منطق پیشرفته

محسن خانی

۱۲ مهر ۱۳۹۸

چکیده

هدفهم در درس منطق پیشرفته، اثبات دو قضیه‌ی مهم گودل است: قضیه‌ی تمامیت و قضیه‌ی ناتمامیت. بنا به قضیه‌ی تمامیت، در منطق مرتبه‌ی اول، اگر حکمی در تمامی مدل های یک تئوری درست باشد، آن حکم با استفاده از اصول آن تئوری اثبات می شود. مثلاً اگر حکمی مرتبه‌ی اول در تمامی گروه‌های آبلی برقرار باشد، آنگاه قطعاً اثباتی برای آن حکم با استفاده از اصول موضوعه‌ی گروه‌های آبلی پیدا می‌شود.

در بخش دوم درس، به قضایای ناتمامیت گودل خواهم پرداخت. بنا به ناتمامیت اول گودل، امکان ارائه یک اصل بندی کامل برای حساب توسط یک الگوریتم وجود ندارد.

نیز بنا به قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل، یک قضیه‌ای مرتبه‌ی اول درباره اعداد طبیعی وجود دارد این قضیه (با این که در مورد اعداد طبیعی درست است، از اصول پئانو نتیجه نمی شود).

فهم دقیق قضیه‌های بالا، البته نیازمند پشت سر گذاشتن چندین جلسه از درس است. برای خواندن یک مقدمه‌ی مفصل‌تر برای درس منطق، لطفاً به جزوه‌ی درس مبانی منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها، در تارنمای شخصیم مراجعه کنید. رویکردم در تدریس، بیشتر با تکیه بر نظریه‌ی مدل خواهد بود که تخصصم است. منابع بخشهای اولی، کتاب تنت‌وزیگلر است. [۱]

فهرست مطالب

۱ الفبا، بدون معانی

مطالعه‌ی هر مفهوم جبری در منطق مرتبه‌ی اول، نخست نیازمند انتخاب یک زبان مناسب است. زبان، حکمِ حروف الفبای فارسی را دارد که کلمات قرار است با استفاده از آنها ساخته شوند.

[۱] تایپ اولیه‌ی جلسات به ترتیب توسط: ج۱ آرمان عطائی، ج۲ افشین زارعی، صورت گرفته است.

تعریف ۱ (یک زبان مرتبه‌ی اول). *منظور از یک زبان مرتبه اولِ L، یک مجموعه متشکل از* ***نمادهایی*** *برای توابع،* ***نمادهایی*** *برای روابط و* ***نمادهایی*** *برای ثوابت است. برای هر نماد تابعیِ $f \in L$ یک عدد طبیعیِ n_f به نام تعداد مواضع تابع f در نظر گرفته شده است و برای نماد رابطه‌ایِ R نیز یک عدد طبیعیِ n_R به نام تعداد مواضع رابطه‌ی R در نظر گرفته شده است.*

توجه ۲.

۱. *نماد تابعی با تابع فرق می‌کند. بعداً قرار است متناظر با هر نماد تابعی، یک تابع واقعی پیدا کنیم که ترجمه‌ی آن نماد باشد.*

۲. *در یک زبانِ مرتبه‌ی اولِ L، نمادهای منطقی مانند $\wedge$، $\vee$، $\forall$، $\exists$ و $\cdots$ قرار ندارند. بعداً درباره‌ی جایگاه اینها در منطق مرتبه‌ی اول سخن خواهیم گفت.*

برای مطالعه یک پدیده، باید زبانی را انتخاب کنیم که از پس بیان ویژگی‌های جبری آن پدیده برآید. در درسهای آینده این سخن را روشنتر خواهم کرد. در زیر مثالی از چند زبان مرتبه‌ی اول آورده‌ام.

مثال ۳ (مثالهائی از زبانهای مرتبه‌ی اول).

۱. *زبان تهی: $L = \phi$ که شامل هیچ نمادی برای تابع، ثابت یا رابطه نیست.*

۲. *زبان گروه‌های جمعی آبلی: $L_{AbG} = \{+, -, ۰\}$. در این زبان، $+$ یک نماد تابعی دو موضعی است، $-$ یک نماد تابعی تک موضعی است و ۰ نمادی برای یک ثابت است.*

۳. *زبان نظریه‌ی گروه‌ها: $L_{Group} = \{\cdot, ^{-۱}, e\}$. در این زبان، $^{-۱}$ یک نماد تابعی تک‌موضعی، $\cdot$ یک نماد تابعی دوموضعی و e یک نماد برای یک ثابت است.*

۴. *زبان نظریه‌ی گراف: $L_{Graph} = \{R\}$. در این زبان، R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است.*

۵. *زبان حلقه‌ها: $L_{Ring} = \{+, -, \cdot, ۰, ۱\}$ که در آن ۰, ۱ دو نماد برای دو ثابت هستند. این زبان در واقع از افزودنِ $\cdot$ و ۱ به زبان گروه‌های جمعی آبلی به دست می‌آید.*

