۱ جلسه‌ی پانزدهم، افزودن چند اصل به دستگاه استنتاجی هیلبرت

یادآوری ۱. با مفهومِ $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ در جلسه‌ی قبل آشنا شدیم و گفتیم که هدف ما در ادامه‌ی درس اثبات قضیه‌ی درستی و تمامیت است:

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi$$

نیز دیدیم که قضیه‌ی تمامیت از قضیه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۲. اگر $\sum$ یک مجموعه از جملات مرتبه‌ی اول باشد و برای هر $\varphi_۱ \dots \varphi_n \in \sum$ داشته باشیم

$$\nvdash \neg(\varphi_۱ \wedge \dots \wedge \varphi_n)$$

آنگاه یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ موجود است به طوری که برای هر $\varphi \in \sum$ داریم

$$\mathfrak{M} \models \varphi.$$

دستگاه هیلبرت را در جلسه‌ی قبل به صورتی کاملاً مینیمال معرفی کردیم. به این دستگاه می‌توان اصول دیگری نیز افزود که البته‌ی همه‌ی آنها از همین اصولی که ما بیان کرده‌ایم نتیجه می‌شوند. در این جلسه چند لم دیگر بدین دستگاه می‌افزائیم (و همه‌ی آنها را با استفاده از اصول دستگاه هیلبرت ثابت خواهیم کرد).

لم ۳. اگر $\varphi_۱, \dots, \varphi_n$ اثبات‌پذیر باشند (یعنی اگر $\vdash \varphi_۱, \vdash \varphi_۲, \dots, \vdash \varphi_n$) و $\varphi_۱ \wedge \varphi_۲ \wedge \dots \wedge \varphi_n \to \psi$ یک تاتولوژی باشد آنگاه $\vdash \psi$.

اثبات. حکم را برای $\varphi_۱, \varphi_۲$، یعنی برای $n = ۲$ ثابت می‌کنیم. می‌دانیم که عبارت زیر یک تاتولوژی است:

$$\big(\varphi_۱ \wedge \varphi_۲ \to \psi\big) \to \big(\varphi_۱ \to (\varphi_۲ \to \psi)\big)$$

که از تاتولوژی زیر در منطق گزاره‌ها ناشی می‌شود.

$$\big(p \wedge q \to r\big) \to \big(p \to (q \to r)\big)$$

در زیر ثابت می‌کنیم که $\vdash \psi$. یعنی اثباتی برای فرمولِ ψ در دستگاه هیلبرت ارائه می‌دهیم.

۱. $\varphi_۱ \wedge \varphi_۲ \to \psi$ (بنا به فرض لم)

۲. $\big(\varphi_۱ \wedge \varphi_۲ \to \psi\big) \to \big(\varphi_۱ \to (\varphi_۲ \to \psi)\big)$ (تاتولوژی)

۳. $\varphi_۱ \to (\varphi_۲ \to \psi)$ بنا به موارد ۱ و ۲ و با استفاده از قیاس استثنائی.

۴. $\phi_۱$ بنا به فرض لم

۵. $\phi_۲ \to \psi$ بنا به موارد ۳ و۴ و با قیاس استثنائی.

۶. $\phi_۲$ بنا به فرض لم.

۷. ψ بنا به ۵و ۶ و با قیاس استثنائی.

توجه ۴. برای اثبات لم در حالت کلی از تاتولوژی

$$\Big(\varphi_۱ \wedge \varphi_۲ \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi\Big) \to \Big(\varphi_۱ \to \big(\varphi_۲ \to (\varphi_۳ \to \ldots (\varphi_n \to \psi))\big)\Big)$$

استفاده کنید.

$\square$

یادآوری ۵. در دستگاه هیلبرت لمِ سورِ وجودی به صورت زیر است:

$$\vdash \varphi\frac{t}{x} \to \exists x \quad \varphi \quad (\text{در صورتی که } x \text{ نسبت به } t \text{ در } \varphi \text{آزاد باشد})$$

در زیر با استفاده از عکس نقیضِ لم سور وجودی، لم سور عمومی را بیان کرده‌ایم.

لم ۶ (سورِ عمومی).

$$\vdash \forall x\varphi \to \varphi\frac{t}{x} \quad (\text{در صورتی که } x \text{ نسبت به } t \text{ در } \varphi \text{آزاد باشد})$$

لم بالا در صورت آزاد نبودن x نسبت به t در φ درست نیست. برای مثال قرار دهید:

$$\varphi : (\exists y \quad y^۲ = x)$$

دقت کنید که در اینجا x نسبت به y در φ آزاد نیست. (گرفته‌ایم $t = y$). فرمول زیر قابل اثبات نیست (شما فعلاً حداقل این را چک کنید که این فرمول درست نیست):

$$\forall x \quad (\exists y \quad y^۲ = x) \to (\exists y \quad y^۲ = y)$$

اثباتِ لم سور عمومی. می‌دانیم که عبارت زیر اثبات پذیر است:

$$\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi \quad ۱$$

همچنین عبارت زیر یک تاتولوژی است:

$$(\varphi\frac{t}{x} \to \exists x \quad \varphi) \leftrightarrow (\neg(\exists x \quad \varphi) \to \neg\varphi\frac{t}{x}) \quad ۲$$

که از تاتولوژی زیر در منطق گزاره‌ها به دست می‌آید:

