منطق پیشرفته

محسن خانی

۴ مهر ۱۳۹۸

چکیده

هدفهم در درس منطق پیشرفته، اثبات دو قضیه‌ی مهم گودل است: قضیه‌ی تمامیت و قضیه‌ی ناتمامیت. بنا به قضیه‌ی تمامیت، در منطق مرتبه‌ی اول، اگر حکمی در تمامی مدل های یک تئوری درست باشد، آن حکم با استفاده از اصول آن تئوری اثبات می شود. مثلاً اگر حکمی مرتبه‌ی اول در تمامی گروه‌های آبلی برقرار باشد، آنگاه قطعاً اثباتی برای آن حکم با استفاده از اصول موضوعه‌ی گروه‌های آبلی پیدا می‌شود.

در بخش دوم درس، به قضایای ناتمامیت گودل خواهم پرداخت. بنا به ناتمامیت اول گودل، امکان ارائه یک اصل بندی کامل برای حساب توسط یک الگوریتم وجود ندارد.

نیز بنا به قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل، یک قضیه‌ای مرتبه‌ی اول درباره اعداد طبیعی وجود دارد این قضیه (با این که در مورد اعداد طبیعی درست است، از اصول پئانو نتیجه نمی شود).

فهم دقیق قضیه‌های بالا، البته نیازمند پشت سر گذاشتن چندین جلسه از درس است. برای خواندن یک مقدمه‌ی مفصل‌تر برای درس منطق، لطفاً به جزوه‌ی درس مبانی منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها، در تارنمای شخصیم مراجعه کنید. رویکردم در تدریس، بیشتر با تکیه بر نظریه‌ی مدل خواهد بود که تخصصم است. منابع بخشهای اولی، کتاب تنت‌وزیگلر است. [1]

فهرست مطالب

۱ الفبا، بدون معانی

مطالعه‌ی هر مفهوم جبری در منطق مرتبه‌ی اول، نخست نیازمند انتخاب یک زبان مناسب است. زبان، حکمِ حروف الفبای فارسی را دارد که کلمات قرار است با استفاده از آنها ساخته شوند.

[1] تایپ اولیه‌ی جلسات به ترتیب توسط: ج۱ آرمان عطائی، صورت گرفته است.

تعریف ۱ (یک زبان مرتبه‌ی اول). *منظور از یک زبان مرتبه اول L، یک مجموعه متشکل از* ***نمادهایی*** *برای توابع،* ***نمادهایی*** *برای روابط و* ***نمادهایی*** *برای ثوابت است. برای هر نماد تابعیِ $f \in L$ یک عدد طبیعیِ n_f به نام تعداد مواضع تابع f در نظر گرفته شده است و برای نماد رابطه‌ایِ R نیز یک عدد طبیعیِ n_R به نام تعداد مواضع رابطه‌ی R در نظر گرفته شده است.*

توجه ۲.

۱. *نماد تابعی با تابع فرق می‌کند. بعداً قرار است متناظر با هر نماد تابعی، یک تابع واقعی پیدا کنیم که ترجمه‌ی آن نماد باشد.*

۲. *در یک زبانِ مرتبه‌ی اولِ L، نمادهای منطقی مانند $\wedge$، $\vee$، $\forall$، $\exists$ و $\cdots$ قرار ندارند. بعداً درباره‌ی جایگاه اینها در منطق مرتبه‌ی اول سخن خواهیم گفت.*

برای مطالعه یک پدیده، باید زبانی را انتخاب کنیم که از پس بیان ویژگی‌های جبری آن پدیده برآید. در درسهای آینده این سخن را روشنتر خواهم کرد. در زیر مثالی از چند زبان مرتبه‌ی اول آورده‌ام.

مثال ۳ (مثالهائی از زبانهای مرتبه‌ی اول).