۶. *زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها: $L_{Set} = \{\in\}$. در این زبان، علامت $\in$ یک نماد رابطه‌ای دوموضعی است.*

۷. *زبان نظریه‌ی اعداد: $L_{\mathbb{N}} = \{+, \cdot, ۰, ۱, s\}$ در این زبان، s یک نماد تابعی تک‌موضعی (برای تابع تالی) است.*

۸. *زبانِ $L = \{\leq\}$ زبان مطالعه‌ی مجموعه‌های مرتب است؛ در این زبان، $\leq$ یک نماد رابطه‌ای دوموضعی است.*

۹. *زبان $L_{oring} = L_{Ring} \cup \{\leq\}$ زبانی برای مطالعه‌ی حلقه‌های مرتب است.*

طبیعت برخی پدیده‌ها، بخصوص فضاهای توپولوژیک، مرتبه‌ی اول نیست ولی در عین حال برخی فضاهای توپولوژیک که ساختار جبری دارند،مرتبه‌ی اول هستند.

تمرین ۱. برای مطالعه‌ی فضاهای برداری چه زبان مرتبه‌ی اولی را پیشنهاد می‌کنید؟

بحث زبان را فعلاً رها می‌کنم. در جلسات آینده، دوباره به زبان (به بیان بهتر، به نحو) بازخواهیم گشت.

۲ جبر ساختارها

در منطق مرتبه‌ی اول، جملات باید در ساختارها **معنا** شوند. مثلاً این را که «هر عنصری دارای یک وارون ضربی است» باید در یک گروه ضربی معنا کرد. آنچه در منطق (یا بهتر بگویم در نظریه‌ی مدلها) یک ساختار نامیده می‌شود، تعمیمی از تعریف همه‌ی ساختمانهای مرتبه‌ی اول جبری، مانند حلقه و گروه و غیره است.

تعریف ۴ (Lساختار). *فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. منظور از یک Lساختار جفتی به صورت زیر است:*

$$\mathfrak{M} = (M, (z^{\mathfrak{M}})_{z \in L})$$

که متشکل از یک مجموعه‌ی M است به نام جهان آن Lساختار، و همچنین برای هر نماد $z \in L$ یک مابازای $z^{\mathfrak{M}}$ وجود دارد که به آن تعبیر(معنای) نماد z در ساختار $\mathfrak{M}$ گفته می‌شود. این تعبیر به صورت دقیقِ زیر تعریف می‌شود.

- *اگر z یک نماد ثابت باشد آنگاه $z^{\mathfrak{M}} \in M$ یک عنصر است که به آن تعبیر ثابت z گفته می شود.*
- *اگر z یک نماد تابعی و n تعداد مواضع آن باشد آنگاه*

$$z^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$$

  یک تابع است که به آن تعبیر نماد تابعیِ z گفته می‌شود.
- *اگر z یک نماد رابطه‌ای n موضعی باشد آنگاه $z^{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$ یک رابطه است که به آن تعبیرِنماد رابطه‌ی z گفته می‌شود.*

به طور خاص دقت کنید که جهان یک ساختار مرتبه‌ی اول، تحت تابع‌های تعبیرشده بسته است. همچنین این تابعها بردشان زیرمجموعه‌ی M (و نه M^n است).

تمرین ۲. برای هر کدام از زبان‌های L در مثالِ ۳ بررسی کنید که L ساختارهای مربوطه چگونه‌اند.

تعریف ۵ (Lهمومرفیسم). *فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو Lساختار باشند. تابع $h : M \longrightarrow N$ را یک Lهمومرفیسم می‌نامیم هرگاه حافظ ساختار باشد، به بیان دقیق هرگاه این گونه باشد که*

- *برای هر نماد ثابت $z \in L$*

$$h(z^{\mathfrak{M}}) = z^{\mathfrak{N}}$$

- *برای هر نماد تابعی n موضعی $f \in L$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M$*

$$h(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h(a_1), \cdots, h(a_n))$$

- *وبرای هر نماد رابطه‌ای n موضعی $R \in L$ و هر $a_1, \cdots, a_n \in M$*

$$R^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) \Rightarrow R^{\mathfrak{N}}(h(a_1), \cdots, h(a_n))$$

به یک طرفه بودن فلشِ بالا دقت کنید. اگر h یک به یک باشد و فلش بالا دو طرفه باشد، آنگاه h را یک نشاندن می‌نامیم. اگر h یک نشاندنِ پوشا باشد، آن را یک ایزومرفیسم می‌نامیم.

تمرین ۳. مفهوم هومومرفیسم بین Lساختارها را برای هر یک از زبانهای مثال ۳ بررسی کنید.

دقت کنید که مفاهیم بالا، تعمیم مفاهیم همنام خود در جبر گروه‌ها، حلقه‌ها، فضاهای برداری و غیره هستند.

