inicio de la Sección

Introducción: Optimización

En muchas situaciones nos puede interesar encontrar el **valor óptimo** de alguna variable. Este valor óptimo puede ser un **máximo o un mínimo**.

Por ejemplo, podemos estar interesados en minimizar la evasión tributaria o maximizar la cantidad de procesos por segundo de un sistema de información, maximizar las utilidades de una firma o minimizar sus emisiones de gases de invernadero. Existe una infinidad de casos donde podríamos buscar valores óptimos.

Un **problema de optimización** consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable (dependiente). En otras palabras se trata de calcular o determinar el valor mínimo o el valor máximo de una función $f(x)$.

Para ello, debemos determinar el valor de la variable independiente x que hace que la función sea máxima o mínima.

Proposición 31

(Extra: Teorema de Bolzano–Weierstrass). Toda función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ *alcanza un valor máximo* M *en algún* $x_M \in [a,b]$ *y alcanza un valor mínimo* m *en algún* $x_m \in [a,b]$.

Optimización: Definiciones

Definición 38

Una función derivable $f(x)$ cumple con la **condición de primer orden** (CPO) en $x = k$ si $f'(k) = 0$. Esta es una *condición necesaria* para que $x = k$ sea un máximo (monte) o mínimo (valle) local, pero no suficiente...

Definición 39

Una función derivable $f(x)$ cumple con una **condición de segundo orden** (CSO) en $x = k$ si $f''(k) > 0$ o si $f''(k) < 0$. Estas son condiciones de suficiencia para alcanzar un óptimo local.

Proposición 32

Una función doblemente derivable $f(x)$ alcanza un ***óptimo local*** *en $x = k$ si y sólo si cumple con la condición de primer orden en $x = k$ y alguna de las condiciones de segundo orden en el mismo punto. Si la condición de segundo orden es positiva, la función alcanza un mínimo, mientras que si la condición de segundo orden es negativa, la función alcanza un máximo en $x = k$.*

Ejercicios: Optimización

Propuesto 41

Optimice las siguientes funciones e indique si el valor es un mínimo o un máximo:

1. $e(x) = \exp(4x) - \exp(5x)$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$
3. $g(k) = Ak^{\alpha} - \delta k \quad$ con $\alpha, \delta \in (0,1)$ y $A > 0$
4. $h(s) = \dfrac{\ln(s)}{r} e^{-rs} \quad$ con $r > 0$ (deje expresado)

Sobre los Valores Óptimos

Supongamos que sabemos que una función $f()$ tiene un máximo o un mínimo en un intervalo cerrado y acotado I.
El máximo o mínimo puede estar en un extremo o en uno de los puntos interiores de I.
Si está en un interior, y si $f()$ es derivable, entonces la derivada $f'()$ es cero en ese punto.
Además, está la posibilidad de que el máximo o mínimo esté en un punto en el que $f()$ no sea derivable, por ejemplo, en un extremo del intervalo I.
Por lo tanto, los máximos o mínimos pueden ser únicamente de los tres tipos siguientes:

1. Puntos interiores de I en los que $f'(x) = 0$.
2. Los dos extremos de I (si el intervalo los incluye).
3. Puntos de I en los que no exista $f'(x)$.

Sobre los Valores Óptimos (cont.)

Por lo tanto, cuando se solicite hallar los valores máximos y mínimos de una función derivable $f()$ definida en un intervalo $[a,b]$ cerrado y acotado. Se debe proceder de la siquiente manera:

1. Hallar todos los puntos estacionarios de $f()$ en (a,b).
2. Evaluar $f()$ en los extremos del intervalo (a y b) y en todos sus puntos estacionarios.
3. El mayor valor de la función hallado anteriormente es el valor máximo de $f()$ en $[a,b]$ y el menor valor de la función hallado es el valor mínimo de $f()$ en $[a,b]$.

Módulo 14

▸ Volver al Inicio de la Sección

El Problema de una Firma

Supongamos una empresa que produce un cierto bien y quiere maximizar sus beneficios.
Los ingresos totales generados en un cierto periodo por la producción y venta de Q unidades son $I(Q)$ (en Unidades Monetarias: UM), mientras que $C(Q)$ designa el costo total en [UM] del proceso.
El beneficio obtenido como resultado de producir y vender Q unidades es entonces

$$\pi(Q) = I(Q) - C(Q).$$

El Problema de una Firma (cont.)

Consideremos que hay un cota máxima de Q_0 de la producción en el periodo dado, por limitaciones técnicas.
Supongamos que $I(Q)$ y $C(Q)$ son funciones derivables de Q en el intervalo $[0, Q_0]$. Así, la función de beneficios π es también derivable y, por consiguiente, tiene un valor máximo.
En ciertos casos, este máximo puede darse en $Q = 0$ o en $Q = Q_0$. Si no, el nivel máximo de producción Q^* verifica que $\pi'(Q^*) = 0$ y así

$$I'(Q) = C'(Q).$$

En términos más comunes esto se expresaría, como

$$IMg(Q) = CMg(Q).$$

Así, se debe ajustar la producción hasta un punto en el que el ingreso marginal sea igual al costo marginal de producirlo.

El Problema de una Firma (cont.')

Firma tomadora de precios: Supongamos que la empresa obtiene un precio fijo P por unidad vendida.
Entonces $IMg(Q) = P$, de manera que si la empresa no controla el precio, hay que ajustar la producción al nivel en el cual el costo marginal sea igual al precio unitario del producto.
En el caso en que la firma no sea tomadora de precios y se enfrente a la demanda de mercado, el ingreso $I(Q)$ será igual a $P(Q) \cdot Q$, es decir, el ingreso total será igual al producto entre el precio (en función de la cantidad vendida) y la cantidad que se produce.

Ejercicio: El Problema de una Firma

Ejemplo 37

Suponga que una empresa puede controlar el precio del producto que vende (monopolio).
La demanda por el bien que produce esta empresa está dada por

$$P = 1000 - \frac{1}{2}Q,$$

donde P representa el precio (demanda inversa) y Q la cantidad que sería demandada, por lo tanto, $Q \in [0; 2000]$, ya que la demanda estaría satisfecha con 2000 unidades.
Además, suponga que el costo de producir Q unidades está definido por

$$C(Q) = 100 + \frac{1}{c}Q^2,$$

donde $c > 0$ es un factor tecnológico, el cual es constante dentro del proceso productivo.
En base a estas condiciones, ¿cuál sería la cantidad que debería producir la empresa con el propósito de maximizar sus beneficios?

Respuesta: El Problema de una Firma

Solución 37

Sea...

Q: Cantidad producida que será igual a la cantidad demanda.

Q^*: Cantidad óptima a producir.

P: Precio, que también representa la demanda inversa.

$\pi(Q)$: Beneficio de producir Q unidades.

El planteamiento del problema es:

$$\begin{array}{cc} \text{máx}_{Q\in[0;2000]} & \pi(Q) = I(Q) - C(Q) \\ \text{Suponiendo} & P(Q) = 1000 - \frac{1}{2}Q \end{array}$$

De manera que habrá una cantidad Q^* que maximice el beneficio, si $Q^* \in [0;2,000]$.

Respuesta: El Problema de una Firma

Primero es necesario descomponer la función de beneficios, dejándola en función de Q, de manera que sea más clara la realización de los cálculos, es decir,

$$
\begin{aligned}
\pi(Q) &= I(Q) - C(Q) \\
\pi(Q) &= P(Q) \cdot Q - C(Q) \\
\pi(Q) &= \left(1000 - \frac{1}{2}Q\right) \cdot Q - \left(100 + \frac{1}{c}Q^2\right) \\
\pi(Q) &= 1000 \cdot Q - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{c}\right) \cdot Q^2 - 100.
\end{aligned}
$$

Respuesta: El Problema de una Firma

Ahora que se tiene la función, podemos imponer la condición de primer orden, la cual consiste en derivar la función de beneficios con respecto a la cantidad producida Q:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi(Q)}{dQ} &= 0 \\ 1000 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{c}\right) \cdot Q &= 0 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{c}\right) \cdot Q &= 500 \\ Q^* &= \frac{1000 \cdot c}{c+2}. \end{aligned}$$

Al reemplazar la cantidad óptima en el beneficio, encontramos el beneficio máximo, el que asciende a

$$\pi^* = \pi(Q^*) = \frac{500000 \cdot c}{c+2} - 100.$$

Respuesta: El Problema de una Firma

Sería apresurado concluir que es conveniente llevar la producción hasta Q^*.
Esto se debe a que no sabemos si los beneficios máximos son positivos o no.
Si fueran positivos, sucedería que

$$\pi^* = \pi(Q^*) = \frac{500000 \cdot c}{c+2} - 100 > 0 \implies c > \frac{2}{4999}.$$

Por lo tanto, la conclusión es que es conveniente llevar la producción hasta Q^* siempre y cuando $c > \dfrac{2}{4999}$.

Ejercicio: Línea Telefónica

Ejemplo 38

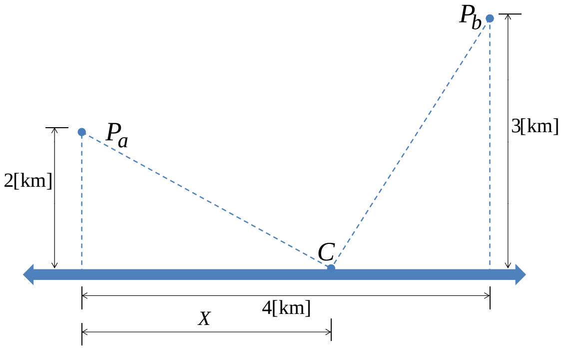
La linea de transmisión telefónica cruza toda la décima región del país en linea recta. Sin embargo, dos poblados actualmente se encuentran incomunicados, por tal motivo han solicitado la instalación de líneas telefónicas. Ellos se encuentran a 2 y 3 kilómetros, en forma perpendicular a la linea de transmisión telefónica, respectivamente. La distancia entre los pies de estas perpendiculares por la linea de transmisión telefónica es de 4 kilómetros. Actualmente se dispone de un sólo conmutador que hace posibles las comunicaciones de un teléfono a otro, el cual debe conectarse a la linea de transmisión y desde él se debe conectar a los pueblos. Otra restricción es que sólo se dispone de 6,5 kilómetros de cableado de fibra óptica diseñado para este tipo de conexión. Determine si es posible conectar a los dos poblados, para ello deberá encontrar una ubicación para el conmutador que minimice el uso de cableado de fibra óptica.

