

MEM155 - Métodos Matemáticos II

Mohit Karnani

Universidad de Chile

Otoño, 2016

Curso

Unidad 1

Unidad 2

Unidad 3

Unidad 4

Unidad 5

Unidad 1

Unidad 1

Módulo 2

Módulo 3

Módulo 4

Módulo 5

Módulo 6

Módulo 7

► [Volver al Inicio](#)

MÓDULO 2

► [Volver al Inicio de la Sección](#)

Definición de Incrementos

Definición 1

Sean x_1 y x_2 un primer y segundo valor de una variable x . Entonces el *incremento* de x es $\Delta x = x_2 - x_1$, esto es, el *cambio en el valor* de x .

Definición 2

Sea y una variable dependiente de x tal que $y = f(x)$, donde f está definida para los valores de x entre x_1 y x_2 y además se cumple que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Entonces el incremento de y es $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$, esto es, el cambio en el valor de $y = f(x)$.

Ejemplo: Cantidad Demandada

Ejemplo 1

Considere que la cantidad de cereal que demanda una familia a la semana depende del precio de venta de éste. Así, $q(p) = 1000p^{-1}$, donde q son los kilos de cereal demandados y p es el precio en pesos. Si el precio de venta pasa de 500 a 1000 pesos, ¿cuál es el incremento en la demanda?

Solución 1

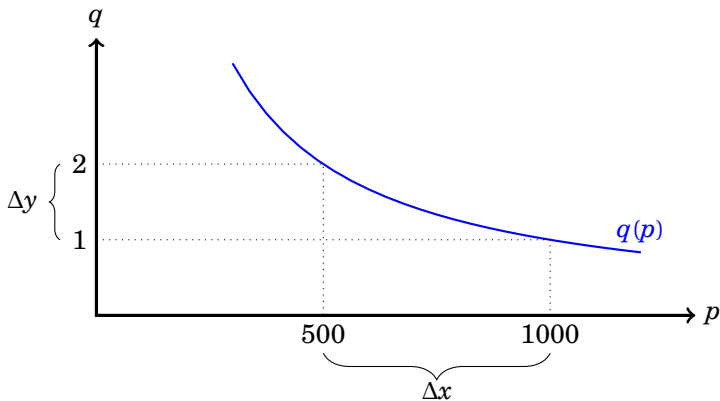
Utilizando la Definición 2, tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta q &= q_2 - q_1 \\ &= 1000p_2^{-1} - 1000p_1^{-1} \\ &= 1000 \cdot 1000^{-1} - 1000 \cdot 500^{-1} \\ &= 1 - 2 = -1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el incremento en la cantidad demandada es de -1 (se demanda un kilo menos).

Gráfico: Cantidad Demandada

Figura 1: Incremento en precio y cantidad demandada



Reordenando Términos

Notar que de la Definición 1 se desprende que $x_2 = x_1 + \Delta x$. Reemplazando esto en la Definición 2 y considerando que x_1 puede ser cualquier valor de x se obtiene

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (1)$$

La ecuación (1) puede ser útil para determinar el cambio en una variable dependiente y cuando la variable independiente x sufre un incremento de Δx , estando inicialmente en una situación descrita por el par (x, y) .

Propuesto 1

Considere la función $y = f(x) = x^3$. Determine Δy dado cualquier x inicial y cualquier incremento Δx .

Tasa de Cambio Promedio

Definición 3

La tasa (o razón) de cambio promedio de una función $y = f(x)$ definida en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ corresponde al incremento generado en y sobre el incremento en x , es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

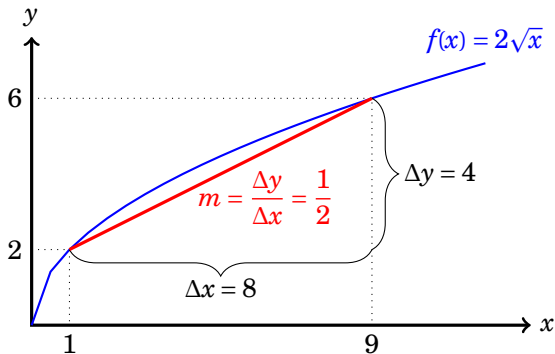
Esto equivale a *cuánto cambia en promedio la función* por cada una de las Δx unidades incrementadas. Esta tasa también es llamada cociente de la diferencia.

Notar que la ecuación (2) corresponde a la *pendiente de una recta* que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, o bien, por los puntos (x, y) y $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Interpretación Gráfica

La tasa de cambio promedio de la Definición 3 equivale a la *pendiente de la recta secante* que pasa por los puntos (x,y) y $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. A continuación un ejemplo gráfico:

Figura 2: Tasa de cambio como pendiente de una secante



Tasa de una Función Cuadrática

Ejemplo 2

Obtenga la tasa de cambio promedio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Solución 2

Utilizando la Definición 3 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.\end{aligned}$$

Notar que este resultado puede ser muy útil para dibujar funciones cuadráticas a mano alzada (de manera bastante precisa). (Why?)

Propuesto 2

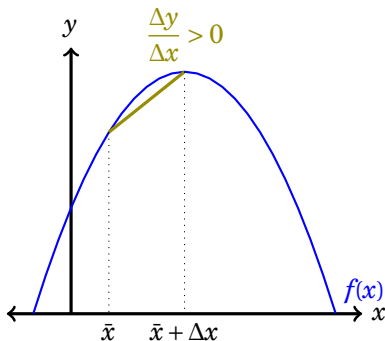
La recta secante que representa la tasa de cambio anterior es $y = x + 2$. Determine el intervalo sobre el que se obtuvo la tasa.

Análisis Marginal Discreto

Por ahora no hemos impuesto restricciones sobre la magnitud (el tamaño) de Δx . Sin embargo, es interesante notar qué ocurre cuando esta magnitud es *arbitrariamente pequeña* (marginal).

Por ejemplo, si una función es creciente en un intervalo, es de esperar que su tasa de cambio promedio sea positiva en él.

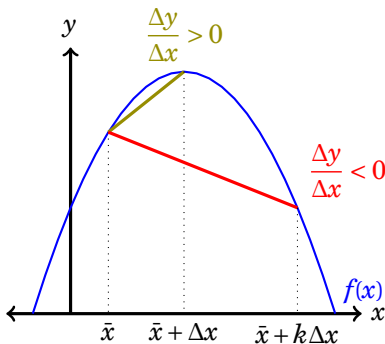
Figura 3: Tasa de cambio en un intervalo



Análisis Marginal Discreto (cont.)

Sin embargo, si ampliamos Δx de modo que el intervalo no sea siempre creciente, la conclusión sobre el signo de la tasa de cambio promedio *no se mantiene necesariamente*.

Figura 4: Tasa de cambio en otro intervalo



Acercamientos Arbitrarios

A pesar de que al rededor de \bar{x} la función $f(x)$ es creciente, se necesita un Δx *pequeño* para poder capturar esto en la tasa de cambio promedio.

Ejemplo 3

Suponga que $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ y que $\bar{x} = 1$. Obtenga las tasas de cambio promedio para $\Delta x \in \{2; 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,0001\}$.

Solución 3

La tasa de cambio es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2x\Delta x - \Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = -2x - \Delta x + 6$.

Evaluando los distintos valores de Δx con $x = \bar{x} = 1$ tenemos:

Cuadro 1: Tasa de cambio ante intervalos menores

Δx	2	1	0,5	0,1	0,01	0,0001
Tasa	2	3	3,5	3,9	3,99	3,9999

Así, vemos que la tasa de cambio promedio *tiende* a 4...

MÓDULO 3

► [Volver al Inicio de la Sección](#)

Tender a Algo

Definición 4

Una variable x *tiende* a un valor k cuando x toma una sucesión de valores que se acercan de manera arbitraria a dicho valor, sin que x tome el valor k . Cuando x se aproxima de esta manera a k , entonces podemos denotar la situación por $x \rightarrow k$ (x *tiende a* k).

Definición 5

Si la (sub)sucesión de valores que toma x es mayor que el valor k , entonces diremos que x *tiende por la derecha* a k , y lo denotamos por $x \rightarrow k^+$. Si los valores están por debajo, diremos que x *tiende por la izquierda* a k y lo denotamos por $x \rightarrow k^-$.

COMENTARIO: De manera similar, cuando una variable x tiende a un valor k , puede hacer que una función $f(x)$ tienda a algún valor L . Una primera (y apresurada) intuición nos diría que si $x \rightarrow k$, entonces $f(x) \rightarrow f(k) = L$. **¡Esto no es necesariamente cierto!**

Ejemplos de Sucesiones

Ejemplo 4

Suponga que x, y y z son tres variables que toman las siguientes sucesiones de valores $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1,$$

$$y_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} + 1 \text{ y}$$

$$z_n = \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} + 1.$$

Dado lo anterior, $x_n \rightarrow 1$, $y_n \rightarrow 1^+$ y $z_n \rightarrow 1^-$. Comente.

