۱ جلسه دهم، لم جایگذاری و شروع نظریه‌ی مدل مقدماتی

یادآوری ۱. اگر t یک ترم باشد و $x \in var(t)$ و s یک ترم دیگر باشد، منظور از $t\frac{s}{x}$ ترمی است که از جایگذاری ترمِ s به جای متغیرِ x در t ایجاد می‌شود. همچنین اگر φ یک فرمول باشد و x متغیر آزادی در φ باشد، آنگاه فرمول $\varphi\frac{s}{x}$ فرمولی است که با جایگذاری s به جای x در φ ایجاد می‌شود. در زیر تعریف دوم را دقیق‌تر کرده‌ایم.

تعریف ۲. فرمول $\varphi\frac{s}{x}$ به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود.

۱. اگر $\varphi = (t_۱ = t_۲)$ آنگاه $\varphi\frac{s}{x} = (t_۱\frac{s}{x} = t_۲\frac{s}{x})$

۲. اگر $\varphi = Rt_۱, \cdots, t_n$ آنگاه $\varphi\frac{s}{x} = Rt_۱\frac{s}{x}, \cdots, t_n\frac{s}{x}$

۳. $\varphi = \psi_۱ \wedge \psi_۲$ یا $\varphi = \neg\psi$، **تعریف به عهده‌ی شما.**

۴. $\varphi = \exists y\psi$ آنگاه، اگر $x = y$ آنگاه $\varphi\frac{s}{x} = \varphi$؛ و اگر $x \neq y$ آنگاه $\varphi\frac{s}{x} = \exists y\psi\frac{s}{x}$.

در جلسه‌ی قبل مفهوم «آزاد بودن یک متغیر» دریک فرمول را تعریف کردیم. در زیر مفهومِ «آزاد بودن یک متغیر نسبت به یک ترم در یک فرمول» را تعریف کرده‌ایم. به بیان غیر دقیق، می‌گوییم **متغیر x نسبت به ترم s در فرمول φ آزاد است،** هرگاه هیچ حضورِ آزاد x در φ متأثر از هیچ سوری نباشد که متغیری از s را پای‌بند کند. برای مثال در فرمول زیر در زبان حلقه‌ها، متغیر x نسبت به ترم $s = y^۲ + ۲y$ آزاد **نیست**.

$$\exists y \quad y^۲ + ۲y = x$$

اما در فرمولهای زیر x در φ نسبت به s آزاد است:

$$\forall x \quad \exists y \quad y^۲ + ۲y = x$$

$$\exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (x = y)$$

دقت کنید که در فرمولِ اول x کلاً متغیری پایبند است و با ترم s تداخلی ندارد، و در فرمول دوم، سور تنها روی قسمتِ پیش از عطف اثر می‌کند و بنابراین اثر آن با متغیرِ x درگیر نمی‌شود. بیائید تعریف بالا را به صورت استقرائی دقیق کنیم.

تعریف ۳. متغیر x در فرمول φ نسبت به ترم s آزاد است، هرگاه

۱. x یک متغیر پای‌بند در φ باشد، یا

۲. متغیر x در φ آزاد باشد و یکی از موارد استقرایی زیر رخ دهد.

- $\varphi = (t_۱ = t_۲)$ و $x \in var(t_۱)$ یا $x \in var(t_۲)$.
- $\varphi = Rt_۱, \cdots, t_۲$ $x \in var(t_i)$ برای یکی از i ها.
- $\varphi = \psi_۱ \wedge \psi_۲$ و x نسبت به s برای $\psi_۱$ آزاد باشد یا x نسبت به s برای $\psi_۲$ آزاد باشد.
- $\varphi = (\neg\psi)$ و x نسبت به s برای ψ آزاد باشد.