تعریف ۶. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد. نگاشت $h : M \to M$ را یک اتومرفیسم می‌نامیم هرگاه h یک ایزومرفیسم باشد.*

مجموعه‌ی همه‌ی اتومرفیسم‌های یک ساختار $\mathfrak{M}$ تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را با $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو Lساختار باشند. می‌گوییم $\mathfrak{M}$ یک زیرساختار[۲] از $\mathfrak{N}$ است و می‌نویسیم $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$، هرگاه نگاشت شمول (یعنی نگاشت همانی) $i : M \to N$ یک نشاندن باشد.*

دقت کنید که در صورتی که $\mathfrak{M}$ زیر ساختاری از $\mathfrak{N}$ باشد، برای هر تابعِ n موضعیِ $f \in L$ داریم

$$f^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{N}} \upharpoonright M$$

همچنین برای هر رابطه‌ی n موضعیِ $R \in L$ داریم

$$R^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{N}} \cap M^n$$

همچنین برای هر ثابتِ $c \in L$ داریم

$$c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$$

همه‌ی عبارتهای بالا بیانگر این هستند که نگاشتِ همانی یک نشاندن است.

حال فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد و $A \subseteq M$؛ یعنی A یک مجموعه باشد که زیرمجموعه‌ای از جهانِ $\mathfrak{M}$ است. دقت کنید که A خودش یک Lساختار نیست و فقط یک مجموعه است. در ادامه می‌خواهیم بگوییم که در چه صورت A جهان زیرساختار از $\mathfrak{M}$ می‌تواند باشد. یعنی در چه صورتی یک ساختارِ $\mathfrak{A}$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$ و جهان $\mathfrak{A}$ مجموعه‌ی A است.

طبیعتاً اگر A جهان یک زیرساختار از $\mathfrak{M}$ باشد، اولاً برای هر ثابت $c \in L$ داریم $c^{\mathfrak{M}} \in A$؛ ثانیاً برای هر تابع n موضعی $f \in L$ و برای هر $a_1, \ldots, a_n \in A$ داریم $f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$. به بیانی دیگر A باید تحت ثوابت و توابع زبان بسته است.

تمرین ۴. نشان دهید که همین کافی است؛ یعنی اگر $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد و $A \subseteq M$، آنگاه A جهان یک زیرساختارِ $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$ است اگروتنهااگر تحت ثوابت و توابعِ $\mathfrak{M}$ بسته باشد.

پس اگر زبان L شامل هیچ نماد تابعی و نماد ثابتی نباشد (یعنی فقط شامل نمادهای رابطه‌ای باشد) آنگاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی $A \subseteq M$ جهان یک زیرساختار از $\mathfrak{M}$ است.

لم ۸. *فرض کنید $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرساختارهای یک Lساختار $\mathfrak{N}$ باشد. در این صورت $\bigcap M_i$ جهان یک زیرساختار از $\mathfrak{N}$ است (اگر تهی نباشد).*

---

[۲] substruture

اثبات. برای هر ثابتِ $c \in L$ عنصر $c^{\mathfrak{N}}$ در تمام M_i ها قرار دارد. همچنین برای عناصرِ $(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcap M_i$ بنا به زیرساختار بودن تک‌تکِ $\mathfrak{M}_i$ ها می‌دانیم که $f^{\mathfrak{N}}(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcap M_i$. همین دوشرط بنا به تمرین بالا کافی است. □

زیرساختاری را که در لم قبل بدان اشاره شد با $\bigcap \mathfrak{M}_i$ نشان می‌دهیم.

گفتیم که اشتراک هر خانواده از زیرساختارها، یک زیرساختار است. اگر $\mathfrak{N}$ یک Lساختار باشد و $A \subseteq N$ (زیرمجموعه) آنگاه زیرساختار تولید شده توسط A در $\mathfrak{N}$ را اشتراک همه‌ی زیرساختارهائي از $\mathfrak{N}$ می‌گیریم که جهانشان شامل A است. به بیان دیگر تعریف می‌کنیم

$$\langle A \rangle^{\mathfrak{N}} = \bigcap \{\mathfrak{M} | \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}, A \subseteq M\}$$

به بیان دیگر $\langle A \rangle^{\mathfrak{N}}$ کوچکترین زیرساختاری از $\mathfrak{N}$ است که جهان آن شامل A است. اگر A متناهی باشد و $\mathfrak{M} = \langle A \rangle^{\mathfrak{N}}$ می‌گوییم $\mathfrak{M}$ یک زیرساختار متناهیاًتولید شونده از $\mathfrak{N}$ است. در جلسات آینده اعضای این زیرساختار را به طور صریح مشخص خواهیم کرد.

