

# منطق پیشرفته

محسن خانی

۱۶ مهر ۱۳۹۸

## چکیده

هدفم در درس منطق پیشرفته، اثبات دو قضیه‌ی مهم گودل است: قضیه‌ی تمامیت و قضیه‌ی ناتمامیت. بنا به قضیه‌ی تمامیت، در منطق مرتبه‌ی اول، اگر حکمی در تمامی مدل‌های یک تئوری درست باشد، آن حکم با استفاده از اصول آن تئوری اثبات می‌شود. مثلاً اگر حکمی مرتبه‌ی اول در تمامی گروه‌های آبدی برقرار باشد، آنگاه قطعاً اثباتی برای آن حکم با استفاده از اصول موضوعه‌ی گروه‌های آبدی پیدا می‌شود.

در بخش دوم درس، به قضایای ناتمامیت گودل خواهم پرداخت. بنا به ناتمامیت اول گودل، امکان ارائه یک اصل بندی کامل برای حساب توسط یک الگوریتم وجود ندارد.

نیز بنا به قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل، یک قضیه‌ای مرتبه‌ی اول درباره اعداد طبیعی وجود دارد این قضیه (با این که در مورد اعداد طبیعی درست است، از اصول پئانو نتیجه نمی‌شود).

فهم دقیق قضیه‌های بالا، البته نیازمند پشت سر گذاشتن چندین جلسه از درس است. برای خواندن یک مقدمه‌ی مفصل‌تر برای درس منطق، لطفاً به جزوه‌ی درس مبانی منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها، در تارنمای شخصیم مراجعه کنید. رویکردم در تدریس، بیشتر با تکیه بر نظریه‌ی مدل خواهد بود که تخصصم است. منابع بخشهای اولی، کتاب تنت‌وزیگلر است.<sup>۱</sup>

## فهرست مطالب

۲	۱ الفبا، بدون معانی
۳	۲ جبر ساختارها
۹	۳ ادامه‌ی مبحث زبان
۱۲	۴ تئوریه‌ها

---

<sup>۱</sup> تایپ اولیه‌ی جلسات به ترتیب توسط: ج ۱ آرمان عطائی، ج ۲ افشین زارعی، صورت گرفته است.

# ۱ الفبا، بدون معانی

مطالعه‌ی هر مفهوم جبری در منطق مرتبه‌ی اول، نخست نیازمند انتخاب یک زبان مناسب است. زبان، حکم حروف الفبای فارسی را دارد که کلمات قرار است با استفاده از آنها ساخته شوند.

**تعریف ۱** (یک زبان مرتبه‌ی اول). منظور از یک زبان مرتبه اول  $L$ ، یک مجموعه متشکل از نمادهایی برای توابع، نمادهایی برای روابط و نمادهایی برای ثوابت است. برای هر نماد تابعی  $f \in L$  یک عدد طبیعی  $n_f$  به نام تعداد مواضع تابع  $f$  در نظر گرفته شده است و برای نماد رابطه‌ای  $R$  نیز یک عدد طبیعی  $n_R$  به نام تعداد مواضع رابطه‌ی  $R$  در نظر گرفته شده است.

## توجه ۲.

۱. نماد تابعی با تابع فرق می‌کند. بعداً قرار است متناظر با هر نماد تابعی، یک تابع واقعی پیدا کنیم که ترجمه‌ی آن نماد باشد.

۲. در یک زبان مرتبه‌ی اول  $L$ ، نمادهای منطقی مانند  $\wedge$ ،  $\vee$ ،  $\forall$ ،  $\exists$  و ... قرار ندارند. بعداً درباره‌ی جایگاه اینها در منطق مرتبه‌ی اول سخن خواهیم گفت.

برای مطالعه یک پدیده، باید زبانی را انتخاب کنیم که از پس بیان ویژگی‌های جبری آن پدیده برآید. در درسهای آینده این سخن را روشنتر خواهیم کرد. در زیر مثالی از چند زبان مرتبه‌ی اول آورده‌ام.

## مثال ۳ (مثالهایی از زبانهای مرتبه‌ی اول).

۱. زبان تهی:  $L = \emptyset$  که شامل هیچ نمادی برای تابع، ثابت یا رابطه نیست.

۲. زبان گروه‌های جمعی آبدی:  $L_{AbG} = \{+, -, \cdot\}$ . در این زبان،  $+$  یک نماد تابعی دو موضعی است،  $-$  یک نماد تابعی تک موضعی است و  $\cdot$  نمادی برای یک ثابت است.

۳. زبان نظریه‌ی گروه‌ها:  $L_{Group} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$ . در این زبان،  $^{-1}$  یک نماد تابعی تک موضعی،  $\cdot$  یک نماد تابعی دو موضعی و  $e$  یک نماد برای یک ثابت است.

۴. زبان نظریه‌ی گراف:  $L_{Graph} = \{R\}$ . در این زبان،  $R$  یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است.

۵. زبان حلقه‌ها:  $L_{Ring} = \{+, -, \cdot, \cdot^{-1}, 1\}$  که در آن  $1$ ، دو نماد برای دو ثابت هستند. این زبان در واقع از افزودن  $\cdot^{-1}$  و  $1$  به زبان گروه‌های جمعی آبدی به دست می‌آید.

۶. زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها:  $L_{Set} = \{\in\}$ . در این زبان، علامت  $\in$  یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است.

۷. زبان نظریه‌ی اعداد:  $L_{\mathbb{N}} = \{+, \cdot, \cdot^{-1}, 1, s\}$  در این زبان،  $s$  یک نماد تابعی تک موضعی (برای تابع تالی) است.

۸. زبان  $L = \{\leq\}$  زبان مطالعه‌ی مجموعه‌های مرتب است؛ در این زبان،  $\leq$  یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است.

۹. زبان  $L_{oring} = L_{Ring} \cup \{\leq\}$  زبانی برای مطالعه‌ی حلقه‌های مرتب است.

طبیعت برخی پدیده‌ها، بخصوص فضاهای توپولوژیک، مرتبه‌ی اول نیست ولی در عین حال برخی فضاهای توپولوژیک که ساختار جبری دارند، مرتبه‌ی اول هستند.

## تمرین ۱. برای مطالعه‌ی فضاهای برداری چه زبان مرتبه‌ی اولی را پیشنهاد می‌کنید؟

بحث زبان را فعلاً رها می‌کنم. در جلسات آینده، دوباره به زبان (به بیان بهتر، به نحو) بازخواهیم گشت.

