۱ جلسه‌ی اول، معرفی منطق ریاضی

در این جلسه قرار است منطق ریاضی را هم به عنوان یکی از گرایشهای رشته‌ی ریاضی، و هم به عنوان یک واحد درسی معرفی کنم. ریاضیات دارای دو گرایش محض و کاربردی است و **منطق ریاضی**، یا **مبانی ریاضیات** گرایشی از ریاضیات محض محسوب می‌شود. این رشته دارای چهار زیرگرایش اصلی است: نظریه‌ی مدل، نظریه‌ی اثبات، نظریه‌ی بازگشت و نظریه‌ی مجموعه‌ها. در درس منطق ریاضی به هر یک از این گرایشها به فراخورِ وقت پرداخته خواهد شد. گرایشِ تخصصی مدرس، نظریه‌ی مدل است و از این رو، بعید نیست که تکیه‌ی او بر جنبه‌های نظریه‌ی مدلی درس بر بقیه‌ی جنبه‌ها بچربد.

منطق همواره به عنوان ابزار کار ریاضیدان همراه ریاضی بوده است، و جائی از ریاضی خالی از منطق نبوده است، ولی رویدادهائی در قرن نوزدهم باعث ایجاد منطق به عنوان یک گرایش مستقل در ریاضیات شد. در زیر به برخی از عوامل ایجاد این رشته خواهیم پرداخت.

همان طور که می‌دانید برای اثبات یک قضیه در ریاضیات به دو عامل نیازمندیم: نخست، قضایائی که قبلاً ثابت شده‌اند (که به عنوان پیش‌فرض از آنها استفاده می‌کنیم) و دوم، آشنائی با روش استدلال کردن (این را نیز می‌دانیم که باید روشهای استدلال کردن بین همه‌ی ریاضی‌دانان پذیرفته‌شده و به صورت یکسان باشند). اما خودِ آن قضایای قبلاً اثبات‌شده از قضایای دیگری، باز هم با استدلال، نتیجه شده‌اند و آنها نیز به همین ترتیب. پس این سوال پیش می‌آید که **آیا مجموعه‌ای از اصول اولیه وجود دارد که هر قضیه‌ای در ریاضی در نهایت به یکی از آنها برسد، و هر چه که نادرست باشد، نادرستی آن از این اصول نتیجه شود؟** به بیان دیگر، **آیا یک مجموعه‌ی کامل از اصول برای ریاضیات وجود دارد؟**

سوال بالا، همواره ذهن ریاضیدانان را به خود مشغول کرده بوده است. برای مثال، در هندسه‌ی اقلیدسی، همه‌ی قضایا از اصول اقلیدس نتیجه می‌شوند و هر چیزی که اشتباه باشد، با استفاده از اصول اقلیدس می‌توان اشتباه بودن آن را ثابت کرد. در قرن ۱۹ میلادی، هیلبرت (ریاضیدانی که نامش در اکثر گرایشهای ریاضی مدام به گوش می‌خورد) مجموعه‌ای از سوالهای بازِ ریاضیات را در یک سخنرانی مطرح کرد.

پروژه ۱. به عنوان یک پروژه‌ی تحقیقاتی، به دانشجو پیشنهاد می‌کنم که ۲۳ سوال مطرح شده توسط هیلبرت، درگرایشهای مختلف ریاضی را جمع‌آوری کند.

پروژه ۲. اصول اقلیدس چه بودند؟ در واقع برخی قضایائی که اقلیدس ثابت کرده بود، از اصول وضع شده توسط او نتیجه نمی‌شد و هیلبرت اصول هندسه را **کامل** کرد.

از میان این سوالات، یک سوال مورد علاقه‌ی این درس است. مسئله‌ی دهم: آیا یک روش الگوریتمیک وجود دارد که تعیین کند که آیا یک چند جمله‌ایِ چندمتغیره با ضرایب در اعداد صحیح، دارای ریشه‌ای در اعداد صحیح است یا خیر؟ سوال بالا منجر به مسئله‌ای به نام «مسئله‌ی تصمیم‌گیری» شد که از همان ابتدا با نام آلمانیِ $Entscheidungsproblem$ مطرح شده بود. صورت این مسئله این است: آیا می‌توان مجموعه (ی‌کوچک‌ومناسبی) از اصول برای ریاضیات (به طور خاص برای اعداد طبیعی) نوشت به طوری که هر چه درست باشد از آنها نتیجه شود و هر چه که نادرست باشد نادرستی آن از این اصول نتیجه شود؟

ظاهراً در همان گردهمائی، احتمالاً در روز دیگری، گودل قضیه‌ی ناتمامیت خودش را عرضه کرده است.**بنا به این قضیه، هر اصل‌بندی (مناسب از نظر منطقی) که برای اعداد طبیعی در نظر بگیریم، ناکامل است؛ یعنی قضیه‌ی درستی پیدا می‌شود**

که توسط آنها قابل اثبات نیست. [1] قضیه‌ی ناتمامیت گودل یکی از ارکان مهم در شروع گرایش منطق ریاضی بوده است. با این حال، سوالهای مهم دیگری نیز در این امر نقش داشته‌اند که زیر بدانها نیز پرداخته شده است.