Solución 4

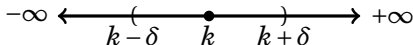
Verdadero. A medida que aumenta n , x_n se acerca arbitrariamente a 1, al igual que y_n y z_n . Sin embargo, la primera sucesión toma valores tanto por sobre como por debajo de 1, mientras que las últimas dos, que son subsucesiones de la primera, toman valores sólo por sobre 1 o sólo por debajo de 1, respectivamente.

Definición de Vecindad

Definición 6

Una vecindad o entorno de un punto $k \in \mathbb{R}$ es un intervalo en torno a k con semiamplitud δ , o bien, es el intervalo $(k - \delta, k + \delta)$, con $\delta > 0$. Así, cualquier x *suficientemente cerca* de k está en su vecindad si $|x - k| < \delta$ ¹.

Figura 5: Vecindad de k



Notar que, bajo la Definición 6, para que $x \rightarrow k$, es necesario que x tome valores en la vecindad de k para cualquier $\delta > 0$ (por pequeño que sea). Dicho de otro modo, si $x \rightarrow k$, entonces $|x_n - k| < \delta$ para una cantidad infinita de valores de n .

¹Se habla de la vecindad o entorno reducido de k a la vecindad que no incorpora al elemento k , es decir, a todos los $x \neq k$ tal que $|x - k| < \delta$.

Definición de Límite

Definición 7

(*Épsilon-Delta*) Sea $f(x)$ una función definida para todos los x en la vecindad de k , excepto posiblemente k (esto es, en la vecindad reducida). El límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow k$ es L si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - k| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

esto es, si la distancia entre $f(x)$ y L se puede hacer tan pequeña como se desee dejando a x suficientemente cerca de k .

Esto se denota

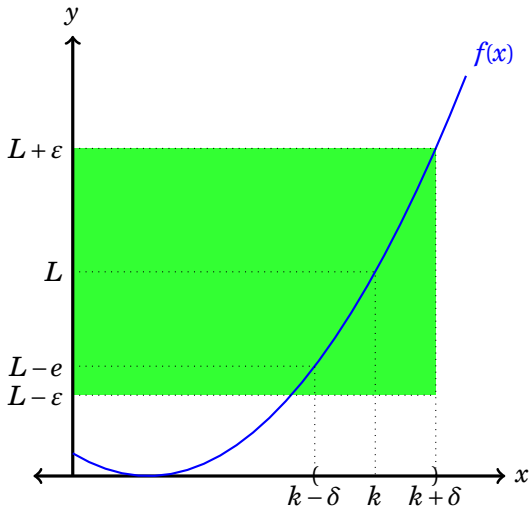
$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = L,$$

o bien

$$f(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow k.$$

Gráfico: Definición de Límite

Figura 6: Intuición Gráfica de la Definición Épsilon-Delta



Ejemplo: Límite por Definición

Ejemplo 5

Demuestre que el límite de $f(x) = 3x + 5$ cuando $x \rightarrow 1$ es 8.

Solución 5

Si $\lim_{x \rightarrow 1} 3x + 5 = 8$, entonces, por la Definición 7 se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \implies |3x + 5 - 8| < \varepsilon.$$

Luego, basta encontrar un δ que satisfaga la Definición 7 ante cualquier ε (en efecto, δ será función de ε).

Notamos que $|3x + 5 - 8| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon$.

Pero lo anterior equivale a indicar que $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Es decir, ante cualquier ε , podemos definir un $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ tal que se cumpla la definición para el límite indicado. □

Propuesto 3

Demuestre que el límite de $f(x) = x^2$ cuando $x \rightarrow 5$ es 25.

Existencia de un Límite

Definición 8

El límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow k$ es L si y sólo si los límites por la derecha y por la izquierda (con $x \rightarrow k^+$ y $x \rightarrow k^-$, respectivamente) son ambos iguales a L ². En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = L.$$

Lo anterior se cumple para todo polinomio y el límite corresponde a la función evaluada en $x = k$. Sin embargo, hay casos donde no se cumple...

²Esta definición aplica sólo cuando es posible obtener los límites laterales, es decir, cuando se trabaja sobre el dominio de la función. Un ejemplo donde no aplica esta definición es $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$: si bien el límite por la derecha es 0, el límite por la izquierda no existe (x no puede ser negativo). A pesar de lo anterior, el límite es 0, pues sólo se considera el límite definido en el dominio de la función, es decir, el límite por la derecha.

Encontrar un Límite por Reemplazo

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Encuentre $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Solución 6

En este caso, no se puede evaluar directamente en $x = 2$, pues tendríamos algo de la forma $f(2) = 0/0$. Sin embargo, en este tipo de situaciones se puede realizar una simplificación conveniente:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2.$$

Esta última simplificación se puede hacer porque, como bien dice la Definición 4, x no toma el valor 2 y por ende $x - 2 \neq 0$. Como este término es no nulo, es *legal* simplificar.

Por último, como $x + 2$ es un polinomio de primer grado, su límite existe y corresponde a dicha función evaluada en $x = 2$.

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$.

Sobre las Funciones Simplificables

¿Es cierto que las funciones $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ y $g(x) = x + 2$ son equivalentes? ¡NO!

Las funciones tienen dominios diferentes, pues $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$, mientras que $\text{Dom } g(x) = \mathbb{R}$. Luego, $\nexists f(2)$, a pesar de que $g(2) = 4$.

Figura 7: Gráficos de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ y $g(x) = x + 2$



(a) $f(x)$



(b) $g(x)$

Ejemplo: Límite que No Existe

Ejemplo 7

Encuentre, caso exista, el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$. En caso de que no exista, justifique su respuesta.

Solución 7

Tal como en el Ejemplo 6, en este caso no podemos evaluar directamente la función en $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, en esta ocasión tampoco es trivial simplificar la expresión, pues el valor del numerador va a depender de si x es negativo o no negativo.

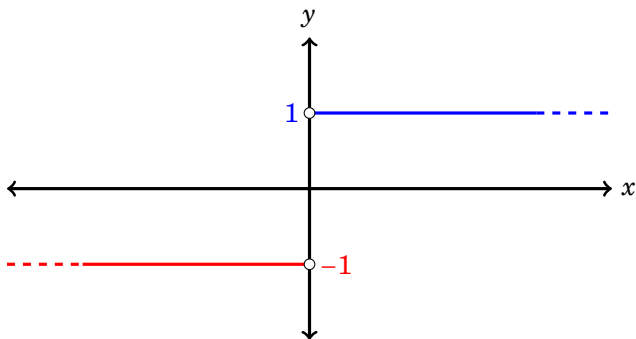
Recordar que el valor absoluto se define como $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

En efecto, el límite por la izquierda es $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, mientras que por la derecha es $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$.

Como los límites laterales son distintos, el límite no existe.

Gráfico: Límite que No Existe

Figura 9: Gráfico de $y = \frac{|x|}{x}$



MÓDULO 4

► [Volver al Inicio de la Sección](#)

Propiedades de los Límites

Proposición 1

Sea c una constante cualquiera. Entonces, el límite de dicha constante cuando x tiende a k es la misma constante:

$$\lim_{x \rightarrow k} c = c.$$

Proposición 2

Sea b una constante cualquiera y $f(x)$ una función cuyo límite existe cuando $x \rightarrow k$. Entonces, el límite de dicha función ponderada por b cuando x tiende a k es b por el límite de la función:

$$\lim_{x \rightarrow k} bf(x) = b \lim_{x \rightarrow k} f(x).$$

Propiedades de los Límites (cont.)

Proposición 3

Sea n un entero positivo. Entonces, el límite de x elevado a n cuando x tiende a k es k elevado a n :

$$\lim_{x \rightarrow k} x^n = k^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 4

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \rightarrow k$. Entonces, el límite de la suma (o resta) de ambas funciones cuando x tiende a k es la suma (o resta) de los límites individuales de las funciones:

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow k} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow k} g(x).$$

Propuesto 4

Utilizando las Proposiciones 1, 2, 3 y 4, demuestre que el límite de cualquier polinomio $P(x)$ cuando $x \rightarrow k$ equivale a $P(k)$.

Propiedades de los Límites (cont.)

Proposición 5

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \rightarrow k$. Entonces, el límite del producto de ambas funciones cuando x tiende a k es el producto de los límites individuales de las funciones:

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow k} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow k} g(x).$$

Proposición 6

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \rightarrow k$. Entonces, el límite del cociente de ambas funciones cuando x tiende a k es el cociente de los límites individuales de las funciones, siempre y cuando el límite del denominador sea distinto de 0:

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow k} f(x)}{\lim_{x \rightarrow k} g(x)}, \quad \text{si } \lim_{x \rightarrow k} g(x) \neq 0.$$

Propiedades de los Límites (cont.)

Proposición 7

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyos límites existen cuando $x \rightarrow k$. Entonces, el límite de una función elevada a la otra cuando x tiende a k es el límite de la primera elevado al límite de la segunda, siempre y cuando la base sea positiva:

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow k} f(x)^{\lim_{x \rightarrow k} g(x)}, \quad \text{si } f(x) > 0.$$

Notar que de lo anterior se obtiene $\lim_{x \rightarrow k} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow k} f(x)} \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposición 8

Sea a una constante positiva y $f(x)$ una función cuyo límite existe cuando $x \rightarrow k$. Entonces, el límite del logaritmo con base a de la función cuando x tiende a k es el logaritmo con base a del límite de la función, siempre y cuando la función sea positiva:

$$\lim_{x \rightarrow k} \log_a f(x) = \log_a \lim_{x \rightarrow k} f(x), \quad \text{si } f(x) > 0.$$

Ejemplo

Ejemplo 8

Obtenga el límite de $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ cuando $x \rightarrow 0$.

