

# منطق پیشرفته

محسن خانی

۲ مهر ۱۳۹۸

## چکیده

هدفم در درس منطق پیشرفته، اثبات دو قضیه‌ی مهم گودل است: قضیه‌ی تمامیت و قضیه‌ی ناتمامیت. بنا به قضیه‌ی تمامیت، در منطق مرتبه‌ی اول، اگر حکمی در تمامی مدل‌های یک تئوری درست باشد، آن حکم با استفاده از اصول آن تئوری اثبات می‌شود. مثلاً اگر حکمی مرتبه‌ی اول در تمامی گروه‌های آبدی برقرار باشد، آنگاه قطعاً اثباتی برای آن حکم با استفاده از اصول موضوعه‌ی گروه‌های آبدی پیدا می‌شود. در بخش دوم درس، به قضایای ناتمامیت گودل خواهیم پرداخت. بنا به ناتمامیت اول گودل، امکان ارائه یک اصل بندی کامل برای حساب توسط یک الگوریتم وجود ندارد. نیز بنا به قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل، یک قضیه‌ای مرتبه‌ی اول درباره اعداد طبیعی وجود دارد این قضیه (با این که در مورد اعداد طبیعی درست است، از اصول پئانو نتیجه نمی‌شود). فهم دقیق قضیه‌های بالا، البته نیازمند پشت سر گذاشتن چندین جلسه از درس است. برای خواندن یک مقدمه‌ی مفصل‌تر برای درس منطق، لطفاً به جزوه‌ی درس مبانی منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها، در تارنمای شخصیم مراجعه کنید. رویکردم در تدریس، بیشتر با تکیه بر نظریه‌ی مدل خواهد بود که تخصصم است. منابع بخشهای اولی، کتاب تنت‌وزیگلر است.<sup>۱</sup>

## ۱ الفبا، بدون معانی

مطالعه‌ی هر مفهوم جبری در منطق مرتبه‌ی اول، نخست نیازمند انتخاب یک زبان مناسب است. زبان، حکم حروف الفبای فارسی را دارد که کلمات قرار است با استفاده از آنها ساخته شوند.

**تعریف ۱** (یک زبان مرتبه‌ی اول). منظور از یک زبان مرتبه اول  $L$ ، یک مجموعه متشکل از نمادهایی برای توابع، نمادهایی برای روابط و نمادهایی برای ثوابت است. برای هر نماد تابعی  $f \in L$  یک عدد طبیعی  $n_f$  به نام تعداد مواضع تابع  $f$  در نظر گرفته شده است و برای نماد رابطه‌ای  $R$  نیز یک عدد طبیعی  $n_R$  به نام تعداد مواضع رابطه‌ی  $R$  در نظر گرفته شده است.

توجه ۲.

۱. نماد تابعی با تابع فرق می‌کند. بعداً قرار است متناظر با هر نماد تابعی، یک تابع واقعی پیدا کنیم که ترجمه‌ی آن نماد باشد.

---

<sup>۱</sup> تایپ اولیه‌ی جلسات به ترتیب توسط: ج ۱ آرمان عطائی، صورت گرفته است.

۲. در یک زبان مرتبه‌ی اول  $L$ ، نمادهای منطقی مانند  $\wedge, \vee, \exists, \forall$  و ... قرار ندارند. بعداً درباره‌ی جایگاه اینها در منطق مرتبه‌ی اول سخن خواهیم گفت.

برای مطالعه یک پدیده، باید زبانی را انتخاب کنیم که از پس بیان ویژگی‌های جبری آن پدیده برآید. در درسهای آینده این سخن را روشنتر خواهیم کرد. در زیر مثالی از چند زبان مرتبه‌ی اول آورده‌ام.

مثال ۳ (مثالهائی از زبانهای مرتبه‌ی اول).

۱. زبان تهی:  $L = \phi$  که شامل هیچ نمادی برای تابع، ثابت یا رابطه نیست.

۲. زبان گروه‌های جمعی آبدی:  $L_{AbG} = \{+, -, \cdot\}$ . در این زبان،  $+$ ،  $-$  نمادهای تابعی دو موضعی هستند و  $\cdot$  نمادی برای یک ثابت است.

۳. زبان نظریه‌ی گروه‌ها:  $L_{Group} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$ . در این زبان،  $^{-1}$  یک نماد تابعی تک موضعی،  $\cdot$  یک نماد تابعی دو موضعی و  $e$  یک نماد برای یک ثابت است.

۴. زبان نظریه‌ی گراف:  $L_{Graph} = \{R\}$ . در این زبان،  $R$  یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است.

