مبانی ریاضیات

محسن خانی
دانشگاه صنعتی اصفهان

۲۲ اسفند ۱۴۰۲

هم سؤال از علم خیزد هم جواب
همچنانک خار و گل از خاک و آب
مولوی

پیش‌گفتار

اکنون که چندین سال از حضورم در دانشگاه صنعتی اصفهان می‌گذرد، به لطف خداوند، چندین جزوه در زمینه‌های مختلف ریاضی فراهم آورده‌ام که هر کدام در اولین تدریس درس مربوطه به نگارش درآمده است. در این مدت، هیچ‌گاه قصد تبدیل این جزوات به کتاب نداشته‌ام، مگر جزوهٔ «مبانی ریاضیات» که پیش‌تر از همه، و در اولین ترم تدریسم در این دانشگاه به نگارش در آمده، سال‌ها به صورت برخط موجود بوده، و به علت اهمیت موضوع آن، مورد توجه و گاهی اظهار لطف خوانندگان زیادی واقع شده است. [۱] به فراخور پرسش‌های دانشجویان در تدریس‌های متعدد بعدی، نکات ریز و درشتی در جای‌جای جزوه اضافه، و وقت زیادی روی آن گذاشته شد، تا جایی که دیگر حیف بود که نسخهٔ برخط را به صورت جدی چکش‌کاری و آن را تبدیل به کتاب نکنم.

از همان نسخهٔ نخست، هدفم در این کتاب پرداختن به مبانی اصول موضوعه‌ای علم ریاضی در سطح یک دانشجوی ترم اولی بوده است. در آن کوشیده‌ام که خواننده را در مواجهه با سوالات زیر قرار دهم و پاسخ آن‌ها را با زبانی که برای دانشجوی ترم‌های اول کارشناسی قابل فهم باشد فراهم آورم:
علم ریاضی بر پایهٔ چه مسلماتی بنا نهاده شده است؟ روش ایجاد علم ریاضی چیست؟ تا کجا می‌توان به این علم اعتماد کرد؟ و ریاضی از پاسخ به چه سوالاتی ناتوان است؟

نگرانی من همواره از این بوده که درس مبانی ریاضی، در بسیاری از دانشگاه‌های کشور تنها به درسی برای ارائهٔ پیش‌نیازهای ریاضی لازم جهتِ کسب مدرک کارشناسیِ ریاضی تقلیل یافته است؛ احتمالاً کلمهٔ «مبانی» به اشتباه معنا شده است. حال آنکه در حقیقت، مبانی ریاضی عنوانِ یک گرایش عمیق و بنیادی علمِ ریاضی و دارای پیچیدگی‌ها و ظرافت‌های فراوان است. تدریس و تألیف مبانی ریاضی، با زدودن این ظرافت‌ها، حاصلی برای دانشجوی ریاضی ندارد، جز این که او را نیمی از سال درگیر تعاریف سادهٔ دبیرستانی و نیمی دیگر، سردرگم در قضایای پیچیده کند. قضایای مهمی که شاید برخی از آن‌ها قرار است فقط یک بار و آن هم در درس مبانی ریاضی معرفی و اثبات شوند. [۲]

از این رو، تدریس مبانی ریاضی از زمرهٔ امور سَهلِ مُمتَنِع است. می‌توان با هر گرایش علمی ریاضی به تدریس این درس پرداخت و احتمالاً به تعداد مدرسان این درس، کتاب مبانی ریاضی نوشته شده است؛ با این حال، حتی سوالات یک دانشجوی ترم اولی، می‌تواند مدرسی مجرب را با چالش مواجه کند. درست است که هر ریاضی‌دانی در مقام اول یک منطق‌دان است و معمولاً در بخش اول هر کتاب ریاضی نگاهی گذرا به منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها و تلاشی برای اثبات ضرورت آن می‌شود، اما تصورِ این که «همین قدر منطق کافی است»، اشتباهی پرگزند است، و همین اشتباه به تدریس اصولی مبانی ریاضی آسیب وارد کرده است. [۳]

رهیافت من در این کتاب، عمدتاً رفع ابهام‌هائی بوده است که خود، در دوران کارشناسی داشته‌ام. مدام به ذهن دورهٔ کارشناسی خود برگشته‌ام، سوال پرسیده‌ام و جواب داده‌ام. معتقدم که بسیاری از ابهامات در مبانی ریاضی حتی برای ریاضی‌دانان در سطوح بالای دانشگاهی نیز به جای خود باقی می‌مانند: پاسخ سوالاتی مقدماتی از قبیل این که

[۱] خصوصاً آقای دکتر اسدالهی که چندین بار این کتاب را منبع درس در دانشگاه اصفهان معرفی کردند. دوبار به دعوت ایشان به دانشگاه اصفهان رفتم و در مورد درس مبانی ریاضی سخنرانی کردم. تجربهٔ جذابی بود و البته توجه دانشجویان به خط به خط نوشته‌هایم موجب خوشحالیم شد. همچنین ایمیل‌های فراوانی از دانشجویانی در دانشگاه‌های سراسر کشور دریافت می‌کنم که مرا به علت نوشتن این کتاب مورد تفقد قرار می‌دهند.

[۲] همان طور که در زمان دانشجویی ما، دانشجویان رشتهٔ ریاضی را به سخره می‌گرفتند که در دانشگاه مشغول یادگیری اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها هستند.

[۳] لازم به ذکر است که کتاب ارزشمند «مبانی و مقدمات علم ریاضی» نوشتهٔ استاد بزرگوارم، آقای دکتر ناصر بروجردیان، از بهترین کتاب‌های موجود است و اینجانب احتمالاً خواسته یا ناخواسته، ولی در هر صورت از سرِ ارادت، از مثال‌های این کتاب استفاده کرده‌ام. کتاب معروف لین و لین، با وجود محبوبیتش در دانشگاه‌های کشور، متاسفانه نمونه‌ای از نگارش غیراصولی مبانی است.

اصل انتخاب واقعاً چه می‌گوید، کاردینال‌ها دقیقاً چه هستند، حتی چرا گاهی فلش‌های اثبات یک خطه و گاهی دو خطه هستند، فرق مجموعه و گردایه چیست، و غیره، حداقل برای اطرافیان ریاضی‌دان من مبهم هستند. واضح است که تنها، تحصیل در رشتهٔ منطق و مبانی ریاضی می‌تواند به رفع چنین ابهام‌هایی کمک کند.

در این کتاب، منطق تنها به صورت تزئینی در فصول اول بیان نشده است، بلکه حضورش در سراسر کتاب جاری است. پرداختن جدی به مفاهیمی مانند اصل انتخاب، انواع نامتناهی‌ها و قضایای بنیادی نظریهٔ مجموعه‌ها، در کنار دو قضیهٔ بنیادی تمامیت و ناتمامیت گودل در منطق ریاضی، نقطهٔ تمایز این کتاب با کتاب‌های مشابه است.

شاید نقطهٔ تمایز دیگر، لحن معلمانهٔ نوشتار این کتاب باشد. ممکن است گاهی، اصل کوتاه‌نویسی و زیبانویسی قربانی این لحن بیان شده باشد، ولی در عوض، این امکان فراهم آمده است که مسائل پیچیده‌ای مانند قضایای ناتمامیت و استقلال حقایق از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها، برای خوانندهٔ تازه کار جا بیفتد.

به بیان تخصصی‌تر، این کتاب توسط منطق‌دانی در حوزهٔ نظریهٔ مدل‌ها نوشته شده است، که قبل از هر چیز، قضیهٔ تمامیت گودل را فرض گرفته است. به همین علت، زبان این کتاب، نسبت به کتاب‌هایی که با رویکرد جذاب نظریهٔ برهان نوشته شده‌اند، برای خوانندگان ریاضی قابل فهم‌تر است.[۴]

تدریسِ تقریباً همهٔ فصل‌ها، در یک ترم امکان‌پذیر است، اما مدرس می‌تواند بنا به سلیقه و دغدغه‌های خود بخش‌هایی را حذف کند. در ابتدای برخی بخش‌ها تأکید شده است که خواننده می‌تواند از خواندن آن‌ها، بی آن که به اشتیاق او و به مسائل جدی مبانی لطمه‌ای وارد شود، صرف نظر کند.

این نقد وارد است که گاهی پیش از آن که مفاهیمی توضیح داده شده باشند، از آن‌ها استفاده شده است. مثلاً پیش از آن که توابع و ترکیب آن‌ها به طور دقیق تعریف شوند از کلمهٔ تابع در اصل انتخاب یا در توضیح قضیهٔ بازگشت استفاده شده است. نگارنده نمی‌خواسته است توضیح برخی مسائل را به فصل‌های دورتر موکول کند؛ مثلاً عمداً قصد داشته است همهٔ اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها را یک‌جا بیان کند، یا قضیهٔ بازگشت را بلافاصله پس از استقراء توضیح دهد. همچنین فرض نگارنده بر این بوده که این مفاهیم پیش‌تر در دبیرستان با دقت کم‌تری تعریف شده‌اند ولی همان میزان دقت برای درک منظور نویسنده در آن مقطع کتاب کافی بوده است. گاهی نیز علت عدم رعایت توالی، تنها بشارت دادن خواننده به مفاهیم جذاب پیش روی او در فصل‌های بعدی بوده است. مثلاً پیش از آن که کاردینال‌ها و اعمال روی آن‌ها تعریف شوند، هنگام بحث دربارهٔ شمارا و ناشمارا به آن‌ها ارجاع داده شده است. این کتاب قرار است برای کسانی که به تازگی از دبیرستان وارد دانشگاه شده‌اند قابل فهم و البته جذاب باشد. وسواس بیش از حد در حفظ دقت و حتی توالی منطقی، این غرض را نقض می‌کند.

نقد دیگر می‌تواند این باشد که گاهی به مطالبی که در سایر کتاب‌های مبانی به آن‌ها به تفصیل پرداخته شده است، در این جا فقط اشاره‌ای گذرا شده است؛ برای مثال در مورد اعداد حقیقی و اصل کمال فقط در یک پیوست کوتاه صحبت شده است. علت این است که در این کتاب «دغدغهٔ مبانی» مهم‌تر از تدریس آنالیز و جبر و غیره بوده است. مثلاً در مورد اعداد حقیقی، این که دانشجو بداند که مجموعهٔ اعداد حقیقی چه جایگاهی در جهان مجموعه‌ها دارد، دغدغهٔ مهم‌تری از اثبات ویژگی‌های آنالیزی آن، مثلاً ویژگی مقدار میانی برای توابع پیوسته، بوده است.

زحمت تایپ اولیهٔ این کتاب در حین اولین تدریس را همسرم، «دُرسا پیری» کشیده است. صمیمانه قدردان و سپاسگزارِ ایشان هستم. دوست گرامیم «حمزه محمدی» نیز زحمات زیادی روی آن کشید و اغلاط بسیاری را تصحیح کرد. دانشجویان مختلفی در دوره‌های مختلف، خط به خط کتاب را خوانده‌اند و اصلاحاتی بر آن گوشزد

---

[۴] توضیح: اکثر ریاضی‌دانان مدل‌تئوریست هستند و نه پروف‌تئوریست؛ اگر از آن‌ها بخواهیم نشان دهند که در هر گروه، وارون یک عنصر یکتاست، ابتدا یک گروه را در نظر می‌گیرند و سپس نشان می‌دهند در آن گروه، وارون هر عنصر یکتاست. اگر پروف‌تئوریست باشند، باید بدون توجه به گروه خاصی و فقط با استفاده از اصول‌موضوعهٔ تعریف گروه به یکتا بودن وارون یک عنصر برسند. در این کتاب، قبل از هر چیز، قضیهٔ تمامیت گودل پذیرفته شده است و از این رو، صحت احکام در «جهان‌ها» مورد بررسی قرار گرفته است.

کرده‌اند. در آخرین ویرایش، دوست و دانشجوی خوبم «پیمان انصاری‌پور» به دقت خطاهای زیادی را گوشزد کرد، حتی اشعار ابتدای فصول را نیز مورد نقد قرار داد. آقای دکتر بیژن طائری نیز با ریزبینی خاصی، بسیاری بی‌دقتی‌های ریاضی و نگارشی مرا (چه در متن و چه در تمرین‌ها) خاطر نشان کرده‌اند، و از ایشان نیز کمال تشکر را دارم. گاه و بیگاه، برای مشورت و نیز رفع پیغام‌های خطای برنامهٔ لاتک، به دوست و یاور همیشگی‌ام «افشین زارعی» متوسل شده‌ام.

تدریس سال ۹۸ (از بخش نظریهٔ مجموعه‌ها به بعد) فیلم‌برداری شده است. سایت درس در آن زمان در آدرس زیر موجود است:

https://mohsen-khani.github.io/9899-1/

فیلم‌های درس در آن زمان در آپارات بارگذاری شده‌اند و در آدرس زیر قابل مشاهده هستند:

https://www.aparat.com/v/K4F1B

صرف‌نظر از تبلیغاتی که آپارات ضمیمهٔ این فیلم‌ها می‌کند، و نیز صرف نظر از کم‌تجربگی مدرس در تدریس اول، به نظر مولف، این فیلم‌ها افزونهٔ مناسبی بر محتوای کتاب هستند. زحمت فیلم‌برداری و ویرایش فیلم‌ها را نیز همسرم کشیده است — و این کار از آنچه به نظر می‌رسد، خیلی بیشتر وقت می‌گیرد.

سرآخر و پیش از شروع رسمی کتاب، لازم می‌دانم که جوشش معلمانه‌ام در تألیف این سطور را با افسوس، به پیشگاه پدر مرحومم، *علی‌اصغر خانی* تقدیم کنم که سال‌های عمر کوتاه وی نیز با دغدغه‌ها و دلسوزی‌های معلمانه مشابهی سپری شد:

سال‌ها بر تو بگذرد که گذار
نکنی سوی تربت پدرت
تو به جای پدر چه کردی خیر
تا همان چشم داری از پسرت
سعدی

فهرست مطالب

مقدمه

حسن روی تو به یک جلوه که در آینه کرد
این همه نقش در آئینهٔ اوهام افتاد
حافظ

علم چیست؟ منطق چیست؟ مبانی علم ریاضی یعنی چه؟

پیش از آن که دربارهٔ مبانی ریاضی، به عنوان شاخه‌ای از علم ریاضی سخن بگوییم، بهتر است نخست تعریفی از علم (دانش، ساینس) ارائه کنیم و به بیان تفاوت آن با دانائی (آگاهی، نالج) بپردازیم. [۵]

دانایی، کیفیتی است که در انسان، با استفاده از تفکر، تعمق، مطالعه و کسب تجارب حاصل می‌شود. یک استاد دانشگاه، می‌تواند به سبب مطالعات زیادی که دارد، دانا باشد؛ در عین حال یک کشاورز که در مزرعه کار می‌کند نیز می‌تواند به سبب تجاربی که در زندگی کسب کرده است فرد دانائی باشد. عموماً کسی از دانائی‌های کس دیگر با خبر نیست، مگر این که این دانائی از رفتار یا سخن او قابل برداشت باشد. نمونهٔ افراد چنین دانا و احتمالاً خوش‌سخن را شاید همهٔ ما در اطرافیان خود دیده باشیم.[۶]

پس دانا بودن یک کیفیت شخصی است و موجب بالاتر رفتن کیفیت زندگی فرد دارندهٔ آن می‌شود. اما ممکن است نتوان دانایی را از کسی به کسی دیگر منتقل کرد. مثلاً ممکن است فرزند کشاورز مثال بالا، از دانائی پدر هیچ بهره‌ای نبرد؛ شاید به این دلیل که پدر توانائی تدریس دانائی خود یا روش کسب آن را به فرزند نداشته است. شاید هم، مانند مثالی که در بند بعدی آمده است، اصولاً انتقال آن دانائی کار دشواری بوده باشد.

یک مثال از دانائی، «معرفت» است. در این جا شخص نه تنها از طریق تجربه و مطالعه، بلکه شاید به طریق الهام کسب دانائی کرده است. ولی باز هم همان مشکل قبلی برقرار است که شاید عارف نتواند دانائی خود را به دیگران منتقل کند. عموماً از سخن عارفان این ادعا برداشت می‌شود که آن‌ها چیزهائی را می‌دانند و می‌بینند که دیگران نمی‌دانند و نمی‌بینند؛ و بدتر از آن، شاید هیچ‌گاه بدان مقامات نرسند که درک کنند!

هر کسی از ظن خود شد یار من
وز درون من نُجست اسرار من

از بیت مشهور بالا از مولوی، چنین برداشت می‌شود که: «من چیزهائی می‌دانم که دیگران حتی اگر سعی کنند، به ظن خودشان فهمیده‌اند».

بیت بالا شاخص خوبی برای تمایز قائل شدن میان تعریف **دانش** و **دانائی** است. دانش، یا علم، یا ساینس،

---

[۵] بهتر است همین‌جا تأکید کنم که منظور من از علم، علم دانشگاهی، و یا علم مورد قبول افراد آکادمیک است و کاری به دسته‌بندی شاخه‌های علم به ساینس یا غیرآن ندارم.

[۶] دوستی تعریف می‌کرد که با یک مرد روستائی آشنا شده است که سخنانی بس حکیمانه می‌گفته است. وقتی از او دربارهٔ منبع اطلاعاتش پرسیده است، چنین پاسخ شنیده است که راستش، من از آنجا که سواد ندارم، مجبورم زیاد فکر کنم!

به دانائی‌ای گفته می‌شود که با سخن گفتن و نوشتن در یک زبان مشترک و دارای قاعده‌های مشخص قابل انتقال به دیگران باشد. در دنیای علم هیچ‌گاه نمی‌توان گفت «من چیزهائی می‌دانم که دیگران هرگز نخواهند فهمید». آن چیزها اگر هم وجود داشته باشند، علم محسوب نمی‌شوند. در واقع آن چیزها دقیقاً زمانی علم به حساب می‌آیند که به نگارش درآیند و دیگران نیز با خواندشان به دانائی برسند و در صورت امکان بر آن‌ها بیفزایند. پس یک دانائی، نخست به صورت علم درمی‌آید، سپس تبدیل به یک دانائی عمومی می‌شود و دوباره همان به علم تبدیل می‌شود و این روند ادامه می‌یابد.
تا این جا گفتیم که علم، همان دانائی به صورت نوشتار یا گفتارِ قابل‌انتقال درآمده است.[۷] نیز گفتیم که برای انتقال دانائی، یعنی تبدیل آن به علم، نیازمند زبانی مشترک هستیم. زبانی که هر کس که بر آن تسلط یابد، بتواند سخنان و نوشته‌های ما را درک کند. یک زبانِ علمی چیزی فراتر از یک زبان روزمره است که فقط برای ساختن جملات استفاده شود. مهم این است که قواعدی مشترک برای استدلال، توجیه و تضارب آرا وجود داشته باشد. در واقع، زبان علم، یک **زبان منطقی** است.[۸]

پایهٔ علوم جدید بشری، علم ریاضیات است. ریاضیات نیز زبان خود را دارد: زبان ریاضیات ترکیبی است از علائمی برای جمله‌سازی و قوانینی برای استدلال کردن و نتیجه گرفتن جملات جدید از جملات موجود. به این ترکیب، «منطق ریاضی» گفته می‌شود. تحصیل ریاضی یعنی فراگرفتن زبان آن و پذیرفتن و به کارگیری نحوهٔ استدلال در آن زبان. تنها زمانی دانشجویان من می‌توانند آنچه من تدریس می‌کنم را بپذیرند که قوانین استدلال و حتی اصول موضوعهٔ مرا قبول داشته باشند.

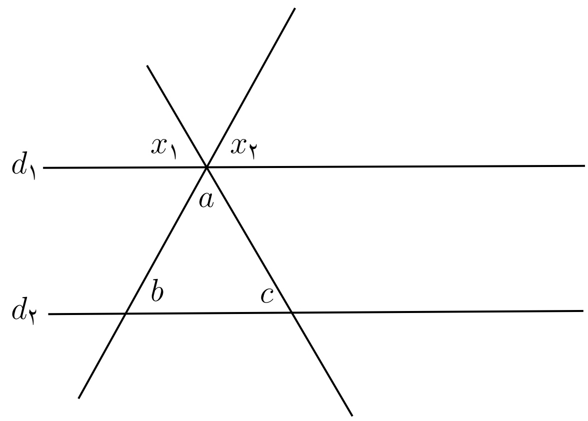
از این جا، آمادهٔ توضیح مفهوم «مبانی علم» یا مبانی ریاضی، به عنوان بخشی از منطق ریاضی می‌شویم. احتمالاً با درک دبیرستانی از ریاضیات متوجه این شویم که برای هر **قضیه‌ای** که در ریاضیات **اثبات** می‌شود، **استدلال‌هائی** وجود دارد که ریاضی‌دانان آن استدلال‌ها را قبول دارند. با این حال، بسیاری از این استدلال‌ها، به گونه‌ای هستند که درستی یک قضیهٔ ریاضی را به درستی یک قضیهٔ دیگر مربوط می‌کنند. به همین ترتیب آن قضیه، نیز با استدلال درست از قضایای قبلی نتیجه شده است. ادامهٔ این مسیرِ عقب‌گرد، ما را به «قضیه‌ای» می‌رساند که اثباتی برای آن وجود ندارد و آن قدر طبیعی و بدیهی به نظر می‌رسد که انتظار داریم همه آن را قبول داشته باشند. **نکتهٔ مهم این است که این سیر بازگشتی باید متناهی باشد.** آن قضایای اولیه را **اصول موضوعه** می‌نامیم. اصول موضوعه، باید آن‌قدر طبیعی باشند که خودشان اثباتی برای خودشان باشند.

واژه‌های «قضیه، اثبات و استدلال» باید به دقت تعریف شوند. اما بیایید پیش از آن و به عنوان مثال، یک قضیهٔ ریاضی را با هم ثابت کنیم:

قضیه. مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است (یعنی برابر با زاویه‌ای است که یک خط راست می‌سازد).

[۷]حتی اگر بصیرتی پشت آن نباشد. حتی کسانی که بصیرت علمی کافی ندارند نیز می‌توانند مقالهٔ علمی تولید کنند. حتی در معنای امروزی علم، تمایز قائل شدن میان آثار علمی نیز مشکل است. سیستم‌های مختلفی برای ارزیابی کیفیت علم وجود دارند که هیچکدام قابل اتکا نیستند. بوریس زیلبر روزی به من گفت: «در ریاضی محض اگر با کسی دعوامان بشود، کافی است به او بگوییم که قضیه‌های من از قضیه‌های تو سختتر است!»

[۸]کلمهٔ منطق از «نطق» یعنی سخن می‌آید، و کلمهٔ یونانیِ «Logos» که Logic از آن گرفته شده است، نیز به همین معناست.



اثبات. نخست دو خط موازی **نوعی** به نامهای $d_۱$ و $d_۲$ رسم می‌کنیم. هر دو خط موازی دیگری مانند این دو هستند. از آنجا که خطوط $d_۱$ و $d_۲$ موازی‌اند، داریم:

$$x_۲ = b \quad , \quad x_۱ = c \tag{۱}$$

می‌دانیم که هر خطی یک زاویهٔ ۱۸۰ درجه می‌سازد. همچنین زاویه‌ای که در بالا بین $x_۱, x_۲$ قرار دارد برابر با a است. بنابراین داریم:

$$x_۱ + a + x_۲ = ۱۸۰^\circ \tag{۲}$$

با **جایگذاری** اطلاعاتِ (۱) در (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$a + b + c = ۱۸۰^\circ.$$

و اثبات حکم مورد نظر ما به پایان می‌رسد. □

بیایید بررسی کنیم برای اثبات قضیه بالا از چه چیزهایی استفاده شده است:

۱. زبان (زبان فارسی و حروف ریاضی).

۲. آشنایی با نحوهٔ صحیح استدلال کردن (مثلاً مجوز جایگذاری مقادیر (۱) در (۲) را به خود دادیم، یا این که کافی دانستیم که حکم را فقط برای همین دو خطی که خودمان کشیده‌ایم ثابت کنیم).

۳. آشنایی با برخی قضیه‌هایی که قبلا ثابت شده‌اند (دانسته‌های قبلی).

دقت کنید که این که اگر دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی باشند آنگاه زوایای $x_۱$ و b برابرند، معادل با یکی از **اصول‌موضوعهٔ** هندسهٔ اقلیدسی است. ما از این دانسته در اثبات بالا استفاده کردیم. همچنین از این دانسته استفاده کردیم که یک خط، زاویهٔ ۱۸۰ درجه می‌سازد. در بخشی از اثبات نیز گفتیم که می‌شود اطلاعات (۱) را در (۲) جایگذاری کرد. این یک **قانون استدلال** است.

قضیهٔ بالا، یک قضیه در هندسهٔ اقلیدسی است. احتمالاً در دبیرستان دیده‌اید که هندسهٔ اقلیدسی، دارای پنج اصل‌موضوعهٔ مشخص است، که هر قضیه‌ای به نحوی با تعداد متناهی استدلال، از آن‌ها نتیجه می‌شود. وقتی یک سوال هندسهٔ اقلیدسی به یک دانشجوی دبیرستانی داده می‌شود، انتظار این است که او با تکیه بر همان تعداد محدود قوانینی که از درستی آن‌ها اطلاع دارد به پاسخ سوال دست یابد. عموماً این سوال‌ها جذاب هستند چون حل آن‌ها، به نحوی بازی با اصول موضوعهٔ هندسهٔ اقلیدسی و عقب‌گرد از مسئله به آن اصول موضوعه است.

اما هندسهٔ اقلیدسی با تمام جذابیتش، تنها یک «بخش» از ریاضیات است که دارای اصول موضوعهٔ مربوط به خود است. طبیعی است که از خود بپرسیم آیا یک تعداد اصول موضوعهٔ مشخص، برای کل علم ریاضیات هم وجود دارد؟ و البته پاسخِ این سوال مثبت است. حقیقت این است که همهٔ قضایای ریاضی مشابه مثال بالا هستند. برای اثبات آن‌ها از زبانِ فارسی، اصول موضوعه، قضایای قبلی و قوانین استدلال استفاده می‌شود. اما نیاز به یک بخش علم ریاضی داریم تا به ما بگوید که:

۱. زبان ریاضی نوشتن چیست؟

۲. روش‌های صحیح استدلال چه هستند؟

۳. اصول موضوعهٔ اولیه‌ای که همهٔ قضایای ریاضیات با استفاده از آن‌ها اثبات می‌شوند چه هستند؟

۴. آیا هر جملهٔ ریاضی، باید با استفاده از اصول موضوعه یا اثبات یا رد شود؟

۵. آیا ممکن است که اصول موضوعهٔ ریاضیات ما را به «اثبات یک تناقض» برسانند؟

و این بخش از علم ریاضی، «مبانی ریاضیات» نام دارد که قرار است در این کتاب، تا حدودی با آن آشنا شویم. قسمت اعظم این درس به سه پرسش اول در بالا اختصاص خواهد یافت. در این راستا، مقدمه‌ای کوتاه دربارهٔ منطق ریاضی و روش‌های استدلال خواهیم داشت و پس از آن به معرفی اصول‌موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها خواهیم پرداخت. در بخش‌های جذابی از درس خواهیم دید که مفاهیم رازآلودی مانند مفهوم نامتناهی در کجای اصول موضوعهٔ ریاضیات جای دارند و بررسی خواهیم کرد که آیا می‌توان برخی از اصول موضوعهٔ اولیهٔ ریاضیات را با اصول بهتری جایگزین کرد. طبیعتاً همیشه انتظار داریم که تعداد اصول موضوعه، محدود باشد و این اصول، طبیعی و در عین حال کارآمد برای کاربردهای ریاضیاتی باشند.

در عین حال پاسخِ سوال‌های چهارم و پنجم معمولاً فراتر از سطح درس مبانی ریاضی است، و چه بسا بسیاری از ریاضی‌پیشگان نیز از آن‌ها بی‌خبر باشند. با توجه به اهمیتِ دانستن آن‌ها برای همهٔ ریاضی‌دانان و خصوصاً ریاضی‌دانان تازه‌کار، در بخش‌های پایانی این کتاب خواهیم کوشید که در حد توان پاسخی برای این سوال‌ها نیز فراهم آوریم.

حال که در این مقدمه، کنجکاوی خواننده را نسبت به سوال‌های چهارم و پنجم برانگیخته‌ایم، توضیحی کوتاه دربارهٔ پاسخ به آن‌ها می‌دهیم ولی این توضیح، صرفاً برای برآورده کردن حس کنجکاوی خواننده است و انتظار نداریم در این مقطع از کتاب، برای او کاملاً قابل فهم باشد.

علت اهمیت سوال چهارم، ارتباط نزدیک آن با علوم رایانه است. **توجه کنید که قوانین استدلال در منطق ریاضی، قوانین محدود و مشخصی هستند.** این قوانین را می‌توان به صورت یک تعداد دستورالعمل قابل اجرا توسط یک رایانه درآورد. بنابراین در صورتی که پاسخ به سوال چهارم مثبت باشد، می‌توانیم اصول موضوعهٔ ریاضی را به همراه قوانین استدلال به یک رایانه بسپاریم تا آن رایانه به جای ریاضی‌دانان تمامی قضایای ریاضی را تولید کند. در واقع علم ریاضی برابر می‌شود با هر آنچه از این ماشین خارج شود. مثلاً اگر ریاضی‌دانان به نحوی مطلع‌اند که اعداد طبیعی یک ویژگی خاص را دارند، این ویژگی را می‌شود با عقب‌گرد در مسیر استدلال به یک یا برخی از اصول موضوعه مرتبط دانست. این گفته، موضوع یکی از سوالات معروف هیلبرت، ریاضی‌دان برجستهٔ آلمانی در قرن بیستم بود.

اما *پاسخ* به سوال چهارم در حیطهٔ «**قضیهٔ ناتمامیت اول گودل**» قرار می‌گیرد: بنا به این قضیه، اگر یک سیستم کوچک از اصول موضوعه را برای نظریهٔ اعداد در نظر بگیریم، آن‌گاه گزاره‌ای در مورد اعداد طبیعی هست، که نه خودش از اصول موضوعهٔ ما نتیجه می‌شود و نه نقیضش.

و اما در مورد سوال پنجم: از کجا می‌توان فهمید که اصول موضوعهٔ ریاضیات، منجر به اثبات یک تناقض در ریاضیات نمی‌شوند؟ گفتیم که همه چیز باید با استفاده از اصول موضوعه اثبات شوند. آیا این ممکن است که دو ریاضی‌دان مختلف با استفاده از اصول موضوعهٔ ریاضیات دو قضیهٔ متفاوت اثبات کنند که با هم در تناقض باشند؟!

پاسخ به این سوال، در حیطهٔ **قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل** قرار می‌گیرد. بنا بر این قضیه، متاسفانه ـ یا شاید خوش‌بختانه؟! ـ امکان‌پذیر نیست که با استفاده از امکاناتِ اصول موضوعه‌ای و استدلالی خودِ علم ریاضیات بتوانیم اثبات کنیم که در ریاضیات تناقضی رخ نمی‌دهد.

همان طور که پیش‌تر گفته شد، خواهیم کوشید که علاوه بر سه سوال اول، در این کتاب به سوال‌های چهارم و پنجم نیز به نحوی مقتضی بپردازیم؛ و البته این قرار است نقطهٔ قوت تفهیم مبانی ریاضی به سبک ما باشد.

انتظار ما در پایان یک دورهٔ درسی مبانی ریاضی این است که دانشجویان آن چنان با نحوهٔ صحیح استدلال و درست‌نویسی آشنا شوند که خودْ جملات و استدلال‌های درست ریاضی را از جملات اشتباه و استدلال‌های سُست تشخیص دهند. انتظار داریم که دانشجویانمان روش فکر کردن و روش نوشتن در ریاضی را بیاموزند. هر سوال را به عنوان موضوع یک انشاء بدانند و در پاسخ آن یک انشاء دقیق و خواندنی، دارای شروع، بسط و انتها بنویسند. این انشاء باید به گونه‌ای باشد که یک متخصص ریاضی، بی دردسر آن را دنبال و درک کند. نیز انتظار داریم که پس از گذراندن یک دوره درسی مبانی ریاضی، سوال‌هایی از قبیل سوال‌های زیر دیگر توسط یک دانشجوی ریاضی پرسیده نشود:

- من که فلان چیز را دقیقاً عین کتاب شما نوشته‌ام چرا نمره نگرفته‌ام؟!
- آیا می‌شود فلان سوال را با روش فلان استاد حل کنیم؟!
- من تعدادی جمله پشت سر هم نوشته‌ام و خودم قادر به خواندن آن‌ها نیستم. آیا اینها جواب سوال نیست؟

فصل ۱

منطق گزاره‌ها

طبعِ تو را تا هوسِ نحو کرد
صورتِ صبر از دل ما محو کرد!
ای دل عشاق به دامِ تو صید
ما به تو مشغول و تُو با عَمْر و زید
سعدی، گلستان

۱.۱ معرفی اجمالی اجزای یک منطق

«منطق» زندگی روزمرهٔ خود را در نظر بگیرید. شما به زبان فارسی صحبت می‌کنید؛ در این زبان، **الفبائی** وجود دارد که به نحو مناسبی با هم ترکیب می‌شوند و **کلمات** و **جملات** را می‌سازند. هر جمله‌ای دارای یک **معنی** و نیز دارای یک **ارزش** (درست یا غلط) است. همچنین شما راه‌هائی برای استدلال کردن دارید که با استفاده از آن‌ها می‌توانید جملات درست جدیدی با استفاده از جملات درست قبلی ایجاد کنید. هر منطقی باید این امکانات ذکر شده را در اختیار کاربر خود قرار دهد؛ به بیان دقیق‌تر باید موارد زیر را در بر داشته باشد:

۱. نحوهٔ نوشتن جملات و عبارات در آن منطق (صرف و نحو)

۲. نحوه‌ای برای نسبت دادن معنا به آن جملات و تخصیص ارزش (درستی یا غلطی) به آن‌ها

۳. نحوه‌ای برای استدلال کردن در آن منطق (استدلال، استنتاج)

۴. اطمینان از این که با شروع از جملات دارای ارزش درست، و با به کار گیری نحوهٔ صحیح استدلال، قطعاً به جملات درست خواهیم رسید. (صحت، علت)

در زیر هر کدام از موارد بالا را به طور کوتاه توضیح داده‌ایم. هر چند در طی این فصل و فصل آینده ضمن معرفی منطق گزاره‌ها و منطق مرتبهٔ اول در عمل با این مفاهیم آشنا خواهیم شد.

صرف و نحو یک منطق به ما کمک می‌کند که یک الفبای مناسب داشته باشیم، با استفاده از حروف آن الفبا کلمه‌سازی کنیم، و با استفاده از قواعدی کلمه‌ها را کنار هم بگذاریم و جمله بسازیم. پس صرف و نحو، قواعد دستوری زبان را به ما می‌دهد و به معنای جملات کاری ندارد. برای مثال، جملهٔ «اسب کتاب می‌خواند» به لحاظ قواعد دستوری زبان فارسی مشکلی ندارد هر چند معنای آن برای ما غریب باشد!

در عین حال، در یک منطق باید امکان دریافت معانی جملاتی که به لحاظ دستوری ساخته می‌شوند و تشخیص ارزش درست و غلط به آن‌ها وجود داشته باشد. این قسمتِ کار، معناشناسی نام دارد. در منطق روزمره، شنوندهٔ جملهٔ «اسب کتاب می‌خواند» لازم است که در ذهنش موجودی به نام اسب، موجودی به نام کتاب و عملی به نام خواندن را بشناسد و سپس تشخیص دهد که آیا این جمله درست یا غلط است.

قوانین استدلال یا استنتاج در یک منطق یعنی قواعد محدودی که با برخی جملاتِ به لحاظِ دستوری درست آغاز می‌شوند و با جملاتی درست به لحاظ دستوری به پایان می‌رسند. عبارت زیر، یک قانون استنتاج است:

$$P, (P \to Q) \vdash Q$$

عبارت فوق (که فعلاً قرار نیست به علائم عجیب و غریب آن فکر کنیم) به ما می‌گوید که اگر به روشی گزاره‌های P و $(P \to Q)$ قبلاً اثبات شده‌اند، گزارهٔ Q را نیز اثبات شده بدانیم! دقت کنید که این قانون استنتاج، هیچ محدویتی روی معنای P و $(P \to Q)$ ایجاد نمی‌کند و فقط ما را از دو گزاره، به یک گزاره می‌رساند.

نهایتاً فرض کنید که همهٔ قواعد ظاهری استدلال در یک منطق را بدانیم و با استفاده از آن‌ها از چند گزارهٔ دستوری، به چند گزارهٔ دستوری دیگر برسیم. صحت در یک منطق، متضمن این است که وقتی معانی گزاره‌های اولی را تصور می‌کنیم و این معانی درست هستند، گزاره‌های حاصل شده نیز در دنیای معانی ما درست باشند.

در این بخش، قرار است که موارد فوق را در منطقی، به نام منطق گزاره‌ها بشناسانیم، که مقدماتی‌ترین منطق در ریاضیات است.

۲.۱ گزاره‌نویسی در منطق گزاره‌ها

برای بررسی یک موضوع در منطق گزاره‌ها، نخست یک مجموعه متشکل از یک تعداد جملهٔ خبری ساده، موسوم به **گزاره اتمی**، یا **اتم** را به عنوان الفبا، ثابت در نظر می‌گیریم. گزاره‌های اتمی را با حروفی مانند p، q، h و ... نشان می‌دهیم. دو گزارهٔ دیگر به نام‌های $\bot$ و $\top$ را نیز در الفبای منطق گزاره‌ها قرار می‌دهیم، که اولی را گزارهٔ همواره غلط (تناقض)، و دومی را گزارهٔ همواره درست می‌نامیم. پس بسته به این که در ابتدای کار، مجموعهٔ متشکل از گزاره‌های اتمی ما چه باشد، منطق گزاره‌های ما شکل خواهد گرفت. اما انتخابِ مجموعهٔ گزاره‌های اتمی، به دلخواه ماست.

به عنوان مثال، وقتی منطق گزاره‌های ما قرار است دربارهٔ یک پدیدهٔ روزمره باشد، هر گزارهٔ اتمی را می‌توان یک **جملهٔ خبری ساده** پنداشت. پس جملات زیر، گزارهٔ اتمی هستند:

ــ دونالد ترامپ انسان است.

ــ هوا بارانی است.

ــ تخته‌سیاه، سبز است.

برای هر کدام از جملات بالا، یک ارزش درست یا غلط قابل تصور است. اما جملات زیر گزارهٔ اتمی به حساب نمی‌آیند، زیرا نمی‌توان ارزشی برای آن‌ها تصور کرد:

ــ فردا خانهٔ حسن می‌آیی؟

به‌به! چه شود؟!

به عنوان یک مثال دیگر، وقتی منطق گزاره‌های ما قرار است برای گفتگو دربارهٔ اعداد طبیعی استفاده شود، جملهٔ «۲ یک عدد اول است»، یک گزارهٔ اتمی است که می‌توان برای آن ارزش درست یا غلط متصور شد. با این حال، جملهٔ «آیا ۲ اول است؟» یک گزارهٔ اتمی محسوب نمی‌شود؛ زیرا نمی‌توان به آن ارزش درست یا غلط نسبت داد.

در همین منطق گزاره‌ها، جملهٔ x یک عدد اول است، یک گزارهٔ اتمی محسوب نمی‌شود، زیرا ارزش آن به مقدار x بستگی دارد. اما وقتی برای به جای x یک مقدار مشخص، مثلاً عدد ۲ در نظر گرفته شود، آنگاه به جمله‌ای اتمی در منطق گزاره‌ها می‌رسیم.

همان طور که پیش‌تر گفتیم، در یک منطق باید راهی برای ساختن جملات پیچیده‌تر از جملات سادهٔ آن منطق وجود داشته باشد. در منطق گزاره‌ها، برای ساخت همهٔ جملات پیچیده، از گزاره‌های اتمی استفاده می‌شود. برای مثال، در منطق گزاره‌هایی که برای کاربرد روزمره معرفی کردیم، جملهٔ «هوا بارانی است و دونالد ترامپ آدم است»، یک جمله است از عطفِ دو گزارهٔ اتمی ایجاد شده است. در زیر نحوهٔ ساختن جملات پیچیده‌تر با استفاده از جملات اتمی، در یک منطق گزاره‌ها توضیح داده شده است. دقت کنید که برای این ساخت، نیازمند یک تعداد «رابط» یا «**ادات**» منطقی هستیم.

تعریف ۱.۱ (نحوهٔ جمله‌سازی در یک منطق گزاره‌ها)**.** فرض کنید یک مجموعهٔ متشکل از گزاره‌های اتمی برای یک منطق گزاره‌ها، ثابت در نظر گرفته شده باشد. مجموعهٔ متشکل از همهٔ «**گزاره**»های آن منطق گزاره‌ها، با استفاده از قوانین زیر ساخته می‌شود و به هر عنصر در مجموعهٔ گزاره‌ها، یک گزاره گفته می‌شود.

- هر گزارهٔ اتمی، یک گزاره است، $\bot$ و $\top$ نیز گزاره هستند.

- اگر P و Q دو گزاره (چه اتمی و چه غیر اتمی) باشند که قبلاً با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها از گزاره‌های اتمی ایجاد شده‌اند، آن‌گاه عبارتِ $(P \wedge Q)$ نیز یک گزاره (غیر اتمی) است که آن را عطفِ دو گزارهٔ P و Q می‌نامیم.