توجه ۹. *اگر زبان L شامل حداقل یک نماد ثابت باشد و $A = \emptyset$ آنگاه*

$$\langle \emptyset \rangle^{\mathfrak{N}} = \bigcap_{\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}} \mathfrak{M}.$$

یعنی در زبانی که ثابت دارد، ساختار تولید شده توسط تهی، تهی نیست.

لم ۱۰. *فرض کنید $A \neq \emptyset$ و $\mathfrak{M} = \langle A \rangle^{\mathfrak{M}}$، (دقت کنید که لزوماً M برابر با A نیست؛ یعنی جهان ساختار تولید شده توسط A شاید از خودِ مجموعه‌ی A بزرگتر باشد) آنگاه هر هومورفیسم $h : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ تنها توسط مقادیر h روی A تعیین می‌شود؛ یعنی اگر $h_1 : \langle A \rangle^{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{N}$ و $h_2 : \langle A \rangle^{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{N}$ دو هومورفیسم باشند، در این صورت اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم $h_1(a) = h_2(a)$، آنگاه برای هر $x \in M$ داریم $h_1(x) = h_2(x)$.*

اثبات. فرض کنید $h_1, h_2 : \langle A \rangle^{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{N}$ دو هومورفیسم باشند که روی A مقادیر یکسانی دارند. قرار دهید

$$B = \{x \in M | h_1(x) = h_2(x)\}.$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $B = M$. (یعنی می‌خواهیم نشان دهیم که روی تمام نقاطِ ساختار تولیدشده، این دو هومورفیسم با هم برابرند). واضح است که $A \subseteq B$ زیرا فرض کرده‌ایم که روی A این دو هومورفیسم مقادیر یکسانی دارند.

ادعا می‌کنیم که مجموعه‌ی B جهان یک زیرساختار از $\mathfrak{M}$ است.

برای اثبات ادعای بالا کافی است نشان دهیم که B تحت ثوابت و روابطِ $\mathfrak{M}$ بسته است.

اولاً برای هر ثابت c داریم $c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$ و همچنین بنا به هومورفیسم بودن داریم $h_1(c^{\mathfrak{M}}) = h_2(c^{\mathfrak{M}})$. پس $c^{\mathfrak{M}} \in B$. ثانیاً برای عناصر $b_1, \ldots, b_n \in B$ داریم $f^{\mathfrak{M}}(b_1, \ldots, b_n) \in B$؛ زیرا $h_1(b_i) = h_2(b_i)$ و بنابراین

$$h_1(f^{\mathfrak{M}}(b_1, \ldots, b_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h_1(b_1), \ldots, h_1(b_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h_2(b_1), \ldots, h_2(b_n)) = h_2(f^{\mathfrak{M}}(b_1, \ldots, b_n)).$$

تا اینجا نشان دادیم که B جهان یک زیرساختار از $\mathfrak{M}$ است. کوچکترین زیرساختار شاملِ A همان $\mathfrak{M}$ است پس $M \subseteq B$. از آنجا که $B \subseteq M$ داریم $M = B$. □

لم ۱۱. *فرض کنید $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{N}'$ ساختار L به همراه $h : \mathfrak{M} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}'$ یک ایزومرفیسم باشد و $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. در این صورت ایزومرفیسم $h' : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}'$ موجود است به طوری که h' توسیعی از h است.*

اثبات. یک مجموعه‌ی $M' \subseteq N'$ و یک تابع یک‌به‌یک و پوشای h' بین N و N' پیدا کنید که توسیع h باشد. آنگاه با استفاده از h' مجموعه‌ی N' را تبدیل به جهان یک Lساختار بکنید. مثلاً تعریف کنید:

$$f^{\mathfrak{N}'}(h'(a_1), h'(a_2)) := h'(f^{\mathfrak{N}}(a_1, a_2)).$$

□

آنچه که در لم زیر بدان پرداخته‌ایم، تعمیمی از مفاهیم جبری حد مستقیم و حد معکوس [3] است.

لم ۱۲. *فرض کنید $(I, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی جهتدار [4] باشد. همچنین فرض کنید $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ یک خانواده‌ی جهتدار از Lساختارها باشد؛ یعنی به گونه‌ای باشد که اگر $i_1 \leq i_2$ آنگاه $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$. در این صورت $\bigcup M_i$ جهان یک Lساختار است که همه‌ی $\mathfrak{M}_i$ها زیرساختاری از آن هستند.*

اثبات. باید بتوانیم تمامی علائم زبانی را در $\bigcup M_i$ تعبیر کنیم. در زیر این کار برای روابط انجام داده‌ام؛ با توابع و ثوابت می‌توان رفتار مشابهی داشت:

فرض کنید $a_1, \ldots, a_n \in \bigcup M_i$ و $R \in L$. در این صورت $j \in I$ موجود است به طوری که تمام a_i ها در M_j هستند. تعریف می‌کنیم

$$R^{\bigcup \mathfrak{M}_i}(a_1, \ldots, a_n) \iff R^{\mathfrak{m}_j}(a_1, \ldots, a_n)$$