Respuesta: Línea Telefónica

Solución 38

Diremos que X representa la distancia desde el conmutador, al pie de la perpendicular del primer poblado (sobre la linea de transmisión). Esto se puede ver representado en la Figura 40.

Figura 40: Poblados, Conmutador y Línea de Transmisión



Respuesta: Línea Telefónica

Así, diremos que la distancia desde el primer problado (P_a) al conmutador (punto C), se define, como

$$L_a(x) = \sqrt{4 + x^2}.$$

Por otro lado, la distancia del segundo poblado (P_b) al conmutador, es

$$L_b(x) = \sqrt{9 + (4 - x)^2}.$$

Entonces, la longitud total que debe recorrer el cableado de fibra óptica, será

$$L(x) = L_a + L_b(x) = \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{9 + (4 - x)^2}.$$

NOTA: Recordar que según Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Respuesta: Línea Telefónica

El planteamiento del problema, es

$$\min_{x\in[0,4]} L(x) = L_a(x) + L_b(x),$$

de manera que habrá una distancia en el eje x, x^* que minimice la cantidad de cableado que se utilizará, tal que $L(x^*) \leq 6,5$.
En caso de que $L(x^*) > 6,5$, no será posible conectar los dos poblados.

Respuesta: Línea Telefónica

Aplicando las condiciones de primer orden (CPO), se tiene que

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} - \frac{4-x}{\sqrt{9+(4-x)^2}} = 0.$$

Resolviendo la ecuación,

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} &= \frac{4-x}{\sqrt{9+(4-x)^2}} \\
x^2(9+(4-x)^2) &= (4-x)^2(4+x^2) \\
9x^2 &= 4(16-8x+x^2) \\
5x^2+32x-64 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2-4\cdot 5\cdot(-64)}}{10} \\
x_{1,2} &= \frac{-32 \pm 48}{10}.
\end{aligned}$$

Respuesta: Línea Telefónica

Entonces, las posibles soluciones, son $x_1 = 1,6$ y $x_2 = -8$. Claramente, la segunda solución no es factible con respecto a lo que se busca, ya que $x \in [0;4]$. Así, sólo nos resta verificar que el valor encontrado efectivamente es aquel que minimiza la logitud del cableado, para ello se verificará la condición de segundo orden:

$$\frac{d^2L(x)}{dx^2} = \frac{4}{(4+x^2)^{3/2}} + \frac{9}{(9+(4-x)^2)^{3/2}}.$$

Al evaluar esta segunda derivada en el punto $x = 1,6$, claramente se puede observar que la segunda derivada resulta ser positiva, por lo tanto, éste valor hace mínima la función:

$$L(x = 1,6) = \sqrt{4+(1,6)^2} + \sqrt{9+(4-1,6)^2} = 6,4.$$

Respuesta: Línea Telefónica

Sin embargo, también se debería verificar en los extremos, ya que el dominio de la función es acotado y cerrado.
Al verificar, se aprecia que

$$L(x=0)=\sqrt{4+(0)^2}+\sqrt{9+(4-0)^2}=7,$$

y que

$$L(x=4)=\sqrt{4+(4)^2}+\sqrt{9+(4-4)^2}=7,5.$$

Notamos que estas no son soluciones válidas.
Por lo tanto, la posición del conmutador debe estar a 1,6 kilómetros del punto perpendicular del primer poblado con respecto a la linea de transmisión. Este punto utilizará una longitud de cableado igual a 6,4 kilómetros, la cual es menor a la disponible que es de 6,5 kilómetros, así que podrá conectar a los dos poblados.

Propuesto: Extracción Petrolera

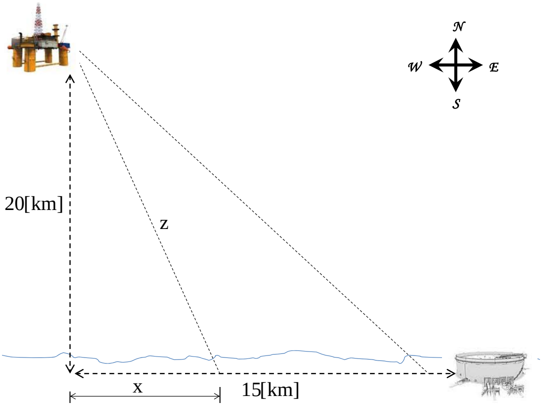
Propuesto 42

Suponga que se requiere construir una linea de tuberías para transportar petróleo (oleoducto) desde una plataforma en el mar que está localizada 20 kilómetros al Norte mar adentro (perpendicular a la playa), hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa a 15 kilómetros al Este de la ubicación de la plataforma. Además, se sabe que el costo de construcción de cada kilómetro de oleoducto en el mar es de U$2.000.000, pero por tierra es de 1.000.000 [U$/Km], ¿a qué distancia hacia el Este de la plataforma debería salir al mar el oleoducto de manera que el costo de la construcción sea mínimo?

Propuesto: Extracción Petrolera

En la Figura 41 se observa un esquema de la ubicación de la plataforma petrolera y los tanques de almacenamiento.

Figura 41: Plataforma Petrolera y Oleoducto



Unidad 3

Volver al Inicio

Módulo 15

▸ Volver al Inicio de la Sección

Antiderivadas

En la unidad anterior aprendimos a derivar funciones... Ahora haremos todo lo contrario.
Si teníamos una función $f(x) = x^2$ era bastante sencillo concluir que $f'(x) = 2x$ era la derivada de $f(x)$ respecto a x. Sin embargo, si supiéramos que la derivada de una función respecto a x es $2x$, ¿podríamos concluir que la función original era x^2?
NO exactamente. *¿Por qué?*
La derivada de $x^2 + 5$ respecto a x también es $2x$, y la de $x^2 - 1000$ también.
En efecto, cualquier función de la forma $x^2 + c$, con $k \in \mathbb{R}$ constante tiene como derivada respecto a x a la función $2x$. Esta **familia de funciones** se llamará **antiderivada** o **primitiva** de la función $2x$ respecto a x.

Definición 40

La antiderivada o primitiva de una función $f(x)$ respecto a x es una familia (o conjunto) de funciones de la forma $F(x) + c$ (con $c \in \mathbb{R}$ constante) tal que $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

Integrales Indefinidas

Para formalizar el proceso de obtener una primitiva, introduciremos una nueva operación sobre las funciones continuas: la **integración indefinida**[8].

Definición 41

Si $F(x)+c$ es la primitiva de una función $f(x)$ respecto a x, entonces podemos afirmar que la *integral indefinida* de $f(x)$ respecto a x es $F(x)+c$. Esto se denota por

$$\int f(x)dx = F(x)+c.$$

Por lo tanto, al calcular la integral de una función $f(x)$, la pregunta subyacente que uno debería hacerse es *"¿qué función derivada me da $f(x)$?"*.

Observación: Se puede inferir que

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x) \quad \text{y que} \quad \int f'(x)dx = f(x)+c.$$

[8]Próximamente introduciremos el concepto de integración definida.

Alerta: Sobre la Constante

Al calcular una integral indefinida, **SIEMPRE INCLUIR CONSTANTE.**

Da lo mismo el nombre, la forma o el color de la constante (c, $\bigstar$ o k), pero si no lo hacen, el resultado es incorrecto.

La razón es sencilla: si no lo hacen, afirman que una primitiva es una función, y no una familia de funciones.

Dicho de otro modo, afirman que la derivada de x^2 es $2x$, pero que la derivada de x^2+5 o la de x^2-1000 no es $2x$, lo cual es incorrecto.

Por favor, no pierdan puntos por no hacer esto.

Primitivas Conocidas

Ejemplo 39

Encuentre las primitivas respecto a x de las siguientes funciones:

- $f(x) = x^n$ con $n \neq -1$.
- $g(x) = x^{-1}$.
- $h(x) = \exp(x)$.
- $i(x) = [y(x)]^n y'(x)$ con $n \neq -1$.
- $j(x) = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$.
- $k(x) = y'(x)\exp[y(x)]$.
- $l(x) = k$ con k constante. *¿Y si* $k = 0$*?*
- $m(z) = z$.
- $n(x) = a^x$ con a constante. Notar que es una extensión de $k(x)$.

Primitivas Conocidas

Solución 39

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ con $n \neq -1$.
- $\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$.
- $\int \exp(x) dx = \exp(x) + c$.
- $\int [y(x)]^n y'(x) dx = \frac{1}{n+1}[y(x)]^{n+1} + c$ con $n \neq -1$.
- $\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \ln|y(x)| + c$.
- $\int y'(x)\exp[y(x)] dx = \exp[y(x)] + c$.
- $\int k dx = kx + c$ con k constante.
- $\int z dx = zx + c$.
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ con a constante.

Reglas de Integración

Proposición 33

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas. Entonces la integral de la suma (resta) entre estas funciones equivale a la suma (resta) entre las integrales de estas funciones. Esto es

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Proposición 34

Sea $f(x)$ una función continua y $k \in \mathbb{R}$ una constante. Entonces la integral de la función ponderada equivale a la ponderada de la función integrada. Esto es

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Observación: $\int [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int g(x)dx$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes.

Integración con Condiciones Iniciales

A pesar de que la primitiva de una función $f(x)$ sea una familia de funciones, existe la posibilidad de que hayan *condiciones iniciales* las primitivas, de modo que, eventualmente, podemos identificar una única función cuya derivada sea $f(x)$ y que satisfaga las condiciones iniciales.

Ejemplo 40

Encuentre la primitiva $F(x)$ de $f(x) = \exp(2x)$ que pasa por el origen.

Solución 40

La primitiva de $\exp(2x)$ es $\int \exp(2x)dx = \frac{1}{2}\exp(2x) + c$.

Sin embargo, como debe pasar por el origen, tenemos que $\frac{1}{2} + c = 0 \Longrightarrow c = -\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, $F(x) = \int \exp(2x)dx \Big|_{F(0)=0} = \frac{1}{2}\exp(2x) - \frac{1}{2}$.

Aplicación: Costos Totales

Ejemplo 41

A través de una exhaustiva investigación a una empresa monopólica, la Fiscalía Nacional Económica (FNE) fue capaz de determinar que los costos marginales de la empresa en UM se comportan como la función $CMg(q) = \phi^q \ln \phi$, con $\phi > 1$ constante. Están interesados en obtener los beneficios netos de esta firma, pero sólo han podido determinar los ingresos totales de la firma y sus costos fijos, donde estos últimos ascienden a 101 UM. ¿Cuáles son los costos variables de esta empresa?

Solución 41

Los costos totales $CT(q)$ de la empresa satisfacen $CT'(q) = CMg(q)$. Por lo tanto, integramos los costos marginales, obteniendo $CT(q) = \int \phi^q \ln \phi dq = \phi^q + c$.