- اگر P و Q دو گزاره (چه اتمی و غیر غیر اتمی) باشند که قبلاً با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها از گزاره‌های اتمی ایجاد شده‌اند، آن‌گاه $(P \vee Q)$ نیز یک گزاره (غیر اتمی) است که آن را فصل دو گزارهٔ P و Q می‌نامیم.

- اگر P و Q دو گزاره (چه اتمی و چه غیر اتمی) باشند که قبلاً با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها از گزاره‌های اتمی ایجاد شده‌اند، آن‌گاه $(P \to Q)$ نیز یک گزاره (غیر اتمی) است. گزارهٔ $(P \to Q)$ به صورت P آنگاه Q خوانده می‌شود.

- اگر P و Q دو گزاره (چه اتمی و چه غیر اتمی) باشند که قبلاً با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها از گزاره‌های اتمی ایجاد شده‌اند، در این صورت $(P \leftrightarrow Q)$ نیز یک گزاره (غیر اتمی) است. این گزاره به صورت P اگر و تنهااگر Q خوانده می‌شود.

- اگر P یک گزاره (چه اتمی و چه غیر اتمی) باشد که قبلاً با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها از گزاره‌های اتمی ایجاد شده‌است، آنگاه $(\neg P)$ نیز یک گزاره (غیر اتمی) است که آن را نقیضِ P می‌خوانیم.

علائم کمکی استفاده شده برای ساختن گزاره‌های بالا، یعنی علائم $\leftrightarrow, \to, \neg, \vee, \wedge$ را **ادوات منطقی** می‌نامیم. دقت کنید که هر عضو مجموعهٔ گزاره‌ها، که با استفاده از قواعد به کار رفته در تعریفِ ۱.۱ ایجاد شده است، یک دنبالهٔ *متناهی* از علائم است. در تعریفِ ۱.۱ به نحو ضمنی بیان کرده‌ایم که برای نمایش گزاره‌های احتمالاً غیراتمی منطق گزاره‌ها، از حروف بزرگ مانند P و Q استفاده خواهیم کرد. بنا بر آن‌چه تا این جا گفته شد، یک گزاره در یک منطق گزاره‌ها، دنباله‌ای متناهی از علائم است، که با رعایت قوانینی مشخص و با استفاده از گزاره‌های اتمی و برخی ادوات کمکی، و *به صورت استقرایی* [1] حاصل می‌شود.

[1] یعنی با استفاده از تعریفی که یک بخش پایه دارد و هر بخش آن به بخش قبلی مربوط است.

مثال ۲.۱. فرض کنید مجموعهٔ گزاره‌های اتمی منطق گزاره‌های ما، مجموعهٔ زیر باشد:

$$\{p_1, p_2, \ldots\}.$$

در این صورت، عبارت‌های زیر، گزاره‌هایی در منطق گزاره‌های مورد نظر ما هستند:

$$(\neg p_3)$$
$$\big((p_1 \wedge p_2) \vee ((\neg p_3) \longrightarrow p_4)$$
$$\neg((\neg p_3) \longrightarrow p_4)$$
$$(p_1 \wedge p_2)$$
$$((\neg p_3) \longrightarrow p_4)$$
$$\big((\neg(\neg p_5)) \longrightarrow (p_2 \wedge p_3)\big)$$
$$\Big(\big((p_1 \wedge p_2) \vee ((\neg p_3) \longrightarrow p_4)\big) \vee \big((\neg(\neg p_5)) \longrightarrow (p_2 \wedge p_3)\big)\Big).$$

دقت کنید که موضوعِ ساخت یک گزارهٔ پیچیده از گزاره‌های ساده‌تر مربوط به *گرامر* یا *دستور زبان* است. در واقع دستور زبان منطق گزاره‌ها، به ما کمک می‌کند که هر گزارهٔ پیچیده‌ای به نحوی یکتا از گزاره‌های اتمی ایجاد شود. [2] این که یک گزاره از لحاظ معنایی چه ارزشی دارد، یا این که ممکن است دو گزارهٔ با ظاهر متفاوت که هر دو با رعایت دستور زبان ایجاد شده‌اند، با همدیگر ارزش یکسانی داشته باشند، به دستور زبان مربوط نمی‌شود و موضوع بحث ما در این لحظه نیست. این امر در زبانهای طبیعی نیز مانند زبان فارسی ممکن است رخ دهد: ممکن است گزاره‌ای از لحاظ دستوری درست ایجاد شده باشد، ولی از لحاظ معنایی فاقد ارزش و اعتبار باشد. گزارهٔ «من فنجان هستم» یک گزاره در زبان فارسی است که ساخت آن از لحاظ قواعد دستوری زبان فارسی مجاز است! نیز دو گزارهٔ «ابرو بالای چشم است» و «چشم زیر ابرو است» از لحاظ دستوری دو گزارهٔ متفاوت هستند هر چند معنای یکسانی دارند.

تمرین ۱.۱. فرض کنید p، q، r و s گزاره‌هایی اتمی در منطق گزاره‌های ما باشند. کدام‌یک از عبارت‌های زیر گزاره‌ای در منطق گزاره‌های مورد نظر است و کدام نیست؟

۱. $((p \to (\neg q)) \to r)\neg$.

۲. $(((p \wedge q) \vee r) \to s)$.

۳. $p \clubsuit q$.

۴. $\forall x \exists y \quad p$.

۵. $p \looparrowright q$.

۶. $p \Rightarrow q$.

۷. $(((p \wedge q) \wedge r) \wedge \ldots)$

اگر در پاسخ تمرین بالا، فقط مورد دوم را گزاره تشخیص داده‌اید پاسخ شما درست است. علت این که موارد سوم، چهارم، پنجم و ششم گزاره نیستند این است که در تعریفِ ۱.۱ که قواعد دستوری ساخت گزاره‌ها بیان شده

---

[2] این یک قضیه در منطق گزاره‌هاست که به آن «قضیهٔ خوانش یکتای گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها» گفته می‌شود. برای مشاهدهٔ اثبات می‌توانید به [۶] مراجعه کنید.

است، نمادهای $\Rightarrow, \clubsuit, \forall x, \exists y, \nleftrightarrow$ جزو ادواتی مجاز که می‌توان از آن‌ها استفاده کرد معرفی نشده‌اند. علت این که اولی جزو گزاره‌ها نیست، این است که هیچ دنباله‌ای که با به کار بردن صحیح دستور زبان ایجاد می‌شود، علامتِ $\neg$ در انتهایش قرار نمی‌گیرد (البته این را می‌شود اثبات کرد!). علت این که مورد ششم، گزاره نیست این است که به‌کارگیری قوانینِ تعریفِ ۱.۱ تنها دنباله‌هایی متناهی ایجاد می‌شوند (و البته این گفته هم نیاز به اثبات دارد!). به بیان دیگر، هر گزاره، یک دنبالهٔ متناهی از علائم است.

توجه ۳.۱. در اینجا لازم است که یک نکته برای رفع یک ابهام رایج توضیح داده شود: علامت‌های $\forall$ (برای هر) و $\exists$ (وجود دارد یک) در دستور زبان منطق گزاره‌ها نیستند، یعنی نمی‌شود آن‌ها را به اتم‌های یک منطق گزاره‌ها افزود و گزاره‌های پیچیده‌تر ساخت. اما در عین حال، می‌شود در یک منطق گزاره‌ها که برای هدف خاصی استفاده می‌شود، جمله‌ای مانند جملهٔ «یک عدد اول وجود دارد» را به طور کامل به عنوان یک گزارهٔ اتمی قرار داد.

آنچه تا به این جا شرح داده‌ایم، *صرف‌ونحوِ* منطق گزاره‌ها، یا دستور زبان منطق گزاره‌هاست. یعنی تا این جا تنها گفته‌ایم که روش جمله‌سازی در منطق گزاره‌ها چگونه است. اما در معرفی یک منطق، تنها دانستن روش جمله‌نویسی کافی نیست؛ علاوه بر آن باید روشی برای تشخیص معانی جملات و تمییز جملات درست و غلط وجود داشته باشد. به بخشی از منطق که به این مهم اختصاص می‌یابد، **معناشناسی** آن گفته می‌شود.

۳.۱ معناشناسیِ منطق گزاره‌ها

در یک منطق گزاره‌ها، *معناشناسی* عبارت است از بررسی حالات مختلفِ ارزش یک گزاره بر اساس **ارزش گزاره‌های اتمی به کار رفته** در آن، و بر اساس قواعدی که در این بخش تصویب می‌کنیم. به بیان ساده‌تر، معناشناسی یک گزاره در منطق گزاره‌ها، یعنی رسم یک جدول ارزش برای آن. [۳] بیایید یک مجموعهٔ $\{p, q, r, \dots\}$ از گزاره‌های اتمی را برای منطق گزاره‌هامان ثابت در نظر بگیریم. ارزش‌گذاری را با ساده‌ترین گزاره‌ها آغاز می‌کنیم، و سپس مطابق روش ایجاد گزاره‌های پیچیده‌تر در تعریف ۱.۱، نحوهٔ ارزش‌گذاری آن‌ها را نیز توضیح می‌دهیم.

تعریف ۴.۱. یک گزارهٔ اتمیِ p با استفاده از جدول زیر، ارزش‌گذاری می‌شود:

p
T
F

دو گزارهٔ $\perp$ و $\top$ به صورت زیر ارزش‌گذاری می‌شوند:

$\perp$
F

$\top$
T

تعریف ۵.۱. فرض کنید P و Q دو گزاره (نه لزوماً اتمی) در منطق گزاره‌ها باشند. ارزش‌گذاری گزارهٔ عطفِ P و Q که آن را به صورت $(P \wedge Q)$ نشان می‌دهیم، با استفاده از جدول زیر تعریف می‌شود:

[۳] درست خوانده‌اید! نحوه‌ی ارزش‌گذاری گزاره‌ها را خودمان تصویب می‌کنیم.

P	Q	$(P \wedge Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

دقت کنید که بنا به تعریف بالا، گزارهٔ $(P \wedge Q)$ تنها زمانی می‌تواند دارای ارزشِ T داشته باشد که همزمان P و Q دارای ارزشِ T باشند.

توجه ۶.۱. یک نکته مهم که انتظار داریم نظر یک دانشجوی ریاضی را به خود جلب کرده باشد، این است که در تعریفِ ۵.۱ نگفته‌ایم که «بدیهی است که ارزش $(P \wedge Q)$ مطابق با جدول بالا تعیین می‌شود». بلکه گفته‌ایم که «ارزش‌گذاری $(P \wedge Q)$ با استفاده از این جدول **تعریف می‌شود**». یعنی ما در حال *انعقاد قراردادهای ریاضی و بیان تعاریف ریاضی*، نه در حال یادآوری دانسته‌های پیشین شما و یا بدیهیات هستیم. اما در هر صورت، از بختِ خوش، روشی که برای ارزش‌گذاری ریاضیِ گزارهٔ $(P \wedge Q)$ بیان کرده‌ایم با آنچه در منطق روزمره انتظار داریم مطابق است: تنها زمانی این گزاره داری ارزش درست است که هم P و هم Q دارای ارزش درست باشند.

تعریف ۷.۱. ارزشِ فصل دو گزارهٔ P و Q که آن را به صورت $(P \vee Q)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

P	Q	$(P \vee Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

همان طور که در تعریف بالا مشاهده می‌کنید، در جدول ارزشِ $(P \vee Q)$ تنها در یک سطر ارزش غلط داریم؛ آن هم جائی که هر دوی P و Q غلط باشند. در اینجا یک نکتهٔ ظریف نهفته است. بنا به ارزش‌گذاری تعریف شده برای $(P \vee Q)$ در منطق گزاره‌ها، علامت «یا» که آن را با $\vee$ نشان داده‌ایم، یای مانع جمع **نیست**. از این رو، «یا»ی منطق گزاره‌ها با «یا»ای که در زبان محاوره‌ای استفاده می‌شود کمی فرق می‌کند. یای محاوره‌ای گاهی مانع جمع است و اگر بخواهیم از قانون تعریف بالا برای معنا کردنِ آن استفاده کنیم، معنی جملات مهمی (!) مثل جملهٔ زیر دگرگون می‌شود:

این خانه یا جای من است یا جای تو.

در زبان محاوره‌ای گاهی تأکید می‌کنیم که یای مورد نظر ما، مانع جمع نیست:
این کار، یا کار حسن بوده است، یا کار حسین، یا شاید هم کار هر دوی آن‌ها.
برعکس، در ریاضی گاهی باید تأکید کنیم که یای مورد نظر ما، مانع جمع است:

$$\Big((p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))\Big).$$

پس بنا به تعریفِ ارزش گزارهٔ $(p \vee q)$ گزارهٔ «دو عدد اول است یا سه عدد اول است» گزارهٔ درستی است.

پیش از ادامه دادن معناشناسی، بد نیست در اینجا گریزی به ادبیات فارسی داشته باشیم و یادآوری کنیم که جمعِ دو چیز در فارسی یعنی داشتن هر دوی آن‌ها با همدیگر. بیت زیر از حافظ را مثال می‌زنم:
عشق و شباب و رندی، مجموعهٔ مراد است
چون جمع شد معانی، گوی بیان توان زد.

تعریف ۸.۱. اگر P و Q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، ارزش‌گذاری گزارهٔ $(P \to Q)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

جدول ۱.۱: جدول ارزش گزارهٔ $(P \to Q)$

P	Q	$(P \to Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

دقت کنید که یک بینندهٔ جدول بالا، حق دارد بگوید «ارزش گزارهٔ $(P \to Q)$ فقط در صورتی برابر با T است که وقتی ارزشِ P برابر با T است، ارزش Q هم برابر با T است.». دربارهٔ چنین اظهارنظرهای بیرونی در مورد جداول ارزش در بخش‌های بعدی مفصلاً صحبت خواهیم کرد. در تفسیرِ سطر سوم و چهارم جدول ارزش بالا، می‌گوئیم که گزارهٔ موردنظر به **انتفاء مقدم** درست است. در این حالت به محضِ دیدن فرض، یعنی گزارهٔ P، تلاش برای بررسی ارزش گزاره منتفی است، و گزاره $(P \to Q)$ درست است. این نوع ارزش‌گذاری نیز در مقایسه با زبان روزمره کمی عجیب به نظر می‌رسد. فرض کنید که کسی بگوید که «اگر سنگ سخن بگوید، اسب شتر است». این گزاره، با این که بی‌معنی به نظر می‌رسد، با روش ارزش‌دهی ما در منطق گزاره‌ها درست است! در واقع ما هیچ‌گاه نیاز به تحقیق این نداریم که اسب شتر است، چون می‌دانیم که سنگ سخن نمی‌گوید! شاید در دنیائی که در آن سنگ سخن می‌گوید، اسب شتر باشد!

توجه ۹.۱. یکی از پدیده‌هائی که در حین تدریس توجهم بدان جلب شده است این است که دانشجویان معمولاً در بررسی ارزشِ $(p \to q)$ فقط به q توجه می‌کنند. مثلاً وقتی می‌گوییم «اگر سنگ سخن بگوید اسب شتر است» بلافاصله می‌گویند این جمله غلط است زیرا اسب شتر نیست. بله؛ اسب شتر نیست، ولی اگر سنگ سخن بگوید شاید اسب هم شتر شود![۴] مطرح کردن «چرا» در مورد این نحوهٔ معنا کردن گزارهٔ شرطی در منطق گزاره‌ها، سوالی بیهوده است، زیرا که همان گونه که پیش‌تر اشاره کردیم، معناشناسی منطق گزاره‌ها، یک «تعریف ریاضی» است، و تعریف ریاضی، نیازی به توجیه ندارد.

تعریف ۱۰.۱. اگر P و Q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، معناشناسیِ گزارهٔ $(P \leftrightarrow Q)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

[۴] شاید اینها را هم شنیده باشید که از فرض مُحال همه چیز نتیجه می‌شود، و فرض محال، محال نیست!

P	Q	$(P \leftrightarrow Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

دقت کنید که بنا به جدول بالا ارزشِ $(P \leftrightarrow Q)$ تنها زمانی درست است که P و Q هم‌ارزش باشند.

تعریف ۱.۱۱. اگر P یک گزاره باشد ارزش گزارهٔ $(\neg P)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

P	$(\neg P)$
T	F
F	T

مشاهده کنید که ارزش گزارهٔ $(\neg P)$ دقیقاً برعکس ارزش گزارهٔ P تعریف می‌شود.

همان طور که در تعریفِ ۱.۱ دیدیم، هر گزاره‌ای در منطق گزاره‌ها با استفاده از گزاره‌های اتمی و ادوات منطقی ساخته می‌شود. یک گزارهٔ نوعی در منطق گزاره‌ها را می‌توان به صورت $P = f(p_1, \ldots, p_n)$ در نظر گرفت که در آن $p_1, \ldots, p_n$ تمامی گزاره‌های اتمی به کار رفته در ساخت گزارهٔ P هستند. ارزش‌دهی به چنین گزاره‌ای، بنا به تعاریف بالا و بنا به ارزش‌دهی به اتم‌های $p_1, \ldots, p_n$ که در آن به کار رفته‌اند صورت می‌گیرد. در مثالِ زیر، نمونه‌هایی از چنین ارزش‌دهی‌هایی را تمرین می‌کنیم. از آنجا که رسم جدول ارزش، در ریاضیات پیش از دانشگاه به اندازهٔ کافی توسط دانشجویان تمرین می‌شود، ما در اینجا تاکید فراوان روی آموزش آن نخواهیم داشت.

مثال ۱.۱۲. جدول ارزش گزارهٔ $((\neg p) \vee q)$ را رسم کنید.

پاسخ. دقت کنید که اتم‌های به کار رفته در گزارهٔ مورد نظر ما، p, q هستند. همچنین در مسیر ساخت این گزاره، گزارهٔ ساده‌ترِ $(\neg p)$ نیز ساخته شده است. در جدول زیر ارزش این گزاره بر حسب اتم‌های به کار رفته در آن بررسی شده است:

جدول ۱.۲: جدول ارزش گزارهٔ $((\neg p) \vee q)$

p	q	$(\neg p)$	$((\neg p) \vee q)$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

□

دقت کنید که ردیف آخر دو جدول ارزشِ ۱.۲ و ۱.۱ با هم یکسان هستند؛ یعنی دو گزارهٔ $(p \rightarrow q)$ و $((\neg p) \vee q)$، زمانی که اتم‌های به کار رفته در آن‌ها هم‌ارزش باشند، ارزش یکسانی پیدا می‌کنند. این پدیده را در بخش بعدی به دقت مطالعه خواهیم کرد.

تمرین ۱.۲. جدول ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید:

- $((p \to q) \to (\neg(q \to p)))$
- $((p \to q) \to q)$
- $((p \to q) \wedge (p \to (\neg q)))$
- $(\neg(p \to q))$
- $(\perp \to p)$
- $(p \to \perp)$

تمرین ۳.۱. جدول زیر را کامل کنید.

p	q	?
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

به عنوان یک راهنمایی برای حل تمرین بالا، فرض کنید به دنبال گزاره‌ای هستید که دارای جدول ارزش زیر است:

p	q	r	?
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	F	T
F	F	T	F

نخست به سطرهائی از جدول توجه کنید که قرار است ارزش گزارهٔ مورد نظر در آن‌ها T باشد؛ در اینجا سطرهای اول و چهارم و پنجم و هفتم؛ و توجه کنید که قرار است فصل این‌ها گرفته شود. حال در این سطرها بسته به درست و غلط بودن گزاره‌های اتمی، خود یا نقیضشان را قرار دهید و عطف بگیرید.

بنا بر آنچه گفته شد، گزارهٔ مد نظر جدول بالا به صورت زیر است:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r)) \vee ((\neg p) \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge (\neg r)).$$

تمرین ۴.۱. ثابت کنید که روشی که در توجه بالا گفته شد، ما را به گزارهٔ مطلوب می‌رساند.

۴.۱ گزاره‌های معادل و استلزام

معناشناسی در یک منطق، تنها به بررسی درستی و غلطی جملات خلاصه نمی‌شود. گاهی میان دو گزارهٔ به لحاظ دستوری متفاوت، ارتباط معنائی وجود دارد و این امر در منطق گزاره‌ها هم می‌تواند رخ دهد. به دو جدول ارزش در مثالِ ۳.۱ و تعریفِ ۸.۱ توجه کنید. همان طور که می‌بینید ستون آخر جداول ارزش دو گزارهٔ $(p \to q)$ و $((\neg p) \vee q)$ یکسان هستند، با این که از لحاظ نحوی، دو گزارهٔ نام برده شده با هم متفاوت هستند. می‌گوییم که دو گزارهٔ $(p \to q)$ و $((\neg p) \vee q)$ با هم **معادل** یا هم‌ارز هستند، و می‌نویسیم:

$$(p \to q) \iff ((\neg p) \vee q).$$

هم‌ارزی این دو گزاره، در منطق گزاره‌های حاکم بر زبان روزمره هم ملموس است: عبارت اگر باران ببارد، زمین خیس می‌شود، هم‌معنیِ این سخن است که یا باران نیامده است یا زمین خیس است! در ادامهٔ کتاب خواهیم دید که پدیدهٔ هم‌معنائی دو گزاره در معناشناسی هر منطقی حائز اهمیت است. بیایید پیش از هر چیز، هم‌معنایی دو گزاره در یک منطق گزاره‌ها را به صورتِ دقیق تعریف کنیم:

تعریف ۱۳.۱. می‌گوئیم دو گزارهٔ P و Q در منطق گزاره‌ها هم‌ارز یا معادل هستند، هرگاه وقتی جدول ارزش آن‌دو بر حسب گزاره‌های اتمی به کار رفته در آن‌ها کشیده شود، ستون آخر یکسان درآید؛ یعنی زمانی که اتم‌های استفاده شده در این دو گزاره، ارزش یکسان داشته باشند، ارزش این دو گزاره یکسان شود. در صورتی که این پدیده رخ بدهد می‌نویسیم:

$$P \iff Q.$$

احتمالاً دانشجوی هوشیار به خود بگوید که نمادِ $\iff$ را قبلاً معرفی نکرده بودیم. آیا عبارتِ $P \iff Q$ یک گزاره در منطق گزاره‌هاست؟ اگر چنین سوالی برایتان پیش آمده است در مسیر درستی قرار دارید، و البته رفع این ابهام، مقدمه‌ای برای ورود ما به مباحث کمی دشوارتر است.

رفع ابهام ۱۴.۱. عبارت زیر یک **گزاره** در **منطق گزاره‌ها نیست**.

$$(p \to q) \iff ((\neg p) \vee q).$$

اگر خاطرتان باشد، هنگام معرفی نمادهای منطقی هیچ‌گاه نگفتیم که در منطق گزاره‌ها، نماد $\iff$ نیز جزو ادوات مجاز برای ساخت گزاره‌ها است. پس در عین حالی که دو عبارتِ $(p \to q)$ و $((\neg p) \vee q)$ هر دو گزاره‌هایی در منطق گزاره‌ها هستند که با رعایت قواعد دستوری منطق گزاره‌ها و با استفاده از اتم‌های p, q ساخته شده‌اند، عبارت فوق یک گزاره نیست. شاید بیان بهتر این باشد که عبارت فوق، در منطق گزاره‌هایی که p, q جزو اتم‌های آن هستند، یک گزاره نیست، زیرا با قواعد دستوری منطق گزاره‌ها و با استفاده از این اتم‌ها حاصل نمی‌شود.

علامت $\iff$ یک نماد «فرامنطقی» است که در زبان نوشتاری میان من و شما استفاده شده است. دقت کنید که وقتی من و شما دربارهٔ منطق گزاره‌ها صحبت می‌کنیم، میان من و شما نیز یک منطق گفتگو برقرار است. در این منطق گفتگو، که یک **فرامنطقِ** منطقِ گزاره‌ها محسوب می‌شود، من به شما گفته‌ام که هرگاه می‌نویسم

$$P \iff Q$$

شما بدانید که منظور من این است که جداول ارزش دو گزارهٔ P و Q بر حسب اتم‌های به کار رفته در آن‌ها، با هم یکسان هستند. بر منطق گفتگوی میان من و شما نیز قوانینی حاکم است که باید تثبیت شوند. شاید مطالعهٔ بخشِ ۵.۳ دربارهٔ این گفته، اطلاعات مفیدی به خواننده بدهد.

پس فعلاً بهتر است فرض کنیم که عبارت زیر، یک جمله در زبان گفتگوی میان من و شمایی است که از بیرون به منطق گزاره‌ها نگاه می‌کنیم:

$$(p \to q) \iff ((\neg p) \vee q)$$

معنی آن هم این است که «ستون آخر جدول ارزش گزارهٔ سمت راست و چپ با هم یکسان است». چنین چیزی را توسط یک گزاره در خودِ منطق گزاره‌های شامل اتم‌های p, q نمی‌توان نوشت و ما به عنوان موجوداتی که فرای آن منطق هستیم می‌توانیم درباره‌اش صحبت کنیم.

من و شما حق داریم نمادهای دیگری را نیز بین خودمان قرارداد کنیم که کوتاه‌نوشت برای جملات طولانی باشند. برای درک بهتر استفاده از جملات فرامنطقی به این مثال دقت کنید: تصور کنید که به یک کلاس زبان انگلیسی رفته‌اید و مدرس، به زبان فارسی به شما می‌گوید: «دو کلمهٔ big و large در انگلیسی هم‌معنی هستند». دو کلمهٔ big و large در زبان انگلیسی نوشته شده‌اند ولی جملهٔ «دو کلمهٔ big و large در انگلیسی هم‌معنی هستند» در زبان مشترک میان شما و معلم زبان گفته شده است! پس شما با زبان فارسی، دربارهٔ زبان انگلیسی سخنی گفته‌اید، و غیر از مواقعی خاص، کسی نمی‌تواند به خاطر این کار بر شما خرده‌ای بگیرد. شاید در این مقطع، بهترین راه درک مفهوم فرازبانِ منطق گزاره‌ها، حل چند تمرین مرتبط با آن در ادامهٔ بحث باشد.

مثال ۱۵.۱. نشان دهید که

۱. $(p \leftrightarrow q) \iff ((p \to q) \wedge (q \to p))$.

آنچه دراین مثال از ما خواسته شده است، تحقیق این است که جدول ارزش گزارهٔ $(p \leftrightarrow q)$ و گزارهٔ $((p \to q) \wedge (q \to p))$ در دو سطر آخر یکسان هستند. این گفته را در زیر بررسی کرده‌ایم.

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	$((p \to q) \wedge (q \to p))$	$(p \leftrightarrow q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

۲. نشان دهید که گزارهٔ $(p \to q)$ با گزارهٔ عکسِ *نقیض* خود معادل است؛ یعنی نشان دهید

$$(p \to q) \iff ((\neg q) \to \neg p).$$

عبارت بالا را نیز با جدول ارزش زیر تحقیق می‌کنیم:

p	q	$(\neg p)$	$(\neg q)$	$(p \to q)$	$((\neg q) \to (\neg p))$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

تمرین ۵.۱. آیا $(p \to q) \iff ((\neg p) \to (\neg q))$؟

تمرین ۶.۱. آیا چنین است که: $(p \leftrightarrow q) \iff ((\neg p) \leftrightarrow (\neg q))$؟

تمرین ۷.۱. نشان دهید که $P \iff Q$ اگر و تنهااگر ستون آخر در جدول ارزش گزارهٔ $(P \leftrightarrow Q)$ تنها از علامت T تشکیل شده باشد. به بیان بهتر نشان دهید که

$$(P \iff Q) \text{ اگر و تنها اگر } [(P \leftrightarrow Q) \iff \top].$$

تعریف ۱۶.۱.

۱. گزارهٔ P را یک *تاتولوژی* می‌خوانیم، هرگاه *همواره* (یعنی تحت هر نوع ارزشی که اتم‌های آن داشته باشند) دارای ارزش T باشد؛ به بیان دیگر هرگاه در ستون آخر جدول ارزش آن فقط علامت T ظاهر شود.[۵]

۲. می‌گوییم گزارهٔ P *مستلزم* گزارهٔ Q است، هرگاه گزارهٔ $(P \to Q)$ تاتولوژی باشد، در این صورت می‌نویسیم:

$$P \Rightarrow Q.$$

همچنین عبارت‌های به صورت $P \Rightarrow Q$ را *استلزام منطقی* می‌نامیم.

بنا به آنچه دربارهٔ فرامنطق گفتیم، احتمالاً خود به زیرکی دریافته‌اید که $P \Rightarrow Q$ نیز جمله‌ای در زبان منطق گزاره‌های ما نیست؛ بلکه یک جمله در زبان میان من و شما است بدین معنی که «گزارهٔ $(P \to Q)$ یک تاتولوژی است». همچنین باید دریافته باشید که بنا به تمرین قبل، $Q \iff P$ یعنی $(P \leftrightarrow Q)$ یک تاتولوژی است.

در زبان ریاضی، هر ادعا، در واقع «**ادعای تاتولوژی بودن یک گزاره**» است. در ریاضی، ادعای تاتولوژی بودن یک گزاره را «قضیه» می‌نامیم.

توجه ۱۷.۱. هر عبارتِ به صورت $P \Rightarrow Q$ را یک **قضیه** در منطق گزاره‌هامان می‌نامیم (در بخش‌های بعدی دوباره به این گفته رجوع خواهیم کرد).

مثال ۱۸.۱. گزارهٔ $(p \vee (\neg p))$ یک تاتولوژی است؛ زیرا جدول ارزش آن به صورت زیر است:

p	$(\neg p)$	$((\neg p) \vee p)$
T	F	T
F	T	T

تاتولوژیِ $(p \vee (\neg p))$ یک تاتولوژی مهم و معروف است که آن را **اصلِ ردِّ شِقِّ ثالث** می‌خوانند. یعنی حالت سومی نیست، یا خود یک گزاره درست است یا نقیض آن.

لازم به تأکید است که دلیل تاتولوژی بودن اصل رد شق ثالث، عقلانی یا فلسفی بودن آن نیست، بلکه «قوانین معناشناسی» و «تعاریف ریاضی»، چنین جملاتی را همواره درست تلقی می‌کند. توجیه عقلانی این قانون، موضوع بحث ما در این جا نیست.

مثال ۱۹.۱. نشان دهید که

$$((p \wedge q) \to r) \iff (p \to (q \to r)).$$

[۵] بعداً خواهیم دید که تاتولوژی‌ها، دقیقاً همان گزاره‌هایی هستند که برایشان «اثباتی» وجود دارد.

پاسخ. در پاسخ این مثال باید نشان دهیم که $\Big(\big(p \wedge (q \to r)\big) \leftrightarrow \big(p \to (q \to r)\big)\Big)$ یک تاتولوژی است؛ و برای این منظور کافی است دقت کنیم که دو ستون آخر جدول زیر با هم یکسانند:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(q \to r)$	$((p \wedge q) \to r)$	$(p \to (q \to r))$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

□

تمرین ۸.۱. قضیه بودن عبارت‌های زیر را تحقیق کنید.

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow q$$

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$q \Rightarrow (p \vee q)$$

$$((p \to q) \wedge ((\neg p) \to q)) \Rightarrow q$$

$$(p \wedge q) \iff (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \iff (q \vee p).$$

بنا بر آنچه گفته شد، اگر از ما بخواهند که نشان دهیم $P \Rightarrow Q$ باید جدول ارزش $(P \to Q)$ را بکشیم و تحقیق کنیم که در ستون آخر آن فقط علامت T قرار می‌گیرد. خوانندهٔ این کتاب، به فراست دریافته است که اگر بپرسند: «نشان دهید $(P \to Q)$»؛ سوالشان بی‌معنی است! قضیهٔ زیر فهم ما از فرازبان منطق گزاره‌ها را به چالشی کوچک می‌کشد، البته این قضیه، اساس روش اثبات در ریاضیات است.

قضیه ۲۰.۱. $P \Rightarrow Q$ اگر و تنهااگر هر جا که گزارهٔ P دارای ارزشِ T باشد، گزارهٔ Q نیز دارای ارزشِ T باشد.

اثبات. دقت کنید که بدون کاسته شدن از کلیت بحث، می‌توانیم فرض کنیم که در ساخت گزاره‌های P, Q از اتم‌های یکسانی استفاده شده است. فرض کنید که $P \Rightarrow Q$؛ در این صورت در آخرین ستون جدول ارزش گزارهٔ $(P \to Q)$ فقط ارزش T ظاهر می‌شود. پس هر جا ارزش P برابر با T باشد، ارزش Q نیز برابر با T است.

برای اثبات جهت عکس قضیه، فرض کنید که وقتی جدول ارزش $(P \to Q)$ را رسم می‌کنیم، هر جا که P ارزش T دارد، Q نیز ارزشِ T دارد. در این صورت دراین جدول، زمانی که P ارزش T دارد گزارهٔ $(P \to Q)$ ارزش T دارد. از طرفی زمانی که گزارهٔ P ارزش F داشته باشد، بنا به روش تعریف ارزشِ گزارهٔ $(P \to Q)$، این گزاره دارای ارزش T است. بنابراین گزارهٔ $(P \to Q)$ در هر حالتی دارای ارزش T، یعنی یک تاتولوژی است؛ و این همان است که به دنبال اثباتش هستیم. □

قضیه ۲۱.۱. $P \iff Q$ اگر و تنهااگر $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$. به بیان دیگر، زمانی گزارهٔ P با گزارهٔ Q معادل است که هرگاه که P ارزش درست داشته باشد، Q ارزش درست داشته باشد و هرگاه که Q ارزش درست داشته باشد، P ارزش درست داشته باشد.

اثبات. $P \iff Q$ یعنی $(P \leftrightarrow Q)$ تاتولوژی است. تاتولوژی بودنِ $(P \leftrightarrow Q)$ به معنی تاتولوژی بودنِ $((P \to Q) \wedge (Q \to P))$ است؛ زیرا این دو گزاره با هم معادل هستند. از طرفی، فقط زمانی در جدول ارزشِ $((P \to Q) \wedge (Q \to P))$ همیشه T داریم که در جدول ارزشِ $(P \to Q)$ و $(Q \to P)$ غیر از T چیزی ظاهر نشود. $\square$

تمرین ۹.۱. نشان دهید که $P \Rightarrow Q$ اگر و تنهااگر هر زمانی که ارزش گزارهٔ Q بر حسب اتم‌های به کار رفته در آن F باشد، ارزش گزارهٔ P نیز F باشد.

توجه ۲۲.۱. از سه جملهٔ زیر، برای بیان یک واقعیت واحد استفاده می‌شود:

- $P \Rightarrow Q$
- P شرط کافی برای Q است.
- Q شرط لازم برای P است.

بیایید نمودِ تمرینِ ۲۰.۱ و توجهِ ۲۲.۱ را در زبان رومزه بکاویم: پدر علی (که سخنانش تاتولوژی است!) [۶] به او گفته است که «اگر درس بخوانی موفق می‌شوی». از سخن پدر علی چه چیزی می‌توان استنباط کرد؟

بیایید این جمله را فرمولبندی ریاضی کنیم:

p : علی درس بخواند

q : علی موفق شود

پس پدر علی، ادعا می‌کند که گزارهٔ $(p \to q)$ تاتولوژی است. به بیان دیگر، ادعای پدر علی این است که درس خواندن شرط کافی برای موفق شدن است. اما او در مورد عواقب درس نخواندن چیزی ادعا نکرده است؛ در واقع نگفته است که «اگر درس نخوانی موفق نمی‌شوی» یا «**تنها اگر** درس بخوانی موفق می‌شوی». پس پدر علی دربارهٔ ارزش گزارهٔ زیر اظهار نکرده است:

$$((\neg p) \to (\neg q)).$$

به بیان دیگر، او نگفته است که **درس خواندن شرط لازم برای موفق شدن است** (به نظر او، از راه‌های دیگر هم می‌شود موفق شد!).

باز از طرفی دیگر، بنا به جملهٔ پدر علی، اگر علی موفق نشود، می‌فهمیم که درس نخوانده بوده است. چون اگر درس می‌خواند، موفق شده بود. علت این است که گزارهٔ $(p \to q)$ با گزارهٔ زیر هم‌ارزش است:

$$((\neg q) \to (\neg p)).$$

[۶] در واقع وقتی کسی چنین گزاره‌های شرطی را بیان می‌کند، منظورش این نیست که گزارهٔ او گاهی ارزش درست و گاهی ارزش نادرست دارد، بلکه به این خاطر گزاره را بیان کرده است که معتقد است تاتولوژی است!

حال فرض کنیم که علی موفق شده است. از این لزوماً نتیجه نمی‌شود که علی درس خوانده است. پدر علی فقط گفته بود که اگر درس بخواند موفق می‌شود، ولی نگفته بود که تنها راه برای موفق شدن درس خواندن است. در واقع او نگفته بود که «موفق می‌شوی اگر و تنها اگر درس بخوانی». پس تاتولوژی بودن گزارهٔ زیر نیز از سخن پدر علی نتیجه نمی‌شود:

$$(q \to p).$$

مثال ۲۳.۱. بیایید یک تاتولوژی دیگر را نیز در زبانِ روزمره بکاویم:

شرط لازم برای ورود علی به دانشگاه شرکت در کنکور است.

گزاره‌های اتمی زیر را در نظر بگیرید:

علی به دانشگاه وارد شده است: q
علی در کنکور شرکت کرده است: p.

شرط لازم برای ورود علی به دانشگاه، کنکوردادن است، یعنی گزارهٔ زیر تاتولوژی است:

$$(q \to p)$$

اما گزارهٔ فوق معادل با گزارهٔ زیر است:

$$((\neg p) \to (\neg q)).$$

پس وقتی می‌گوئیم شرط لازم برای ورود علی به دانشگاه، کنکور دادن است، یعنی اگر علی کنکور ندهد، به دانشگاه وارد نمی‌شود. به بیان دیگر، **تنهااگر** علی کنکور دهد، علی به دانشگاه وارد می‌شود.

تمرین ۱۰.۱. نشان دهید که دو جملهٔ زیر با هم معادل نیستند:

۱. $P \Rightarrow Q$

۲. اگر P تاتولوژی باشد، آنگاه Q تاتولوژی است.

در تمرینِ ۱۵.۱ از شما خواسته‌ایم که نشان دهید که عبارت دوم از عبارت اول نتیجه می‌شود.

خلاصهٔ آنچه تا کنون فراگرفته‌ایم این است که معادل بودن دو گزاره‌ی P و Q به معنیِ تاتولوژی بودن گزارهٔ $(P \leftrightarrow Q)$ است. نیز فهمیده‌ایم که برای تشخیص تاتولوژی بودن یک گزاره، باید جدول ارزش آن را بکشیم و ستون آخر را چک کنیم. کشیدن جدول ارزش برای یک گزارهٔ دلخواه که از n گزارهٔ اتمی تشکیل شده است نیازمند بررسی ۲^n حالت و عمل طاقت‌فرسایی است.[۷] راه دیگری که در منطق گزاره‌ها برای بررسی تاتولوژی بودن گزاره‌ها وجود دارد «استنتاج» است. در این روش، یک تعداد محدود از تاتولوژی‌ها به عنوان قانون یا اصل پذیرفته می‌شوند و اثبات می‌شود که سایر گزاره‌ها فقط در صورتی تاتولوژی هستند که به نحوی از این قوانین و اصول حاصل شوند. در قضیهٔ زیر فهرست این اصول و قوانین آمده است.

[۷] این که آیا اصولا روش سریعتری در منطق گزاره‌ها برای تشخیص تاتولوژی بودن گزاره وجود دارد معادل با یک مسئلهٔ باز معروف ریاضی، با نام مسئلهٔ $P = NP$ است. مسئلهٔ $P = NP$ به بیان نادقیق، بیان‌گر این است که هر مسئله‌ای که تشخیص درست بودن راه حل آن آسان باشد، حلش نیز آسان است!

قضیه ۲۴.۱. در منطق گزاره‌ها چنین است که:

۱. $((\neg p) \vee q) \iff (p \to q)$.

۲. $((p \vee q) \vee r) \iff (p \vee (q \vee r))$ (ویژگی انجمنیِ فصل).

۳. $((p \wedge q) \wedge r) \iff (p \wedge (q \wedge r))$ (ویژگی انجمنیِ عطف).

۴. $(q \vee p) \iff (p \vee q)$ (جابه‌جائیِ فصل).

۵. $(q \wedge p) \iff (p \wedge q)$ (جابه‌جائیِ فصل).

۶. $((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \iff (p \wedge (q \vee r))$ (پخش‌پذیری عطف روی فصل).

۷. $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \iff (p \vee (q \wedge r))$ (پخش‌پذیری فصل روی عطف).

۸. $p \iff (p \vee \perp)$ (خنثائی گزارهٔ همواره غلط نسبت به فصل).

۹. $\perp \iff (p \wedge \perp)$ (پوچگری گزارهٔ همواره غلط برای عطف).

۱۰. $p \iff (p \wedge \top)$ (خنثائی گزاره همواره درست نسبت به عطف).

۱۱. $\top \iff (p \vee \top)$ (پوچی گزارهٔ همواره درست نسبت به فصل).

۱۲. $p \iff (p \vee p)$ (همانی فصل).

۱۳. $p \iff (p \wedge p)$ (همانی عطف).

۱۴. $p \iff (p \wedge (p \vee q))$ (جذب عطف).

۱۵. $p \iff (p \vee (p \wedge q))$ (جذب فصل).

۱۶. $\perp \iff (p \wedge (\neg p))$

۱۷. $\top \iff (p \vee (\neg p))$

۱۸. $p \iff (\neg(\neg p))$ (قانون اول نقیض‌گیری).

