۱ جلسه نهم، ادامه‌ی معناشناسی

در جلسه‌ی گذشته به معناشناسیِ‌منطق مرتبه‌ی اول پرداختیم. گفتیم که ترمهای زبان در ساختارها و با استفاده از نگاشتهایی که متغیرها را تعبیر می‌کنند، معنا می‌شوند. نیز گفتیم که هر نگاشت تعبیر، تابعی مانند

$$\beta : \{v_0, v_1, \ldots\} \to A$$

است که دامنه آن مجموعه‌ی متغیرهاست و بردِ آن جهان یک L ساختار $\mathfrak{A}$ است. در این جلسه می‌خواهیم مفهوم «درست بودن یک فرمول» دریک ساختار را تعریف کنیم.

فرض کنید φ یک $\mathcal{L}$ فرمول، $\mathfrak{A}$ یک L ساختار، β و یک نگاشت تعبیرِ متغیرها در A، جهانِ ساختارِ $\mathfrak{A}$، باشد. منظور از عبارت $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ این است که فرمول φ با ارزیابی β از متغیرها در ساختار $\mathfrak{A}$ درست است. در زیر همین تعریف را دقیق کرده‌ایم.

تعریف ۱ (درست بودن یک فرمول در یک ساختار)**.** عبارت $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ (که خوانده می‌شود: فرمولِ φ با ارزیابیِ β در ساختارِ $\mathfrak{A}$ درست است) به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱.

$$\mathfrak{A} \models t_1 = t_2[\beta] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$$

یعنی فرمولِ $t_1 = t_2$ وقتی در ساختارِ $\mathfrak{A}$ درست است که تعبیرهای ترمهای t_1, t_2 در این ساختار با هم برابر باشند؛

۲.

$$\mathfrak{A} \models R(t_1, \cdots, t_n)[\beta] \Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \cdots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$$

یعنی فرمولِ $R(t_1, \ldots, t_n)$ وقتی در ساختارِ $\mathfrak{A}$ درست است که تعبیرهای ترمهای t_i در این ساختار با یکدیگر رابطه‌ی $R^{\mathfrak{A}}$ را داشته باشند؛

۳. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta]$ هرگاه $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$

۴.

$$\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi_1[\beta] \text{ و } \mathfrak{A} \models \psi_2[\beta]$$

۵. $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta]$ هرگاه یک عنصر $a \in A$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$ که در آن $\beta\frac{a}{x}$ یک نگاشت تعبیر متغیرهاست که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta\frac{a}{x}(v) = \begin{cases} \beta(v) & v \neq x \\ a & v = x \end{cases}$$

تعریف بالا را می‌توان برای سایر ادوات کمکی نیز به صورت زیر تعمیم داد: تعریف می‌کنیم $\mathfrak{A} \models (\psi_1 \to \psi_2)[\beta]$ هرگاه اگر $\mathfrak{A} \models \psi_1[\beta]$ آنگاه $\mathfrak{A} \models \psi_2[\beta]$. همچنین تعریف می‌کنیم $\mathfrak{A} \models \forall x \quad \psi[\beta]$ هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$.

در ادامه به تعریف متغیرهای آزاد و پایبند پرداخته‌ایم. می‌گوییم متغیر x در فرمول φ آزاد است هرگاه x تحت تأثیرِ هیچ سوری قرار نگرفته باشد. بیایید این تعریف را به صورت دقیق و استقرائی بیان کنیم.

تعریف ۲ (متغیرآزاد)**.** آزاد بودن حضور متغیر x در فرمول φ به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود:

۱. اگر $\varphi = (t_1 = t_2)$ در این صورت x برای φ آزاد است هرگاه $x \in var(t_1)$ یا $x \in var(t_2)$ (یعنی در صورتی که x یکی از متغیرهای به کار رفته در یکی از t_i ها باشد).

۲. اگر $\varphi = Rt_1, \cdots, t_n$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه x جزوِ متغیرهای های یکی از t_i ها باشد.

۳. اگر $\varphi = \neg\psi$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه در ψ آزاد باشد.

۴. اگر $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه x در ψ_1 یا در ψ_2 آزاد باشد.

۵. اگر $\varphi = \exists y\psi$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه $x \neq y$ و x در ψ آزاد باشد.

متغیرهایی را که آزاد نباشند، **پایبند** می‌نامیم.

توجه ۳. تعداد متغیر های آزاد یک فرمولِ φ همواره متناهی است.

مثال ۴. متغیر های آزاد و پایبند را در فرمولهای زیر مشخص کنید.

$$\forall v_0. \quad \big(\exists v_1 R(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{v_0}}, \overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{v_1}}) \wedge p(\overset{\text{آزاد}}{\overset{\uparrow}{v_1}})\big)$$

$$\forall x, y \quad R_1(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{x}}, \overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{y}}) \wedge R_2(\overset{\text{آزاد}}{\overset{\uparrow}{x}}, \overset{\text{آزاد}}{\overset{\uparrow}{y}})$$

$$\forall x, y \quad \big(p(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{x}}) \wedge q(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{y}})\big)$$

توجه ۵. برای دیدن مثال‌های بیشتر از متغیر های آزاد و پایبند به جزوه مبانی ریاضی مدرس در تارنمای درسها مراجعه کنید.