۱. *زبان تهی: $L = \phi$ که شامل هیچ نمادی برای تابع، ثابت یا رابطه نیست.*

۲. *زبان گروه‌های جمعی آبلی: $L_{AbG} = \{+, -, ۰\}$. در این زبان، $+, -$ نمادهای تابعی دو موضعی هستند و ۰ نمادی برای یک ثابت است.*

۳. *زبان نظریه‌ی گروه‌ها: $L_{Group} = \{\cdot, ^{-۱}, e\}$. در این زبان، $^{-۱}$ یک نماد تابعی تک‌موضعی، $\cdot$ یک نماد تابعی دوموضعی و e یک نماد برای یک ثابت است.*

۴. *زبان نظریه‌ی گراف: $L_{Graph} = \{R\}$. در این زبان، R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است.*

۵. *زبان حلقه‌ها: $L_{Ring} = \{+, -, \cdot, ۰, ۱\}$ که در آن ۰, ۱ دو نماد برای دو ثابت هستند. این زبان در واقع از افزودنِ $\cdot$ و ۱ به زبان گروه‌های جمعی آبلی به دست می‌آید.*

۶. *زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها: $L_{Set} = \{\in\}$. در این زبان، علامت $\in$ یک نماد رابطه‌ای دوموضعی است.*

۷. *زبان نظریه‌ی اعداد: $L_{\mathbb{N}} = \{+, \cdot, ۰, ۱, s\}$ در این زبان، s یک نماد تابعی تک‌موضعی (برای تابع تالی) است.*

طبیعت برخی پدیده‌ها، بخصوص فضاهای توپولوژیک، مرتبه‌ی اول نیست ولی در عین حال برخی فضاهای توپولوژیک که ساختار جبری دارند،مرتبه‌ی اول هستند.

تمرین ۱. برای مطالعه‌ی فضاهای برداری چه زبان مرتبه‌ی اولی را پیشنهاد می‌کنید؟

بحث زبان را فعلاً رها می‌کنم. در جلسات آینده، دوباره به زبان (به بیان بهتر، به نحو) بازخواهیم گشت.

۲ جبر ساختارها

در منطق مرتبه‌ی اول، جملات باید در ساختارها **معنا** شوند. مثلاً این را که «هر عنصری دارای یک وارون ضربی است» باید در یک گروه ضربی معنا کرد. آنچه در منطق (یا بهتر بگوییم در نظریه‌ی مدلها) یک ساختار نامیده می‌شود، تعمیمی از تعریف همه‌ی ساختمانهای مرتبه‌ی اول جبری، مانند حلقه و گروه و غیره است.

تعریف ۴ (L ساختار). *فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. منظور از یک L ساختار جفتی به صورت زیر است:*

$$\mathfrak{M} = (M, (z^{\mathfrak{M}})_{z \in L})$$

که متشکل از یک مجموعه‌ی M است به نام جهان آن L ساختار، و همچنین برای هر نماد $z \in L$ یک مابازای $z^{\mathfrak{M}}$ وجود دارد که به آن تعبیر(معنای) نماد z در ساختار $\mathfrak{M}$ گفته می‌شود. این تعبیر به صورت دقیقِ زیر تعریف می‌شود.

- *اگر z یک نماد ثابت باشد آنگاه $z^{\mathfrak{M}} \in M$ یک عنصر است که به آن تعبیر ثابت z گفته می شود.*
- *اگر z یک نماد تابعی و n تعداد مواضع آن باشد آنگاه*

$$z^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$$

یک تابع است که به آن تعبیر نماد تابعیِ z گفته می‌شود.

- *اگر z یک نماد رابطه‌ای n موضعی باشد آنگاه $z^{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$ یک رابطه است که به آن تعبیرِنماد رابطه‌ی z گفته می‌شود.*

به طور خاص دقت کنید که جهان یک ساختار مرتبه‌ی اول، تحت تابع‌های تعبیرشده بسته است. همچنین این تابعها بردشان زیرمجموعه‌ی M (و نه M^n است).

