۱ جلسه‌ی دوازدهم، ادامه‌ی نظریه‌ی مدل و شروع مفهوم درستی

از جلسه‌ی قبل یادآوری می‌کنم که دو $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ را ایزومرف می‌خوانیم هرگاه نگاشت یک‌به‌یک و پوشایی مانند $F : M \to N$ موجود باشد که حافظ ساختار است؛ یعنی برای هر ثابت $c \in \mathcal{L}$ داشته باشیم

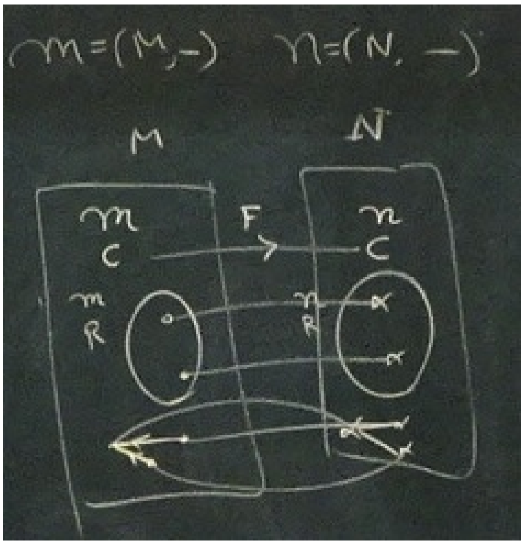
$$F(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$$

و برای هر رابطه‌ی $R \in \mathcal{L}$ داشته باشیم

$$R^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \iff R^{\mathfrak{N}}\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big)$$

و نیز برای هرنماد تابعیِ $f \in \mathcal{L}$ داشته باشیم

$$F\Big(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\Big) = f^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big)$$



لم ۱. اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ایزومرف باشند، آنگاه برای هر ترمِ $t(x_1, \dots, x_n)$ و هر چندتائیِ $a_1, \dots, a_n \in M$ داریم

$$F\Big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\Big) = t_1^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big).$$

اثبات. این ادعا را (با توجه به خوانش یکتای ترمها) با استقراء روی ساخت ترمها ثابت می‌کنیم. اگر ترم t یکی از متغیرهای x_i باشد آنگاه $t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = a_i$. پس

$$F\Big(t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\Big) = F(a_i) = t^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big).$$

اگر ترم t یک ثابت c باشد آن‌گاه

$$c^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = c^{\mathfrak{M}}$$

و بنا به تعریف ایزومرفیسم

$$F(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big).$$

اگر حکم مورد نظر ما برای ترم‌های $t_1, \dots, t_n$ درست باشد، یعنی اگر بدانیم که

$$F\Big(t_i^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\Big) = t_i^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big),$$

می‌خواهیم آن را برای ترمی به صورتِ $g(t_1, \dots, t_n)$ ثابت کنیم. فرض کنید که

$$t = \overset{\text{یک نماد تابعی در زبان}}{\overset{\uparrow}{g}} \big(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_n(x_1, \dots, x_n)\big)$$

یک ترم باشد. طبق تعریفِ تعبیرِ ترمها داریم:

$$t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = g^{\mathfrak{M}}\Big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\Big)$$

F یک ایزومرفیسم است پس

$$F\Big(g^{\mathfrak{M}}\big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\big)\Big) = g^{\mathfrak{N}}\Big(F\big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\big), \dots, F\big(t_n^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\big)\Big) =$$

$$g^{\mathfrak{N}}\Bigg(t_1^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big), \dots, t_n^{\mathfrak{N}}\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big)\Bigg) = t^{\mathfrak{N}}\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big).$$

$\square$

لم ۲. اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ایزومرف باشند آن‌گاه برای هر فرمولِ $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ و برای هر چندتایی $a_1, \dots, a_n$ از عناصر M داریم

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{N} \models \varphi\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big)$$

اثبات. قضیه را با استقراء روی ساخت فرمول φ ثابت می‌کنیم. فرض کنید فرمولِ φ به صورت $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$ باشد. فرض کنید

$$\mathfrak{M} \models t_1(a_1, \dots, a_n) = t_2(a_1, \dots, a_n)$$

در این صورت داریم

$$t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n).$$

می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\mathfrak{N} \models t_1\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big) = t_2\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big)$$

یعنی می‌خواهیم نشان دهیم که

$$t_1^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big) = t_2^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big).$$

از این که

$$t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n).$$

و اینکه $F : M \to N$ یک تابع است نتیجه می‌گیریم که

$$F\Big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\Big) = F\Big(t_2^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\Big)$$

در لم قبلی ثابت کردیم که

$$F\Big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)\Big)=t_1^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1),\dots,F(a_n)\Big)$$
$$F\Big(t_2^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)\Big)=t_2^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1),\dots,F(a_n)\Big)$$

پس اثبات قضیه در این حالت به پایان می‌رسد.