۱۹. $((\neg p) \vee (\neg q)) \iff (\neg(p \wedge q))$ (قانون دوم نقیض‌گیری).

۲۰. $((\neg p) \wedge (\neg q)) \iff (\neg(p \vee q))$. (قوانین دِمُرگان).

توجه ۲۵.۱. بیان پیشرفته‌تر قضیهٔ بالا این است که **گزاره‌های منطق گزاره‌ها به همراه علامت‌های منطقیِ** $\wedge, \vee, \neg, \perp, \top$ **تشکیل یک جبر بولی می‌دهند.** [۸]

[۸] مورد اول در قضیه به جبر بولی ربطی ندارد. این مورد تنها بیان این است که نمادِ $\to$ از نمادهای $\vee$,$\neg$ به دست می‌آید.

۵.۱ استنتاج در منطق گزاره‌ها و اثبات قضیه

در بخش قبل، با تعریف «قضیه» در ریاضیات آشنا شدیم. گفتیم هر قضیه‌ای در واقع «ادعای تاتولوژی بودن یک گزاره» است. در دنیای معناشناسی، تاتولوژی بودن یک گزاره را می‌توان با رسم جدول ارزش آن تحقیق کرد، اما «استنتاج» یعنی دریافتن تاتولوژی بودن یک گزاره با استفاده از قواعدی محدود و بدون توجه به جدول ارزش آن.

تعریف ۲۶.۱. به روندی که طی آن تاتولوژی بودن یک گزاره با استفاده از قواعدی محدود، و بدون توجه به معانی جملات، احراز می‌شود، یک استنتاج گفته می‌شود.

بیایید پیش از ورود به مبحث استنتاج، یک بار دیگر نکات مهم منطق گزاره‌ها را یادآوری کنیم:

۱. در منطق گزاره‌ها، یک روش دستوری برای ساختن جملات داریم. در دستور زبان، معنای گزاره‌ها برای ما اهمیتی ندارد و تنها رعایت قوانین دستوری مهم است.

۲. یک روش برای تخصیص معنا به گزاره‌ها، یعنی تشخیص ارزش آن‌ها داریم. در اینجا برای گزاره‌هایی که به لحاظ دستوری با رعایت قوانین ساخته شده‌اند، جدول ارزش می‌کشیم.

۳. گزاره‌هایی که همیشه ارزش درست دارند را تاتولوژی می‌نامیم. در روش معناشناسانه با استفاده از جدول ارزش، تاتولوژی بودن یک گزاره را بررسی می‌کنیم. ادعای تاتولوژی بودن یک گزاره را «قضیه» می‌نامیم.

۴. یک روش دیگر برای تشخیص تاتولوژی بودن گزاره‌ها داریم که در آن هیچ استفاده‌ای از جدول ارزش (یا معنای) گزاره‌ها نمی‌شود. در این روش، که به آن استنتاج گفته می‌شود، تاتولوژی بودن یک گزاره‌ها را تنها با استفاده از قوانینی محدود بررسی می‌کنیم.

۵. قضیهٔ مهمی در منطق داریم، که به ما می‌گوید چه تاتولوژی بودن یک گزاره را با رسم جدول ارزش بررسی کنیم و چه با روش‌های محدود استنتاج، نتیجه یکسان است. [۹]

در فصل بعدی خواهیم دید که پنج مورد بالا فقط مختص به منطق گزاره‌ها نیست. همچنین هر منطقی قوانین استنتاج مربوط به خود را دارد. در منطق گزاره‌ها، قوانین استنتاج، همان‌هایی هستند که در قضیهٔ ۲۴.۱ معرفی شده‌اند.

تعریف ۲۷.۱ (استنتاج در منطق گزاره‌ها)**.** فرض کنید P و Q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند. می‌گوییم گزارهٔ Q از گزارهٔ P استنتاج می‌شود، و می‌نویسیم

$$P \vdash Q$$

هرگاه گزارهٔ $(P \to Q)$ با متناهی بار استفاده از تاتولوژی‌های معرفی شده در قضیهٔ ۲۴.۱ (به همراه متناهی بار جایگذاری) و بدون توجه به معانی (یعنی جداول ارزش) حاصل شود؛ یا این که با استفاده از همان قوانین به این رسیم که $(P \to Q)$ با گزارهٔ $\top$ معادل است.

توجه ۲۸.۱ (تمامیت)**.** بنا به قضیه‌ای در منطق ریاضی، $P \Rightarrow Q$ اگر و تنهااگر $P \vdash Q$. یعنی یک گزارهٔ $(P \to Q)$ تاتولوژی است اگر و تنهااگر تاتولوژی بودن آن با متناهی بار استفاده از تاتولوژی‌های معرفی شده در قضیهٔ ۲۴.۱ (به همراه متناهی بار جایگذاری و بدون نگرانی از معانی) حاصل شود.

---

[۹] به این قضیه، قضیهٔ درستی و تمامیت گفته می‌شود.

بنا به توجه بالا، در ادامهٔ این درس از نوشتنِ $P \vdash Q$ خودداری و همان نمادِ $P \Rightarrow Q$ را هم برای استلزام و هم برای استنتاج استفاده کرده‌ایم. از این رو، برای نشان دادنِ $P \Rightarrow Q$ می‌توان یکی از دو روش زیر را اتخاذ کرد:

۱. روش استلزام، یعنی با کشیدن جدول ارزش، تحقیق کرد که $(P \to Q)$ یک تاتولوژی است.

۲. روش استنتاج، یعنی با به کارگیری قواعد معرفی شده در قضیهٔ ۲۴.۱ تاتولوژی بودن گزارهٔ $(P \to Q)$ را (یا معادل بودن آن با یک تاتولوژی) را حاصل آورد.

مثال ۲۹.۱. با استفاده از روش استنتاج، نشان دهید که $p \Rightarrow (p \vee q)$.

پاسخ. باید نشان دهیم که گزارهٔ $(p \to (p \vee q))$ یک تاتولوژی است، و برای این کار از قوانین قضیهٔ ۲۴.۱ مجازیم استفاده کنیم. داریم:

$$
\begin{aligned}
(p \to (p \vee q)) &\iff ((\neg p) \vee (p \vee q)) && \text{بنا به قانون ۱}\\
&\iff (((\neg p) \vee p) \vee q) && \text{بنا به قانون ۲}\\
&\iff ((p \vee (\neg p)) \vee q) && \text{بنا به قانون ۴}\\
&\iff (\top \vee q) && \text{بنا به قانون ۱۷}\\
&\iff \top. && \text{بنا به قانون ۸}
\end{aligned}
$$

از آنجا که $\top$ یک تاتولوژی است و گزاره ما با آن معادل است، نتیجه می‌گیریم که گزارهٔ مورد نظر ما تاتولوژی است. $\square$

تمرین ۱۱.۱. عبارت‌های زیر را ثابت کنید.

$$
\begin{aligned}
&((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r)\\
&((p \to q) \wedge (r \to s)) \Rightarrow ((p \vee r) \to (q \vee s))\\
&((p \to q) \wedge (r \to s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \to (q \wedge s)).
\end{aligned}
$$

گفتیم که قوانینی که در قضیهٔ ۲۴.۱ بیان شده‌اند برای اثبات همهٔ تاتولوژی‌ها کافی هستند؛ اما علاوه بر آن، هر تاتولوژی‌ای را که اثبات می‌شود، می‌توان به عنوان یک قانون جدید استنتاج پذیرفت و از آن برای استنتاج‌های تازه استفاده کرد. در زیر چند قانون معروف استنتاج را آورده‌ایم. اولینِ آن‌ها که قیاس استثنائی نام دارد، می‌گوید که اگر گزارهٔ $(P \to Q)$ و گزارهٔ P هر دو به نحوی استنتاج شده باشند (یعنی تاتولوژی بودن آن‌ها طی یک استنتاج به دست آمده باشد) آنگاه گزارهٔ Q نیز استنتاج‌شده است.

قضیه ۳۰.۱.

۱. $((p \to q) \wedge p) \Rightarrow q$ قیاس استثنائی [10]

۲. $((p \to q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow (\neg p)$ نفی تالی [11]

۳. $(p \to \perp) \Rightarrow (\neg p)$.

[10] modus ponens
[11] modus tollens

۴. $((p \wedge (\neg q)) \to \perp) \iff (p \to q)$ برهان خُلف [12] [13]

اثبات. اثبات مورد اول. می‌خواهیم نشان دهیم که گزارهٔ $(((p \to q) \wedge p) \to q)$ تاتولوژی است. نخست دقت کنید که

$$(p \to q) \iff ((\neg p) \vee q) \qquad \text{بنا به قانون ۱}$$

و از این رو داریم:

$$\begin{aligned} ((p \to q) \wedge p) &\iff (((\neg p) \vee q) \wedge p) && \text{بنا به جایگذاری} \\ &\iff (p \wedge ((\neg p) \vee q)) && \text{بنا به قانون ۵} \\ &\iff ((p \wedge (\neg p)) \vee (p \wedge q)) && \text{بنا به قانون ۶} \\ &\iff (\perp \vee (p \wedge q)) && \text{بنا به قانون ۱۶} \\ &\iff (p \wedge q). && \text{بنا به قانون ۱۰} \end{aligned}$$

بنابراین گزارهٔ $((p \to q) \wedge p)$ معادل با گزارهٔ $(p \wedge q)$ است. حال اگر استنتاجِ زیر را ثابت کنیم،

$$(p \wedge q) \Rightarrow q \qquad (*)$$

از آن نتیجه خواهیم گرفت که:

$$((p \to q) \wedge p) \Rightarrow q.$$

اما اثبات استنتاج یادشده، یعنی اثباتِ تاتولوژی بودنِ گزارهٔ $(p \wedge q) \to q$؛ که این کار را در زیر انجام داده‌ایم:

$$\begin{aligned} ((p \wedge q) \to q) &\iff ((\neg(p \wedge q)) \vee q) && \text{بنا به قانون ۱} \\ &\iff (((\neg p) \vee (\neg q)) \vee q) && \text{بنا به قانون ۱۹} \\ &\iff ((\neg p) \vee ((\neg q) \vee q))) && \text{بنا به قانون ۲} \\ &\iff (\neg p) \vee (q \vee (\neg q))) && \text{بنا به قانون ۴} \\ &\iff ((\neg p) \vee \top) && \text{بنا به قانون ۱۷} \\ &\iff \top. && \text{بنا به قانون ۱۱} \end{aligned}$$

[12] reductio ad absurdum

[13] خوانندهٔ منطق‌دان حق دارد با دیدن این قضیه بر من خرده بگیرد. بیان این قضیه نادرست است. به عنوان مثال، قیاس استثنائی باید به این صورت بیان شود که اگر P یک تاتولوژی باشد (یا اثبات شده باشد) و $P \Rightarrow Q$ نیز یک تاتولوژی باشد (یا اثبات شده باشد)، آنگاه Q یک تاتولوژی است. خوانندهٔ این نوشتار بارها با تفاوت $P \Rightarrow Q$ با «از تاتولوژی بودن P تاتولوژی بودن Q نتیجه شدن» مواجه شده است، و می‌داند که از این بیان قضیه، بیان درست قضیه نتیجه می‌شود.

اثبات مورد دوم.

بنا به قانون ۱	$((p \to q) \wedge (\neg q)) \iff ((\neg p) \vee q) \wedge (\neg q))$
بنا به قانون ۵	$\iff ((\neg q) \wedge ((\neg p) \vee q))$
بنا به قانون ۱۴	$\iff (((\neg q) \wedge (\neg p)) \vee ((\neg q) \wedge q))$
بنا به قانون ۱۷	$\iff ((\neg q) \wedge (\neg p)) \vee \perp)$
بنا به قانون ۱۱	$\iff ((\neg q) \wedge (\neg p))$
بنا به قانون استنتاجِ *	$\Rightarrow (\neg p).$

اثبات مورد سوم.

بنا به قانون ۱	$(p \to \perp) \iff ((\neg p) \vee \perp)$
بنا به قانون ۸	$\iff (\neg p).$

اثبات مورد چهارم.

بنا به قانون ۱	$((p \wedge (\neg q)) \to \perp) \iff ((\neg(p \wedge (\neg q)) \vee \perp)$
بنا به قانون ۸	$\iff (\neg(p \wedge (\neg q))$
بنا به قانون ۱۹ و ۱۸	$\iff ((\neg p) \vee q)$
بنا به قانون ۱	$\iff (p \to q).$

$\square$

فصل منطق گزاره‌ها را با یک نکتهٔ جذاب به پایان می‌بریم. وقتی می‌گوییم گزارهٔ P اثبات‌پذیر است، یعنی استنتاجی برای $(P \leftrightarrow \top)$ وجود دارد. بنا به توجه ۲۸.۱ این یعنی P تاتولوژی است. حال از تمرینِ ۱۰.۱ نتیجه می‌گیریم که بر خلاف تصور، دو جملهٔ زیر با هم معادل **نیستند:**

۱. از اثبات پذیر بودن P اثبات‌پذیر بودنِ Q نتیجه می‌شود.

۲. $(P \to Q)$ اثبات می‌شود.

تمرین‌های تکمیلی

تمرین ۱۲.۱. نشان دهید که اگر $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow R$ آنگاه $P \Rightarrow R$.

تمرین ۱۳.۱. نشان دهید که هرگاه که $(P \to Q)$ و $(Q \to R)$ دارای ارزش یک باشند، آنگاه $(P \to R)$ نیز دارای ارزش یک است.

تمرین ۱۴.۱ (ابهام پیش آمده برای یکی از دانشجویان). فرق میانِ $\perp$ و $\neg$ چیست؟ یعنی فرق میان تناقض و نقیض چیست؟

تمرین ۱۵.۱. نشان دهید که اگر $P \Rightarrow Q$، و اگر P تاتولوژی باشد، آنگاه Q تاتولوژی است.

تمرین ۱۶.۱. دو جملهٔ زیر را در نظر بگیرید:

۱. اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته باشد، آنگاه تابع f یک تابع مطلوب است.

۲. اگر تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع f یک تابع مطلوب است.

کدام جملهٔ بالا از دیگری نتیجه می‌شود؟ [۱۴] مشتق‌پذیر بودن، پیوسته بودن و مطلوب بودن را به ترتیب با p، q و r نشان دهید و تاتولوژی مورد نیاز این تمرین را بنویسید.

تمرین ۱۷.۱. فرض کنید که ارزش گزارهٔ $(p \to q)$ T باشد. ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر برابر با T است:

۱. $((p \to r) \to (q \to r))$.

۲. $((q \to r) \to (p \to r))$.

تمرین ۱۸.۱. فرض کنید که $A \subseteq B$. کدام‌یک از دو جملهٔ زیر درست است؟

۱. اگر من از $A \subseteq C$ خوشحال بشوم آنگاه من از $B \subseteq C$ خوشحال می‌شوم.

۲. اگر من از $B \subseteq C$ خوشحال بشوم آنگاه من از $A \subseteq C$ خوشحال می‌شوم.

تمرین ۱۹.۱. محتوایِ تمرینِ ۱۵.۱ را به صورت استنتاجی تعبیر کنید (مشابه آنچه در پایان این بخش دربارهٔ تمرینِ ۱۰.۱ گفته‌ایم.)

تمرین ۲۰.۱. نشان دهید که $P \Rightarrow (R \vee S)$ اگر و تنهااگر $(P \wedge (\neg R)) \Rightarrow S$.

خلاصهٔ فصل اول. در منطق گزاره‌ها، یک مجموعه از متشکل از گزاره‌های اتمی را به عنوان الفبا در نظر می‌گیریم. این الفبا با استفاده از نمادهای منطقیِ $\neg, \wedge, \vee, \to$ در ساخت «گزاره‌ها» استفاده می‌شوند. هر گزارهٔ منطق گزاره‌ها به صورت $f(p_1, \ldots, p_n)$ است که در آن p_i ها گزارهٔ اتمی هستند. در معناشناسی برای چنین گزاره‌ای یک جدول ارزش کشیده می‌شود که ارزش آن را بر حسب ارزش گزاره‌های به کار رفته در آن نمایان می‌کند. گزاره‌ای که صرف‌نظر از ارزش اتم‌های به کار رفته در آن، همیشه ارزش درست داشته باشد، یک تاتولوژی نامیده می‌شود. قضیهٔ تمامیت بیان‌گر این است که تاتولوژی‌ها دقیقاً همان گزاره‌هایی هستند که برای آن‌ها اثباتی وجود دارد. اثبات یک گزاره، یعنی رسیدن به آن، بدون توجه به جداول ارزش و تنها با به کارگیری قوانین محدود جبر بولی گزاره‌ها.

[۱۴] جواب: احتمالاً بر خلاف تصور شما، جملهٔ دوم از جملهٔ اول. علت: تمرین!

فصل ۲

منطق مرتبهٔ اول

دل عارفان ربودند و قرار پارسایان
همه شاهدان به صورت، تو به صورت و معانی
حافظ

در فصل قبل دربارهٔ منطق گزاره‌ها، به عنوان یک منطق صفرویکی حاکم بر فکر ریاضی صحبت کردیم و با استنتاج/استلزام در آن آشنا شدیم. منطق گزاره‌ها پایه‌ای‌ترین منطق ریاضی است؛ بدین معنی که در هر منطق دیگر ریاضی، هرگاه به گزاره‌های ساخته‌شده توسط اتم‌های دارای ارزش صفر و یک برسیم، برای تعیین درستی آن‌ها از منطق گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. در این بخش، با یک منطق پایه‌ای دیگر ریاضی به نام «منطق مرتبهٔ اول» آشنا می‌شویم، که البته قرار است باقی این کتاب نیز بر اساس آن به معرفی مبانی علم ریاضیات بپردازد.

جملهٔ زیر را در نظر بگیرید:

هر عدد طبیعی، اول است.

به عنوان یک گزارهٔ ریاضی، شما به جملهٔ بالا ارزش F را اختصاص می‌دهید؛ اما چگونه چنین تشخیصی داده‌اید؟ احتمالاً اجزای زیر در این تشخیص استفاده شده‌اند:

۱. شما معنای «اعداد طبیعی» را می‌دانید.

۲. شما معنای عبارت «x یک عدد اول است» را می‌دانید.

۳. می‌توانید به جای x اعداد طبیعی مختلفی را قرار دهید و ارزش جملهٔ حاصل شده را (در منطق گزاره‌ها) بسنجید. مثلاً می‌دانید که جملهٔ ۲ یک عدد اول است درست است اما جملهٔ ۴ یک عدد اول است، غلط است.

۴. همین که جملهٔ «۴ یک عدد اول است» غلط است، برایتان کافی است که تشخیص بدهید جملهٔ «هر عدد طبیعی اول است» غلط است.

پس شما، همین حالا هم با **منطق مرتبهٔ اول** (یا منطق محمولات، یا منطق سورها) آشنایید؛ اما نیاز است ما در این درس، پایه‌های این منطق را نیز به طور دقیق توضیح دهیم. مانند منطق گزاره‌ها، در منطق مرتبهٔ اول نیز، اجزای زیر را خواهیم داشت:

۱. روش صحیح جمله‌نویسی را معرفی خواهیم کرد.

۲. روشی برای تشخیص معنای جمله‌ها معرفی خواهیم کرد.

۳. گزاره‌هایی که همواره معنای درست دارند برایمان حائز اهمیت خواهند بود. تحقیق همواره درست بودن آن‌ها را با روشی معناشناسانه فراخواهیم گرفت.

۴. به این اشاره خواهیم کرد، که بدون توجه به معانی نیز می‌توان همواره درست بودن جملات را بررسی کرد؛ این روش را استنتاج خواهیم نامید.

۵. اشاره خواهیم کرد که چه با روش استنتاج و چه با روش معناشناسانه می‌توان همواره درست بودن یک گزاره را بررسی کرد و هر دو نتیجهٔ یکسانی دارند.

۱.۲ صرف و نحوِ منطق مرتبهٔ اول

در منطق مرتبهٔ اول، بسته به موضوعی که می‌خواهیم درباره آن صحبت کنیم نخست یک مجموعهٔ الفبای لازم را انتخاب می‌کنیم. یک مجموعهٔ الفبا، که به آن یک «زبانِ مرتبهٔ اول» هم گفته می‌شود، می‌تواند شامل علامت‌هایی برای اشاره به تابع‌ها، یا علامت‌هایی برای اشاره به رابطه‌ها باشد. مثلاً اگر موضوع مورد نظر، جمع اعداد باشد، یک علامتِ $+$ برای تابع جمع در مجموعهٔ الفبا قرار داده می‌شود و اگر قرار باشد دربارهٔ ترتیب اعداد صحبت شود، یک علامت $>$ برای رابطهٔ ترتیب در این مجموعهٔ الفبا قرار داده می‌شود. پس از آن، با استفاده از مجموعهٔ الفبا و با استفاده از امکانات دستوری زیر، «فرمول‌سازی» می‌شود:

۱. ادواتِ منطقی منطق گزاره‌ها، یعنی

$$\wedge, \vee, \neg, \leftrightarrow$$

۲. دو علامتِ $\exists$ و $\forall$ که به ترتیب «سور وجودی» و «سور عمومی» نام دارند.

۳. حروف انگلیسیِ $x, y, z, \ldots$ که به آن‌ها «متغیر» گفته می‌شود.

۴. علامتِ $=$ که به آن علامت «تساوی» گفته می‌شود.

۵. دو علامتِ) و (به نامهای پرانتز باز و پرانتز بسته.

خواننده باید در اینجا از ما انتظار داشته باشد که قوانین دقیق دستوری‌ای را شرح دهیم که به ما بگویند چگونه علامت‌های بالا می‌توانند با هم ترکیب و موجب ساخت فرمول‌ها یا جملات [1] بشوند. این قوانین موجودند ولی پرداختن با وسواس زیاد به آن‌ها، هدف ما در این کتاب نیست و چه بسا ما را در این مرحله از اصل کار منحرف کند. دستور زبان همیشه ملال‌آور است [2] و آموزش دستور زبان منطق مرتبهٔ اول نیز از این قاعده مستثنا نیست. شرح دقیق چنین قواعدی را می‌توانید در هر کتاب منطقی مانند [۶]،[۵]،[۱۵]،[۱۲] بیابید.

[1] میان جمله و فرمول در منطق تفاوتی هست ولی ما در این درس بدان نخواهیم پرداخت. از این به بعد از دو کلمهٔ جمله و فرمول به جای هم استفاده خواهیم کرد.

[2] رجوع کنید به کتاب‌های عربی دورهٔ دبیرستان!

اما توضیح مختصر این قواعد بدین صورت است. فرض کنید که الفبای ما حاوی یک نماد $R(-,-)$ برای سخن گفتن دربارهٔ «رابطهٔ میان دو چیز» و یک نماد $f(-)$ برای سخن گفتن دربارهٔ یک تابع باشد. قاعدهٔ اول این است که ساده‌ترین جملات، که می‌توانید آن‌ها را جملهٔ اتمی بنامید، به صورت $R(x,y)$ و $f(x)=y$ هستند. قاعدهٔ دوم این است که اگر بدانیم که φ, ψ جملاتی هستند که با استفاده درست از قواعد ساخته شده‌اند آنگاه $(\varphi \wedge \psi)$، $(\varphi \vee \psi)$، $(\varphi \to \psi)$ و $(\neg\psi)$ هم جمله هستند. نهایتاً قاعدهٔ سوم این است که علاوه بر اینها اگر بدانیم که φ یک جمله است آنگاه $\forall x \quad \varphi$ و $\exists x \quad \varphi$ نیز، فرمول هستند.

توجه ۱.۲. در نوشتن فرمول‌ها، نمادها به این ترتیب نسبت به هم ارجحیت داده می‌شوند: نخست دو نمادِ پرانتز باز و بسته $(\,)$، دوم دو نماد سور عمومی و سور وجودی $\forall, \exists$، سوم نماد نقیض $\neg$، چهارم نمادهای عطف و فصل $\wedge, \vee$، و در پایان، نمادهای $\leftrightarrow, \to$. همچنین در میان نمادهای هم‌ارزش، آنکه زودتر پدیدار شود، ارجح است. از این تعیین ارجحیت برای صرفه‌جویی در تعداد پرانتزهای یک جمله استفاده می‌شود. از این لحظه به بعد، همین قاعده را برای جمله‌های منطق گزاره‌ها هم رعایت خواهیم کرد.

مثال ۲.۲. فرض کنید علامت‌های $f(-), R(-,-)$ جزو الفبای ما باشند که f علامتی برای یک تابع و R علامتی برای یک رابطه است. عبارت‌های زیر جمله در منطق مرتبهٔ اول هستند:

- $f(x)=y$.
- $R(x,y)$
- $\exists y \forall x \quad f(x)=y$
- $\forall y \exists x \quad (f(x)=y \wedge R(x,y))$.
- $\left(\exists y \forall x \quad f(x)=y\right) \wedge \left(\forall y \exists x \quad (f(x)=y \wedge R(x,y))\right)$

دقت کنید که برای مثال، مورد سوم به این علت یک جملهٔ مجاز است که $f(x)=y$ یک جملهٔ اتمی است، پس $\forall x \quad f(x)=y$ یک جملهٔ مجاز است، پس $\exists y \forall x \quad f(x)=y$ یک جملهٔ مجاز است.

تعریف ۳.۲. در یک فرمول، به متغیری که در دامنهٔ تأثیر یک سور قرار بگیرد، متغیر *پای‌بند* و به متغیری که در دامنهٔ تأثیرِ هیچ سوری نباشد، متغیر *آزاد* گفته می‌شود.

مثال ۴.۲. فرض کنید مجموعهٔ الفبای ما شامل دو نماد رابطه‌ای $s(-), R(-)$ باشد. دو عبارتِ φ و ψ در زیر، هر دو فرمول هستند:

$$\varphi : \exists x \quad \big(s(x) \wedge R(x)\big)$$

$$\psi : \exists x \quad s(x) \wedge R(x)$$

در فرمولِ φ هر دو حضور متغیرِ x پای‌بند است. اما در فرمول زیر ψ اولین حضور متغیر x پای‌بند و دومین حضور آن آزاد است. در واقع برای تشخیص متغیرهای آزاد و پای‌بند، بنا به نکتهٔ ۱.۲ فرمولِ ψ را می‌توان به صورت زیر پرانتزگذاری کرد:

$$\big(\exists x \quad s(x)\big) \wedge R(x).$$

در همهٔ مثال‌های زیر تا پایان این بخش، فرض کرده‌ایم که مجموعهٔ الفبای ما شامل نمادهای رابطه‌ای $R_1(-,-), R_2(-,-), R(-,-), S(-)$ باشد.

مثال ۵.۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری و سپس در آن متغیرهای آزاد و پای‌بند را مشخص کنید:

$$\forall x \quad R_1(x,y) \to \exists y(S(y) \vee R_2(x,y)).$$

پاسخ. پس از لحاظ کردن ترتیب اولویتها، فرمول بالا به صورت زیر پرانتزگذاری می‌شود:

$$\big((\forall x \quad R_1(x,y)\big) \to \exists y\big(S(y) \vee R_2(x,y)\big)\big),$$

حال متغیرهای آزاد و پای‌بند را شناسایی می‌کنیم:

$$\left((\forall x \quad R_1(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}},\overbrace{y}^{\text{آزاد}})) \to \exists y(S(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}) \vee R_2(\overbrace{x}^{\text{آزاد}},\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}))\right).$$

دقت کنید که در فرمولِ بالا، متغیرِ x یک حضور آزاد و یک حضور پای‌بند دارد. □

مثال ۶.۲. متغیرهای پای‌بند و آزاد فرمول زیر را مشخص کنید:

$$\forall x\big(R_1(x,y) \to \exists y(s(y) \vee R_2(x,y))\big).$$

پاسخ. فرمول بالا پس از پرانتزگذاری به صورت زیر درمی‌آید:

$$\forall x \quad \left(R_1(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}},\overbrace{y}^{\text{آزاد}}) \to \exists y\left(S(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}}) \vee R_2(\overbrace{x}^{\text{پای‌بند}},\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}})\right)\right).$$

متغیرهای آزاد و پای‌بند به صورت مشخص شده هستند. □

مثال ۷.۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری و متغیرهای آزاد و پای‌بند آن را مشخص کنید:

$$\forall x R_1(x,y) \to \exists y S(y) \vee R_2(x,y).$$

پاسخ.

$$\left(\forall x \quad R_1(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}},\overbrace{y}^{\text{آزاد}})\right) \to \left(\left(\exists y \ S(\underbrace{y}_{\text{پای‌بند}})\right) \vee R_2(\overbrace{x}^{\text{آزاد}},\underbrace{y}_{\text{آزاد}})\right).$$

□

مثال ۸.۲. متغیرهای آزاد و پای‌بند فرمول زیر را مشخص کنید.

$$\exists x(S(x) \wedge \forall x\big(R(x,y) \to S(y)\big)).$$

پاسخ.

$$\exists x \left(S(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}) \wedge \forall x \left(R(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}},\underbrace{y}_{\text{آزاد}}) \to S(\underbrace{y}_{\text{آزاد}})\right)\right).$$

□

مثال ۹.۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری و متغیرهای آزاد و پای‌بند آن را مشخص کنید.

$$\exists x S(x) \wedge \forall x R(x,y) \to S(y).$$

پاسخ.

$$\bigg(\Big(\exists x\, S(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}})\Big) \wedge \Big(\forall x\, R(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}})\Big)\bigg) \to S(\underbrace{y}_{\text{آزاد}}).$$

□

مثال ۱۰.۲. فرمول زیر را پرانتزگذاری و متغیرهای آزاد و پای‌بند آن را مشخص کنید.

$$R(x,y) \leftrightarrow \exists x\big(R(x,y) \wedge \forall x \quad S(x)\big) \vee \forall y \quad R(x,y).$$

پاسخ.

$$R(\underbrace{x}_{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}}) \leftrightarrow \bigg(\exists x \Big(R(\underbrace{x}_{\text{پای‌بند}}, \underbrace{y}_{\text{آزاد}}) \wedge \forall x\, S(x)\Big) \vee \forall y\, R(\underbrace{x}_{\text{آزاد}}, \underbrace{y}_{\text{پای‌بند}})\bigg).$$

□

تمرین ۱.۲. متغیرهای آزاد و پای‌بند دو فرمول زیر را مشخص کنید:

$$\forall x \exists y \quad R(x,y) \wedge s(x) \to \exists y \quad s(y),$$

$$\forall x \exists y \quad (R(x,y) \wedge s(x) \to s(y)).$$

۲.۲ سخنی کوتاه دربارهٔ معناشناسی منطق مرتبهٔ اول

پس از آن که دربارهٔ قواعد دستوری منطق مرتبهٔ اول صحبت کردیم، باید سخن کوتاهی دربارهٔ معناشناسی در آن داشته باشیم. معناشناسی منطق اول، یک تشابه با معناشناسی منطق‌های روزمره دارد، زیرا در این منطق، جملات در «جهان‌های ذهنی و واقعی» باید «تعبیر» یا «معنا» شوند. به عنوان یک تمثیل، فرض کنید کسی در زبان روزمره فارسی به شما بگوید، «بز بالای کوه است»؛ شما چه تصور خواهید کرد؟

ممکن است بز و کوهی که شما تصور کرده‌اید با شکل بالا فرق کنند، ولی این را می‌دانید که برای فهمیدن معنای جملهٔ ما، شما نیاز به یک جهان ذهنی یا یک جهان واقع و یک تابع در مغزتان دارید که کلمهٔ بز را به یک بز، کلمهٔ کوه را به یک کوه، و بالای چیزی بودن را به یک رابطه در آن جهان تصویر کند. اگر این توابع در مغز شما به گونه‌ای دیگر عمل کنند احتمالاً با شنیدن جملهٔ «بز بالای کوه است» تصویر زیر را تصور کنید:

در بالا هر سه مفهوم «بز، کوه، بالای چیزی بودن» به گونه‌ای دیگر تصور شده‌اند؛ اما باز هم شنونده درکی از گفتهٔ ما داشته است و احتمالاً می‌تواند با همین درک به گفتگو با ما ادامه دهد!

در منطق مرتبهٔ اول، جملات به روشی مشابه معنا می‌شوند. برای بررسی صحت جملهٔ «یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲۰ وجود دارد» باید یک «جهان» متشکل اعداد طبیعی، یک عدد به نام ۲۰ در آن جهان، و یک درک از مفهوم بزرگتر بودن در آن جهان وجود داشته باشد. واضح است که جهان «اعداد طبیعی» یک جهان ذهنی است و فقط در آن جهان است که می‌توان تشخیص داد که این گزاره درست است یا غلط. اما در عین حال ممکن است شنونده‌های گوناگون، جهان‌های مختلفی را به نام «جهان اعداد طبیعی» تصور کنند؛ در جهان مورد تصور آن‌ها، ۲۰ چیز دیگری باشد و بزرگتر بودن معنای دیگری داشته باشد. [3] در هر کدام از این جهان‌ها نیز می‌توان به درکی از درست یا غلط بودن جملهٔ مورد نظر رسید. در واقع هر کدام از این شنونده‌ها حق دارند بگویند: «در جهانی که من تصور کرده‌ام جملهٔ بالا درست (غلط) است».

در عین حال، جهانی که باید معنای جملات را در آن تصور کرد، هیچ‌گاه در دستور زبان و از روی خودِ جملات مشخص نمی‌شود، و خواننده است که در جهانی مناسب جملهٔ ما را معنی می‌کند.

مثال ۲.۱۱. فرض کنید مجموعهٔ الفبای ما شامل دو نماد رابطه‌ای $R(-,-), H(-)$ باشد. فرمولِ زیر را در نظر بگیرید:

$$\exists x \exists y \quad \Big(R(x,y) \wedge H(x)\Big).$$

بیایید جملهٔ بالا را در دو جهان متفاوت تعبیر کنیم. جهان اول را مجموعهٔ کلاس درس‌مان در نظر بگیرید. در این جهان، رابطهٔ R را رابطهٔ دوستی و رابطهٔ H را کلاه بر سر داشتن تعبیر کنید. در این صورت جملهٔ بالا می‌گوید که دو نفر به نامهای ایکس و وای موجودند که با هم دوستند و یکی‌شان کلاه بر سر دارد. وقتی جمله را به این صورت و در این جهان تعبیر می‌کنید، بررسی درست یا غلط بودن آن در این جهان نیز به آسانی صورت می‌گیرد.

حال بیایید جهان دوم را جهان متشکل از اعداد طبیعی در نظر بگیرید. در این جهان رابطهٔ R را رابطهٔ عاد کردن اعداد و رابطهٔ H را رابطهٔ اول بودن یک عدد تعبیر کنید. معنای جملهٔ بالا در این جهان و با این تعبیرات بدین صورت است که دو عدد طبیعی به نامهای ایکس و وای موجودند که ایکس اول است و وای را عاد می‌کند. و البته این جمله، در جهان دوم مشخصاً درست است؛ زیرا عدد اول ۲ و عدد ۴ دو عدد طبیعی هستند که این ویژگی‌ها را دارند.

همان طور که گفتیم در منطق مرتبهٔ اول، جهان مورد بررسی هیچ‌گاه از روی خودِ فرمول‌هایی که به صورت دستوری نوشته شده‌اند مشخص نمی‌شود؛ از این رو قواعد فرمول نویسی منطق مرتبهٔ اول به ما اجازه نمی‌دهند که

[3] تنها چیزی که واحد و همگانی است، الفبا و قواعد دستوری است. اما جهان‌های معنا متفاوتند.

جملهٔ مورد توجه این مثال را به صورت زیر بنویسیم:

$$\exists x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} \quad (R(x,y) \wedge H(x)).$$

خودِ خواننده، بعد از این که جهان مورد نظرش را انتخاب می‌کند، باید بداند که x, y عناصری در همان جهان هستند.

توجه ۱۲.۲. فرض کنید که الفبای زبان شامل یک نماد رابطه‌ای $R(-,-)$ باشد. در این صورت $R(x,y)$ یک جملهٔ مرتبهٔ اول است. جهان را مجموعهٔ اعداد طبیعی و $R(x,y)$ را به معنی «عدد x از عدد y کمتر است» در نظر بگیرید. دقت کنید نمی‌شود دربارهٔ درستی یا نادرستی $R(x,y)$ در این جهان سخن گفت، زیرا مثلاً $R(۲,۳)$ درست است اما $R(۵,۲)$ غلط است. در واقع در منطق مرتبهٔ اول نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی جمله‌ای که متغیر آزاد دارد سخنی گفت. وقتی متغیرهای آزاد با عناصری در جهان جایگزین می‌شوند آنگاه می‌شود دربارهٔ درستی یا نادرستی جملهٔ حاصل، آن هم فقط در آن جهان، تصمیم گرفت.

اما وقتی جمله‌ای متغیر آزاد ندارد، کار راحت است. برای مثال جملهٔ $\exists x \exists y \quad R(x,y)$ را در نظر بگیرید که هیچ متغیر آزادی ندارد. این جمله در جهان معرفی شده به این معنی است که دو عنصر وجود دارند که یکی از دیگری کمتر است، و البته این درست است؛ چون چنین عناصری وجود دارند.

تعریف دقیق معناشناسی در منطق مرتبهٔ اول فراتر از درس مبانی ریاضی است، با این حال خواهیم کوشید تا با مثال‌های متعدد، رضایت نسبی خواننده از درک آن را فراهم کنیم. در بخش آینده، کاربرد منطق مرتبهٔ اول را در جمله‌سازی‌های ریاضی و غیر ریاضی روزمره تمرین خواهیم کرد.

۳.۲ تمرینِ ریاضی‌نویسی، معناشناسی و دستور زبان منطق مرتبهٔ اول

تا اینجا آموخته‌ایم که در منطق مرتبهٔ اول بسته به اینکه در مورد چه چیزی صحبت می‌کنیم، یک الفبای مناسب انتخاب می‌کنیم. این الفبا، حروفی برای محمول‌ها (یعنی رابطه‌ها) و توابعی دارد که می‌خواهیم دربارهٔ آن‌ها جمله بنویسیم. ادوات منطقی در کنار این الفبا به ساخت جملات به ما کمک می‌کنند. علاوه بر آن دیدیم که جمله‌هایی که در این منطق می‌نویسیم در «جهان‌هایی» واقعی یا ذهنی معنا می‌شوند. در این بخش می‌خواهیم کمی جمله‌نویسی در منطق مرتبهٔ اول را ورزش کنیم، و این نوعِ تمرینِ نوشتن جملات بدون ابهام با استفاده از علائم ریاضی، در خارج از درس مبانی ریاضی نیز به کارمان خواهد آمد. دقت کنید که در این بخش، مدام از شما خواهیم خواست که جملاتی را در مورد جهان‌هایی بنویسید، ولی درست یا غلط بودن این جملات در آن جهان‌ها یا عاقلانه و سفیهانه بودن آن‌ها برای ما اهمیتی نخواهد داشت.

مثال ۱۳.۲. در مجموعهٔ الفبا یک نماد رابطه‌ایِ $D(-)$ قرار دهید. حال جهان را مجموعهٔ کلاس درس خودمان در نظر بگیرید و در این جهان، $D(-)$ را به صورت زیر معنی کنید:

برقراری $D(x)$ یعنی x یک خانم است.

حال جملاتی با کمک الفبای معرفی شده بنویسید که معنای زیر را داشته باشند:

۱. حداقل سه دانشجوی خانم وجود دارد.

۲. دقیقاً سه دانشجوی خانم وجود دارد.

۳. دانشجوی خانم وجود دارد ولی حداکثر سه دانشجوی خانم وجود دارد.

پاسخ.

۱. حداقل سه دانشجوی خانم وجود دارد، یعنی سه نفر وجود دارند که خانم هستند و با هم متفاوت‌اند؛ پس جملهٔ مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\exists x, y, z \quad (D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z).$$

دقت کنید که در عبارت بالا، $\exists x$ یعنی که یک x در جهان ما (یعنی کلاس درس) وجود دارد. همان طور که پیش‌تر توضیح داده‌ایم این را که x در کلاس درس ماست در منطق مرتبهٔ اول نمی‌نویسیم، ولی چون جهان را از اول مشخص کرده‌ایم می‌دانیم که سورها دربارهٔ اشیای همین جهان صحبت می‌کنند.

۲. جملهٔ دوم می‌گوید که سه نفر متفاوت وجود دارند که خانم هستند و هر کس دیگری اگر خانم باشد، یکی از آن سه نفر است؛ پس می‌نویسیم:

$$\exists x, y, z \quad \Big(D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \wedge$$
$$\forall t \quad \big(D(t) \to (t = x) \vee (t = y) \vee (t = z)\big)\Big).$$

۳. توضیح جملهٔ سوم را به خواننده واگذار می‌کنیم؛ این جمله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\exists x, y, z \quad \Big(D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \wedge \forall t \quad \big(D(t) \to t = x \vee t = y \vee t = z\big)\Big).$$

□

مثال ۱۴.۲. فرض کنید در الفبای ما، دو نماد رابطه‌ایِ $A(-,-), D(-,-)$ قرار داده شده است. جهان مورد نظر را یک جامعهٔ انسانی در نظر بگیرید و نمادهای رابطه‌ای ذکر شده را به صورت زیر معنی کنید:

برقراری $A(x, y)$ یعنی x عموی y است و برقراری $D(x, y)$ یعنی x داییِ y است.

با کمک الفبای معرفی شده، جملاتی بنویسید که در جهان مورد نظر ما معنای زیر را داشته باشند:

۱. هر کسی عموئی دارد.