## ۲ جبر ساختارها

در منطق مرتبه‌ی اول، جملات باید در ساختارها معنا شوند. مثلاً این را که «هر عنصری دارای یک وارون ضربی است» باید در یک گروه ضربی معنا کرد. آنچه در منطق (یا بهتر بگوییم در نظریه‌ی مدلها) یک ساختار نامیده می‌شود، تعمیمی از تعریف همه‌ی ساختمانهای مرتبه‌ی اول جبری، مانند حلقه و گروه و غیره است.

**تعریف ۴** ( $L$  ساختار). فرض کنید  $L$  یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. منظور از یک  $L$  ساختار جفتی به صورت زیر است:

$$\mathfrak{M} = (M, (z^{\mathfrak{M}})_{z \in L})$$

که متشکل از یک مجموعه‌ی  $M$  است به نام جهان آن  $L$  ساختار، و همچنین برای هر نماد  $z \in L$  یک مابازای  $z^{\mathfrak{M}}$  وجود دارد که به آن تعبیر (معنای) نماد  $z$  در ساختار  $\mathfrak{M}$  گفته می‌شود. این تعبیر به صورت دقیق زیر تعریف می‌شود.

• اگر  $z$  یک نماد ثابت باشد آنگاه  $z^{\mathfrak{M}} \in M$  یک عنصر است که به آن تعبیر ثابت  $z$  گفته می‌شود.

• اگر  $z$  یک نماد تابعی و  $n$  تعداد مواضع آن باشد آنگاه

$$z^{\mathfrak{M}} : M^n \rightarrow M$$

یک تابع است که به آن تعبیر نماد تابعی  $z$  گفته می‌شود.

• اگر  $z$  یک نماد رابطه‌ای  $n$  موضعی باشد آنگاه  $z^{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$  یک رابطه است که به آن تعبیر نماد رابطه‌ی  $z$  گفته می‌شود.

به طور خاص دقت کنید که جهان یک ساختار مرتبه‌ی اول، تحت تابع‌های تعبیر شده بسته است. همچنین این تابعها بردشان زیرمجموعه‌ی  $M$  (و نه  $M^n$  است).

## تمرین ۲. برای هر کدام از زبان‌های $L$ در مثال ۳ بررسی کنید که $L$ ساختارهای مربوطه چگونه‌اند.

**تعریف ۵** ( $L$  همومرفیسم). فرض کنید  $\mathfrak{M}$  و  $\mathfrak{N}$  دو  $L$  ساختار باشند. تابع  $h : M \rightarrow N$  را یک  $L$  همومرفیسم می‌نامیم هرگاه حافظ ساختار باشد، به بیان دقیق هرگاه این گونه باشد که

• برای هر نماد ثابت  $z \in L$

$$h(z^{\mathfrak{M}}) = z^{\mathfrak{N}}$$

• برای هر نماد تابعی  $n$  موضعی  $f \in L$  و هر  $a_1, \dots, a_n \in M$

$$h(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

• و برای هر نماد رابطه‌ای  $n$  موضعی  $R \in L$  و هر  $a_1, \dots, a_n \in M$

$$R^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow R^{\mathfrak{M}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

به یک طرفه بودن فلش بالا دقت کنید. اگر  $h$  یک به یک باشد و فلش بالا دو طرفه باشد، آنگاه  $h$  را یک نشان دادن می‌نامیم. اگر  $h$  یک نشان دادن پوشا باشد، آن را یک ایزومرفیسم می‌نامیم.

**تمرین ۳.** مفهوم همومرفیسم بین  $L$  ساختارها را برای هر یک از زبانهای مثال ۳ بررسی کنید.

دقت کنید که مفاهیم بالا، تعمیم مفاهیم همنام خود در جبر گروه‌ها، حلقه‌ها، فضاهای برداری و غیره هستند.

**تعریف ۶.** فرض کنید  $\mathfrak{M}$  یک  $L$  ساختار باشد. نگاشت  $h : M \rightarrow M$  را یک اتومرفیسم می‌نامیم هرگاه  $h$  یک ایزومرفیسم باشد.

مجموعه‌ی همه‌ی اتومرفیسم‌های یک ساختار  $\mathfrak{M}$  تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را با  $\text{Aut}(\mathfrak{M})$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۷.** فرض کنید  $\mathfrak{M}$  و  $\mathfrak{N}$  دو  $L$  ساختار باشند. می‌گوییم  $\mathfrak{M}$  یک زیرساختار<sup>۲</sup> از  $\mathfrak{N}$  است و می‌نویسیم  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ ، هرگاه نگاشت شمول (یعنی نگاشت همانی)  $i : M \rightarrow N$  یک نشان دادن باشد.

دقت کنید که در صورتی که  $\mathfrak{M}$  زیر ساختاری از  $\mathfrak{N}$  باشد، برای هر تابع  $n$  موضعی  $f \in L$  داریم

$$f^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{N}} \upharpoonright M$$

همچنین برای هر رابطه‌ی  $n$  موضعی  $R \in L$  داریم

$$R^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{N}} \cap M^n$$

همچنین برای هر ثابت  $c \in L$  داریم

$$c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{N}}$$

همه‌ی عبارتهای بالا بیانگر این هستند که نگاشت همانی یک نشان دادن است.

حال فرض کنید که  $\mathfrak{M}$  یک  $L$  ساختار باشد و  $A \subseteq M$ ؛ یعنی  $A$  یک مجموعه باشد که زیرمجموعه‌ای از جهان  $\mathfrak{M}$  است. دقت کنید که  $A$  خودش یک  $L$  ساختار نیست و فقط یک مجموعه است. در ادامه می‌خواهیم بگوییم که در چه صورت  $A$  جهان زیرساختار از  $\mathfrak{M}$  می‌تواند باشد. یعنی در چه صورتی یک ساختار  $\mathfrak{A}$  وجود دارد به طوری که  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$  و جهان  $\mathfrak{A}$  مجموعه‌ی  $A$  است.

طبیعتاً اگر  $A$  جهان یک زیرساختار از  $\mathfrak{M}$  باشد، اولاً برای هر ثابت  $c \in L$  داریم  $c^{\mathfrak{M}} \in A$ ؛ ثانیاً برای هر تابع  $n$  موضعی  $f \in L$  و برای هر  $a_1, \dots, a_n \in A$  داریم  $f^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \in A$ . به بیانی دیگر  $A$  باید تحت ثوابت و توابع زبان بسته است.

**تمرین ۴.** نشان دهید که همین کافی است؛ یعنی اگر  $\mathfrak{M}$  یک  $L$  ساختار باشد و  $A \subseteq M$ ، آنگاه  $A$  جهان یک زیرساختار  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$  است اگر و تنها اگر تحت ثوابت و توابع  $\mathfrak{M}$  بسته باشد.