Ahora bien, los costos fijos son aquellos en los que se incurren cuando no hay producción, es decir,
$CF = CT(0) \iff 101 = 1 + c \iff c = 100$.

Por lo tanto, los costos totales son $CT(q) = \phi^q + 100$ y los costos variables son $CV(q) = \phi^q - 1$.

Módulo 16

▸ Volver al Inicio de la Sección

Técnicas de Integración

Derivar es una técnica,
integrar es un arte.

La afirmación anterior es bastante acertada. Para derivar funciones bastaba con comprender algunas derivadas y reglas conocidas, no habían mayores complicaciones metodológicas. Sin embargo, las integrales son otro mundo, pues su resolución puede requerir un poco más de creatividad.
A pesar de ello, existen algunas técnicas para resolver integrales con algunas estructuras conocidas. En este módulo y en el próximo veremos tres de ellas. Existen más (e.g. sustitución trigonométrica) que no abordaremos en este curso.
Las tres técnicas que veremos en este curso se llaman

1. método de sustitución,
2. integración por partes y
3. fracciones parciales.

Previo: Diferenciación

Anteriormente vimos que si $y = f(x)$, podíamos expresar la *derivada de y respecto a x* como $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

Además, afirmamos que $\dfrac{dy}{dx}$ es sólo notación, es decir, no es precisamente una fracción. Sin embargo, ahora definiremos otro concepto que puede conversar bastante bien con la idea anterior. Éste es el concepto de "diferencial".

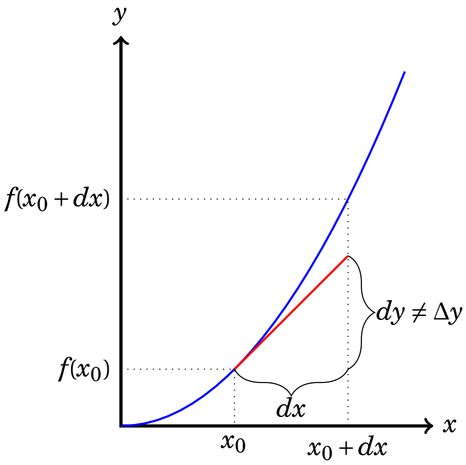
Definiremos dx como el *diferencial de x* y lo trataremos como una *variación arbitrariamente pequeña* de la variable x.

Así, el diferencial de una variable dependiente o el *diferencial de una función* es $dy = f'(x)dx$. Dicho de otro modo, el diferencial de una función es directamente proporcional al diferencial de la variable independiente, donde la constante de proporcionalidad es la derivada de la función.

En el párrafo anterior pareciera como si hubiésemos "pasado multiplicando" dx, pero esto no es así, estamos hablando de conceptos distintos.

Gráfico: Diferenciación

Figura 42: Diferencial de una Función



Método de Sustitución

El método de sustitución es el más sencillo de todos, pues consiste simplemente en un “cambio de variable”.
Este método es útil cuando tenemos integrales que de alguna forma se pueden escribir como

$$\int f(g(x))g'(x)dx,$$

donde $g(x)$ es una función de x que sustituiremos por otra variable y f es una función que compone a g.
En efecto, *sustituyendo* $u = g(x)$ podemos concluir que $du = g'(x)dx$ y por lo tanto

$$\int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c,$$

donde $F' = f$.
En general, la dificultad de este método radica en encontrar la expresión conveniente a sustituir.

Ejemplos: Integración por Sustitución

Ejemplo 42

Obtenga $\int (x^2+5)^{100} 2x dx$.

Solución 42

Sea $u = x^2 + 5 \implies du = 2xdx$. Por el método de sustitución tenemos

$$\int (x^2+5)^{100} 2x dx = \int u^{100} du = \frac{1}{101} u^{101} + c = \frac{(x^2+5)^{101}}{101} + c.$$

Ejemplo 43

Obtenga $\int \frac{\exp(x) + \exp(2x)}{\sqrt[3]{(1+\exp(x))^2}} dx$.

Solución 43

Sea $u = [1+\exp(x)]^2 \implies du = 2[\exp(x) + \exp(2x)]dx$. Luego

$$\int \frac{\exp(x) + \exp(2x)}{\sqrt[3]{(1+\exp(x))^2}} dx = \int \frac{0{,}5du}{\sqrt[3]{u}} dx = \frac{3}{4} u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4} [1+\exp(x)]^{\frac{4}{3}} + c.$$

Propuestos: Integración por Sustitución

Propuesto 43

Determinar cada integral, usando el método de sustitución *según corresponda*. Comprobar el resultado usando derivadas.

1. $\displaystyle\int \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$
2. $\displaystyle\int \sqrt{1-x}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1+3xy}{y^2}dy$
4. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x+1}dx$
5. $\displaystyle\int (1+x)\sqrt{x^2+2x-5}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{\ln(5x)}{x}dx$
7. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{2-\sqrt[3]{x}}{x^2}}\,dx$
8. $\displaystyle\int x\sqrt{1-2x}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x+1)^2}dx$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}dx$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^2}}dx$
12. $\displaystyle\int \exp(x)\sqrt{\exp(x)-1}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{1-2\ln(5x)}{x}dx$
14. $\displaystyle\int \frac{\ln(x-1)}{2x-2}dx$

Recordatorio: Derivada de un Producto

Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables.
Sabemos que

$$\frac{d(u(x)v(x))}{dx} = u(x)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{du(x)}{dx}.$$

Luego, integrando ambos lados de la igualdad llegamos a

$$\int \frac{d(u(x)v(x))}{dx}dx = \int u(x)\frac{dv(x)}{dx}dx + \int v(x)\frac{du(x)}{dx}dx$$

$$u(x)v(x) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x)$$

Finalmente, reordenamos los términos y obtenemos

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Integración por Partes (a.k.a. Teorema de la Vaca)

El método de Integración por Partes consiste en descomponer una integral en *dos partes*, u y dv, tal que se cumpla que

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Mnemotecnia: ***u**n **d**ía **v**i **u**na **v**aca **sin cola** **v**estida **d**e **u**niforme*.

Figura 43: Un día vi una vaca sin cola vestida de uniforme

Ejemplo: Integración por Partes

Ejemplo 44

Obtenga $\int x \ln x dx$.

Solución 44

Sea $u = \ln x$ y $dv = xdx$, de modo que $du = \dfrac{dx}{x}$ y $v = \dfrac{x^2}{2}$.
Luego, integrando por partes se tiene

$$\int x \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$$

Propuesto 44

Calcular $\int \ln x dx$.

Ejemplo: Integración por Partes^2

Ejemplo 45

Obtenga $\int x^2 \exp(x) dx$.

Solución 45

Sea $u = x^2$ y $dv = \exp(x)dx$, de modo que $du = 2xdx$ y $v = \exp(x)$. Luego, integrando por partes se tiene que

$$\int x^2 \exp(x) dx = x^2 \exp(x) - 2 \int \exp(x) x dx. \tag{3}$$

Debemos integrar por partes de nuevo para obtener $\int \exp(x) x dx$...
Sea $U = x$ y $dV = \exp(x)dx$, tal que $dU = dx$ y $V = \exp(x)$, tal que

$$\int \exp(x) x dx = x \exp(x) - \int \exp(x) dx = x \exp(x) - \exp(x) + c. \tag{4}$$

Reemplazamos (4) en (3) y obtenemos

$$\int x^2 \exp(x) dx = x^2 \exp(x) - 2x \exp(x) + 2 \exp(x) + C.$$

Recomendaciones al Integrar por Partes

- Pensar bien en la elección de u y dv.
- Considerar que al elegir u se va a generar una integral que contenga du, es decir, integrar algo con du **debe** ser más sencillo que con u. Si no, no hace sentido aplicar la regla.
- En general, la expresión de u se va a *"simplificar"*, mientras que la de dv se va a *"complejizar"*.
- Notar que si u es un logaritmo natural, se puede convertir en una función cociente du. Esto puede ser útil para simplificar expresiones.
- Al contrario, al considerar una exponencial como u o dv, no han de esperarse grandes cambios.
- Regla útil para elegir u: LIATE (**L**ogaritmos, ~~**I**nversas trigonométricas~~, **A**ritméticas, ~~**T**rigonométricas~~, **E**xponenciales).

Propuestos: Integración por Partes

Propuesto 45

Determinar cada integral, usando integración por partes.
Comprobar el resultado usando derivadas.

1. $\displaystyle\int x\exp(-x)dx$
2. $\displaystyle\int x^2\exp(x)dx$
3. $\displaystyle\int \ln(3x)dy$
4. $\displaystyle\int (\ln x)^3 dx$
5. $\displaystyle\int 2x2^x dx$
6. $\displaystyle\int x\ln(x^2)dx$
7. $\displaystyle\int 7x^2\ln(4x)dx$
8. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

Propuesto 46

Integrar $\displaystyle\int x\sqrt{4+x}dx$ por los siguientes métodos:

1. Sustitución con cambio de variable $u=\sqrt{4+x}$.
2. Sustitución con cambio de variable $u=4+x$.
3. Por partes con $dv=\sqrt{4+x}dx$.

Módulo 17

▸ Volver al Inicio de la Sección

Recordatorio: Fracciones

Siempre que tenemos una fracción cuyo numerador y denominador son polinomios (factorizables), está la opción de *separar* la fracción original como una suma o resta de *fracciones parciales*.

En efecto, tomemos como ejemplo a la fracción $\dfrac{x+2}{x^2+7x+12}$.

El denominador se puede factorizar, pues $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$.

Así, es razonable pensar que la fracción se puede separar en la suma o resta de dos fracciones: una con denominador $x+3$ y otra con denominador $x+4$.

Sin embargo, *¿qué valores deberían tomar los numeradores?*

Como no sabemos a priori cúales son los numeradores, podemos pensar que éstos pueden ser polinomios genéricos, con incógnitas que nosotros deberíamos determinar.

Sin embargo, estos polinomios genéricos que pondremos en los numeradores deben tener un grado menor que sus respectivos denominadores (*¿Por qué?*).

Recordatorio: Fracciones (cont.)

Así, planteamos que $\dfrac{x+2}{x^2+7x+12} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x+4}$.

Sumando tenemos $\dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x+4} = \dfrac{Ax+4A+Bx+3B}{(x+3)(x+4)} = \dfrac{(A+B)x+4A+3B}{x^2+7x+12}$.

Pero como esta última expresión debe ser equivalente a la fracción original, se debe cumplir que $x = (A+B)x$ y que $2 = 4A+3B$.