تعریف بالا، خوش‌تعریف است؛ یعنی به j بستگی ندارد. زیرا اگر تمام a_i ها در یک $\mathfrak{M}_k$ دیگر باشند، آنگاه ساختاری مانند $\mathfrak{M}_l$ شامل $\mathfrak{M}_k, \mathfrak{M}_j$ در کلاس هست و این موجب می‌شود که تعبیر این رابطه در هر سه‌ی این ساختارها یکسان شود:

$$R^{\mathfrak{M}_j}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}_l}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}_k}(a_1, \ldots, a_n).$$

□

در بالا درباره‌ی زیرساختار بودن سخن گفتیم. دقت کنید که مثلاً

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot)$$

در بالا (یعنی در تعریف زیرساختار) زبانها یکسانند ولی جهانها تغییر کرده‌اند. در مفهوم تعریف‌شده‌ی زیر، جهانها یکسانند ولی زبان بزرگتر شده است.

تعریف ۱۳. *فرض کنید $K \subseteq L$ دو زبان مرتبه‌ی اول باشند. در این صورت Kساختار $\mathfrak{N}$ را یک تقلیل از Lساختار $\mathfrak{M}$ می‌نامیم هرگاه جهانهای M و N یکسان باشند و $\mathfrak{M} \restriction_K = \mathfrak{N}$. دقت کنید که در این صورت $\mathfrak{M}$ را بسطی از $\mathfrak{N}$ می‌نامیم.* [5]

[3] direct/inverse limit

[4] مجموعه‌ای مرتب به‌طوری که برای هر $i_1, i_2 \in I$ عنصر $j \in I$ موجود است به طوری که $j \geq i_1$ و همچنین $j \geq i_2$.

[5] وقتی که $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ در انگلیسی گفته به این نوع گسترش یک *extension* گفته می‌شود. وقتی مانند تعریف بالا، $\mathfrak{M}$ بسطی از $\mathfrak{N}$ باشد، در انگلیسی به این نوع گسترش *expansion* گفته می‌شود. در فارسی شاید خوب باشد اولی را توسیع و دومی را بسط بنامیم.

در زیر چند مثال از بسط زبان آورده‌ایم.

مثال ۱۴. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک Lساختار و R یک رابطه روی M^n باشد. قرار دهید $L' = L \cup \{R\}$. در این صورت $\mathfrak{M}$ تقلیلی از L'ساختارِ $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{M}, R)$ است که در آن $R^{\mathfrak{M}'}$ همان رابطه‌ی R تعبیر شده است.*

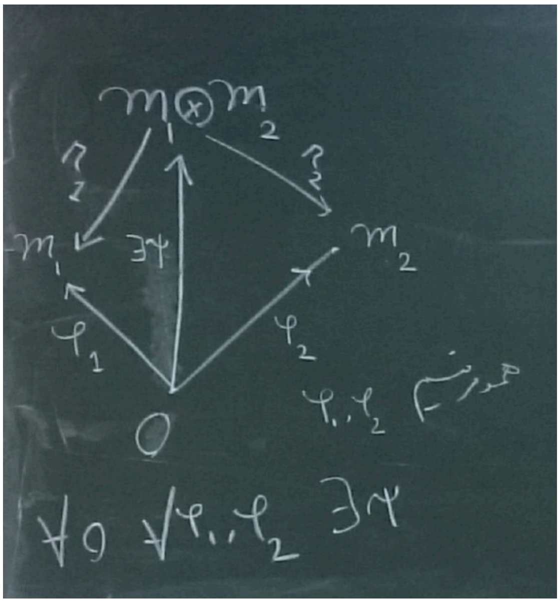
مثال ۱۵. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد و $m_1, \ldots, m_n \in M$. زبان $L' = L \cup \{c_{m_1}, \ldots, c_{m_n}\}$ را در نظر بگیرید که در آن ثوابتی برای این اعضای M وجود دارد. حال $\mathfrak{A} = (\mathfrak{M}, m_1, \ldots, m_n)$ را به عنوان یک L'ساختار در نظر بگیرید که در آن $c^{\mathfrak{A}}_{c_{m_i}} = m_i$.*

مثال ۱۶. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد و $A \subseteq M$. قرار دهید $L \subseteq L_A = L \cup \{c_a | a \in A\}$. در این صورت یک بسط از Lساختارِ $\mathfrak{M}$ به زبان L_A وجود دارد:*

$$\mathfrak{M}_A = (\mathfrak{M}, \{a\}_{a \in A}), \qquad c_a^{\mathfrak{M}} = a$$

در این صورت گروه اتومرفیسم‌های روی $\mathfrak{M}_A$ یعنی $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_A)$ در زبان L_A برابر است با اتومرفیسم‌هایی از M که روی اعضای A ثابت هستند. این گروه را با $\mathrm{Aut}(\frac{\mathfrak{M}}{A})$ نیز نشان می‌دهیم.