<sup>۲</sup>substructure

پس اگر زبان  $L$  شامل هیچ نماد تابعی و نماد ثابتی نباشد (یعنی فقط شامل نمادهای رابطه‌ای باشد) آنگاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی  $A \subseteq M$  جهان یک زیرساختار از  $\mathfrak{M}$  است.

لم ۸. فرض کنید  $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$  خانواده‌ای از زیرساختارهای یک  $L$  ساختار  $\mathfrak{N}$  باشد. در این صورت  $\bigcap M_i$  جهان یک زیرساختار از  $\mathfrak{N}$  است (اگر تهی نباشد).

اثبات. برای هر ثابت  $c \in L$  عنصر  $c^{\mathfrak{N}}$  در تمام  $M_i$  ها قرار دارد. همچنین برای عناصر  $(a_1, \dots, a_n) \in \bigcap M_i$  بنا به زیرساختار بودن تک تک  $\mathfrak{M}_i$  ها می‌دانیم که  $f^{\mathfrak{N}}(a_1, \dots, a_n) \in \bigcap M_i$ . همین دوشروط بنا به تمرین بالا کافی است.  $\square$

زیرساختاری را که در لم قبل بدان اشاره شد با  $\bigcap \mathfrak{M}_i$  نشان می‌دهیم. گفتیم که اشتراک هر خانواده از زیرساختارها، یک زیرساختار است. اگر  $\mathfrak{N}$  یک  $L$  ساختار باشد و  $A \subseteq N$  (زیرمجموعه) آنگاه زیرساختار تولید شده توسط  $A$  در  $\mathfrak{N}$  را اشتراک همه‌ی زیرساختارهایی از  $\mathfrak{N}$  می‌گیریم که جهانشان شامل  $A$  است. به بیان دیگر تعریف می‌کنیم

$$\langle A \rangle^{\mathfrak{N}} = \bigcap \{ \mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}, A \subseteq M \}$$

به بیان دیگر  $\langle A \rangle^{\mathfrak{N}}$  کوچکترین زیرساختاری از  $\mathfrak{N}$  است که جهان آن شامل  $A$  است. اگر  $A$  متناهی باشد و  $\mathfrak{M} = \langle A \rangle^{\mathfrak{N}}$  می‌گوییم  $\mathfrak{M}$  یک زیرساختار متناهی‌تولید شونده از  $\mathfrak{N}$  است. در جلسات آینده اعضای این زیرساختار را به طور صریح مشخص خواهیم کرد.

توجه ۹. اگر زبان  $L$  شامل حداقل یک نماد ثابت باشد و  $A = \emptyset$  آنگاه

$$\langle \emptyset \rangle^{\mathfrak{N}} = \bigcap_{\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}} \mathfrak{M}.$$

یعنی در زبانی که ثابت دارد، ساختار تولید شده توسط تهی، تهی نیست.

لم ۱۰. فرض کنید  $A \neq \emptyset$  و  $\mathfrak{M} = \langle A \rangle^{\mathfrak{M}}$ ، (دقت کنید که لزوماً  $M$  برابر  $A$  نیست؛ یعنی جهان ساختار تولید شده توسط  $A$  شاید از خود مجموعه‌ی  $A$  بزرگتر باشد) آنگاه هر همومرفیسم  $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M} : h$  تنها توسط مقادیر  $h$  روی  $A$  تعیین می‌شود؛ یعنی اگر  $h_1 : \langle A \rangle^{\mathfrak{M}} \rightarrow \mathfrak{N}$  و  $h_2 : \langle A \rangle^{\mathfrak{M}} \rightarrow \mathfrak{N}$  دو همومرفیسم باشند، در این صورت اگر برای هر  $a \in A$  داشته باشیم  $h_1(a) = h_2(a)$  داریم  $h_1(x) = h_2(x)$  برای هر  $x \in M$ .

اثبات. فرض کنید  $\mathfrak{N} \rightarrow \langle A \rangle^{\mathfrak{M}} : h_1, h_2$  دو همومرفیسم باشند که روی  $A$  مقادیر یکسانی دارند. قرار دهید

$$B = \{x \in M \mid h_1(x) = h_2(x)\}.$$

می‌خواهیم نشان دهیم که  $B = M$ . (یعنی می‌خواهیم نشان دهیم که روی تمام نقاط ساختار تولیدشده، این دو همومرفیسم با هم برابرند). واضح است که  $A \subseteq B$  زیرا فرض کرده‌ایم که روی  $A$  این دو همومرفیسم مقادیر یکسانی دارند. ادعا می‌کنیم که مجموعه‌ی  $B$  جهان یک زیرساختار از  $\mathfrak{M}$  است.

برای اثبات ادعای بالا کافی است نشان دهیم که  $B$  تحت ثوابت و روابط  $\mathfrak{M}$  بسته است.

اولاً برای هر ثابت  $c$  داریم  $h_1(c^{\mathfrak{M}}) = h_2(c^{\mathfrak{M}})$ . پس  $c^{\mathfrak{M}} \in B$  و همچنین بنا به همومرفیسم بودن داریم  $c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$ . ثانیاً برای عناصر  $b_1, \dots, b_n \in B$  داریم  $f^{\mathfrak{M}}(b_1, \dots, b_n) \in B$  زیرا  $h_1(b_i) = h_2(b_i)$  و بنابراین

$$h_1(f^{\mathfrak{M}}(b_1, \dots, b_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h_1(b_1), \dots, h_1(b_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h_2(b_1), \dots, h_2(b_n)) = h_2(f^{\mathfrak{M}}(b_1, \dots, b_n)).$$

تا اینجا نشان دادیم که  $B$  جهان یک زیرساختار از  $\mathfrak{M}$  است. کوچکترین زیرساختار شامل  $A$  همان  $\mathfrak{M}$  است پس  $M \subseteq B$ .  
 از آنجا که  $B \subseteq M$  داریم  $M = B$ . □

لم ۱۱. فرض کنید  $\mathfrak{M} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}'$  یک ایزومرفیسم باشد و  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ . در این صورت  $L$  ساختار  $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{M}'$  به همراه ایزومرفیسم  $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}'$  از  $h'$  موجود است به طوری که  $h'$  توسعه‌ی  $h$  است.

اثبات. یک مجموعه‌ی  $M' \subseteq N'$  و یک تابع یک‌به‌یک و پوشای  $h'$  بین  $N$  و  $N'$  پیدا کنید که توسیع  $h$  باشد. آنگاه با استفاده از  $h'$  مجموعه‌ی  $N'$  را تبدیل به جهان یک  $L$  ساختار بکنید. مثلاً تعریف کنید:

$$f^{\mathfrak{N}'}(h'(a_1), h'(a_2)) := h'(f^{\mathfrak{M}}(a_1, a_2)).$$

□

آنچه که در لم زیر بدان پرداخته‌ایم، تعمیمی از مفاهیم جبری حد مستقیم و حد معکوس<sup>۳</sup> است.