Solución 8

En efecto, no podemos evaluar directamente $x = 0$, pues tendríamos algo de la forma $0/0$. Sin embargo, podemos utilizar un *1 conveniente*...

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.\end{aligned}$$

Finalmente, podemos simplemente evaluar en $x = 0$ para obtener

como resultado $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}.$

Más Ejemplos

Ejemplo 9

Obtenga $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$.

Solución 9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3-x-3}{3(x+3)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3(x+3)} = -\frac{1}{9}.$$

Ejemplo 10

Sea $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x < 2 \\ ax+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. ¿Qué relación deben satisfacer a y b para que exista $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

Solución 10

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \iff 4a = 2a + b \iff a = \frac{b}{2}.$$

MÓDULO 5

► [Volver al Inicio de la Sección](#)

Cambio de Variable

En la Definición 7 vimos que $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = L$ es lo mismo que $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow k$.

Ahora bien, podríamos considerar a $f(x)$ como una variable de la cual depende la función g .

Luego, podemos plantear la posible existencia de $\lim_{f(x) \rightarrow L} g(f(x)) = M$, o

bien, $g(f(x)) \rightarrow M$ cuando $f(x) \rightarrow L$.

Combinando las ideas anteriores tenemos

$$[x \rightarrow k \Rightarrow f(x) \rightarrow L] \wedge [f(x) \rightarrow L \Rightarrow g(f(x)) \rightarrow M] \Rightarrow [x \rightarrow k \Rightarrow g(f(x)) \rightarrow M].$$

Ejemplo 11

Obtenga $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} + 2,5} - \frac{1}{3} \right) \div \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - 0,5 \right).$

Solución 11

Usando las Soluciones 8 y 9 tenemos que el límite es $-\frac{1}{9}$.

Número e como Límite

Proposición 9

El número $e \approx 2,718281828459\dots$ (número de Euler o constante de Napier) se puede definir de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \left(= {}^3 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)$$

A este límite, junto con los de las Proposiciones 10 y 11, los llamaremos *límites especiales*⁴.

Propuesto 5

Verifique esto evaluando la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ para valores de x arbitrariamente cercanos a 0.

³Próximamente le daremos énfasis a los límites cuando x tiende al infinito.

⁴Hay otros límites especiales que no abarcaremos en este curso.

Límites Especiales

Proposición 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Demostración.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$



Límites Especiales (cont.)

Proposición 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Demostración.

Sea $\exp(x) - 1 = y$, de modo que $x \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0$. A partir de esto podemos despejar $x = \ln(1+y)$. Por lo tanto, utilizando el cambio de variable, el límite es equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1.$$



Ejercicios: Límites Especiales

Propuesto 6

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Hint: Proceda de manera análoga a la demostración de la Proposición 11.

Propuesto 7

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \exp(a).$$

Hint: Utilice un 1 conveniente en el exponente y luego aplique la Proposición 9.

Ejercicios: Límites Especiales (cont.)

Propuesto 8

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a.$$

Hint: Proceda de manera análoga a la demostración de la Proposición 10 y utilice el resultado del Propuesto 7.

Propuesto 9

Demuestre que, $\forall a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

Hint: Utilice un 1 conveniente en el exponente y aplique la Proposición 9. Luego, utilice otro 1 conveniente sobre su resultado para finalmente aplicar la Proposición 11 con un cambio de variable.

MÓDULO 6

► [Volver al Inicio de la Sección](#)

Límites al Infinito

Hasta ahora hemos revisado cómo se comporta una función $f(x)$ a medida que x tiende a algún valor constante k .

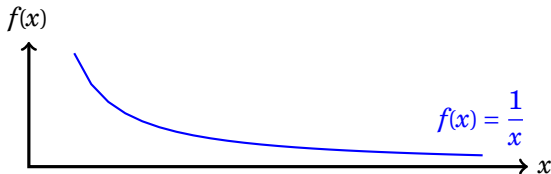
Sin embargo, en ocasiones nos puede interesar qué ocurre con la función cuando x crece (o decrece) indeterminadamente, es decir, qué le pasa a $f(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$ (o $x \rightarrow -\infty$).

Ejemplo 12

Grafique $f(x) = \frac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Solución 12

Figura 10: Límite hacia el infinito



A medida que x se vuelve arbitrariamente grande, la función se acerca cada vez más a 0...

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Límites al Infinito (cont.)

Al igual que en los casos anteriores, es importante notar que no nos interesa "evaluar x en infinito" (de hecho, esto es conceptualmente imposible), sino que queremos saber cómo se comporta la función cuando x "se aproxima" al infinito, ya sea positivo o negativo.

Ejemplo 13

Obtenga $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1}$.

Solución 13

Notamos que no tiene sentido hablar de "evaluar x en menos infinito", pues tendríamos un resultado de la forma ∞/∞ .

Sin embargo, podemos reescribir el límite como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x/x}{x/x + 1/x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + 1/x},$$

donde esto lo podemos hacer porque "no evaluamos x en infinito".

Por último, notamos que el segundo término en el denominador

tiende a 0 (al igual que en el Ejemplo 12). $\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$.

Convergencia v.s. Divergencia

converger (Del lat. *convergĕre*):

1. intr. Dicho de dos o más líneas: Tender a unirse en un punto.
2. intr. Coincidir en la misma posición ante algo controvertido.
3. intr. Mat. Dicho de una sucesión: Aproximarse a un límite.
4. intr. Med. Confluir distintos impulsos sensoriales en una sola neurona, como en la actividad motora.

divergir (Del lat. *divergĕre*):

1. intr. Dicho de dos o más líneas o superficies: Irse apartando sucesivamente unas de otras.
2. intr. Discordar, discrepar.

Real Academia Española © Todos los derechos reservados

Hasta ahora sólo hemos trabajado con límites convergentes, es decir, funciones que se acercan a un valor dado cuando la variable tiende a algún punto. Sin embargo, esto no tiene por qué ser siempre así...

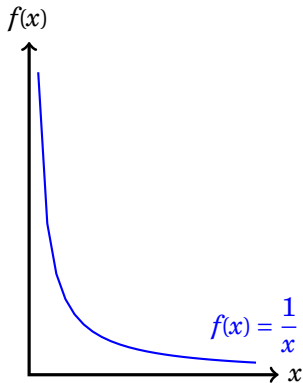
Límites Infinitos

Ejemplo 14

Similar al Ejemplo 12, grafique $f(x) = \frac{1}{x}$ en el primer cuadrante y obtenga $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Solución 14

Figura 11: Límite infinito



En efecto, a medida que x se acerca a 0 por la derecha, el valor de $\frac{1}{x}$ se vuelve arbitrariamente grande, esto es, tiende a infinito positivo...

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

En este caso se dice que $f(x)$ *diverge* cuando $x \rightarrow 0^+$.

Divergencia en el Infinito

Además de divergir cuando x tiende a algún valor particular, puede darse que una función diverja cuando x tienda a $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 15

Sea $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{5x^2 - 6x + 7}$. Obtenga $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Solución 15

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3/x^2 - 2x^2/x^2 + 3x/x^2 - 4/x^2}{5x^2/x^2 - 6x/x^2 + 7/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{5} = \infty$$

Propuesto 10

Grafique cualquier polinomio y observe qué ocurre cuando $x \rightarrow +\infty$ o cuando $x \rightarrow -\infty$.

Propuesto 11

Repita lo anterior con el logaritmo de cualquier polinomio positivo.

Propuesto 12

Ahora con la raíz de cualquier polinomio positivo.

Convergencia en el Infinito

Tal como vimos en el Ejemplo 12, pueden existir distintas funciones que convergen cuando x tiende a infinito positivo o negativo.

Ejemplo 16

En macroeconomía se habla de la idea de "convergencia en crecimiento" (crecimiento en el PIB), que básicamente indica que en el largo plazo, todos los países tienden a crecer a la misma tasa⁵ (y la brecha entre sus productos será menor). Suponga que el crecimiento de cualquier economía depende de su nivel de producto Y de la forma $f(Y) = \frac{1}{2\sqrt{Y}}$. ¿Por qué se justificaría esta hipótesis de convergencia en crecimiento?

Solución 16

Porque a medida que el nivel del producto crece, el crecimiento de este producto es cada vez menor. En el límite, un país con un PIB arbitrariamente grande simplemente no crecerá, de modo que los países más pequeños, que sí tienen crecimiento positivo, lo van a alcanzar, esto es, van a converger.

⁵Más adelante veremos cómo calcular estas tasas de crecimiento.

Cambio de Variable (cont.)

Utilizando límites infinitos y en el infinito se pueden hacer cambios de variables muy útiles.

