۱ جلسه هفتم، شروع منطق مرتبه اول، ترمها و فرمولها

در جلسات قبل با منطق گزاره‌ها آشنا شدیم. دیدیم که در منطق گزاره‌ها، ارزش هر گزاره‌ای تنها به ارزش اتمهای به کار رفته در آن بستگی دارد و ارزش یک گزاره از روی اتمهای آن، توسط قوانین موجود در جبر بولیِ $\{۰, ۱\}$ تعیین می‌شود. قوانین منطق گزاره‌ها، بر تمام گزاره‌های ریاضی نیز حاکم هستند. مثلاً اگر $\phi \vee \psi$ یک گزاره‌ی ریاضی باشد، این گزاره تنها در صورتی درست است که حداقل یکی از ϕ یا ψ درست باشند. یا گزاره‌ی $\phi \wedge \psi$ تنها در صورتی درست است که هم ϕ و هم ψ درست باشد. در واقع منطق گزاره‌ها، منطق حاکم بر فکر ریاضی است.

با این حال، برای بیان و بررسی بخش اعظمی از حقایق ریاضی، به یک منطق کاملتر به نام «منطق مرتبه‌ی اول» [۱] نیاز داریم (که البته در بنای آن هم منطق گزاره‌ها به نحو جدی گنجانده شده است).

معرفی منطق مرتبه‌ی اول دقیقاً مانند معرفی هر منطق فکری دیگر است. مثلاً برای فکر در زبان فارسی، نخست باید الفبای آن را بشناسیم، سپس روش «کلمه‌سازی» و پس از آن روش «جمله‌سازی» را فرابگیریم. این امر تحت عنوان «دستور زبان» صورت می‌گیرد. با این حال هر جمله‌ای که از لحاظ دستوری درست باشد، از لحاظ «معنائی» لزوماً درست نیست. پس باید قوانینی برای «معناشناسی» جملات و کلمات وضع کنیم و نهایتاً میان «صورت و معنی» این منطق ارتباط برقرار کنیم. در ادامه‌ی درس، دقیقاً همین مسیر را برای معرفی منطق مرتبه‌ی اول پیش گرفته‌ایم.

در منطق مرتبه اول، بسته به ماهیت ریاضی مورد مطالعه نیاز به انتخاب یک **زبان** [۲] داریم.

تعریف ۱. منظور از یک زبان مرتبه اولِ $\mathcal{L}$ مجموعه ای به صورتِ اجتماع سه مجموعه‌ی مجزای $\mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$ است که در آن مجموعه $\mathcal{F}$ را مجموعه‌ی **نماد های تابعی**، $\mathcal{R}$ را مجموعه **نمادهای رابطه‌ای** و $\mathcal{C}$ را **مجموعه‌ی ثوابت زبان** می‌خوانیم. همچنین برای هر نماد تابعی $f \in \mathcal{F}$ یک عدد طبیعی $n_f \in \mathbb{N}$ به عنوان **تعداد مواضع** f در نظر گرفته شده است. به طور مشابه برای هر رابطه $R \in \mathcal{R}$ یک عدد n_R را به عنوان **تعداد مواضع** رابطه R در نظر می گیریم.

دقت کنید که «یک نماد تابعی» با یک «تابع» فرق می‌کند. تابع یک عمل است که از یک مجموعه به مجموعه‌ای دیگر تعریف می‌شود ولی نماد تابعی، صرفاً یک نماد (یا یک اسم) است. در واقع در مرحله‌ی معرفی زبان، هیچ «معنائی» برای علائم در نظر گرفته نشده است.

در زیر مثال هایی از یک زبان مرتبه اول آورده‌ایم. فعلاً درگیر کاربرد این زبانها یا علت انتخاب آنها نمی‌شویم.

۱. مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ یک زبان مرتبه‌ی اول است که در آن هیچ نمادی اعم از تابعی یا رابطه‌ای یا ثابت وجود ندارد.

۲. مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\in\}$ حاوی یک رابطه‌ی دوموضعیِ $\in$ را زبان «نظریه‌ی مجموعه‌ها» می‌خوانیم.

۳. گرافها را معمولاً در یک زبانِ $\mathcal{L} = \{R\}$ حاوی یک رابطه‌ی دوموضعی مطالعه می‌کنیم.

۴. زبان نظریه‌ی گروهها به صورت $\mathcal{L} = \{+, ۰, -\square\}$ است که در آن $+$ یک نماد تابعی دو موضعی است، $-\square$ یک نماد تابعی تک موضعی است و ۰ یک ثابت است.

