۱ جلسه‌ی دوم، جبرهای بولی و شروع منطق گزاره‌ها

پیش از شروع درس، دوباره‌ی مهمترین صحبتهای جلسه‌ی اول را مرور می‌کنم.

۱. قضیه‌ی تمامیت گودل [۱]: در منطق مرتبه‌ی اول هر آنچه که درست باشد [۲] قابل اثبات است.

۲. قضیه‌ی ناتمامیت اول گودل: الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند که آیا یک جمله‌ی داده شده در مورد اعداد طبیعی درست است یا غلط (مرتبط با مسئله‌ی توقف [۳])

۳. قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل [۴] : هر اصل‌بندی‌ای (کوچکی) که برای اعداد طبیعی در نظر بگیریم ناکامل است؛ یعنی جمله‌ای درست درباره‌ی اعداد طبیعی پیدا می‌شود که از این اصل‌بندی نتیجه نشود.

درس منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها را با سؤال زیر می‌آغازم.

تمرین ۱. آیا جمله‌ی زیر در زبان فارسی درست است؟
«کوچکترین عدد طبیعی‌ای که نتوان آن را با کمتر از ۵۰ کلمه در فرهنگ لغت دهخدا توصیف کرد وجود دارد.»

دقت کنید که در صورتی که جمله‌ی بالا درست باشد، غلط است. زیرا عبارتِ بالا خودْ یک وصف است برای کوچکترین عددی که نتوان آن را وصف کرد! بررسی کنید که جمله‌ی بالا در صورت غلط بودن، درست است!

هدف از تمرین بالا (که البته ایده‌ای برای اثبات قضیه‌ی ناتمامیت نیز هست) نشان دادن این است که خطرِ در معرض تناقض قرار گرفتن، هر منطقی را تهدید می‌کند!

تعریف ۱ (جبر بولی [۵]). مجموعه‌ی B را به همراه عملگرهای

$$\sqcap : B \times B \to B$$

$$\sqcup : B \times B \to B$$

$$-^c : B \to B$$

و دو عنصرِ مشخصِ $۰, ۱ \in B$ یک **جبر بولی** می‌نامیم، و می‌گوییم $(B, \sqcap, \sqcup, ^c, ۰, ۱)$ یک جبر بولی است، هرگاه ویژگی‌های زیر برآورده شوند:

۱. $a \sqcap ۰ = ۰$

۲. $a \sqcup ۰ = a$

۳. $a \sqcap ۱ = a$

۴. $a \sqcup ۱ = ۱$

[۱] Gödel

[۲] عبارتهای «درست بودن» و «قابل اثبات بودن» نیاز به تعریف دارند.

[۳] Halting Problem

[۴] second incompleteness theorem

[۵] Boolean Algebra

۵. $a \sqcap a = a$

۶. $a \sqcup a = a$

۷. $a \sqcap b = b \sqcap a$

۸. $a \sqcup b = b \sqcup a$

۹. $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$

۱۰. $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$

۱۱. $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$

۱۲. $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$

۱۳. $a \sqcap a^c = ۰$

۱۴. $a \sqcup a^c = ۱$

مثال ۲. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، آنگاه $\left(P(X), \cap, \cup, ^c, ۰, X\right)$ یک جبر بولی است. در این جا منظور از $\cap$ و $\cup$ به ترتیب اشتراک و اجتماع مجموعه‌ها و منظور از ^{c} عملگر متمم‌گیری است. نیز منظور از $P(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی X است.

مثال ۳. روی مجموعه‌ی $\{۰, ۱\}$ اعمال زیر را در نظر بگیرید:

$$a \sqcap b = \min\{a, b\}$$

$$a \sqcup b = \max\{a, b\}$$

$$۰^c = ۱$$

$$۱^c = ۰$$

جبر بولیِ این مثال، کوچکترین جبر بولیِ ممکن است.

تمرین ۲. فرض کنید X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد. قرار دهید

$$B = \{Y \subseteq X | \text{متناهی است } Y^c \text{ متناهی است یا } Y\}$$

نشان دهید که $\left(B, \cap, \cup, ^c, ۰, X\right)$ یک جبر بولی است.

توجه ۴. هر جبر بولی با یک جبر بولی مجموعه‌ای (یعنی یک جبر بولی مانند مثال ۲) ایزومرف است. در صورت علاقه به دیدن اثبات این قضیه و کسب اطلاعات بیشتر درباره‌ی جبرهای بولی، کتاب Handbook of Boolean Algebra را به شما پیشنهاد می‌کنم.