تمرین ۲. برای هر کدام از زبان‌های L در مثالِ ۳ بررسی کنید که L ساختارهای مربوطه چگونه‌اند.

تعریف ۵ (L هومومرفیسم). *فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو L ساختار باشند. تابع $h : M \longrightarrow N$ را یک L هومومرفیسم می‌نامیم هرگاه حافظ ساختار باشد، به بیان دقیق هرگاه این گونه باشد که*

- *برای هر نماد ثابت $z \in L$*

$$h(z^{\mathfrak{M}}) = z^{\mathfrak{N}}$$

- *برای هر نماد تابعی n موضعی $f \in L$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M$*

$$h(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h(a_1), \cdots, h(a_n))$$

- *وبرای هر نماد رابطه‌ای n موضعی $R \in L$ و هر $a_1, \cdots, a_n \in M$*

$$R^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) \Rightarrow R^{\mathfrak{N}}(h(a_1), \cdots, h(a_n))$$

به یک طرفه بودن فلشِ بالا دقت کنید. اگر h یک به یک باشد و فلش بالا دو طرفه باشد، آنگاه h را یک نشاندن می‌نامیم. اگر h یک نشاندنِ پوشا باشد، آن را یک ایزومرفیسم می‌نامیم.

تمرین ۳. مفهوم هومومرفیسم بین Lساختارها را برای هر یک از زبانهای مثال ۳ بررسی کنید.

دقت کنید که مفاهیم بالا، تعمیم مفاهیم همنام خود در جبر گروه‌ها، حلقه‌ها، فضاهای برداری و غیره هستند.

تعریف ۶. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد. نگاشت $h : M \to M$ را یک اتومرفیسم می‌نامیم هرگاه h یک ایزومرفیسم باشد.*

مجموعه‌ی همه‌ی اتومرفیسم‌های یک ساختار $\mathfrak{M}$ تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را با $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو Lساختار باشند. می‌گوییم $\mathfrak{M}$ یک زیرساختار[۲] از $\mathfrak{N}$ است و می‌نویسیم $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$، هرگاه نگاشت شمول (یعنی نگاشت همانی) $i : M \to N$ یک نشاندن باشد.*

دقت کنید که در صورتی که $\mathfrak{M}$ زیر ساختاری از $\mathfrak{N}$ باشد، برای هر تابعِ n موضعیِ $f \in L$ داریم

$$f^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{N}} \restriction M$$

همچنین برای هر رابطه‌ی n موضعیِ $R \in L$ داریم

$$R^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{N}} \cap M^n$$

همچنین برای هر ثابتِ $c \in L$ داریم

$$c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$$

همه‌ی عبارتهای بالا بیانگر این هستند که نگاشتِ همانی یک نشاندن است.

حال فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد و $A \subseteq M$؛ یعنی A یک مجموعه باشد که زیرمجموعه‌ای از جهانِ $\mathfrak{M}$ است. دقت کنید که A خودش یک Lساختار نیست و فقط یک مجموعه است. در ادامه می‌خواهیم بگوییم که در چه صورت A جهان زیرساختار از $\mathfrak{M}$ می‌تواند باشد. یعنی در چه صورتی یک ساختارِ $\mathfrak{A}$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$ و جهان $\mathfrak{A}$ مجموعه‌ی A است.

طبیعتاً اگر A جهان یک زیرساختار از $\mathfrak{M}$ باشد، اولاً برای هر ثابت $c \in L$ داریم $c^{\mathfrak{M}} \in A$؛ ثانیاً برای هر تابع n موضعی $f \in L$ و برای هر $a_1, \ldots, a_n \in A$ داریم $f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$. به بیانی دیگر A باید تحت ثوابت و توابع زبان بسته است.