همزمان با پیشرفت سایر گرایشهای ریاضی، به ویژه آنالیز ریاضی، معلوم شد که مفهوم «مجموعه» نقشی اساسی در ریاضیات بازی می‌کند. اعداد طبیعی مجموعه‌اند (به جزوه‌ی مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید) روابط و توابع مجموعه‌اند، اعداد صحیح با نوعی رابطه‌ی هم‌ارزی ازاعداد طبیعی حاصل می‌شوند، اعداد گویا با یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی اعداد صحیح به دست می‌آیند و اعداد حقیقی، دنباله‌هائی شمارا از اعداد گویا هستند. بنابراین برای اصلبندی ریاضیات، اصلبندی نظریه‌ی مجموعه‌ها بسیار مهم است.

در نخستین اصلبندی شهودی مجموعه‌ها، مجموعه عبارت است از گردایه‌ای از اشیاء که دارای ویژگی مشترکی هستند. اگر این ویژگی مشترک را p بنامیم، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x|p(x)\}.$$

در همان قرن ۱۹ مطرح شدن یک تناقض توسط راسل، نقش مهمی در جدی شدن رشته‌ی منطق بازی می‌کرد: فرض کنید $p(x)$ عبارتِ $x \notin x$ باشد. پس عبارت زیر یک مجموعه است:

$$A = \{x|x \notin x\}$$

از آنجا که A مجموعه نیست، از دو حال خارج نیست؛ یا $A \in A$ یا $A \notin A$.

تمرین ۳. نشان دهید که اگر $A \in A$ آنگاه $A \notin A$ و اگر $A \notin A$ آنگاه $A \in A$.

همان طور که در تمرین بالا مشاهده می‌کنید، اگر نظریه‌ی مجموعه‌ها همین باشد که کانتور می‌گوید، پس ریاضیات علمی تناقض آمیز است. یکی از سوالات بسیار مهم در علم منطق نیز همین است: آیا می‌شود مجموعه‌ی مناسبی از اصول برای ریاضیات نوشت که تناقض‌آمیز نباشد (بعدها زرملو و فرانکل اصول دیگری به نظریه‌ی مجموعه‌ها اضافه کردند که از تناقض راسل جلوگیری می‌کند).

در این درس قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل را ثابت خواهیم کرد و خواهیم دید که روش اثبات، استفاده از یک سوال خودْمرجع، مشابه تناقض راسل است. در واقع اگر مجموعه‌ای از اصول برای ریاضیات بنویسیم و این اصول «از خود بپرسند» که آیا ما با هم سازگاریم (یعنی تناقض نداریم)، این سوال توسط آن اصول قابل پاسخ دادن نیست.

در بحثهای بالا چند بار از کلمه‌ی الگوریتم استفاده شد. در واقع، مبانی منطق به مبانی علوم رایانه‌ی نظری نیز پیوند می‌خورد. **قضیه‌ی ناتمامیت اول** گودل، که آن را نیز در این درس ثابت خواهیم کرد، می‌گوید که «الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند که آیا یک جمله‌ی داده شده در اعداد طبیعی درست است یا خیر». مسئله‌ی توقف [2]، در نظریه‌ی محاسبه‌پذیری، می‌گوید که الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند که کدام الگوریتم رایانه‌ای می‌ایستد و کدام تا ابد ادامه می‌یابد. در درس منطق به ارتباط این دو با هم خواهیم پرداخت و خواهیم دید که این دو سوال با هم معادلند.

گودل قضیه‌ی مهم دیگری به نام «قضیه‌ی تمامیت» دارد. بنا به این قضیه، هر چه که در «منطق مرتبه‌ی اول» درست باشد، قابل اثبات است [3]. قضایای گودل (به خصوص قضیه‌ی تمامیت) منجر به ایجاد گرایشی در ریاضیات به نام نظریه‌ی مدل شد.

[1] پیشنهاد می‌کنم مقاله‌ی «تجاهل بورباکی» را مطالعه بفرمائید. این قضیه، قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل نام دارد. فعلاً نمی‌توانم صورت دقیقتری از آن را بیان کنم.

[2] Halting problem

[3] ممکن است مقایسه‌ی این قضیه با قضیه‌ی ناتمامیت کمی شما را گیج کند. برای دیدن بیان دقیق آن کافی است چند جلسه صبر کنید.

در این گرایش ابزارهای منطقی برای مطالعه‌ی جبر و آنالیز و هندسه و سایر گرایشهای دیگر ریاضی استفاده می‌شوند. در بخشی از این درس به نظریه‌ی مدل نیز خواهیم پرداخت.

بحث درباره‌ی منطق به عنوان یک گرایش ریاضی را در اینجا متوقف می‌کنیم. در منطق به عنوان درسی سه واحدی در این ترم، نخست به منطق گزاره‌ها، و سپس به منطق مرتبه ی اول خواهیم پرداخت. قضیه‌ی تمامیت گودل را ثابت خواهیم کرد، سپس وارد نظریه‌ی مجموعه‌ها خواهیم شد و قضیه‌ی ناتمامیت اول و دوم را ثابت خواهیم کرد. سپس وارد نظریه‌ی بازگشت و مبانی علوم کامپیوتری درس خواهیم شد و بند قبلی را خواهیم فهمید.

قوانین: قوانین مربوط به حضور و غیاب، مطابق آنچه آموزش دانشگاه وضع کرده است، اعمال خواهد شد. دیرآمدن سر کلاس از نظر مدرس، از غیبت کردن بدتر است. امتحانها حذفی نخواهند بود و بارم‌بندی آنها درتارنمای درس آمده است.