تمرینات تحویلی سری پنجم درس نظریه گالوا

مهلت تحویل: تمرینهای ۱ و۲ شنبه ۱۰ خرداد، ساعت ۲۴، تمرینهای ۳و ۴ شنبه ۱۷ خرداد ساعت ۲۴

- لطفا پاسخ تمرین‌های خود را پیش از پایان مهلت تحویل، در سامانه الکترونیکی دروس بارگذاری کنید.
- نام فایل ارسالی شما باید به شکل **Galois-g**a**-h**b باشد که در آن a شماره گروه شما و b شماره تکلیف است. برای مثال، نام فایل تکلیف سری اول گروه ۳ باید Galois-g3-h1 باشد.

تمرین ۱. فرض کنید K یک میدان و f یک چندجمله‌ای از درجه p در $K[X]$ باشد که p یک عدد اول است. همچنین، فرض کنید برای هر توسیع میدانی $K \subseteq L$، اگر f در L یک ریشه داشته باشد، آنگاه f به طور کامل در L شکافته شود. نشان دهید که در این صورت یا f در $K[X]$ تحویل‌ناپذیر است یا f در K دارای یک ریشه است.

تمرین ۲. فرض کنید $K \subseteq L$ یک توسیع نرمال و p یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر در $K[X]$ باشد. نشان دهید اگر p در L تحویل‌پذیر باشد، آنگاه p در L به عوامل تحویل‌ناپذیر با درجه یکسان تجزیه می‌شود. به ویژه، اگر p در L یک ریشه داشته باشد، آنگاه p در L به طور کامل شکافته می‌شود.

تمرین ۳. فرض کنید $K \subseteq L$ یک توسیع نرمال باشد، $a, a' \in L$ ریشه‌های چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر f در $K[X]$ و $b, b' \in L$ ریشه‌های چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر g در $K[X]$ باشند. درستی گزاره زیر را بررسی کنید:
اتومرفیسم $\sigma \in Gal(L:K)$ موجود است چنان که $\sigma(a) = a'$ و $\sigma(b) = b'$.

تمرین ۴. فرض کنید $K \subseteq L$ یک توسیع گالوایی باشد، $[L:K] = n$ و p یک شمارنده اول n باشد. نشان دهید زیرمیدان E از L موجود است چنان که $[L:E] = p$.