تمرین ۴. نشان دهید که همین کافی است؛ یعنی اگر $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد و $A \subseteq M$، آنگاه A جهان یک زیرساختارِ $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$ است اگروتنهااگر تحت ثوابت و توابعِ $\mathfrak{M}$ بسته باشد.

پس اگر زبان L شامل هیچ نماد تابعی و نماد ثابتی نباشد (یعنی فقط شامل نمادهای رابطه‌ای باشد) آنگاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی $A \subseteq M$ جهان یک زیرساختار از $\mathfrak{M}$ است.

لم ۸. *فرض کنید $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرساختارهای یک Lساختار $\mathfrak{N}$ باشد. در این صورت $\bigcap M_i$ جهان یک زیرساختار از $\mathfrak{N}$ است (اگر تهی نباشد).*

[۲] substruture

اثبات. برای هر ثابتِ $c \in L$ عنصر $c^{\mathfrak{N}}$ در تمام M_i ها قرار دارد. همچنین برای عناصرِ $(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcap M_i$ بنا به زیرساختار بودن تک‌تکِ $\mathfrak{M}_i$ ها می‌دانیم که $f^{\mathfrak{N}}(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcap M_i$. همین دوشرط بنا به تمرین بالا کافی است. $\square$

زیرساختاری را که در لم قبل بدان اشاره شد با $\bigcap \mathfrak{M}_i$ نشان می‌دهیم.

گفتیم که اشتراک هر خانواده از زیرساختارها، یک زیرساختار است. اگر $\mathfrak{N}$ یک Lساختار باشد و $A \subseteq N$ (زیرمجموعه) آنگاه زیرساختار تولید شده توسط A در $\mathfrak{N}$ را اشتراک همه‌ی زیرساختارهائي از $\mathfrak{N}$ می‌گیریم که جهانشان شامل A است. به بیان دیگر تعریف می‌کنیم

$$\langle A \rangle^{\mathfrak{N}} = \bigcap \{\mathfrak{M} | \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}, A \subseteq M\}$$

به بیان دیگر $\langle A \rangle^{\mathfrak{N}}$ کوچکترین زیرساختاری از $\mathfrak{N}$ است که جهان آن شامل A است. اگر A متناهی باشد و $\mathfrak{M} = \langle A \rangle^{\mathfrak{N}}$ می‌گوییم $\mathfrak{M}$ یک زیرساختار متناهیاًتولید شونده از $\mathfrak{N}$ است. در جلسات آینده اعضای این زیرساختار را به طور صریح مشخص خواهیم کرد.

توجه ۹. *اگر زبان L شامل حداقل یک نماد ثابت باشد و $A = \emptyset$ آنگاه*

$$\langle \emptyset \rangle^{\mathfrak{N}} = \bigcap_{\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}} \mathfrak{M}.$$

یعنی در زبانی که ثابت دارد، ساختار تولید شده توسط تهی، تهی نیست.

لم ۱۰. *فرض کنید $A \neq \emptyset$ و $\mathfrak{M} = \langle A \rangle^{\mathfrak{M}}$، (دقت کنید که لزوماً M برابر با A نیست؛ یعنی جهان ساختار تولید شده توسط A شاید از خودِ مجموعه‌ی A بزرگتر باشد) آنگاه هر هومورفیسم $h : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ تنها توسط مقادیر h روی A تعیین می‌شود؛ یعنی اگر $h_1 : \langle A \rangle^{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{N}$ و $h_2 : \langle A \rangle^{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{N}$ دو هومورفیسم باشند، در این صورت اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم $h_1(a) = h_2(a)$، آنگاه برای هر $x \in M$ داریم $h_1(x) = h_2(x)$.*

اثبات. فرض کنید $h_1, h_2 : \langle A \rangle^{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{N}$ دو هومورفیسم باشند که روی A مقادیر یکسانی دارند. قرار دهید

$$B = \{x \in M | h_1(x) = h_2(x)\}.$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $B = M$. (یعنی می‌خواهیم نشان دهیم که روی تمام نقاطِ ساختار تولیدشده، این دو هومورفیسم با هم برابرند). واضح است که $A \subseteq B$ زیرا فرض کرده‌ایم که روی A این دو هومورفیسم مقادیر یکسانی دارند.