۲. کسی هست که عموی همه است.

۳. هر کسی که عمو داشته باشد، دائی دارد.

۴. اگر همهٔ افراد عمو داشته باشند، یک نفر هست که دائی دارد.

پاسخ. جملهٔ اول را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x \quad \exists y \quad A(y, x)$$

جملهٔ دوم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\exists y \quad \forall x \quad A(y, x)$$

نوشتن جملهٔ سوم کمی دقت می‌خواهد؛ این جمله می‌گوید که هر کس، اگر عمو داشته باشد دائی دارد؛ پس این جمله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x \quad \Big(\exists y \quad A(y,x) \to \exists z \quad D(z,x)\Big).$$

جملهٔ چهارم، که معنایی کاملا متفاوت با جملهٔ سوم دارد در واقع با اندکی تغییر در محل پرانتزهای این جمله و افزودن یک سور عمومی به آن به دست می‌آید:

$$\forall x \quad \exists y \quad A(y,x) \to \exists x \quad \exists y \quad D(y,x).$$

□

تمرین ۲.۲. با کمک الفبا و جهان مثال قبل، جملاتی به معنای زیر بنویسید:

- یک نفر هست که اگر او عمو داشته باشد، همه عمو دارند.
- اگر یک نفر باشد که عمو دارد، همه عمو دارند.

مثال ۱۵.۲. این بار دو محمولِ دو موضعیِ $R(-,-)$ و $D(-,-)$ در الفبا قرار دهید؛ جهان را دانشگاه خودمان در نظر بگیرید؛ $R(x,y)$ را چنین تعبیر کنید که x دوستِ y است و $D(x,y)$ را چنین تعبیر کنید که x دشمنِ y است. حال جملاتی بنویسید که در جهان مورد نظر ما معنی زیر را داشته باشند:

۱. اگر هر کس حداقل دو دوست داشته باشد، آنگاه یک نفر هست که با همه دوست است.

۲. هر کسی که حداقل دو دوست داشته باشد، با همه دوست است.

۳. هر کسی دو دوست دارد که آن‌ها حداکثر یک دوست مشترک دارند.

۴. هر کسی که دوستی داشته باشد، دوست دیگری ندارد.

پاسخ. جملات یاد شده را به ترتیب به صورت زیر می‌نویسیم؛ دقت کنید که در این مثال، پرانتزها چه نقش عمده‌ای در تغییر معنی بازی می‌کنند:

1. $\forall x \quad \exists y_1, y_2 \quad R(x,y_1) \wedge R(x,y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \to \exists z \quad \forall t \quad R(z,t)$
2. $\forall x \quad \Big(\exists y_1, y_2 \quad R(x,y_1) \wedge R(x,y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \to \forall z \quad R(x,z)\Big)$
3. $\forall x \quad \Bigg(\exists y_1, y_2 \quad R(x,y_1) \wedge R(x,y_2) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \forall z \quad \Big(R(y_1,z) \wedge R(y_2,z) \to (x = z)\Big)\Bigg)$
4. $\forall x \quad \Bigg(\exists y \quad R(x,y) \to \forall z \quad \Big(\neg(y = z) \to \neg R(x,z)\Big)\Bigg).$

□

تمرین ۳.۲. در الفبا و جهان مثال قبل، جملهٔ «دشمنِ دشمنِ هر کس، دوست اوست» را بنویسید.

تمرین ۴.۲. به الفبایِ مثالِ ۱۴.۲ یک محمولِ دو موضعیِ $R(-,-)$ اضافه کنید و در جهان همان مثال، این محمول را چنین تعبیر کنید که $R(x,y)$ یعنی این که x، y را می‌شناسد. جمله‌ای بنویسید که چنین معنا بدهد: «عموهای هر کس، دائی‌های او را می‌شناسند».

مثال ۱۶.۲. فرض کنید در الفبا یک نماد رابطه‌ای دو موضعیِ $- < -$ داشته باشیم و همچنین فرض کنید که جهان مورد نظر ما، جهانِ اعداد طبیعی است و در آن $x < y$ بدین معنا تعبیر شده است که x کمتر از y است. جملاتی به معنای زیر بنویسید:

۱. هر عددی از حداقل یک عدد دیگر بزرگتر است.

۲. بزرگتر از هر عددی حداقل یک عدد وجود دارد.

۳. یک عدد هست که از همهٔ اعداد بزرگتر است.

پاسخ. جملات مورد نظر به ترتیب به صورت زیر می‌نویسیم:

1. $\forall x \quad \exists y \quad \big(\neg(y=x) \wedge y<x\big).$
2. $\forall x \quad \exists y \quad (x<y).$
3. $\exists x \quad \forall y \quad y<x.$

لازم به تذکر چندباره است که در پاسخ مثال بالا نباید بنویسیم

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \ldots$$

علت آن است که در منطق مرتبهٔ اول، تعلقِ متغیرها به جهان را نمی‌نویسیم و پس از آن که جهان را در نظر گرفتیم، می‌دانیم که هر سور وجودی و عمومی به عناصر آن جهان اشاره دارد. $\square$

توجه ۱۷.۲. زمان تبدیل جملات فارسی به ریاضی، لحاظ کردن کلمهٔ ربطی «که» بسته به این که کجای جمله قرار گرفته است، می‌تواند ابهام برانگیز باشد. مثال‌های زیر، که در الفبا و برای جهان مثالِ ۱۵.۲ نوشته شده‌اند کمی وضعیت را روشن می‌کنند:

- هر کسی **که** دوستی دارد، دشمنی دارد.
برای این که جملهٔ بالا قابل نوشتن در منطق مرتبهٔ اول باشد، باید آن را به صورت زیر تبدیل کرد: هر کسی اگر دوستی داشته باشد آنگاه دشمنی دارد. پس جمله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x \quad \Big(\exists y R(y,x) \to \exists z D(z,x)\Big).$$

- هر کس دوستی دارد **که** آن دوست دشمنی ندارد.
جملهٔ بالا را باید به صورت تبدیل کنیم: «برای هر کس، کسی وجود دارد که دوست اوست و دشمن ندارد».

$$\forall x \quad \exists y \quad \Big(R(x,y) \wedge \forall z \neg D(z,y)\Big).$$

تمرین ۵.۲. در الفبا و برای جهان معرفی شده در مثالِ ۱۵.۲ جملات زیر را بنویسید:

۱. هر کس که دوستی داشته باشد که با همه دوست است، حداقل با دو نفر دوست نیست.

۲. اگر هر کس حداقل یک دوست داشته باشد، آنگاه دو نفر هستند که با هم دوست نیستند.

تمرین ۶.۲. با تعبیرِ $A(x,y)$ به x عموی y است و $D(x,y)$ به x دایی y است، جملاتی با معنای زیر بنویسید:

۱. هر کس که عمو دارد دایی ندارد.

۲. هر کس عمویی دارد که دایی ندارد.

۳. فقط کسانی که عمو دارند دایی دارند.

۴. عموی هر شخصی دایی دارد.

۵. دایی عموی هر کس دایی اوست.

۶. عموی هر شخصی که آن شخص دائی ندارد، دائی اوست.

گاهی اوقات، جهان و معانی الفبای زبان را در کنار هم نشان می‌دهیم؛ به جهان به همراه تعابیر الفبا، یک ساختار گفته می‌شود.

توجه ۱۸.۲. در تبدیل جملات فارسی به ریاضی، گاهی واژهٔ ربطی «و» دانشجویان را به خطا می‌اندازد. گاهی در فارسی «و» به گونه‌ای استفاده می‌شود که نیاز به نوشتن آن نیست. برای مثال جملهٔ «برای هر ایکس و برای هر وای، رابطهٔ R بین ایکس و وای برقرار است را به صورت زیر باید نوشت:

$$\forall x \quad \forall y \quad R(x,y)$$

و نوشتن آن به صورت زیر غلط است:

$$\forall x \wedge \forall y \quad R(x,y).$$

در واقع قوانین دستوری منطق مرتبهٔ اول به ما می‌گوید که اگر φ و ψ دو جمله باشند، آنگاه $(\varphi \wedge \psi)$ یک جمله جدید است. اما $\forall x$ و $\forall y$ جمله نیستند که بین آن‌ها بتوان عطف منطقی قرار داد.

مثال ۱۹.۲. در ساختارِ $(\mathbb{N}, \times, +)$ و با به کارگیری عناصری از جهان این ساختار، این جمله را بنویسید: «هر عدد اولِ مخالفِ ۲ فرد است».

پاسخ. دقت کنید که در این مثال به طور ضمنی گفته شده است که جهان مورد نظر ما، مجموعهٔ اعداد طبیعی است و می‌توانیم از توابع جمع و ضرب برای بیان مقصودمان استفاده کنیم. یک فرق این مثال، با مثال‌های قبلی این است که در اینجا نمادهای تابعی در الفبا قرار گرفته‌اند اما در مثال‌های قبلی فقط با نمادهای رابطه‌ای کار کردیم. همچنین در این مثال به ما اجازه داده شده است از یکی از عناصر جهان، یعنی عدد ۲ در بیان مقصودمان استفاده کنیم.

جملهٔ بالا باید به جملهٔ زیر تبدیل شود: هر عددی، اگر اول باشد (یعنی توسط هیچ عددی جز یک و خودش عاد نشود) و مخالفِ ۲ باشد، آنگاه فرد است؛ پس آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x \quad \Big(x \neq ۱ \wedge x \neq ۲ \wedge \forall y,z \quad (x = y \times z \to (y = ۱ \vee z = ۱)) \to \exists k \quad x = ۲ \times k + ۱\Big).$$

$\square$

تمرین ۷.۲. در همان ساختار قبلی، این جمله را بنویسید: «هر دو عدد دارای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هستند».

مثال ۲۰.۲. در ساختارِ $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, <)$ بنویسید که تابعِ $x + x^{۲}$ در نقطهٔ a پیوسته است.

پاسخ. با استفاده از امکاناتِ این الفبا، جملهٔ مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall\epsilon\Big(\epsilon > ۰ \rightarrow \big(\exists\delta(\delta > ۰ \wedge \forall x(x < a + \delta \wedge a < x + \delta) \rightarrow$$

$$(x \times x + x < a \times a + a + \epsilon \wedge a \times a + a < x \times x + x + \epsilon))\big)\Big)$$

با یک کوتاه‌نویسیِ $f(x) = x^{۲} + x$ و چند کوتاه‌نویسی رایج دیگر، صورت دیگری از نوشتهٔ بالا در زیر آمده است:

$$\forall\epsilon > ۰ \quad \exists\delta > ۰ \quad \forall x \quad \Big(-\delta < x - a < \delta \rightarrow -\epsilon < f(x) - f(a) < \epsilon\Big)$$

□

توجه ۲۱.۲. همان طور که در بخش‌های پیش رو خواهیم دید، همانند منطق گزاره‌ها، در منطق مرتبهٔ اول نیز علامتِ $\Longleftrightarrow$ در ساخت جملات استفاده نمی‌شود. هرگاه از این علامت استفاده شود، مفهومی فرای جملات منطق مرتبهٔ اول مد نظر است. مثلاً اگر ϕ و ψ دو جمله باشند که در منطق مرتبهٔ اول نوشته شده‌اند، منظور از

$$\phi \Longleftrightarrow \psi$$

این است که این دو جمله، هم‌معنی هستند (بخش بعد را ببینید). این که این دو جمله هم‌معنی هستند، خودْ جمله‌ای در زبان فارسی است و نه در زبانی که آن دو جمله نوشته شده‌اند.

گاهی نیز از $\Longleftrightarrow$ برای تعاریف استفاده می‌شود. مثلاً این را که تابع f در نقطهٔ a پیوسته است، به طور خلاصه به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

پس می‌نویسیم:

$$\Big(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\Big) \Longleftrightarrow \forall\epsilon > ۰ \quad \exists\delta > ۰ \quad \forall x \quad \Big(|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon\Big)$$

در عبارت بالا در واقع داریم می‌گوئیم که از نماد $\lim_{x\to a} f(x) = b$ برای اشاره به عبارت سمت راست استفاده کرده‌ایم که عبارت سمت راست جمله‌ای مرتبهٔ اول است و عبارت سمت چپ در زبان نوشتاری خودمان است و علامتِ $\Longleftrightarrow$ نیز در فرای این منطق، یعنی در زبان گفتگوی میان من و شما نوشته شده است.

توجه ۲۲.۲. در جملات منطق مرتبهٔ اول، سورها روی عناصر یک جهان مشخص عمل می‌کنند که این جهان از روی فرمول مشخص نیست. یک ویژگی مهم جملات مرتبهٔ اول این است که در منطق مرتبهٔ اول، روی زیرمجموعه‌ها سور زده نمی‌شود. یعنی مثلاً نمی‌توانیم بگوییم که هر زیرمجموعه از جهان ما، فلان ویژگی را دارد:

$$\cancel{\forall A \subseteq B \ldots}$$

تمرین ۸.۲. ایهام، همان قدر که جملات ادبی را زیبا می‌کند، جملات ریاضی را زشت می‌کند. آیا می‌توانید بیت زیر از حافظ را به زبان ریاضی بنویسید:

غیر از این نکته که حافظ ز تو ناخشنود است
در سراپای وجودت هنری نیست که نیست!

۴.۲ جمله‌های همواره درست، استلزام/استنتاج

تا اینجا گفتیم که در معناشناسیِ منطق مرتبهٔ اول، جمله‌هایی که با قواعد دستوری نوشته می‌شوند باید در جهان‌های مختلف ذهنی یا واقعی تعبیر شوند. نیز گفتیم که این جهان‌ها از روی خودِ جملات، که فقط دنباله‌ای از نمادها هستند، معلوم نمی‌شوند. برای مثال، جملهٔ $\exists x \exists y \quad R(x,y)$ در جهان کلاس درس، و وقتی که رابطهٔ R به معنی دوستی است به این صورت تعبیر می‌شود: «دو نفر **در کلاس درس** وجود دارند که با هم دوست هستند»، اما همین جمله در جهان اعداد طبیعی، و وقتی که R به عنوان رابطهٔ کمتری تعبیر می‌شود، به معنای این است که «دو **عدد طبیعی** وجود دارند که یکی از دیگری کمتر است». حال آنکه در خودِ جمله، هیچ اشاره‌ای به این نشده بود که x و y چه موجوداتی هستند. تنها بعد از آن که جملهٔ فوق در یک جهان «تعبیر» شود، می‌شود بررسی کرد که آیا این جمله در آن جهان درست یا غلط است؛ مثلاً اگر در کلاس درس ما دو نفر وجود داشته باشند که با هم دوست هستند، آنگاه این جمله در مورد کلاس درس ما درست است. همچنین مشخص است که این جمله به گونه‌ای که در اعداد طبیعی تعبیر شده است، در مورد اعداد طبیعی درست است. یک قانون ساده برای تشخیص درستی یک جمله، پس از تعبیر آن در یک جهان را در زیر ببینیم:

تعریف ۲۳.۲. فرمولِ $\forall x \quad \phi(x)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید M یک جهان مناسب باشد که این فرمول در آن معنا شده است. در این صورت می‌گوییم فرمولِ یادشده در جهان M درست است، هرگاه برای هر عنصرِ $a \in M$ که به طور دلخواه انتخاب شده باشد، فرمولِ $\phi(a)$ برقرار باشد. فرمولِ $\phi(a)$ یعنی فرمولی که از قرار دادن a به جای x در فرمولِ $\phi(x)$ به دست می‌آید.

برای مثال جملهٔ $\forall x D(x)$ را در کلاس درس این چنین معنی کنید: «همه قدشان از یک متر بیشتر است». برای بررسی درستی این جمله در این جهان، باید نشان دهیم که هر شخصِ a در کلاس را که انتخاب کنیم، قدش از یک متر بیشتر است!

تمرین ۹.۲. چگونه تشخیص دهیم که آیا فرمولِ $\exists x \quad \phi(x)$ در یک جهانِ M درست است یا خیر؟

در فصل قبل گفتیم که در منطق گزاره‌ها، «تاتولوژی‌ها» عباراتی هستند که صرف نظر از ارزش گزاره‌های به کار رفته در آن‌ها همواره درستند. برای مثال $((p \vee (\neg p))$ همواره درست است و فرقی نمی‌کند که p چه گزاره‌ای باشد. اما آیا در منطق مرتبهٔ اول، جمله‌ای وجود دارد که صرف نظر از «جهانی که در آن جمله را معنی می‌کنیم» و «تعابیری که برای معنی کردن جمله استفاده کرده‌ایم» همیشه درست باشد؟

جملهٔ φ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\exists x \quad (h(x) \to \forall y \quad h(y)).$$

فرض کنید که جهان ما، یک جهان از انسان‌ها (مثلاً همین کلاس درس ما) باشد و $h(x)$ این گونه تعبیر شود که x کلاه بر سر دارد. با این تعبیر، جمله φ می‌گوید که «در کلاس درس ما، یک نفر وجود دارد که اگر او کلاه بر سر داشته باشد، همه کلاه دارند». به نحوی، احتمالا غیرمنتظره، این جمله در مورد کلاس درس ما درست است. زیرا از دو حالت خارج نیست. یا همه کلاه دارند، یا یک نفر، مثلاً علی، کلاه ندارد. اگر همه کلاه داشته باشند، جملهٔ

اگر علی کلاه دارد پس همه کلاه دارند

بنا به تعاریفی که برای درستی گزارهٔ $(p \to q)$ در فصل قبل داشته‌ایم، درست است؛ زیرا هم «علی کلاه دارد» و هم «همه کلاه دارند» ارزش T دارند. بنابراین جمله، «یک نفر هست که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند» درست است؛ زیرا آن یک نفر علی است!

از طرفی فرض کنید این گونه نباشد که همه کلاه دارند؛ پس فرض کنید که کسی به نام زهرا کلاه ندارد. در این صورت جملهٔ زیر درست است:

اگر زهرا کلاه دارد پس همه کلاه دارند.

علت درستی جملهٔ فوق نیز، نحوهٔ تعریف درستی گزاره‌های $(p \to q)$ در فصل قبل است؛ در واقع از آنجا که جملهٔ «زهرا کلاه دارد» غلط است، جملهٔ فوق به انتفاء مقدم درست است. در نتیجه، در این حالت هم یک نفر هست که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند، و آن یک نفر در این جا زهرا است.

حال بیایید همان جملهٔ φ را در جهان دیگری و با تعابیر دیگری معنی کنیم. جهان را مجموعهٔ اعداد طبیعی بگیرید و $h(x)$ را چنین تعبیر کنید که x یک عدد اول است. در این صورت ترجمهٔ جملهٔ φ این می‌شود که «یک عدد هست که اگر آن عدد اول باشد، همهٔ اعداد اول هستند». دقیقاً با همان روش قبلی می‌توانید بررسی کنید که این جمله، با این تعبیر، و در این جهان نیز درست است. در واقعِ جملهٔ φ در هر جهانی که تعبیرش کنیم، در آن جهان درست است.

تعریف ۲۴.۲. جملهٔ مرتبهٔ اول φ را یک جملهٔ «همواره درست» می‌نامیم هرگاه در هر جهانی و به هر صورتی که تعبیر شود، دارای ارزش درست باشد. جمله‌های همواره درست در منطق مرتبهٔ اول، همان قضایای ریاضی هستند.

در بخش‌های آینده خواهیم دید که جملات ریاضی نیز در منطق مرتبهٔ اول و در یک الفبای مناسب نوشته می‌شوند. هر جملهٔ ریاضی، در ذهن هر ریاضی‌دان، در هر سطحی که باشد، به نحوی مخصوص به خود او تعبیر یا معنا می‌شود. اما، قضایای ریاضی، آن‌هایی هستند که با هر تعبیری و در هر ذهنی درستند.

یک نکتهٔ ظریف که احتمالاً در خلال مثال بالا بدان توجه کرده‌اید این است که پس از آن که یک جمله را در یک جهان تعبیر کردیم، قوانین تعریف شده در فصل قبل برای ارزش‌گذاری جملات در منطق گزاره‌ها برای بررسی درستی آن استفاده می‌شود.

قضیه ۲۵.۲. جملات زیر، همواره درست هستند:

۱. $\exists x \quad p(x) \leftrightarrow \exists y \quad p(y)$

۲. $\forall x \quad p(x) \leftrightarrow \forall y \quad p(y)$

۳. $\neg\forall x \quad p(x) \leftrightarrow \exists x \quad \neg p(x)$

۴. $\neg\exists x \quad p(x) \leftrightarrow \forall x \quad \neg p(x)$

۵. $\forall x \quad \Big(p(x) \wedge q(x)\Big) \leftrightarrow \forall x \quad p(x) \wedge \forall x \quad q(x)$

۶. $\exists x \quad \Big(p(x) \vee q(x)\Big) \leftrightarrow \exists x \quad p(x) \vee \exists x \quad q(x)$.

اثبات. نخست ثابت می‌کنیم که جملهٔ اول، همواره درست است. فرض کنید M یک جهان باشد و $p(x)$ در آن تعبیر شده است. جملهٔ $P = \exists x p(x)$ به این معنی است که یکی از عناصر این جهان، دارای ویژگی p است. در عین حال جملهٔ $Q = \exists y p(y)$ نیز به این معنی است که یکی از عناصر این جهان دارای ویژگی p است. بنابراین P, Q در جهان ما هم‌ارزش هستند یعنی گزارهٔ $(P \leftrightarrow Q)$ در جهان مورد نظر ما درست است. از آنجا که در انتخاب جهان و برای تعبیر رابطهٔ p هیچ محدودیتی قائل نشده بودیم، این جمله در هر جهان و با هر تعبیر دیگری نیز درست است.

اثبات موارد دیگر نیز مشابه است و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم. در زیر مورد سوم را نیز اثبات کرده‌ایم. فرض کنید M یک جهان باشد که در آن $p(x)$ به معنایی تعبیر شده است و داشته باشیم: $\neg\forall x \quad p(x)$. پس در جهان M اینگونه نیست که هر $a \in M$ ویژگی p را داشته باشد؛ یعنی عنصری مانند $b \in M$ هست که $\neg p(b)$. پس در جهان ما جملهٔ پیش رو درست است: $\exists x \quad \neg p(x)$. بنابراین در جهان مورد نظر ما جملهٔ زیر درست است:

$$\neg\forall x \quad p(x) \to \exists x \quad \neg p(x).$$

به طور مشابه اگر در جهانِ M جملهٔ $\exists x \quad \neg p(x)$ درست باشد، آنگاه عنصر $a \in M$ وجود دارد به طوری که $\neg p(a)$. پس این جمله که $\forall x p(x)$ در M درست نیست، یعنی نقیض آن درست است. بنابراین جملهٔ

$$\exists x \quad \neg p(x) \to \neg\forall x \quad p(x)$$

در جهان ما درست است. بنا به تعریف درستی یک گزارهٔ $(P \leftrightarrow Q)$ در منطق گزاره‌ها، درستی جملهٔ مورد سوم از درستی دو جملهٔ بالا نتیجه می‌شود. □

تمرین ۱۰.۲. بقیهٔ موارد ذکر شده در قضیهٔ ۲۵.۲ را نیز به طور مشابه ثابت کنید.

مشابه منطق گزاره‌ها به جای این که بگوییم فرمول $(\neg\forall x \quad p(x) \leftrightarrow \exists x \quad \neg p(x))$ همواره درست است، می‌نویسیم:

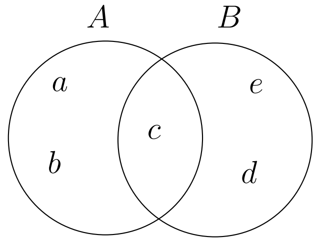
$$\neg\forall x \quad p(x) \iff \exists x \quad \neg p(x).$$

پس عبارتِ $\neg\forall x \quad p(x) \quad \leftrightarrow \quad \exists x \quad \neg p(x)$ یک جمله در منطق مرتبهٔ اول است؛ اما عبارتِ $\neg\forall x \quad p(x) \iff \exists x \quad \neg p(x)$ عبارتی فرامنطقی، در زبان مکالمهٔ ما دربارهٔ جمله‌های مرتبهٔ اول است که می‌گوید، جملهٔ یادشده در هر جهانی و با هر تعبیری، درست است. مشابهاً وقتی می‌نویسیم $\varphi \Rightarrow \psi$ منظورمان این است که جملهٔ مرتبهٔ اولِ $(\varphi \to \psi)$ یک جملهٔ مرتبهٔ اول همواره درست است.

مثال ۲۶.۲. آیا چنین است که

$$\forall x \quad \big(A(x) \vee B(x)\big) \Rightarrow \forall x \quad A(x) \vee \forall x \quad B(x).$$

پاسخ. جهانِ $M = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A(x)$ به معنی $x \in A = \{a, b, c\}$ و $B(x)$ به معنی $x \in B = \{c, d, e\}$ باشند. در این جهان، و با این تعابیر، جملهٔ $\forall x \quad (x \in A \vee x \in B)$ درست اما جملهٔ $(\forall x x \in A) \vee (\forall x x \in B)$ غلط است.

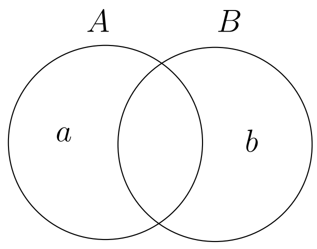


□

مثال ۲۷.۲. آیا چنین است که:

$$\exists x \quad A(x) \wedge \exists x \quad B(x) \Rightarrow \exists x \quad (A(x) \wedge B(x)).$$

پاسخ. جهان را به صورت $M = \{a, b\}$ و $A(x), B(x)$ را تعلق به مجموعه‌های A, B مطابق شکل زیر تعبیر کنید. واضح است $\exists x \quad x \in A$ و $\exists x \quad x \in B$ اما $\neg(\exists x \quad x \in A \wedge x \in B)$.

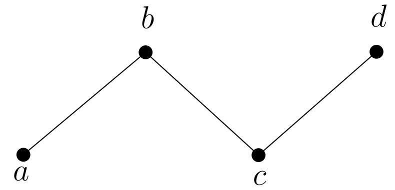


$\square$

مثال ۲۸.۲. آیا چنین است که

$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y) \Rightarrow \exists y \quad \forall x \quad R(x,y).$$

پاسخ. جهان را به صورت زیر، مجموعهٔ رأسهای یک گراف مانند شکل زیر در نظر بگیرید. و رابطهٔ R را چنین تعبیر کنید که $R(x,y)$ یعنی بین دو رأسِ x و y یک یال وجود داشته باشد.



در جهان بالا جملهٔ $\forall x \quad \exists y \quad R(x,y)$ درست ولی جملهٔ زیر غلط است $\exists y \quad \forall x \quad R(x,y)$ غلط است.

می‌توانستیم جهان را مجموعهٔ افراد کلاس درسمان و $R(x,y)$ را برقراری رابطهٔ دوستی در نظر بگیریم. در این صورت از جملهٔ «هر کسی دوستی دارد» جملهٔ «یکی هست که با همه دوست است» نتیجه نمی‌شود.

باز بیایید جهان را مجموعهٔ اعداد طبیعی و R را رابطهٔ ترتیب اعداد در نظر بگیریم. . دقت کنید که جملهٔ $\forall x \exists y \quad x \leq y$ در این جهان درست است اما جملهٔ $\exists y \forall x \quad x \leq y.$ غلط است. از هر عدد طبیعیِ n یک عدد طبیعی بزرگتر از آن، مثلاً $n+1$ وجود دارد، اما هیچ عدد طبیعی وجود ندارد که از همهٔ اعداد طبیعی بزرگتر باشد. $\square$

به عنوان مرور این بخش، دوباره یادآور می‌شویم که دو عبارتِ $\psi \Rightarrow \phi$ و $\phi \rightarrow \psi$ با هم متفاوت هستند. **دومی یک جمله در منطق مرتبهٔ اول است که ممکن است که در برخی جهان‌ها درست باشد و در برخی دیگر از جهان‌ها غلط. اما اولی یک کوتاه‌نوشت برای عبارت زیر است:**
جملهٔ $(\phi \rightarrow \psi)$ در هر جهان مرتبهٔ اول که تعبیر شود درست است. مشابه تمرین زیر را در منطق گزاره‌ها نیز داشتیم:

تمرین ۱۱.۲. آیا دو عبارت زیر با هم معادل هستند؟

۱. $\phi \Rightarrow \psi$

۲. اگر ϕ همواره درست باشد، آنگاه ψ همواره درست است.

لازم به ذکر است که قوانینی که برای تشخیص درستی یک جمله در یک جهان داریم، همان قوانین منطق گزاره‌ها هستند؛ مثلاً وقتی دو جمله در جهان درست هستند، عطف آن‌ها هم درست است. بنابراین یک روش برای رسیدن به فرمول‌های همواره درست در منطق مرتبهٔ اول، استفاده از تاتولوژی‌های منطق گزاره‌هاست. مثلاً اگر φ یک جملهٔ مرتبهٔ اول باشد، آنگاه $(\varphi \vee (\neg\varphi))$ یک جملهٔ همواره درست است که از قرار دادن جملهٔ φ در تاتولوژیِ $(p \vee (\neg p))$ ایجاد می‌شود.

تمرین ۱۲.۲. فرض کنید $f(p,q)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها باشد که از اتم‌های p,q ساخته شده است. همچنین فرض کنید که φ,ψ دو جمله در منطق مرتبهٔ اول باشند. نشان دهید که $f(\varphi,\psi)$ یک جملهٔ همواره درست در منطق مرتبهٔ اول است.

گفتیم که برای اثباتِ $\phi \Rightarrow \psi$ در منطق مرتبهٔ اول، باید درست بودن گزارهٔ $(\phi \to \psi)$ را در همهٔ جهان‌ها بررسی کرد. اما راه دیگری وجود دارد و آن «استنتاج» است. مشابه منطق گزاره‌ها، در منطق مرتبهٔ اول نیز تعداد محدودی قانون استنتاج وجود دارد، و استنتاج کردن جملهٔ $(\phi \to \psi)$ یعنی رسیدن از ϕ به ψ با متناهی بار استفاده از این قوانین استنتاج و بدون توجه به معانی و تعابیر جملات. یکی از این قوانین استنتاج، همان استفاده از تاتولوژی‌های منطق گزاره‌هاست. از ذکر باقی قوانین استنتاج در این کتاب خودداری کرده‌ایم، زیرا درس «منطق ریاضی» محمل بسیار مناسب‌تری برای این کار است.

یکی از قضایای پایه‌ای منطق مرتبهٔ اول به ما می‌گوید که «هر جمله‌ای که قضیه باشد» یعنی «هر جمله‌ای که در همهٔ جهان‌ها درست باشد» قابل استنتاج است، و هر جمله‌ای که با استنتاج به دست آمده باشد، در همهٔ جهان‌ها درست است. این قضیه، قضیهٔ تمامیت گودل نام دارد. به این قضیه در فصل‌های آینده خواهیم پرداخت.

تمرین ۱۳.۲. آیا دو عبارت زیر با هم معادلند؟

۱. اگر برای جملهٔ φ اثباتی وجود داشته باشد برای جملهٔ ψ اثباتی وجود دارد.

۲. برای جملهٔ $(\varphi \to \psi)$ اثباتی وجود دارد.

با تمرینِ ۱۱.۲ مقایسه کنید.

دقت کنید که تعداد قوانین استنتاج در منطق مرتبهٔ اول نیز متناهی است و این قوانین، قوانین نسبتاً ساده‌ای هستند. پس در این جا اتفاق حیرت‌آوری رخ داده است: هر آنچه همواره درست است، یعنی در تمام جهان‌ها رخ می‌دهد، تنها با تعدادی محدود روش استنتاج اثبات می‌شود. از آن مهم‌تر این که می‌توان این تعداد قوانین محدود را با تحت یک برنامه به رایانه داد و از آن رایانه خواست تا همهٔ جملاتِ همواره درست ریاضی را با استفاده از آن‌ها تولید کند. [۴] دقت کنید که رایانه نمی‌تواند وارد همهٔ جهان‌ها شود و درستی جملهٔ مورد نظر ما را در آن جهان‌ها بررسی کند ولی می‌تواند با قوانین محدود استنتاج کند.

بیان قوانین استنتاج در منطق مرتبهٔ اول و اثبات قضیهٔ تمامیت گودل، در سطح درس مبانی ریاضی نمی‌گنجد و خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند آن‌ها را در یک دورهٔ درس منطق فراگیرد. با این حال در بخش‌های آینده، در مورد موضوع سپردنِ تولید ریاضی به یک ربات که قوانین استنتاج را می‌داند، صحبت خواهیم کرد.

تمرین ۱۴.۲. آیا دو عبارت زیر با هم معادلند؟ کدام‌یک دیگری را نتیجه می‌دهد؟

[۴] این جمله و محدودیت‌های آن در حیطهٔ قضیهٔ مهمی به نام قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل قرار می‌گیرد که در بخش‌های آینده به آن خواهیم پرداخت.

- $\forall x\big(p(x) \to q(x)\big)$
- $\forall xp(x) \to \forall xq(x)$.

تمرین ۱۵.۲. آیا چنین است که:

$$\exists x\big(p(x) \to q(x)\big) \Rightarrow \big(\exists xp(x) \to \exists xq(x)\big).$$

تمرین ۱۶.۲. آیا چنین است که:

$$\big(\exists xp(x) \to \exists xq(x)\big) \Rightarrow \exists x\big(p(x) \to q(x)\big).$$

توجه ۲۹.۲. وقتی می‌گوییم یک جملهٔ $p(x)$ که متغیر آزادِ x را دارد همواره درست است، منظورمان این است که در هر جهانی و با هر مقداری که در آن جهان به جای x بگذاریم، این جمله درست است. در واقع این که $p(x)$ یک قضیه است، بدین معنی است که $\forall x \quad p(x)$ یک قضیه است. برای مثال، $x = x$ یک قضیه است. یکی از قوانین استنتاج در منطق مرتبهٔ اول می‌گوید، اگر $p(x)$ را بدون استفاده از x ثابت کردیم، بدانیم که $\forall x \quad p(x)$ را ثابت کرده‌ایم!

۵.۲ منطق‌های دیگر

در طی دو فصل گذشته، با منطق گزاره‌ها و منطق مرتبهٔ اول به نحوی بسیار اجمالی آشنا شدیم. منطق گزاره‌ها منطق حاکم بر گزاره‌های دارای ارزش صفر و یک است و منطق مرتبهٔ اول، منطق جملاتی است که در جهان‌های مختلف قابل تعبیر هستند.

ریاضیات صورت‌گرایانه، همان طور که در فصل آینده خواهیم دید، در منطق مرتبهٔ اول بیان می‌شود. علت این امر، امکان ماشینی شدن جملات این منطق و نیز برقراری قضیه مهم درستی و تمامیت است.

در عین حال، در بخش‌های گذشته دیدید که هنگام سخن گفتن دربارهٔ منطق‌ها نیز از منطق استفاده می‌کنیم. در فصل‌های گذشته به این منطق، فرامنطق گفتیم. مثلاً گفتیم که عبارتِ $p \Rightarrow q$ یک گزاره در فرای منطق ماست که می‌گوید گزارهٔ $(p \to q)$ که در منطق ماست، همواره درست است. در حین تفهیم منطق‌های گزاره‌ها و مرتبهٔ اول فرض کرده بودیم که فرامنطق و قوانینش شناخته شده هستند؛ اما حقیقت این است که این فرامنطق هم باید همزمان با منطق ما ساخته شود و خودش می‌تواند مرتبهٔ اول یا غیر از آن باشد. این کار البته امکان پذیر است و خواننده با دقت کافی احتمالاً بتواند ساخت منطق و فرامنطق را به صورت همزمان با شروع از چند علامت ساده تحقیق کند. تدریس مبانی ریاضی به این روش امکان‌پذیر نیست، و به این می‌ماند که به کودکی که هنوز سخن گفتن نمی‌داند، قواعد دستوری زبان فارسی را آموزش دهیم. در واقع پیش از آموزش قواعد زبان، نیاز به راه افتادن مکالمهٔ حداقلی آن کودک هستیم و این شیوه‌ای است که در مبانی ریاضی نیز پیش می‌گیریم.

گفته بودیم که در منطق مرتبهٔ اول، سورها پشت متغیرهایی می‌آید که معلوم نیست در چه جهانی واقع شده‌اند. اما احتمالاً جمله‌ای مانند جملهٔ زیر را در ریاضیاتی که خوانده‌اید زیاد دیده باشید:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \quad x \leq n$$

جملهٔ بالا می‌گوید هر عدد حقیقی، از یک عدد طبیعی کمتر است. شاید تعجب کنید که این جمله نیز یک جملهٔ مرتبهٔ اول است. علت این امر را در بخش‌های آینده متوجه خواهید شد؛ به طور خلاصه، جملاتی وجود دارند که به

معنی «حقیقی بودن یک عدد» یا «طبیعی بودن یک عدد» هستند و این جملات (اثبات می‌شود که) در منطق مرتبهٔ اول قابل نوشتن هستند. وقتی می‌گوییم $x \in \mathbb{R}$ یا $x \in \mathbb{N}$ به طور ضمنی به آن جمله‌ها ارجاع داده‌ایم، پس جهان ریاضیات همچنان یک جهان مرتبهٔ اول است.

اما می‌شود یک جهان را ثابت در نظر گرفت و آن را در **منطق مرتبهٔ دوم** مطالعه کرد؛ یعنی اجازه داد که سورها روی زیرمجموعه‌ها اثر کنند. مثلاً این ویژگی حیاتی اعداد حقیقی را که هر زیرمجموعهٔ از بالاکراندار از اعداد حقیقی دارای یک کوچکترین کران بالاست، باید در منطق مرتبهٔ دوم بیان کنیم. منطق‌های مراتب بالاتر، هر چند قدرت صورت‌بندی قوی‌تری دارند اما ارزش مهمی مانند تمامیت (و نتایج مهم آن در نظریهٔ مدل‌ها) را ندارند.

در ورزهٔ روزمرهٔ ریاضیات، عموماً تنها این توانایی که جملات ما بدون ابهام و با استفاده از نمادهای ریاضی نوشته شوند اهمیت دارد، و عموماً افراد از محکم‌بودن زیرساخت‌های منطقی جملات مطمئن هستند. تمرین ریاضی‌نویسی با این ساده‌گیری‌ها نیز اهمیت خود را دارد، و ما نیز بر این واقفیم؛ اما همچنان، بدون نگرانی از نوع منطق استفاده شده، این گونه ساده‌گیری در نوشتار را استفاده از فرامنطق خواهیم خواند.

مثال ۳۰.۲. با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید که «هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی دارای کران بالا است.»

اثبات. جملهٔ فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad (\forall y \in A \quad y \leq x).$$

□

تمرین ۱۷.۲. می‌گوییم مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}$ از بالا کراندار است هرگاه عددی حقیقی وجود داشته باشد که از تمامی اعضای A بزرگتر است. عبارت‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید:

۱. کوچکترین کران بالا برای مجموعهٔ A عدد x است.

۲. کوچکترین کران بالا برای هر زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی وجود دارد.

۳. هر زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد دارای کوچکترین کران بالا است. (به این جمله، اصل کمال گفته می‌شود و این جمله یک حقیقت درستِ مرتبهٔ دوم در مورد اعداد حقیقی است. در قضیهٔ ۳.۵ به طور دقیق‌تر به اصل کمال پرداخته‌ایم).

تمرین ۱۸.۲. جملات زیر را در یک زبان ریاضی (با به کارگیری سورها) بنویسید:

۱. برای هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی بزرگتر از آن وجود دارد.

۲. یک عدد حقیقی بزرگتر از تمام اعداد طبیعی وجود ندارد.

تمرین ۱۹.۲. با استفاده از اصل کمال، (تمرین ۱۹.۲ قسمت ۴) نشان دهید که هیچ عدد حقیقی بزرگتر از همهٔ اعداد طبیعی وجود ندارد. (این گفته در قضیهٔ ۱.۵ اثبات شده است).

تمرین ۲۰.۲. عبارت زیر را به زبان ریاضی بنویسید:

- برای هر عدد حقیقی بزرگترین عدد طبیعی کوچکتر از آن وجود دارد.

خلاصهٔ فصل دوم. منطق مرتبهٔ اول دارای نمادهای منطقی $\forall, \exists, (,), \wedge, \vee, \neg, =$ است که با کمک یک مجموعهٔ ثابت از الفبا برای نوشتن جملات استفاده می‌شوند. الفبا می‌تواند حاوی علائمی برای سخن گفتن دربارهٔ توابع یا روابط باشد. جملات منطق مرتبهٔ اول در جهان‌ها «تعبیر» یا «معنا» می‌شوند. ممکن است جمله‌ای در یک جهان درست و در جهان دیگری غلط باشد. جملاتی که در هر جهان قابل تعبیر درست هستند، همواره درست نامیده می‌شوند. قضیهٔ مهمی به نام قضیهٔ تمامیت گودل بیان‌گر این است که جملات همواره درست دقیقاً همان جملاتی هستند که برای آن‌ها اثباتی وجود دارد. وجود اثبات برای یک جمله، یعنی رسیدن به آن جمله تنها با تقیّد به استفاده از تعدادی محدود قوانین استنتاج و بدون در نظر گرفتن معانی جملات.