En la Proposición 9, indicamos que $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$. Con un cambio de variable se puede obtener una versión alternativa de este límite...

Proposición 12

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Demostración.

Sea $x = \frac{1}{y}$, de modo que $y \rightarrow 0^+ \implies x \rightarrow \infty$. Reemplazando esto en la

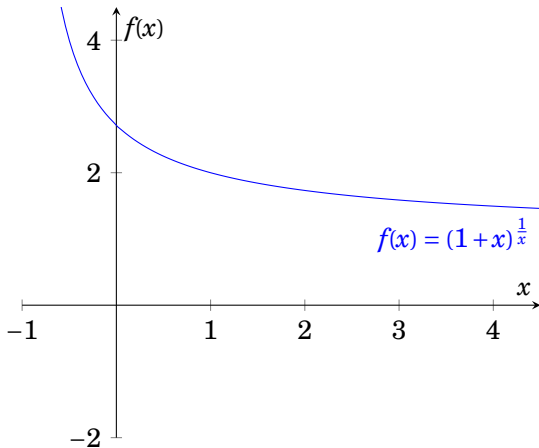
Proposición 9 se obtiene $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. □

Propuesto 13

Mostrar que lo anterior también se cumple cuando $x \rightarrow -\infty$.

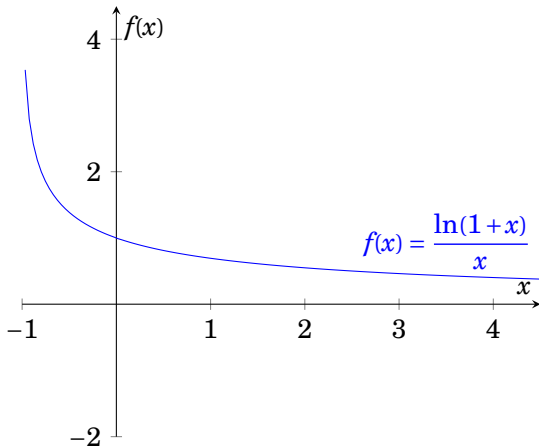
Gráficos: Límites Especiales

Figura 12: Proposición 9



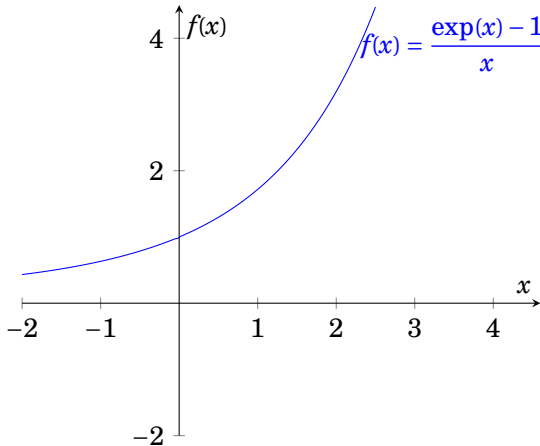
Gráficos: Límites Especiales

Figura 13: Proposición 10



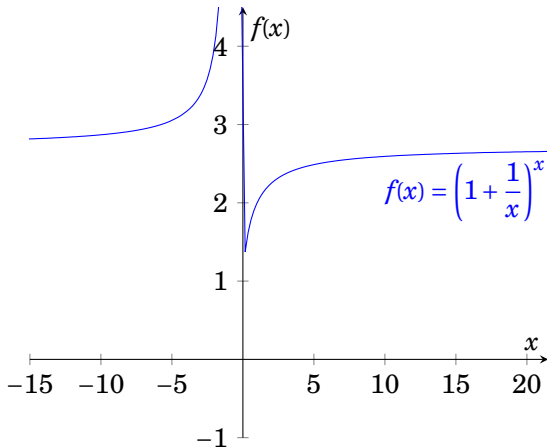
Gráficos: Límites Especiales

Figura 14: Proposición 11



Gráficos: Límites Especiales

Figura 15: Proposición 12



Aplicación: Interés Compuesto

Ejemplo 17

Suponga que se le ofrece un proyecto de inversión que paga una tasa anual igual a r . Se le permite capitalizar de manera compuesta esta inversión n veces (las que usted quiera), de modo que en cada uno de los n períodos se obtiene una rentabilidad de r/n . Uno podría pensar que al aumentar n indefinidamente se pueden obtener ganancias arbitrariamente grandes, pues el interés compuesto se capitalizaría de manera exponencial. Sin embargo, la institución que le ofrece esta inversión no está preocupada por que haga tender n a infinito. ¿Por qué?

Solución 17

No le preocupa porque $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$ converge...

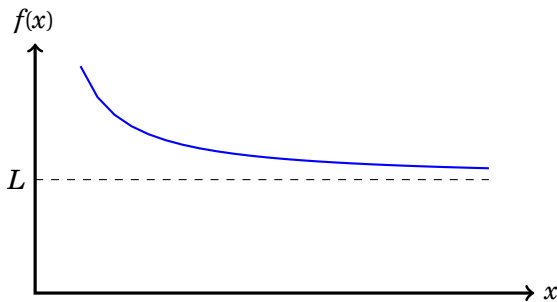
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{rn/r} = e^r.$$

Asíntotas Horizontales

Definición 9

$y = L$ es una *asíntota horizontal* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ o bien $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

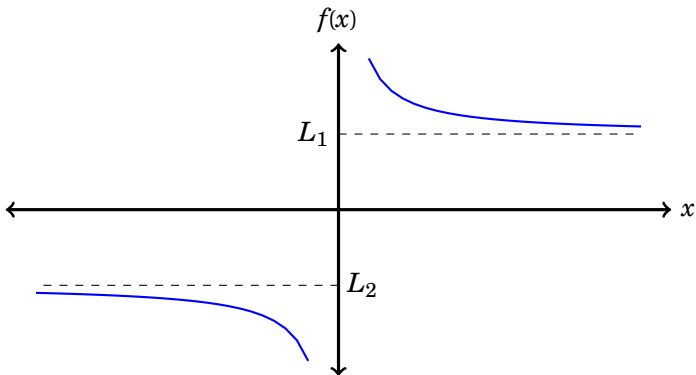
Figura 16: Asíntota horizontal



Asíntotas Horizontales (cont.)

Estas asíntotas horizontales pueden ser múltiples (dos):

Figura 17: Múltiples asíntotas horizontales



¿Por qué no pueden ser más de dos?

Ejemplo: Asíntotas Horizontales

Ejemplo 18

Obtenga las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

Grafique.

Solución 18

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ (*¿por qué?*), por lo que las asíntotas son $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$. El gráfico es equivalente al de la Figura 17.

Asíntotas Verticales

Definición 10

$x = k$ es una *asíntota vertical* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \infty$ o bien $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = -\infty$.

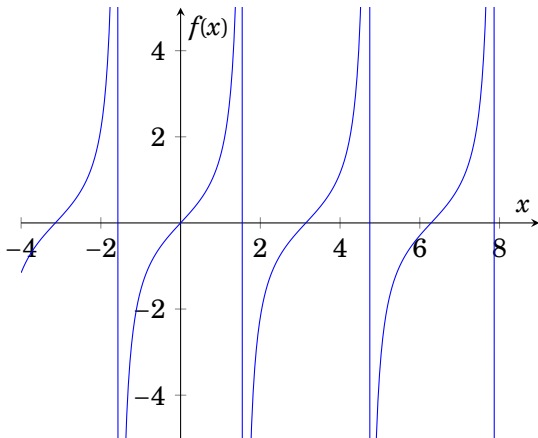
Figura 18: Asíntota vertical



Asíntotas Verticales (cont.)

Estas asíntotas verticales también pueden ser múltiples (dos o más):

Figura 19: Múltiples asíntotas verticales



Ejemplo: Asíntotas Verticales

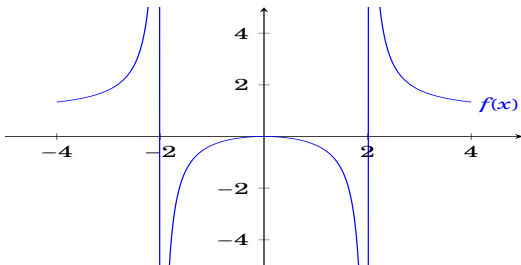
Ejemplo 19

Obtenga todas las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$. Grafique.

Solución 19

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, por lo que $y = 1$ es la única asíntota horizontal. Por último, la función diverge cuando $x \rightarrow 2$ y cuando $x \rightarrow -2$, por lo que $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$ son ambas asíntotas verticales.

Figura 20: Asíntotas verticales y horizontales

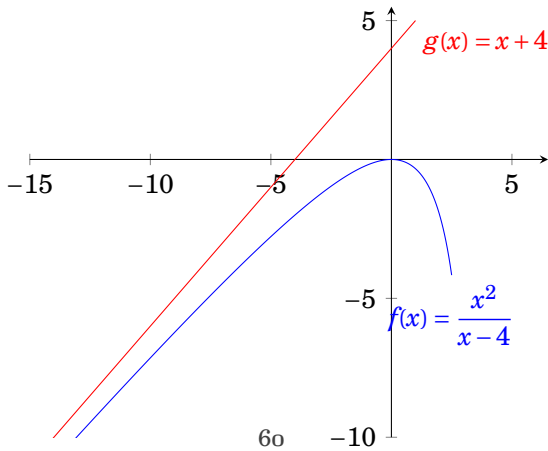


Asíntotas Oblicuas

Definición 11

$g(x) = mx + n$ es una *asíntota oblicua* de $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = 0$ o bien $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Figura 21: Asíntota oblicua



Asíntotas Oblicuas (cont.)

