مبانی ریاضیات

محسن خانی
دانشگاه صنعتی اصفهان

۱۱ خرداد ۱۴۰۲

هم سؤال از علم خیزد هم جواب
همچنانک خار و گل از خاک و آب
مولوی

پیش‌گفتار

هدف از تألیف [۱] این کتاب، پرداختن به مبانی اصول موضوعه‌ای علم ریاضی در سطح یک دانشجوی ترم اولی ریاضی است. در این کتاب کوشیده‌ام که به ساده‌ترین زبان به سوالات دشواری مانند سوالات زیر پاسخ دهم: علم ریاضی بر پایهٔ چه مسلماتی نهاده شده است؟ روش ایجاد علم ریاضی چیست؟ تا کجا می‌توان به این علم اعتماد کرد؟ و ریاضی از پاسخ به چه سوالاتی ناتوان است؟ کوشیده‌ام که خواننده را در مواجهه با این سوالات قرار دهم و پاسخ آنها را با زبانی که برای دانشجوی ترمهای اول کارشناسی قابل فهم باشد فراهم آورم.

نگرانی من از این است که درس مبانی ریاضی، در بسیاری از دانشگاه‌های کشور تنها به درسی برای ارائهٔ پیش‌نیازهای ریاضی لازم برای کسب مدرک کارشناسیِ ریاضی تقلیل یافته است؛ شاید کلمهٔ «مبانی» به اشتباه معنا شده است. حال آنکه در حقیقت، مبانی ریاضی عنوانِ یک گرایش عمیق و بنیادی علمِ ریاضی و دارای پیچیدگی‌ها و ظرافتهای فراوان است. درنتیجه، تدریس مبانی ریاضی از زمرهٔ امور سَهلِ مُمتَنِع است. درست است که در دانشگاه‌ها اساتید با گرایشهای علمی مختلف به تدریس این درس می‌پردازند و احتمالاً به تعداد مدرسان این درس، کتاب مبانی ریاضی نوشته شده است، اما از این نباید غافل شد که تدریس و تألیف مبانی ریاضی، بدون تسلط عمیق مدرس یا نویسنده بر ظرافتهای منطقی و فلسفی «مبانی»، تنها به یک چیز ختم خواهد شد: نیمی از ترم تعریفهای تکراری دبیرستانی و نیمی دیگر سردرگمی میان قضایای پیچیده‌ای که قرار است در زندگی هر ریاضیدانی فقط یک بار بیان و اثبات شوند. [۲] ریاضیدانان همیشه خود را در مقام اول، یک «منطق‌دان» و ازاین‌رو صاحب‌نظر در مبانی ریاضی می‌دانند حال آن که اکثر آنها هیچ درس منطقی پاس نمی‌کنند، و اصولاً در هیچ دانشگاهی منطق جزو دروس اجباری نیست. در بخش اول هر کتاب ریاضی نگاهی گذرا به منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها و تلاشی ظاهری برای اثبات ضرورت آن می‌شود، اما بلافاصله در فصلهای بعدی، منطق کنار گذاشته و روش معمول ریاضی بر کتابها حاکم می‌شود. این که هر ریاضیدانان دارای تفکر منطقی است، نباید منجر به این اعتماد به نفس کاذب شود که منطق در همین حد که من بلدم کافی است. کما این که عموماً مهندسان معتقدند که خودشان دروس ریاضی عمومی را از ریاضیدانان بهتر درس می‌دهند! [۳]

رهیافت من در این کتاب، عمدتاً رفع ابهامهائی بوده است که خود، در دوران کارشناسی داشته‌ام. مدام به ذهن دورهٔ کارشناسی خود برگشته‌ام، سوال پرسیده‌ام و جواب داده‌ام. از نظر من، حلقه‌ی مفقوده برای رفع ابهامات دانشجویان رشتهٔ ریاضی، تدریس مبانی ریاضی توسط «اهل آن» است. معتقدم که بسیاری از ابهامات در مبانی ریاضی حتی برای ریاضیدانان در سطوح بالای دانشگاهی نیز به جای خود باقی می‌مانند: این که اصل انتخاب واقعاً چه می‌گوید، کاردینالها دقیقاً چه هستند، حتی چرا گاهی فلشهای اثبات یک خطه و گاهی دو خطه هستند، برای خیلی از کسانی که من می‌شناسم مبهم هستند.

در این کتاب، منطق تنها به صورت گذرا و تزئینی در فصول اول بیان نشده است، بلکه حضورش در سراسر کتاب

---

[۱] وقتی نسخهٔ اولیهٔ این کتاب برای داوری فرستاد شد، داور اولیهٔ دانشکده این کتاب را «غیرتالیفی» و صرفاً «جمع‌آوری» خوانده بود. قوانین نشر ظاهراً این است که کتاب زمانی تألیف است که قضیه‌های اثبات شده توسط خودِ خواننده در آن آمده باشد! صرف نظر از این که همان ناشر چندین کتاب ریاضی عمومی ۱ و ریاضی عمومی ۲ نیز منتشر کرده است که آنها «تألیف» محسوب می‌شده‌اند، برای نگارنده اهمیتی ندارد که نوشتهٔ او چه خطاب شود و کجا چاپ شود. این نوشته سالها به صورت برخط موجود بوده است و کسان زیادی از آن استفاده کرده‌اند.

[۲] همان طور که در زمان دانشجویی ما، دانشجویان رشتهٔ ریاضی را به سخره می‌گرفتند که در دانشگاه مشغول یادگیری اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها هستند.

[۳] لازم به ذکر است که کتاب ارزشمند «مبانی و مقدمات ریاضی» نوشته‌ی استاد بزرگوارم، آقای دکتر ناصر بروجردیان، از بهترین کتابهای موجود است و اینجانب احتمالاً خواسته یا ناخواسته، ولی در هر صورت از سرِ ارادت، از مثالهای این کتاب استفاده کرده‌ام.

جاری است. پرداختن جدی به مفاهیمی مانند اصل انتخاب، انواع نامتناهی‌ها و قضایای بنیادی نظریهٔ مجموعه‌ها، در کنار دو قضیهٔ بنیادی تمامیت و ناتمامیت گودل در منطق ریاضی، نقطهٔ تمایز این کتاب با کتابهای مشابه است. شاید نقطهٔ تمایز دیگر، لحن معلمانهٔ من در نوشتار این کتاب باشد. گاهی، اصل کوتاه‌نویسی و زیبانویسی قربانی این لحن بیان شده است، ولی در عوض، این امکان فراهم آمده است که مسائلی پیچیده مانند قضایای ناتمامیت، دغدغهٔ ذهنی خواننده شود. این کتاب توسط یک منطقدان در حوزهٔ نظریهٔ مدل نوشته شده است و نه یک منطقدان در حوزهٔ نظریهٔ برهان. از این رو،من بر این باورم که، لحن کتاب به درک عوام ریاضیدانان نزدیک‌تر است. [۴]

تدریسِ تقریباً تمام محتوایات این کتاب، در یک ترم امکان‌پذیر است، اما مدرس می‌تواند بنا به سلیقه و دغدغه‌های خود بخشهایی را حذف کند. در ابتدای برخی بخشها تأکید شده است که خواننده می‌تواند از خواندن آنها صرف نظر کند. تلاش برای حفظ تعادل میان دقت ریاضی و آسان‌نویسی چالش اصلی در این کتاب بوده است. می‌شود کتاب در منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها نوشت که سطرها و بخشهای این کتاب را دقیق کند و این جزو پروژه‌های بعدی است.

زحمت تایپ اولیهٔ این کتاب در حین تدریس را همسرم، «دُرسا پیری» کشیده است. صمیمانه قدردان و سپاسگزارِ ایشان هستم. پیش از تبدیل به کتاب، این نوشتار به صورت یک جزوه، مدتها به صورت برخط موجود بوده است و مورد توجه و گاهی تمجید و اظهار لطف [۵] خوانندگان زیادی واقع شده است؛ خصوصاً این که دوست عزیزم «حمزه محمدی» نیز زحمات زیادی روی آن کشیده است. همچنین تدریس سال ۹۸ (از بخش نظریه‌ی مجموعه‌ها به بعد) فیلم‌برداری شده است. سایت درس در آن زمان در آدرس زیر موجود است:

https://mohsen-khani.github.io/9899-1/

فیلمهای درس در آن زمان در آپارات بارگذاری شده‌اند و در آدرس زیر قابل مشاهده هستند:

https://www.aparat.com/v/K4F1B

صرف‌نظر از تبلیغاتی که آپارات ضمیمه‌ی این فیلمها می‌کند، و نیز صرف نظر از کم‌تجربگی مدرس در تدریس اول، به نظر مولف، این فیلمها افزونه‌ی مناسبی بر محتوای کتاب هستند. زحمت فیلم‌برداری و ویرایش فیلمها را نیز همسرم کشیده است ــــ و این کار از آنچه به نظر می‌رسد، خیلی بیشتر وقت می‌گیرد.

سرآخر و پیش از شروع رسمی کتاب، لازم می‌دانم که جوشش معلمانه‌ام در تألیف این سطور را با افسوس، به پیشگاه پدر مرحومم، علی‌اصغر خانی تقدیم کنم که سالهای عمر کوتاه وی نیز با دغدغه‌ها و دلسوزی‌های مشابه معلمانه سپری شد:

سالها بر تو بگذرد که گذار
نکنی سوی تربت پدرت
تو به جای پدر چه کردی خیر
تا همان چشم داری از پسرت
سعدی

[۴] توضیح: اکثر ریاضیدانان مدل‌تئوریست هستند و نه پروف‌تئوریست؛ اگر از آنها بخواهیم نشان دهند که در هر گروه، وارون یک عنصر یکتاست، ابتدا یک گروه را در نظر می‌گیرند و سپس نشان می‌دهند در آن گروه، وارون هر عنصر یکتاست. اگر پروف‌تئوریست باشند، باید بدون توجه به گروه خاصی و فقط با استفاده از اصول‌موضوعهٔ تعریف گروه به یکتا بودن وارون یک عنصر برسند.

[۵] خصوصاً آقای دکتر اسدالهی که چندین بار این کتاب را منبع درس در دانشگاه اصفهان معرفی کردند. دوبار به دعوت ایشان به دانشگاه اصفهان رفتم و در مورد درس مبانی ریاضی سخنرانی کردم. تجربهٔ جذابی بود و البته توجه دانشجویان به خط به خط نوشته‌هایم موجب خوشحالیم شد.

فهرست مطالب

علم چیست؟ منطق چیست؟ مبانی علم ریاضی یعنی چه؟

حسن روی تو به یک جلوه که در آینه کرد
این همه نقش در آیینه‌ی اوهام افتاد
حافظ

پیش از آن که درباره‌ی مبانی ریاضی، به عنوان شاخه‌ای از علم بشری سخن بگویم، بهتر است نخست به تعریفی از علم (دانش، ساینس) و بیان تفاوت آن با دانائی (آگاهی، نالج) بپردازم.

دانائی، کیفیتی است که در انسان، با استفاده از کسب تجارب، تفکر، تعمق و مطالعه حاصل می‌شود. یک استاد دانشگاه، می‌تواند به سبب مطالعات زیادی که دارد، دانا باشد؛ در عین حال یک کشاورز که در مزرعه کار می‌کند نیز می‌تواند به سبب تجاربی که در زندگی کسب کرده است فرد دانائی باشد. عموماً کسی از دانائی‌های کس دیگر با خبر نیست، مگر این که این دانائی از رفتار یا سخن او قابل برداشت باشد. نمونه‌ی افراد چنین دانا و احتمالاً خوش‌سخن را شاید همه‌ی ما در اطرافیان خود دیده باشیم. [۶]

پس دانا بودن یک کیفیت شخصی است و موجب بالاتر رفتن کیفیت زندگی فرد دارندهٔ آن می‌شود. اما ممکن است نتوان دانایی را از کسی به کسی دیگر منتقل کرد. مثلاً ممکن است فرزند کشاورز مثال بالا، از دانائی پدر هیچ بهره‌ای نبرد؛ شاید به این دلیل که پدر توانائی تدریس دانائی خود یا روش کسب آن را به فرزندِ خود نداشته است. شاید هم، مانند مثالی که در بند بعدی آمده است، اصولاً انتقال آن دانائی کار دشواری بوده باشد.

یک مثال از دانائی، «معرفت» است. در این جا شخص نه تنها از طریق تجربه و مطالعه، بلکه شاید به طریق الهام کسب دانائی کرده است. ولی باز هم همان مشکل قبلی برقرار است که شاید عارف نتواند دانائی خود را به دیگران منتقل کند. عموماً از سخن عارفان این ادعا برداشت می‌شود که آنها چیزهائی را می‌دانند و می‌بینند که دیگران نمی‌دانند و نمی‌بینند؛ و بدتر از آن، شاید هیچگاه بدان مقامات نرسند که درک کنند!

هر کسی از ظن خود شد یار من
وز درون من نُجست اسرار من

از بیت مشهور بالا از مولوی، چنین برداشت می‌شود که: «من چیزهائی می‌دانم که دیگران حتی اگر سعی کنند، به ظن خودشان فهمیده‌اند».

بیت بالا شاخص خوبی برای تمایز قائل شدن میان تعریف **دانش** و **دانائی** است. دانش، یا علم، یا ساینس، به دانائی‌ای گفته می‌شود که با سخن گفتن و نوشتن در یک زبان مشترک و دارای قاعده‌های مشخص قابل انتقال به دیگران باشد. در دنیای علم هیچگاه نمی‌توان گفت «من چیزهائی می‌دانم که دیگران هرگز نخواهند فهمید». آن چیزها اگر هم وجود داشته باشند، علم محسوب نمی‌شوند. در واقع آن چیزها دقیقاً زمانی علم به حساب می‌آیند که از طریق منطق به نگارش و سخن درآیند و دیگران نیز با خواندشان به دانائی برسند و در صورت امکان بر آنها بیفزایند. پس یک دانائی، نخست به صورت علم درمی‌آید، سپس تبدیل به یک دانائی عمومی می‌شود و دوباره همان به علم تبدیل می‌شود و این روند ادامه می‌یابد.

پس گفتیم که علم، همان دانائی به‌صورت‌نوشتاریاگفتاروقابل‌انتقال‌درآمده است. [۷] نیز گفتیم که برای انتقال دانائی،

---

[۶] دوستی تعریف می‌کرد که با یک مرد روستائی آشنا شده است که سخنانی بس حکیمانه می‌گفته است. وقتی از او درباره‌ی منبع اطلاعاتش پرسیده است، چنین پاسخ شنیده است که راستش، من از آنجا که سواد ندارم، مجبورم زیاد فکر کنم!

[۷] حتی اگر بصیرتی پشت آن نباشد. حتی کسانی که بصیرت علمی کافی ندارند نیز می‌توانند مقاله‌ی علمی تولید کنند؛ و البته تعداد چنین افرادی کم نیست! حتی در معنای امروزی علم، تمایز قائل شدن میان آثار علمی نیز مشکل است. سیستمهای مختلفی برای ارزیابی کیفیت علم وجود دارند که هیچکدام قابل اتکا نیستند. بوریس زیلبر روزی به من گفت: «در ریاضی محض اگر با کسی دعوامان بشود، کافی است به او بگوییم که قضیه‌های من از قضیه‌های تو سختتر است!»

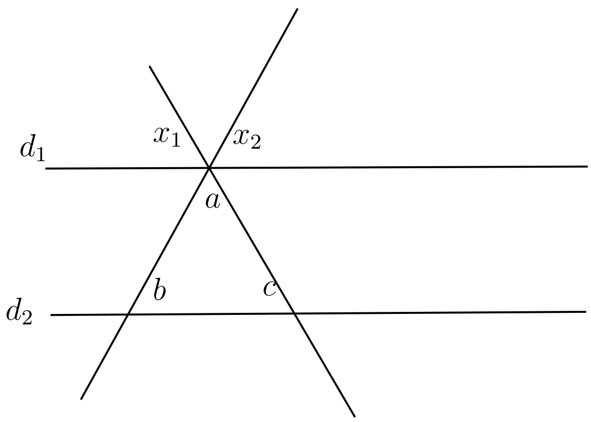
یعنی تبدیل آن به علم، نیازمند زبانی مشترک هستیم. زبانی که هر کس که بر آن تسلط یابد، بتواند سخنان و نوشته‌های ما را درک کند. یک زبانِ علمی چیزی فراتر از یک زبان روزمره، مثلاً زبان فارسی یا انگلیسی است که تنها برای بیان کردن واقعیتها استفاده شود. مهم این است که قواعدی مشترک برای استدلال کردن و توجیه کردن و تضارب آرا وجود داشته باشد. در واقع، زبان علم، یک **زبان منطقی** است. [۸]

پایهٔ علوم جدید بشری، علم ریاضیات است. ریاضیات نیز زبان خود را دارد: زبان ریاضیات ترکیبی است از زبانهای سخن گفتن، مانند فارسی و انگلیسی، و قواعدی برای استدلال. به این ترکیب، «منطق ریاضی» گفته می‌شود. تحصیل ریاضی یعنی فراگرافتن زبان آن و پذیرفتن و به کارگیری نحوه‌ی استدلال در آن زبان. تنها زمانی دانشجویان من می‌توانند آنچه من تدریس می‌کنم را بپذیرند که اولاً زبان فارسی بدانند و ثانیاً قوانین استدلال و حتی اصول موضوعه‌ی مرا قبول داشته باشند.

از این جا، آمادهٔ توضیح دادن مفهوم «مبانی علم» یا مبانی ریاضی می‌شویم. احتمالاً با درک دبیرستانی‌تان از ریاضیات متوجه این شده‌اید که برای هر **قضیه‌ای** که در ریاضیات **اثبات** می‌شود، **استدلالهائی** وجود دارد که ریاضی‌دانان آن استدلالها را قبول دارند. با این حال، بسیاری از این استدلالها، به گونه‌ای هستند که درستی یک قضیه‌ی ریاضی را به درستی یک قضیه‌ی دیگر مربوط می‌کنند. به همین ترتیب آن قضیه، نیز با استدلال درست از قضایای قبلی نتیجه شده است. ادامه دادن این مسیر، ما را به «قضیه‌ای» می‌رساند که اثباتی برای آن وجود ندارد و آن قدر طبیعی و بدیهی به نظر می‌رسد که انتظار داریم همه آن را قبول داشته باشند. **نکته‌ی مهم این است که این سیر بازگشتی باید متناهی باشد.** آن قضایای اولیه را **اصول موضوعه** می‌نامیم. اصول موضوعه، آنقدر بدیهیند که خودشان اثباتی برای خودشان هستند!

واژه‌های «قضیه، اثبات و استدلال» باید به **دقت تعریف** شوند. اما بیایید پیش از آن و به عنوان مثال، یک قضیه‌ی ریاضی را با هم ثابت کنیم:

قضیه. مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180 درجه است (یعنی برابر با زاویه‌ای است که یک خط راست می‌سازد).



اثبات. نخست دو خط موازی **نوعی** به نامهای d_1 و d_2 رسم می‌کنیم. در هر دو خط موازی دیگری مانند این دو هستند.

از آنجا که خطوط d_1 و d_2 موازی‌اند، داریم:

$$x_2 = b \quad , \quad x_1 = c \quad (*)$$

[۸] کلمه‌ی منطق از «نطق» یعنی سخن می‌آید، و کلمه‌ی یونانیِ «Logos» که Logic از آن گرفته شده است، نیز به همین معناست.

می‌دانیم که هر خطی یک زاویه‌ی 180 درجه می‌سازد. همچنین زاویه‌ای که در بالا بین x_1, x_2 قرار دارد برابر با a است. بنابراین داریم:

$$x_1 + a + x_2 = 180^o \quad (**)$$

با **جایگذاری** اطلاعاتِ $(*)$ در $(**)$ نتیجه می‌گیریم که

$$a + b + c = 180^o.$$

□

بیایید بررسی کنیم برای اثبات قضیه بالا از چه چیزهایی استفاده شده است:

۱. زبان (زبان فارسی و حروف ریاضی).

۲. آشنایی با نحوه‌ی صحیح استدلال کردن (مثلاً مجوز جایگذاری مقادیر $(*)$ در $(**)$ را به خود دادیم، یا این که کافی دانستیم که حکم را فقط برای همین دو خطی که خودمان کشیده‌ایم ثابت کنیم).

۳. آشنایی با برخی قضیه‌هایی که قبلا ثابت شده‌اند (دانسته‌های قبلی).

دقت کنید که این که اگر دو خط d_1 و d_2 موازی باشند آنگاه زوایای x_1 و b برابرند، معادل با یکی از **اصول‌موضوعه‌ی** هندسه‌ی اقلیدسی است. ما از این دانسته در اثبات بالا استفاده کردیم. همچنین از این دانسته استفاده کردیم که یک خط، زاویه‌ی ۱۸۰ درجه می‌سازد. در بخشی از اثبات نیز از $(*)$ و $(**)$ کمک گرفتیم. یعنی گفتیم که می‌شود یکی از آنها را در دیگری جایگذاری کرد. این یک **قانون استدلال کردن** است.

قضیه‌ی بالا، یک قضیه در هندسه‌ی اقلیدسی است. احتمالاً در دبیرستان دیده‌اید که هندسه‌ی اقلیدسی، دارای پنج اصل‌موضوعه‌ی مشخص است، که هر قضیه‌ای به نحوی با تعداد متناهی استدلال، از آنها نتیجه می‌شود. وقتی یک سوال هندسهٔ اقلیدسی به یک دانشجوی دبیرستانی داده می‌شود، انتظار این است که او با تکیه بر همان تعداد محدود قوانینی که از درستی آنها اطلاع دارد به پاسخ سوال دست یابد. عموماً این سوالها جذاب هستند چون حل آنها، به نحوی بازی با اصول موضوعهٔ هندسهٔ اقلیدسی است و رسیدن به آنهاست.

اما هندسهٔ اقلیدسی با تمام جذابیتش، تنها یک «بخش» از ریاضیات است که دارای اصول موضوعهٔ مربوط به خود است. طبیعی است که از خود بپرسیم آیا یک تعداد اصول موضوعهٔ مشخص، برای کل علم ریاضیات هم وجود دارد؟ و البته پاسخِ این سوال مثبت است. حقیقت این است که همه‌ی قضایای ریاضی مشابه مثال بالا هستند. برای اثبات آنها از زبانِ فارسی، اصول موضوعه، قضایای قبلی و قوانین استدلال استفاده می‌شود. اما نیاز به یک بخش علم ریاضی داریم تا به ما بگوید که:

۱. زبان ریاضی نوشتن چیست؟

۲. روشهای صحیح استدلال کردن چه هستند؟

۳. اصول موضوعهٔ اولیه‌ای که همهٔ قضایای ریاضیات با استفاده از آنها اثبات می‌شوند چه هستند؟

۴. آیا هر جملهٔ ریاضی، باید با استفاده از اصول موضوعه یا اثبات یا رد شود؟

۵. آیا ممکن است که اصول موضوعهٔ ریاضیات ما را به «اثبات یک تناقض» برسانند؟

و این بخش از علم ریاضی، «مبانی ریاضیات» نام دارد که قرار است در این کتاب، تا حدودی با آن آشنا شویم. قسمت اعظم این درس به سه پرسش اول در بالا اختصاص خواهد یافت. در این راستا، مقدمه‌ای کوتاهی دربارهٔ منطق ریاضی و روشهای استدلال خواهیم داشت و پس از آن به معرفی اصول‌موضوعه‌ای نظریهٔ مجموعه‌ها خواهیم پرداخت. در بخشهای جذابی از درس خواهیم دید که مفاهیم رازآلودی مانند بی‌نهایت و نامتناهی در کجای اصول موضوعه‌ی ریاضیات جای دارند و بررسی خواهیم کرد که آیا می‌توان برخی از اصول موضوعهٔ اولیهٔ ریاضیات را با اصول بهتری جایگزین کرد.

در عین حال پاسخِ سوالهای چهارم و پنجم معمولاً فراتر از سطح درس مبانی ریاضی است، و چه بسا بسیاری از ریاضی‌پیشگان نیز از آنها بی‌خبر باشند. با توجه به اهمیتِ دانستن آنها برای همهٔ ریاضیدانان و خصوصاً ریاضیدانان تازه‌کار، در بخشهای پایانی این کتاب خواهیم کوشید که در حد توان پاسخی برای این سوالها نیز فراهم آوریم.

حال که در این مقدمه، کنجکاوی خواننده را نسبت به سوالهای چهارم و پنجم برانگیخته‌ایم، توضیحی کوتاه دربارهٔ پاسخ به آنها می‌دهیم ولی این توضیح، صرفاً برای برآورده کردن حس کنجکاوی خواننده است و انتظار نداریم در این مقطع از کتاب، برای او قابل فهم کامل باشد.

علت اهمیت سوال چهارم، ارتباط نزدیک آن با علوم رایانه است. **توجه کنید که شیوه‌های استدلال کردن در ریاضی، که همان طور که گفتیم در منطق ریاضی معرفی می‌شوند، شیوه‌های محدود و مشخصی هستند.** این شیوه‌ها را می‌توان به یک رایانه نیز از طریق برنامه‌نویسی منتقل کرد. بنابراین در صورتی که پاسخ به سوال چهارم مثبت باشد، می‌توانیم اصول موضوعه‌ی ریاضی را به همراه شیوه‌های استدلال به یک رایانه بدهیم تا آن رایانه باید بتواند به جای ریاضیدانان فکر کند و تمامی قضایای ریاضی را تولید و اثبات کند. در واقع علم ریاضی برابر می‌شود با هر آنچه از این ماشین خارج شود. مثلاً اگر ریاضیدانان به نحوی مطلعند که اعداد طبیعی یک ویژگی خاص را دارند، این ویژگی را می‌شود با برگشتن در روشهای استدلال به یک یا برخی از اصول موضوعه مرتبط دانست. این گفته در واقع موضوع یکی از سوالات معروف هیلبرت، ریاضیدان برجسته‌ی آلمانی در قرن بیستم بود.

پاسخ به سوال چهارم در حیطهٔ «**قضیهٔ ناتمامیت اول گودل**» قرار می‌گیرد: بنا به این قضیه، اگر یک سیستم از اصول موضوعه را که توسط یک الگوریتم تولید شود در نظر بگیریم، آنگاه این فرض که هر گزارهٔ ریاضی یا خودش یا نقیضش با استفاده از این الگوریتم تولید می‌شود، تناقض‌آفرین است.

و اما در مورد سوال پنجم: از کجا می‌توانید فهمید که اصول موضوعهٔ ریاضیات، منجر به اثبات یک تناقض در ریاضیات نمی‌شوند؟ گفتیم که همه چیز باید با استفاده از اصول موضوعه اثبات شوند. آیا این ممکن است که دو ریاضیدان مختلف با استفاده از اصول موضوعهٔ ریاضیات دو قضیه اثبات کنند که با هم در تناقض باشند؟!

پاسخ به این قسمت از سوال، در حیطهٔ **قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل** قرار می‌گیرد. بنا بر این قضیه، متاسفانه امکان‌پذیر نیست که با استفاده از امکاناتِ خودِ علم ریاضیات بتوانیم اثبات کنیم که در ریاضیات تناقضی رخ نمی‌دهد.

همان طور که پیش‌تر گفته شد، خواهیم کوشید که علاوه بر سه سوال اول، در این کتاب به سوالهای چهارم و پنجم نیز به نحوی مقتضی بپردازیم، و البته این قرار است نقطهٔ قوت تفهیم مبانی ریاضی به سبک ما باشد.

انتظار ما در پایان این دورهٔ درسی این است که دانشجویان آنچنان با نحوه‌ی صحیح استدلال کردن و درست نوشتن آشنا شوند که خودْ جملات و استدلالهای درست ریاضی را از جملات اشتباه و استدلالهای سُست تشخیص دهند. انتظار داریم که دانشجویانمان روش فکر کردن و روش نوشتن را بیاموزند. هر سوال را به عنوان موضوع یک انشاء بدانند و در پاسخش یک انشاء دقیق و خواندنی، دارای شروع، بسط و انتها بنویسند. این انشاء باید به گونه‌ای باشد که یک متخصص ریاضی، بی دردسر آن را دنبال و درک کند. نیز انتظار داریم که پس از گذراندن این درس، سوالهایی از قبیل سوالهای زیر دیگر توسط یک دانشجوی ریاضی پرسیده نشود:

- من که فلان چیز را دقیقاً عین جزوه‌ی شما نوشته‌ام چرا نمره نگرفته‌ام؟!
- آیا می‌شود فلان سوال را با روش فلان استاد حل کنیم؟!
- من تعدادی جمله پشت سر هم نوشته‌ام و خودم قادر به خواندن آنها نیستم. آیا اینها جواب سوال نیست؟

فصل ۱

منطق گزاره‌ها

طبعِ تو را تا هوسِ نحو کرد
صورت صبر از دل ما محو کرد!
ای دل عشاق به دامِ تو صید
ما به تو مشغول و تو با عَمْر و زید
سعدی، گلستان

۱.۱ معرفی اجمالی یک منطق

پیش از ورود به بحث منطق گزاره‌ها، منطق زندگی روزمره‌ی خود را در نظر بگیرید. شما به زبان فارسی صحبت می‌کنید؛ در این زبان، **الفبائی** وجود دارد که به نحو مناسبی با هم ترکیب می‌شوند و **کلمات** و **جملات** را می‌سازند. هر جمله‌ای دارای یک **معنی** و نیز دارای یک **ارزش** (درست یا غلط) است. همچنین شما راه‌هائی برای استدلال کردن دارید که با استفاده از آنها می‌توانید جملات با ارزشِ درست جدیدی با استفاده از جملات با ارزشِ درست قبلی ایجاد کنید. هر منطقی باید این امکانات را در اختیار کاربر خود قرار دهد. پس یک منطق باید موارد زیر را در بر داشته باشد:

۱. نحوه‌ی نوشتن جملات و عبارات در آن منطق (صرف و نحو)

۲. نحوه‌ای برای نسبت دادن معنا به آن جملات و تخصیص ارزش (درستی یا غلطی) به آنها

۳. نحوه‌ای برای استدلال کردن در آن منطق (استدلال، استنتاج)

۴. راهی برای اطمینان از این که با شروع از جملات دارای ارزش درست، و با به کار گیری نحوه‌ی صحیح استدلال، قطعاً به جملات درست خواهیم رسید. (صحت، علت)

در زیر هر کدام از موارد بالا را به طور کوتاه توضیح داده‌ایم. هر چند در طی این فصل و فصل آینده ضمن معرفی منطق گزاره‌ها و منطق مرتبهٔ اول در عمل با این مفاهیم آشنا خواهیم شد.

صرف و نحو یک منطق به ما کمک می‌کند که یک الفبای مناسب داشته باشیم، با استفاده از حروف آن الفبا کلمه‌سازی کنیم، و با استفاده از قواعدی کلمه‌ها را کنار هم بگذاریم و جمله بسازیم. پس صرف و نحو، قواعد

دستوری زبان را به ما می‌دهد و به معنای جملات کاری ندارد. برای مثال، جملهٔ «اسب کتاب می‌خواند» به لحاظ قواعد دستوری زبان فارسی مشکلی ندارد هر چند معنای آن برای ما غریب باشد!

در عین حال، در یک منطق باید امکان دریافت معانی جملاتی که به لحاظ دستوری ساخته می‌شوند و تشخیص ارزش درست و غلط به آنها وجود داشته باشد. این قسمتِ کار، معناشناسی نام دارد. در منطق روزمره، شنوندهٔ جملهٔ «اسب کتاب می‌خواند» لازم است که در ذهنش موجودی به نام اسب، موجودی به نام کتاب و عملی به نام خواندن را بشناسد و سپس تشخیص دهد که آیا این جمله درست یا غلط است.

قوانین استدلال یا استنتاج در یک منطق یعنی قواعد محدودی که با برخی جملاتِ به‌لحاظِ‌دستوری‌درست آغاز می‌شوند و با جملاتی درست به لحاظ دستوری به پایان می‌رسند. عبارت زیر، یک قانون استنتاج است:

$$(P, P \to Q) \vdash Q$$

عبارت فوق (که فعلاً قرار نیست به علائم عجیب و غریب آن فکر کنیم) به ما می‌گوید که اگر به روشی گزاره‌های P و $P \to Q$ قبلاً اثبات شده‌اند، گزارهٔ Q را نیز اثبات شده بدانیم! دقت کنید که این قانون استنتاج، هیچ محدویتی روی معنای $P, P \to Q$ ایجاد نمی‌کند و فقط ما را از دو گزاره، به یک گزاره می‌رساند.

نهایتاً فرض کنید که همهٔ قواعد ظاهری استدلال در یک منطق را بدانیم و با استفاده از آنها از چند گزارهٔ دستوری، به چند گزارهٔ دستوری دیگر برسیم. صحت در یک منطق، متضمن این است که وقتی معانی گزاره‌های اولی را تصور می‌کنیم و این معانی درست هستند، گزاره‌های حاصل شده نیز در دنیای معانی ما درست باشند.

پس از این توضیح، بیایید در این بخش، موارد فوق را در منطقی، به نام منطق گزاره‌ها بشناسیم.

مقدماتی‌ترین منطق در ریاضیات، منطق گزاره‌هاست، که بناست در این بخش بدان بپردازیم و چهار مرحلهٔ بالا را در مورد آن پیاده کنیم. در منطق گزاره‌ها، بسته به هدف مورد مطالعه‌مان، نخست یک مجموعه متشکل از الفبا را ثابت در نظر می‌گیریم و با روشهای خاصی با آن الفبا جمله‌سازی می‌کنیم. به هر کدام از عناصر موجود در مجموعهٔ الفبای منطق گزاره‌ها، یک گزارهٔ اتمی، یا یک اتم می‌گوییم. در بخش پیش رو، با گزاره‌های اتمی و نحوهٔ جمله‌نویسی در منطق گزاره‌ها آشنا خواهیم شد. در بخشهای بعدی، نحوهٔ تخصیص ارزش به یک گزاره در منطق گزاره‌ها را خواهیم آموخت.

۲.۱ گزاره‌نویسی در منطق گزاره‌ها

برای بررسی یک موضوع در منطق گزاره‌ها، نخست یک مجموعه متشکل از جملات خبری ساده، موسوم به گزاره‌های اتمی، یا اتمها را به عنوان الفبا، ثابت در نظر می‌گیریم. گزاره‌های اتمی را با حروفی مانند $p, q, h, \ldots$ نشان می‌دهیم. برای هر گزارهٔ اتمی یک امکان درست بودن، T، و یک امکان غلط بودن، F در نظر می‌گیریم. این دو امکان را برای یک گزارهٔ اتمی p در یک جدول ساده به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

p
T
F

دو گزارهٔ دیگر به نامهای $\perp$ و $\top$ را نیز در الفبای منطق گزاره‌ها قرار می‌دهیم. اولی را گزاره‌ی همواره غلط (تناقض) می‌نامیم و دومی را گزاره‌ی همواره درست می‌نامیم. پس برای هر یک از این دو گزاره تنها یک امکان در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\bot}{\mathrm{F}}$$

$$\frac{\top}{\mathrm{T}}$$

پایان تعریف گزارهٔ اتمی $\square$

به عنوان مثال، وقتی منطق گزاره‌های ما قرار است دربارهٔ یک پدیدهٔ روزمره باشد، هر گزاره‌ی اتمی را می‌توان یک **جمله‌ی خبری ساده** پنداشت. پس جملات زیر، گزاره‌ی اتمی هستند:

ـ دونالد ترامپ انسان است.

ـ هوا بارانی است.

ـ تخته‌سیاه، سبز است.

برای هر کدام از جملات بالا، می‌شود یک ارزش درست یا غلط متصوَر شد. اما جملات زیر گزاره‌ی اتمی به حساب نمی‌آیند، زیرا نمی‌توان ارزشی برای آنها تصور کرد:

ـ فردا خانه‌ی حسن می‌آیی؟

به‌به! چه شود؟!

به عنوان یک مثال دیگر، وقتی منطق گزاره‌های ما قرار است برای گفتگو دربارهٔ اعداد طبیعی استفاده شود، جمله‌ی «۲ یک عدد اول است»، یک گزاره‌ی اتمی است که می‌توان برای آن ارزش درست یا غلط متصور شد. با این حال، جمله‌ی «آیا ۲ اول است؟» یک گزاره‌ی اتمی محسوب نمی‌شود؛ زیرا نمی‌توان به آن ارزش درست یا غلط داد نسبت داد. در همین منطق گزاره‌ها، جمله‌ی x یک عدد اول است، یک گزاره‌ی اتمی محسوب نمی‌شود، زیرا ارزش آن به مقدار x بستگی دارد. اما وقتی برای به جای x یک مقدار مشخص، مثلاً عدد 2 در نظر گرفته شود، آنگاه به جمله‌ای اتمی در منطق گزاره‌ها می‌رسیم.

همان طور که پیش‌تر گفتیم، در یک منطق باید راهی برای ساختن جملات پیچیده‌تر از جملات سادهٔ آن منطق وجود داشته باشد. در منطق گزاره‌ها، برای ساخت همهٔ جملات پیچیده، از گزاره‌های اتمی استفاده می‌شود. برای مثال، در منطق گزاره‌هایی که برای کاربرد روزمره معرفی کردیم، جملهٔ هوا بارانی است و دونالد ترامپ آدم است، یک جمله است از عطفِ دو گزارهٔ اتمی ایجاد شده است. در زیر نحوهٔ ساختن جملات پیچیده‌تر با استفاده از جملات اتمی، در یک منطق گزاره‌ها توضیح داده شده است. دقت کنید که برای این ساخت، نیازمند یک سری «رابط» یا «**ادات**» منطقی هستیم.

تعریف ۱.۱ (نحوهٔ جمله‌سازی در یک منطق گزاره‌ها)**.** فرض کنید یک مجموعهٔ متشکل از گزاره‌های اتمی برای یک منطق گزاره‌ها، ثابت در نظر گرفته شده باشد. مجموعهٔ متشکل از همهٔ «گزاره»های آن منطق گزاره‌ها، با استفاده از قوانین زیر ساخته می‌شود.

- هر گزارهٔ اتمی، یک گزاره است.

- اگر P و Q دو گزاره (چه اتمی و چه غیر اتمی) باشند که قبلاً با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها از گزاره‌های اتمی ایجاد شده‌اند، آنگاه عبارتِ $(P \wedge Q)$ نیز یک گزاره (غیر اتمی) است که آن را عطفِ دو گزاره‌ی P و Q می‌نامیم.

- اگر P و Q دو گزاره (چه اتمی و غیر غیر اتمی) باشند که قبلاً با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها از گزاره‌های اتمی ایجاد شده‌اند، آنگاه $(P \vee Q)$ نیز یک گزاره (غیر اتمی) است که آن را فصل دو گزاره‌ی P و Q می‌نامیم.
- اگر P و Q دو گزاره (چه اتمی و چه غیر اتمی) باشند که قبلاً با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها از گزاره‌های اتمی ایجاد شده‌اند، آنگاه $(P \to Q)$ نیز یک گزاره (غیر اتمی) است. گزاره‌ی $(P \to Q)$ به صورت P آنگاه Q خوانده می‌شود.
- اگر P و Q دو گزاره (چه اتمی و چه غیر اتمی) باشند که قبلاً با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها از گزاره‌های اتمی ایجاد شده‌اند، در این صورت $(P \leftrightarrow Q)$ نیز یک گزاره (غیر اتمی) است. این گزاره به صورت P اگروتنهااگر Q خوانده می‌شود.
- اگر P یک گزاره (چه اتمی و چه غیر اتمی) باشد که قبلاً با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها از گزاره‌های اتمی ایجاد شده‌است، آنگاه $(\neg P)$ نیز یک گزاره (غیر اتمی) است که آن را نقیضِ P می‌خوانیم.

علائم کمکی استفاده شده برای ساختن گزاره‌های بالا، یعنی علائم $\leftrightarrow, \to, \neg, \vee, \wedge$ را **ادوات منطقی** می‌نامیم. دقت کنید که هر عضو مجموعهٔ گزاره‌ها، که با استفاده از قواعد به کار رفته در تعریفِ ۱.۱ ایجاد شده است، یک دنبالهٔ متناهی از علائم است. در تعریفِ ۱.۱ به نحو ضمنی بیان کرده‌ایم که برای نمایشِ گزاره‌های احتمالاً غیراتمی منطق گزاره‌ها، از حروف بزرگ مانند P و Q استفاده خواهیم کرد.

مثال ۲.۱. فرض کنید مجموعهٔ گزاره‌های اتمی منطق گزاره‌های ما، مجموعهٔ زیر باشد:

$$\{p_1, p_2, \ldots\}$$

در این صورت، عبارتهای زیر، گزاره‌هایی در منطق گزاره‌های مورد نظر ما هستند:

$$(\neg p_3) \qquad (p_1 \wedge p_2)$$

$$\big((p_1 \wedge p_2) \vee ((\neg p_3) \longrightarrow p_4)\big) \qquad ((\neg p_3) \longrightarrow p_4)$$

$$((\neg p_3) \longrightarrow p_4) \qquad \big((\neg(\neg p_5)) \longrightarrow (p_2 \wedge p_3)\big)$$

$$\Big(\big((p_1 \wedge p_2) \vee ((\neg p_3) \longrightarrow p_4)\big) \vee \big((\neg(\neg p_5)) \longrightarrow (p_2 \wedge p_3)\big)\Big)$$

دقت کنید که موضوعِ ساخت یک گزارهٔ پیچیده از گزاره‌های ساده‌تر مربوط به گرامر یا دستور زبان است. در واقع دستور زبان منطق گزاره‌ها، به ما کمک می‌کند که هر گزارهٔ پیچیده‌ای به نحوی یکتا از گزاره‌های اتمی ایجاد شود. [۱] این که یک گزاره از لحاظ معنایی چه ارزشی دارد، یا این که ممکن است دو گزارهٔ با ظاهر متفاوت که هر دو با رعایت دستور زبان ایجاد شده‌اند، با همدیگر ارزش یکسانی داشته باشند، به دستور زبان مربوط نمی‌شود و موضوع بحث ما در این لحظه نیست. این امر در زبانهای طبیعی نیز مانند زبان فارسی ممکن است رخ دهد: ممکن است گزاره‌ای از لحاظ دستوری درست ایجاد شده باشد، ولی از لحاظ معنایی فاقد ارزش و اعتبار باشد. گزارهٔ «من فنجان هستم» یک گزاره در زبان فارسی است که ساخت آن از لحاظ قواعد دستوری زبان فارسی مجاز است! نیز دو گزارهٔ «ابرو بالای چشم است» و «چشم زیر ابرو است» از لحاظ دستوری دو گزارهٔ متفاوت هستند هر چند معنای یکسانی دارند. در تمرین زیر، رعایت قواعد دستوری در ساخت گزاره‌های یک منطق گزاره‌ها را بررسی کنید.

[۱] این یک قضیه در منطق گزاره‌هاست که به آن «قضیهٔ خوانش یکتای گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها» گفته می‌شود. برای مشاهدهٔ اثبات می‌توانید به [۳] مراجعه کنید.

تمرین ۱.۱. فرض کنید p, q, r, s و $\{p_1, p_2, \ldots\}$ گزاره‌هایی اتمی در منطق گزاره‌های ما باشند. کدامیک از عبارتهای زیر گزاره‌ای در منطق گزاره‌های مورد نظر است و کدام نیست؟

۱. $\neg((p \to (\neg q)) \to r)$.

۲. $(((p \wedge q) \vee r) \to s)$.

۳. $p \clubsuit q$.

۴. $\forall x \exists y \quad p$.

۵. $p \nleftrightarrow q$.

۶. $p \Rightarrow q$.

۷. $(((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3) \wedge \ldots)$

اگر در پاسخ تمرین بالا، فقط مورد دوم را گزاره تشخیص داده‌اید پاسخ شما درست است. علت این که موارد سوم، چهارم، پنجم و ششم گزاره نیستند این است که در تعریفِ ۱.۱ که قواعد دستوری ساخت گزاره‌ها بیان شده است، نمادهای $\nleftrightarrow, \exists y, \forall x, \clubsuit, \Rightarrow$ جزو ادواتی مجاز که می‌توان از آنها استفاده کرد معرفی نشده‌اند. علت این که اولی جزو گزاره‌ها نیست، این است که هیچ دنباله‌ای که با به کار صحیح دستور زبان ایجاد می‌شود، علامتِ $\neg$ در انتهایش قرار نمی‌گیرد (البته این را می‌شود اثبات کرد!). علت این که مورد ششم، گزاره نیست این است که به‌کارگیری قوانینِ تعریفِ ۱.۱ تنها دنباله‌هایی متناهی ایجاد می‌شوند. به بیان دیگر، هر گزاره، یک دنبالهٔ متناهی از علائم است.

توجه ۳.۱. در اینجا لازم است که یک نکته برای رفع یک ابهام رایج توضیح داده شود: علامت‌های $\forall$ (برای هر) و $\exists$ (وجود دارد یک) در دستور زبان منطق گزاره‌ها نیستند، یعنی نمی‌شود آنها را به اتم‌های یک منطق گزاره‌ها افزود و گزاره‌های پیچیده‌تر ساخت. اما در عین حال، می‌شود در یک منطق گزاره‌ها که برای هدف خاصی استفاده می‌شود، جمله‌ای مانند جملهٔ «یک عدد اول وجود دارد» را به طور کامل به عنوان یک گزارهٔ اتمی قرار داد.

آنچه تا به این جا شرح داده‌ایم، صرف‌ونحوِ منطق گزاره‌ها، یا دستور زبان منطق گزاره‌هاست. یعنی تا این جا تنها گفته‌ایم که روش جمله‌سازی در منطق گزاره‌ها چگونه است. اما دقت کنید که در معرفی یک منطق، تنها دانستن روش جمله‌نویسی کافی نیست؛ علاوه بر آن باید روشی برای تشخیص معانی جملات و تمییز جملات درست و غلط وجود داشته باشد. به بخشی از منطق که به این مهم اختصاص می‌یابد، **معناشناسی** آن گفته می‌شود.

۳.۱ معناشناسیِ منطق گزاره‌ها

در یک منطق گزاره‌ها، معناشناسی عبارت است از بررسی حالات مختلفِ ارزش یک گزاره بر اساس **ارزش گزاره‌های اتمی به کار رفته** در آن، و بر اساس قواعدی که در این بخش تصویب می‌کنیم. به طور خلاصه، معناشناسی یک گزاره در منطق گزاره‌ها، یعنی رسم یک جدول ارزش برای آن.[۲] بیایید یک مجموعهٔ $\{p, q, r, \ldots\}$ از گزاره‌های اتمی را برای منطق گزاره‌هامان ثابت در نظر بگیریم. ارزش‌گذاری را با ساده‌ترین گزاره‌ها آغاز می‌کنیم:

[۲] درست خوانده‌اید! نحوه‌ی ارزش‌گذاری گزاره‌ها را خودمان تصویب می‌کنیم!

تعریف ۴.۱. یک گزاره‌ی اتمیِ p با استفاده از جدول زیر، ارزش‌گذاری می‌شود:

p
T
F

تعریف ۵.۱. فرض کنید P و Q دو گزاره (نه لزوماً اتمی) در منطق گزاره‌ها باشند. ارزش‌گذاری گزارهٔ عطفِ P و Q که آن را به صورت $(P \wedge Q)$ نشان می‌دهیم، با استفاده از جدول زیر تعریف می‌شود:

P	Q	$(P \wedge Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

دقت کنید که بنا به تعریف بالا، گزارهٔ $(p \wedge q)$ تنها زمانی می‌تواند دارای ارزشِ T داشته باشد که همزمان p و q دارای ارزشِ T باشند.

یک نکته که باید نظر یک ریاضیدان جوان را به خود جلب کرده باشد، این است که در تعریفِ ۵.۱ نگفته‌ایم که «بدیهی است که ارزش $(p \wedge q)$ مطابق با جدول بالا تعیین می‌شود». بلکه گفته‌ایم که «ارزش‌گذاری $(p \wedge q)$ با استفاده از این جدول تعریف می‌شود». یعنی ما در حال انعقاد قراردادها و نه در حال یادآوری دانسته‌های پیشین شما هستیم. اما در هر صورت روشی که برای ارزش‌گذاری ریاضیِ گزارهٔ $(p \wedge q)$ بیان کرده‌ایم با آنچه در منطق روزمره انتظار داریم مطابق است: تنها زمانی این گزاره داری ارزش درست است که هم p و هم q دارای ارزش درست باشند.

تعریف ۶.۱. ارزشِ فصل دو گزاره‌ی P و Q که آن را به صورت $(P \vee Q)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

P	Q	$(P \vee Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

همان طور که در تعریف بالا مشاهده می‌کنید، در جدول ارزشِ $(P \vee Q)$ تنها در یک سطر ارزش غلط داریم؛ آن هم جائی که هر دوی P و Q غلط باشند. در اینجا یک نکتهٔ ظریف نهفته است. بنا به ارزش‌گذاری تعریف شده برای $(P \vee Q)$ در منطق گزاره‌ها، علامت «یا» که آن را با $\vee$ نشان داده‌ایم، یای مانع جمع **نیست**. از این رو، «یا» ی منطق گزاره‌ها با «یا» ای که در زبان محاوره‌ای استفاده می‌شود کمی فرق می‌کند. یای محاوره‌ای گاهی مانع جمع است و اگر بخواهیم از قانون تعریف بالا برای معنا کردنِ آن استفاده کنیم، معنی جملات مهمی (!) مثل جمله‌ی زیر دگرگون می‌شود:

این خانه یا جای من است یا جای تو.

در زبان محاوره‌ای گاهی تأکید می‌کنیم که یای مورد نظر ما، مانع جمع نیست:

این کار، یا کار حسن بوده است، یا کار حسین، یا شاید هم کار هر دوی آنها.
برعکس، در ریاضی گاهی باید تأکید کنیم که یای مورد نظر ما، مانع جمع است:

$$\Big((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)\Big).$$

پس بنا به تعریفِ ارزش گزاره‌ی $(p \vee q)$ گزاره‌ی «دو عدد اول است یا سه عدد اول است» گزاره‌ی درستی است.
پیش از ادامه دادن معناشناسی، بد نیست در اینجا گریزی به ادبیات فارسی داشته باشیم و یادآوری کنیم که جمعِ دو چیز در فارسی یعنی داشتن هر دوی آنها با همدیگر. بیت زیر از حافظ را مثال می‌زنم:
عشق و شباب و رندی، مجموعه‌ی مراد است
چون جمع شد معانی، گوی بیان توان زد.

تعریف ۱.۷. اگر P و Q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، ارزش‌گذاری گزاره‌ی $(P \to Q)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

جدول ۱.۱: جدول ارزش گزارهٔ $(P \to Q)$

P	Q	$(P \to Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

دقت کنید که یک بینندهٔ جدول بالا، حق دارید بگوید «ارزش گزارهٔ $(P \to Q)$ فقط زمانهایی برابر با T است که وقتی ارزشِ P برابر با T است، ارزش Q هم برابر با T است.». دربارهٔ چنین اظهارنظرهای بیرونی در مورد جداول ارزش در بخشهای بعدی مفصلاً صحبت خواهیم کرد. در تفسیرِ سطر سوم و چهارم جدول ارزش بالا، می‌گوئیم که گزاره‌ی موردنظر به **انتفاء مقدم** درست است. در این حالت به محضِ دیدن فرض، تلاش برای یافتن درستی گزاره منتفی است! (یعنی گزاره درست است). این نوع ارزش‌گذاری نیز در مقایسه با زبان روزمره کمی عجیب به نظر می‌رسد. فرض کنید که کسی بگوید که «اگر سنگ سخن بگوید، اسب شتر است». این گزاره، با این که بی‌معنی به نظر می‌رسد، در منطق گزاره‌ها درست است! در واقع ما هیچگاه نیاز به تحقیق این نداریم که اسب شتر است، چون می‌دانیم که سنگ سخن نمی‌گوید! شاید در دنیائی که در آن سنگ سخن می‌گوید، اسب شتر باشد!

توجه ۱.۸. یکی از پدیده‌هائی که در حین تدریس توجهم بدان جلب شده است این است که دانشجویان معمولاً در بررسی ارزشِ $(p \to q)$ فقط به q توجه می‌کنند. مثلاً وقتی می‌گوییم «اگر سنگ سخن بگوید اسب شتر است» بلافاصله می‌گویند این جمله غلط است زیرا اسب شتر نیست. بله؛ اسب شتر نیست، ولی اگر سنگ سخن بگوید شاید اسب هم شتر شود! [۳]

تعریف ۱.۹. اگر P و Q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، معناشناسیِ گزاره‌ی $(P \leftrightarrow Q)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

[۳] شاید اینها را هم شنیده باشید که از فرض مُحال همه چیز نتیجه می‌شود، و فرض محال، محال نیست!

P	Q	$(P \leftrightarrow Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

دقت کنید که بنا به جدول بالا ارزشِ $(P \leftrightarrow Q)$ تنها زمانی درست است که P و Q هم‌ارزش باشند.

تعریف ۱۰.۱. اگر P یک گزاره باشد ارزش گزاره‌ی $(\neg P)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

P	$(\neg P)$
T	F
F	T

مشاهده کنید که ارزش گزارهٔ $(\neg P)$ دقیقاً برعکس ارزش گزاره‌ی P تعریف می‌شود. نهایتاً بیان نحوهٔ ارزش‌دهی به گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها با تعریف زیر به پایان می‌رسد:

تعریف ۱۱.۱. گزاره‌ی $\perp$ همواره دارای ارزش غلط است و گزاره‌ی $\top$ همواره دارای ارزش درست است.

همان طور که در بخش قبلی دیدیم، هر گزاره‌ای در منطق گزاره‌ها با استفاده از گزاره‌های اتمی و ادوات منطقی ساخته می‌شود. یک گزارهٔ نوعی در منطق گزاره‌ها را می‌توان به صورت $P = f(p_1, \dots, p_n)$ در نظر گرفت که در آن $p_1, \dots, p_n$ تمامی گزاره‌های اتمی به کار رفته در ساخت گزارهٔ P هستند. ارزش‌دهی به چنین گزاره‌ای، بنا به تعاریف بالا و بنا به ارزش‌دهی به اتمهای $p_1, \dots, p_n$ که در آن به کار رفته‌اند صورت می‌گیرد. در مثالِ زیر، نمونه‌هایی از چنین ارزش‌دهی‌هایی را تمرین می‌کنیم. از آنجا که رسم جدول ارزش، در ریاضیات پیش‌دانشگاهی به اندازهٔ کافی توسط دانشجویان تمرین می‌شود، ما در اینجا تاکید فراوان روی آموزش آن نخواهیم داشت.

مثال ۱۲.۱. جدول ارزش گزاره‌ی $((\neg p) \vee q)$ را رسم کنید.

پاسخ. دقت کنید که اتم‌های به کار رفته در گزارهٔ مورد نظر ما، p, q هستند. همچنین در مسیر ساخت این گزاره، گزارهٔ ساده‌ترِ $(\neg p)$ نیز ساخته شده است. پس جدول زیر را برای بررسی ارزش این گزاره ترسیم می‌کنیم: $\square$

جدول ۲.۱: جدول ارزش گزارهٔ $((\neg p) \vee q)$

p	q	$(\neg p)$	$((\neg p) \vee q)$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

دقت کنید که ردیف آخر دو جدول ارزشِ ۲.۱ و ۱.۱ با هم یکسان هستند؛ یعنی این دو گزاره، زمانی که اتمهای به کار رفته در آنها هم‌ارزش باشند، ارزش یکسانی پیدا می‌کنند. این پدیده را در بخش بعدی به دقت مطالعه خواهیم کرد.

تمرین ۲.۱. جدول ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید:

- $\big((p \to q) \to \neg(q \to p)\big)$
- $((p \to q) \to q)$
- $((p \to q) \wedge (p \to (\neg q)))$
- $(\neg(p \to q))$
- $(\perp \to p)$
- $(p \to \perp)$

تمرین ۳.۱. جدول زیر را کامل کنید.

p	q	؟
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

به عنوان یک راهنمایی برای حل تمرین بالا، فرض کنید به دنبال گزاره‌ای هستید که دارای جدول ارزش زیر است:

p	q	r	?
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	F	T
F	F	T	F

نخست به سطرهائی از جدول توجه کنید که قرار است ارزش گزاره‌ی مورد نظر در آنها T باشد؛ در اینجا سطرهای اول و چهارم و پنجم و هفتم؛ و توجه کنید که قرار است فصل اینها گرفته شود. حال در این سطرها بسته به درست و غلط بودن گزاره‌های اتمی، خود یا نقیضشان را قرار دهید و عطف بگیرید.

بنا بر آنچه گفته شد، گزاره‌ی مد نظر جدول بالا به صورت زیر است:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

تمرین ۴.۱. ثابت کنید که روشی که در توجه بالا گفته شد، ما را به گزارهٔ مطلوب می‌رساند.

۴.۱ گزاره‌های معادل و استلزام

معناشناسی در یک منطق، تنها به بررسی درستی و غلطی جملات خلاصه نمی‌شود. گاهی میان دو گزاره‌ی به لحاظ دستوری متفاوت، ارتباط معنائی وجود دارد و این امر در منطق گزاره‌ها هم می‌تواند رخ دهد. به دو جدول ارزش در مثالِ ۳.۱ و تعریفِ ۷.۱ توجه کنید. همان طور که می‌بینید ستون آخر جداول ارزش دو گزاره‌ی $(p \to q)$ و $((\neg p) \vee q)$ یکسانند، با این که از لحاظ نحوی، دو گزاره‌ی نام برده شده با هم متفاوت هستند. می‌گوییم که دو گزاره‌ی $(p \to q)$ و $((\neg p) \vee q)$ با هم **معادلند** یا با هم هم‌ارزند و می‌نویسیم:

$$(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$$

هم‌ارزی این دو گزاره، در منطق گزاره‌های حاکم بر زبان روزمره هم ملموس است: عبارت اگر باران ببارد، زمین خیس می‌شود، هممعنیِ این سخن است که یا باران نیامده است یا زمین خیس است! پدیده‌ی هممعنائی دو گزاره در معناشناسی هر منطقی حائز اهمیت است. بیایید نخست، هممعنایی دو گزاره در یک منطق گزاره‌ها را به صورتِ دقیق تعریف کنیم:

تعریف ۱۳.۱. می‌گوئیم دو گزاره‌ی P و Q در منطق گزارها هم‌ارز یا معادلند، هرگاه وقتی جدول ارزش آندو بر حسب گزاره‌ای اتمی به کار رفته در آنها کشیده شود، ستون آخر یکسان شود؛ یعنی زمانی که اتمهای استفاده شده در این دو گزاره، ارزش یکسان داشته باشند، ارزش این دو گزاره یکسان شود. در صورتی که این پدیده رخ بدهد می‌نویسیم:

$$P \Leftrightarrow Q.$$

احتمالاً دانشجوی هوشیار به خود بگوید که نمادِ $\Leftrightarrow$ را قبلاً معرفی نکرده بودیم. آیا عبارتِ $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره در منطق گزاره‌هاست؟ اگر چنین سوالی برایتان پیش آمده است در مسیر درستی قرار دارید، و البته رفع این ابهام، مقدمه‌ای برای ورود ما به مباحث کمی دشوارتر است.

رفع ابهام ۱۴.۱. عبارت زیر یک **گزاره** در **منطق گزاره‌ها نیست**.

$$(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q).$$

اگر خاطرتان باشد، هنگام معرفی نمادهای منطقی هیچگاه نگفتیم که در منطق گزاره‌ها، نماد $\Leftrightarrow$ نیز جزو ادوات مجاز برای ساخت گزاره‌ها است. پس در عین حالی که دو عبارتِ $(p \to q)$ و $((\neg p) \vee q)$ هر دو گزاره‌هایی در منطق گزاره‌ها هستند که با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها و با استفاده از اتمهای p, q ساخته شده‌اند، عبارت فوق یک گزاره نیست. شاید بیان بهتر این باشد که عبارت فوق، در منطق گزاره‌هایی که p, q جزو اتمهای آن هستند، یک گزاره نیست، زیرا با قواعد دستوری منطق گزاره‌ها و با استفاده از این اتمها حاصل نمی‌شود.

علامت $\Leftrightarrow$ یک نماد «فرامنطقی» است که در زبان نوشتاری میان من و شما استفاده شده است. دقت کنید که وقتی من و شما درباره‌ی منطق گزاره‌ها صحبت می‌کنیم، میان من و شما نیز یک منطق گفتگو برقرار است. در این منطق گفتگو، که یک **فرامنطقِ** منطقِ گزاره‌ها محسوب می‌شود، من به شما گفته‌ام که هرگاه می‌نویسم

$$P \Leftrightarrow Q$$

شما بدانید که منظور من این است که جداول ارزش دو گزاره‌ی P و Q با هم یکسان هستند. بر منطق گفتگوی میان من و شما نیز قوانینی حاکم است که بعداً درباره‌ی آنها نیز صحبت خواهم کرد.

پس عبارت زیر، یک جمله در زبان گفتگوی میان من و شماست که از بیرون به منطق گزاره‌ها نگاه می‌کنیم.

$$(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$$

معنی آن هم این است که «ستون آخر جدول ارزش گزاره‌ی سمت راست و چپ با هم یکسان است». چنین چیزی را توسط یک گزاره در خودِ منطق گزاره‌های شامل اتمهای p, q نمی‌توان نوشت و ما به عنوان موجوداتی که فرای آن منطق هستیم می‌توانیم درباره‌اش صحبت کنیم.

من و شما حق داریم نمادهای دیگری را نیز بین خودمان قرارداد کنیم که کوتاه‌نوشت برای جملات طولانی باشند. برای درک بهتر استفاده از جملات فرامنطقی به این مثال دقت کنید: تصور کنید که به یک کلاس زبان انگلیسی رفته‌اید و مدرس، به زبان فارسی به شما می‌گوید که دو کلمه‌ی big و $large$ در انگلیسی هم‌معنی هستند. این دو کلمه در زبان انگلیسی نوشته شده‌اند ولی این جمله که این دو کلمه هم‌معنی هستند، در زبان مشترک میان شما و معلم زبان گفته شده است! پس شما با زبان فارسی، دربارهٔ زبان انگلیسی سخنی گفته‌اید؛ و این حق مسلم شماست! شاید در این مقطع، بهترین راه درک مفهوم فرازبانِ منطق گزاره‌ها، حل چند تمرین مرتبط با آن در ادامهٔ بحث باشد.

مثال ۱.۱۵. نشان دهید که

۱. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$

آنچه دراین مثال از ما خواسته شده است، تحقیق این است که جدول ارزش گزارهٔ $(p \leftrightarrow q)$ و گزارهٔ $((p \to q) \wedge (q \to p))$ در دو سطر آخر یکسان هستند. این گفته را در زیر بررسی کرده‌ایم.

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	$((p \to q) \wedge (q \to p))$	$(p \leftrightarrow q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

۲. نشان دهید که گزارهٔ $(p \to q)$ با گزارهٔ عکسِ *نقیض* خود معادل است؛ یعنی نشان دهید

$$(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg q) \to \neg p).$$

عبارت بالا را نیز با جدول ارزش زیر تحقیق می‌کنیم:

p	q	$(\neg p)$	$(\neg q)$	$(p \to q)$	$(\neg q) \to (\neg p)$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

تمرین ۱.۵. آیا $(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p) \to \neg q)$؟

تمرین ۶.۱. آیا چنین است که:

$$((\neg p) \leftrightarrow (\neg q)) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

تمرین ۷.۱. نشان دهید که

$$P \Leftrightarrow Q$$

اگروتنهااگر ستون آخر در جدول ارزش گزاره‌ی $(P \leftrightarrow Q)$ تنها از علامت T تشکیل شده باشد. به بیان بهتر نشان دهید که

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \top].$$

تعریف ۱۶.۱.

۱. گزاره‌ی P را یک *تاتولوژی* می‌خوانیم، هرگاه *همواره* (یعنی تحت هر نوع ارزشی که اتمهای آن داشته باشند) دارای ارزش T باشد؛ به بیان دیگر هرگاه در ستون آخر جدول ارزش آن فقط علامت T ظاهر شود. [۴]

۲. می‌گوییم گزاره‌ی P *مستلزم* گزاره‌ی Q است، هرگاه گزاره‌ی $(P \to Q)$ تاتولوژی باشد، در این صورت می‌نویسیم:

$$P \Rightarrow Q$$

بنا به آنچه دربارهٔ فرامنطق گفتیم، احتمالاً خود به زیرکی دریافته‌اید که $P \Rightarrow Q$ نیز جمله‌ای در زبان منطق گزاره‌های ما نیست؛ بلکه یک جمله در زبان میان من و شما است بدین معنی که «گزاره‌ی $(P \to Q)$ یک تاتولوژی است». همچنین باید دریافته باشید که بنا به تمرین قبل، $P \Leftrightarrow Q$ یعنی $(P \leftrightarrow Q)$ یک تاتولوژی است.

در زبان علم، هر ادعا، یا قضیه یا هر واقعیت علمی، در واقع **«ادعای تاتولوژی بودن یک گزاره»** است. در ریاضی، ادعای تاتولوژی بودن یک گزاره را «قضیه» می‌نامیم.

توجه ۱۷.۱. هر عبارتِ به صورت $P \Rightarrow Q$ را یک **قضیه** در منطق گزاره‌هامان می‌نامیم (در بخشهای بعدی دوباره به این گفته رجوع خواهیم کرد).

مثال ۱۸.۱. گزاره‌ی $(p \vee (\neg p))$ یک تاتولوژی است؛ زیرا جدول ارزش آن به صورت زیر است:

p	$(\neg p)$	$((\neg p) \vee p)$
T	F	T
F	T	T

تاتولوژیِ $(p \vee (\neg p))$ را **اصلِ ردِّ شِقِّ ثالث** می‌خوانند. یعنی حالت سومی نیست، یا خود یک گزاره درست است یا نقیض آن.

مثال ۱۹.۱. نشان دهید

$$((p \wedge q) \to r) \Leftrightarrow (p \to (q \to r))$$

پاسخ. در پاسخ این مثال باید نشان دهیم که $\Big(\big(p \wedge (q \to r)\big) \leftrightarrow \big(p \to (q \to r)\big)\Big)$ یک تاتولوژی است؛ و برای این منظور کافی است دقت کنیم که دو ستون آخر جدول زیر با هم یکسانند:

---

[۴] بعداً خواهیم دید که تاتولوژی‌ها، دقیقاً همان گزاره‌هایی هستند که برایشان «اثباتی» وجود دارد.

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(q \rightarrow r)$	$((p \wedge q) \rightarrow r)$	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

□

تمرین ۸.۱. قضیه بودن عبارتهای زیر را تحقیق کنید.

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow q$$

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$q \Rightarrow (p \vee q)$$

$$((p \rightarrow q) \wedge ((\neg p) \rightarrow q)) \Rightarrow q.$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p).$$

پس وقتی از ما بپرسند که نشان دهیم $p \Rightarrow q$ باید جدول ارزش $p \rightarrow q$ را بکشیم و تحقیق کنیم که در ستون آخر آن فقط علامت T قرار می‌گیرد. خوانندهٔ این کتاب، به فراست دریافته است که اگر بپرسند: «نشان دهید $p \rightarrow q$»؛ سوالشان بی‌معنی است! قضیهٔ زیر فهم ما از فرازبان منطق گزاره‌ها را به چالشی کوچک می‌کشد، البته این قضیه، اساس روش اثبات در ریاضیات است.

قضیه ۲۰.۱. $P \Rightarrow Q$ اگروتنهااگر هر جا که گزاره‌ی P دارای ارزشِ T باشد، گزارهٔ Q نیز دارای ارزشِ T باشد.

اثبات. دقت کنید که بدون کاسته شدن از کلیت بحث، می‌توانیم فرض کنیم که در ساخت گزاره‌های P, Q از اتمهای یکسانی استفاده شده است. فرض کنید که $P \Rightarrow Q$؛ در این صورت در آخرین ستون جدول ارزش گزارهٔ $(P \rightarrow Q)$ فقط ارزش T ظاهر می‌شود. پس هر جا ارزش P برابر با T باشد، ارزش Q نیز برابر با T است.

برای اثبات جهت عکس قضیه، فرض کنید که وقتی جدول ارزش $(P \rightarrow Q)$ را رسم می‌کنیم، هر جا که P ارزش T دارد، Q نیز ارزشِ T دارد. در این صورت دراین جدول، زمانی که P ارزش T دارد گزارهٔ $(P \rightarrow Q)$ ارزش T دارد. از طرفی زمانی که گزارهٔ P ارزش F داشته باشد، بنا به روش تعریف ارزشِ گزارهٔ $(P \rightarrow Q)$، این گزاره دارای ارزش T است. بنابراین گزارهٔ $(P \rightarrow Q)$ در هر حالتی دارای ارزش T، یعنی یک تاتولوژی است؛ و این همان است که به دنبال اثباتش هستیم. □

قضیه ۲۱.۱. $P \Leftrightarrow Q$ اگروتنهااگر $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$. به بیان دیگر، زمانی گزارهٔ P با گزارهٔ Q معادل است که هرگاه که P ارزش درست داشته باشد، Q ارزش درست داشته باشد و هرگاه که Q ارزش درست داشته باشد، P ارزش درست داشته باشد.

اثبات. $P \Leftrightarrow Q$ یعنی $(P \leftrightarrow Q)$ تاتولوژی است. تاتولوژی بودنِ $(P \leftrightarrow Q)$ به معنی تاتولوژی بودنِ $((P \to Q) \wedge (Q \to P))$ است. از طرفی، فقط زمانی در جدول ارزشِ $((P \to Q) \wedge (Q \to P))$ همیشه T داریم که در جدول ارزشِ $(P \to Q)$ و $(Q \to P)$ غیر از T چیزی ظاهر نشود. $\square$

تمرین ۹.۱. نشان دهید که $P \Rightarrow Q$ اگروتنهااگر هر زمانی که ارزش گزارهٔ Q بر حسب اتمهای به کار رفته در آن F باشد، ارزش گزارهٔ P نیز F باشد.

توجه ۲۲.۱. از سه جملهٔ زیر، برای بیان یک واقعیت واحد استفاده می‌شود:

- $P \Rightarrow Q$
- P شرط کافی برای Q است.
- Q شرط لازم برای P است.

بیایید نمودِ تمرینِ ۲۰.۱ و توجهِ ۲۲.۱ را در زبان رومزه بکاویم: پدر علی (که سخنانش تاتولوژی است!) به او گفته است که «اگر درس بخوانی موفق می‌شوی». از سخن پدر علی چه چیزی می‌توان استنباط کرد؟

بیایید این جمله را فرمولبندی ریاضی کنیم:

p : علی درس بخواند

q : علی موفق شود

پس پدر علی، ادعا می‌کند که گزاره‌ی $(p \to q)$ تاتولوژی است. به بیان دیگر، ادعای پدر علی این است که درس خواندن شرط کافی برای موفق شدن است. اما او در مورد عواقب درس نخواندن چیزی ادعا نکرده است؛ در واقع نگفته است که «اگر درس نخوانی موفق نمی‌شوی» یا «**تنها اگر** درس بخوانی موفق می‌شوی». پس پدر علی درباره‌ی ارزش گزاره‌ی زیر اظهار نکرده است:

$$(\neg p) \to (\neg q).$$

به بیان دیگر، او نگفته است که **درس خواندن شرط لازم برای موفق شدن است** (به نظر او، از راههای دیگر هم می‌شود موفق شد!).

باز از طرفی دیگر، بنا به جمله‌ی پدر علی، اگر علی موفق نشود، می‌فهمیم که درس نخوانده بوده است. چون اگر درس می‌خواند، موفق شده بود. علت این است که گزاره‌ی $(p \to q)$ با گزاره‌ی زیر هم‌ارزش است:

$$(\neg q) \to (\neg p).$$

حال فرض کنیم که علی موفق شده است. از این لزوماً نتیجه نمی‌شود که علی درس خوانده است. پدر علی فقط گفته بود که اگر درس بخواند موفق می‌شود، ولی نگفته بود که تنها راه برای موفق شدن درس خواندن است. در واقع او نگفته بود که «موفق می‌شوی اگر و تنها اگر درس بخوانی». پس تاتولوژی بودن گزاره‌ی زیر نیز از سخن پدر علی نتیجه نمی‌شود:

$$(q \to p).$$

مثال ۲۳.۱. بیایید یک تاتولوژی دیگر را نیز در زبانِ روزمره بکاویم:

شرط لازم برای ورود علی به دانشگاه شرکت در کنکور است.

گزاره‌های اتمی زیر را در نظر بگیرید:

علی به دانشگاه وارد شده است: q
علی در کنکور شرکت کرده است: p.

شرط لازم برای ورود علی به دانشگاه، کنکوردادن است، یعنی گزارهٔ زیر تاتولوژی است:

$$(q \to p)$$

اما گزارهٔ فوق معادل با گزارهٔ زیر است:

$$((\neg p) \to (\neg q)).$$

پس وقتی می‌گوئیم شرط لازم برای ورود علی به دانشگاه، کنکور دادن است، یعنی اگر علی کنکور ندهد، به دانشگاه وارد نمی‌شود. به بیان دیگر، **تنهااگر** علی کنکور دهد، علی به دانشگاه وارد می‌شود.

تمرین ۱۰.۱. نشان دهید که دو جمله‌ی زیر با هم معادل نیستند:

۱. $P \Rightarrow Q$

۲. اگر P تاتولوژی باشد، آنگاه Q تاتولوژی است.

در تمرینِ ۱۵.۱ از شما خواسته‌ایم که نشان دهید که عبارت دوم از عبارت اول نتیجه می‌شود.

خلاصهٔ آنچه تا کنون فراگرفته‌ایم این است که معادل بودن دو گزاره‌ی P و Q به معنیِ تاتولوژی بودن گزاره‌ی $(P \leftrightarrow Q)$ است. نیز فهمیده‌ایم که برای تشخیص تاتولوژی بودن یک گزاره، باید جدول ارزش آن را بکشیم و ستون آخر را چک کنیم. کشیدن جدول ارزش برای یک گزاره‌ی دلخواه که از n گزاره‌ی اتمی تشکیل شده است نیازمند بررسی 2^n حالت و عمل طاقت‌فرسایی است. [5] راه دیگری که در منطق گزاره‌ها برای بررسی تاتولوژی بودن گزاره‌ها وجود دارد «استنتاج» است. در این روش، یک تعداد محدود از تاتولوژی‌ها به عنوان قانون یا اصل پذیرفته می‌شوند و اثبات می‌شود که سایر گزاره‌ها فقط در صورتی تاتولوژی هستند که به نحوی از این قوانین و اصول حاصل شوند. در قضیهٔ زیر فهرست این اصول و قوانین آمده است.

قضیه ۲۴.۱. در منطق گزاره‌ها چنین است که:

۱. $(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$.

۲. $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (ویژگی انجمنیِ فصل).

۳. $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ (ویژگی انجمنیِ عطف).

---

[5] این که آیا اصولا روش سریعتری در منطق گزاره‌ها برای تشخیص تاتولوژی بودن گزاره وجود دارد معادل با یک مسئله‌ی باز معروف ریاضی، با نام مسئله‌ی $P = NP$ است. مسئله‌ی $P = NP$ به بیان نادقیق، بیانگر این است که هر مسئله‌ای که تشخیص درست بودن راه حل آن آسان باشد، حلش نیز آسان است!

۴. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (جابه‌جائیِ فصل).

۵. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (جابه‌جائیِ فصل).

۶. $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (پخش‌پذیری عطف روی فصل).

۷. $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (پخش‌پذیری فصل روی عطف).

۸. $(p \vee \perp) \Leftrightarrow p$ (خنثائی گزاره‌ی همواره غلط نسبت به فصل).

۹. $(p \wedge \perp) \Leftrightarrow \perp$ (پوچگری گزاره‌ی همواره غلط برای عطف).

۱۰. $(p \wedge \top) \Leftrightarrow p$ (خنثائی گزاره همواره درست نسبت به عطف).

۱۱. $(p \vee \top) \Leftrightarrow \top$ (پوچی گزاره‌ی همواره درست نسبت به فصل).

۱۲. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (همانی فصل).

۱۳. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (همانی عطف).

۱۴. $(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$ (جذب عطف).

۱۵. $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$ (جذب فصل).

۱۶. $(p \wedge (\neg p)) \Leftrightarrow \perp$

۱۷. $(p \vee (\neg p)) \Leftrightarrow \top$

۱۸. $(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow p$ (قانون اول نقیض‌گیری).

۱۹. $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ (قانون دوم نقیض‌گیری).

۲۰. $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$. (قوانین دِمُرگان).

توجه ۲۵.۱. بیان خلاصه‌ی قضیه‌ی بالا این است که: **گزاره‌های منطق گزاره‌ها به همراه علامتهای منطقیِ** $\wedge, \vee, \neg, \perp, \top$ **تشکیل یک جبر بولی می‌دهند.** [6]

۵.۱ استنتاج در منطق گزاره‌ها و اثبات قضیه

در بخش قبل، با تعریف «قضیه» در ریاضیات آشنا شدیم. گفتیم هر قضیه‌ای در واقع «ادعای تاتولوژی بودن یک گزاره» است. در دنیای معناشناسی، تاتولوژی بودن یک گزاره را می‌توان با رسم جدول ارزش آن تحقیق کرد، اما «استنتاج» یعنی دریافتن تاتولوژی بودن یک گزاره با استفاده از قواعدی محدود و بدون توجه به جدول ارزش آن.

تعریف ۲۶.۱. به روندی که طی آن تاتولوژی بودن یک گزاره با استفاده از قواعدی محدود احراز می‌شود، یک استنتاج گفته می‌شود.

[6] مورد اول در قضیه به جبر بولی ربطی ندارد. این مورد تنها بیان این است که نمادِ $\rightarrow$ از نمادهای $\neg, \vee$ به دست می‌آید.

بیایید پیش از ورود به مبحث استنتاج، یک بار دیگر نکات مهم منطق گزاره‌ها را مرور کنیم:

۱. در منطق گزاره‌ها، یک روش دستوری برای ساختن جملات داریم. در دستور زبان، معنای گزاره‌ها برای ما اهمیتی ندارد و تنها رعایت قوانین دستوری مهم است.

۲. یک روش برای تخصیص معنا به گزاره‌ها، یعنی تشخیص ارزش آنها داریم. در اینجا برای گزاره‌هایی که به لحاظ دستوری با رعایت قوانین ساخته شده‌اند، جدول ارزش می‌کشیم.

۳. گزاره‌هایی که همیشه ارزش درست دارند، را قضیه (یا تاتولوژی) می‌نامیم. در روش معناشناسانه با استفاده از جدول ارزش، تاتولوژی بودن یک گزاره را بررسی می‌کنیم.

۴. یک روش دیگر برای تشخیص تاتولوژی بودن گزاره‌ها داریم که در آن هیچ استفاده‌ای از جدول ارزش (یا معنای) گزاره‌ها نمی‌شود. در این روش، که به آن استنتاج گفته می‌شود، تاتولوژی بودن یک گزاره‌ها را تنها با استفاده از قوانینی محدود بررسی می‌کنیم.

۵. قضیهٔ مهمی در منطق داریم، که به ما می‌گوید چه تاتولوژی بودن یک گزاره را با رسم جدول ارزش بررسی کنیم و چه با روشهای محدود استنتاج، نتیجه یکسان است. [۷]

در فصل بعدی خواهیم دید که پنج مورد بالا فقط مختص به منطق گزاره‌ها نیست و هر منطقی قوانین استنتاج مربوط به خود را دارد. در منطق گزاره‌ها، قوانین استنتاج، همانهایی هستند که در قضیهٔ ۲۴.۱ معرفی شده‌اند.

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید P و Q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند. می‌گوییم گزارهٔ Q از گزارهٔ P استنتاج می‌شود، و می‌نویسیم

$$P \vdash Q$$

اگروتنهااگر گزاره‌ی $(P \to Q)$ با متناهی بار استفاده از تاتولوژی‌های معرفی شده در قضیه‌ی ۲۴.۱ (به همراه متناهی بار جایگذاری) حاصل شود؛ یا این که با استفاده از همان قوانین به این رسیم که $(P \to Q)$ با گزارهٔ $\top$ معادل است.

توجه ۲۸.۱. بنا به قضیه‌ای در منطق ریاضی، $P \Rightarrow Q$ اگروتنهااگر $P \vdash Q$. یعنی یک گزارهٔ $(P \to Q)$ زمانی تاتولوژی است که تاتولوژی بودن آن با متناهی بار استفاده از تاتولوژی‌های معرفی شده در قضیه‌ی ۲۴.۱ (به همراه متناهی بار جایگذاری) حاصل شود.

بنا به توجه بالا، در ادامهٔ این درس از نوشتنِ $P \vdash Q$ خودداری و همان نمادِ $P \Rightarrow Q$ را هم برای استلزام و هم برای استنتاج استفاده کرده‌ایم. از این رو، برای نشان دادنِ $P \Rightarrow Q$ می‌توان یکی از دو روش زیر را اتخاذ کرد:

۱. روش استلزام، یعنی با کشیدن جدول ارزش، تحقیق کرد که $(P \to Q)$ یک تاتولوژی است.

۲. روش استنتاج، یعنی با به کارگیری قواعد معرفی شده در قضیهٔ ۲۴.۱ تاتولوژی بودن گزارهٔ $(P \to Q)$ را (یا معادل بودن آن با یک تاتولوژی) را حاصل آورد.

مثال ۲۹.۱. با استفاده از روش استنتاج، نشان دهید که $p \Rightarrow (p \vee q)$.

[۷] به این قضیه، قضیهٔ درستی و تمامیت گفته می‌شود.