لم ۶. اگر ارزیابی های $\gamma, \beta : \{v_0, v_1, \ldots\} \to A$ روی متغیرهای آزاد فرمولِ φ یکسان عمل کنند آنگاه

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$$

مثال ۷. فرض کنید $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, 0)$. ارزیابی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta : v_0 \mapsto 1$$

$$v_1 \mapsto 2$$

$$v_i \mapsto i \quad i \neq 1, 2$$

$$y \mapsto 6$$

$$\gamma : v_0 \mapsto 1$$

$$v_1 \mapsto 2$$

$$v_i \mapsto ۱۰i \quad i \neq ۱, ۲$$

$$y \mapsto ۱۰۰۰$$

حال فرمولهای $v_. + v_۱ = v_۲$ و $\exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (v_. + v_۱ = ۲)$ را در نظر بگیرید. واضح است که

$$R \models v_. + v_۱ = v_۲[\beta] \Leftrightarrow R \models v_. + v_۱ = v_۲[\gamma]$$

$$R \models \exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (v_. + v_۱ = ۲)[\beta] \Leftrightarrow R \models \exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (v_. + v_۱ = ۲)[\gamma]$$

در مورد دوم دقت کنید که متغیرهای پایبند نقشی بازی نکرده‌اند.

اثبات لم۶. حکم را با استقراء روی ساخت فرمولها ثابت می‌کنیم.

- اگر φ به صورت $t_۱ = t_۲$ باشد و β ، γ روی متغیرهای به کار رفته در $t_۱$ و $t_۲$ هم ارزش باشند، آنگاه واضح است (و اگر واضح نیست تحقیق کنید) که
$$t_۱^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_۲^{\mathfrak{A}}[\gamma].$$
- اگر φ به صورت $Rt_۱, \cdots, t_n$ باشد و ارزشهای β، γ روی متغیرهای به کار رفته در t_i ها یکسان باشند، آنگاه $t_i^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_i^{\mathfrak{A}}[\gamma]$، و در نتیجه $R^{\mathfrak{A}}(t_۱^{\mathfrak{A}}[\beta], \cdots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_۱^{\mathfrak{A}}[\gamma], \cdots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma])$
- بررسی حالتهائی را که $\varphi = \neg\psi$ و $\varphi = \psi_۱ \wedge \psi_۲$ به عنوان تمرین رها می‌کنم.
- اگر φ به صورت $\exists x\psi$ باشد و β و γ روی متغیر های آزاد φ یکسان عمل کنند،آنگاه $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta]$ هرگاه $a \in A$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$. همچنین $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\gamma]$ هرگاه $a \in A$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma\frac{a}{x}]$.
حال مشاهده کنید که ارزیابی های $\gamma\frac{a}{x}$ و $\beta\frac{a}{x}$ روی متغیر های آزاد ψ یکسان عمل می کنند؛ زیرا متغیرهای آزادِ ψ با متغیرهای آزادِ ϕ تنها احتمالاً در x متفاوتند و $\gamma\frac{a}{x}, \beta\frac{a}{x}$ روی همه‌ی متغیرها به غیر از x بنا به فرض یکسان عمل می‌کنند و روی x هم بنا به تعریف هر دو مقدارِ a دارند. پس بنابر فرض استقراء
$$\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\gamma\frac{a}{x}].$$
بنابراین $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x\psi[\gamma]$.

□

دقت کنید که معمولاً در نمایش یک فرمول به صورت $\varphi(x_۱, \ldots, x_n)$ **متغیرهای پایبند آن را نمی‌نویسیم.** به طور کلی:

توجه ۸. منظور از نماد $\varphi(x_۱, \cdots, x_n)$ این است که

۱. متغیرهای x_i متمایز هستند.

۲. متغیر های آزاد فرمول φ در میان $\{x_۱, \cdots, x_n\}$ هستند.

مثال ۹. در فرمول $\varphi(x, z) = \exists y \quad x + y = ۰$، دقت کنید که با این که متغیرِ z در فرمول نیامده است، آن را در پرانتز نوشته‌ایم.

تعریف ۱۰. به فرمولی که متغیر آزاد نداشته باشد، **جمله** می‌گوئیم.

مثال ۱۱. فرمول زیر یک جمله در زبان حلقه‌هاست.

$$\forall a, b, c\, \exists x \quad ax^2 + bx + c = 0$$

بنابر لم قبلی اگر φ یک جمله باشد و β ، γ دو تابع تعبیر برای متغیر ها باشند آنگاه

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].$$

بنابراین اگر φ یک جمله باشد، می‌نویسیم $\mathfrak{A} \models \varphi$ هرگاه برای یک (به بیان معادل به ازای هر) ارزیابی β داشته باشیم $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$.

توجه ۱۲. اگر φ یک جمله و $\mathfrak{A}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد آنگاه $\mathfrak{A} \models \varphi$ یا $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ و هر دو اینها با هم نمی‌تواند رخ دهد (در داخل یک Lساختار تناقضی نمی‌تواند رخ دهد).

تعریف ۱۳. فرض کنید x یک متغیر و s, t دو ترم باشند، منظور از نماد $t\frac{s}{x}$ این است که به جای متغیر x در ترم t، ترمِ s را جایگذاری کنیم.

برای مثال

$$t(y) = 2y + 3 = 0$$

$$s = y^2 + y + x$$

$$t\frac{s}{y} = 2(y^2 + y + x) + 3 = 0$$

از آقای امیر نیک‌آبادی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.