Con esto planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 1 \\ 4A & + & 3B & = & 2 \end{array}\right|$$

Resolviéndolo llegamos a que $A = -1$ y $B = 2$.

Por lo tanto, $\dfrac{x+2}{x^2+7x+12} = -\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{x+4}$.

¿Qué tiene que ver esto con integrales?

Integración por Fracciones Parciales

Cuando tenemos una integral de la forma $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+7x+12}dx$, no es trivial deducir la solución, pues no tiene exactamente la forma de una primitiva conocida.

Sin embargo, al calcular $\displaystyle -\int \frac{1}{x+3}dx + 2\int \frac{1}{x+4}dx$, que es una expresión equivalente, notamos que ambas integrales cumplen con ser logaritmos (ver Solución 39).

Por lo tanto,

$$\int \frac{x+2}{x^2+7x+12}dx = -\int \frac{1}{x+3}dx + 2\int \frac{1}{x+4}dx = -\ln|x+3| + 2\ln|x+4| + c.$$

Este razonamiento corresponde al método de fracciones parciales.

Observación: En general, el resultado de este método es un logaritmo natural[9].

---

[9] Cuando los denominadores son afines. Ya veremos qué pasa cuando no lo son.

Ejercicio: Fracciones Parciales

Ejemplo 46

Calcule $\int \frac{4x+6}{x^3+3x^2+2x}dx$.

Solución 46

En efecto,

$$\frac{4x+6}{x^3+3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+2A}{x^3+3x^2+2x}.$$

Luego, resolvemos $\left.\begin{array}{ccccccc} A & + & B & + & C & = & 0 \\ 3A & + & 2B & + & C & = & 4 \\ 2A & & & & & = & 6 \end{array}\right|$ y obtenemos

$A=3$, $B=-2$ y $C=-1$. Por lo tanto, $\int \frac{4x+6}{x^3+3x^2+2x}dx =$

$$3\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2} = 3\ln|x| - 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$$

Distintas Fracciones Parciales

Al descomponer las fracciones podemos encontrarnos con casos donde los denominadores no sean afines, es decir, podemos encontrar polinomios de grado mayor a 1.

Por ejemplo, podemos pensar en la fracción $\dfrac{3x^2+5x+1}{x^3-1}$. En este caso, el denominador sólo se puede factorizar como $(x-1)(x^2+x+1)$, es decir, tendremos un denominador cuadrático en alguna de nuestras fracciones parciales.
Otra posibilidad es que tengamos un denominador que sea equivalente a una expresión más sencilla, *elevada* a un grado mayor que 1. Por ejemplo $\dfrac{x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$, donde el denominador equivale a $(x-1)^3$. En esta situación, es necesario que incorporemos a $x-1$, $(x-1)^2$ y $(x-1)^3$, todos como denominadores de tres fracciones parciales distintas.
Así, hay una infinidad de casos distintos...

Fracciones Parciales y sus Factores

El resumen con todas las formas de plantear fracciones parciales se encuentra en la Tabla 3.

Tabla 3: Factores y Fracciones Parciales

Forma del Factor	**Forma de la Fracción Parcial**
Lineal único: $ax+b$	$\dfrac{A}{ax+b}$
Lineal repetido: $(ax+b)^n$	$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{A_n}{(ax+b)^n}$
Cuad. único: ax^2+bx+c	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
Cuad. rep.: $(ax^2+bx+c)^n$	$\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\dfrac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$
$\vdots$	$\vdots$
$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$	$\dfrac{A_0+A_1x+\cdots+A_{k-1}x^{k-1}}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k}$

Ejemplo: Fracciones Parciales

Ejemplo 47

Obtenga $\displaystyle\int \frac{2x^2-1}{x^3+x^2}dx$

Solución 47

Sea $\displaystyle\frac{2x^2-1}{x^3+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$.
Luego, $Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2 = 2x^2 - 1$.
Resolviendo el sistema correspondiente se obtiene $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$.
Por lo tanto,

$$\int \frac{2x^2-1}{x^3+x^2}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| + x^{-1} + \ln|x+1| + c.$$

Módulo 18

Volver al Inicio de la Sección

Área Bajo una Función

Figura 44: Recorte de la PSU (Admisión 2005)

DEMRE N°07 MATEMATICAS 6/2/04 13:33 Página 10

10

38. En el plano de la figura 3, se muestra el polígono ABCD, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s) ?

I) El perímetro del polígono es $8\sqrt{2}$.
II) Cada diagonal del polígono mide 4.
III) El área del polígono es $4\sqrt{2}$.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

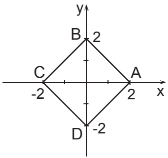


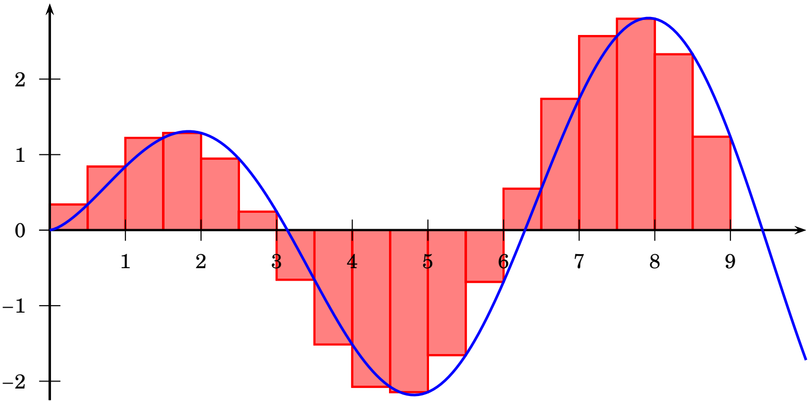
fig. 3

En general, no tenemos problemas con calcular áreas debajo de funciones afines. Pero, *¿cómo se calcula el área bajo una curva?*

Suma de Riemann

Supongamos que queremos calcular el área debajo de una función limitada en algún intervalo por el eje de las abscisas.
Podríamos intentar aproximar dicha superficie a través de *muchos* rectángulos *muy* delgados, tal como se muestra en la Figura 45.

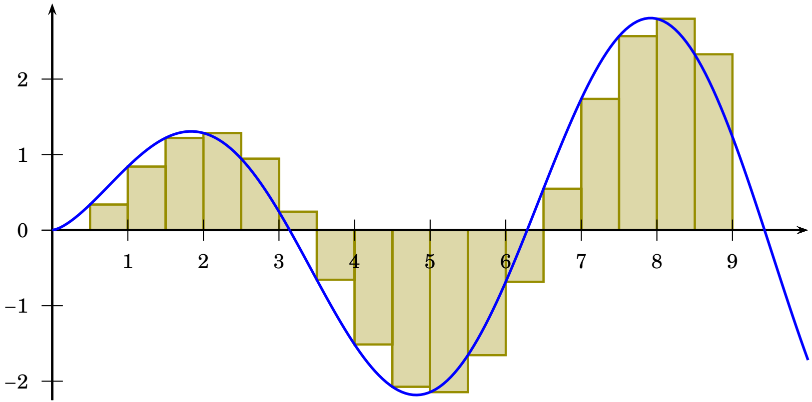
Figura 45: 18 Rectángulos Emulando a $f(x) = \sqrt{x}\sin x$ en $[0, 9]$ (derecha)



Suma de Riemann

Supongamos que queremos calcular el área debajo de una función limitada en algún intervalo por el eje de las abscisas.
Podríamos intentar aproximar dicha superficie a través de *muchos* rectángulos *muy* delgados, tal como se muestra en la Figura 46.

Figura 46: 18 Rectángulos Emulando a $f(x) = \sqrt{x}\sin x$ en $[0,9]$ (izquierda)



Suma de Riemann (cont.)

Ejemplo 48

Calcule el área total de los 4 rectángulos con bases iguales que emulan a $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,2]$ por la derecha. Repita el proceso con 20 rectángulos. ¿Qué ocurre cuando la cantidad de rectángulos tiende a infinito?

Recordatorio MEM105: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solución 48

4 rectángulos: $0{,}5\left(0{,}5^2+1^2+1{,}5^2+2^2\right)=3{,}75$.

20 rectángulos (ver Figura 47) :

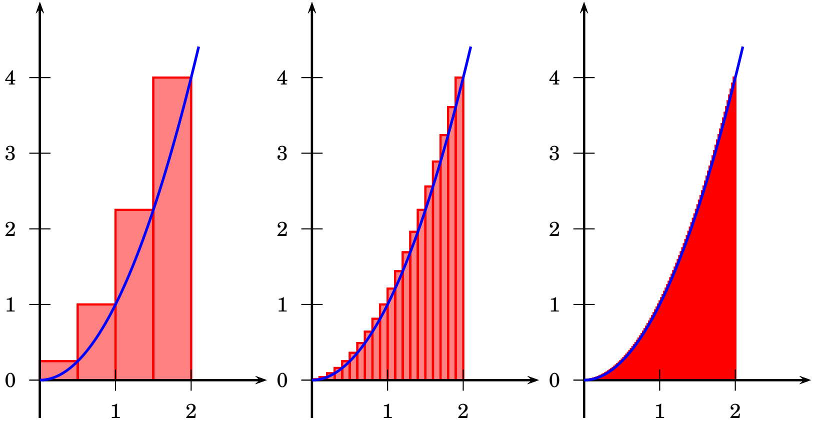
$$0{,}1\left(0{,}1^2+0{,}2^2+0{,}3^2+\cdots+1{,}9^2+2^2\right)=0{,}1\left[\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{k}{10}\right)^2\right]=2{,}87.$$

n rectángulos: $\dfrac{2}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2k}{n}\right)^2\right]=\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{4}{n^2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Obteniendo el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos $\dfrac{8}{3}$.

Gráfico: Suma de Riemann

Figura 47: 4, 20 y 100 Rectángulos Emulando a $f(x) = x^2$ en $[0, 2]$



Integrales Definidas

Calcular el área anterior no requiere tanto esfuerzo...

Ejemplo 49

Sea $\int x^2 dx = F(x) + c$. Calcule $F(2) - F(0)$.

Solución 49

Sabemos que $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$. Luego, $F(2) - F(0) = \frac{8}{3}$.