اثبات. باید نشان دهیم که گزاره‌ی $(p \to (p \vee q))$ یک تاتولوژی است، و برای این کار از قوانین قضیهٔ ۲۴.۱ مجازیم استفاده کنیم. داریم

$$(p \to (p \vee q)) \overset{\text{بنا به قانون ۱}}{\Longleftrightarrow} ((\neg p) \vee (p \vee q))$$

$$\overset{\text{بنا به قانون ۲}}{\Longleftrightarrow} (((\neg p) \vee p) \vee q)$$

$$\overset{\text{بنا به قانون ۴}}{\Longleftrightarrow} ((p \vee (\neg p)) \vee q) \overset{\text{بنا به قانون ۱۷}}{\Longleftrightarrow}$$

$$(\top \vee q) \overset{\text{بنا به قانون ۸}}{\Longleftrightarrow} \top$$

از آنجا که $\top$ یک تاتولوژی است و گزاره ما با آن معادل است، نتیجه می‌گیریم که گزاره‌ی مورد نظر ما تاتولوژی است. □

تمرین ۱۱.۱. عبارتهای زیر را ثابت کنید.

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r)$$
$$((p \to q) \wedge (r \to s)) \Rightarrow ((p \vee r) \to (q \vee s))$$
$$((p \to q) \wedge (r \to s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \to (q \wedge s))$$

گفتیم که قوانینی که در قضیهٔ ۲۴.۱ بیان شده‌اند برای اثبات همهٔ تاتولوژی‌ها کافی هستند؛ اما علاوه بر آن، هر تاتولوژی‌ای را که اثبات می‌شود، می‌توان به عنوان یک قانون جدید استنتاج پذیرفت و از آن برای استنتاجهای تازه استفاده کرد. در زیر چند قانون معروف استنتاج را آورده‌ایم. اولینِ آنها که قیاس استثنائی نام دارد، می‌گوید که اگر گزاره‌ی $(P \to Q)$ و گزاره‌ی P هر دو به نحوی استنتاج شده باشند (یعنی تاتولوژی بودن آنها طی یک استنتاج به دست آمده باشد) آنگاه گزاره‌ی Q نیز استنتاج‌شده است.

قضیه ۳۰.۱.

۱. $((p \to q) \wedge p) \Rightarrow q$ قیاس استثنائی [8]

۲. $((p \to q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow \neg p$ نفی تالی [9]

۳. $(p \to \perp) \Rightarrow (\neg p)$.

۴. $(p \to q) \iff ((p \wedge (\neg q)) \to \perp)$ برهان خُلف [10] [11]

[8] modus ponens

[9] modus tollens

[10] reductio ad absurdum

[11] خواننده‌ی منطق‌دان حق دارد با دیدن این قضیه بر من خرده بگیرد. بیان این قضیه نادرست است. به عنوان مثال، قیاس استثنائی باید به این صورت بیان شود که اگر P یک تاتولوژی باشد (یا اثبات شده باشد) و $P \Rightarrow Q$ نیز یک تاتولوژی باشد (یا اثبات شده باشد)، آنگاه Q یک تاتولوژی است. خواننده‌ی این جزوه بارها با تفاوت $P \Rightarrow Q$ با «از تاتولوژی بودن P تاتولوژی بودن Q نتیجه شدن» مواجه شده است، و می‌داند که از این بیان قضیه، بیان درست قضیه نتیجه می‌شود.

اثبات. اثبات مورد اول. می‌خواهیم نشان دهیم که گزاره‌ی $(((p \to q) \land p) \to q)$ تاتولوژی است. نخست دقت کنید که

$$(p \to q) \overset{\text{بنا به قانون ۱}}{\Leftrightarrow} ((\neg p) \lor q)$$

پس

$$((p \to q) \land p) \overset{\text{بنا به جایگذاری}}{\Longleftrightarrow} (((\neg p) \lor q) \land p) \overset{\text{بنا به قانون ۵}}{\Longleftrightarrow} (p \land ((\neg p) \lor q)) \overset{\text{بنا به قانون ۶}}{\Longleftrightarrow}$$
$$((p \land (\neg p)) \lor (p \land q)) \overset{\text{بنا به قانون ۱۶}}{\Longleftrightarrow} (\bot \lor (p \land q)) \overset{\text{بنا به قانون ۱۰}}{\Longleftrightarrow} (p \land q)$$

بنابراین گزاره‌ی $((p \to q) \land p)$ معادل با گزاره‌ی $(p \land q)$ است. حال اگر استنتاجِ زیر را ثابت کنیم،

$$(p \land q) \Rightarrow q \quad (*)$$

از آن نتیجه خواهیم گرفت که:

$$((p \to q) \land p) \Rightarrow q.$$

اما اثبات استنتاج یادشده، یعنی اثباتِ تاتولوژی بودنِ گزارهٔ $(p \land q) \to q$، که این کار را در زیر انجام داده‌ایم:

$$((p \land q) \to q) \overset{\text{بنا به قانون ۱}}{\Longleftrightarrow} (\neg(p \land q) \lor q) \overset{\text{بنا به قانون ۱۹}}{\Longleftrightarrow} (((\neg p) \lor (\neg q)) \lor q)$$
$$\overset{\text{بنا به قانون ۲}}{\Longleftrightarrow} ((\neg p) \lor ((\neg q) \lor q))) \overset{\text{بنا به قانون ۴}}{\Longleftrightarrow} (\neg p) \lor (q \lor (\neg q))) \overset{\text{بنا به قانون ۱۷}}{\Longleftrightarrow}$$
$$((\neg p) \lor \top) \overset{\text{بنا به قانون ۱۱}}{\Longleftrightarrow} \top$$

اثبات مورد دوم.

$$((p \to q) \land (\neg q)) \overset{\text{بنا به قانون ۱}}{\Leftrightarrow} ((\neg p) \lor q) \land (\neg q)) \overset{\text{بنا به قانون ۵}}{\Leftrightarrow} ((\neg q) \land ((\neg p) \lor q)) \overset{\text{بنا به قانون ۱۴}}{\Leftrightarrow}$$
$$(((\neg q) \land (\neg p)) \lor ((\neg q) \land q)) \overset{\text{بنا به قانون ۱۷}}{\Leftrightarrow} ((\neg q) \land (\neg p)) \lor \bot) \overset{\text{بنا به قانون ۱۱}}{\Leftrightarrow} ((\neg q) \land (\neg p)) \overset{\text{بنا به استنتاجِ }*}{\Rightarrow} (\neg p).$$

اثبات مورد سوم.

$$(p \to \bot) \overset{\text{بنا به قانون ۱}}{\Leftrightarrow} ((\neg p) \lor \bot) \overset{\text{بنا به قانون ۸}}{\Leftrightarrow} (\neg p).$$

اثبات مورد چهارم.

$$((p \land (\neg q)) \to \bot) \overset{\text{بنا به قانون ۱}}{\Leftrightarrow} ((\neg(p \land (\neg q)) \lor \bot) \overset{\text{بنا به قانون ۸}}{\Leftrightarrow}$$
$$(\neg(p \land (\neg q)) \overset{\text{بنا به قانون ۱۹ و ۱۸}}{\Leftrightarrow} ((\neg p) \lor q) \overset{\text{بنا به قانون ۱}}{\Leftrightarrow} (p \to q).$$

□

درس منطق گزاره‌ها را با یک نکتهٔ جذاب به پایان می‌بریم. وقتی می‌گوییم گزارهٔ P اثبات‌پذیر است، یعنی استنتاجی برای $(P \leftrightarrow \top)$ وجود دارد. بنا به توجه ۱.۲۸ این یعنی P تاتولوژی است. حال از تمرینِ ۱.۱۰ نتیجه می‌گیریم که بر خلاف تصور، دو جملهٔ زیر با هم معادل **نیستند:**

۱. از اثبات پذیر بودن P اثبات‌پذیر بودنِ Q نتیجه می‌شود.

۲. $P \vdash Q$.

تمرینهای تکمیلی

تمرین ۱۲.۱. نشان دهید که اگر $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow R$ آنگاه $P \Rightarrow R$.

تمرین ۱۳.۱. نشان دهید که هرگاه که $P \to Q$ و $Q \to R$ دارای ارزش یک باشند، آنگاه $P \to R$ نیز دارای ارزش یک است.

تمرین ۱۴.۱ (ابهام پیش آمده برای یکی از دانشجویان). فرق میانِ $\perp$ و $\neg$ چیست؟ یعنی فرق میان تناقض و نقیض چیست؟

تمرین ۱۵.۱. نشان دهید که اگر $P \Rightarrow Q$، و اگر P تاتولوژی باشد، آنگاه Q تاتولوژی است.

تمرین ۱۶.۱. دو جمله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

۱. اگر تابع f در نقطه‌ی a پیوسته باشد، آنگاه تابع f یک تابع مطلوب است.

۲. اگر تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع f یک تابع مطلوب است.

کدام جمله‌ی بالا از دیگری نتیجه می‌شود؟ [۱۲]

تمرین ۱۷.۱. فرض کنید که ارزش گزاره‌ی $(p \to q)$ T باشد. ارزش کدامیک از گزاره‌های زیر برابر با T است:

۱. $((p \to r) \to (q \to r))$.

۲. $((q \to r) \to (p \to r))$.

تمرین ۱۸.۱. فرض کنید که $A \subseteq B$. کدامیک از دو جملهٔ زیر درست است؟

۱. اگر من از $A \subseteq C$ خوشحال بشوم آنگاه من از $B \subseteq C$ خوشحال می‌شوم.

۲. اگر من از $B \subseteq C$ خوشحال بشوم آنگاه من از $A \subseteq C$ خوشحال می‌شوم.

تمرین ۱۹.۱. محتوایِ تمرینِ ۱۵.۱ را به صورت استنتاجی تعبیر کنید (مشابه آنچه در پایان این بخش دربارهٔ تمرینِ ۱۰.۱ گفته‌ایم.)

تمرین ۲۰.۱. نشان دهید که $P \Rightarrow (R \vee S)$ اگروتنهااگر $((P \wedge (\neg R)) \Rightarrow S)$.

خلاصهٔ فصل اول. در منطق گزاره‌ها، یک مجموعه از متشکل از گزاره‌های اتمی را به عنوان الفبا در نظر می‌گیریم. این الفبا با استفاده از نمادهای منطقیِ $\neg, \wedge, \vee, \to$ در ساخت «گزاره‌ها» استفاده می‌شوند. هر گزارهٔ منطق گزاره‌ها به صورت $f(p_1, \ldots, p_n)$ است که در آن p_i ها گزارهٔ اتمی هستند. در معناشناسی برای چنین گزاره‌ای یک جدول ارزش کشیده می‌شود که ارزش آن را بر حسب ارزش گزاره‌های به کار رفته در آن نمایان می‌کند. گزاره‌ای که صرف‌نظر از ارزش اتمهای به کار رفته در آن، همیشه ارزش درست داشته باشد، یک تاتولوژی نامیده می‌شود. قضیهٔ تمامیت بیان‌گر این است که تاتولوژی‌ها دقیقاً همان گزاره‌هایی هستند که برای آنها اثباتی وجود دارد. اثبات یک گزاره، یعنی رسیدن به آن، بدون توجه به جداول ارزش و تنها با به کارگیری قوانین محدود جبر بولی گزاره‌ها.

---

[۱۲] جواب: احتمالاً بر خلاف تصور شما، جمله‌ی دوم از جمله‌ی اول. علت: تمرین!

فصل ۲

منطق مرتبه‌ی اول

دل عارفان ربودند و قرار پارسایان
همه شاهدان به صورت، تو به صورت و معانی
حافظ

در فصل قبل درباره‌ی منطق گزاره‌ها، به عنوان یک منطق صفرویکی حاکم بر فکر ریاضی صحبت کردیم و با استنتاج/استلزام در آن آشنا شدیم. منطق گزاره‌ها پایه‌ای ترین منطق ریاضی است؛ بدین معنی که در هر منطق دیگر ریاضی، هرگاه به گزاره‌های ساخته‌شده توسط اتمهای دارای ارزش صفر و یک برسیم، برای تعیین درستی آنها از منطق گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. در این بخش، با یک منطق پایه‌ای دیگر ریاضی به نام «منطق مرتبه‌ی اول» آشنا می‌شویم، که البته قرار است باقی این کتاب نیز بر پایهٔ آن به معرفی مبانی علم ریاضیات بپردازد.

جملهٔ زیر را در نظر بگیرید:

هر عدد طبیعی، اول است.

به عنوان یک گزارهٔ ریاضی، شما به جملهٔ بالا ارزش F را اختصاص می‌دهید؛ اما چگونه چنین تشخیصی داده‌اید؟ احتمالاً اجزای زیر در این تشخیص استفاده شده‌اند:

۱. شما معنای «اعداد طبیعی» را می‌دانید.

۲. شما معنای عبارت «x یک عدد اول است را می‌دانید».

۳. می‌توانید به جای x اعداد طبیعی مختلفی را قرار دهید و ارزش جملهٔ حاصل شده را (در منطق گزاره‌ها) بسنجید. مثلاً می‌دانید که جملهٔ 2 یک عدد اول است درست است اما جملهٔ 4 یک عدد اول است، غلط است.

۴. همین که جملهٔ «4 یک عدد اول است» غلط است، برایتان کافی است که تشخیص بدهید جملهٔ «هر عدد طبیعی اول است» غلط است.

پس شما، همین حالا هم با **منطق مرتبهٔ اول** (یا منطق محمولات، یا منطق سورها) آشنایید؛ اما نیاز است ما در این درس، پایه‌های این منطق را نیز به طور دقیق توضیح دهیم. مانند منطق گزاره‌ها، در منطق مرتبهٔ اول نیز، اجزای زیر را خواهیم داشت:

۱. روش صحیح جمله‌نویسی را معرفی خواهیم کرد.

۲. روشی برای تشخیص معنای جمله‌ها معرفی خواهیم کرد.

۳. گزاره‌هایی که همواره معنای درست دارند برایمان حائز اهمیت خواهند بود. تحقیق همواره درست بودن آنها را با روشی معناشناسانه فراخواهیم گرفت.

۴. به این اشاره خواهیم کرد، که بدون توجه به معانی نیز می‌توان همواره درست بودن جملات را بررسی کرد؛ این روش را استنتاج خواهیم نامید.

۵. اشاره خواهیم کرد که چه با روش استنتاج و چه با روش معناشناسانه می‌توان همواره درست بودن یک گزاره را بررسی کرد و هر دو نتیجهٔ یکسانی دارند.

در بخش بعدی، نخست به قواعد دستوری خواهیم پرداخت.

۱.۲ صرف و نحوِ منطق مرتبه‌ی اول

در منطق مرتبهٔ اول، بسته به موضوعی که می‌خواهیم درباره آن صحبت کنیم نخست یک مجموعهٔ الفبای لازم را انتخاب می‌کنیم. مجموعهٔ الفبا، که به آن یک «زبانِ مرتبهٔ اول» هم گفته می‌شود، می‌تواند شامل علامتهایی برای اشاره به تابع‌ها، یا علامتهایی برای اشاره به رابطه‌ها باشد. مثلاً اگر موضوع مورد نظر، جمع اعداد باشد، یک علامتِ $+$ برای تابع جمع در مجموعهٔ الفبا قرار داده می‌شود و اگر قرار باشد دربارهٔ ترتیب اعداد صحبت شود، یک علامت $<$ برای رابطهٔ ترتیب در این مجموعهٔ الفبا قرار داده می‌شود. پس از آن، با استفاده از مجموعهٔ الفبا و با استفاده از امکانات دستوری زیر، «فرمول‌سازی» می‌شود:

۱. ادواتِ منطقی منطق گزاره‌ها، یعنی

$$\wedge, \vee, \neg, \leftrightarrow$$

۲. دو علامتِ $\exists$ و $\forall$ که به ترتیب «سور وجودی» و «سور عمومی» نام دارند.

۳. حروف انگلیسیِ $x, y, z, \ldots$ که به آنها «متغیر» گفته می‌شود.

۴. علامتِ $=$ که به آن علامت «تساوی» گفته می‌شود.

۵. دو علامتِ) و (به نامهای پرانتز باز و پرانتز بسته.

خواننده باید در اینجا از ما انتظار داشته باشد که قوانین دقیق دستوری‌ای را شرح دهیم که به ما بگویند چگونه علامتهای بالا می‌توانند با هم ترکیب و موجب ساخت فرمولها یا جملات [1] بشوند. این قوانین موجودند ولی پرداختن با واسواس زیاد به آنها، هدف ما نیست و چه بسا ما را در این مرحله از اصل کار منحرف کند؛ افزون بر آن دستورزبان همیشه ملال‌آور است [2] و آموزش دستور زبان منطق مرتبهٔ اول نیز از این قاعده مستثنا نیست. شرح دقیق چنین قواعدی را می‌توانید در هر کتاب منطقی مانند [۳]،[۲]،[۱۰]،[۸] بیابید.

[1] میان جمله و فرمول در منطق تفاوتی هست ولی ما در این درس بدان نخواهیم پرداخت. از این به بعد از دو کلمهٔ جمله و فرمول به جای هم استفاده خواهیم کرد.

[2] رجوع کنید به کتابهای عربی دورهٔ دبیرستان!

اما توضیح مختصر این قواعد بدین صورت است. فرض کنید که الفبای ما حاوی یک نماد $R(-,-)$ برای سخن گفتن دربارهٔ «رابطهٔ میان دو چیز» و یک نماد $f(-)$ برای سخن گفتن دربارهٔ یک تابع باشد. قاعدهٔ اول این است که ساده‌ترین جملات، که می‌توانید آنها را جملهٔ اتمی بنامید، به صورت $R(x,y)$ و $f(x)=y$ هستند. قاعدهٔ دوم این است که اگر بدانیم که φ, ψ جملاتی هستند که با استفاده درست از قواعد ساخته شده‌اند آنگاه $(\varphi \wedge \psi)$، $(\varphi \vee \psi)$، $(\varphi \to \psi)$ و $(\neg\psi)$ هم جمله هستند. نهایتاً قاعدهٔ سوم این است که علاوه بر اینها اگر بدانیم که φ یک جمله است آنگاه $\forall x \quad \varphi$ و $\exists x \quad \varphi$ نیز جمله هستند.

توجه ۱.۲. در نوشتن فرمولها نمادها به این ترتیب نسبت به هم ارجحیت داده می‌شوند: نخست دو نمادِ پرانتز باز و بسته $(\,)$، دوم دو نماد سور عمومی و سور وجودی $\forall, \exists$، سوم نماد نقیض $\neg$، چهارم نمادهای عطف و فصل $\vee, \wedge$، و در پایان، نمادهای $\to, \leftrightarrow$. همچنین در میان نمادهای هم‌ارزش، آنکه زودتر پدیدار شود، ارجح است. از این تعیین ارجحیت برای صرفه‌جویی در تعداد پرانتزهای یک جمله استفاده می‌شود. از این لحظه به بعد، همین قاعده را برای جمله‌های منطق گزاره‌ها هم رعایت خواهیم کرد.

مثال ۲.۲. فرض کنید علامتهای $f(-), R(-,-)$ جزو الفبای ما باشند که f علامتی برای یک تابع و R علامتی برای یک رابطه است. عبارتهای زیر جمله در منطق مرتبهٔ اول هستند:

- $f(x)=y$.
- $R(x,y)$
- $\exists y \forall x \quad f(x)=y$
- $\forall y \exists x \quad (f(x)=y \wedge R(x,y))$.
- $\big(\exists y \forall x \quad f(x)=y\big) \wedge \big(\forall y \exists x \quad (f(x)=y \wedge R(x,y))\big)$

دقت که برای مثال، مورد سوم به این علت یک جملهٔ مجاز است که $f(x) = y$ یک جملهٔ اتمی است، پس $\forall x \quad f(x)=y$ یک جملهٔ مجاز است، پس $\exists y \forall x \quad f(x)=y$ یک جملهٔ مجاز است.

تعریف ۳.۲. در یک فرمول، به متغیری که در دامنهٔ تأثیر یک سور قرار بگیرد، متغیر *پای‌بند* و به متغیری که در دامنه‌ی تأثیرِ هیچ سوری نباشد، متغیر *آزاد* گفته می‌شود.

مثال ۴.۲. فرض کنید مجموعهٔ الفبای ما شامل دو نماد رابطه‌ای $s(-), R(-)$ باشد. دو عبارتِ φ و ψ در زیر، هر دو فرمول هستند:

$$\varphi : \exists x \quad \big(s(x) \wedge R(x)\big)$$

$$\psi : \exists x \quad s(x) \wedge R(x)$$

در فرمولِ φ هر دو حضور متغیرِ x پای‌بند است. اما در فرمول زیر ψ اولین حضور متغیر x پای‌بند و دومین حضور آن آزاد است. در واقع برای تشخیص متغیرهای آزاد و پای‌بند، بنا به نکتهٔ ۱.۲ فرمولِ ψ را می‌توان به صورت زیر پرانتزگذاری کرد:

$$\big(\exists x \quad s(x)\big) \wedge R(x)$$

در همهٔ مثالهای زیر تا پایان این بخش، فرض کرده‌ایم که مجموعهٔ الفبای ما شامل نمادهای رابطه‌ای $R_1(-,-), R_2(,-), R(x,y), S(-)$ باشد.

مثال ۵.۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری و سپس در آن متغیرهای آزاد و پای‌بند را مشخص کنید:

$$\forall x \quad R_1(x,y) \to \exists y(S(y) \vee R_2(x,y))$$

پاسخ. پس از لحاظ کردن ترتیب اولویتها، فرمول بالا به صورت زیر پرانتزگذاری می‌شود:

$$\big((\forall x \quad R_1(x,y)) \to \exists y\big(S(y) \vee R_2(x,y)\big)\big)$$

حال متغیرهای آزاد و پای‌بند را شناسایی می‌کنیم:

$$\Big((\forall x \quad R_1(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}},\overbrace{y}^{\text{آزاد}})) \to \exists y(S(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}) \vee R_2(\overbrace{x}^{\text{آزاد}},\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}))\Big)$$

دقت کنید که در فرمولِ بالا، متغیرِ x یک حضور آزاد و یک حضور پایبند دارد. □

مثال ۶.۲. متغیرهای پای‌بند و آزاد فرمول زیر را مشخص کنید:

$$\forall x\big(R_1(x,y) \to \exists y(s(y) \vee R_2(x,y))\big).$$

پاسخ.

$$\forall x \quad \Big(R_1(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}},\overbrace{y}^{\text{آزاد}}) \to \exists y\Big(S(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}) \vee R_2(\overbrace{x}^{\text{پای‌بند}},\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}})\Big)\Big)$$

□

مثال ۷.۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری و متغیرهای آزاد و پای‌بند آن را مشخص کنید:

$$\forall x R_1(x,y) \to \exists y S(y) \vee R_2(x,y).$$

پاسخ.

$$\Big(\forall x \quad R_1(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}},\overbrace{y}^{\text{آزاد}})\Big) \to \Big(\Big(\exists y \; S(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}})\Big) \vee R_2(\overbrace{x}^{\text{آزاد}},\underbrace{y}_{\text{آزاد}})\Big)$$

□

مثال ۸.۲. متغیرهای آزاد و پایبند فرمول زیر را مشخص کنید.

$$\exists x(S(x) \wedge \forall x\big(R(x,y) \to S(y)\big))$$

پاسخ.

$$\exists x \;\Big(S(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}) \wedge \forall x \;\Big(R(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}},\underbrace{y}_{\text{آزاد}}) \to S(\underbrace{y}_{\text{آزاد}})\Big)\Big)$$

□

مثال ۹.۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری و متغیرهای آزاد و پایبند آن را مشخص کنید.

$$\exists x S(x) \wedge \forall x R(x,y) \rightarrow S(y)$$

پاسخ.

$$\Big(\big(\exists x\, S(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}})\big) \wedge \big(\forall x\, R(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}})\big)\Big) \rightarrow S(\underbrace{y}_{\text{آزاد}})$$

□

مثال ۱۰.۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری و متغیرهای آزاد و پایبند آن را مشخص کنید.

$$R(x,y) \leftrightarrow \exists x \big(R(x,y) \wedge \forall x \quad S(x)\big) \vee \forall y \quad R(x,y)$$

پاسخ.

$$R(\underbrace{x}_{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}}) \leftrightarrow \Big(\exists x \big(R(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}}) \wedge \forall x\ S(x)\big) \vee \forall y\ R(\underbrace{x}_{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{پای‌بند}})\Big)$$

□

تمرین ۱.۲. متغیرهای آزاد و پای‌بند دو فرمول زیر را مشخص کنید:

$$\forall x \exists y \quad R(x,y) \wedge s(x) \rightarrow \exists y \quad s(y)$$

$$\forall x \exists y \quad (R(x,y) \wedge s(x) \rightarrow s(y))$$

۲.۲ سخنی کوتاه دربارهٔ معناشناسی منطق مرتبهٔ اول

پس از آن که دربارهٔ قواعد دستوری منطق مرتبهٔ اول صحبت کردیم، باید سخن کوتاهی دربارهٔ معناشناسی در آن داشته باشیم. معناشناسی منطق اول، یک تشابه با معناشناسی منطقهای روزمره دارد و آن این است که در این منطق، جملات در «جهانهای ذهنی و واقعی» باید «تعبیر» یا «معنا» شوند. به عنوان یک تمثیل، فرض کنید کسی به شما بگوید، «بز بالای کوه است»؛ شما چه تصور خواهید کرد؟

ممکن است بز و کوهی که شما تصور کرده‌اید با شکل بالا فرق کنند، ولی این را می‌دانید که برای فهمیدن معنای جملهٔ ما، شما نیاز به یک جهان ذهنی یا یک جهان واقع و یک تابع در مغزتان دارید که کلمهٔ بز را به یک بز، کلمهٔ کوه را به یک کوه، و بالای چیزی بودن را به یک رابطه در آن جهان تصویر کند. اگر این توابع در مغز شما به گونه‌ای دیگر عمل کنند احتمالاً با شنیدن جملهٔ «بز بالای کوه است» تصویر زیر را تصور کنید:

در بالا هر سه مفهوم «بز، کوه، بالای چیزی بودن» به گونه‌ای دیگر تصور شده‌اند؛ اما باز هم شنونده درکی از گفتهٔ ما داشته است و احتمالاً می‌تواند با همین درک به گفتگو با ما ادامه دهد!

در منطق مرتبهٔ اول، جملات به روشی مشابه معنا می‌شوند. برای بررسی صحت جملهٔ «یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲۰ وجود دارد» باید یک «جهان» متشکل اعداد طبیعی، یک عدد به نام ۲۰ در آن جهان، و یک درک از مفهوم بزرگتر بودن در آن جهان وجود داشته باشد. واضح است که جهان «اعداد طبیعی» یک جهان ذهنی است و فقط در آن جهان است که می‌توان تشخیص داد که این گزاره درست است یا غلط. اما در عین حال ممکن است شنونده‌های گوناگون، جهانهای مختلفی را به نام «جهان اعداد طبیعی» تصور کنند؛ در جهان مورد تصور آنها، ۲۰ چیز دیگری باشد و بزرگتر بودن معنای دیگری داشته باشد. در هر کدام از این جهانها نیز می‌توان به درکی از درست یا غلط بودن جملهٔ مورد نظر رسید. در واقع هر کدام از این شنونده‌ها حق دارند بگویند: «در جهانی که من تصور کرده‌ام جملهٔ بالا درست (غلط) است».

در عین حال، جهانی که باید معنای جملات را در آن تصور کرد، هیچگاه در دستور زبان و از روی خودِ جملات مشخص نمی‌شود، و خواننده است که در جهانی مناسب جملهٔ ما را معنی می‌کند.

مثال ۱۱.۲. فرض کنید مجموعهٔ الفبای ما شامل دو نماد رابطه‌ای $R(-,-), H(-)$ باشد. فرمولِ زیر را در نظر بگیرید:

$$\exists x \exists y \quad \Big(R(x,y) \wedge H(x)\Big).$$

بیایید جملهٔ بالا را در دو جهان متفاوت تعبیر کنیم. جهان اول را مجموعهٔ کلاس درس‌مان در نظر بگیرید. در این جهان، رابطهٔ R را رابطهٔ دوستی و رابطهٔ H را کلاه بر سر داشتن تعبیر کنید. در این صورت جملهٔ بالا می‌گوید که دو نفر به نامهای ایکس و وای موجودند که با هم دوستند و یکی‌شان کلاه بر سر دارد. وقتی جمله را به این صورت و در این جهان تعبیر می‌کنید، بررسی درست یا غلط بودن آن در این جهان نیز به آسانی صورت می‌گیرد.

حال بیایید جهان دوم را جهان متشکل از اعداد طبیعی در نظر بگیرید. در این جهان رابطهٔ R را رابطهٔ عاد کردن اعداد و رابطهٔ H را رابطهٔ اول بودن یک عدد تعبیر کنید. معنای جملهٔ بالا در این جهان و با این تعبیرات بدین صورت است که دو عدد طبیعی به نامهای ایکس و وای موجودند که ایکس اول است و وای را عاد می‌کند. و البته این جمله، در جهان دوم مشخصاً درست است؛ زیرا عدد اول ۲ و عدد ۴ دو عدد طبیعی هستند که این ویژگی‌ها را دارند.

همان طور که گفتیم در منطق مرتبهٔ اول، جهان مورد بررسی هیچگاه از روی خودِ فرمولهایی که به صورت دستوری نوشته شده‌اند مشخص نمی‌شود؛ از این رو قواعد فرمول نویسی منطق مرتبهٔ اول به ما اجازه نمی‌دهند که جملهٔ مورد توجه این مثال را به صورت زیر بنویسیم:

$$\exists x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \quad (R(x,y) \wedge H(x)).$$

خودِ خواننده، بعد از این که جهان مورد نظرش را انتخاب می‌کند، باید بداند که x, y عناصری در همان جهان هستند.

توجه ۱۲.۲. فرض کنید که الفبای زبان شامل یک نماد رابطه‌ای $R(-,-)$ باشد. در این صورت $R(x,y)$ یک جملهٔ مرتبهٔ اول است. جهان را مجموعهٔ اعداد طبیعی و $R(x,y)$ را به معنی «عدد x از عدد y کمتر است» در نظر بگیرید. دقت کنید نمی‌شود دربارهٔ درستی یا نادرستی $R(x,y)$ در این جهان سخن گفت، زیرا مثلاً $R(2,3)$ درست است اما $R(5,2)$ غلط است. در واقع در منطق مرتبهٔ اول نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی جمله‌ای که متغیر آزاد دارد سخنی گفت. وقتی متغیرهای آزاد با عناصری در جهان جایگزین می‌شوند آنگاه می‌شود دربارهٔ درستی یا نادرستی جملهٔ حاصل، آن هم فقط در آن جهان، تصمیم گرفت.

اما وقتی جمله‌ای متغیر آزاد ندارد، کار راحت است. برای مثال جملهٔ $\exists x \exists y \quad R(x,y)$ را در نظر بگیرید که هیچ متغیر آزادی ندارد. این جمله در جهان معرفی شده به این معنی است که دو عنصر وجود دارند که یکی از دیگری کمتر است، و البته این درست است؛ چون چنین عناصری وجود دارند.

تعریف دقیق معناشناسی در منطق مرتبهٔ اول فراتر از درس مبانی ریاضی است، با این حال خواهیم کوشید تا با مثالهای متعدد، خواننده را از درک آن اغنا کنیم. در بخش آینده، کاربرد منطق مرتبهٔ اول را در جمله‌سازی‌های ریاضی و غیر ریاضی روزمره تمرین خواهیم کرد.

۳.۲ تمرینِ ریاضی‌نویسی، معناشناسی و دستور زبان منطق مرتبهٔ اول

تااینجا آموخته‌ایم که در منطق مرتبه‌ی اول بسته به اینکه در مورد چه چیزی صحبت می‌کنیم، یک الفبای مناسب انتخاب می‌کنیم. این الفبا، نام محمولها (یعنی رابطه‌ها) و توابعی هستند که می‌خواهیم دربارهٔ آنها جمله بنویسیم. ادوات منطقی در کنار این الفبا به ساخت جملات به ما کمک می‌کنند. علاوه بر آن دیدیم که جمله‌هایی که در این منطق می‌نویسیم در «جهانهایی» واقعی یا ذهنی معنا می‌شوند. در این بخش می‌خواهیم کمی جمله‌نویسی در منطق مرتبهٔ اول را ورزش کنیم، و این نوع تمرین در خارج از درس مبانی ریاضی نیز، به عنوان یک تمرین برای نوشتن جملات بدون ابهام با استفاده از علائم ریاضی به کارمان خواهد آمد. دقت کنید که در این بخش، مدام از شما خواهیم خواست که جملاتی را در مورد جهانهایی بنویسید ولی درست یا غلط بودن این جملات در آن جهانها یا عاقلانه و سفیهانه بودن آنها برای ما اهمیتی نخواهد داشت.

مثال ۱۳.۲. در مجموعهٔ الفبا یک نماد رابطه‌ایِ $D(-)$ قرار دهید. حال جهان را مجموعهٔ کلاس درس خودمان در نظر بگیرید و در این جهان، $D(-)$ را به صورت زیر معنی کنید:

برقراری $D(x)$ یعنی x یک خانم است.

حال جملاتی با کمک الفبای معرفی شده بنویسید که معنای زیر را داشته باشند:

۱. حداقل 3 دانشجوی خانم وجود دارد.

۲. دقیقاً 3 دانشجوی خانم وجود دارد.

۳. حداکثر سه دانشجوی خانم وجود دارد.

پاسخ.

۱. حداقل سه دانشجوی خانم وجود دارد، یعنی سه نفر وجود دارند که خانم هستند و با هم متفاوت‌اند؛ پس جملهٔ مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\exists x, y, z \quad (D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \wedge \neg(x=y) \wedge \neg(x=z) \wedge \neg(y=z).$$

دقت کنید که در عبارت بالا، $\exists x$ یعنی که یک x در جهان ما (یعنی کلاس درس) وجود دارد. همان طور که پیش‌تر توضیح داده‌ایم این را که x در کلاس درس ماست در منطق مرتبه‌ی اول نمی‌نویسیم، ولی چون جهان را از اول مشخص کرده‌ایم می‌دانیم که سورها درباره‌ی اشیای همین جهان صحبت می‌کنند.

۲. جملهٔ دوم می‌گوید که سه نفر متفاوت وجود دارند که خانم هستند و هر کس دیگری اگر خانم باشد، یکی از آن سه نفر است؛ پس می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}&\exists x, y, z \quad \Big(D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \wedge \neg(x=y) \wedge \neg(x=z) \wedge \neg(y=z) \wedge \\ &\forall t \quad \big(D(t) \to (t=x) \vee (t=y) \vee (t=z)\big)\Big).\end{aligned}$$

۳. توضیح جملهٔ سوم را به خواننده واگذار می‌کنیم؛ این جمله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\exists x, y, z \quad \Big(D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \wedge \forall t \quad \big(D(t) \to t=x \vee t=y \vee t=z\big)\Big).$$

□

مثال ۱۴.۲. فرض کنید در الفبای ما، دو نماد رابطه‌ایِ $A(-,-), D(-,-)$ قرار داده شده است. جهان مورد نظر را یک جامعهٔ انسانی در نظر بگیرید و نمادهای رابطه‌ای ذکر شده را به صورت زیر معنی کنید:

برقراری $A(x,y)$ یعنی x عموی y است و برقراری $D(x,y)$ یعنی x داییِ y است.

با کمک الفبای معرفی شده، جملاتی بنویسید که در جهان مورد نظر ما معنای زیر را داشته باشند:

۱. هر کسی عموئی دارد.

۲. کسی هست که عموی همه است.

۳. هر کسی که عمو داشته باشد، دائی دارد.

۴. اگر همه‌ی افراد عمو داشته باشند، یک نفر هست که دائی دارد.

پاسخ. جملهٔ اول را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x \quad \exists y \quad A(y,x)$$

جملهٔ دوم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\exists y \quad \forall x \quad A(y,x)$$

نوشتن جملهٔ سوم کمی دقت می‌خواهد؛ این جمله می‌گوید که هر کس، اگر عمو داشته باشد دائی دارد؛ پس این جمله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x \quad \Big(\exists y \quad A(y,x) \to \exists z \quad D(z,x)\Big)$$

جملهٔ چهارم، که معنایی کاملا متفاوت با جملهٔ سوم دارد در واقع با اندکی تغییر در محل پرانتزهای این جمله به دست می‌آید:

$$\forall x \quad \exists y \quad A(y,x) \to \exists x \quad \exists y \quad D(y,x)$$

□

تمرین ۲.۲. با کمک الفبا و جهان مثال قبل، جملاتی به معنای زیر بنویسید:

- یک نفر هست که اگر او عمو داشته باشد، همه عمو دارند.
- اگر یک نفر باشد که عمو دارد، همه عمو دارند.

مثال ۱۵.۲. این بار دو محمولِ دو موضعیِ $R(-,-)$ و $D(-,-)$ در الفبا قرار دهید؛ جهان را دانشگاه خودمان در نظر بگیرید؛ $R(x,y)$ را چنین تعبیر کنید که x دوستِ y است و $D(x,y)$ را چنین تعبیر کنید که x دشمنِ y است. حال جملاتی بنویسید که در جهان مورد نظر ما معنی زیر را داشته باشند:

۱. اگر هر کس حداقل دو دوست داشته باشد، آنگاه یک نفر هست که با همه دوست است.

۲. هر کسی که حداقل دو دوست داشته باشد، با همه دوست است.

۳. هر کسی دو دوست دارد که آنها حداکثر یک دوست مشترک دارند.

۴. هر کسی که دوستی داشته باشد، دوست دیگری ندارد.

پاسخ. جملات یاد شده را به ترتیب به صورت زیر می‌نویسیم؛ دقت کنید که در این مثال، پرانتزها چه نقش عمده‌ای در تغییر معنی بازی می‌کنند:

1. $\forall x \quad \exists y_1, y_2 \quad R(x,y_1) \wedge R(x,y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \to \exists z \quad \forall t \quad R(z,t)$
2. $\forall x \quad \Big(\exists y_1, y_2 \quad R(x,y_1) \wedge R(x,y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \to \forall z \quad R(x,z)\Big)$
3. $\forall x \quad \left(\exists y_1, y_2 \quad R(x,y_1) \wedge R(x,y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \forall z \quad \Big(R(y_1,z) \wedge R(y_2,z) \to (x = z)\Big)\right)$
4. $\forall x \quad \left(\exists y \quad R(x,y) \to \forall z \quad \Big(\neg(y = z) \to \neg R(x,z)\Big)\right).$

□

تمرین ۳.۲. در الفبا و جهان مثال قبل، جملهٔ «دشمنِ دشمنِ هر کس، دوست اوست» را بنویسید.

تمرین ۴.۲. به الفبایِ مثالِ ۱۴.۲ یک محمولِ دو موضعیِ $R(-,-)$ اضافه کنید و در جهان همان مثال، این محمول را چنین تعبیر کنید که $R(x,y)$ یعنی این که x، y را می‌شناسد. جمله‌ای بنویسید که چنین معنا بدهد: «عموهای هر کس، دائی‌های او را می‌شناسند».

مثال ۱۶.۲. فرض کنید در الفبا یک نماد رابطه‌ای دو موضعیِ $- < -$ داشته باشیم و همچنین فرض کنید که جهان مورد نظر ما، جهانِ اعداد طبیعی است و در آن $x < y$ بدین معنا تعبیر شده است که x کمتر از y است. جملاتی به معنای زیر بنویسید:

۱. هر عددی از حداقل یک عدد دیگر بزرگتر است.

۲. بزرگتر از هر عددی حداقل یک عدد وجود دارد.

۳. یک عدد هست که از همه‌ی اعداد بزرگتر است.

پاسخ. جملات مورد نظر به ترتیب به صورت زیر می‌نویسیم:

1. $\forall x \quad \exists y \quad \big(\neg(y = x) \wedge y < x\big).$

2. $\forall x \quad \exists y \quad (x < y).$

3. $\exists x \quad \forall y \quad y < x.$

لازم به تذکر چندباره است که در پاسخ مثال بالا نباید بنویسیم

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \ldots$$

علت آن است که در منطق مرتبه‌ی اول، تعلقِ متغیرها به جهان را نمی‌نویسیم و پس از آن که جهان را در نظر گرفتیم، می‌دانیم که هر سور وجودی و عمومی به عناصر آن جهان اشاره دارد. □

توجه ۱۷.۲. زمان تبدیل جملات فارسی به ریاضی، لحاظ کردن کلمهٔ ربطی «که» بسته به این که کجای جمله قرار گرفته است، می‌تواند ابهام برانگیز باشد. مثالهای زیر، که در الفبا و برای جهان مثالِ ۱۵.۲ نوشته شده‌اند کمی وضعیت را روشن می‌کنند:

- هر کسی **که** دوستی دارد، دشمنی دارد.
برای این که جمله‌ی بالا قابل نوشتن در منطق مرتبه‌ی اول باشد، باید آن را به صورت زیر تبدیل کرد: هر کسی اگر دوستی داشته باشد آنگاه دشمنی دارد. پس جمله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x \quad \Big(\exists y R(y, x) \rightarrow \exists z D(z, x)\Big).$$

- هر کس دوستی دارد **که** آن دوست دشمنی ندارد.
جمله‌ی بالا را باید به صورت تبدیل کنیم: «برای هر کس، کسی وجود دارد که دوست اوست و دشمن ندارد».

$$\forall x \quad \exists y \quad \Big(R(x, y) \wedge \forall z \neg D(z, y)\Big).$$

تمرین ۵.۲. در الفبا و برای جهان معرفی شده در مثالِ ۱۵.۲ جملات زیر را بنویسید:

۱. هر کس که دوستی داشته باشد که با همه دوست است، حداقل با دو نفر دوست نیست.

۲. اگر هر کس حداقل یک دوست داشته باشد، آنگاه دو نفر هستند که با هم دوست نیستند.

تمرین ۶.۲. با تعبیرِ $A(x, y)$ به x عموی y است و $D(x, y)$ به x دایی y است، جملاتی با معنای زیر بنویسید:

۱. هر کس که عمو دارد دایی ندارد.

۲. هر کس عمویی دارد که دایی ندارد.

۳. فقط کسانی که عمو دارند دایی دارند.

۴. عموی هر شخصی دایی دارد.

۵. دایی عموی هر کس دایی اوست.

۶. عموی هر شخصی که آن شخص دائی ندارد، دائی اوست.

گاهی اوقات، جهان و معانی الفبای زبان را در کنار هم نشان می‌دهیم؛ به جهان به همراه تعابیر الفبا، یک ساختار گفته می‌شود.

توجه ۲.۱۸. در تبدیل جملات فارسی به ریاضی، گاهی واژهٔ ربطی «و» دانشجویان را به خطا می‌اندازد. گاهی در فارسی «و» به گونه‌ای استفاده می‌شود که نیاز به نوشتن آن نیست. برای مثال جملهٔ «برای هر ایکس و برای هر وای، رابطهٔ R بین ایکس و وای برقرار است را به صورت زیر باید نوشت:

$$\forall x \quad \forall y \quad R(x,y)$$

و نوشتن آن به صورت زیر غلط است:

$$\forall x \wedge \forall y \quad R(x,y)$$

در واقع قوانین دستوری منطق مرتبهٔ اول به ما می‌گوید که اگر φ و ψ دو جمله باشند، آنگاه $(\varphi \wedge \psi)$ یک جمله جدید است. اما $\forall x$ و $\forall y$ جمله نیستند که بینشان بتوان عطف منطقی قرار داد.

مثال ۲.۱۹. در ساختارِ $(\mathbb{N}, \times, +)$ و با به کارگیری عناصری از جهان این ساختار، این جمله را بنویسید: «هر عدد اولِ مخالفِ ۲ فرد است».

پاسخ. دقت کنید که در این مثال به طور ضمنی گفته شده است که جهان مورد نظر ما، مجموعهٔ اعداد طبیعی است و می‌توانیم از توابع جمع و ضرب برای بیان مقصودمان استفاده کنیم. یک فرق این مثال، با مثالهای قبلی این است که در اینجا نمادهای تابعی در الفبا قرار گرفته‌اند اما در مثالهای قبلی فقط با نمادهای رابطه‌ای کار کردیم. همچنین در این مثال به ما اجازه داده شده است از یکی از عناصر جهان، یعنی عدد ۲ در بیان مقصودمان استفاده کنیم.

جمله‌ی بالا باید به جمله‌ی زیر تبدیل شود: هر عددی، اگر اول باشد (یعنی توسط هیچ عددی جز یک و خودش عاد نشود) و مخالفِ ۲ باشد، آنگاه فرد است؛ پس آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x \quad \Big(x \neq 2 \wedge \forall y, z \quad (x = y \times z \rightarrow (y = 1 \vee z = 1)) \rightarrow \exists k \quad x = 2 \times k + 1\Big)$$

□

تمرین ۲.۷. در همان ساختار قبلی، این جمله را بنویسید: «هر دو عدد دارای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هستند»

مثال ۲.۲۰. در ساختارِ $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, <)$ بنویسید که تابعِ $x^2 + x$ در نقطه‌ی a پیوسته است.

پاسخ. با استفاده از امکاناتِ این الفبا، جملهٔ مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall\epsilon\Big(\epsilon > 0 \to \big(\exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall x(x < a+\delta \wedge a < x+\delta) \to$$

$$(x \times x + x < a \times a + a + \epsilon \wedge a \times a + a < x \times x + x + \epsilon)))\Big)$$

با یک کوتاه‌نویسیِ $f(x) = x^2 + x$ و چند کوتاه‌نویسی رایج دیگر، صورت دیگری از نوشتهٔ بالا در زیر آمده است:

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad \Big(-\delta < x - a < \delta \to -\epsilon < f(x) - f(a) < \epsilon\Big)$$

□

توجه ۲.۲۱. همان طور که در بخشهای پیش رو خواهیم دید، همانند منطق گزاره‌ها، در منطق مرتبه‌ی اول نیز علامتِ $\Leftrightarrow$ در ساخت جملات استفاده نمی‌شود. هرگاه از این علامت استفاده شود، مفهومی فرای جملات منطق مرتبه‌ی اول مد نظر است. مثلاً اگر ϕ و ψ دو جمله باشند که در منطق مرتبه‌ی اول نوشته شده‌اند، منظور از

$$\phi \Leftrightarrow \psi$$

این است که این دو جمله، هم‌معنی هستند (بخش بعد را ببینید). این که این دو جمله هم‌معنی هستند، خودْ جمله‌ای در زبان فارسی است و نه در زبانی که آن دو جمله نوشته شده‌اند.

گاهی نیز از $\Leftrightarrow$ برای تعاریف استفاده می‌شود. مثلاً این را که تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است، به طور خلاصه به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

پس می‌نویسیم:

$$\Big(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\Big) \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad \Big(|x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon\Big)$$

در عبارت بالا در واقع داریم می‌گوئیم که از نماد $\lim_{x\to a} f(x) = b$ برای اشاره به عبارت سمت راست استفاده کرده‌ایم که عبارت سمت راست جمله‌ای مرتبهٔ اول است و عبارت سمت چپ در زبان نوشتاری خودمان است و علامتِ $\Leftrightarrow$ نیز در فرای این منطق، یعنی در زبان گفتگوی میان من و شما نوشته شده است.

توجه ۲.۲۲. همان طور که قبلاً گفتیم، در جملات منطق مرتبهٔ اول، سورها روی عناصر یک جهان مشخص عمل می‌کنند که این جهان از روی فرمول مشخص نیست. یک ویژگی مهم جملات مرتبهٔ اول این است که در منطق مرتبه‌ی اول، روی زیرمجموعه‌ها سور زده نمی‌شود. یعنی مثلاً نمی‌توانیم بگوییم که هر زیرمجموعه از جهان ما، فلان ویژگی را دارد:

$$\cancel{\forall A \subseteq B \ldots}$$

تمرین ۲.۸. ایهام، همان قدر که جملات ادبی را زیبا می‌کند، جملات ریاضی را زشت می‌کند. آیا می‌توانید بیت زیر از حافظ را به زبان ریاضی بنویسید:

غیر از این نکته که حافظ ز تو ناخشنود است
در سراپای وجودت هنری نیست که نیست!

۴.۲ جمله‌های همواره درست، استلزام/استنتاج

تا اینجا گفتیم که در معناشناسیِ منطق مرتبهٔ اول، جمله‌هایی که با قواعد دستوری نوشته می‌شوند باید در جهانهای مختلف ذهنی یا واقعی تعبیر شوند. نیز گفتیم که این جهانها از روی خودِ جملات، که فقط دنباله‌ای از نمادها هستند، معلوم نمی‌شوند. برای مثال، جملهٔ $\exists x \exists y \quad R(x,y)$ در جهان کلاس درس، و وقتی که رابطهٔ R به معنی دوستی است به این صورت تعبیر می‌شود: «دو نفر **در کلاس درس** وجود دارند که با هم دوست هستند»، اما همین جمله در جهان اعداد طبیعی، و وقتی که R به عنوان رابطهٔ کمتری تعبیر می‌شود، به معنای این است که «دو **عدد طبیعی** وجود دارند که یکی از دیگری کمتر است». حال آنکه در خودِ جمله، هیچ اشاره‌ای به این نشده بود که x و y چه موجوداتی هستند. پس از این که جملهٔ فوق در یک جهان «تعبیر» شود، می‌شود بررسی کرد که آیا این جمله در آن جهان درست یا غلط است؛ مثلاً اگر در کلاس درس ما دو نفر وجود داشته باشند که با هم دوست هستند، آنگاه این جمله در مورد کلاس درس ما درست است. همچنین مشخص است که این جمله به گونه‌ای که در اعداد طبیعی تعبیر شده است، در مورد اعداد طبیعی درست است. یک قانون ساده برای تشخیص درستی یک جمله، پس از تعبیر آن در یک جهان را در زیر ببینیم:

تعریف ۲۳.۲. فرمولِ $\forall x \quad \phi(x)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید M یک جهان مناسب باشد که این فرمول در آن معنا شده است. در این صورت می‌گوییم فرمولِ یادشده در جهان M درست است، هرگاه برای هر عنصرِ $a \in M$ که به طور دلخواه انتخاب شده باشد، فرمولِ $\phi(a)$ برقرار باشد. فرمولِ $\phi(a)$ یعنی فرمولی که از قرار دادن a به جای x در فرمولِ $\phi(x)$ به دست می‌آید.

برای مثال جملهٔ $\forall x D(x)$ را در کلاس درس این چنین معنی کنید: «همه قدشان از یک متر بیشتر است». برای بررسی درستی این جمله در این جهان، باید نشان دهیم که هر شخصِ a در کلاس را که انتخاب کنیم، قدش از یک متر بیشتر است!

تمرین ۹.۲. چگونه تشخیص دهیم که آیا فرمولِ $\exists x \quad \phi(x)$ در یک جهانِ M درست است یا خیر؟

در فصل قبل گفتیم که در منطق گزاره‌ها، «تاتولوژی‌ها» عباراتی هستند که صرف نظر از ارزش گزاره‌های به کار رفته در آنها همواره درستند. برای مثال $(p \vee (\neg p))$ همواره درست است و فرقی نمی‌کند که p چه گزاره‌ای باشد. اما آیا در منطق مرتبهٔ اول، جمله‌ای وجود دارد که صرف نظر از «جهانی که در آن جمله را معنی می‌کنیم» و «تعابیری که برای معنی کردن جمله استفاده کرده‌ایم» همیشه درست باشد؟

جملهٔ φ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\exists x \quad (h(x) \rightarrow \forall y \quad h(y)).$$

فرض کنید که جهان ما، یک جهان از انسانها (مثلاً کلاس درس ما) باشد و $h(x)$ این گونه تعبیر شود که x کلاه بر سر دارد. با این تعبیر، جمله φ می‌گوید که «در کلاس درس ما، یک نفر وجود دارد که اگر او کلاه بر سر داشته باشد، همه کلاه دارند». به نحوی، احتمالا غیرمنتظره، این جمله در مورد کلاس درس ما درست است. زیرا از دو حالت خارج نیست. یا همه کلاه دارند، یا یک نفر، مثلا علی، کلاه ندارد. اگر همه کلاه داشته باشند، جملهٔ

اگر علی کلاه دارد پس همه کلاه دارند

بنا به تعاریفی که برای درستی گزارهٔ $(p \rightarrow q)$ در فصل قبل داشته‌ایم، درست است؛ زیرا هم «علی کلاه دارد» و هم «همه کلاه دارند» ارزش T دارند. بنابراین جمله، «یک نفر هست که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند» درست است؛ زیرا آن یک نفر علی است!

از طرفی فرض کنید این گونه نباشد که همه کلاه دارند؛ پس فرض کنید که کسی به نام زهرا کلاه ندارد. در این صورت جملهٔ زیر درست است:

اگر زهرا کلاه دارد پس همه کلاه دارند.

علت درستی جملهٔ فوق نیز، نحوهٔ تعریف درستی گزاره‌های $(p \to q)$ در فصل قبل است؛ در واقع از آنجا که جملهٔ «زهرا کلاه دارد» غلط است، جملهٔ فوق به انتفاء مقدم درست است. در نتیجه، در این حالت هم یک نفر هست که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند، و آن یک نفر در این جا زهرا است.

حال بیایید همان جملهٔ φ را در جهان دیگری و با تعابیر دیگری معنی کنیم. جهان را مجموعهٔ اعداد طبیعی بگیرید و $h(x)$ را چنین تعبیر کنید که x یک عدد اول است. در این صورت ترجمهٔ جملهٔ φ این می‌شود که «یک عدد هست که اگر آن عدد اول باشد، همهٔ اعداد اول هستند». دقیقاً با همان روش قبلی می‌توانید بررسی کنید که این جمله، با این تعبیر، و در این جهان نیز درست است. در واقعِ جملهٔ φ در هر جهانی که تعبیرش کنیم، در آن جهان درست است.

تعریف ۲۴.۲. جملهٔ مرتبهٔ اول φ را یک جملهٔ «همواره درست» می‌نامیم هرگاه در هر جهانی و به هر صورتی که تعبیر شود، دارای ارزش درست باشد. جمله‌های همواره درست در منطق مرتبهٔ اول، همان قضایای ریاضی هستند.

در بخشهای آینده خواهیم دید که جملات ریاضی نیز در منطق مرتبهٔ اول و در یک الفبای مناسب نوشته می‌شوند. هر جملهٔ ریاضی، در ذهن هر ریاضیدان، در هر سطحی که باشد، به نحوی مخصوص به خود او تعبیر یا معنا می‌شود. اما، قضایای ریاضی، آنهایی هستند که با هر تعبیری و در ذهنی درستند.

یک نکتهٔ ظریف که احتمالاً در خلال مثال بالا بدان توجه کرده‌اید این است که پس از آن که یک جمله را در یک جهان تعبیر کردیم، قوانین تعریف شده در فصل قبل برای ارزش‌گذاری جملات در منطق گزاره‌ها برای بررسی درستی آن استفاده می‌شود.

قضیه ۲۵.۲. جملات زیر، همواره درست هستند:

۱. $\exists x \quad p(x) \leftrightarrow \exists y \quad p(y)$

۲. $\forall x \quad p(x) \leftrightarrow \forall y \quad p(y)$

۳. $\neg\forall x \quad p(x) \leftrightarrow \exists x \quad \neg p(x)$

۴. $\neg\exists x \quad p(x) \leftrightarrow \forall x \quad \neg p(x)$

۵. $\forall x \quad \Big(p(x) \wedge q(x)\Big) \leftrightarrow \forall x \quad p(x) \wedge \forall x \quad q(x)$

۶. $\exists x \quad \Big(p(x) \vee q(x)\Big) \leftrightarrow \exists x \quad p(x) \vee \exists x \quad q(x)$

اثبات. نخست ثابت می‌کنیم که جملهٔ اول، همواره درست است. فرض کنید M یک جهان باشد و $p(x)$ در آن تعبیر شده است. جملهٔ $P = \exists x p(x)$ به این معنی است که یکی از عناصر این جهان، دارای ویژگی p است. در عین حال جملهٔ $Q = \exists y p(y)$ نیز به این معنی است که یکی از عناصر این جهان دارای ویژگی p است. بنابراین P, Q در جهان ما هم‌ارزش هستند یعنی گزارهٔ $(P \leftrightarrow Q)$ در جهان مورد نظر ما درست است. از آنجا که در انتخاب جهان و برای تعبیر رابطهٔ p هیچ محدودیتی قائل نشده بودیم، این جمله در هر جهان و با هر تعبیر دیگری نیز درست است.

اثبات موارد دیگر نیز مشابه است و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم. در زیر مورد سوم را نیز اثبات کرده‌ایم. فرض کنید M یک جهان باشد که در آن $p(x)$ به معنایی تعبیر شده است و داشته باشیم: $\neg\forall x \quad p(x)$. پس در جهان M اینگونه نیست که هر $a \in M$ ویژگی p را داشته باشد؛ یعنی عنصری مانند $b \in M$ هست که $\neg p(a)$. پس در جهان ما جمله‌ی زیر درست است: $\exists x \quad \neg p(x)$. بنابراین در جهان مورد نظر ما جملهٔ زیر درست است:

$$\neg\forall x \quad p(x) \to \exists x \quad \neg p(x)$$

به طور مشابه اگر در جهانِ M جمله‌ی $\exists x \quad \neg p(x)$ درست باشد، آنگاه عنصر $a \in M$ وجود دارد به طوری که $\neg p(a)$. پس این جمله که $\forall x p(x)$ در M درست نیست، یعنی نقیض آن درست است. بنابراین جملهٔ

$$\exists x \quad \neg p(x) \to \neg\forall x \quad p(x)$$

در جهان ما درست است. بنا به تعریف درستی یک گزارهٔ $(P \leftrightarrow Q)$ در منطق گزاره‌ها، درستی جملهٔ مورد سوم از درستی دو جملهٔ بالا نتیجه می‌شود. □

تمرین ۱۰.۲. بقیه‌ی موارد ذکر شده در قضیهٔ ۲۵.۲ را نیز به طور مشابه ثابت کنید.

مشابه منطق گزاره‌ها به جای این که بگوییم فرمول $\neg\forall x \quad p(x) \leftrightarrow \exists x \quad \neg p(x)$ همواره درست است، می‌نویسیم:

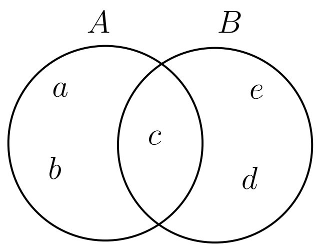
$$\neg\forall x \quad p(x) \Leftrightarrow \exists x \quad \neg p(x)$$

پس عبارتِ $\neg\forall x \quad p(x) \quad \leftrightarrow \quad \exists x \quad \neg p(x)$ یک جمله در منطق مرتبهٔ اول است؛ اما عبارتِ $\neg\forall x \quad p(x) \Leftrightarrow \exists x \quad \neg p(x)$ عبارتی فرامنطقی، در زبان مکالمهٔ ما دربارهٔ جمله‌های مرتبهٔ اول است که می‌گوید، جملهٔ یادشده در هر جهانی و با هر تعبیری، درست است. مشابهاً وقتی می‌نویسیم $\varphi \Rightarrow \psi$ منظورمان این است که جملهٔ مرتبهٔ اولِ $(\varphi \to \psi)$ یک جملهٔ مرتبهٔ اول همواره درست است.

مثال ۲۶.۲. آیا چنین است که

$$\forall x \quad \big(A(x) \vee B(x)\big) \Rightarrow \forall x \quad A(x) \vee \forall x \quad B(x)$$

پاسخ. جهانِ $M = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A(x)$ به معنی $x \in A = \{a, b, c\}$ و $B(x)$ به معنی $x \in B = \{c, d, e\}$ باشند. در این جهان، و با این تعابیر، جملهٔ $\forall x \quad (x \in A \vee x \in B)$ درست اما جملهٔ $(\forall x x \in A) \vee (\forall x x \in B)$ غلط است.

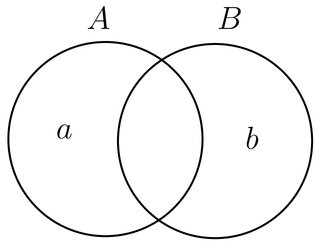


□

مثال ۲۷.۲. آیا چنین است که:

$$\exists x \quad A(x) \wedge \exists x \quad B(x) \Rightarrow \exists x \quad (A(x) \wedge B(x))$$

پاسخ. جهان را به صورت $M = \{a, b\}$ و $A(x), B(x)$ را تعلق به مجموعه‌های A, B مطابق شکل زیر تعبیر کنید. واضح است $\exists x \quad x \in A$ و $\exists x \quad x \in B$ اما $\neg(\exists x \quad x \in A \wedge x \in B)$.

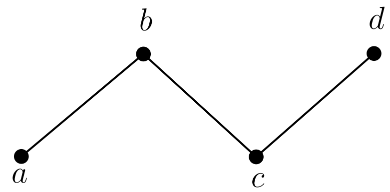


□

مثال ۲.۲۸. آیا چنین است که

$$\forall x \quad \exists y \quad R(x, y) \Rightarrow \exists y \quad \forall x \quad R(x, y)$$

پاسخ. جهان را به صورت زیر، مجموعه‌ی رأسهای یک گراف مانند شکل زیر در نظر بگیرید. و رابطه‌ی R را چنین تعبیر کنید که $R(x, y)$ یعنی بین دو رأسِ x و y یک یال وجود داشته باشد.



در جهان بالا جمله‌ی $\forall x \quad \exists y \quad R(x, y)$ درست ولی جمله‌ی زیر غلط است $\exists y \quad \forall x \quad R(x, y)$ غلط است.

می‌توانستیم جهان را مجموعهٔ افراد کلاس درسمان و $R(x, y)$ را برقراری رابطه‌ی دوستی در نظر بگیریم. در این صورت از جملهٔ «هر کسی دوستی دارد» جمله‌ی «یکی هست که با همه دوست است» نتیجه نمی‌شود.

باز بیایید جهان را مجموعه‌ی اعداد طبیعی و R را رابطهٔ ترتیب اعداد در نظر بگیریم. . دقت کنید که جملهٔ $\forall x \exists y \quad x \leq y$ در این جهان درست است اما جملهٔ $\exists y \forall x \quad x \leq y.$ غلط است. از هر عدد طبیعیِ n یک عدد طبیعی بزرگتر از آن، مثلاً $n + 1$ موجود است، اما هیچ عدد طبیعی وجود ندارد که از همهٔ اعداد طبیعی بزرگتر باشد. □

به عنوان مرور این بخش، دوباره یادآور می‌شویم که دو عبارتِ $\psi \Rightarrow \phi$ و $\phi \rightarrow \psi$ با هم متفاوت هستند. **دومی یک جمله در منطق مرتبه‌ی اول است که ممکن است که در برخی جهانها درست باشد و در برخی دیگر از جهانها غلط. اما اولی یک کوتاه‌نوشت برای عبارت زیر است:**
جمله‌ی $(\phi \rightarrow \psi)$ در هر جهانی اول که تعبیر شود درست است. مشابه تمرین زیر را در منطق گزاره‌ها نیز داشتیم:

تمرین ۲.۱۱. آیا دو عبارت زیر با هم معادل هستند؟

۱. $\phi \Rightarrow \psi$

۲. اگر ϕ همواره درست باشد، آنگاه ψ همواره درست است.

لازم به ذکر است که یک جملهٔ مرتبهٔ اول را می‌توان در یک جهان خاص تعبیر کرد، پس از آن می‌توان درستی جمله را در آن جهان بررسی کرد. قوانینی که برای تشخیص این درستی داریم، همان قوانین منطق گزاره‌ها هستند؛ مثلا وقتی دو چیز در جهان درست هستند، عطف آنها هم درست است. بنابراین یک روش برای رسیدن به فرمولهای همواره درست در منطق مرتبهٔ اول استفاده از تاتولوژی‌ها منطق گزاره‌هاست. مثلاً اگر φ یک جملهٔ مرتبهٔ اول باشد، آنگاه $(\varphi \vee (\neg\varphi))$ یک جملهٔ همواره درست است که از قرار دادن جملهٔ φ در تاتولوژیِ $(p \vee (\neg p))$ ایجاد می‌شود.

تمرین ۱۲.۲. فرض کنید $f(p,q)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها باشد که از اتمهای p,q ساخته شده است. همچنین فرض کنید که φ,ψ دو جمله در منطق مرتبهٔ اول باشند. نشان دهید که $f(\varphi,\psi)$ یک جملهٔ همواره درست در منطق مرتبهٔ اول است.

گفتیم که برای اثباتِ $\psi \Rightarrow \phi$ در منطق مرتبه‌ی اول، باید درست بودن گزاره‌ی $(\phi \to \psi)$ را در همه‌ی جهانها بررسی کرد. اما راه دیگری وجود دارد و آن «استنتاج» است. مشابه منطق گزاره‌ها، در منطق مرتبهٔ اول نیز تعداد محدودی قانون استنتاج وجود دارد، و استنتاج کردن جملهٔ $(\phi \to \psi)$ یعنی رسیدن از ϕ به ψ با متناهی بار استفاده از این قوانین استنتاج و بدون توجه به معانی و تعابیر جملات.
از طرفی یکی از قضایای پایه‌ای منطق مرتبهٔ اول به ما می‌گوید که «هر جمله‌ای که قضیه باشد» یعنی «هر جمله‌ای که در همهٔ جهانها درست باشد» قابل استنتاج است، و هر جمله‌ای که با استنتاج به دست آمده باشد، در همهٔ جهانها درست است. این قضیه، قضیهٔ تمامیت گودل نام دارد. به این قضیه در فصلهای آینده خواهیم پرداخت.

تمرین ۱۳.۲. آیا دو عبارت زیر با هم معادلند؟

۱. اگر برای جملهٔ φ اثباتی وجود داشته باشد برای جملهٔ ψ اثباتی وجود دارد.

۲. برای جملهٔ $(\varphi \to \psi)$ اثباتی وجود دارد.

با تمرینِ ۱۱.۲ مقایسه کنید.

دقت کنید که تعداد قوانین استنتاج در منطق مرتبهٔ اول نیز متناهی است و این قوانین، قوانین نسبتاً ساده‌ای هستند. پس در این جا اتفاق حیرت‌آوری رخ داده است: هر آنچه همواره درست است، یعنی در تمام جهانها رخ می‌دهد، تنها با تعدادی محدود روش استنتاج اثبات می‌شود. از آن مهم‌تر این که می‌توان این تعداد قوانین محدود را در یک رایانه وارد کرد و از آن خواست تا همهٔ جملاتِ همواره درست ریاضی را با استفاده از آنها تولید کند. [۳] دقت کنید که رایانه نمی‌تواند وارد همهٔ جهانها شود و درستی جملهٔ مورد نظر ما را در آن جهانها بررسی کند ولی می‌تواند با قوانین محدود استنتاج کند.
بیان قوانین استنتاج در منطق مرتبه‌ی اول و اثبات قضیهٔ تمامیت گودل، در سطح درس مبانی ریاضی نمی‌گنجد و خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند آنها را در یک دورهٔ درس منطق فراگیرد. با این حال در بخشهای آینده، در مورد موضوع سپردنِ تولید ریاضی به یک ربات که قوانین استنتاج را می‌داند، صحبت خواهیم کرد.

تمرین ۱۴.۲. آیا دو عبارت زیر با هم معادلند؟ کدامیک دیگری را نتیجه می‌دهد؟

- $\forall x\big(p(x) \to q(x)\big)$

[۳] این جمله و محدودیتهای آن در حیطهٔ قضیهٔ مهمی به نام قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل قرار می‌گیرد که در بخشهای آینده به آن خواهیم پرداخت.

- $\forall xp(x) \to \forall q(x)$.

تمرین ۱۵.۲. آیا چنین است که:

$$\exists x\big(p(x) \to q(x)\big) \Rightarrow \big(\exists xp(x) \to \exists xq(x)\big)$$

تمرین ۱۶.۲. آیا چنین است که

$$\big(\exists xp(x) \to \exists xq(x)\big) \Rightarrow \exists x\big(p(x) \to q(x)\big).$$

توجه ۲۹.۲. وقتی می‌گوییم یک جملهٔ $p(x)$ که متغیر آزادِ x را دارد همواره درست است، منظورمان این است که در هر جهانی و با هر مقداری که در آن جهان به جای x بگذاریم، این جمله درست است. در واقع این که $p(x)$ یک قضیه است، به معنی این است که $\forall x \quad p(x)$ یک قضیه است. مثلاً این که $x = x$ یک قضیه است.

۵.۲ منطقهای دیگر

در طی دو فصل گذشته، با منطق گزاره‌ها و منطق مرتبه‌ی اول به نحوی بسیار اجمالی آشنا شدیم. منطق گزاره‌ها منطق حاکم بر گزاره‌های دارای ارزش صفر و یک است و منطق مرتبه‌ی اول، منطق جملاتی است که در جهانهای مختلف قابل تعبیر هستند.

ریاضیات صورت‌گرایانه، همان طور که در فصل آینده خواهیم دید، در منطق مرتبه‌ی اول بیان می‌شود. علت این امر، امکان ماشینی شدن جملات این منطق و نیز برقراری قضیه مهم درستی و تمامیت است.

در عین حال، در بخشهای گذشته دیدید که هنگام سخن گفتن دربارهٔ منطقها نیز از منطق استفاده می‌کنیم. در فصلهای گذشته به این منطق، فرامنطق گفتیم. مثلاً گفتیم که عبارتِ $p \Rightarrow q$ یک گزاره در فرای منطق ماست که می‌گوید گزارهٔ $(p \to q)$ که در منطق ماست، همواره درست است. ما در حین تدریس منطقهای گزاره‌ها و مرتبهٔ اول فرض کرده بودیم که فرامنطق و قوانینش شناخته شده هستند؛ اما حقیقت این است که این فرامنطق هم باید همزمان با منطق ما ساخته شود و خودش می‌تواند مرتبهٔ اول یا غیر از آن باشد. این کار البته امکان پذیر است و خواننده با دقت کافی احتمالاً بتواند ساخت منطق و فرامنطق را به صورت همزمان با شروع از چند علامت ساده تحقیق کند. تدریس مبانی ریاضی به این روش امکان‌پذیر نیست، و به این می‌ماند که به کودکی که هنوز سخن گفتن نمی‌داند، قواعد دستوری زبان فارسی را آموزش دهیم. در واقع پیش از آموزش قواعد زبان، نیاز به راه افتادن مکالمهٔ حداقلی آن کودک هستیم و این شیوه‌ای است که در مبانی ریاضی نیز پیش می‌گیریم.

گفته بودیم که در منطق مرتبهٔ اول، سورها پشت متغیرهایی می‌آید که معلوم نیست در چه جهانی واقع شده‌اند. اما احتمالاً جمله‌ای مانند جملهٔ زیر را در ریاضیاتی که خوانده‌اید زیاد دیده باشید:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \quad x \leq n$$

جملهٔ بالا می‌گوید هر عدد حقیقی، از یک عدد طبیعی کمتر است. شاید تعجب کنید که این جمله نیز یک جملهٔ مرتبهٔ اول است. علت این امر را در بخشهای آینده متوجه خواهید شد؛ به طور خلاصه، جملاتی وجود دارند که به معنی «حقیقی بودن یک عدد» یا «طبیعی بودن یک عدد» هستند و این جملات (اثبات می‌شود که) در منطق مرتبهٔ اول قابل نوشتن هستند. پس وقتی می‌گوییم $x \in \mathbb{R}$ یا $x \in \mathbb{N}$ به طور ضمنی به آن جمله‌ها ارجاع داده‌ایم. پس جهان ریاضیات همچنان یک جهان مرتبهٔ اول است.

اما می‌شود یک جهان را ثابت در نظر گرفت و آن در **منطق مرتبهٔ دوم** مطالعه کرد؛ یعنی اجازه داد که سورها روی زیرمجموعه‌ها اثر کنند. مثلاً این ویژگی حیاتی اعداد حقیقی را که هر زیرمجموعه‌ی از بالاکراندار از اعداد حقیقی دارای یک کوچکترین کران بالاست، باید در منطق مرتبه‌ی دوم بیان کنیم. منطقهای مراتب بالاتر، هر چند قدرت صورت‌بندی قوی‌تری دارند اما ارزش مهمی مانند تمامیت (و تنایج مهم آن در نظریهٔ مدلها) را ندارند.

در ورزهٔ روزمرهٔ ریاضیات، عموماً تنها این توانایی که جملات ما بدون ابهام و با استفاده از نمادهای ریاضی نوشته شوند اهمیت دارد، و عموماً افراد از محکم‌بودن زیرساختهای منطقی جملات مطمئن هستند. تمرین ریاضی نویسی با این ساده‌گیری‌ها نیز اهمیت خود را دارد، و ما نیز بر این واقفیم؛ اما همچنان، بدون نگرانی از نوع منطق استفاده شده، این گونه ساده‌گیری در نوشتار را استفاده از فرامنطق خواهیم خواند.

مثال ۳۰.۲. با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید که «هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی دارای کران بالا است.»

اثبات. جملهٔ فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad (\forall y \in A \quad y \leq x).$$

□

تمرین ۱۷.۲. می‌گوییم مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{R}$ از بالا کراندار است هرگاه عددی حقیقی وجود داشته باشد که از تمامی اعضای A بزرگتر است. عبارتهای زیر را به زبان ریاضی بنویسید:

۱. کوچکترین کران بالا برای مجموعه‌ی A عدد x است.

۲. کوچکترین کران بالا برای هر زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی وجود دارد.

۳. هر زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد دارای کوچکترین کران بالا است. (به این جمله، اصل کمال گفته می‌شود و این جمله یک حقیقت درستِ مرتبه‌ی دوم در مورد اعداد حقیقی است. در قضیهٔ ۳.۵ به طور دقیق‌تر به اصل کمال پرداخته‌ایم).

تمرین ۱۸.۲. جملات زیر را در یک زبان ریاضی (با به کارگیری سورها) بنویسید:

۱. برای هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی بزرگتر از آن وجود دارد.

۲. یک عدد حقیقی بزرگتر از تمام اعداد طبیعی وجود ندارد.

تمرین ۱۹.۲. با استفاده از اصل کمال، (تمرین ۱۷.۲ قسمت ۴) نشان دهید که هیچ عدد حقیقی بزرگتر از همه‌ی اعداد طبیعی وجود ندارد. (این گفته در قضیهٔ ۱.۵ اثبات شده است).

تمرین ۲۰.۲. عبارت زیر را به زبان ریاضی بنویسید:

- برای هر عدد حقیقی بزرگترین عدد طبیعی کوچکتر از آن وجود دارد.

خلاصهٔ فصل دوم. منطق مرتبهٔ اول دارای نمادهای منطقی $\forall, \exists, (,), \wedge, \vee, \neg, =$ است که با کمک یک مجموعهٔ ثابت از الفبا برای نوشتن جملات استفاده می‌شوند. الفبا می‌تواند حاوی علائمی برای سخن گفتن دربارهٔ توابع یا روابط باشد. جملات منطق مرتبهٔ اول در جهانها «تعبیر» یا «معنا» می‌شوند. ممکن است جمله‌ای در یک جهان درست و در جهان دیگری غلط باشد. جملاتی که در هر جهان قابل تعبیر درست هستند، همواره درست نامیده می‌شوند. قضیهٔ مهمی به نام قضیهٔ تمامیت گودل بیانگر این است که جملات همواره درست دقیقاً همان جملاتی هستند که برای آنها اثباتی وجود دارد. وجود اثبات برای یک جمله، یعنی رسیدن به آن جمله تنها با تقید به استفاده از تعدادی محدود قوانین استنتاج و بدون در نظر گرفتن معانی جملات.

فصل ۳

اصول‌موضوعهٔ نظریه‌ی مجموعه‌ها

کی دهد دست این غرض یارب که همدستان شوند
خاطر مجموع ما زلف پریشان شما
حافظ

۱.۳ رویکرد صورت‌گرایانه

در مقدمهٔ این کتاب گفتیم که یکی از اهداف مبانی ریاضی بیان اصول‌موضوعه‌ای است که همهٔ ریاضیات از آنها ناشی می‌شود. در بخشهای آینده توجیه خواهیم کرد که همهٔ اشیاء ریاضی، مانند عدد، تابع و غیره، ماهیت «مجموعه» دارند. بنابراین اصول موضوعهٔ ریاضیات به معنی اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌هاست. در این بخش قرار است اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها را با استفاده از منطق مرتبهٔ اول و نیز به کارگیری یک الفبای مناسب بیان کنیم.

هر اصل‌موضوعه‌ای که برای نظریهٔ مجموعه‌ها بیان خواهد شد یک جملهٔ مرتبهٔ اول در «الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها» خواهد بود. هر خوانندهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، برای خود «جهانی» از مجموعه‌ها تصور می‌کند. برای ما جهان ذهنی تک تک افراد اهمیتی ندارد، اما برایمان مهم است که در همهٔ جهانهای مورد تصور، اصول موضوعه برقرار باشند.

وقتی در جهان ذهنی کسی اصول موضوعهٔ ما برقرار باشد، هر چه با استفاده از این اصول موضوعه و با استفاده از قواعد استنتاج اثبات شود نیز در آن جهان برقرار خواهد بود؛ و این اساساً ورزهٔ ریاضیات بر مبنای اصول‌موضوعه است.

نوشتن اصول موضوعه برای مجموعه، بر طبق شهود اولیه‌ای که ریاضیدانان از مجموعه دارند، تاریخی طولانی دارد و البته این اصول موضوعه، مورد جدالهای علمی فراوان بوده است. ریاضی‌دانهای مهمی مانند راسل، کانتور، زرملو و فرانکل در شکل‌گیری اصول‌موضوعه‌ای که در این کتاب معرفی خواهیم کرد نقش بازی کرده‌اند.

تعریف زیر، در پاراگراف اول مقالهٔ تحت عنوان [1]

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre

از کانتور نوشته شده است:

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M gennant werden) zu einem ganzen

[1] مشارکتی در مبانی نظریهٔ فرامتناهی مجموعه‌ها

یعنی منظور از یک مجموعه M یک جمع‌آوری به یک کُل است از اشیاء مشخص و متمایز m در محیط پیرامون یا در فکر ما (که به هر یک از این اشیاء یک عضو مجموعه می‌گوییم).

تعریف بالا، بدون شک شهودی‌ترین تعریف برای مجموعه است. یک مشکل قابل ملاحظه در نگاه سخت‌گیرانهٔ اول به این تعریف، این است که در تعریف مجموعه، از عبارتهای **گردایه، شیء، دور هم جمع آمدن** و ... استفاده شده است که آنها، خودْ ساده‌تر از واژهٔ مجموعه نیستند و احتمالاً نیاز به تعریف داشته باشند. اما مشکل واقعی از این جدی‌تر است.

تعریف کانتور از مجموعه، در واقع پیشنهاد اصل موضوعهٔ زیر برای نظریهٔ مجموعه‌هاست:

> هرگاه $p(x)$ یک جملهٔ مرتبهٔ اول باشد که دربارهٔ متغیر x نوشته شده است، آنگاه مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً شامل عناصری است که ویژگی p را دارند.

پس اگر $p(x)$ یک «ویژگی» یا یک «فرمول قابل نوشتن در الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها» باشد آنگاه بنا به اصل‌موضوعهٔ کانتور، $\{x|p(x)\}$، یک مجموعه است که باید خوانده شود: «مجموعهٔ عناصری که ویژگی p را دارا هستند».

پس در نگاه معناشناسانه، برای هر ویژگی مانند p، در جهانی که در ذهنمان تصور کرده‌ایم همیشه باید مجموعه‌ای وجود داشته باشد که فقط از عناصری شکل یافته است که ویژگی p را دارند.

گفتیم ویژگی $p(x)$ یک جملهٔ مرتبهٔ اول است. فرض کنید $p(x)$ ویژگیِ $x \notin x$ باشد (البته داریم ضمناً بیان می‌کنیم که نماد $\in$ در الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد؛ و خواهیم دید که این نماد، تنها نماد در این الفباست). اگر اصل مورد نظر کانتور در جهان ما برقرار باشد، عنصرِ $A = \{x|x \notin x\}$ جزو مجموعه‌های جهان مورد نظر ماست.

از طرفی در جهانی که ما برای مجموعه‌ها تصور کرده‌ایم، بنا به قوانین منطق گزاره‌ها، هر گزاره‌ای یا خودش و یا نقیضش درست است. در واقع این یک تاتولوژی است که باید در همهٔ جهانها برقرار باشد. حال گزارهٔ $A \in A$ را در نظر بگیرید: اگر $A \in A$ درست باشد، یعنی اگر A عضوی از A باشد، آنگاه $A \in \{x|x \notin x\}$؛ یعنی A یکی از مجموعه‌هایی است که عضو خود نیستند! پس $A \notin A$. از آنجا که جملهٔ $A \in A$ نقیض خودش را نتیجه می‌دهد نمی‌تواند در جهان ما درست باشد. [۲] پس احتمالاً نقیضش درست است؛ یعنی $A \notin A$. اما $A \notin A$ یعنی A جزو مجموعه‌هایی که عضو خود نیستند، نیست؛ یعنی $A \in A$. پس گزارهٔ $A \in A$ هم نقیض خودش را نتیجه می‌دهد. از این رو تاتولوژی $((A \in A) \vee (\neg(A \in A))$ در جهان ما برقرار نیست!