- اگر $\varphi = (\exists y \psi)$ آنگاه x نسبت به s در φ آزاد است **هرگاه x نسبت به s در ψ آزاد باشد و متغیرِ y در s نباشد.** (اولاً دقت کنید که در این حالت داریم $x \neq y$ زیرا فرض کرده‌ایم که x در φ آزاد است).

در ابتدای درس، ترمِ $\varphi\frac{s}{x}$ و فرمولِ $\varphi\frac{s}{x}$ را معرفی کردیم. در زیر روشی برای تعبیر اینگونه ترمها و فرمولها تحت یک نگاشت ارزیابی متغیرها را بیان کرده‌ایم. پیش از آن نیاز به یادآوری زیر داریم:

یادآوری ۴. فرض کنید که $\beta : \{v_۰, v_۱, \ldots\} \to A$ یک نگاشت ارزیابی در ساختار $\mathfrak{A}$ باشد و $a \in A$ عنصر دلخواهی باشد. آنگاه نگاشت ارزیابی $\beta\frac{a}{x} : \{v_۰, v_۱, \ldots\} \to A$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta\frac{a}{x}(v) = \begin{cases} \beta(v) & v \neq x \\ a & v = x \end{cases}$$

لم ۵ (جایگذاری). فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبانِ مرتبه‌ی اول باشد، s و t دو ترم در این زبان باشند، $\mathfrak{A}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد و

$$\beta : \{v_۰, v_۱, \ldots\} \to A$$

یک نگاشت ارزیابی متغیرها در جهان ساختارِ $\mathfrak{A}$ باشد. آنگاه

۱. $(t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$

۲. $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$ به شرطی که x نسبت به s در φ آزاد باشد.

توجه ۶. شرط آزاد بودن x نسبت به s در φ لازم است. (مثال زیر).

مثال ۷. فرمول زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi : \forall y \quad y^۲ + y = x$$

اگر $s = y$ آنگاه داریم:

$$\varphi\frac{s}{x} : \forall y \quad y^۲ + y = y$$

حال ارزیابی زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta : y \mapsto ۲, x \mapsto ۳, v_i \mapsto i$$

داریم

$$\varphi[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}] = \forall y \quad y^۲ + y = ۲$$

واضح است که از نظر ساختارِ اعداد حقیقی فرمولهای $\varphi\frac{s}{x}[\beta]$ و $\varphi[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$ با هم معادل نیستند.

فُرمالیسم منطقی را تا مدتی رها می‌کنیم و یکی دو جلسه به نظریه‌ی مدل مقدماتی می‌پردازیم. شاید نمادگذاری‌های بالا و دقت بیش از حد در تعاریف شما را خسته کرده باشد، ولی یادتان باشد که قرار است قضیه‌ی مهمی در این درس ثابت کنیم که بر پایه‌ی این فرمالیسم (یعنی صورت‌گرائی) بنا شده است. خوشخبتانه در نظریه‌ی مدل، بحثها ملموسترند.

۱.۱ نظریه‌ی مدل مقدماتی ۱

یادآوری ۸. به فرمولی که متغیر آزاد نداشته باشد، جمله می‌گوییم.

در درسهای پیشین با مفهومِ درست بودن یک جمله در یک ساختارِ $\mathfrak{A}$ که آن را با

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

نشان می‌دهیم، آشنا شدید. اگر $\mathfrak{A} \models \varphi$ آنگاه می‌گوییم **ساختارِ $\mathfrak{A}$ مدلی برای جمله‌ی φ است.**

مثال ۹. یک زبان $\mathcal{L}$ انتخاب کنید و در آن زبان، یک جمله‌ی φ بنویسید به طوری که برای هر $\mathcal{L}$ ساختار $\mathfrak{M}$ داشته باشیم:
اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ و M متناهی باشد، آنگاه تعداد اعضای M زوج است.