Definición 42

(Segundo Teorema Fundamental del Cálculo) Si $\int f(x)dx = F(x) + c$, entonces la **integral definida** de $f(x)$ entre a y b se define como

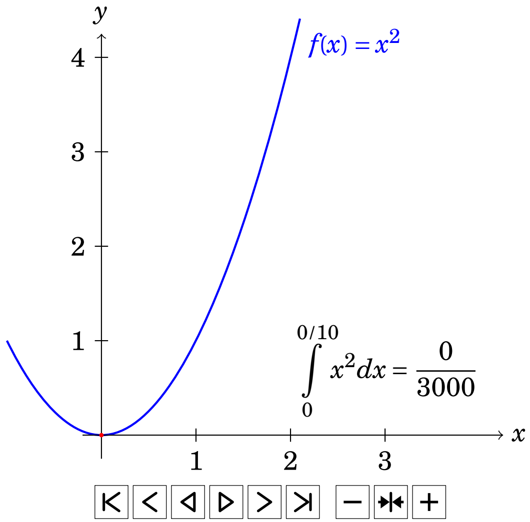
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(k \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right).$$

Esta expresión puede ser utilizada para calcular el área bajo la función $f(x)$ entre a y b, los *límites de integración*.

Observación: ¡Ya no hay constante! *¿Por qué?*

Animación: Área Bajo una Curva

Figura 48: Área bajo $f(x) = x^2$ ante distintos intervalos



Ejemplo: Integral Definida

Ejemplo 50

Obtenga $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$.

Solución 50

Sea $u = \ln x$, de modo que $du = \dfrac{dx}{x}$.

Así, $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c = F(x) + c$.

Luego, $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = F(x)\Big|_1^e = \left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right)\Bigg|_1^e = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$.

Propuesto 47

Obtenga el área del trapecio formado por $y = 4 - x$, $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$ *como en la PSU*. Compruebe su resultado usando integrales.

Integrales Definidas y Sustitución

Es importante notar que cuando se desea computar una integral definida utilizando el método de sustitución, *los límites de integración también se sustituyen*.

Por ejemplo, si queremos obtener la integral del Propuesto 1 entre 5 y 12, $\int_5^{12} x\sqrt{4+x}dx$, al plantear $u=\sqrt{4+x}$, también hay que considerar que $x=5 \implies u=3$ y que $x=12 \implies u=4$.

Por lo tanto, resolviendo por el método de sustitución tenemos

$$\int_5^{12} x\sqrt{4+x}dx = \int_3^4 (u^2-4)\cdot u\cdot 2udu$$

$$=\left(2\frac{u^5}{5}-8\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_3^4 = \left(2\cdot\frac{1024}{5}-8\cdot\frac{64}{3}\right)-\left(2\cdot\frac{243}{5}-8\cdot\frac{27}{3}\right)=\frac{781}{5}-\frac{37}{3}.$$

Sin cambiar los límites de integración, el resultado es erróneo.

Propuesto 48

$$\text{Calcule } \int_{\exp(\exp(e))}^{\exp(\exp(\exp(e)))} \frac{dx}{x\cdot\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))\cdot\ln(\ln(\ln(x)))}.$$

Áreas Negativas

Cuando los referimos a que una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ permite calcular el área bajo una curva, hacemos alusión a que calcula la superficie comprendida *por debajo de* $f(x)$ y *por encima del eje* x entre los límites de integración. (Pensar en integrar $f(x) - 0$.)
Pero, *¿qué ocurre cuando* $f(x)$ *está por debajo del eje* x*?*

Ejemplo 51

Calcule $A = \int_1^2 (x^2 - 5)dx$.

Solución 51

$$A = \int_1^2 (x^2 - 5)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 5x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - 10 - \frac{1}{3} + 5 = -\frac{8}{3}.$$

Intuición: En efecto, como $y = 0$ está por sobre $y = x^2 - 5$ en el intervalo $[1,2]$, el *gran rectángulo* que forma la integral de $y = 0$ tiene mayor superficie que la *gran figura curvada* que forma $y = x^2 - 5$, por lo que la *resta* $f(x) - 0$ es negativa.

Áreas Negativas (cont.)

Como obviamente buscamos calcular áreas positivas, si quisiéramos computar la superficie comprendida entre $y=0$ e $y=x^2-5$, tendríamos que encontrar una figura equivalente donde la función esté por sobre el eje de las abscisas.

La candidata natural es la función inversa aditiva, es decir, $-x^2+5$. Por lo tanto, la superficie comprendida entre x^2-5 y el eje de las abscisas es $\displaystyle\int_1^2(-x^2+5)dx=\frac{8}{3}=-A$.

En resumen, cuando queremos calcular el *área que genera una función negativa*, computamos el *negativo de la integral definida*.

Observación: Notar que otra forma de hacer esto es invirtiendo los límites de integración, pues si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$, entonces $\displaystyle\int_b^a f(x)dx=F(x)\Big|_b^a=F(a)-F(b)$, es decir, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

¿Cómo podemos calcular el área de una función que tiene tramos positivos y tramos negativos?

Separación de Tramos

Además de preservar las Proposiciones 33 y 34 (suma, resta y ponderación por escalar), las integrales definidas tienen una propiedad adicional muy útil e intuitiva.

Proposición 35

Una integral definida sobre un intervalo puede descomponerse como la suma de dos (o más) integrales sobre tramos complementarios. Así, si $c \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

La idea detrás de ello es que la superficie total bajo la curva puede descomponerse como la suma de (sub)superficies que la componen. Por lo tanto, si quisiéramos calcular un área, debemos separar los tramos donde la función es positiva de los tramos donde la función es negativa, cambiando el signo de estos últimos (puesto que en ellos se tendría el inverso aditivo del área).

Ejemplo: Áreas por Tramos

Ejemplo 52

Compute $\int_{-1}^{1} 4x^3 dx$. Luego calcule el área de la superficie comprendida entre $4x^3$ y el eje x. Grafique.

Solución 52

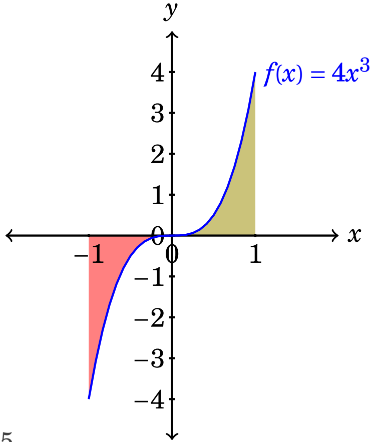
$\int_{-1}^{1} 4x^3 dx = 1^4 - (-1)^4 = 0.$

Sin embargo, para calcular el área debemos considerar que entre -1 y 0 la función es negativa, mientras que entre 0 y 1 es positiva (ver Figura 49). Por lo tanto, el área de la superficie comprendida es

$$-\int_{-1}^{0} 4x^3 dx + \int_{0}^{1} 4x^3 dx$$

$$= -(0-1) + (1-0) = 2.$$

Figura 49: Área entre $4x^3$ y el eje x



Área entre dos Funciones

Análogamente, también podemos calcular áreas delimitadas entre dos funciones.
El razonamiento es idéntico a lo anterior: sólo habrá que calcular la integral definida de la función mayor menos la función menor.
Por lo tanto, si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, el área comprendido entre ambas funciones es $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

Ejemplo 53

Calcule el área entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0,1]$.

Solución 53

Como $x^2 \geq x^3$ en $[0,1]$, el área es

$$\int_0^1 [x^2 - x^3]dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

¿Qué pasa si una función es mayor o igual que la otra en algunos intervalos pero no en otros?

(1^{er}) Teorema Fundamental del Cálculo

Hasta ahora hemos considerado los límites de integración como constantes. Sin embargo, perfectamente podrían ser variables.
Por ejemplo, las donaciones instantáneas hacia la Teletón en las *27 horas de amor* de aproximaban a una función creciente $f(t)$ que dependía del tiempo $t \in [0,27]$. Si quisiéramos calcular las donaciones totales, bastaría con calcular $\int_0^{27} f(t)dt$.
Sin embargo, podríamos estar interesados en obtener las *donaciones totales hasta la hora x*, en cuyo caso, éstas podrían denotarse por $D(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde claramente esto es una función de x.
Ahora bien, *¿cuál es la tasa de cambio instantánea de las donaciones en el momento x?* Para responder esto, podemos hacer uso del (primer) Teorema Fundamental del Cálculo (TFC).

Proposición 36

Si $f(t)$ es integrable y a es una constante, $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

Generalización: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$.

Integrales Impropias

Por último, hasta ahora hemos supuesto que los límites de integración son finitos. Esto tampoco tiene por qué ser así.

Definición 43

Si alguno de los límites de integración de una integral definida es ($\pm$) infinito (o ambos lo son), diremos que dicha integral es **impropia**.

Para calcular integrales impropias, basta con calcular el límite de dicha integral cuando el/los límite(s) correspondiente(s) tiende(n) a ∞ (o $-\infty$ según corresponda).

Ejemplo 54

Obtenga $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \exp(x)dx$.

Solución 54

$$\int_{-\infty}^{0} \exp(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \exp(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \exp(x)|_{a}^{0} = 1-0 = 1.$$

Módulo 19

▸ Volver al Inicio de la Sección

Aplicación: Probabilidades

Ejemplo 55

Supongamos que la frecuencia con la que se consume un bien X, se modela mediante una función $f(x)$. Entonces, es posible determinar en forma cuantitativa el nivel de consumo promedio, como

$$\overline{X} = \int_{Dom_f} x \cdot f(x) dx,$$

que representa el área bajo la curva del producto entre la cantidad x que se consume del bien X y la frecuencia $f(x)$ con la que se consumen x unidades del bien X (similar a un promedio ponderado, que en este caso es continuo).
En este caso, Dom_f es el dominio sobre el cual la función descrita es válida.

Aplicación: Probabilidades

El volumen de venta diaria, en miles de litros, de una estación gasolinera es una variable que cambia todos los días y la densidad de probabilidad (frecuencia) con que se venden x miles de litros está definida por

$$f(x) = x \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right).$$

El dueño piensa ampliar la estación siempre y cuando la venta diaria media sea mayor a 800 litros de combustible.
¿Qué decisión debe tomar el dueño? Justifique adecuadamente su respuesta.
IND: Toda función de probabilidad debe acumular una probabilidad total de 1 al barrer todo su dominio. En otras palabras:

$$\int_{Dom_f} f(x)dx = 1$$

Definición de Variables

Solución 55

* Sea X la cantidad, en miles de litros de combustible, que puede vender la gasolinera en un día.
* Sea
$$\overline{X} = \int_{Dom_f} x \cdot f(x)dx$$
la cantidad promedio, en miles de litros de combustible, que vende en un día.

Planteamiento del Problema

* Si $\overline{X} > 0,8$ entonces debería ampliar la estación.
* Si $\overline{X} \leq 0,8$ entonces no debería ampliar la estación.