۵. زبان حلقه‌های یکدار به صورتِ $\mathcal{L} = \{+, \cdot, ۰, ۱\}$ است که در آن ۱ ,۰ نمادهای ثابت هستند و $+, *$ نمادهای تابعی دو موضعی هستند. در صورت نیاز به این زبان می‌توان نمادهائی برای توابع وارون ضربی و وارون جمعی نیز افزود.

---
[۱] First Order Logic

[۲] Language

۶. زبانِ $\mathcal{L} = \{\leq\}$ حاوی یک رابطه‌ی دوموضعی، برای مطالعه‌ی مجموعه‌های مرتب می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

دقت کنید که علائم منطقیِ $\exists, \vee, \wedge$ و نماد تساوی را در زبان قرار نمی‌دهیم. زبان تنها حکم الفبائی دارد که وقتی آنها را با علائم منطقی ترکیب کنیم می‌توانیم کلمه و جمله بسازیم. در مرحله‌ی بعد سراغ «کلمه‌سازی» در یک زبان می‌رویم. معمولاً از واژه‌ی «ترم» به جای کلمه استفاده می‌کنیم.

یک مجموعه $\{v_۰, v_۱, \ldots\}$ را از **متغیرها** در نظر بگیرید.

تعریف ۲. **($\mathcal{L}$ترمها)** فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد. مجموعه $\mathcal{L}$ترمها به صورت استقرایی زیر تعریف می شود:

۱. هر ثابت $c \in \mathcal{C}$ و هر متغییر v یک ترم است.

۲. اگر $t_۱, \cdots, t_n$ ترم باشند و f یک نماد تابعی n موضعی باشد، آنگاه $ft_۱, \cdots, t_n$ یک ترم است.

برای مثال، در زبان حلقه‌ها عبارتِ $+۱۰$ یک ترم است (که برای راحتی آن را به صورتِ $۰ + ۱$ نمایش می‌دهیم. همچنین عبارتِ $+ \cdot xxx$ یک ترم است که آن را برای سادگی به صورتِ $x + x^۲$ می‌نویسیم.

مثال ۳. چند ترم در زبان حلقه ها (ساده‌سازی شده)

$$۱ + ۰ \quad ۱ + ۱ \quad ۱ + ۱ + ۱ \cdots \quad ۱ + ۱ + ۱ \cdots \quad ۰, ۱, x_۱, x_۲, \cdots \quad (۱ + ۱).x.x.x + \cdots \quad ۲x^۳ + ۳x^۲$$

دقت کنید که همان گونه که تعریف استقرائی بالا بیان می‌کند **طول ترمها متناهی است.**

تمرین ۱. نشان دهید که هر ترم t در زبان حلقه ها **متناظر** با یک چند جمله ای $f(x_۱, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}[X_۱, \ldots]$ است (منظور، یک چند جمله‌ای چند متغیره است با ضرایب در اعداد صحیح). برای مثال $f(X_۱, X_۲) = X_۱X_۲ + ۵ + ۲X_۱^۳X_۲^۴$ متناظر با یک ترم است. (تمرین فوق را با استقراء روی ساخت ترمها و با توجه به قضیه‌ی ۵ پاسخ دهید).

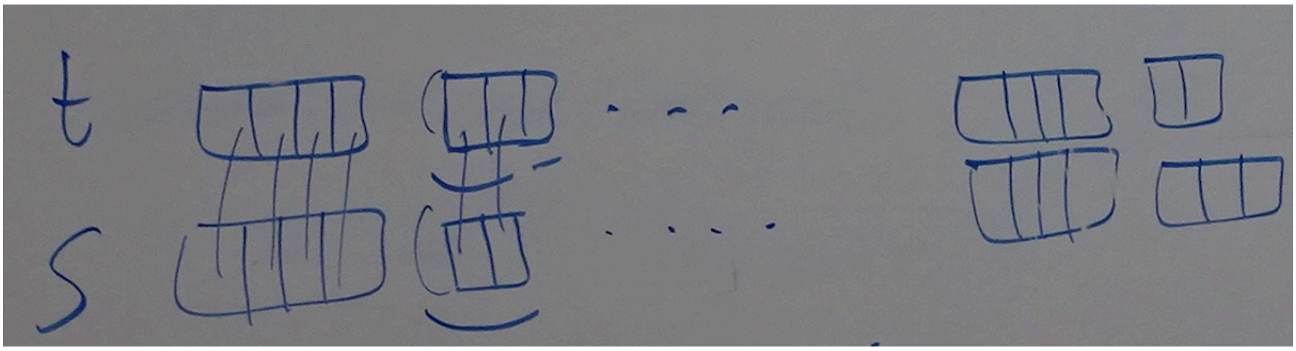
تمرین ۲. ترمها را در زبانهای نظریه‌ی گروهها و نظریه‌ی گرافها بررسی کنید.