تمرین ۳. نشان دهید که در تعریف جبر بولی می‌توان قسمت $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$ را حذف کرد؛ یعنی نشان دهید که این قسمت از تعریف، از قسمتهای دیگر نتیجه می‌شود.

تمرین ۴. نشان دهید که در یک جبر بولی وارون هر عنصر یکتاست، یعنی اگر $a \sqcap b = 0$ و $a \sqcup b = 1$ آنگاه $b = a^c$.

تمرین ۵. نشان دهید که در یک جبر بولی قوانین دِمُرگان برقرارند.

$$(a \sqcap b)^c = a^c \sqcup b^c$$

$$(a \sqcup b)^c = a^c \sqcap b^c$$

$$(a^c)^c = a$$

یک مثال مهم از جبرهای بولی، جبر لیندن‌باوْم‌ـ تارسکی [۶] است که در ادامه‌ی درس بدان خواهیم پرداخت. [۷]

۱.۱ منطق گزاره‌ها [۸]

برای معرفی هر منطقی، معرفی دو جزو ضروری است:

۱. صرف آن منطق [۹] (نمادها یا سینتکس)

۲. نحو آن منطق [۱۰] (معانی)

یعنی نخست باید «دستور یک زبان» و نحوه‌ی کلمه‌سازی و جمله‌سازی در آن زبان بیان شود، و سپس باید درباره‌ی «معنای جملات» صحبت شود. همچنین ضروری است که رابطه‌ای میان دنیای علائم و دنیای معانی برقرار شود. به بیان دیگر باید «صورت و معنی» منطق مورد نظر مشخص شود.

۲.۱ خروج از بحث، بحث صورت و معنی

در اشعار فارسی بارها عبارتهای «صورت و معنی» آمده است. برای نمونه در گلستان سعدی چنین آمده است:

> یکی را از مشایخ شام پرسیدند از حقیقت تصوف؛گفت پیش از این طایفه‌ای در جهان بودند به صورت پریشان و به معنی جمع؛ اکنون جماعتی هستند به صورت جمع و به معنا پریشان!

نیز در غزلی از سعدی آمده است که:

دل عارفان ربودند و قرار پارسایان

همه شاهدان به صورت، تو به صورت و معانی

ادامه‌ی درس:

زبان منطق گزاره‌ها از اجزای زیر تشکیل شده است:

---

[۶] Lindenbaum-Tarski

[۷] کسانی که توپولوژی خوانده‌اند: نشان دهید مجموعه‌ی مجموعه‌های بازبسته در یک فضای توپولوژیک، با همان اعمال اجتماع و اشتراک و متمم‌گیری، یک جبر بولی تشکیل می‌دهد.

[۸] propositional logic

[۹] syntax

[۱۰] semantic

۱. یک مجموعه‌ی $M = \{p_0, p_1, \ldots\}$ از متغیرها (یا گزاره‌های اتمی)

۲. علائم منطقیِ $\neg, \wedge$ (نقیض و عطف)

مجموعه‌ی M از گزاره‌های اتمی را معمولاً شمارا در نظر می‌گیریم؛ اما ناشمارا در نظر گرفتن آن خللی به بحث وارد نمی‌کند.

تعریف ۵ (نادقیق)**.** یک فرمول (جمله) در منطق گزاره‌ها از اِعمالِ علائم $\neg, \wedge$ به گزاره‌های اتمیِ $p_0, p_1, \ldots$ بدست می‌آید.

تعریف بالا کاملاً دقیق برای ما مشخص نمی‌کند که چه چیزهای فرمول به حساب می‌آیند و چه چیزهایی فرمول نیستند. عموماً در این درس، از تعاریف استقرائی (مانند تعریف زیر) برای فرمولها استفاده می‌کنیم. **برای ادامه‌ی درس یک مجموعه از گزاره‌های اتمی را ثابت در نظر گرفته‌ایم.**

تعریف ۶ (مجموعه‌ی گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها)**.** مجموعه‌ی فرمولها (گزاره‌ها) در منطق گزاره‌ها، کوچکترین مجموعه‌ی PR است که در دو شرط زیر صدق کند.