ادعا می‌کنیم که مجموعه‌ی B جهان یک زیرساختار از $\mathfrak{M}$ است.

برای اثبات ادعای بالا کافی است نشان دهیم که B تحت ثوابت و روابطِ $\mathfrak{M}$ بسته است.

اولاً برای هر ثابت c داریم $c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$ و همچنین بنا به هومورفیسم بودن داریم $h_1(c^{\mathfrak{M}}) = h_2(c^{\mathfrak{M}})$. پس $c^{\mathfrak{M}} \in B$. ثانیاً برای عناصر $b_1, \ldots, b_n \in B$ داریم $f^{\mathfrak{M}}(b_1, \ldots, b_n) \in B$؛ زیرا $h_1(b_i) = h_2(b_i)$ و بنابراین

$$h_1(f^{\mathfrak{M}}(b_1, \ldots, b_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h_1(b_1), \ldots, h_1(b_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h_2(b_1), \ldots, h_2(b_n)) = h_2(f^{\mathfrak{M}}(b_1, \ldots, b_n)).$$

تا اینجا نشان دادیم که B جهان یک زیرساختار از $\mathfrak{M}$ است. کوچکترین زیرساختار شاملِ A همان $\mathfrak{M}$ است پس $M \subseteq B$. از آنجا که $B \subseteq M$ داریم $M = B$. $\square$

لم ۱۱. *فرض کنید $h:\mathfrak{M}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{M}'$ یک ایزومرفیسم باشد و $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}$. در این صورت Lساختار $\mathfrak{N}'\supseteq\mathfrak{M}'$ به همراه ایزومرفیسم $h':\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}'$ موجود است به طوری که h' توسیعی از h است.*

اثبات. یک مجموعه‌ی $M'\subseteq N'$ و یک تابع یک‌به‌یک و پوشای h' بین N و N' پیدا کنید که توسیع h باشد. آنگاه با استفاده از h' مجموعه‌ی N' را تبدیل به جهان یک Lساختار بکنید. مثلاً تعریف کنید:

$$f^{\mathfrak{N}'}(h'(a_۱),h'(a_۲)):=h'(f^{\mathfrak{N}}(a_۱,a_۲)).$$

□

آنچه که در لم زیر بدان پرداخته‌ایم، تعمیمی از مفاهیم جبری حد مستقیم و حد معکوس [۳] است.

لم ۱۲. *فرض کنید $(I,\leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی جهتدار [۴] باشد. همچنین فرض کنید $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ یک خانواده‌ی جهتدار از Lساختارها باشد؛ یعنی به گونه‌ای باشد که اگر $i_۱\leq i_۲$ آنگاه $\mathfrak{M}_i\subseteq\mathfrak{M}_j$. در این صورت $\bigcup M_i$ جهان یک Lساختار است که همه‌ی $\mathfrak{M}_i$ها زیرساختاری از آن هستند.*

اثبات. باید بتوانیم تمامی علائم زبانی را در $\bigcup M_i$ تعبیر کنیم. در زیر این کار برای روابط انجام داده‌ام؛ با توابع و ثوابت می‌توان رفتار مشابهی داشت:

فرض کنید $a_۱,\ldots,a_n\in\bigcup M_i$ و $R\in L$. در این صورت $j\in I$ موجود است به طوری که تمام a_i ها در M_j هستند. تعریف می‌کنیم

$$R^{\bigcup\mathfrak{M}_i}(a_۱,\ldots,a_n)\iff R^{\mathfrak{m}_j}(a_۱,\ldots,a_n)$$