آنچه در بالا بحث شد «پارادوکس راسل» نام دارد. [۳] پارادوکس راسل، بیانگر این است که «تعریف ساده‌انگارانهٔ» کانتور [۴] از مجموعه، منجر به ایجاد تناقض در دنیای ذهنی ما برای مجموعه‌ها می‌شود. طبیعتاً یک دنیای ذهنی که در آن تناقض وجود داشته باشد، دنیای ذهنی مناسبی برای مطالعهٔ ریاضی نیست.

در بخشهای پیش رو، خواهیم دید که در سیستم اصول موضوعهٔ «زِرْمِلو و فرانکل» چه تدابیری برای فرار از چنین گزندی اندیشیده شده است. اما پیش از آن مفید می‌دانیم به عنوان یک تمرین ذهنی چند پارادوکس، از نوع پارادوکسهای «ارجاع‌به‌خود» [۵] و نشأت گرفته از پارادوکس تاریخی راسل را معرفی کنیم. خواندن ادامهٔ این بخش، برای درک باقی این فصل ضرورتی ندارد. در بخشهای ۷.۱۰ و ۳.۱۴ قضایای عمیقی را خواهیم دید که به نحوی به این پارداکس مشابهت دارند.

---

[۲] گزارهٔ $((p \to \neg p) \to (\neg p))$ یک تاتولوژی است.

[۳] میان واژه‌های پارادوکس و تناقض، تفاوتی هست: پارادوکس بیشتر به چه چیزهایی گفته می‌شود که با عقل یا شهود یا انتظار ما مطابق نیستند، اما تناقض به چیزهایی گفته می‌شود که استدلالهای ما نشان می‌دهد که آنها درست نیستند.

[4] naive set theory

[5] self-reference

مثال ۱.۳ (پارادکس بِری)**.** در مطالعهٔ منطقی مجموعهٔ اعداد طبیعی در یک الفبای مرتبهٔ اول، امکان نوشتن جملهٔ زیر با الفبای آن زبان وجود دارد. [۶]

کوچکترین عدد طبیعی که نتوان آن را با کمتر از ۵۰ کلمه وصف کرد، وجود دارد.

اگر جملهٔ مورد نظر درست باشد، کوچکترین عدد غیرقابل وصف با کمتر از ۵۰ کلمهٔ وجود دارد. اما این خودْ وصفی با کمتر از پنجاه کلمه برای این آن عدد است، یعنی عدد مورد نظر غیرقابل وصف نیست! پس از درست بودن این جمله به تناقض می‌رسیم. اما اگر جملهٔ مورد نظر، غلط باشد، یعنی کوچکترین عدد غیر قابل وصف با کمتر از پنجاه کلمه وجود ندارد. بنابراین همهٔ اعداد قابل وصف با کمتر از پنجاه کلمه هستند. اما این غلط است زیرا تعداد چیزهایی که می‌توان با پنجاه کلمه وصف کرد متناهی است. برای مشاهدهٔ ربط این مثال با قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل، [۴] را مطالعه کنید.

مثال ۲.۳ (پارادوکس دروغگو)**.** فرض کنید شخصی بگوید «من دروغگو هستم». آیا این شخص دروغگو است یا راستگو؟ اگر راستگو باشد، پس راست گفته است که دروغگو است، پس دروغگو است! اگر دروغگو باشد پس دروغ گفته است که دروغگوست، پس راستگوست!

مثال ۳.۳. تمساحی (البته یک تمساح که هم حرف می‌زند و هم به قول خود عمل می‌کند!) پسری را ربوده است و می‌خواهد یا او را بخورد، یا به پدرش پس بدهد. تمساح به پدرِ آن پسر چنین می‌گوید: «اگر درست بگوئی که من چه خواهم کرد، پسرت را پس می‌دهم». حال اگر پدر بگوید که من می‌گویم که پسرم را می‌خوری، تمساح باید چه کند؟ اگر تمساح بچه را بخورد، پس پدر درست گفته است، یعنی تمساح باید بچه را پس بدهد. اگر تمساح بچه را پس بدهد، پس به حرف خودش عمل نکرده است، چون پدر اشتباه گفته است!

تمرین ۱.۳ (پارادوکس سقراط)**.** بررسی کنید که جمله‌ی «من می‌دانم که هیچ نمی‌دانم» یک جمله‌ی تناقض‌آمیز است.

تمرین ۲.۳. آرایشگرِ یک شهر، فقط و فقط موهای کسانی را می‌تراشد که آنها خودْ موهای خود را نمی‌تراشند. آیا آرایشگر موهای خود را می‌تراشد؟

تمرین ۳.۳ (پارادوکس دادگاه)**.** یک استاد وکالت، [۷] به دانشجوئی درس وکالت می‌دهد. آنها با هم قرارداد می‌کنند که اگر دانشجوی نامبرده، از اولین جلسه‌ی دادگاه خود پیروز بیرون بیاید، موظف است که هزینه‌ی تدریس را به استاد بپردازد. [۸]

دانشجوی مورد نظر پس از اتمام دوره، از کار در دادگاه منصرف می‌شود و وارد هیچ دادگاهی نمی‌شود. استاد از دانشجو به دادگاه شکایت می‌کند و مدعی است که دانشجو باید پول او را بدهد ولی دانشجو از خود دفاع می‌کند که نباید پول به استاد بدهد. آیا دادگاه باید به نفع دانشجو رأی بدهد یا استاد؟ دقت کنید که وقتی استاد از دانشجو شکایت کرده است، در واقع اولین جلسهٔ دادگاه برای دانشجو رقم خورده است. پیروزی دانشجو در این جلسه به چه معنی است؟

[6] Berry paradox

[۷] صورت این پاردوکس را کمی تغییر داده‌ام.

[8] Paradox of the Court, counterdilemma of Euathlus

۲.۳ اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها

تلاش برای تعریف مجموعه به روش کانتور منجر به ایجاد پارادوکسهایی مانند پارادوکس راسل می‌شود. از این رو، در ریاضیات صورتگرایانه، به جای تعریف کردن مجموعه، قوانین یا به بیان بهتر، اصول‌موضوعه‌ای را تصویب می‌کنیم که انتظار داریم مجموعه از آن پیروی کند.

الفبای مطالعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها فقط دارای یک نماد رابطه‌ای — $\in$ — است. پس جهانهای ذهنی نظریهٔ مجموعه‌ها، جهانهایی مانند V هستند که عناصر داخل آنها مجموعه نام دارد و میان این عناصر یک رابطه‌ی دوموضعیِ $\in$ وجود دارد که به آن رابطهٔ عضویت گفته می‌شود؛ چنین جهانی را می‌توان به صورت $(V, \in)$ نوشت. هر متغیری مانند $x, y, z, \ldots$ که درباره‌ی آن صحبت شود، یا روی آن سور زده شود، از جهانِ V می‌آید و این که در یک جهانِ ذهنی، مجموعه و رابطهٔ $\in$ چگونه تصور شده است، نیز برایمان اهمیتی ندارد.

در این رویکرد، تعریف مجموعه بدین صورت است: یک شی را یک مجموعه می‌نامیم هرگاه وجود (یا مجموعه بودنِ) آن با استفاده از اصول موضوعهٔ ما اثبات شود. به بیان دیگر هرگاه مسلم شود که چنین شی‌ای در تمام جهانهایی که از اصول موضوعهٔ ما پیروی می‌کنند، وجود دارد.

هر قضیه‌ای در نظریهٔ مجموعه‌ها، یک جملهٔ مرتبهٔ اول است که در تمامی جهانها به طور همزمان درست است. پس در قضایا باید از فلش دوخطهٔ $\Rightarrow$ استفاده کنیم، حال آن که در جملاتی که در نظریهٔ مجموعه‌ها نوشته می‌شوند، فلشها یک خطی مانند $\rightarrow$ هستند.

سیستم‌های مختلفی از اصول موضوعه برای مجموعه‌ها پیشنهاد شده است که از این میان، سیستمِ زِدافسی (ZFC) (اصول زِرمِلو و فرانکل به همراه اصل انتخاب) کارایی کافی دارد و در این درس ما نیز به معرفی این اصول خواهیم پرداخت. [9] بنا بر آنچه گفته شد، این اصول تنها با استفاده از علامتِ $\in$ در الفبای ما و سایر ادوات منطقیِ مرتبه‌ی اول (یعنی $\exists, \forall, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$) نوشته خواهند شد.

فعلاً اصول‌موضوعه را فهرست‌وار و با توضیحی مختصر آورده‌ایم، اما در ادامه‌ی درس به طور مفصل به هر یک خواهیم پرداخت. ترتیب ارائهٔ ما از آسان به سخت خواهد بود. منظورمان از اصول‌موضوعهٔ آسان، آنهائی است که در دبیرستان هم احتمالاً دیده‌اید و بسیار استفاده کرده‌اید. اما اصول‌موضوعهٔ سخت، آنهائی هستند که تا سالها پس از گذراندن این درس هم، قرار است در درکشان ابهام داشته باشیم. هر اصل را ابتدا به صورت غیر رسمی توضیح داده‌ایم و سپس به طور دقیق در زبان مرتبه‌ی اول نوشته‌ایم.

۱. **اصل وجود:** بیان غیر رسمی اصل وجود این است که در هر جهان مجموعه‌ها، حداقل یک مجموعه وجود دارد که هیچ عنصری ندارد. پس یک جهان از همهٔ مجموعه‌ها، تهی نیست، حداقل یک مجموعه به نام مجموعهٔ تهی در آن است! در زیر بیان رسمی این اصل را در منطق مرتبه‌ی اول نوشته‌ایم.

$$\exists x \quad \forall y \quad \neg(y \in x)$$

برای ساده‌تر شدن جملاتمان، از این بعد از علامتِ $x = \emptyset$ به جای فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\forall y \quad \neg(y \in x)$$

پس اصل اول می‌گوید که

$$\exists x \quad x = \emptyset$$

بنا به اصل وجود، حداقل یک مجموعه وجود دارد.

[9] Zermelo, Fraenkel+ Choice

۲. **اصل گسترش:** بیان غیر رسمی اصل گسترش این است که هر مجموعه، از روی مجموعه‌های متعلق به آن مشخص می‌شود، یعنی دو مجموعه که اعضای یکسانی داشته باشند (از مجموعه‌های یکسانی تشکیل شده باشند) یک مجموعه‌اند:

$$\forall a,b \quad \Big(\forall x \quad (x\in a \leftrightarrow x\in b)\to a=b\Big)$$

برای کوتاه‌تر شدن جملات، به جای جملهٔ

$$\forall x(x\in a\to x\in b)$$

می‌نویسیم: $a\subseteq b$.

دقت کنید که $\subseteq$ از علائم زبان مورد نظر نظریهٔ مجموعه‌ها نیست، و از آن فقط برای کوتاه نوشتن جمله‌ها استفاده کرده‌ایم. پس اصل گسترش را می‌توانیم به صورتِ خلاصه‌ترِ زیر بنویسیم:

$$\forall a,b \quad (a\subseteq b\wedge b\subseteq a\to a=b).$$

توجه ۴.۳. در یک جهان نظریهٔ مجموعه‌ها (که از اصول ما پیروی می‌کند) بنا به اصل گسترش، هرگاه بدانیم که a و b مجموعه هستند، برای این که نشان دهیم که $a=b$ کافی است نشان دهیم که برای هر عنصر دلخواهِ $x_0\in a$ داریم $x_0\in b$ و برای هر عنصرِ دلخواهِ $x_0\in b$ داریم $x_0\in a$. اگر به نحوی بدانیم که a,b در همهٔ جهانهای نظریهٔ مجموعه‌ها، مجموعه هستند، آنگاه با این روش می‌توانیم ثابت کنیم که در همهٔ جهانها $a=b$.

با همین دو اصل موضوعهٔ ساده، می‌توان یک قضیه ثابت کرد:

قضیه ۵.۳. مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست؛ به بیان ریاضی:

$$\forall x \quad \emptyset\subseteq x.$$

دقت کنید که همان طور که در فصل منطق مرتبهٔ اول گفتیم، هر قضیه در واقع ادعای درست بودن یک گزاره در همهٔ جهانهاست. پس قضیهٔ مورد نظر ما ادعا می‌کند که در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، این گونه است که $\forall x \quad \emptyset\subseteq x$. یعنی ادعا می‌کند که اگر V یک جهان نظریهٔ مجموعه‌ها باشد که مجموعهٔ تهیِ خود را داراست، مجموعهٔ تهی این جهان زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های دیگر این جهان است.

اثبات. باید نشان دهیم که (در هر جهانی از مجموعه‌ها)

$$\forall y\forall x \quad \Big(y\in\emptyset\to y\in x\Big)$$

برای این منظور فرض می‌کنیم که در یک جهان دلخواه از مجموعه‌ها هستیم و x_0 یک مجموعه‌ی دلخواه در این جهان است. باید نشان دهیم که

$$\forall y \quad \Big(y\in\emptyset\to y\in x_0\Big)$$

برای این منظور نیز، مجموعه‌ی دلخواهِ y_0 را در جهان مجموعه‌هایمان در نظر می‌گیریم. باید نشان دهیم که عبارت زیر درست است:

$$y_0 \in \emptyset \to y_0 \in x_0$$

در منطق گزاره‌ها، دیدیم که گزاره‌ی $(p \to q)$ هرگاه p دارای ارزش صفر باشد، به انتفاء مقدم درست است. پس گزاره‌ی مورد نظر ما نیز در این جهانِ نظریه‌ی مجموعه‌ها درست است؛ زیرا گزارهٔ $y_0 \in \emptyset$ در جهان ما غلط است. علت این امر این است که در جهان ما، این اصل موضوعه که مجموعهٔ تهی هیچ عضوی ندارد برقرار است. □

یک قضیه‌ی ساده‌ی دیگر هم می‌توان با استفاده از اصولی که تا اینجا گفته‌ایم ثابت کرد:

قضیه ۶.۳. فرض کنید a, b, c سه مجموعه باشند. اگر $a \subseteq b$ و $b \subseteq c$ آنگاه $a \subseteq c$.

پس قضیه‌ی بالا بیانگر این است که جمله‌ی زیر در همه‌ی جهانهای نظریه‌ی مجموعه‌ها درست است:

$$\forall a, b, c \quad (a \subseteq b \wedge b \subseteq c \to a \subseteq c)$$

اثبات. دقت کنید که قضیه‌ی بالا می‌گوید که در هر جهانی از مجموعه‌ها، اگر a, b, c مجموعه باشند و فرضهای قضیه برقرار باشند، آنگاه حکم قضیه برقرار است. پس بیایید نخست وارد یک جهان ممکن از مجموعه‌ها شویم و در آن کار کنیم. نخست فرض و حکم قضیه را بررسی می‌کنیم. فرضهای قضیه به صورت زیر هستند:

(آ) a, b, c مجموعه‌اند.

(ب) $a \subseteq b$

(ج) $b \subseteq c$

حکم قضیه این است که (در صورت برقراری شرطها) $a \subseteq c$. برای نشان دادن این که $a \subseteq c$ باید عبارت زیر را ثابت کنیم:

$$\forall x \quad \Big(x \in a \to x \in c\Big)$$

برای اثبات عبارت بالا، با فرض این که x_0 یک عنصر دلخواه است، باید نشان دهیم که گزاره‌ی زیر درست است.

$$x_0 \in a \to x_0 \in c$$

از فرض اول، نتیجه می‌شود که گزاره‌ی زیر درست است:

$$x_0 \in a \to x_0 \in b$$

در منطق گزاره‌ها اگر ارزش گزاره‌های $(p \to q), (q \to r)$ یک باشد، آنگاه ارزش گزاره‌ی $(p \to r)$ نیز یک است. از فرض دوم نتیجه می‌شود که گزاره‌ی زیر درست است:

$$x_0 \in b \to x_0 \in c$$

حال بنا به تمرینِ ۱۲.۱ نتیجه می‌گیریم که گزاره‌ی $x_0 \in a \to x_0 \in c$ درست است. از آنچه گفته شد، نتیجه می‌شود که در جهان مورد نظر ما از مجموعه‌ها گزاره‌ی $a \subseteq c$ درست است. از آنجا که استدلال ما به جهان خاصی بستگی نداشت، این گزاره در تمام جهانهای مجموعه‌ها درست است. □

اگر می‌خواستیم از نماد استلزام استفاده کنیم، قضیهٔ فوق را به صورت زیر می‌نوشتیم:

$$a \subseteq b \wedge b \subseteq c \Rightarrow a \subseteq c$$

یعنی در هر جهانی که شرط سمت چپ برقرار باشد، شرط سمت راست هم برقرار است.

۳. **اصل جفت‌سازی:**

بیان غیر رسمی: اگر x و y دو مجموعه باشند، آنگاه $\{x, y\}$ یک مجموعه است. به بیان دیگر، اگر x, y دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن، دقیقاً x, y هستند.

$$\forall x, y \quad \exists a \quad \Big(\forall z \quad z \in a \leftrightarrow (z = x \vee z = y)\Big)$$

دقت کنید که اصل‌جفت‌سازی، به اجتماعِ‌دو مجموعه‌ی x, y ربطی ندارد!

بیایید بررسی کنیم که با استفاده از این سه اصل اول، چه مجموعه‌هائی می‌توانیم بسازیم. بنا به اصلِ وجود، $\emptyset$ یک مجموعه است. بنا به اصل زوج سازی $\{\emptyset, \emptyset\}$ یک مجموعه است. حال بنا به اصل گسترش، $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$ زیرا این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند. پس تا اینجا، می‌دانیم که $\emptyset, \{\emptyset\}$ دو مجموعه هستند. دوباره بنا به اصل زوج‌سازی، $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به اصل گسترش، این مجموعه، با هر دو مجموعه‌ی $\emptyset, \{\emptyset\}$ نابرابر است.

تمرین ۴.۳. چه مجموعه‌های دیگری به طریق بالا می‌توانید بسازید؟ آیا می‌توانید با روش بالا یک مجموعه بسازید که بیش از دو عضو داشته باشد؟

۴. **اصل تصریح:**

بیان غیر رسمی: اگر بدانیم که a یک مجموعه است آنگاه اگر $p(x)$ یک ویژگی باشد که در منطق مرتبه‌ی اول بیان شده است، آنگاه عبارت $\{x \in a | p(x)\}$ نیز یک مجموعه است. به بیان دیگر اگر بدانیم (یا ثابت کرده باشیم که) a یک مجموعه است، عناصری از a که ویژگیِ خاصی دارند تشکیل یک مجموعه می‌دهند. بیان رسمی اصل فوق به صورت زیر است:

$$\forall a \quad \exists b \quad \forall x\Big(x \in b \leftrightarrow \big(x \in a \wedge p(x)\big)\Big)$$

در واقع اگر A یک مجموعه باشد، عبارت زیر بنا به اصل تصریح یک مجموعه است.

$$B = \{x \in A | p(x)\}$$

توجه ۷.۳. توجه کنید که در تعریف سهل‌انگارانهٔ کانتور از مجموعه، هر عبارتی به صورت $\{x | p(x)\}$ را یک مجموعه گرفته بودیم و دیدیم که چنین تصوری منجر به تناقض می‌شود. در اصل تصریح، یک شرط به بالا اضافه کرده‌ایم: **اگر بدانیم که a یک مجموعه است،** آنگاه $\{x \in a | p(x)\}$ نیز یک مجموعه است. پس $\{x | p(x)\}$ لزوماً یک مجموعه نیست؛ اما وقتی با یک مجموعهٔ a اشتراک گرفته شود حاصل، یک مجموعه است.

تعریف ۸.۳. اگر $p(x)$ یک ویژگی مرتبه‌ی اول باشد، هر عبارتِ به صورت $\{x|p(x)\}$ را یک **کلاس** می‌نامیم (ممکن است که یک کلاس، مجموعه نباشد، یعنی ممکن است با فرض مجموعه بودن آن به تناقض برسیم).

برای مثال، $\{x|x = x\}$ کلاس تمام مجموعه‌هاست. همچنین $\{x|x \notin x\}$ نیز یک کلاس از مجموعه‌هاست. اصل تصریح، بیانگر این است که اشتراکِ یک کلاس با یک مجموعه، یک مجموعه است.

مثال ۹.۳. اگر x یک مجموعه باشد و $y \subseteq x$ یک کلاس باشد، آنگاه y نیز یک مجموعه است؛ زیرا می‌توان نوشت:

$$y = \{t \in x|t \in y\}.$$

از آنجا که y یک کلاس است، عبارتِ $t \in y$ در بالا، در واقع کوتاه‌نوشتِ جمله‌ای به صورتِ $p(t)$ است که عضویت در آن کلاس را بیان می‌کند.

تعریف ۱۰.۳. اگر x, y دو مجموعه باشند، آنگاه، بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x \in x|x \in y\}$$

مجموعه‌ی بالا را با $x \cap y$ نمایش می‌دهیم.

پس در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، اگر دو مجموعه را در نظر بگیریم، یک مجموعه در جهان هست که فقط شامل عناصر مشترک آنهاست. این یک قضیه دربارهٔ همهٔ جهانهای ذهنی ماست. همان طور که مشاهده می‌کنید، رفته‌رفته داریم نمادهایی مانندِ $\emptyset, \cap, \ldots$ را وارد دستور زبانمان می‌کنیم که اطمینان داریم که این نمادها فقط کوتاه‌نوشت هستند و می‌شود به جای به کار بردن آنها، صرفاً جملات را با استفاده از نمادِ $\in$ نوشت. [۱۰]

مثال ۱۱.۳. نشان دهید که در هر جهان از نظریه‌ی مجموعه‌ها، اگر x, y مجموعه باشند، داریم

- $x \cap y \subseteq x$
- $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$.
- $x \cap y = y \cap x$.

اثبات. مورد اول را اثبات می‌کنیم و مواردِ دیگر را به عنوان تمرین به عهده‌ی خواننده می‌گذاریم. فرض کنید که در یک جهان از مجموعه‌ها هستیم. برای اثبات مورد اول، بنا به تعریفِ $\subseteq$ باید نشان دهیم که

$$\forall t \quad (t \in x \cap y \to t \in x)$$

بنا به تعریفِ ۲۳.۲ برای اثبات گفتهٔ بالا باید نشان دهیم که هر t_0 اگر $x \cap y$ باشد در x است. فرض کنید t_0 یک مجموعه‌ی دلخواه باشد و $t_0 \in x \cap y$. بنا به تعریفِ $x \cap y$ داریم

$$t_0 \in x \wedge t_0 \in y.$$

[۱۰] به این امر در منطق، تعریف‌پذیری نماد گفته می‌شود. در واقع نمادهایی که داریم آنها را به نظریهٔ مجموعه‌هامان اضافه می‌کنیم، همه تعریف پذیر هستند.

می‌دانیم که

$$(p \wedge q \to p)$$

یک تاتولوژی است، پس از $t_0 \in x \wedge t_0 \in y$ نتیجه می‌گیریم که $t_0 \in x$. □

تمرین ۵.۳. برای اثبات مورد دوم، به کدام بخشِ قضیه‌ی ۲۴.۱ نیاز داریم؟

تعریف ۱۲.۳. فرض کنید که x, y دو مجموعه باشند. بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{t \in x | t \notin y\}$$

مجموعه‌ی بالا را با $x - y$ نمایش می‌دهیم.

برای رسیدن زودتر به باقی اصول موضوعه می‌توانید از تمرینهای پیش رو صرف نظر کنید.

تمرین ۶.۳. فرض کنید a, b, c مجموعه باشند، نشان دهید که

- $a \cap (b - c) = (a \cap b) - (a \cap c)$.
- $a - \emptyset = a$.

تمرین ۷.۳. آیا از $x \cap y = x \cap z$ نتیجه می‌شود که $y = z$؟

تمرین ۸.۳. آیا $a - (b - c) = (a - b) - c$؟

تمرین ۹.۳. فرض کنید a, b, c مجموعه باشند و $a, b \subseteq c$. نشان دهید که

$$a \cap (c - b) = a - b$$

۵. **اصل اجتماع:**

بیان غیر رسمی: اگر a یک مجموعه باشد (که از مجموعه‌های دیگری تشکیل شده است) آنگاه اجتماع مجموعه‌های موجود در a نیز یک مجموعه تشکیل می‌دهد؛ به بیان دیگر، مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً برابر با اجتماع مجموعه‌های موجود در a است. بیان رسمی:

$$\forall a \quad \exists u \quad \forall x \quad \Big(x \in u \leftrightarrow \exists b \quad (b \in a \wedge x \in b)\Big)$$

اگر u مجموعه‌ی بالا باشد، می‌نویسیم:

$$u = \bigcup a$$

پس در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، به ازای یک مجموعهٔ a یک مجموعهٔ $\bigcup a$ هم وجود دارد.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنید که x, y دو مجموعه باشند. آنگاه یک مجموعه‌ی c وجود دارد به طوری که:

$$\forall x \quad \big(x \in c \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b)\big)$$

در واقع، قضیهٔ فوق بیانگر این است که عبارت زیر یک جملهٔ همواره درست در همهٔ جهانهای نظریهٔ مجموعه‌هاست:

$$\forall a \forall b \exists c \forall x \quad \big(x \in c \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b)\big)$$

اثبات. بنا به اصل جفت‌سازی، $\{x, y\}$ یک مجموعه است. بنا به اصل اجتماع، یک مجموعه‌ی c وجود دارد، به طوری که

$$\forall t \quad (t \in c \leftrightarrow \exists t' \in \{x, y\} \quad t \in t')$$

پس برای هر t داریم

$$t \in c \leftrightarrow t \in x \vee t \in y.$$

$\square$

تعریف ۱۴.۳. مجموعه‌ی c در قضیه‌ی بالا را با $x \cup y$ نشان می‌دهیم. پس برای هر t داریم

$$t \in x \cup y \leftrightarrow t \in x \vee t \in y.$$

تمرین ۱۰.۳. اگر a, b, c مجموعه باشند، نشان دهید که $d = \{a, b, c\}$ مجموعه است. نشان دهید که $\bigcup d = a \cup (b \cup c)$.

تمرین ۱۱.۳. با استفاده از قضیه‌ی ۲۴.۱ نشان دهید که

- $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.
- $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$.

مثال ۱۵.۳. اصل اجتماع و اصل جفت‌سازی ارتباطی به هم ندارند: فرض کنید $x = \{1, 2, 3\}$ و $y = \{4, 5, 6\}$ مجموعه‌هایی در جهان ما باشند. در این صورت بنا به اصل جفت‌سازی، $\{x, y\} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ یک مجموعه است؛ و نیز بنا به اصل اجتماع (و البته جفت‌سازی)، $x \cup y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ یک مجموعه است.

تمرین ۱۲.۳. آیا از $a \cup b = a \cup c$ نتیجه می‌شود که $b = c$؟

اگر a, b مجموعه باشند، آنگاه بنا به اصل تصریح هر دوی $a - b, b - a$ مجموعه هستند. بنا به اصل اجتماع، اجتماع این دو نیز مجموعه است. تعریف می‌کنیم:

$$a \oplus b = (a - b) \cup (b - a)$$

تمرین ۱۳.۳.

- نشان دهید که $a \oplus b = (a \cup b) - (a \cap b)$.
- نشان دهید که اگر $a \oplus b = a \oplus c$ آنگاه $b = c$.

قبلاً دیدیم که بنا به اصل وجود، در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها یک مجموعه به نام $\emptyset$ وجود دارد. یک نام دیگر برای این مجموعه، علامت 0 است. همچنین دیدیم که در هر جهانی $\{\emptyset\}$ نیز بنا به اصل جفت‌سازی یک مجموعه است. این مجموعه را با 1 نشان می‌دهیم. پس $\{0\} = 1$. همچنین تعریف می‌کنیم:

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

بنابراین، داریم $\{0, 1\} = 2$. از طرفی، بنا به اصل جفت‌سازی، $\{1, 2\}$ یک مجموعه است. بنا به اصل اجتماع، $1 \cup \{1, 2\}$ نیز یک مجموعه است. پس $\{0, 1, 2\}$ یک مجموعه است که آن را با 3 نشان می‌دهیم. مشابهاً مجموعه‌ای به نام 4 داریم که اعضای آن به صورت زیر است:

$$4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

به همین ترتیب اگر مجموعهٔ به نام n را داشته باشیم، مجموعهٔ $n + 1$ را به صورت

$$n + 1 = \{0, \ldots, n\}$$

تعریف می‌کنیم. اصطلاحاً می‌گوییم که هر n که به روش بالا به دست بیاید، یک «عدد طبیعی» است. پس اگر V یک جهان دلخواه از نظریهٔ مجموعه‌ها باشد، در آن جهان، مجموعه‌های $0, 1, 2, 3, \ldots$ قرار دارند. اما یک سوال این است که همهٔ این مجموعه‌ها با هم تشکیل یک مجموعه می‌دهند؛ یعنی آیا در V عبارتِ $\{0, 1, 2, \ldots\}$ هم یک مجموعه است؟ بعداً در این باره بیشتر صحبت خواهیم کرد.

۶. **اصل وجودِ مجموعه‌ی توان:**

بیان غیر رسمی: اگر a یک مجموعه باشد، کلاسِ تمام زیر مجموعه‌های آن نیز یک مجموعه است. به بیان دیگر، اگر a یک مجموعه باشد، آنگاه مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن، دقیقاً زیرمجموعه‌های a هستند. بیان رسمی این اصل به صورت زیر است:

$$\forall a \quad \exists b \quad \left(\forall x \quad x \in b \leftrightarrow \underbrace{\Big(\forall z \quad (z \in x \to z \in a)\Big)}_{x \subseteq a}\right)$$

توجه ۱۶.۳. برای یک مجموعه‌ی a، کلاسِ تمام زیر مجموعه‌هایش را (که بنا به اصل بالا یک مجموعه است) با $P(a)$ نشان می‌دهیم؛ پس به زبان ساده:

$$P(a) = \{b | b \subseteq A\}$$

اصول موضوع باقی‌مانده همانهایی هستند که توضیح و درک آنها دراین مقطع کمی دشوار است. در این بخش فقط به بیان و توضیح مختصر آنها بسنده می‌کنیم، اما در فصلهای بعدی کتاب به طور جدی آنها را مورد کاوش قرار خواهیم داد.

۷. **اصل جانشانی** [۱۱]:

بیان این اصل موضوعه با سطح منطقی که تا اینجا در درس مبانی ریاضی دیده‌ایم کمی دشوار است. زیربخش کوتاهِ ۱.۴.۹ را به این کار اختصاص داده‌ایم، ولی در اینجا نیز تلاشی برای ارائهٔ آن کرده‌ایم.

[11] replacement

فرض کنید که a یک مجموعه باشد. همچنین فرض کنید که $\phi(x,y)$ یک فرمول مرتبه‌ی اول باشد که در الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها نوشته شده است و این گونه است که برای هر x_0 در جهان مجموعه‌هامان، تنها و تنها یک عنصرِ y_0 در جهان مجموعه‌ها موجود باشد، به طوری که فرمولِ $\phi(x_0,y_0)$ درست باشد. آنگاه y هایی که در تناظر با x های موجود در مجموعهٔ a هستند، تشکیل یک مجموعه می‌دهند.

به بیان بهتر، فرض کنید $f: V \to V$ یک **تابع تعریف‌پذیر** باشد؛ یعنی $f \subseteq V^2$ یک کلاس باشد که ویژگی تابع بودن را داراست. پس یک فرمولِ $\varphi(x,y)$ وجود دارد به طوری که عبارت زیر درست است:

$$y = f(x) \leftrightarrow \varphi(x,y).$$

حال اگر a یک مجموعه باشد، در این صورت $\{f(b)|b \in a\}$ یک مجموعه است.

بیان فنی‌تر این اصل برای خوانندهٔ منطق‌دان این است که تصویر یک مجموعه، تحت یک تابع تعریف‌پذیر یک مجموعه است.

اصل جانشانی را می‌شود به صورت دیگری هم بیان کرد: اگر I یک مجموعه باشد، آنگاه هر دنباله‌ی به صورت $(a_i)_{i\in I}$ نیز تشکیل مجموعه می‌دهد. در واقع منظور از دنبالهٔ (a_i) تصویر یک تابعِ $f: I \to V$ است.

در بخش «خانواده‌های مجموعه‌ها» در همین کتاب، دوباره به صورتی از این اصل پرداخته‌ایم. در آنجا خواهیم دید که بنا به اصل جانشانی، خانواده‌هائی از مجموعه‌ها به صورت $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ وجود دارند.

تمرین ۱۴.۳. بیان رسمی اصل جانشانی را برای یک فرمولِ $\phi(x,y)$ بنویسید.

۸. **اصل انتظام:** هیچ اصلی به اندازهٔ این اصل در شناساندن طبیعت مفهوم یک مجموعه مهم نیست. پیش از پرداختن به بیان این اصل، دقت کنید که اگر a یک مجموعه باشد، آنگاه

$$\{a\},\{\{a\}\},\{\{\{a\}\}\},\dots,\{\dots\{\{\{a\}\}\}\dots\},\dots$$

نیز مجموعه هستند، یعنی می‌توان به هر تعدادی آکولاد در دو طرف اضافه کرد؛ ولی به نحو شگفت‌انگیزی بنا به اصل انتظام، بر عکس این کار امکان‌پذیر نیست. یعنی عبارتی به صورت زیر (یعنی به صورتی که تعداد آکولادها نامتناهی باشد)، مجموعه **به حساب نمی‌آید:**

$$\left\{\left\{\{\dots\}\right\}\right\}$$

بگذارید بیان رسمی اصل را داشته باشیم تا بتوانیم آن را دقیق‌تر توضیح بدهیم:

$$\forall x \quad \left(x \neq \emptyset \to \exists z \quad z \in x \wedge z \cap x = \emptyset\right)$$

یعنی، هر مجموعه‌ای عضوی دارد که آن عضو با مجموعه‌ی یادشده اشتراکی ندارد. بهترین راه برای درک اصل انتظام این است که رابطهٔ $\in$ را یک «ترتیب» تصور کنیم. پس هر مجموعه مانند x اگر ناتهی باشد، دارای یک عنصر مینی‌موم است.

شاید بررسی نقیض اصل نیز به فهمیدن آن کمک کند. فرض کنید که یک مجموعه‌ی x داشته باشیم که در اصل انتظام صدق نکند. پس یک مجموعه‌ی $x_1 \in x$ موجود است به طوری که $x_1 \cap x \neq \emptyset$. پس فرض

کنید $x_2 \in x_1 \cap x$. باز از آنجا که x در اصل انتظام صدق نمی‌کند و $x_2 \in x$، یک مجموعه‌ی $x_3 \in x_2 \cap x$ پیدا می‌شود. بدین‌طریق مجموعه‌های

$$x_1 \ni x_2 \ni x_3 \dots$$

پیدا می‌شوند. در زیر این گفته را دقیق‌تر کرده‌ایم.

قضیه ۱۷.۳. اصل انتظام معادل این گفته است که در یک جهان متشکل از همه‌ی مجموعه‌ها، هیچ دنباله‌ای نامتناهی نزولی به صورت زیر از مجموعه‌ها وجود ندارد. [۱۲]

$$a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \dots$$

به بیان دقیق‌تر اگر دنباله‌ی بالا از مجموعه‌ها را داشته باشیم، آنگاه $a_1, a_2, \dots$ تشکیل مجموعه نمی‌دهند.

اثبات. اگر $a = \{a_1, a_2, \dots\}$ یک مجموعه باشد که از مجموعه‌هایی تشکیل شده است که ویژگی یادشده در این قضیه را دارند، آنگاه اصل انتظام نقض می‌شود. زیرا اگر $a_n \in a$ آنگاه $a_{n+1} \in a_n \cap a$. به بیان دیگر، هر عنصری که در a در نظر بگیریم با a اشتراک دارد.

از طرف دیگر، اگر اصل انتظام برقرار نباشد، همان طور که پیش از شروع این قضیه گفتیم دنباله‌ای به صورتی که در این قضیه گفته شده پیدا می‌شود. [۱۳] □

حکم قضیه‌ی بالا کمی عجیب است. در دنیای مجموعه‌ها، دنباله‌هایی به صورت زیر وجود دارند:

$$a_1 \in a_2 \in a_3 \in \dots$$

اما دنباله‌هائی به صورت زیر وجود ندارند:

$$a_1 \ni a_2 \ni a_3 \dots$$

وقتی گفته را با ترتیب اعداد طبیعی قیاس کنید، ملموستر می‌شود. در اعداد طبیعی دنباله‌های صعودی به شکل زیر وجود دارند:

$$n < n+1 < n+2 < \dots$$

اما اگر یک عدد طبیعیِ n را در نظر بگیرید، از آن به قبل، نمی‌توان یک دنباله‌ی نزولیِ **نامتناهی** نوشت:

$$n > n-1 > n-2 > \dots > 1$$

این نکته، همان‌گونه که پیش‌تر گفتم، از کلیدی‌ترین نکات در مفهوم مجموعه است. **در واقع صورت اصل انتظام بیانگر این است که هر مجموعه، خوش‌بنیاد است؛ یعنی با تعداد متناهی بار استفاده از روشهای ساخت مجموعه، ایجاد می‌شود.** و این گفته حیرت‌آور است. حتی در مجموعه‌هایی که «بسیار بزرگ» به نظر می‌رسند نمی‌شود تعدادی نامتناهی «عقبگرد» داشت.

[۱۲] به بیان دقیقتر، هیچ تابعی از اعداد طبیعی به جهان همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد که بُردِ آن مجموعه‌های یادشده در این قضیه باشد.
[۱۳] در این اثبات از اصول موضوعهٔ دیگر هم استفاده شده است. اثبات دقیق‌تر را می‌توانید در بخشِ ۳.۴ مشاهده کنید.

قضیه ۱۸.۳. در همهٔ جهانهای نظریهٔ مجموعه‌ها،

$$\forall x \quad x \notin x.$$

اثبات. فرض کنید که x_0 یک مجموعه در جهان مجموعه‌ها باشد. اگر $x_0 \in x_0$ آنگاه می‌توان یک دنباله‌ی نزولی به صورت زیر از مجموعه‌ها نوشت:

$$x_0 \ni x_0 \ni \dots$$

ولی این کار بنا به قضیه‌ی قبل ناممکن است. □

تمرین ۱۵.۳. نقیضِ اصل انتظام را بنویسید.

تمرین ۱۶.۳. سعی کنید که یک نامجموعه(!) بسازید که از اصل انتظام پیروی نکند!

۹. **اصل نهم، اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی.** این اصل قرار است به یکی از رازآلودترین مفاهیم در ذهن بشری، یعنی مفهوم نامتناهی بپردازد. این که آیا جهان هستی متناهی است یا نامتناهی، یکی از مهمترین سوالات بشری است که پاسخ آن، می‌تواند بسیاری از مشکلات فلسفی را حل کند. مثلاً اثبات وجود یک خالق برای یک جهان متناهی، بسیار ساده‌تر از اثبات وجود یک خالق برای جهانی نامحدود است؛ کافی است به نحوی بررسی شود که تمام موجودات آن جهان، که تعداد آنها متناهی است، توسط یک نفر خلق شده‌اند.

در نظریه‌ی مجموعه‌ها هم اثبات وجود نامتناهی برای ما ناممکن است و این که مجموعه‌ای نامتناهی در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد، یک اصل‌موضوعه است. در درسهای آینده خواهیم دید که به محض این که ریاضیدان وجود نامتناهی را می‌پذیرد، دنیای رنگارنگی از نامتناهی‌های متفاوت پیش روی او خودنمائی می‌کند؛ و این تفاوت نامتناهی ریاضیدان با نامتناهی دیگران است!

بگذارید فعلاً اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی را بیان کنیم؛ سپس در بخش‌هائی از این درس، دوباره به طور جدی به این موضوع جذاب خواهیم پرداخت.
بیان غیر رسمی: یک مجموعه‌ی نامتناهی موجود است.
بیان رسمی این اصل در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها، به شیوه‌ی هوشمندانه‌ی زیر است:

$$\exists x \quad \Big(\emptyset \in x \wedge \forall y \quad \big(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x\big)\Big)$$

به طور خاص، مجموعه‌ی x که وجود آن در اصل بالا تضمین شده است شامل مجموعه‌ی زیر (و نه برابر با آن) است:

$$\Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}, \dots\Big\}$$

۱۰. **اصل انتخاب.** عموماً حتی در اثباتهای پیشرفته‌ی ریاضی، تشخیصِ این که در کجای اثبات از اصل انتخاب استفاده شده است دشوار است. این اصل تنها بیانگر این است که اگر تعدادی مجموعه‌ی ناتهی داشته باشیم که با هم تشکیل یک مجموعه داده‌اند، می‌توانیم از هر کدام از آنها عضوی برداریم!

مجموعهٔ $a=\{a_1,a_2\}$ را در نظر بگیرید که یک مجموعه است که از دو مجموعهٔ ناتهیِ a_1,a_2 تشکیل شده است. مفهوم زوج مرتب را بعداً توضیح خواهیم داد، ولی با فرض این که خواننده می‌داند که زوج مرتبِ (a,b) به چه معناست، جملهٔ در جهان مورد نظر ما درست است.

$$\forall x_1\in a_1\forall x_2\in a_2\exists c\quad c=\{(a_1,x_1),(a_2,x_2)\}$$

یعنی مجموعه‌ای مانند c وجود دارد که به ما می‌گوید عنصرِ x_1 از a_1 انتخاب شده است و عنصرِ x_2 از a_2. این جمله در همهٔ جهانها درست است؛ یعنی در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، اگر مجموعه‌ای دو مجموعه داشته باشد می‌توان به طور مشخص از هر کدام از این مجموعه‌ها یک عنصر انتخاب کرد. امکان انجام این کار برای یک مجموعهٔ دلخواه (که شاید متناهی نباشد) همان اصل انتخاب است.

بیان غیر رسمی اصل انتخاب این است که اگر a یک مجموعه باشد که خودْ از مجموعه‌هائی ناتهی تشکیل شده است، آنگاه تابعی، به نام تابع انتخاب برای a وجود دارد که از هر مجموعهٔ موجود در a یک عنصر برمی‌دارد.

بیان رسمی این اصل را در زیر آورده‌ایم:

$$\forall x\quad \Big(x\neq\emptyset\to\exists f:x\to\bigcup x\quad\forall y\in x\quad f(y)\in y\Big)$$

نخستین ابهام در بیان بالا این است که گفته بودیم که در جملات مرتبهٔ اول، سورها باید روی عناصر جهان اثر کنند؛ پس چگونه می‌توان وجود یک تابع را با سور بیان کرد.

پاسخ این ابهام این است که در بخشهای بعدی خواهیم دید که هر تابع، در واقع یک مجموعه در جهان مجموعه‌هاست. پس سورِ $\exists f$ در بالا، یعنی یک مجموعه وجود دارد که ویژگی تابع بودن را داراست و ... . دربارهٔ رفع این ابهام همچنین بخشِ ۲.۴.۹ را مشاهده کنید.

ابهام دوم دربارهٔ دامنه و برد تابع انتخابِ f است. دقت کنید که قرار است f از هر مجموعهٔ موجود در a یک مجموعه بردارد. پس f یک عنصر از a مانند b را می‌گیرد و یک $c\in b$ را به دست می‌دهد. طبق تعریفِ نمادِ $\bigcup$ داریم $c\in\bigcup a$.

مثال ۱۹.۳. فرض کنید $x=\Big\{\{1,2\},\{4,5,6\},\{7,8\},\{9\}\Big\}$. در این صورت، $\bigcup x=\Big\{1,2,4,5,6,7,8,9\Big\}$. یک مثال از تابعِ انتخاب برای x تابع f در زیر است:

$$f:x\to\bigcup x$$

$$f(\{1,2\})=1\quad f(\{4,5,6\})=6,\quad f(\{7,8\})=7,\quad f(\{9\})=9$$

واضح است که توابع انتخاب دیگری نیز برای x وجود دارند. همچنین همان طور که در بالا اثبات کردیم، وجود یک تابع انتخاب برای یک مجموعهٔ متناهی مانند x امری اثبات پذیر است و نیازی به استفاده از اصل انتخاب ندارد.

بیان اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها در اینجا به پایان می‌رسد. در باقی فصلها و بخشهای این کتاب خواهیم دید که چگونه هر چیزی که ماهیت ریاضی دارد، اولاً در جهان نظریهٔ مجموعه‌هاست و ثانیاً چگونه وجود و ویژگی‌هایش به این اصول موضوعه بستگی دارد.

□پایان اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

۳.۳ رفع پارادوکس راسل با اصل تصریح یا اصل انتظام

در مقدمهٔ این فصل گفتیم که اگر اصل موضوعه‌ای در نظریهٔ مجموعه‌ها قرار دهیم که بگوید هر عبارتِ به صورتِ $A = \{x : p(x)\}$ یک مجموعه است، به تناقض می‌رسیم. علت این تناقض این بود که وقتی A مجموعه‌ای در جهان ما باشد، در معرض رابطهٔ عضویت در جهان قرار می‌گیرد و در نتیجه باید یکی از عبارتهای $A \in A$ یا $A \notin A$ درست باشد؛ و دیدیم که هیچ کدام نمی‌تواند رخ بدهد. در تعریفِ ۸.۳ گفتیم که عباراتی مانند A را یک مجموعه نمی‌نامیم و نام آنها را یک «کلاس» می‌گذاریم. از لحاظ شهودی، یک کلاس بسیار بزرگتر از آن است که بخواهیم آن را مجموعه بنامیم. در عین حال، اصلی به نام «اصل تصریح» در دستگاه اصول موضوعهٔ خود گنجاندیم که می‌گوید اشتراک یک کلاس با یک مجموعه، به اندازهٔ کافی کوچک هست که آن را مجموعه بنامیم.

قضیه ۲۰.۳. نشان دهید که در هر جهانی از مجموعه‌ها که از اصول ZFC پیروی کند، مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها نداریم؛ به بیان بهتر، کلاسِ $V = \{x|x = x\}$ یک مجموعه نیست.

اثبات. روش اول، با استفاده از اصل تصریح و بدون استفاده از اصل انتظام. فرض کنید V یک مجموعه باشد. بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$B = \{x \in V | x \notin x\}$$

حال دو حالت داریم، یا $B \in B$ یا $B \notin B$. اگر $B \in B$ آنگاه $B \in \{x \in A | x \notin x\}$ پس $B \notin B$. و به طور مشابه اگر $B \notin B$ آنگاه $B \in B$ و این تناقض است. به بیان دیگر اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها، به همراه این که کلاس همه‌ی مجموعه‌ها، مجموعه باشد، تناقض‌آمیز است؛ بنابراین در جهانی از مجموعه‌ها به نام V وجود ندارد که در آن همزمان اصول نظریهٔ مجموعه‌ها درآن برقرار باشند و V مجموعه باشد.

روش دوم، با استفاده از اصل انتظام. فرض کنیم کلاسِ همه‌ی مجموعه‌ها، یک مجموعه باشد؛ آن را V بنامیم. پس از آنجا که V یک مجموعه است و V کلاس متشکل از همه‌ی مجموعه‌هاست پس $V \in V$. اما این بنا به قضیهٔ ۱۸.۳ با اصل انتظام در تناقض است. □

در جهانی از مجموعه‌ها که از اصول ZFC پیروی می‌کند عبارت $\{x|x \notin x\}$، بنا به اصل انتظام، برابر کلاس همه‌ی مجموعه‌هاست. بنا به قضیهٔ ۲۰.۳ این کلاس مجموعه نیست. (در واقع چون مجموعه بودن این کلاس تناقض می‌دهد پس اگر جهانی از مجموعه‌ها وجود داشته باشد چنین مجموعه‌ای در آن نیست).

۴.۳ آیا جهانی از مجموعه‌ها وجود دارد؟

تا کنون آموخته‌ایم که اصول نظریهٔ مجموعه‌ها قوانینی هستند که در منطق مرتبهٔ اول و فقط با استفاده از الفبای $\in$ بیان می‌شوند. هر خواننده‌ای در ذهن خود جهانی از مجموعه‌ها تصور می‌کند و تصور افراد با هم متفاوت است؛ با این حال هر کس در جهان خود برقراری اصول نظریهٔ مجموعه‌ها را فرض کرده است. هر قضیه‌ای در نظریهٔ مجموعه‌ها، یک جملهٔ مرتبهٔ اول است که با استفاده از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها استنتاج می‌شود. پس هر قضیه‌ای باید در تمام جهانهای نظریهٔ مجموعه‌ها برقرار باشد.

اما آیا ممکن است که یک ریاضیدان، که روش استنتاج کردن در منطق مرتبهٔ اول را به درستی بلد است، در یک زمان با استفاده از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، قضیهٔ φ را اثبات کند و در زمان دیگری قضیهٔ $(\neg\varphi)$ را ثابت کند؟ اگر چنین اتفاقی رخ بدهد، در همهٔ جهانهای نظریهٔ مجموعه‌ها هم φ درست است و هم $(\neg\varphi)$. یعنی در

واقع هیچ جهانی از نظریهٔ مجموعه‌ها نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا جهانها تابع قوانین منطق گزاره‌ها هستند و مکانهایی برای رخ دادن یک چیز و نقیض آن به طور همزمان نیستند. عملاً (قضیهٔ تمامیت گودل می‌گوید که) وجود جهان یعنی عدم رخداد تناقض.

در این بخش برای روشن نگه داشتن چراغ پرسش در ذهن خواننده، در بارهٔ پاسخ سوال بالا کمی توضیح داده‌ایم؛ اما در بخشِ ۳.۱۴ به طور مفصل‌تر و دقیق‌تر به این موضوع خواهیم پرداخت. دقت کنید که گفتیم هر چیزی که در نظریهٔ مجموعه‌ها بخواهد اثبات شود، باید با استفاده از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها استنتاج شود. یک قضیهٔ بسیار مهم در نظریهٔ مجموعه‌ها به ما می‌گوید که «این را که اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها با هم تناقض نمی‌دهند نمی‌توان ثابت کرد». به بیان دقیق‌تر «نمی‌توان از خودِ اصول موضوعه نظریهٔ مجموعه‌ها استفاده کرد و اثبات کرد که این اصول موضوعه با هم تناقض نمی‌دهند».

قضیه‌ای که در بالا بدان اشاره کردیم، قضیهٔ «ناتمامیت دوم» نام دارد که توسط ریاضیدانی بسیار تأثیرگذاری به نام «گودل» به اثبات رسیده است. یک نکتهٔ مهم در فهم این قضیه این است که این جمله که «اصول نظریهٔ مجموعه‌ها با هم تناقض نمی‌دهند» را می‌توان به صورت یک جملهٔ مرتبهٔ اول در الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها نوشت. پس صحبت کردن دربارهٔ اثبات یا عدم اثبات آن امکان‌پذیر است. قضیهٔ ناتمامیت دوم می‌گوید که این جمله، که قابل نوشتن است، از اصول موضوعهٔ ما مستقل است؛ یعنی اثباتی برای آن با استفاده از اصول موضوعهٔ ما وجود ندارد.

همان طور که گفتیم، قرار است در این کتاب در یک بخش به قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل پرداخته شود. اما لازم می‌دانم در اینجا به چند ابهام دربارهٔ این قضیه پاسخ دهم.

عموماً وقتی قضیهٔ ناتمامیت دوم را تدریس می‌کنم، بلافاصله دانشجویان می‌پرسند پس این علمی که معلوم نیست تناقض می‌دهد یا نه به چه دردی می‌خورد؟ در پاسخ این سوال باید گفت، به درد فرستادن موشک به فضا، ساخت موجودات هوشمند، اختراع دستگاه رهیاب، احتمالاً ساخت بمب اتمی و خیلی چیزهای دیگر.

در واقع در فصل منطق مرتبهٔ اول دیدیم که قضیهٔ دیگری از گودل به ما می‌گوید که چیزهایی که ما با استفاده از اصول به دست می‌آوریم در همهٔ جهانهایی که اصول در آنها برقرارند درستند. پس با فرض پذیرفتن اصول، به خیلی قضایا می‌توان رسید. در این موقع عموماً دانشجویان می‌پرسند که «شاید یکی نخواهد این اصول را بپذیرد». پاسخ این است که ایرادی ندارد. مثلاً یکی از این اصول این است که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد. بعداً خواهیم دید که مجموعهٔ اعداد حقیقی که تمام حساب دیفرانسیل و انتگرال روی آن مطالعه می‌شود و بسیاری معادلات مربوط به پدیده‌های فیزیکی در آن حل می‌شوند، وجودش را وام‌دار این اصل موضوعه است. پس کسی که این اصل موضوعه را قبول ندارد، چیز کمی از دست نمی‌دهد؛ با این حال ریاضیات علم اجبار نیست!

یک نکتهٔ حائز اهمیت دیگر دربارهٔ قضیهٔ ناتمامیت دوم، البته از نظر نگارنده، این است که هیچ علم بشری مانند علم ریاضیات به این صراحت و به عنوان قضیهٔ اثبات‌شده، قدرتها و محدودیتهای خودش را نمی‌شناسد. از یک طرف همهٔ دستاوردهای علمی بر پایهٔ اصول موضوعهٔ ریاضیات است و از طرفی با خودِ این اصول موضوعه، محدودیتهای این اصول موضوعه به اثبات می‌رسد.

اما کلام آخر در این یخش، این است که قضیهٔ ناتمامیت گودل یک قضیه دربارهٔ محدودیت علم ریاضی نیست. این قضیه، بدین صورت قابل تعمیم است که «هیچ سیستم فکری‌ای که بر اساس اصول موضوعه بنا شده است، سازگاری خود را نمی‌تواند ثابت کند». پس محدودیت مورد نظر قضیهٔ گودل، اگر محدودیت خواندن آن کار صوابی باشد، محدودیت تمام سیستمهای فکری بنا شده بر پایهٔ اصول موضوعه است.

۵.۳ مجموعه‌ی مرجع و جبر بولی مجموعه‌ها

خواننده‌ای که به دنبال مطالب جذاب‌ترِ فصول بعدی است می‌تواند از خواندن این بخش صرف‌نظر کند. احتمالاً در دورهٔ دبیرستان خوانده‌ایم که مجموعه‌ای به نام **مجموعه‌ی مرجع** وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. در زیر درستی این گفته را بررسی می‌کنیم. یادآوری می‌کنم که در بخش قبل ثابت کردیم که از اصول زدافسی نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

سوال. آیا مجموعه‌ای وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها، زیر مجموعه‌ی آن باشند؟

پاسخ. فرض کنید C مجموعه‌ای باشد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. بنابراین بنا به اصل اجتماع، $\bigcup C$ نیز یک مجموعه است. ادعا می‌کنیم که $\bigcup C$ مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست و این تناقض است، زیرا مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

فرض می‌کنیم A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم که $A \in \bigcup C$. برای اثبات این ادعا باید نشان دهیم که $D \in C$ موجود است، به طوری که $A \in D$. می دانیم که $\{A\}$ بنا به اصل زوج‌سازی یک مجموعه است و $A \in \{A\}$ ادعا می‌کنیم که $\{A\} \in C$. می‌دانیم که $\{\{A\}\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به فرضمان درباره‌ی C داریم $\{\{A\}\} \subseteq C$ پس $\{A\} \in C$. □

پس این ادّعا که مجموعه‌ای مرجع وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند درست نیست.

اما نیاز به داشتن یک مجموعه‌ی «به‌اندازه‌ی‌کافی‌بزرگ» را چگونه برطرف کنیم؟ می‌دانیم که بنا به اصل اجتماع، اجتماع هر تعداد (کم!) از مجموعه، یک مجموعه است. در واقع بنا با اصل اجتماع، اجتماع هر تعداد از مجموعه‌ها که تعداد آنها نیز در مرز مجموعه بودن بگنجد، یک مجموعه است. حال فرض می‌کنیم که U یک مجموعه باشد که **همه‌ی مجموعه‌هایی که ادامه‌ی این درس درباره‌ی آنها صحبت خواهیم کرد**، زیر مجموعه‌ی آن باشند. کافی است U را اجتماع همه‌ی مجموعه‌هائی بگیریم که در این کتاب بدانها اشاره شده است. پس بیابید U را مجموعه‌ی مرجع بنامیم.

در بخش منطق گزاره‌ها در قضیهٔ ۲۴.۱ دیدیم که گزاره‌ها تشکیل یک جبر بولی می‌دهند و سپس گفتیم که هر تاتولوژی در منطق گزاره‌ها، از قوانین این جبر بولی حاصل می‌شود. همین امر برای مجموعه‌ها نیز برقرار است. بسیاری از ویژگی‌هایی که در دبیرستان برای مجموعه‌ها اثبات می‌شود، از این نتیجه می‌شود که قوانین جبر بولی مجموعه‌ها برقرارند. در زیر این قوانین را بیان کرده‌ایم.

قبلاً مجموعه‌ی $a - b$ را تعریف کرده‌ایم. حال تعریف می‌کنیم:

$$a^c = U - a.$$

از این بعد جملهٔ $x \in a^c$ برای ما معادل با جملهٔ $x \notin a$ خواهد بود؛ چون به طور ضمنی همهٔ x ها را در U در نظر گرفته‌ایم. قضیه‌ی زیر همه‌ی محتوایِ منطق‌گزاره‌ای نظریه‌ی مجموعه‌ها را دربردارد:

قضیه ۲۱.۳. مجموعه‌ی مرجعِ U به همراه عملهایِ $\cup, \cap, ^c$ و مجموعه‌های $\emptyset, U$ تشکیل یک جبر بولی می‌دهد (که بدان جبر بولی مجموعه‌ها گفته می‌شود). به بیان دیگر، همه عبارتهای زیر برقرار هستند: (دقت کنید که استفاده از فلش دوخطه بدین دلیل است که این ویژگی‌ها در هر جهانی از نظریه‌ی مجموعه‌ها درست است).

۱. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$
۲. $a \cap (b \cap c) \Leftrightarrow (a \cap b) \cap c$
۳. $(a \cup b) = (b \cup a)$.
۴. $(a \cap b) = (b \cap a)$.
۵. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$.
۶. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$.
۷. $a \cup \emptyset = a$
۸. $a \cap \emptyset = \emptyset$
۹. $a \cap U = a$.
۱۰. $a \cup U = U$.
۱۱. $a \cup a = a$
۱۲. $a \cap a = a$.
۱۳. $a \cap (a \cup b) = a$.
۱۴. $a \cup (a \cap b) = a$.
۱۵. $a \cap a^c = \emptyset$
۱۶. $a \cup a^c = U$.
۱۷. $(a^c)^c = a$.
۱۸. $(a \cap b)^c = a^c \cup b^c$.
۱۹. $(a \cup b)^c = a^c \cap b^c$.

دقت کنید که قضیهٔ بالا، با نظر به توجه ۲۹.۲ یک قضیه است. اما اثبات قضیهٔ بالا آسان است؛ زیرا در واقع هر کدام از موارد بالا متناظر با یکی از مواردِ قضیهٔ ۲۴.۱ است. برای نمونه مورد نهم را اثبات می‌کنیم و تحقیق بقیه را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اثبات. فرض کنیم که در یک جهان نظریهٔ مجموعه‌ها هستیم که a, U مجموعه‌هایی در آن هستند. بنا به اصل گسترش، برای این که نشان دهیم که $a \cap U = a$ باید تحقیق کنیم که در جهان ما جملهٔ زیر درست است (در واقع جملهٔ بالا کوتاه‌نوشتی برای جملهٔ زیر است):

$$\forall x \quad (x \in a \cap U \leftrightarrow x \in a)$$

مجموعه‌ی دلخواه x_0 را در نظر بگیرید. بنا به تعریفِ ۲۳.۲ باید نشان دهیم که در جهان ما جملهٔ زیر درست است:

$$x_0 \in a \cap U \leftrightarrow x_0 \in a$$

اما جملهٔ بالا فقط یک کوتاه‌نوشت برای جملهٔ زیر است:

$$x_0 \in a \cap U \leftrightarrow (x_0 \in a) \wedge (x_0 \in U)$$

پس کافی است نشان دهیم که در جهان ما جملهٔ زیر درست است:

$$(x_0 \in a) \wedge (x_0 \in U) \leftrightarrow x_0 \in a.$$

بنا به قضیهٔ ۲۴.۱ می‌دانیم که عبارت زیر یک تاتولوژی است:

$$(p \wedge \top) \leftrightarrow p$$

پس در جهان مورد نظرمان داریم:

$$(x_0 \in a) \wedge (x_0 \in U) \leftrightarrow x_0 \in a.$$

□

مثال ۲۲.۳. نشان دهید که $a - b = a \cap b^c$.

پاسخ. دقت کنید که صورت درست این مثال این گونه است: نشان دهید که در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها و برای هر دو مجموعهٔ a, b داریم $a - b = a \cap b^c$.

برای اثبات این گفته، باید وارد یک جهان بشویم و در آن جهان مجموعه‌های دلخواه a, b را در نظر بگیریم و درستی حکم را تحقیق کنیم. اما می‌شود همزمان در همهٔ جهانها استنتاج کرد. فرض کنید x_0, a, b متغیرهایی در منطق مرتبهٔ اول نظریهٔ مجموعه‌ها باشند. در این صورت داریم:

$$x_0 \in a - b \iff x_0 \in a \wedge x_0 \notin b \iff x_0 \in a \wedge x_0 \in b^c$$

پس مستقیماً نشان داده‌ایم که مستقل از جهان، $a - b = a \cap b^c$. □

در اثبات بالا از فلشهای دوخطه استفاده کردیم تا بگوییم هر آنچه که بیان کرده‌ایم همزمان در همهٔ جهانها برقرار است و در جهان خاصی نیستیم.

توجه ۲۳.۳. در بحثهای تخصصی‌تر نظریهٔ مجموعه‌ها، عموماً از حروف بزرگ برای نشان دادن کلاس‌ها (یی که لزوماً مجموعه نیستند) استفاده می‌شود و از حروف کوچک برای نشان دادن مجموعه‌ها. در عین حال در ریاضیات دبیرستانی مرسوم است که مجموعه‌ها را با حروف بزرگ و اعضای آنها را با حروف کوچک نشان دهند. هر چند می‌دانیم که میان مجموعه و عضو تفاوتی وجود ندارد، برای حفظ آرامش بصری خواننده، ما نیز در ادامه برای استفاده از نماد عضویت، هم از حروف بزرگ و هم از حروف کوچک استفاده خواهیم کرد و خواهیم نوشت: $a \in A$.

توجه ۲۴.۳. هر آنچه در ادامهٔ این بخش آمده است، تنها برای تمرین ریاضی‌ورزی در جبر بولی مجموعه‌هاست. خواننده می‌تواند از خواندن باقی این بخش، به نفع رسیدن به مطالب عمیق‌تر خودداری کند.

مثال ۲۵.۳. نشان دهید که برای هر سه مجموعهٔ A، B و C داریم:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

پاسخ. دوباره، حکم مورد نظر ما این است که در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها و برای هر سه مجموعهٔ A, B, C جملهٔ $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ درست است. بنا به اصل گسترش، باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \big(x \in A \cap (B - C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) - (A \cap C)\big)$$

از قضیه‌ی ۲۴.۱ برای استنتاج در تمامی جهانها به صورت همزمان استفاده می‌کنیم. داریم

$$x \in A \cap (B - C) \iff (x \in A) \wedge (x \in B - C) \iff$$

$$(x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \iff$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \iff$$

$$x \in (A \cap B) \wedge (x \notin A \cap C) \iff$$

$$x \in (A \cap B) - (A \cap C)$$

دقت کنید که برای رفتن از خط اول اثبات به خط دوم، از تاتولوژی زیر استفاده کردیم:

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$$

می‌توانستیم برای اثبات این مثال، از مثالِ اثبات‌شدهٔ ۲۲.۳ استفاده کنیم و بنویسیم:

$$\begin{aligned}
&(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)^c = \\
&(A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) = \\
&((A \cap B) \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c) = A \cap (B - C).
\end{aligned}$$

□

مثال ۲۶.۳. آیا عبارت زیر درست است؟

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$$

پاسخ. فرض کنید $(V, \in)$ یک جهان از نظریهٔ مجموعه‌ها باشد و $1, 2, 3$ مجموعه‌هایی در آن باشند. مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{2\}$، $C = \{3\}$ را در این جهان در نظر بگیرید. داریم

$$A \cup B = A \cup C \wedge \neg(B = C)$$

از آنجا که این جهان و با این تعبیرات، عبارتِ $A \cup B = A \cup C \to B = C$ درست نیست، نتیجه می‌گیریم که استلزامِ $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ برقرار نیست. □

مثال ۲۷.۳. فرض کنید که A, B دو زیرمجموعه از C باشند به طوری که $A \cup B = C$ و $A \cap B = \emptyset$. نشان دهید که

$$A = C - B$$

پاسخ. در جهانهای ما اصل گسترش برقرار است. پس باید نشان دهیم که $A \subseteq C - B$ و $C - B \subseteq A$. دقت کنید که هر چه در ادامه نوشته‌ایم قابل اعمال به هر جهان نظریهٔ مجموعه‌هاست؛ یعنی ما در حال استنتاج در منطق مرتبهٔ اول هستیم ولی برای راحتی کار، قوانین استنتاج خود را با جملات فارسی شرح داده‌ایم. این کار در نوشتن عموم اثباتهای ریاضی مرسوم است.

فرض کنید $x \in A$. در این صورت از آنجا که $A \cap B = \emptyset$ داریم $x \notin B$ و از آنجا که $A \cup B = C$ داریم $x \in C$. پس $x \in C - B$.

از طرف دیگر فرض کنید $x \in C - B$؛ از آنجا که $A \cup B = C$ داریم $x \in A \cup B$. پس $x \in A$ یا $x \in B$. اما دومی طبق تعریفِ $C - B$ رخ نمی‌دهد. □

مثال ۲۸.۳. نشان دهید که $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ اما $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$.

پاسخ. در اثبات حکمِ مثالِ ۲۷.۳ استدلالهایمان را که در واقع استنتاج در منطق مرتبهٔ اول بودند به زبان فارسی

نوشتیم. در این مثال، می‌خواهیم استنتاجمان را در یک سیستم استنتاج در منطق مرتبهٔ اول بیان کنیم. [۱۴]

1 $c \in P(A) \cup P(B) \Rightarrow c \in P(A) \vee c \in P(B)$ (تعریف اجتماع دو مجموعه)

2 $c \in P(A) \Rightarrow c \subseteq A$ (تعریف مجموعهٔ توانی)

3 $A \subseteq A \cup B$ (یک حکم قابل اثبات)

4 $c \in P(A) \Rightarrow c \subseteq A \cup B$ بنا به $2, 3$

5 $c \in P(B) \Rightarrow c \subseteq A \cup B$ تکرار ۲و۳و۴ برای B به جای A

6 $c \in P(A) \vee c \in P(B) \Rightarrow c \subseteq A \cup B$ بنا به ۴و۵

7 $c \in P(A) \cup P(B) \Rightarrow c \in P(A \cup B)$. $\square$

برای اثبات قسمت دوم مثال دقت کنید که

$$c \in P(A) \cup P(B) \Leftrightarrow c \in P(A) \vee c \in P(B) \Leftrightarrow c \subseteq A \vee c \subseteq B$$

همچنین $c \in P(A \cup B) \Leftrightarrow c \subseteq A \cup B$. پس برای اثبات قسمت دوم مثال باید نشان دهیم که $(c \subseteq A) \vee (c \subseteq B) \not\Rightarrow c \subseteq A \cup B$. فرض کنید $(V, \in)$ جهانی از نظریهٔ مجموعه باشد و $1, 2, 3, 4$ مجموعه‌هایی در آن باشند. قرار دهید:

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{3, 4\}, c = \{2, 3\}.$$

آنگاه

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

بنابراین $A \cup B \subseteq A \cup B$ اما $A \cup B \not\subseteq A$ و $A \cup B \not\subseteq B$. $\square$

۶.۳ تمرینهای تکمیلی

تمرین ۱۷.۳. نشان دهید که اگر $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ آنگاه $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

راهنمایی. باید نشان دهید که $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) \Rightarrow (A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$. بنا به تاتولوژیِ $(Q_1 \to (Q_2 \vee Q_3)) \Leftrightarrow (((\neg Q_1) \wedge \neg(Q_2)) \to (\neg Q_1))$ کافی است نشان دهید که اگر $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq A$ آنگاه $A \cup B$ زیرمجموعه‌ای دارد که نه زیرمجموعهٔ A و نه زیرمجموعهٔ B است. $\square$

تمرین ۱۸.۳. نشان دهید که $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ اگروتنهااگر $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

تمرین ۱۹.۳. در تمرین ۱۳.۳ تعریف کردیم

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

فرض کنید که A یک مجموعه باشد و $X = P(A)$. نشان دهید که $(X, \oplus)$ یک **گروه آبلی** [۱۵] است؛ یعنی موارد زیر را نشان دهید:

[۱۴] البته قبول دارم که سیستمهای استنتاج در منطق مرتبهٔ اول را بیان نکرده‌ایم!

[۱۵] با مفهوم گروه آبلی در درس مبانی جبر آشنا خواهید شد. گروه آبلی یک مجموعه است که روی آن یک عمل جمع وجود دارد که آن عمل ویژگی‌های مطلوب جمع(شبیه ویژگی‌هائی که در این تمرین فهرست شده‌اند)را داراست.

۱. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B \in X$

۲. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B = B \oplus A$

۳. $\forall A, B, C \in X \quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

۴. $\forall A \quad A \oplus \emptyset = A$

۵. $\forall A \quad A \oplus A = \emptyset$

در واقع در تمرین بالا نشان داده‌اید که $\oplus$ ویژگی‌هائی شبیه جمع اعداد دارد. هر چند در بالا این که

$$A \oplus A = \emptyset$$

با درک ما نسبت به جمع اعداد سازگار نیست!

تمرین ۲۰.۳. حکم تمرینِ ۱۳.۳ را با استفاده از موارد ۱ تا ۵ تمرین بالا ثابت کنید.

تمرین ۲۱.۳. نشان دهید که

۱. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

۲. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

۳. $(A \subseteq C \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

۴. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$

۵. $A \cup B = A \cap B \iff A = B$

۶. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

تمرین ۲۲.۳. آیا $(A \cup B) - B = A$ ؟

تمرین ۲۳.۳. آیا $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$؟

خلاصهٔ فصل سوم. همهٔ اشیای ریاضی مجموعه هستند، این گفته را در طول این کتاب توجیه خواهیم کرد؛ بنابراین اصول‌موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها اهمیت دارد. در الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها تنها یک نمادِ $\in$ وجود دارد که از آن با کمک ادوات منطقی در ساخت جملات استفاده می‌شود. جملاتِ نظریهٔ مجموعه‌ها در جهانهایی مانند V تعبیر می‌شوند که در آنها معنایی برای رابطهٔ $\in$ تصور شده است. هر اصل موضوعه‌ای در نظریهٔ مجموعه‌ها با استفاده از الفبای یادشده نوشته می‌شود و باید در تمام جهانها به طور همزمان برقرار باشد. در جهانهایی که اصول موضوعه برقرارند نتایج این اصول موضوعه نیز برقرار هستند. ما در اینجا اصول موضوعهٔ زرملو و فرانکل را به همراه اصل انتخاب معرفی کرده‌ایم. در فصلهای آیندهٔ این کتاب قدرت این اصول موضوعه را در بناسازی ریاضی خواهیم دید، همچنین اثبات خواهیم کرد که منجر به تناقض نشدن این اصول موضوعه را با به کارگیری خودِ این اصول موضوعه نمی‌توان اثبات کرد.

فصل ۴

اعداد طبیعی و استقراء در منطق مرتبه‌ی اول

خواجه امام مظفر حمدان در نوقان یک روز می‌گفت کی کار ما با شیخ بوسعید همچنانست کی پیمانهٔ ارزن. یک دانه شیخ بوسعید است و باقی منم. مریدی از آن شیخ بوسعید آنجا حاضر بود، چون آنرا بشنید از سر گرمی برخاست و پای افزار کرد و پیش شیخ آمد و آنچ از خواجه امام مظفر شنیده بود با شیخ بگفت. شیخ گفت برو و با خواجه امام مظفر بگوی که آن یک دانه هم توی، ما هیچ چیز نیستیم. اسرارالتوحید

۱.۴ وجود مجموعهٔ اعداد طبیعی و استقراء

فرض کنید V یک جهانِ نظریهٔ مجموعه‌ها باشد. بنا به اصل وجود، در این جهان یک مجموعه به نام $\emptyset$ وجود دارد. بنا به اصول موضوعهٔ اجتماع و جفت‌سازی، مجموعه‌های زیر نیز در این جهان نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارند:

$$\begin{aligned}
&0 = \emptyset\\
&1 = \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}\\
&2 = \{0,1\} = \{\emptyset\} \cup \big\{\{\emptyset\}\big\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\
&3 = \{0,1,2\} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

روش بالا، روش زرملو برای تعریف اعداد طبیعی است. پس در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها برای هر n یک عدد طبیعی (یعنی یک مجموعه به نام) n وجود دارد. همان طور که از تعریف بالا پیداست، داریم

$$n + 1 = n \cup \{n\}.$$

اما سوال اینجاست که آیا مجموعه‌های $0, 1, 2, \ldots$ همه بالا هم تشکیل یک مجموعه می‌دهند؟ یعنی آیا $\{0, 1, \ldots\}$ نیز در جهانِ نظریهٔ مجموعه‌ها، یعنی V است؟ گردایهٔ [1] $\{0, 1, 2, \ldots\}$ را با نمادِ $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم.

بر خلاف ظاهر، سوال بالا، سوال پیچیده‌ای است؛ در زیر به تعریف دقیق اعداد طبیعی پرداخته‌ایم و پس از آن توضیح مختصری درباره‌ی علت پیچیدگی سوال بالا داده‌ایم.

[1] در فصل بعدی دربارهٔ کلمهٔ «گردایه» توضیح داده‌ایم.

به یاد آورید که اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی به صورت زیر است:

$$\exists x \quad \big(\emptyset \in x \wedge \forall y \quad (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)$$

بیایید برای سادگی، فرمولِ داخل پرانتز را با $\phi(x)$ نشان دهیم. به هر مجموعه‌ی x که در شرط $\phi(x)$ صدق کند، یک مجموعه‌ی استقرائی گفته می‌شود. پس اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی می‌گوید که

$$\exists x \quad \phi(x).$$

یعنی یک مجموعه‌ی استقرائی وجود دارد. به بیان دیگر، این اصل می‌گوید که $\{y|\phi(x)\}$ یک مجموعه در جهانِ V است و این مجموعه، ناتهی است.

قضیه ۱.۴ (تعریف و قضیه)**.** یک مجموعه‌ی استقرائی وجود دارد که زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های استقرائی است. به این مجموعه، مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌گوییم و آن را با ω نشان می‌دهیم.

پیش از شروع اثبات، دقت کنید که قضیهٔ مورد نظر، یک جمله در منطق مرتبهٔ اول است که یعنی در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، یک مجموعهٔ استقرایی وجود دارد که زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های استقرایی آن جهان است. در واقع در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها به چنین مجموعه‌ای، مجموعهٔ اعداد طبیعی در آن جهان نظریهٔ مجموعه‌ها می‌گوییم و آن را با ω نشان می‌دهیم.

اثبات. بنا به اصل وجودِ یک مجموعه‌ی نامتناهی، یک مجموعه‌ی a موجود است به طوری که $\phi(a)$ برقرار است.

در زیر نشان می‌دهیم که بنا به اصل تصریح، x هایی که به طور همزمان در a و در همهٔ مجموعه‌های استقرایی دیگر هستند، تشکیل یک مجموعه می‌دهند. در واقع به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x \in a|\forall y \quad \Big(\big(\underbrace{\emptyset \in y \wedge \forall z \quad (z \in y \rightarrow z \cup \{z\} \in y)}_{\phi(y)}\big) \rightarrow x \in y\Big)\}$$

عبارت بالا در واقع مجموعه‌ی زیر را نشان می‌دهد:

$$\{x \in a| \text{هر مجموعه‌ای که استقرایی باشد } x \text{ عضو آن است}\}$$

بیایید مجموعهٔ بالا را با ω نشان دهیم. واضح است که هر عنصر ω در همهٔ مجموعه‌های استقرایی واقع است؛ یعنی ω از همهٔ مجموعه‌های استقرایی کوچکتر است. تنها چیزی که مانده است اثبات کنیم این است که ω خودْ یک مجموعهٔ استقرایی است. اما اگر یک عنصر y در ω باشد آنگاه y در تمام مجموعه‌های استقرایی است. پس $y \cup \{y\}$ هم در تمام مجموعه‌های استقرایی است. پس طبقِ تعریفِ ω، که از عناصری تشکیل شده است که در همزمان در همهٔ مجموعه‌های استقرایی هستند، داریم $y \cup \{y\} \in \omega$. $\square$

بیایید قضیهٔ بالا را به صورتی متفاوت بیان کنیم. کلاس همه‌ی مجموعه‌های استقرائی را در نظر بگیرید:

$$E = \{x|\phi(x)\}$$

بنا به قضیه‌ی بالا $\omega = \bigcap E$ به بیان دیگر، اشتراک تمام مجموعه‌های استقرائی، یک مجموعه است که به آن مجموعهٔ اعداد طبیعی گفته می‌شود.

توجه ۲.۴. در اینجا می‌خواهم یک نکته‌ی بسیار گیج‌کننده را، برای مدرسین و دانشجویان مبانی ریاضی بیان کنم و آن تفاوت میانِ ω و $\mathbb{N}$ است. از طرفی گفتیم که یک گردایه به نام $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. وجود دارد که نمی‌دانیم مجموعه هست یا نه. از طرفی نیز گفتیم که از اصولِ زدافسی نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی ω وجود دارد.

در واقع در هر مدلی از نظریه‌ی مجموعه‌ها، یک مجموعه‌ی ω (یعنی یک مجموعه از اعداد طبیعی در آن جهان از مجموعه‌ها) وجود دارد. این مجموعه، شاملِ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ است؛ ولی شاید با آن مساوی نباشد (مثلا شاید در این مجموعه، اشیای عجیب و غریبی به نام اعداد طبیعیِ نااستاندارد وجود داشته باشند).

در نظریهٔ مجموعه‌های پیشرفته‌تر اثبات می‌شود که اگر جهانی برای مجموعه‌ها وجود داشته باشد، یک جهان خوش‌بنیاد برای مجموعه‌ها وجود دارد (برای اثبات منبعِ [۱۱] را ببینید). جهان خوش‌بنیاد یعنی جهانی که در آن هر مجموعه‌ای با تعدادی متناهی روش ساخت با استفاده از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها ایجاد شده باشند (همان طور که اصل انتظام می‌خواهد). در جهانهای «خوش‌بنیاد» نظریه‌ی مجموعه‌ها، ω همان $\mathbb{N}$ است، و ما با این توضیح، در ادامه‌ی این درس، با خیال راحت ω و $\mathbb{N}$ را یکی گرفته‌ایم.

پیش از بیان قضیه‌ی استقراء، باید دو نکته را یادآور شویم. نخست این که اگر x یک عدد طبیعی باشد، $x+1$ هم یک عدد طبیعی است و به صورت $x + 1 = x \cup \{x\}$ تعریف می‌شود. علت این که $x + 1$ یک عدد طبیعی است این است که مجموعهٔ اعداد طبیعی، استقرایی است.

گفتیم که در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها یک مجموعه به نام ω وجود دارد. نیز گفتیم که برای «در ω بودن یک عنصر» **توصیفی** وجود دارد؛ در ω بودن یعنی بودن در تمام مجموعه‌های استقرایی. پس یک جملهٔ $\varphi(x)$ وجود دارد به طوری که

$$\varphi(x) \Leftrightarrow x \in \omega.$$

پس از این لحظه به بعد، می‌توانیم عبارتِ $x \in \omega$ را به عنوان یک جملهٔ مرتبهٔ اول در نظریهٔ مجموعه‌ها حساب کنیم.

معمولاً به جای این که بنویسیم:

$$\forall x \quad (x \in \omega \to \psi(x))$$

می‌نویسیم:

$$\forall x \in \omega \quad \psi(x).$$

قضیه ۳.۴ (استقراء در اعداد طبیعی)**.** فرض کنید $p(x)$ یک جمله در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها باشد. آنگاه جملهٔ زیر در تمام جهانهای نظریهٔ مجموعه‌ها درست است:

$$p(0) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \to p(x+1)\Big) \to \forall y \in \omega \quad p(y)$$

اثبات. فرض کنید جمله‌ی زیر در جهان ما درست باشد:

$$p(0) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \to p(x+1)\Big)$$

باید نشان دهیم که

$$\forall x \in \omega \quad p(x)$$

بنا به اصل تصریح عبارت $S = \{x \in \omega | p(x)\}$ یک مجموعه است. واضح است $S \subseteq \omega$. اگر نشان دهیم که $S \subseteq \omega$، در آن صورت برای تمام اعداد طبیعی، حکمِ p درست خواهد بود و اثبات به پایان خواهد رسید.

گفتیم که $\mathbb{N}$ زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی استقرائی است. پس کافی است نشان دهیم که S یک مجموعه‌ی استقرائی است. اما این آسان است، زیرا اولاً $0 \in S$؛ ثانیاً اگر $x \in S$ آنگاه $x+1 := x \cup \{x\} \in S$ پس S استقرائی است. $\square$

گفتیم که $x \in \omega$ یک جملهٔ قابل قبول در منطق مرتبهٔ اول است؛ زیرا در واقع کوتاه‌نوشت یک توصیف برای x است. مشابهاً $x = \omega$ و $x \subseteq \omega$ نیز جملاتی قابل قبول در منطق مرتبهٔ اول هستند. پس استقراء را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\forall S\Bigg(\Big(0 \in S \wedge \forall x \quad (x \in S \rightarrow x+1 \in S)\Big) \rightarrow \omega \subseteq S\Bigg)$$

یک بیان دیگر برای استقراء به صورت زیر است: اگر S زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد که 0 را در بردارد و از این که $x \in S$ نتیجه می‌شود که $x+1 \in S$ آنگاه $S = \omega$. بین اعداد طبیعی، ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x < y \iff x \in y.$$

واضح است که $0 < 1 < 2 \ldots$.