فصل ۳

اصول‌موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها

جهان و کار جهان جمله هیچ بر هیچ است
هزار بار من این نکته کرده‌ام تحقیق
حافظ

۱.۳ رویکرد صورت‌گرایانه

در مقدمهٔ این کتاب گفتیم که یکی از اهداف مبانی ریاضی بیان اصول‌موضوعه‌ای است که علم ریاضی بر پایهٔ آن‌ها بنا شده است. در بخش‌های آینده توجیه خواهیم کرد که همهٔ اشیاء ریاضی، مانند عدد، تابع و غیره، ماهیت «مجموعه» دارند، از این رو، اصول موضوعهٔ ریاضیات به اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها گره می‌خورد. در این بخش قرار است اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها را با استفاده از منطق مرتبهٔ اول و نیز به کارگیری یک الفبای مناسب بیان کنیم.

هر اصل‌موضوعه‌ای که برای نظریهٔ مجموعه‌ها بیان خواهد شد یک جملهٔ مرتبهٔ اول در «الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها» خواهد بود. هر خوانندهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، برای خود «جهانی» از مجموعه‌ها تصور می‌کند.[1] برای ما جهان ذهنی تک تک افراد اهمیتی ندارد، اما برایمان مهم است که در همهٔ جهان‌های مورد تصور، اصول موضوعه برقرار باشند.

وقتی در جهان ذهنی کسی اصول موضوعهٔ ما برقرار باشد، هر چه با استفاده از این اصول موضوعه و با استفاده از قواعد استنتاج اثبات شود نیز در آن جهان برقرار خواهد بود؛ و این اساساً ورزهٔ ریاضیات بر مبنای اصول‌موضوعه است.

نوشتن اصول موضوعه برای مجموعه، بر طبق شهود اولیه‌ای که ریاضی‌دانان از مجموعه دارند، تاریخی طولانی دارد و البته این اصول موضوعه، مورد جدال‌های علمی فراوان بوده است. ریاضی‌دانان مهمی مانند راسل، کانتور، زرملو و فرانکل در شکل‌گیری اصول‌موضوعه‌ای که در این کتاب معرفی خواهیم کرد نقش بازی کرده‌اند.

تعریف زیر، در پاراگراف اول مقالهٔ تحت عنوان[2]

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre

از کانتور [۱] نوشته شده است:

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlun-

[1] از این جمله، مشخص است که ما برقراری قضیهٔ تمامیت گودل را پذیرفته‌ایم و این قرارداد مهمی در کتاب ماست. این قضیه، نیز خودْ از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها نتیجه می‌شود.
[2] مشارکتی در مبانی نظریهٔ فرامتناهی مجموعه‌ها.

terscheidenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M gennant werden) zu einem ganzen.

ترجمهٔ جملات بالا به فارسی، این چنین است: منظور از یک مجموعهٔ M یک جمع‌آوری به یک کُل است از اشیاء مشخص و متمایز m در محیط پیرامون یا در فکر ما (که به هر یک از این اشیاء یک عضو مجموعه می‌گوییم).

تعریف بالا، بدون شک شهودی‌ترین تعریف برای مجموعه است. یک مشکل قابل ملاحظه در نگاه سخت‌گیرانهٔ اول به این تعریف، این است که در تعریف مجموعه، از عبارت‌های **گردایه، شیء، دور هم جمع آمدن** و ... استفاده شده است که آن‌ها، خودْ ساده‌تر از واژهٔ مجموعه نیستند و احتمالاً نیاز به تعریف داشته باشند. اما مشکل جدی‌تری نیز وجود دارد.

تعریف کانتور از مجموعه، در واقع پیشنهاد اصل موضوعهٔ زیر برای نظریهٔ مجموعه‌هاست:

> هرگاه $p(x)$ یک جملهٔ مرتبهٔ اول باشد که دربارهٔ متغیر x نوشته شده است، آنگاه مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً شامل عناصری است که ویژگی p را دارند.

پس اگر $p(x)$ یک «ویژگی» یا یک «فرمول قابل نوشتن در الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها» باشد آنگاه بنا به اصل‌موضوعهٔ کانتور، $\{x \mid p(x)\}$، یک مجموعه است که باید خوانده شود: «مجموعهٔ عناصری که ویژگی p را دارا هستند». از این رو اصل موضوعهٔ مورد نظر کانتور را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\exists y \forall x \quad \big(x \in y \leftrightarrow p(x)\big).$$

یعنی در نگاه معناشناسانه، برای هر ویژگی مانند p، در جهانی که در ذهنمان تصور کرده‌ایم همیشه باید مجموعه‌ای وجود داشته باشد که فقط متشکل از عناصری است که دارای ویژگی p هستند.

گفتیم ویژگی $p(x)$ یک جملهٔ مرتبهٔ اول است. فرض کنید $p(x)$ ویژگیِ $x \notin x$ باشد (البته داریم ضمناً بیان می‌کنیم که نماد $\in$ در الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد؛ و خواهیم دید که این نماد، تنها نماد در این الفباست). اگر اصل‌موضوعهٔ مورد نظر کانتور در جهان ما برقرار باشد، عنصرِ $A = \{x \mid x \notin x\}$ جزو مجموعه‌های جهان مورد نظر ماست.

از طرفی در جهانی که ما برای مجموعه‌ها تصور کرده‌ایم، بنا به قوانین منطق گزاره‌ها، هر گزاره‌ای یا خودش و یا نقیضش درست است. در واقع این یک تاتولوژی است که باید در همهٔ جهان‌ها برقرار باشد. حال گزارهٔ $A \in A$ را در نظر بگیرید: اگر $A \in A$ درست باشد، یعنی اگر A عضوی از A باشد، آنگاه $A \in \{x \mid x \notin x\}$؛ یعنی A یکی از مجموعه‌هایی است که عضو خود نیستند! پس $A \notin A$. از آنجا که جملهٔ $A \in A$ نقیض خودش را نتیجه می‌دهد نمی‌تواند در جهان ما درست باشد.[۳] پس احتمالاً نقیضش درست است؛ یعنی $A \notin A$. اما $A \notin A$ یعنی A جزو مجموعه‌هایی که عضو خود نیستند، نیست؛ یعنی $A \in A$. پس گزارهٔ $A \in A$ هم نقیض خودش را نتیجه می‌دهد. از این رو تاتولوژی $(A \in A) \vee (\neg(A \in A))$ در جهان ما برقرار نیست!

آنچه در بالا بحث شد «پارادوکس راسل» نام دارد.[۴] پارادوکس راسل، بیان‌گر این است که استفاده از «تعریف ساده‌انگارانهٔ» کانتور [۵] برای اصل‌بندی مجموعه‌ها، منجر به ایجاد تناقض در دنیای ذهنی ما برای مجموعه‌ها می‌شود. طبیعتاً یک دنیای ذهنی که در آن تناقض وجود داشته باشد، دنیای ذهنی مناسبی برای مطالعهٔ ریاضی نیست.

---

[۳] گزارهٔ $((p \to \neg p) \to (\neg p))$ یک تاتولوژی است.

[۴] میان واژه‌های پارادوکس و تناقض، تفاوتی هست: پارادوکس بیشتر به چیزهایی گفته می‌شود که با عقل یا شهود یا انتظار ما مطابق نیستند، اما تناقض به چیزهایی گفته می‌شود که غلط بودن آن‌ها قابل اثبات است.

[5] naive set theory

در بخش‌های پیش رو، خواهیم دید که در سیستم اصول موضوعهٔ «زِرْمِلو و فرانکل» چه تدابیری برای فرار از چنین گزندی اندیشیده شده است. اما پیش از آن مفید می‌دانیم به عنوان یک تمرین ذهنی، چند پارادوکس از نوع پارادوکس‌های «ارجاع‌به‌خود» [6] و نشأت گرفته از پارادوکس تاریخی راسل را معرفی کنیم. خواندن ادامهٔ این بخش، برای درک باقی این فصل ضرورتی ندارد. در بخش‌های ۷.۹ و ۳.۱۳ قضایای عمیقی را خواهیم دید که به نحوی به این پارادوکس مشابهت دارند.

مثال ۱.۳ (پارادوکس بِری)**.** در مطالعهٔ منطقی مجموعهٔ اعداد طبیعی در یک الفبای مرتبهٔ اول، امکان نوشتن جملهٔ زیر با الفبای آن زبان وجود دارد. [7]

کوچکترین عدد طبیعی که نتوان آن را با کمتر از ۵۰ کلمه وصف کرد، وجود دارد.

اگر جملهٔ مورد نظر درست باشد، کوچکترین عدد غیرقابل وصف با کمتر از ۵۰ کلمهٔ وجود دارد. اما این خودْ وصفی با کمتر از پنجاه کلمه برای این آن عدد است، یعنی عدد مورد نظر غیرقابل وصف نیست! بنابراین، از درست بودن این جمله به تناقض می‌رسیم. اما اگر جملهٔ مورد نظر، غلط باشد، یعنی کوچکترین عدد غیر قابل وصف با کمتر از پنجاه کلمه وجود ندارد. بنابراین همهٔ اعداد قابل وصف با کمتر از پنجاه کلمه هستند. اما این غلط است زیرا تعداد چیزهایی که می‌توان با پنجاه کلمه وصف کرد متناهی است. برای مشاهدهٔ ربط این مثال با قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل، [۸] را مطالعه کنید.

مثال ۲.۳ (پارادوکس دروغگو)**.** فرض کنید شخصی بگوید «من دروغگو هستم». آیا این شخص دروغگو است یا راستگو؟ اگر راستگو باشد، پس راست گفته است که دروغگو است، پس دروغگو است! اگر دروغگو باشد پس دروغ گفته است که دروغگوست، پس راستگوست!

مثال ۳.۳. تمساحی (البته یک تمساح که هم حرف می‌زند و هم به قول خود عمل می‌کند!) پسری را ربوده است و می‌خواهد یا او را بخورد، یا به پدرش پس بدهد. تمساح به پدرِ آن پسر چنین می‌گوید: «اگر درست بگوئی که من چه خواهم کرد، پسرت را پس می‌دهم». حال اگر پدر بگوید که من می‌گویم که پسرم را می‌خوری، تمساح باید چه کند؟ اگر تمساح بچه را بخورد، پس پدر درست گفته است، یعنی تمساح باید بچه را پس بدهد. اگر تمساح بچه را پس بدهد، پس به حرف خودش عمل نکرده است، چون پدر اشتباه گفته است!

تمرین ۱.۳ (پارادوکس سقراط)**.** بررسی کنید که جملهٔ «من می‌دانم که هیچ نمی‌دانم» یک جملهٔ تناقض‌آمیز است.

تمرین ۲.۳. آرایشگرِ یک شهر، فقط و فقط موهای کسانی را می‌تراشد که آن‌ها خودْ موهای خود را نمی‌تراشند. آیا آرایشگر موهای خود را می‌تراشد؟

تمرین ۳.۳ (پارادوکس دادگاه)**.** یک استاد وکالت، [8] به دانشجوئی درس وکالت می‌دهد. آن‌ها با هم قرارداد می‌کنند که اگر دانشجوی نامبرده، از اولین جلسهٔ دادگاه خود پیروز بیرون بیاید، موظف است که هزینهٔ تدریس را به استاد بپردازد. [9] دانشجوی مورد نظر پس از اتمام دوره، از کار در دادگاه منصرف می‌شود و وارد هیچ دادگاهی نمی‌شود. استاد از دانشجو به دادگاه شکایت می‌کند و مدعی است که دانشجو باید پول او را بدهد ولی دانشجو از خود دفاع می‌کند که نباید پول به استاد بدهد. آیا دادگاه باید به نفع دانشجو رأی بدهد یا استاد؟ دقت کنید که وقتی استاد از دانشجو شکایت کرده است، در واقع اولین جلسهٔ دادگاه برای دانشجو رقم خورده است. پیروزی دانشجو در این جلسه به چه معنی است؟

---

[6] self-reference

[7] Berry paradox

[8] صورت این پارادوکس را کمی تغییر داده‌ام.

[9] Paradox of the Court, counterdilemma of Euathlus

۲.۳ اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها

تلاش برای تعریف مجموعه به روش کانتور منجر به ایجاد پارادوکس‌هایی مانند پارادوکس راسل می‌شود. از این رو، در ریاضیات صورت‌گرایانه، به جای تعریف کردن مجموعه، با احتیاط خاصی، قوانین یا به بیان بهتر، اصول‌موضوعه‌ای را تصویب می‌کنیم که انتظار داریم مجموعه از آن پیروی کند.

مجموعه در نظریهٔ برهان. الفبای مطالعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها فقط دارای یک نماد رابطه‌ای — $\in$ — است. با استفاده از همین نماد و با به‌کارگیری متغیرهایی مانند x، y، z و غیره، و نمادهایی مانند $\wedge$، $\vee$، $\neg$، $\rightarrow$، $\forall$ و $\exists$ یک **تعداد** جمله، به نام **اصول موضوعه** برای نظریهٔ مجموعه‌ها نوشته خواهد شد. با استفاده از قوانین استنتاج، این جملات با هم ترکیب و منجر به ایجاد جملات جدید می‌شوند. هر جمله‌ای که به این صورت ایجاد شود، یک «**قضیه**» نام خواهد گرفت. در این رویکرد، به هر متغیر مانند x، y و غیره، یک مجموعه گفته می‌شود و وقتی با استفاده از اصول موضوعه و قوانین استنتاج، ثابت شود که یک عنصر x با خصوصیتی وجود دارد، می‌گوییم **مجموعه‌ای** با آن خصوصیت وجود دارد.

مجموعه در نظریهٔ مدل‌ها. جهان‌های ذهنی نظریهٔ مجموعه‌ها، جهان‌هایی مانند $\mathbf{V}$ هستند که عناصر داخل آن‌ها مجموعه نام دارد و میان این عناصر یک رابطهٔ دوموضعیِ $\in$ حاکم است که به آن رابطهٔ عضویت گفته می‌شود؛ چنین جهانی را می‌توان به صورت $(\mathbf{V}, \in)$ نوشت. هر متغیری مانند x، y و z که دربارهٔ آن صحبتی شود، یا روی آن سوری زده شود، به عنصری در جهانِ $\mathbf{V}$ اشاره دارد. این که در یک جهانِ ذهنی، مجموعه و رابطهٔ $\in$ چگونه تصور شده است، برایمان اهمیتی ندارد. در رویکرد نظریهٔ برهان گفتیم که تعریف مجموعه بدین صورت است: *یک متغیر را یک مجموعه می‌نامیم هرگاه وجود (یا مجموعه بودنِ) آن با استفاده از اصول موضوعهٔ ما اثبات شود.* در این جا می‌گوییم یک شی، مجموعه است *هرگاه مسلم شود که چنین شیئی در تمام جهان‌هایی که از اصول موضوعهٔ ما پیروی می‌کنند، قرار دارد.* در این رویکرد، هر قضیه‌ای در نظریهٔ مجموعه‌ها، یک جملهٔ مرتبهٔ اول است که، به طور همزمان، در تمامی جهان‌هایی که از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها پیروی می‌کنند، درست است.

یکسانی دو رویکرد. بنا به قضیهٔ تمامیت گودل (که خودْ قضیه‌ای قابل اثبات در رویکرد اول است) دو رویکرد فوق برای مجموعه‌ها یکسان هستند. ما در ادامه میان این دو رویکرد، تفاوت قائل نخواهیم شد.

دانسته‌های ما از فصل‌های پیشین، به ما خواهند گفت که در قضایا باید از فلش دوخطهٔ $\Rightarrow$ استفاده کنیم، حال آن که در جملاتی که در نظریهٔ مجموعه‌ها نوشته می‌شوند، فلش‌ها باید یک خطی مانند $\rightarrow$ باشند.

سیستم‌های مختلفی از اصول موضوعه برای مجموعه‌ها پیشنهاد شده است که از این میان، سیستمِ زِداف‌سی، **ZFC**، (اصول زِرمِلو و فرانکل به همراه اصل انتخاب) کارایی کافی دارد و در این درس ما نیز به معرفیِ این اصول خواهیم پرداخت.[۱۰] بنا بر آنچه گفته شد، این اصول تنها با استفاده از علامتِ $\in$ در الفبای ما و سایر ادوات منطقیِ مرتبهٔ اول (یعنی $\exists, \forall, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$) نوشته خواهند شد.

فعلاً اصول‌موضوعه را فهرست‌وار و با توضیحی مختصر آورده‌ایم، اما در ادامهٔ درس به طور مفصل به هر یک خواهیم پرداخت. ترتیب ارائهٔ ما از آسان به سخت خواهد بود. منظورمان از اصول‌موضوعهٔ آسان، آن‌هائی است که در دبیرستان هم احتمالاً دیده‌اید و بسیار استفاده کرده‌اید. اما اصول‌موضوعهٔ سخت، آن‌هائی هستند که تا سال‌ها پس از گذراندن این درس هم، قرار است در درکشان ابهام داشته باشیم. هر اصل را ابتدا به صورت غیر رسمی توضیح داده‌ایم و سپس به طور دقیق در زبان مرتبهٔ اول نوشته‌ایم.

[10] Zermelo, Fraenkel+ Choice

۱. **اصل وجود:**

اصل وجود بیان‌گر این است که در هر جهان مجموعه‌ها، حداقل یک مجموعه وجود دارد که هیچ عنصری ندارد. پس یک جهانِ همهٔ مجموعه‌ها، تهی نیست، حداقل یک مجموعه به نام مجموعهٔ تهی در آن است! در زبان مرتبهٔ اول، اصل وجود به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\exists x \quad \forall y \quad \neg(y \in x).$$

برای ساده‌تر شدن جملاتمان، از این بعد از علامتِ $x = \varnothing$ به جای فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\forall y \quad \neg(y \in x)$$

پس اصل اول می‌گوید که

$$\exists x \quad x = \varnothing.$$

بنا به اصل وجود، حداقل یک مجموعه وجود دارد.

۲. **اصل گسترش:**

اصل گسترش بیان‌گر این است که هر مجموعه، از روی مجموعه‌های متعلق به آن مشخص می‌شود، یعنی دو مجموعه که اعضای یکسانی داشته باشند (از مجموعه‌های یکسانی تشکیل شده باشند) در حقیقت یک مجموعه یکسان هستند:

$$\forall a, b \quad \Big(\forall x \quad (x \in a \leftrightarrow x \in b) \to a = b\Big).$$

برای کوتاه‌تر شدن جملات، به جای جملهٔ

$$\forall x (x \in a \to x \in b)$$

می‌نویسیم: $a \subseteq b$.

دقت کنید که $\subseteq$ از علائم زبان نظریهٔ مجموعه‌ها نیست و از آن فقط برای کوتاه نوشتن جمله‌ها استفاده کرده‌ایم. پس اصل گسترش را می‌توانیم به صورتِ خلاصه‌ترِ زیر بنویسیم:

$$\forall a, b \quad (a \subseteq b \wedge b \subseteq a \to a = b).$$

توجه ۴.۳. در یک جهان نظریهٔ مجموعه‌ها (که از اصول ما پیروی می‌کند) بنا به اصل گسترش، هرگاه بدانیم که a و b مجموعه هستند، برای این که نشان دهیم که $a = b$ کافی است نشان دهیم که برای هر عنصر دلخواهِ $x_\circ \in a$ داریم $x_\circ \in b$ و برای هر عنصرِ دلخواهِ $x_\circ \in b$ داریم $x_\circ \in a$. اگر به نحوی بدانیم که a, b در همهٔ جهان‌های نظریهٔ مجموعه‌ها، مجموعه هستند، آنگاه با این روش می‌توانیم ثابت کنیم که در همهٔ جهان‌ها $a = b$.

با همین دو اصل موضوعهٔ ساده، می‌توان یک قضیه ثابت کرد:

قضیه ۵.۳. مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست؛ به بیان ریاضی:

$$\forall x \quad \varnothing \subseteq x.$$

دقت کنید که همان طور که در فصل منطق مرتبهٔ اول گفتیم، هر قضیه در واقع ادعای درست بودن یک گزاره در همهٔ جهان‌هاست. پس قضیهٔ مورد نظر ما ادعا می‌کند که در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، این گونه است که $\forall x \quad \varnothing \subseteq x$. یعنی ادعا می‌کند که اگر $\mathbf{V}$ یک جهان نظریهٔ مجموعه‌ها باشد که مجموعهٔ تهیِ خود را داراست، مجموعهٔ تهی این جهان زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های دیگر این جهان است.

اثبات. باید نشان دهیم که (در هر جهانی از مجموعه‌ها)

$$\forall y \forall x \quad \Big(y \in \varnothing \to y \in x\Big).$$

برای این منظور فرض می‌کنیم که در یک جهان دلخواه از مجموعه‌ها هستیم و $x_\circ$ یک مجموعهٔ دلخواه در این جهان است. باید نشان دهیم که

$$\forall y \quad \Big(y \in \varnothing \to y \in x_\circ\Big).$$

برای این منظور نیز، مجموعهٔ دلخواهِ $y_\circ$ را در جهان مجموعه‌هایمان در نظر می‌گیریم. باید نشان دهیم که عبارت زیر درست است:

$$y_\circ \in \varnothing \to y_\circ \in x_\circ.$$

در منطق گزاره‌ها، دیدیم که گزارهٔ $(p \to q)$ هرگاه p دارای ارزش F باشد، به انتفاء مقدم، درست است. پس گزارهٔ مورد نظر ما نیز در این جهانِ نظریهٔ مجموعه‌ها درست است؛ زیرا گزارهٔ $y_\circ \in \varnothing$ در جهان ما غلط است. علت این امر این است که در جهان ما، این اصل موضوعه که مجموعهٔ تهی هیچ عضوی ندارد برقرار است. □

یک قضیهٔ سادهٔ دیگر هم می‌توان با استفاده از اصولی که تا اینجا گفته‌ایم ثابت کرد:

قضیه ۶.۳. فرض کنید a، b و c سه مجموعه باشند. اگر $a \subseteq b$ و $b \subseteq c$ آنگاه $a \subseteq c$.

پس قضیهٔ بالا بیان‌گر این است که جملهٔ زیر در همهٔ جهان‌های نظریهٔ مجموعه‌ها درست است:

$$\forall a, b, c \quad (a \subseteq b \wedge b \subseteq c \to a \subseteq c).$$

اثبات. دقت کنید که قضیهٔ بالا می‌گوید که در هر جهانی از مجموعه‌ها، اگر a, b, c مجموعه باشند و فرض‌های قضیه برقرار باشند، آنگاه حکم قضیه برقرار است. پس بیایید نخست وارد یک جهان ممکن از نظریه مجموعه‌ها شویم و در آن فرض و حکم قضیه را بررسی می‌کنیم. فرض‌های قضیه به صورت زیر هستند:

(آ) a، b، و c مجموعه‌اند.

(ب) $a \subseteq b$

(ج) $b \subseteq c$

حکم قضیه این است که (در صورت برقراری شرط‌ها) $a \subseteq c$. برای نشان دادن این که $a \subseteq c$ باید عبارت زیر را ثابت کنیم:

$$\forall x \quad \Big(x \in a \to x \in c\Big).$$

برای اثبات عبارت بالا، با فرض این که $x_\circ$ یک عنصر دلخواه است، باید نشان دهیم که گزارهٔ زیر درست است.

$$x_\circ \in a \to x_\circ \in c.$$

از فرض اول، نتیجه می‌شود که گزارهٔ زیر درست است:

$$x_\circ \in a \to x_\circ \in b.$$

در یک منطق گزاره‌ها اگر ارزش گزاره‌های $(p \to q)$ و $(q \to r)$ یک باشد، آنگاه ارزش گزارهٔ $(p \to r)$ نیز یک است. از فرض دوم نتیجه می‌شود که گزارهٔ زیر درست است:

$$x_\circ \in b \to x_\circ \in c.$$

حال بنا به تمرینِ ۱۲.۱ نتیجه می‌گیریم که گزارهٔ $x_\circ \in a \to x_\circ \in c$ درست است. از آنچه گفته شد، نتیجه می‌شود که در جهان مورد نظر ما از مجموعه‌ها گزارهٔ $a \subseteq c$ درست است. از آنجا که استدلال ما به جهان خاصی بستگی نداشت، این گزاره در تمام جهان‌های مجموعه‌ها درست است. □

اگر می‌خواستیم از نماد استلزام استفاده کنیم، قضیهٔ فوق را به صورت زیر می‌نوشتیم:

$$a \subseteq b \wedge b \subseteq c \Rightarrow a \subseteq c.$$

یعنی در هر جهانی که شرط سمت چپ برقرار باشد، شرط سمت راست هم برقرار است.

۳. **اصل جفت‌سازی:**

بنا به اصل جفت‌سازی، اگر x و y دو مجموعه باشند، آن‌گاه $\{x, y\}$ یک مجموعه است. به بیان دیگر، اگر x و y دو مجموعه باشند، مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن، دقیقاً x و y هستند:

$$\forall x, y \quad \exists a \quad \Big(\forall z \quad z \in a \leftrightarrow (z = x \vee z = y)\Big).$$

دقت کنید که اصل جفت‌سازی، به اجتماعِ دو مجموعهٔ x و y ربطی ندارد!

بیایید بررسی کنیم که با استفاده از این سه اصل اول، چه مجموعه‌هائی می‌توانیم بسازیم. بنا به اصلِ وجود، $\varnothing$ یک مجموعه است. بنا به اصل جفت‌سازی $\{\varnothing, \varnothing\}$ یک مجموعه است. حال بنا به اصل گسترش، $\{\varnothing\} = \{\varnothing, \varnothing\}$، زیرا این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند. پس تا اینجا، می‌دانیم که $\varnothing, \{\varnothing\}$ دو مجموعه هستند. دوباره بنا به اصل جفت‌سازی، $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به اصل گسترش، این مجموعه، با هر دو مجموعهٔ $\varnothing, \{\varnothing\}$ نابرابر است.

تمرین ۴.۳. چه مجموعه‌های دیگری به طریق بالا می‌توانید بسازید؟ آیا می‌توانید با روش بالا یک مجموعه بسازید که بیش از دو عضو داشته باشد؟

۴. **اصل تصریح:**

اصل تصریح بیان می‌دارد که اگر a یک مجموعه باشد، در این صورت برای هر جملهٔ $p(x)$ که در منطق مرتبهٔ اول و در زبان مجموعه‌ها بیان شده است، عبارت $\{x \in a \mid p(x)\}$ نیز یک مجموعه است. به بیان دیگر اگر بدانیم (یا ثابت کرده باشیم که) a یک مجموعه است، عناصری از a که ویژگیِ خاصِ p دارند تشکیل یک مجموعه می‌دهند:

$$\forall a \quad \exists b \quad \forall x \Big(x \in b \leftrightarrow \big(x \in a \wedge p(x) \big) \Big).$$

برای هر ویژگیِ $p(x)$ یک اصل تصریح باید در نظریهٔ مجموعه‌ها قرار داده شود؛ از این رو اصل تصریح را بهتر است «شمای اصل تصریح» بنامیم. در واقع اگر A یک مجموعه باشد، عبارت زیر بنا به اصل تصریح یک مجموعه است.

$$B = \{x \in A \mid p(x)\}.$$

توجه ۷.۳. توجه کنید که در تعریف سهل‌انگارانهٔ کانتور از مجموعه، هر عبارتی به صورت $\{x \mid p(x)\}$ را یک مجموعه گرفته بودیم و دیدیم که چنین تصوری منجر به تناقض می‌شود. در اصل تصریح، یک شرط اضافه کرده‌ایم: **اگر بدانیم که** a **یک مجموعه است،** آنگاه $\{x \in a \mid p(x)\}$ نیز یک مجموعه است. پس $\{x \mid p(x)\}$ لزوماً یک مجموعه نیست؛ اما وقتی با یک مجموعهٔ a اشتراک گرفته شود حاصل، یک مجموعه است.

تعریف ۸.۳. اگر $p(x)$ یک ویژگی مرتبهٔ اول باشد، هر عبارتِ به صورت $\{x \mid p(x)\}$ را یک **کلاس** می‌نامیم (ممکن است که یک کلاس، مجموعه نباشد، یعنی ممکن است با فرض مجموعه بودن آن به تناقض برسیم). برای مثال، $\mathbf{V} = \{x \mid x = x\}$ کلاس تمام مجموعه‌هاست. از این به بعد هر جا از نمادِ $\mathbf{V}$ استفاده کنیم، منظورمان همین کلاس است.

همچنین $\{x \mid x \not\in x\}$ نیز یک کلاس از مجموعه‌هاست. پس با کمی دقت، درمی‌یابیم که اصل تصریح، عملاً بیان‌گر این است که اشتراکِ یک کلاس با یک مجموعه، یک مجموعه است.

مثال ۹.۳. اگر x یک مجموعه و $y \subseteq x$ یک کلاس باشد، آنگاه y نیز یک مجموعه است؛ زیرا می‌توان نوشت:

$$y = \{t \in x \mid t \in y\}.$$

از آنجا که y یک کلاس است، عبارتِ $t \in y$ در بالا، در واقع کوتاه‌نوشتِ جمله‌ای به صورتِ $p(t)$ است که عضویت در آن کلاس را بیان می‌کند.

تعریف ۱۰.۳. اگر x و y دو مجموعه باشند، آنگاه، بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{t \in x \mid t \in y\},$$

مجموعهٔ بالا را با $x \cap y$ نمایش می‌دهیم.

پس در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، اگر دو مجموعه را در نظر بگیریم، یک مجموعه در جهان هست که فقط شامل عناصر مشترک آن‌هاست. پس عبارت زیر، یک قضیه (یعنی یک جملهٔ درست در تمام جهان‌های ذهنی ما برای مجموعه‌ها) است:

$$\forall x, y \exists z \forall t \quad (t \in z \leftrightarrow (t \in x \wedge t \in y)).$$

همان طور که مشاهده می‌کنید، رفته‌رفته نمادهایی مانندِ $\varnothing$، $\cap$ و ... را وارد دستور زبانمان می‌کنیم که اطمینان داریم که این نمادها فقط کوتاه‌نوشت هستند و می‌شود به جای به کار بردن آن‌ها، صرفاً جملات را با استفاده از نمادِ $\in$ نوشت. [11]

مثال ۱۱.۳. نشان دهید که در هر جهان از نظریهٔ مجموعه‌ها، اگر x و y مجموعه باشند، داریم

- $x \cap y \subseteq x$،
- $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$،
- $x \cap y = y \cap x$.

اثبات. مورد اول را اثبات می‌کنیم و مواردِ دیگر را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. فرض کنید که در یک جهان از مجموعه‌ها هستیم. برای اثبات مورد اول، بنا به تعریفِ $\subseteq$ باید نشان دهیم که

$$\forall t \quad (t \in x \cap y \to t \in x).$$

بنا به تعریفِ ۲۳.۲ برای اثبات گفتهٔ بالا باید نشان دهیم که یک عنصر دلخواهِ $t_\circ$ که $x \cap y$ باشد در x است. پس عنصر دلخواهِ $t_\circ \in x \cap y$ را در نظر بگیرید. بنا به تعریفِ $x \cap y$ داریم

$$t_\circ \in x \wedge t_\circ \in y.$$

می‌دانیم که

$$(p \wedge q \to p)$$

یک تاتولوژی است، بنابراین از $t_\circ \in x \wedge t_\circ \in y$ نتیجه می‌گیریم که $t_\circ \in x$. $\square$

تمرین ۵.۳. برای اثبات مورد دوم، به کدام بخشِ قضیهٔ ۲۴.۱ نیاز داریم؟

تعریف ۱۲.۳. فرض کنید که x, y دو مجموعه باشند. بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{t \in x \mid t \notin y\}.$$

مجموعهٔ بالا را با $x - y$ نمایش می‌دهیم.

برای رسیدن زودتر به باقی اصول موضوعه می‌توانید از تمرین‌های پیش‌رو صرف نظر کنید.

تمرین ۶.۳. فرض کنید a، b و c مجموعه باشند، نشان دهید که

- $a \cap (b - c) = (a \cap b) - (a \cap c)$.
- $a - \varnothing = a$.

تمرین ۷.۳. آیا از $x \cap y = x \cap z$ نتیجه می‌شود که $y = z$؟

[11] به این امر در منطق، تعریف‌پذیری نماد گفته می‌شود. در واقع نمادهایی که رفته رفته آن‌ها را به نظریهٔ مجموعه‌هامان اضافه می‌کنیم، همه تعریف‌پذیر هستند.

تمرین ۸.۳. آیا $a-(b-c)=(a-b)-c$؟

تمرین ۹.۳. فرض کنید a، b و c مجموعه باشند و $a,b\subseteq c$. نشان دهید که

$$a\cap(c-b)=a-b.$$

۵. **اصل اجتماع:**

اصل اجتماع می‌گوید که اگر a یک مجموعه باشد (که از مجموعه‌های دیگری تشکیل شده است) آن‌گاه اجتماع مجموعه‌های موجود در a نیز یک مجموعه تشکیل می‌دهد؛ به بیان دیگر، مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً برابر با اجتماع مجموعه‌های موجود در a است. بیان دقیق اصل اجتماع به صورت زیر است:

$$\forall a \quad \exists u \quad \forall x \quad \Big(x\in u\leftrightarrow \exists b \quad (b\in a\wedge x\in b)\Big).$$

اگر u مجموعهٔ بالا باشد، می‌نویسیم:

$$u=\bigcup a,$$

پس در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، به ازای هر مجموعهٔ a یک مجموعهٔ $\bigcup a$ هم وجود دارد.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنید که x و y دو مجموعه باشند. آنگاه یک مجموعهٔ c وجود دارد به طوری که:

$$\forall x \quad \big(x\in c\leftrightarrow(x\in a\vee x\in b)\big).$$

در واقع، قضیهٔ فوق بیان‌گر این است که عبارت زیر یک جملهٔ همواره درست در همهٔ جهان‌های نظریهٔ مجموعه‌هاست:

$$\forall a\,\forall b\,\exists c\,\forall x \quad \big(x\in c\leftrightarrow(x\in a\vee x\in b)\big).$$

اثبات. بنا به اصل جفت‌سازی، $\{x,y\}$ یک مجموعه است. بنا به اصل اجتماع، یک مجموعهٔ c وجود دارد، به طوری که

$$\forall t \quad (t\in c\leftrightarrow \exists t'\in\{x,y\} \quad t\in t').$$

پس برای هر t داریم

$$t\in c\leftrightarrow t\in x\vee t\in y.$$

□

تعریف ۱۴.۳. مجموعهٔ c در قضیهٔ بالا را با $x\cup y$ نشان می‌دهیم. پس برای هر t داریم

$$t\in x\cup y\leftrightarrow t\in x\vee t\in y.$$

تمرین ۱۰.۳. اگر a، b و c سه مجموعه باشند، نشان دهید که $d=\{a,b,c\}$ مجموعه است. هم‌چنین تحقیق کنید که $\bigcup d=a\cup(b\cup c)$.

تمرین ۱۱.۳. با استفاده از قضیهٔ ۲۴.۱ نشان دهید که

- $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.
- $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$.

مثال ۱۵.۳. اصل اجتماع و اصل جفت‌سازی ارتباطی به هم ندارند: فرض کنید $x = \{۱, ۲, ۳\}$ و $y = \{۴, ۵, ۶\}$ مجموعه‌هایی در جهان ما باشند. در این صورت بنا به اصل جفت‌سازی، $\{x, y\} = \{\{۱, ۲, ۳\}, \{۴, ۵, ۶\}\}$ یک مجموعه است؛ و نیز بنا به اصل اجتماع (و البته جفت‌سازی)، $x \cup y = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ یک مجموعه است.

تمرین ۱۲.۳. آیا از $a \cup b = a \cup c$ نتیجه می‌شود که $b = c$؟

اگر a و b مجموعه باشند، آنگاه بنا به اصل تصریح هر دوی $a - b$ و $b - a$ مجموعه هستند. بنا به اصل اجتماع، اجتماع این دو نیز مجموعه است. تعریف می‌کنیم:

$$a \oplus b = (a - b) \cup (b - a).$$

تمرین ۱۳.۳.

- نشان دهید که $a \oplus b = (a \cup b) - (a \cap b)$.
- نشان دهید که اگر $a \oplus b = a \oplus c$ آنگاه $b = c$.

قبلاً دیدیم که بنا به اصل وجود، در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها یک مجموعه به نام $\varnothing$ وجود دارد. یک نام دیگر برای این مجموعه، علامت ۰ است. همچنین دیدیم که $\{\varnothing\}$ نیز بنا به اصل جفت‌سازی یک مجموعه است. این مجموعه را با ۱ نشان می‌دهیم. پس $\{۰\} = ۱$. همچنین تعریف می‌کنیم:

$$۲ = ۱ \cup \{۱\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

پس $\{۰, ۱\} = ۲$. از طرفی، بنا به اصل جفت‌سازی، $\{۲\}$ یک مجموعه است. بنا به اصل اجتماع، $۲ \cup \{۲\}$ یعنی $\{۰, ۱, ۲\}$، یک مجموعه است که آن را با ۳ نشان می‌دهیم. مشابهاً مجموعه‌ای به نام ۴ داریم که اعضای آن به صورت زیر است:

$$۴ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \{۰, ۱, ۲, ۳\}.$$

به همین ترتیب اگر مجموعهٔ n را شناخته باشیم، مجموعهٔ $n + ۱$ را به صورت

$$n + ۱ = n \cup \{n\} = \{۰, \ldots, n\}$$

تعریف می‌کنیم. اصطلاحاً می‌گوییم که هر n که به روش بالا به دست بیاید، یک «عدد طبیعی» است. پس اگر $\mathbf{V}$ یک جهان دلخواه از نظریهٔ مجموعه‌ها باشد، در آن جهان، مجموعه‌های $۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$ قرار دارند. اما یک سوال این است که آیا همهٔ این مجموعه‌ها با هم تشکیل یک مجموعه می‌دهند؛ یعنی آیا در $\mathbf{V}$ عبارتِ $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ هم یک مجموعه است؟ بعداً در این باره بیشتر صحبت خواهیم کرد.

۶. **اصل وجودِ مجموعهٔ توان:**

اصل توان، یا اصل وجود مجموعهٔ توانی، می‌گوید که اگر a یک مجموعه باشد، کلاسِ تمام زیر مجموعه‌های آن نیز یک مجموعه است. به بیان دیگر، اگر a یک مجموعه باشد، آنگاه مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن، دقیقاً زیرمجموعه‌های a هستند:

$$\forall a \quad \exists b \quad \left(\forall x \quad x \in b \leftrightarrow \underbrace{\Big(\forall z \quad (z \in x \to z \in a)\Big)}_{x \subseteq a}\right).$$

توجه ۱۶.۳. برای یک مجموعهٔ a، کلاسِ تمام زیر مجموعه‌هایش را (که بنا به اصل بالا یک مجموعه است) با $\mathbf{P}(a)$ نشان می‌دهیم؛ پس به زبان ساده:

$$\mathbf{P}(a) = \{b \mid b \subseteq A\}.$$

اصول موضوع باقی‌مانده همان‌هایی هستند که توضیح و درک آن‌ها در این مقطع کمی دشوار است. در این بخش فقط به بیان و توضیح مختصر آن‌ها بسنده می‌کنیم، اما در فصل‌های بعدی کتاب به طور جدی آن‌ها را مورد کاوش قرار خواهیم داد.

۷. **اصل جانشانی** [۱۲]:

بیان این اصل موضوعه با سطح منطقی که تا اینجا در درس مبانی ریاضی دیده‌ایم کمی دشوار است. پس از آن که همهٔ مفاهیم مقدماتی مورد نیاز را بسط دهیم، در زیربخش کوتاهِ ۱.۴.۸ خواهیم توانست اصل جانشانی را به دقیق‌ترین صورت توضیح دهیم؛ با این حال در اینجا نیز از تلاش برای تفهیم این اصل فروگذار نمی‌کنیم. واضح است که در توضیح زیر، مفاهیمی استفاده شده است که در بخش‌های بعدی توضیح داده‌ایم، ولی مطمئنیم خواننده با این مفاهیم آشنایی مختصر دبیرستانی دارد، و همان فعلاً برای ما کافی است.

فرض کنید که a یک مجموعه باشد. همچنین فرض کنید که $\phi(x,y)$ یک فرمول مرتبهٔ اول باشد که در الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها نوشته شده است و این گونه است که برای هر $x_\circ$ در جهان مجموعه‌هامان، تنها و تنها یک عنصرِ $y_\circ$ در جهان مجموعه‌ها موجود باشد، به طوری که فرمولِ $\phi(x_\circ, y_\circ)$ درست باشد. آنگاه y هایی که در تناظر با x های موجود در مجموعهٔ a هستند، تشکیل یک مجموعه می‌دهند.

به بیان بهتر، فرض کنید $\mathbf{V}$ کلاس همهٔ مجموعه‌ها، مطابق تعریف ۸.۳ و $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ یک **تابع تعریف‌پذیر** باشد؛ یعنی $f \subseteq \mathbf{V}^۲$ یک کلاس باشد که ویژگی تابع بودن را داراست. به بیان دقیق‌تر یک فرمولِ $\varphi(x,y)$ وجود دارد به طوری که عبارت زیر درست است:

$$y = f(x) \leftrightarrow \varphi(x,y).$$

حال اگر a یک مجموعه باشد، در این صورت $\{f(b) \mid b \in a\}$ یک مجموعه است.

بیان فنی‌تر این اصل برای خوانندهٔ منطق‌دان این است که تصویر یک مجموعه، تحت یک تابع تعریف‌پذیر یک مجموعه است.