تمرین ۵ (حاصل‌ضرب در کاتگوری Lساختارها و Lهومورفیسم‌ها). فرض کنید $\mathfrak{M}_1$ و $\mathfrak{M}_2$ دو Lساختار باشند. روی $M_1 \times M_2 = \{(x, y) | x \in M_1, y \in M_2\}$ یک Lساختار تعریف کنید (یعنی اجزای زبانِ L را به گونه‌ای تعبیر کنید) که $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ (نامی که شما روی Lساختار جدید گذاشته‌اید) ویژگی جهانی زیر را داشته باشد.



دقت کنید که π_i نگاشتهای هومورفیسمِ پوشای طبیعیِ

$$\pi_i : \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \to \mathfrak{M}_i$$

هستند. تصویر بیان اگر این است که برای هر Lساختارِ $\mathfrak{O}$ و هومورفیسمهای $\phi_i : \mathfrak{O} \to \mathfrak{M}_i$، هومورفیسمِ $\psi : \mathfrak{O} \to \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ موجود باشد به طوری که دیاگرام کشیده شده جابه‌جائی باشد.

تمرین ۶. فرض کنید $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ یک نشاندن باشد. نشان دهید که یک Lساختار $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ و یک اتومرفیسم $g : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ موجود است به طوری که $g|_{\mathfrak{M}} = f$ و $(\mathfrak{N}, g)$ تحت شرط زیر یکتاست.

$$M \subseteq g^{-1}(N) \subseteq g^{-2}(N) \subseteq \ldots$$

زبان و ساختار چندبخشی

تا کنون هر ساختار مرتبه‌ی اولی که مشاهده کردیم دارای یک جهان مشخص بود و توابع و روابط روی همان جهان تعریف شده بودند. اما در بسیاری ساختارهای ریاضی، بیش از یک جهان وجود دارد و میان جهانها توابعی وجود دارد. این خواسته به راحتی در ساختارهای مرتبه‌ی اول قابل گنجاندن است. در زیر ساختارها و زبانهای چند بخشی را تعریف کرده‌ایم. در درس دوباره به آنها بازنخواهیم گشت ولی هر قضیه‌ای که درس ثابت کنیم درباره‌ی آنها نیز درست است.

تعریف ۱۷. *زبان L را یک زبان S بخشی گوییم هرگاه دارای روابط از نوع $(s_1, ..., s_n)$ ، توابع از نوع $(s_1, ..., s_n, t)$ و ثوابت از نوع s_i باشد. متناظر با یک زبان S بخشیِ L ، L ساختارهای S بخشی به صورت زیر هستند.*

$$\mathfrak{M} = ((A_s)_{s\in S}, (z^{\mathfrak{M}})_{z\in L})$$

که در آن هر A_s یک جهان از نوع s نامیده می‌شود و

- *اگر $z \in L$ یک نماد ثابت از نوع s_i باشد، $z^{\mathfrak{M}} \in A_{s_i}$.*
- *اگر $z \in L$ یک نماد تابعی از نوع $(s_1, ..., s_n, t)$ باشد،*

$$z^{\mathfrak{M}} : A_{s-1} \times A_{s_2} \times ... \times A_{s_n} \to A_t$$

یک تابع است.

- *اگر $z \in L$ یک نماد رابطه‌ای از نوع $(s_1, ..., s_n)$ باشد،*

$$z^{\mathfrak{M}} \subseteq A_{s-1} \times A_{s_2} \times ... \times A_{s_n}$$

یک رابطه است.

در نوشتن فرمولهای چندبخشی، سورها و متغیرها می‌توانند مربوط به بخشهای خاصی باشند.

مثال ۱۸. *گروه‌های جایگشتی را می‌توان به عنوان ساختارهای دوبخشی در نظر گرفت.*

$$(X, G, g : G \times X \to X, e^G, .^G, ()^{-1^G})$$

در یک گروه جایگشتی، یک مجموعه‌ی X داریم که یک گروه G اعضای آن را جابه‌جا می‌کند.

مثال ۱۹. *میدان های ارزیابی را می‌توان به عنوان ساختارهای سه‌بخشی در نظر گرفت:* [6]

$$(K, \Gamma, k, V : K \to \Gamma)$$

یک میدان ارزیابی از یک میدان K تشکیل شده است و یک گروه Γ و یک نگاشت ارزیابیِ $v : K \to \gamma$. این نگاشت منجر به ایجاد یک میدانِ k به نام میدان پیمانه‌ها می‌شود. [7]

[6] valued field

[7] انشاءالله زمانی درباره‌ی میدانهای ارزیابی درس خواهم داد!