Estas asíntotas oblicuas pueden ser múltiples (dos):

Figura 22: Múltiples asíntotas oblicuas



¿Por qué no pueden ser más de dos?

Álgebra: Asíntotas Oblicuas

En base a la Definición 11, sabemos que se debe cumplir que si $g(x)$ es la asíntota oblicua de $f(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Luego, si la asíntota existe, se cumple que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} = 0$.

Pero sabemos que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx + n}{x} = m$.

Por lo tanto, $\boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m}$, siempre que la asíntota exista.

Finalmente, tras computar m sabemos que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - (mx + n) = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - mx}.$$

Con m y n computados podemos determinar $g(x)$.

Ejemplo: Asíntotas Oblicuas

Ejemplo 20

Obtenga la asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + 2x^2}{x}$.

Solución 20

Sea $g(x) = mx + n$ la asíntota oblicua.

Notamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, de modo que $m = 2$.

Por último, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 0$, por lo que $n = 0$.

Así, $g(x) = 2x$ es la asíntota oblicua.

MÓDULO 7

► [Volver al Inicio de la Sección](#)

Sin Levantar el Lápiz

Anteriormente comentamos la existencia de funciones que "se pueden dibujar sin levantar el lápiz".

Una de las ventajas de estas funciones es que el cálculo de cualquier límite en su dominio se podía obtener simplemente reemplazando el argumento de la función por el valor hacia el cual tiende la variable independiente en el límite que se desea calcular.

Dicho de otro modo, en estas funciones se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k).$$

Definición de Continuidad

Definición 12

Una función $f(x)$ se dice *continua* en $x = k$ si se cumple que $k \in \text{Dom } f$ (i.e. la función está definida en k) y además

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k).$$

Definición 13

Una función $f(x)$ se dice continua en el intervalo $[a, b]$ si es continua en cualquier $k \in [a, b]$.

Las funciones continuas son justamente aquellas que "se pueden dibujar sin levantar el lápiz", esto es, son funciones que no tienen "hoyos" ni "saltos".

Otra forma de interpretarlas es como funciones en las cuales *pequeños cambios en el argumento generan pequeños cambios en el valor de la función*.

Una función que no cumple esto se dice *discontinua*.

Gráfico: Continuidad

Figura 23: Funciones Continuas en \mathbb{R}

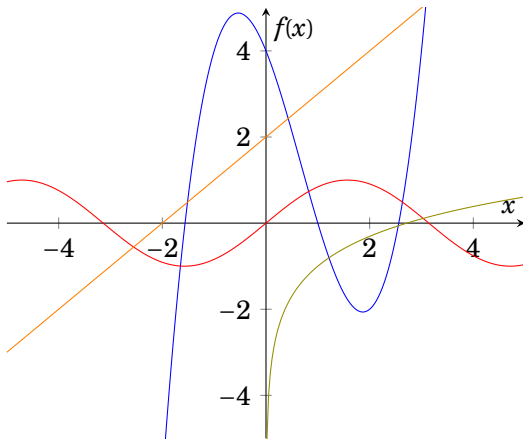
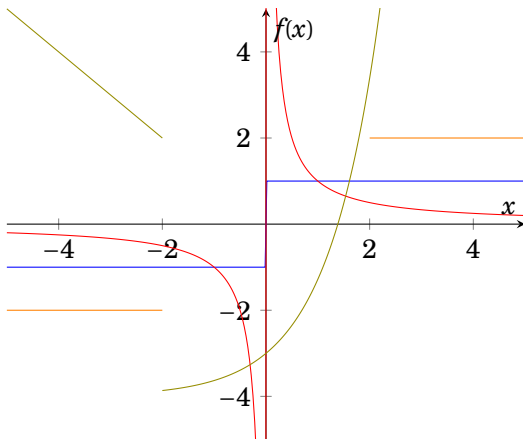


Gráfico: Discontinuidad

Figura 24: Funciones Discontinuas en \mathbb{R}



Propiedades de Funciones Continuas

Proposición 13

La suma o resta de dos funciones continuas es también una función continua. Esto es, si f y g son continuas, entonces $f \pm g$ también es continua.

Proposición 14

El producto de dos funciones continuas es también una función continua. Esto es, si f y g son continuas, entonces $f \cdot g$ también es continua.

Proposición 15

El cociente entre dos funciones continuas es también una función continua si la función divisora es no nula. Esto es, si f y g son continuas, entonces $\frac{f}{g}$ también es continua si $g \neq 0$.

Funciones Continuas

Hay funciones "típicas" que son continuas en su dominio.

- Constantes: $f(x) = c$.
- Polinomios: $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$.
- Raíces: $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
- Logaritmos: $f(x) = \log_a x$.
- Exponenciales: $f(x) = a^x$.

Juntando esto con la Proposición 16 podemos determinar fácilmente cómo son la mayoría de las funciones continuas:

Proposición 16

*Sean $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ dos funciones continuas. Entonces $g \circ f$ también es una función continua. Esto es, la composición de funciones continuas también es una función continua **siempre y cuando los dominios y codominios sean compatibles**.*

Ejemplo: Composición de Continuas

Ejemplo 21

Sea $f(x)$ un polinomio y sea $g(x) = \ln x$ una función logarítmica. Entonces $f(g(x))$ es continua en el dominio de g , pero $g(f(x))$ no es continua en el dominio de f . Comente.

Solución 21

Incierto. En efecto, tanto f como g son funciones continuas en sus dominios, donde el dominio de f es \mathbb{R} y el de g es \mathbb{R}_{++} . La primera afirmación del comente es verdadera, pues como g toma valores en los reales, siempre se puede componer g en f y obtener una función continua por la Proposición 16. Sin embargo, la segunda afirmación se cumple si y sólo si el recorrido de f no es siempre positivo. En caso de que el recorrido de f sea siempre positivo (e.g. $f(x) = x^2 + x + 1$) no se cumple la afirmación, pues $g(f(x))$ sí sería continua en el dominio de f .

Gráfico: Composición de Continuas

Figura 25: Composición Compatible de Funciones Continuas

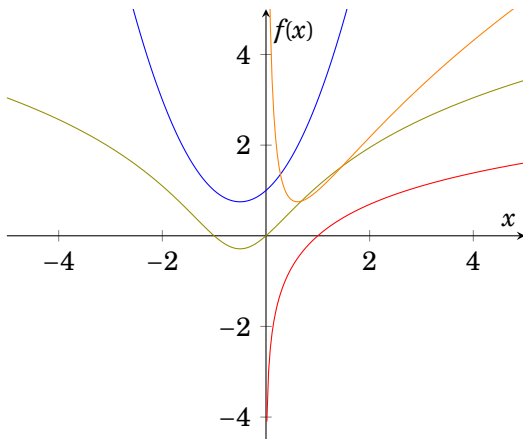
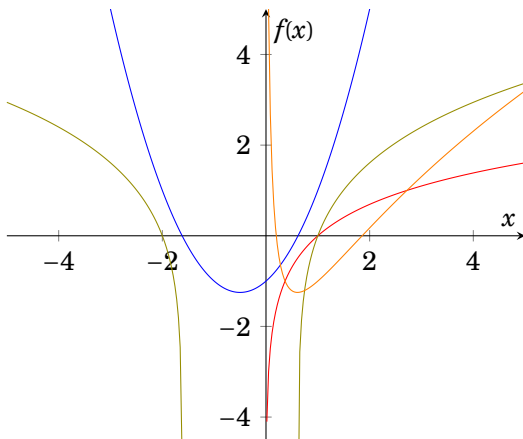


Gráfico: Composición de Continuas

Figura 26: Composición Incompatible de Funciones Continuas



Violaciones de Continuidad

En el Ejemplo 14 vimos que si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ y comentamos que $f(x)$ no estaba definida en $x = 0$. Luego, $f(x)$ de ninguna manera puede ser continua en $x = 0$, pues sus límites laterales son distintos (i.e. $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$).

Sin embargo, pueden existir funciones que tengan un límite bien definido en un punto y aun así no sean continuas.

Este es el caso del Ejemplo 6, donde $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$. Sin embargo,

$x = 2$ no es parte del dominio de la función. Por lo tanto, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ no es continua en $x = 2$. Esto también se aprecia en la Figura 7.

Aplicación: Costos de Ajuste

Ejemplo 22

Una firma tiene un stock de capital K_t en el periodo t . Si desea alcanzar un stock K_{t+1} en el periodo $t+1$, entonces debe invertir $I_t = K_{t+1} - K_t$. Sin embargo, si $K_{t+1} \neq K_t$, esto es, si $I_t \neq 0$, entonces debe pagar un costo fijo de ajuste de c unidades monetarias (por ejemplo, porque tiene que pagar un costo de transporte). Si $I_t = 0$, entonces el costo de ajustarse es cero. ¿Es la función de costos de ajuste continua en todo su dominio?