تکمیل اثبات این قضیه را به کلاس تمرین واگذار می‌کنم. $\square$

تعریف ۳. فرض کنید $\mathfrak{N}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد. فرض کنید $\mathfrak{M}$ نیز یک $\mathcal{L}$ساختار باشد و $M\subseteq N$. می‌گوییم $\mathfrak{M}$ یک **زیرساختار** از $\mathfrak{N}$ است هرگاه روابط، توابع و ثوابت در M تحدید روابط، توابع و ثوابت $\mathfrak{N}$ باشند؛ یعنی

$$c^{\mathfrak{M}}=c^{\mathfrak{N}}$$

و برای هر $a_1,\dots,a_n\in M$ داشته باشیم

$$R^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)\iff R^{\mathfrak{N}}(a_1,\dots,a_n)$$

به بیان دیگر

$$R^{\mathfrak{M}}=R^{\mathfrak{N}}|_M$$

و برای هر $a_1,\dots,a_n\in M$ داشته باشیم

$$f^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)=a_{n+1}\iff f^{\mathfrak{N}}(a_1,\dots,a_n)=a_{n+1}$$

به بیان دیگر

$$f^{\mathfrak{M}}=f^{\mathfrak{N}}|_M$$

تمرین ۱.

۱. فرض کنید $\mathfrak{N}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد و $\{\mathfrak{N}_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرساختارهای $\mathfrak{N}$ باشد. نشان دهید $\bigcap\mathfrak{N}_i$ (خودتان این ساختار را معنی کنید، یعنی جهان آن و تعابیر زبان در آن را معرفی کنید) یک زیرساختار از $\mathfrak{N}$ است.

۲. اگر $S\subseteq N$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد به اشتراک همه‌ی زیرساختارهای $\mathfrak{N}$ که شامل S هستند، **زیرساختار تولید شده توسط** S گفته می‌شود و آن را با $\langle S\rangle_{\mathfrak{N}}$ نشان می‌دهند. نشان دهید که جهانِ $\langle S\rangle_{\mathfrak{N}}$ به صورت زیر است

$$\langle S\rangle_{\mathfrak{N}}=\{t^{\mathfrak{N}}(a_1,\dots,a_n)|a_1,\dots,a_n\in S \text{ و } \mathcal{L}\text{ترم است} \text{ یک } t\}$$

مثال ۴. فرض کنید که G یک گروه باشد و $a,b\in G$. آنگاه گروه تولید شده توسط عنصر a به صورت زیر است:

$$\langle a\rangle_G=\{a^n|n\in\mathbb{Z}\}$$

و گروه تولید شده توسط عناصرِ a,b به صورت زیر است:

$$\langle a,b\rangle_G=\{a^nb^m|m,n\in\mathbb{Z}\}$$

مثال ۵. اگر K یک فضای برداری باشد و $a, b \in K$ آنگاه فضای برداری تولید شده توسط a به صورت زیر است:

$$\langle a\rangle_K = \{na | n \in \mathbb{Z}\}$$

فضای برداری تولید شده توسط a, b به صورت زیر است:

$$\langle a, b\rangle_K = \{ma + nb | m, n, \in \mathbb{Z}\}$$

به نظر شما یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی را در چه زبانی می‌توان اصلبندی کرد؟

تمرین ۲. از لمِ ۲ نتیجه می‌شود که اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو Lساختارِ ایزومرف باشند، آنگاه برای هر جمله‌ی ϕ در زبانِ L داریم

$$\mathfrak{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi.$$

نشان دهید که عکسِ این گفته برای L ساختارهای متناهی درست است. یعنی اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو Lساختار با جهانهای متناهی باشند و بدانیم که برای هر Lجمله‌ی ϕ داریم

$$\mathfrak{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi.$$

آنگاه $\mathfrak{M}$ با $\mathfrak{N}$ ایزومرف است.