اصل جانشانی را می‌شود به صورت دیگری هم بیان کرد: اگر I یک مجموعه باشد، آنگاه هر دنبالهٔ به صورت $(a_i)_{i\in I}$ نیز تشکیل مجموعه می‌دهد (یک دنبالهٔ $(a_i)_{i\in I}$ تصویر یک تابعِ $f : I \to \mathbf{V}$ است).

[12] replacement

در بخش «خانواده‌های مجموعه‌ها» در همین کتاب، دوباره به صورتی از این اصل پرداخته‌ایم. در آنجا خواهیم دید که بنا به اصل جانشانی، خانواده‌هائی از مجموعه‌ها به صورت $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ وجود دارند.

تمرین ۱۴.۳. بیان دقیق مرتبهٔ اولِ اصل جانشانی را برای یک فرمولِ $\phi(x,y)$ بنویسید.

۸. **اصل انتظام:**

هیچ اصلی به اندازهٔ این اصل در شناساندن طبیعت مفهوم یک مجموعه مهم نیست. پیش از پرداختن به بیان این اصل، دقت کنید که اگر a یک مجموعه باشد، آنگاه

$$\{a\},\{\{a\}\},\{\{\{a\}\}\},\ldots,\{\ldots\{\{\{a\}\}\}\ldots\},\ldots$$

نیز مجموعه هستند، یعنی می‌توان به هر تعدادی آکولاد در دو طرف اضافه کرد؛ ولی به نحو شگفت‌انگیزی بنا به اصل انتظام، بر عکس این کار امکان‌پذیر نیست. یعنی عبارتی به صورت زیر (یعنی به صورتی که تعداد آکولادها نامتناهی باشد و بخواهیم به صورت تو در تو در مجموعه‌ها عقب برویم)، مجموعه **به حساب نمی‌آید:**

$$\Big\{\Big\{\{\ldots\}\Big\}\Big\}$$

صورت مرتبهٔ اول اصل انتظام که در زیر نوشته شده است، قرار است این خواسته را برآورده کند:

$$\forall x \quad \Big(x\neq\varnothing\rightarrow\exists z \quad z\in x\wedge z\cap x=\varnothing\Big).$$

فرمول بالا می‌گوید که هر مجموعه‌ای عضوی دارد که آن عضو با مجموعهٔ یادشده اشتراکی ندارد. بهترین راه برای درک اصل انتظام این است که رابطهٔ $\in$ را یک «ترتیب» تصور کنیم. پس هر مجموعه مانند x اگر ناتهی باشد، دارای یک عنصر مینیمُم است.

شاید بررسی نقیض اصل نیز به فهمیدن آن کمک کند. فرض کنید که یک مجموعهٔ x داشته باشیم که در اصل انتظام صدق نکند. پس برای هر مجموعهٔ $x_۱\in x$ داریم: $x_۱\cap x\neq\varnothing$. یک مجموعهٔ $x_۱\in x$ را با این ویژگی در نظر بگیرید و فرض کنید $x_۲\in x_۱\cap x$. باز از آنجا که x در اصل انتظام صدق نمی‌کند و $x_۲\in x$، یک مجموعهٔ $x_۳\in x_۲\cap x$ پیدا می‌شود. بدین‌طریق مجموعه‌های

$$x_۱\ni x_۲\ni x_۳\ldots$$

پیدا می‌شوند. در زیر این گفته را دقیق‌تر کرده‌ایم.

قضیه ۱۷.۳. اصل انتظام معادل این گفته است که در یک جهان متشکل از همهٔ مجموعه‌ها، هیچ دنباله‌ای نامتناهی نزولی به صورت زیر از مجموعه‌ها وجود ندارد. [۱۳]

$$a_۱\ni a_۲\ni a_۳\ni\ldots$$

به بیان دقیق‌تر اگر دنبالهٔ بالا از مجموعه‌ها را داشته باشیم، آنگاه $a_۱$، $a_۲$، و ...، تشکیل مجموعه نمی‌دهند.

[۱۳] به بیان دقیق‌تر، هیچ تابعی از اعداد طبیعی به جهان همهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد که بُردِ آن مجموعه‌های یادشده در این قضیه باشد.

اثبات. اگر $a=\{a_۱,a_۲,\dots\}$ یک مجموعه باشد که از مجموعه‌هایی تشکیل شده است که ویژگی یادشده در این قضیه را دارند، آنگاه اصل انتظام نقض می‌شود. زیرا اگر $a_n\in a$ آنگاه $a_{n+۱}\in a_n\cap a$. به بیان دیگر، هر عنصری که در a در نظر بگیریم با a اشتراک دارد.

از طرف دیگر، اگر اصل انتظام برقرار نباشد، همان طور که پیش از شروع این قضیه گفتیم دنباله‌ای به صورتی که در این قضیه گفته شده پیدا می‌شود.[۱۴] □

حکم قضیهٔ بالا کمی عجیب است. در دنیای مجموعه‌ها، دنباله‌هایی به صورت زیر وجود دارند:

$$a_۱\in a_۲\in a_۳\in\dots$$

اما دنباله‌هایی به صورت زیر وجود ندارند:

$$a_۱\ni a_۲\ni a_۳\dots$$

وقتی رابطهٔ $\in$ را با ترتیب اعداد طبیعی قیاس می‌کنیم، این خواسته ملموس‌تر می‌شود. در اعداد طبیعی دنباله‌های صعودی به شکل زیر وجود دارند:

$$n<n+۱<n+۲<\dots$$

اما اگر یک عدد طبیعیِ n را در نظر بگیریم، از آن به قبل، نمی‌توان یک دنبالهٔ نزولیِ **نامتناهی** نوشت:

$$n>n-۱>n-۲>\dots>۱.$$

همان‌گونه که پیش‌تر تأکید کردیم، این نکته از کلیدی‌ترین نکات در مفهوم مجموعه است. **در واقع صورت اصل انتظام بیان‌گر این است که هر مجموعه، خوش‌بنیاد است؛ یعنی با تعداد متناهی بار استفاده از روش‌های ساخت مجموعه، ایجاد می‌شود.** حیرت‌آور است که حتی در مجموعه‌هایی که «بسیار بزرگ» هستند، نمی‌توان تعدادی نامتناهی «عقبگرد» داشت.

قضیه ۱۸.۳. در همهٔ جهان‌های نظریهٔ مجموعه‌ها،

$$\forall x\quad x\notin x.$$

اثبات نادقیق. فرض کنید که $x_۰$ یک مجموعه در جهان مجموعه‌ها باشد. اگر $x_۰\in x_۰$ آنگاه می‌توان یک دنبالهٔ نزولی به صورت زیر از مجموعه‌ها نوشت:

$$x_۰\ni x_۰\ni\dots$$

ولی این کار بنا به قضیهٔ قبل ناممکن است. □

تمرین ۱۵.۳. نقیضِ اصل انتظام را بنویسید.

تمرین ۱۶.۳. سعی کنید که یک نامجموعه(!) بسازید که از اصل انتظام پیروی نکند!

[۱۴] در این اثبات از اصول موضوعهٔ دیگر هم استفاده شده است. اثبات دقیق‌تر را می‌توانید در بخشِ ۳.۴ مشاهده کنید.

۹. **اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی:**

این اصل قرار است به یکی از رازآلودترین مفاهیم در ذهن بشری، یعنی مفهوم نامتناهی بپردازد. این که آیا جهان هستی متناهی است یا نامتناهی، یکی از مهمترین سوالات بشری است که پاسخ آن، می‌تواند بسیاری از مشکلات فلسفی را حل کند. مثلاً اثبات وجود یک خالق برای یک جهان متناهی، بسیار ساده‌تر از اثبات وجود یک خالق برای جهانی نامحدود است؛ کافی است به نحوی بررسی شود که تک تکِ موجودات آن جهان، که تعداد آن‌ها متناهی است، توسط یک نفر خلق شده‌اند.

حتی در نظریهٔ مجموعه‌ها هم اثبات وجود نامتناهی برای ما ناممکن است، و این که مجموعه‌ای نامتناهی در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد، یک اصل‌موضوعه است که باید آن را بپذیریم. اما در درس‌های آینده خواهیم دید که به محض این که ریاضی‌دان وجود نامتناهی را می‌پذیرد، دنیای رنگارنگی از نامتناهی‌های متفاوت پیش چشم او خودنمائی می‌کند؛ و این تفاوت نامتناهی ریاضی‌دان با نامتناهی دیگران است!

بگذارید فعلاً اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی را بیان کنیم؛ سپس در بخش‌هائی از این درس، دوباره به طور جدی به این موضوع جذاب خواهیم پرداخت.
اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی بیان‌گر این است که در یک جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، حداقل یک مجموعهٔ نامتناهی وجود دارد.
در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها این اصل به شیوهٔ هوشمندانهٔ زیر نوشته می‌شود:

$$\exists x \quad \Big(\varnothing \in x \land \forall y \quad \big(y \in x \to y \cup \{y\} \in x\big)\Big).$$

به طور خاص، مجموعهٔ x که وجود آن در اصل بالا تضمین شده است شامل مجموعهٔ زیر (و نه لزوماً برابر با آن) است:

$$\Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}, \big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\big\}, \dots\Big\}.$$

۱۰. **اصل انتخاب:** در زیربخشِ ۲.۴.۸ خواهیم توانست اصل انتخاب را با در دست داشتن مقدمات مورد نیاز آن، توضیح دهیم. در عین حال، نمی‌خواهیم خواننده را آن همه در انتظار نگه داریم و خواهیم کوشید توضیحی قابل فهم از این اصل را در این جا نیز فراهم آوریم. عموماً حتی در اثبات‌های پیشرفتهٔ ریاضی، تشخیصِ این که در کجای اثبات از اصل انتخاب استفاده شده است دشوار است. اصل انتخاب بیان‌گر این است که اگر تعدادی مجموعهٔ ناتهی داشته باشیم که با هم تشکیل یک مجموعه داده‌اند، می‌توانیم از هر کدام از آن‌ها عضوی برداریم!

مجموعهٔ $a = \{a_1, a_2\}$ را در نظر بگیرید که از دو مجموعهٔ ناتهیِ a_1, a_2 تشکیل شده است. فرض کنید $x_1 \in a_1$ و $x_2 \in a_2$. مفهوم زوج مرتب را بعداً توضیح خواهیم داد، ولی با فرض این که خواننده می‌داند که زوج مرتبِ (a, b) به چه معناست، به سادگی می‌توان ثابت کرد که

$$c = \{(a_1, x_1), (a_2, x_2)\}$$

یک مجموعه است. یعنی مجموعه‌ای مانند c وجود دارد که به ما می‌گوید عنصرِ x_1 از a_1 و عنصرِ x_2 از a_2 انتخاب شده است. این جمله در همهٔ جهان‌ها درست است؛ یعنی در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، اگر

مجموعه‌ای دو مجموعه داشته باشد می‌توان به طور مشخص از هر کدام از این مجموعه‌ها یک عنصر انتخاب کرد. امکان انجام این کار برای یک مجموعهٔ دلخواه (که شاید متناهی نباشد) همان اصل انتخاب است.

بیان غیر رسمی اصل انتخاب این است که اگر a یک مجموعه باشد که خودْ از مجموعه‌هائی ناتهی تشکیل شده است، آنگاه تابعی، به نام یک *تابع انتخاب* برای a وجود دارد که از هر مجموعهٔ موجود در a یک عنصر برمی‌دارد.

بیان مرتبهٔ اول این اصل را در زیر آورده‌ایم:

$$\forall x \quad \Big(x \neq \varnothing \to \exists f : x \to \bigcup x \quad \forall y (y \in x \to f(y) \in y)\Big).$$

نخستین ابهام در بیان بالا این است که گفته بودیم که در جملات مرتبهٔ اول، سورها باید روی عناصر جهان اثر کنند؛ پس چگونه می‌توان وجود یک تابع را با سور بیان کرد.

پاسخ این ابهام این است که در بخش‌های بعدی خواهیم دید که هر تابع، در واقع یک مجموعه در جهان مجموعه‌هاست. پس سورِ $\exists f$ در بالا، یعنی یک مجموعه وجود دارد که ویژگی تابع بودن را داراست و ... . دربارهٔ رفع این ابهام همچنین بخشِ ۲.۴.۸ را مشاهده کنید.

ابهام دوم دربارهٔ دامنه و برد تابع انتخابِ f است. دقت کنید که قرار است f از هر مجموعهٔ موجود در a یک مجموعه بردارد. پس f یک عنصر از a مانند b را می‌گیرد و یک $c \in b$ را به دست می‌دهد. طبق تعریفِ نمادِ $\bigcup$ داریم $c \in \bigcup a$.

مثال ۱۹.۳. فرض کنید $x = \Big\{\{۱,۲\},\{۴,۵,۶\},\{۷,۸\},\{۹\}\Big\}$. در این صورت، $\bigcup x = \Big\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۸,۹\Big\}$. یک مثال از یک تابعِ انتخاب برای x تابع f در زیر است:

$$f : x \to \bigcup x$$

$$f(\{۱,۲\}) = ۱ \quad f(\{۴,۵,۶\}) = ۶, \quad f(\{۷,۸\}) = ۷, \quad f(\{۹\}) = ۹$$

واضح است که توابع انتخاب دیگری نیز برای x وجود دارند. همچنین در بالا اشاره کردیم که وجود یک تابع انتخاب برای یک مجموعهٔ متناهی مانند x امری اثبات پذیر است و نیازی به استفاده از اصل انتخاب ندارد.

بیان اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها در اینجا به پایان می‌رسد. در باقی فصل‌ها و بخش‌های این کتاب خواهیم دید که چگونه هر چیزی که ماهیت ریاضی دارد، اولاً در جهان نظریهٔ مجموعه‌هاست و ثانیاً وجود و ویژگی‌هایش به این اصول موضوعه بستگی دارند.

توجه ۲۰.۳ (توسیع تعریف‌پذیر)**.** در زبان نظریهٔ مجموعه، فقط یک علامتِ $\in$ قرار داده شده است. اما همان طور که مشاهده کردیم، عبارتی مانند عبارتِ $y = x \cap z$ را می‌توان تنها با استفاده از همین نماد نوشت. هر زمان که از علامتِ $x \cap y$ استفاده می‌کنیم، به طور ضمنی می‌دانیم که منظورمان یک فرمول طولانی‌تر است که تنها با استفاده از نمادِ $\in$ نوشته شده است. در اصطلاحِ منطقی، می‌توانیم زبان نظریهٔ مجموعه‌ها را «به طور تعریف‌پذیر» توسیع بدهیم، و برای کوتاه‌تر شدن جملات، برخی نمادهای دیگر را که مطمئنیم قابل نوشتن در زبان اولیه هستند، به کار ببریم. در واقع در ریاضیات مدام از این روش استفاده می‌کنیم. مثلاً وقتی می‌نویسیم $x \in \mathbb{R}$ یعنی این که تعلق x در اعداد حقیقی یک امری است که در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها، یعنی زبانِ $L = \{\in\}$ قابل نوشتن است.

تمرین ۱۷.۳. چه نمادهای جدیدی در طی معرفی اصول نظریهٔ مجموعه‌ها، به صورت تعریف‌پذیر به زبان اضافه کردیم؟

پایان اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها $\square$

۳.۳ رفع پارادوکس راسل با اصل تصریح یا اصل انتظام

در مقدمهٔ این فصل گفتیم که اگر اصل موضوعه‌ای در نظریهٔ مجموعه‌ها قرار دهیم که بگوید هر عبارت به صورتِ $A = \{x \mid p(x)\}$ یک مجموعه است، به تناقض می‌رسیم. علت این تناقض این بود که وقتی A مجموعه‌ای در جهان ما باشد، در معرض رابطهٔ عضویت در جهان قرار می‌گیرد و در نتیجه باید یکی از عبارت‌های $A \in A$ یا $A \notin A$ درست باشد؛ و دیدیم که هیچ کدام نمی‌تواند رخ بدهد. در تعریفِ ۸.۳ گفتیم که عباراتی مانند A را یک مجموعه نمی‌نامیم و نام آن‌ها را یک «کلاس» می‌گذاریم. از لحاظ شهودی، یک کلاس بسیار بزرگتر از آن است که بخواهیم آن را مجموعه بنامیم. در عین حال، اصلی به نام «اصل تصریح» در دستگاه اصول موضوعهٔ خود گنجاندیم که می‌گوید اشتراک یک کلاس با یک مجموعه، به اندازهٔ کافی کوچک هست که آن را مجموعه بنامیم.

قضیه ۲۱.۳. نشان دهید که در هر جهانی از مجموعه‌ها که از اصول **ZFC** پیروی کند، مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها نداریم؛ به بیان بهتر، کلاسِ $\mathbf{V} = \{x \mid x = x\}$ یک مجموعه نیست.

اثبات. **روش اول، با استفاده از اصل تصریح و بدون استفاده از اصل انتظام.** فرض کنید $\mathbf{V}$ یک مجموعه باشد. بنا به اصل تصریح، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$B = \{x \in \mathbf{V} \mid x \notin x\}.$$

حال دو حالت داریم، یا $B \in B$ یا $B \notin B$. اگر $B \in B$ آنگاه $B \in \{x \in \mathbf{V} | x \notin x\}$ پس $B \notin B$. به طور مشابه اگر $B \notin B$ آنگاه $B \in B$ و این تناقض است. به بیان دیگر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها، به همراه این که کلاس همهٔ مجموعه‌ها، مجموعه باشد، تناقض‌آمیز است؛ بنابراین در یک جهان از مجموعه‌ها، یک «مجموعهٔ» $\mathbf{V}$ وجود ندارد که در آن همزمان اصول نظریهٔ مجموعه‌ها برقرار باشند.

روش دوم، با استفاده از اصل انتظام. فرض کنیم کلاسِ همهٔ مجموعه‌ها، یک مجموعه باشد؛ آن را $\mathbf{V}$ بنامیم. از آن جا که $\mathbf{V}$ یک مجموعه است و از طرفی $\mathbf{V}$ کلاس متشکل از همهٔ مجموعه‌هاست، داریم $\mathbf{V} \in \mathbf{V}$. ولی این، بنا به قضیهٔ ۱۸.۳ با اصل انتظام در تناقض است. $\square$

در جهانی از مجموعه‌ها که از اصول **ZFC** پیروی می‌کند عبارت $\{x \mid x \notin x\}$، بنا به اصل انتظام، برابر کلاس همهٔ مجموعه‌هاست. بنا به قضیهٔ ۲۱.۳ این کلاس مجموعه نیست. (در واقع چون مجموعه بودن این کلاس تناقض می‌دهد پس اگر جهانی از مجموعه‌ها وجود داشته باشد چنین مجموعه‌ای در آن نیست).

۴.۳ آیا جهانی از مجموعه‌ها وجود دارد؟

تا کنون آموخته‌ایم که اصول نظریهٔ مجموعه‌ها قوانینی هستند که در منطق مرتبهٔ اول و فقط با استفاده از الفبای $\{\in\}$ بیان می‌شوند. این قوانین با قوانین ساده‌ای برای استنتاج ترکیب و منجر به ایجاد «قضایای» نظریهٔ مجموعه‌ها می‌شوند.

هر خواننده‌ای در ذهن خود جهانی از مجموعه‌ها تصور می‌کند و تصور افراد با هم متفاوت است؛ با این حال هر کس در جهان خود، برقراری اصول نظریهٔ مجموعه‌ها را فرض کرده است. پس هر قضیه‌ای باید در تمام جهان‌های نظریهٔ مجموعه‌ها برقرار باشد.

اما آیا ممکن است که یک ریاضی‌دان، که روش استنتاج در منطق مرتبهٔ اول را به درستی بلد است، در یک زمان با استفاده از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، قضیهٔ φ را اثبات کند و در زمان دیگری قضیهٔ $(\neg\varphi)$ را ثابت کند؟ اگر چنین اتفاقی رخ بدهد، در همهٔ جهان‌های نظریهٔ مجموعه‌ها هم φ درست است و هم $(\neg\varphi)$. یعنی در واقع هیچ جهانی از نظریهٔ مجموعه‌ها نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا جهان‌ها تابع قوانین منطق گزاره‌ها هستند و مکان‌هایی برای رخ دادن یک اتفاق و نقیض آن به طور همزمان نیستند. عملاً (قضیهٔ تمامیت گودل می‌گوید که) وجود جهان یعنی عدم رخداد تناقض.

در این بخش برای روشن نگه داشتن چراغ پرسش در ذهن خواننده، دربارهٔ پاسخ سوال بالا کمی توضیح داده‌ایم؛ اما در بخش ۳.۱۳ به طور مفصل‌تر و دقیق‌تر به این موضوع خواهیم پرداخت. دقت کنید که گفتیم هر چیزی که در نظریهٔ مجموعه‌ها بخواهد اثبات شود، باید با استفاده از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها استنتاج شود. یک قضیهٔ بسیار مهم در نظریهٔ مجموعه‌ها به ما می‌گوید که «این را که اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها با هم تناقض نمی‌دهند نمی‌توان ثابت کرد». به بیان دقیق‌تر «نمی‌توان از خودِ اصول موضوعه نظریهٔ مجموعه‌ها استفاده کرد و اثبات کرد که این اصول موضوعه با هم تناقض نمی‌دهند».

قضیه‌ای که در بالا بدان اشاره کردیم، قضیهٔ «ناتمامیت دوم» نام دارد که توسط ریاضی‌دان بسیار تأثیرگذاری به نام «گودل» به اثبات رسیده است. نکتهٔ کلیدی در فهم این قضیه آن جا است که جملهٔ «اصول نظریهٔ مجموعه‌ها با هم تناقض نمی‌دهند» را می‌توان به صورت یک جملهٔ مرتبهٔ اول در الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها نوشت. پس صحبت کردن دربارهٔ اثبات یا عدم اثبات آن امکان‌پذیر است. قضیهٔ ناتمامیت دوم می‌گوید که این جمله، که قابل نوشتن است، از اصول موضوعهٔ ما مستقل است؛ یعنی اثباتی برای آن با استفاده از اصول موضوعهٔ ما وجود ندارد.

عموماً وقتی قضیهٔ ناتمامیت دوم را تدریس می‌کنم، بلافاصله دانشجویان می‌پرسند پس این علمی که معلوم نیست تناقض می‌دهد یا نه به چه دردی می‌خورد؟ در پاسخ این سوال باید گفت، به درد فرستادن موشک به فضا، ساخت موجودات هوشمند، اختراع دستگاه رهیاب، احتمالاً ساخت بمب اتمی و خیلی چیزهای دیگر.

در واقع در فصل منطق مرتبهٔ اول دیدیم که قضیهٔ دیگری از گودل به ما می‌گوید که چیزهایی که ما با استفاده از اصول به دست می‌آوریم در همهٔ جهان‌هایی که اصول در آن‌ها برقرارند درستند. پس با فرض پذیرفتن اصول، به خیلی قضایا می‌توان رسید. در این موقع عموماً دانشجویان می‌پرسند که «شاید یکی نخواهد این اصول را بپذیرد». پاسخ این است که ایرادی ندارد. مثلاً یکی از این اصول این است که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد. بعداً خواهیم دید که مجموعهٔ اعداد حقیقی که تمام حساب دیفرانسیل و انتگرال روی آن مطالعه می‌شود و بسیاری معادلات مربوط به پدیده‌های فیزیکی در آن حل می‌شوند، وجودش را وام‌دار این اصل موضوعه است. پس کسی که این اصل موضوعه را قبول ندارد، چیز کمی از دست نمی‌دهد؛ با این حال ریاضیات علم اجبار نیست!

یک نکتهٔ حائز اهمیت دیگر دربارهٔ قضیهٔ ناتمامیت دوم، البته از نظر نگارنده، این است که هیچ علم بشری مانند علم ریاضیات به این صراحت و به عنوان قضیهٔ اثبات‌شده، قدرتها و محدویتهای خودش را نمی‌شناسد. از یک طرف همهٔ دستاوردهای علمی بر پایهٔ اصول موضوعهٔ ریاضیات است و از طرفی با خودِ این اصول موضوعه، محدودیت‌های این اصول موضوعه به اثبات می‌رسد.

اما کلام آخر در این بخش، این است که قضیهٔ ناتمامیت گودل یک قضیه دربارهٔ محدودیت علم ریاضی نیست. این قضیه، بدین صورت قابل تعمیم است که «هیچ سیستم فکری‌ای که بر اساس اصول موضوعه بنا شده است، سازگاری خود را نمی‌تواند ثابت کند». پس محدودیت مورد نظر قضیهٔ گودل، اگر محدودیت خواندن آن کار صوابی

باشد، محدودیت تمام سیستم‌های فکری بنا شده بر پایهٔ اصول موضوعه است.

۵.۳ اول مرغ یا تخم‌مرغ؟!

نظریهٔ مجموعه‌ها با استفاده از منطق مرتبهٔ اول ایجاد می‌شود. اما خودِ منطق مرتبهٔ اول از زبان‌ها و جهان‌هایی استفاده می‌کند که «مجموعه» هستند. سوالی که پیش می‌آید این است که بالاخره منطق بر اساس نظریهٔ مجموعه‌ها است یا نظریهٔ مجموعه‌ها بر اساس منطق؟! پاسخ دادن به این سوال بسیار سخت است. حقیقت این است که این‌دو به نحو نزدیکی به صورت همزمان با هم و تو در تو پیش می‌روند. در ادامه کوشیده‌ام تا این تعارض را تا جایی که ممکن است توضیح دهم.

بیایید «مبانی» را با هم مرور کنیم: یک علامتِ $\in$ داریم که با کمک آن و چند نماد ساده مانندِ $x, y, z, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ عبارتهایی می‌شود نوشت. تعداد محدودی قانون داریم که به ما اجازه می‌دهد از برخی از عبارت، برخی دیگر را نتیجه بگیریم. همچنین تعدادی عبارت نوشته شده را به عنوان «اصل موضوعه» در نظر می‌گیریم. با استفاده از اصول موضوعه و قوانین نتیجه‌گیری، عباراتی ایجاد می‌کنیم که به آن‌ها قضایای نظریهٔ مجموعه گفته می‌شود.

یکی از قضایای نظریهٔ مجموعه این است که «مجموعه» وجود دارد. با کمک یک اصل موضوعهٔ دیگر، به راحتی می‌توان اثبات کرد که $\{\in\}$ یک مجموعه است. با این ایده، برخی از مجموعه‌ها را (که ویژگی‌های مطلوبی دارند) زبان مرتبهٔ اول و برخی از آن‌ها را جهان مرتبهٔ اول می‌نامیم. سپس مجموعه‌هایی مانند مجموعه‌ی جملات را تعریف می‌کنیم و نیز مفهوم برقراری یک جمله در یک جهان را تعریف می‌کنیم و نیز قوانین استنتاج را تعریف می‌کنیم. پس قوانین استنتاج، که آن‌ها را مفاهیم فرامنطقی خوانده بودیم نیز در نظریهٔ مجموعه‌ها، و منطقی هستند. همچنین ثابت می‌کنیم که هرگاه یک مجموعه از اصول تناقض ندهد، همه اصول موجود در آن مجموعه همزمان در یک جهان برقرارند. بنابراین اگر اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها با هم تناقض ندهند یک جهان از مجموعه‌ها وجود دارد که در آن این اصول برقرارند. پس از آن ثابت می‌کنیم که هر آنچه که با قوانین استنتاج از جملات مرتبهٔ اول حاصل شود در همهٔ جهان‌ها درست است (تمامیت). بنابراین هر آنچه از قوانین استنتاج با استفاده از نمادِ $\{\in\}$ و اصول نظریهٔ مجموعه‌ها ایجاد شود، در هر مجموعه‌ای که در آن اصول نظریهٔ مجموعه‌ها برقرار باشد درست است. اما همهٔ این نتایج را باز با استفاده از همان یک نماد اولیهٔ $\in$ و قوانین نتیجه‌گیری اولیه به دست آوردیم.

بنابراین نظریهٔ مجموعه‌ها، منطق را می‌سازد، منطق در داخل نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ مجموعه‌ها را می‌سازد و این همکاری دو طرفه ادامه پیدا می‌کند. بیایید بند بالا را با هم مرور کنیم: در داخل نظریهٔ مجموعه‌ها دوباره نماد $\{\in\}$ اما این بار به عنوان یک مجموعه ایجاد می‌شود. در داخل نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات می‌شود که اگر اصول موضوعه‌ای تناقض ندهند جهانی (به عنوان) برای آن‌ها وجود دارد. در همان دنیای مجموعه‌ها اثبات می‌شود که نمی‌شود اثبات کرد که مجموعهٔ اصول نظریهٔ مجموعه‌ها تناقض نمی‌دهد. درست است که این حکم در داخل نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت شده است اما اثبات آن به گونه‌ای است که «خودِ نظریهٔ مجموعه‌ها» هم موضوع آن واقع می‌شود.

۶.۳ مجموعهٔ مرجع و جبر بولی مجموعه‌ها

خواننده‌ای که به دنبال مطالب جذاب‌ترِ فصول بعدی است می‌تواند از خواندن این بخش صرف‌نظر کند. احتمالاً در دورهٔ دبیرستان خوانده‌ایم که مجموعه‌ای به نام **مجموعهٔ مرجع** وجود دارد که همهٔ مجموعه‌ها زیرمجموعهٔ آنند. در زیر درستی این گفته را بررسی می‌کنیم. یادآوری می‌کنم که در بخش قبل ثابت کردیم که از اصول زدافسی نتیجه

می‌شود که مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد.

سوال. آیا مجموعه‌ای وجود دارد که همهٔ مجموعه‌ها، زیر مجموعهٔ آن باشند؟

پاسخ. فرض کنید C مجموعه‌ای باشد که همهٔ مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. بنابراین بنا به اصل اجتماع، $\bigcup C$ نیز یک مجموعه است. ادعا می‌کنیم که $\bigcup C$ مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست و این تناقض است، زیرا همان طور که قبلاً اثبات کرده‌ایم، وجود مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها، با اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها تناقض می‌دهد.
فرض می‌کنیم A یک مجموعهٔ دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم که $A \in \bigcup C$. برای اثبات این ادعا باید نشان دهیم که $D \in C$ وجود دارد، به طوری که $A \in D$. می دانیم که $\{A\}$ بنا به اصل جفت‌سازی یک مجموعه است و $A \in \{A\}$ ادعا می‌کنیم که $\{A\} \in C$. می‌دانیم که $\{\{A\}\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به فرضمان دربارهٔ C داریم $\{\{A\}\} \subseteq C$ پس $\{A\} \in C$. $\square$

پس این ادّعا که مجموعه‌ای مرجع وجود دارد که همهٔ مجموعه‌ها زیرمجموعهٔ آنند درست نیست.
اما نیاز به داشتن یک مجموعهٔ «به‌اندازهٔ کافی بزرگ» را چگونه برطرف کنیم؟ می‌دانیم که بنا به اصل اجتماع، اجتماع هر تعداد (کم!) از مجموعه، یک مجموعه است. در واقع بنا به اصل اجتماع، اجتماع هر تعداد از مجموعه‌ها که تعداد آن‌ها نیز در مرز مجموعه بودن بگنجد، یک مجموعه است. حال فرض می‌کنیم که U یک مجموعه باشد که **همهٔ مجموعه‌هایی که ادامهٔ این درس دربارهٔ آن‌ها صحبت خواهیم کرد،** زیر مجموعهٔ آن باشند. کافی است U را اجتماع همهٔ مجموعه‌هائی بگیریم که در این کتاب بدانها اشاره شده است. پس بیایید U را مجموعهٔ مرجع بنامیم.
در بخش منطق گزاره‌ها در قضیهٔ ۲۴.۱ دیدیم که گزاره‌ها تشکیل یک جبر بولی می‌دهند و سپس گفتیم که هر تاتولوژی در منطق گزاره‌ها، از قوانین این جبر بولی حاصل می‌شود. همین امر برای مجموعه‌ها نیز برقرار است. بسیاری از ویژگی‌هایی که در دبیرستان برای مجموعه‌ها اثبات می‌شود، از این نتیجه می‌شود که قوانین جبر بولی مجموعه‌ها برقرارند. در زیر این قوانین را بیان کرده‌ایم.
قبلاً مجموعهٔ $a - b$ را تعریف کرده‌ایم. حال تعریف می‌کنیم:

$$a^c = U - a.$$

از این بعد جملهٔ $x \in a^c$ برای ما معادل با جملهٔ $x \notin a$ خواهد بود؛ چون به طور ضمنی همهٔ x ها را در U در نظر گرفته‌ایم. قضیهٔ زیر همهٔ محتوای منطق‌گزاره‌ای نظریهٔ مجموعه‌ها را دربردارد:

قضیه ۲۲.۳. مجموعهٔ مرجع U به همراه عمل‌هایِ $\cup$، $\cap$ و ^{c} و مجموعه‌های $\varnothing, U$ تشکیل یک جبر بولی می‌دهد (که بدان جبر بولی مجموعه‌ها گفته می‌شود). به بیان دیگر، همه عبارت‌های زیر برقرار هستند: (دقت کنید که استفاده از فلش دوخطه بدین دلیل است که این ویژگی‌ها در هر جهانی از نظریهٔ مجموعه‌ها درست است).

۱. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

۲. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

۳. $(a \cup b) = (b \cup a)$.

۴. $(a \cap b) = (b \cap a)$.

۵. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$.

۶. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$.

۷. $a \cup \varnothing = a$

۸. $a \cap \varnothing = \varnothing$

۹. $a \cap U = a$.

۱۰. $a \cup U = U$.

۱۱. $a \cup a = a$

۱۲. $a \cap a = a$.

۱۳. $a \cap (a \cup b) = a$.

۱۴. $a \cup (a \cap b) = a$.

۱۵. $a \cap a^c = \varnothing$

۱۶. $a \cup a^c = U$.

۱۷. $(a^c)^c = a$.

۱۸. $(a \cap b)^c = a^c \cup b^c$.

۱۹. $(a \cup b)^c = a^c \cap b^c$.

دقت کنید که قضیهٔ بالا، بنا به توجه ۲۹.۲ یک قضیه است. اما اثبات قضیهٔ بالا آسان است؛ زیرا در واقع هر کدام از موارد بالا متناظر با یکی از مواردِ قضیهٔ ۲۴.۱ است. برای نمونه مورد نهم را اثبات می‌کنیم و تحقیق بقیه را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اثبات. فرض کنیم که در یک جهان نظریهٔ مجموعه‌ها هستیم که a, U مجموعه‌هایی در آن هستند. بنا به اصل گسترش، برای این که نشان دهیم که $a \cap U = a$ باید تحقیق کنیم که در جهان ما جملهٔ زیر درست است (در واقع جملهٔ بالا کوتاه‌نوشتی برای جملهٔ زیر است):

$$\forall x \quad (x \in a \cap U \leftrightarrow x \in a).$$

مجموعهٔ دلخواه $x_\circ$ را در نظر بگیرید. بنا به تعریفِ ۲۳.۲ باید نشان دهیم که در جهان ما جملهٔ زیر درست است:

$$x_\circ \in a \cap U \leftrightarrow x_\circ \in a$$

اما جملهٔ بالا فقط یک کوتاه‌نوشت برای جملهٔ زیر است:

$$x_\circ \in a \cap U \leftrightarrow (x_\circ \in a) \wedge (x_\circ \in U)$$

پس کافی است نشان دهیم که در جهان ما جملهٔ زیر درست است:

$$(x_\circ \in a) \wedge (x_\circ \in U) \leftrightarrow x_\circ \in a.$$

بنا به قضیهٔ ۲۴.۱ می‌دانیم که عبارت زیر یک تاتولوژی است:

$$(p \wedge \top) \leftrightarrow p.$$

پس در جهان مورد نظرمان داریم:

$$(x_\circ \in a) \wedge (x_\circ \in U) \leftrightarrow x_\circ \in a.$$

□

مثال ۲۳.۳. نشان دهید که $a - b = a \cap b^c$.

پاسخ. دقت کنید که صورت درست این مثال این گونه است: نشان دهید که در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها و برای هر دو مجموعهٔ a, b داریم $a - b = a \cap b^c$.

برای اثبات این گفته، باید وارد یک جهان بشویم و در آن جهان مجموعه‌های دلخواه a, b را در نظر بگیریم و درستی حکم را تحقیق کنیم. اما می‌شود همزمان در همهٔ جهان‌ها استنتاج کرد. فرض کنید $x_\circ, a, b$ متغیرهایی در منطق مرتبهٔ اول نظریهٔ مجموعه‌ها باشند. در این صورت داریم:

$$x_\circ \in a - b \iff x_\circ \in a \wedge x_\circ \notin b \iff x_\circ \in a \wedge x_\circ \in b^c.$$

پس مستقیماً نشان داده‌ایم که مستقل از جهان، $a - b = a \cap b^c$. $\square$

در اثبات بالا از فلش‌های دوخطه استفاده کردیم تا بگوییم هر آنچه که بیان کرده‌ایم همزمان در همهٔ جهان‌ها برقرار است و در جهان خاصی نیستیم.

توجه ۲۴.۳. در بحثهای تخصصی‌تر نظریهٔ مجموعه‌ها، عموماً از حروف بزرگ برای نشان دادن کلاس‌ها (یی که لزوماً مجموعه نیستند) استفاده می‌شود و از حروف کوچک برای نشان دادن مجموعه‌ها. در عین حال در ریاضیات دبیرستانی مرسوم است که مجموعه‌ها را با حروف بزرگ و اعضای آن‌ها را با حروف کوچک نشان دهند. هر چند می‌دانیم که میان مجموعه و عضو تفاوتی وجود ندارد، برای حفظ آرامش بصری خواننده، ما نیز در ادامه برای استفاده از نماد عضویت، هم از حروف بزرگ و هم از حروف کوچک استفاده خواهیم کرد و خواهیم نوشت: $a \in A$.

توجه ۲۵.۳. هر آنچه در ادامهٔ این بخش آمده است، تنها برای تمرین دست‌ورزی ریاضی در جبر بولی مجموعه‌هاست. خواننده می‌تواند از خواندن باقی این بخش، به نفع رسیدن به مطالب عمیق‌تر خودداری کند.

مثال ۲۶.۳. نشان دهید که برای هر سه مجموعهٔ A، B و C داریم:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

پاسخ. دوباره، حکم مورد نظر ما این است که در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها و برای هر سه مجموعهٔ A, B, C جملهٔ $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ درست است. بنا به اصل گسترش، باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \big(x \in A \cap (B - C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) - (A \cap C)\big).$$

از قضیهٔ ۲۴.۱ برای استنتاج در تمامی جهان‌ها به صورت همزمان استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B - C) &\iff (x \in A) \wedge (x \in B - C) \\ &\iff (x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \wedge (x \notin A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) - (A \cap C). \end{aligned}$$

دقت کنید که برای رفتن از خط اول اثبات به خط دوم، از تاتولوژی زیر استفاده کردیم:

$$p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge r).$$

می‌توانستیم برای اثبات این مثال، از مثالِ اثبات‌شدهٔ ۲۳.۳ استفاده کنیم و بنویسیم:

$$\begin{aligned}(A\cap B)-(A\cap C) &= (A\cap B)\cap(A\cap C)^c\\ &= (A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)\\ &= ((A\cap B)\cap A^c)\cup(A\cap B\cap C^c)\\ &= A\cap(B-C).\end{aligned}$$

□

مثال ۲۷.۳. آیا عبارت زیر درست است؟

$$A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C.$$

پاسخ. فرض کنید $(\mathbf{V},\in)$ یک جهان از نظریهٔ مجموعه‌ها باشد و ۱, ۲, ۳ مجموعه‌هایی در آن باشند. مجموعه‌های $A=\{۱,۲,۳\}$، $B=\{۲\}$، $C=\{۳\}$ را در این جهان در نظر بگیرید. داریم

$$A\cup B=A\cup C\wedge\neg(B=C)$$

از آنجا که این جهان و با این تعبیرات، عبارتِ $A\cup B=A\cup C\rightarrow B=C$ درست نیست، نتیجه می‌گیریم که استلزامِ $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C$ برقرار نیست. □

مثال ۲۸.۳. فرض کنید که A,B دو زیرمجموعه از C باشند به طوری که $A\cup B=C$ و $A\cap B=\varnothing$. نشان دهید که $A=C-B$.

پاسخ. در جهان‌های ما اصل گسترش برقرار است. پس باید نشان دهیم که $A\subseteq C-B$ و $C-B\subseteq A$. دقت کنید که هر چه در ادامه نوشته‌ایم قابل اعمال به هر جهان نظریهٔ مجموعه‌هاست؛ یعنی ما در حال استنتاج در منطق مرتبهٔ اول هستیم ولی برای راحتی کار، قوانین استنتاج خود را با جملات فارسی شرح داده‌ایم. این کار در نوشتن عموم اثبات‌های ریاضی مرسوم است.

فرض کنید $x\in A$. در این صورت از آنجا که $A\cap B=\varnothing$ داریم $x\notin B$ و از آنجا که $A\cup B=C$ داریم $x\in C$. پس $x\in C-B$.

از طرف دیگر فرض کنید $x\in C-B$؛ از آنجا که $A\cup B=C$ داریم $x\in A\cup B$. پس $x\in A$ یا $x\in B$. اما دومی طبق تعریفِ $C-B$ رخ نمی‌دهد. □

مثال ۲۹.۳. نشان دهید که $\mathbf{P}(A)\cup\mathbf{P}(B)\subseteq\mathbf{P}(A\cup B)$ اما $\mathbf{P}(A\cup B)\neq\mathbf{P}(A)\cup\mathbf{P}(B)$.