یک نتیجهٔ بسیار مهم از قضیهٔ استقراء، **قضیهٔ بازگشت** است. قضیهٔ بازگشت [2] با استفاده از قضیهٔ استقراء ثابت می‌شود و بیانگر این است که با استفاده از استقراء و با دانستن مقادیر قبلی، می‌توان روی اعداد طبیعی، یک تابع تعریف کرد به طوری که برای هر n مقدار $f(n)$ به $\{f(x) : x < n\}$ بستگی داشته باشد. به طور کمی دقیق‌تر، و با فرض این که واژهٔ «تابع» برای خواننده مفهوم است، فرض کنید $h : A \rightarrow A$ یک تابع باشد و $a \in A$ عنصر دلخواهی باشد. در این صورت یک تابع $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ موجود است به طوری که $f(0) = a$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $f(n+1) = h(f(n))$. هر چند قضیهٔ بازگشت، خودش با استفاده از استقراء ثابت می‌شود، ماهیتاً با استقراء تفاوتی دارد و آن تفاوت این است که قضیهٔ بازگشت برای «ساختن توابع با دامنهٔ اعداد طبیعی» استفاده می‌شود و زحمت اثبات قضیهٔ بازگشت با استفاده از استقراء در به دست آوردن یک «تابع» است. در واقع قضیهٔ بازگشت به ما می‌گوید که «چیزی که به این روش تعریف می‌شود، یک مجموعه است که ویژگی تابع بودن را داراست». برای تعریف جمع و ضرب و فاکتوریل در اعداد طبیعی، در واقع از قضیهٔ بازگشت استفاده می‌شود اما ما (به اشتباه و تنها برای قابل فهم بودن مطلب) در زیر بیان کرده‌ایم که این توابع با استقراء تعریف می‌شوند. در عین حال، برای حفظ کامل بودن، صورت دقیق‌تر قضیهٔ بازگشت را در پایان این بخش بیان کرده‌ایم. [3]

تعریف ۴.۴. جمع اعداد طبیعی توسط استقراء به صورت زیر تعریف می‌شود: [4]

$$x + 0 = x$$
$$x + (n+1) = (x+n) + 1$$

همچنین ضرب اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m \times 0 = 0$$
$$m \times (n+1) = m \times n + 1.$$

---

[2] recursion

[3] برای مشاهدهٔ قضیهٔ بازگشت خواننده را به منابع [۱۱]،[۶] و یا فصل ۲ـ۳ در [۲] و یا قضیهٔ ۲۳۴ در [۱] ارجاع می‌دهیم.

[4] در واقع تابعهای جمع و ضرب و توان، در اعداد طبیعی «تعریف‌پذیر» هستند. یعنی فرمولی در نظریه‌ی مجموعه‌ها پیدا می‌شود که $x + y = z$ را وصف کند. اثبات این گفته نیز به اثبات استقراء تعمیم یافته دارد که در اینجا بدان نپرداخته‌ام. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند این گونه قضایا را در جزوه‌ی مبانی منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها (از خودم) بیابد.

تابعِ فاکتوریل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$0! = 1$$
$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

به همین ترتیب، توان‌رسانی اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m^0 = 1$$
$$m^{n+1} = m \times m^n.$$

به مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ به همراه توابعِ جمع و ضرب در بالا، «ساختارِ اعداد طبیعی» گفته می‌شود. ساختار اعداد طبیعی را به صورتِ $(\mathbb{N}, +, \times)$ نشان می‌دهند. مطالعهٔ ویژگی‌های مختلف این ساختار، موضوع بخشی از علم ریاضیات به نام «نظریهٔ اعداد» است.

تمرین ۱.۴. احکام زیر را با استقراء ثابت کنید.

۱. برای هر عدد طبیعیِ n عددِ $n^3 - n$ بر ۳ بخش پذیر است.

۲. برای هر عدد طبیعیِ $n \geq 10$ داریم $n^3 \leq 2^n$.

۳. برای هر عدد طبیعیِ $n \geq 4$ داریم $n! > 2^n$.

۴. برای هر عدد طبیعیِ n عددِ $3^{n+2} + 2^{4n+2}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۵. برای هر عدد طبیعیِ $n \geq 1$ داریم

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

توجه ۵.۴. گفتیم که استقراء در اعداد طبیعی بیانگر این است که اگر حکمی درباره‌ی عدد ۰ درست باشد، و از درست بودن آن حکم درباره‌ی عددِ n درست بودن آن درباره‌ی عددِ $n+1$ نتیجه شود، آنگاه آن حکم برای هر عددِ طبیعیِ n درست است. در واقع، با استفاده از استقراء، می‌توان حکمی را درباره‌ی هر عدد طبیعی ثابت کرد، ولی نمی‌توان با استفاده از استقراء، حکمی را درباره‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی ثابت کرد. مثلاً عددِ 0 یک مجموعه‌ی متناهی است؛ اگر n یک مجموعه‌ی متناهی باشد آنگاه $n+1$ هم متناهی است؛ از این نتیجه می‌شود که هر عدد طبیعیِ n یک مجموعه‌ی متناهی است؛ اما نتیجه نمی‌شود که مجموعه‌ی اعداد طبیعی متناهی است!

برای فهم بهتر گفته‌ی بالا مثال پیش رو را در نظر بگیرید. فرض کنید که صفی از افراد مقابل ما قرار دارد. نفر اول صف، عینکی است و می‌دانیم که هر کس که عینکی باشد، نفر پس از او نیز عینکی است. از این تنها نتیجه‌ای که می‌شود گرفت این است که هر یک از افرادی که در صف ایستاده است ، عینکی است؛ ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که خودِ صف عینک دارد!

گفته‌ی بالا از لحاظ فلسفی نیز دارای بار معنائی است. وقتی در درون یک جهان از استقراء استفاده می‌کنیم، حکمی درباره‌ی اعضای آن جهان نتیجه می‌گیریم نه حکمی درباره‌ی کُلِّ آن جهان یا بیرون آن! برای توضیح بیشتر، فصل «خانواده‌های مجموعه‌ها» را ببینید. [5]

۲.۴ استقراء و خوش‌ترتیبی

یک روش دیگر معرفی اعداد طبیعی، استفاده از اصل انتظام و انتخاب است. در این روش، هر عدد طبیعی یک مجموعه است که هر زیرمجموعهٔ آن دارای مینی‌موم و ماکزیمم نسبت به رابطهٔ $\in$ است. همچنین در این روش، می‌توان به جای اصل وجود مجموعهٔ استقرایی، «اصل وجود یک اردینال حدی» را در نظر گرفت و در این صورت مجموعهٔ اعداد طبیعی، کوچکترین اردینال حدی است.

استقرای اعداد طبیعی در این شیوه، نتیجه‌ای از این نکته است که هر زیرمجموعهٔ اعداد طبیعی دارای مینی‌موم است. در ادامهٔ بخش، بدون پرداختن به اردینالها و جذابیت آنها، به نحوی خواننده را با جلوه‌ای از این نوع نگاه به اعداد طبیعی نیز آشنا کرده‌ایم و کوشیده‌ایم استقرای اعداد طبیعی را بر اساس خوش‌ترتیبی آن اثبات کنیم.

قضیه ۶.۴. هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی دارای یک مینی‌موم است.

احتمالاً در هر کتاب دیگر ریاضی، اثبات زیر را برای قضیهٔ بالا مشاهده کنیم:

اثبات نادقیق. فرض کنید که A زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد طبیعی باشد که مینی‌موم ندارد. عنصرِ $a_0 \in A$ را در نظر بگیرید؛ این عنصر مینی‌موم نیست. پس در A عنصرِ $a_1 \in a_0$ وجود دارد. به این ترتیب، از آنجا که a_1 هم مینی‌موم نیست می‌توان این کار را ادامه دارد و به یک دنبالهٔ

$$a_0 \ni a_1 \ni \dots$$

از مجموعه‌ها رسید که این بنا به قضیهٔ ۱۷.۳ اصل انتظام را نقض می‌کند. □

اثباتی که برای قضیهٔ ۶.۴ در بالا نوشته‌ایم، اثباتی سراسر بی دقت است و در آن اثری از استفادهٔ درست از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها دیده نمی‌شود. اولین ایراد اثبات بالا این است که نمی‌شود در یک اثبات ریاضی، یک کار را بی‌نهایت بار انجام داد؛ اثبات اصولاً فراروندی متناهی است. دومین ایراد این است که عموماً گفته می‌شود در این اثبات هر بار از اصل انتخاب استفاده می‌شود، که این هم نادرست است؛ به نظر می‌رسد در این اثبات بی‌نهایت بار انتخاب صورت گرفته است ولی در هیچ بار از اصل انتخاب استفاده نشده است.

بیایید در زیر اشاره‌ای به اثبات درست داشته باشیم:

اثبات دقیق قضیهٔ ۶.۴. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد که مینی‌موم ندارد. تابعِ $k : A \to P(A)$ را با ضابطهٔ $k(x) = \{y \in A : y < x\}$ در نظر بگیرید. از آن جا که هیچ کدام از عناصر A مینی‌موم آن نیست، $k(x)$ برای هر $x \in A$ ناتهی است. همچنین فرض کنید $h : P(A) \to A$ یک تابع انتخاب باشد که از هر یک از زیرمجموعه‌های (ناتهیِ) A یک عنصر انتخاب می‌کند. در این صورت $h \circ k$ یک تابع از A به A است که برای هر عنصرِ $x \in A$ عنصری کمتر از آن در A انتخاب می‌کند. حال بنا به قضیهٔ بازگشت یک تابع $g : \mathbb{N} \to A$ وجود دارد به طوری که $g(0) = a_0$ و $g(n+1) = h \circ k(g(n))$.

[5] نمونه‌ی این گونه استفاده نادرست از استقراء را زیاد دیده‌ام!

از آنجا که تابع g با استفاده از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها ایجاد شده است، بنا به اصل جانشانی، $\{g(0), g(1), g(2), \dots\}$ یک مجموعه است. اما مجموعه بودن این گردایه، اصل انتظام را بنا به قضیهٔ ۱۷.۳ نقض می‌کند.

□

حال می‌توانیم استقراء روی اعداد طبیعی را با استفاده از این حقیقت که هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی دارای کوچکترین عنصر است ثابت کنیم: فرض کنید $S \subseteq \mathbb{N}$ شامل ۰ باشد و از این که S شامل n است نتیجه شود که شامل $n+1$ است. اگر S برابر با خودِ $\mathbb{N}$ نباشد آنگاه $\mathbb{N} - S$ یک زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbb{N}$ است پس دارای مینی‌موم است. فرض کنید a این مینی‌موم باشد؛ پس a کوچکترین عدد طبیعی است که در مجموعهٔ S نیست. از آنجا که a کوچکترین عددی است که در S نیست، هر عدد کوچکتر از a در S است؛ به طور خاص $a-1 \in S$. اما S این ویژگی را دارد که از $a-1 \in S$ نتیجه می‌شود که $a \in S$. پس $a \in S$ و این یک تناقض است که از فرضِ این که $S \neq \mathbb{N}$ ناشی شده است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $S = \mathbb{N}$.

تمرین ۲.۴. نشان دهید هر عدد طبیعیِ مخالفِ صفر، دارای یک ماقبل طبیعی است. یعنی

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \neq 0 \rightarrow \exists n' \in \mathbb{N} \quad n = n' + 1)$$

از ابتدای این کتاب، به دنبال بیان یک سری اصول موضوعه، برای نظریهٔ مجموعه‌ها بودیم. پس از بیان این اصول موضوعه، و با فرض این که جهانی از مجموعه‌ها وجود دارد، دیدیم که در این جهان، مجموعه‌ای به نام مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد. روی این مجموعه «توابع اعمال اصلی» را تعریف کردیم و دیدیم که در واقع ساختاری به نام $(\mathbb{N}, +, \times)$ وجود دارد.

نیز گفتیم که جهانی از نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد (به نام جهان خوش‌بنیاد) که در آن $\mathbb{N}$ همان مجموعهٔ اعداد طبیعی مورد علاقهٔ ماست. با فرض این که خودِ نظریهٔ مجموعه‌ها، دارای یک جهان باشد، می‌شود دربارهٔ اصل‌پذیریِ قطعاتی از آن، مثلاً ساختارِ اعداد طبیعی هم سوال کرد. یعنی می‌شود پرسید که آیا می‌شود تعدادی (نه چندان زیاد) اصول موضوعه، یعنی جملهٔ مرتبهٔ اول با استفاده از علائمِ $\times$,$+$ نوشت، به طوری که این اصول موضوعه در جهانِ $(\mathbb{N}, +, \times)$ درست باشند و هر قضیه‌ای که در مورد اعداد طبیعی آشنای ما درست است، از این اصول موضوعه نتیجه شود؟ یکی از چنین اصول موضوعه‌ای، می‌تواند همان اصل موضوعه‌ای باشد که بگوید که در اعداد طبیعی استقراء درست است. دقت کنید که بنا به آنچه دربارهٔ منطق مرتبهٔ اول گفتیم، وقتی چنین اصول موضوعه‌ای نوشته شود، جهانهای مختلفی می‌توانند وجود داشته باشند که این اصول موضوعه در آنها صادق است.

پاسخ به این سوال در حیطهٔ قضیهٔ ناتمامیت اول گودل قرار می‌گیرد که در بخش دیگری از کتاب بدان خواهیم پرداخت. قضیهٔ ناتمامیت اول گودل، بیانگر این است که هر سیستم اصول موضوعه‌ای که توسط یک الگوریتم برای ساختار اعداد طبیعی تولید شود کامل نیست؛ یعنی حقیقتی در مورد اعداد طبیعی آشنای ما وجود دارد که با استفاده از این اصول موضوعه اثبات نمی‌شود. بنابراین همیشه حقیقتی وجود دارد که با این که در جهان اعداد طبیعی آشنای ما درست است، در برخی جهانهای دیگری که آنها هم از اصول موضوعهٔ ما پیروی می‌کنند غلط است. در بخشِ ۱.۷.۱۰ دوباره به این نکات خواهیم پرداخت.

در حین اثباتِ استقرای اعداد طبیعی، دانشجویی پرسید که «مگر استقرای اعداد طبیعی یک اصل‌موضوعه نیست». پاسخ این سوال این است که در نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات می‌شود که مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد و استقرا دربارهٔ آن درست است. اما می‌توان خودِ این قطعه از جهانِ V را به طور مستقل در منطق مرتبهٔ اول مطالعه کرد؛ یعنی برای آن اصول‌موضوعه نوشت. پس می‌شود برای چیزهایی در V که به صورت $(M, +_M, \cdot_M)$ هستند

اصول‌موضوعه‌ای نوشت که یکی از چنین اصول‌موضوعه‌ای می‌تواند «استقراء» باشد. در صورتی که اصول‌موضوعهٔ مورد نظر تناقض ندهند، جهانهای مختلفی برای آنها پیدا خواهد شد و سپس می‌شود دربارهٔ هماهنگ بودن یا نبودن این جهانها با هم (یعنی کامل بودن یا نبودن اصول‌موضوعه) سوال پرسید.

۳.۴ قضیه‌ی بازگشت و پیچیدگی‌های استفاده از اصول

خواننده می‌تواند از خواندن این بخش به نفع رسیدن به مطالب جذاب بعدی خودداری کند. در بخشهای گذشته، گفتیم که اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها آنقدر بدیهیند که گاهی متوجه نمی‌شویم که از کدامشان استفاده کرده‌ایم. در این میان اصل انتخاب، جایگاه ویژه‌ای دارد. نمونه‌اش پیچیدگی رعایت دقیق نحوهٔ استفاده از اصل انتخاب و قضیهٔ بازگشت در اثباتِ قضیهٔ ۶.۴ است.

همچنین در فصل اعداد طبیعی و استقراء، بدین نکته اشاره کردم که در تعاریف استقرائی، به قضیه‌ی بازگشت نیاز است. در این بخش کوتاه، قضیهٔ بازگشت را به صورت دقیق بیان کرده‌ایم.

قضیه ۷.۴ (بازگشت)**.** فرض کنید که $g : A \to B$ و $h : A \times \omega \times B \to B$ دو تابع باشند (که تابع بودنشان با استفاده از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها محرز شده است). در این صورت، بنا به اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها یک تابعِ $f : A \times \omega \to B$ موجود است به طوری که

$$f(a, 0) = g(a)$$

$$f(a, n+1) = h(a, n, f(a, n))$$

برای هر $a \in A$ و $n \in \omega$.

تمرین ۳.۴. بررسی کنید که در تعریفِ جمع و ضرب اعداد طبیعی، از چه توابعی در قضیه‌ی بازگشت استفاده شده است.

همان طور که پیش‌تر نیز تأکید کردیم، قضیه‌ی بازگشت، که به اثبات آن در این درس نخواهیم پرداخت، درواقع نحوه‌ی استفاده از استقراء برای به دست آوردن توابع با دامنه‌ی اعداد طبیعی را بیان می‌کند. به طور خاص، بنا به این قضیه، اگر $h : A \to A$ یک تابع باشد و $a \in A$ یک عنصر باشد، آنگاه تابعی مانند $f : \mathbb{N} \to A$ وجود دارد که به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود:

$$f(0) = a$$

$$f(n+1) = h(f(n)).$$

در فصل ۳ گفتیم که اگر اصل انتظام برقرار نباشد، یک دنباله به صورتِ

$$a_0 \ni a_1 \ni a_2 \dots$$

از مجموعه‌ها پیدا می‌شود. بیان دقیق این گفته به صورت زیر است: اگر اصل انتظام برقرار نباشد، با فرض این که اصل وجود مجموعهٔ استقرایی برقرار است و با استفاده از قضیهٔ بازگشت و دقیقاً مشابه اثباتِ قضیهٔ ۶.۴ می‌توان یک تابع $f : \mathbb{N} \to V$ تعریف کرد به طوری که برای هر عدد طبیعیِ n داریم. $f(n+1) = a_{n+1} \in f(n) = a_n$. حال بنا به اصل جانشانی، $\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$ تشکیل یک مجموعه می‌دهد.

۴.۴ تمرینهای تکمیلی

در تمرین‌های پیش رو، از شما خواسته شده است که احکامی مانندِ $p(x)$ را در مورد اعداد طبیعی ثابت کنید که نوشتنِ خودِ جملهٔ $p(x)$ در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها چندان آسان نیست. برای حل تمرینهای پیش رو، این نگرانی را کنار بگذارید و تنها مفهوم استقراء را تمرین کنید.

تمرین ۴.۴. فرض کنید که a یک مجموعه‌ی n عضوی باشد و $r \leq n$. نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های r عضویِ a برابر است با

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

تمرین ۵.۴. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n داریم

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

و از آن نتیجه بگیرید که

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

نتیجه ۸.۴. فرض کنید که a یک مجموعه‌ی n عضوی باشد. واضح است که داریم:
تعداد زیرمجموعه‌های a برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی a به علاوه‌ی تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی a به علاوه ...تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی a. به بیان دیگر، تعداد زیرمجموعه‌های a برابر است با

$$\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}$$

بنا به تمرینهای قبلی، **تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با 2^n است.**

تمرین ۶.۴. فرض کنید $A, B_1, \ldots, B_n$ مجموعه باشند. با استفاده از استقراء نشان دهید که

$$A \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

و

$$A \cup (B_1 \cap \ldots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap \ldots \cap (A \cup B_n)$$

خلاصهٔ فصل چهارم. یکی از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، اصل موضوع وجود مجموعهٔ استقرایی است. بنا به این اصل موضوعه و اصل تصریح، در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، یک کوچکترین مجموعهٔ استقرایی وجود دارد که به آن مجموعهٔ اعداد طبیعی گفته می‌شود. درست بودن استقراء روی مجموعهٔ اعداد طبیعی را می‌توان به دو طریق اثبات کرد؛ هم با استفاده از این نکته که مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچکترین مجموعهٔ استقرایی است و هم با استفاده از این نکته که هر زیرمجموعه از مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای یک مینی‌موم است. عبارت آخر از اصل انتظام ناشی می‌شود. مطالعهٔ اعداد طبیعی موضوعی بخشی از علم ریاضیات به نام «نظریهٔ اعداد» است.

فصل ۵

خانواده‌های مجموعه‌ها

فهم سخن گر نکند مستمع
قوّت طبع از متکلم مجوی
فُسحَتِ میدان ارادت بیار
تا بزند مردِ سخنگوی، گوی
سعدی

مفهوم «خانواده» از اصل جانشانی نشأت می‌گیرد. مثل همیشه فرض کنید V جهان همه‌ی مجموعه‌ها باشد. بنا به اصل جانشانی، اگر Γ یک مجموعه باشد و $f : \Gamma \to V$ یک تابع باشد، [1] آنگاه کلاسِ $\{f(\gamma)|\gamma \in \Gamma\}$ تشکیل یک مجموعه می‌دهد. هر $f(\gamma)$ یک مجموعه است و کلاسِ $\{f(\gamma)|\gamma \in \Gamma\}$ را یک خانواده از مجموعه‌ها، با مجموعه‌ی اندیسِ Γ می‌نامیم.

بیایید تعریف بالا را ساده‌تر کنیم. فرض کنید Γ یک مجموعه باشد و برای هر $\gamma \in \Gamma$ یک مجموعه‌ی A_γ را در نظر بگیرید. عبارت زیر را، یک خانواده‌ی اندیس‌دار از مجموعه‌ها می‌خوانیم:

$$\{A_\gamma|\gamma \in \Gamma\}$$

خانوادهٔ بالا از مجموعه‌ها را به صورت کوتاه‌شده‌ی زیر نیز نمایش می‌دهیم:

$$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

چند نکته‌ی مهم زیر را درباره‌ی یک خانواده از مجموعه‌ها در نظر داشته باشید:

۱. اندیسهای یک خانواده از مجموعه‌ها، از یک **مجموعه** می‌آیند؛ به بیان دیگر، یک خانواده از مجموعه‌ها، به اندازه یک کلاس از مجموعه‌ها، بزرگ نیست. برای این که $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد، باید این را بدانیم که Γ یک مجموعه است.

۲. ممکن است برخی از اعضای یک خانواده از مجموعه‌ها تکراری باشند: $A_\gamma = A_{\gamma'}$. مثلاً عبارت زیر یک خانواده از مجموعه‌هاست.

$$A = \{a, a, a, a\}$$

[1] درباره‌ی مفهوم تابع بعداً صحبت خواهم کرد. از آنجا که V مجموعه نیست، بهتر است f را شبه‌تابع بنامیم.

خانواده‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر اندیس‌گذاری کرد:

$$A = \{A_i\}_{i\in I} \quad I = \{1,2,3,4\} \quad \forall i \in I \quad A_i = a$$

۳. یک خانواده را باید بتوان بر حسب مجموعه‌ی اندیس آن وصف کرد. برای مثال،

$$F = \{\{1\}, \{2,3\}, \{3,4,5\}, \{4,5,6,7\}, \ldots\}$$

یک خانواده از مجموعه هاست که به صورت زیر وصف می‌شود:

$$F = \{A_i\}_{i\in \mathbb{N}-\{0\}}$$

و [۲]

$$A_i = \{i, i+1, \ldots, i+(i-1)\}.$$

توجه ۱.۵ (مجموعه، کلاس،گردایه، خانواده). در متون شاخص ریاضی، عبارتهای مجموعه، کلاس، گردایه و خانواده هر کدام بنا به علتی مشخص استفاده می‌شوند؛ اما شاید ریاضیدانان کمی تفاوت اینها با هم را بدانند. گفتیم که به هر عنصر در جهانِ V یک مجموعه گفته می‌شود؛ در واقع مجموعه عنصری است که وجود در آن در V از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها استنتاج شود. همچنین گفتیم که منظور از یک کلاسِ A عبارتی به صورت $\{x : p(x)\}$ است؛ یعنی هر کلاس از مجموعه‌هایی تشکیل شده است که ویژگی خاصی دارند و این ویژگی قابل نوشتن توسط یک فرمول مرتبهٔ اول است. یک کلاس لزوماً مجموعه نیست، مثلا کلاس $V = \{x : x = x\}$ کلاس همهٔ مجموعه‌هاست که بنا به قضیهٔ ۲۰.۳ مجموعه نیست. عموماً کلاسها «بزرگتر» از آنند که مجموعه باشند. در فصل قبلی از کلمهٔ «گردایه» استفاده کردیم؛ گفتیم که می‌دانیم که هر یک از $0,1,2,\ldots$ یک مجموعه هستند اما از این فعلاً نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که «گردایه» $\{0,1,2,\ldots\}$ یک مجموعه است. پس هر گردایه، از مجموعه‌هایی در کنار هم تشکیل شده است به طوری که لزوماً یک فرمول وجود ندارد که ویژگی مشترکی برای آنها را بیان کند، و همچنین راهی برای اثبات مجموعه بودن آن گردایه وجود ندارد. در واقع، اگر V یک جهان از نظریهٔ مجموعه‌ها باشد و A یک گردایه در آن باشد، خودِ جهانِ V از مجموعه بودن یا نبودنِ این گردایه بی‌خبر است. [۳] نهایتاً در این بخش، مفهوم خانوادهٔ مجموعه‌ها را تعریف کردیم که گفتیم وجودش از اصل جانشانی به دست می‌آید. یک خانواده از مجموعه‌ها یک تابع از یک مجموعه، به جهانِ همهٔ مجموعه‌هاست که برد و دامنهٔ آن را به صورت فشردهٔ $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۵. فرض کنید $F = \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \exists \gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

$$= \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \forall \gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

دقت کنید که $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ در واقع همان، $\bigcup F$ و $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ همان $\bigcap F$ با نمادهای فصلِ ۳ هستند.

---

[۲] برای وصف دقیق خانواده‌ی بالا، دقت می‌کنیم که مجموعه‌ی اندیس برابر با $\mathbb{N}-\{0\}$ است و داریم

$$\forall i \in \mathbb{N}-\{0\} \quad \forall x \quad \big(x \in A_i \leftrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge x \geq i \wedge x \leq i+(i-1)\big)$$

[۳] هر چند شاید ناظر بیرونی بداند که A یک مجموعه است.

برای این که بتوانیم مثالی جذاب از خانواده‌های مجموعه‌ها بزنیم، نیاز به صحبت کوتاهی دربارهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی داریم. خواننده‌ای که منطق این کتاب را دنبال می‌کند باید بداند که قرار است همان‌طور که مجموعهٔ اعداد طبیعی به طور دقیق معرفی شد، در بخشهای آینده (بخشِ ۴.۸) به مجموعه‌های اعداد صحیح، گویا و حقیقی پرداخته شود. اجمالاً این را بدانیم که همان طور که در هر جهانِ نظریهٔ مجموعه‌ها، یک مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد، در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها یک مجموعه به نام مجموعهٔ اعداد حقیقی وجود دارد. این مجموعه به نحوی که در فصلِ ۴.۸ توضیح خواهیم داد با استفاده از مجموعهٔ اعداد طبیعی ساخته می‌شود. یکی از ویژگی‌های بنیادینی که برای اعداد حقیقی با این ساخت ایجاد خواهد شد، «اصل کمال» است (همان طور که ویژگی بنیادی استقرایی بودن برای اعداد طبیعی از ساخت این اعداد ناشی شد). در ادامهٔ بحث، فرض کرده‌ایم که خواننده مجموعهٔ اعداد حقیقی را می‌شناسد؛ در واقع همان شناخت دبیرستانی او از این مجموعه برای توضیح اصل کمال کافی خواهد بود. بیایید مجموعهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان دهیم. [۴]

فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ یک زیرمجموعهٔ دلخواه باشد. می‌گوییم A از بالا کراندار است هرگاه

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \forall y \in A \quad y < t.$$

اصل کمال بیانگر این است که هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی که از بالا کراندار است، دارای کوچکترین کران بالاست؛ یعنی کران بالایی برای این مجموعه وجود دارد که از همهٔ کرانهای بالای دیگرِ این مجموعه کوچکتر است. این ویژگی بنیادی اعداد حقیقی، پایهٔ همهٔ قضیه‌های مهم آنالیز، حساب و توپولوژی در مورد اعداد حقیقی است.

بیایید عبارتِ «اگر A یک کران بالا داشته باشد آنگاه A دارای کوچکترین کران بالاست» را با فرمولها بنویسیم:

$$\exists t\Big(\underbrace{(\forall x \in A \quad x \leq t)}_{\text{است } A \text{ یک کران بالا برای } t}\wedge\big(\forall y \quad \underbrace{(\forall x \in A \quad x \leq y)}_{\text{باشد } A \text{ یک کرانِ بالای دیگر برای } y \text{ اگر}} \quad \to t < y\big)\Big).$$

قضیه ۳.۵. از اصل کمال نتیجه می‌شود که هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که همزمان از تمامی اعداد طبیعی بزرگتر باشد.

اثبات. فرض کنید u یک عدد حقیقی باشد که همزمان از تمام اعداد طبیعی بزرگتر است. در این صورت، مجموعهٔ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ یک زیرمجموعهٔ کراندار است (زیرا واضح است که u یک کران بالا برای آن است.) بنا به اصل کمال، $\mathbb{N}$ دارای کوچکترین کران بالاست؛ فرض کنید مثلاً t کوچکترین کرانِ بالای مجموعهٔ $\mathbb{N}$ باشد.

از آنجا که t کوچکترین کران بالا برای مجموعهٔ $\mathbb{N}$ است، عددِ $t-1$ کران بالای مجموعهٔ $\mathbb{N}$ نیست؛ چون در این صورت یک کران بالای کوچکتر از کوچکترین کران بالا می‌شد!

از آنجا که $t-1$ کران بالایی برای $\mathbb{N}$ نیست، یک عدد طبیعیِ $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که از $t-1$ بیشتر است: $t-1 < n$. اما در این صورت $t < n+1$ یعنی یک عدد طبیعی، به نام $n+1$ پیدا می‌شود که از t بزرگتر است و این کرانِ بالا بودنِ t را نقض می‌کند. □

ویژگی‌ای که در قضیهٔ بالا برای اعداد حقیقی ثابت کردیم، «ویژگی ارشمیدسی» نامیده می‌شود. ویژگی ارشمیدسی بیانگر این است که هیچ عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر باشد.

حال به خانواده‌ها برگردیم. با استفاده از خانواده‌های مجموعه‌ها، می‌توان گفته‌ی بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}-\{0\}} (n, \infty) = \emptyset$$

[۴] خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند کتابهای استاندارد آنالیز ریاضی، مثلا منبعِ [۹] را نگاه کند.

که در بالا منظورمان از (n, ∞) مجموعه‌ی زیر است:

$$\{x \in \mathbb{R} | x > n\}.$$

نتیجه ۴.۵. خانوادهٔ $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ را در نظر بگیرید که در آن $A_n = (0, \frac{1}{n}) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \frac{1}{n}\}$. داریم

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

اثبات. فرض کنید $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. بنا به تعریفِ اشتراکِ خانواده‌ها، برای هر $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ داریم $x \in (0, \frac{1}{n})$. به بیان دیگر، x از هر عددِ $\frac{1}{n}$ که در آن n یک عدد طبیعی ناصفر است، کوچکتر است. اما در این صورت $\frac{1}{x}$ از هر عددِ طبیعیِ n بزرگتر است؛ و این ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی را نقض می‌کند.

□

تمرین ۱.۵. نشان دهید که دو حکم زیر با هم معادلند:

- هیچ عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر باشد.
- هیچ عدد حقیقی‌ای غیر صفر وجود ندارد که از تمام $\frac{1}{n}$ ها کوچکتر باشد.

تمرین ۲.۵. با ذکر دلیل، بررسی کنید که کدامیک از احکام زیر در مورد مجموعه‌ی اعداد حقیقی درست و کدام غلط است.

۱. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists r \in \mathbb{R} \quad 0 < r < \frac{1}{n}$

۲. $\exists r \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < r < \frac{1}{n}$

۳. $\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} < r$

مفهوم خانواده‌های مجموعه‌ها، فرصت مناسبی فراهم می‌کند تا در مورد یک ابهام دربارهٔ استقراء روی اعداد طبیعی توضیحی دهیم. دقت کنید که می‌توان با استقراء روی اعداد طبیعی نشان داد که برای برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\bigcap_{1\leq i\leq n}(0, \frac{1}{i}) = (0, \frac{1}{n})$. اما از طرفی، بنا به آنچه در بالا دیدیم $\bigcap_{i\in\mathbb{N}-\{0\}} (0, \frac{1}{i}) = \emptyset$.

تمرین ۳.۵. آیا با استقراء روی اعداد طبیعی می‌توان ثابت کرد که

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}-\{0\}} (0, \frac{1}{i}) = \emptyset.$$

در توضیح تمرین بالا، بیایید یک وضعیت مشابه را بررسی کنیم. می‌دانیم که

$$A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

همچنین دیدیم که با استقراء می‌توان ثابت کرد که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

عبارت بالا را می‌توان با استفاده از خانواده‌ها به صورت زیر نوشت:

$$A \cap \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} B_i = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} (A \cap B_i)$$

حال ادعا می‌کنیم که این حکم را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$A \cap \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\big) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A \cap B_i) \tag{۱.۵}$$

مشابه تمرین بالا، از خواننده می‌پرسیم که آیا حکم فوق را می‌توان را می‌توان با استقراء روی اعداد طبیعی اثبات کرد؟ [۵] در فصل قبل گفتیم که با استفاده از استقراء می‌توان احکامی مانند حکم زیر را **درباره‌ی هر عدد طبیعی** ثابت کرد: برای هر عددِ طبیعیِ n داریم $p(n)$. به عنوان مثال، حکم زیر را می‌توان با استقراء ثابت کرد: برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. به عنوان مثال دیگر، این حکم که هر عدد طبیعی ناصفر از عدد قبل از خودش بزرگتر است را نیز می‌توان با استقراء ثابت کرد. اما همان طور که در توجه ۵.۴ گوشزد کردیم استقراء را نمی‌توان برای اثبات حکمی **در مورد «مجموعه‌ی اعداد طبیعی»** استفاده کرد. برای مثال نمی‌توان این حکم را که «مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجموعه‌ای نامتناهی است» با استقراء ثابت کرد. حکمِ ۱.۵ نیز حکمی درباره‌ی یک عددِ طبیعیِ n نیست، پس نمی‌توان آن را با استقراء ثابت کرد. روش صحیح اثبات این حکم در زیر آمده است:

اثباتِ حکمِ ۱.۵ . از آنجا که در دو طرف مجموعه داریم بنا به اصل گسترش کافی است نشان دهیم که

۱. $A \cap \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\big) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A \cap B_i)$ و

۲. $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A \cap B_i) \subseteq A \cap \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\big)$

یک عنصرِ x_0 را به صورت دلخواه در نظر بگیرید. استلزامهای زیر برقرارند:

$$x_0 \in A \cap \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\big) \Rightarrow (x_0 \in A) \wedge \big(x_0 \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\big)$$

$$\Rightarrow x_0 \in A \wedge \big(\exists i_0 \in \mathbb{N} \quad x_0 \in B_{i_0}\big)$$

پس از اینکه $x_0 \in A \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i)$ نتیجه گرفتیم که $i_0 \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$x_0 \in A \cap B_{i_0}$$

اما طبق تعریفِ اجتماع خانواده‌ها، این دقیقاً یعنی $x_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_{i_0}$؛ پس خط زیر به استلزامهای بالا اضافه می‌شود:

$$\Rightarrow x_0 \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A \cap B_i)$$

و به این ترتیب مورد ۱ ثابت می‌شود.

برای اثبات مورد ۲ فرض کنید که x_0 مجموعه‌ای دلخواه باشد و دقت کنید که استلزامهای زیر برقرارند:

$$x_0 \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A \cap B_i) \Rightarrow \exists i_0 \in \mathbb{N} \quad x_0 \in A \cap B_{i_0} \Rightarrow (x_0 \in A) \wedge (x_0 \in B_{i0})$$

[۵] این سوال زمانی برایم مطرح شد که یکی از دانشجویان در امتحان کوشیده بود با استقراء حکم مورد نظر را ثابت کند.

از آنجا که $B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$، خط زیر نیز به استلزام بالا اضافه می‌شود:

$$x_0 \in A \cap \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\big)$$

□

در واقع حکم ۱.۵ برای هر مجموعهٔ اندیسی درست است:

قضیه ۵.۵ (پخش‌پذیری)**.** فرض کنید Γ یک مجموعه‌ی اندیس باشد. در این صورت

۱. $A \cap \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \big(A \cap B_\gamma\big)$

۲. $A \cup \big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \big(A \cup B_\gamma\big)$

اثبات. در زیر تنها مورد اول را ثابت کرده‌ایم. ابتدا نشان می‌دهیم که

$$A \cap \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \big(A \cap B_\gamma\big)$$

داریم:

$$x_0 \in A \cap \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) \Rightarrow x_0 \in A \wedge x_0 \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$$

حال از این که $x_0 \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$ بنا به تعریف، نتیجه می‌گیریم که یک اندیسِ $\gamma_0 \in \Gamma$ وجود دارد به طوری که $x_0 \in B_{\gamma_0}$. بنابراین $x_0 \in A \cap B_{\gamma_0}$. اما بنا به تعریفِ اجتماعِ خانوادهٔ $\{(A \cap B_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ این یعنی $x_0 \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A \cap B_\gamma$.

فرض کنید γ_0 یکی از γ هایی باشد که در بالا وجود آن اثبات شده است. از $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \in B_{\gamma_0})$ نتیجه می‌گیریم که $x_0 \in A \cap B_{\gamma_0}$. اما این که γ_0 ای وجود دارد که $x_0 \in A \cap B_{\gamma_0}$ طبق تعریف یعنی x در اجتماع خانوادهٔ $\{B \cap A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ است؛ به بیان دیگر $x_0 \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A \cap B_\gamma$. پس می‌توان استلزامهای بالا را به صورت زیر ادامه داد:

$$\Rightarrow x_0 \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} (A \cap B_\gamma)$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$A \cap \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \big(A \cap B_\gamma\big)$$

حال درستی $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \big(A \cap B_\gamma\big) \subseteq A \cap \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big)$ را بررسی می‌کنیم:

$$x_0 \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \big(A \cap B_\gamma\big) \Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma \quad x_0 \in A \cap B_\gamma$$

دوباره فرض کنید γ_0 یکی از γ هایی باشد که وجود آن در بالا اثبات شده است. ادامهٔ استلزام بالا به صورت زیر است:

$$\Rightarrow x_0 \in A \wedge x_0 \in B_{\gamma_0} \Rightarrow (x_0 \in A) \wedge (x_0 \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma)$$

$$\Rightarrow x_0 \in A \cap \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big)$$

□

قضیه ۶.۵. فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد. در این صورت

۱. $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$

۲. $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}) A_\gamma\right)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$

اثبات. تنها مورد اول را ثابت می‌کنیم. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\underbrace{\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)^c}_{C} = \underbrace{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c}_{D}$$

مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$x_0 \in C \Leftrightarrow x_0 \in \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)^c$$

$$\iff x_0 \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \iff \forall\gamma\in\Gamma \quad (x_0 \notin A_\gamma)$$

$$\iff \forall\gamma\in\Gamma \quad x_0 \in A_\gamma^c \iff x_0 \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$$

□

مثال ۷.۵. حاصل $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(k, k+1]$ را بیابید.

پاسخ. داریم:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(k, k+1] = (0,1] \cup (1,2] \cup (2,3] \cup \ldots \cup (k, k+1] \cup \ldots$$
$$= (0,\infty) = \{x\in\mathbb{R} | x > 0\}.$$

□

مثال ۸.۵. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$، خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های I به طوری که $\bigcup_{k\in L} J_k = I$. ثابت کنید که

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$$

پاسخ. بنا به اصل گسترش برای مجموعه‌ها، باید نشان دهیم که

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$$

$$\bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

در این جا اولی را ثابت می‌کنیم و دومی را به عنوان تمرین به عهده‌ی خواننده نهاده‌ایم. در نوشتن اثبات اولی، مراحل استنتاج را ماشین‌وار لیست کرده‌ایم:

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \quad x \in A_{i_0}$$
$$(i_0 \in I) \wedge (I = \bigcup_{k\in L} J_k) \Rightarrow \exists k_0 \in L \quad i_0 \in J_{k_0}$$
$$(x \in A_{i_0}) \wedge (i_0 \in J_{k_0}) \Rightarrow x \in \bigcup_{j\in J_{k_0}} A_j$$
$$(k_0 \in L) \wedge x \in \bigcup_{j\in J_{k_0}} A_j \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L} \bigcup_{j\in J_k} A_j$$
$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \quad \text{بنا به چهار مورد بالا}$$

□

۱.۵ تمرینهای تکمیلی

تمرین ۴.۵. فرض کنید که $\Delta \subseteq \Gamma$. آیا $\bigcup_{i\in\Gamma} A_i - \bigcup_{i\in\Delta} A_i = \bigcup_{i\in\Gamma-\Delta} A_i$؟

تمرین ۵.۵. فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ و $\{B_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ خانواده‌هایی از مجموعه‌ها باشند، نشان دهید که

۱.

$$(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \cap (\bigcup_{\delta\in\Delta} B_\delta) =$$
$$\bigcup_{\delta\in\Delta} (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \cap B_\delta) = \bigcup_{\delta\in\Delta} (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} (A_\gamma \cap B_\delta))$$

۲.

$$(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \cup (\bigcap_{\delta\in\Delta} B_\delta) =$$
$$\bigcap_{\delta\in\Delta} (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \cup B_\delta) = \bigcap_{\delta\in\Delta}\bigcap_{\gamma\in\Gamma} (A_\gamma \cup B_\delta)$$

۳. با در نظر گرفتنِ $\Delta = \{1, \ldots, n\}, \Gamma = \{1, \ldots, m\}$ بررسی کنید که

$$(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} B_j)$$
$$\bigcup_{j\in\{1,\ldots,n\}} \bigcup_{i\in\{1,\ldots,m\}} (A_i \cap B_j)$$

تمرین ۶.۵. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های I باشد به طوری که

$$\bigcup_{k\in L} J_k = I.$$

نشان دهید که

۱. $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$

۲. $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in L}\bigcap_{j\in J_k} A_j$

تمرین ۷.۵. نشان دهید که

۱. $A - \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A - B_\gamma)$.

۲. $A - \bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A - B_\gamma)$

تمرین ۸.۵. نشان دهید که

۱. $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}) = \{0\}$

۲. $\bigcap_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}) = (-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$

تعریف ۹.۵ (حاصل‌ضرب یک خانواده از مجموعه‌ها). فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. مجموعه‌ی $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \Leftrightarrow \forall\gamma\in\Gamma \quad x_\gamma \in A_\gamma$$

در واقع هر عنصرِ متعلق به $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ یک دنباله از مجموعه‌هاست [۶].

تمرین ۹.۵. فرض کنید تک‌تکِ مجموعه‌های A_γ ناتهی باشند. نشان دهید که مجموعه‌ی $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ ناتهی است. بیان کنید که کجای اثبات این عبارتِ تقریباً بدیهی، از اصل انتخاب استفاده کرده‌اید (در فصلهای آینده دوباره دربارهٔ این تمرین و تعریف قبل از آن سخن خواهیم گفت.)

خلاصهٔ فصل پنجم. بنا بر اصل جانشانی اگر Γ یک مجموعه باشد و $f:\Gamma\to V$ یک تابع باشد، آنگاه $\{f(\gamma) : \gamma\in\Gamma\}$ یک مجموعه تشکیل می‌دهد. به این مجموعه، یک خانواده از مجموعه‌ها با مجموعهٔ اندیسِ Γ گفته می‌شود. اگر $F = \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد آنگاه $\bigcup F = \bigcup\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{x : \exists\gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$ و $\bigcap F = \bigcap\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{x : \forall\gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$. کلمه‌های مجموعه، کلاس، گردایه و خانواده هر کدام معنی خود را دارند (توجه ۱.۵). با کمک استقراء روی اعداد طبیعی می‌توان درستی یک حکم را برای هر عدد طبیعی ثابت کرد، اما نمی‌توان درستی یک حکم را برای مجموعهٔ اعداد طبیعی اثبات کرد.

---

[۶] پس بنا به اصل جانشانی هر عنصرِ اینچنین یک مجموعه است

فصل ۶

ضربهای دکارتی

نگویند از سرِ بازیچه حرفی
کزان پندی نگیرد صاحب هوش
و گر صد بابِ حکمت پیش نادان
بخوانند آیدش بازیچه در گوش
سعدی

تا اینجا دیدیم که ترکیبات بولی مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک، متمم) چگونه با استفاده از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها تعریف می‌شوند. همچنین دیدیم که وجود مجموعهٔ اعداد طبیعی و مهم‌ترین ویژگی آن یعنی استقراء چگونه به اصول نظریهٔ مجموعه‌ها وابسته هستند. در ادامه‌ی بنا کردن ریاضی بر اساس نظریه‌ی مجموعه‌ها، در این بخش ضربهای دکارتی مجموعه‌ها را معرفی کرده‌ایم که این مفهوم مقدمه‌ی مفاهیم مهم دیگری مانند رابطه و تابع است.

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند و $x \in A$ و $y \in B$. بنا به اصل جفت‌سازی $\{x, y\}$ یک مجموعه است و $\{x\}$ نیز یک مجموعه است. دوباره بنا به اصل جفت‌سازی $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ یک مجموعه است. این مجموعه را با (x, y) نشان می‌دهیم. پس

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

تمرین ۱.۶. نشان دهید که

$$(x_0, y_0) = (x_1, y_1) \iff (x_0 = x_1) \wedge (y_0 = y_1)$$

تعریف ۱.۶. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

قضیه ۲.۶. $A \times B$ یک مجموعه است.

اثبات. طبیعی است که باید به نحوی نشان دهیم که وجودِ $A \times B$ به صورت بالا از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها نتیجه می‌شود. دقت کنید که $\{x\} \subseteq A \cup B$ و $\{x, y\} \subseteq p(A \cup B)$. بنابراین $\{x\} \in P(A \cup B)$ و $\{x, y\} \in P(A \cup B)$. از این رو

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(A \cup B))$$

مشاهده‌ی ساده‌ی بالا به ما می‌گوید که

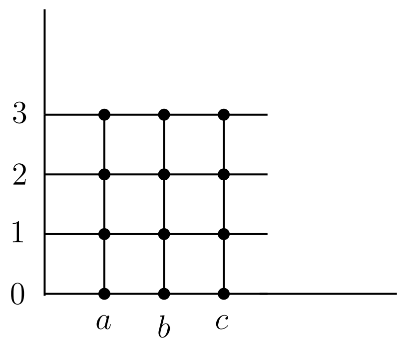
$$A \times B = \{c \in PP(A \cup B) | \exists x \in A \quad \exists y \in B \quad c = \{\{x\}, \{x, y\}\}\}$$

بنا به اصل تصریح، c در بالا یک مجموعه است. $\square$

برای مثال اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{0, 1, 2, 3\}$ آنگاه

$$A \times B = \{(a,0), (a,1), (a,2), (a,3), (b,0), (b,1), (b,2), (b,3), (c,0), (c,1), (c,2), (c,3)\}$$

گاهی کشیدن دو محور متعامد به صورت زیر، درک مفهوم ضرب دکارتی را راحت‌تر می‌کند:



قضیه ۳.۶.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

اثبات. حکم بالا از استلزامهای زیر نتیجه می‌شود:

$$(x, y) \in A \times (B \cap C) \iff (x \in A \wedge y \in B \cap C) \iff (x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C)$$

$$\overset{p \Leftrightarrow p \wedge p}{\iff} (x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \iff \Big((x, y) \in A \times B\Big) \wedge \Big((x, y) \in A \times C\Big)$$

$$\iff (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

$\square$

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

اثبات عبارت بالا را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

قضیه ۴.۶.

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

اثبات. در زیر اثباتی استنتاجی برای حکم بالا ارائه کرده‌ایم.

$$(x,y)\in A\times(B-C)\Rightarrow(x\in A\wedge y\in B-C) \tag{۱.۶}$$

$$x\in A\wedge y\in B-C\Rightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C \tag{۲.۶}$$

$$x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C\Rightarrow(x,y)\in A\times B \tag{۳.۶}$$

$$x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C\Rightarrow(x,y)\notin A\times C \tag{۴.۶}$$

(۵.۶) بنا به تمامی موارد بالا $(x,y)\in A\times(B-C)\Rightarrow(x,y)\in(A\times B)-(A\times C)$

اثبات برگشت:

$$(x,y)\in(A\times B)-(A\times C)\Rightarrow(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin A\times C \tag{۶.۶}$$

$$(x,y)\in A\times B\Rightarrow x\in A\wedge y\in B \tag{۷.۶}$$

$$(x,y)\notin A\times C\Rightarrow(x\notin A)\vee(y\notin C) \tag{۸.۶}$$

$$(x\in A\wedge y\in B)\wedge((x\notin A)\vee(y\notin C))\Rightarrow(x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C). \tag{۹.۶}$$

(۱۰.۶) بنا به موارد ۲۰ تا ۲۳ $(x,y)\in(A\times B)-(A\times C)\Rightarrow(x,y)\in A\times(B-C)$.

□

مثال ۵.۶. آیا $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$؟

پاسخ. خیر؛ فرض کنید که $A,D\neq\emptyset$ و $x_0\in A, y_0\in D$. آنگاه

$$(x_0,y_0)\notin(A\times B)\cup(C\times D)$$

اما

$$(x_0,y_0)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$$

□

۱.۶ تمرینهای تکمیلی

تمرین ۲.۶. نشان دهید که

$$(A\times B)-(C\times D)=\Big((A-C)\times B\Big)\cup\Big(A\times(B-D)\Big)$$

تمرین ۳.۶. فرض کنید که A یک مجموعه‌ی m عضوی باشد و B یک مجموعه‌ی n عضوی. با استفاده از استقراء، نشان دهید که تعداد اعضای مجموعه‌ی $A\times B$ برابر است با $m\times n$.

تمرین ۴.۶. نشان دهید که

$$A\times\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\times B_\gamma)$$

تمرین ۵.۶. آیا $P(A\times B)=P(A)\times P(B)$؟

تمرین ۶.۶. نشان دهید که

$$(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)\cap(\bigcup_{\delta\in\Delta} B_\delta)=\bigcup_{(\delta,\gamma)\in\Delta\times\Gamma}(A_\gamma\cap B_\delta)$$

تمرین ۷.۶. نشان دهید که $A\times B=\bigcup_{b\in B}(A\times\{b\})=\bigcup_{a\in A}(\{a\}\times B)$.

تمرین ۸.۶. فرض کنید $C\subseteq A\times B$. آیا جمله‌ی زیر درست است:
مجموعه‌های $A'\subseteq A$ و $B'\subseteq B$ وجود دارند به طوری که $C=A'\times B'$.

خلاصهٔ فصل ششم. اگر A,B دو مجموعه باشند، آنگاه یک مجموعه به نام $A\times B$ وجود دارد که هر عضو آن به صورت $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$ است که در $x\in A$ و $y\in B$. این مجموعه را ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A,B می‌نامند.

فصل ۷

روابط

پادشاهی پسر به ادیبی داد و گفت: این فرزند توست، تربیتش همچنان کن که یکی از فرزندان خویش. ادیب خدمت کرد و متقبل شد و سالی چند بر او سعی کرد و به جایی نرسید و پسران ادیب در فضل و بلاغت منتهی شدند. ملک دانشمند را مؤاخذت کرد و معاتبت فرمود که وعده خلاف کردی و وفا به جا نیاوردی. گفت: بر رای خداوند روی زمین پوشیده نماند که تربیت یکسان است و طباع مختلف.

گرچه سیم و زر ز سنگ آید همی
در همه سنگی نباشد زر و سیم
بر همه عالم همی‌تابد سهیل
جایی انبان میکند جایی ادیم
سعدی

۱.۷ تعریف مفهوم رابطه

مفهوم رابطه در زبان روزمره آنقدر پرکاربرد است که شاید هنگام استفاده آن در ریاضیات به تعریف دقیق آن توجه نکرده باشیم: رابطه‌ی پدر و فرزندی، پسرخاله و دخترخاله بودن، همسن‌وسال‌بودن و امثالهم. برای مصارف ریاضی، باید رابطه را دقیق، و بر طبق اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها تعریف کنیم:

گفتیم که اگر A, B دو مجموعه باشند، آنگاه $A \times B$ یک مجموعه است. بنا به اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها، هر زیرمجموعه از $A \times B$ نیز یک مجموعه است. هر زیرمجموعه از $A \times B$ را یک رابطه از A به B می‌نامیم.

رابطه‌ها را با حروفی مانند $R, S, \ldots$ نشان می‌دهیم. پس یک رابطه‌ی R از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، یک عنصر از $P(A \times B)$ است. نیز منظور از یک رابطه **روی مجموعه‌ی** X یک رابطه از X به X است.

نمادگذاری ۱.۷. به جای $(x, y) \in R$ گاهی می‌نویسیم: xRy.

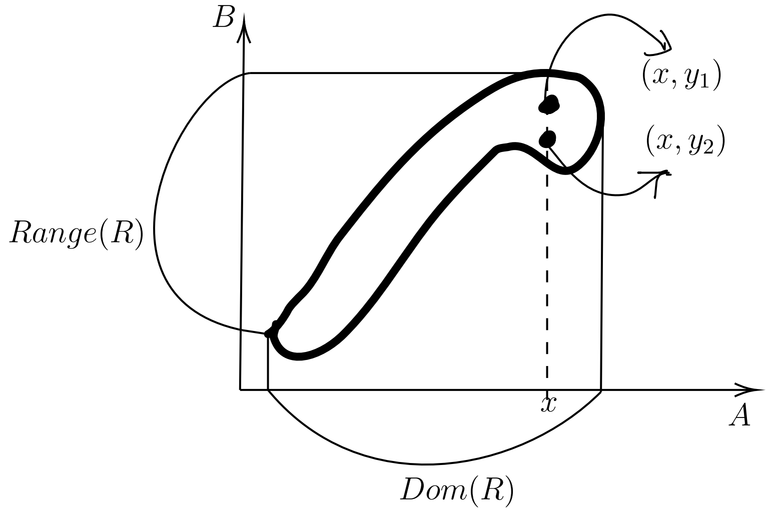
وقتی R رابطه‌ای از A به B باشد، لزوماً همه‌ی عناصرِ A, B در این رابطه درگیر نیستند. برای مثال، برادر بودن یک رابطه در جامعه‌ی انسانهاست. با این حال این گونه نیست که هر دو انسانی را که در نظر بگیریم برادر همدیگر باشند. همچنین این گونه نیست که هر کسی حتماً برادری داشته باشد. تعریف زیر برای دقیق کردن این گفته آمده است.

تعریف ۲.۷. فرض کنید $R \subseteq A \times B$ یک رابطه از A به B باشد. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$Dom(R) = \{x \in A | \exists y \in B \quad (x, y) \in R\}$$

$$Range(R) = \{y \in B | \exists x \in A \quad (x, y) \in R\}$$

اصطلاحاً دامنهٔ یک رابطه، تصویر آن رابطه روی محور A و بُردِ یک رابطه، تصویر آن روی محورِ B است:



توجه ۳.۷. گفته‌ی قبل از تعریف بالا را می‌توان این‌گونه بازگو کرد: اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد لزوماً دامنه‌ی R تمام X نیست. برای مثال روی مجموعه‌ی اعضای یک خانواده‌ی مشخص، دامنه‌ی رابطه‌ی x پدرِ y است، تنها یک عضو دارد.

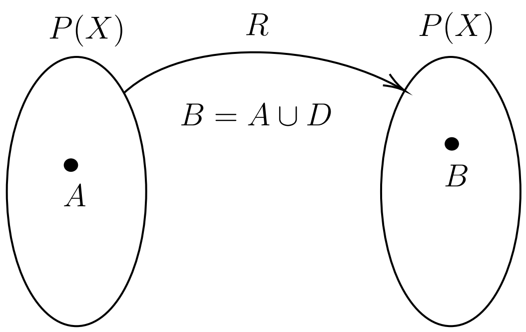
مثال ۴.۷. اگر X یک مجموعه باشد و $D \subseteq X$ یک مجموعه‌ی ثابت باشد. دامنه و برد رابطه‌ی زیر روی $P(X)$ را تعیین کنید.

$$(A, B) \in R \iff A \cup D = B$$

پاسخ. رابطهٔ R در واقع مجموعهٔ زیر است:

$$R = \{(A, B) | A, B \in P(X), A \cup D = B\}$$

در دامنهٔ این رابطه، هر زیرمجموعه‌ای از X می‌تواند قرار بگیرد. اما طی این رابطه، اجتماع یک زیرمجموعه از X با D گرفته می‌شود؛ پس بُردِ این رابطه تنها متشکل زیرمجموعه‌هایی از X است که شامل D هستند. □



تمرین ۱.۷. یک رابطه از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3\}$ به مجموعه‌ی $\{a, b, c, d\}$ مثال بزنید.

تمرین ۲.۷. تعداد کل روابط از یک مجموعه‌ی n عضوی به یک مجموعه‌ی m عضوی چقدر است؟

۲.۷ مثالهائی از روابط

رابطه‌ی تساوی

فرض کنید X یک مجموعه باشد. رابطه‌ی زیر را رابطه‌ی تساوی روی X می‌خوانیم:

$$R = \{(x,y)|x \in X, y \in X, x = y\}$$

به بیان دیگر

$$R = \{(x,x)|x \in X\}$$

رابطه‌ی تساوی (که به آن رابطه‌ی قطری نیز می‌گوییم) را می‌توان رابطه‌ای گرفت که جملهٔ زیر دربارهٔ آن درست است:

$$\forall x, y \in X \quad (xRy \leftrightarrow x = y)$$

این رابطه را با Δ نیز گاهی نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات مجموعه مورد نظر را نیز به صورت اندیس می‌نویسیم تا مشخص شود که تساوی روی چه مجموعه‌ای منظور ماست. پس به طور خلاصه:

$$\Delta_X = \{(x,x)|x \in X\}$$

رابطه‌ی تعلق

فرض کنید X یک مجموعه باشد و $P(X)$ مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های آن. رابطه‌ی تعلق رابطه‌ای از X به $P(X)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \{(x,y)|x \in X, y \in P(X), x \in y\}.$$

توجه کنید که دامنه‌ی این رابطه، X است و بُرد آن برابر است با $P(X) - \{\emptyset\}$. (این گفته را تحقیق کنید).

رابطه‌ی ترتیب روی اعداد طبیعی

رابطه‌ی ترتیب اکید روی اعداد طبیعی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \{(x,y)|x, y \in \mathbb{N}, x < y\}$$

به همین ترتیب رابطه‌ی ترتیب غیراکید روی اعداد طبیعی، رابطه‌ی زیر است:

$$S = \{(x,y)|x, y \in \mathbb{N}, (x < y) \vee (x = y)\}.$$

رابطه‌ی مشمولیت

فرض کنید X یک مجموعه باشد. روی $P(X)$ رابطه‌ی مشمولیت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{(A,B)|A, B \in P(X), A \subseteq B\}.$$

معکوس یک رابطه

اگر R یک رابطه از A به B باشد، رابطه‌ی R^{-1} را از B به A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R^{-1} = \{(x,y) | x \in B, y \in A, (y,x) \in R\}.$$

به بیان دیگر

$$(x,y) \in R^{-1} \iff (y,x) \in R$$

ترکیب روابط

فرض کنید R یک رابطه از A به B و S یک رابطه از B به C باشند. آنگاه رابطه‌ی $S \circ R$ را از A به C به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x,y) \in S \circ R \iff \exists z \in B\Big((x,z) \in R \wedge (z,y) \in S\Big)$$

مثال ۵.۷. فرض کنید روی یک مجموعه از انسانها روابط R و S به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$(x,y) \in R \iff \text{فرزند } y \text{ باشد } x$$

$$(x,y) \in S \iff \text{برادر } x \text{ باشد } y$$

آنگاه داریم:

$$(x,y) \in R \circ S \iff \exists z \quad (\text{فرزند } z \text{ باشد } x) \wedge (\text{برادر } y \text{ باشد } z)$$

$$\iff \text{برادرزاده‌ی } y \text{ باشد. } x$$

تمرین ۳.۷. در مثال بالا، $S \circ R$ را شناسائی و دامنه‌ی و بردِ آن را مشخص کنید.

تمرین ۴.۷. در مثال بالا، روابطِ $R \circ R$ و $S \circ S$ را شناسائی و دامنه و بردِ آنها را مشخص کنید.

۳.۷ برخی ویژگی‌های با اهمیت روابط

رابطه‌هایی که یکی یا برخی از ویژگی‌های معرفی شده در این بخش را دارند، برای ما حائز اهمیت ویژه‌اند. در سرتاسر این قسمت، فرض کنید R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی X باشد.

تعریف ۶.۷. رابطه‌ی R را **انعکاسی** [1] می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad xRx$$

مثال ۷.۷. رابطه‌ی تساوی را روی یک مجموعه‌ی دلخواهِ X در نظر بگیرید. داریم

$$\forall x \in X \quad x = x$$

پس این رابطه، انعکاسی است.

[1] reflective

مثال ۸.۷. رابطه‌ی ترتیب اکید روی اعداد طبیعی، انعکاسی نیست ولی رابطه‌ی ترتیب غیراکید، انعکاسی است.

مثال ۹.۷. هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است پس رابطه‌ی $\subseteq$ روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ نیز یک رابطه‌ی انعکاسی است.

مثال ۱۰.۷ (دو مثالِ نقض)**.** رابطه‌ی $\in$ را روی مجموعه‌ی $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ در نظر بگیرید. داریم

$$\emptyset \notin \emptyset$$

پس این رابطه انعکاسی نیست. همچنین اگر روی مجموعه‌ی انسانها، رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy \iff \text{پدرِ } x \text{ باشد } y$$

این رابطه نیز غیر انعکاسی است.

تعریف ۱۱.۷. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **تقارنی** [۲] می‌خوانیم هرگاه جمله‌ی زیر درست باشد:

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \leftrightarrow yRx\Big)$$

توجه کنید که بنا به تعریف تقارنی بودن یک رابطه، رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X غیرتقارنی است (یعنی تقارنی نیست) هرگاه جمله‌ی زیر درست باشد:

$$\exists x, y \in X \quad (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R.$$

به عنوان یک مثال ساده، رابطهٔ پسرخاله بودن روی مجموعهٔ پسرهای فامیل، یک رابطهٔ تقارنی است اما روی مجموعهٔ همهٔ بچه‌های فامیل، تقارنی نیست.

مثال ۱۲.۷. رابطه‌ی مجزا بودن روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$XRY \iff X \cap Y = \emptyset$$

واضح است که رابطهٔ فوق، تقارنی است.

تمرین ۵.۷. بررسی کنید که رابطه‌های تساوی $(x = y)$ و تمایز $(x \neq y)$ دو مجموعه روی $P(X)$ روابطی تقارنی هستند. کدامیک از این روابط، انعکاسی هستند؟ آیا رابطهٔ مجزا بودن انعکاسی است؟

تمرین ۶.۷ (مثال نقض)**.** نشان دهید که رابطه‌های آمده در مثالِ ۱۰.۷ تقارنی نیستند.

تعریف ۱۳.۷. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **پادتقارنی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \wedge yRx \to x = y\Big)$$

تمرین ۷.۷. بررسی کنید که رابطه‌ی $=$ روی یک مجموعه‌ی X و رابطه‌ی $\subseteq$ روی $P(X)$ هر دو پادتقارنی هستند.

تمرین ۸.۷. آیا رابطه‌ی ترتیب غیراکید روی اعداد طبیعی، پادتقارنی است؟ رابطه‌ی ترتیب اکید چه طور؟

[2] symmetric

مثال ۱۴.۷ (مثال نقض)**.** روابط دوستی و همسن بودن روی یک مجموعه از انسانها پادتقارنی نیستند.

تعریف ۱۵.۷. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **متعدّی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y, z \in X \quad \Big(xRy \wedge yRz \to xRz\Big)$$

تمرین ۹.۷. بررسی کنید که رابطه‌ی تساوی روی یک مجموعه‌ی X، همسن بودن در مجموعه‌ی انسانها، و زیر مجموعه بودن روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ هر سه متعدی هستند.

تمرین ۱۰.۷ (مثال نقض)**.** بررسی کنید که رابطه‌ی دوستی روی مجموعه‌ی انسانها و رابطه‌ی

$$xRy \Leftrightarrow \text{است } x \text{ پدر } y$$

روابطی نامتعدی هستند.

تعریف ۱۶.۷ (تام بودن)**.** رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **تام** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \vee yRx\Big)$$

رابطهٔ پدری تام نیست؛ واضح است که وقتی دو نفر آدم را در نظر می‌گیریم، لزوماً این گونه نیست که یکی پدر دیگری باشد! به دلیلی مشابه، رابطهٔ مشمولیت و رابطهٔ تساوی نیز تام نیستند.

۴.۷ چند مثال از مبحث روابط

مثال ۱۷.۷. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد. قرار دهید

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$$

رابطهٔ R نمونه‌ای از یک رابطه روی $\mathbb{R}$ است.

مثال ۱۸.۷. نشان دهید که رابطه‌ی دلخواهِ R روی مجموعه‌ی X متعدی است اگر و تنها اگر $R \circ R \subseteq R$. (همچنین تمرینهای ۱۸.۷ و ۱۹.۷ را مشاهده کنید.)

اثبات. نخست یادآوری می‌کنیم که

$$(x, y) \in R \circ R \iff \exists z \quad R(x, z) \wedge R(z, y)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که اگر رابطه‌ی R متعدی باشد آنگاه

$$R \circ R \subseteq R$$

فرض کنیم R متعدی است و $(x, y) \in R \circ R$. از این که $(x, y) \in R \circ R$ نتیجه می‌شود که

$$\exists z_0 \quad (x, z_0) \in R \wedge (z_0, y) \in R \quad (*)$$

بنا به $(*)$ و متعدی بودن R نتیجه می‌شود که $(x,y) \in R$. در واقع این اثبات نشان دادیم که وقتی x با یک عنصر در رابطه است که آن عنصر در رابطه با y است، آنگاه x با y در رابطه است؛ و این نفس متعدی بودن است!

برای اثبات جهت عکس، فرض کنید $R \circ R \subseteq R$ می‌خواهیم نشان دهیم که

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R.$$

پس باید فرض کنیم $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ و $R \circ R \subseteq R$. از اینکه $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ نتیجه می‌شود که

$$(x,z) \in R \circ R$$

از فرض $R \circ R \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x,z) \in R.$$

□

مثال ۱۹.۷. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X انعکاسی است اگر و تنها اگر $\Delta_X \subseteq R$.

اثبات. نخست فرض می‌کنیم که R انعکاسی است و ثابت می‌کنیم که $\Delta_X \subseteq R$. فرض کنید $(x,x) \in \Delta_X$. بنا به این که R انعکاسی است نتیجه می‌گیریم که $(x,x) \in R$. پس $\Delta_X \subseteq R$. حال فرض کنید $\Delta_X \subseteq R$. می‌خواهیم ثابت کنیم که R انعکاسی است. عنصر دلخواه $x_0 \in X$ را در نظر بگیرید. بنا به تعریف رابطه‌ی قطری [۳] داریم:

$$(x_0,x_0) \in \Delta_X$$

حال از فرض $\Delta_X \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x_0,x_0) \in R$$

از آنجا که x_0 به طور دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که R انعکاسی است. □

مثال ۲۰.۷. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X تام است اگر و تنها اگر

$$R \cup R^{-1} = X \times X$$

اثبات. فرض کنیم R تام باشد. اگر $(x_0,y_0) \in X \times X$ آنگاه از آنجا که R تام است یا $(x_0,y_0) \in R$ یا $(y_0,x_0) \in R$. پس یا $(x_0,y_0) \in R$ یا $(x_0,y_0) \in R^{-1}$. از آنجا که (x_0,y_0) به طور دلخواه انتخاب شده است، داریم:

$$X \times X \subseteq R \cup R^{-1}.$$

اثباتِ این که : $R \cup R^{-1} \subseteq X \times X$ به صورت پیش رو است: می‌دانیم R یک رابطه روی X است پس $R \subseteq X \times X$. می دانیم R^{-1} یک رابطه روی X است پس $R^{-1} \subseteq X \times X$. پس $R \cup R^{-1} \subseteq X \times X$. تا اینجا ثابت کرده‌ایم که اگر R تام باشد آنگاه

$$X \times X = R \cup R^{-1}.$$

[۳] رابطه‌ی Δ_X را رابطه‌ی قطری روی X می‌خوانیم.

حال فرض کنید $X \times X = R \cup R^{-1}$. می‌خواهیم ثابت کنیم که R تام است. عناصر دلخواه $x_0, y_0 \in X$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم

$$(x_0, y_0) \in X \times X$$

پس

$$(x_0, y_0) \in R \cup R^{-1}$$

پس یا $(x_0, y_0) \in R$ که در اینصورت $x_0 R y_0$ یا $(x_0, y_0) \in R^{-1}$ که در این صورت $y_0 R x_0$ پس رابطه‌ی R تام است. $\square$

۵.۷ تمرینهای تکمیلی

تمرین ۱۱.۷. چنین نیست که هر رابطه‌ای که تقارنی نباشد حتما پادتقارنی است. به عنوان تمرین، یک رابطه مثال بزنید که نه تقارنی باشد و نه پادتقارنی.
راهنمایی. رابطهٔ مورد نظر را به صورت یک مجموعه بنویسید.

تمرین ۱۲.۷. پادتقارنی نبودن یک رابطه یعنی چه؟ پادتقارنی نبودن را با تقارنی نبودن مقایسه کنید.

تمرین ۱۳.۷. فرض کنید Σ مجموعهٔ همهٔ گزاره‌های یک منطق مرتبهٔ اول باشد. رابطهٔ R را روی این مجموعه به صورت زیر تعریف کنید:

$$PRQ \iff P \Rightarrow Q.$$

نشان دهید که رابطهٔ فوق نه تقارنی و نه پادتقارنی است.

تمرین ۱۴.۷. آیا رابطه‌ی «عدم تساوی» یک رابطه‌ی متعدّی است؟

تمرین ۱۵.۷. نشان دهید هر رابطه‌ی تام، انعکاسی است.

تمرین ۱۶.۷. نشان دهید که تنها رابطه‌ای که هم انعکاسی باشد و هم تقارنی و هم پادتقارنی، رابطه‌ی تساوی است.

تمرین ۱۷.۷. روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی، رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy \Leftrightarrow x \leq y.$$

رابطه‌ی بالا (رابطه‌ی ترتیب) کدام یک از ویژگی‌های معرفی شده در این درس را دارد؟

تمرین ۱۸.۷. آیا عبارت زیر درست است:
اگر R یک رابطه‌ی متعدی روی مجموعه‌ی X باشد، آنگاه $R \subseteq R \circ R$.

تمرین ۱۹.۷.

۱. نشان دهید که اگر R یک رابطهٔ متعدی، تقارنی و انعکاسی باشد، آنگاه $R \subseteq R \circ R$.

۲. نشان دهید که در مورد بالا، بدون شرط انعکاسی بودن هم برقرار است.

تمرین ۲۰.۷. عبارت زیر را در نظر بگیرید:
اگر R یک رابطهٔ متعدی و متقارن باشد، آنگاه R انعکاسی است.
دانشجویی عبارت بالا را به صورت زیر اثبات کرده است. اثبات او غلط است؛ اشتباهش را پیدا کنید. سپس نشان دهید که ادعای بالا درست نیست.
اثبات دانشجو: فرض کنیم R متعدی و متقارن باشد. برای اثبات این که R انعکاسی است، باید نشان دهیم که هر x با خودش در رابطه است. یک عنصر دلخواه x را در نظر می‌گیریم. فرض کنید xRy. بنا به متقارن بودن رابطه، داریم yRx. بنا به متعدی بودن رابطه، از این دو نتیجه می‌گیریم که xRx. پس رابطهٔ R انعکاسی است.

تمرین ۲۱.۷. با این که V یک مجموعه نیست، می‌توان روی آن هم رابطه در نظر گرفت. رابطهٔ $\in$ را روی V در نظر بگیرید. نشان دهید که این رابطه، غیرانعکاسی، غیرتقارنی و غیرمتعدی است.

تمرین ۲۲.۷. نشان دهید که اگر R یک رابطه‌ی تامِ تقارنی روی X باشد، آنگاه $R = X \times X$.

تمرین ۲۳.۷. رابطه‌ی عاد کردن در اعداد طبیعی، کدامیک از ویژگی‌های معرفی شده در فصل قبل را دارد؟

تمرین ۲۴.۷. فرض کنید که R رابطه‌ای از A به B و S رابطه‌ای از B به C باشد. نشان دهید که

$$Dom(S \circ R) = \{x \in A | \exists y \in Dom(S) \qquad (x, y) \in R\}$$

خلاصهٔ فصل هفتم. منظور از یک رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، یک زیرمجموعه از $A \times B$ است. برخی ویژگی‌های مهم روابط، انعکاسی، متقارن و یا متعدی بودن است.

فصل ۸

روابط هم‌ارزی

هر چه گفتیم جز حکایت دوست
در همه عمر از آن پشیمانیم
سعدی

۱.۸ معرفی رابطهٔ هم‌ارزی

مسئلهٔ دسته‌بندی اشیاء بر اساس ویژگی‌های مشترکشان، هم در زندگی روزمره و هم در ریاضی بسیار پیش می‌آید: مثلاً ممکن است بخواهیم دانشجویان کلاسمان را بر حسب قد یا ماه تولد دسته بندی کنیم؛ یا این که اعداد طبیعی را بر حسب باقیمانده‌ی آنها به ۲ به دو دسته‌ی اعداد زوج و فرد تقسیم کنیم؛ یا این که اعداد طبیعی را بر حسب باقیمانده‌شان به ۳ به سه دسته تقسیم کنیم.

در ادامهٔ این بخش، فرض می‌کنیم که افراد کلاسمان را بر حسب قد دسته‌بندی کرده‌ایم و ویژگی‌های مختلف این دسته‌بندی رابیان و سپس به صورت ریاضی بررسی می‌کنیم. مهم‌ترین ویژگی‌های مد نظر ما به صورت زیر هستند.

۱. این دسته‌بندی بر اساس یک رابطه صورت گرفته است: رابطه‌ی همقد بودن.

۲. وقتی دانشجویان را بر حسب قدشان دسته بندی می‌کنیم، این دسته‌بندی‌ها هیچ اشتراکی با هم ندارند؛ به بیان دیگر هیچ کس نیست که در دو دسته‌ی قدّی قرار بگیرد!

۳. اگر علی و حسن در یک دسته باشند، آنگاه دسته‌ی افراد هم‌قد با علی، دقیقاً همان دسته‌ی افراد هم‌قد با حسن است. این دسته را هم می‌توان دسته‌ی همقدان علی بنامیم، و هم می‌توانیم دسته‌ی همقدان حسن بنامیم.

۴. اگر حسن و حسین دو دانشجو باشند، از دو حالت خارج نیست: یا حسن با حسین همقد است که در این صورت گروه افراد همقد حسن، دقیقاً همان گروه افراد همقد با حسین است؛ یا حسن با حسین همقد نیست، که در این صورت گروه افراد همقد با حسن، هیچ اشتراکی با گروه افراد همقد با حسین ندارد.

۵. هر یک از افراد کلاس با خودش همقد است! بنابراین هر یک از افراد کلاس در یکی از دسته‌ها (یعنی دسته‌ی افراد هم‌قد با خودش) قرار می‌گیرد.

سازوکار دسته‌بندی در ریاضیات با استفاده از رابطه‌های هم‌ارزی صورت می‌گیرد. به رابطه‌ای که ویژگی‌های **انعکاسی، تقارنی و تعدی** داشته باشد، یک **رابطه‌ی هم‌ارزی** گفته می‌شود. رابطهٔ مد نظر ما، یعنی «همقد بودن» نیز یک رابطهٔ هم‌ارزی است؛ پس عجیب نیست که از آن برای دسته‌بندی استفاده شود.

گفتیم که اگر افراد کلاس را بر اساس قد دسته‌بندی کنیم، آنگاه دستهٔ افراد همقدِ علی، یعنی دستهٔ افرادی که قد آنها با قد علی برابر است، و این یعنی افرادی که با علی در رابطهٔ همقدی هستند. بیایید نخست این گفته را ریاضی‌وار بیان کنیم.

فرض کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد، و $x_0 \in X$ عنصری دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\text{کلاس هم‌ارزی عنصر } x_0 \text{ تحت رابطه‌ی } R := \{y \in X | yRx\} = \{y \in X | xRy\}$$

از علامت $:=$ به این علت استفاده کرده‌ایم که طرف راست آن، تعریفی برای طرف چپ است. علامت $=$ در بالا، به علت تقارنی بودن رابطه استفاده شده است.

کلاس هم‌ارزی عنصر x_0 تحت رابطه‌ی R را با $[x_0]_R$ نشان می‌دهیم. حتی گاهی اوقات به جای $[x_0]_R$ خواهیم نوشت $[x_0]$؛ این کار را در صورتی انجام می‌دهیم که خواننده به طریقی مطلع باشد که در حال گفتگو دربارهٔ رابطهٔ R هستیم. دقت کنید که عبارتِ $[x_0]_R$ مطابق آنچه در منطق مرتبهٔ اول آموختیم، تنها برای کوتاه‌نوشتِ یک واقعیت استفاده می‌شود که می‌توان در هر صورت آن را به صورت طولانی‌تری با جملات مرتبهٔ اول نوشت. پس ما همچنان به رعایت منطق مرتبهٔ اول مجموعه‌ها پای‌بند هستیم.

گفتیم که اگر حسن و علی همقد باشند، گروه افراد همقد با علی، دقیقاً همان گروه افراد همقد با حسن است. این گفته را در قضیه‌ی زیر دقیق بیان کرده‌ایم:

قضیه ۱.۸. فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد و $x_0, y_0 \in X$ و $x_0 R y_0$. آنگاه

$$[x_0]_R = [y_0]_R$$

اثبات. $[x_0]_R$ و $[y_0]_R$ هر دو، مجموعه هستند؛ برای نشان دادن این که دو مجموعه برابرند، باید مطابق اصل گسترش نشان دهیم که اعضای یکسانی دارند.

فرض کنید $t \in [x_0]_R$. بنا به تعریفِ $[x_0]_R$ داریم tRx_0. از طرفی بنا به فرض قضیه داریم $x_0 R y_0$. حال بنا به این که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی متعدی است داریم

$$tRx_0 \wedge x_0 R y_0 \to tRy_0.$$

از tRy_0 بنا به تعریفِ مجموعه‌ی $[y_0]_R$ نتیجه می‌شود که $t \in [y_0]_R$.

در بالا نشان دادیم که هر عضو ازمجموعه‌ی $[x_0]_R$ یک عضو از مجموعه‌ی $[y_0]_R$ است. تکرارِ همین اثبات نشان می‌دهد که هر عضو از مجموعه‌ی $[y_0]_R$ یک عضو از مجموعه‌ی $[x_0]_R$ است و از این رو این دو مجموعه با هم برابر هستند. $\square$

گفتیم که اگر علی و حسن همقد نباشند، هیچ کس نیست که با هر دوی آنها همقد باشد. یعنی وقتی علی و حسن همقد نیستند، دستهٔ افراد همقد با علی با دستهٔ افراد همقد با حسن هیچ اشتراکی ندارد. این گفته را در قضیه‌ی زیر دقیق بیان کرده‌ایم.

قضیه ۲.۸. فرض کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد و $x_0, y_0 \in X$ و $x_0 \not R y_0$. آنگاه

$$[x_0] \cap [y_0] = \emptyset.$$

اثبات. کافی است بنا به تاتولوژی

$$\neg q \to \neg p \iff p \to q$$

ثابت کنیم که اگر $[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$ آنگاه x_0Ry_0. فرض کنید $[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$؛ مثلاً $z_0 \in [x_0] \cap [y_0]$. از آنجا که $z_0 \in [x_0]$ و $[x_0] = \{y|yRx_0\}$ نتیجه می‌گیریم که

$$(1) \quad z_0Rx_0$$

به طور مشابه، از این که $z_0 \in [y_0]$ نتیجه می‌گیریم که

$$(2) \quad z_0Ry_0.$$

از آنجا که R تقارنی است از (1) نتیجه می‌شود که

$$(3) \quad x_0Rz_0$$

بنا به متعدی بودن R از (2) و (3) نتیجه می‌شود که x_0Ry_0.