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که

$$(\neg\exists x\varphi) \to \neg\varphi\frac{t}{x} \quad ۳$$

پس بنا به تعاریف:

$$\vdash \forall x \neg\varphi \to \neg\varphi\frac{t}{x} \quad ۴ \qquad (\spadesuit)$$

از آنجایی که ($\spadesuit$) برای تمامی فرمول های φ درست است، برای $\neg\varphi$ نیز درست است. یعنی ثابت کرده‌ایم که

$$\vdash \forall x \neg(\neg\varphi) \to \neg(\neg\varphi\frac{t}{x})$$

پس ثابت کرده‌ایم که

$$\vdash \forall x \varphi \to \varphi\frac{t}{x}.$$

□

یادآوری ۷. اصل موضوعه‌ی معرفی سور وجودی در دستگاه هیلبرت به صورت زیر است:

$$\frac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \exists x \varphi \to \psi} x \notin FV(\psi)$$

در زیر می‌خواهیم لم معرفی سور عمومی را بیان کنیم.

لم ۸ (معرفی سور عمومی).

$$\frac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \varphi \to \forall x \psi} x \notin FV(\varphi)$$

اثبات. برای اینکه به اثبات

$$\varphi \to \forall x \psi$$

برسیم، کافی است اثبات کنیم که

$$\vdash \neg\forall x \psi \to \neg\varphi$$

یعنی باید اثبات کنیم که

$$\exists x \neg\psi \to \neg\varphi.$$

می‌دانیم که عبارت زیر ثابت شده است:

$$\varphi \to \psi$$

پس بنا به تاتولوژی‌ها عبارت زیر ثابت شده است:

$$\neg\psi \to \neg\varphi \qquad (\spadesuit)$$

بنابه ($\spadesuit$) و لم سور وجودی داریم

$$\vdash \exists x \neg\psi \to \neg\varphi$$

و این همان است که می خواستیم. □

تمرین ۱.

- ثابت کنید که اگر $\vdash \phi$ آنگاه $\vdash \forall x \phi$.

- ثابت کنید که اگر $\phi \vdash$ آنگاه $\phi\frac{t}{x} \vdash$.

- نشان دهید که

$$\nvdash (\phi \to \phi\frac{t}{x})$$

برای اثبات دومی از قضیه‌ی درستی و تمامیت استفاده کنید (با این که آن را هنوز ثابت نکرده‌ایم!)

- مشابه آنچه برای درستی گفتیم، اگر از $\phi \vdash$ نتیجه شود $\psi \vdash$ آنگاه عبارت زیر لزوماً برقرار **نیست**:

$$\vdash (\phi \to \psi)$$

مثال ۹. در دستگاه هیلبرت ثابت کنید که

$$\vdash \exists x \forall y \ \ Rxy \to \forall y \exists x \ \ Rxy$$

پاسخ.

$$(1) \forall y \ \ Rxy \to Rxy$$

(بنا به قاعده $\forall y\varphi \to \varphi\frac{t}{y}$ و با قرار دادنِ $(t = y)$)

$$(2) Rxy \to \exists x Rxy$$

(بنا به قاعده‌ی $\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi$ و با در نظر گرفتنِ $t = x$)

$$(3) \forall y \ \ Rxy \to \exists x \ \ Rxy$$

(بنا به (1),(2) و با استفاده از قیاس استثنائی)

یادآوری ۱۰ (معرفی سور عمومی).

$$\frac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \varphi \to \forall x\psi} x \notin FV(\varphi)$$

$$(4) \forall y \ \ Rxy \to \forall y \exists x \ \ Rxy$$

(بنابر (3) و لم معرفی سور وجودی و با توجه به این که $y \notin Fv(\forall y Rxy)$)

یادآوری ۱۱ (لم معرفی سور وجودی).

$$\frac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \exists x\varphi \to \psi} x \notin FV(\psi)$$

$$(5) \exists x \forall y \ \ Rxy \to \forall y \exists x \ \ Rxy$$

(بنابه (4) و لم معرفی سور وجودی و با توجه به این که $x \notin Fv(\forall y \exists x Rxy)$) □

تمرین ۲. آیا می‌توانید تمرین بالا را به گونه‌ای دیگر اثبات کنید؟

تمرین ۳. در دستگاه هیلبرت استنتاج کنید.

$$\vdash \forall x(A \vee B) \to \forall x A \vee \forall x B \quad x \notin FV(B)$$

$$\vdash \exists x A \wedge \exists x B \to \exists x(A \wedge B) \quad x \notin FV(B)$$

لم ۱۲. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد و C یک مجموعه از ثوابت جدید باشد به طوری که $C \cap \mathcal{L} = \emptyset$. فرض کنید $\vdash_{\mathcal{L}\cup C} \varphi(c_1, \ldots, c_n)$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$

اثبات. فرض کنید $\psi_1, \ldots, \psi_n$ اثباتی برای $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ در زبان $\mathcal{L} \cup C$ باشد. در تمام فرمول ها به جای $c_1, \ldots, c_n$ متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ را بگذارید. $\square$

دقت کنید که در لم بالا، این شرط که ثوابتْ قبلاً در زبان L نبوده باشند لازم است. (اگر اندکی جبر بلدید!) برای تشابه، می‌توانید به این فکر کنید که اگر t یک عنصر متعالی روی میدان اعداد گویا باشد آنگاه

$$Q(t) \cong Q(x).$$