۳ ادامه‌ی مبحث زبان

فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد.یک مجموعه $x_۱, x_۲, \cdots$ از متغیرها را در نظر بگیرید. به هر دنباله متناهی‌ای که از علائم زبانیِ تابع، ثابت و با استفاده از این متفیرها، و البته با قوانین خاصی، ساخته شود یک Lترم یا یک Lکلمه گفته می‌شود. هر دنباله‌ی دلخواه از ثوابت و توابع و متغیرها ترم نیست. در زیر به صورت استقرائی بیان کرده‌ایم که دقیقاً کدام دنباله‌ها ترم هستند.

تعریف ۲۰ (تعریف دقیق)**.** *مجموعه‌ی Lترم‌ها به صورت استقرایی زیر تعریف می شود.*

- *هر ثابت $c \in L$ و هر متغیر x_i یک Lترم محسوب می شود.*
- *هرگاه بدانیم که $t_۱, \cdots, t_n$ چند L ترم هستند و $f \in L$ یک تابع n موضعی باشد، آنگاه $f(t_۱, \cdots, t_n)$ یک Lترم است.*

مثال ۲۱. *در زبانِ $L_{AbG} = \{+, (-), ۰\}$ موارد زیر Lترم هستند.*

- ۰
- $۰ + ۰$
- $x + \cdots + x$ *(گاهی به جای این به طور خلاصه می‌نویسیم nx.)*
- $x_۱ + x_۲ + x_۳$
- $nx_۱ + mx_۲ + kx_۳$.

دقت کنید که در نوشتن ترمهای بالا ساده‌سازیهای استفاده شده است. مثلاً به جای دنباله‌ی $++x_۱x_۲x_۳$ نوشته‌ایم $x_۱+x_۲+x_۳$.

مثال ۲۲. *در زبانِ $L_{ring} = \{+, \cdot, ۰, ۱, (-)\}$ موارد زیر Lترم هستند.*

- $۱ + ۰$
- $۱ \cdot ۰$
- $۱ + ۱ + ۱$
- $x_۱ + x_۲ + x_۳$
- $x_۱ \cdot x_۲ \cdot x_۳$
- $۵x_۱x_۲^۲ + ۶x_۴x_۷^۳x_۸$ *(دقت کنید که عدد ۵ جزو ترم نیست. تنها منظورم پنج بار نوشتن جمع بوده است. توان هم به همین صورت).*

تعریف ۲۳ (تعبیرترمهادرساختارها)**.** *فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد. فرض کنید $t(x_۱, \cdots, x_n)$ یک Lترم باشد و $a_۱, \cdots, a_n \in M$. در این صورت عنصری در جهان ساختارِ $\mathfrak{M}$ ،جود دارد که آنرا با $t^{\mathfrak{M}}(a_۱, \cdots, a_n)$ (تعبیر ترم t در ساختار $\mathfrak{M}$ با جایگذاریِ a_i به جای x_i) نشان می‌دهیم. این عنصر به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود.*

- اگر $t=c$ یک ثابت باشد

$$c^{\mathfrak{M}}(a_1,\cdots,a_n)=c^{\mathfrak{M}}$$

- اگر $t=x_i$ یک متغیر باشد آنگاه

$$x_i^{\mathfrak{M}}(a_1,\ldots,a_n)=a_i.$$

- اگر $t_i^{\mathfrak{M}}(a_1,\cdots,a_n)$ دانسته باشند و f یک تابع n موضعی باشد آنگاه تعبیر $f(t_1,\ldots,t_n)$ در M با جایگذاریِ a_i به جای x_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[f(t_1,\ldots,t_n)]^{\mathfrak{M}}(a_1,\ldots,a_n)=f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1,\cdots,a_n),\ldots,t_n^{\mathfrak{M}}(a_1,\cdots,a_n))).$$

مثال ۲۴. *در زبان $L=L_{ring}$ در ساختار $R=(\mathbb{R},+,\cdot,-,0,1)$ داریم*

$$[2x_1x_2^2+x_3^4]^R(1,2,3)=89$$

قبلاً درباره‌ی ساختار تولید شده توسط یک مجموعه صحبت کرده‌ایم. در لم زیر که اثبات آن جزو تمرینهاست، خواهیم دید که ساختار تولید شده توسط جایگذاری عناصرِ A در ترمها حاصل می‌شود.

لم ۲۵. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد و $A\subseteq M$. آنگاه*

$$\langle A\rangle^{\mathfrak{M}}=\bigcap_{A\subseteq N,\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}}\mathfrak{N}=\{t^{\mathfrak{M}}(a_1,\cdots,a_n)|a_1,\cdots,a_n\in A,\ \text{یک ترم است}\ t,n\in\mathbb{N}\}$$

اثبات. تمرین. □

توجه ۲۶. *اگر زبان L حاوی ثوابت باشد، آنگاه*

$$\emptyset\neq\langle\phi\rangle^{\mathfrak{M}}=\{t^{\mathfrak{M}}(c_1^{\mathfrak{M}},\cdots,c_n^{\mathfrak{M}})|n\in\mathbb{N}\ \text{ترم است و}\ c_i\ \text{ها ثوابت هستند و}\ t\}$$