۱. برای هر گزاره‌ی اتمی $p \in M$ داشته باشیم

$$p \in PR$$

۲. اگر $\phi \in PR$ آنگاه $(\neg\phi) \in PR$

۳. اگر $\phi, \psi \in PR$ آنگاه $(\phi \wedge \psi) \in PR$

مثال ۷. عبارت $p_1 \wedge \big((\neg p_2) \wedge p_3\big)$ یک فرمول در منطق گزاره‌ها است (چرا؟)

مثال ۸. نشان دهید که $\phi = p \wedge \neg$ یک فرمول در منطق گزاره‌ها نیست.

اثبات. ادعا می‌کنیم که $PR - \{\phi\} = PR$ (در این صورت معلوم می‌شود که $\phi \notin PR$.) نخست دقت کنید که برای هر گزاره‌ی اتمیِ $p \in M$ داریم $p \in PR - \{\phi\}$. همچنین دقت کنید که اگر $\psi \in PR - \{\phi\}$ آنگاه $(\neg\psi) \in PR - \{\phi\}$ و اگر $\psi_1, \psi_2 \in PR - \{\phi\}$ آنگاه $(\psi_1 \wedge \psi_2) \in PR - \{\phi\}$. پس مجموعه‌ی $PR - \{\phi\}$ همه‌ی ویژگی‌هایی که در تعریفِ ۶ بدانها اشاره شده است داراست. از طرفی در همان تعریف گفته‌ایم که PR کوچکترین مجموعه‌ی دارای این ویژگی‌هاست پس $PR \subseteq PR - \{\phi\}$ یعنی $\phi \notin PR$. □

توجه ۹. در منطق گزاره‌ها از نمادهای کمکیِ $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

۱. $p \rightarrow q := (\neg p) \vee q$

۲. $p \vee q := \neg((\neg p) \wedge (\neg q))$

۳. $p \leftrightarrow q := (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

۳.۱ معناشناسی منطق گزاره‌ها

در بخش قبل درباره‌ی نحوه‌ی جمله‌سازی در منطق گزاره‌ها سخن گفتیم. در این بخش، به «معناشناسی» منطق گزاره‌ها می‌پردازیم.

معناشناسی منطق گزاره‌ها با استفاده از **توابع ارزیابی** [۱۱] صورت می‌پذیرد. هر تابع ارزیابی، ارزشی از میان صفر و یک به جملات اتمی می‌بخشد.

تعریف ۱۰ (تابع ارزیابی)**.** به هر تابعِ $\mu : M \to \{۰, ۱\}$ یک تابع ارزیابی می‌گوییم.

توجه ۱۱. هر تابع ارزیابی $\mu : M \to \{۰, ۱\}$ را می‌توان به یک تابعِ ارزیابی $\mu : PR(M) \to \{۰, ۱\}$ به طریق زیر گسترش داد.

$$\mu(\phi \wedge \psi) = \mu(\phi) \wedge \mu(\psi)$$

$$\mu(\neg\phi) = \neg\mu(\phi)$$

که در آن

$\wedge$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

$\neg$	۰	۱
	۱	۰

دقت کنید که مقادیرِ μ در جبر بولیِ $\{۰, ۱\}$ هستند و بنابراین $\mu(\phi) \wedge \mu(\psi)$ و $\neg\mu(\phi)$ مطابق مثالِ ۳ محاسبه می‌شوند.

تمرین ۶. جدول ارزش هر کدام از گزاره‌های زیر را بکشید:

۱. $p \vee q$

۲. $p \wedge q$،

۳. $(\neg p)$

۴. $p \leftrightarrow q$

۵. $p \to q$

۶. $p \to (q \to p)$

۷. $(p \to q) \wedge (\neg p \to q) \to q$

۸. $(p \vee q \to r) \to (p \to r \wedge q \to r)$

،،،،،،،

[۱۱] evaluation map

سوال ۱۲. فرض کنید یک جدول ارزش دلخواه شامل گزاره‌های $p_1, \ldots, p_n$ داشته باشیم. آیا می‌توانید یک گزاره بر حسب $p_1, \ldots, p_n$ مثال بزنید که دقیقاً همان جدول ارزش را داشته باشد؟ برای مثال گزاره‌ی $f(p, q)$ را در زیر حدس بزنید.

p	q	$f(p,q)$
۱	۱	۱
۰	۰	۰
۰	۱	۰
۱	۰	۱

خودتان یک جدول ارزش برای یک گزاره‌ی شامل متغیرهای p, q, r بکشید و گزاره‌ای که آن جدول ارزش را دارد، حدس بزنید.