# ۱ جلسه نهم، ادامه‌ی معناشناسی

در جلسه‌ی گذشته به معناشناسیِ‌منطق مرتبه‌ی اول پرداختیم. گفتیم که ترمهای زبان در ساختارها و با استفاده از نگاشتهایی که متغیرها را تعبیر می‌کنند، معنا می‌شوند. نیز گفتیم که هر نگاشت تعبیر، تابعی مانند

$$\beta : \{v_۰, v_۱, \ldots\} \to A$$

است که دامنه آن مجموعه‌ی متغیرهاست و بردِ آن جهان یک $L$ ساختار $\mathfrak{A}$ است. در این جلسه می‌خواهیم مفهوم «درست بودن یک فرمول» دریک ساختار را تعریف کنیم.

فرض کنید $\varphi$ یک $\mathcal{L}$ فرمول، $\mathfrak{A}$ یک $L$ ساختار، $\beta$ و یک نگاشت تعبیرِ متغیرها در $A$، جهانِ ساختارِ $\mathfrak{A}$، باشد. منظور از عبارت $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ این است که فرمول $\varphi$ با ارزیابی $\beta$ از متغیرها در ساختار $\mathfrak{A}$ درست است. در زیر همین تعریف را دقیق کرده‌ایم.

**تعریف ۱** (درست بودن یک فرمول در یک ساختار)**.** عبارت $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ (که خوانده می‌شود: فرمولِ $\varphi$ با ارزیابیِ $\beta$ در ساختارِ $\mathfrak{A}$ درست است) به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱.

$$\mathfrak{A} \models t_۱ = t_۲[\beta] \Leftrightarrow t_۱^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_۲^{\mathfrak{A}}[\beta]$$

یعنی فرمولِ $t_۱ = t_۲$ وقتی در ساختارِ $\mathfrak{A}$ درست است که تعبیرهای ترمهای $t_۱, t_۲$ در این ساختار با هم برابر باشند؛

۲.

$$\mathfrak{A} \models R(t_۱, \cdots, t_n)[\beta] \Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_۱^{\mathfrak{A}}[\beta], \cdots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$$

یعنی فرمولِ $R(t_۱, \ldots, t_n)$ وقتی در ساختارِ $\mathfrak{A}$ درست است که تعبیرهای ترمهای $t_i$ در این ساختار با یکدیگر رابطه‌ی $R^{\mathfrak{A}}$ را داشته باشند؛

۳. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta]$ هرگاه $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$

۴.

$$\mathfrak{A} \models (\psi_۱ \wedge \psi_۲)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi_۱[\beta] \text{ و } \mathfrak{A} \models \psi_۲[\beta]$$

۵. $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta]$ هرگاه یک عنصر $a \in A$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$ که در آن $\beta\frac{a}{x}$ یک نگاشت تعبیر متغیرهاست که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta\frac{a}{x}(v) = \begin{cases} \beta(v) & v \neq x \\ a & v = x \end{cases}$$

تعریف بالا را می‌توان برای سایر ادوات کمکی نیز به صورت زیر تعمیم داد: تعریف می‌کنیم $\mathfrak{A} \models (\psi_۱ \to \psi_۲)[\beta]$ هرگاه اگر $\mathfrak{A} \models \psi_۱[\beta]$ آنگاه $\mathfrak{A} \models \psi_۲[\beta]$. همچنین تعریف می‌کنیم $\mathfrak{A} \models \forall x \quad \psi[\beta]$ هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$.

در ادامه به تعریف متغیرهای آزاد و پایبند پرداخته‌ایم. می‌گوییم متغیر $x$ در فرمول $\varphi$ آزاد است هرگاه $x$ تحت تأثیرِ هیچ سوری قرار نگرفته باشد. بیایید این تعریف را به صورت دقیق و استقرائی بیان کنیم.