بیایید همین اثبات را بار دیگر به صورت استنتاجی بنویسیم:

1 $\quad [x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \quad z \in [x_0] \cap [y_0]$

پس‌فرض‌می‌کنیم $\quad z_0 \in [x_0] \cap [y_0]$

2 $\quad z_0 \in [x_0] \cap [y_0] \Rightarrow (z_0 \in [x_0]) \wedge (z_0 \in [y_0])$

3 $\quad z_0 \in [x_0] \Rightarrow z_0Rx_0$

4 $\quad z_0 \in [y_0] \Rightarrow z_0Ry_0$

5 $\quad z_0Rx_0 \overset{\text{تقارنی}}{\Rightarrow} x_0Rz_0$

6 $\quad (x_0Rz_0) \wedge (z_0Ry_0) \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} x_0Ry_0$

7 $\quad [x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset \Rightarrow x_0Ry_0 \quad$ بنا به ۱ تا ۶

□

بنا به آنچه گفته شد، برای دو عنصر x_0, y_0 از دو حال خارج نیست؛ یا x_0Ry_0 که در این صورت $[x_0] = [y_0]$؛ و یا $x_0 \not R y_0$ که در این صورت $[x_0] \cap [y_0] = \emptyset$. بنابراین اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی یک مجموعه‌ی X باشد، آنگاه همه‌ی موارد زیر با هم معادل هستند:

$$x_0Ry_0 \qquad [x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset \qquad [x_0] = [y_0].$$

همچنین تمام موارد زیر نیز با هم معادلند:

$$\neg(x_0Ry_0) \qquad [x_0] \cap [y_0] = \emptyset \qquad [x_0] \neq [y_0].$$

به طور خلاصه‌تر، دو کلاس هم‌ارزی یا بر هم منطبقند یا با هم هیچ اشتراکی ندارند.

تمرین ۱.۸. به طور مستقیم نشان دهید که اگر $[x_0] \cap [y_0] = \emptyset$ آنگاه $x_0 \not R y_0$.

تمرین ۲.۸. به طور مستقیم نشان دهید که اگر $[x_0] \cap [y_0] \neq \emptyset$ آنگاه $[x_0] = [y_0]$.

فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. تعریف می‌کنیم:

$$X/R = \{[x] | x \in X\}.$$

در تعریفِ بالا، X/R در واقع یک خانواده از مجموعه‌هاست؛ یعنی می‌شود آن را به صورت اندیس‌دارِ $X/R = \{[x]_R\}_{x\in X}$ نوشت که همه‌چیز در آن قابل نوشتن با فرمولهای مرتبهٔ اول است. طبیعتاً برخی از اعضای این خانواده می‌توانند تکراری باشند؛ در واقع همان طور که دیدیم اگر xRy آنگاه $[x] = [y]$. اما یک خانواده از مجموعه‌ها، در هر صورت یک مجموعه است؛ پس ما X/R را مجموعه خواهیم خواند. عضویت در این مجموعه، همان طور که گفتیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$t \in X/R \Leftrightarrow \big(\exists x_0 \in X \quad t = [x_0]\big).$$

در تمثیلِ رابطهٔ هم‌قد بودن، گفتیم که هر کسی در یک دسته‌بندی قدی قرار می‌گیرد و هیچ کس نیست که وارد دسته‌بندی ما نشود. این واقعیت را قضیهٔ زیر بیان کرده است:

قضیه ۳.۸.

$$\bigcup X/R = X$$

توجه ۴.۸. یادآوری می‌کنیم که اگر A یک مجموعه باشد آنگاه

$$\bigcup A = \{x | \exists y \in A \quad x \in y\}$$

همچنین اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x | \exists i \in I \quad x \in A_i\}$$

در قضیه‌ی بالا از نمادگذاری اولی استفاده کرده‌ایم.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $X \subseteq \bigcup X/R$. فرض کنید که $x_0 \in X$. از آنجا که رابطه‌ی R انعکاسی است داریم $x_0 R x_0$؛ به بیان دیگر $x_0 \in [x_0]$. از آنجا که $[x_0] \in X/R$ و $x_0 \in [x_0]$ بنا به توجه بالا نتیجه می‌شود که $x_0 \in \bigcup X/R$.

حال ثابت می‌کنیم که $\bigcup X/R \subseteq X$. اگر $x_0 \in \bigcup X/R$ آنگاه $y \in X$ چنان موجود است که $x_0 \in [y] = \{x \in X | xRy\} \subseteq X$ پس معلوم است که $x_0 \in X$. □

توجه ۵.۸. تا اینجا فهمیده‌ایم که اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد آنگاه:

- X/R مجموعه‌ای متشکل از برخی زیرمجموعه‌های X است؛ یعنی $X/R \subseteq P(X)$.
- هیچ دو عضو از X/R با هم اشتراک ندارند.
- $\bigcup X/R = X$.

به بیان دیگر، مثالی یک X/R یک **افراز** برای مجموعه‌ی X است.

بنا بر آنچه گفته شد، از هر رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی یک مجموعه‌ی X به یک افراز برای آن دست می‌یابیم. در بخشهای پیش رو، به طور دقیق‌تر در بخشِ ۳.۸ خواهیم دید که در واقع هر افراز از مجموعهٔ X نیز از یک رابطهٔ هم‌ارزی روی این مجموعه، ناشی می‌شود. یعنی **دو مفهوم افراز و رابطهٔ هم‌ارزی از یکدیگر ناشی می‌شوند.** به بیان دیگر، افرازهای یک مجموعه‌ی X در تناظر یک به یک با روابط هم‌ارزی روی آن هستند. دربارهٔ این نکته در ادامهٔ این بخش بیشتر سخن خواهیم گفت.

۲.۸ چند مثال از کاربرد روابط هم‌ارزی

مثال ۶.۸. روی یک مجموعه‌ی X رابطه‌ی تساوی، $(=)$، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

$$xRy \iff x = y$$

$$X/_{=} = \{[x]_{=}|x \in X\} = \Big\{\{x\}|x \in X\Big\}$$

رابطه‌ی تساوی، مجموعه‌ی X را به کلاسهای تک‌عضوی دسته‌بندی می‌کند.

در فصلِ ۴ با تعریفِ دقیق مجموعهٔ $\mathbb{N}$ بر طبق اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها و برخی ویژگی‌های آن آشنا شدیم. مثال زیر، نشان می‌دهد که مجموعهٔ اعداد صحیح چگونه از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها نشأت می‌گیرد.

مثال ۷.۸ (تعریف اعداد صحیح). در فصل ۴ با اعداد طبیعی آشنا شدیم و نشان دادیم که آنها تشکیل یک مجموعه می‌دهند. در واقع $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعهٔ استقرایی است که وجود خود در جهان مجموعه‌ها را وام‌دارِ اصلی به نام اصل وجود مجموعهٔ استقرایی است. همچنین گفتیم که حاصل‌ضربِ دکارتی دو مجموعه، یک مجموعه است؛ بنابراین به طور خاص: $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ نیز یک مجموعه است. اعضای مجموعه‌ی $\mathbb{N}^2$ به صورت (x, y) هستند که در آن $x, y \in \mathbb{N}$. روی $\mathbb{N}^2$ رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$(x, y)R(x', y') \iff x + y' = y + x'$$

تمرین ۳.۸. نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

مجموعه‌ی کلاسهای هم‌ارزی رابطه‌ی بالا را مجموعه‌ی اعداد صحیح می‌نامیم و آن را با نمادِ $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{Z} = \{[(x, y)]_R|(x, y) \in \mathbb{N}^2\}$$

دقت کنید که (اگر معنای تفریق را بدانیم)

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x - y = x' - y'$$

بنابراین هر کلاسِ $[(x, y)]$ نماینده‌ی تفاضلِ $x - y$ است. پس $\mathbb{Z}$ را می‌توان به صورت زیر هم نشان داد:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}.$$

که در آن:

$$0 = [(1, 1)] = [(2, 2)] = [(3, 3)] = \ldots$$

$$-1 = [(0,1)] = [(1,2)] = [(2,3)]] = \dots$$

$$1 = [(1,0)] = [(2,1)] = [(3,2)] = \dots$$

پس عبارتهای $0, 1, -1, \dots$ تنها کوتاه‌نوشتهایی برای کلاسهای هم‌ارزی هستند.

تمرین ۴.۸.

۱. مجموعه‌ی $\mathbb{N}^2$ را روی یک نمودار رسم کنید و کلاسهای مختلف هم‌ارزی بالا را روی آن مشخص کنید. نیز مشخص کنید که هر کلاس نشان دهنده‌ی چه عددی است.

۲. گفتیم که $1 = [(2,1)] = [(1,0)]$ و $-1 = [(1,2)] = [(2,1)]$. تعریف کنید

$$[(x,y)] + [(x',y')] = [(x+x', y+y')].$$

حاصل $1 + (-1)$ را یکبار با استفاده از

$$[(2,1) + [(1,2)]$$

و یکبار با استفاده از

$$[(1,0)] + [(0,1)]$$

محاسبه کنید و جوابها را با هم مقایسه کنید.

۳. فرض کنید $t = [(x,y)]_R$ و $u = [(x',y')]_R$ دو عدد صحیح باشند. نشان دهید که حاصل $t+u$ به انتخاب نماینده‌ی کلاس دو عددِ t, u بستگی ندارد.

۴. حاصلضرب دو عدد صحیح را چگونه تعریف می‌کنید؟ [۱]

پس این گونه است که در هر جهان از نظریهٔ مجموعه‌ها، یک مجموعه به نام مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد؛ روی این مجموعه می‌توان یک رابطهٔ هم‌ارزی تعریف کرد که مجموعهٔ متشکل از کلاسهای آن، مجموعهٔ اعداد صحیح نام دارد. حال که این مجموعه را به طور دقیق با استفاده از اصول موضوعه شناخته‌ایم، در باقی بحثهامان از آن استفاده می‌کنیم؛ و البته نیازی نیست پیچیده بدان فکر کنیم. ویژگی‌های این مجموعه، همانها هستند که در تحصیلات مقدماتی آموخته‌ایم.

مثال ۸.۸. روی مجموعه‌ی اعدادِ صحیح، $\mathbb{Z}$، رابطه‌ی $\equiv_3$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$(x \equiv_3 y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = 3k)$$

به بیان دیگر، می‌گوئیم $x \equiv_3 y$ هرگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم هر دو عدد x, y بر ۳ یکسان باشد.

تمرین ۵.۸. نشان دهید رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

[۱] این روش را امتحان کنید: $(x,y) \cdot (x',y') = (xx' + yy', xy' + x'y)$.

در ادامه، می‌خواهیم تعداد کلاسهای رابطه‌ی هم‌ارزی بالا را مشخص کنیم. کلاسهای رابطهٔ بالا به صورت زیر هستند:

$$\mathbb{Z}/{\equiv_3} = \{[0], [1], [2], [3], [4], \ldots\}.$$

اما ما ادعا می‌کنیم که رابطه‌ی بالا تنها سه کلاس متفاوت با هم دارد و این سه کلاس به صورت زیر هستند:

$$\mathbb{Z}/{\equiv_3} = \{[0], [1], [2]\}.$$

برای اثبات گفته‌ی بالا، باید نشان دهیم که هر عدد صحیح، در یکی از کلاسهای بالا قرار دارد. این واضح است؛ زیرا باقی‌مانده‌ی هر عدد صحیح بر ۳ یا ۰ است یا ۱ یا ۲. برای مثال، باقی‌مانده‌ی عدد ۷ بر ۳، عدد ۱ است، پس داریم

$$[7] = [1], [8] = 2, [9] = [0].$$

پس رابطه‌ی $\equiv_3$ اعداد صحیح را به سه قسمت افراز می‌کند و هر قسمت نشان‌دهنده یکی از باقیمانده‌های ممکن بر ۳ است. مثلاً $[0]$ مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیحی را نشان می‌دهد که بر ۳ بخش‌پذیر هستند. در جبر، مجموعه‌ی $\mathbb{Z}/{\equiv_3}$ را با $\mathbb{Z}_3$ نشان می‌دهند.

$\mathbb{Z}$

$[0]$	$[1]$	$[2]$

تعمیم ۹.۸. برای عدد دلخواهِ $n \in \mathbb{N}$ روی $\mathbb{Z}$ رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_n y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = nk$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی با n کلاس است و

$$\mathbb{Z}/R = \{[0], \ldots, [n-1]\}.$$

در جبر مجموعهٔ $\mathbb{Z}/R$ در بالا را با $\mathbb{Z}_n$ نشان می‌دهند.

در مثالِ ۷.۸ با نحوهٔ شکل‌گیری مجموعهٔ اعداد صحیح با استفاده از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا شدیم. مثال زیر، به نحوهٔ شکل‌گیری اعداد گویا می‌پردازد:

مثال ۱۰.۸ (اعداد گویا). گفتیم که $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ یک مجموعه است. بنابراین $\mathbb{Z} - \{0\}$ نیز مجموعه است، پس ضرب دکارتیِ $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ نیز یک مجموعه است که از عناصر به صورت (x, y) تشکیل شده است که در آن $x, y \in \mathbb{Z}$ و $y \neq 0$. روی A رابطه‌ی زیر را تعریف کنید:

$$(x, y)R(x', y') \iff x \cdot y' = y \cdot x'.$$

تمرین ۶.۸.

۱. نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲. مجموعه‌ی A را در دو محور متعامد رسم کنید و عناصر هم‌کلاس آن را تحت رابطه‌ی بالا مشخص کنید. روی هر کدام از این کلاسها چه اسمی می‌گذارید؟

دقت کنید که (در صورتی که معنای تقسیم را بدانیم) در واقع گفته‌ایم که

$$(x, y)R(x', y') \iff \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$$

بنابراین هر کلاسِ هم‌ارزیِ $[(x, y)]_R$ را با $\frac{x}{y}$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی این کلاسهای هم‌ارزی تشکیل یک مجموعه می‌دهد که به آن مجموعه‌ی اعداد گویا گفته می‌شود. این مجموعه را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم.

تمرین ۷.۸. گفتیم که هر کدام از کلاسهای بالا، نماینده‌ی یک عدد گویا هستند. پس

$$\mathbb{Q} = \{[(x, y)]_R | (x, y) \in A\}$$

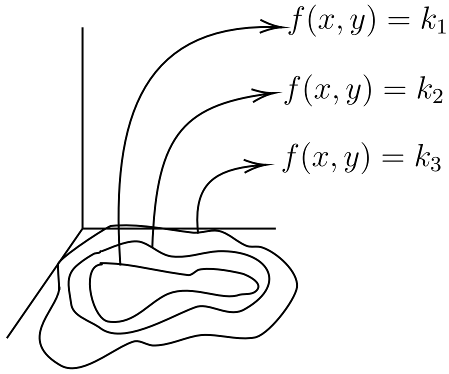
۱. حاصل $[(x, y)]_R + [(z, t)]_R$ را چگونه تعریف می‌کنید؟

۲. $[(x, y)]_R \cdot [(z, t)]_R$ را چگونه تعریف می‌کنید؟

مثال ۱۱.۸. مطابق آنچه در درس ریاضی عمومی ۲ می‌آموزید، فرض کنید $z = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد. رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

$$(x, y)R(x', y') \iff f(x, y) = f(x', y')$$

مجموعهٔ X/R مجموعه‌ی تمام منحنی‌های تراز تابع f نامیده می‌شود (که البته افرازی برای دامنه‌ی این تابع هستند).



مثال ۱۲.۸. آیا می‌توانید یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ تعریف کنید به طوری که

$$\mathbb{N}/R = \{\{\text{اعداد زوج}\}, \{\text{اعداد فرد}\}\}$$

پاسخ. رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \iff x \equiv_2 y.$$

□

تمرین ۸.۸.

۱. نشان دهید که اگر رابطهٔ R روی یک مجموعهٔ X یک رابطهٔ هم‌ارزی باشد، آنگاه $R \circ R = R$.

۲. فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی روی مجموعه X باشند. نشان دهید که $R \circ S$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X است اگر و تنها اگر $R \circ S = S \circ R$.

۳.۸ افراز و تناظرِ آن با رابطه‌ی هم‌ارزی

گفتیم که رابطهٔ هم‌ارزی برای دسته‌بندی استفاده می‌شود. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که اساساً تنها راه دسته‌بندی استفاده از روابط هم‌ارزی است. نخست بیایید منظورمان از دسته‌بندی یا «افراز» را به طور دقیق بیان کنیم:

تعریف ۱۳.۸. فرض کنید X یک مجموعه باشد. مجموعه‌ی $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ را یک افراز برای X می‌خوانیم هرگاه

۱. $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B = X$

۲. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad (A \neq B \to A \cap B = \emptyset)$

۳. $\forall A \in \mathcal{A} \quad A \neq \emptyset$

مثال ۱۴.۸. تمام افرازهای مجموعه‌ی $\{1, 2, 3\}$ را بنویسید.

پاسخ.

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\},$$
$$\{\{3\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\},$$
$$\{\{1, 2, 3\}\}$$

□

مثال ۱۵.۸. یک نمونه افراز از مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ به صورت زیر است

اعداد فرد	اعداد زوج

$\mathbb{N} = \{$اعداد فرد$\} \cup \{$اعداد زوج$\}$

توجه داشته باشید $\mathcal{A}$ برای مجموعه‌ی X مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X است. قبلا این را دیده‌ایم که از هر رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان به یک افراز رسید:

قضیه ۱۶.۸. اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد، آنگاه $X/R = \{[x] | x \in X\}$ یک افراز X است.

اثبات. توجه شمارهٔ ۵.۸ و قضیه‌های مربوط به آن را در بخش قبل مشاهده کنید. □

پس مثلا می‌توان از رابطه‌ی همقد بودن، که یک رابطه‌ی هم‌ارزی است استفاده کرد و دانشجویان کلاس را بر اساس قد دسته‌بندی کرد. اما حال ادعا می‌کنیم که عکس این گفته نیز درست است: یعنی هر دسته‌بندی‌ای در ریاضی، از یک رابطه هم‌ارزی ناشی می‌شود.

فرض کنید یک دسته‌بندی از اعضای مجموعه‌ی X داشته باشیم. روی X می‌توانیم رابطه‌ی زیر را تعریف کنیم: دو عنصر را با هم در رابطه می‌گیریم هرگاه هر دو در یک دسته قرار داشته باشند. در اثباتِ قضیه‌ی زیر همین گفتهٔ ساده را ریاضی‌وار بیان کرده‌ایم.

قضیه ۱۷.۸. فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ افرازی برای مجموعه‌ی X باشد. آنگاه یک رابطه‌ی هم‌ارزی (یکتای) R روی X چنان یافت می‌شود که

$$X/R = \mathcal{A}$$

اثبات. داشتهٔ ما در صورت این قضیه، یک افرازِ $\mathcal{A}$ برای مجموعهٔ X است؛ یعنی یک دسته‌بندی از اعضای مجموعه‌ی X را در اختیار داریم. هدفمان پیدا کردن یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی X است به طوری که $X/R = \mathcal{A}$. بیایید رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$xRy \iff \text{x و y هر دو در یک مجموعه‌ی یکسان در $\mathcal{A}$ واقع شده باشند؛ یعنی هم‌دسته باشند}$$

به بیان بهتر، تعریف کرده‌ایم

$$xRy \iff \exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

باید ثابت کنیم که

۱. رابطه‌ی R در بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲. $X/R = \mathcal{A}$

برای اثبات قسمت اول حکم، نخست ثابت می‌کنیم که R انعکاسی است. فرض کنید $x \in X$ عنصر دلخواهی باشد. آنگاه از آنجا که $X = \bigcup \mathcal{A}$ می‌دانیم که $x \in \bigcup \mathcal{A}$. پس $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x \in A$. پس $x \in A$ و $x \in A$ یعنی xRx پس R انعکاسی است.

دوم ثابت می‌کنیم که R تقارنی است. فرض کنید xRy آنگاه

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

به بیان دیگر

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad y, x \in A$$

پس yRx یعنی R تقارنی است.

سوم ثابت می‌کنیم که R متعدی است. فرض کنید xRy و yRz. پس مجموعه‌ی $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x, y \in A$ و مجموعه‌ی $B \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $y, z \in B$. اما در این صورت داریم:

$$y \in A \cap B$$

از آنجا که $\mathcal{A}$ یک افراز است اگر $A \neq B$ آنگاه $A \cap B = \emptyset$. پس امکانی نیست جز این که $A = B$؛ یعنی $x, z \in A = B$. و البته این هم یعنی xRz.

حال به اثبات قسمت دوم حکم، یعنی $X/R = \mathcal{A}$ می‌پردازیم. توجه کنید که هم X/R و هم $\mathcal{A}$ مجموعه‌هائی از زیرمجموعه‌های X هستند. نخست ثابت می‌کنیم که $\mathcal{A} \subseteq X/R$.

فرض کنید $A \in \mathcal{A}$. می‌دانیم که $X/R = \{[x] | x \in X\}$؛ پس کافی است ثابت کنیم که $x_0 \in X$ چنان موجود است که $A = [x_0]$. توجه کنید که A ناتهی است (طبق تعریف افراز). فرض کنید x_0 یک عضو دلخواه باشد از A باشد. ادعا می‌کنیم که $[x_0] = A$. داریم

$$[x_0] = \{y | yRx_0\} = \{y | y, x_0 \in A\} = \{y | y \in A\} = A$$

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که $\mathcal{A} \subseteq X/R$. حال به اثبات این می‌پردازیم که $X/R \subseteq \mathcal{A}$.

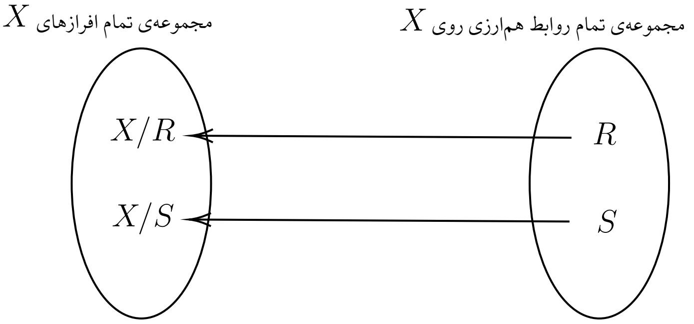
فرض کنید $[x_0] \in X/R$. می‌دانیم که $A \in \mathcal{A}$ موجود است که $x_0 \in A$؛ زیرا $X = \bigcup \mathcal{A}$. به طور مشابه با بالا ثابت کنید که $A = [x_0]$. در نتیجه $[x_0] \in \mathcal{A}$. تنها چیزی که هنوز اثبات نکرده‌ایم، یکتاییِ رابطه‌ی هم‌ارزی یادشده است. این کار را در قضیهٔ بعدی انجام می‌دهیم. □

پیش از آن که بحث را ادامه دهیم، دقت کنید که در قضیهٔ بالا گفتیم که اگر $\mathcal{A}$ یک افراز باشد، آنگاه رابطه هم‌ارزی R موجود است به طوری که $X/R = A$. حکم قضیهٔ فوق، وجود یک رابطهٔ هم‌ارزی را طلب می‌کند. چنین حکمی می‌تواند دو نوع اثبات داشته باشد: اثبات وجودی، و اثبات ساختی. در اثبات وجودی، تنها ثابت می‌کنیم که آن موجودی در پی آن هستیم وجود دارد، ولی شاید نتوانیم دقیقاً آن را شناسایی کنیم. در اثبات ساختی، موجود مورد نظر را به طور دقیق پیدا می‌کنیم. به نظر شما، اثباتی که برای حکم فوق آمد، ساختی بود یا وجودی؟

به بحث اصلی بازمی‌گردیم: فرض کنید $\mathcal{M}$ مجموعهٔ متشکل تمام روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد؛ پس هر عضوِ مجموعهٔ $\mathcal{M}$ یک رابطه است (و البته هر رابطه، خودْ یک مجموعه است). نیز فرض کنید $\mathcal{N}$ مجموعه‌ی تمام افرازهای ممکن برای مجموعه‌ی X باشد؛ پس هر عضوِ $\mathcal{N}$ یک افراز است (و هر افراز خودش یک مجموعه از مجموعه‌هاست). از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ یک **تابع** f را به صورت زیر تعریف کنید: برای هر $R \in \mathcal{M}$ تعریف کنید: $f(R) = X/R$.

تابعی که در بالا تعریف کردیم، هر رابطهٔ هم‌ارزی را به افرازی می‌برد که توسط این رابطهٔ هم‌ارزی ایجاد می‌شود. قضیه‌ی ۱۷.۸ در واقع به ما می‌گوید که تابع f تابعی پوشاست؛ یعنی هر افرازی از یک رابطه‌ی هم‌ارزی ناشی می‌شود.

در زیر ثابت کرده‌ایم که f یک‌به‌یک نیز هست؛ به بیان دیگر، دو رابطه‌ی هم‌ارزی متفاوت، نمی‌توانند یک افراز یکسان ایجاد بکنند. باز به بیانی دیگر اگر افرازهای تولید شده از دو رابطه‌ی هم‌ارزی با هم یکسان شوند، آن دو رابطه با هم یکی هستند.



قضیه ۱۸.۸. فرض کنید R و S دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه X باشند. اگر $X/R = X/S$ آنگاه $R = S$. به بیان دیگر اگر $X/R = X/S$ آنگاه $\forall x, y \in X \quad (xRy \leftrightarrow xSy)$.

اثبات. فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی باشند و $X/R = X/S$. فرض کنید $(x_0, y_0) \in R$ هدفمان نشان دادن این است که $(x_0, y_0) \in S$.

این که $(x_0, y_0) \in R$ یعنی $x_0 \; R \; y_0$. از آنجا که $x_0 \; R \; y_0$ بنا به این که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی نتیجه می‌گیریم که $[x_0]_R = [y_0]_R$. از آنجا که $X/R = X/S$ نتیجه می‌گیریم که عنصر z_0 موجود است به طوری که $[x_0]_R = [y_0]_R = [z_0]_S$. می دانیم که $x_0 \in [x_0]_R$ پس $x_0 \in [z_0]_S$. به طور مشابه می‌توانیم اثبات کنیم که $y_0 \in [z_0]_S$، پس $x_0 \; S \; z_0 \; S \; y_0$. حال بنا به تعدی رابطه S داریم: $x_0 \; S \; y_0$ یعنی $(x_0, y_0) \in S$. پس ثابت شد که $R \subseteq S$. اثبات این که $S \subseteq R$ به طور کاملاً مشابه است. □

اثبات قضیه‌ی مهم زیر در اینجا به پایان رسید: (همچنین تمرینِ ۲۳.۹ را مشاهده کنید).

قضیه ۱۹.۸. میان افرازهای یک مجموعه و روابط هم‌ارزی روی آن، یک تناظر یک به یک وجود دارد.

توجه ۲۰.۸. در ریاضیات بسیار پیش می‌آید که اعضای یک مجموعه را نخست با استفاده از یک رابطه‌ی هم‌ارزی افراز می‌کنیم. سپس روی هر دسته یک اسم می‌گذاریم (مثلاً اسم نماینده‌ی آن دسته را انتخاب می‌کنیم). آنگاه بین دسته‌ها روابطی تعریف می‌کنیم. برای مثال، اعداد صحیح را می‌توان بر حسب باقیمانده به ۳ به سه دسته تقسیم کرد:

$$\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\} \quad *$$

معلوم است که دسته‌بندی فوق را به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\mathbb{Z}_3 = \{[9], [31], [26]\}. \quad **$$

حال می‌توان بین این دسته‌ها «جمع» تعریف کرد:

$$[a] + [b] = [a + b]$$

تمرین ۹.۸. حاصل‌جمع اعضای $\mathbb{Z}_3$ را دوبه‌دو بنویسید. آیا اگر $\mathbb{Z}_3$ را به صورت * یا به صورت ** بگیریم، حاصل جمع اعضایش متفاوت می‌شود؟

۴.۸ پیوست: اعداد

خواننده‌ای که علاقه‌مند به دنبال کردن سریع‌تر مباحث بعدی است، می‌تواند از خواندن این بخش صرف‌نظر کند. هدف ما در این بخش، پرداختن به این موضوع است که هر کدام از مجموعه‌های اعداد طبیعی، صحیح، گویا، حقیقی و مختلط چگونه از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها حادث می‌شوند.

در فصلِ ۴ با مجموعهٔ اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ آشنا شدیم. گفتیم که در جهانِ V از مجموعه‌ها، یک «کوچکترین مجموعهٔ استقرایی» وجود دارد که آن را با ω نشان می‌دهیم؛ این مجموعه، وجودش را وامدار یک اصل‌موضوعه به نام اصل موضوعهٔ وجود مجموعهٔ استقرایی است. در جهانِ خوش‌بنیاد مجموعه‌ها، ω همان $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ است. مهمترین ویژگیِ $\mathbb{N}$ استقرایی بودن آن است و از این ویژگی برای تعریف اعمال اصلی جمع و ضرب استفاده می‌شود. ساختارِ مرتبهٔ اول $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ مرجع مطالعات نظریهٔ اعدادی و علوم‌کامپیوتری فراوان است.

مجموعهٔ $\mathbb{N}$ دارای «شکافهای جبری» فراوان است. معادله‌ای به سادگی معادلهٔ $x + 1 = 0$ در این مجموعه دارای جواب نیست. پیدا کردن مجموعه‌ای که شامل $\mathbb{N}$ باشد و در آن این شکاف وجود نداشته باشد، کار سختی نیست. در مثالِ ۷.۸ دیدیم که می‌توان روی $\mathbb{N}^2$ یک رابطهٔ هم‌ارزی به صورت زیر تعریف کرد:

$$(x, y)R(z, t) \iff x + t = y + z$$

مجموعهٔ متشکل از کلاسهای هم‌ارزیِ این رابطه را با $\mathbb{Z}$ نشان دادیم. اعضای $\mathbb{Z}$ را به صورتِ

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

نشان دادیم و گفتیم که برای مثال،

$$-1 = [(0, 1)] = [(1, 2)], [2, 3], \ldots$$

روی مجموعهٔ این کلاسهای هم‌ارزی جمع و ضرب نیز تعریف کردیم. واضح است که -1 به طور خاص جواب معادلهٔ $x+1=0$ است.

مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ از لحاظ جبری کامل‌تر از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ است، ولی با این حال این مجموعه هم شکافهای جبری فراوان دارد. معادله‌ای به سادگیِ $2x=1$ در این مجموعه جواب ندارد. طولهای زیادی روی خطکش وجود دارند که تنها با اعداد صحیح قابل نمایش نیستند. در مثالِ ۱۰.۸ دیدیم که مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ چگونه با استفاده از یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}$ ایجاد می‌شود؛ در واقع $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ متشکل از همهٔ کلاسهای هم‌ارزی رابطهٔ زیر است:

$$(x,y)R(z,t) \iff xt=yz.$$

گفتیم که کلاس هم‌ارزی یک عنصرِ (x,y) را با $\frac{x}{y}$ نشان می‌دهیم. بنا به تعریفِ رابطهٔ هم‌ارزی فوق داریم:

$$\frac{x}{y}=\frac{z}{t}\Leftrightarrow x\ \times t=y\times z.$$

روی این مجموعه هم اعمال جمع و ضرب را تعریف کردیم. با این تعریف واضح است که $\frac{1}{2}$ جواب معادلهٔ $2x=1$ است.

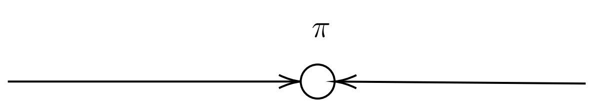
مجموعهٔ اعداد گویا، نمایندهٔ خوبی برای «تصور ما از مجموعهٔ همهٔ اعداد» است؛ زیرا ظاهراً پیوسته به نظر می‌رسد و شهود خوبی برای «طول» به دست می‌دهد. با این حال، این مجموعه، هم از لحاظ جبری و هم از لحاظ پیوستگیِ ترتیبی، حفره‌های زیادی دارد.

یک مثلث قائم الزاویه که طول هر ضلع آن یک باشد، وتری دارد که طول آن قابل نمایش با هیچ کسری نیست! یعنی معادلهٔ جبریِ سادهٔ $x^2=2$ در اعداد گویا جواب ندارد. همچنین اگر با استفاده یک پرگار، یک دایره به شعاعِ $\frac{1}{2}$ رسم کنیم، محیط این دایره نیز قابل نوشتن به صورت یک عدد کسری نیست.

محیط دایرهٔ مثال بالا را می‌توان با استفاده از محاط کردن چندضلعی‌ها در آن تخمین زد: هر چه تعداد اضلاع چندضلعی محاط شده بیشتر باشد «تقریب» بهتری برای محیط دایره به دست می‌آید. یک دانش‌آموز پایهٔ راهنمایی احتمالاً می‌داند که محیط چنین دایره‌ای عددِ

$$\pi=3.14159265359\ldots$$

است. مهم‌ترین ویژگی عدد بالا، آن است که با اعداد کسریِ $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \ldots$ می‌توان «به هر اندازهٔ دلخواه» به آن نزدیک شد، ولی خودِ این عدد جزو اعداد گویا نیست. عددِ π در واقع، نامِ یک «شکاف ترتیبی» در اعداد گویا است؛ از هر دو طرف می‌توان به هر اندازهٔ دلخواه بدان نزدیک شد ولی نمی‌شود به آن رسید:



از آن بغرنج‌تر، این مسأله است که هیچ معادلهٔ چندجمله‌ای به صورتِ

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=0$$

با ضرایبِ در اعداد گویا وجود ندارد که ریشه‌اش، عدد π باشد. [2] مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، از پُر کردن این حفره‌های ترتیبی در اعداد گویا به دست می‌آید. در ادامه، روش این کار را توضیح داده‌ایم.

[2] اصطلاحاً عددِ π یک عدد «غیرجبری» است. برای اثباتِ این گفته می‌توانید به عنوان مثال، کتابِ [۷] را ببینید.

فرض کنید $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ یک خانواده اندیس‌دار، متشکل از اعداد گویا باشد. به چنین خانواده‌ای، یک دنباله از اعداد گویا گفته می‌شود. به بیان دیگر، هر چنین دنباله‌ای یک تابعِ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ است؛ پس به طور خاص یک مجموعه است.

کلاسِ متشکل از همهٔ دنباله‌های اینچنین، نیز یک مجموعه است. اثبات این گفته بسیار ساده است ولی بگذارید فعلاً وارد آن نشویم.

تعریف ۲۱.۸. فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از اعداد گویا باشد. این دنباله را «کُشی» می‌نامیم هرگاه جملات آن با بزرگتر شدن اندیسها، به هم نزدیک‌تر و نزدیک‌تر شوند. به بیان دیگر هرگاه

$$\forall\epsilon\in\mathbb{Q}^+\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad\forall n,m>N\quad|a_n-a_m|<\epsilon.$$

منظور از $\mathbb{Q}^+$ در بالا، اعداد گویای مثبت است.

پس اگر $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کشی از اعداد گویا باشد، از یک جا به بعد جملات آن در بازه‌ای به طول $\frac{1}{2}$ قرار می‌گیرند؛ از جایی بعدتر از آن، جملات در بازه‌ای به طول $\frac{1}{3}$ قرار می‌گیرند و الخ. بیایید مجموعهٔ همهٔ این دنباله‌های کُشی را با $\mathcal{R}$ نشان دهیم.

تعریف ۲۲.۸. روی مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کشی، $\mathcal{R}$ رابطهٔ R را به صورت زیر را تعریف کنید:

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}R(b_i)_{i\in\mathbb{N}}\iff \text{دنبالهٔ } (a_i-b_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ یک دنبالهٔ کُشی باشد}$$

به عنوان یک تمرین، تحقیق کنید که رابطهٔ فوق یک رابطهٔ هم‌ارزی است. در واقع دو دنباله، زمانی در رابطهٔ بالا هستند که جملات آنها «به یکدیگر» نزدیک‌تر و نزدیک‌تر شود.

تعریف ۲۳.۸. هر کلاس هم‌ارزیِ رابطهٔ فوق، یک «عدد حقیقی» نام دارد. مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

پس به طور خلاصه، برای به دست آوردن مجموعهٔ اعداد حقیقی به این صورت عمل می‌کنیم: روی مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کشی متشکل از اعداد گویا، یک رابطهٔ هم‌ارزی تعریف می‌کنیم. هر عدد حقیقی، در واقع نامی برای یک کلاس هم‌ارزی است. به عنوان مثال، دنبالهٔ

$$3,3.1,3.14,3.141,3.1415,\ldots$$

یک دنبالهٔ کشی از اعداد گویا است. کلاس این دنباله را با علامتِ π نشان می‌دهیم:

$$\pi=[3,3.1,3.14,3.141,3.1415,\ldots]$$

روی این کلاسها، عمل جمع و ضرب و رابطهٔ ترتیب تعریف می‌شود. برای مثال اگر $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نمایندگانی از دو کلاس هم‌ارزی باشند، تعریف می‌کنیم $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}<(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هرگاه از جمله‌ای به بعد، جملات دنبالهٔ a_n از جملات دنبالهٔ b_n کمتر باشند:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}<(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\iff\exists N\in\mathbb{N}\quad\forall m>N\quad a_m<b_m$$

قضیه ۲۴.۸. مجموعهٔ اعداد حقیقی در «اصل کمال» صدق می‌کند؛ یعنی هر مجموعهٔ $A\subseteq\mathbb{R}$ که از بالا کراندار باشد، دارای کوچکترین کران بالاست.

اثبات. پیش از این که اثبات را شروع کنیم، هشدار می‌دهیم که اثبات پیش رو، یک «اثبات استاندار آنالیزی» است که در همهٔ کتابهای آنالیز احتمالاً پیدا شود. هدف ما در اینجا آموزش تکنیکهای آنالیز نیست؛ پس جزئیاتی از اثبات را به عنوان تمرین به خوانندهٔ علاقه‌مند وامی‌گذاریم.

فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی باشد که از بالا کران‌دار است؛ یعنی یک عدد حقیقیِ x وجود دارد به طوری که

$$\forall y \in A \quad y < x.$$

می‌خواهیم کوچکترین کران بالای این مجموعهٔ A را پیدا کنیم.

گفتیم که می‌دانیم که A کران بالا دارد (ولی فعلاً نمی‌دانیم که کوچکترینِ این کران‌های بالا وجود دارد یا نه). پس فرض کنید که x_1 یکی از کرانهای بالای مجموعهٔ A باشد. می‌توانیم فرض کنیم که x_1 یک عدد گویاست؛ زیرا اگر نبود یک عدد گویای بزرگتر از آن را به جای x_1 در نظر می‌گیریم. این کار به آسانی امکان‌پذیر است؛ زیرا x_1 یک دنباله از اعداد گویاست که ویژگی کشی بودن را داراست. یعنی جملات آن از جایی به بعد «متمرکز» می‌شوند. پس می‌شود یک دنبالهٔ ثابت از اعداد گویا پیدا کرد که جملهٔ ثابت آن از همهٔ جملات دنباله‌ای که توسط x_1 مشخص می‌شود بزرگتر است. در ادامهٔ اثبات، با یک الگوریتم ساده، دو دنبالهٔ کشیِ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ می‌سازیم که در واقع هر دو یک عدد حقیقی یکسان هستند (یعنی دو دنبالهٔ مورد نظر با هم در رابطه‌اند). همین دنباله، قرار است کوچکترین کران بالای مورد نظر ما باشد.

فرض کنید که y_1 یک عدد گویا باشد که به طور همزمان از همهٔ عناصر موجود در مجموعهٔ A بزرگتر نیست. قرار دهید: $m_1 = \frac{x_1+y_1}{2}$.

اگر عدد m_1 یک کران بالا برای A باشد، قرار دهید $x_2 = m_1$ و $y_2 = y_1$؛ اما اگر این طور نبود قرار دهید $y_2 = m_1$ و $x_2 = x_1$. مشابهاً قرار دهید: $m_2 = \frac{x_2+y_2}{2}$ و عناصر x_3, y_3 را با همان قانون قبلی تعریف کنید؛ و این کار را ادامه دهید.

به این طریق دو دنبالهٔ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ساخته می‌شود. در ساخت این دنباله، بارها میان یک کران بالا و یک عنصر که کران بالا نیست میانگین گرفته شده است.

این دو دنباله دارای ویژگی‌های زیر هستند (چک کردن این ویژگی‌ها را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم)

۱. هر دو کشی اند.

۲. همهٔ عناصر دنبالهٔ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ کران بالای A هستند.

۳. هیچ کدام از عناصر دنبالهٔ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ کران بالای A نیست.

۴. هر دوی این دنباله‌ها، یک عنصر یکسان در $\mathbb{R}$ را مشخص می‌کنند؛ به بیان دیگر هر دو با هم طبق رابطهٔ هم‌ارزی‌ای که تعریف کردیم، در رابطه‌اند.

عناصرِ دو دنبالهٔ یادشده به هم نزدیک‌تر و نزدیک‌تر می‌شوند. دنبالهٔ y_n صعودی و دنبالهٔ x_n نزولی است. به عنوان تمرین، نشان دهید که $x = [(x_n)] = [(y_n)]$ کوچکترین کران بالا برای A است. □

همهٔ ویژگی‌های حیاتی مجموعهٔاعداد حقیقی در آنالیز و حساب دیفرانسیل، به نوعی از اصل کمال نتیجه می‌شوند. در واقع این اصل است که همهٔ حفره‌های ترتیبی اعداد را پُر می‌کند و این موجب ایجاد مفاهیم با اهمیتی مانند حد، پیوستگی، ویژگی مقدار میانی و غیره است. راههای دیگری برای احداث مجموعهٔ اعداد حقیقی با استفاده از مجموعهٔ اعداد گویا وجود دارند که البته ما قصد پرداختن به آنها را نداریم. (برای مثال [۹] را ببینید).

پس تا اینجا با $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ آشنا شدیم. هر کدام از این مجموعه‌ها، یک حفرهٔ جبری یا یک حفرهٔ ترتیبی در مجموعهٔ پیش از خود را پر می‌کرد. مجموعهٔ اعداد حقیقی هیچ حفره‌ای از لحاظ ترتیبی ندارد و بهترین مجموعه برای نمایش «طول» هاست. با این حال از لحاظ جبری، حفره‌ای دارد.

معادلهٔ سادهٔ $x^2 = -1$ در این مجموعه، پاسخی ندارد. زیرا هر عدد وقتی به توان ۲ می‌رسد مثبت است. مطلوبِ جبری ما، پیدا کردن یک مجموعه از اعداد است که در آن همهٔ معادله‌های چندجمله‌ای جواب داشته باشند.

بیایید یک عنصر خیالی، یا «موهومی»، خارج از $\mathbb{R}$ را به نام i در نظر بگیریم و فرض کنیم $i^2 = -1$. بیایید اجازه دهیم که این i با مجموعهٔ اعداد حقیقی وارد «واکنش» شود. مثلاً اجازه بدهیم عناصری به صورت $a_ni^n + a_{n-1}i^{n-1} + \dots a_1i + a_0$ ساخته شوند که در آن a_i ها عدد حقیقی‌اند. از آنجا که $i^2 = -1$ حاصل چنین واکنشی، تنها منجر به تولید عناصری به صورت $b_0 + b_1i$ می‌شود. به هر چنین عنصری، یک عدد مختلط می‌گوییم.

مجموعهٔ اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم. واضح است که معادلهٔ $x^2 = -1$ در این مجموعه جواب دارد؛ هم i و هم $-i$ جوابهای این معادله هستند. اما یک واقعیت عجیب در اینجا به وقوع می‌پیوندد:

قضیه ۲۵.۸. همهٔ معادلات چندجمله‌ای (چه با ضرایب حقیقی و چه حتی با ضرایب مختلط) در مجموعهٔ $\mathbb{C}$ پاسخ دارند.

قضیهٔ بالا، «قضیهٔ اساسی جبر» نام دارد. همان طور که گفتیم، این قضیه می‌گوید که همین که ریشه‌ای برای معادلهٔ سادهٔ $x^2 = -1$ در نظر گرفته شود، همهٔ معادلات دیگر هم حل می‌شوند.

اثبات قضیهٔ فوق دورتر از اهداف این درس است. [۳] مجموعهٔ اعداد مختلط، بهشت مطالعات جبری است؛ این مجموعه از لحاظ جبری اشباع است؛ بدین معنی که با داشتن این مجموعه، نیازی به مراجعه به مجموعه‌های بزرگتری برای پیدا کردن پاسخ معادلات نیست.

خلاصهٔ فصل هشتم. رابطه‌ای که انعکاسی، تقارنی و متعدی باشد رابطهٔ هم‌ارزی نام دارد. دسته‌بندی اعضای یک مجموعه با استفاده از یک رابطهٔ هم‌ارزی صورت می‌گیرد. در این دسته‌بندی، همهٔ عناصری که با هم در رابطه هستند در یک دسته قرار می‌گیرند. هر دسته‌بندی‌ای از اعضای یک مجموعه، همیشه از یک رابطهٔ هم‌ارزی ناشی می‌شود.

مجموعهٔ اعداد صحیح از دسته‌بندی خاصی از اعضای مجموعهٔ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ایجاد می‌شود. مجموعهٔ اعداد گویا از دسته‌بندی خاصی از اعضای مجموعهٔ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ایجاد می‌شود. مجموعهٔ اعداد حقیقی با استفاده از دسته‌بندی مجموعهٔ متشکل از دنباله‌های خاصی در اعداد گویا به دست می‌آید.

۵.۸ تمرینهای تکمیلی

تمرین ۱۰.۸. فرض کنید R و S دو رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشند. نشان دهید که

[۳] می‌توان چنین اثباتی را در هر کتاب استاندارد جبر مانند [۵] یا [۷] پیدا کرد. خوانندهٔ در سطوح بالاتر می‌تواند در فیلم زیر از کلاس درس نظریهٔ گالوای خود نگارنده، اثباتی استاندارد برای این قضیه را ببینید:
https://www.aparat.com/v/LRq6t?playlist=305753
همین اثبات در [۳] نوشته شده است. نیز اثباتی با استفاده از تکنیکهای توپولوژی در فیلم زیر قابل مشاهده است:
https://www.aparat.com/v/VLM42?playlist=1799810.

۱. $R \cap S$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X است.

۲. نشان دهید که $[x]_{R\cap S} = [x]_R \cap [x]_S$.

۳. نشان دهید که $R \cup S$ لزوماً یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X نیست. (راهنمایی: ویژگی تعدی را بررسی کنید).

۴. R را همقد بودن و S را همسن بودن تعبیر کنید. دو عنصر x, y چه زمانی در رابطهٔ $R \cap S$ و چه زمانی در رابطهٔ $R \cup S$ هستند؟

تمرین ۱۱.۸. فرض کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X و S یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ Y باشند. آیا $R \cap S$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $X \cap Y$ است؟ آیا $R \cup S$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $X \cup Y$ است؟

تمرین ۱۲.۸. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ جمله‌های یک منطق گزاره‌ها باشد. روی A رابطهٔ زیر را تعریف کنید: $\varphi R \psi$ اگروتنهااگر $\psi \Leftrightarrow \varphi$. نشان دهید که رابطهٔ R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

فصل ۹

توابع

پادشاهی پسر به مکتب داد
لوح سیمینْش بر کنار نهاد
بر سر لوح او نبشته به زر
جور استاد به ز مهر پدر
سعدی

۱.۹ مقدمه

تا اینجای درس با اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها آشنا شدیم و گفتیم که بنا داریم که تمام مفاهیم ریاضی را بر پایه‌ی آنها توضیح دهیم. در این راستا، مفهوم اعداد طبیعی را مطابق با قوانین نظریه‌ی مجموعه‌ها شرح دادیم، سپس مفهوم رابطه را تعریف کردیم و در میان روابط، به طور ویژه به روابط هم‌ارزی پرداختیم و دیدیم که چگونه با استفاده از روابط هم‌ارزی می‌توان مجموعه‌های تازه به دست آورد. مثلاً مجموعه‌ی اعداد صحیح را با استفاده از یک رابطه‌ی هم‌ارزی تعریف کردیم و مجموعه‌ی اعداد گویا را با استفاده از یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی اعداد صحیح تعریف کردیم.

مفهوم بنیادین دیگری که قرار است در این فصل بدان بپردازیم، مفهوم تابع است. برای تعریف تابع بر اساس قوانین نظریه‌ی مجموعه‌ها، مشکل چندانی نداریم؛ زیرا هر تابع یک نوع رابطه است.

تعریف ۱.۹. فرض کنید R یک رابطه از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y باشد. رابطه‌ی R را یک تابع می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad \forall y_1, y_2 \in Y \quad (xRy_1 \wedge xRy_2 \rightarrow y_1 = y_2).$$

در واقع بنا به تعریفِ بالا، رابطهٔ R زمانی تابع است که یک عنصر در X را به بیش از یک عنصر در Y مرتبط نکند. هر تابع را می‌توان یک ماشین تصور کرد که به ازای هر ورودی مشخص، تنها یک خروجی دارد. یا می‌توان چنین پنداشت که یک تابع، نوعی نام‌گذاری است: یک تابعِ از X به Y به هر یک از اعضای مجموعه‌ی X یک نام می‌دهد که این نام یکی از اعضای مجموعه‌ی Y است. پس یک مثال خوب برای تابع، تابعی است که هر انسان را به نام او می‌برد؛ البته مطلوبِ این نام‌گذاری آن است که هر کس فقط یک نام داشته باشد!

برای نشان دادن توابع از نمادهایی مانند g, f ,... استفاده می‌کنیم. اگر رابطه f یک تابع از X به Y باشد و

$f \ni (x, y)$، می نویسیم

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto y$$

به تفاوت پیکانهای بالا توجه کنید. [1]

توجه ۲.۹. از این به بعد وقتی می گوییم رابطهٔ f از X به Y یک تابع است، و می‌نویسیم: $f : X \to Y$ همیشه به طور ضمنی فرض کرده‌ایم که $Dom(f) = X$. [2]

بنا به توجه بالا، اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه X را دامنه f می خوانیم و مجموعه $\{f(x)|x \in X\}$ را مجموعه‌ی تصویرِ f یا بُردِ f می‌نامیم.

۲.۹ مثالهایی از توابع

مثال ۳.۹. فرض کنید X یک مجموعه باشد و R یک رابطه هم ارزی روی X. در مورد تابعِ زیر، در بخشِ ۳.۸ صحبت کردیم:

$$f : X \to X/R$$
$$x \mapsto [x]_R$$

مثال ۴.۹. فرض کنید X یک مجموعه باشد و R یک رابطه هم ارزی روی X. رابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$f : X/R \to X$$
$$[x]_R \mapsto x$$

رابطهٔ بالا در واقع مجموعهٔ زیر است:

$$f = \{([x]_R, x)|x \in X\}.$$

واضح است که این رابطه، یک تابع نیست. گفتیم که هر عنصر دلخواهی در یک کلاس هم‌ارزی، می‌تواند نام آن کلاس هم‌ارزی باشد؛ یعنی این نام‌گذاری، یک نام‌گذاری از نوع مطلوب تابع بودن نیست. به بیان دقیق‌تر، فرض کنید $x \neq y$ دو عنصر در X باشند، به طوری که xRy. در این صورت $[x]_R = [y]_R$ اما $f([x]_R) = x \neq f([y]_R) = y$.

مثال ۵.۹. فرض کنید X یک مجموعه و $B \subseteq X$ یک زیرمجموعه باشد که آن را ثابت در نظر گرفته‌ایم. رابطهٔ زیر یک تابع از $P(X)$ به $P(X)$ است :

$$f : P(X) \to P(X)$$
$$A \mapsto A \cup B$$

تابع فوق یک مجموعه را می‌گیرد و اجتماع آن با B را می‌دهد.

[1] معمولاً وقتی بخواهیم تابع را به صورت رابطه ببینیم از «گراف» آن استفاده می‌کنیم. گراف تابع $f : X \to Y$ که آن را با $\Gamma(f)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x))|x \in X\}.$$

[2] از آنجا که هر تابع یک رابطه است، نیازی به تعریف مجدد دامنهٔ f نداریم.

مثال ۶.۹. تابع جمع از $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ هر (x,y) را به $x+y$ می‌برد.

مثال ۷.۹. فرض کنید X یک مجموعه باشد. تابع زیر را **تابع همانی** می‌خوانیم: [۳]

$$id_X : X \to X$$
$$x \mapsto x$$

مثال ۸.۹. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند و $b \in Y$ عنصر ثابتی باشد. رابطهٔ زیر یک تابع است:

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto b.$$

به تابع بالا، یک تابع ثابت گفته می‌شود.

مثال ۹.۹. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. عملِ اجتماع‌گیریِ دو مجموعه‌ی در $P(X)$ در واقع یک تابعِ f از $P(X)\times P(X)$ به $P(X)$ به صورت زیر است:

$$f : P(X)\times P(X) \to P(X)$$
$$(A,B) \mapsto A\cup B$$

مثال ۱۰.۹. فرض کنید X, Y دو مجموعه باشند. رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\pi_X : X\times Y \to X$$
$$(x,y) \mapsto x$$

رابطهٔ بالا یک تابع است که بدان **تابع تصویر روی مؤلفه‌ی اول** گفته می‌شود.
به طور مشابه تابع

$$\pi_y : (X,Y) \to Y$$
$$(x,y) \mapsto y$$

تعریف می‌شود که آن را تابع تصویر روی مؤلفه‌ی دوم می‌خوانیم.

۳.۹ توابع یک‌به‌یک و پوشا

گفتیم که هر تابعِ $f : X \to Y$ یک نام‌گذاری برای عناصرِ مجموعهٔ X با استفاده از عناصر مجموعهٔ Y است که طی آن برای هر عنصر در X فقط یک نام در Y در نظر گرفته می‌شود. یک حالت مطلوب دیگر برای نام‌گذاری این است که «هر نام فقط روی یک نفر گذاشته شود»؛ یعنی نام‌گذاری ما یک به یک باشد. حالت مطلوب سوم نیز آن است که «از همهٔ نامها استفاده شود»، یعنی نام‌گذاری ما پوشا باشد:

[۳] علامت id مخفف کلمه‌ی identity است.

تعریف ۱۱.۹.

- تابع $f: X \to Y$ را یک به یک می خوانیم هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \Big(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2\Big)$$

به بیان دیگر هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)).$$

- تابع $f: X \to Y$ را پوشا می‌خوانیم هرگاه تمام مجموعه‌ی مقصد را بپوشاند؛ یعنی

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y.$$

مثال ۱۲.۹. نشان دهید که تابع مثال ۵.۹ یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد اگر و تنها اگر $B = \emptyset$

پاسخ. نشان می‌دهیم تابع f در مثال ۵.۹ یک به یک است اگر و تنها اگر $B = \emptyset$. بقیه‌ی اثبات را نیز به عهده‌ی خواننده واگذار می‌کنیم.
اگر $B \neq \emptyset$ آنگاه B دارای حداقل دو زیر مجموعهٔ A_1, A_2 است به طوری که $A_1 \neq A_2$. اما در این صورت داریم $f(A_1) = f(A_2) = B$؛ یعنی f یک به یک نیست.
اگر $B = \emptyset$ آنگاه برای هر $A \in X$ داریم $f(A) = A$، و در این صورت واضح است که f یک به یک است. □

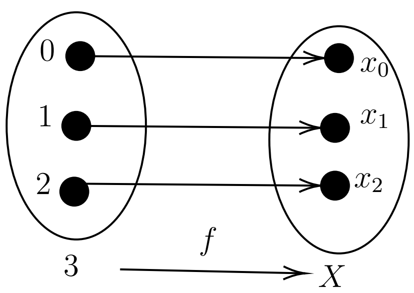
مثال ۱۳.۹. یک به یک یا پوشا بودن تابع مثال ۹.۹ را بررسی کنید.

اثبات. برای این که f یک به یک باشد، باید از $f(A_1, B_1) = f(A_2, B_2)$ نتیجه شود که $(A_1, B_1) = (A_2, B_2)$.
یعنی از $A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2$ باید بتوان نتیجه گرفت که $A_1 = A_2, B_1 = B_2$. فرض کنید $A_1 \neq \emptyset$. داریم:
$f(A_1, \emptyset) = f(\emptyset, A_1)$، ولی $(A_1, \emptyset) \neq (\emptyset, A_1)$، پس این تابع یک به یک نیست.
تابع یادشده پوشاست؛ فرض کنید $Y \in P(X)$ یک مجموعهٔ دلخواه باشد. برای اثبات پوشا بودن تابع، باید مجموعه‌های $A, B \in P(X)$ را طوری پیدا کنیم که $f(A, B) = Y$. واضح است که $Y \cup \emptyset = f(Y, \emptyset) = Y$.
□

یک به یک و پوشا بودن، برای توابعی که دامنه و برد آنها «متناهی» است، معنی ویژه‌ای دارند. در ادامه پس از توضیح کوتاهی دربارهٔ مفهوم مجموعه‌های متناهی، این گفته را دقیق‌تر بیان کرده‌ایم.

تعریف ۱۴.۹.

۱. می‌گوییم مجموعهٔ X یک مجموعهٔ n عضوی است هرگاه یک تابعِ یک به یک و پوشا از مجموعهٔ $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ به مجموعهٔ X وجود داشته باشد:

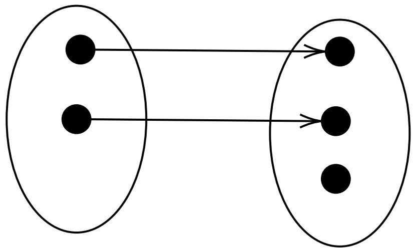


۲. می‌گوییم مجموعهٔ X متناهی است هرگاه یک عدد طبیعیِ $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که مجموعهٔ X یک مجموعهٔ n عضوی باشد.

تعریف بالا تا حد زیادی طبیعی به نظر می‌رسد: مجموعهٔ متناهی مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن برابر با یک عدد طبیعی باشد. در عین حال یک نکتهٔ جالب توجه در مورد تعریف بالا وجود دارد و آن بستگی این تعریف به مجموعهٔ اعداد طبیعی است. ممکن است در جهانِ V از مجموعه‌ها، مجموعهٔ اعداد طبیعی، یعنی ω، دارای «اعداد طبیعی» ای باشد که لزوماً شبیه اعداد طبیعی آشنای ما نباشد. در این حال هم، یک مجموعهٔ $X \in V$ زمانی متناهی است که بین آن مجموعه و یک عضو در ω یک تابع یک به یک و پوشا وجود داشته باشد. این پیچیدگی جذاب را فعلاً کنار می‌گذاریم زیرا خللی در مباحث پیش رو ایجاد نمی‌کند.

مشاهده ۱۵.۹. فرض کنید که X, Y دو مجموعه‌ی متناهی باشند و $f : X \to Y$ یک تابع باشد.

۱. اگر f یک‌به‌یک باشد، آنگاه تعداد اعضای Y بیشتر از یا مساوی با تعداد اعضای X است.



۲. اگر f پوشا باشد، آنگاه تعداد اعضای X بزرگتر از یا مساوی با تعداد اعضای Y است.

۳. اگر f یک به یک و پوشا باشد، آنگاه تعداد اعضای X, Y برابر است.

۴. اگر تعداد اعضای X با تعداد اعضای Y برابر باشد و $f : X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه f یک به یک است اگروتنهااگر پوشا باشد.

اثبات موارد ۱ تا ۳ در بالا، حداقل به صورت شهودی، آسان است. مورد چهارم اما شاید نیاز به بررسی داشته باشد. فرض کنید X و Y دو مجموعه با تعدادِ اعضای برابر باشند. اگر تابعِ $f : X \to Y$ یک به یک باشد ولی پوشا نباشد، آنگاه تعداد اعضای Y از تعداد اعضای X بیشتر می‌شود و این تناقض است. مشابهاً اگر f پوشا باشد ولی یک به یک نباشد، تعداد اعضای X از تعداد اعضای Y بیشتر می‌شود و این هم تناقض است.

۴.۹ تصویر و تصویرواروِن یک تابع

تعریف ۱۶.۹.

- فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ یک زیرمجموعه‌ی دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم: [۴]

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

پس چنین است که

$$\forall y \in Y \quad \big(y \in f(A) \leftrightarrow \exists x \in A \quad y = f(x)\big).$$

[۴] در برخی کتابها از نمادِ $f[A]$ استفاده می‌شود که البته نماد بهتری است. ما از نمادِ آشناتر استفاده کرده‌ایم.

- فرض کنید $B \subseteq Y$؛ تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

پس چنین است که

$$\forall x \in X \quad \big(x \in f^{-1}(B) \leftrightarrow f(x) \in B\big).$$

بنا به تعریف بالا، تابع $f : X \to Y$ پوشاست اگروتنهااگر $f(X) = Y$؛ و یک به یک است اگروتنهااگر برای هر $y \in Y$ مجموعه‌ی $f^{-1}(\{y\})$ یک مجموعه‌ی تک‌عضوی باشد.

توجه ۱۷.۹. ادعا نکرده‌ایم که f دارای «وارون» است. نماد f^{-1} نباید موجب این ابهام نشود.

شاید خواننده (ای که توجه بالا را ندیده است!) تصور کند که همواره $A = f^{-1}(f(A))$ و $f(f^{-1}(B)) = B$. اما این چنین نیست:

لم ۱۸.۹. اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$، آنگاه $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

اثبات. فرض کنید عنصرِ x در A باشد. برای این که نشان دهیم که x متعلق به مجموعهٔ $f^{-1}(f(A))$ است، باید بنا به قسمتِ دومِ تعریفِ ۱۶.۹ (و با قرار دادنِ $B = f(A)$) نشان دهیم که $f(x) \in f(A)$. اما بنا به قسمت اولِ تعریفِ ۱۶.۹ واضح است که وقتی x در A است، $f(x) \in f(A)$. □

مثال ۱۹.۹. آیا لزوماً $A \supseteq f^{-1}(f(A))$؟

پاسخ. بنا به قسمتِ دومِ تعریفِ ۱۶.۹ می‌دانیم که

$$x_0 \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x_0) \in f(A)$$

فرض کنید $X = \{1, 2, 3, 4\}$ و تابع $f : X \to X$ را چنان در نظر بگیرید که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) = 1$. قرار دهید $A = \{1, 2\}$. مشخص است که $f(A) = \{1\}$ و

$$f^{-1}(f(A)) = \{x | f(x) \in \{1\}\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

□

تمرین ۱.۹. یک تابعِ غیرِثابت مثال بزنید که برای آن $A \supseteq f^{-1}(f(A))$ برقرار نباشد.

تمرین ۲.۹. نشان دهید که ممکن است که $x \notin A$ ولی $f(x) \in f(A)$. (بنابراین از این که $f(x) \in f(A)$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $x \in A$.)

لم ۲۰.۹. اگر تابع $f : X \to Y$ یک‌به‌یک باشد آنگاه برای هر $A \subseteq X$ داریم $A = f^{-1}(f(A))$.

اثبات. فرض کنید تابع $f : X \to Y$ یک‌به‌یک است. این که $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ حتی بدون فرض یک‌به‌یک بودن تابع، بنا به ۱۸.۹ برقرار است. حال فرض کنید $x \in f^{-1}(f(A))$. در این صورت $f(x) \in f(A)$. پس عنصری مانندِ $t \in A$ موجود است به طوری که $f(x) = f(t)$. از طرفی از آنجا که تابعِ f یک تابع یک‌به‌یک است، $x = t$، یعنی $x \in A$.

□

تمرین ۳.۹. نشان دهید که عکس تمرین بالا نیز برقرار است: یعنی اگر برای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم $f^{-1}(f(A)) = A$ آنگاه f یک تابع یک به یک است.

لم ۲۱.۹. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $B \subseteq Y$ در این صورت $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

اثبات. فرض کنید $y \in f(f^{-1}(B))$. در این صورت عنصری مانند $x \in f^{-1}(B)$ موجود است به طوری که $y = f(x)$. اما این که $x \in f^{-1}(B)$ نتیجه می‌دهد که $y = f(x) \in B$. □

تمرین ۴.۹. نشان دهید که برای $B \subseteq Y$ و $f : X \to Y$، عبارتِ $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ لزوماً برقرار نیست.

تمرین ۵.۹. نشان دهید اگر f پوشا باشد آنگاه برای هر $B \subseteq Y$ داریم $f(f^{-1}(B)) = B$ (همچنین تمرینِ ۱۷.۹ را مشاهده کنید).

مثال ۲۲.۹. نشان دهید که اگر $f : X \to Y$ یک‌به‌یک باشد آن‌گاه

$$\forall A, B \subseteq X \quad f(A - B) \subseteq f(A) - f(B).$$

(تمرینِ بعدی را نیز مشاهده کنید).

اثبات. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک به یک باشد و A_0, B_0 دو زیرمجموعه دلخواه از X باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که $f(A_0 - B_0) = f(A_0) - f(B_0)$. برای این منظور باید نشان دهیم که $f(A_0 - B_0) \subseteq f(A_0) - f(B_0)$ و $f(A_0) - f(B_0) \subseteq f(A_0 - B_0)$.

فرض کنید $y_0 \in f(A_0 - B_0)$، در این صورت $x_0 \in A_0 - B_0$ چنان موجود است که $f(x_0) = y_0$. ازآنجا که $x_0 \in A_0$ داریم $f(x_0) \in f(A_0)$. می‌دانیم که $x_0 \notin B_0$ و ادعا می کنیم که از این نتیجه می‌شود که $f(x_0) \notin f(B_0)$. اگر $f(x_0) \in f(B_0)$ آنگاه $x'_0 \in B_0$ موجود است به طوری که $f(x'_0) = f(x_0)$. از آنجا که تابع f یک به یک است $x_0 = x'_0 \in B_0$ و این متناقض با فرضِ $x_0 \in B_0$ است. □

تمرین ۶.۹. نشان دهید که اگر $f : X \to Y$ یک به یک باشد، همچنین داریم

$$\forall A, B \subseteq X \quad f(A) - f(B) \subseteq f(A - B).$$

(تمرینِ ۲۲.۹ را مشاهده کنید.)

تمرین ۷.۹. فرض کنید $D \subseteq X \times Y$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. نشان دهید که

$$\pi_X(D) = \{x \in X | \exists y \in Y \quad (x, y) \in D\}.$$

$$\pi_Y(D) = \{y \in Y | \exists x \in X \quad (x, y) \in D\}.$$

تمرین ۸.۹. فرض کنید R یک رابطه از X به Y باشد. نشان دهید که

$$Dom(R) = \pi_X(R), \;\; Range(R) = \pi_Y(R)$$

۱.۴.۹ توضیح اصل‌موضوعهٔ جانشانی

در این جا دانش کافی برای توضیح اصل‌موضوعهٔ جانشانی را در اختیار داریم. گذر کردن از این زیربخش کوتاه، لطمه‌ای به ادامهٔ مطالعهٔ این کتاب وارد نمی‌کند. می‌دانیم که یک جهانِ V از همهٔ مجموعه‌ها، خودش مجموعه نیست؛ با این حال می‌شود مفاهیمی مانند ضربِ دکارتی، رابطه و تابع را برای آن هم در نظر گرفت. مثلاً زمانی می‌گوییم $f : V \to V$ یک تابع است که $f \subseteq V \times V$ و برای هر $x \in V$ تنها یک $y \in V$ موجود باشد به طوری که $(x, y) \in f$.

می‌گوییم یک تابعِ $f : V \to V$ تعریف پذیر است هرگاه یک فرمولِ مرتبهٔ اولِ $\varphi(x, y)$ در زبانِ نظریهٔ مجموعه‌ها وجود داشته باشد به طوری که جملهٔ زیر درست باشد:

$$(x, y) \in f \leftrightarrow \varphi(x, y).$$

اصل موضوعهٔ جانشانی در واقع می‌گوید که اگر $f : V \to V$ یک تابع تعریف‌پذیر باشد و $A \in V$ یک مجموعه باشد، آنگاه $f(A)$، یعنی $\{f(x)|x \in A\}$ تشکیل یک مجموعه می‌دهد. به بیان دیگر وقتی یک «تابع بزرگ» به یک «مجموعهٔ کوچک» محدود می‌شود، تصویر آن یک مجموعه می‌شود.

۲.۴.۹ توضیح اصل موضوعهٔ انتخاب

این زیربخشِ کوتاه نیز مشابه زیربخش قبلی، ارتباط مستقیم با مطالب پیش‌رو ندارد و خواننده می‌تواند از خواندن آن فعلاً صرف نظر کند. در اصل انتخاب نیز صحبت از یک تابع به میان می‌آید. فرض کنید a یک مجموعه باشد. اصل انتخاب بیانگر این است که حداقل «یک تابع انتخاب» برای a وجود دارد. یعنی حداقل یک تابع مانند $f : a \to \bigcup a$ موجود است به طوری که برای هر $t \in a$ داریم $f(t) \in t$. از آنجا که هر تابع یک مجموعه است، نوشتن عبارت «یک تابع وجود دارد» به معنی نوشتن عبارت «یک مجموعه وجود دارد که آن مجموعه ویژگی تابع بودن را داراست» است و از این رو این عبارت به صورت مرتبهٔ اول قابل نوشتن است.

اصل انتخاب را می‌توان برای یک خانواده از مجموعه‌ها هم به صورت زیر نوشت: فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ یک خانواده متشکل از مجموعه‌های ناتهی باشد. در این صورت یک تابعِ $f : \Gamma \to \bigcup \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ موجود است به طوری که برای هر $\gamma \in \Gamma$ داریم $f(\gamma) \in A_\gamma$.

۵.۹ تحلیل عمیق‌تری از توابع یک به یک و پوشا

در تمرینهای فصل گذشته، دیدیم که اگر A, B متناهی و $f : A \to B$ یک‌به‌یک باشند، آنگاه تعداد اعضای A کمتر یا مساوی با تعداد اعضای B است. تمرین زیر، تعمیمی از این گفته است:

تمرین ۹.۹. نشان دهید که اگر تابعی یک به یک از X به Y موجود باشد آنگاه تابعی پوشا از Y به X موجود است (دقت کنید که یک تابع $f : X \to Y$ داریم و نیاز است که شما یک تابع $g : Y \to X$ **معرفی کنید.)**

حل تمرین بالا نباید دشوار باشد: برای این که یک تابع از Y به X تعریف کنیم، کافی است هر عنصرِ $f(x)$ را به x برگردانیم. اگر f پوشا نباشد عناصری در Y باقی می‌مانند که تصویر هیچ عنصری تحت x نیستند. تعریف تابع روی این عناصر نیز ساده است. کافی است همهٔ آنها را به یک عنصر دلخواه در X تصویر کنیم.

تمرین ۱۰.۹. تمرین قبل را به صورت زیر دقیق‌تر کنید: اگر $f : X \to Y$ یک به یک باشد، یک تابعِ پوشای $g : Y \to X$ چنان پیدا می‌شود که

$$\forall x \in X \quad g(f(x)) = x.$$

آیا تابعِ g یکتاست؟

قضیه ۲۳.۹. اگر از X به Y یک تابع پوشا موجود باشد آنگاه یک تابع یک به یک از Y به X موجود است.

اثبات. فرض کنید $y_0 \in Y$. قرار دهید:

$$A_{y_0} = \{x \in X | f(x) = y_0\}$$

در واقع A_{y_0} از عناصری تشکیل شده است که f آنها را به y_0 می‌برد. برای تعریف تابعِ $g : Y \to X$ کافی است برای هر $y_0 \in Y$ یکی از عناصر A_{y_0} را برداریم و آن را $g(y_0)$ بنامیم. اما آیا این کار به همین سادگی است؟

دقت کنید که برای هر y یک مجموعهٔ A_y وجود دارد و ما می‌خواهیم با استفاده از یک تابع هر عنصرِ y را به عنصری در A_y ببریم. اما این کار را چگونه باید انجام دهیم تا حاصل یک **تابع** شود؟

اینجاست که اصل انتخاب به یاری ما می‌آید. خانواده‌ی نامتناهی زیر از مجموعه‌ها را در نظر بگیرید:

$$\{A_y\}_{y \in Y}$$

بنا به اصل انتخاب یک تابع انتخابِ g از Y به $\bigcup\{A_y\}_{y\in Y}$ موجود است به طوری که برای هر y_0 داریم

$$g(y_0) \in A_{y_0}$$

و این تابع، نیاز ما را برطرف می‌کند. $\square$

درباره‌ی **اصل انتخاب**، باز هم مفصل‌تر صحبت خواهیم کرد: این اصل همچنان این جا و آنجا گریبانمان را خواهد گرفت. قضیهٔ بالا تنها یک مثال برای احساس نیاز به این اصل بود. بگذارید از این بهانه استفاده کنیم و در این جا نیز کمی دربارهٔ اصل انتخاب بگوییم.

فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. حاصلضرب این خانواده را با نماد $\Pi_{i\in I}A_i$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Pi_{i\in I}A_i = \{(x_i)_{i\in I} | x_i \in A_i\}.$$

تعریف بالا، تعمیمی از تعریفِ حاصل ضرب دو مجموعهٔ A_1, A_2 است؛ در واقع $A_1 \times A_2$ از زوج مرتبهایی به صورت (x_1, x_2) تشکیل شده است که $x_1 \in A_1$ و $x_2 \in A_2$.

هر عنصر در $\Pi_{i\in I}A_i$ یک دنبالهٔ $(x_i)_{i\in I}$ و بیان دیگر یک تابعِ $f : I \to \bigcup A_i$ است که $f(i) = x_i \in A_i$.

اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه

$$\Pi_{i\in I}A_i \neq \emptyset$$

به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌ها باشد، تابعی موجود است که از هر یک از آنها یک عنصر بر می‌دارد.

$$\exists f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$$

$$\forall i \in I \quad f(i) \in A_i$$

این در واقع بیانی از اصل انتخاب است.

تمرین ۱۱.۹. در سال اول دانشگاه، هرگز متوجه نمی‌شدم که چرا اصل انتخاب، یک اصل است. با خود می‌گفتم که اصل انتخاب را می‌توان ثابت کرد، پس اصل نیست. اثبات من این بود: فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. داریم

$$\forall i \in I \quad A_i \neq \emptyset$$

پس فرض کنیم

$$\forall i \quad x_i \in X_i$$

پس $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$! به نظر شما، اشکال استدلال من چه بوده است؟

تمرین ۱۲.۹. قضیه‌ی ۲۳.۹ را بدین صورت دقیق کنید که اگر $f : X \to Y$ پوشا باشد، آنگاه تابع $g : Y \to X$ چنان پیدا می‌شود که برای هر $y \in Y$ داریم $f(g(y)) = y$. آیا تابع g یکتاست؟

تعریف ۲۴.۹. به یک تابعِ یک به یک و پوشا، یک **تناظر یک به یک** یا یک تابع **دوسوئی** گفته می‌شود.

علت نام «دوسوئی» در قضیه‌ی زیر روشن شده است.

قضیه ۲۵.۹. اگر تابع $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد، آنگاه تابع یکتای $g : Y \to X$ چنان موجود است که

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

و

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = y.$$

توجه ۲۶.۹. تابع g در قضیه‌ی بالا را تابع وارون f می‌خوانیم و آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم.

اثبات. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد. رابطهٔ $g : Y \to X$ را به صورت پیش رو تعریف می‌کنیم: عنصر دلخواه $y_0 \in Y$ را در نظر بگیرید. از آنجا که f پوشاست، عنصر $x_0 \in X$ چنان موجود است که $f(x_0) = y_0$. از آن جا که f یک به یک است، عنصرِ x_0 یکتاست. تعریف می‌کنیم: $g(y_0) = x_0$. به بیان دقیقتر، $g(y_0)$ را برابر با عبارت زیر تعریف کرده‌ایم:

تنها عنصر x_0 با این ویژگی که $f(x_0) = y_0$.

خوب است پیش از آن که اثبات را ادامه دهیم، توضیح آموزشی پیش رو را لحاظ کنیم: از آنجا که فقط یک عنصرِ x_0 موجود است به طوری که $f(x_0) = y_0$ در تعریف تابعِ g نیازی به به‌کارگیری اصل انتخاب نداریم؛ یعنی اثباتِ قضیهٔ ما نیازمند برقراری اصل انتخاب نیست. در واقع علتِ این که g «تابع» است، یک به یک بودنِ f است.

حال توجه کنید که $Dom(g) = Y$، زیرا به علتِ پوشا بودنِ تابعِ f هر عنصر در Y تصویر یک عنصر تحت f است؛ یعنی g روی آن عنصر تعریف‌شده است.

همچنین دوباره تأکید می‌کنیم که $g : Y \to X$ یک تابع است. برای اثبات این گفته، فرض کنید $y_1, y_2 \in Y$ عناصر دلخواهی باشند. از آنجا که f پوشا است می‌توان فرض کرد که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. اگر

$y_1 = y_2$ آنگاه $f(x_1) = f(x_2)$ و از آنجا که f یک به یک است داریم $x_1 = x_2$. اما بنا به تعریف، داریم $g(y_1) = x_1 = g(y_2) = x_2$.

ادعا می‌کنیم که g به علاوه، یک به یک است. فرض کنید $y_1, y_2 \in Y$ دو عنصر باشند به گونه‌ای که $g(y_1) = g(y_2)$. بنا به پوشا بودنِ f می‌توانیم فرض کنیم که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. بنا به تعریفِ تابعِ g از این که $g(y_1) = g(y_2)$ نتیجه می‌گیریم که $x_1 = x_2$. از آنجا که f تابع است، $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$.

اثبات پوشایی g را به عنوان یک تمرین ساده رها می‌کنیم.

حال به اثبات این می‌پردازیم که

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

دقت کنید که عبارت بالا را می‌توان این گونه نوشت: $g \circ f = id_X$. فرض کنید $x_0 \in X$ عنصر دلخواهی باشد. اگر $y_0 = f(x_0)$ طبق تعریف داریم $g(y_0) = x_0$ یعنی $g \circ f(x_0) = x_0$. اثبات این را که $\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = y$ به خواننده واگذاشته‌ایم. این عبارت را نیز می‌توان به صورت $f \circ g = id_Y$ نوشت.

نهایتاً اثبات می‌کنیم که تابعِ g با شرایط خواسته شده در قضیه، یکتاست. فرض کنید $g_1 : Y \to X$ و $g_2 : Y \to X$ دو تابع باشند با این ویژگی که $f \circ g_1(y) = id_Y$ و $g_1 \circ f(x) = id_X$ و $f \circ g_2(y) = id_Y$ و $g_2 \circ f(x) = id_X$. نشان می‌دهیم که در این صورت $g_1 = g_2$. برای این منظور باید نشان می‌دهیم:

$$\forall y \in Y \quad g_1(y) = g_2(y).$$

فرض کنید $y_0 \in Y$ عنصری دلخواه باشد. باید نشان دهیم که $g_1(y_0) = g_2(y_0)$. از آنجا که f پوشاست، عنصر $x_0 \in X$ چنان موجود است که $f(x_0) = y_0$. داریم: $g_1(y_0) = g_1\big(f(x_0)\big)$، پس بنا به فرضِ $g_1 \circ f(x) = id_X$ داریم: $g_1(y_0) = g_1\big(f(x_0)\big) = x_0$. مشابهاً بنا به فرضِ $g_2 \circ f(x) = id_X$ داریم: $g_2(y_0) = g_2\big(f(x_0)\big) = x_0$. پس $g_1(y_0) = g_2(y_0)$. $\square$

تمرین ۱۳.۹. نشان دهید که عکس قضیه‌ی بالا نیز برقرار است؛ یعنی اگر تابع g با ویژگی ذکر شده در قضیه وجود داشته باشد، آنگاه f هم یک به یک است و هم پوشا.

۶.۹ تمرینهای تکمیلی

تمرین ۱۴.۹. آیا تابع مثال ۳.۹ در حالت کلی یک به یک است؟ آیا این تابع پوشاست؟

تمرین ۱۵.۹. آیا تابع جمع اعداد طبیعی یک به یک است؟ آیا این تابع پوشا است؟

تمرین ۱۶.۹. یک به یک و پوشا بودن توابع مثال ۱۰.۹ را بررسی کنید.

تمرین ۱۷.۹. آیا عکس حکمِ تمرینِ ۵.۹ برقرار است؟ یعنی اگر برای هر $B \subseteq Y$ داشته باشیم $f(f^{-1}(B)) = B$ آیا از این نتیجه می‌شود که f پوشاست؟

تمرین ۱۸.۹. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد. نشان دهید که

$$A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

$$C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

تمرین ۱۹.۹. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد و $A \subseteq X$. آیا همواره چنین است که $(f(A))^c = f(A^c)$؟

تمرین ۲۰.۹ (یک به یک سازی یک تابع دلخواه). فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. روی X رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$(x, x') \in R \Leftrightarrow \big(f(x) = f(x')\big)$$

۱. نشان دهید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X است.

۲. نشان دهید که g در زیر، یک تابعِ یک‌به‌یک است:

$$g : X/R \to Y$$

$$g([x]_R) = f(x).$$

تمرین ۲۱.۹. فرض کنید که $f : X \to Y$ یک تابع باشد. نشان دهید که $f : X \to f(X)$ پوشاست.

تمرین ۲۲.۹. فرض کنید که $f : X \to Y$ به گونه‌ای باشد که برای هر $A, B \subseteq X$ داشته باشیم $f(A - B) = f(A) - f(B)$. نشان دهید که در این صورت f یک تابعِ یک به یک است. (پس بنا به مثال ۲۲.۹ و تمرین ۶.۹، تابع f یک به یک است اگروتنهااگر برای هر A, B داشته باشیم $f(A - B) = f(A) - f(B)$.)

تمرین ۲۳.۹. فرض کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی همه‌ی افرازهای ممکن از مجموعه‌ی X باشد و $\mathcal{E}$ مجموعه‌ی همه‌ی روابط هم‌ارزی روی X. تابعِ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(R) = X/R$$

نشان دهید که تابع f یک به یک و پوشاست. (قضیهٔ ۱۹.۸ را ببینید).

تمرین ۲۴.۹. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. همچنین فرض کنید که یک تابعِ $g : Y \to X$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $g(f(x)) = x$. نشان دهید که در این صورت تابعِ f یک به یک است.

تمرین ۲۵.۹. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. همچنین فرض کنید که یک تابعِ $g : Y \to X$ موجود باشد به طوری که برای هر $y \in Y$ داشته باشیم $f(g(y)) = y$. نشان دهید که در این صورت تابعِ f پوشاست.