لم ۱۲. فرض کنید  $(I, \leq)$  یک مجموعه‌ی مرتب جزئی جهتدار<sup>۴</sup> باشد. همچنین فرض کنید  $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$  یک خانواده‌ی جهتدار از  $L$  ساختارها باشد؛ یعنی به گونه‌ای باشد که اگر  $i_1 \leq i_2$  آنگاه  $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$ . در این صورت  $\bigcup M_i$  جهان یک  $L$  ساختار است که همه‌ی  $\mathfrak{M}_i$ ها زیرساختاری از آن هستند.

اثبات. باید بتوانیم تمامی علائم زبانی را در  $M_i$  تعبیر کنیم. در زیر این کار برای روابط انجام داده‌ام؛ با توابع و ثوابت می‌توان رفتار مشابهی داشت:

فرض کنید  $a_1, \dots, a_n \in \bigcup M_i$  و  $R \in L$ . در این صورت  $j \in I$  موجود است به طوری که تمام  $a_i$ ها در  $M_j$  هستند. تعریف می‌کنیم

$$R^{\bigcup \mathfrak{M}_i}(a_1, \dots, a_n) \iff R^{\mathfrak{M}_j}(a_1, \dots, a_n)$$

تعریف بالا، خوش تعریف است؛ یعنی به  $j$  بستگی ندارد. زیرا اگر تمام  $a_i$ ها در یک  $\mathfrak{M}_k$  دیگر باشند، آنگاه ساختاری مانند  $\mathfrak{M}_l$  شامل  $\mathfrak{M}_k, \mathfrak{M}_j$  در کلاس هست و این موجب می‌شود که تعبیر این رابطه در هر سه‌ی این ساختارها یکسان شود:

$$R^{\bigcup \mathfrak{M}_i}(a_1, \dots, a_n) \iff R^{\mathfrak{M}_l}(a_1, \dots, a_n) \iff R^{\mathfrak{M}_k}(a_1, \dots, a_n).$$

□

در بالا درباره‌ی زیرساختار بودن سخن گفتیم. دقت کنید که مثلاً

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot)$$

در بالا (یعنی در تعریف زیرساختار) زبانها یکسانند ولی جهانها تغییر کرده‌اند. در مفهوم تعریف‌شده‌ی زیر، جهانها یکسانند ولی زبان بزرگتر شده است.

<sup>۳</sup>direct/inverse limit

<sup>۴</sup> مجموعه‌ای مرتب به طوری که برای هر  $i_1, i_2 \in I$  عنصر  $j \in I$  موجود است به طوری که  $j \geq i_1$  و همچنین  $j \geq i_2$ .

**تعریف ۱۳.** فرض کنید  $K \subseteq L$  دو زبان مرتبه‌ی اول باشند. در این صورت  $K$  ساختار  $\mathfrak{M}$  را یک تقلیل از  $L$  ساختار  $\mathfrak{M}$  می‌نامیم هرگاه جهانهای  $M$  و  $N$  یکسان باشند و  $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \upharpoonright_K$ . دقت کنید که در این صورت  $\mathfrak{M}$  را بسطی از  $\mathfrak{N}$  می‌نامیم.<sup>۵</sup> در زیر چند مثال از بسط زبان آورده‌ایم.

**مثال ۱۴.** فرض کنید  $\mathfrak{M}$  یک  $L$  ساختار و  $R$  یک رابطه روی  $M^n$  باشد. قرار دهید  $L' = L \cup \{R\}$ . در این صورت  $\mathfrak{M}$  تقلیلی از  $L'$  ساختار  $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{M}, R)$  است که در آن  $R^{\mathfrak{M}'}$  همان رابطه‌ی  $R$  تعبیر شده است.

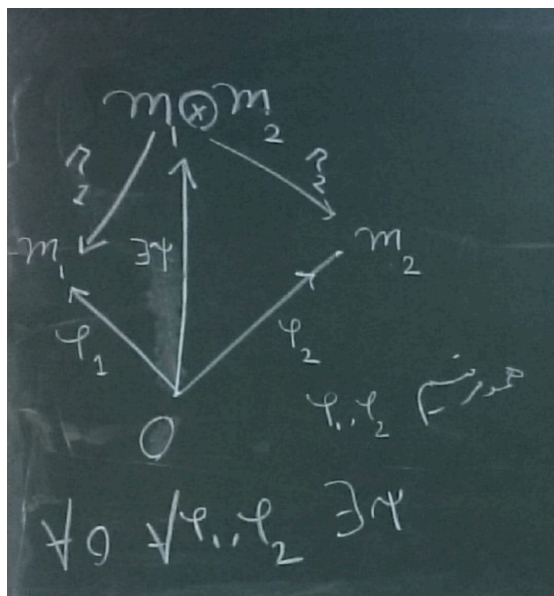
**مثال ۱۵.** فرض کنید  $\mathfrak{M}$  یک  $L$  ساختار باشد و  $m_1, \dots, m_n \in M$ . زبان  $L' = L \cup \{c_{m_1}, \dots, c_{m_n}\}$  را در نظر بگیرید که در آن ثوابتی برای این اعضای  $M$  وجود دارد. حال  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{M}, m_1, \dots, m_n)$  را به عنوان یک  $L'$  ساختار در نظر بگیرید که در آن  $c_{m_i}^{\mathfrak{A}} = m_i$ .

**مثال ۱۶.** فرض کنید  $\mathfrak{M}$  یک  $L$  ساختار باشد و  $A \subseteq M$ . قرار دهید  $L_A = L \cup \{c_a | a \in A\}$ . در این صورت یک بسط از  $L$  ساختار  $\mathfrak{M}$  به زبان  $L_A$  وجود دارد:

$$\mathfrak{M}_A = (\mathfrak{M}, \{a\}_{a \in A}), \quad c_a^{\mathfrak{M}} = a$$

در این صورت گروه اتومورفیسم‌های روی  $\mathfrak{M}_A$  یعنی  $\text{Aut}(\mathfrak{M}_A)$  در زبان  $L_A$  برابر است با اتومورفیسم‌هایی از  $M$  که روی اعضای  $A$  ثابت هستند. این گروه را با  $\text{Aut}(\frac{\mathfrak{M}}{A})$  نیز نشان می‌دهیم.