۵. زبان حلقه‌ها:  $L_{Ring} = \{+, -, \cdot, \cdot^{-1}, 1\}$  که در آن  $1$ ،  $\cdot^{-1}$  دو نماد برای دو ثابت هستند. این زبان در واقع از افزودن  $\cdot^{-1}$  و  $1$  به زبان گروه‌های جمعی آبدی به دست می‌آید.

۶. زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها:  $L_{Set} = \{\in\}$ . در این زبان، علامت  $\in$  یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است.

۷. زبان نظریه‌ی اعداد:  $L_{\mathbb{N}} = \{+, \cdot, \cdot^{-1}, 1, s\}$  در این زبان،  $s$  یک نماد تابعی تک موضعی (برای تابع تالی) است.

طبیعت برخی پدیده‌ها، بخصوص فضاهای توپولوژیک، مرتبه‌ی اول نیست ولی در عین حال برخی فضاهای توپولوژیک که ساختار جبری دارند، مرتبه‌ی اول هستند.

**تمرین ۱. برای مطالعه‌ی فضاهای برداری چه زبان مرتبه‌ی اولی را پیشنهاد می‌کنید؟**

بحث زبان را فعلاً رها می‌کنم. در جلسات آینده، دوباره به زبان (به بیان بهتر، به نحو) بازخواهیم گشت.

## ۲ جبر ساختارها

در منطق مرتبه‌ی اول، جملات باید در ساختارها معنا شوند. مثلاً این را که «هر عنصری دارای یک وارون ضربی است» باید در یک گروه ضربی معنا کرد.

تعریف ۴ ( $L$  ساختار). فرض کنید  $L$  یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. منظور از یک  $L$  ساختار جفتی به صورت زیر است:

$$\mathfrak{M} = (M, (z^{\mathfrak{M}})_{z \in L})$$

که متشکل از یک مجموعه‌ی  $M$  است به نام جهان آن  $L$  ساختار، و همچنین برای هر نماد  $z \in L$  یک مابازای  $z^{\mathfrak{M}}$  وجود دارد که به آن تعبیر (معنای) نماد  $z$  در ساختار  $\mathfrak{M}$  گفته می‌شود. این تعبیر به صورت دقیق زیر تعریف می‌شود.

• اگر  $z$  یک نماد ثابت باشد آنگاه  $z^{\mathfrak{M}} \in M$  یک عنصر است که به آن تعبیر ثابت  $z$  گفته می شود.

• اگر  $z$  یک نماد تابعی و  $n$  تعداد مواضع آن باشد آنگاه

$$z^{\mathfrak{M}} : M^n \rightarrow M$$

یک تابع است که به آن تعبیر نماد تابعی  $z$  گفته می شود.

• اگر  $z$  یک نماد رابطه ای  $n$  موضعی باشد آنگاه  $z^{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$  یک رابطه است که به آن تعبیر نماد رابطه ای  $z$  گفته می شود.

به طور خاص دقت کنید که جهان یک ساختار مرتبه ی اول، تحت تابع های تعبیر شده بسته است. همچنین این تابعها بردشان زیرمجموعه ی  $M$  (و نه  $M^n$  است).

**تمرین ۲. برای هر کدام از زبان های  $L$  در مثال ۳ بررسی کنید که  $L$  ساختارهای مربوطه چگونه اند.**

**تعریف ۵** ( $L$  همومرفیسم). فرض کنید  $\mathfrak{M}$  و  $\mathfrak{N}$  دو  $L$  ساختار باشند. تابع  $h : M \rightarrow N$  را یک  $L$  همومرفیسم می نامیم هرگاه حافظ ساختار باشد، به بیان دقیق هرگاه این گونه باشد که

• برای هر نماد ثابت  $z \in L$

$$h(z^{\mathfrak{M}}) = z^{\mathfrak{N}}$$

• برای هر نماد تابعی  $n$  موضعی  $f \in L$  و هر  $a_1, \dots, a_n \in M$

$$h(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

• و برای هر نماد رابطه ای  $n$  موضعی  $R \in L$  و هر  $a_1, \dots, a_n \in M$

$$R^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow R^{\mathfrak{N}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

به یک طرفه بودن فلش بالا دقت کنید. اگر  $h$  یک به یک باشد و فلش بالا دو طرفه باشد، آنگاه  $h$  را یک نشان دادن می نامیم.

اگر  $h$  یک نشان دادن پوشا باشد، آن را یک ایزومرفیسم می نامیم.

دقت کنید که مفاهیم بالا، تعمیم مفاهیم همنام خود در جبر گروه ها، حلقه ها، فضا های برداری و غیره هستند.