

۱ جلسه‌ی پنجم یک کاربرد از قضیه‌ی فشردگی و صورتهای نرمال

۱.۱ یک کاربرد از قضیه‌ی فشردگی

یادآوری می‌کنم که بنا به قضیه‌ی فشردگی در منطق گزاره‌ها، اگر Σ یک مجموعه‌ی نامتناهی از گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها باشد و برای هر تعداد متناهی گزاره‌ی $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Sigma$ یک نگاشت ارزیابی $\mu : M \rightarrow \{0, 1\}$ موجود باشد به طوری که $\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_2) = \dots = \mu(\varphi_n) = 1$ آن‌گاه سازگار است؛ یعنی ارزیابی $\mu' : M \rightarrow \{0, 1\}$ موجود است که برای هر $\varphi \in \Sigma$ داریم $\mu(\varphi) = 1$. به بیان دیگر، اگر Σ یک مجموعه‌ی متناقص از گزاره‌ها باشد، آن‌گاه تناقض از بخشی متناهی از Σ ناشی می‌شود. (چرا این بیان با بیان قبلی معادل است؟)

تمرین ۱. (اردشیر) فرض کنید $\{A_1, A_2, \dots\}$ مجموعه‌ای نامتناهی از گزاره‌ها باشد. فرض کنید برای هر تابع ارزش μ یک گزاره‌ی A_m موجود باشد به طوری که $\mu(A_m) = 1$. نشان دهید که $m \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m$ تاتولوژی است.

در ادامه‌ی درس، بنا به درخواست شما کاربردی از قضیه‌ی فشردگی را بیان می‌کنم. فرض کنید G یک گراف (ساده^۱) باشد. می‌گوییم گراف G یک گراف N رنگ‌پذیر است هرگاه بتوان به هر رأس آن یک رنگ از میان رنگ‌های $\{1, 2, \dots, N\}$ نسبت داد به طوری که هیچ دو رأس مجاور هم‌رنگ نباشند. در زیر این قضیه را با استفاده از فشردگی ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۱. (اردوش^۲) فرض کنید G یک گراف نامتناهی باشد. آنگاه گراف G با فرض N رنگ‌پذیر بودن هر زیرگراف متناهی از آن، N رنگ‌پذیر است.

اثبات. قضیه را برای وقتی که $N = 4$ ثابت کرده‌ایم، ولی اثبات در حالت کلی نیز مشابه همین است. فرض کنید G یک گراف نامتناهی و هر زیرگراف متناهی از آن ۴ رنگ‌پذیر باشد. مجموعه‌ی رنگ‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\{\text{سفید، مشکی، زرد، سبز}\}$$

وضعیت گراف G را به همراه امکان ۴ رنگ‌پذیری آن در مجموعه‌های زیر از گزاره‌ها شرح می‌دهیم. مجموعه‌های زیر از گزاره‌ها را در نظر بگیرید:

$$\Sigma_1 = \{ \text{در گراف } G \text{ این‌گونه باشد.} \mid \text{رأس } g_1 \text{ به رأس } g_2 \text{ وصل است.} \}$$

$$\Sigma_2 = \{ g \in G \mid (\text{رأس } g \text{ سبز است}) \vee (\text{رأس } g \text{ مشکی است}) \vee (\text{رأس } g \text{ زرد است}) \vee (\text{رأس } g \text{ سفید است}) \}$$

$$\Sigma_3 = \{ \text{اگر } g_1 \text{ سبز باشد آنگاه } g_2 \text{ سبز نباشد} \}$$

$$\text{اگر } g_1 \text{ سفید باشد آنگاه } g_2 \text{ سفید نباشد}$$

$$\text{اگر } g_1 \text{ مشکی باشد آنگاه } g_2 \text{ مشکی نباشد}$$

$$\text{اگر } g_1 \text{ زرد باشد آنگاه } g_2 \text{ زرد نباشد}$$

$$\{ g_1 \text{ به } g_2 \text{ وصل است.} \}$$

$$\Sigma_4 = \{ g \in G \mid (g \text{ همزمان سفید و مشکی نیست.}) \wedge (g \text{ همزمان سفید و زرد نیست.}) \}$$

^۱ یعنی جهت‌دار نباشد

^۲Erdős

دقت کنید که اگر $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ سازگار باشد آنگاه گراف G یک گراف ۴ رنگ پذیر است.

بنا به قضیه‌ی فشردگی برای اثبات سازگاری Σ کافی است نشان دهیم هر زیرمجموعه‌ی متناهی از آن سازگار است.