تمرین ۲۶.۹. فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ مشتق‌پذیرِ از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد. روی $\mathcal{A}$ رابطه‌ی زیر را تعریف کنید:

$$(f,g)\in R \Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=g(x)+C.$$

به بیان دیگر، دو تابع مشتق‌پذیر را زمانی با هم در رابطه‌ی R می‌گیریم که اختلافشان یک ثابت باشد.

۱. نشان دهید که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲. ضابطه‌ی $h:\mathcal{A}/R\to\mathcal{A}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$h(f)=f'.$$

نشان دهید که h یک تابع یک به یک و پوشاست. ضابطه‌ی وارون تابعِ h چیست؟

تمرین ۲۷.۹. فرض کنید $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ دو تابع یک به یک باشند. نشان دهید که $g\circ f:X\to Z$ یک تابع یک به یک است.

تمرین ۲۸.۹. فرض کنید $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ دو تابع پوشا باشند. نشان دهید که $g\circ f:X\to Z$ یک تابع پوشاست.

تمرین ۲۹.۹. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع دلخواه باشد. تابعِ $g:P(X)\to P(Y)$ را با ضابطهٔ $g(A)=\{f(x)|x\in A\}$ در نظر بگیرید. نشان دهید که تابع g پوشاست اگروتنها اگر f پوشا باشد. همچنین نشان دهید که g یک به یک است اگروتنهااگر f یک به یک باشد.

تمرین ۳۰.۹. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع یک به یک و پوشا باشد و $B\subseteq Y$. در این صورت $f^{-1}(B)$ می‌تواند به دو صورت زیر معنا شود:

$$\{x|f(x)\in B\},\quad \{f^{-1}(y)|y\in B\}$$

نشان دهید دو مجموعهٔ فوق با هم یکی هستند.

تمرین ۳۱.۹. گفتیم که هر تابع، یک مجموعه است؛ پس اجتماع دو تابع معنا دارد.

۱. اگر f_1 و f_2 دو تابع باشند، آیا $f_1\cup f_2$ نیز یک تابع است؟

۲. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک خانواده از توابع باشد به طوری که

$$f_0\subseteq f_1\subseteq f_2\ldots$$

نشان دهید که $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ نیز یک تابع است.

تمرین ۳۲.۹. فرض کنید p,q دو عدد اول باشند. تابعِ $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ با ضابطهٔ $f(m,n)=p^mq^n$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این تابع یک به یک است. آیا این تابع پوشا هم هست؟ چه عناصری تحت پوشش این تابع قرار نمی‌گیرند؟

خلاصهٔ فصل نهم. منظور از یک تابع از یک مجموعهٔ X به یک مجموعهٔ Y یک رابطه از X به Y است که هر عنصر در X را فقط با یک عنصر یکتا در Y مرتبط می‌کند. وقتی می‌نویسیم $f : X \to Y$ دامنهٔ f را تمام X در نظر می‌گیریم. چنین تابعی را یک به یک می‌نامیم هرگاه هیچ دو عنصر متفاوتی تحت آن تصویر یکسان نداشته باشند. نیز تابع $f : X \to Y$ را پوشا می‌نامیم هرگاه هر عنصری در Y تصویر یک عنصر تحت f باشد. هر تابع یک به یک و پوشا، دارای یک وارون است.

فصل ۱۰

متناهی و نامتناهی

ساقیا در گردش ساغر تعلّل تا به چند
دور چون با عاشقان افتد تسلسل بایدش
حافظ

۱.۱۰ مقدمه

یکی از مفاهیم ابهام‌برانگیز در علم بشری، مفهوم نامتناهی است. هر جا که پای نامتناهی در یک مبحث ریاضی به میان آید، مفاهیم گنگ و پیچیده می‌شوند؛ باز در عین حال، در هیچ علمی، بهتر از ریاضیات نمی‌توان به سوالهای زیر پاسخ داد:

۱. نامتناهی چیست؟

۲. آیا نامتناهی وجود دارد یا همه چیز متناهی است؟

۳. اگر نامتناهی وجود دارد، آیا همه‌ی نامتناهی‌ها هم‌اندازه‌اند؟

در این بخش قرار است پاسخ این سوالها را به نیکی دریابیم.

دو مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{\text{علی، حسن، حسین}\}$$

و

$$B = \{0, 1, 2\}$$

با این که این دو به ظاهر خیلی متفاوت به نظر می‌رسند ولی از نظر «اندازه» با هم برابرند. در واقع این طور به نظر می‌آید که اگر نامها را در مجموعه‌ی بالا عوض کنیم، به یک کپی از مجموعه‌ی پائین می‌رسیم؛ یعنی اگر علی را ۰ و حسن را ۱ و حسین را ۲ بنامیم، به مجموعه‌ی پائین می‌رسیم. اصطلاحاً در این موقع می‌گوئیم که این دو مجموعه **همتوان** هستند. بیائید همین نکته را دقیقتر بیان کنیم. فرض کنید f یک تابع از A به B باشد به طوری که

$$f(\text{علی}) = 0, f(\text{حسن}) = 1, f(\text{حسین}) = 2$$

تابع f هم یک به یک است و هم‌پوشا. در واقع این تابع، یک تابع «تغییر نام» است.

تعریف ۱.۱۰. دو مجموعه‌ی دلخواهِ X, Y را همتوان (یا هم‌اندازه) می‌خوانیم هرگاه تابعی یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد.

اگر دو مجموعه‌ی X, Y همتوان باشند، می‌نویسیم: $X \cong Y$؛ گاهی نیز می‌نویسیم: $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$.
گاهی نیز می‌گوییم اعضای X, Y در تناظر یک به یک قرار دارند؛ یعنی هر عضو X در تناظر با یک عضو Y است. با این تفاصیل، تکلیف مجموعه‌های متناهی معلوم می‌شود:

تعریف ۲.۱۰.

۱. می‌گوئیم مجموعه‌ی X دارای n عضو است هرگاه همتوان با مجموعه‌ی $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ باشد؛ یعنی یک تابع یک به یک و پوشا بین n و X موجود باشد.

۲. می‌گوئیم مجموعه‌ی X متناهی است هرگاه یک عددِ $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که X با n همتوان باشد. در واقع مجموعه‌ی X متناهی است هرگاه یک عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که مجموعه‌ی X دارای n عضو باشد.

خواننده حق دارد که اعتراض کند که برای این که یک مجموعهٔ X همتوان با یک عدد طبیعی باشد، باید نخست یک مجموعه از اعداد طبیعی وجود داشته باشد؛ یعنی برای تعریف متناهی هم نیاز به اصل وجود یک مجموعهٔ نامتناهی است. این اعتراض کاملاً وارد است؛ اما یک نحوهٔ دیگر تعریف هر عدد طبیعی وجود دارد. مجموعهٔ n یک عدد طبیعی است هرگاه با ترتیبِ $\in$ خوش ترتیب و دارای ماکزیمم و مینی‌موم باشد. اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی در واقع بیانگر این است که چنین n هایی در کنار هم تشکیل یک مجموعه می‌دهند.
حال که معنای متناهی را دانسته‌ایم، تعریف نامتناهی کار دشواری نیست:

تعریف ۳.۱۰. مجموعه‌ی X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه متناهی نباشد.

اولین سوالی که به ذهن می‌رسد این است که آیا در یک جهان از نظریه‌ی مجموعه‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی نیز پیدا می‌شود؟ شگفتا که اثبات این گفته، بدون استفاده از اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی ممکن نیست. بیایید نخست این گفته را دقیق کنیم:
در درسهای پیشین با مفهوم اعداد طبیعی آشنا شدید. گفتیم که بنا به اصل وجود مجموعه‌ی استقرائی یک مجموعه‌ی استقرائی موجود است. ثابت کردیم که کوچکترین مجموعه‌ی استقرائی نیز موجود است که آن را مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌خوانیم و با $\mathbb{N}$ نشان می دهیم. به بیان دیگر [۱] مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای اعضای زیر است:

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = \{0\} \\
&\vdots \\
&n = \{0, \ldots, n-1\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

[۱] در یک جهان خوش‌بنیاد!

اما به راحتی (و با استقراء) می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای در تناظر یک به یک نیست. [۲] به بیان دیگر:

قضیه ۴.۱۰. مجموعه‌ی اعداد طبیعی نامتناهی است.

پس این که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد در نظریه‌ی مجموعه‌ها یک اصل است: اصلی که می‌گوید مجموعه‌ای استقرائی وجود دارد. این اولین چالش فلسفی بحث متناهی و نامتناهی است.

دقت کنید که این که مجموعه‌ای نامتناهی وجود داشته باشد، یا این که جهان هستی متناهی باشد یا نامتناهی، تأثیر شگرفی بر تصورات ایدئولوژیک می‌تواند داشته باشد. بسیاری از براهین فلسفی، مانند برهان علیت، [۳] بر این استوارند که گیتی، مجموعه‌ای متناهی است و زنجیرهای علت ـ معلولی در جائی می‌ایستند. اما همان طور که دیدیم نظریه‌ی مجموعه‌ها، در این زمینه کمک خاصی به ما نمی‌کند: در نظریه‌ی مجموعه‌ها، وجود یک مجموعه‌ی نامتناهی یک **اصل** است.

شاید این گفته، ناامید کننده به نظر برسد؛ اما پس از پذیرش این اصل، نظریه‌ی مجموعه‌ها دنیای رنگارنگی از نامتناهی‌ها پیش چشم ما تصویر می‌کند که البته این دنیا با چشم غیرمسلح به ریاضیات قابل دیدن نیست.

پیش از پرداختن به دنیای نامتناهی‌ها، به یک نکته‌ی فلسفی دیگر درباره‌ی نامتناهی‌ها پرداخته‌ام که پذیرش آن مستلزم پذیرش اصل انتخاب است.

مجموعه‌ی اعداد زوج، را به عنوان زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اعداد طبیعی در نظر بگیرید.

$$E = \{0, 2, 4, \ldots\}$$

تابعِ $f : \mathbb{N} \to E$ را در نظر بگیرید که $f(x) = 2.x$. تابع بالا یک به یک و پوشاست. پس با استفاده از این تابع می‌توان نشان داد که مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و E هم‌اندازه هستند. در واقع E تنها یک نام‌گذاری دیگر برای $\mathbb{N}$ است!

اما چالش فلسفی دوم ما این است: اصل عمومیِ ششم اقلیدس برای ورود به اصول هندسه‌ی اقلیدسی این است که «همواره یک کُل از جزء خودش بزرگتر است». [۴] پس، از نظر اقلیدس، هیچ کُلّی نمی‌تواند «هم‌اندازه» با جزئی از خودش باشد. گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان، یعنی هم‌اندازه، می‌خوانیم هرگاه بین آنها یک تابع یک به یک و پوشا موجود باشد. به نظر می‌آید که در اینجا اصل اقلیدس رد شده است: زیرا مجموعه‌ی اعداد طبیعی با جزئی از خودش (مجموعه‌ی اعداد زوج) هم‌اندازه است. [۵] در واقع نکته‌ی بالا وجه تمایز مجموعه‌های نامتناهی با مجموعه‌های متناهی است:

قضیه ۵.۱۰. یک مجموعه‌ی X نامتناهی است اگروتنهااگر با زیرمجموعه‌ای از خودش همتوان باشد.

مثلاً مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ به این علت نامتناهی است که هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد زوج است. توجه کنید که مجموعه‌ی اعداد فرد هم، هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد زوج است. پس مجموعه‌ی اعداد طبیعی، از دو مجموعه ساخته شده است که هم‌اندازه‌ی خودش هستند؛ و این از عجایب نامتناهی بودن است!

قضیه‌ی بالا نیز دارای بار فلسفی است: اگر جهان هستی نامتناهی باشد، بخشی از جهان شبیه به کُلِّ جهان است. آن بخش نیز بخشی شبیه به خود دارد! بنابراین چه بسا نامتناهی کُپی از خودِ ما و سیاره‌ی ما در جاهای دیگر گیتی وجود داشته باشد و این جهانها به صورت موازی در جریان باشند.

---

[۲] این حقیقت را اصل لانهٔ کبوتری نیز می‌نامند.

[۳] حداقل آنگونه که من درکش کرده‌ام

[۴] برای آشنا شدن با اصول اقلیدس پیوند زیر را مطالعه کنید:

https://www.math.ust.hk/~mabfchen/Math4221/Euclidean20Geometry.pdf

[۵] اقلیدس با چه پیش‌فرضی اصل خود را نوشته است که ما آن پیش‌فرض را نداریم؟

بیایید پیش از ادامه‌ی بحث، اول قضیه‌ی بالا را اثبات کنیم.

اثبات قضیه‌ی ۱۰ .۵. طبق معمول، ابتدا اثبات معمول در اکثر کتابهای ریاضی را می‌نویسیم: فرض کنید مجموعه‌ی X نامتناهی باشد. عنصر $x_0 \in X$ را انتخاب کنید. مجموعه‌ی $X - \{x_0\}$ ناتهی است. پس عنصر $x_1 \in X - \{x_0\}$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $x_0, \ldots, x_n$ انتخاب شده باشند. دوباره $X - \{x_0, \ldots, a_n\}$ ناتهی است پس می‌توان $x_{n+1} \in X - \{x_0, \ldots, x_n\}$ را انتخاب کرد. بدین‌سان یک دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعضای X انتخاب کرده‌ایم.

در نحوهٔ اثبات بالا، به کار گیری اصل انتخاب چندان مشهود نیست؛ و البته علتش معلوم است: این نحوهٔ بیان اشتباه است. بیایید درستش را بیان کنیم:

فرض کنید h یک تابع انتخاب روی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی باشد؛ یعنی تابعی که از هر زیرمجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ اعداد طبیعی، عنصری برمی‌دارد. بنا به قضیهٔ بازگشت در بخشِ ۳.۴، یک تابع با دامنهٔ $\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $f(n) = h(X - \{f(0), \ldots, f(n-1)\})$. بُردِ تابعِ f همان دنبالهٔ $\{x_n\}$ است که به دنبالش بودیم.

همان طور که از اثبات پیداست، در پیدا کردن این دنباله از قضیهٔ بازگشت و اصل انتخاب به طور همزمان بهره جسته‌ایم.

دقت کنید که دنباله‌ی بالا، در واقع یک کپی از مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ داخل مجموعه‌ی X است؛ بدین معنی که متناظر با هر عدد طبیعیِ n یک عنصر x_n داریم. پس بیایید قرار دهیم:

$$\mathbb{N}^* = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

پس می‌توان نوشت:

$$X = \mathbb{N}^* \cup (X - \mathbb{N}^*)$$

همچنین گفتیم که $\mathbb{N}$ همتوان با مجموعه‌ی اعداد زوج است؛ پس $\mathbb{N}^*$ همتوان با مجموعه‌ی $E^* = \{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ است. حال واضح است که

$$X = \mathbb{N}^* \cup (X - \mathbb{N}^*) \cong \mathbb{E}^* \cup (X - \mathbb{N}^*)$$

یعنی X با بخشی از خودش همتوان است.

برای اثبات سمت دیگر قضیه باید نشان دهیم که هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای با جزئی از خودش همتوان نیست. این را نیز به راحتی می‌توان با استقراء ثابت کرد (بررسی کنید). □

تا کنون فهمیدیم که مجموعه‌ها، به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند؛ مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی. یک سوال طبیعی این است که آیا مجموعه‌های نامتناهی، همه هم‌اندازه‌ی هم هستند؟ در بالا دیدیم که $\mathbb{N}$ و $\mathbf{E}$ هم‌اندازه‌ی هم هستند؛ پس پرسیدن این سوال طبیعی است.

۲.۱۰ مجموعه‌های شمارا

گفتیم که هر عدد طبیعیِ n یک مجموعه‌ی متناهی است؛ ولی مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی نامتناهی است. به مجموعه‌هائی که همتوان با مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشند، شمارا می‌گوییم:

تعریف ۶.۱۰. مجموعه‌ی X را **شمارا** می‌خوانیم هرگاه $X \cong \mathbb{N}$. [۶]

[۶] در این کتاب، منظور از شمارا، شمارای نامتناهی است. در برخی کتابها، مجموعه‌های متناهی را نیز شمارا می‌گیرند.

پس یک مجموعه‌ی X شماراست هرگاه به اندازه‌ی اعداد طبیعی عضو داشته باشد:

$$|X| = |\mathbb{N}|.$$

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد زوج شماراست؛ زیرا همان گونه که در زیر می‌بینید یک تابع یک به یک و پوشا میان مجموعه‌ی اعداد زوج و مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد:

$$E \cong \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{cccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \ldots \end{array}$$

ضابطه‌ی تابع بالا به صورت زیر است:

$$f : E \to \mathbb{N} \quad x \mapsto 2.x$$

به بیان دیگر، یک مجموعه‌ی X شمارا است هرگاه اعضای آن را بتوان توسط یک دنباله به صورت زیر نوشت:

$$X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

خودِ مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ پس بدین دلیل شماراست که می‌توان نوشت:

$$\mathbb{N} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

همچنین مجموعه‌ی اعداد زوج شماراست زیرا

$$\mathbf{E} = \{2n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

قضیه‌ی زیر، تأئیدی بر این گفته است که هر مجموعه‌ی نامتناهی، حداقل شمارا عضو دارد:

قضیه ۷.۱۰. مجموعه‌ی دلخواهِ X نامتناهی است اگروتنها اگر شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارا باشد.

اثبات. اثبات قضیه‌ی ۵.۱۰ را (به دقت) بخوانید. اگر X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $\mathbb{N}^*$ که در اثبات قضیه‌ی یادشده ساخته شد، شمارای نامتناهی است و $\mathbb{N}^* \subseteq X$. □

در ادامه، می‌خواهیم به بررسی این نکته بپردازیم که آیا مجموعه‌ای نامتناهی پیدا می‌شود که همتوان با $\mathbb{N}$ نباشد؟ به بیان دیگر، آیا مجموعه‌ای نامتناهی پیدا می‌شود که شمارا نباشد؟

بیایید با اضافه کردن اشیائی به مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ آن را بزرگتر کنیم (بدین امید که به مجموعه‌ای غیرشمارا برسیم!). مثلاً فرض کنید یک دوچرخه به مجموعه‌ی اعداد طبیعی اضافه کنیم! واضح است که مجموعه‌ی حاصل نامتناهی است زیرا شامل اعداد طبیعی است؛ اما ادعا می‌کنیم که که این مجموعه هم‌اندازه‌ی $\mathbb{N}$ است. در واقع ادعا می‌کنیم که:

$$\mathbb{N} \cup \{🚲\} \cong \mathbb{N}.$$

برای اثبات نوشته‌ی بالا کافی است یک تناظر یک به یک میان مجموعه‌های یادشده برقرار کنیم. به شکل زیر نگاه کنید:

$\mathbb{N} \cup \{$🚲$\}$	🚲	۰	۱	۲	۳	...
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$\mathbb{N}$	۰	۱	۲	۳	۴	...

بنا به شکل بالا، اگر به یک مجموعه‌ی شمارا، یک عنصر اضافه شود، همچنان شمارا باقی می‌ماند. در زیر این گفته را دقیق‌تر کرده‌ایم:

قضیه ۸.۱۰. فرض کنید A یک مجموعه‌ی شمارا باشد و $x \notin A$. آنگاه $A \cup \{x\}$ هم شماراست.

اثبات. از آنجا که A شماراست داریم $A \cong \mathbb{N}$؛ یعنی $A = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. بنویسید: $A \cup \{x\} = \{x, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. تابع $f : \mathbb{N} \to A \cup \{x\}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(0) = x$$

$$f(i) = x_{i-1}$$

بررسی کنید که تابع بالا یک به یک و پوشاست. $\square$

نکته‌ی بالا به «پارادوکس هیلبرت» معروف است: فرض کنید که یک هتل داریم که به اندازه‌ی اعداد طبیعی اتاق دارد و همه‌ی اتاقهای آن پُر است. اگر یک مسافر جدید بیاید آیا می‌شود او را هم در هتل جای داد؟ به نظر می‌آید که بشود: کافی است که به هر کس بگوئیم که یک اتاق جلوتر برود تا اتاق شماره‌ی صفر خالی شود! جالب اینجاست که اگر از یک مجموعه‌ی شمارا یک عضو برداریم هم کوچکتر نمی‌شود:

تمرین ۱.۱۰. اگر A شمارا باشد و $x \in A$ آنگاه $A - \{x\}$ هم شماراست.

حال بیایید به جای یک عنصر، n عنصر (یعنی تعدادی متناهی عنصر) به مجموعه‌ی اعداد طبیعی اضافه کنیم:

تمرین ۲.۱۰. فرض کنید A شماراست و $x_0, \ldots, x_n \notin A$ نشان دهید که $A \cup \{x_0, \ldots, x_n\}$ شماراست.

باز هم مجموعه‌ی حاصل بزرگتر نشد! حال بیایید n عنصر از آن کم کنیم:

تمرین ۳.۱۰. اگر A شمارا باشد و $x_1, \ldots, x_n \in A$ آنگاه $A - \{x_1, \ldots, x_n\}$ هم شماراست.

مثال هتل هیلبرت را به صورت زیر ادامه می‌دهیم: فرض کنید هتل یادشده به اندازه‌ی اعداد طبیعی جا دارد و همه‌ی اتاقهای آن پر است. حال به اندازه‌ی اعداد طبیعی مسافر تازه وارد می‌شوند که نیازمند اتاق هستند. در این صورت هم هتل برای آنها جا دارد: کافی است که هر کس که در اتاق n است به اتاق $2n$ برود. در این صورت اتاقهای فرد خالی می شوند و مسافران جدید می‌توانند وارد آنها شوند؛ هر چند در این روش عدالت بین کسی که در اتاق اول است و کسی که در اتاق هزارم است رعایت نشده است! در زیر این گفته را دقیق کرده‌ایم:

قضیه ۹.۱۰. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی شمارا باشند و $A \cap B = \emptyset$. آنگاه $A \cup B$ نیز شماراست.

اثبات. فرض کنید $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ شمارشی برای A باشد و $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ شمارشی برای B باشد. داریم:

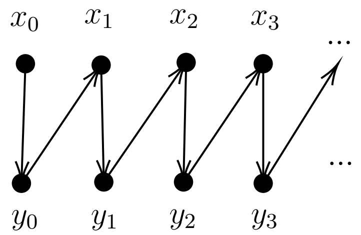
$$A\cup B=\{x_0,y_0,x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,\ldots\}$$

تابع $f:\mathbb{N}\to A\cup B$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(2i)=x_i$$

$$f(2i+1)=y_i$$

دقت کنید که تابع بالا، مجموعه‌ی $A\cup B$ را به صورت زیر می‌شمارد:



بررسی کنید که تابع f یک به یک و پوشاست. □

توجه ۱۰.۱۰. در مثال بالا مجموعه‌ی A را با اعداد زوج و مجموعه‌ی B را با اعداد فرد متناظر کردیم. از این رو $A\cup B$ با مجموعه‌ی اعداد طبیعی متناظر شد و از اینجا فهمیدیم که شماراست.

مثال ۱۱.۱۰. مجموعه‌ی اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، شماراست.

اثبات. داریم

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\underbrace{\mathbb{Z}^-}_{\text{اعداد صحیح منفی}}$$

و می‌دانیم که

$$\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}^-=\emptyset$$

بنا به مثال قبل، کافی است نشان دهیم که $\mathbb{Z}^-$ شماراست؛ و البته شکل زیر این را نشان می‌دهد:

$$\mathbb{Z}^-=\{\overset{0}{-1},\overset{1}{-2},\overset{2}{-3},\overset{3}{-4},\ldots\}$$

در واقع تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}^-$ با ضابطهٔ

$$x\overset{f}{\mapsto}-x-1$$

یک به یک و پوشاست؛ پس $\mathbb{Z}^-$ شماراست. □

به نظر عجیب می‌آید؛ اگر به اندازه‌ی اعداد طبیعی، به اعداد طبیعی عنصر اضافه کنیم اندازه‌ی مجموعه‌ی حاصل برابر با اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. حتی با استقراء می‌توان ثابت کرد که:

تمرین ۴.۱۰. اگر $A_1,\ldots,A_n$ مجموعه‌هایی شمارا باشند به طوری که $A_i\cap A_j=\emptyset$، برای هر $1\leqslant i,j\leqslant n$، آنگاه $\bigcup_{i=1}^n A_i$ شماراست.

حال، حالتی عجیب‌تر در پارادوکس هتل هیلبرت را در نظر بگیرید: یک هتل داریم که به اندازه‌ی اعداد طبیعی جا دارد و تمام اتاقهای آن پر است. اگر به‌اندازه‌ی اعداد طبیعی اتوبوس بیایند که هر کدام حاوی به اندازه‌ی اعداد طبیعی مسافرند، باز هم در هتل برای آنها جا پیدا می‌شود؛ به بیان دیگر، اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارا، مجموعه‌ای شماراست. این گفته را در ادامه اثبات کرده‌ایم؛ با این حال برای درک بهتر پارادوکس هتل هیلبرت، فیلمهای آموزشی زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

https://www.youtube.com/watch?v=faQBrAQ87l4

https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

قضیه ۱۲.۱۰. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های شماراست و برای هر $i \neq j \in \mathbb{N}$ داریم $A_i \cap A_j = \emptyset$. آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ شماراست.

اثبات. مجموعه‌های A_i را به صورت زیر درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{cccccc}
A_1 & x_{00} & x_{01} \rightarrow & x_{02} & x_{03} \rightarrow & \cdots \\
A_2 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\
A_3 & x_{20} \rightarrow & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_n & x_{n0} & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

با استفاده از مسیری که در شکل بالا مشخص شده است، $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ را بشمارید. □

تمرین ۵.۱۰. ضابطه‌ی نگاشت شمارش بالا را به دست بیاورید. [۷]

دوباره فرصت را برای توضیح بیشتر در مورد استقرا استفاده می‌کنیم: حکم قضیه‌ی قبل را با حکم تمرینِ ۴.۱۰ مقایسه کنید. حکم آن تمرین را با استقرا باید ثابت می‌کردید. اما آیا حکم قضیه‌ی قبل را می‌شد با استقراء ثابت کرد؟

پس ثابت کردیم که اگر $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های شمارا باشد آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ شماراست. تا به حال هر چه تلاش کرده‌ایم نتوانسته‌ایم مجموعه‌ای بزرگتر از مجموعه‌ی اعداد طبیعی پیدا کنیم؛ شاید ضرب دکارتی کمکی بکند:

مثال ۱۳.۱۰. مجموعه‌ی $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \{(x,y) | x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N}\}$ شماراست.

پاسخ. داریم

$$\{0\}\times\mathbb{N} = \{(0,0)(0,1)(0,2)\ldots\}$$

$$\{1\}\times\mathbb{N} = \{(1,0)(1,1)(1,2)\ldots\}$$

$$\vdots$$

[۷] تابع $2^y(2y+1)-1$ را امتحان کنید. پیوند زیر را نیز مطالعه کنید:
https://en.wikipedia.org/wiki/Pairing_function

اما

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\{n\}\times\mathbb{N}\right)$$

هم شماراست؛ زیرا همان طور که دیدیم اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارائی که دو به دو متمایزند، شماراست. $\square$

نتیجه ۱۴.۱۰. اگر X و Y شمارا باشند آنگاه $X\times Y$ هم شماراست (با همان اثبات بالا).

مثال ۱۵.۱۰. هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbb{N}$ شماراست.

اثبات. فرض کنید $A\subseteq\mathbb{N}$ نامتناهی باشد. هر زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ دارای یک کوچکترین عضو است. فرض کنید x_0 کوچکترین عضو A باشد. حال فرض کنید $x_0,\dots,x_n$ پیدا شده باشند؛ x_{n+1} را کوچکترین عضو $A-\{x_0,\dots,x_n\}$ بگیرید. تابع زیر را از $\mathbb{N}$ به A در نظر بگیرید:

$$f(i)=x_i.$$

یک به یک بودن تابع فوق از روی ساختِ آن واضح است؛ زیرا $f(i+1)\notin\{f(0),\dots,f(i)\}$.

تابع فوق پوشاست: فرض کنید t عنصر دلخواهی از A باشد. پس $t=n$ یک عدد طبیعی است. تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از n برابر با n است. پس حداکثر پس از طی n مرحله در بالا به t می‌رسیم؛ به بیان دیگر از میان $f(0),\dots,f(n-1)$ حتما یکی برابر با t خواهد بود. $\square$

مثال ۱۶.۱۰. مجموعه‌ی $\mathbb{Q}^{\geqslant 0}$ شماراست. (منظورمان از $\mathbb{Q}^{\geqslant 0}$ اعداد گویای بزرگتر یا مساوی صفر است.)

اثبات. دقت کنید که

$$\mathbb{Q}^{\geqslant 0}=\{\frac{a}{b}|a,b\in\mathbb{N},(a,b)=1\}$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & & 0 & & & & & \cdots \\
 & & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\text{مخرج اعداد فرد هستند پس شماراست.} & \leftarrow & \frac{2}{1} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{5} & \cdots \\
\text{شمارا} & \leftarrow & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
\text{شمارا} & \leftarrow & \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & & \frac{4}{5} & \cdots
\end{array}$$

همان طور که در بالا به طور نادقیق گفته‌ایم، $\mathbb{Q}^{\geqslant 0}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست. پس $\mathbb{Q}^{\geqslant 0}$ شماراست. $\square$

آیا می‌توانید اثبات بالا را دقیق کنید؟ در جلسات آینده اثبات دیگری نیز برای مثال بالا ارائه خواهیم کرد.

مثال ۱۷.۱۰. مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.

اثبات. داریم $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^{\geq 0}\cup\mathbb{Q}^{<0}$ دو مجموعه‌ی سمت راست شمارایند و اشتراکشان تهی است. $\square$

تمرین ۶.۱۰. نشان دهید مجموعه‌ی اعداد طبیعی، اجتماعی از شمارا تا مجموعه‌ی شماراست.

تمرین ۷.۱۰. نشان دهید که تعداد بازه‌های دو به دو مجزا در اعداد حقیقی، شماراست.

۳.۱۰ الفِ‌صفر

در بخشهای قبلی گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان می‌خوانیم و می‌نویسیم $X \cong Y$ هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد. گفتیم که مفهوم رابطه را می‌توان از مجموعه‌ها به کلاسها هم گسترش داد. با این توضیح، رابطهٔ هم‌توانی یک رابطهٔ هم‌ارزی روی کلاس همهٔ مجموعه‌هاست؛ یعنی ویژگی‌های زیر را داراست:

۱. اگر X یک مجموعه باشد آنگاه $X \cong X$

۲. اگر $X \cong Y$ آنگاه $Y \cong X$

۳. اگر $X \cong Y$ و $Y \cong Z$ آنگاه $X \cong Z$

پس رابطه‌ی همتوانی ($\cong$) کلاس همه‌ی مجموعه‌ها را افراز می‌کند. هر کلاس از این افراز را یک «کاردینال» یا یک «عدد اصلی» می‌نامیم. برای هر کدام از کلاسهای رابطه‌ی هم‌ارزی بالا یک اسم کلی می‌گذاریم: کلاس مجموعه‌ی X را با $\mathbf{card}(X)$ نشان می‌دهیم. پس

$$\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y) \Leftrightarrow X \cong Y$$

با این برای برخی از این کلاسهای هم‌ارزی، که بیشتر مورد توجه ما هستند، اسامی خاصی انتخاب کرده‌ایم.
X متناهی است هرگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که

$$X \cong n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

در این صورت می‌نویسیم:

$$\mathbf{card}(X) = n.$$

شکل زیر افراز تمام مجموعه‌ها را به کلاس‌های هم‌ارزی کاردینال‌ها نشان می دهد. در این افراز اولین خانه از سمت چپ نشان دهنده‌ی کلاس همه‌ی مجموعه‌های صفر عضوی است. خانه‌ی بعد از آن (حرکت به سمت راست) نشان دهنده‌ی کلاس همه‌ی مجموعه‌های یک عضوی است و بقیه نیز به همین ترتیب:

$\emptyset$	1	2	$\ldots$	$[\mathbb{N}]$	$\ldots$

کلاس اعداد طبیعی را تحت رابطه‌ی هم‌ارزی بالا با $\aleph_0$ نشان می‌دهیم. $\aleph$ حرف اول الفبای عبری است و عدد صفر اشاره به این دارد که $\aleph_0$ اولین کاردینال نامتناهی است. پس یک مجموعه‌ی X شماراست هرگاه

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_0.$$

در ادامه‌ی بحث قرار است با این اعداد جدید بیشتر آشنا شویم و جمع و ضرب و ترتیب آنها را نیز بشناسیم. پیش از بیایید بررسی کنیم که حقایقی را که در بخش قبل اثبات کردیم، چگونه می‌توانیم در زبان کاردینالها بنویسیم:

$$a < \aleph_0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad a \cong n$$

یعنی الف‌صفر اولین کاردینال نامتناهی است.

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

یعنی اگر به یک مجموعه‌ی شمارا یک عنصر اضافه کنیم شمارا می‌ماند.

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

یعنی اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست.

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

یعنی اگر X, Y شمارا باشند آنگاه $X \times Y$ نیز شماراست.

۴.۱۰ مجموعه‌های ناشمارا و برهان قطری

در درسهای گذشته هر چه عنصر به مجموعه‌ی اعداد طبیعی اضافه کردیم مجموعه‌ی حاصل شمارا باقی ماند. حتی دیدیم که اجتماع شماراتا مجموعه‌ی شمارا نیز شمارا است. در زیر می‌خواهیم سرانجام مجموعه‌ای معرفی کنیم که شمارا نیست. انجام این کار تحت یک روش استدلال معروف، به نام **روش قطری کانتور** صورت می‌گیرد.

فرض کنید که مجموعه‌ی A متشکل از تمام دنباله‌های شمارای ساخته‌ی شده از اعداد طبیعی ۰ تا ۹ باشد؛ یعنی هر عضو درمجموعه‌ی A به صورت $(a_i)_{i\in\omega}$ باشد، به طوری که $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. ادعا می‌کنیم که تعداد اعضای مجموعه‌ی A را نمی‌توان شمارش کرد.

به برهان خلف فرض کنید که تمام دنباله‌های موجود در A به صورت زیر شمارش شده‌اند:

$$\begin{array}{cccccccc}
۰ & \rightarrow & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \ldots \\
۱ & \rightarrow & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\
۲ & \rightarrow & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\
\vdots & & & & & & \\
\mathrm{n} & \rightarrow & a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

پس هر دنباله‌ی ممکنی به صورت $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ که در آن a_i یک عدد طبیعی از ۰ تا ۹ باشد، در لیست بالا قرار دارد. اما در زیر دنباله‌ای معرفی می‌کنیم که در لیست بالا قرار ندارد و این تناقض است:

دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید (برای راحتی، هر عنصر دنباله را در یک خانه جداگانه نوشته‌ایم)

عددی بین صفر تا 9 به غیر از a_{00}	عددی بین صفر تا 9 به غیر از a_{11}	عددی بین صفر تا 9 به غیر از a_{22}	...

دنباله‌ی بالا با تمام دنباله‌های نوشته شده در لیست متفاوت است: با دنبالهٔ صفرم متفاوت است زیرا صفرمین عنصرش با a_{00} متفاوت است؛ با دنبالهٔ اول متفاوت است زیرا یکمین عنصرش a_{11} نیست؛ و به این ترتیب با دنباله‌ی i ام متفاوت است، زیرا عنصر i ام آن، a_{ii} نیست. ام متفاوت است. در واقع عناصر این دنباله، با تغییر دادن قطر، در لیست بالا حاصل شده‌اند و از این رو، این برهان را برهان قطری کانتور می‌نامند. مجموعه‌ی بالا متناهی نیست و شمارا نیز نیست. به چنین مجموعه‌ای، **ناشمارا** گفته می‌شود.

استدلال بالا حقایق جذابی را برای ما روشن می‌کند: در بخشِ ۴.۸ دیدیم که هر عدد حقیقی یک دنباله‌ی شمارا ازاعداد طبیعی است. مثلاً

$$\pi = 3.14159265359\ldots.$$

بنابراین تعداد اعداد حقیقی، برابر با تعداد دنباله‌های شمارا از اعداد طبیعی است؛ پس این تعداد شمارا نیست. [۸]

همچنین بازه‌ی $(0,1)$ را در نظر بگیرید. در هر عدد در بازه‌ی $(0,1)$ یک عدد اعشاری به صورت زیر است:

$$0/a_0a_1,\ldots$$

پس تعداد اعضای بازه‌ی $(0,1)$ نیز برابر با تعداد دنباله‌های شمارای ساخته شده از اعداد ۰ تا ۹ است؛ یعنی حتی بازه‌ی $(0,1)$ هم شمارا نیست (جالب اینجاست که این استدلال نشان می‌دهد که تعداد کل اعداد حقیقی برابر با تعداد اعداد حقیقی در بازه‌ی $(0,1)$ است؛ زیرا هر دو هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی متشکل از دنباله‌های شمارای ساخته شده از اعداد ۱ تا ۹ هستند). در زیر به روش دیگری هم این نکته را ثابت کرده‌ایم. البته قبل از آن نشان می‌دهیم که اصولاً همه‌ی بازه‌ها هم‌اندازه‌اند!

لم ۱۰.۱۸. اگر $a \neq b$ آنگاه

$$(a,b) \cong (0,1).$$

اثبات. کافی است یک تناظر یک به یک بین بازه‌ی (a,b) و بازه‌ی $(0,1)$ پیدا کنیم. برای این کار، کافی است معادله‌ی خطی را بیابیم که از نقاط $(a,0)$ و $(b,1)$ می‌گذرد. $\square$

پس همه‌ی بازه‌های باز، هم‌اندازه‌اند و همه‌ی آنها نامتناهی و ناشمارا هستند. در زیر نشان داده‌ایم که کُلِّ $\mathbb{R}$ نیز هم‌اندازه‌ی بازه‌ی $(0,1)$ است. پس $\mathbb{R}$ ناشمارای نامتناهی است.

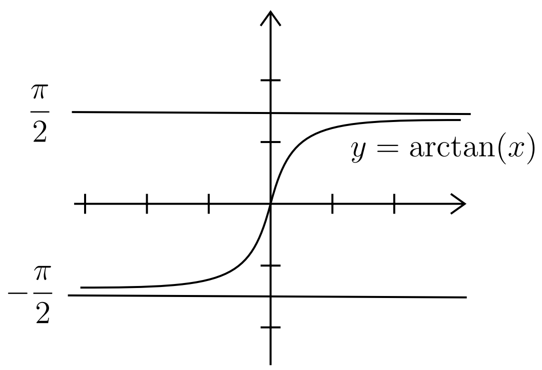
مثال ۱۰.۱۹. نشان دهید که $\mathbb{R} \cong (0,1)$.

پاسخ. بنا به لم قبل کافی است یک بازه پیدا کنیم که با $\mathbb{R}$ همتوان باشد. تابعِ

$$f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

یک تابع یک به یک و پوشاست. پس

$$\mathbb{R} \cong (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cong (0,1)$$



$\square$

[۸] بنا به اصل جایگزینی هر دنباله از اعداد طبیعی یک مجموعه است. با استفاده از اصل تصریح می‌توان نشان داد که $\mathbb{R}$ یک مجموعه است.

تمرین ۸.۱۰. فرض کنید (a, b) و (c, d) دو بازه‌ی ناتهی باشند. با پیدا کردن یک تابع یک به یک و پوشا، نشان دهید که $(a, b) \cong (c, d)$.

تمرین ۹.۱۰. با استفاده از تمرین قبل نشان دهید که اگر X, Y دو مجموعه‌ی با اندازه‌ی برابر با اندازۀ $\mathbb{R}$ باشند که با هم اشتراکی ندارند، آنگاه $X \cup Y$ نیز هم‌توان با $\mathbb{R}$ است.

۵.۱۰ تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی

در قسمت قبل، نشان دادیم که مجموعه‌های ناشمارا وجود دارند و مجموعه‌ی اعداد حقیقی یکی از آنهاست. در این بخش می‌خواهیم به بررسی این نکته بپردازیم که مجموعه‌ی اعداد حقیقی، از مجموعه‌ی اعداد طبیعی چقدر بزرگتر است.

نخست به این نکته توجه کنید که تعداد دنباله‌های به طول شمارا، ساخته شده از دو عدد ۰ و ۱ ناشماراست. این گفته را می‌توان به راحتی با استفاده از برهان قطری کانتور اثبات کرد:

تمرین ۱۰.۱۰. با برهان قطری کانتور، نشان دهید که تعداد دنباله‌های به صورت

$$a_0 a_1 a_2 \ldots$$

که در آن $a_i \in \{0, 1\}$ ناشماراست.

دقت کنید که هر دنباله ساخته شده با صفر و یک چیزی شبیه به دنباله‌ی زیر است:

$$0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \ldots$$

پس هر چنین دنباله‌ای، در واقع، تصویرِ یک تابعِ $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ است که به صورت

$$f(0), f(1), f(2), \ldots$$

نوشته شده است. پس نتیجه می‌گیریم که

تمرین ۱۱.۱۰. نشان دهید که تعداد توابعِ $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ دقیقاً برابر با تعداد دنباله‌های شمارای ساخته‌شده از صفر و یک است.

مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ را با $2^{\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم. پس تا اینجا دیدیم که اندازه‌ی مجموعه‌ی $2^{\mathbb{N}}$ برابر است با تعداد دنباله‌های به طول شمارای ساخته شده از ۰ و ۱.

هر عدد حقیقی دارای یک بسط شمارا در مبنای دو است. پس هر عدد حقیقی، در مبنای ۲، در واقع دنباله‌ای شمارا از ۰ و۱ است. بنابراین: تعداد اعداد حقیقی= تعداد دنباله‌های شمارای ساخته‌شده از صفر و یک = تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به $\{0, 1\}$ = اندازه‌ی مجموعه‌ی $2^{\mathbb{N}}$.

قضیه ۲۰.۱۰. اندازه‌ی $P(\mathbb{N})$، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$، برابر است با اندازه‌ی مجموعه‌ی $2^{\mathbb{N}}$، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی توابع از $\mathbb{N}$ به $\{0, 1\}$. به بیان دیگر

$$P(\mathbb{N}) \cong 2^{\mathbb{N}}.$$

اثبات. باید یک تابع یک و پوشای h را از $P(\mathbb{N})$ به $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ تعریف کنیم. تابع h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: فرض کنید $A \in P(\mathbb{N})$ یعنی $A \subseteq \mathbb{N}$. قرار است $h(A)$ خودْ تابعی از $\mathbb{N}$ به $\{0,1\}$ باشد. تابع $h(A)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$h(A)(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

بررسی کنید که تابع h یک به یک و پوشاست. دوباره یادآوری می‌کنم که h مجموعه‌ی A را به تابعِ $h(A)$ می‌برد و تابع $h(A)$ به صورت بالاست. $\square$

در واقع تابع بالا نیز برای تعیین زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ به این صورت عمل کرده است که اگر بخواهیم عضوی در مجموعه‌ی مورد نظر باشد، آن را با ۱ و در غیر این صورت با ۰ مشخص کرده‌ایم. برای مثال در شکل زیر، یکی از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ را مشخص کرده‌ایم:

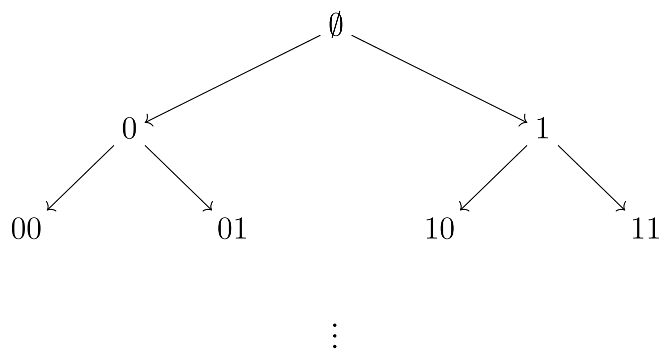
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{array}$$

بنا به قضیه‌ی بالا و آنچه پیش از آن گفته شد:

اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی = تعداد زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ = اندازه‌ی مجموعه‌ی $2^{\mathbb{N}}$.

اندازه‌ی مجموعه‌ی $2^{\mathbb{N}}$ را با $2^{\aleph_0}$ نشان می‌دهیم. پس اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی، برابر است با $2^{\aleph_0}$.

دقت کنید که یک روش مشاهده‌ی همه‌ی دنباله‌های شمارای ساخته شده از ۰ و۱ استفاده از یک درخت دودوئی به صورت زیر است:



هر شاخه‌ی درخت بالا (البته اگر آن را تا آخر ادامه بدهید!) نشان دهنده‌ی یک دنباله شمارا از $0,1$ است. پس تعداد شاخه‌های این درخت برابر است با $2^{\aleph_0}$.

دقت کنید که اگر مجموعه‌ای متناهی و دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^n است که اکیداً از n بیشتر است. در بالا ثابت کردیم که اگر مجموعه‌ای شمارا عضو داشته باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایش $2^{\aleph_0}$ است. در بخش بعدی خواهیم دید که روی کاردینالها ترتیبی وجود دارد که با آن ترتیب، $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

شاید از خود بپرسید که تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ اعداد طبیعی چقدر است. در ادامه تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ $\mathbb{N}$ را محاسبه می‌کنیم.

تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی $\mathbb{N}$ برابر با $\aleph_0$ است. در قسمت قبلی نشان دادیم که اگر X, Y شمارا باشند، آنگاه $X \times Y$ شماراست. پس $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست. از طرفی تعداد زیرمجموعه‌های دوعضویِ $\mathbb{N}$ از اندازه‌ی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ کوچکتر است. پس این تعداد نیز حداکثر شماراست. همچنین تعداد زیرمجموعه‌های n عضویِ $\mathbb{N}$ از اندازه‌ی $\mathbb{N}^n$ کمتر است، پس حداکثر شماراست.

از طرفی مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ برابر با مجموعه‌ی زیر است:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{زیرمجموعه‌های } n \text{ عضویِ } \mathbb{N}$$

یعنی اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست. پس

قضیه ۲۱.۱۰. تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ $\mathbb{N}$ شماراست.[۹]

تمرین ۱۲.۱۰. نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ $\mathbb{N}$ برابر است با تعداد دنباله‌های با طول متناهی ساخته شده از ۰ و ۱.

تمرین ۱۳.۱۰. نشان دهید که تعداد گره‌های درخت بالا شماراست. آیا این عجیب نیست که تعداد شاخه‌های درخت دودوئی نامتناهی از تعداد گره‌های آن بیشتر است؟

تمرین ۱۴.۱۰. نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهیِ $\mathbb{N}$ شمارا **نیست**.

مثال ۲۲.۱۰. مجموعه‌ی $\mathbb{Q}^c$ (اعداد گنگ) ناشماراست.

اثبات. اگر $\mathbb{Q}^c$ شمارا باشد آنگاه $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ شماراست که این تناقض است. $\lightning$ $\square$

تمرین ۱۵.۱۰. فرقِ میانِ دو نمادِ $2^{\aleph_0}$ و $2^{\mathbb{N}}$ چیست؟

۶.۱۰ پیوست؛ مسئلهٔ توقف و ناتمامیت اول گودل

در بخشِ ۴.۱۰ برای اثباتِ ناشمارا بودن مجموعهٔ متشکل از تمام دنباله‌های شمارای ساخته شده از ۰ و۱ از «برهان قطری کانتور» استفاده کردیم. در این بخش دربارهٔ دو کاربرد مهم این برهان سخن خواهیم گفت.

یکی از مسائل معروف در علوم رایانه‌ی نظری، مسئله‌ی توقف است. بنا بر این مسئله، هیچ الگوریتمی وجود ندارد که همزمان توقف و عدم توقف همه‌ی الگوریتمهای رایانه‌ای را تعیین کند. پیش از ورود به توضیح و اثبات این قضیه، کمی دربارهٔ مفهوم کلمهٔ الگوریتم در ریاضیات سخن گفته‌ایم.

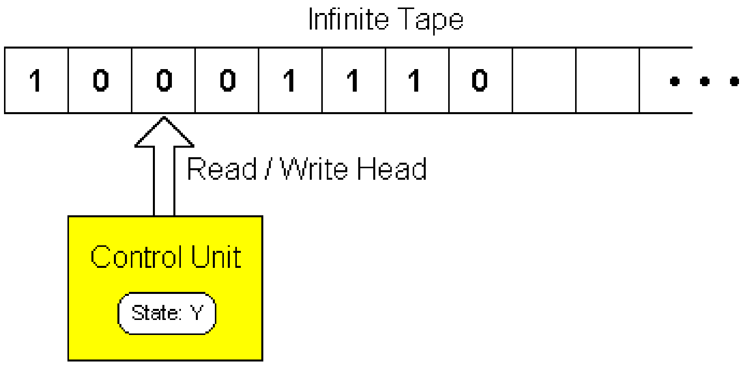
۱.۶.۱۰ تعریف الگوریتم

معمولاً هر فردی با حداقل دانش رایانه‌ای، درکی از مفهوم «الگوریتم» دارد؛ هر الگوریتمی یک شروع و پایان دارد، چند خط دستور دارد و می‌تواند از یک خطِ دستور، به یک خط دیگرِ دستور برود، می‌تواند دارای حلقه‌های IF، FOR و غیره باشد، ممکن است به ازای یک ورودی روی «دور» یا «تسلسل» بیفتد و «متوقف» نشود، یا ممکن است به ازای یک ورودی، دستورات خواسته شده را به انجام برساند و با تحویل دادن یک خروجی مناسب متوقف شود.

[۹] البته استدلالی که در بالا ارائه شد، ناقص است. فعلا هدفهم تنها دادن شهود است.

اما در ریاضیات، الگوریتم باید دقیق تعریف شود. برای این تعریف دو روش وجود دارد که به ما نحو مختصری آنها را توضیح داده‌ایم. یک منبع مناسب برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه، کتابِ [۱] است.

در روش اول، یک رایانهٔ فرضی خیلی ساده به نام «ماشین تورینگ» معرفی می‌شود که «مدل فرضی» همهٔ رایانه‌هاست. این رایانه، یک نوار طولانی است که روی هر خانهٔ آن، می‌تواند یک علامت ۰ یا یک علامت ۱ قرار بگیرد. یک «هد» بالای این نوار وجود دارد و می‌تواند نوار را بخواند، خانه‌ای را پاک کند، از خانه‌ای به یکی از خانه‌های بغلی حرکت کند، صفر را به یک تبدیل کند و یک را به صفر. هر کاری که این ماشین قادر به انجامش باشد «یک الگوریتم» نامیده می‌شود. مثلاً برای اجرای جمع دو عدد توسط این ماشین، لازم است که به نحوی این دو عدد به صورت دنباله‌های صفر و یک روی نوار وارد شوند و با دستورات مناسبی، صفر و یکهایی روی نوار چاپ شود که نشان دهنده حاصل جمع دو عدد مورد نظر است:



روش دوم تعریف الگوریتم، ریاضی‌وارتر است. در این روش، هر الگوریتم، اساساً یک تابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ در نظر گرفته می‌شود که این تابع، با استفاده از یک سری توابع ساده، و با قوانینی برای ترکیب این توابع ساده به دست آمده است. برای مثال، استفاده از توابعِ جمع، تابع ثابتِ صفر و ترکیب توابع در این ساخت مجاز است. همچنین اگر f یک تابع باشد که با این قوانین ساده ساخته شده است، تابع $g(x)$ که یک مقدار x را می‌گیرد و اولین عدد طبیعیِ y را تحویل می‌دهد که $f(y) = 0$ جزو توابع مجاز ما در این ساخت است. توابعی که با این روش به دست می‌آیند، توابع «بازگشتی» نامیده می‌شوند. پس در این تعریف، هر الگوریتم یک «تابع بازگشتی» است.

قضیهٔ مهمی در علوم رایانهٔ نظری، به نامِ «تزِ چرچ» این دو تعریف را به هم مرتبط می‌کند. بنا به این قضیه، هر کاری که ماشین تورینگ انجام می‌دهد، دقیقاً قابل پیاده سازی توسط یک تابع بازگشتی است و نیز عملِ هر تابع بازگشتی را می‌توان توسط یک ماشین تورینگ اجرا کرد. [۱۰]

۷.۱۰ مسئلهٔ توقف و اثباتِ آن

بنا به آنچه در زیربخش قبلی گفته شد، در ادامهٔ بحث، هر الگوریتم رایانه‌ای را یک تابع از اعداد طبیعی به اعداد طبیعی در نظر گرفته‌ایم. پس ورودی هر الگوریتم رایانه‌ای، یک عدد طبیعی است. همچنین اگر f یک الگوریتم

---

[۱۰] برای آشنایی بهتر با این مفاهیم می‌توانید فیلمهای کلاس منطق مرا مشاهده کنید:
https://www.aparat.com/v/Rucfm?playlist=295290
https://www.aparat.com/v/ebmrK?playlist=295290
https://www.aparat.com/v/05gRF?playlist=295290

رایانه‌ای باشد و ورودیِ n را بدان بدهیم، دو حالت وجود دارد: یا این الگوریتم متوقف می‌شود و جواب مورد نظر ما را می‌دهد، یا این که این الگوریتم روی دور می‌افتد و هیچگاه متوقف نمی‌شود. [۱۱] گفتیم که مسئلهٔ توقف، به این سوال می‌پردازد که آیا الگوریتمی وجود دارد که به نحوی دربارهٔ همهٔ الگوریتمها تصمیم بگیرد؟ یعنی تعیین کند که کدام الگوریتم با کدام ورودی‌ها می‌ایستد و با کدام ورودی‌ها نمی‌ایستند (یعنی روی دور می‌افتد؟)

دقت کنید که تعداد همه‌ی الگوریتمها شماراست. این گفته از نحوهٔ ساخت الگوریتمها با استفاده از توابع بازگشتی ناشی می‌شود. فرض کنید $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ فهرستی از همه‌ی الگوریتمهای رایانه‌ای باشد. همچنین فرض کنید که پاسخ مسئلهٔ توقف مثبت باشد؛ یعنی الگورتیمی وجود داشته باشد که تعیین کند کدام الگوریتمها با کدام ورودیها می‌ایستند و کدامها نمی‌ایستند.

می‌خواهیم یک الگوریتم تازه معرفی کنیم. الگوریتمِ f را در نظر بگیرید که ورودی‌های آن اعداد طبیعی هستند و به صورت زیر خروجی می‌دهد:

$$f(i)=\begin{cases} STOP & \text{اگر الگوریتم } f_i \text{ با دریافت ورودی } i \text{ روی دور بیفتد}\\ LOOP & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

دقت کنید که f با تک‌تکِ الگوریتمهای فهرست شده فرق دارد. زیرا اگر الگوریتمِ i ام با ورودی i بایستد، f با این ورودی نمی‌ایستد. از طرفی خودِ f یک الگوریتم است؛ پس باید در فهرست بالا ظاهر شود؛ و این غیرممکن است.

بحث را به صورت زیر نیز می‌شد بیان کرد. اگر الگوریتم f اگر در لیست بالا ظاهر شده باشد، مثلاً به عنوان الگوریتم شماره‌ی j ظاهر می‌شود. پس این الگوریتم در ورودی j می‌ایستد اگروتنهااگر روی دور بیفتد! بنابراین پاسخ مثبت داشتنِ مسئلهٔ توقف منجر به تناقض می‌شود.

۱.۷.۱۰ ناتمامیت اول

در بخشِ ۴ با مجموعهٔ اعداد طبیعی و اعمال روی آن آشنا شدیم. مجموعهٔ اعداد طبیعی به همراه اعمالِ جمع و ضربِ روی آن، یک ساختار مرتبهٔ اول است که در الفبایی دارای علائمِ $+$ و $\cdot$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این مطالعه، نخست یک سری «اصول موضوعه» در این الفبا، برای ساختارِ یادشده نوشته می‌شود. این اصول موضوعه، اصول «پئانو» نام دارند. در میان اصول موضوعهٔ یادشده، که قصد فهرست کردن آنها را در اینجا نداریم جملاتی نوشته شده‌اند که ویژگی‌های توابع جمع و ضرب را بیان می‌کنند؛ مثلاً جملهٔ زیر یکی از اصول موضوعهٔ پئانو است:

$$\forall x,y,z \quad x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$

علاوه بر جملاتی که ویژگی‌های طبیعی جمع و ضرب را بیان می‌کنند، اصول موضوعهٔ استقراء نیز در پئانو قرار داده می‌شود. هر اصل موضوعهٔ استقراء، جمله‌ای به صورت زیر است:

$$\big(p(0)\wedge\forall x(p(x)\to p(x+1))\big)\to\forall x\quad p(x)$$

که در آن $p(x)$ یک جملهٔ مرتبهٔ اول است که در الفبای شامل علامت جمع و ضرب نوشته شده است. به بیان دیگر، لازم است فهرستی از تمام جملاتِ $p(x)$ تهیه شود و به ازای هر کدام از آنها، یک اصل موضوعه به صورت بالا نوشته شود که استقراء را برای حکمِ جملهٔ $p(x)$ بیان کند.

[۱۱] پس بهتر می‌گفتیم هر الگوریتم، یک تابع جزئی است؛ یعنی برخی نقاط طبیعی جزو دامنهٔ آن نیستند زیرا تابع برای محاسبهٔ آنها روی دور می‌افتد.

اصول موضوعهٔ پئانو در یک زبان مرتبهٔ اول نوشته شده‌اند و برخی ویژگی‌های ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ را بیان می‌کنند. اما همان طور که در بخشِ منطق مرتبهٔ اول، ۲، دیدیم، برای یک مجموعه از جملات، جهانهای ذهنی مختلفی وجود دارند که این جملات را بتوان در آنها نیز تعبیر کرد. بنابراین احتمالاً ساختارهای گوناگونی به صورت $(\mathbb{M}, +^{\mathbb{M}}, \cdot^{\mathbb{M}})$ وجود دارند که در تمامی آنها اصول پئانو برقرار است.

حال، بنا به قضیهٔ تمامیت گودل، اگر حکمی از اصول موضوعه پئانو استنتاج شود، به طور همزمان در همهٔ این ساختارها درست است و هر چه که به طور همزمان در همهٔ این ساختارها درست باشد، برایش اثباتی با استفاده از اصول موضوعهٔ پئانو وجود دارد.

اما یک سوال جالب توجه این است: آیا اصول موضوعهٔ پئانو، به طور کامل همهٔ حقایق مربوط به ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ را اثبات می‌کند؟ به بیان دیگر، آیا عبارت زیر درست است:

> هر حکمی مانند φ در مورد ساختارِ آشنای اعداد طبیعی، یعنی $(\mathbb{N}, +, \cdot)$، درست است اگروتنها اگر از اصول موضوعهٔ پئانو نتیجه شود.

نحوهٔ دیگر بیان جملهٔ بالا به صورت زیر است:

> هر حکمی مانند φ در مورد ساختار اعداد طبیعی، یعنی $(\mathbb{N}, +, \cdot)$، درست است اگروتنهااگر همزمان در مورد همهٔ ساختارهای $(\mathbb{M}, +^{\mathbb{M}}, \cdot^{\mathbb{M}})$ که در آنها اصول پئانو برقرار است، درست باشد.

هنوز هم مایلیم بیان عبارت بالا را کمی تغییر دهیم. دقت کنید که اصول موضوعه پئانو را می‌توانیم به نحوی «کُد» کنیم. معنای کد کردن این است که به نحوی به هر جمله یک عدد طبیعی نسبت دهیم که وقتی آن عدد طبیعی به ما داده شود، بتوانیم جملهٔ مربوطه را بنویسیم.

حال فرض کنید که h یک الگوریتم باشد که کدهای اصول موضوعه پئانو را به همراه همهٔ نتایج آنها چاپ می‌کند. پیدا کردن چنین الگوریتمی کار دشواری نیست. زیرا عمل استنتاج در منطق، یک کار ماشینی است پس می‌توان از الگوریتم ماشینی انتظار داشت که استنتاج را انجام دهد و نتایج آن را چاپ کند. بنا بر این عبارت مورد نظر ما را به صورت در می‌آید:

> هر حکمی مانند φ در مورد اعداد طبیعی درست است اگروتنهااگر در خروجی‌های الگوریتم h چاپ شود. $(*)$

عبارت بالا نادرست است و البته این نادرستی در حیطهٔ «قضیهٔ ناتمامیت اول گودل» قرار می‌گیرد. در زیر نحوهٔ اثبات این پاسخ منفی را توضیح داده‌ایم.

گفتیم که هر الگوریتم در واقع یک تابع بازگشتی است، بنابراین منطقی است که بتوان محتوای اطلاعات چنین تابعی را با استفاده از اعمال جمع و ضرب بیان کرد. در واقع چیزی خیلی بیش از این درست است:

قضیه ۲۳.۱۰. یک جملهٔ $\varphi(n,m)$ وجود دارد که تنها با استفاده از علائم جمع و ضرب نوشته شده است و بیانگر عبارت زیر است:

> الگوریتمِ شمارهٔ n هنگامی که عددِ m را به عنوان ورودی دریافت می‌کند، می‌ایستد.

اگر عبارتِ $(*)$ درست باشد، الگوریتمِ h می‌تواند تعیین کند که کدام $\varphi(n,m)$ ها برقرارند و کدام برقرار نیستند؛ در واقع هر جملهٔ $\varphi(n,m)$ اگر در مورد اعداد طبیعی درست باشد در خروجی الگوریتم h چاپ می‌شود

و اگر مورد اعداد طبیعی غلط باشد، نقیضش در خروجی h چاپ می‌شود. اما این یک تناقض است؛ زیرا در این صورت الگوریتم h یک پاسخ مثبت به مسئلهٔ توقف است. [۱۲]

۸.۱۰ تمرینهای تکمیلی

تمرین ۱۶.۱۰. نشان دهید که اگر A متناهی باشد، آنگاه هر زیرمجموعه از A نیز متناهی است.

تمرین ۱۷.۱۰. فرض کنید که $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد به طوری که $\bigcup A_i$ شمارا نیست. نشان دهید که حداقل یکی از A_i ها ناشماراست.

تمرین ۱۸.۱۰. نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد طبیعی را می‌توان به صورت اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارای دو به دو مجزا نوشت؛ به بیان دیگر $\mathbb{N}$ شامل نامتناهی کُپی از خود است.

تمرین ۱۹.۱۰. آیا می‌توان مجموعهٔ اعداد حقیقی را به صورت اجتماع ناشمارا بازهٔ باز که هیچ‌کدام با هم اشتراک ندارند نوشت؟

تمرین ۲۰.۱۰. نشان دهید که تعداد اعداد اصم موجود در بازه‌ی ناتهی (a,b) به اندازه‌ی کل اعداد حقیقی است.

تمرین ۲۱.۱۰. نشان دهید که تعداد نقاط روی یک دایره برابر با تعداد اعداد حقیقی است.

تمرین ۲۲.۱۰. نشان دهید که تعداد نقاط داخل و روی یک مربع برابر با تعداد نقاط روی یک ضلع آن است.

خلاصهٔ فصل دهم. یک مجموعه، نامتناهی است هرگاه با هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای همتوان نباشد. با استفاده از اصل انتخاب، می‌توان ثابت کرد که یک مجموعه نامتناهی است اگروتنهااگر با بخشی از خودش همتوان باشد.

مجموعه‌هایی که با مجموعهٔ اعداد طبیعی هم‌توان هستند، شمارا نامیده می‌شوند. مجموعهٔ متشکل از تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اعداد طبیعی، شمارا نیست. به طور کلی مجموعه‌ها از لحاظ اندازه به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

$$\text{مجموعه‌ها}\begin{cases}\text{متناهی}\\ \text{نامتناهی}\begin{cases}\text{شمارا} & \cong\mathbb{N}\\ \text{ناشمارا} & \ncong\mathbb{N}\end{cases}\end{cases}$$

اندازهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی برابر با تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی است.

[۱۲] اثبات قضیهٔ ناتمامیت اول را می‌توانید در [۳] و [۱۰] مشاهده کنید. در فیلم زیر نیز، به زبان انگلیسی خلاصه‌ای از مطالب این پیوست قابل مشاهده است:

https://www.aparat.com/v/s9iUm

همچنین در فیلم زیر از کلاس منطق نیز اثبات این قضیه را می‌توانید مشاهده کنید:

https://www.aparat.com/v/lSBqa?playlist=295290

فصل ۱۱

ترتیب کاردینالها

یکی را از وزرا پسری کودن بود. پیش یکی از دانشمندان فرستاد که مرین را تربیتی می‌کن مگر که عاقل شود. روزگاری تعلیم کردش و مؤثر نبود. پیش پدرش کس فرستاد که این عاقل نمی‌شود و مرا دیوانه کرد.
چون بود اصل گوهری قابل
تربیت را در او اثر باشد
هیچ صیقل نکو نداند کرد
آهنی را که بدگهر باشد
خرِ عیسی گرش به مکه برند
چون بیاید هنوز خر باشد!
گلستان سعدی (با کمی حذف).

۱.۱۱ مرور تعاریف

در فصل قبل، مفهوم همتوانی مجموعه‌ها را تعریف کردیم. گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان می‌خوانیم، و این را به صورت $X \cong Y$ نشان دادیم، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد. همتوانی، هم‌اندازه بودن، یا هم‌کاردینال بودن هر سه اشاره به یک واقعیت دارند و در صورتی که دو مجموعه‌ی X, Y همتوان باشند از هر سه نماد زیر می‌توانیم استفاده کنیم: $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$، یا $|X| = |Y|$ یا $X \cong Y$. گفتیم که یک مجموعه‌ی دلخواهِ X را **متناهی** می‌نامیم هرگاه همتوان با یک مجموعه‌ی $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ باشد؛ یعنی هرگاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که $X \cong \{0, 1, \ldots, n\}$. همچنین یک مجموعه‌ی دلخواهِ X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه با هیچ $n \in \mathbb{N}$ همتوان نباشد؛ به بیان دیگر هرگاه متناهی نباشد.

رابطه‌ی $\cong$ روی مجموعه‌ها، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؛ [1] پس کلاس همه‌ی مجموعه‌ها را افراز می‌کند. پس $X \cong Y$ در واقع بدین معنی است که X, Y در یک کلاس هم‌ارزی نسبت به رابطه‌ی هم‌توانی قرار دارند. به هر کلاس در این رابطه‌ی هم‌ارزی، یک کاردینال، یا یک **عدد اصلی** گفته می‌شود. کاردینالها را معمولاً با حروفی مانند $\kappa, \lambda, \alpha, \ldots$ نشان می‌دهیم. گفتیم که کلاس همه‌ی مجموعه‌های شمارا را با $\aleph_0$ نشان می‌دهیم. پس مجموعه‌ی X

[1] این گفته شاید دانشجوی دقیق را گیج کند. روابط هم‌ارزی را روی مجموعه‌ها تعریف کردیم ولی کلاس همه‌ی مجموعه‌ها مجموعه نیست که روی آن رابطه‌ی هم‌ارزی تعریف کنیم. با این حال این مشکل به راحتی قابل حل است: اولا می‌توان روی کلاسها رابطه‌ی هم‌ارزی تعریف کرد. ثانیاً می‌توان روی بخشی از مجموعه‌های مورد نیازمان این رابطه را تعریف کنیم تا مجموعه بودن از میان برداشته نشود.

شماراست هرگاه

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_0.$$

همچنین گفتیم که می‌توانیم برای اشارهٔ به کلاس کاردینالی یک مجموعهٔ X از نمادِ $\mathbf{card}(X)$ استفاده کنیم.

روی اعداد اصلی (کاردینالها)، تساوی، جمع، ضرب، توان و رابطه‌ی ترتیب نیز تعریف می‌شود. در این بخش، تنها به رابطه‌ی تساوی و ترتیب میان کاردینالها پرداخته‌ایم، ولی در فصل بعدی سایر اعمال روی کاردینالها را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

تعریف ۱.۱۱. فرض کنید که α, β, γ سه کاردینال باشند. پس مجموعه‌های X, Y, Z وجود دارند، به طوری که $\alpha = \mathbf{card}(X)$، $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $\gamma = \mathbf{card}(Z)$.

۱. می‌گوییم $\alpha = \beta$ هرگاه $X \cong Y$. به بیان دیگر، می‌گوییم $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$ هرگاه تابعی یک به یک و پوشا میان X, Y موجود باشد.

۲. می‌گوییم $\alpha \leqslant \beta$ یا $\mathbf{card}(X) \leqslant \mathbf{card}(Y)$ هرگاه تابعی یک به یک از X به Y موجود باشد.

تمرین ۱.۱۱. نشان دهید که اگر $\alpha = \beta$ و $\gamma = \beta$ آنگاه $\alpha = \gamma$.

تمرین ۲.۱۱. نشان دهید که اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ آنگاه $\alpha \leq \gamma$.

۲.۱۱ ترتیب کاردینالها، قضایای کانتور و شِرودر برنشتاین

بنا به آنچه در قسمت قبل، درباره‌ی ترتیب کاردینالها گفتیم، به سادگی می‌توان دید که برای هر کاردینالِ متناهیِ n داریم

$$n \lneqq \aleph_0.$$

تمرین نسبتاً ساده‌ی زیر بیان می‌کند که در واقع کاردینالهای کمتر از الف‌صفر، همان اعداد طبیعی هستند.

تمرین ۳.۱۱. فرض کنید که a یک کاردینال باشد به گونه‌ای که $a \lneqq \aleph_0$. نشان دهید که a یک کاردینال متناهی است.

قضیه ۲.۱۱. $\aleph_0$ کوچکترین کاردینال نامتناهی است. به بیان دیگر اگر a یک کاردینال نامتناهی باشد آنگاه $\aleph_0 \leq a$.

اثبات. فرض کنید a یک کاردینال نامتناهی باشد و $a = \mathbf{card}(X)$. بنا به قضیه‌ی ۵.۱۰ یک مجموعه‌ی $Y \subseteq X$ موجود است به طوری که $Y = \{y_0, y_1, \ldots\}$. بنابراین تابعی یک به یک از $\mathbb{N}$ به X موجود است که هر عدد طبیعیِ n را به y_n می‌برد؛ و این گفته دقیقاً هم‌معنی با $\aleph_0 \leq a$ است. $\square$

شاید لازم به یادآوری باشد که در اثبات قضیه‌ی بالا نیز از اصل انتخاب استفاده شده است. بنا بر آنچه تا اینجا دیده‌ایم، $\aleph_0$ کاردینال عجیبی است؛ زیرا از همه‌ی کاردینالهای متناهی اکیداً بزرگتر است، و هر کاردینال که از آن اکیداً کوچکتر باشد، متناهی است. پس مثلاً هیچ کاردینالی وجود ندارد که یک واحد از الف‌صفر کمتر باشد و الف‌صفر بلافاصله پس از آن بیاید. از طرفی الف‌صفر از همه‌ی کاردینالهای نامتناهی کمتر است. در واقع الف‌صفر کوچکترین کاردینال نامتناهی است. پس

$$0 \lneqq 1 \lneqq 2 \lneqq \ldots \lneqq \aleph_0.$$

در بخش قبلی ثابت کردیم که اگر به الف‌صفر یک عنصر اضافه کنیم، اندازه‌ی آن بیشتر نمی‌شود، هم چنین دیدیم که اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا شماراست و حاصلضرب دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست پس:

$$0 \lneq 1 \lneq 2 \lneq \ldots \lneq$$
$$\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2 = \ldots = \aleph_0 + n = \ldots$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \ldots \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = \ldots \underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0}_{n \text{ مرتبه}} = \ldots$$
$$\ldots = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0 + 1 = \aleph_0 \times \aleph_0 + 2 = \ldots$$

تلاشمان برای پیدا کردن کاردینالهای بزرگتر بی‌نتیجه بود تا این که به مجموعه‌ی $2^{\mathbb{N}}$ رسیدیم که گفتیم اندازهٔ آن را با $2^{\aleph_0}$ نشان می‌دهیم. واضح است که

تمرین ۴.۱۱. نشان دهید که $\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0}$.

همچنین با برهان قطری کانتور نشان دادیم که $\aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}$ پس $\aleph_0 \lneq 2^{\aleph_0}$. دوباره اتفاق عجیبی در حال رخ دادن است. هر چه تلاش می‌کنیم به الف‌صفر عنصر اضافه کنیم اندازه‌ی آن تغییر نمی‌کند، ولی از طرفی می‌دانیم که $2^{\aleph_0}$ از $\aleph_0$ بیشتر است! یک سوال طبیعی این است که آیا کاردینالی وجود دارد که از $\aleph_0$ اکیداً بزرگتر باشد و از $2^{\aleph_0}$ اکیداً کمتر باشد؟ یکی از فرضیه‌های معروف در نظریه‌ی مجموعه‌ها، فرضیه‌ی پیوستار است که می‌گوید بین الف‌صفر و $2^{\aleph_0}$ هیچ اندازه‌ای وجود ندارد:

(فرضیهٔ پیوستار) عددی بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ وجود ندارد.

دقت کنید که فرضیهٔ پیوستار، یک جملهٔ مرتبهٔ اول است که می‌توان آن را در زبانِ نظریهٔ مجموعه‌ها نوشت؛ البته تحقیق این گفته نیاز به تأمل دارد. در منطق ریاضی اثبات می‌شود که فرضیهٔ پیوستار از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها مستقل است؛ یعنی هیچ اثباتی برای آن با استفاده از اصول موضوعهٔ ZFC وجود ندارد و همچنین هیچ اثباتی برای نقیض آن با استفاده از اصول موضوعهٔ ZFC وجود ندارد. به بیان دیگر، اگر جهانی از مجموعه‌ها وجود داشته باشد، جهانهایی از مجموعه‌ها وجود دارند که در آنها فرضیهٔ پیوستار درست است و جهانهایی از مجموعه‌ها وجود دارند که در آنها فرضیهٔ پیوستار غلط است. پیدا کردن جهانی که در آن فرضیهٔ پیوستار درست یا غلط باشد با روشی در نظریهٔ مجموعه‌ها به نام «فرسینگ» صورت می‌پذیرد. [۲] معمولاً در ریاضیات پیشرفته، برخی قضایا را با شرط درست بودن یا غلط بودنِ فرضیهٔ پیوستار در جهان نظریه‌ی مجموعه‌هامان ثابت می‌کنیم. در مورد استقلال قضایا از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها در فصلِ ۴.۱۴ بیشتر سخن گفته‌ایم.

شاید برای علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی، جالب باشد که که رویکرد کانتور به نامتناهی‌ها و مقایسه‌ی آنها با هم، در میان همعصرانش بسیار مطرود بود. وی سالهای پایانی عمر خود را، غرق در مشکلات روحی، صرف پرداختن به فرضیه‌ی پیوستار کرد.

اکنون و پس از این مقدمهٔ نسبتاً طولانی، به موضوع مورد نظرمان در این بخش رسیده‌ایم. می‌خواهیم بدانیم که ترتیب کاردینالها، چه شباهتهایی با ترتیب میان اعداد طبیعی دارد. نخستین انتظار ما از ترتیب، ویژگی زیر است؛ که ترتیبهای آشنا مثل ترتیب اعداد طبیعی مشخصاً آن را دارا هستند.

برای هر n و m اگر $(n \leqslant m) \wedge (m \leqslant n)$ آنگاه $m = n$.

[۲] کتابِ [۶] منبع خوبی برای فرسینگ است.

در واقع عبارت بالا، امری است که به صورت طبیعی از یک «ترتیب» انتظار داریم؛ پس طبیعی است که از خود بپرسیم که:

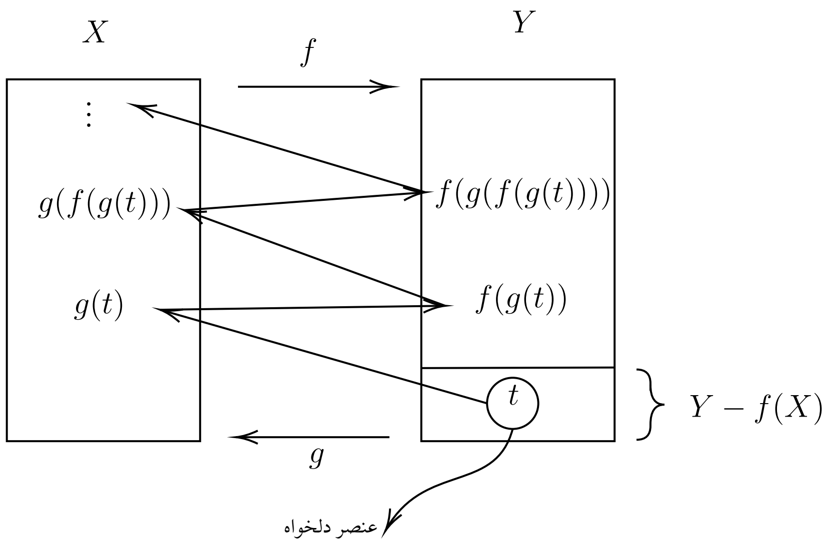
> آیا مشابه عبارت بالا برای ترتیب کاردینالها هم برقرار است؟ یعنی اگر $\mathbf{card}(X) \leqslant \mathbf{card}(Y)$ و $\mathbf{card}(Y) \leqslant \mathbf{card}(X)$ آیا لزوماً $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$؟

آنچه در سؤال بالا پرسیده شده است، بیان دیگری از قضیه‌ی زیر است:

قضیه ۳.۱۱ (شرودر ـ برنشتاین)**.** فرض کنید یک تابع یک به یک از X به Y موجود باشد و یک تابع یک به یک از Y به X موجود باشد. آنگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود است.

برای قضیه‌ی کانتور برنشتاین اثباتهای مختلفی وجود دارد که می‌توانید آنها را صفحه‌ی ویکی‌پدیای فارسی بیابید. در اینجا سعی کرده‌ام اثباتی را بیاورم که قابل فهمتر باشد. [۳] این قضیه، یکی از مهمترین قضایائی است که در این درس ثابت کرده‌ایم.

اثبات. اگر X و Y متناهی و به ترتیب دارای اندازه‌های m و n باشند، باشند، آنگاه وجود تابع یک به یک از X به Y معادلِ $m \leq n$ و وجود تابع یک به یک از Y به X معادل $m \leq n$ است. از این دو نتیجه می‌شود که $m = n$.
این که یکی متناهی باشد و دیگری نامتناهی ممکن نیست، زیرا از یک مجموعه‌ی نامتناهی نمی‌توان تابعی یک‌به‌یک به یک مجموعه‌ی متناهی تعریف کرد.
پس فرض کنیم ایندو نامتناهی باشند. فرض کنید f تابعی یک به یک از X به Y باشد و g تابعی یک به یک از Y به X باشد.

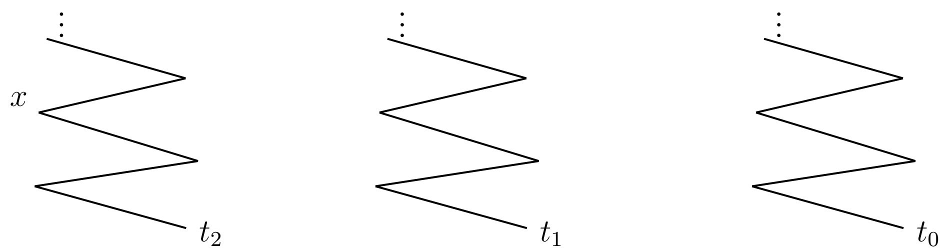


فرض کنید t یک عنصر دلخواهی در $Y - f(X)$ باشد. مطابق شکل بالا، دنباله‌ی زیر را بسازید:

$$t \to g(t) \to f\big(g(t)\big) \to g\Big(f\big(g(t)\big)\Big) \to f\Bigg(g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)\Bigg) \to \dots$$

این کار را برای همه‌ی tهای موجود در $Y - f(X)$ انجام دهید.

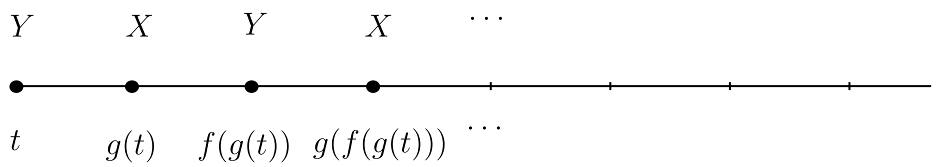
[۳] البته آن صفحه را نیز من نوشته‌ام!



ادعای اول. هر کدام از دنباله‌های نوشته شده در بالا نامتناهی است؛ یعنی از سمت چپ و راست هیچگاه در طولی متناهی متوقف نمی‌شوند.
ادعای دوم. دنباله‌های بالا هیچ اشتراکی با هم ندارند. یعنی جملات سمت چپ یکی با دیگری جملات سمت راست یکی با دیگری اشتراکی ندارد.
فرض کنید ادعاهای اول و دوم هر دو ثابت شده باشند. تابع $h : X \to Y$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{اگر } x \text{ در سمت چپ یکی از دنباله‌های یادشده باشد.} \\ f(x) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

ادعای سوم. تابع h یک به یک و پوشاست.
اثبات ادعای اول.