تمرین ۳. فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشد. به نگاشتِ یک به یک و پوشای $F : M \to M$ یک اتومرفیسم می‌گوییم هرگاه یک ایزومرفیسم میان $\mathfrak{M}$ و خودش باشد. فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک Lساختار با جهانی متناهی باشد. نشان دهید که تعداد Lساختارهای ایزومرف با $\mathfrak{M}$ که دارای جهانِ M هستند برابر است با

$$\frac{\text{تعداد جایگشتهای}\ M}{\text{تعداد اتومرفیسمهای}\ \mathfrak{M}}$$

تمرین ۴.

- یک جمله‌ی ϕ در زبان $L = \{\leq\}$ مثال بزنید که $(\mathbb{Q}, \leq) \models \phi$ ولی $(\mathbb{N}, \leq) \not\models \phi$.
- یک جمله‌ی ϕ در زبانِ $L = \{+, \cdot\}$ مثال بزنید که $(\mathbb{R}, +, .) \not\models \phi$ اما $(\mathbb{C}, +, .) \models \phi$. آیا این دو ساختار می‌توانند با هم ایزومرف باشند؟

۱.۱ درستی

در درسهای گذشته با مفهوم درست بودن یک فرمول در یک ساختار تحت یک ارزیابی از متغیرها آشنا شدیم. درست بودن یک فرمول در یک ساختار، به ارزیابی متغیرهای آن بستگی داشت. وقتی فرمولِ ϕ در ساختارِ $\mathfrak{M}$ با ارزیابیِ β درست بود، می‌نوشتیم: $\mathfrak{M} \models \phi[\beta]$. نیز نمادها را بعداً ساده‌تر کردیم و گفتیم که از آنجا که درستی فرمول تنها به متغیرهای آزاد آن بستگی دارد، اگر $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ یک فرمول باشد و بدانیم که $\beta(x_i) = a_i$ آنگاه به جای $\mathfrak{M} \models \phi[\beta]$ می‌نویسیم $\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$. نیز گفتیم که اگر ϕ هیچ متغیر آزادی نداشته باشد، آنگاه درستی آن به نگاشتهای ارزیابی (یا به جایگذاری متغیرها با مقادیر) بستگی ندارد.

فرمولِ $x = x$ را در (در یک زبانِ دلخواهِ L) نظر بگیرید. این فرمول، در هر L ساختاری و با هر ارزیابی‌ای که برای متغیرِ آن داشته باشیم، درست است. چنین فرمولی را همواره درست می‌خوانیم.

تعریف ۶. $\mathcal{L}$فرمول φ را **همواره‌درست** می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ و به ازای هر تابعِ تعبیرِ $\beta : \{v_{\circ}, \ldots\} \to M$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\beta]$$

تعریف بالا را با نمادهای ساده‌سازی شده می‌توان بدین صورت بیان کرد: $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ همواره درست است هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ و هر چندتایی $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

به بیان دیگر فرمول $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ همواره درست است هرگاه جمله‌ی $\forall x_1, \ldots, x_n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ همواره درست باشد؛ یعنی در هر Lساختارِ $\mathfrak{M}$ داشته باشیم:

$$\mathfrak{M} \models \forall x_1, \ldots, x_n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

برای این که درک بهتری نسبت به فرمولهای همواره درست داشته باشید مثال پیش رو را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنم که جمله‌ی زیر همواره درست است:

در هر جامعه‌ی انسانی یک نفر هست که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند.

برای بررسی درست بودن این فرمول، باید درست بودن آن را در هر جامعه‌ی دلخواهی بررسی کنیم. فرض کنید M یک جامعه‌ی انسانی دلخواه باشد. در آنجا از دو حالت خارج نیست: یا همه کلاه دارند، یا حداقل یک نفر هست که کلاه ندارد. اگر همه کلاه داشته باشند، جمله‌ی بالا در آن جامعه درست است. اگر یک نفر (مثلا به نام علی) کلاه نداشته باشد باز هم جمله‌ی بالا درست است. چون، به انتقای مقدم، اگر علی کلاه می‌داشت همه کلاه می‌داشتند!