فرض کنید $\Delta \subseteq \Sigma$ متناهی باشد. فرض کنید در Δ درباره‌ی رأس‌های g_1, g_2, \dots, g_n گزاره‌هایی وجود داشته باشد. به Δ گزاره‌هایی از Σ اضافه می‌کنیم به طوری که به $\Delta \subseteq \Delta'$ برسیم و Δ' بیانگر این باشد که g_1, g_2, \dots, g_n رأس‌های یک زیرگراف از G هستند و این زیرگراف ۴ رنگ پذیر است. از آنجا که زیرگراف یاد شده، بنا به فرض سؤال، ۴ رنگ پذیر است، مجموعه‌ی Δ' و به تبع آن Δ ، سازگار است.

به بیان دقیقتر برای اثبات سازگاری Δ' باید یک ارزیابی از گزاره‌های اتمی پیدا کنیم که با آن ارزیابی همه‌ی جملات به کار رفته در Δ' ارزش یک داشته باشند. جملات اتمی ما در اینجا گزاره‌هایی مانند رأس فلان به راس فلان وصل است و رأس فلان، فلان رنگ را دارد هستند. کافی است برای ارزش دهی به آنها به زیرگراف ساخته شده توسط رأسهای g_1, \dots, g_n مراجعه کنیم و اگر جمله‌ی ما درباره‌ی این گراف درست بود به آن ارزش یک بدهیم. \square

۲.۱ صورت‌های نرمال

لم ۲. هر گزاره‌ای در منطق گزاره‌ها را می‌توان در «صورت نرمال فصلی»^۳ نوشت؛ یعنی اگر φ یک گزاره‌ی دلخواه باشد، آنگاه گزاره‌ای به شکل زیر وجود دارد که با φ معادل است:

$$\bigvee_{i=1 \dots n} c_i$$

که هر c_i به صورت $(q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_m)$ است و هر q_j یک گزاره‌ی اتمی یا نقیض یک گزاره‌ی اتمی است.

مثال ۳. گزاره‌ی زیر در صورت نرمال فصلی است:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_4 \wedge p_5 \wedge \neg p_6) \vee (p_7 \wedge p_8 \wedge p_9 \wedge \neg p_{10}).$$

اثبات لم. اثبات اول: دو گزاره در صورتی معادلند که جدول ارزش یکسانی داشته باشند. همچنین قبلاً دیدیم که هر جدول ارزشی را می‌توان با یک گزاره‌ی در صورت نرمال فصلی به دست آورد.

اثبات دوم، با استقراء روی ساخت گزاره‌ها:

۱. اگر φ یک گزاره‌ی اتمی باشد آنگاه حکم بوضوح برقرار است.

۲. اگر حکم برای φ درست باشد، نشان می‌دهیم که آنگاه حکم برای $\neg \varphi$ هم درست است. برای جلوگیری از پیچیدگی نمادها، تنها به بیان ایده‌ی اثبات اکتفا کرده‌ام: فرض کنید

$$\varphi : (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$$

آنگاه

$$\neg \varphi : \neg(p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg(p_3 \wedge p_4) \equiv$$

$$(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \equiv$$

^۳disjunctive normal form

$$((\neg p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_3) \vee ((\neg p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_4) \equiv$$

$$(\neg p_1 \wedge \neg p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_4) \vee (p_2 \wedge \neg p_4)$$

گزاره‌ی آخری در صورت نرمال فصلی است.

۳. حال فرض کنیم φ و ψ را بتوان به صورت نرمال فصلی نوشت. می‌دانیم که فصلِ دو گزاره در صورت نرمال فصلی، خود در صورت نرمال فصلی است. در قسمت قبل نیز دیدیم که اگر ϕ در صورت نرمال فصلی باشد، می‌توان نقیض آن را در صورت نرمال فصلی نوشت. پس داریم

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv \neg(\text{نرمال فصلی} \vee \text{نرمال فصلی}) \equiv \neg(\text{نرمال فصلی}) \equiv \text{نرمال فصلی}$$

□

تمرین ۲. گزاره‌های زیر را به صورت نرمال فصلی درآورید.

$$p \rightarrow (q \rightarrow p) \bullet$$

$$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q \bullet$$

$$p \wedge q \rightarrow r \bullet$$

$$(A \vee B) \rightarrow (\neg B \wedge A) \bullet$$

$$\neg(A \rightarrow B) \vee (\neg A \vee C) \bullet$$

تمرین ۳. نشان دهید هر گزاره را می‌توان در «صورت نرمال عطفی»^۴ نوشت؛ یعنی به صورت زیر

$$\bigwedge_{i=1..n} c_i$$

که در آن

$$c_i = (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_m)$$

و هر q_i یک گزاره‌ی اتمی یا نقیض یک گزاره‌ی اتمی است.

مثال ۴. $(p_1 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee \neg p_4)$ در صورت نرمال عطفی است.

در جلسه‌ی بعد روشی برای تشخیص تاتولوژی بودن یک گزاره‌ی در صورت نرمال فصلی معرفی می‌کنیم.

از آقای علیرضا محمدصالحی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

^۴ conjunctive normal form