Solución 22

No lo es. Sea $f(I_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } I_t = 0 \\ c & \text{si } I_t \neq 0 \end{cases}$ la función de costos de ajuste. A pesar de que $\lim_{I_t \rightarrow 0} f(I_t) = c$, $f(0) = 0 \neq c$, por lo que la función no es continua en $I_t = 0$.

Aplicación: Impuestos Continuos

Propuesto 14

Para calcular el Impuesto Global Complementario, se toma la renta anual (3) de cada individuo en UTA (unidades tributarias anuales), se pondera por el factor (4) que corresponde según su tramo de ingreso (2) y luego se rebaja (resta) el monto correspondiente (5). En el Cuadro 2 (extraído del SII) se muestra la escala, donde falta el factor que corresponde al tramo 3.

Cuadro 2: Escala de tasas del Impuesto Global Complementario

VIGENCIA -1	N° DE TRAMOS -2	RENTA IMPONIBLE ANUAL DESDE HASTA -3	FACTOR -4	CANTIDAD A REBAJAR (SIN CRÉDITO DEL 10% DE 1 UTA, DEROGADO) -5
RIGE A CONTAR DEL AÑO TRIBUTARIO 2014	1	0,0 UTA a 13,5 UTA	Exento	-,-
	2	13,5 " a 30 "	4%	0,54 UTA
	3	30 " a 50 "		1,74 "
	4	50 " a 70 "	13,5%	4,49 "
	5	70 " a 90 "	23%	11,14 "
	6	90 " a 120 "	30,4%	17,80 "
	7	120 " a 150 "	35,5%	23,92 "
	8	150 " y MAS	40%	30,67 "
NOTA: Para convertir la tabla a pesos (\$) basta con multiplicar los valores anotados en las columnas (3) y (5) por el valor de la UTA del mes respectivo.				

Calcule el parámetro del tramo 3, para que la función sea continua (*why?*) con el tramo anterior (2) y el siguiente (4). Justifique.

Ejercicio Avanzado

Propuesto 15

Encuentre los valores de a y b para los cuales $f(x)$ es continua en \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(x) - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ \frac{a}{b} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{-ax + b} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

¿Qué ocurre si la función se redefine de la siguiente manera?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(x) - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ \frac{a}{b} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{ax + b} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Continuidad Reparable

Definición 14

Una función $f(x)$ discontinua en $x = k$ se dice reparable si y sólo si se cumple que $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$. Esto es, si la discontinuidad se originó porque $f(k) \neq \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$.

Para reparar la función, basta con imponer que $f(k) = \lim_{x \rightarrow k} f(x)$.

Ejemplo 23

Muestre que la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ tiene una discontinuidad reparable (apóyese en la Figura 7), pero que la discontinuidad de $g(x) = \frac{|x|}{x}$ no es reparable (apóyese en la Figura 9).

Solución 23

Notamos que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$, por lo que la función reparada

es $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$. Por otro lado, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$, distinto a

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$, por lo que la discontinuidad no es reparable.

Proposiciones Adicionales

Proposición 17

Sea f continua en un punto k con $f(k) \neq 0$. Entonces existe una vecindad de radio δ (ver Definición 6) en torno a k tal que $\forall x \in (k - \delta, k + \delta)$, el signo de $f(x)$ es igual al de $f(k)$, esto es, $f(x)f(k) > 0$.

La Proposición 17 se conoce como "Conservación Local del Signo".

Proposición 18

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, esto es, con signos contrarios al evaluar en ambos extremos. Entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

La Proposición 18 se conoce como "Teorema de Bolzano"⁶.

⁶Este (potente) resultado lo utilizaremos más adelante.

Unidad 2

Unidad 2

Módulo 8

Módulo 9

Módulo 10

Módulo 11

Módulo 12

Módulo 13

Módulo 14

► [Volver al Inicio](#)

MÓDULO 8

► [Volver al Inicio de la Sección](#)

Recordatorio: Tasas de Cambio

En la Definición 3, particularmente en la ecuación (2) planteamos que una tasa de cambio promedio para una función f en el intervalo $[x, x + \Delta]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

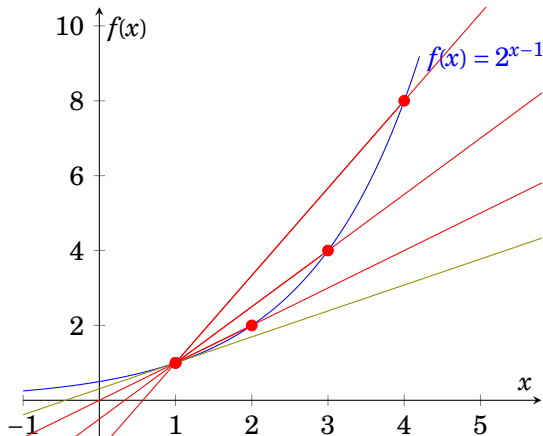
Además, en la Figura 2 vimos que esta tasa de cambio promedio puede ser interpretada como la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta, f(x + \Delta))$.

Sin embargo, en las Figuras 3 y 4 vimos cómo al utilizar intervalos muy amplios podíamos dejar de capturar, por ejemplo, si la función es creciente o decreciente al rededor de algún valor x .

En efecto, sería interesante saber *qué pasa con la tasa de cambio promedio cuando el intervalo se hace arbitrariamente pequeño.*

Tasas en Intervalos Pequeños

Figura 27: Tasa de Cambio Promedio en Distintos Intervalos



Límite de la Tasa de Cambio

Considerar un intervalo arbitrariamente pequeño a la hora de calcular una tasa de cambio promedio es lo mismo que calcular

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Cuando la amplitud del intervalo tiende a cero, se deja de llamar tasa (o razón) de cambio promedio y se utiliza el concepto de *tasa (o razón) de cambio instantánea*.

A diferencia de una tasa de cambio promedio, la tasa de cambio instantánea no corresponde a la pendiente de una recta secante, sino que equivale a la *pendiente de la recta tangente* a la función $f(x)$ en el punto $(x, f(x))$.

Para acortar esto último, se suele afirmar que la tasa de cambio instantánea equivale a la *pendiente de la función $f(x)$* en x (en vez de hablar de la pendiente de la recta tangente).

Definición de Derivada

TODO lo de la diapositiva anterior lo vamos a condensar en una única definición...

Definición 15

La derivada de una función $y = f(x)$ es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

siempre y cuando dicho límite exista.

Importante:

- ¡ $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \frac{dy}{dx}$!
- La notación de Leibniz (dy/dx) es sólo eso... notación.
- $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{dx} = D_x f(x) = D_x f = Df(x) = Df.$
- La derivada de una función, es otra función (caso exista).
- Por lo tanto, la derivada se puede evaluar en distintos puntos.

Álgebra: Derivada de una Cuadrática

Ejemplo 24

Obtenga la derivada de la función $f(x) = (x - 1)^2$ utilizando la definición de derivada (Definición 15).

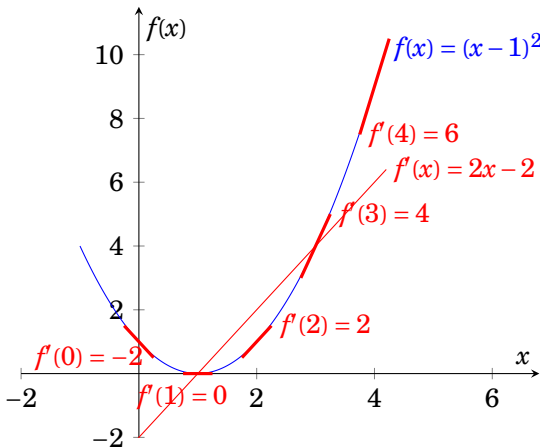
Solución 24

Utilizando la Definición 15, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x - 1)^2 - (x - 1)^2}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (\Delta x)^2 + 1 + 2x\Delta x - 2x - 2\Delta - x^2 + 2x - 1}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2x\Delta x - 2\Delta}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + 2x - 2 \\&= 2x - 2.\end{aligned}$$

Gráfico: Derivada de una Cuadrática

Figura 28: Derivada de una Función Cuadrática



¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Si una función es continua en un punto, ¿es derivable en ese punto?

¡NO!

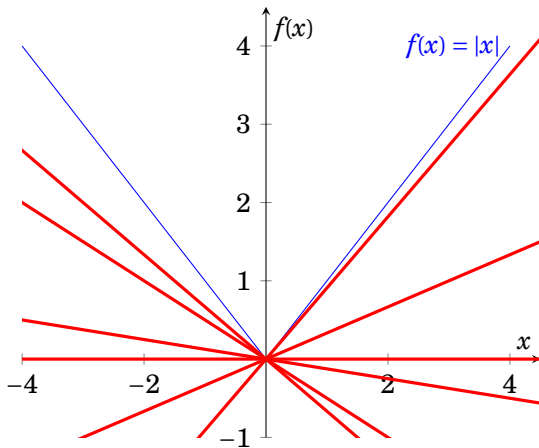
Contraejemplo: $f(x) = |x|$

Propuesto 16

Analice la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x|$ en todo su dominio (ponga atención en $x = 0$).

