$P_1 \wedge \neg P_2$

P_1	P_2	$\neg P_2$	$P_1 \wedge \neg P_2$
1	1	0	0
1	0	1	1

$\mu : M \to \{0,1\}$

گزاره‌ها

اتمی

<u>یادآوری</u>

هر گزاره‌ای را در منطق گزاره‌ای می‌توان به صورت $f(p_1, \dots, p_n)$ تصور کرد که در آن $p_1, \dots, p_n$ گزاره‌های اتمی هستند.

$(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$

P_1	P_2	P_3	$f(P_1, P_2, P_3)$
0	0	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
⋮			

(۲

جدول ارزش

برای هر تابع $F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ یک گزاره $f(p_1,\dots,p_n)$ چنان یافت می‌شود که

برای هر ارزیابی μ داریم:

$$\mu(f(p_1,\dots,p_n)) = F(\mu(p_1),\dots,\mu(p_n))$$

مثال

P_1	P_2	P_3	$f(P_1, P_2, P_3)$
0	0	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0

اثبات

قرار دهید

$$\bigvee_{\{i \,\mid\, \text{ارزش سطر } i \text{ برابر با } 1\}} \bigwedge Q_{ij}$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} P_j & \text{اگر } \mu(P_j)=1 \\ \neg P_j & \text{اگر } \mu(P_j)=0 \end{cases}$$

پس گزاره $f(p_1, p_2, p_3)$ در مثال

قبل می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee$$

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$$

توجه: بیان دیگر لم فوق به صورت زیر است: مجموعهٔ نمادهای منطقی

$\{\wedge, \vee, \neg\}$ کامل است

(یعنی هر جدول ارزشی را می‌تواند تولید کند.)

تمرین
نشان دهید مجموعه $\{\wedge, \neg\}$ کامل است.

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

تمرین
ادات دوتایی | (ادات شفر) را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$p \mid q := \neg(p \wedge q)$$

نشان دهید ادات شفر کامل است.

تمرین
نشان دهید ادات $\downarrow$ کامل است.

$$p \downarrow q := \neg(p \vee q)$$

(جدول ارزش آن را رسم کنید)

تمرین: نشان دهید تنها ادات دوتایی کامل ↓ , | هستند

$$p \vee \neg p$$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
		1
		1
		1

$$p \to (q \to p)$$

تعریف

(1) گزاره $f(p_1,\dots,p_n)$ را یک

تاتولوژی

(همواره درست) می‌خوانیم هرگاه. برای هر تابع ارزیابی $\mu : M \to \{0,1\}$ داشته باشیم

$$\mu(f(p_1,\dots,p_n)) = 1$$

(2) دو گزاره ψ ، φ را معادل می‌خوانیم و می‌نویسیم $\varphi \equiv \psi$ ، هرگاه $\varphi \leftrightarrow \psi$ یک تاتولوژی باشد.

(به بیان دیگر جدول ارزش φ ، ψ یکسان باشند)

③ گزاره $f(p_1,\dots,p_n)$ را ارضا شدنی (Satisfiable) می‌خوانیم

هرگاه یک تابع ارزیابی بر p مثل $\mu : M \to \{0,1\}$ موجود باشد

به طوری که $\mu(f(p_1,\dots,p_n)) = 1$.

④ گزاره $f(p_1,\dots,p_n)$ را تناقض (تناقض آمیز) (Contradiction) می‌خوانیم

هرگاه نقیض آن تاتولوژی باشد

مثال

$p \wedge \neg p$

مثال (چند تا توتولوژی)

① $A \to (B \to A)$

② $A \wedge B \to A$

③ $A \to A \vee B$

④ $\neg\neg A \leftrightarrow A$

⑤ $A \to (B \to C) \leftrightarrow (A \to B) \to (A \to C)$

توجه

رابطه $\equiv$ روی مجموعه PR

توجه کنید که $\equiv$ یک رابطه هم‌ارزی است.

$$\left(PR/\equiv\ ,\ \wedge,\ \vee,\ \neg,\ \underbrace{\overset{0}{[p\wedge\neg p]}}_{\perp},\ \overset{1}{[p\vee\neg p]}\right)$$

(مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی)

تشکیل یک جبر بولی می‌دهد (لیندن باوم - تارسکی)

6) $A \to (B \to A\wedge B)$

7) $(A\to B) \to \big((C\to B) \to (A\vee C\to B)\big)$

8) $\big((A\to B)\wedge(\neg A\to B)\big) \to B$

9) $(A\vee B\to C) \to (A\to C\wedge B\to C)$

توجه

بررسی این که آیا گزاره $f(p_1, \dots, p_n)$

تاتولوژی است یا خیر نیاز به یک جدول ارزش

با 2^n سطر دارد. (در واقع سوال این که

آیا الگوریتم ساده‌تری برای بررسی تاتولوژی بودن

معادل

وجود دارد، $f(p_1, \dots, p_n)$

با مسئله $P = NP$ در علوم کامپیوتر است

آیا هر مسئله‌ای که چک کردن درستی جواب

آن آسان است، آسان است)

(Stephen Cook - The importance of P vs NP question)

قضیه (فشردگی)

Compactness

فرض کنید Σ یک مجموعه نامتناهی

از گزاره ها در منطق گزاره ها باشد

فرض کنید برای هر تعداد متناهی گزاره

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \Sigma$

یک تابع ارزیابی $\mu : M \to \{0,1\}$ موجود باشد

بطوری

$$\mu(\varphi_1)=\mu(\varphi_2)=\dots$$
$$=\mu(\varphi_n)=1$$

آن گاه یک تابع ارزیابی $\mu' : M \to \{0,1\}$ موجود است بطوری که برای هر $\varphi \in \Sigma$

$\mu'(\varphi)=1$.

(ادامه)

(پایان معادل)

تناقض همراه، از بخش متناهی ناشی (می‌شود)

توجه

$\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$

$\varphi : \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \dots$ گزاره نیست.

اما در قضیه فشردگی در واقع یک گزاره فرضی مانند φ مد نظر ماست.

تعریف

می‌گوییم مجموعه Σ از گزاره‌ها متناهیاً ارضاپذیر است هرگاه هر تعداد متناهی از گزاره‌های موجود در آن ارضاپذیر باشد؛

یعنی به هر $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Sigma$ ارزیابی μ وجود داشته باشد که

$$\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_2) = \dots = \mu(\varphi_n) = 1$$

قضیه (فشردگی)

Compactness

هر مجموعه متناهیاً ارضاپذیر از گزاره‌ها، ارضاپذیر است.

اثبات

فرض کنید Σ یک مجموعه‌ی متناهیاً سازگار از گزاره‌ها باشد.

بنا به لم زرن یک مجموعه‌ی Σ' $\Sigma \subseteq \Sigma'$ موجود است به طوری که

Σ' متناهیاً ارضاپذیر است

Σ' ماکزیمال است (یعنی هیچ مجموعه‌ی متناهیاً ارضاپذیری مانند Σ'' وجود ندارد به طوری که $\Sigma' \subsetneq \Sigma''$)

لم زرن

فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب
جزئی باشد (درخت باشد). فرض کنید که هر زنجیر در A
دارای یک کران بالا در A باشد. آن گاه A دارای
یک عنصر ماکزیمال است.

نتیجه (لم زرن)

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک مجموعه از مجموعه ها باشد که تحت اجتماع زنجیرها بسته است.

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \quad \in \mathcal{A}$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$$

آن گاه $\mathcal{A}$ شامل یک مجموعهٔ ماکزیمال است.