**تعریف ۲** (متغیرآزاد). آزاد بودن حضور متغیر $x$ در فرمول $\varphi$ به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود:

۱. اگر $\varphi = (t_1 = t_2)$ در این صورت $x$ برای $\varphi$ آزاد است هرگاه $x \in var(t_1)$ یا $x \in var(t_2)$ (یعنی در صورتی که $x$ یکی از متغیرهای به کار رفته در یکی از $t_i$ ها باشد).

۲. اگر $\varphi = Rt_1, \cdots, t_n$ آنگاه $x$ در $\varphi$ آزاد است هرگاه $x$ جزوِ متغیرهای های یکی از $t_i$ ها باشد.

۳. اگر $\varphi = \neg\psi$ آنگاه $x$ در $\varphi$ آزاد است هرگاه در $\psi$ آزاد باشد.

۴. اگر $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ آنگاه $x$ در $\varphi$ آزاد است هرگاه $x$ در $\psi_1$ یا در $\psi_2$ آزاد باشد.

۵. اگر $\varphi = \exists y\psi$ آنگاه $x$ در $\varphi$ آزاد است هرگاه $x \neq y$ و $x$ در $\psi$ آزاد باشد.

متغیرهایی را که آزاد نباشند، **پایبند** می‌نامیم.

**توجه ۳.** تعداد متغیر های آزاد یک فرمولِ $\varphi$ همواره متناهی است.

**مثال ۴.** متغیر های آزاد و پایبند را در فرمولهای زیر مشخص کنید.

$$\forall v_0 \quad \left(\exists v_1 R(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{v_0}}, \overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{v_1}}) \wedge p(\overset{\text{آزاد}}{\overset{\uparrow}{v_1}})\right)$$

$$\forall x, y \quad R_1(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{x}}, \overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{y}}) \wedge R_2(\overset{\text{آزاد}}{\overset{\uparrow}{x}}, \overset{\text{آزاد}}{\overset{\uparrow}{y}})$$

$$\forall x, y \quad \left(p(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{x}}) \wedge q(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{y}})\right)$$

**توجه ۵.** برای دیدن مثال‌های بیشتر از متغیر های آزاد و پایبند به جزوه مبانی ریاضی مدرس در تارنمای درسها مراجعه کنید.

**لم ۶.** اگر ارزیابی های $\gamma, \beta : \{v_0, v_1, \ldots\} \to A$ روی متغیرهای آزاد فرمولِ $\varphi$ یکسان عمل کنند آنگاه

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$$

**مثال ۷.** فرض کنید $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, 0)$. ارزیابی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta : v_0 \mapsto 1$$

$$v_1 \mapsto 2$$

$$v_i \mapsto i \quad i \neq 1, 2$$

$$y \mapsto 6$$

$$\gamma : v_0 \mapsto 1$$

$$v_1 \mapsto 2$$

$$v_i \mapsto ۱۰i \quad i \neq ۱, ۲$$

$$y \mapsto ۱۰۰۰$$

حال فرمولهای $v_۰ + v_۱ = v_۲$ و $\exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (v_۰ + v_۱ = ۲)$ را در نظر بگیرید. واضح است که

$$R \models v_۰ + v_۱ = v_۲[\beta] \Leftrightarrow R \models v_۰ + v_۱ = v_۲[\gamma]$$

$$R \models \exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (v_۰ + v_۱ = ۲)[\beta] \Leftrightarrow R \models \exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (v_۰ + v_۱ = ۲)[\gamma]$$

در مورد دوم دقت کنید که متغیرهای پایبند نقشی بازی نکرده‌اند.

*اثبات لم ۶.* حکم را با استقراء روی ساخت فرمولها ثابت می‌کنیم.