Gráfico: Función Continua No Derivable

Figura 29: Función No Derivable



¿Continuidad Implica Derivabilidad?

Al revés: Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?

¡SÍ!

Proposición 19

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = k$. Entonces, $f(x)$ es continua en $x = k$.

Demostración.

$$PD: \exists f'(k) \implies \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k) \iff \lim_{x \rightarrow k} f(x) - f(k) = 0.$$

$$\text{En efecto, } \lim_{x \rightarrow k} f(x) - f(k) = \lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} \cdot (x - k).$$

Sea $h = x - k$, de modo que $x \rightarrow k \implies h \rightarrow 0$.

$$\text{Luego, se tiene que el límite es equivalente a } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} \cdot (h).$$

¡Pero el límite de la fracción corresponde a $f'(k)$! Como esta derivada existe (por hipótesis), el límite del producto es el producto de los límites, esto es, $f'(k) \cdot 0 = 0$. □

MÓDULO 9

► [Volver al Inicio de la Sección](#)

Derivadas Típicas

Proposición 20

La derivada de $f(x) = x^n$ para cualquier $n \in \mathbb{R}$ es $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Por el Binomio de Newton, sabemos que $(x+h)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^{n-k} h^k$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Luego, el límite es

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + h(\dots) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Acto de fe: esto se cumple en todos los \mathbb{R} .



¿Qué ocurre cuando $n = 0$? ¿y cuando $n = 0,5$?

Derivadas Típicas (cont.)

Proposición 21

La derivada de $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h}.$$

El primer término del límite (el factor común) es invariante en h , de modo que puede “salir como constante”. El resto es un límite conocido (Proposición 11)...

Por lo tanto, $f'(x) = e^x$.



Derivadas Típicas (cont.)

Proposición 22

La derivada de $f(x) = \ln(x)$ es $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Demostración.

Utilizando la Definición 15 tenemos que, si existe, la derivada de $f(x)$ es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Notamos que podemos reescribir la expresión dentro del límite

como $\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}}$. Así, tenemos un límite conocido (Proposición 9) "elevado a una constante" y con un logaritmo aplicado...

Por lo tanto, $f'(x) = \frac{1}{x}$.



Propuestos: Derivadas Típicas

Sea $a \in \mathbb{R}$.

Propuesto 17

Encuentre la derivada de $f(x) = ax^n$.

Propuesto 18

Encuentre la derivada de $f(x) = e^{ax}$.

Propuesto 19

Encuentre la derivada de $f(x) = \log_a x$, con $0 < a \neq 1$.

Propuesto 20

Encuentre la derivada de $f(x) = \sqrt[a]{x}$, con $a \in \mathbb{N}$.

Intuición: Aproximación Afín

Sabemos que $(e^x)' = e^x$, esto es, la pendiente de esta función exponencial en cualquier punto corresponde simplemente al valor que toma la función en dicho punto. En efecto, la recta tangente a esta función cuando $x = 0$ será $x + 1$, esto es, e^x y $x + 1$ *se comportan parecido* cuando x está en una vecindad de 0⁷.

Note que podemos hacer un ejercicio similar con cualquier función, no solo con esta exponencial. En efecto, la recta tangente a $\ln x$ en x_0 es $\frac{x - x_0}{x_0} + \ln x_0$. Si $x_0 = 1$, esta es simplemente $x - 1$.

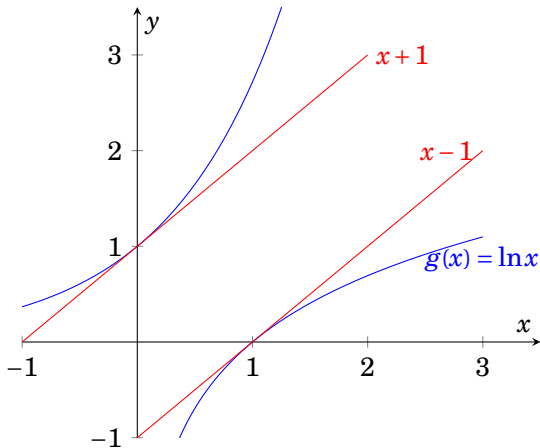
Propuesto 21

¿Por qué cuando en Chile se calcula la inflación anual a partir de las inflaciones mensuales, la gente suele simplemente sumarlas en vez de utilizar una fórmula tipo "interés compuesto"? Puede hacerse la misma pregunta con un depósito a plazo.

⁷Más adelante veremos en detalle cómo podemos aproximar una función usando derivadas.

Gráfico: Aproximación Afín

Figura 30: Aproximación de e^x y $\ln x$



Álgebra: Aproximación Afín

Las aproximaciones afines que observamos anteriormente claramente "lo hacen mejor" cuando $x \rightarrow x_0$...

En efecto, tomando la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, podemos definir $h = x - x_0$, de modo que $h \rightarrow 0 \implies x \rightarrow x_0$.

La derivada ahora es $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x+x-x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Olvidémonos (informalmente) del límite, pero tengamos en mente que x se acerca mucho a x_0 . Así, despejamos $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Esto es exactamente lo mismo que calcular la ecuación de la recta con pendiente $f'(x_0)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Definición 16

Si es que existe, la recta $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ es la *mejor aproximación afín* de la función $f(x)$ en torno a $x = x_0$.

Ejemplo: Aproximación Afín

Ejemplo 25

Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $x = 4$.

Solución 25

La derivada de la función es $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Luego, $f'(4) = \frac{1}{4}$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$g(x) = \frac{(x-4)}{4} + 2 = \frac{x}{4} + 1.$$

Propiedades de las Derivadas

Proposición 23

Sea $f(x)$ una función derivable y $a \in \mathbb{R}$. Entonces la derivada de la función ponderada equivale a la ponderada de la función derivada. Esto es, $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$.

Proposición 24

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables. Entonces la derivada de la suma (o resta) de ambas funciones equivale a la suma (o resta) de las derivadas de las funciones. Esto es, $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

Proposición 25

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables. Entonces la derivada del producto de ambas funciones es $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Proposición 26

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables. Entonces la derivada del cociente entre ambas funciones es $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Ejercitación: Derivadas

Propuesto 22

Obtenga las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{mx + n}{\exp(x)}$, con $m, n \in \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x \exp(x) \ln x$.
3. $h(t) = \frac{Y(t)}{N(t)}$, donde $Y(t)$ y $N(t)$ son funciones positivas, crecientes y derivables que dependen de t .

Aplicación: Imagine que $h(t)$ es el PIB per cápita de un país (o las ventas por trabajador, productividad media de una central de sistemas de información, errores contables sobre estados de resultado, etc.) en el periodo t . ¿Qué puede concluir?

MÓDULO 10

► [Volver al Inicio de la Sección](#)

Derivada de una Función Compuesta

Proposición 27

Si $y = f(z)$ y $z = g(x)$, siendo ambas funciones diferenciables, entonces la derivada de y respecto a x es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Esto se llama la **regla de la cadena**.

Demostración.

Prueba informal:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ \Rightarrow (f \circ g)'(x) \cdot \frac{1}{g'(x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{h}{g(x+h) - g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = f'(g(x)).\end{aligned}$$



Ejercicios: Regla de la Cadena

Propuesto 23

Derive $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es diferenciable y $n \in \mathbb{R}$.

Propuesto 24

Derive $g(x) = \exp[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 25

Derive $h(x) = \ln[u(x)]$, donde u es diferenciable.

Propuesto 26

Derive $i(x) = \sqrt{u(x)}$, donde u es diferenciable.

Propuesto 27

Demuestre la regla de la derivada de un cociente (Proposición 26) utilizando la regla de la derivada de un producto (Proposición 25) y la regla de la cadena (Proposición 27).

Propuesto 28

Aplicación: Demuestre que la elasticidad-precio de la demanda es simplemente $\frac{d \ln Q}{d \ln P}$.

Derivada de una Derivada

Vimos que la derivada de una función es otra función...

Luego, *¿podrá esta nueva función ser derivable?* En general, **sí**.

Si derivamos la derivada de una función $f(x)$, llamaremos al resultado, caso exista, la **segunda derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por

$f''(x)$ o $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ (ojo con la notación).

Similarmente, existe la posibilidad de computar una tercera derivada, o una cuarta, o una n -ésima.

Así, a las derivadas de orden mayor a uno (dos, tres, cuatro, etc.) se les llaman **derivadas de orden superior**.

Ejemplo 26

Obtenga la segunda derivada de la función $f(x) = \exp(ax)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Solución 26

La segunda derivada de una función es simplemente la derivada de la derivada de la función. En este caso tenemos que

$f'(x) = a \exp(ax)$. Luego, la segunda derivada es $f''(x) = a^2 \exp(ax)$.