**تمرین ۵** ( حاصل ضرب در کاتگوری  $L$  ساختارها و  $L$  همومورفیسم‌ها). فرض کنید  $\mathfrak{M}_1$  و  $\mathfrak{M}_2$  دو  $L$  ساختار باشند. روی  $M_1 \times M_2 = \{(x, y) | x \in M_1, y \in M_2\}$  یک  $L$  ساختار تعریف کنید (یعنی اجزای زبان  $L$  را به گونه‌ای تعبیر کنید) که  $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$  (نامی که شما روی  $L$  ساختار جدید گذاشته‌اید) ویژگی جهانی زیر را داشته باشد.



دقت کنید که  $\pi_i$  نگاشته‌های همومورفیسم پوشای طبیعی

$$\pi_i : \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \rightarrow \mathfrak{M}_i$$

<sup>۵</sup> وقتی که  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$  در انگلیسی گفته به این نوع گسترش یک *extension* گفته می‌شود. وقتی مانند تعریف بالا،  $\mathfrak{M}$  بسطی از  $\mathfrak{N}$  باشد، در انگلیسی به این نوع گسترش *expansion* گفته می‌شود. در فارسی شاید خوب باشد اولی را توسیع و دومی را بسط بنامیم.

هستند. تصویر بیان اگر این است که برای هر  $L$  ساختار  $\mathfrak{D}$  و همومرفیسمهای  $\phi_i : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{M}_i$ ، همومرفیسم  $\psi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$  موجود باشد به طوری که دیاگرام کشیده شده جابه‌جائی باشد.

تمرین ۶. فرض کنید  $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  یک نشاننده باشد. نشان دهید که یک  $L$  ساختار  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$  و یک اتومرفیسم  $g : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$  موجود است به طوری که  $f|_{\mathfrak{M}} = g|_{\mathfrak{M}}$  و  $(\mathfrak{N}, g)$  تحت شرط زیر یکتاست.

$$M \subseteq g^{-1}(N) \subseteq g^{-2}(N) \subseteq \dots$$

## زبان و ساختار چندبخشی

تا کنون هر ساختار مرتبه‌ی اولی که مشاهده کردیم دارای یک جهان مشخص بود و توابع و روابط روی همان جهان تعریف شده بودند. اما در بسیاری ساختارهای ریاضی، بیش از یک جهان وجود دارد و میان جهانها توابعی وجود دارد. این خواسته به راحتی در ساختارهای مرتبه‌ی اول قابل گنجاندن است. در زیر ساختارها و زبانهای چند بخشی را تعریف کرده‌ایم. در درس دوباره به آنها بازخواهیم گشت ولی هر قضیه‌ای که درس ثابت کنیم درباره‌ی آنها نیز درست است.

تعریف ۱۷. زبان  $L$  را یک زبان  $S$  بخشی گوئیم هرگاه دارای روابط از نوع  $(s_1, \dots, s_n)$ ، توابع از نوع  $(s_1, \dots, s_n, t)$  و ثوابت از نوع  $s_i$  باشد. متناظر با یک زبان  $S$  بخشی  $L$ ، ساختارهای  $S$  بخشی به صورت زیر هستند.

$$\mathfrak{M} = ((A_s)_{s \in S}, (z^{\mathfrak{M}})_{z \in L})$$

که در آن هر  $A_s$  یک جهان از نوع  $s$  نامیده می‌شود و

• اگر  $z \in L$  یک نماد ثابت از نوع  $s_i$  باشد،  $z^{\mathfrak{M}} \in A_{s_i}$ .

• اگر  $z \in L$  یک نماد تابعی از نوع  $(s_1, \dots, s_n, t)$  باشد،

$$z^{\mathfrak{M}} : A_{s_1} \times A_{s_2} \times \dots \times A_{s_n} \rightarrow A_t$$

یک تابع است.

• اگر  $z \in L$  یک نماد رابطه‌ای از نوع  $(s_1, \dots, s_n)$  باشد،

$$z^{\mathfrak{M}} \subseteq A_{s_1} \times A_{s_2} \times \dots \times A_{s_n}$$

یک رابطه است.

در نوشتن فرمولهای چندبخشی، سورها و متغیرها می‌توانند مربوط به بخشهای خاصی باشند.

مثال ۱۸. گروه‌های جایگشتی را می‌توان به عنوان ساختارهای دوبخشی در نظر گرفت.

$$(X, G, g : G \times X \rightarrow X, e^G, \cdot^G, ()^{-1G})$$

در یک گروه جایگشتی، یک مجموعه‌ی  $X$  داریم که یک گروه  $G$  اعضای آن را جابه‌جا می‌کند.



مثال ۱۹. میدان های ارزیابی را می توان به عنوان ساختارهای سه بخشی در نظر گرفت: <sup>۶</sup>

$$(K, \Gamma, k, V : K \rightarrow \Gamma)$$

یک میدان ارزیابی از یک میدان  $K$  تشکیل شده است و یک گروه  $\Gamma$  و یک نگاشت ارزیابی  $\gamma : K \rightarrow \Gamma$ . این نگاشت منجر به ایجاد یک میدان  $k$  به نام میدان پیمانه ها می شود. <sup>۷</sup>

### ۳ ادامه ی مبحث زبان

فرض کنید  $L$  یک زبان مرتبه اول باشد. یک مجموعه  $x_1, x_2, \dots$  از متغیرها را در نظر بگیرید. به هر دنباله متناهی ای که از علائم زبانی تابع، ثابت و با استفاده از این متغیرها، و البته با قوانین خاصی، ساخته شود یک  $L$  ترم یا یک  $L$  کلمه گفته می شود. هر دنباله ای دلخواه از ثوابت و توابع و متغیرها ترم نیست. در زیر به صورت استقرائی بیان کرده ایم که دقیقاً کدام دنباله ها ترم هستند.

تعریف ۲۰ (تعریف دقیق). مجموعه ی  $L$  ترم ها به صورت استقرائی زیر تعریف می شود.

- هر ثابت  $c \in L$  و هر متغیر  $x_i$  یک  $L$  ترم محسوب می شود.
- هرگاه بدانیم که  $t_1, \dots, t_n$  چند  $L$  ترم هستند و  $f \in L$  یک تابع  $n$  موضعی باشد، آنگاه  $f(t_1, \dots, t_n)$  یک  $L$  ترم است.