- اگر $\varphi$ به صورت $t_۱ = t_۲$ باشد و $\beta$ ، $\gamma$ روی متغیرهای به کار رفته در $t_۱$ و $t_۲$ هم ارزش باشند، آنگاه واضح است (و اگر واضح نیست تحقیق کنید) که
$$t_۱^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_۲^{\mathfrak{A}}[\gamma].$$

- اگر $\varphi$ به صورت $Rt_۱, \cdots, t_n$ باشد و ارزشهای $\gamma$ ،$\beta$ روی متغیرهای به کار رفته در $t_i$ ها یکسان باشند، آنگاه $t_i^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_i^{\mathfrak{A}}[\gamma]$، و در نتیجه $R^{\mathfrak{A}}(t_۱^{\mathfrak{A}}[\beta], \cdots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_۱^{\mathfrak{A}}[\gamma], \cdots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma])$

- بررسی حالتهائی را که $\varphi = \neg\psi$ و $\varphi = \psi_۱ \wedge \psi_۲$ به عنوان تمرین رها می‌کنم.

- اگر $\varphi$ به صورت $\exists x\psi$ باشد و $\beta$ و $\gamma$ روی متغیر های آزاد $\varphi$ یکسان عمل کنند،آنگاه $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta]$ هرگاه $a \in A$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$. همچنین $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\gamma]$ هرگاه $a \in A$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma\frac{a}{x}]$.
حال مشاهده کنید که ارزیابی های $\gamma\frac{a}{x}$ و $\beta\frac{a}{x}$ روی متغیر های آزاد $\psi$ یکسان عمل می کنند؛ زیرا متغیرهای آزادِ $\psi$ با متغیرهای آزادِ $\phi$ تنها احتمالاً در $x$ متفاوتند و $\gamma\frac{a}{x}, \beta\frac{a}{x}$ روی همه‌ی متغیرها به غیر از $x$ بنا به فرض یکسان عمل می‌کنند و روی $x$ هم بنا به تعریف هر دو مقدارِ $a$ دارند. پس بنابر فرض استقراء
$$\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\gamma\frac{a}{x}].$$
بنابراین $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x\psi[\gamma]$.

$\square$

دقت کنید که معمولاً در نمایش یک فرمول به صورت $\varphi(x_۱, \ldots, x_n)$ **متغیرهای پایبند آن را نمی‌نویسیم.** به طور کلی:

**توجه ۸.** منظور از نماد $\varphi(x_۱, \cdots, x_n)$ این است که

۱. متغیرهای $x_i$ متمایز هستند.

۲. متغیر های آزاد فرمول $\varphi$ در میان $\{x_۱, \cdots, x_n\}$ هستند.

**مثال ۹.** در فرمول $\varphi(x, z) = \exists y \quad x + y = ۰$، دقت کنید که با این که متغیرِ $z$ در فرمول نیامده است، آن را در پرانتز نوشته‌ایم.

**تعریف ۱۰.** به فرمولی که متغیر آزاد نداشته باشد، **جمله** می‌گوئیم.

**مثال ۱۱.** فرمول زیر یک جمله در زبان حلقه‌هاست.

$$\forall a, b, c\, \exists x \quad ax^{۲} + bx + c = ۰$$

بنابر لم قبلی اگر $\varphi$ یک جمله باشد و $\beta$ ، $\gamma$ دو تابع تعبیر برای متغیر ها باشند آنگاه

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].$$

بنابراین اگر $\varphi$ یک جمله باشد، می‌نویسیم $\mathfrak{A} \models \varphi$ هرگاه برای یک (به بیان معادل به ازای هر) ارزیابی $\beta$ داشته باشیم $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$.

**توجه ۱۲.** اگر $\varphi$ یک جمله و $\mathfrak{A}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد آنگاه $\mathfrak{A} \models \varphi$ یا $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ و هر دو اینها با هم نمی‌تواند رخ دهد (در داخل یک $L$ساختار تناقضی نمی‌تواند رخ دهد).

**تعریف ۱۳.** فرض کنید $x$ یک متغیر و $s, t$ دو ترم باشند، منظور از نماد $t\frac{s}{x}$ این است که به جای متغیر $x$ در ترم $t$، ترمِ $s$ را جایگذاری کنیم.

برای مثال

$$t(y) = ۲y + ۳ = ۰$$

$$s = y^{۲} + y + x$$

$$t\frac{s}{y} = ۲(y^{۲} + y + x) + ۳ = ۰$$