برای سادگی نشان می‌دهیم که جمله‌ی اول و سوم هیچگاه با هم برابر نیستند. فرض کنید

$$f\big(g(t)\big) = f\Bigg(g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)\Bigg)$$

آنگاه از آنجا که f یک به یک است داریم:

$$g(t) = g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)$$

حال از آنجا که g یک به یک است داریم

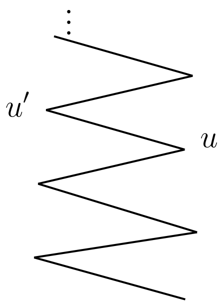
$$\underbrace{t}_{\in Y - f(X)} = \underbrace{f\big(g(t)\big)}_{\in f(X)} \quad \lightning$$

عبارت بالا، تناقض آمیز است. با همین ایده می‌توانید نشان دهید که هیچ دو جمله‌ی واقع در یک طرف یکسان از دنباله‌ی بالا با هم برابر نیستند. ادعای دوم نیز به طور کاملاً مشابه ثابت می‌شود.
اثبات ادعای سوم. می‌خواهیم ثابت کنیم تابع h یک به یک و پوشاست.

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{اگر } x \text{ در سمت چپ یکی از دنباله‌های یادشده باشد.} \\ f(x) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

اثبات پوشابودن. عنصر دلخواه $u \in Y$ را در نظر بگیرید. اگر یک زیگزاک، مشابه شکل زیر، از u بگذرد آنگاه داریم:

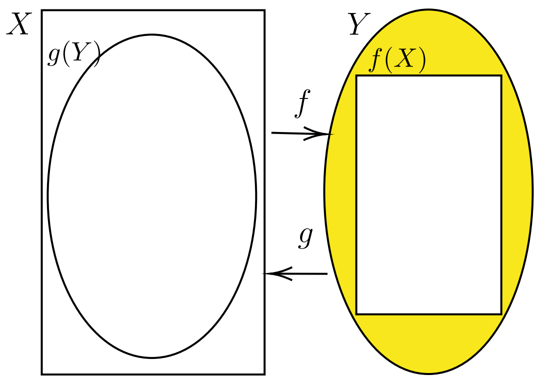
$$u = h(u')$$



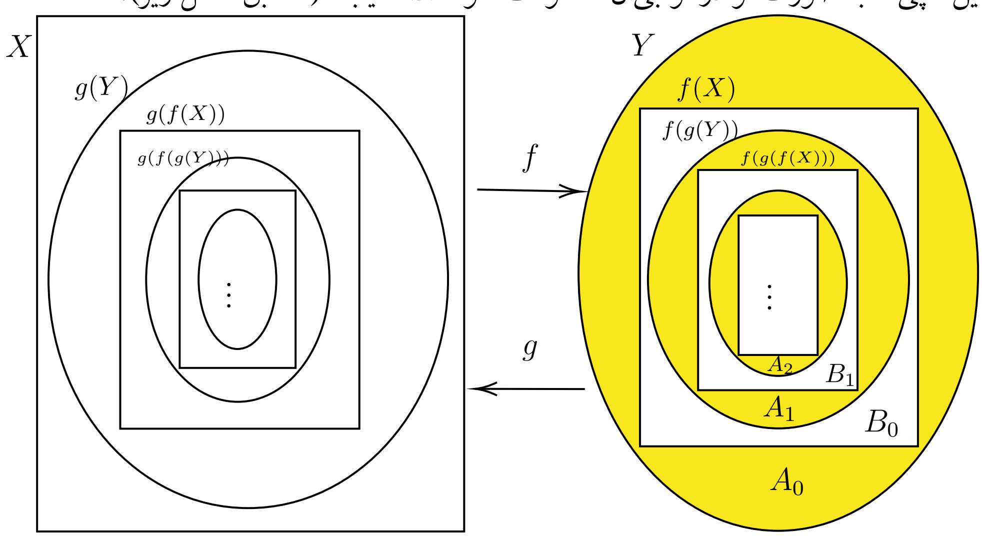
اگر هیچ زیگزاگی از u نگذرد معلوم می‌شود که $u \notin Y - f(X)$؛ زیرا در غیر این صورت u شروع یک زیگزاگ خواهد بود. پس $u \in f(X)$ یعنی $\exists u' \in X \quad f(u') = u$. اثبات یک به یک بودن تابعِ h به عهده‌ی شما. $\square$

اثبات به بیانی دیگر. ایده‌ی اثبات بالا را می‌توان به صورت زیر نیز پیاده کرد (دقت کنید که بیان زیر، برای توفیق در انتقال ایده، به دقیق‌ترین شکل ممکن نوشته نشده است)

مجموعه‌های X و Y را به ترتیب با رنگهای سفید و زرد نشان داده‌ایم. اگر $Y = f(X)$ آنگاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند؛ ولی اگر $Y \neq f(X)$ آنگاه در داخل Y یک کپی از X داریم. به طور مشابه اگر $g(Y) = X$ آنگاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند ولی اگر $X \neq g(Y)$ آنگاه در داخل X یک کپی از Y داریم. به شکل زیر نگاه کنید:



فرض کنید این کپی‌ها به صورت تو در تو بی‌آنکه متوقف شوند ادامه یابند (مطابق شکل زیر).



هدفمان تعریف یک تابع یک‌به‌یک و پوشا به نام h از Y به $f(X)$ است. برای این منظور مجموعه‌های A_i و B_i را به صورتی که در شکل بالا نوشته‌ام، تعریف می‌کنیم.
قرار دهید:

$$h(x) = \begin{cases} h(x) = f(g(x)) & \text{اگر } x \text{ در یکی از } A_i \text{ ها باشد.} \\ x & \text{اگر } x \text{ در یکی از } B_i \text{ ها باشد.} \end{cases}$$

□

قضیه‌ی شرودر برنشتاین به ما می‌گوید که برای دو کاردینالِ α, β اگر $\beta \leq \alpha$ و $\alpha \leq \beta$ آنگاه $\alpha = \beta$؛ و این یک ویژگی مطلوب ترتیب است که در اعداد طبیعی برقرار است. اما یکی دیگر از ویژگی‌های ترتیب اعداد، این است که اگر برای دو عدد طبیعیِ m, n همواره یا $m < n$ یا $m > n$ یا $m = n$. کاردینالها نیز همین ویژگی را دارند؛ و این گفته، شاید برای شما عجیب باشد که، از قضیه‌ی شرودر برنشتاین نتیجه نمی‌شود (چرا؟). اثبات آن نیاز به مقدماتی دارد که در فصل‌های آینده خواهیم گفت؛ فعلاً صورت قضیه را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۱۱. برای هر دو کاردینال α, β داریم: یا $\alpha < \beta$ یا $\beta < \alpha$ و یا $\alpha = \beta$.

اثبات. به قضیهٔ ۲۲.۱۳ مراجعه کنید. □

حال بیایید با استفاده از ترتیب کاردینالها برخی مطالب فصل قبل را بازاثبات کنیم.

مثال ۵.۱۱. تعداد زیر مجموعه‌های متناهیِ $\mathbb{N}$ شماراست.

اثبات. تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی $\mathbb{N}$ برابر $\aleph_0$ است. ادعا می‌کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbb{N}$ نیز برابر است با $\aleph_0$.
برای اثبات این ادعا توجه می‌کنیم که تعداد زوج مرتب‌های (a,b) که در آن $a, b \in \mathbb{N}$ بزرگتریامساوی تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbb{N}$ است. اما قبلاً ثابت کرده‌ایم که $\mathbb{N}^2$ هم‌اندازه‌ی $\mathbb{N}$ است. پس

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی } \mathbb{N} \leqslant \aleph_0.$$

حال ادعا می‌کنیم که به علاوه:

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی } \mathbb{N} \geqslant \aleph_0$$

برای اثبات این گفته به یک تابع یک به یک از $\mathbb{N}$ به مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbb{N}$ نیازمندیم؛ تابعی که کار زیر را بکند:

$$\mathbb{N} \to \{\text{تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی}\}$$

$$n \mapsto \text{یک زیرمجموعهٔ دوعضوی}$$

تعریف کنید: $f(n) = \{n, n+1\}$. واضح است که تابع بالا یک به یک است.
مشابهاً ادعا می‌کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های n عضویِ $\mathbb{N}$ برابر $\aleph_0$ است. از یک طرف داریم:

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های } n \text{ عضوی } \mathbb{N} \leqslant |\mathbb{N}^n| = |\{(x_1, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}\}|$$

پس کافی است از طرف دیگر نشان دهیم که

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های } n\text{عضوی } \mathbb{N} \leqslant \aleph_0$$

تابع یک به یکِ f از $\mathbb{N}$ به مجموعه‌ی زیر مجموعه‌های n عضوی $\mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \{x, x+1, \dots, x+n-1\}$$

بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های n عضوی $\mathbb{N}$ برابر با $\aleph_0$ است.
پس مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های متناهی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست؛ و از این رو شماراست.

$$\underbrace{\{\text{تک عضوی}\} \cup \{\text{دو عضوی}\} \cup \dots \cup}_{\text{شمارا}}$$

□

سوال. تعداد **زیرمجموعه‌های نامتناهی** $\mathbb{N}$ چندتاست؟

پاسخ سوال بالا را در بخش بعدی خواهیم داد. در ادامه به سوال زیر خواهیم پرداخت:

سوال. غیر از $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ چه اندازه‌های دیگری وجود دارند؟

کانتور قضیه‌ی زیبای دیگری نیز دارد: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه‌ی دلخواه، همواره از تعداد اعضای آن بیشتر است. به بیان دیگر اگر κ یک کاردینال دلخواه باشد، آنگاه $2^\kappa > \kappa$. (این گفته را برای $\kappa = \aleph_0$ قبلاً ثابت کرده‌ایم.) **بدینسان همواره یک نامتناهیِ بزرگتر از یک نامتناهی داده شده موجود است:**

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \dots$$

به بیان دیگر، در دنیای کانتور، نامتناهی‌های بزرگتر و بزرگتر همواره پیدا می‌شوند و هیچ نامتناهی‌ای وجود ندارد که از همه‌ی نامتناهی‌ها بزرگتر باشد.
پیش از آن که به اثبات این قضیهٔ کانتور بپردازیم، نکتهٔ کوتاه دیگری دربارهٔ فرضیهٔ پیوستار داریم: می‌دانیم که $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. نیز می‌دانیم که $\aleph_0$ اولین کاردینالِ نامتناهی است. دومین کاردینالِ نامتناهی را با $\aleph_1$ نشان می‌دهیم. فرضیهٔ پیوستار در واقع می‌گوید که $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

قضیه ۶.۱۱ (کانتور)**.** همواره $\mathbf{card}(P(X)) \gneqq \mathbf{card}(X)$.

اثبات. اولاً $\mathbf{card}(P(X)) \geq \mathbf{card}(X)$ زیرا تابع زیر یک به یک است:

$$f : X \to P(X)$$

$$x \to \{x\}.$$

در ادامه‌ی ثابت می‌کنیم که هیچ تابعی بین X و $P(X)$ وجود ندارد که همزمان یک‌به‌یک و پوشا باشد؛ در نتیجه $\mathbf{card}(P(X)) \neq \mathbf{card}(X)$.

به طور کلی‌تر ادعا می‌کنیم که هیچ تابع $g : X \to P(X)$ پوشا نیست. فرض کنید g یک تابع از X به $P(X)$ باشد. ادعا می‌کنیم که g مجموعه‌ی زیر در $P(X)$ را نمی‌تواند بپوشاند:

$$A = \{x \in X | x \notin g(x)\}$$

اگر عنصر $t_0 \in X$ موجود باشد به طوری که $A = g(t_0)$ آنگاه اگر $t_0 \in g(t_0)$ آنگاه $t_0 \notin g(t_0)$ و اگر $t_0 \notin g(t_0)$ آنگاه $t_0 \in g(t_0)$. این تناقض نشان می‌دهد که تابع g نمی‌تواند پوشا باشد. $\square$

اثبات قضیهٔ فوق به نحوی تکرار اثباتِ قضیهٔ ۴.۱۰ است. در واقع اگر فرض کنیم که تناظر یک‌به‌یکی میان زیرمجموعه‌های X و اعضای X وجود دارد، درواقع شمارشی مانند زیر را فرض کرده‌ایم:

$$\begin{array}{ccc} X & & P(X) \\ x_i & \longrightarrow & \{-,-,-,\dots\} \\ \vdots & & \vdots \\ xj & \longrightarrow & \{-,-,-,\dots\} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

سپس ادعا کرده‌ایم که مجموعهٔ $\{x : x \notin g(x)\}$ در هیچ جای این فهرست در سمت راست قرار نگرفته است.

اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ یک کاردینال باشد، تعریف می‌کنیم: $2^\alpha = \mathbf{card}P(X)$. پس در قضیهٔ بالا ثابت کردیم که $\alpha \gneqq 2^\alpha$.

۳.۱۱ تمرینهای تکمیلی

برخی از تمرینهای زیر در فصلهای آینده پاسخ گفته شده اند. با این حال، تلاش برای حل آنها در این فصل، برای درک مطالب درس بسیار مفید است.

تمرین ۵.۱۱. با استفاده از قضیه‌ی شرودر ـ برنشتاین نشان دهید که $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

تمرین ۶.۱۱. نشان دهید که

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

تمرین ۷.۱۱. نشان دهید که تعداد بازه‌های دو به دو مجزا در اعداد حقیقی، شماراست.

تمرین ۸.۱۱. نشان دهید که تعداد دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی شماراست.

تمرین ۹.۱۱. عدد $x \in \mathbb{R}$ را یک عدد جبری می‌گوئیم هرگاه یک چندجمله‌ای f با ضرایب در اعداد گویا موجود باشد، به طوری که $f(x) = 0$. نشان دهید که تعداد اعداد جبری شماراست.

تمرین ۱۰.۱۱. فرض کنید که اندازه‌ی مجموعه‌های A, B برابر با $2^{\aleph_0}$ باشد و ایندو با هم اشتراکی نداشته باشند. نشان دهید که اندازه‌ی $A \cup B$ برابر با $2^{\aleph_0}$ است.

خلاصهٔ فصل یازدهم. از هر مجموعه‌ای، مجموعه‌ای بزرگتر وجود دارد. بنا به قضیه‌ی کانتور، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه از اندازه‌ی خود آن مجموعه بزرگتر است. پس در جهان نظریه‌ی مجموعه‌ها یک مجموعه که حداکثر اندازه را داشته باشد وجود ندارد. وقتی می‌گوییم اندازهٔ مجموعهٔ X کمتراز یا مساوی‌با اندازهٔ مجموعهٔ Y است، یعنی تابعی یک به یک از X به Y وجود دارد؛ در این صورت می‌نویسیم $\mathbf{card}(X) \leq \mathbf{card}(Y)$. بنا به قضیهٔ شرودر برنشتاین، اگر $\mathbf{card}(X) \leq \mathbf{card}(Y)$ و $\mathbf{card}(Y) \leq \mathbf{card}(X)$ آنگاه $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$.

فصل ۱۲

حساب کاردینالها

اِنَّ هذِهِ الْقُلُوبَ تَمَلُّ کَما تَمَلُّ الأَبْدانُ، فَابْتَغُوا لَها طَرائِفَ الْحِکَمِ.
نهج‌البلاغه

در طی فصلهای گذشته، با اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها آشنا شدیم. یکی از این اصول، **اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی** بود. گفتیم که به محض پذیرفتن این اصل، متوجه می‌شویم که اگر نامتناهی وجود داشته باشد، نامتناهی‌ها نیز اندازه‌های متفاوتی خواهند داشت. سپس با اندازه‌های نامتناهی مختلف، تحتِ عنوان کاردینالها آشنا شدیم.

به بیان دقیق‌تر روی کلاس همه‌ی مجموعه‌ها رابطه‌ی هم‌ارزیِ زیر را تعریف کردیم:

$$X \cong Y \iff \text{یک تابع یک به یک و پوشا از } X \text{ به } Y \text{ موجود باشد.}$$

و کلاس هم‌ارزی هر مجموعه‌ی X را در رابطه‌ی هم‌ارزی بالا با $\mathbf{card}(X)$ نشان دادیم و هر چنین کلاسی را یک **کاردینال** خواندیم. پس هرگاه بگوئیم $\mathbf{card}(X)$ برابر است با $\mathbf{card}(Y)$ یعنی $X \cong Y$. در میان این کلاسها، کلاس مجموعه‌ی تهی را با ۰، کلاس همه‌ی مجموعه‌های تک عضوی را با ۱، و کلاس همه‌ی مجموعه‌های n عضوی را با n نشان دادیم. کلاس همه‌ی مجموعه‌های شمارا، مانند $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ را با $\aleph_0$ نمایش دادیم. نیز گفتیم که اگر فرضیه‌ی پیوستار درست باشد، اولین کلاس بعدی، کلاس مجموعه‌های هم‌اندازه‌ی اعداد حقیقی، یا کلاس مجموعه‌های هم‌اندازهٔ $P(\mathbb{N})$ است؛ که آن را با $2^{\aleph_0}$ نشان دادیم. همچنین دریافتیم که تعداد این کلاسهای هم‌ارزی نامتناهی است؛ در واقع اگر A در یک کلاس واقع شده باشد آنگاه $P(A)$ در کلاسی متفاوت واقع است. در این فصل، به حساب کاردینالها، یعنی بررسی اعمال اصلی و ترتیب روی آنها خواهیم پرداخت. خواهیم دید که چگونه نماینده‌های دو کلاس در بالا می‌توانند با هم ضرب یا جمع شوند و نماینده‌ی یک کلاس دیگر را بدهند. البته در فصل قبل که موضوع ترتیب کاردینالها را بررسی می‌کردیم، چندین بار با احتیاط درباره‌ی جمع آنها نیز نوشتیم. اما اینجا مطلب را دقیق‌تر توضیح خواهیم داد. خواننده می‌تواند به نفع رسیدن به مطالبی مانند اثباتِ لم زُرن، به راحتی از خواندنِ این فصل خودداری کند.

۱.۱۲ یادآوری ترتیبِ کاردینالها

فرض کنید α و β دو کاردینال باشند به طوری که $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha \leqslant \beta \iff \exists \overset{\text{یک به یک}}{\overset{\uparrow}{f}} : X \to Y.$$

یک نکتهٔ حائز اهمیت در مورد تعاریف این چنین، «خوش‌تعریف‌بودن» آنهاست. خوش‌تعریف بودنِ تعریف بالا به معنی «عدم وابستگی آن به انتخاب نماینده کلاس» است. در تعریف بالا گفته‌ایم که زمانی $\alpha \leq \beta$ که یک تابعِ یک به یک از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y موجود باشد. اما X فقط **یکی** از مجموعه‌هایی است که $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و تعریف ما نباید به X بلکه باید به $\mathbf{card}(X)$ بستگی داشته باشد. یعنی اگر یک خواننده، به جای X از یک نمایندهٔ دیگر برای کلاسِ $\mathbf{card}(X)$، و به جای Y از یک نمایندهٔ دیگر برای کلاسِ $\mathbf{card}(Y)$ استفاده کند، نباید به ترتیب متفاوتی برای این دو کاردینال برسد. در قضیهٔ زیر این گفته را دقیق کرده‌ایم.

قضیه ۱.۱۲. ترتیب کاردینالها خوش‌تعریف است؛ یعنی به انتخاب نمایندهٔ کلاسها بستگی ندارد.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(X')$ و $\beta = \mathbf{card}(Y) = \mathbf{card}(Y')$. نشان می‌دهیم که اگر $\alpha = \mathbf{card}(X) \leq \mathbf{card}(Y)$ آنگاه $\alpha = \mathbf{card}(X') = \mathbf{card}(Y')$.

فرض کنید $f : X \to Y$ تابعی یک‌به‌یک است که تضمین کرده است که $\mathbf{card}(X) \leq \mathbf{card}(Y)$. از آنجا که X, X' هم‌توان هستند یک تابعِ یک به یک و پوشای $g_1 : X' \to X$ موجود است. نیز از آنجا که Y, Y' هم‌توان هستند یک تابع یک به یک و پوشای $g_2 : Y' \to Y$ موجود است. پس تابعِ $h = g_2^{-1} \circ f \circ g_1 : X' \to Y'$ یک تابع یک به یک است که تضمین می‌کند که $\mathbf{card}(X') \leq \mathbf{card}(Y')$. شکل زیر خلاصهٔ ایدهٔ اثبات را نشان می‌دهد:

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' & Y \arrow[l, "{g_2}^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "h"] & g_1(x) \arrow[d, "f"] \\
g_2^{-1}(f(g_1(x))) & f(g_1(x)) \arrow[l, "{g_2}^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

□

رابطه‌ی $\leqslant$ بین کاردینالها، ویژگی‌های مطلوب یک ترتیب را داراست:

۱. برای هر کاردینالِ α داریم $\alpha \leqslant \alpha$. زیرا اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ آنگاه تابعِ $id : X \to X$ یک تابع یک‌به‌یک است.

۲. برای هر سه کاردینالِ α, β, γ اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \gamma$ آنگاه $\alpha \leqslant \gamma$. برای اثباتِ این گفته، فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$، $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $\gamma = \mathbf{card}(Z)$. نیز فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ به ترتیب تضمین کنندهٔ $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ باشند. در این صورت $g \circ f : X \to Z$ تضمین کنندهٔ $\alpha \leq \gamma$ است:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}
$$

۳. برای دو کاردینالِ α, β اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \alpha$ آنگاه $\alpha = \beta$. اثبات این مورد البته به آسانی موارد قبل نیست. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. اگر تابعی یک‌به‌یک از X به Y و تابعی یک‌به‌یک از Y به X موجود باشد، آنگاه قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین تضمین می‌کند که $X \cong Y$؛ یعنی $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$.

۴. برای هر دو کاردینالِ α و β داریم یا $\alpha \leqslant \beta$ یا $\beta \leqslant \alpha$. اثبات این گفته نیاز به مقدماتی دارد؛ این اثبات را یک بار در قضیهٔ ۲۲.۱۳ و بار دیگر در قضیهٔ ۱۰.۱۴ خواهیم دید.

در فصل قبل دیدیم که اگر $\alpha \leqslant \aleph_0$ و $\alpha \neq \aleph_0$ آنگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\alpha = n$. این نکته به نحو جذابی تأئید کنندهٔ اصل انتظام برای خوش‌بنیادی مجموعه‌هاست: با این که $\aleph_0$ یک کاردینال نامتناهی است، نمی‌شود یک دنبالهٔ نامتناهی نزولی با شروع از $\aleph_0$ نوشت؛ به محض این که کاردینالی از $\aleph_0$ کوچکتر باشد، متناهی است و پس از متناهی مرتبه به صفر می‌رسد. همچنین کاردینالی وجود ندارد که بلافاصله پیش از $\aleph_0$ قرار بگیرد:

$$0 \longrightarrow n \quad n+1 \quad n+2 \ \cdots \longrightarrow \aleph_0$$

همچنین متوجه شدیم که مجموعهٔ $\{\alpha | \alpha \lneqq \aleph_0\}$ ماکزیمم ندارد. همچنین گفتیم که اگر $\alpha < \aleph_0$ آنگاه α را متناهی و اگر $\alpha \geqslant \aleph_0$ آنگاه α را نامتناهی می‌نامیم.

۲.۱۲ جمع کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند به گونه‌ای که $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $X \cap Y = \emptyset$. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \mathbf{card}(X \cup Y).$$

لازم است که تأکید کنیم که تعریف جمعِ بالا نیز، خوش‌تعریف است؛ یعنی به انتخاب نمایندهٔ کلاسها بستگی ندارد. اثباتِ این گفته، با همان روش استاندارد صورت می‌گیرد و ترجیحاً آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم:

تمرین ۱.۱۲. نشان دهید که تعریفِ جمع کاردینالها، خوش‌تعریف است.

تمرین ۲.۱۲. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. نشان دهید که

$$\alpha + \beta = \mathbf{card}(X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}).$$

دقت کنید که در این تمرین، شرطِ $X \cap Y = \emptyset$ را برداشته‌ایم.

در فصلهای قبلی ثابت کرده‌ایم که $\aleph_0 + n = \aleph_0$ و $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. حال، نشان می‌دهیم که

قضیه ۲.۱۲. اگر κ یک کاردینالِ نامتناهی باشد، آنگاه $\kappa + \aleph_0 = \kappa$.

بیان دیگری از قضیهٔ فوق، لم زیر است:

لم ۳.۱۲. فرض کنید A شمارا باشد و B یک مجموعه‌ی نامتناهی دلخواه باشد و $A \cap B = \emptyset$. آنگاه $A \cup B \cong B$..

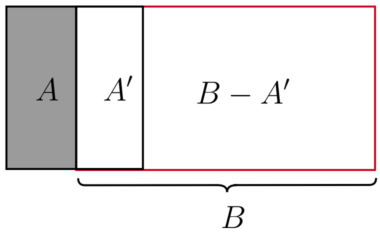
ترجمان لم بالا در حساب کاردینالها این است که اگر κ یک کاردینال نامتناهی دلخواه باشد آنگاه

$$\kappa + \aleph_0 = \kappa$$

پس به طور خاص

$$2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}.$$

اثبات. از آنجا که B نامتناهی است، بنا به قضیهٔ ۷.۱۰ مجموعهٔ B شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای A' است. البته در اینجا باید دقت کنیم که اصل انتخاب نیز در اثبات قضیهٔ یادشده استفاده شده است:



از آنجا که A, A' هر دو شمارا هستند داریم: $A \cup A' \cong A'$. پس

$$A \cup B = (A \cup A') \cup (B - A') \cong A' \cup (B - A') \cong B.$$

□

مثال ۴.۱۲. تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهیِ $\mathbb{N}$ را بیابید.

پاسخ. داریم

$$\underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی } \mathbb{N}}_{?} + \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های متناهی } \mathbb{N}}_{\aleph_0} = \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های } \mathbb{N}}_{2^{\aleph_0}}$$

بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ برابر **نیست** با $\aleph_0$. زیرا قبلاً ثابت کرده‌ایم که اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست، و مجموعه‌ی سمت چپ در بالا شمارا نیست. پس تعداد زیر مجموعه‌های **نامتناهی** $\mathbb{N}$ برابر با $2^{\aleph_0}$ است؛ زیرا اگر این حاصل، کاردینالی غیر از $2^{\aleph_0}$ مانند κ باشد، آنگاه حاصل جمع بالا نیز κ می‌شود. □

قضیهٔ ۲.۱۲ را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

قضیه ۵.۱۲. اگر κ, λ دو کاردینال باشند به طوری که $\kappa \leqslant \lambda$ آنگاه $\kappa + \lambda = \lambda$.

قضیهٔ فوق را در فصلهای بعدی (نتیجهٔ ۱۳.۱۴) اثبات کرده‌ایم.

۳.۱۲ ضرب کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند به طوری که $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \cdot \beta = \mathbf{card}(X \times Y).$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که ضرب کاردینالها هم از انتخاب نمایندهٔ کلاسها مستقل است.

ضرب کاردینالها، بسیاری از ویژگی‌های مطلوب مورد انتظار از یک «عمل ضرب» را داراست. برخی این ویژگی‌ها را در لمهای زیر بررسی کرده‌ایم.

لم ۶.۱۲. ضرب کاردینالها، ویژگی «جابجایی» دارد؛ یعنی برای هر دو کاردینالِ α, β داریم

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. در این صورت $\alpha \cdot \beta = \mathbf{card}(X \times Y)$ و $\beta \cdot \alpha = \mathbf{card}(Y \times X)$. اما دو مجموعهٔ $X \times Y$ و $Y \times X$ با هم هم‌توان هستند؛ زیرا به عنوان مثال، تابعِ $h : X \times Y \to Y \times X$ با ضابطهٔ $h(x,y) = (y,x)$ ضامن این هم‌توانی است. □

لم ۷.۱۲. داریم: $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$. در این صورت

$$\alpha \cdot 1 = \mathbf{card}(X \times 1) = \mathbf{card}(X \times \{0\})$$

پس کافی است نشان دهیم که

$$\underbrace{X \times \{0\}}_{\{(x,0) | x \in X\}} \cong X$$

اما تابع سادهٔ $(x,0) \mapsto x$ ما را به این خواسته می‌رساند. □

لم ۸.۱۲. ضرب کاردینالها با ترتیب آنها «سازگاری» دارد؛ یعنی اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\gamma \leqslant \lambda$ آنگاه $\alpha \cdot \gamma \leqslant \beta \cdot \lambda$.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$، $\beta = \mathbf{card}(Y)$، $\gamma = \mathbf{card}(Z)$ و $\lambda = \mathbf{card}(W)$. نیز فرض کنید که توابعِ $X \xrightarrow{f} Y$ و $Z \xrightarrow{g} W$ به ترتیب ضمانتگرِ $\alpha \leqslant \beta$ و $\gamma \leqslant \lambda$ باشند. تابعِ h را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$h : X \times Z \to Y \times W$$

$$(x,z) \mapsto \big(f(x), g(z)\big)$$

به راحتی می‌توان تحقیق کرد که تابع فوق، شاهدی بر این است که $\alpha \cdot \gamma \leqslant \beta \cdot \lambda$. □

در فصل قبل بررسی کردیم که $\aleph_0 \times 1 = \aleph_0$، $\aleph_0 \times n = \aleph_0$ و $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. بیایید باز اثبات دیگری برای مورد سوم ارائه کنیم:

برای این که نشان دهیم $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ با استفاده از قضیه‌ی کانتور برنشتاین کافی است نشان دهیم $\aleph_0 \le \aleph_0 \cdot \aleph_0$ و $\aleph_0 \cdot \aleph_0 \le \aleph_0$. برای اثبات اولی، تابع یک به یک $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ با ضابطهٔ $g(n) = (n,n)$ را، و برای اثبات دومی، تابعِ یک به یکِ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با ضابطهٔ $f(n,m) = 2^n \times 3^m$ را در نظر بگیرید. اثبات یک به یک بودن توابعِ فوق را به صورت تمرین رها می‌کنیم.

در قضیهٔ ۱۲.۱۴ ثابت خواهیم کرد که برای هر دو کاردینالِ κ, λ اگر $\kappa \leqslant \lambda$ آنگاه $\kappa \cdot \lambda = \lambda$. البته این ویژگی ضرب کاردینالها تا حد زیادی با آنچه معمولاً از ضرب و ترتیب انتظار داریم متفاوت است.

۴.۱۲ توان کاردینالها

تعریف ۹.۱۲. فرض کنید X, Y دو مجموعه باشند. مجموعهٔ متشکل از همهٔ توابع از مجموعهٔ Y به مجموعهٔ X را با X^Y نشان می‌دهیم. قبلاً مجموعهٔ همهٔ توابع از $\mathbb{N}$ به $\{0,1\}$ را بررسی کرده بودیم که آن را با $2^{\mathbb{N}}$ نشان دادیم. در این جا، همین نمادگذاری را تعمیم دادیم.

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند و $\alpha = \mathbf{card}(X), \beta = \mathbf{card}(Y)$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha^\beta = \mathbf{card}\big(X^Y\big).$$

دوباره باید تأکید کنیم که تعریف فوق از انتخاب نمایندهٔ کلاسها مستقل است. همچنین شبیه آنچه قبلاً هم گفته بودیم، مطابق تعریف توان کاردینالها، اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ آنگاه $2^\alpha = \mathbf{card}(\{0,1\}^X)$.

لم ۱۰.۱۲. اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ آنگاه $2^\alpha = \mathbf{card}(P(X))$.

اثبات. کافی است نشان دهیم که دو مجموعهٔ $P(X)$ و $\{0,1\}^X$ با هم‌توان هستند. قبلاً در بخشِ ۵.۱۰ این کار را برای مجموعه‌های $P(\mathbb{N})$ و $2^{\mathbb{N}}$ انجام داده‌ایم و اینجا هم از همان ایده استفاده می‌کنیم.

تابعِ h را از $\{0,1\}^X$ به $P(X)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $f \in \{0,1\}^X$؛ در این صورت f تابعی از X به $\{0,1\}$ است. تعریف کنید:

$$h(f) = \{x \in X | f(x) = 1\}.$$

بررسی این که تابع فوق یک به یک و پوشاست را به عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم. $\square$

در بخشهای قبلی دیدیم که

$$|\mathbb{R}| = |(a,b)| = |(0,1)| = 2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N})|.$$

همچنین قضیه‌ی کانتور را ثابت کردیم که می‌گفت $|X| < |P(X)|$. این قضیه، به بیان کاردینالی معادل است با این که برای هر کاردینالِ α داریم $\alpha < 2^\alpha$. مانند اعداد طبیعی، توانرسانی کاردینالها با جمع و ضرب آنها سازگار است:

قضیه ۱۱.۱۲. فرض کنید α, β, γ سه کاردینال باشند. آنگاه

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$$

قضیهٔ فوق، در واقع بیان دیگری از این حقیقت است که برای هر سه مجموعهٔ X, Y, Z داریم:

$$X^Y \times X^Z \cong X^{Y \cup Z}$$

(با فرض اینکه $Y \cap Z = \emptyset$). پس در ادامه، این حقیقت را اثبات کرده‌ایم.

اثبات. هدف، پیدا کردن یک تابع یک به یک و پوشا (مثلاً به نام H) از مجموعهٔ $X^Y \times X^Z$ به مجموعهٔ $X^{Y\cup Z}$ است. دامنه‌ی تابع H قرار است به صورت زیر باشد.

$$Dom(H) = \{(f,g) | f : Y \to X, g : Z \to X\}$$

پس برای هر (f,g) در دامنه، باید داشته باشیم $H(f,g) \in X^{Y\cup Z}$؛ یعنی

$$H(f,g) : Y \cup Z \to X.$$

تابع $H(f,g)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$H(f,g)(t) = \begin{cases} f(t) & t \in Y \\ g(t) & t \in Z \end{cases}$$

بررسی این که تابعِ H در بالا یک به یک و پوشاست را به عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم. $\square$

در درسهای گذشته، اثباتی نادقیق برای شمارا بودن مجموعه‌ی اعداد گویا آوردیم. در اینجا با استفاده از قضیه‌ی شرودر ـ برنشتاین، اثباتی دقیق و ساده ارائه می‌کنیم. عموماً پیدا کردن یک تابع یک به یک و پوشا برای اثبات همتوانی دو مجموعه، کار آسانی نیست؛ ولی بنا به قضیه‌ی شرودر برنشتاین، اگر تابعی یک به یک از هر یک به دیگری پیدا کنیم، آن دو مجموعه همتوان خواهند بود.

مثال ۱۲.۱۲. نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.

پاسخ. می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathbf{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. برای این منظور کافی است نشان دهیم که $\mathbf{card}(\mathbb{Q}) \leqslant \aleph_0$ و $\aleph_0 \leqslant \mathbf{card}(\mathbb{Q})$.

اثبات دومی آسان است؛ زیرا تابع همانی، $\mathbb{N}$ را به طور یک به یک در $\mathbb{Q}$ می‌نشاند.

برای اثبات دومی، دقت کنید که در بخشهای قبل ثابت کردیم که $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست. پس برای اثبات $\mathbf{card}(\mathbb{Q}) \leqslant \aleph_0$ کافی است تابعی یک به یک از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ بیابیم:

تمرین ۳.۱۲. نشان دهید که تابع زیر از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ یک به یک است.

$$f(\frac{x}{y}) = (x, y)$$

که در بالا فرض کرده‌ایم که ب‌م‌مِ x, y برابر با یک باشد. دقت کنید که عبارت سمت راست، زوج مرتب متشکل از x, y است.

□

توانی که برای کاردینالها تعریف کردیم، موافق انتظار، با ضرب کاردینالها سازگار است:

لم ۱۳.۱۲. فرض کنید α, β, γ سه کاردینال باشند آنگاه

$$\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$$

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$، $\beta = \mathbf{card}(Y)$، و $\gamma = \mathbf{card}(Z)$. کافی است ثابت کنیم که

$$\left(X^{Y}\right)^{Z} \cong X^{Y \times Z}$$

برای این منظور کافی است یک تابع یک به یک و پوشا (مثلاً به نام H) از $\left(X^{Y}\right)^{Z}$ به $X^{Y \times Z}$ بیابیم. فرض کنید $f \in \left(X^{Y}\right)^{Z}$. در این صورت f تابعی از Z به X^{Y} است. باید $H(f)$ گونه‌ای تعریف شود که $H(f) \in X^{Y \times Z}$. یعنی $H(f)$ باید تابعی از $Y \times Z$ به X باشد. پس باید برای هر $(y, z) \in Y \times Z$ داشته باشیم: $H(f)(y, z) \in X$. فرمولهای زیر وضعیت تابع f را روشن‌تر می‌کند:

$$f : Z \to X^{Y}$$

$$\forall z \in Z \quad f(z) \in X^{Y}$$

$$\forall z \in Z \quad f(z) : Y \to X$$

$$y \mapsto f(z)(y)$$

پس برای تعریفِ $H(f)(y,z)$ کافی است که z را به f و y را به $f(z)$ بسپاریم. به بیان دیگر، $H(f)$ را تابع زیر در نظر می‌گیریم:

$$H(f) : Y \times Z \to X$$
$$(y,z) \mapsto f(z)(y)$$

□

مثال ۱۴.۱۲. نشان دهید که $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. به بیان دیگر $\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

اثبات. بیایید این سوال را با دو راه حل پاسخ دهیم. در راه حل اول، از $\mathbb{R}$ به $[0,1] \times \mathbb{Z}$ تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x \mapsto (\lfloor x \rfloor, x - \lfloor x \rfloor)$$

به عنوان تمرین نشان دهید که تابع فوق یک به یک و پوشا است. می‌دانیم که $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ و $\mathbb{R} \cong [0,1]$. پس ثابت کردیم که $\mathbb{R} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

در راه حل دوم، از حساب کاردینالها و قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین استفاده می‌کنیم؛ نشان می‌دهیم که $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}$ و $\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_0}$. داریم:

$$2^{\aleph_0} = 1 \cdot 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0 \times 2^{\aleph_0}$$

و از طرفی از آنجا که $\aleph_0 \leqslant 2^{\aleph_0}$ داریم

$$\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

□

مثال ۱۵.۱۲. نشان دهید که $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

اثبات. دوباره با دو راه حل این مثال را حل می‌کنیم. راه اول با استفاده از حساب کاردینالهاست:

$$2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

اما راه حل دوم بدین صورت است: می‌دانیم که $|\mathbb{R}|$ برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی، و تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی با تعداد زیر مجموعه‌های اعداد زوج برابر است و آن هم با تعداد زیرمجموعه‌های اعداد فرد برابر است. در زیر نشان خواهیم داد که:

زیر مجموعه‌های اعداد فرد $\times$ زیر مجموعه‌های اعداد زوج $\cong$ زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی

کافی است تابع زیر را در نظر بگیریم

$$A \mapsto (A \cap \mathbb{N}_E, A \cap \mathbb{N}_O)$$

که در آن N_E اعداد زوج و N_O اعداد فرد را نشان می‌دهند. به طور مثال مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ را به $(\{1,3\},\{2,4\})$ تصویر می‌کنیم. □

مثال ۱۶.۱۲. تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ را بیابید.

پاسخ. کافی است $\aleph_0^{\aleph_0}$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$\aleph_0^{\aleph_0} \leqslant \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0}$$

پس

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

پس تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ برابر است با $|\mathbb{R}|$. به بیان دیگر تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ برابر است با تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به مجموعه‌ی $\{0, 1\}$. □

۵.۱۲ تمرینهای تکمیلی

تمرین ۴.۱۲. نشان دهید که برای هر سه کاردینالِ α, β, γ داریم

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

تمرین ۵.۱۲. برای هر دو کاردینالِ دلخواهِ α, β نشان دهید که $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ و $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

تمرین ۶.۱۲.

- نشان دهید که اگر $\alpha = \alpha'$ و $\beta = \beta'$ آنگاه $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و $\alpha \cdot \beta = \alpha' \cdot \beta'$.
- نشان دهید که اگر $\alpha \leqslant \beta$ و γ یک کاردینال دلخواه باشد، آنگاه $\alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma$.
- نشان دهید که اگر $\alpha \leqslant \beta$ و γ یک کاردینال دلخواه باشد، آنگاه $\alpha \cdot \gamma \leqslant \beta \cdot \gamma$.

تمرین ۷.۱۲. هر عدد مختلط به صورت $a + bi$ است که در آن a, b اعداد حقیقی هستند. تعداد کل اعداد مختلط چقدر است؟

تمرین ۸.۱۲. برای هر دو عدد حقیقیِ $a \neq b$ نشان دهید که

۱. $[a, b] \cong (a, b)$.

۲. $[a, b] \cong [a, b)$.

۳. $[a, b] \cong (a, b]$.

تمرین ۹.۱۲. تعداد توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{N}$ را بیابید.

تمرین ۱۰.۱۲. تعداد توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ را بیابید.

تمرین ۱۱.۱۲. تعداد نقاط در صفحه‌ی مختصات دو بعدی چقدر است؟

خلاصهٔ فصل دوازدهم. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$، $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $\gamma = \mathbf{card}(Z)$ سه کاردینال باشند. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \mathbf{card}(X \times \{0\} \cup Y \times \{1\})$$

$$\alpha \cdot \beta = \mathbf{card}(X \times Y)$$

$$\alpha^\beta = \mathbf{card}(X^Y).$$

$\alpha \leqslant \beta \iff$ تابعی یک‌به‌یک از X به Y موجود باشد

$$\big(\alpha \leqslant \beta\big) \wedge \big(\beta \leqslant \alpha\big) \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

فصل ۱۳

اصل انتخاب، لم زُرن و اصل خوشترتیبی

از هر طرف که رفتم جز وحشتم نیفزود
زینهار زین بیابان وین راه بی‌نهایت
حافظ

تأکید کردیم که اصل انتخاب یکی از اصول‌موضوعهٔ مهم در نظریه‌ی مجموعه‌هاست؛ نیز چندین بار در اثباتها از آن بهره جستیم. در این فصل نشان خواهیم داد که این اصل‌موضوعه را می‌توان با اصول دیگری، با همان اندازه قدرت، جایگزین کرد. بیایید پیش از آن، نسخه‌های مختلفی از صورت اصل را با هم مرور کنیم:

۱. اگر به تعداد نامتناهی مجموعه‌ی ناتهی داشته باشیم، آنگاه **یک تابع انتخاب** موجود است که از هر یک از این مجموعه‌ها عنصری انتخاب می‌کند.

۲. اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه یک تابع $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ موجود است به طوری که برای هر $i \in I$ داریم $f(i) \in A_i$.

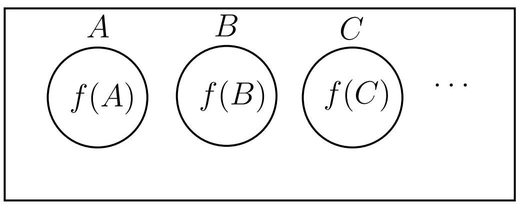
۳. اگر X یک مجموعه‌ی ناتهیِ دلخواه باشد و $P(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های آن باشد، آنگاه تابعی مانند f از $P(X) - \{\emptyset\}$ به X موجود است به طوری که برای هر $A \in P(X)$ داریم $f(A) \in A$.

۴. اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه $\Pi_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. توجه کنید که طبق تعریف حاصلضرب نامتناهی مجموعه، داریم:

$$(x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I} A_i \iff \forall i \quad x_i \in A_i.$$

۵. اگر x یک مجموعه‌ی متشکل از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه یک تابع $f : x \to \bigcup x$ موجود است به طوری که $\forall y \in x \quad f(y) \in y$.

زیرمجموعه‌های X



لمِ زُرن، [1] عنوان یک قضیه در نظریهٔ مجموعه‌ها است. این قضیه با اصل انتخاب معادل است؛ یعنی اولاً لم زرن با استفاده از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات می‌شود؛ ثانیاً اگر اصل انتخاب را از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها حذف کنیم و به جای آن لم زرن را قرار دهیم، از این اصول موضوعهٔ جدید اصل انتخاب به عنوان یک قضیه اثبات می‌شود.

با توجه به معادل بودن لم زرن با اصل انتخاب، می‌توان گفت که این قضیه یک صورت دیگر از اصل انتخاب است. اما این صورت از اصل انتخاب، کاربرد بسیار وسیع‌تری از خودِ اصل انتخاب در ریاضیات دارد. به زودی در درسهای مختلف حتی در دورهٔ کارشناسی، خواهید دید که وجود پایه برای فضاهای برداری (جبر خطی)، وجود ایده‌آل ماکزیمال (جبر)، قضیه‌ی تیخونوف (توپولوژی)،قضیه‌ی هان‌باناخ (آنالیز تابعی)، قضیه‌ی فشردگی (نظریه‌ی مدلها) و بسیاری از قضایای مهم پایه‌ای، همه با استفاده از لم زرن اثبات می‌شوند. در ادامهٔ این فصل پس از بیان مقدماتی، به لمِ زرن خواهیم پرداخت.

۱.۱۳ مجموعه‌های مرتب

پیش‌تر در این درس با رابطه‌ها و ویژگی‌های مختلف آنها آشنا شده‌ایم. در این قسمت توجه‌مان معطوف به نوع خاصی از روابط به نام **روابط ترتیبی** است.

رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X را یک **رابطه‌ی ترتیبی** می‌خوانیم هرگاه انعکاسی، **پادتقارنی** و متعدی باشد. معمولاً در این صورت به جای xRy می‌نویسیم $x \leqslant y$. اگر R یک رابطه‌ی ترتیبی روی X باشد، (X, R) یا همان $(X, \leqslant)$ را یک مجموعه‌ی مرتب می‌خوانیم. بیایید تعریف را به صورت دقیق بیان کنیم:

تعریف ۱.۱۳. مجموعه‌ی X را به همراه رابطه‌ی $\leqslant$ یک مجموعه‌ی مرتب می‌خوانیم هرگاه جملات زیر درست باشند:

$$\forall x \in X \quad x \leqslant x$$

$$\forall x, y \in X \quad \big(x \leqslant y \wedge y \leqslant x \rightarrow x = y\big)$$

$$\forall x, y, z \in X \quad \big(x \leqslant y \wedge y \leqslant z \rightarrow x \leqslant z\big)$$

وقتی می‌گوییم $(X, \leqslant)$ یک مجموعهٔ **مرتب جزئی** است یعنی می‌خواهیم تأکید کنیم که جمله‌ی زیر در مورد آن لزوماً درست نیست:

$$\forall x, y \in X \quad \big(x \leqslant y \vee y \leqslant x\big)$$

یعنی هر دو عضو داده شده، لزوماً با هم قابل مقایسه نیستند.

تعریف ۲.۱۳. مجموعه‌ی مرتب $(X, \leqslant)$ را مرتب خطی (مرتب تام) می‌نامیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$$

در غیر این صورت $(X, \leqslant)$ را مرتب جزئی می‌نامیم.

با این که معمولاً یک رابطه‌ی ترتیب را با علامت $\leq$ نشان می‌دهیم، منظورمان این نیست که اعضای مجموعه، عدد هستند. اعضای مجموعه می‌توانند هر چیزی باشند و رابطه‌ی $\leq$ فقط باید دارای ویژگی‌های انعکاسی، پادتقارنی و تعدی باشد.

[1] ماکس زُرن، ۱۹۳۵

مثال ۳.۱۳. ساختارِ $(\mathbb{N}, \leqslant)$، یعنی مجموعه‌ی اعداد طبیعی با ترتیب معمولش (همان ترتیبی که شما از ریاضی مقدماتی به خاطر دارید و در این کتاب متوجه شدید که با رابطهٔ عضویت یکی است) یک مجموعه‌ی مرتب است، که البته مرتب خطی است.

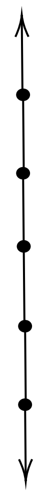
چیزی که ممکن است دانشجویان را در درک ترتیب جزئی و خطی کمی گیج کند این است که هم در مجموعه‌های مرتب جزئی و هم در مجموعه‌ی مرتب خطی عبارت زیر درست است:

$$\forall x, y \quad (x \leq y \wedge y \leq x \to x = y)$$

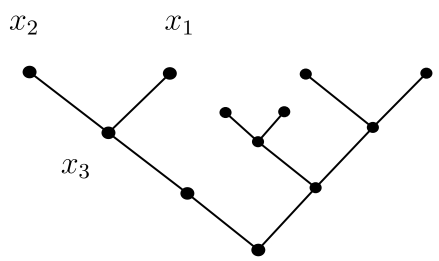
به بیان دیگر در هر دو نوع ترتیب، اگر $x < y$ آنگاه $\neg(y < x)$. ولی تفاوت این است که در مجموعه‌ی مرتب خطی جمله‌ی زیر درست است ولی در مجموعه‌ی مرتب جزئی جمله‌ی زیر لزوماً درست نیست:

$$\forall x, y \quad (x < y \vee y < x \vee x = y)$$

یعنی در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی ممکن است دو عنصرِ x, y پیدا شوند که با هم قابل مقایسه نباشند (یعنی نه مساوی باشند و نه هیچیک از دیگری بیشتر یا کمتر باشد). مجموعه‌ی مرتب خطی را می‌توان به صورت یک زنجیر تجسم کرد که ممکن است نامتناهی باشد:



مجموعه‌ی مرتب جزئی را می‌توان به صورت درختی تجسم کرد:



در شکل بالا x_3 با هر یک از عناصر x_1 و x_2 قابل مقایسه است و از آنها کمتر است، ولی عناصر x_2 و x_1 قابل مقایسه با هم نیستند. همچنین x_2 با آخرین نقطه سمت راست درخت قابل مقایسه نیست. عنصر پایین درخت با همه‌ی عناصر قابل مقایسه و از همه‌ی آنها کمتر است. دقت کنید که درخت بالا می‌تواند از بالا و پائین نامتناهی باشد و نیز ممکن است در جاهائی از آن شکل لوزی نیز داشته باشیم.

مثال ۴.۱۳. روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$x \overset{\bullet}{\leqslant} \Leftrightarrow x|y$$

نشان دهید رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی ترتیبی است که خطی (تام) نیست.

پاسخ. می‌دانیم که جملات زیر دربارهٔ رابطهٔ عاد کردن درست هستند:

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x|x$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad \big(x|y \wedge y|x\big) \to x = y$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} \quad \big(x|y \wedge y|z\big) \to x|z$$

پس $|$ یا همان رابطهٔ عاد کردن یک رابطه‌ی ترتیبی است. اما داریم $13 \overset{\bullet}{\not\leqslant} 2$ زیرا $2\nmid 13$ و همچنین $2 \overset{\bullet}{\not\leqslant} 13$ زیرا $13 \nmid 2$. پس رابطه‌ی ترتیبی فوق خطی (تام) نیست. $\square$

مثال ۵.۱۳. فرض کنید X یک مجموعه باشد. روی $P(X)$ رابطه‌ی $\leqslant$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$A \leqslant B \iff A \subseteq B$$

نشان دهید که $(P(X), \subseteq)$ یک مجموعه‌ی مرتب است. نشان دهید که اگر X حداقل دو عضو داشته باشد، $(P(X), \subseteq)$ مرتب غیرخطی است.

پاسخ. می‌دانیم که عبارتهای زیر درستند:

$$\forall A \in P(X) \quad A \subseteq A$$

$$\forall A, B \in P(X) \quad \big(A \subseteq B \wedge B \subseteq A \to A = B\big)$$

$$\forall A, B, C \in P(X) \quad \big(A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C\big)$$

پس رابطه‌ی فوق یک رابطه‌ی ترتیبی است. فرض کنیم X دارای دو عضو a, b باشد که $a \neq b$ در این صورت $\{b\} \not\subseteq \{a\}$ و $\{a\} \not\subseteq \{b\}$؛ پس $(P(X), \subseteq)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی نیست. $\square$

وقتی دامنهٔ تابعِ f زیرمجموعه‌ای از Y باشد، می‌گوییم $f : Y \to X$ یک «تابعِ جزئی» است.

مثال ۶.۱۳. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. قرار دهید

$$\mathcal{A} = \text{مجموعه‌ی همه‌ی توابع جزئی از } Y \text{ به } X$$

به بیان دیگر تابع f در $\mathcal{A}$ است هرگاه دامنه‌ی آن زیرمجموعه‌ای از Y و برد آن زیرمجموعه‌ای از X باشد. می‌خواهیم روی $\mathcal{A}$ یک رابطه‌ی ترتیبی تعریف کنیم. فرض کنید $f, g \in \mathcal{A}$. تعریف کنید

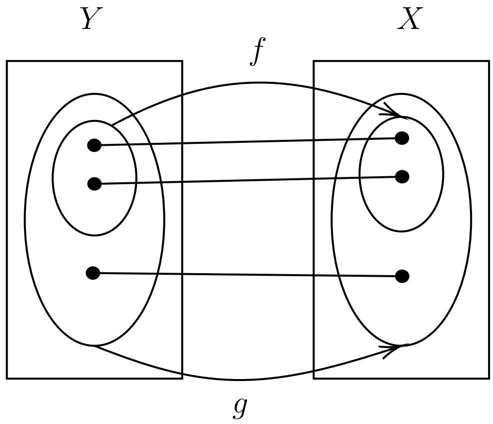
$$f \leqslant g \iff dom(f) \subseteq dom(g) \wedge \underbrace{g|_{dom(f)} = f}_{\text{تابعِ } f \text{ از محدود کردن تابع } g \text{ ایجاد شده است}}$$

به بیان دیگر می‌گوئیم تابع f از تابع g کمتر است هرگاه دامنه‌ی آن زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی g باشد و تابع g تعمیمی از تابع f باشد؛ یعنی

$$\forall x \in dom(f) \quad f(x) = g(x).$$

و باز به بیان دیگر تابع f از تابع g کمتر است هرگاه به عنوان دو مجموعه (یا به عنوان دو رابطه)،

$$f \subseteq g.$$



مثلاً اگر $f = \{(a,b),(c,d)\}$ آنگاه g می‌تواند به صورت زیر باشد

$$g = \{(a,b),(c,d),(h,k)\}$$

تمرین ۱.۱۳. نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی ترتیبی است ولی لزوماً خطی نیست (البته از آنجا که ترتیب فوق، عملاً زیرمجموعه بودن است، حل این تمرین آسان است).

مثال ۷.۱۳. روی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e\}$ می‌توانیم ترتیب زیر را با بیان این که کدام عناصر با هم در رابطهٔ ترتیبی هستند، در نظر بگیریم:

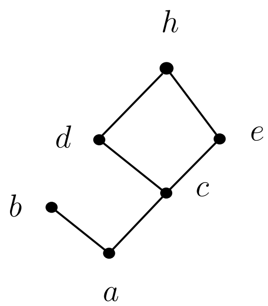
$$a \leqslant b, a \leqslant c \quad , \quad a \leqslant d, a \leqslant e$$

$$c \leqslant d, c \leqslant e$$

به بیان دیگر رابطهٔ ترتیبی مورد نظر ما شامل زوج‌های زیر است:

$$\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(c,d),(c,e),(a,h),(d,h),(c,h)\}$$

که آن را می‌توانیم به صورت زیر تجسم کنیم:



۲.۱۳ ماکزیمال، کران بالا و زنجیر

تعریف ۸.۱۳. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد. عنصر $a \in X$ را عنصر ماکزیمم (یا بیشینه) می‌خوانیم هرگاه این گونه باشد که

$$\forall x \in X \quad x \leqslant a.$$

دقت کنید که در تعریف ماکزیمم دو نکته نهفته است: اولاً هر عنصری با عنصر ماکزیمم قابل مقایسه است و ثانیاً هر عنصری از آن کمتر است. برای این که یک مجموعه، ماکزیمم داشته باشد نیازی نیست که همه‌ی اعضایش با هم قابل مقایسه باشند.

مثال ۹.۱۳. در مجموعهٔ مرتبِ $(\{4, 6, 12\}, |)$، عدد 12 ماکزیمم است زیرا $4|12$، $6|12$ و $12|12$.

مثال ۱۰.۱۳. مجموعه‌ی اعداد طبیعی با ترتیب عادی خود، دارای ماکزیمم (بیشینه) نیست. زیرا اگر $n \in \mathbb{N}$ آنگاه $n + 1 > n$.

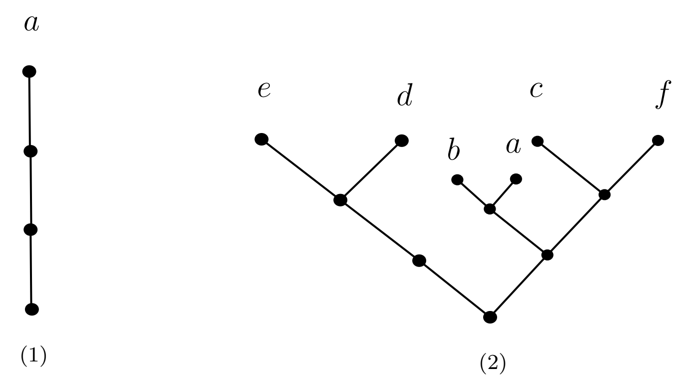
مثال ۱۱.۱۳. در $(P(X), \subseteq)$ مجموعه‌ی X ماکزیمم است.

اما فقط ماکزیمم بودن مهم نیست. گاهی یک عنصر از «تمام عناصری که با آن قابل مقایسه‌اند» بیشتر است:

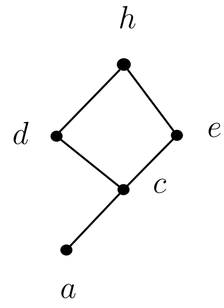
تعریف ۱۲.۱۳. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد. عنصر $a \in X$ را یک عنصر ماکزیمال (بیشینال) می‌خوانیم هرگاه این گونه باشد که

$$\neg(\exists x \in X \quad x > a).$$

پس باید دقت کنیم که هیچ عنصری ازعنصر ماکزیمال بیشتر نیست؛ اما عنصر ماکزیمال لزوماً با همه‌ی عناصر قابل مقایسه نیست. هر عنصری که با عنصر ماکزیمال قابل مقایسه باشد، از آن کمتر یا با آن مساوی است. برای مثال، دو مجموعهٔ مرتب را در نظر بگیرید که به صورت زیر مجسم شده‌اند:



در شکلِ 2 عنصر a ماکزیمم نیست. زیرا a با b قابل مقایسه نیست. اما a در شکل 1 ماکزیمم است. در همان شکلِ 2 تمامی عناصر $\{a, b, c, d, e, f\}$ ماکزیمال هستند ولی هیچ یک ماکزیمم نیستند. در شکل زیر عنصر h ماکزیمم است:



مثال ۱۳.۱۳. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. جملهٔ اول در زیر مشخصاً می‌گوید که a ماکزیمم است.

$$\forall x\in X \quad x\leqslant a$$

$$\exists x\in X \quad x>a$$

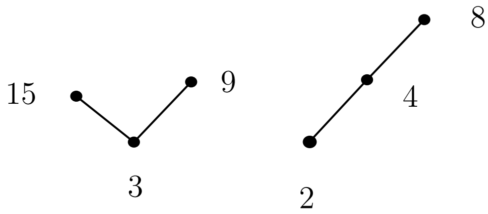
جملهٔ دوم، به نظر می‌آید که نقیض جملهٔ اول باشد؛ ولی این طور نیست! نقیض جملهٔ اول را بنویسید.

پاسخ. نقیض این که a ماکزیمم باشد، این است که عنصری پیدا شود که از آن کمتر یا مساوی نباشد. چنین عنصری یا از a بیشتر است یا با آن قابل مقایسه نیست:

$$\exists x\in X \quad \Big(x>a\vee \underbrace{\big(\neg(x\leqslant a)\wedge\neg(x\geqslant a)\big)}_{\text{قابل مقایسه نیستند.}}\Big)$$

$\square$

مثال ۱۴.۱۳. در $\Big(\{3,9,15,2,4,8\},|\Big)$ عناصر $9,15,8$ ماکزیمال هستند ولی هیچ یک ماکزیمم نیستند.



تعریف ۱۵.۱۳. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد و $A\subseteq X$. عنصر $a\in X$ را یک کران بالا برای A می‌خوانیم هرگاه a با همهٔ عناصر موجود در A قابل مقایسه باشد و

$$\forall x\in A \quad x\leqslant a$$

در تعریف بالا، ممکن است a در $X-A$ باشد. اگر $a\in A$ آنگاه a عنصر ماکزیممِ A است.

مثال ۱۶.۱۳. مجموعه‌ی مرتب $(\mathbb{R},\leqslant)$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $A=(0,1)$. مجموعه‌ی کران‌های بالای A برابر است با

$$\{x\in\mathbb{R}, 1\leqslant x\}.$$

در مثال بالا هیچ کدام از کران‌های بالای A در A واقع نشده است.

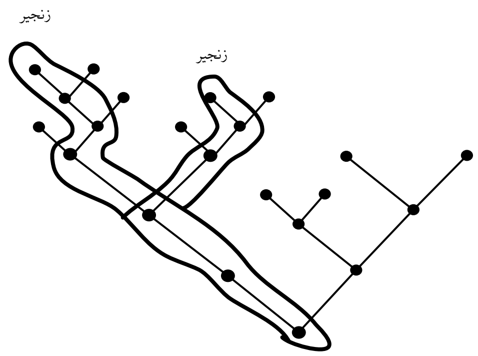
مثال ۱۷.۱۳. فرض کنید X یک مجموعهٔ نامتناهی باشد. مجموعهٔ مرتبِ $(P(X), \subseteq)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های متناهی X باشد. تنها کران بالا برای این مجموعه، خود X است و این کران بالا در A نیست.

همان طور که در مثال فوق نیز قابل مشاهده است، اگر $(X, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب باشد، برای تعریف کران بالا برای یک زیرمجموعه $A \subseteq X$ مرتب خطی یا جزئی بودن ترتیب مجموعهٔ X اهمیتی ندارد.

مثال ۱۸.۱۳. در $(\mathbb{N}, |)$ مجموعه‌ی اعداد اول دارای کران بالا نیست.

فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرتب جزئی متناهی باشد؛ یعنی X یک درخت متناهی باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که X دارای عنصر یا عناصر ماکزیمال است. کافی است هر یک از شاخه‌های درخت را طی کنیم تا به یک نقطه‌ی انتهائی برسیم؛ در این صورت عناصر انتهای هر شاخه، ماکزیمال هستند. حال اگر X یک مجموعه‌ی مرتب نامتناهی باشد، یعنی یک درخت نامتناهی باشد، وجود یا عدم وجود عناصر ماکزیمال در آن به راحتی قابل تشخیص نیست. در این حالت نمی‌توان یکی از شاخه‌ها را به راحتی ادامه داد و امیدوار بود که به پایان برسد! لم زرن یک محک برای تشخیص وجود عناصر ماکزیمال به دست می‌دهد.

تعریف ۱۹.۱۳. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. مجموعه‌ی $A \subseteq X$ را یک زنجیر در X می‌نامیم هرگاه $(A, \leqslant)$ مرتب خطی باشد.



یک زنجیر در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی در واقع یک «مسیر» در درخت آن است. توجه کنید که زنجیرها لزوماً متناهی یا شمارا نیستند یعنی همیشه نمی‌توان آنها را به صورت $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ نمایش داد. امکان دارد اندازه‌ی یک زنجیر ناشمارا باشد. مهم فقط این است که همه‌ی عناصر مجموعه‌ی زنحیر با هم قابل مقایسه هستند.

۳.۱۳ لم زُرن

گفتیم که لم زرن ابزار بسیار قدرتمندی در بسیاری اثباتهای ریاضیاتی، خصوصا در علم جبر است. در ابتدای این فصل گفتیم که این لم با اصل انتخاب معادل است؛ یعنی با استفاده از اصل انتخاب و سایر اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌توان لم زرن را اثبات کرد و نیز با استفاده از لم زرن و بقیه‌ی اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌توان اصل انتخاب را ثابت کرد. در منطق این گفته را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ZF + Zorn \Rightarrow C\ (= Choice)$$

$$ZFC \Rightarrow Zorn$$

[۲]

حال زمان مناسب برای پاسخ به اشتیاق خواننده به لم زرن فرارسیده است: فرض کنید که در داخلِ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی هستیم. فرض کنید از نقطه‌ای که در آن هستیم به صورت زنجیروار در داخل مجموعه حرکت می‌کنیم؛ یعنی از مسیری رد می‌شویم که همهٔ عناصرش با هم قابل مقایسه هستند، یا به بیان دیگر در طول یک زنجیر بالا می‌رویم. امکان دارد به سرعت به جائی برسیم که دیگر نتوان مسیر را ادامه داد؛ یعنی دیگر عنصر بزرگتری وجود نداشته باشد. آنجا یک عنصر ماکزیمال و یک اوج قله است.

با این حال امکان دارد مادامی که در راه هستیم انتهای مسیر را دقیقاً نبینیم ولی عنصری را از دور بینیم که معلوم است از همه‌ی عناصر زنجیر بزرگتر است. شاید انتهای زنجیر آنجا باشد و این مطلوب ماست! اما شاید آن نقطه فقط سراب باشد! شاید وقتی به آن نقطه رسیدیم ببینیم که راه ادامه دارد، ولی باز دوباره از دور چیزی را بزرگتر از همه‌ی عناصر ببینیم. دقیقاً مثل زمانی که کوه‌نوردی می‌کنیم و نقطه‌ای را قله‌ی اصلی تصور می‌کنیم ولی وقتی بدان می‌رسیم می‌بینیم که هنوز راه زیادی تا قله‌ی اصلی مانده است.

لم زرن به ما می‌گوید که مسیر بالاخره به پایانی خواهد رسید. در واقع لم زرن بیانگر این است که **در داخل یک مجموعه، زنجیری بی پایان به طول دنیای همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.** [۳] بیانی که در زیر آمده است، کمی کلی‌تر از این گفته است:

قضیه ۲۰.۱۳. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک **مجموعه‌ی مرتب جزئیِ ناتهی** باشد. اگر هر زنجیرِ $A \subseteq X$ دارای یک کران بالا در X باشد، آنگاه X دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال است.

دقت کنید که در لم زرن ادعا **نکرده‌ایم** که هر زنجیری که دارای کران بالاست، همان کران بالایش یک عنصر ماکزیمال است. در واقع اگر x یک کران بالا برای زنجیر A باشد، آنگاه $A\cup\{x\}$ نیز یک زنجیر است که به x ختم می‌شود. اگر بعد از x عنصری وجود نداشته باشد، آنگاه x انتهای زنجیر است ولی اگر عنصری وجود داشته باشد یعنی زنجیر $A\cup\{x\}$ را می‌توان ادامه داد. فرض لم زرن این است که این زنجیر جدید هم کران بالا داشته باشد. لم زرن را یک بار در بخشِ ۴.۱۳ و یک بار با تکنولوژی ساده‌تری در بخشِ ۳.۱.۱۴ اثبات کرده‌ایم. به خواننده‌ای که مشتاق دیدن اثبات است پیشنهاد می‌کنیم از سه تمرین زیر صرف نظر کند.

تمرین ۲.۱۳. نشان دهید که از لم زرن نتیجه می‌شود که هر عنصری در X کمتر یا مساویِ یک عنصر ماکزیمال است. به بیان دیگر با شروع از هر شاخه‌ی درخت به یک عنصر ماکزیمال خواهیم رسید.

تمرین ۳.۱۳. آیا مجموعه‌ی $(0,1)$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی، با ترتیب اعداد حقیقی، شرایط لم زرن را داراست؟ آیا مجموعه‌ی اعداد حقیقی با ترتیب خود، شرایط لم زرن را داراست؟

تمرین ۴.۱۳. فرض کنید که X یک مجموعه باشد و K یک ویژگی درباره‌ی زیرمجموعه‌های آن باشد به گونه‌ای برخی زیرمجموعه‌های X ویژگیِ K را داشته باشند و برخی نداشته باشند. همچنین فرض کنید که ویژگیِ K تحت اجتماع دلخواه بسته باشد؛ به بیان دیگر اگر $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ گردایه‌ای از عناصر باشند که هر کدام ویژگیِ K را داراست، آنگاه $\bigcup A_\gamma$ نیز ویژگیِ K را دارا باشد. نشان دهید که یک مجموعه‌ی ماکزیمال با ویژگیِ K وجود دارد؛ یعنی مجموعه‌ای وجود دارد که ویژگیِ K را داراست و هیچ مجموعه‌ای از آن بزرگتر پیدا نمی‌شود که ویژگیِ K را داراست.

---

[۲] «زُرن» را در برخی کتابها، به صورت تسرن می‌نویسند؛ بدین علت که z در زبان آلمانی، «تْزْ» خوانده می‌شود.

[۳] اثباتی که در فصلِ ۱۴ برای لم زرن آورده‌ایم این شهود را توجیه می‌کند.

۴.۱۳ اثبات لمِ زُرن با استفاده از اصل انتخاب

بهترین تکنولوژی برای اثبات لم زرن استفاده از ابزار اردینالهاست. اثبات لم زرن با این ابزار در بخشِ ۳.۱.۱۴ صورت گرفته است و خواننده می‌تواند پس از اندکی مطالعهٔ آن بخش، این اثبات را مشاهده کند. حقیقت آن است که اثباتی که در این بخش نوشته شده است نیز مبتنی بر همان ایده‌هاست؛ ولی از آوردن نام ترسناک «اردینال» در آن صرف نظر شده است. هدف ما از بیان اثبات در این بخش، این است که برای مدرسی که در یک دوره تدریس به مبحث اردینالها نمی‌رسد، بیان ایدهٔ اثبات لم زرن میسر باشد. به همین دلیل، در عین حال برخی جزئیات مهم اثبات را به صورت تمرین رها کرده‌ایم تا از شلوغ شدن اثبات جلوگیری کنیم و اجازه دهیم جریان اثبات ادامه داشته باشد.

در ادامه به اثبات لم زرن، با **فرض درست بودن اصل انتخاب** پرداخته‌ایم. ایده‌ی کلی اثبات لم زرن به صورت زیر است:

اگر لم زرن درست نباشد، یعنی اگر مجموعه‌ی X، در عین داشتن شرایط لم زرن، هیچ عنصر ماکزیمالی نداشته باشد، آنگاه اگر یک عنصرِ دلخواهِ $x_0 \in X$ را انتخاب کنیم، این عنصر، ماکزیمال نیست؛ یعنی از آن عنصری بزرگتر مانند x_1 پیدا می‌شود. پس

$$x_0 < x_1$$

اما خودِ x_1 نیز ماکزیمال نیست پس عنصری از آن بزرگتر پیدا می‌شود؛ بدین ترتیب زنجیری مانند زیر داریم:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$$

اما کار در اینجا ختم نمی‌شود. هیچ عنصری وجود ندارد که در انتهای این زنجیر، حتی پس از شمارا مرتبه قرار بگیرد؛ زیرا از آن عنصر بزرگتر هم وجود دارد. پس طول زنجیری که می‌توان بدین طریق ساخت، از هر چه مجموعه وجود دارد، بیشتر است و این یک تناقض است. در ادامه این ایده را دقیق‌تر کرده‌ایم. البته آماده باشید زیرا اثبات پیش رو اثبات آسانی نیست! [۴]

فرض کنید اصل انتخاب درست باشد و X یک مجموعه باشد که شرایط ذکر شده در لم زرن را داراست. می‌دانیم که هر زنجیر در X دارای حداقل یک کران بالاست. با استفاده از اصل انتخاب، برای هر زنجیرِ A در X یک کرانِ بالای x_A انتخاب می‌کنیم.

در ادامه به نوع خاصی از زنجیرها علاقه‌مند هستیم. این زنجیرها ساختاری وابسته به تابع انتخاب دارند؛ مثلاً اگر $x_1 < x_2 < x_3$ چنین زنجیری باشد، آنگاه x_3 همان کران بالائی است که تابع انتخاب مورد نظر ما برای زنجیرِ $x_1 < x_2$ انتخاب کرده است و x_2 همان کران بالائی است که تابع انتخاب ما برای زنجیر تک عضویِ x_1 انتخاب کرده است. چنین زنجیری را مطلوب می‌نامیم. در زیر این گفته را دقیقتر کرده‌ام. ابتدا یک عنصرِ $c \in X$ را در نظر بگیرید.

زنجیرِ A را یک زنجیر **مطلوب** بنامید هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد:

- $c = \min A$.
- هر زیرمجموعه از A دارای عنصر مینی‌موم باشد.

[۴] همان طور که گفته شد بخشهای مهمی از اثبات را به عنوان تمرین رها کرده‌ایم، خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند اثبات کامل را در فیلم هیجدهم از فیلمهای درس در لینک زیر به طور دقیق مشاهده کند: https://www.aparat.com/v/K4F1B?playlist=252517

- هر عنصر در این زنجیر، کران بالای عناصر قبلی این زنجیر باشد؛ همان کران بالائی که تابع انتخابمان انتخاب کرده است.

زنجیرهای مطلوب دارای ویژگی‌های جالبی هستند:

تمرین ۵.۱۳. اگر A, B دو زنجیر مطلوب باشند آنگاه $A \cap B$ نیز یک زنجیر مطلوب است.

تمرین ۶.۱۳ (نسبتاً سخت)**.** فرض کنید که A, B دو زنجیر مطلوب باشند. نشان دهید که در این صورت یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

تمرین ۷.۱۳ (نسبتاً سخت)**.** اگر $A \subseteq B$ دو زنجیر مطلوب باشند آنگاه A یک بخش ابتدائیِ B است؛ یعنی: [۵]

$$\forall x \in A \quad \{y \in A | y < x\} = \{y \in B | y < x\}.$$

خواننده‌ی بالغ‌تر می‌تواند سایه‌ی اردینالها را در تمرینهای بالا ببیند؛ چون زنجیرهای مطلوب در واقع، همه در امتداد هم قرار دارند:

بنا به تمرین بالا، حال یک ترتیب روی مجموعه‌ی زنجیرهای مطلوب تعریف می‌کنم. برای دو چنین زنجیری می‌نویسیم

$$A \leq B$$

هرگاه

$$A \subseteq B.$$

به بیان دیگر زنجیر B را از زنجیر A بزرگتر می‌گیریم زمانی که از ادامه دادن زنجیر A ایجاد شده باشد. در تمرین زیر، می‌بینیم که اجتماع همهٔ زنجیرهای مطلوب که در پشت سر هم قرار می‌گیرند، خودْ ویژگی زنجیر مطلوب بودن را داراست:

تمرین ۸.۱۳. فرض کنید که $\{A_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر (با ترتیب شمول) از زنجیرهای مطلوب باشد، نشان دهید که $\bigcup_{i \in I} A_i$ نیز خودْ یک زنجیر مطلوب است.

اما دقت کنید که مجموعه‌ی همه‌ی زنجیرهای مطلوب، با ترتیب شمول، بنا به تمرینِ ۶.۱۳ خود تشکیل یک زنجیر می‌دهد. به طور خاص اجتماع همه‌ی زنجیرهای مطلوب، خود یک زنجیر است. پس بنا به شرایط ذکر شده برای مجموعه‌ی X این زنجیر دارای یک کران بالا در X است. اگر این کران بالا در خودِ زنجیر باشد، یک عنصر ماکزیمال است و قضیه ثابت می‌شود. اما اگر این کران بالا در خودِ زنجیر نباشد آنگاه با اضافه کردن آن به این زنجیر به زنجیر مطلوب بزرگتری می‌رسیم و این متناقض با این فرض است که زنجیر ما اجتماع همه‌ی زنجیرهای مطلوب است.

---

[۵] در فیلمهای درس که روی آپارات قرار دارند، اثبات به طور کامل بیان شده و پاسخ این تمرینها گفته شده است.

۵.۱۳ اثبات اصل انتخاب با استفاده از لم زرن

بر خلاف اثبات قبلی، نتیجه گرفتن اصل انتخاب از لم زُرن کار دشواری نیست:

قضیه ۲۱.۱۳. اصل انتخاب از لم زُرن نتیجه می‌شود.

بیایید یک بار دیگر اصل انتخاب را یادآوری کنیم: اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه یک تابع $f : I \to \bigcup A_i$ موجود است به طوری که

$$\forall i \in I \quad f(i) \in A_i.$$

قبلاً گفتیم که اگر A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد برای انتخاب یک عنصر در A نیازی به اصل انتخاب نداریم. همچنین اگر $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌ها باشد، برای انتخاب عناصرِ $a_i \in A_i$ نیازی به اصل انتخاب نداریم. تنها وقتی که خانواده‌ی مورد نظر نامتناهی است به این اصل نیاز است.

در زیر ثابت خواهیم کرد که اصل انتخاب چگونه از لم زُرن نتیجه می‌شود. عموماً وقتی می‌خواهیم اثبات یک قضیهٔ پیچیده را بیان کنیم، مطلوب است که نخست دورنمایی از مراحل اثبات را توضیح بدهیم. چه این قضیه توسط خود ما اثبات شده باشد یا شخص دیگری، این روش بیان، فهم اثبات را آسان‌تر می‌کند. یادمان باشد که در نوشتن متون ریاضی، حق نداریم خوانندهٔ با دانش در سطح نوشتهٔ خود را در فهم آن نوشته به چالش بیندازیم.

فرض کنید که لم زرن درست باشد. حال فرض کنید که $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. برای پیدا کردنِ یک تابع انتخاب از I به $\bigcup A_i$، روی **مجموعه‌ی همه‌ی توابع جزئیِ انتخاب** یک ترتیب جزئی تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از لمِ زرن یک تابع انتخاب ماکزیمال پیدا می‌کنیم؛ که همان تابع انتخابِ مورد نیاز ما خواهد بود.

اثبات قضیه‌ی ۲۱.۱۳. فرض کنید لم زُرن درست باشد. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{A} = \{(f,J) | J \subseteq I \text{ و } f : J \to \bigcup_{i\in I} A_i \text{ یک تابع است } \text{ و } \forall j \in J \quad f(j) \in A_j\}$$

به بیان دیگر $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی همه‌ی **توابعِ جزئیِ** انتخاب است (که به همراه دامنه‌شان نوشته شده‌اند). هر کدام از این توابع، به ازای تعدادی از اندیسها، عمل انتخاب را انجام می‌دهند. نخست ادعا می‌کنیم که $\mathcal{A} \neq \emptyset$. به بیان دیگر ادعا می‌کنیم که یک سری توابع جزئی انتخاب در هر صورت وجود دارند.

اثبات ادعا. فرض کنید $i_0 \in I$. از آنجا که $A_{i_0} \neq \emptyset$. فرض کنید $a_{i_0} \in A_{i_0}$. تابع زیر در $\mathcal{A}$ است.

$$\{i_0\} \xrightarrow{f} \bigcup A_{i_0}$$

$$i_0 \mapsto a_{i_0}$$

به بیان دیگر $(f,\{i_0\}) \in \mathcal{A}$. □

پایان اثبات ادعا

حال روی $\mathcal{A}$ ترتیب زیر را تعریف می‌کنیم:

تابع جزئی انتخابِ f_2 را از تابعِ جزئیِ انتخابِ f_1 بزرگتر می‌خوانیم هرگاه f_2 انتخابهای f_1 را حفظ کند و انتخابهای دیگری نیز بر آنها بیفزاید. به بیان دقیقتر ریاضی:

$$(f_1,J_1) \leqslant (f_2,J_2) \iff (J_1 \subseteq J_2 \wedge f_2|_{J_1} = f_1)$$

و باز به بیان دیگر

$$(f_1, J_1) \leqslant (f_2, J_2) \iff J_1 \subseteq J_2 \wedge \forall j \in J_1 \quad f_1(j) = f_2(j)$$

و باز به بیان دیگر

$$(f_1, J_1) \leqslant (f_2, J_2) \iff \underbrace{f_1}_{\{(i,f_1(i))|i\in J_1\}} \subseteq \underbrace{f_2}_{\{(i,f_2(i))|i\in J_2\}}$$

اثبات این که رابطهٔ بالا یک رابطهٔ ترتیب است، آسان است؛ زیرا بنا به آخرین بیان در بالا، عملاً با رابطهٔ زیرمجموعه بودن سروکار داریم.

تمرین ۹.۱۳. نشان دهید که رابطه‌ی بالا رابطه‌ی ترتیبی است. (یعنی انعکاسی، پادتقارنی و متعدی است).

پس تا اینجا دیدیم که مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ یک مجموعه‌ی مرتب ناتهی است. حال در ادامه نشان می‌دهیم که هر زنجیر در این مجموعه، دارای یک کران بالاست، یعنی این مجموعه در شرط لم زرن صدق می‌کند.
فرض کنید $\{(f_k, J_k)\}_{k\in K}$ زنجیری در $\mathcal{A}$ باشد. دقت کنید که از آنجا که طول زنجیر لزوماً شمارا نیست، مجموعهٔ اندیس آن را $\mathbb{N}$ ننوشته‌ایم. ادعا می‌کنیم که این زنجیر در $\mathcal{A}$ یک کران بالا دارد. زوجِ $(h, L) \in \mathcal{A}$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم و ادعا می‌کنیم که این زوج، کران بالای زنجیر یادشده است. فرض کنید h یک تابع باشد که دامنه‌ی آن، مجموعه‌ی $\bigcup J_k$ است. همچنین فرض کنید که ضابطه‌ی این تابع به صورت زیر باشد:

$$x \in J_k \Rightarrow \quad h(x) = f_k(x)$$

تمرین ۱۰.۱۳. نشان دهید که $(h, L) \in \mathcal{A}$ و برای هر تابعِ (f_k, J_k) در زنجیر یادشده داریم $(f_k, J_k) \leq (h, L)$.