پاسخ. در اثبات حکمِ مثالِ ۲۸.۳ استدلال‌هایمان را که در واقع استنتاج در منطق مرتبهٔ اول بودند به زبان فارسی

نوشتیم. در این مثال، می‌خواهیم استنتاجمان را در یک سیستم استنتاج در منطق مرتبهٔ اول بیان کنیم.[۱۵]

۱ $c \in \mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B) \Rightarrow c \in \mathbf{P}(A) \vee c \in \mathbf{P}(B)$ (تعریف اجتماع دو مجموعه)

۲ $c \in \mathbf{P}(A) \Rightarrow c \subseteq A$ (تعریف مجموعهٔ توانی)

۳ $A \subseteq A \cup B$ (یک حکم قابل اثبات)

۴ $c \in \mathbf{P}(A) \Rightarrow c \subseteq A \cup B$ بنا به ۲٫۳

۵ $c \in \mathbf{P}(B) \Rightarrow c \subseteq A \cup B$ تکرار ۲و۳و۴ برای B به جای A

۶ $c \in \mathbf{P}(A) \vee c \in \mathbf{P}(B) \Rightarrow c \subseteq A \cup B$ بنا به ۴و۵

۷ $c \in \mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B) \Rightarrow c \in \mathbf{P}(A \cup B)$. $\square$

برای اثبات قسمت دوم مثال دقت کنید که

$$c \in \mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B) \iff c \in \mathbf{P}(A) \vee c \in \mathbf{P}(B) \iff c \subseteq A \vee c \subseteq B.$$

همچنین $c \in \mathbf{P}(A \cup B) \iff c \subseteq A \cup B$. پس برای اثبات قسمت دوم مثال باید نشان دهیم که $c \subseteq A \cup B \not\Rightarrow (c \subseteq A) \vee (c \subseteq B)$. فرض کنید $(\mathbf{V}, \in)$ جهانی از نظریهٔ مجموعه باشد و ۱٫۲٫۳٫۴ مجموعه‌هایی در آن باشند. قرار دهید:

$$A = \{۱, ۲\} \quad B = \{۳, ۴\}, c = \{۲, ۳\}.$$

آنگاه

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}.$$

بنابراین $A \cup B \subseteq A \cup B$ اما $A \cup B \not\subseteq A$ و $A \cup B \not\subseteq B$. $\square$

۷.۳ تمرین‌های تکمیلی

تمرین ۱۸.۳. نشان دهید که اگر $\mathbf{P}(A \cup B) \subseteq \mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B)$ آنگاه $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

راهنمایی. باید نشان دهید که $\mathbf{P}A \cup B) = \mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B) \Rightarrow (A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$. بنا به تاتولوژیِ $(Q_۱ \to (Q_۲ \vee Q_۳)) \leftrightarrow (((\neg Q_۱) \wedge \neg(Q_۲)) \to (\neg Q_۱))$ کافی است نشان دهید که اگر $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq A$ آنگاه $A \cup B$ زیرمجموعه‌ای دارد که نه زیرمجموعهٔ A و نه زیرمجموعهٔ B است. $\square$

تمرین ۱۹.۳. نشان دهید که $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B)$ اگر و تنهااگر $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

تمرین ۲۰.۳. در تمرین ۱۳.۳ تعریف کردیم

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

فرض کنید که A یک مجموعه باشد و $X = \mathbf{P}(A)$. نشان دهید که $(X, \oplus)$ یک **گروه آبلی**[۱۶] است؛ یعنی موارد زیر را نشان دهید:

[۱۵] البته قبول دارم که سیستم‌های استنتاج در منطق مرتبهٔ اول را آن طور که در یک دورهٔ منطق می‌شود تدریس کرد، توضیح نداده‌ایم.

[۱۶] با مفهوم گروه آبلی در درس مبانی جبر آشنا خواهید شد. گروه آبلی یک مجموعه است که روی آن یک عمل جمع وجود دارد که آن عمل ویژگی‌های مطلوب جمع(شبیه ویژگی‌هائی که در این تمرین فهرست شده‌اند)را داراست.

۱. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B \in X$

۲. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B = B \oplus A$

۳. $\forall A, B, C \in X \quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

۴. $\forall A \quad A \oplus \varnothing = A$

۵. $\forall A \quad A \oplus A = \varnothing$

در واقع در تمرین بالا نشان داده‌اید که $\oplus$ ویژگی‌هائی شبیه جمع اعداد دارد. هر چند در بالا این که

$$A \oplus A = \varnothing$$

با درک ما نسبت به جمع اعداد سازگار نیست!

تمرین ۲۱.۳. حکم تمرینِ ۱۳.۳ را با استفاده از موارد ۱ تا ۵ تمرین بالا ثابت کنید.

تمرین ۲۲.۳. نشان دهید که

۱. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

۲. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

۳. $(A \subseteq C \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

۴. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$

۵. $A \cup B = A \cap B \iff A = B$

۶. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

تمرین ۲۳.۳. آیا $(A \cup B) - B = A$ ؟

تمرین ۲۴.۳. آیا $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$؟

خلاصهٔ فصل سوم. همهٔ اشیای ریاضی مجموعه هستند، این گفته را در طول این کتاب توجیه خواهیم کرد؛ بنابراین اصول‌موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها اهمیت دارد. در الفبای نظریهٔ مجموعه‌ها تنها یک نمادِ $\in$ وجود دارد که از آن با کمک ادوات منطقی در ساخت جملات استفاده می‌شود. جملاتِ نظریهٔ مجموعه‌ها در جهان‌هایی مانند $\mathbf{V}$ تعبیر می‌شوند که در آن‌ها معنایی برای رابطهٔ $\in$ تصور شده است. هر اصل موضوعه‌ای در نظریهٔ مجموعه‌ها با استفاده از الفبای یادشده نوشته می‌شود و باید در تمام جهان‌ها به طور همزمان برقرار باشد. در جهان‌هایی که اصول موضوعه برقرارند نتایج این اصول موضوعه نیز برقرار هستند. ما در اینجا اصول موضوعهٔ زرملو و فرانکل را به همراه اصل انتخاب معرفی کرده‌ایم. در فصل‌های آیندهٔ این کتاب قدرت این اصول موضوعه را در بناسازی ریاضی خواهیم دید، همچنین اثبات خواهیم کرد که منجر به تناقض نشدن این اصول موضوعه را با به کارگیری خودِ این اصول موضوعه نمی‌توان اثبات کرد.

فصل ۴

اعداد طبیعی و استقراء در منطق مرتبهٔ اول

خواجه امام مظفر حمدان در نوقان یک روز می‌گفت کی کار ما با شیخ بوسعید همچنانست کی پیمانهٔ ارزن. یک دانه شیخ بوسعید است و باقی منم. مریدی از آن شیخ بوسعید آنجا حاضر بود، چون آنرا بشنید از سر گرمی برخاست و پای افزار کرد و پیش شیخ آمد و آنچ از خواجه امام مظفر شنیده بود با شیخ بگفت. شیخ گفت برو و با خواجه امام مظفر بگوی که آن یک دانه هم توی، ما هیچ چیز نیستیم. اسرارالتوحید

۱.۴ وجود مجموعهٔ اعداد طبیعی و استقراء

فرض کنید $\mathbf{V}$ یک جهانِ نظریهٔ مجموعه‌ها باشد. بنا به اصل وجود، در این جهان یک مجموعه به نام $\varnothing$ وجود دارد. بنا به اصول موضوعهٔ اجتماع و جفت‌سازی، مجموعه‌های زیر نیز در این جهان نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارند:

$$\begin{aligned}
&۰ = \varnothing\\
&۱ = \{۰\} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}\\
&۲ = \{۰, ۱\} = \{\varnothing\} \cup \big\{\{\varnothing\}\big\} = \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}\\
&۳ = \{۰, ۱, ۲\} = \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}\Big\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

روش بالا، روش زرملو برای تعریف هر عدد طبیعی است. پس در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها برای هر n یک عدد طبیعی (یعنی یک مجموعه به نام n) وجود دارد. همان طور که از تعریف بالا پیداست، داریم:

$$n + ۱ = n \cup \{n\}.$$

اما سوال اینجاست که آیا مجموعه‌های $۰, ۱, ۲, \ldots$ همه به اتفاق هم تشکیل یک مجموعه می‌دهند؟ به عبارت بهتر، آیا $\{۰, ۱, \ldots\}$ نیز در جهانِ نظریهٔ مجموعه‌ها، یعنی در $\mathbf{V}$ است؟ گردایهٔ[1] $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ را با نمادِ $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم.

بر خلاف ظاهر، سوال بالا، سوال پیچیده‌ای است؛ در زیر به تعریف دقیق اعداد طبیعی پرداخته‌ایم و پس از آن توضیح مختصری دربارهٔ علت پیچیدگی سوال بالا داده‌ایم.

[1] در فصل بعدی دربارهٔ کلمهٔ «گردایه» توضیح داده‌ایم.

به یاد آورید که اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی به صورت زیر است:

$$\exists x \quad (\varnothing \in x \wedge \forall y \quad (y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

بیایید برای سادگی، فرمولِ داخل پرانتز را با $\phi(x)$ نشان دهیم. به هر مجموعهٔ x که در شرط $\phi(x)$ صدق کند، یک مجموعهٔ استقرائی گفته می‌شود. بنا بر این، اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی می‌گوید:

$$\exists x \quad \phi(x),$$

یعنی یک مجموعهٔ استقرائی وجود دارد. به بیان دیگر، این اصل می‌گوید که $\{t|\phi(t)\}$ یک کلاس در جهانِ $\mathbf{V}$ است و این کلاس، ناتهی است.

قضیه ۱.۴ (تعریف و قضیه). یک مجموعهٔ استقرائی وجود دارد که زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های استقرائی است. به این مجموعه، مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌گوییم و آن را با ω نشان می‌دهیم.

پیش از شروع اثبات، دقت کنید که قضیهٔ مورد نظر، یک جمله در منطق مرتبهٔ اول است. این جمله می‌گوید که در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، یک مجموعهٔ استقرایی وجود دارد که زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های استقرایی در آن جهان است. در واقع در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها به چنین مجموعه‌ای، مجموعهٔ اعداد طبیعی در آن جهانِ نظریهٔ مجموعه‌ها گفته می‌شود.

اثبات. بنا به اصل وجودِ یک مجموعهٔ نامتناهی، یک مجموعهٔ a وجود دارد به طوری که $\phi(a)$ برقرار است. در زیر نشان می‌دهیم که بنا به اصل تصریح، x هایی که به طور همزمان در a و در همهٔ مجموعه‌های استقرایی دیگر هستند، تشکیل یک مجموعه می‌دهند. در واقع بنا به اصل تصریح، با در نظر گرفتن جملهٔ $p(x)$ به صورت نشان داده شده، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x \in a| \underbrace{\forall y \quad \Big(\big(\underbrace{\varnothing \in y \wedge \forall z \quad (z \in y \to z \cup \{z\} \in y)}_{\phi(y)} \big) \to x \in y \Big)}_{p(x)} \}.$$

عبارت بالا در واقع مجموعهٔ زیر را نشان می‌دهد:

$$\{x \in a| \text{هر مجموعه‌ای که استقرایی باشد } x \text{ عضو آن است}\}.$$

بیایید مجموعهٔ بالا را با ω نشان دهیم. واضح است که هر عنصر ω در همهٔ مجموعه‌های استقرایی واقع است؛ یعنی ω از همهٔ مجموعه‌های استقرایی کوچکتر است. تنها چیزی که مانده است اثبات کنیم این است که ω خودْ یک مجموعهٔ استقرایی است. اما اگر یک عنصر x در ω باشد آنگاه x در تمام مجموعه‌های استقرایی است. پس $x \cup \{x\}$ هم در تمام مجموعه‌های استقرایی است. پس طبقِ تعریفِ ω ــ به عنوان مجموعهٔ عناصری که همزمان در همهٔ مجموعه‌های استقرایی هستند ــ داریم $x \cup \{x\} \in \omega$. □

بیایید قضیهٔ بالا را به صورتی متفاوت بیان کنیم. کلاس همهٔ مجموعه‌های استقرائی را در نظر بگیرید:

$$E = \{x|\phi(x)\};$$

بنا به قضیهٔ بالا $\omega = \bigcap E$؛ به بیان دیگر، اشتراک تمام مجموعه‌های استقرائی، همان ω است.

توجه ۲.۴. در اینجا می‌خواهم یک نکتهٔ نسبتاً گیج‌کننده را برای دانشجویان ریاضی بیان کنم و آن تمایز میانِ ω و $\mathbb{N}$ است. از یک طرف گفتیم گردایه‌ای به نام $\mathbb{N} = \{۰, ۱, \ldots\}$ وجود دارد که نمی‌دانیم مجموعه هست یا نه. اما از طرف دیگر، گفتیم که از اصولِ **ZFC** نتیجه می‌شود که مجموعهٔ ω وجود دارد.

در واقع در هر مدلی از نظریهٔ مجموعه‌ها، یک مجموعهٔ ω (یعنی یک مجموعه از اعداد طبیعی در آن جهان از مجموعه‌ها) وجود دارد. این مجموعه، شاملِ $\mathbb{N} = \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ است (زیرا شامل تهی است، و هر چه را که شامل است تالیِ آن را نیز شامل است). ولی شاید با آن مساوی نباشد (مثلاً شاید در این مجموعه، اشیای عجیب و غریبی به نام *اعداد طبیعیِ نااستاندارد* وجود داشته باشند [۱۳]).

در نظریهٔ مجموعه‌های پیشرفته‌تر اثبات می‌شود که اگر جهانی برای مجموعه‌ها وجود داشته باشد، یک جهان خوش‌بنیاد برای مجموعه‌ها وجود دارد (برای اثبات منبعِ [۱۶] را ببینید). جهان خوش‌بنیاد یعنی جهانی که در آن هر مجموعه‌ای با تعدادی متناهی روش ساخت با استفاده از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها ایجاد شده است (همان طور که اصل انتظام می‌خواهد). در جهان‌های «خوش‌بنیاد» نظریهٔ مجموعه‌ها، ω همان $\mathbb{N}$ است، و ما با این توضیح، در ادامهٔ این درس، با خیال راحت ω و $\mathbb{N}$ را یکی گرفته‌ایم. با روش‌های مقدماتی منطقی می‌توان نشان داد که جهان‌هایی برای نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارند که در آن‌ها ω شامل عناصری غیر از عناصر موجود در $\mathbb{N}$ است.

پیش از بیان قضیهٔ استقراء، باید دو نکته را یادآور شویم. نخست این که اگر x یک عدد طبیعی باشد، $x + ۱$ هم یک عدد طبیعی است و به صورت $x + ۱ = x \cup \{x\}$ تعریف می‌شود. علت این که $x + ۱$ یک عدد طبیعی است این است که مجموعهٔ اعداد طبیعی، استقرایی است.

گفتیم که در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها یک مجموعه به نام ω وجود دارد. نیز گفتیم که برای «در ω بودن یک عنصر» **توصیفی** وجود دارد؛ در ω بودن یعنی قرار گرفتن در تمام مجموعه‌های استقرایی. پس یک جملهٔ $\varphi(x)$ وجود دارد به طوری که

$$\varphi(x) \iff x \in \omega.$$

پس از این لحظه به بعد، می‌توانیم عبارتِ $x \in \omega$ را به عنوان یک جملهٔ مرتبهٔ اول در نظریهٔ مجموعه‌ها حساب کنیم (به توجه ۲.۳ مراجعه کنید).

معمولاً به جای این که بنویسیم:

$$\forall x \quad (x \in \omega \to \psi(x))$$

می‌نویسیم:

$$\forall x \in \omega \quad \psi(x).$$

قضیه ۳.۴ (استقراء در اعداد طبیعی)**.** فرض کنید $p(x)$ یک جمله در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها باشد. آنگاه جملهٔ زیر در تمام جهان‌های نظریهٔ مجموعه‌ها درست است:

$$p(۰) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \to p(x + ۱)\Big) \to \forall y \in \omega \quad p(y).$$

اثبات. فرض کنید جملهٔ زیر در جهان ما درست باشد:

$$p(۰) \wedge \forall x \quad \Big(p(x) \to p(x + ۱)\Big),$$

باید نشان دهیم که

$$\forall y \in \omega \quad p(y).$$

بنا به اصل تصریح عبارت $t = \{y \in \omega | p(y)\}$ یک مجموعه است. واضح است $t \subseteq \omega$. اگر نشان دهیم که $\omega \subseteq t$، در آن صورت برای تمام اعداد طبیعی، حکمِ p درست خواهد بود و اثبات به پایان خواهد رسید.

می‌دانیم که ω زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ استقرائی است. پس کافی است نشان دهیم که t یک مجموعهٔ استقرائی است. اما این آسان است، زیرا اولاً $\circ \in t$؛ ثانیاً اگر $y_\circ \in t$ آنگاه $y_\circ \cup \{y_\circ\} \in t$ پس t استقرائی است. $\square$

چنان که دیدیم، عبارت $x \in \omega$ یک جملهٔ قابل قبول در منطق مرتبهٔ اول است؛ زیرا در واقع کوتاه‌نوشتِ یک توصیف برای x است. مشابهاً $x = \omega$ و $x \subseteq \omega$ نیز جملاتی قابل قبول در منطق مرتبهٔ اول هستند. بنابراین، از قضیهٔ ۳.۴ نتیجه می‌شود که جملهٔ زیر در همهٔ جهان‌های نظریهٔ مجموعه‌ها درست است:

$$\forall S\left(\Big(\circ \in S \wedge \forall x \quad (x \in S \to x + ۱ \in S)\Big) \to \omega \subseteq S\right),$$

به زبان ما: اگر S زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد که $\circ$ را در بردارد و از این که $x \in S$ نتیجه می‌شود که $x + ۱ \in S$ آنگاه $S = \omega$.

بین اعداد طبیعی، ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x < y \iff x \in y.$$

واضح است که $\circ < ۱ < ۲ \ldots$. یک نتیجهٔ بسیار مهم از قضیهٔ استقراء، **قضیهٔ بازگشت** است. قضیهٔ بازگشت [۲] با استفاده از قضیهٔ استقراء ثابت می‌شود و بیان‌گر این است که با استفاده از استقراء و با دانستن مقادیر قبلی، می‌توان روی اعداد طبیعی، یک **تابع** تعریف کرد به طوری که برای هر n مقدار $f(n)$ به $\{f(x) : x < n\}$ بستگی داشته باشد. هنوز کلمهٔ «تابع» در این کتاب به طور دقیق تعریف نشده است، اما همان آشنایی دبیرستانی خواننده با مفاهیم تابع و ترکیب توابع، برای ما فعلاً کافی است تا مفهوم بازگشت را دقیق‌تر توضیح دهیم: فرض کنید $h : A \to A$ یک تابع و $a \in A$ عنصر دلخواهی باشد. در این صورت یک تابعِ $f : \mathbb{N} \to A$ وجود دارد به طوری که $f(\circ) = a$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $f(n + ۱) = h(f(n))$. هر چند قضیهٔ بازگشت، خودش با استفاده از استقراء ثابت می‌شود، ماهیتاً با استقراء تفاوتی دارد و آن تفاوت این است که قضیهٔ بازگشت برای «ساختن توابع با دامنهٔ اعداد طبیعی» استفاده می‌شود و زحمت اثبات قضیهٔ بازگشت با استفاده از استقراء در به دست آوردن یک «تابع» است. در واقع قضیهٔ بازگشت به ما می‌گوید که «مجموعه‌ای به نام f وجود دارد که ویژگی تابع بودن را داراست و ضابطهٔ آن به صورت بازگشتی است». برای تعریف جمع و ضرب و فاکتوریل در اعداد طبیعی، در واقع از قضیهٔ بازگشت استفاده می‌شود اما (به اشتباه و تنها برای قابل فهم بودن مطلب) در زیر بیان کرده‌ایم که این توابع با استقراء تعریف می‌شوند. در عین حال، برای حفظ کامل بودن، صورت دقیق‌تر قضیهٔ بازگشت را در پایان این بخش بیان کرده‌ایم.[۳]

تعریف ۴.۴. جمع اعداد طبیعی توسط استقراء به صورت زیر تعریف می‌شود:[۴]

$$x + \circ = x$$
$$x + (n + ۱) = (x + n) + ۱.$$

---

[2] recursion

[۳] برای مشاهدهٔ قضیهٔ بازگشت خواننده را به منابع [۱۶]،[۱۰] و یا فصل ۲-۳ در [۲] و یا قضیهٔ ۲۳۴ در [۱] ارجاع می‌دهیم.

[۴] در واقع تابع‌های جمع و ضرب و توان، در اعداد طبیعی «تعریف‌پذیر» هستند. یعنی فرمولی در نظریهٔ مجموعه‌ها پیدا می‌شود که $x + y = z$ را وصف کند. اثبات این گفته نیز به اثبات استقراء تعمیم یافته دارد که در اینجا بدان نپرداخته‌ام. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند این گونه قضایا را در جزوهٔ مبانی منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها (از خودم) بیابد.

همچنین ضرب اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m \times ۰ = ۰$$
$$m \times (n + ۱) = m \times n + ۱.$$

تابعِ فاکتوریل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$۰! = ۱$$
$$(n + ۱)! = (n + ۱) \times n!.$$

به همین ترتیب، توان‌رسانی اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m^{۰} = ۱$$
$$m^{n+۱} = m \times m^n.$$

به مجموعهٔ $\mathbb{N}$ به همراه توابعِ جمع و ضرب در بالا، «ساختارِ اعداد طبیعی» گفته می‌شود. ساختار اعداد طبیعی را به صورتِ $(\mathbb{N}, +, \times)$ نشان می‌دهند. مطالعهٔ ویژگی‌های مختلف این ساختار، موضوع بخشی از علم ریاضیات به نام «نظریهٔ اعداد» است.

تمرین ۱.۴. احکام زیر را با استقراء ثابت کنید.

۱. برای هر عدد طبیعیِ n عددِ $n^۳ - n$ بر ۳ بخش پذیر است.

۲. برای هر عدد طبیعیِ $n \geq ۱۰$ داریم $n^۳ \leq ۲^n$.

۳. برای هر عدد طبیعیِ $n \geq ۴$ داریم $n! > ۲^n$.

۴. برای هر عدد طبیعیِ n عددِ $۳^{n+۲} + ۲^{۴n+۲}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۵. برای هر عدد طبیعیِ $n \geq ۱$ داریم

$$۱ + ۲ + \ldots + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$$
$$۱^۲ + ۲^۲ + \ldots + n^۲ = \frac{n(n + ۱)(۲n + ۱)}{۶}$$
$$۱^۳ + ۲^۳ + \ldots + n^۳ = \left(\frac{n(n + ۱)}{۲}\right)^۲ = (۱ + ۲ + \ldots + n)^۲.$$

توجه ۵.۴. گفتیم که استقراء در اعداد طبیعی بیان‌گر این است که اگر حکمی دربارهٔ عدد ۰ درست باشد، و از درست بودن آن حکم دربارهٔ عددِ n درست بودن آن دربارهٔ عددِ $n + ۱$ نتیجه شود، آنگاه آن حکم برای هر عددِ طبیعیِ n درست است. در واقع، با استفاده از استقراء، می‌توان حکمی را دربارهٔ هر عدد طبیعی ثابت کرد، ولی نمی‌توان حکمی را دربارهٔ مجموعهٔ اعداد طبیعی ثابت کرد. مثلاً عددِ ۰ یک مجموعهٔ متناهی است؛ اگر n یک مجموعهٔ متناهی باشد آنگاه $n + ۱$ هم متناهی است؛ از این نتیجه می‌شود که هر عدد طبیعیِ n یک مجموعهٔ متناهی است؛ اما نتیجه نمی‌شود که مجموعهٔ اعداد طبیعی متناهی است!

برای فهم بهتر گفتهٔ بالا مثال پیش رو را در نظر بگیرید. فرض کنید که صفی از افراد مقابل ما قرار دارد. نفر اول صف، عینکی است و می‌دانیم که هر کس که عینکی باشد، نفر پس از او نیز عینکی است. از این تنها نتیجه‌ای که می‌شود گرفت این است که هر یک از افرادی که در صف ایستاده است ، عینکی است؛ ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که خودِ صف عینک دارد!

گفتهٔ بالا از لحاظ فلسفی نیز دارای بار معنائی است. وقتی در درون یک جهان از استقراء استفاده می‌کنیم، حکمی دربارهٔ اعضای آن جهان نتیجه می‌گیریم نه حکمی دربارهٔ کُلِّ آن جهان یا بیرون آن! برای توضیح بیشتر، فصل «خانواده‌های مجموعه‌ها» را ببینید.[۵]

۲.۴ استقراء و خوش‌ترتیبی

یک روش دیگر معرفی اعداد طبیعی، استفاده از اصل انتظام و انتخاب است. در این روش، هر عدد طبیعی یک مجموعه است که هر زیرمجموعهٔ آن دارای مینیموم و ماکزیموم نسبت به رابطهٔ $\in$ است. همچنین در این روش، می‌توان به جای اصل وجود مجموعهٔ استقرایی، «اصل وجود یک اُردینال حدی» را در نظر گرفت و در این صورت مجموعهٔ اعداد طبیعی، کوچکترین اُردینال حدی است. دربارهٔ اُردینال حدی در فصلِ ۱۳ صحبت خواهیم کرد و از این رو انتظار نداریم که این مقدمه، در این مقطع به طور کامل قابل درک باشد.

استقرای اعداد طبیعی در این شیوه، نتیجه‌ای از این نکته است که هر زیرمجموعهٔ اعداد طبیعی دارای مینیموم است. در ادامهٔ بخش، بدون پرداختن به اُردینال‌ها و جذابیت آن‌ها، به نحوی خواننده را با جلوه‌ای از این نوع نگاه به اعداد طبیعی نیز آشنا کرده‌ایم و کوشیده‌ایم استقرای اعداد طبیعی را بر اساس خوش‌ترتیبی آن اثبات کنیم.

قضیه ۶.۴. هر زیرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی دارای یک مینیموم است.

احتمالاً در هر کتاب معمول ریاضی، اثبات زیر را برای قضیهٔ بالا مشاهده کنیم:

اثبات نادقیق. فرض کنید که A زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد طبیعی باشد که مینیموم ندارد. عنصرِ $a_0 \in A$ را در نظر بگیرید؛ این عنصر مینیموم نیست. پس در A عنصرِ $a_1 \in a_0$ وجود دارد. به این ترتیب، از آنجا که a_1 هم مینیموم نیست می‌توان این کار را ادامه دارد و به یک دنبالهٔ

$$a_0 \ni a_1 \ni \dots$$

از مجموعه‌ها رسید که این بنا به قضیهٔ ۱۷.۳ اصل انتظام را نقض می‌کند. □

اثباتی که برای قضیهٔ ۶.۴ در بالا نوشته‌ایم، سراسر بی دقت است و در آن اثری از استفادهٔ درست از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها دیده نمی‌شود. اولین ایراد اثبات بالا این است که نباید در یک اثبات ریاضی، یک کار را نامتناهی بار انجام داد؛ اثبات اصولاً فرایندی متناهی است. در ظاهر این اثبات، برای یافتن هر a_i یک بار از اصل انتخاب استفاده شده است. اما ایراد دوم این است که اصولاً در این صورت که اثبات نوشته شده است، برای پیدا کردن یک a_i در یک مرحلهٔ مشخص هیچ نیازی به اصل انتخاب نداریم.

بیایید در زیر اشاره‌ای به اثبات درست داشته باشیم:

[۵] نمونهٔ این گونه استفاده نادرست از استقراء را زیاد دیده‌ام!

اثبات دقیق قضیهٔ ۶.۴. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد که مینیموم ندارد. تابعِ $k : A \to P(A)$ را با ضابطهٔ $k(x) = \{y \in A : y < x\}$ در نظر بگیرید. از آن جا که هیچ کدام از عناصر A مینیموم آن نیست، $k(x)$ برای هر $x \in A$ ناتهی است. همچنین فرض کنید $h : P(A) \to A$ یک تابع انتخاب باشد که از هر یک از زیرمجموعه‌های (ناتهیِ) A یک عنصر انتخاب می‌کند. در این صورت $h \circ k$ یک تابع از A به A است که برای هر عنصرِ $x \in A$ عنصری کمتر از آن در A انتخاب می‌کند. حال بنا به قضیهٔ بازگشت یک تابع $g : \mathbb{N} \to A$ وجود دارد به طوری که $g(\circ) = a_\circ$ و $g(n + ۱) = h \circ k(g(n))$.

از آنجا که تابعِ g با استفاده از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها ایجاد شده است، بنا به اصل جانشانی، $\{g(\circ), g(۱), g(۲), \ldots\}$ یک مجموعه است. اما مجموعه بودن این گردایه، اصل انتظام را بنا به قضیهٔ ۱۷.۳ نقض می‌کند.

$\square$

حال می‌توانیم استقراء روی اعداد طبیعی را با استفاده از این حقیقت که هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی دارای کوچکترین عنصر است ثابت کنیم: فرض کنید $S \subseteq \mathbb{N}$ شامل $\circ$ باشد و از این که S شامل n است نتیجه شود که شامل $n + ۱$ است. اگر S برابر با خودِ $\mathbb{N}$ نباشد آنگاه $\mathbb{N} - S$ یک زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbb{N}$ است پس دارای مینیموم است. فرض کنید a مینیموم مورد نظر باشد؛ در این صورت a کوچکترین عدد طبیعی است که در مجموعهٔ S قرار ندارد. از آنجا که a کوچکترین عددی است که در S نیست، هر عدد کوچکتر از a در S است؛ به طور خاص $a - ۱ \in S$. اما S این ویژگی را دارد که از $a - ۱ \in S$ نتیجه می‌شود که $a \in S$. پس $a \in S$ و این یک تناقض است که از فرضِ این که $S \neq \mathbb{N}$ ناشی شده است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $S = \mathbb{N}$.

تمرین ۲.۴. نشان دهید هر عدد طبیعیِ مخالفِ صفر، دارای یک ماقبل طبیعی است. یعنی

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \neq \circ \to \exists n' \in \mathbb{N} \quad n = n' + ۱).$$

از ابتدای این کتاب، به دنبال بیان یک تعداد اصل‌موضوعه، برای نظریهٔ مجموعه‌ها بودیم. پس از بیان این اصول موضوعه، و با فرض این که جهانی از مجموعه‌ها وجود دارد، دیدیم که در این جهان، مجموعه‌ای به نام مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد. روی این مجموعه «توابع اعمال اصلی» را تعریف کردیم و دیدیم که در واقع ساختاری به نام $(\mathbb{N}, +, \times)$ وجود دارد. همچنین گفتیم که جهانی از نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد (به نام جهان خوش‌بنیاد) که در آن $\mathbb{N}$ همان مجموعهٔ اعداد طبیعی مورد علاقهٔ ماست. با فرض این که خودِ نظریهٔ مجموعه‌ها، دارای یک جهان باشد، می‌شود دربارهٔ اصل‌پذیریِ قطعاتی از آن، مثلاً ساختارِ اعداد طبیعی هم سوال کرد. یعنی منطقی است که بپرسیم که آیا ممکن است که تعدادی (نه چندان زیاد) اصل موضوعه، یعنی جملهٔ مرتبهٔ اول با استفاده از علائمِ $+, \times$ نوشت، به طوری که این اصول موضوعه در جهانِ $(\mathbb{N}, +, \times)$ درست باشند و هر قضیه‌ای که در مورد اعداد طبیعی آشنای ما درست است، از این اصول موضوعه نتیجه شود؟ یکی از چنین اصول موضوعه‌ای، می‌تواند همان اصل موضوعه‌ای باشد می‌خواهد استقراء در اعداد طبیعی استقراء درست باشد. دقت کنید که بنا به آنچه دربارهٔ منطق مرتبهٔ اول گفتیم، وقتی چنین اصول موضوعه‌ای نوشته شود، جهان‌های مختلفی می‌توانند وجود داشته باشند که این اصول موضوعه در آن‌ها صادق است.

پاسخ به این سوال در حیطهٔ قضیهٔ ناتمامیت اول گودل قرار می‌گیرد که در بخش دیگری از کتاب بدان خواهیم پرداخت. قضیهٔ ناتمامیت اول گودل، بیان‌گر این است که هر سیستم اصول موضوعه‌ای که توسط یک الگوریتم برای ساختار اعداد طبیعی تولید شود کامل نیست؛ یعنی حقیقتی در مورد اعداد طبیعی آشنای ما وجود دارد که با استفاده از این اصول موضوعه اثبات نمی‌شود. بنابراین همیشه حقیقتی وجود دارد که با این که در جهان اعداد طبیعی آشنای

ما درست است، در برخی جهان‌های دیگری که آن‌ها هم از اصول موضوعهٔ ما پیروی می‌کنند غلط است. در بخشِ ۱.۷.۹ دوباره به این نکات خواهیم پرداخت.

در حین اثباتِ استقرای اعداد طبیعی، دانشجویی پرسید که «مگر استقرای اعداد طبیعی یک اصل‌موضوعه نیست». پاسخ این است که در نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات می‌شود که مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد و استقرا دربارهٔ آن درست است. اما می‌توان خودِ این قطعه از جهانِ $\mathbf{V}$ را به طور مستقل در منطق مرتبهٔ اول مطالعه کرد؛ یعنی برای آن اصول‌موضوعه نوشت. پس می‌شود برای مجموعه‌هایی در $\mathbf{V}$ که به صورت $(M, +_M, \cdot_M)$ هستند اصول‌موضوعه‌ای نوشت که یکی از چنین اصول‌موضوعه‌ای «استقراء» است. در صورتی که اصول‌موضوعهٔ مورد نظر تناقض ندهند، جهان‌های مختلفی برای آن‌ها پیدا خواهد شد و سپس می‌شود دربارهٔ هماهنگ بودن یا نبودن این جهان‌ها با هم (یعنی کامل بودن یا نبودن اصول‌موضوعه) سوال پرسید.

۳.۴ قضیهٔ بازگشت و پیچیدگی‌های استفاده از اصول

خواننده می‌تواند از خواندن این بخش به نفع رسیدن به مطالب جذاب‌تر بعدی خودداری کند. در بخش‌های گذشته، گفتیم که اصول نظریهٔ مجموعه‌ها آن قدر بدیهی به نظر می‌رسند که گاهی ممکن است درنیابیم که از کدامشان استفاده کرده‌ایم. در این میان اصل انتخاب، جایگاه ویژه‌ای دارد. نمونه‌اش پیچیدگی رعایت دقیق نحوهٔ استفاده از اصل انتخاب و قضیهٔ بازگشت در اثباتِ قضیهٔ ۶.۴ است.

همچنین در بخش «وجود مجموعهٔ اعداد طبیعی و استقراء» بدین نکته اشاره شد که در تعاریف استقرائی، به قضیهٔ بازگشت نیاز است. در این بخش کوتاه، فرصتی می‌یابیم که قضیهٔ بازگشت را به صورت دقیق بیان کنیم.

قضیه ۷.۴ (بازگشت). فرض کنید که $g : A \to B$ و $h : A \times \omega \times B \to B$ دو تابع باشند (که تابع بودنشان با استفاده از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها محرز شده است). در این صورت، بنا به اصول نظریهٔ مجموعه‌ها یک تابعِ $f : A \times \omega \to B$ وجود دارد به طوری که

$$f(a, \circ) = g(a)$$

$$f(a, n + ۱) = h(a, n, f(a, n))$$

برای هر $a \in A$ و $n \in \omega$.

تمرین ۳.۴. بررسی کنید که در تعریفِ جمع و ضرب اعداد طبیعی، از چه توابعی در قضیهٔ بازگشت استفاده شده است.

همان طور که پیش‌تر نیز تأکید کردیم، قضیهٔ بازگشت، که به اثبات آن در این درس نخواهیم پرداخت، درواقع نحوهٔ استفاده از استقراء برای به دست آوردن توابع با دامنهٔ اعداد طبیعی را بیان می‌کند. به طور خاص، بنا به این قضیه، اگر $h : A \to A$ یک تابع باشد و $a \in A$ یک عنصر باشد، آنگاه تابعی مانند $f : \mathbb{N} \to A$ وجود دارد که به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود:

$$f(\circ) = a$$

$$f(n + ۱) = h(f(n)).$$

در فصل ۳ گفتیم که اگر اصل انتظام برقرار نباشد، یک دنباله به صورتِ

$$a_\circ \ni a_۱ \ni a_۲ \ldots$$

از مجموعه‌ها پیدا می‌شود. بیان دقیق این گفته به صورت زیر است: اگر اصل انتظام برقرار نباشد، با فرض این که اصل وجود مجموعهٔ استقرایی برقرار است و با استفاده از قضیهٔ بازگشت و دقیقاً مشابه اثباتِ قضیهٔ ۶.۴ می‌توان یک تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbf{V}$ تعریف کرد به طوری که برای هر عدد طبیعیِ n داریم. $a_n = f(n) \ni a_{n+1} = f(n+1)$.
حال بنا به اصل جانشانی، $\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$ تشکیل یک مجموعه می‌دهد.

۴.۴ تمرین‌های تکمیلی

در تمرین‌های پیش رو، از شما خواسته شده است که احکامی مانندِ $p(x)$ را در مورد اعداد طبیعی ثابت کنید که نوشتنِ خودِ جملهٔ $p(x)$ در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها چندان آسان نیست. برای حل تمرین‌های پیش رو، این نگرانی را کنار بگذارید و تنها مفهوم استقراء را تمرین کنید.

تمرین ۴.۴. فرض کنید که a یک مجموعهٔ n عضوی باشد و $r \leq n$. نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های r عضویِ a برابر است با

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

تمرین ۵.۴. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n داریم

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

و از آن نتیجه بگیرید که

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

نتیجه ۸.۴. فرض کنید که a یک مجموعهٔ n عضوی باشد. واضح است که داریم:
تعداد زیرمجموعه‌های a برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی a به علاوهٔ تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی a به علاوه ...تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی a. به بیان دیگر، تعداد زیرمجموعه‌های a برابر است با

$$\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

بنا به تمرین‌های قبلی، **تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر با 2^n است.**

تمرین ۶.۴. فرض کنید $A, B_1, \cdots, B_n$ مجموعه باشند. با استفاده از استقراء نشان دهید که

$$A \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$$

و

$$A \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap \cdots \cap (A \cup B_n).$$

خلاصهٔ فصل چهارم. یکی از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، اصل موضوع وجود مجموعهٔ استقرایی است. بنا به این اصل موضوعه و اصل تصریح، در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، یک کوچکترین مجموعهٔ استقرایی وجود دارد که به آن مجموعهٔ اعداد طبیعی گفته می‌شود. درست بودن استقراء روی مجموعهٔ اعداد طبیعی را می‌توان به دو طریق اثبات کرد؛ هم با استفاده از این نکته که مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچکترین مجموعهٔ استقرایی است و هم با استفاده از این نکته که هر زیرمجموعه از مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای یک مینیموم است. عبارت آخر از اصل انتظام ناشی می‌شود. مطالعهٔ اعداد طبیعی موضوعی بخشی از علم ریاضیات به نام «نظریهٔ اعداد» است.

فصل ۵

خانواده‌ها و ضرب‌های دکارتی

۱.۵ خانواده‌ها

فهم سخن گر نکند مستمع
قوّت طبع از متکلم مجوی
فُسحَتِ میدان ارادت بیار
تا بزند مردِ سخنگوی، گوی
سعدی

مفهوم «خانواده» یکی از موارد ظهور **اصل جانشانی** است. مثل همیشه فرض کنید $\mathbf{V}$ جهان همهٔ مجموعه‌ها باشد. بنا به اصل جانشانی، اگر Γ یک مجموعه و $f : \Gamma \to \mathbf{V}$ یک تابع باشد،[1] آنگاه کلاسِ $\{f(\gamma)|\gamma \in \Gamma\}$ تشکیل یک مجموعه می‌دهد. هر $f(\gamma)$ یک مجموعه است و کلاسِ $\{f(\gamma)|\gamma \in \Gamma\}$ را یک خانواده از مجموعه‌ها، با مجموعهٔ اندیسِ Γ می‌نامیم.

تعریف را ساده‌تر می‌کنیم: فرض کنید Γ یک مجموعه باشد و برای هر $\gamma \in \Gamma$ یک مجموعهٔ A_γ را در نظر بگیرید. عبارت زیر را، یک خانوادهٔ اندیس‌دار از مجموعه‌ها می‌خوانیم:

$$\{A_\gamma|\gamma \in \Gamma\}.$$

خانوادهٔ بالا از مجموعه‌ها را به صورت کوتاه‌شدهٔ زیر نیز نمایش می‌دهیم:

$$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}.$$

چند نکتهٔ مهم زیر را دربارهٔ یک خانواده از مجموعه‌ها در نظر داشته باشید:

۱. اندیس‌های یک خانواده از مجموعه‌ها، از یک **مجموعه** می‌آیند؛ به بیان دیگر، یک خانواده از مجموعه‌ها، به اندازه یک کلاس از مجموعه‌ها، بزرگ نیست. برای این که $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ یک *خانواده* از مجموعه‌ها باشد، باید این را بدانیم که Γ یک مجموعه است.

[1] دربارهٔ مفهوم تابع بعداً صحبت خواهم کرد. از آنجا که $\mathbf{V}$ مجموعه نیست، بهتر است f را شبه‌تابع بنامیم.