مثال ۲۱. در زبان  $L_{AbG} = \{+, (-), \cdot\}$  موارد زیر  $L$  ترم هستند.

$$\bullet \cdot$$

$$\bullet + \bullet$$

$$\bullet x + \dots + x \text{ (گاهی به جای این به طور خلاصه می نویسیم } nx \text{)}$$

$$\bullet x_1 + x_2 + x_3$$

$$\bullet nx_1 + mx_2 + kx_3$$

دقت کنید که در نوشتن ترمهای بالا ساده سازیهای استفاده شده است. مثلاً به جای دنباله ی  $x_1 x_2 x_3 + \dots + x_1 x_2 x_3$  نوشته ایم  $x_1 + x_2 + x_3$ .

مثال ۲۲. در زبان  $L_{ring} = \{+, \cdot, \cdot, 1, (-)\}$  موارد زیر  $L$  ترم هستند.

$$\bullet 1 + \bullet$$

$$\bullet 1 \cdot \bullet$$

$$\bullet 1 + 1 + 1$$

<sup>۶</sup> valued field

<sup>۷</sup> ان شاء الله زمانی درباره ی میدانهای ارزیابی درس خواهیم داد!

$$\bullet x_1 + x_2 + x_3$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

•  $5x_1x_2^2 + 6x_2x_2^2x_3$  (دقت کنید که عدد ۵ جزو ترم نیست. تنها منظورم پنج بار نوشتن جمع بوده است. توان هم به همین صورت).

**تعریف ۲۳** (تعبیر ترمها در ساختارها). فرض کنید که  $\mathfrak{M}$  یک  $L$  ساختار باشد. فرض کنید  $t(x_1, \dots, x_n)$  یک  $L$  ترم باشد و  $a_1, \dots, a_n \in M$ . در این صورت عنصری در جهان ساختار  $\mathfrak{M}$ ، جود دارد که آنرا با  $t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)$  (تعبیر ترم  $t$  در ساختار  $\mathfrak{M}$  با جایگذاری  $a_i$  به جای  $x_i$ ) نشان می‌دهیم. این عنصر به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود.

• اگر  $t = c$  یک ثابت باشد

$$c^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = c^{\mathfrak{M}}$$

• اگر  $t = x_i$  یک متغیر باشد آنگاه

$$x_i^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = a_i.$$

• اگر  $t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)$  دانسته باشند و  $f$  یک تابع  $n$  موضعی باشد آنگاه تعبیر  $f(t_1, \dots, t_n)$  در  $M$  با جایگذاری  $a_i$  به جای  $x_i$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[f(t_1, \dots, t_n)]^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)).$$

**مثال ۲۴.** در زبان  $L = L_{ring}$  در ساختار  $R = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, \cdot, 1)$  داریم

$$[2x_1x_2^2 + x_3^2]^R(1, 2, 3) = 89$$

قبلاً درباره‌ی ساختار تولید شده توسط یک مجموعه صحبت کرده‌ایم. در لم زیر که اثبات آن جزو تمرینهاست، خواهیم دید که ساختار تولید شده توسط جایگذاری عناصر  $A$  در ترمها حاصل می‌شود.

**لم ۲۵.** فرض کنید  $\mathfrak{M}$  یک  $L$  ساختار باشد و  $A \subseteq M$ . آنگاه

$$\langle A \rangle^{\mathfrak{M}} = \bigcap_{A \subseteq N, \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}} \mathfrak{N} = \{t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A, n \in \mathbb{N}, t \text{ یک ترم است}\}$$

□

اثبات. تمرین.

**توجه ۲۶.** اگر زبان  $L$  حاوی ثوابت باشد، آنگاه

$$\emptyset \neq \langle \phi \rangle^{\mathfrak{M}} = \{t^{\mathfrak{M}}(c_1^{\mathfrak{M}}, \dots, c_n^{\mathfrak{M}}) \mid n \in \mathbb{N} \text{ و } c_i \text{ ها ثوابت هستند}\}$$

بنا به لم قبلی، حداکثر اندازه‌ی ساختار تولید شده توسط  $A$  به صورت زیر تعیین می‌شود: (با توجه به این که هر ترم یک دنباله‌ی متناهی از علائم است، در صورتی که زبنا نامتناهی باشد، تعداد ترمهای بیشتر از اندازه‌ی زبان نمی‌شود)

**نتیجه ۲۷.**  $\langle A \rangle^{\mathfrak{M}} \leq \max\{|L| + \aleph_0, |A|\}$

گفتیم که زبان حکم حروف الفبا را دارد و ترمها حکم کلمه‌ها را. آخرین چیزی که باید تعریف شود، جمله‌ها (یا فرمولها) هستند.  $L$  فرمولها دنباله‌هایی متناهی هستند که با استفاده از ترم‌های زبان و علائم منطقی  $\neg$  و  $\wedge$  و  $\exists$  و علامت تساوی ساخته می‌شوند. دوباره دقت کنید که هر دنباله‌ی متناهی این چنین یک فرمول نیست. پس باید فرمولها را به صورت دقیقتر تعریف کرد.

**تعریف ۲۸** (فرمولها). مجموعه  $L$  فرمولها کوچکترین مجموعه‌ای است که اعضایش از طریق زیر حاصل می‌شود.

- برای هر دو ترم  $t_1$  و  $t_2$  عبارت  $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$  یک  $L$  فرمول است.
- برای ترم‌های  $t_1, \dots, t_n$  و رابطه‌ی  $n$  موضعی  $R$  عبارت  $R(t_1, \dots, t_n)$  یک  $L$  فرمول است.
- اگر  $\phi$  فرمول باشد در این صورت  $\neg\phi$  نیز یک فرمول است.
- اگر  $\phi$  و  $\psi$  دو فرمول باشند در این صورت  $\phi \wedge \psi$  یک  $L$  فرمول است.
- اگر  $\phi$  یک فرمول باشد در این صورت  $\exists x\phi(x)$  نیز یک  $L$  فرمول است.

یک سری کوتاه‌نوشت نیز به صورت زیر داریم:

$$1. \phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$2. \forall x\psi \equiv \neg(\exists x\neg\psi)$$

$$3. \phi \rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$$

**تعریف ۲۹** (متغیرهای پایبند و آزاد). متغیر  $x$  را در فرمول  $\phi$  آزاد گوئیم هرگاه تحت تاثیر هیچ سوری نباشد؛ در غیر این صورت آن را پایبند می‌نامیم.

**مثال ۳۰.** در فرمول زیر

$$\forall x\psi(x) \wedge R(x, y)$$

متغیر  $x$  اول پایبند است و  $x$  دوم آزاد است و  $y$  آزاد است. برای تشخیص این نیاز به دانستن ترتیب اولویت نمادهاست. فرمول بالا به صورت زیر پرانتزگذاری می‌شود:

$$((\forall x\psi(x)) \wedge R(x, y))$$

آخرین چیزی که می‌خواهیم تعریف کنیم این است که چه زمانی می‌گوئیم یک فرمول در یک ساختار درست است.