بنا به لم قبلی، حداکثر اندازه‌ی ساختار تولید شده توسط A به صورت زیر تعیین می‌شود: (با توجه به این که هر ترم یک دنباله‌ی متناهی از علائم است، در صورتی که زبنا نامتناهی باشد، تعداد ترمهای بیشتر از اندازه‌ی زبان نمی‌شود)

نتیجه ۲۷. $\langle A\rangle^{\mathfrak{M}}\leq\max\{|\ L\ |+\aleph_0,|\ A\ |\}$

گفتیم که زبان حکم حروف الفبا را دارد و ترمها حکم کلمه‌ها را. آخرین چیزی که باید تعریف شود، جمله‌ها (یا فرمولها) هستند. Lفرمولها دنباله‌هائی متناهی هستند که با استفاده از ترم های زبان و علائم منطقی $\neg$ و $\wedge$ و $\exists$ و
و علامت تساوی ساخته می شوند. دوباره دقت کنید که هر دنباله‌ی متناهی این چنین یک فرمول نیست. پس باید فرمولها را به صورت دقیقتر تعریف کرد.

تعریف ۲۸ (فرمولها)**.** *مجموعه L فرمولها کوچکترین مجموعه ای است که اعضایش از طریق زیر حاصل می شود.*

- *برای هر دو ترم t_1 و t_2 عبارت $t_1(x_1,\cdots,x_n)=t_2(x_1,\cdots,x_n)$ یک L فرمول است.*

- *برای ترم های $t_1,\cdots,t_n$ و رابطه ی n موضعی R عبارت $R(t_1,\cdots,t_n)$ یک L فرمول است.*

- اگر ϕ فرمول باشد دراینصورت $\neg\phi$ نیز یک فرمول است.
- اگر ϕ و ψ دو L فرمول باشند در این صورت $\phi \wedge \psi$ یک L فرمول است.
- اگر ϕ یک فرمول باشد دراین صورت $\exists x \phi(x)$ نیز یک L فرمول است.

یک سری کوتاه‌نوشت نیز به صورت زیر داریم:

۱. $\phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$

۲. $\forall x \psi \equiv \neg(\exists x \neg\psi)$

۳. $\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$.

تعریف ۲۹ (متغیر های پایبند و آزاد). *متغیر x را در فرمول ϕ آزاد گوییم هرگاه تحت تاثیر هیچ سوری نباشد؛ در غیر این صورت آن را پایبند می‌نامیم.*

مثال ۳۰. *در فرمول زیر*

$$\forall x \psi(x) \wedge R(x, y)$$

متغیر x اول پای‌بند است و x دوم آزاد است و y آزاد است. برای تشخیص این نیاز به دانستن ترتیب اولویت نمادهاست. فرمول بالا به صورت زیر پرانتزگذاری می‌شود:

$$((\forall x \psi(x)) \wedge R(x, y))$$

آخرین چیزی که می‌خواهیم تعریف کنیم این است که چه زمانی می‌گوئیم یک فرمول در یک ساختار درست است.

تعریف ۳۱. *فرض کنید $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ یک L فرمول و $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشند و $a_1, \cdots, a_n \in M$. در این صورت عبارت $\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \cdots, a_n)$ (خوانده شود: فرمول ϕ با جایگذاری a_i به جای x_i در ساختارِ $\mathfrak{M}$ درست است، یا $\mathfrak{M}$ مدلی برای این فرمول است) به صورت استقرایی زیر تعریف می شود.*

- $\mathfrak{M} \models t_1(a_1, \cdots, a_n) = t_2(a_1, \cdots, a_n)$ هرگاه $t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) = t_2^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n)$
- $\mathfrak{M} \models R(t_1, \cdots, t_n)(a_1, \ldots, a_n)$ هرگاه $R^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n), \cdots, t_n^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n))$
- $\mathfrak{M} \models \phi \wedge \psi$ هرگاه $\mathfrak{M} \models \phi$ و $\mathfrak{M} \models \psi$
- $\mathfrak{M} \models \neg\phi$ هرگاه $\mathfrak{M} \not\models \phi$
- $\mathfrak{M} \models \exists x \psi(x)$ هرگاه $a \in M$ عنصر در M موجود باشد به طوری که $\mathfrak{M} \models \psi(a)$

توجه ۳۲. *دقت کنید که امکان دارد یک L فرمولِ یکسان در یک L ساختار درست باشد ولی در L ساختار دیگر غلط باشد. برای مثال در L_{ring} هم $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, ۰, ۱)$ یک L ساختار است و $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, ۰, ۱)$. با این حال*

$$(\mathbb{C}, +, \cdot, -, ۰, ۱) \models \exists x \quad x \cdot x = ۱$$

ولی

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, -, ۰, ۱) \not\models \exists x \quad x \cdot x = ۱$$