۱ جلسه‌ی چهارم، یک کاربرد از قضیه‌ی فشردگی و صورتهای نُرمال

۱.۱ یک کاربرد از قضیه‌ی فشردگی

یادآوری می‌کنم که بنا به قضیه‌ی فشردگی درمنطق گزاره‌ها، اگر Σ یک مجموعه‌ی نامتناهی از گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها باشد و برای هر تعداد متناهی گزاره‌ی $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Sigma$ یک نگاشت ارزیابی $\mu : M \to \{0, 1\}$ موجود باشد به طوری‌که $\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_2) = ... = \mu(\varphi_n) = 1$ آن‌گاه Σ سازگار است؛ یعنی ارزیابی $\mu' : M \to \{0, 1\}$ موجود است که برای هر $\varphi \in \Sigma$ داریم $\mu(\varphi) = 1$. به بیان دیگر، اگر Σ یک مجموعه‌ی متناقض از گزاره‌ها باشد، آن‌گاه تناقضْ از بخشی متناهی از Σ ناشی می‌شود. (چرا این بیان با بیان قبلی معادل است؟)

تمرین ۱. (اردشیر) فرض کنید $\{A_1, A_2, ...\}$ مجموعه‌ای نامتناهی از گزاره‌ها باشد. فرض کنید برای هر تابع ارزش μ یک گزاره‌ی A_m موجود باشد به طوری‌که $\mu(A_n) = 1$. نشان دهید که $m \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری‌که $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_m$ تاتولوژی است.

در ادامه‌ی درس، بنا به درخواست شما کاربردی از قضیه‌ی فشردگی را بیان می‌کنم. فرض کنید G یک گراف (ساده [1])باشد. می‌گوییم گراف G یک گراف N رنگ‌پذیر است هر گاه بتوان به هر رأس آن یک رنگ از میان رنگ‌های {رنگ۱، رنگ۲،...،رنگN} نسبت داد به طوری‌که هیچ دو رأس مجاور همرنگ نباشند. در زیر این قضیه را با استفاده از فشردگی ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۱. (اردوش [2]) فرض کنید G یک گراف نامتناهی باشد. آنگاه گراف G با فرض N رنگ‌پذیر بودن هر زیرگراف متناهی از آن، N رنگ‌پذیر است.

اثبات. قضیه را برای وقتی که $N = 4$ ثابت کرده‌ایم، ولی اثبات در حالت کلی نیز مشابه همین است. فرض کنید G یک گراف نامتناهی و هر زیرگراف متناهی از آن ۴رنگ‌پذیر باشد. مجموعه‌ی رنگهای زیر را در نظر بگیرید:

{سفید،مشکی،زرد،سبز}

وضعیت گراف G را به همراه امکان ۴رنگ‌پذیری آن در مجموعه‌های زیر از گزاره‌ها شرح می‌دهیم.

مجموعه‌های زیر از گزاره‌ها را در نظر بگیرید:

$\Sigma_1 =$ {رأس g_1 به رأس g_2 وصل است. | در گراف G این‌گونه باشد.}

$\Sigma_2 =$ {(رأس g سفید است)$\vee$(رأس g زرداست)$\vee$(رأس g مشکی است)$\vee$(رأس g سبز است) | $g \in G$}

$\Sigma_3 =$ { اگر g_1 سبز باشد آنگاه g_2 سبز نباشد $\wedge$

اگر g_1 سفید باشد آنگاه g_2 سفید نباشد $\wedge$

اگر g_1 مشکی باشد آنگاه g_2 مشکی نباشد $\wedge$

اگر g_1 زرد باشد آنگاه g_2 زرد نباشد $\wedge$

| g_1 به g_2 وصل است.}

$\Sigma_4 =$ {(g همزمان سفید و زرد نیست.) $\wedge$ (g همزمان سفید و مشکی نیست.) $\wedge \ldots \mid g \in G$}

[1] یعنی جهتدار نباشد

[2] Erdös

دقت کنید که اگر $\Sigma = \Sigma_۱ \cup \Sigma_۲ \cup \Sigma_۳ \cup \Sigma_۴$ سازگار باشد آن‌گاه گراف G یک گرافِ ۴ رنگ‌پذیر است.

بنا به قضیه‌ی فشردگی برای اثبات سازگاریِ Σ کافی است نشان دهیم هر زیرمجموعه‌ی متناهی از آن سازگار است.

فرض کنید $\Delta \subseteq \Sigma$ متناهی باشد. فرض کنید در Δ درباره‌ی رأس‌های $g_۱, g_۲, ..., g_n$ گزاره‌هایی وجود داشته باشد. به Δ گزاره‌هایی از Σ اضافه می‌کنیم به طوری‌که به $\Delta \subseteq \Delta'$ برسیم و Δ' بیانگر این باشد که $g_۱, g_۲, ..., g_n$ رأس‌های یک زیرگراف از G هستند و این زیرگراف ۴رنگ‌پذیراست. از آن‌جا که زیرگراف یاد شده، بنا به فرض سؤال، ۴رنگ‌پذیراست، مجموعه‌ی Δ' و به تَبَعِ آن Δ، سازگار است.