**تعریف ۳۱.** فرض کنید  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  یک  $L$  فرمول و  $\mathcal{M}$  یک  $L$  ساختار باشند و  $a_1, \dots, a_n \in M$ . در این صورت عبارت  $\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$  (خوانده شود: فرمول  $\phi$  با جایگذاری  $a_i$  به جای  $x_i$  در ساختار  $\mathcal{M}$  درست است، یا  $\mathcal{M}$  مدلی برای این فرمول است) به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود.

$$\bullet \quad t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \text{ هرگاه } \mathcal{M} \models t_1(a_1, \dots, a_n) = t_2(a_1, \dots, a_n)$$

$$\bullet \quad R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) \text{ هرگاه } \mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)(a_1, \dots, a_n)$$

$$\mathfrak{M} \models \psi \text{ و } \mathfrak{M} \models \phi \text{ هرگاه } \mathfrak{M} \models \phi \wedge \psi \bullet$$

$$\mathfrak{M} \models \neg \phi \text{ هرگاه } \mathfrak{M} \not\models \phi \bullet$$

$$\mathfrak{M} \models \exists x \psi(x) \text{ هرگاه } a \in M \text{ عنصر در } M \text{ موجود باشد به طوری که } \mathfrak{M} \models \psi(a)$$

توجه ۳۲. دقت کنید که امکان دارد یک  $L$  فرمول یکسان در یک  $L$  ساختار درست باشد ولی در  $L$  ساختار دیگر غلط باشد. برای مثال در  $L_{ring}$  هم  $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, \cdot, 1)$  یک  $L$  ساختار است و  $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, \cdot, 1)$ . با این حال

$$(\mathbb{C}, +, \cdot, -, \cdot, 1) \models \exists x \quad x \cdot x = 1$$

ولی

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, -, \cdot, 1) \not\models \exists x \quad x \cdot x = 1$$

## ۴ تئوریا

تمرین ۷. فرض کنید  $h : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  یک همومرفیسم باشد. نشان دهید که آنگاه برای هر ترم  $t$  داریم:

$$t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{h} t^{\mathfrak{N}}(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

تعریف ۳۳. فرض کنید  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  و  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  دو  $L$  فرمول باشند. می‌گوییم این دو معادلند و می‌نویسیم

$$\phi \equiv \psi$$

هرگاه در هر  $L$  ساختار  $\mathfrak{M}$  داشته باشیم

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid \phi(x_1, \dots, x_n)\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid \psi(x_1, \dots, x_n)\}.$$

برای مثال دو  $L$  فرمول  $\neg(\exists x \phi(x))$  و  $\forall x \neg \phi(x)$  معادلند.

تمرین ۸. فرض کنید  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  یک  $L$  فرمول باشد که هیچ سوری ندارد. در این صورت نشان دهید که  $\phi$  دارای معادلی به صورت نرمال عطفی و معادلی به صورت نرمال فصلی است.<sup>۸</sup>

تمرین ۹. فرض کنید  $\mathfrak{M}$  و  $\mathfrak{N}$  دو  $L$  ساختار باشند و  $h : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  یک ایزومرفیسم باشد. نشان دهید که در این صورت برای هر  $L$  فرمول  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  و هر  $a_1, \dots, a_n \in M$  داریم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

---

<sup>۸</sup> صورت نرمال عطفی یعنی به صورت  $\bigwedge_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^m \psi_{ij}$  و صورت نرمال فصلی یعنی به صورت  $\bigvee_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^m \psi_{ij}$  که در این دو  $\psi_{ij}$  ها فرمولهای اتمی یا نقیض اتمی هستند.

تمرین ۱۰. فرض کنید  $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N} : h$  یک نشانندن باشد. نشان دهید که برای هر فرمول وجودی، یعنی هر فرمولی که در ابتدای آن فقط سورهای وجودی آمده است و پس از آن فرمولی بدون سور قرار گرفته است، مانند  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  و هر  $a_1, \dots, a_n \in M$  داریم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

منظور از یک  $L$  جمله یک  $L$  فرمول بدون متغیر آزاد است. برای مثال در زبان  $L_{ring} = \{+, \cdot, (-), *, 1\}$  فرمولهای زیر  $L_{ring}$  جمله‌اند.

$$\forall x \exists y \quad x + y = 0 \quad \bullet$$

$$\forall x \exists y \quad x \cdot y = 0 \quad \bullet$$

ممکن است یک  $L$  جمله  $\phi$  در یک  $L$  ساختار درست و در دیگری نادرست باشد، مثلاً

$$\mathbb{C} \models \exists x \quad x^2 = -1$$

در حالی که

$$\mathbb{R} \not\models \exists x \quad x^2 = -1.$$

با این حال چیزی که برای مهم است ارائه‌ی اصول موضوعه برای بخشهایی از ریاضی است که این کار تحت تئوری‌ها صورت می‌گیرد.

تعریف ۳۴. منظور از یک  $L$  تئوری مجموعه‌ای از  $L$  جمله‌هاست.

مثال ۳۵. اگر  $L_{AbG} = \{+, -, 0\}$  زبان گروه‌های آبلی باشد، آنگاه تئوری گروه‌های آبلی در این زبان، مجموعه‌ای از جملات به شکل زیر است:

$$T_{AbG} = \{\forall xyz \quad x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x \quad x + (-x) = 0, \forall xy \quad x + y = y + x, \forall x \quad x + 0 = x\}$$

اگر  $T$  یک تئوری مرتبه‌ی اول در زبان  $L$  و  $\mathfrak{M}$  یک  $L$  ساختار باشد، در این صورت می‌گوئیم که  $\mathfrak{M}$  مدلی برای  $T$  است، و می‌نویسیم  $\mathfrak{M} \models T$  هرگاه تمام جملات موجود در  $T$  در  $\mathfrak{M}$  برقرار باشند. برای مثال  $(\mathbb{R}, +, -, 0) \models T_{AbG}$ . در زیر چند مثال از تئوریها را بررسی کرده‌ایم.

• در زبان  $L_{ring} = L_{AbG} \cup \{\cdot, 1\}$  تئوری زیر را تئوری حلقه‌های جابجائی می‌نامیم:

$$T_{ring} = T_{AbG} \cup \{\forall xyz \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x \quad x \cdot 1 = x, \forall xyz \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z), \forall x \quad x \cdot y = y \cdot x\}$$

• در همان زبان تئوری میدانها به صورت زیر است:  $T_{field} = T_{ring} \cup \{\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y x \cdot y = 1)\}$

تمرین ۱۱. یک تئوری برای میدانهای بسته جبری بنویسید.