اثبات. زبان مورد نظر را به صورت $\mathcal{L} = \{E\}$ می‌گیریم که در آن E نمادی برای یک رابطه‌ی دو موضعی است. جملات زیر رادر نظر بگیرید:

- $\varphi_1 : \forall x \quad E(x,x)$
- $\varphi_2 : \forall x,y \quad E(x,y) \rightarrow E(y,x)$
- $\varphi_3 : \forall x,y,z \quad E(x,y) \wedge E(y,z) \rightarrow E(x,z)$
- $\varphi_4 : \forall x,y,z \quad ((x \neq y) \wedge (x \neq z) \rightarrow (E(x,y) \wedge E(x,z) \rightarrow y = z))$
- $\varphi_5 : \forall x \quad \exists y \quad (x \neq y \wedge E(x,y))$

قرار دهید:

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_5$$

اگر $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشد آنگاه روی M یک رابطه‌ی دوتایی $E^{\mathfrak{M}}$ وجود دارد. اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ آنگاه $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه‌ی هم ارزی است، که هر کلاس آن دقیقاً دو عضو دارد. پس اگر M متناهی باشد، آنگاه $|M|$ (تعدای اعضای M) زوج است.

□

مثال ۱۰. در یک زبان مناسب یک جمله‌ی φ بنویسید به طوری که اگر $\mathfrak{M} \models \phi$ آنگاه $\mathfrak{M}$ یک گروه باشد.

پاسخ. زبانِ $\mathcal{L} = \{*, e\}$ را در نظر می‌گیریم که در آن یک تابع دو موضعی است (که آن را برای عمل ضرب گروه لازم داریم) و e یک ثابت است (که آن را برای عضو خنثای گروه نیاز داریم). حال جملات زیر را در نظر بگیرید:

۱. $\varphi_1 : \forall x \quad x * e = e * x = x$
۲. $\varphi_2 : \forall x \quad \exists y \quad x * y = y * x = e$
۳. $\varphi_3 : \forall x,y,z \quad x * (y * z) = (x * y) * z$

حال دقت کنید که اگر $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد و $\mathfrak{M} \models \varphi_۱ \wedge \varphi_۲ \wedge \varphi_۳$ آنگاه $(M, *^{\mathfrak{M}}, e^{\mathfrak{M}})$ یک گروه است که عنصرِ خنثای آن $e^{\mathfrak{M}}$ است. برای مثال، $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, ۰) \models \varphi$ یا $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q} - \{۰\}, \cdot, ۱) \models \varphi$ که در آنها به ترتیب داریم $*^{\mathfrak{Z}} = +$ و $e^{\mathfrak{Z}} = ۰$ و $*^{\mathfrak{Q}} = \cdot$ و $e^{\mathfrak{Q}} = ۱$. $\square$

تعریف ۱۱. به یک مجموعه از جملات در زبانِ $\mathcal{L}$ یک $\mathcal{L}$تئوری گفته می‌شود.

مثلاً $T_{group} = \{\varphi_۱, \varphi_۲, \varphi_۳\}$، مطابق نمادهای مثالِ قبل، تئوری گروه‌هاست.

تعریف ۱۲. اگر T یک Lتئوری باشد، می‌گوییم $\mathfrak{M} \models T$ (بخوانید $\mathfrak{M}$ مدلی برای تئوریِ T است) هرگاه برای هر $\varphi \in T$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi$.

توجه ۱۳. تئوری T می‌تواند نامتناهی جمله داشته باشد.

مثال ۱۴. مطابق نمادهای بالا، $\mathfrak{Z} \models T_{group}$ و $\mathfrak{Q} \models T_{group}$.

تمرین ۱. در یک زبان مناسب $\mathcal{L}$ یک تئوری T بنویسید به طوری که اگر $\mathfrak{M} \models T$ و $\mathfrak{M}$ متناهی باشد، آنگاه اندازه‌ی $\mathfrak{M}$ به صورت $۲^n.۳^m$ باشد برای $m, n \in \mathbb{N}$.

توجه ۱۵. زبان نیز می‌تواند نامتناهی باشد.