Desarrollo del Problema

En primer lugar hay que obtener Dom_f. Para ello nos apoyamos en la indicación y en la lógica de que no se pueden vender cantidades negativas, planteando lo siguiente:

$$\int_0^m f(x)dx = 1,$$

donde m es la máxima cantidad, en miles de litros de combustible, que puede vender la gasolinera en un día (por ejemplo, la capacidad total de su tanque de combustible).
Despejamos m:

$$\int_0^m x \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right) dx = 1$$

$$\frac{m^3}{3} + \frac{2m^2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow m = 1$$

Por lo tanto, la máxima capacidad de venta de la gasolinera es de 1000 litros de combustible, es decir, $Dom_f = x \in [0, 1]$.

Desarrollo y Resolución

Teniendo el dominio de la función de distribución, procedemos calculando el consumo promedio:

$$\overline{X} = \int_{Dom_f} x \cdot f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot x \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{4}{3}x^2\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{4}{9}x^3\right)_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{25}{36} < 0,8$$

Conclusión

Dado que la venta promedio es menor a 800 litros ($694,\overline{4}$) diarios, no se recomienda hacer la ampliación.

Aplicación: Excedentes

Ejemplo 56

Una economía competitiva está caracterizada por las siguientes curvas de oferta y demanda: $P = -\ln(Q) + 1$ y $P = \exp(Q-1)$.¿Cuál es el excedente del productor?
IND: La cantidad de equilibrio es 1.

Solución 56

Sabiendo que la cantidad de equilibrio es 1 ($Q^* = 1$), tenemos que el precio de equilibrio es 1 ($P^* = 1$).
Luego, el excedente del productor será toda la superficie comprendida entre $P = 1$ y $P = \exp(Q-1)$, esto es,

$$EP = \int_0^{Q^*} [P^* - Oferta]dQ = \int_0^1 [1 - \exp(Q-1)]dQ.$$

Integrando tenemos que el excedente del productor es

$$[Q - \exp(Q-1)]_0^1 = (1-1) - (0 - e^{-1}) = e^{-1}.$$

Aplicación: Maximización de Beneficios

Propuesto 49

Existen ciertas empresas como las de explotación minera o las de perforación de pozos petroleros que se tornan no rentables después de cierto periodo.
En tales operaciones, la tasa de ingreso temporal que está dada por $IMg(t) = dI/dt$ (digamos unidades monetarias por periodo) puede ser muy alta al inicio de la operaciones, pero puede decrecer a medida que transcurre el tiempo debido al agotamiento del recurso. Esto es, $IMg(t)$ a la larga se convierte en una función decreciente en el tiempo.
Por otra parte, la tasa de costo instantánea temporal $CMg(t)$ de operaciones es pequeña en un principio, pero con frecuencia se incrementa a medida que el tiempo transcurre, por el aumento en la dificultad de la extracción (entonces, $CMg(t)$ será una función creciente en el tiempo).
En tales operaciones existe un instante en que el costo de mantener la operación se hace más alto que el ingreso y la empresa empieza a perder dinero.

Aplicación: Maximización de Beneficios

Acá la decisión es cuánto tiempo debería funcionar antes de cerrar la empresa, siempre que maximice sus beneficios.
Para resolver este tipo de problemas, se debe obtener el tiempo necesario para acumular la mayor cantidad de beneficios, es decir

$$t^* = \arg\max_{t\geq 0} \int_0^t [IMg(t) - CMg(t)]dt.$$

En este caso, para obtener el tiempo óptimo se debe imponer la condición $IMg(t) = CMg(t)$, condición a partir de la cual se obtendrá t^*.
Al evaluar este valor (t^*) en la integral, se obtendrá el máximo beneficio acumulado de la empresa.

Aplicación: Maximización de Beneficios

Una empresa petrolera está pensando en abrir un nuevo pozo petrolero, el cual deberá durar al menos 7 años y debería generar unos 30 millones de dólares [MMU$].
La tasa de ingreso y el costo instantáneo del pozo se estiman en $IMg(t) = 17 - t^{2/3}$ y $CMg(t) = 5 + 2t^{2/3}$, respectivamente, donde $IMg(t)$ y $CMg(t)$ se miden en millones de dólares y t en años.
Determine si la empresa debería abrir el nuevo pozo. Justifique adecuadamente su respuesta.

Unidad 4

Volver al Inicio

Módulo 20

Volver al Inicio de la Sección

Introducción: Álgebra Lineal

El álgebra lineal se ocupa de estudiar las relaciones más simples que se puedan dar entre ciertas variables, a saber, las relaciones lineales.

Sin pérdida de generalidad, en todo lo que sigue trabajaremos básicamente sobre $\mathbb{R}^n$.

Recordatorio MEM105: El producto cartesiano $A \times B$ entre dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene todas las combinaciones de elementos en A con los elementos en B.

Por lo tanto, tenemos la siguiente definición...

Definición 44

El conjunto $\mathbb{R}^n$ se define como $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, es decir, es el conjunto que contiene todas las combinaciones ordenadas de n números reales.

Definición 45

Un **vector** es cualquier elemento de $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

Definición 46

Un **escalar** es cualquier elemento de $\mathbb{R}^n$ con $n = 1$ (cualquier número real).

Abstracción: Espacios Vectoriales

Definición 47

Un **espacio vectorial** es una *estructura algebraica* formada por un *conjunto no vacío* V (vectores), una *ley de composición interna* (suma) y una *ley de composición externa* (ponderación) sobre un *cuerpo* K (escalares) que cumple 8 propiedades:

1. Conmutatividad: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u} \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$
2. Asociatividad (interna): $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$
3. Existencia de neutro (interna): $\exists!\mathbf{0}\in V:\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u} \qquad \forall \mathbf{u}\in V$
4. Existencia de opuesto: $\forall \mathbf{u}\in V, \qquad \exists!-\mathbf{u}\in V:\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
5. Asociatividad (externa): $\alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{u})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\mathbf{u} \qquad \forall \alpha,\beta\in K, \forall \mathbf{u}\in V$
6. Existencia de neutro (externa): $\exists!1\in K:1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u} \qquad \forall \mathbf{u}\in V$
7. Distributividad (interna):
   $\alpha\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\cdot\mathbf{u}+\alpha\cdot\mathbf{v} \qquad \forall \alpha\in K, \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$
8. Distributividad (externa):
   $(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{u}=\alpha\cdot\mathbf{u}+\beta\cdot\mathbf{u} \qquad \forall \alpha,\beta\in K, \forall \mathbf{u}\in V$

Espacios y Subespacios Vectoriales

En base a la notación de la Definición 47, nos vamos a interesar sólo en los espacios vectoriales en donde $V := \mathbb{R}^n$ y $K := \mathbb{R}$.
De todos modos, es importante destacar que los vectores en un espacio vectorial no tienen por qué ser siempre n-tuplas de $\mathbb{R}^n$, perfectamente podrían ser otras cosas. Por ejemplo, el conjunto de todas las funciones cuadráticas sobre los reales también puede conformar un espacio vectorial (basta con pensar en las propiedades anteriores, se cumplen todas).
Sin embargo, lo que más nos va a importar en esta parte del curso es la definición de **subespacio vectorial**.

Definición 48

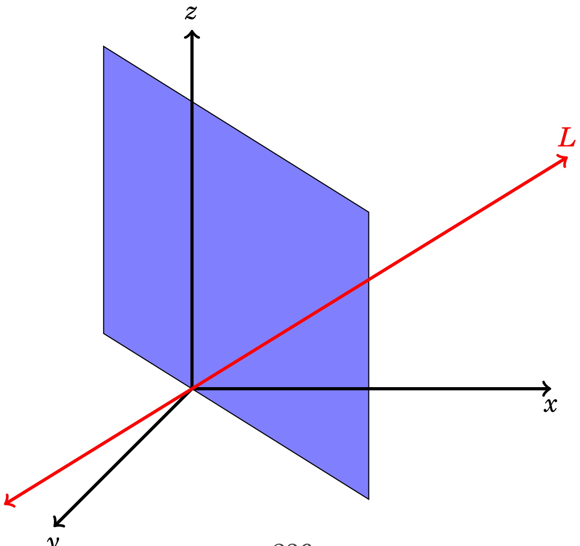
Un subconjunto distinto de vacío $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **subespacio vectorial** de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si

1. $\mathbf{0} \in U$,
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ y
3. $\alpha \mathbf{u} \in U \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in U$.

Observación: las últimas dos se resumen en $\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.

Gráfico: Algunos Subespacios de $\mathbb{R}^3$

Figura 50: Plano y una recta que pasan por el origen (son s.e.v. de $\mathbb{R}^3$)



Aterrizaje: Vectores

Los vectores pueden ser escritos de la siguiente forma[10]: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

es decir, se entienden generalmente como *columnas*.
Sin embargo, no es incorrecto escribirlos como *filas*. Cuando hagamos esto, diremos que se trata de un *vector fila*.
Como sea, todo vector $X \in \mathbb{R}^n$ está formado por n **coordenadas** (o **componentes** o **elementos**) $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
Con este sencillo instrumental, ya podemos entrar profundamente en el álgebra lineal.
Observación: Aparte de denotar vectores con mayúsculas (X) o negritas ($\mathbf{x}$), también se pueden denotar con una flecha encima: $\vec{x}$.

[10] Cambiamos la notación por simplicidad.

Ejemplo: Subespacio Vectorial

Ejemplo 57

Verifique si $W = \{(x,y,z)' \in \mathbb{R}^3 / 4x + 2y = 2z\}$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Solución 57

1. PDQ $\vec{0} \in W$. Evaluamos $\vec{w}_0 = (0,0,0)$:

$$4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 2 \cdot 0 \iff 0 = 0\surd$$

2. PDQ $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W, k \in \mathbb{R} \implies \vec{w}_1 + k\vec{w}_2 \in W$. En efecto, sea $\vec{w}_1 = (a,b,c) \in W$ y $\vec{w}_2 = (d,e,f) \in W$, de modo que $4a + 2b = 2c$ y $4d + 2e = 2f$.
   Luego $\vec{w}_1 + k\vec{w}_2 = (a + kd, b + ke, c + kf)$. Corroboramos la condición de pertenencia a W:

$$4(a + kd) + 2(b + ke) = 2(c + kf) \iff (4a + 2b) + (4d + 2e)k = 2c + 2fk$$

   Dada la hipótesis de pertenencia de $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$, lo anterior implica que: $2c + 2fk = 2c + 2fk\surd$

Por lo tanto, dado que se cumplen ambas condiciones, W es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Propuestos: Subespacios Vectoriales

Propuesto 50

Sea $V = \{(x_1, x_2, x_3)' \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = a\}$. Encuentre el valor de a para que V sea un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Propuesto 51

Pruebe que $\vec{0}_n \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son ambos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

Propuesto 52

Sean V y W dos subespacios vectoriales (no disjuntos) de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $V \cap W$ también es un subespacio vectorial.