به بیان دقیقتر برای اثبات سازگاریِ Δ' باید یک ارزیابی از گزاره‌های اتمی پیدا کنیم که با آن ارزیابی همه‌ی جملاتِ به کار رفته در Δ' ارزشِ یک داشته باشند. جملاتِ اتمی ما در اینجا گزارهایی مانندِ رأس فلان به راس فلان وصل است» و رأس فلان، فلان رنگ را دارد» هستند. کافی است برای ارزش‌دهی به آنها به زیرگرافِ ساخته شده توسط رأسهای $g_۱, \ldots, g_n$ مراجعه کنیم و اگر جمله‌ی ما درباره‌ی این گراف درست بود به آن ارزشِ یک بدهیم. $\square$

۲.۱ صورتهای نرمال

لم ۲. هر گزاره‌ای در منطق گزاره‌ها را می‌توان در «صورت نرمال فصلی [۳] » نوشت؛ یعنی اگر φ یک گزاره‌ی دلخواه باشد، آن‌گاه گزاره‌ای به شکل زیر وجود دارد که با φ معادل است:

$$\bigvee_{i=۱...n} c_i$$

که هر c_i به صورت $(q_۱ \wedge q_۲ \wedge ... \wedge q_m)$ است و هر q_j یک گزاره‌ی اتمی یا نقیض یک گزاره‌ی اتمی است.

مثال ۳. گزاره‌ی زیر در صورت نرمال فصلی است:

$$(p_۱ \wedge p_۲ \wedge p_۳) \vee (\neg p_۴ \wedge p_۵ \wedge \neg p_۶) \vee (p_۷ \wedge p_۶ \wedge p_۳ \wedge \neg p_۲).$$

اثبات لم. اثبات اول: دو گزاره در صورتی معادلند که جدول ارزش یکسانی داشته باشند. همچنین قبلاً دیدیم که هر جدول ارزشی را می‌توان با یک گزاره‌ی در صورت نرمال فصلی به دست آورد.

اثبات دوم، با استقراء روی ساختِ گزاره‌ها:

۱. اگر φ یک گزاره‌ی اتمی باشد آن‌گاه حکم بوضوح برقرار است.

۲. اگر حکم برای φ درست باشد، نشان می‌دهیم که آن‌گاه حکم برای $\neg\varphi$ هم درست است. برای جلوگیری از پیچیدگی نمادها، تنها به بیان ایده‌ی اثبات اکتفا کرده‌ام: فرض کنید

$$\varphi : (p_۱ \wedge \neg p_۲) \vee (p_۳ \wedge p_۴)$$

آن‌گاه

$$\neg\varphi : \neg(p_۱ \wedge \neg p_۲) \wedge \neg(p_۳ \wedge p_۴) \equiv$$

$$(\neg p_۱ \vee p_۲) \wedge (\neg p_۳ \vee \neg p_۴) \equiv$$

[۳] disjunctive normal form

$$((\neg p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_3) \vee ((\neg p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_4) \equiv$$

$$(\neg p_1 \wedge \neg p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_4) \vee (p_2 \wedge \neg p_4)$$

گزاره‌ی آخری در صورت نرمال فصلی است.

۳. حال فرض کنیم φ و ψ را بتوان به صورت نرمال فصلی نوشت. می‌دانیم که فصلِ دو گزاره در صورت نرمال فصلی، خودْ در صورت نرمال فصلی است. در قسمت قبل نیز دیدیم که اگر ϕ در صورت نرمال فصلی باشد، می‌توان نقیض آن را در صورت نرمال فصلی نوشت. پس داریم

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv \neg(\text{نرمال فصلی} \vee \text{نرمال فصلی}) \equiv \neg(\text{نرمال فصلی}) \equiv \text{نرمال فصلی}$$

$\square$

تمرین ۲. گزاره‌های زیر را به صورت نرمال فصلی درآورید.

- $p \to (q \to p)$
- $((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$
- $p \wedge q \to r$
- $(A \vee B) \to (\neg B \wedge A)$
- $\neg(A \to B) \vee (\neg A \vee C)$.

تمرین ۳. نشان دهید هر گزاره را می‌توان در «صورت نرمال عطفی [4]» نوشت؛ یعنی به صورت زیر

$$\bigwedge_{i=1..n} c_i$$

که در آن

$$c_i = (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_m)$$

و هر q_i یک گزاره‌ی اتمی یا نقیض یک گزاره‌ی اتمی است.

مثال ۴. $(p_1 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee \neg p_4)$ در صورت نرمال عطفی است.

در جلسه‌ی بعد روشی برای تشخیص تاتولوژی بودن یک گزاره‌ی در صورت نرمال فصلی معرفی می‌کنیم.

از آقای علیرضا محمدصالحی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

[4] conjunctive normal form