لم ۴. هیچ ترمی یک بخش ابتدایی سره‌ی یک ترم دیگر نیست. (به بیان دیگر، اجتماع دو ترم خود یک ترم نیست.)

تمرین ۳. چرا با اینکه $۲x$، در زبان حلقه‌ها، بخش ابتدایی $۲x + ۴x^۲$ است، لم بالا باید درست باشد؟! (به تعریف دقیقِ ترمها توجه کنید).

اثبات لم. اگر ترم t یک ثابت یا یک متغیر باشد آنگاه نه t بخش ابتدایی سره‌ی یک ترم دیگر است و نه ترم دیگری بخش ابتدایی سره‌ی آن است. (برای اثبات همین هم نیاز به استقراء دارید!). فرض کنید که این حکم برای ترمهای $t_۱, \cdots, t_n$ برقرار باشد؛ یعنی نه آنها بخش ابتدائی ترمی باشند و نه ترمی بخش ابتدائی آنها باشد. هدف، اثبات این است که حکم مورد نظر برای $ft_۱, \cdots, t_n$ نیز برقرار است.

اگر $S = s_۱ \cdots s_m$ بخش ابتدایی $ft_۱, \cdots, t_n$ باشد آنگاه بوضوح، S باید به صورت $S = fu_۱ \cdots u_n$ باشد. فرض کنید u_i اولین جایی باشد که $u_i \neq t_i$.



در این صورت یا t_i بخش ابتدایی u_i است یا u_i بخش ابتدایی t_i است که این با فرض استقراء متناقض است. □

قضیه ۵. (خوانش یکتای ترمها) هر ترم دقیقاً به یکی از صورتهای زیر است:

۱. ثابت یا متغیر است.

۲. به صورت $ft_1 \cdots t_n$ است که در آن f یک نماد تابعی n موضعی و $t_1 \cdots t_n$ ترم هستند؛

و در مورد دوم تابع f و ترمهای $t_1 \cdots t_n$ به طور **یکتا** مشخص می شوند.

اثبات. بنا به تعریف آنچه از مواردِ ۱و۲ به دست بیاید ترم است. برای اثبات یکتائی نمایش فرض کنید $ft_1 \ldots t_n$ یک ترم باشد که نمایش دیگری به صورتِ $gs_1 \ldots s_m$ داشته باشد. در این صورت واضح است که $f = g$ و $n = m$. حال اگر i اولین اندیسی باشد که $s_i \neq t_i$ آنگاه یا s_i بخش ابتدائی t_i است و یا برعکس؛ که این بنا به لم قبل ناممکن است. □

پس از آشنائی با ترمها، قدم طبیعی بعدی آشنائی با فرمولها است. به بیان غیر دقیق اگر $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد آنگاه $\mathcal{L}$فرمولها با استفاده از نمادهای به کار رفته در $\mathcal{L}$، متغیرها $(v_1, v_2, \cdots)$، و ادوات منطقی $\neg, \wedge, \exists$ و نمادهای کمکی (،) و نماد تساوی تولید می‌شوند. در زیر تعریف L فرمولها را دقیق (و البته استقرائی) کرده‌ایم.

تعریف ۶ (فرمولها). فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. مجموعه $\mathcal{L}$ فرمولها به صورت زیر حاصل می شود.

۱. اگر t_1 و t_2 دو ترم باشند آنگاه $t_1 = t_2$ یک $\mathcal{L}$فرمول است .

۲. اگر $t_1 \cdots t_n$، $\mathcal{L}$ چند ترم باشند و $R \in \mathcal{L}$ یک نماد رابطه ای n موضعی باشد آنگاه $Rt_1 \cdots t_n$ یک $\mathcal{L}$فرمول است.

۳. اگر ψ یک $\mathcal{L}$فرمول باشد آنگاه $\neg\psi$ یک $\mathcal{L}$فرمول است.

۴. اگر ψ_1, ψ_2 دو $\mathcal{L}$ فرمول باشند آنگاه $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ نیز یک $\mathcal{L}$فرمول است.

۵. اگر ψ یک $\mathcal{L}$ فرمول باشد آنگاه $\exists x\psi$ یک $\mathcal{L}$ فرمول است.

از آقای امیر نیک‌آبادی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.