Matrices

Definición 49

Una **matriz** A es un *arreglo rectangular de números reales* de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,k} \end{bmatrix},$$

donde cada *elemento* $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, con $i \in \{1, \cdots, n\}$ y $j \in \{1, \cdots, k\}$.
En este caso, $n \in \mathbb{N}$ corresponde al número de **filas** de la matriz y $k \in \mathbb{N}$ al número de **columnas** de la matriz, por lo que decimos que A es una matriz de $n \times k$ (en ese orden: filas×columnas).

Una matriz como la anterior pertenece al conjunto de matrices de $n \times k$, al cual llamaremos $\mathbb{R}^{n \times k}$. Además, simplificaremos la notación de las matrices refiriéndonos a ellas como $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times k}$.
Observación: Todos los vectores son matrices (de $n \times 1$), pero no todas las matrices son vectores.
(Otra) Observación: La matriz A puede ser vista como un arreglo de k vectores en $\mathbb{R}^n$. Esto será útil más adelante.

Módulo 21

▸ Volver al Inicio de la Sección

Operaciones con Vectores

Además de las operaciones de suma (resta) y ponderación por escalar que ya conocemos, a los vectores se les pueden aplicar otras operaciones muy útiles. Partiremos recordando la suma y la ponderación por escalar.

Proposición 37

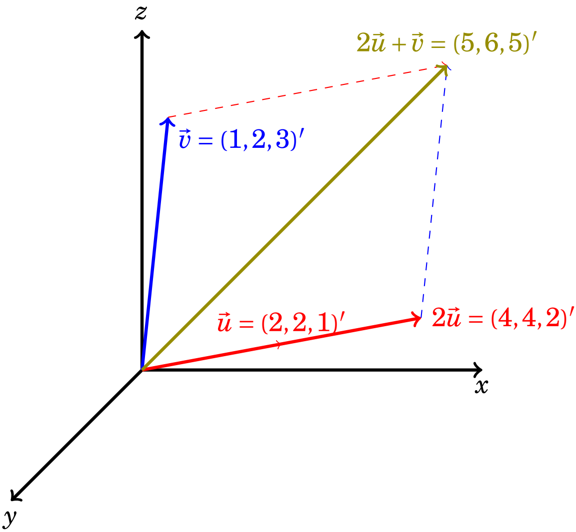
Sean $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *e* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *dos vectores en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *un escalar.*

Luego tenemos que

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{y que} \quad \alpha X = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Gráfico: Suma y Ponderación de Vectores

Figura 51: Suma y ponderación de vectores en $\mathbb{R}^3$



Transposición y Producto Interno

Definición 50

Dado un vector (columna) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, se define su **transpuesto** como el vector (fila) $X^T = X^t = X' := (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$.

Definición 51

Sean $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$. El **producto interno** entre X e Y se define como $X \cdot Y = X'Y = <X, Y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$.

Vale la pena notar que *el producto interno entre dos vectores es un escalar, no un vector.*

Norma y Distancia

Definición 52

La **norma** (euclidiana) de X es $\| X \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \in \mathbb{R}_+$.

Este valor no negativo corresponde a la *magnitud* del vector.

Observación: La norma euclidiana es equivalente a la raíz cuadrada del producto interno del vector consigo mismo.
Por lo tanto, también es correcto afirmar que

$$\| X \| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{X'X} = \sqrt{< X, X >}.$$

Definición 53

La **distancia** (euclidiana) entre X e Y es $d(X,Y) = \| X - Y \| \in \mathbb{R}_+$.

Observación: La norma euclidiana de X puede ser entendida como la distancia entre el vector y el origen.

Propiedades de las Operaciones

Proposición 38

Sean X, Y y Z vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

- $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$,
- $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y)$,
- $X \cdot Y = Y \cdot X$,
- $\vec{0} \cdot X = \vec{0}$,
- $\| X \| \geq 0$ *y* $\| X \| = 0 \iff X = \vec{0}$,
- $\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \|$ *(desigualdad triangular),*
- $\| \alpha X \| = |\alpha| \, \| X \|$ *($|\alpha|$ es el valor absoluto de α),*
- $d(X,Y) = d(Y,X)$,
- $d(X,Y) \geq 0$ *y* $d(X,Y) = 0 \iff X = Y$,
- $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$ *(desigualdad triangular) y*
- $X \cdot Y \leq \| X \| \| Y \|$ *(desigualdad de Cauchy Schwartz).*

Módulo 22

▸ Volver al Inicio de la Sección

Combinación Lineal

A partir de la suma y la ponderación por escalar que definimos anteriormente (Proposición 37), podemos usar vectores y escalares para generar nuevos vectores. Esta idea la sintetizamos en la siguiente definición.

Definición 54

Diremos que el vector Z es una **combinación lineal** del conjunto de vectores $\{X_j\}_{j=1}^{k} \in \mathbb{R}^n$, si

$$Z = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j X_j,$$

donde $\{\alpha_j\}_{j=1}^{k}$ son escalares reales.

Dicho de otro modo, una combinación lineal es simplemente una suma ponderada de vectores.

Observación: La combinación convexa de la Definición 35 es una combinación lineal con dos escalares no negativos que suman 1.

Ejemplo: Combinación Lineal

Ejemplo 58

Determine si el vector $(1,2,3)$ es combinación lineal de los vectores $(5,7,9)$ y $(8,10,12)$.

Solución 58

Para que esto sea así, deben existir escalares a y b tal que $(1,2,3) = a(5,7,9) + b(8,10,12)$, i.e. tal que $1 = 5a + 8b$, $2 = 7a + 10b$ y $3 = 9a + 12b$.
Sumando las primeras dos ecuaciones tenemos que $3 = 12a + 18b$.
Igualando con la última tenemos $12a + 18b = 9a + 12b \iff a = -2b$.
Evaluamos esto en las identidades y obtenemos que $a = 1$ y $b = -\dfrac{1}{2}$.
En efecto, $(5,7,9) - \dfrac{1}{2}(8,10,12) = (1,2,3)$, por lo que el vector $(1,2,3)$ sí es combinación lineal de los vectores $(5,7,9)$ y $(8,10,12)$.

Propuesto 53

Demuestre que el cero vectorial en $\mathbb{R}^n$ es combinación convexa de cualquier conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$.

Dependencia e Independencia Lineal

Utilizando la Definición 54, podemos identificar si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o linealmente independiente...

Definición 55

El conjunto de vectores $\{X_j\}_{j=1}^{k} \in \mathbb{R}^n$ es **linealmente independiente** si cuando $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j X_j = 0$ es porque necesariamente $\{\alpha_j\}_{j=1}^{k}$ son todos igual a cero.

Dicho de otro modo, un conjunto de vectores es linealmente dependiente si la única combinación lineal entre ellos que genera al cero vectorial es una con sólo escalares igual a cero.

Definición 56

El conjunto de vectores $\{X_j\}_{j=1}^{k} \in \mathbb{R}^n$ es **linealmente dependiente** si no es linealmente independiente, i.e. existe $\{\alpha_j\}_{j=1}^{k}$, donde al menos un escalar es distinto de 0, tal que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j X_j = 0$.

Ejercicio: Dependencia Lineal

Ejemplo 59

Demuestre que si $\mathbb{R}^n \ni Z \neq \vec{0}$ es una combinación lineal de $\{X_j\}_{j=1}^{k} \in \mathbb{R}^n$, entonces el conjunto formado por Z y $\{X_j\}_{j=1}^{k}$ es linealmente dependiente.

Solución 59

En efecto, tenemos que $Z = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j X_j$, donde al menos uno de los α_j es distinto de cero, pues de lo contrario Z sería $\vec{0}$.

Luego, restamos Z y obtenemos $-Z + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j X_j = 0$, de modo que existen al menos dos ponderadores distintos de cero (-1 y al menos un escalar que aseguraba que Z fuese distinto de $\vec{0}$).
Por lo tanto, el conjunto es linealmente dependiente.

Propuesto 54

Demuestre que cualquier conjunto que contiene el cero vectorial en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente.

Propiedades: Independencia Lineal

Proposición 39

Cualquier conjunto de n (o más, pero nunca menos) vectores linealmente independientes puede generar (a través de alguna combinación lineal) a cualquier vector en $\mathbb{R}^n$.

Definición 57

Una **base** de un espacio V es cualquier conjunto de vectores linealmente independientes que puede generar al espacio, i.e. puede generar a cualquiera de sus elementos a través de alguna combinación lineal.

Definición 58

La cantidad mínima de vectores que puede tener una base de un espacio se define como la **dimensión** del espacio.

Módulo 23

Volver al Inicio de la Sección

Transposición de Matrices

Al igual que con los vectores, las matrices también se pueden transponer. La notación es igual a la expuesta en la Definición 50...

$$\text{Transpuesta de } M = M' = M^t = M^T$$

Una gracia de la transposición de una matriz es que todas sus filas pasan a ser columnas y todas sus columnas pasan a ser filas.
Por causa de lo anterior, al transponer una matriz, cualquier submatriz de ella también se transpone, tal como en la Figura 52.

Figura 52: Matriz (y Submatriz) Transpuesta

$$M = \begin{array}{c} N \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{\text{Transpuesta}} M^T = \begin{array}{c} N^T \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{array}\right) \end{array}$$

Suma, Ponderación y Producto

Similarmente, las matrices se pueden sumar (restar) y ponderar por escalares. Al igual que en la Proposición 37...

Proposición 40

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ dos matrices de iguales dimensiones y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un escalar. Luego, $A + B := [a_{i,j} + b_{i,j}]$ y $\alpha A := [\alpha_{i,j}]$.

La multiplicación entre dos matrices es un poco menos intuitiva...

Proposición 41

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ dos matrices tal que la cantidad de columnas de $A = [a_{i,k}]$ equivale a la cantidad de filas de $B = [b_{k,j}]$.

Luego, $AB = C \in \mathbb{R}^{n\times q}$ tal que $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

Esto quedará más claro con la Figura 53 y la Figura 54.

Observación: ¡La multiplicación matricial **no es conmutativa**!

(Otra) Observación: *Esto se parece al resultado de muchas combinaciones lineales puestas una al lado de otra.*

(Otra) Observación (más): Ahora debería hacer sentido la notación $X'Y$ para el producto interno entre dos vectores.