بیایید جمله‌ی بالا را در یک زبان مناسب فرمولبندی کنیم. قرار دهید

$$L = \{\overset{\overset{\text{Hat}}{\uparrow}}{H}(x)\}$$

نماد محمولیِ تک موضعیِ $H(x)$ قرار است به این معنی باشد که x کلاه دارد. جمله‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\exists x \quad (H(x) \to \forall y \quad H(y)).$$

دقت کنید که جمله‌ی بالا در هر ساختاری و با هر «برداشتی» که از H داشته باشیم درست است. فرض کنید جهان ما، مجموعه‌ی گوسفندان یک گله باشند و $H(x)$ بیانگر این باشد که گوسفندی علامت‌گذاری شده است. در آن صورت، معنای جمله‌ی بالا در گله‌ی گوسفند ما این است که یک گوسفند پیدا می‌شود که اگر او علامت‌گذاری شده باشد، همه‌ی گوسفندان علامت‌گذاری شده‌اند.

دقت کنید که جمله‌ی مورد نظر ما، در جهان مختلف می‌تواند «معانی» متفاوت داشته باشد ولی در همه‌ی آنها درست است! یکی از علل انتخاب روش صورتگرائی برای ریاضیات همین است. وقتی من در ریاضی قضیه‌ای درباره‌ی مجموعه‌ها به شما می‌گویم، نمی‌دانم در ذهن شما چه تصوری از مجموعه وجود دارد؛ ولی روشهای استدلال به گونه‌ای طراحی شده‌اند که اگر من چیزی درباره‌ی مجموعه‌ها «اثبات» کنم، آن جمله با تصور ذهنی هر کسی درست در می‌آید؛ فارغ از این که افراد، تجسم‌های متفاوتی از یک حقیقت می‌توانند داشته باشند.

در لم زیر بررسی کرده‌ایم که برای تعریف همواره درست بودن یک فرمول، داشتن یک زبان که حداقل علائم را داشته باشد، کافی است.

لم ۷. فرض کنید $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ دو زبان باشند. اگر $\mathcal{L}$فرمولِ φ همواره درست [1] باشد آنگاه φ به عنوان یک $\mathcal{K}$فرمول هم همواره درست است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{L}$فرمولِ $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ در هر $\mathcal{L}$ساختار درست باشد.

هدف. اثبات اینکه $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ در هر $\mathcal{K}$ساختار نیز درست است. فرض کنید $\mathfrak{N}$ یک $\mathcal{K}$ساختار باشد. فرض کنید $\mathfrak{M}$ ساختاری باشد که از تحدید $\mathfrak{N}$ به زبان $\mathcal{L}$ به دست می‌آید. (مثال. $(\mathbb{N}, +)$ تحدیدی از $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ است.) آنگاه

$$\mathfrak{M} \models \forall x_1, \dots, x_n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

از آنجا که $M = N$ داریم

$$\mathfrak{N} \models \forall x_1, \dots, x_n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

$\square$

از آنجا که همواره درست بودن به زبان بستگی چندانی ندارد، در نمادگذاری زیر زبان را نگنجانده‌ایم:

نمادگذاری ۸. اگر $\mathcal{L}$فرمولِ φ همواره درست باشد، می‌نویسیم

$$\models \varphi.$$

تمرین ۵ (اردشیر)**.** نشان دهید اگر برای هر $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \psi$$

آنگاه

$$\models \varphi \Rightarrow \models \psi$$

نشان دهید که عکس این گفته درست نیست؛ یعنی از $\models \varphi \Rightarrow \models \psi$ نتیجه نمی‌شود که برای هر ساختارِ $\mathfrak{M}$ اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ آنگاه $\mathfrak{M} \models \psi$. به بیان دیگر از $\models \varphi \Rightarrow \models \psi$ نتیجه نمی‌توان گرفت که $\models (\varphi \to \psi)$.

برخی از فرمولهای همواره درست، از تاتولوژیهای منطق گزاره‌ها ناشی می‌شوند.

تعریف ۹. فرمول φ را **تاتولوژی** می‌نامیم هرگاه فرمول φ به صورت $f(\psi_1, \dots, \psi_n)$ باشد که $f(p_1, \dots, p_n)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها باشد و $\psi_1, \dots, \psi_n$ فرمولهای مرتبه‌ی اول باشند.

برای مثال

$$\text{(۱)} \quad \varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi$$

یک تاتولوژی در منطق مرتبه‌ی اول است که از تاتولوژی زیر در منطق گزاره‌ها به دست آمده است.

$$(p \wedge (p \to q) \to q)$$

همچنین فرمول زیر یک تاتولوژی درمنطق مرتبه‌ی اول است.

$$\text{(۲)} \quad \varphi \vee \neg\varphi.$$

[1] logically valid