Ejercicios: Derivadas de Orden Superior

Propuesto 29

Obtenga la n -ésima derivada de la función anterior ($f(x) = \exp(ax)$). Repita el ejercicio con la función $g(x) = \ln x$.

Propuesto 30

¿Se le ocurre alguna función que no sea infinitamente derivable?
Esto es, alguna función que tras alguna cantidad finita de derivadas de como resultado otra función que no es derivable en todo su dominio.

Regla de la Función Inversa

Proposición 28

Sea $y = g(x)$ una función, cuya inversa es f , de modo que $f(y) = x$. Si ambas funciones son derivables, entonces

$$f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))}.$$

Demostración.

Como f y g son inversas entre sí, se da que $f(g(x)) = x$.

Podemos derivar esto (why?) para obtener $f'(g(x))g'(x) = 1$.

Pero lo anterior implica que $f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$, que es equivalente a lo que queremos demostrar.



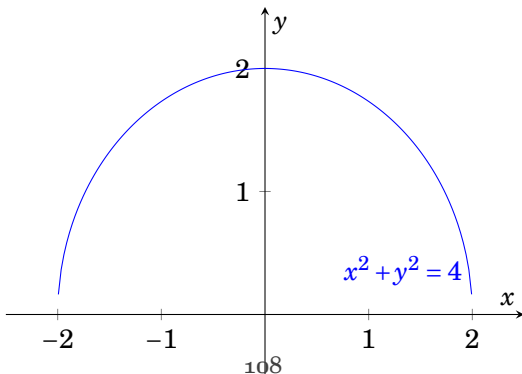
Propuesto 31

Demuestre que $(x^2)' = 2x$ utilizando la regla de la función inversa. Acote el dominio a los $x > 0$.

Dependencia Implícita

Hasta ahora hemos trabajado con variables dependientes que dependen *explícitamente* de una variable independiente, i.e. $y = f(x)$. Sin embargo, podríamos estar interesados en trabajar con variables dependientes que dependen de manera implícita de otra variable. Por ejemplo, tomemos la relación definida por $x^2 + y^2 = 4$ con $y > 0$. En esta ecuación, y depende *implícitamente* de x .

Figura 31: Gráfico de $x^2 + y^2 = 4$ (con $y > 0$)



Derivación Implícita

Siguiendo con el mismo ejemplo, podemos estar interesados en calcular la derivada de esta función.

Una forma de hacer esto es *despejando* y para que dependa explícitamente de x y calcular la derivada como en cualquier otro caso, obteniendo como resultado $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Sin embargo, despejar la variable dependiente no es siempre tan trivial, por lo que puede ser más cómodo **derivar implícitamente**.

Ejemplo 27

Derive implícitamente $x^2 + y^2 = 4$ respecto a x .

Solución 27

Utilizando la regla de la cadena y las derivadas conocidas tenemos que la derivada es $2x + 2y \cdot y' = 0$. Notar como al derivar el término y^2 respecto a x se aplica la regla de la cadena, pues y depende de x . Por lo tanto, al despejar y' tenemos $y' = -\frac{x}{y}$.

¿Podemos dejar el resultado dependiendo de y ? ¿Son equivalentes los resultados de la derivación implícita y la derivación explícita?

Ejercicios: Derivación Implícita

Propuesto 32

Derive implícitamente $\ln y + x^2 = 8x$.

Propuesto 33

Obtenga la derivada de x^x utilizando derivación implícita.

HINT: Puede ser útil partir el ejercicio aplicando un logaritmo sobre una relación.

Propuesto 34

Obtenga implícitamente la segunda derivada de y del Ejemplo 27.

MÓDULO 11

► [Volver al Inicio de la Sección](#)

Regla de L'Hôpital

Muchas veces nos vamos a enfrentar a límites cuyo resultado al evaluar directamente es de la forma $0/0$ o ∞/∞ .

En estas situaciones podemos aplicar la regla de L'Hôpital, que básicamente indica que

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Unidad 3

Unidad 3

Módulo 15

Módulo 16

Módulo 17

Módulo 18

Módulo 19

► [Volver al Inicio](#)

Unidad 4

Unidad 4

Módulo 20

Módulo 21

Módulo 22

Módulo 23

Módulo 24

Módulo 25

► [Volver al Inicio](#)

Unidad 5

Unidad 5

Módulo 26

Módulo 27

Módulo 28

► [Volver al Inicio](#)

Unidad 5

► [Volver al Inicio](#)

PROBLEMA 3

► [Volver al Inicio](#)

Problema 3: Enunciado

- **Contexto** introductorio (ex ante).
- Inducción del **problema**.
- Presentación de **variables**.
- Planteamiento de una **decisión**.
- Exigencia de **resultados** a partir de un **instrumento**.
- Especificación de una **conclusión**.
- Ayudas, hints, indicaciones...

Problema 3: Respuesta

- **Definir** variables, parámetros y/o funciones.
- **Plantear** el problema en base a las definiciones.
- **Desarrollar** el problema planteado.
- **Resolver** lo desarrollado.
- **Concluir** en base a lo resuelto.

Contexto e Inducción

Javiera y Diego son dueños de Funcionsilandia, el parque de diversiones más connotado de la ciudad. Lo distintivo de este parque es que todas sus atracciones siguen comportamientos identificados por funciones matemáticas... Javiera y Diego planean adquirir una nueva atracción (montaña rusa) para su parque de diversiones, llamada CYD (Continua Y Derivable).

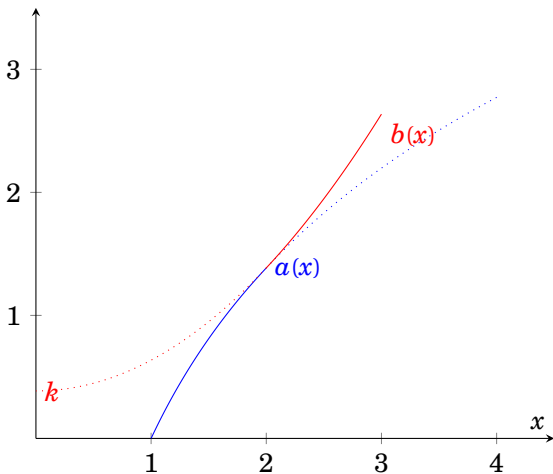
Variables

El comportamiento funcional de esta atracción es el de una función por tramos, donde el primer tramo (la primera pieza) se comporta como la función $a(x) = 2\ln x$ y el segundo tramo (la segunda pieza) se comporta como la función $b(x) = 0,25x^2 + k$, donde x corresponde a una medida de ancho de la atracción vista de perfil y ambas funciones miden la altura del riel.

Variables (cont.)

Esto queda representado en la Figura 32.

Figura 32: CYD (Continua Y Derivable)



Decisión, Resultados y Conclusión

Sin embargo, Javiera y Diego deben cumplir fuertes regulaciones de seguridad para poder estrenar su atracción. Particularmente, se les pide que el recorrido sea "suave", cosa de que los carros puedan seguir una trayectoria sin quiebres en los rieles. Considerando que k es una constante técnica que deben determinar, ¿podrán estrenar la atracción?

Indicación

IND: apoye su respuesta en la Figura 32 (particularmente al elegir los tramos).

Definición de Variables y Función

Definición de variables y función:

Sea $c(x)$ la función por tramos que define a la atracción y $c'(x)$ su derivada:

$$c(x) = \begin{cases} 2\ln x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0,25x^2 + k & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

Sea k el parámetro técnico que podría permitir que la función sea suave (siempre derivable y continua).

Planteamiento del Problema

Planteamiento del problema:

El problema se define de esta manera:

- Si $\exists k : \forall x \in]1, 3[\exists c'(x) \in \mathbb{R}$, entonces pueden estrenar la atracción.
- Si $\nexists k : \forall x \in]1, 3[\exists c'(x) \in \mathbb{R}$, entonces no pueden estrenar la atracción.

Desarrollo

Desarrollo:

Como ambas subfunciones a y b son derivables y continuas en sus tramos, basta con encontrar las condiciones sobre k para que la función c sea derivable en torno a $x = 2$. La intuición detrás de esto es que cada riel por separado es suave, sin embargo, hay que encontrar la forma de que al unirlos la estructura completa también sea suave.

Derivando cada tramo en la vecindad de $x = 2$ tenemos que $c'(x) = \frac{2}{x}$ cuando $x \leq 2$ y $c'(x) = 0,5x$ cuando $x > 2$.

Luego, notamos que para $x = 2$ efectivamente ambas derivadas son iguales (a 1).

Por último, encontramos si existe o no algún valor de k tal que la función sea continua. Dado que los límites laterales para ambas funciones a y b existen, basta con igualar ambas funciones dado $x = 2$:

$$a(x=2) = b(x=2) \implies 2\ln 2 = 1 + k \implies \boxed{k = 2\ln 2 - 1}$$

Conclusión

Conclusión:

Por lo tanto, $\exists k : \forall x \in]1, 3[\exists c'(x) \in \mathbb{R}$, por lo que Javiera y Diego podrán estrenar la atracción CYD.

MEM155 - Métodos Matemáticos II

Mohit Karnani

Universidad de Chile

Otoño, 2016