Diagrama: Multiplicación Matricial

Figura 53: Producto entre dos matrices

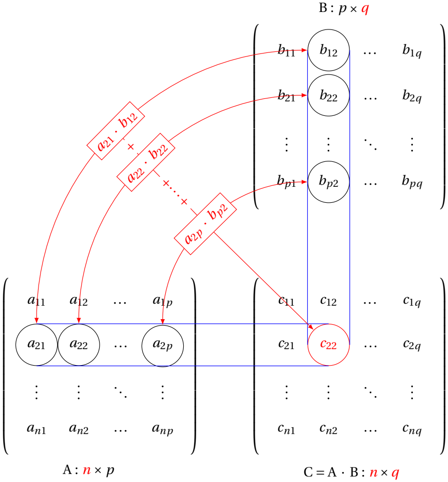
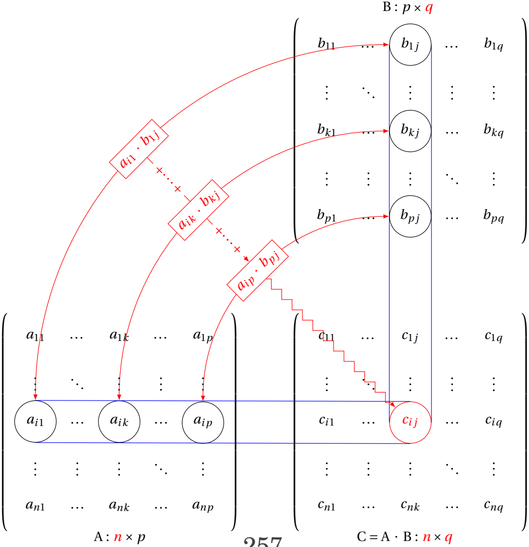


Diagrama: Multiplicación Matricial

Figura 54: Producto entre dos matrices



Determinante de una Matriz

Teniendo claro que las matrices son finalmente un conjunto de vectores puestos como distintas columnas, podemos explotar una nueva definición sobre las matrices cuadradas (aquellas de dimensión $n \times n$).

Definición 59

Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz cuadrada de dos dimensiones definida por

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

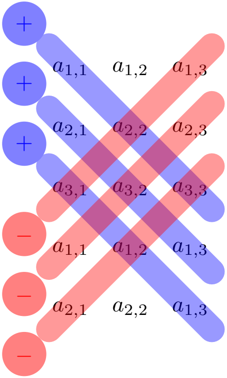
Luego, su **determinante** corresponde a $|A| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$.
Si A fuera de 3×3, entonces tendríamos que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ -a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} - a_{3,3}a_{1,2}a_{2,1} \end{matrix}.$$

Esto último es conocido como la **Regla de Sarrus**.
Observación: Sólo las matrices cuadradas tienen determinante.

Mnemotecnia: Regla de Sarrus

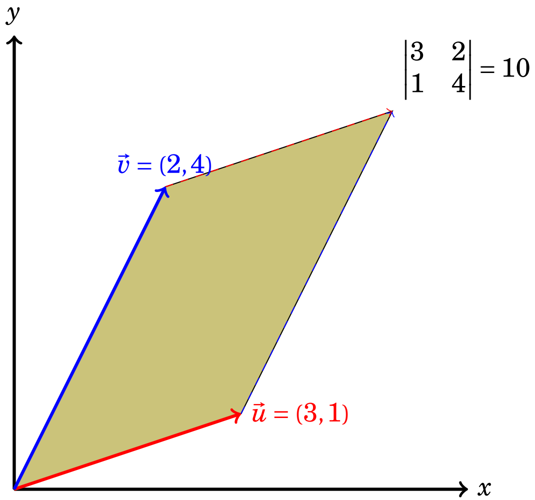
Figura 55: Regla de Sarrus



Observación: El (módulo del) determinante de una matriz de 2×2 corresponde al área del paralelogramo que forman sus dos vectores (columnas), mientras que el de una matriz de 3×3 corresponde al volumen del paralelepípedo que forman sus tres vectores.

Gráfico: Determinante de una Matriz

Figura 56: Determinante como área de un paralelogramo



Matriz Inversa

Definición 60

La **inversa** de una matriz cuadrada $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, caso exista, es otra matriz cuadrada M^{-1} tal que $M^{-1}M = I_n$, donde I_n es la **matriz identidad** del espacio $\mathbb{R}^{n\times n}$, definida como

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

es decir, I_n es una matriz cuadrada de $n \times n$ cuya diagonal está formada por 1s y el resto por 0s. Esta matriz es importante por ser el neutro multiplicativo de $\mathbb{R}^{m\times n}$ (sí, dice $m \times n$), i.e. cualquier matriz de $m \times n$ por I_n (por la derecha) da la misma matriz.

Proposición 42

*Una matriz M es invertible **si y sólo si*** $\det(M) \neq 0$.

Observación: Sólo las matrices cuadradas son invertibles.

Unidad 5

▸ Volver al Inicio

Unidad 5

Volver al Inicio

Problema 3

▸ Volver al Inicio

Problema 3: Enunciado

- **Contexto** introductorio (ex ante).
- Inducción del **problema**.
- Presentación de **variables**.
- Planteamiento de una **decisión**.
- Exigencia de **resultados** a partir de un **instrumento**.
- Especificación de una **conclusión**.
- Ayudas, hints, indicaciones...

Problema 3: Respuesta

- **Definir** variables, parámetros y/o funciones.
- **Plantear** el problema en base a las definiciones.
- **Desarrollar** el problema planteado.
- **Resolver** lo desarrollado.
- **Concluir** en base a lo resuelto.

Contexto e Inducción

Javiera y Diego son dueños de Funcionsilandia, el parque de diversiones más connotado de la ciudad. Lo distintivo de este parque es que todas sus atracciones siguen comportamientos identificados por funciones matemáticas... Javiera y Diego planean adquirir una nueva atracción (montaña rusa) para su parque de diversiones, llamada CYD (Continua Y Derivable).

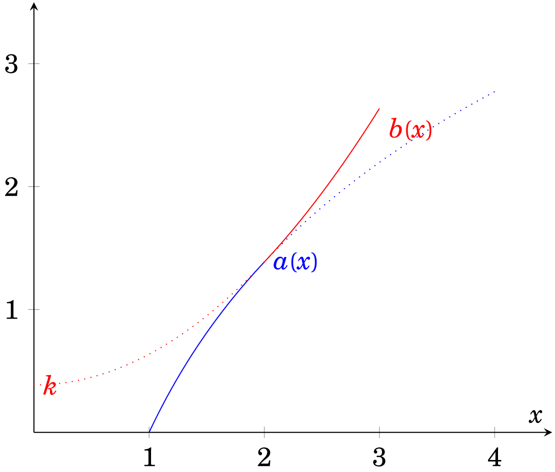
Variables

El comportamiento funcional de esta atracción es el de una función por tramos, donde el primer tramo (la primera pieza) se comporta como la función $a(x) = 2\ln x$ y el segundo tramo (la segunda pieza) se comporta como la función $b(x) = 0{,}25x^2 + k$, donde x corresponde a una medida de ancho de la atracción vista de perfil y ambas funciones miden la altura del riel.

Variables (cont.)

Esto queda representado en la Figura 57.

Figura 57: CYD (Continua Y Derivable)



Decisión, Resultados y Conclusión

Sin embargo, Javiera y Diego deben cumplir fuertes regulaciones de seguridad para poder estrenar su atracción. Particularmente, se les pide que el recorrido sea "suave", cosa de que los carros puedan seguir una trayectoria sin quiebres en los rieles. Considerando que k es una constante técnica que deben determinar, ¿podrán estrenar la atracción?

Indicación

IND: apoye su respuesta en la Figura 57 (particularmente al elegir los tramos).

Definición de Variables y Función

<u>Definición de variables y función:</u>
Sea $c(x)$ la función por tramos que define a la atracción y $c'(x)$ su derivada:

$$c(x)=\begin{cases} 2\ln x & \text{si } 1<x\leq 2 \\ 0{,}25x^2+k & \text{si } 2<x<3 \end{cases}$$

Sea k el parámetro técnico que podría permitir que la función sea suave (siempre derivable y continua).

Planteamiento del Problema

<u>Planteamiento del problema:</u>
El problema se define de esta manera:
-Si $\exists k : \forall x \in]1,3[\exists c'(x) \in \mathbb{R}$, entonces pueden estrenar la atracción.
-Si $\nexists k : \forall x \in]1,3[\exists c'(x) \in \mathbb{R}$, entonces no pueden estrenar la atracción.

Desarrollo

<u>Desarrollo:</u>
Como ambas subfunciones a y b son derivables y continuas en sus tramos, basta con encontrar las condiciones sobre k para que la función c sea derivable en torno a $x = 2$. La intuición detrás de esto es que cada riel por separado es suave, sin embargo, hay que encontrar la forma de que al unirlos la estructura completa también sea suave.

Derivando cada tramo en la vecindad de $x = 2$ tenemos que $c'(x) = \dfrac{2}{x}$ cuando $x \leq 2$ y $c'(x) = 0{,}5x$ cuando $x > 2$.

Luego, notamos que para $x = 2$ efectivamente ambas derivadas son iguales (a 1).

Por último, encontramos si existe o no algún valor de k tal que la función sea continua. Dado que los límites laterales para ambas funciones a y b existen, basta con igualar ambas funciones dado $x = 2$:

$$a(x = 2) = b(x = 2) \implies 2\ln 2 = 1 + k \implies \boxed{k = 2\ln 2 - 1}$$

Conclusión

Conclusión:
Por lo tanto, $\exists k : \forall x \in]1,3[\exists c'(x) \in \mathbb{R}$, por lo que Javiera y Diego podrán estrenar la atracción CYD.

Recomendaciones Generales

* Leer bien antes de empezar (subrayar puede ser útil).
* Identificar la información que sirve (separar distractores).
* Deducir el tipo de problema al cual uno se enfrenta ($\Rightarrow$ practicar).
* Imaginar la respuesta antes de escribirla (no lanzarse a escribir).
* Ser ordenado y estructurado en la respuesta (pensar en el ayudante que revisa).
* Corroborar siempre que se pueda (evitar arrastres).
* No borrar algo a menos que se tenga con que suplirlo (no responder siempre otorga nota 1,0).
* Tachar es mejor que borrar (es más rápido).
* Lápiz de tinta es mejor que de grafito (admite recorrección).
* Justificar adecuadamente (¿por qué?).
* Optimizar el tiempo ($IMg = CMg \Rightarrow$ óptimo, por ejemplo).

MEM155 - Métodos Matemáticos II

Mohit Karnani

Universidad de Chile

Otoño, 2016