**تمرین ۱۲.** یک تئوری در زبان  $\{<\}$  برای مجموعه‌های مرتب خطی چگال بدون عنصر ابتدا و انتها بنویسید.

برای مثال یک تئوری برای مجموعه‌های نامتناهی می‌تواند بدین صورت نوشته شود. زبان را تهی می‌گیریم:  $L = \emptyset$ . و قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} T_{inf-set} = & \{ \exists x_1 x_2 \neg (x_1 = x_2), \\ & \exists x_1 x_2 x_3 \neg (x_1 = x_2) \wedge \neg (x_2 = x_3) \wedge \neg (x_3 = x_1) \\ & \vdots \\ & \} \end{aligned}$$

دقت کنید که اگر  $\mathfrak{M}$  یک ساختار باشد که در آن تمام جمله‌های بالا برقرار باشند، آنگاه  $M$  نامتناهی است.

**تمرین ۱۳.** آیا می‌توانید یک تئوری  $T$

• الف. برای مجموعه‌های ۵ عضوی بنویسید.

• ب. برای مجموعه‌های متناهی بنویسید.

در تمرین بالا، با اولین نکته درباره‌ی تئوری‌های مرتبه‌ی اول آشنا شده‌ایم، و آن این است که برای چه پدیده‌هایی اصولاً می‌توان یک تئوری نوشت.

دومین نکته‌ای که در مورد یک تئوری مرتبه‌ی اول مهم است، این است که آیا این تئوری هیچ مدلی دارد یا نه. برای مثال، در زبان  $L = L_{ring}$  تئوری  $T = \{\forall x \exists y x + y = 1, \neg(\forall x \exists y x + y = 1)\}$  هیچ مدلی ندارد؛ زیرا در هیچ  $L$  ساختاری این دو جمله نمی‌توانند همزمان درست باشند. مدل داشتن یک تئوری را تحت عنوان سازگاری می‌شناسیم. به بیان دقیق‌تر می‌گوئیم  $L$  تئوری  $T$  سازگار است هرگاه حداقل یک مدل داشته باشد.

و سومین نکته‌ی مهم این است که آیا یک تئوری  $T$  می‌تواند نسبت به یک جمله‌ی  $\phi$  بی‌تفاوت باشد؛ بدین معنی که در برخی مدل‌های تئوری  $T$  جمله‌ی  $\phi$  درست باشد و در برخی دیگر نباشد. برای مثال در زبان  $L_{ring}$  داریم  $\mathbb{C} \models T_{ring}$

$$\mathbb{C} \models T_{ring}$$

$$\mathbb{C} \models \exists x x^2 = -1$$

$$\mathbb{R} \not\models \exists x x^2 = -1$$

این سومین نکته را تحت عنوان «کامل بودن» یک تئوری بررسی می‌کنیم که در ادامه تعریف شده است.

**تعریف ۳۶.** فرض کنید  $T$  یک  $L$  تئوری و  $\phi$  یک  $L$  جمله باشد. می‌گوییم  $T \models \phi$  (جمله  $\phi$  از تئوری  $T$  نتیجه می‌شود) هرگاه  $\phi$  در تمام مدل‌های  $T$  درست باشد؛ به عبارت دیگر هرگاه داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models T \Rightarrow \mathfrak{M} \models \phi.$$

برای مثال

$$T_{AbG} \models \forall x (\exists y_1 \exists y_2 (x + y_1 = 0 \wedge x + y_2 = 0) \rightarrow y_1 = y_2)$$

به بیان ساده‌تر، در هرگروه آبدی وارون هر عنصر یکتاست، پس این که وارون هر عنصر یکتاست از تئوری گروه‌های آبدی نتیجه می‌شود. اما جمله‌ی زیر

$$\exists xyz \quad \forall t \quad (t = x \vee t = y \vee t = z)$$

از تئوری گروه‌های آبلی نتیجه نمی‌شود؛ زیرا برخی گروه‌های آبلی حداکثر سه عضو دارند و برخی دیگر بیش از سه عضو دارند. به بیان دیگر، تئوری گروه‌های آبلی هم با جمله‌ی بالا سازگار است و هم با نقیض آن سازگار است. پس  $\phi \not\models T$  هرگاه  $T$  مدلی داشته باشد که در آن  $\neg\phi$  درست باشد؛ به بیان دیگر  $\phi \not\models T$  اگر و تنها اگر  $T \cup \{\neg\phi\}$  مدل داشته باشد.

**تعریف ۳۷.** فرض کنید  $T$  یک تئوری سازگار باشد، در این صورت می‌گوییم  $T$  یک تئوری کامل است، هرگاه برای هر  $L$  جمله  $\phi$  یا  $\phi$  در تمام مدل‌های  $T$  برقرار باشد یا  $\neg\phi$ . به بیان دیگر  $T$  کامل است هرگاه برای هر جمله‌ی  $\phi$  یا  $T \models \phi$  یا  $T \models \neg\phi$  (و این یا مانع جمع است زیرا تئوری مورد نظر ما سازگار است). باز به بیان دیگر، تئوری  $T$  کامل است هرگاه برای هر دو مدل  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$  و هر جمله‌ی  $\phi$  در زبان تئوری، داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models T \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models T.$$

پس تئوری سازگار  $T$  کامل نیست هرگاه  $L$  جمله  $\phi$  پیدا شود به طوری  $T \cup \{\phi\}$  و  $T \cup \{\neg\phi\}$  هر دو سازگار باشند.

**تمرین ۱۴.** یک جمله  $\phi$  در زبان گروه‌های بنویسید به طوری که  $\mathbb{Z} \models \phi$  و  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \not\models \phi$ .

گفته‌های این بخش را خلاصه می‌کنم: برای یک تئوری مرتبه‌ی اول، سازگاری و کامل بودن مهم است. برای هر پدیده‌ای، این امر که بتوان برای آن تئوری نوشت مهم است.

همین سوالات برای تئوری‌هایی که کل ریاضیات بر آنها بنا شده است مانند تئوری مجموعه‌های نیز پرسیده می‌شود: آیا تئوری نظریه‌ی مجموعه‌ها، مثلاً زداف‌سی سازگار است؟ آیا تئوری زداف‌سی در صورت سازگار بودن کامل است؟ در مورد سوال دوم، مثلاً از درس مبانی ریاضی می‌دانید که فرضیه‌ی پیوستار، از نظریه‌ی مجموعه‌ها مستقل است؛ بدین معنی که اگر نظریه‌ی مجموعه‌ها سازگار باشد هم با فرضیه‌ی پیوستار و هم با نقیض آن سازگار است.