تعریف بالا، خوش‌تعریف است؛ یعنی به j بستگی ندارد. زیرا اگر تمام a_i ها در یک $\mathfrak{M}_k$ دیگر باشند، آنگاه ساختاری مانند $\mathfrak{M}_l$ شامل $\mathfrak{M}_k,\mathfrak{M}_j$ در کلاس هست و این موجب می‌شود که تعبیر این رابطه در هر سه‌ی این ساختارها یکسان شود:

$$R^{\mathfrak{M}_j}(a_۱,\ldots,a_n)\Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}_l}(a_۱,\ldots,a_n)\Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}_k}(a_۱,\ldots,a_n).$$

□

در بالا درباره‌ی زیرساختار بودن سخن گفتیم. دقت کنید که مثلاً

$$(\mathbb{Q},+,\cdot)\subseteq(\mathbb{R},+,\cdot)$$

در بالا (یعنی در تعریف زیرساختار) زبانها یکسانند ولی جهانها تغییر کرده‌اند. در مفهوم تعریف‌شده‌ی زیر، جهانها یکسانند ولی زبان بزرگتر شده است.

تعریف ۱۳. *فرض کنید $K\subseteq L$ دو زبان مرتبه‌ی اول باشند. در این صورت Kساختار $\mathfrak{N}$ را یک تقلیل از Lساختار $\mathfrak{M}$ می‌نامیم هرگاه جهانهای M و N یکسان باشند و $\mathfrak{M}\restriction_K=\mathfrak{N}$. دقت کنید که در این صورت $\mathfrak{M}$ را بسطی از $\mathfrak{N}$ می‌نامیم.* [۵]

[۳] direct/inverse limit

[۴] مجموعه‌ای مرتب به‌طوری که برای هر $i_۱,i_۲\in I$ عنصر $j\in I$ موجود است به طوری که $j\geq i_۱$ و همچنین $j\geq i_۲$.

[۵] وقتی که $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$ در انگلیسی گفته به این نوع گسترش یک *extension* گفته می‌شود. وقتی مانند تعریف بالا، $\mathfrak{M}$ بسطی از $\mathfrak{N}$ باشد، در انگلیسی به این نوع گسترش *expansion* گفته می‌شود. در فارسی شاید خوب باشد اولی را توسیع و دومی را بسط بنامیم.

در زیر چند مثال از بسط زبان آورده‌ایم.

مثال ۱۴. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک Lساختار و R یک رابطه روی M^n باشد. قرار دهید $L' = L \cup \{R\}$. در این صورت $\mathfrak{M}$ تقلیلی از L'ساختارِ $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{M}, R)$ است که در آن $R^{\mathfrak{M}'}$ همان رابطه‌ی R تعبیر شده است.*

مثال ۱۵. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد و $m_1, \ldots, m_n \in M$. زبان $L' = L \cup \{c_{m_1}, \ldots, c_{m_n}\}$ را در نظر بگیرید که در آن ثوابتی برای این اعضای M وجود دارد. حال $\mathfrak{A} = (\mathfrak{M}, m_1, \ldots, m_n)$ را به عنوان یک L'ساختار در نظر بگیرید که در آن $c_{c_{m_i}}^{\mathfrak{A}} = m_i$.*

مثال ۱۶. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک Lساختار باشد و $A \subseteq M$. قرار دهید $L \subseteq L_A = L \cup \{c_a | a \in A\}$. در این صورت یک بسط از Lساختارِ $\mathfrak{M}$ به زبان L_A وجود دارد:*

$$\mathfrak{M}_A = (\mathfrak{M}, \{a\}_{a \in A}), \qquad c_a^{\mathfrak{M}} = a$$

در این صورت گروه اتومرفیسم‌های روی $\mathfrak{M}_A$ یعنی $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_A)$ در زبان L_A برابر است با اتومرفیسم‌هایی از M که روی اعضای A ثابت هستند. این گروه را با $\mathrm{Aut}(\frac{\mathfrak{M}}{A})$ نیز نشان می‌دهیم.