می‌دانیم که هر تابع، یک مجموعه است. از لحاظ مجموعه‌ای، تابعِ h در بالا، همان مجموعهٔ $\bigcup_{k\in K} f_k$ است (همچنین خوب است که تمرینِ ۳۱.۹ را مشاهده کنید)
پس $\mathcal{A}$ شرایط استفاده از لم زرن را داراست. از این رو، بنا به لم زُرن، دارای یک عنصر ماکزیمال است. فرض کنید (p, Q) عنصر ماکزیمالِ $\mathcal{A}$ باشد. کافی است ثابت کنیم که

$$Q = I$$

اگر عبارت بالا ثابت شود، از آنجا که $(p, Q) \in \mathcal{A}$ و بنا به نحوه‌ی تعریفِ $\mathcal{A}$ تابع $p : I \to \bigcup A_i$ یک تابع انتخاب خواهد بود. در واقع وقتی نشان می‌دهیم که دامنهٔ تابعِ p کلِ I است، یعنی این تابع دیگر «جزئی» نیست، بلکه یک تابع انتخاب است.
فرض کنید $Q \neq I$ و $i \in I - Q$. فرض کنید $a_i \in A_i$ عنصر دلخواهی باشد. داریم

$$\underbrace{p \cup \{(i, a_i)\}}_{r} \in \mathcal{A}$$

و

$$P \lneqq r$$

و این با ماکزیمال بودن p متناقض است. در واقع نشان دادیم که اگر p یک تابع انتخاب نباشد، آنگاه یک تابعِ انتخابِ جزئیِ بزرگتر از آن در مجموعهٔ $\mathcal{A}$ پیدا می‌شود و این ماکزیمال بودن تابعِ p در مجموعهٔ $\mathcal{A}$ را نقض می‌کند. $\square$

بیایید یک بار دیگر اثبات را مرور کنیم. فرض کنیم لم زرن درست باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که اصل انتخاب درست است. فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و به دنبال یک تابع انتخاب از I به $\bigcup A_i$ هستیم. نخست مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{A} = \{(f,J) | J\subseteq I, \quad \forall j\in J \quad f(j)\in A_j \text{ و } f: J\to \bigcup_{i\in I} A_i \text{ یک تابع است}\}$$

روی مجموعه‌ی بالا یک ترتیب تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با آن ترتیب، مجموعه بالا یک مجموعه‌ی ناتهی مرتب است. سپس نشان می‌دهیم که هر زنجیر با آن ترتیب دارای یک کران بالاست، پس مجموعه‌ی بالا در شرایط لم زرن صدق می‌کند، پس عنصر ماکزیمال دارد. عنصر ماکزیمال این مجموعه، همان تابع انتخابی است که در پی آن هستیم.
این بخش را با یک قضیه‌ی خیلی زیبا به پایان می‌بریم. می‌دانیم که اعداد طبیعی همیشه با هم قابل مقایسه‌اند؛ یعنی اگر m,n دو عدد طبیعی باشند همواره یا $m\leq n$ یا $n\leq n$. در درسهای گذشته با اعداد جدیدی به نام کاردینالها آشنا شدیم و برای آنها یک ترتیب تعریف کردیم. گفتیم که اگر u,v دو کاردینال باشند و $u=\mathbf{card}(A)$ و $v=\mathbf{card}(B)$ آنگاه می‌گوییم $u\leq v$ هرگاه یک تابع یک به یک از A به B موجود باشد. حال طبیعی است از خودمان بپرسیم که آیا لزوماً دو کاردینال با هم قابل مقایسه‌اند؟ به بیان دیگر اگر A,B دو مجموعه باشند آیا لزوماً یا تابعی یک به یک از A به B موجود است یا تابعی یک به یک از B به A؟ پاسخ سوال بالا (در نتیجه‌ی لم زرن) مثبت است.

قضیه ۲۲.۱۳. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی دلخواه باشند. آنگاه یا یک تابعِ یک‌به‌یک از X به Y وجود دارد و یا یک تابع یک‌به‌یک از Y به X وجود دارد. در نتیجه اگر α,β دو کاردینال باشند، آنگاه یا $\alpha\leqslant\beta$ یا $\beta\leqslant\alpha$.

اثبات. ایدهٔ اثبات پیش رو مشابه ایدهٔ اثبات قضیهٔ قبل است، پس در بیان آن کمی خلاصه‌گویی کرده‌ایم. مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را متشکل از تمامی توابع جزئی یک به یک از X به Y بگیرید؛ به بیان دیگر قرار دهید:

$$\mathcal{A} = \{(f,Z) | Z\subseteq X, \quad f: Z\to Y \text{ یک تابع یک به یک است}\}$$

توجه کنید که $\mathcal{A}\neq\emptyset$. زیرا اگر $z_0\in X$ و $y_0\in Y$ آنگاه تابع $f=\{(z_0,y_0)\}$ در $\mathcal{A}$ است. به بیان دقیقتر $(f,\{z_0\})\in\mathcal{A}$. ترتیب زیر را روی $\mathcal{A}$ تعریف کنید:

$$(f_1,Z_1)\leqslant(f_2,Z_2) \iff f_1\subseteq f_2$$

فرض کنید $\{(f_j,Z_j)\}_{j\in J}$ زنجیری در A باشد آنگاه این زنجیر دارای یک کران بالا در $\mathcal{A}$ است که این کران بالا، مشابه قضیه‌ی قبل، اجتماع تمام توابع به کار رفته در این زنجیر است. بنا به لم زرن، $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکزیمال است. فرض کنید تابع جزئیِ $P: Z\to Y$ عنصر ماکزیمال مورد نظر باشد. به بیان دیگر فرض کنید $(P,Z)\in\mathcal{A}$ ماکزیمال باشد. اگر $Z=X$ حکم اثبات شده است، یعنی تابع یک به یکِ P از X به Y پیدا شده است و این مطلوبِ قضیه است. اما اگر $Z\neq X$ آنگاه از دو حال خارج نیست.

۱. یا P پوشاست.

۲. یا P پوشا نیست (مثلاً P عنصر $y\in Y$ را نمی‌پوشاند).

در حالتی که P پوشا نیست، فرض کنید $x \in X - Z$. حال $P \cup \{(x,y)\} \in \mathcal{A}$ و این ماکزیمال بودن P را نقض می‌کند.
در حالتی که P پوشا است، بنا به قضیهٔ ۲۳.۹ یک تابع یک‌به‌یک از Y به X موجود است. $\square$

تمرین ۱۱.۱۳. فرض کنید که $\mathcal{A}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد که تحت اجتماع زنجیرها بسته است؛ یعنی اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathcal{A}$ باشد، به طوری که برای هر $i < j \in I$ داریم $A_i \subseteq A_j$، آنگاه $\bigcup A_i \in \mathcal{A}$. نشان دهید که $\mathcal{A}$ حاوی یک مجموعه است که زیرمجموعه‌ی سره‌ی هیچکدام از مجموعه‌های موجود در $\mathcal{A}$ نیست.

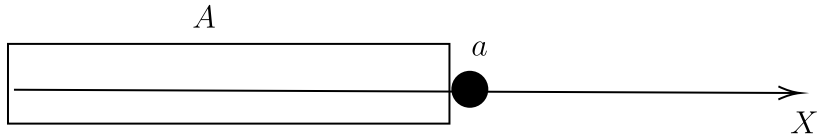
تمرین ۱۲.۱۳. فرض کنید همهٔ افراد یک جامعهٔ نامتناهی (!) را با رابطهٔ «دانایی» مرتب جزئی کرده‌ایم، بدین صورت که در مورد برخی افراد می‌دانیم چه کسی از چه کسی داناتر است، اما داناتر بودن برخی از افراد نسبت به هم را اطلاع نداریم. همچنین فرض کنید که می‌دانیم که همیشه وقتی یک تعداد آدم را در نظر می‌گیریم، یک نفر داناتر از همه‌شان وجود دارد. نشان دهید که یک نفر هست که از او داناتر کسی نیست.

۶.۱۳ اصل خوش‌ترتیبی

یک صورت دیگر از اصل انتخاب یا لم زرن، اصل خوش‌ترتیبی است. بنا به این اصل روی هر مجموعه‌ای می‌توان یک ترتیب مطلوب قرار داد.

تعریف ۲۳.۱۳. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب خطی باشد. (یعنی یک مجموعه‌ی مرتب باشد که همه‌ی اعضای آن با هم قابل مقایسه‌اند). می‌گوییم $(X, \leqslant)$ خوش ترتیب است هرگاه هر زیرمجموعه از X دارای یک مینی‌موم باشد (به بیان دیگر هر زیرمجموعه‌ای یک عضو ابتدا داشته باشد).

خوش‌ترتیبی عملاً به این معنی است که همیشه وقتی بخشی از مجموعهٔ X را جدا می‌کنیم، قسمت باقی‌مانده دارای اولین عنصر است؛ یعنی مثلاً اگر A یک بخش ابتدایی از مجموعهٔ X باشد، عنصری در X مانندِ a وجود دارد که بلافاصله به A «چسبیده» است. این عنصر، مینی‌مومِ باقی‌ماندهٔ X است:



مثال ۲۴.۱۳. در قضیهٔ ۶.۴ اثبات کردیم که $(\mathbb{N}, \leqslant)$ خوش ترتیب است.

مثال ۲۵.۱۳. $(\mathbb{R}, \leqslant)$ خوش ترتیب نیست. برای مثال بازه‌ی $\mathbb{R} \supseteq (0,1)$ دارای مینی‌موم نیست. همچنین $(-\infty, 0)$ مینی‌موم ندارد.

تمرین ۱۳.۱۳. دقیقاً با همان ایدهٔ اثباتِ قضیهٔ ۶.۴ نشان دهید که $(X, \leq)$ خوش‌ترتیب است اگروتنهااگر هیچ دنباله‌ی نزولیِ

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots$$

از اعضای X پیدا نشود. به نقش اصل انتخاب در این اثبات دقت داشته باشید.

تمرین ۱۴.۱۳. نشان دهید که اصل انتظام بیانگر این است که $(V,\in)$ خوش‌ترتیب است.

قضیه ۲۶.۱۳ (اصل خوش ترتیبی)**.** فرض کنید X یک مجموعه باشد. می‌توان یک ترتیبِ $\leqslant$ روی X قرار داد، به طوری که $(X,\leqslant)$ خوش ترتیب باشد.

دقت کنید که $\mathbb{R}$ با ترتیب معمولی خودش، خوشترتیب نیست؛ ولی بنا به اصل خوشترتیبی می‌توان یک ترتیب دیگر روی آن در نظر گرفت که با آن ترتیب، خوش ترتیب باشد.

قضیه ۲۷.۱۳. اصل انتخاب از اصل خوش ترتیبی نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید اصل خوش ترتیبی درست باشد. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. هدفمان، تعریف یک تابع $f:I\to\bigcup A_i$ است به طوری که $\forall i\in I \quad f(i)\in A_i$. اگر این هدف برآورده شود، در واقع اصل انتخاب را اثبات کرده‌ایم.

از آنجا که اصل خوش ترتیبی را داریم، می‌دانیم که روی هر A_i یک ترتیب $\leqslant_i$ وجود دارد به طوری که $(A_i,\leqslant_i)$ خوش ترتیب است. پس تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(i)=\min_{\leqslant_i} A_i$$

□

برای اثبات اصل انتخاب با استفاده از خوشترتیبی، تابع انتخاب را تابعی در نظر گرفته‌ایم که از هر مجموعه، مینی‌موم آن را برمی‌دارد. در اینجا دیگر تابع انتخاب دارای یک ضابطه است و وجودش به اصل انتخاب نیازی ندارد.

در زیر نشان داده‌ایم که چگونه با استفاده از لم زرن می‌توان اصل خوشترتیبی را ثابت کرد.

قضیه ۲۸.۱۳. لم زُرن اصل خوش ترتیبی را نتیجه می‌دهد.

اثبات. یادآوریِ می‌کنیم که بنا به لم زرن، اگر $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و ناتهی باشد به طوری که هر زنجیر $A\subseteq X$ دارای کران بالا در X باشد، آنگاه X دارای یک عنصرِ ماکزیمال است.

بیایید دوباره پیش از وارد شدن به جزئیات اثبات، روش آن را توضیح دهیم: یک مجموعهٔ دلخواه را در نظر می‌گیریم، روی بخشهایی از آن که به صورت اتفاقی خوش‌ترتیب هستند، یک ترتیب تعریف می‌کنیم. ترتیب این بخش ها در شرایط لم زرن صدق خواهد کرد، پس یک بخش خوش‌ترتیبِ ماکزیمال پیدا می‌شود. نشان می‌دهیم که این بخشِ خوش‌ترتیب ماکزیمال، همان کل مجموعه است.

و اما بیان اثبات به صورت رسمی؛ فرض کنیم لم زُرن درست باشد و Y یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. هدفمان تعریف یک ترتیبِ $\leqslant_Y$ روی Y است به طوری که $(Y,\leqslant_Y)$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد.

مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را متشکل از بخشهایی از Y در نظر می‌گیریم که به طور اتفاقی دارای یک ترتیب خوش‌ترتیب هستند؛ به طور دقیق‌تر:

$$\mathcal{A}=\{(B,\leqslant_B)|\text{یک مجموعه‌ی خوش ترتیب است } (B,\leqslant_B) \text{ و } B\subseteq Y\}$$

ادعا می‌کنیم که چنین بخشهایی وجود دارند؛ یعنی $\mathcal{A}$ ناتهی است. فرض کنید $y_0\in Y$. روی $\{y_0\}$ ترتیب زیر را در نظر بگیرید:

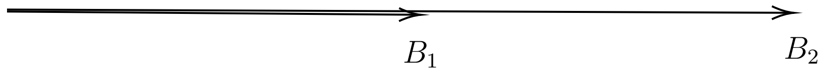
$$y_0\leqslant y_0$$

مجموعه‌ی $\{y_0\}$ به همراه ترتیبِ بالا در $\mathcal{A}$ است. پس $\mathcal{A} \neq \emptyset$. در گام دوم، روی $\mathcal{A}$ یک ترتیب تعریف می‌کنیم. تعریف کنید:

$$(B_1, \leqslant_{B_1}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_2, \leqslant_{B_2}) \iff (B_1 \subseteq B_2) \wedge \text{باشد } \leqslant_{B_1} \text{ گسترشی از ترتیب } \leqslant_{B_2}$$

$$\wedge \quad \forall b_1 \in B_1 \forall b_2 \in B_2 \quad b_1 \leq_{B_2} b_2$$

در واقع B_1 را زمانی کمتر از B_2 گرفته‌ایم که B_1 بخشی از B_2 باشد و در ابتدای آن قرار گرفته باشد:



در گام سوم ادعا می‌کنیم که هر زنجیر در $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای کران بالا در $\mathcal{A}$ است. فرض کنید

$$(B_1, \leqslant_{B_1}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_2, \leqslant_{B_2}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_3, \leqslant_{B_3}) \leqslant_{\mathcal{A}} \ldots$$

یک زنجیر دلخواه در $\mathcal{A}$ باشد. [۶] ادعا می‌کنیم که این زنجیر دارای کران بالا در $\mathcal{A}$ است: قرار دهید $B = \bigcup B_i$ و روی B ترتیب زیر را تعریف کنید.

$$x \leqslant_B y \Leftrightarrow \exists i \quad x, y \in B_i \quad x \leqslant_{B_i} y$$

تمرین ۱۵.۱۳. نشان دهید که $(B, \leqslant_B) \in \mathcal{A}$ و همچنین نشان دهید که $(B, \leqslant_B)$ یک کران بالا برای زنجیر یادشده است.

احتمالاً قسمت سختِ حل تمرین بالا نشان دادن این است که هر زیرمجموعه از B دارای یک مینیموم است؛ پس بیایید این گفته را اثبات کنیم. فرض کنید $C \subseteq B$. می‌خواهیم عنصر مینی‌مومِ C را بیابیم. از آنجا که $C \subseteq \bigcup B_i$ واضح است که i وجود دارد به طوری که

$$C \cap B_i \neq \emptyset.$$

می‌دانیم که $C \cap B_i \subseteq B_i$ پس از آنجا که B_i خوش‌ترتیب است، $C \cap B_i$ دارای یک عنصر مینی‌موم است. فرض کنیم نام این عنصر t باشد. ادعا می‌کنیم که $t = \min C$. فرض کنید $y \in C$ عنصر دلخواهی باشد. کافی است نشان دهیم که $t \leq y$. از آنجا که $y \in C \subseteq \bigcup B_i$ می‌دانیم که $i_1 \in I$ وجود دارد به طوری که $y \in B_{i_1}$. از آنجا که B_i ها زنجیر می‌سازند، یا $B_i \subseteq B_{i_0}$ یا $B_{i_0} \subseteq B_i$. اگر $B_i \subseteq B_{i_0}$ آنگاه هر عنصر در B_i از تمام عناصرِ B_{i_0} کمتر است، پس $t \leq y$. اگر $B_{i_0} \subseteq B_i$ آنگاه $C \cap B_{i_0} \subseteq C \cap B_i$ و از این رو $\min C \cap B_i$ از تمامِ عناصرِ $C \cap B_{i_0}$ از جمله y کمتر است.

پس (بعد از حل تمرین بالا) هر زنجیر در $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای کران بالاست . بنا به لم زُرن $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال به نام $(C, \leqslant_C)$ است.

ادعا می‌کنیم که $C = Y$. اگر این ادعا اثبات شود، در واقع اثبات شده است که خودِ Y خوش‌ترتیب است.

برای اثبات ادعا فرض کنید $y_0 \in Y - C$. هدفمان در اینجا پیدا کردن یک عنصر بزرگتر از $(C, \leqslant_C)$ در $\mathcal{A}$ است. قرار دهید $C' = C \cup \{y_0\}$ و فرض کنید $\forall c \in C \quad y_0 \geqslant c$. آنگاه $(C', \leqslant_{C'}) \in \mathcal{A}$ و $(C', \leqslant_{C'}) \gneqq_{\mathcal{A}} (C, \leqslant_C)$ و این متناقض با فرضِ ماکزیمال بودن C است. $\square$

---

[۶] زنجیرها می‌توانند ناشمارا باشند و اینجا تنها برای سادگی، زنجیر را شمارا گرفته‌ایم.

دقت کنید که در بالا با استفاده از لم زرن ثابت کردیم که روی هر مجموعه‌ای می‌توان یک ترتیب تعریف کرد که مجموعه‌ی مورد نظر با آن خوشترتیب باشد. در اثبات بالا، تنها وجود یک ترتیب را ثابت کردیم بی آنکه کوچکترین ایده‌ای درباره‌ی چگونگی این ترتیب به دست بدهیم. این نوع اثباتها از توانِ بالای لم زرن ناشی می‌شوند. در درسهای جبری (احتمالاً در ترمهای آینده) قضایای فراوانی را خواهید دید که همه بر پایه‌ی لم زرن بنا شده‌اند.

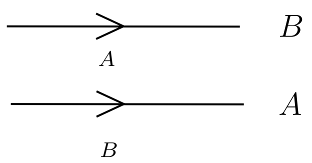
تا اینجا ثابت کرده‌ایم که:

اصل خوش‌ترتیبی $\longrightarrow$ لم زرن $\longleftrightarrow$ اصل انتخاب

در واقع نشان داده‌ایم که سه اصل بالا با هم معادلند؛ هر کدام از دیگری نتیجه می‌شوند.

اصل خوشترتیبی مقدمه‌ی مقوله‌ی مهم دیگری در نظریه‌ی مجموعه‌ها، به نام اُردینالها است که در بخش بعدی بدان ورود خواهیم کرد. در پایان این بخش، ایده‌ای از اردینالها را فراهم آورده‌ایم:

گفتیم که بنا اصل خوشترتیبی هر مجموعه‌ای را می‌توان دارای ترتیبی فرض کرد که با آن ترتیب خوشترتیب باشد. اگر $(A,\leqslant_A)$ و $(B,\leqslant_B)$ خوش ترتیب باشند آنگاه (بنا به قضیه‌ای) یا A بخشی آغازین از B است یا B بخشی آغازین از A است.



منظور از این که A بخش آغازینِ B است، عبارت زیر است:

$$\exists y\in B \quad A=\{x\in B | x\leqslant y\}$$

پس مجموعه‌های خوشترتیب همه مانند اعداد پشت سر هم قابل مرتب شدن‌اند. به اعدادی که از این طریق حاصل می‌شوند، اعداد ترتیبی، یا **اردینالها** گفته می‌شود. برخی از اردینالها را در زیر نوشته‌ایم:

$$0,1,2,\ldots,\omega,\omega+1,\omega{+}2,\ldots,\omega+\omega,\omega{+}\omega{+}\omega,\ldots,\omega.\omega,\omega.\omega{+}1,\ldots,\omega.\omega{+}\omega,\ldots,\omega^3,\ldots,\omega^\omega,\ldots$$

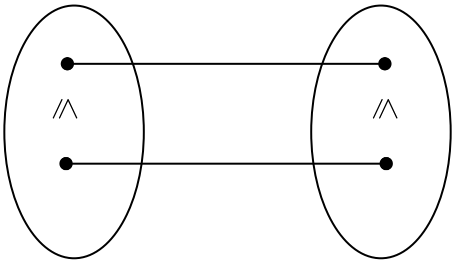
دقت کنید که اردینالهای $\omega,\omega+1,\omega+2,\ldots,\omega+\omega$ و بسیاری اردینالهای دیگر بعد از آنها، از لحاظ کاردینالی همه برابر با $\aleph_0$ هستند. به بیان دیگر اگر ترتیب روی آنها در نظر گرفته نشود، همه، هم‌اندازه با $\aleph_0$ هستند. اما وقتی پای ترتیب به میان می‌آید، $\omega+1$ دارای عنصری است که از همه‌ی عناصرِ ω بزرگتر است؛ پس $\omega+1$ از لحاظ اردینالی با ω برابر نیست. حساب اردینالها داستان مفصل خود را دارد: روی آنها هم جمع و ضرب و توان تعریف می‌شود و این اعمال، با آنهائی که برای کاردینالها تعریف کردیم کاملاً متفاوتند. در زیر، تعریف دقیقتری برای اردینالها ارائه کرده‌ایم.

تعریف ۲۹.۱۳. اگر X و Y دو مجموعه باشند که بنا به اصل خوش‌ترتیبی دارای ترتیب خوش‌ترتیب هستند. می‌گوییم X و Y یک اُردینال یکسان هستند (یا دارای نوع ترتیبیِ یکسانند) هر گاه

$$\exists \quad \overset{\text{یک به یک و پوشا}}{\overset{\uparrow}{f}} \quad : (X,\leqslant_X)\to(Y,\leqslant_Y)$$

به طوری که

$$\forall x,x'\in X \quad \Big(x\leqslant_X x'\to f(x)\leqslant_Y f(x')\Big)$$



پس این که دو مجموعه دارای نوع ترتیبی یکسان هستند، یعنی هم تعداد اعضای آنها برابر است و هم ترتیب اعضا یکسان است. تعریف بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی به دست می‌دهد که هر کلاس رابطه‌ی بالا را یک **اُردینال** می‌نامیم. بررسی دقیقتر اردینالها را به فصل بعدی موکول کرده‌ایم.

خلاصهٔ فصل. اصل انتخاب بیانگر این است که اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های ناتهی باشد، یک تابعِ انتخاب، به صورتِ $f : I \to \bigcup A_i$ وجود دارد. ویژگی مهم تابع انتخاب این است که برای هر $i \in I$ داریم $f(i) \in A_i$. لم زُرن بیانگر این است که مجموعهٔ مرتبی که همهٔ زنجیرهایش کران‌دارند، دارای عنصری است که از آن بزرگتر عنصری وجود ندارد. اصل‌خوشترتیبی نیز بیانگر این است که همهٔ مجموعه‌ها در جهان مجموعه‌ها را می‌توان به نحو مطلوبی مرتب کرد. این نحو مطلوب به گونه‌ای است که هر وقت بخشی از مجموعه، جدا شود بخش باقی‌مانده دارای کوچکترین عنصر باشد. سه قضیهٔ یادشده در دنیای ریاضیات، قدرت مساوی با هم دارند و از همدیگر نتیجه می‌شوند.

فصل ۱۴

اردینالها، ناتمامیت دوم و استقلال حقایق از نظریهٔ مجموعه‌ها

یک روز شیخ ابوسعید قدس اللّه روحه العزیز در نشابور مجلس می‌گفت، خواجه بوعلی سینا از در خانقاه شیخ درآمد و ایشان هر دو پیش ازین یکدیگر را ندیده بودند، اگرچه میان ایشان مکاتبه رفته بود. چون بوعلی از در درآمد، شیخ روی بِوِیْ کرد و گفت حکمت‌دانی آمد. خواجه بوعلی درآمد و بنشست، شیخ با سر سخن رفت و مجلس تمام کرد و در خانه رفت. بوعلی سینا با شیخ در خانه شد و در خانه فراز کردند و با یکدیگر سه شبانروز بخلوت سخن گفتند. بعد سه شبانروز خواجه بوعلی سینا برفت؛ شاگردان او سؤال کردند کی شیخ را چگونه یافتی؟ گفت هرچ من می‌دانم او می‌بیند، و مریدان از شیخ سؤال کردند کی ای شیخ، بوعلی را چگونه یافتی؟ گفت هرچ ما می‌بینیم او می‌داند.
اسرارالتوحید

۱.۱۴ اردینالها

۱.۱.۱۴ معرفی اردینالها

در بخشهای گذشته دربارهٔ کاردینالها صحبت کردیم و مفاهیمی مانند جمع و ضرب و ترتیب آنها را مورد بررسی قرار دادیم. از لحاظ فنی، بار ریاضیاتی آن مباحث بیشتر روی اصل انتخاب بود که البته لم زرن و اصل خوش‌ترتیبی از آن ناشی می‌شوند. اثباتِ لم زُرن با استفاده از اصل انتخاب، اثبات اصل خوش‌ترتیبی و نیز اثبات این که برای یک کاردینال نامتناهیِ κ داریم $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ با استفاده از آن تکنولوژی، دچار پیچیدگی‌های مصنوعی فراوان است.

در این بخش می‌خواهیم بار ریاضیاتی را بر دوش اصل انتظام بگذاریم و با استفاده از آن اثباتهای آسان‌تری برای این قضایا بیان کنیم. بیایید یک بار دیگر اصل انتظام را بیان کنیم. روی جهانِ همهٔ مجموعه‌ها، V، رابطهٔ $\in$ را «شبیه» [1] یک «ترتیب» تصور کنید. اصل انتظام می‌گوید که هر مجموعه‌ای (با این ترتیب) دارای عنصر مینی‌موم (و البته به بیان درست‌تر، عنصر مینی‌مال) است. یعنی هر مجموعه‌ای مانندِ x دارای یک عنصر مانند y است به طوری که هیچ عنصری در x وجود ندارد که با ترتیبِ $\in$ از y کوچکتر باشد. ترکیب اصول انتخاب، جانشانی و وجود مجموعهٔ نامتناهی، منجر به بیان دیگری از اصلِ انتظام به صورت پیش رو می‌شد: در جهان V هیچ دنبالهٔ نزولیِ $\ldots \ni a_1 \ni a_0$ وجود ندارد.

[1] علت این که از کلمهٔ شبیه استفاده کرده‌ایم این است که $\in$ لزوماً همهٔ ویژگی‌های ترتیب، مثلاً متعدی بودن را دارا نیست.

گفتیم که مجموعه‌ای به نام مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد که ترتیبِ آن همان $\in$ است و این مجموعه با ترتیبِ یادشده، خوش‌ترتیب است؛ یعنی هر زیرمجموعه‌اش دارای عنصر ابتدا است. در اینجا $\in$ واقعاً یک ترتیب است؛ یعنی ویژگی‌های پادتقارنی، انعکاسی و متعدی بودن را داراست. نکتهٔ جالبتر این است که هر عددِ طبیعی، یعنی هر عضوِ مجموعهٔ اعداد طبیعی، نیز با ترتیبِ $\in$ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب است. این دو ایده، یعنی اصلِ انتظام و ویژگی خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی، ایدهٔ اصلی تعریف اردینال است.

تعریف ۱.۱۴. مجموعهٔ α را یک اردینال می‌نامیم هرگاه دو ویژگی زیر را داشته باشد:

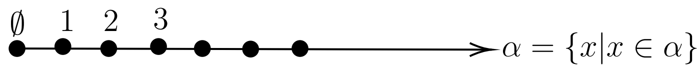
۱. رابطهٔ $\in$ روی α یک ترتیبِ خطی خوش‌ترتیب باشد.

۲. هر مجموعهٔ β که متعلق به یکی از مجموعه‌های موجود در α است، در خودِ α باشد.

ویژگی دوم را می‌توان به صورتِ $\bigcup\alpha \subseteq \alpha$ نوشت. یک بیانِ جذابتر از این واقعیت می‌تواند وضعیت را روشن‌تر کند. فرض کنید $x \in \alpha$. در این صورت:

$$\{y \in \alpha | y \in x\} = \{y \in V | y \in x\}.$$

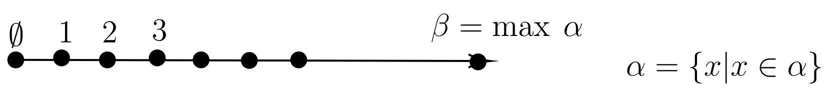
پس یک اردینال، در واقع بخشی از جهانِ V است که بدون هیچ «شکافی» با استفاده از رابطهٔ $\in$ مرتب شده است. در زیر شکل کلی یک اردینال کشیده شده است:

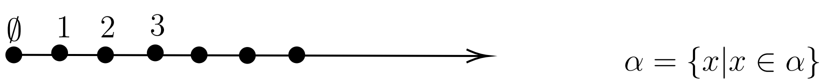


همان طور که می‌بینید یک اردینال باید با تهی شروع شود، مگر این که خودش تهی باشد. بیایید این گفته را اثبات کنیم. اردینال دلخواهِ α را در نظر بگیرید. بنا به خوش‌ترتیبی، عنصری مانند $x \in \alpha$ وجود دارد به طوری که $x = \min \alpha$. اما، از این که x بنا به رابطهٔ تعلق، کوچکترین است، نتیجه می‌گیریم که عنصری متعلق به x در جهانِ V وجود ندارد؛ اگر وجود داشت این عنصر نیز بنا به ویژگی دوم در α می‌بود و البته این مینی‌موم بودنِ x را نقض می‌کرد. پس x باید خودِ مجموعهٔ تهی باشد.

اما چرا باید بعد از تهی، مجموعهٔ $\{\emptyset\} = 1$ بیاید؟ علت این هم آسان است. دوباره بنا به خوش‌ترتیبی، $\alpha - \{\emptyset\}$ باید دارای مینی‌موم باشد. دوباره فرض کنید $x = \min \alpha - \{\emptyset\}$. در این صورت اگر مجموعهٔ x بخواهد دارای عنصری باشد، آن عنصر نباید در $\alpha - \{\emptyset\}$ باشد؛ یعنی آن عنصر مجموعهٔ تهی است.

بدین ترتیب، به این نتیجه می‌رسیم که اولاً هر عدد طبیعی، یک اردینال است؛ ثانیاً شروع هر اردینالی اعداد طبیعی است. یک اتفاق مهم دیگر نیز ممکن است برای اردینالها بیفتد:





امکان دارد که اردینالِ α دارای یک عنصر ماکزیمم باشد، که در این صورت α را یک اردینال تالی می‌نامیم؛ و نیز امکان دارد که α دارای ماکزیمم نباشد که در این صورت آن را یک اردینال حدی می‌نامیم.

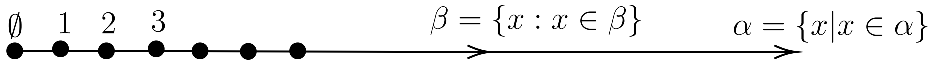
قضیه ۲.۱۴. اردینالِ α، حدی است اگروتنها اگر $\bigcup\alpha = \alpha$.

اثبات. این که $\bigcup\alpha \subseteq \alpha$ برای هر اردینالی برقرار است. اگر α حدی باشد و $y \in \alpha$ در این صورت، از آنجا که y ماکزیمم نیست، عنصرِ $x \in \alpha$ وجود دارد به طوری که $y \in x$. این، طبقِ تعریفِ اجتماعِ یک مجموعه، یعنی $y \in \bigcap\alpha$. □

قضیهٔ زیر، که اثبات آن آسان است و آن را به عنوان تمرین رها کرده‌ایم، دلیل نام‌گذاری «تالی» را مشخص می‌کند:

قضیه ۳.۱۴. اگر α یک اردینال تالی باشد و $y = \max\alpha$، در این صورت $\alpha = y \cup \{y\}$.

گفتیم که شروع اردینالها همیشه با تهی است و هر دو اردینال همیشه تا کمی پس از شروع، شبیه به هم هستند. مهمترین ویژگی اردینالها این است که آنها «در امتداد هم» هستند. یعنی اگر α و β دو اردینال متفاوت باشند، یکی از ادامه دادن دیگری ایجاد شده است:



قضیه ۴.۱۴. فرض کنید α و β دو اردینال متفاوت باشند. در این صورت یا α یک بخش اولیهٔ β است و یا β یک بخش اولیهٔ α است.

پیش از آن که اثبات را آغاز کنیم، این توضیح را بدهیم که وقتی می‌گوییم β یک بخش اولیهٔ α است، منظور این است که در عنصری مانند $x \in \alpha$ وجود دارد به طوری که $\beta = \{y \in \alpha | y \in x\}$. به بیان دیگر، $\beta = x \in \alpha$. پس این قضیه در واقع بیانگر این است که اگر α, β دو اردینال باشند، آنگاه یا $\alpha \in \beta$ یا $\beta \in \alpha$ و یا $\alpha = \beta$.

اثبات. فرض کنید α و β دو اردینال متفاوت باشند. می‌دانیم که α و β تا بخشی، با هم مشترک هستند. از طرفی به راحتی می‌توانید دید که $\alpha \cap \beta$ یک اردینال است.

حال فرض کنید در جایی این دو اردینال عنصری متفاوت پیدا کنند؛ مثلاً فرض کنید که x اولین مجموعه‌ای باشد که در α هست ولی در β نیست. نشان می‌دهیم که در این صورت β یک بخش اولیهٔ α است؛ در واقع نشان می‌دهیم که $\beta = \{y \in \alpha | y \in x\} = x$.

عناصری که از x کمترند، همه در β هستند؛ زیرا در غیر این صورت $\alpha - \beta$ مینی‌مومی غیر از x خواهد داشت. پس $x \subseteq \beta$.

از طرفی دیگر اگر β عنصری داشته باشد که در x نیست، دارای کوچکترین عنصر با این ویژگی خواهد بود. فرض کنید y کوچکترین عنصری در β باشد که در x نیست. در این صورت $x = y$ زیرا هر چه که در y است در x است. اما این یعنی $x \in \beta$ و این تناقض است. پس $\beta \subseteq x$؛ و از این رو، همان‌طور که ادعا کرده بودیم، $\beta = x$. □

۲.۱.۱۴ کلاس همهٔ اردینالها و استقرای فرامتناهی

گفتیم که اردینال بودن یک مجموعهٔ x یعنی این که x با رابطهٔ $\in$ مرتب خطی و خوش‌ترتیب باشد، و نیز $\bigcup x \subseteq x$. این ویژگی‌ها را می‌توان به راحتی در زبانِ مرتبهٔ اول نظریهٔ مجموعه‌ها نوشت. پس اردینالها تشکیل یک کلاس می‌دهند (یعنی گردایه‌ای از مجموعه‌ها هستند که ویژگی مشخصی دارند). کلاسِ همهٔ اردینالها را با ord نشان می‌دهیم. جالب اینجاست که خودِ ord همهٔ ویژگی‌های اردینال بودن را داراست: عناصر متعلق به آن با ترتیبِ $\in$ و به صورت خوش‌ترتیب مرتب شده‌اند:

$$\emptyset \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad \alpha \quad \beta \longrightarrow ord = \{x \in V | x \in ord\}$$

تنها چیزی که ord از اردینال بودن کم دارد، مجموعه بودن است:

قضیه ۵.۱۴. کلاسِ ord مجموعه نیست.

اثبات. اگر ord مجموعه بود، اردینال می‌شد. در این صورت می‌داشتیم $ord \in ord$ و این اصل انتظام را نقض می‌کرد. □

از این که ord مجموعه نیست، نتیجه می‌شود که:

قضیه ۶.۱۴. اگر x مجموعه باشد، هیچ تابع یک به یکی مانند $f : ord \to x$ وجود ندارد.

اثبات. اگر تابعِ $f : ord \to x$ یک به یک باشد، در این صورت می‌توان معکوس آن را از یک زیرمجموعهٔ x به ord تعریف کرد. اما این باعث می‌شود که ord تصویر یک تابع باشد که دامنهٔ آن یک مجموعه است. پس اصل جانشانی موجب می‌شود که ord یک مجموعه باشد و این تناقض است. □

اما در عین حال، ویژگی شبیه اردینال بودنِ کلاسِ ord منجر به اثبات تعمیمی از استقراء می‌شود:

قضیه ۷.۱۴ (استقرای فرامتناهی). فرض کنید که $p(x)$ یک حکم در مورد مجموعه‌ها باشد. فرض کنید برای هر اردینالِ α جملهٔ زیر درست باشد:

$$\big(\forall x \in \alpha \quad p(x)\big) \to p(\alpha)$$

یعنی اگر حکم p برای اردینالهای کمتر از α درست باشد، از این نتیجه شود که حکمِ p برای α هم درست است. آنگاه

$$\forall \alpha \in ord \quad p(\alpha).$$

اثبات. فرض کنید حکم p ویژگی گفته شده را داشته باشد. اگر این حکم برای همهٔ اردینالها برقرار نباشد، بنا به خوش‌ترتیبیِ ord کوچکترین اردینالِ α به طوری که حکم p برای آن برقرار نباشد، وجود دارد. اما در این صورت حکم p برای همهٔ اردینالهای کمتر از α برقرار است؛ چون همان گونه که گفتیم اولین جایی که حکم برقرار نیست، α است. از این بنا به فرض استقراء نتیجه می‌شود که حکم برای α درست باشد و این تناقض است. □

استقرای اعداد طبیعی، حالت خاصی از استقرای فرامتناهی است. در واقع مجموعهٔ اعداد طبیعی، خودش یک اردینال است که کوچکترین اردینال حدی است.

می‌شد تعریف کنیم که مجموعهٔ a یک عدد طبیعی است هرگاه یک اردینال باشد که هر زیرمجموعه‌اش دارای عنصر ماکزیمم است. همچنین می‌شد اصل وجود مجموعهٔ متناهی را با اصل وجود حداقل یک اردینال حدی جایگزین کرد.

همچنین مشابه آنچه در مورد استقرای اعداد طبیعی گفتیم، استقرای فرامتناهی نیز منجر به قضیهٔ «بازگشت فرامتناهی» می‌شود. این قضیه به ما کمک می‌کند که از ord به جهان V به صورت استقرایی تابع تعریف کنیم؛ بدین صورت که مقدار تابع مورد نظر در یک اردینال α به مقادیر آن در x های متعلق به α بستگی داشته باشد.

۳.۱.۱۴ اثبات لم زُرن و اصل خوش‌ترتیبی

دو قضیهٔ ۶.۱۴ و ۷.۱۴ منجر به ارائهٔ اثباتهای ساده‌ای برای لم زرن و اصل خوش‌ترتیبی می‌شوند. یادآوری می‌کنیم که منظور از یک مجموعهٔ مرتب جزئی، یک مجموعهٔ $(X, \leq)$ است که در ترتیب روی آن، لزوماً هر دو عنصر قابل مقایسه با هم نیستند. مجموعهٔ $A \subseteq X$ را یک زنجیر در X می‌نامیم هرگاه همهٔ عناصر آن با هم قابل مقایسه باشند.

قضیه ۸.۱۴ (لم زُرن). فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی ناتهی باشد، به طوری که هر زنجیرِ $A \subseteq X$ دارای کران بالا در X باشد. در این صورت X دارای حداقل یک عنصرِ ماکزیمال است.

اثبات. به برهان خلف فرض کنید که X ویژگی‌های یادشده را داشته باشد ولی دارای عنصر ماکزیمال نباشد. تابعِ $f : ord \to X$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(\alpha) = \text{یک کرانِ بالا برای مجموعهٔ}$$

$$X - \{f(\beta) | \beta \in \alpha\}$$

در تعریف تابع بالا، از اصل انتخاب و نیز از قضیهٔ بازگشت فرامتناهی استفاده کرده‌ایم. اگر مجموعهٔ X دارای عنصر ماکزیمال نباشد، تابعِ فوق تابعی یک‌به‌یک از کلاس ord به مجموعهٔ X است؛ و این قضیهٔ ۶.۱۴ را نقض می‌کند. □

یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ مرتبِ خطیِ $(X, \leq)$ را خوش‌ترتیب می‌نامیم هرگاه هر زیرمجموعه از آن دارای مینی‌موم باشد.

قضیه ۹.۱۴ (اصل خوش‌ترتیبی). فرض کنید X یک مجموعهٔ دلخواه باشد. در این صورت می‌توان روی X یک ترتیبِ $\leq$ قرار داد به گونه‌ای که $(X, \leq)$ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب شود.

اثبات. تابعِ $f : ord \to X$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(\alpha) = \text{یک عنصر انتخاب‌شده در}$$

$$X - \{f(\beta) | \beta \in \alpha\}$$

در تعریف تابع بالا هم از بازگشتِ فرامتناهی و اصل انتخاب استفاده کرده‌ایم. تابع فوق تمامِ X را پوشش می‌دهد؛ زیرا در غیر این صورت X از کلاس ord بزرگتر می‌شود. به دلیل مشابه، دامنهٔ این تابع نمی‌تواند تمامِ ord باشد؛ پس بخشی ابتدایی از آن، یعنی یک اردینال است.

پس X در یک تناظر یک به یک با یک اردینال قرار دارد. می‌توان ترتیب همان اردینال را روی X در نظر گرفت و X با این ترتیب، خوش‌ترتیب است. □

۴.۱.۱۴ الفهای دیگر

گفتیم که $\aleph_0$ اولین کاردینال ناشماراست. همچنین $2^{\aleph_0}$ یک کاردینال بزرگتر از $\aleph_0$ است؛ پس مجموعهٔ کاردینالهای بزرگتر از $\aleph_0$ ناتهی است. هر کدام از این کاردینالها، یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب، یعنی یک اردینال هستند. پس کوچکترین کاردینال اکیداً بزرگتر از $\aleph_0$ وجود دارد. این کاردینال را با $\aleph_1$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب، کاردینالهای

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

نیز تعریف می‌شوند. اما پس از کاردینالهای n ام نوبت به کاردینالِ ω ام می‌رسد. داریم

$$\aleph_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \aleph_n$$

پس از آن اردینالِ $\aleph_{\omega+1}$ می‌آید و الفها به همین صورت ادامه می‌یابند و برای هر اردینالِ α یک کاردینالِ $\aleph_\alpha$ وجود دارد. پس در کلاس کاردینالها، هر کاردینالی یک شماره دارد که شمارهٔ آن یک اردینال است.

۲.۱۴ اثبات این که هر دو کاردینال با هم قابل مقایسه‌اند و $\kappa\cdot\kappa=\kappa$

برای درک بهتر مطالب این بخش، توجه به تفاوتِ ترتیب کاردینالها و اردینالها اهمیت خاصی دارد. اگر κ, λ دو کاردینال باشند در این صورت $\lambda \leq \kappa$ یعنی یک تابع یک به یک از κ، یا مجموعه‌ای که هم‌اندازهٔ κ است، به λ، یعنی مجموعه‌ای که هم‌اندازهٔ λ است وجود دارد. اما وقتی α, β دو اردینال هستند، $\beta < \alpha$ یعنی $\alpha \in \beta$؛ و این یعنی α بخش اولیه‌ای از β است.

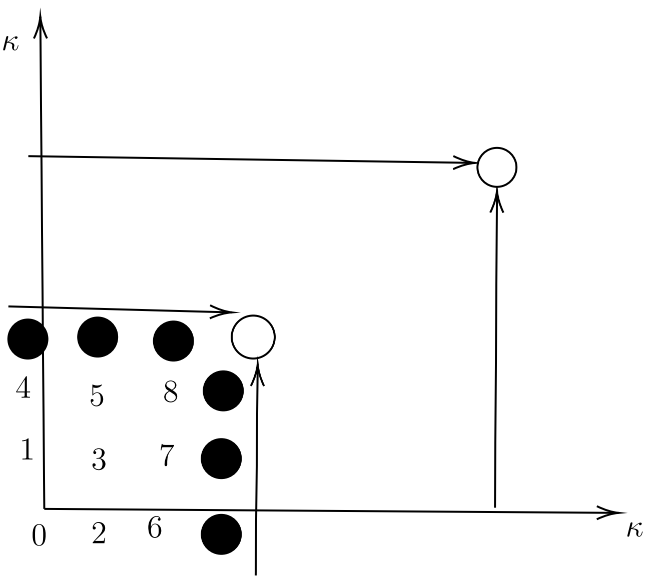
قضیه ۱۰.۱۴. فرض کنید κ و λ دو کاردینال باشند. در این صورت یا $\lambda \leq \kappa$ و یا $\kappa \leq \lambda$.

اثبات. دو کاردینالِ κ, λ به طور خاص دو مجموعه هستند؛ پس بنا به قضیهٔ ۹.۱۴ هر کدام از آنها با یک اردینال در تناظر یک به یک هستند. از طرفی از بین دو اردینال، یکی بخش اولیهٔ دیگری است؛ و این مطلوب ما را حاصل می‌کند. مثلا اگر κ در تناظر با اردینالِ α باشد و λ در تناظر با اردینالِ β باشد و α بخش اولیهٔ β باشد، به راحتی می‌توان نگاشتی پیدا کرد که κ را در λ به صورت یک به یک بنشاند. □

قضیه ۱۱.۱۴. فرض کنید κ یک کاردینال نامتناهی باشد. در این صورت

$$\kappa\cdot\kappa=\kappa.$$

اثبات. می‌دانیم که $\kappa\cdot\kappa$ اندازهٔ مجموعهٔ $\kappa\times\kappa$، یعنی حاصل‌ضرب دکارتی κ در κ را مشخص می‌کند. مجموعهٔ $\kappa\times\kappa$ را به صورت زیر مرتب کنید:



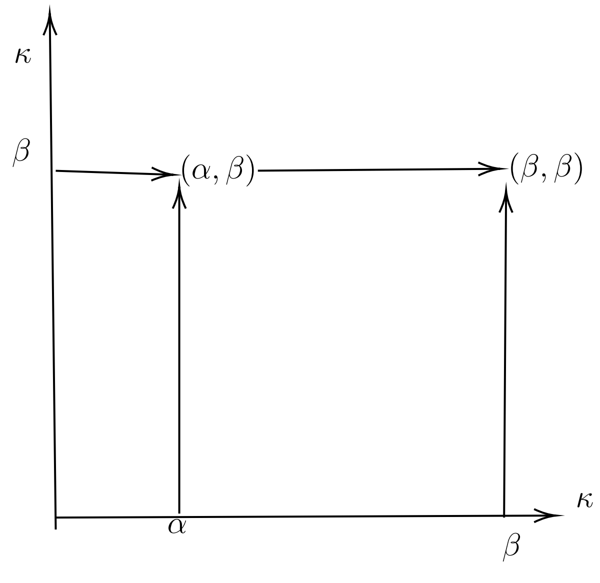
روش بالا، نوعی «کاشی‌کاری» است. ابتدا یک عنصر،با طول و عرض برابر، مانند دایره‌های توخالی در شکل بالا در نظر گرفته می‌شود، سپس از دو طرف به سمت آن کاشی‌کاری صورت می‌گیرد. ضابطهٔ ترتیب یادشده به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&(x, y) \prec (z, t) \Leftrightarrow \\
&\big(\max\{x, y\} \in \max\{z, t\}\big) \vee \\
&\big(\max\{x, y\} = \max\{z, t\} \wedge x \in z\big) \vee \\
&\big(\max\{x, y\} = \max\{z, t\} \wedge x = z \wedge y \in t\big)
\end{aligned}
$$

مجموعهٔ $\kappa \times \kappa$ با ترتیب کاشی‌کاری بالا، خوش‌ترتیب است؛ یعنی در تناظر یک به یک با اردینال قرار دارد. بیایید این اردینال را با $(\kappa \times \kappa, \prec)$ نشان دهیم. یک نکتهٔ مهم در ادامهٔ این اثبات، توجه همزمان به ترتیبِ $\prec$ است که موجب خوش‌ترتیبیِ $\kappa \times \kappa$ شده است و ترتیبِ $\in$ که ترتیب تعلق بین اردینالهاست.

واضح است که $\kappa \in_{=} (\kappa \times \kappa, \prec)$؛ زیرا اردینالِ κ به همراه ترتیبش در $(\kappa \times \kappa, \prec)$ مشهود است.

فرض کنید $\kappa \in (\kappa \times \kappa, \prec)$. در این صورت κ یک بخشِ ابتداییِ $(\kappa \times \kappa, \prec)$ می‌شود؛ یعنی اردینالهای $\alpha, \beta \in \kappa$ موجودند به طوری که $\kappa = (\alpha \times \beta, \prec)$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $\alpha \in \beta$:



اما در این صورت

$$(\kappa, \in) = \big((\alpha, \beta), \prec\big) \in \big((\beta, \beta), \prec\big)$$

اما در این جا، پای استقرا به میان می‌آید: فرض کنید که برای اردینالهای کمتر از κ مانندِ β بدانیم که اندازهٔ $\beta \times \beta$ با β برابر است؛ در این صورت $(\beta, \in) = \big((\beta, \beta), \prec\big)$. ترکیب این گفته با عبارت بالا منجر به این می‌شود که $\kappa \in \beta$؛ ولی این یک تناقض است زیرا $\beta \in \kappa$. $\square$

نتیجه ۱۲.۱۴. فرض کنید α, β دو کاردینال باشند به طوری که $\alpha < \beta$. در این صورت $\alpha \cdot \beta = \beta$.

اثبات. داریم

$$\beta \in \alpha \cdot \beta < \beta \cdot \beta = \beta$$

یعنی از یک طرف از β به $\alpha \cdot \beta$ تابعی یک به یک موجود است و از طرفی از $\alpha \cdot \beta$ به β تابعی یک به یک وجود دارد. بنا به قضیهٔ کانتور برنشتاین، تساوی مورد نظر حاصل می‌شود. $\square$

نتیجه ۱۳.۱۴. اگر α, β دو کاردینال باشند به طوری که $\alpha \leqslant \beta$، آنگاه $\alpha + \beta = \beta$.

اثبات. از قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین و نامساوی‌های زیر، نتیجهٔ مورد نظر ما حاصل می‌شود:

$$\beta \leqslant \alpha + \beta \leqslant \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta = \beta + \beta = \beta.$$

□

گفتیم که ترتیبِ اردینالها، رابطهٔ تعلق است. برای اردینالها جمع و ضرب و توان‌رسانی هم تعریف می‌شود و این اعمال بسیار متفاوت با اعمال کاردینالها هستند. برای مثال حاصل‌جمع اردینالها از قرار دادن آنها پشت سر هم ایجاد می‌شود:

$$\xrightarrow{\quad\quad\alpha\quad\quad}\xrightarrow{\quad\quad\quad\quad\beta}\ \alpha + \beta$$

پس در دنیای اردینالها، $\omega + 1$ از ω یک واحد بزرگتر است؛ در حالی که دیدیم از نظر اندازه، این دو با هم برابرند. ترتیب اردینالها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&0 \in 1 \in 2 \ldots \in \omega \in \omega + 1 \in \omega + 2 \in \ldots \\
&\omega + \omega \in \omega + \omega + 1 \in \ldots \\
&\omega + \omega + \omega \in \omega + \omega + \omega + 1 \in \ldots \\
&\omega + \omega + \omega + \omega \in
\end{aligned}$$

همان طور که گفته شد همهٔ اردینالهایی که در بالا بعد از ω نوشته شده‌اند (تا پیش از سه نقطهٔ آخری) با ω هم‌اندازه هستند، در حالی که در ترتیب اردینالی از آن بزرگترند. نیز گفتیم جمع و ضرب اردینالها قواعد متفاوتی با کاردینالها دارد؛ اما قصد ورود به این مبحث را در اینجا نداریم.

۳.۱۴ ناتمامیت دوم

در فصلِ ۳ با اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا شدیم. مجموعهٔ اصولی را که در آنجا معرفی کردیم، با ZFC نشان می‌دهیم که مخفف اسمهای زِرمِلو، فرانکل به علاوه حرف C برای اصل انتخاب است. گفتیم که یک جهانِ نظریهٔ مجموعه‌ها، جهانی است مانند V که در آن یک رابطهٔ $\in$ بین اعضا وجود دارد و اصول موضوعهٔ ما در آن جهان برقرار است. گفتیم که منظور از یک قضیه φ در نظریهٔ مجموعه‌ها، یک جمله است که در تمام جهانهایی که از اصول موضوعه ما پیروی می‌کنند درست باشد.

با این حال، یک سوال مهم را بی پاسخ گذاشتیم: آیا جهانی مانند V وجود دارد که از اصول موضوعهٔ ما پیروی کند؟ به طور دقیق‌تر، آیا این گونه است که اصول موضوعهٔ ما با هم منجر به تناقض نمی‌شوند؟ [۲]

سرانجام در این بخش، این سوال را پاسخ خواهیم گفت. در بیان این پاسخ، بسیاری از جزئیاتِ بسیار مهم را مجبوریم نادیده بگیریم تا نوشتهٔ ما خواننده را به درک مناسبی از قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل برساند. پیشنهاد می‌کنیم که کمربندهای ایمنی را محکم ببندید و سطور پیش رو را با دقت و احتیاط مطالعه بفرمایید. البته اگر چندین بار خواندن آنها نیز نتیجه نداد، حمل بر بدنویسی نگارنده نکنید!

[۲] این که این دو سوال با هم معادلند، را قضیهٔ تمامیت گودل نتیجه می‌دهد.

این که از اصول موضوعهٔ ZFC تناقضی به اثبات نرسد را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ZFC \not\Rightarrow \perp$$

عبارت بالا، در ظاهری که دارد، معلوم است که یک جملهٔ مرتبهٔ اول در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها نیست؛ بلکه جمله‌ای دربارهٔ اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌هاست. اما به نحو شگفت‌آوری، می‌توان ثابت کرد که جمله‌ای در خودِ زبانِ نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد که همین معنی را می‌دهد. جملهٔ یادشده را با $con(ZFC)$ نشان می‌دهیم که در آن con مخفف $consistency$ به معنی سازگاری است. پس می‌توان جمله‌ای در زبانِ نظریهٔ مجموعه‌ها نوشت که معنی‌اش این باشد: «نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است».

اما چنین جمله‌ای را چگونه می‌توان نوشت؟ در بخشِ ۱.۷.۱۰ گفتیم که می‌شود همهٔ علائم منطقی را با استفاده از اعداد طبیعی کد گذاری کرد. با این کار می‌توان تمام جملات منطقی را نیز به نحوی کدگذاری کرد که وقتی یک عدد طبیعی به ما داده شود، بتوانیم تشخیص دهیم که دقیقاً کدِ کدام جمله است.

اما چیزی بیش از این نیز درست است: می‌توان اثباتها را هم کد گذاری کرد. هر اثبات، دنباله‌ای متناهی از جمله‌هاست که به جمله‌ای ختم می‌شود؛ به چنین دنباله‌ای هم می‌توان یک عدد طبیعی یکتا نسبت داد. به این طریق، می‌توان جمله‌ای نوشت که بگوید «نظریهٔ مجموعه‌ها تناقض نمی‌دهد». جملهٔ مورد نظر در واقع باید بگوید که هیچ عدد طبیعی‌ای وجود ندارد که آن عددْ کدِ اثباتی برای تناقض باشد. پرداختن به نحوهٔ دقیق این کدگذاری ممکن است ما را از هدف اصلی دور کند؛ آن را به کتاب دیگری موکول خواهیم کرد.

حال که $con(ZFC)$ خودش یک جمله است، می‌توان پرسید که آیا

$$ZFC \Rightarrow con(ZFC)$$

در ادامه قرار است به پاسخ دادن به سوال بالا بپردازیم.

بیایید یک کد گذاری برای همهٔ جملاتِ تک متغیرهِ به صورتِ $\psi(x)$ در مورد اعداد طبیعی را در نظر بگیریم. لیستی به صورتِ $\{\varphi_i(x)\}$ در اختیار داریم. یکی از جملاتِ موجود در این لیست، مثلاً جملهٔ e ام، این جمله است که می‌گوید:

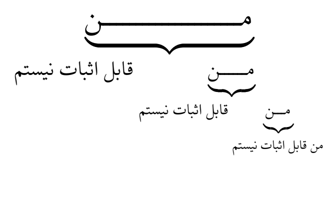
جملهٔ $\varphi_x(x)$ قابل اثبات نیست.

در واقع این جمله، که جملهٔ e ام در فهرست ماست، می‌گوید که اگر در جملهٔ شمارهٔ x عدد x را قرار دهیم، جملهٔ حاصل اثبات‌پذیر نیست. اما جملهٔ $\varphi_e(e)$ چه می‌گوید؟

جملهٔ $\phi_e(e)$ می‌گوید که اگر در جملهٔ e ام عدد e را قرار دهید جملهٔ حاصل اثبات‌پذیر نیست. اما وقتی در جملهٔ e ام عدد e را قرار می‌دهیم به همان جملهٔ $\varphi_e(e)$ می‌رسیم! پس جملهٔ $\varphi_e(e)$ جمله‌ای است که می‌گوید:

من قابل اثبات نیستم

این جمله را می‌توان به صورت زیر تصور کرد:



قضیه ۱۴.۱۴. اگر ZFC سازگار باشد، آنگاه

$$ZFC \not\Rightarrow \varphi_e(e)$$

اثبات. اگر $ZFC \Rightarrow \varphi_e(e)$ آنگاه در ZFC جملهٔ «من ثابت نمی‌شوم» ثابت می‌شود و این تناقض است. □

جملهٔ بالا به ظاهر در فرازبان نوشته شده است؛ اما محتوای آن را می‌توان در خودِ زبان مرتبهٔ اول نیز نوشت:

قضیه ۱۵.۱۴.

$$ZFC \Rightarrow \big(con(ZFC) \to \neg\varphi_e(e)\big)$$

اثبات. این قضیه، در واقع همان قضیهٔ قبل است که به زبانِ دیگری نوشته شده است. □

نتیجه ۱۶.۱۴ (قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل).

$$ZFC \not\Rightarrow con(ZFC).$$

اثبات. اگر $ZFC \Rightarrow con(ZFC)$ آنگاه بنا به قضیهٔ ۱۵.۱۴ داریم $ZFC \Rightarrow \varphi_e(e)$. اما این بنا به قضیهٔ ۱۴.۱۴ امکان‌پذیر نیست. □

قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل، ارزشی فراتر از «بررسی سازگاری یا عدم سازگاری اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها» دارد. در واقع هر سیستم اصول موضوعه‌ای دیگری که به اندازهٔ ZFC امکانات بیانی داشته باشد، در معرض این قضیه قرار می‌گیرد. از این رو، قضیهٔ یادشده مورد علاقه و توجه غیرریاضیدانان، به خصوص فیلسوفان نیز قرار گرفته است.

هر زمانی که نگارنده در این باره سخنرانی کرده یا مطلبی نوشته است مورد سوالهای فراوان علاقه‌مندان به فلسفه واقع شده است. اکثر این سوالها، ناشی از «تفسیرهای» این قضیه است، نه فهم آن. از این رو عموماً پاسخ دادن به سوالات در این زمینه همواره برایم دشوار بوده است.

عجیب‌تر این است که بسیاری از سوالات، ناشی از عدم باور قضیه توسط پرسشگر است؛ حال آن که قضیهٔ ناتمامیت دوم، یک «قضیهٔ ریاضی» مشابه همهٔ قضایای ریاضی است. یک قضیه در ریاضی نیازی به تفسیر یا قصه‌پردازی ندارد؛ خودش به دقیق‌ترین، صریح‌ترین و زیباترین زبان ممکن نوشته شده است. یک قضیهٔ ریاضی همواره می‌گوید که اگر نحوهٔ جمله نویسی و استدلال را در ریاضیات را قبول داشته باشیم، از فرض آ حکم ب نتیجه می‌شود. خوب است که یک نفر بتواند یک قضیهٔ ریاضی را تفسیر کند؛ اما هیچ وقت تفسیر، مساوی با خودِ قضیه نیست. پس برای درست فهمیدن یک قضیهٔ ریاضی، باید ریاضی یاد گرفت. می‌شود قضیهٔ خم جردن، یا قضیهٔ اساسی جبر (همان طور که نسبیت خاص و عام انیشتن) را نیز تفسیر فلسفی کرد، اما از آن بهتر این است که «اثباتِ ریاضی» این قضایا را فراگرفت. وقتی عمق اثبات یک قضیه را فرامی‌گیریم، دیگر نیازی به تفسیرهای فلسفی نداریم و اثبات قضیه همان تفسیر آن است.

۴.۱۴ استقلال حقایق از نظریهٔ مجموعه‌ها

در طول این کتاب، با اصول موضوعهٔ ZFC برای جهان نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا شدیم. همهٔ اشیای ریاضی مانند تابع و رابطه و عدد، به همراه همهٔ مفاهیم انتزاعی مانند متناهی و نامتناهی تعریف و تثبیتی با استفاده از این اصول

موضوعه یافتند. در بخش ۳.۱۴ دیدیم که یک جمله به نام $con(ZFC)$ در نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توان نوشت که تعبیرش این است: «در نظریهٔ مجموعه‌ها تناقض به اثبات نمی‌رسد». دیدیم که اگر نظریهٔ مجموعه‌ها دارای حداقل یک جهان باشد، آنگاه

$$ZFC \nvDash con(ZFC).$$

در بخشِ ۱.۷.۱۰ دیدیم که در صورتی که نظریهٔ مجموعه‌ها دارای یک جهان باشد، و V جهان خوش‌بنیادِ آن باشد، هیچ الگوریتمی وجود ندارد که یک جمله را به عنوان ورودی بگیرد و در صورتی که جملهٔ مورد نظر در V برقرار باشد خروجی ۱ و در صورتی که جملهٔ مورد نظر در V برقرار نباشد خروجی ۰ بدهد. [۳]

در بخشِ ۲.۱۱ دیدیم که فرضیهٔ پیوستار و نقیض آن، هیچ کدام در ZFC قابل اثبات نیستند. این واقعیت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ZFC \nvDash (\aleph_1 = 2^{\aleph_0}) \qquad ZFC \nvDash \neg(\aleph_1 = 2^{\aleph_0})$$

نتیجهٔ عبارت بالا این است که اگر جهانی برای نظریهٔ مجموعه‌ها وجود داشته باشد، جهانی وجود دارد که در آن فرضیهٔ پیوستار درست است و جهانی وجود دارد که در آن نقیض فرضیهٔ پیوستار درست است. گفتیم که ساختن چنین جهانهایی با استفاده از تکنیک «فُرسینگ» در نظریهٔ مجموعه‌ها امکان‌پذیر است.

اما گزارهٔ زیاد دیگری نیز هستند که نه خود و نه نقیضشان در ZFC اثبات نمی‌شود. این که جهان مجموعه‌ها برابر با جهانِ تعریف‌پذیر [۴] مجموعه‌هاست ($V = L$)، این که نوع خاصی از کاردینالها به نام کاردینالهای اندازه‌پذیر وجود دارند، این که نوع خاص دیگری از کاردینالها به نام کاردینالهای دست‌نیافتنی وجود دارند، و چندین و چندین عبارت دیگر، وضعیتی مشابه با فرضیهٔ پیوستار دارند. مطالعه دربارهٔ موضوعات اینچنین بخشی از مطالعات در گرایش نظریهٔ مجموعه‌هاست.

[۳] البته در آن بخش این قضیه را دربارهٔ مجموعهٔ اعداد طبیعی بیان کردیم.

[۴] بخشی از جهانِ V است که با استقرای فرامتناهی و با استفاده از طبقات تعریف‌پذیری ساخته می‌شود.

فصل ۱۵

سخن آخر

سالها باید که تا یک سنگ اصلی ز آفتاب
لعل گردد در بدخشان یا عقیق اندر یمن
ماهها باید که تا یک پنبه‌دانه ز آب و خاک
شاهدی را حلّه گردد یا شهیدی را کفن
روزها باید که تا یک مشت پشم از پشت میش
زاهدی را خرقه گردد یا حماری را رسن
عمرها باید که تا یک کودکی از روی طبع
عالمی گردد نکو یا شاعری شیرین سخن
قرنها باید که تا از پشت آدم نطفه‌ای
بوالوفای کُرد گردد یا شود ویس قرن
سنائی

۱.۱۵ نتیجه‌گیری‌ها

امیدوارم که خواننده‌ای که تا به اینجای این کتاب را مطالعه کرده باشد، به درکی از «مبانی ریاضی» رسیده باشد. در هرَمِ علوم، مبانی ریاضیات، در پائینترین قسمت واقع است. منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها علومیند که مبانی ریاضیات محض بر پایه‌ی آنها بنا شده است. سایر شاخه‌های ریاضی محض، مانندِ جبر، هندسه، آنالیز و غیره در طبقه‌ای بالاتر در این هرم واقعند.

عموماً آنچه در ریاضیات محض بررسی می‌شود مسائل خام ریاضی هستند که شاید حل آنها مستقیماً کاربردی در زندگی روزمره نداشته باشد، بلکه پاسخ آنها باید در هرم علوم بالا برود تا به کاربرد برسد. ریاضی محض از این حیث، به فلسفه می‌ماند که در آن دغدغه‌ی یافتن حقیقت بر همه چیز مقدم است. البته، با این تفاوت که همواره این امید وجود دارد که آنچه که امروز در ریاضی محض بدان پرداخته می‌شود، در آینده راهگشای صنعت یا موجب ایجاد صنعتی جدید شود. [۱]

در پله‌ی بالاتر این هرم به ریاضیات کاربردی می‌رسیم که در آن، از قضایائی که در پائین هرم، در ریاضیات محض

[۱] پیش می‌آید که دانشجویان ریاضی محض در دوره‌های مختلف تحصیل مأیوس و دلسرد می‌شوند و کار خود را بی‌ارزش برای اجتماع می‌پندارند. یکی از دوستانم با ریاضیدان بزرگی درددل کرده بود و از او شنیده بود که :«کار ما در واقع تولید و تزریق اندیشه به درون جامعه است».

ثابت می‌شود، استفاده‌های کاربردی می‌کنیم و قضایایی (شاید با عمق کمتر ولی با کاربرد بیشتر) بدانها می‌افزائیم. در ریاضی کاربردی، مسئله‌ی پیش روی ما، عموماً مسئله‌ای است که به جهانی که در آن زندگی می‌کنیم می‌پردازد و حل آن قرار است به درد طبقه‌های بالاتر هرم بخورد. عموماً این مسائل خودشان نیز از طبقات بالاتر هرم می‌آیند. در این طبقات، انواع مهندسی‌ها واقع شده‌اند. آنچه برای مهندس بیش از همه‌چیز اهمیت دارد، پاسخ دادن به سوالی است که پاسخ آن موجب چرخش چرخ صنعت شود. شاید از این حیث، مهندس کمتر وقتش را صرف دانستن کُنهِ فلسفی سوالی بکند. مسئله برای او زمانی حل است که مشکل صنعت را حل کند یا موجب پیشرفتی در امور زندگی روزمره شود.

به عنوان تمرین، هرم علوم را برای خود رسم کنید و بررسی کنید که علومی مانند پزشکی، جامعه‌شناسی، جغرافیا و فیزیک در کجای این هرم می‌توانند واقع شوند. دقت کنید که برخی از این علوم می‌توانند به چند طبقه‌ی مختلف از هرم تعلق داشته باشند.

۲.۱۵ متون ریاضی

یکی از زیبائی‌های متون ریاضی این است که در آنها مطالب در بسته‌های مختلف بیان می‌شوند. ابتدای هر متن ریاضی باید یک بسته‌ی نمادگذاری وجود داشته باشد تا خواننده را با نمادهای به کار رفته در آن متن آشنا کند.

در ریاضی هیچ مطلب جدیدی به صورت غیر منتظره وارد بحث نمی‌شود. هر چیز جدیدی نخست در یک بسته‌ی تعریف، تعریف می‌شود و از آن پس آزادانه وارد بحث می‌شود.

اما مهمترین بسته‌ها، بسته‌ی قضیه هستند. در آنجا در یک جمله‌ی خلاصه و دقیق حکمی بیان می‌شود که قرار است در بسته‌ی اثبات به اثبات آن پرداخته شود.

گاهی اثبات یک قضیه خیلی طولانی و ثقیل است. در این جا نیاز است که در بسته‌های مفهومی دیگری به نام لم، قضیه‌ی مورد نظر به بخشهای مختلف شکافته شود. لمها قضایای کوچکی هستند که برای اثبات قضایای اصلی بدانها نیاز است؛ هر چند بسیار پیش آمده است که لمی از یک مقاله‌ی علمی از قضیه‌ی اصلی ثابت شده در آن مقاله معروفتر شده است.

آنچه در کتابهای دانشگاهی نوشته می‌شود، حاوی ریاضیات نیم تا یک قرن است. هر چند در برخی کتابهای دانشگاهی به قضایای جدید ریاضی هم اشاره می‌شود، ولی جدیدترین قضایای ریاضی در مقاله‌های روز ریاضی قرار دارند. معمولاًروش کار این گونه است که دانشجو تحت نظر یک استاد، سابقه‌ی قدیم و جدید یک موضوع را در کتابها و مقالات مطالعه می‌کند و پس از باخبر شدن از آخرین پیشرفتها، به دنبال حل سوالی در همان راستا می‌افتد. در صورتی که در حل آن سوال موفق باشد، حاصل یافته‌های خود را، با رعایت دقیق زبان علمی، در یک مقاله می‌نویسد و از یک مجله‌ی معتبر درخواست چاپ آن را می‌کند. در صورتی که مقاله، توسط آن مجله تأئید شود، چاپ می‌شود. هر چه مسأله‌ی پرداخته شده در مقاله مهم‌تر و سخت‌تر باشد، در مجله‌ی معتبرتری می‌توان آن را به چاپ رساند.

متأسفانه باور بسیاری عوام بر این است که هر کسی که کمی ریاضی بداند می‌تواند وارد این رشته شود و ناگهان از تمام بزرگان ریاضی پیش بیفتد. بارها شده است که دانشجویانی، حتی از رشته‌هائی غیر از ریاضی، به اینجانب مراجعه کرده‌اند و ادعای حل مسائل مهم ریاضی، در سطح مسأله‌ی فرما داشته‌اند؛ بی‌آنکه از مسیر طی شده در طی سالها برای حل آن خبری داشته باشند و یا حتی سطح ریاضی خود را دقیق بدانند! در ریاضی محض، داشتن هوش کافی تنها یک شرط لازم و بسیار ناکافی است. فقط مسائل آسان را می‌توان یک روزه و دوروزه حل کرد و تحقیق روی مسائل سخت، نیاز به سالها فکر و تلاش دارد. ریاضیدان خوب کسی است که روش تحقیق بداند و بتواند به طور مسمتر، سالها روی یک مسئله فکر کند. صدالبته تربیت چنین شخصیتی، از طریق کنکورهای تستی و سرعتی و

کم‌عمق، محال است. حتی سیستمی که به المپیادهای دانشجوئی اهمیت فراوان می‌دهد، از تربیت ریاضیدان واقعی بازمی‌ماند؛ زیرا همان طور که گفتم ریاضیات فقط توانائی حل سریع یک مسأله نیست. [۲]

از نظر من مهمترین کاری که یک دانشجوی کارشناسی می‌تواند انجام دهد این است که در طول چهارسال دوره‌ی کارشناسی، نقاط قوت و ضعف خود را به خوبی بشناسد و ارتباطات سازنده با اساتید و هم قطاران پیدا کند. در صورتی که خود را برای کار در خارج از دانشگاه می‌داند، به هیچ روی به تحصیلات تکمیلی روی نیاورد ولی در صورتی که دقیقا موضوع مورد علاقه‌ی خود، و استاد مورد علاقه‌ی خود را پیدا کرده است، به ادامه‌ی تحصیل بپردازد. در واقع، از پس از دوره‌ی کارشناسی، داشتن دغدغه‌ی علمی مهم است. قبول شدن در کنکور کار سختی نیست، ولی کسانی که بدون انگیزه و دغدغه وارد تحصیلات تکمیلی شوند، علاوه بر محروم کردن خود از کسب درآمد، نخواهند توانست تولید علمی قابل دفاعی داشته باشند.

۳.۱۵ پارادکس همیشگی ریاضی محض و زندگی

پسرم در دانشگاه فلسفه و روان‌شناسی خوانده است. نمی‌تواند هیچ شغلی پیدا کند؛ اما در عوض علتش را به خوبی می‌داند!
جیمی کار، کمدین انگلیسی

تحصیل در ریاضی محض، از اول تا آخر، توأم با سرخوردگی و خستگی فراوان است. دانشجوی ریاضی از روز اول نگران است تا روز آخر! از یک طرف ریاضی محض، مانند یک وسواس و یک اعتیاد، دانشجو را به خود جلب می‌کند و روز به روز جلوه‌ی جدیدی از زیبائی خود را می‌نمایاند، ولی از طرفی، پس از سالها صرف وقت در آن، پیدا کردن شغلی مربوط بدان با حداقل حقوق هم بسیار دشوار است. همیشه پارادکس رقابت دشوار برای بدست آوردن جایگاه در دانشگاه، و رقابت آسان برای قبول شدن در رشته‌ی ریاضی برقرار است و هیچ گاه نیز از بین نخواهد رفت. از آن بدتر اختلاف شدید نسلی مدرسان و یادگیرندگان است که گاهی انتقال تجارب را دشوار می‌کند: اساتید متعلق به نسلی هستند که تمام عمر جنگیده‌اند و برای رسیدن به ساده‌ترین چیزها ز گهواره تا گور رقابت کرده‌اند و شب‌بیداری کشیده‌اند؛ و دانشجویان متعلق به نسلی هستند که اگر منفی نزنند دانشگاه‌های تراز اول کشور قبول می‌شوند. این که راه درست چیست همیشه بی‌جواب می‌ماند و هر استادِ نوعیِ ریاضیات، از این که کسی را به کار خود علاقه‌مند کند دلهره دارد. البته ناگفته نماند که هر چه ریاضی‌اش، «ریاضی‌تر» باشد مشکلاتش بیشتر است!

اگر قرار بود متناسب با سختی و عمق کار به افراد حقوق بدهند، احتمالاً ریاضیدانان محض غنی‌ترین افراد می‌بودند، اما این گونه نیست! لزوماً افکار پیچیده و خردمندی درونی، مایه‌ی ثروتمندی مالی نمی‌شوند. این روزها پولدارترین قشرها، فوتبالیستها، بازیگران، مدلها، برخی پزشکان و غیره (حتی شاید کسانی که غذا می‌خورند و فیلمش را به اشتراک می‌گذارند پولدار باشند) هستند. کار این هیچکدام از اینان کشف و معرفی حقایق پیچیده‌ی هستی نیست.

پس اگر کسی می‌خواهد ثروتمند شود، خواندن ریاضی محض به هیچ کار او نمی‌آید. برای ثروتمند شدن، باید به ثروتمند شدن فکر کرد؛ و ریاضی محض تنها کمکی که می‌تواند بکند، کمک در بهینگی تفکر است. و البته در این حد، شاید یک مدرک کارشناسی ریاضی محض بیش از کافی باشد.

[۲] پس اگر هیچ مدال المپیادی کسب نکرده‌اید یا رتبه‌ی کنکور تک‌رقمی ندارید، اصلاً ناراحت نباشید. در راه ریاضیدان خوب شدن، آنها فقط بیراهه هستند. هر چند متاسفانه در برخی کشورها، مانند کشور ما ریاضی با «مسابقه» هم‌مفهوم شده است، اما من به شما قول می‌دهم که وقتی پا به دانشگاه‌های معتبر دنیا بگذارید اسمی از مسابقهٔ ریاضی به گوشتان نخواهد خورد.

همه‌ی اینها، باعث نمی‌شود که ریاضی محض از مُد یا از اهمیت بیفتد. اصالت و زیبائی این رشته همواره علاقه‌مندان را در خود نگه می‌دارد. از زمانی که من دانشجو بودم تا امروز که من تدریس می‌کنم، هیچ وقت بهترین دانشجویان وارد رشته‌ی ریاضی نشده‌اند، و هیچ وقت نیز رشته‌ی ریاضی تهی از دانشجویان قوی، با هوش و پرتلاش نبوده است. انگار، ریاضی محض برای پایداری مستقل از رغبت و عدم رغبت ما نیست.

توصیهٔ نگارنده به شما دانشجوی ریاضی، این است که نگرانی‌های همیشگی ترم اول را به فال نیک بگیرید. این که دانشجوی ریاضی از ترم اول نگران آینده است، نکتهٔ مثبتی است؛ زیرا دیگران پس از چهار سال یاد این نگرانی‌ها می‌افتند. این که شما به درد ریاضی می‌خورید، یا این که ریاضی به درد شما می‌خورد، خودش بعد از سه چهار سال تحصیل پر تلاش مشخص می‌شود. نیازی به کار خاصی نیست و نیازی به نگرانی نیست. اگر مناسب برای این رشته باشید خود به خود در آن می‌مانید. اما مادامی که به ریاضی عشق می‌ورزید، یادتان نرود که ریاضی کار کردن یک امر شیک و مجلسی است؛ زمانی فکر خوب کار می‌کند که نیازهای اولیهٔ زندگی برطرف شده باشد. پس همیشه کسب بضاعت مالی را در اولویت اول زندگی خود قرار دهید و ریاضی را در اولویت دوم. [۳]

۴.۱۵ سخن آخر نویسنده

سرانجام به بخش آخر کتاب رسیدیم. این بخش، مشابه وصیت‌نامه‌ها و دردنامه‌هایی است که برخی دانشجویان در پایان برگهٔ امتحانی خود می‌نویسند، اما در عین حال خواندن آنها هم بی‌لذت نیست!

کتابی که تا به اینجا مطالعه کردید، احتمالاً منعکس کنندهٔ کامل سبک نگارش این نگارنده نباشد. یک دلیلش این است که نگارنده از اول، قصد نوشتن کتاب نداشته است و این کتاب از جزوات کلاسی او پر و بال گرفته است. کتابهای احتمالی بعدی او قطعاً این گونه نخواهند بود.

اما چه بسا نشأت گرفتن کتاب از بحثهای یک کلاس درس و گچ و تختهٔ آن، موجب صمیمیت بیشتر شده باشد؛ خصوصاً که کتاب حاصل یادداشتهای اولین تدریس مدرس است. [۴] اگر نگارنده با دغدغه‌های امروز و پس از سالها تجربه کتاب را نوشته بود، شاید بسیاری سوالهای مورد علاقهٔ دانشجویان جواب داده نمی‌شد. علت تصمیم به چاپ کتاب نیز همین احساس دغدغه‌مندی در طول کتاب است. هر ویرایشی که منجر به پختگی بیشتر شد، در تقابل با زبان معلمانهٔ کتاب قرار گرفت.

امیدوارم نقایص به مرور زمان کمتر و کمتر شوند و کتاب مورد استفاده واقع گردد. دوستانی مرا عیب کردند که چرا به زبان انگلیسی ننوشتم. علت آن است که نگارنده همچنان معتقد است که هیچ چیز جای یک متن خوش‌خوان و روان فارسی را نمی‌گیرد. وقتی هدف، بیان نکات عمیق است، نباید واسطه‌ای میان زبان فکر و زبان تکلم وجود داشته باشد. به علاوه، هیچ لذتی بالاتر از لذت تدریس ریاضی، با زبان مادری نیست. آزادانه راندن اسب کلام در دشتهای حاصلخیر معنا تنها با زبان مادری میسر است.

[۳] در صورتی که نیازمند به نصحیت هستید عبارت «نصیحتهای یک کهنه‌دانشجو به نودانشجویان» را در گوگل جستجو کنید!

[۴] در مقدمهٔ ویرایش قبلی، این جمله که این کتاب حاصل دو ترم تدریس است، موجب نگاه بسیار منفی بدان شده بود، اما این حقیقت دارد.

نمایه

جزوات برخطِ استفاده شده

[۱] م. خانی. *مبانی منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها* .
mohsen-khani.github.io/logic97-1/jozve/logic-full.pdf.

[۲] م. خانی و ا. زارعی. *نظریهٔ مجموعه‌ها*.
khani.iut.ac.ir/sites/khani.iut.ac.ir/files//u145/jozve-kamel.pdf.

[۳] م. خانی و ح. محمدی. *نظریهٔ گالوا*.
khani.iut.ac.ir/sites/khani.iut.ac.ir/files//u145/galois_theory.pdf.

[۴] M. Ziegler. *Mengenlehre*.
home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/skripte/mengenle.pdf.

منابع

[1] S.B. Cooper. *Computability Theory.* Chapman Hall/CRC Mathematics Series. Taylor & Francis, 2003.

[2] H.D. Ebbinghaus, J. Flum, and W. Thomas. *Mathematical Logic.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1996.

[3] H.B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.* Elsevier Science, 2001.

[4] S. Hedman. *A First Course in Logic: An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity.* Number no. 9 in Oxford texts in logic. Oxford University Press, 2004.

[5] T.W. Hungerford. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2003.

[6] K. Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs.* Mathematical Programming Study. North-Holland Publishing Company, 1980.

[7] S. Lang. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2005.

[8] E. Mendelsohn. *Introduction to Mathematical Logic.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Springer US, 2012.

[9] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976.

[10] M. Ziegler. *Mathematische Logik.* Mathematik Kompakt. Birkhäuser Basel, 2011.

[11] M. Ziegler. *Mengenlehre.* Mathematik Kompakt. Birkhäuser Basel, 2011.