۲. ممکن است برخی از اعضای یک خانواده از مجموعه‌ها تکراری باشند: $A_\gamma = A_{\gamma'}$. مثلاً عبارت زیر یک خانواده از مجموعه‌هاست:

$$A = \{a, a, a, a\}.$$

خانوادهٔ بالا را می‌توان به صورت زیر اندیس‌گذاری کرد:

$$A = \{A_i\}_{i\in I} \quad I = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \quad \forall i \in I \quad A_i = a.$$

۳. یک خانواده را باید بتوان بر حسب مجموعهٔ اندیس آن وصف کرد. برای مثال،

$$F = \{\{۱\}, \{۲, ۳\}, \{۳, ۴, ۵\}, \{۴, ۵, ۶, ۷\}, \ldots\}$$

یک خانواده از مجموعه‌هاست که به صورت زیر وصف می‌شود:

$$F = \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}-\{۰\}}$$

و[۲]

$$A_i = \{i, i + ۱, \ldots, i + (i - ۱)\}.$$

توجه ۱.۵ (مجموعه، کلاس، گردایه، خانواده). در متون شاخص ریاضی، عبارت‌های مجموعه، کلاس، گردایه و خانواده هر کدام بنا به علتی مشخص استفاده می‌شوند؛ اما شاید ریاضی‌دانانِ کمی تفاوت اینها را با هم بدانند. گفتیم که به هر عنصر در جهانِ $\mathbf{V}$ یک مجموعه گفته می‌شود؛ در واقع مجموعه، موجودی است که وجودِ در آن در $\mathbf{V}$ از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها استنتاج شود. همچنین گفتیم که منظور از یک کلاسِ A عبارتی به صورت $\{x \mid p(x)\}$ است؛ یعنی هر کلاس از مجموعه‌هایی تشکیل شده است که ویژگی خاصی دارند و این ویژگی قابل نوشتن توسط یک فرمول مرتبهٔ اول است. یک کلاس لزوماً مجموعه نیست، مثلاً کلاس $\mathbf{V} = \{x \mid x = x\}$ کلاس همهٔ مجموعه‌هاست که بنا به قضیهٔ ۲۱.۳ مجموعه نیست. عموماً کلاس‌ها «بزرگتر» از آنند که مجموعه باشند. در فصل قبلی از کلمهٔ «گردایه» استفاده کردیم؛ گفتیم، با این که هر یک از $۰, ۱, ۲, \ldots$ یک مجموعه هستند، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که «گردایهٔ» $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ یک مجموعه است. پس هر گردایه، از مجموعه‌هایی در کنار هم تشکیل شده است به طوری که لزوماً یک فرمول وجود ندارد که ویژگی مشترکی برای آن‌ها بیان کند، و همچنین راهی برای اثبات مجموعه بودن آن گردایه وجود ندارد. در واقع، اگر $\mathbf{V}$ یک جهان از نظریهٔ مجموعه‌ها باشد و A یک گردایه در آن باشد، خودِ جهانِ $\mathbf{V}$ از مجموعه بودن یا نبودنِ این گردایه بی‌خبر است.[۳] نهایتاً در این بخش، مفهوم خانوادهٔ مجموعه‌ها را تعریف کردیم و تأکید کردیم که با اصل جانشانی ایجاد می‌شود. یک خانواده از مجموعه‌ها، تابعی از یک مجموعه، به جهانِ همهٔ مجموعه‌هاست که برد و دامنهٔ آن را به صورت فشردهٔ $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۵. فرض کنید $F = \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \exists\gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\},$$

[۲] برای وصف دقیق خانوادهٔ بالا، دقت می‌کنیم که مجموعهٔ اندیس برابر با $\mathbb{N} - \{۰\}$ است و داریم

$$\forall i \in \mathbb{N} - \{۰\} \quad \forall x \quad \big(x \in A_i \leftrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge x \geq i \wedge x \leq i + (i - ۱)\big)$$

[۳] هر چند شاید ناظر بیرونی بداند که A یک مجموعه است.

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \forall\gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}.$$

دقت کنید که $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ در واقع همان $\bigcup F$، و $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ همان $\bigcap F$ با نمادهای فصلِ ۳ هستند.

برای رسیدن به مطالب جذاب ادامهٔ کتاب می‌توان از خواندن باقی این فصل خودداری کرد. برای این که بتوانیم مثالی جذاب از خانواده‌های مجموعه‌ها بزنیم، نیاز به صحبت کوتاهی دربارهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی داریم. خواننده‌ای که منطق این کتاب را دنبال می‌کند باید بداند که قرار است همان‌طور که مجموعهٔ اعداد طبیعی به طور دقیق معرفی شد، در بخش‌های آینده (بخشِ ۴.۷) به مجموعه‌های اعداد صحیح، گویا و حقیقی نیز پرداخته شود. اجمالاً، همان طور که در هر جهانِ نظریهٔ مجموعه‌ها، یک مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد، در هر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها یک مجموعه به نام مجموعهٔ اعداد حقیقی نیز وجود دارد. این مجموعه به نحوی که در فصلِ ۴.۷ توضیح خواهیم داد با استفاده از مجموعهٔ اعداد طبیعی ساخته می‌شود. یکی از ویژگی‌های بنیادینی که برای اعداد حقیقی با این ساخت ایجاد خواهد شد، «اصل کمال» است (همان طور که ویژگی بنیادی استقرایی بودن برای اعداد طبیعی از ساخت این اعداد ناشی شد). در ادامهٔ بحث، فرض کرده‌ایم که خواننده مجموعهٔ اعداد حقیقی را می‌شناسد؛ در واقع همان شناخت دبیرستانی او از این مجموعه برای توضیح اصل کمال کافی خواهد بود. بیایید مجموعهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان دهیم.[۴]

فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ یک زیرمجموعهٔ دلخواه باشد. می‌گوییم A از بالا کراندار است هرگاه

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \forall y \in A \quad y < t.$$

اصل کمال بیان‌گر این است: «هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی که از بالا کراندار است، دارای کوچکترین کران بالاست»؛ یعنی کران بالایی برای این مجموعه وجود دارد که از همهٔ کرانهای بالای دیگرِ این مجموعه کوچکتر است. پایهٔ همهٔ قضیه‌های مهم آنالیز، حساب و توپولوژی در مورد اعداد حقیقی است، همین اصل کمال است. دقت کنید که ساختارهای دیگر اعداد، مثلاً اعداد گویا چنین ویژگی‌ای ندارند.

بیایید عبارتِ «اگر A یک کران بالا داشته باشد آنگاه A دارای کوچکترین کران بالاست» را با فرمول‌ها بنویسیم:

$$\begin{aligned}&\big(\exists u \forall x \in A \quad x \leq u\big) \rightarrow \\ &\exists t\Big(\underbrace{(\forall x \in A \quad x \leq t)}_{\text{است } A \text{ یک کران بالا برای } t} \wedge \big(\forall y \quad \underbrace{(\forall x \in A \quad x \leq y)}_{\text{باشد } A \text{ یک کرانِ بالای دیگر برای } y \text{ اگر}} \quad \rightarrow t < y\big)\Big).\end{aligned}$$

قضیه ۳.۵. از اصل کمال نتیجه می‌شود هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که همزمان از تمامی اعداد طبیعی بزرگتر باشد.

اثبات. فرض کنید u یک عدد حقیقی باشد که همزمان از تمام اعداد طبیعی بزرگتر است. در این صورت، مجموعهٔ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ یک زیرمجموعهٔ کراندار است (زیرا واضح است که u یک کران بالا برای آن است.) بنا به اصل کمال، $\mathbb{N}$ دارای کوچکترین کران بالاست؛ فرض کنید مثلاً t کوچکترین کرانِ بالای مجموعهٔ $\mathbb{N}$ باشد.

از آنجا که t کوچکترین کران بالا برای مجموعهٔ $\mathbb{N}$ است، عددِ $t - ۱$ کران بالای مجموعهٔ $\mathbb{N}$ نیست؛ چون در این صورت یک کران بالای کوچکتر از کوچکترین کران بالا می‌شد!

از آنجا که $t - ۱$ کران بالایی برای $\mathbb{N}$ نیست، یک عدد طبیعیِ $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که از $t - ۱$ بیشتر است: $n > t - ۱$. اما در این صورت $t < n + ۱$ یعنی یک عدد طبیعی، به نام $n + ۱$ پیدا می‌شود که از t بزرگتر است و این کرانِ بالا بودنِ t را نقض می‌کند. □

[۴] خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند کتاب‌های استاندارد آنالیز ریاضی، مثلاً منبعِ [۱۴] را نگاه کند.

ویژگی‌ای که در قضیهٔ بالا برای اعداد حقیقی ثابت کردیم، «ویژگی ارشمیدسی» نامیده می‌شود. ویژگی ارشمیدسی می‌گوید: «هیچ عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر باشد».

حال به خانواده‌ها برگردیم. با استفاده از خانواده‌های مجموعه‌ها، می‌توان گفتهٔ بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}-\{\circ\}} (n,\infty)=\varnothing,$$

که در بالا منظورمان از (n,∞) مجموعهٔ زیر است:

$$\{x\in\mathbb{R}|x>n\}.$$

نتیجه ۴.۵. خانوادهٔ $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}-\{\circ\}}$ را در نظر بگیرید که در آن $A_n=(\circ,\frac{1}{n})=\{x\in\mathbb{R}|\circ<x<\frac{1}{n}\}$. داریم:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\varnothing.$$

اثبات. فرض کنید $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. بنا به تعریفِ اشتراکِ خانواده‌ها، برای هر $n\in\mathbb{N}-\{\circ\}$ داریم $x\in(\circ,\frac{1}{n})$. به بیان دیگر، x از هر عددِ $\frac{1}{n}$ که در آن n یک عدد طبیعی ناصفر است، کوچکتر است. اما در این صورت $\frac{1}{x}$ از هر عددِ طبیعیِ n بزرگتر می‌شود؛ و این ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی را نقض می‌کند.

□

تمرین ۱.۵. نشان دهید که دو حکم زیر با هم معادلند:

- هیچ عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر باشد.
- هیچ عدد حقیقی‌ای غیر صفر وجود ندارد که از تمام $\frac{1}{n}$ ها کوچکتر باشد.

تمرین ۲.۵. با ذکر دلیل، بررسی کنید که کدام‌یک از احکام زیر در مورد مجموعهٔ اعداد حقیقی درست و کدام غلط است.

۱. $\forall n\in\mathbb{N}\quad\exists r\in\mathbb{R}\quad \circ<r<\frac{1}{n}$

۲. $\exists r\in\mathbb{R}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad \circ<r<\frac{1}{n}$

۳. $\forall r\in\mathbb{R}\quad\exists n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{n}<r$.

مفهوم خانواده‌های مجموعه‌ها، فرصت مناسبی فراهم می‌کند تا دوباره در مورد ابهامی که در توجه ۵.۴ صفحهٔ ۸۹ دربارهٔ استقراء گفته بودیم توضیح دهیم. دقت کنید که می‌توان با استقراء روی اعداد طبیعی نشان داد که برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\bigcap_{1\leq i\leq n}(\circ,\frac{1}{i})=(\circ,\frac{1}{n}).$$

اما از طرفی، چنان چه در بالا دیدیم $\bigcap_{i\in\mathbb{N}-\{\circ\}}(\circ,\frac{1}{i})=\varnothing$.

تمرین ۳.۵. آیا با استقراء روی اعداد طبیعی می‌توان ثابت کرد که $\bigcap_{i\in\mathbb{N}-\{\circ\}}(\circ,\frac{1}{i})=\varnothing$ ؟

در توضیح تمرین بالا، بیایید یک وضعیت مشابه را بررسی کنیم. می‌دانیم که:

$$A \cap (B_۱ \cup B_۲) = (A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲),$$

همچنین دیدیم که با استقراء می‌توان ثابت کرد که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$A \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_۱) \cup \ldots \cup (A \cap B_n).$$

عبارت بالا را می‌توان با استفاده از خانواده‌ها به صورت زیر نوشت:

$$A \cap \bigcup_{i \in \{۱,\ldots,n\}} B_i = \bigcup_{i \in \{۱,\ldots,n\}} (A \cap B_i).$$

حال ادعا می‌کنیم که این حکم را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$A \cap \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\Big) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap B_i). \qquad (۱.۵)$$

مشابه تمرین بالا، از خواننده می‌پرسیم که آیا حکم فوق را می‌توان با استقراء روی اعداد طبیعی اثبات کرد؟ [۵] در فصل قبل گفتیم که با استفاده از استقراء می‌توان احکامی مانند حکم زیر را **دربارهٔ هر عدد طبیعی** ثابت کرد: برای هر عددِ طبیعیِ n داریم $p(n)$. به عنوان مثال، حکم زیر را می‌توان با استقراء ثابت کرد: برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $۱ + ۲ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$. یا مثلاً این حکم که هر عدد طبیعی ناصفر از عدد قبل از خودش بزرگتر است را نیز می‌توان با استقراء به دست آورد. اما همان طور که در توجه ۵.۴ گوشزد کردیم استقراء را نمی‌توان برای اثبات حکمی **در مورد «مجموعهٔ اعداد طبیعی»** استفاده کرد. برای مثال نمی‌توان این حکم را که «مجموعهٔ اعداد طبیعی مجموعه‌ای نامتناهی است» با استقراء ثابت کرد. حکمِ ۱.۵ نیز حکمی دربارهٔ یک عددِ طبیعیِ n نیست، پس نمی‌توان آن را با استقراء ثابت کرد. روش صحیح اثبات این حَکم در زیر آمده است:

اثباتِ حکمِ ۱.۵. از آنجا که در دو طرف مجموعه داریم بنا به اصل گسترش کافی است نشان دهیم:

۱. $A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\big) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap B_i)$ و

۲. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap B_i) \subseteq A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\big)$.

یک عنصرِ $x_\circ$ را به صورت دلخواه در نظر بگیرید. استلزام‌های زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} x_\circ \in A \cap \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\Big) &\Rightarrow (x_\circ \in A) \wedge \Big(x_\circ \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\Big) \\ &\Rightarrow x_\circ \in A \wedge \big(\exists i_\circ \in \mathbb{N} \quad x_\circ \in B_{i_\circ}\big). \end{aligned}$$

بنابراین، از این که $x_\circ \in A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\big)$ نتیجه گرفتیم $i_\circ \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $x_\circ \in A \cap B_{i_\circ}$. اما طبق تعریفِ اجتماع خانواده‌ها، این دقیقاً یعنی $x_\circ \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B_{i_\circ}$؛ پس خط زیر به استلزام‌های بالا اضافه می‌شود:

$$\Rightarrow x_\circ \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap B_i),$$

[۵] این سوال زمانی برایم مطرح شد که یکی از دانشجویان در امتحان کوشیده بود با استقراء حکم مورد نظر را ثابت کند.

و به این ترتیب مورد ۱ ثابت می‌شود.

برای اثبات مورد ۲ فرض کنید که $x_\circ$ مجموعه‌ای دلخواه باشد و دقت کنید که استلزام‌های زیر برقرارند:

$$x_\circ \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big(A\cap B_i\big) \Rightarrow \exists i_\circ \in \mathbb{N} \quad x_\circ \in A\cap B_{i_\circ} \Rightarrow (x_\circ \in A)\wedge(x_\circ \in B_{i_\circ}).$$

از آنجا که $B_{i_\circ} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$، خط زیر نیز به استلزام بالا اضافه می‌شود:

$$x_\circ \in A\cap \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\big).$$

□

حکم ۱.۵ برای هر مجموعهٔ اندیسی درست است:

قضیه ۵.۵ (پخش‌پذیری). فرض کنید Γ یک مجموعهٔ اندیس باشد. در این صورت:

۱. $A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big)$

۲. $A\cup\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cup B_\gamma\big)$

اثبات. در زیر تنها مورد اول را ثابت کرده‌ایم. ابتدا نشان می‌دهیم که

$$A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big).$$

داریم:

$$x_\circ \in A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) \Rightarrow x_\circ\in A \wedge x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$$

حال از این که $x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$ بنا به تعریف، نتیجه می‌گیریم که یک اندیسِ $\gamma_\circ \in \Gamma$ وجود دارد به طوری که $x_\circ \in B_{\gamma_\circ}$. بنابراین $x_\circ \in A\cap B_{\gamma_\circ}$. اما بنا به تعریفِ اجتماعِ خانوادهٔ $\{(A\cap B_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ این یعنی $x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A\cap B_\gamma$.

فرض کنید $\gamma_\circ$ یکی از γ هایی باشد که در بالا وجود آن اثبات شده است. از $(x_\circ\in A)\wedge(x_\circ\in B_{\gamma_\circ})$ نتیجه می‌گیریم که $x_\circ\in A\cap B_{\gamma_\circ}$. اما این که عنصری چون $\gamma_\circ$ وجود دارد که $x_\circ \in A\cap B_{\gamma_\circ}$ بنا به تعریف، یعنی x در اجتماع خانوادهٔ $\{B\cap A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ است؛ به بیان دیگر $x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A\cap B_\gamma$. پس می‌توان استلزام‌های بالا را به صورت زیر ادامه داد:

$$\Rightarrow x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap B_\gamma)$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big).$$

حال درستی $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big) \subseteq A\cap\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big)$ را بررسی می‌کنیم:

$$x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\big(A\cap B_\gamma\big) \Rightarrow \exists\gamma\in\Gamma \quad x_\circ\in A\cap B_\gamma$$

دوباره فرض کنید $\gamma_\circ$ یکی از γ هایی باشد که وجود آن در بالا اثبات شده است. ادامهٔ استلزام بالا به صورت زیر است:

$$\Rightarrow x_\circ \in A \wedge x_\circ \in B_{\gamma_\circ} \Rightarrow (x_\circ \in A) \wedge (x_\circ \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma)$$

$$\Rightarrow x_\circ \in A \cap \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\big).$$

□

قضیه ۶.۵. فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد. در این صورت

۱. $\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$،

۲. $\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\big) A_\gamma\big)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$.

اثبات. تنها مورد اول را ثابت می‌کنیم. می‌خواهیم نشان دهیم که $\underbrace{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c}_{D} = \underbrace{\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)^c}_{C}$. مسیر اثبات به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x_\circ \in C &\iff x_\circ \in \big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big)^c \\ &\iff x_\circ \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \\ &\iff \forall\gamma\in\Gamma \quad (x_\circ \notin A_\gamma) \\ &\iff \forall\gamma\in\Gamma \quad x_\circ \in A_\gamma^c \\ &\iff x_\circ \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c. \end{aligned}$$

□

مثال ۷.۵. حاصل $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(k, k+۱]$ را بیابید.

پاسخ. داریم:

$$\begin{aligned} \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(k,k+۱] &= (\circ,۱]\cup(۱,۲]\cup(۲,۳]\cup\ldots\cup(k,k+۱]\cup\ldots \\ &= (\circ,\infty) \\ &= \{x\in\mathbb{R} | x>\circ\}. \end{aligned}$$

□

مثال ۸.۵. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$، خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های I به طوری که $\bigcup_{k\in L} J_k = I$. ثابت کنید که $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$.

پاسخ. بنا به اصل گسترش برای مجموعه‌ها، باید نشان دهیم که $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$ و $\bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. در این جا اولی را ثابت می‌کنیم و دومی را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده نهاده‌ایم. در نوشتن اثبات اولی، مراحل استنتاج را ماشین‌وار لیست کرده‌ایم:

$$\begin{aligned}
x \in \bigcup_{i\in I} A_i &\Rightarrow \exists i_\circ \in I \quad x \in A_{i_\circ}\\
(i_\circ \in I) \wedge (I = \bigcup_{k\in L} J_k) &\Rightarrow \exists k_\circ \in L \quad i_\circ \in J_{k_\circ}\\
(x \in A_{i_\circ}) \wedge (i_\circ \in J_{k_\circ}) &\Rightarrow x \in \bigcup_{j\in J_{k_\circ}} A_j\\
(k_\circ \in L) \wedge x \in \bigcup_{j\in J_{k_\circ}} A_j &\Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j\\
x \in \bigcup_{i\in I} A_i &\Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j. \quad \text{بنا به چهار مورد بالا}
\end{aligned}$$

□

۲.۵ تمرین‌های تکمیلی

تمرین ۴.۵. فرض کنید که $\Delta \subseteq \Gamma$. آیا $\bigcup_{i\in\Gamma} A_i - \bigcup_{i\in\Delta} A_i = \bigcup_{i\in\Gamma-\Delta} A_i$؟

تمرین ۵.۵. فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ و $\{B_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ خانواده‌هایی از مجموعه‌ها باشند، نشان دهید که

.۱

$$\begin{aligned}
\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big) \cap \big(\bigcup_{\delta\in\Delta} B_\delta\big) &= \bigcup_{\delta\in\Delta}\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \cap B_\delta\big)\\
&= \bigcup_{\delta\in\Delta}\big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma \cap B_\delta)\big).
\end{aligned}$$

.۲

$$\begin{aligned}
\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big) \cup \big(\bigcap_{\delta\in\Delta} B_\delta\big) &= \bigcap_{\delta\in\Delta}\big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \cup B_\delta\big)\\
&= \bigcap_{\delta\in\Delta}\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma \cup B_\delta).
\end{aligned}$$

۳. با در نظر گرفتنِ $\Delta = \{۱, \ldots, n\}, \Gamma = \{۱, \ldots, m\}$ بررسی کنید که

$$\big(\bigcup_{i=۱}^{m} A_i\big) \cap \big(\bigcup_{j=۱}^{n} B_j\big) = \bigcup_{j\in\{۱,\ldots,n\}}\ \bigcup_{i\in\{۱,\ldots,m\}} (A_i \cap B_j).$$

تمرین ۶.۵. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های I باشد به طوری که $\bigcup_{k\in L} J_k = I$. نشان دهید که

۱. $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$

۲. $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in L}\bigcap_{j\in J_k} A_j$.

تمرین ۷.۵. نشان دهید که

۱. $A - \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A - B_\gamma)$.

۲. $A - \bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A - B_\gamma)$.

تمرین ۸.۵. نشان دهید که

۱. $\bigcap_{k\in\mathbb{N}-\{۰\}}(-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k}) = \{۰\}$

۲. $\bigcap_{k\in\{۱,۲,\ldots,n\}}(-\frac{۱}{k}, \frac{۱}{k}) = (-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n})$.

تعریف ۹.۵ (حاصل‌ضرب یک خانواده از مجموعه‌ها)**.** فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. مجموعهٔ $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \iff \forall\gamma\in\Gamma \quad x_\gamma \in A_\gamma$$

در واقع هر عنصرِ متعلق به $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ یک دنباله از مجموعه‌هاست [۶].

تمرین ۹.۵. فرض کنید تک‌تکِ مجموعه‌های A_γ ناتهی باشند. نشان دهید که مجموعهٔ $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ ناتهی است. بیان کنید که کجای اثبات این عبارتِ تقریباً بدیهی، از اصل انتخاب استفاده کرده‌اید (در فصل‌های آینده دوباره دربارهٔ این تمرین و تعریف قبل از آن سخن خواهیم گفت.)

خلاصهٔ فصل پنجم، قسمت اول. بنا بر اصل جانشانی اگر Γ یک مجموعه باشد و $f : \Gamma \to V$ یک تابع باشد، آنگاه $\{f(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ یک مجموعه تشکیل می‌دهد. به این مجموعه، یک خانواده از مجموعه‌ها با مجموعهٔ اندیسِ Γ گفته می‌شود. اگر $F = \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد آنگاه $\bigcup F = \bigcup\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{x : \exists\gamma\in\Gamma \quad x \in A_\gamma\}$ و $\bigcap F = \bigcap\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{x : \forall\gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$. واژه‌های مجموعه، کلاس، گردایه و خانواده هر کدام معنی خود را دارند (توجه ۱.۵). با کمک استقراء روی اعداد طبیعی می‌توان درستی یک حکم را برای هر عدد طبیعی ثابت کرد، اما نمی‌توان درستی یک حکم را برای مجموعهٔ اعداد طبیعی اثبات کرد.

---
[۶] پس بنا به اصل جانشانی هر عنصرِ این‌چنین یک مجموعه است.

۳.۵ ضرب‌های دکارتی

نگویند از سرِ بازیچه حرفی
کزان پندی نگیرد صاحب هوش
و گر صد بابِ حکمت پیش نادان
بخوانند آیدش بازیچه در گوش
سعدی

تا اینجا دیدیم که مجموعه بودنِ ترکیبات بولی مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک، متمم) چگونه با استفاده از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات می‌شود. همچنین دیدیم که وجود مجموعهٔ اعداد طبیعی و مهم‌ترین ویژگی آن یعنی استقراء چگونه به اصول نظریهٔ مجموعه‌ها وابسته هستند. در ادامهٔ بنا کردن ریاضی بر اساس نظریهٔ مجموعه‌ها، در این بخش **حاصل‌ضرب دکارتی** دو مجموعه را معرفی خواهیم کرد، و این مفهوم مقدمهٔ ورود ما به مفاهیم مهم دیگری مانند رابطه و تابع خواهد بود.

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند و $x \in A$ و $y \in B$. بنا به اصل جفت‌سازی $\{x, y\}$ یک مجموعه است و $\{x\}$ نیز یک مجموعه است. دوباره بنا به اصل جفت‌سازی $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ یک مجموعه است. این مجموعه را با (x, y) نشان می‌دهیم. پس

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

تمرین ۱۰.۵. نشان دهید که

$$(x_۰, y_۰) = (x_۱, y_۱) \iff (x_۰ = x_۱) \wedge (y_۰ = y_۱).$$

تعریف ۱۰.۵. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

قضیه ۱۱.۵. $A \times B$ یک مجموعه است.

اثبات. طبیعی است که باید به نحوی نشان دهیم که وجودِ $A \times B$ به صورت بالا از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها نتیجه می‌شود. دقت کنید که $\{x\} \subseteq A \cup B$ و $\{x, y\} \subseteq A \cup B$. بنابراین $\{x\} \in \mathbf{P}(A \cup B)$ و $\{x, y\} \in \mathbf{P}(A \cup B)$، و از این رو

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(A \cup B)).$$

مشاهدهٔ سادهٔ بالا به ما می‌گوید که

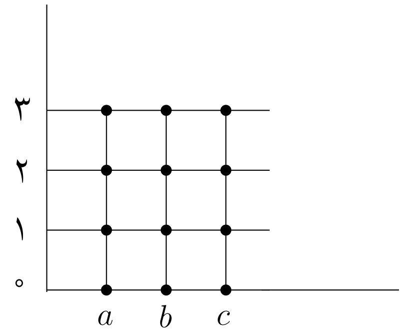
$$A \times B = \{c \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(A \cup B)) | \exists x \in A \quad \exists y \in B \quad c = \{\{x\}, \{x, y\}\}\}.$$

بنا به اصل تصریح، $A \times B$ در بالا یک مجموعه است. □

برای مثال اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ آنگاه

$$A \times B = \{(a, ۰), (a, ۱), (a, ۲), (a, ۳), (b, ۰), (b, ۱), (b, ۲), (b, ۳), (c, ۰), (c, ۱), (c, ۲), (c, ۳)\}.$$

گاهی کشیدن دو محور متعامد به صورت زیر، درک مفهوم ضرب دکارتی را راحت‌تر می‌کند:



قضیه ۱۲.۵.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

اثبات. حکم قضیه با استلزام‌های زیر ثابت می‌شود:

$$\begin{aligned}(x,y) \in A \times (B \cap C) &\iff (x \in A \wedge y \in B \cap C)\\ &\iff (x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C)\\ &\iff (x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C)\\ &\iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)\\ &\iff \big((x,y) \in A \times B\big) \wedge \big((x,y) \in A \times C\big)\\ &\iff (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C).\end{aligned}$$

(بنا به استلزامِ $p \wedge p \iff p$)

□

و به همان سادگی اثبات بالا، می‌توان، به عنوان یک تمرین، اثبات کرد که $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

قضیه ۱۳.۵.

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

اثبات. در زیر، مراحل استنتاجی را که به اثبات حکم مورد نظر منجر می‌شوند، فهرست‌وار نوشته‌ایم:

(۲.۵) $(x,y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B - C)$

(۳.۵) $x \in A \wedge y \in B - C \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C$

(۴.۵) $x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Rightarrow (x,y) \in A \times B$

(۵.۵) $x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \Rightarrow (x,y) \notin A \times C$

(۶.۵) بنا به تمامی موارد بالا $(x,y) \in A \times (B - C) \Rightarrow (x,y) \in (A \times B) - (A \times C).$

اثبات برگشت:

(۷.۵) $(x,y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \notin A \times C$

(۸.۵) $(x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B$

(۹.۵) $(x,y) \notin A \times C \Rightarrow (x \notin A) \vee (y \notin C)$

(۱۰.۵) $(x \in A \wedge y \in B) \wedge ((x \notin A) \vee (y \notin C)) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C).$

(۱۱.۵) بنا به موارد پیشین $(x,y) \in (A \times B) - (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times (B - C).$

□

مثال ۱۴.۵. آیا $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$؟

پاسخ. خیر؛ فرض کنید که $A, D \neq \varnothing$ و $x_\circ \in A - C, y_\circ \in D - B$. آنگاه $(x_\circ, y_\circ) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$ ولی $(x_\circ, y_\circ) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$. □

تمرین ۱۱.۵. با کشیدن تصویری، مثال فوق را مجسم کنید.

۴.۵ تمرین‌های تکمیلی

تمرین ۱۲.۵. نشان دهید که

$$(A \times B) - (C \times D) = \Big((A - C) \times B\Big) \cup \Big(A \times (B - D)\Big).$$

تمرین ۱۳.۵. فرض کنید که A یک مجموعهٔ m عضوی باشد و B یک مجموعهٔ n عضوی. با استفاده از استقراء، نشان دهید که تعداد اعضای مجموعهٔ $A \times B$ برابر است با mn.

تمرین ۱۴.۵. نشان دهید که

$$A \times \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \times B_\gamma)$$

تمرین ۱۵.۵. آیا $\mathbf{P}(A \times B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$؟

تمرین ۱۶.۵. نشان دهید که

$$(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \cap (\bigcup_{\delta \in \Delta} B_\delta) = \bigcup_{(\delta, \gamma) \in \Delta \times \Gamma} (A_\gamma \cap B_\delta).$$

تمرین ۱۷.۵. نشان دهید که $A \times B = \bigcup_{b \in B} (A \times \{b\}) = \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B)$.

تمرین ۱۸.۵. فرض کنید $C \subseteq A \times B$. آیا جملهٔ زیر درست است:
مجموعه‌های $A' \subseteq A$ و $B' \subseteq B$ وجود دارند به طوری که $C = A' \times B'$.
با کشیدن تصویر، پاسخ خود را توجیه کنید.

خلاصهٔ فصل پنجم، قسمت دوم. اگر A, B دو مجموعه باشند، آنگاه یک مجموعه به نام $A \times B$ وجود دارد که هر عضو آن به صورت $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ است که در آن $x \in A$ و $y \in B$. این مجموعه را حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A, B می‌نامیم.

فصل ۶

روابط

پادشاهی پسر به ادیبی داد و گفت: این فرزند توست، تربیتش همچنان کن که یکی از فرزندان خویش. ادیب خدمت کرد و متقبل شد و سالی چند بر او سعی کرد و به جایی نرسید و پسران ادیب در فضل و بلاغت منتهی شدند. ملک دانشمند را مؤاخذت کرد و معاتبت فرمود که وعده خلاف کردی و وفا به جا نیاوردی. گفت: بر رای خداوند روی زمین پوشیده نماند که تربیت یکسان است و طباع مختلف.

گرچه سیم و زر ز سنگ آید همی
در همه سنگی نباشد زر و سیم
بر همه عالم همی‌تابد سهیل
جایی انبان میکند جایی ادیم
سعدی

۱.۶ تعریف مفهوم رابطه

مفهوم رابطه در زبان روزمره آن قدر پرکاربرد است که شاید هنگام استفادهٔ آن در ریاضیات به تعریف دقیق آن توجه نکرده باشیم: رابطهٔ پدر و فرزندی، پسرخاله و دخترخاله بودن، همسن‌وسال بودن و امثال آن‌ها. برای مصارف ریاضی، باید رابطه را دقیق، و بر طبق اصول نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف کنیم:

گفتیم که اگر A و B دو مجموعه باشند، در این صورت $A \times B$ نیز یک مجموعه است. بنا به اصول نظریهٔ مجموعه‌ها، هر زیرمجموعه از $A \times B$ نیز یک مجموعه است. هر زیرمجموعه از $A \times B$ را **یک رابطه از** A **به** B می‌نامیم. پس یک رابطهٔ R از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، دقیقاً یعنی یک عنصر در $\mathbf{P}(A \times B)$.

رابطه‌ها را با حروفی مانند R، S و ... نشان می‌دهیم. نیز منظور از یک رابطه **روی مجموعهٔ** X یک رابطه از X به X است.

در زبان روزمره، به جای این که بگوییم «حسن در رابطهٔ برادری با حسین است» می‌گوییم: «حسن برادر حسین است». در ریاضی نیز همین‌گونه عمل می‌کنیم:

نمادگذاری ۱.۶. به جای $(x, y) \in R$ گاهی می‌نویسیم: xRy.

وقتی R رابطه‌ای از A به B باشد، لزوماً همهٔ عناصرِ A و B در این رابطه درگیر نیستند. برای مثال، برادر بودن یک رابطه در جامعهٔ انسان‌هاست، با این حال این گونه نیست که هر دو انسانی را که در نظر بگیریم برادر همدیگر باشند. همچنین این گونه نیست که هر کسی حتماً برادری داشته باشد. تعریف زیر برای تدقیق این گفته آمده است.

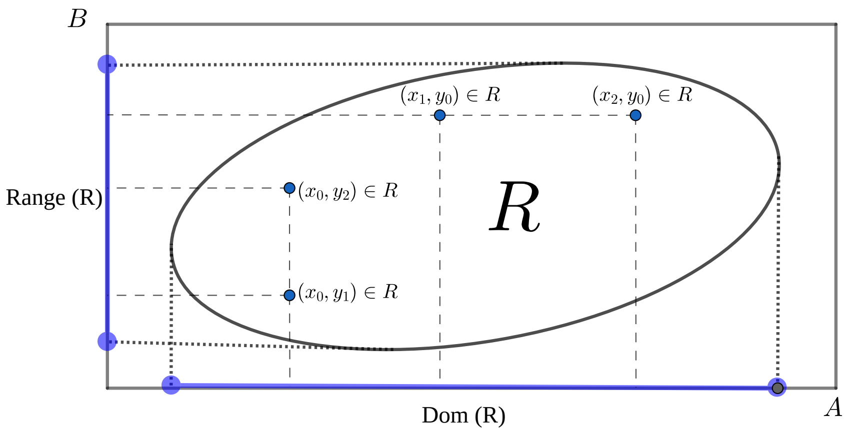
تعریف ۲.۶. فرض کنید $R \subseteq A \times B$ یک رابطه از A به B باشد. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Dom}(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B \quad (x, y) \in R\}$$

$$\mathrm{Range}(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A \quad (x, y) \in R\}.$$

$\mathrm{Dom}(R)$ و $\mathrm{Range}(R)$ را به ترتیب، *دامنه* و *بُردِ* رابطهٔ R می‌نامیم.

در یک نمایش تصویری، دامنهٔ یک رابطه از A به B، تصویر آن رابطه روی محور A و بُردِ آن، تصویر روی محورِ B است:



نکتهٔ پیش از تعریف بالا را می‌توان این‌گونه بازگو کرد: اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد لزوماً دامنهٔ R تمام X نیست. برای مثال روی مجموعهٔ اعضای یک خانوادهٔ مشخص، دامنهٔ رابطهٔ x پدرِ y است، تنها یک عضو دارد.

در توجه ۲۱.۲ گفتیم که از نمادِ $\iff$ گاهی برای تعاریف ریاضی هم استفاده می‌کنیم. در این بخش از این نماد، برای تعریف روابط زیاد بهره جسته‌ایم. آنچه در ادامه این فصل آمده است، یک تعداد تعاریف کاربردی و تمارین نسبتاً ساده و بازی‌گوشانه برای ورزیدگی بیشتر ذهنی است. خواننده‌ای که علاقه‌مند به دنبال کردن باقی «مبانی ریاضی» است می‌تواند در همین‌جا مطالعهٔ این فصل را به پایان برساند و به فصل‌های بعدی برود.

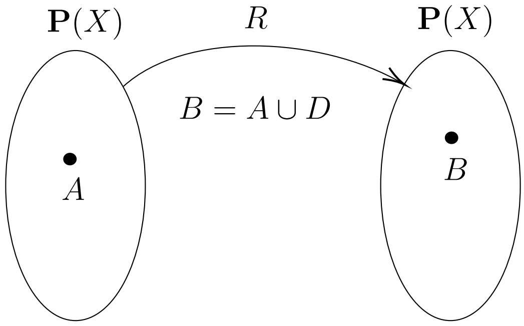
مثال ۳.۶. فرض کنید X یک مجموعه باشد و $D \subseteq X$ را ثابت در نظر بگیرید. دامنه و بُردِ رابطهٔ زیر روی $\mathbf{P}(X)$ را تعیین کنید.

$$(A, B) \in R \iff A \cup D = B.$$

پاسخ. رابطهٔ R در واقع مجموعهٔ زیر است:

$$R = \{(A, B) | A, B \in \mathbf{P}(X), A \cup D = B\}.$$

در دامنهٔ این رابطه، هر زیرمجموعه‌ای از X می‌تواند قرار بگیرد. اما طی این رابطه، اجتماع یک زیرمجموعه از X با D گرفته می‌شود؛ پس بُردِ این رابطه تنها متشکل زیرمجموعه‌هایی از X است که شامل D هستند. $\square$



تمرین ۱.۶. یک رابطه از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ به مجموعهٔ $\{a,b,c,d\}$ مثال بزنید.

تمرین ۲.۶. تعداد کل روابط از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی چقدر است؟

۲.۶ مثال‌هائی از روابط

رابطهٔ تساوی

فرض کنید X یک مجموعه باشد. رابطهٔ زیر را رابطهٔ تساوی روی X می‌خوانیم:

$$R = \{(x,y)|x \in X, y \in X, x = y\},$$

به بیان دیگر

$$R = \{(x,x)|x \in X\}.$$

رابطهٔ تساوی (که به آن رابطهٔ قطری نیز می‌گوییم) را می‌توان رابطه‌ای گرفت که جملهٔ زیر دربارهٔ آن درست است:

$$\forall x, y \in X \quad (xRy \leftrightarrow x = y).$$

این رابطه را با Δ نیز گاهی نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات مجموعه مورد نظر را نیز به صورت اندیس می‌نویسیم تا مشخص شود که تساوی روی چه مجموعه‌ای منظور ماست. پس به طور خلاصه:

$$\Delta_X = \{(x,x)|x \in X\}.$$

رابطهٔ تعلق

فرض کنید X یک مجموعه باشد و $\mathbf{P}(X)$ مجموعهٔ تمام زیر مجموعه‌های آن. رابطهٔ تعلق رابطه‌ای از X به $\mathbf{P}(X)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \{(x,y)|x \in X, y \in \mathbf{P}(X), x \in y\}.$$

توجه کنید که دامنهٔ این رابطه، X است و بُرد آن برابر است با $\mathbf{P}(X) - \{\varnothing\}$. (این گفته را تحقیق کنید).

رابطهٔ ترتیب روی اعداد طبیعی

رابطهٔ ترتیب اکید روی اعداد طبیعی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{N}, x < y\}.$$

به همین ترتیب رابطهٔ ترتیب غیراکید روی اعداد طبیعی، رابطهٔ زیر است:

$$S = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{N}, (x<y) \vee (x=y)\}.$$

رابطهٔ مشمولیت

فرض کنید X یک مجموعه باشد. روی $\mathbf{P}(X)$ رابطهٔ مشمولیت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{(A,B)|A,B \in \mathbf{P}(X), A \subseteq B\}.$$

معکوس یک رابطه

اگر R یک رابطه از A به B باشد، رابطهٔ $R^{-۱}$ را از B به A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R^{-۱} = \{(x,y)|x \in B, y \in A, (y,x) \in R\}.$$

به بیان دیگر داریم

$$(x,y) \in R^{-۱} \iff (y,x) \in R.$$

ترکیب روابط

فرض کنید R یک رابطه از A به B و S یک رابطه از B به C باشند. آنگاه رابطهٔ $S \circ R$ را از A به C به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x,y) \in S \circ R \iff \exists z \in B\Big((x,z) \in R \wedge (z,y) \in S\Big).$$

مثال ۴.۶. فرض کنید روی یک مجموعه از انسان‌ها روابط R و S به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$(x,y) \in R \iff \text{فرزند } y \text{ باشد } x$$

$$(x,y) \in S \iff \text{برادر } x \text{ باشد } y$$

آنگاه داریم:

$$(x,y) \in R \circ S \iff \exists z \quad (\text{فرزند } z \text{ باشد } x) \wedge (\text{برادر } y \text{ باشد } z)$$

$$\iff \text{برادرزادهٔ } y \text{ باشد. } x$$

تمرین ۳.۶. در مثال بالا، $S \circ R$ را شناسائی و دامنه و بردِ آن را مشخص کنید.

تمرین ۴.۶. در مثال بالا، روابطِ $R \circ R$ و $S \circ S$ را شناسائی و دامنه و بردِ آن‌ها را مشخص کنید.

۳.۶ برخی ویژگی‌های مهم روابط

رابطه‌هایی که یکی یا برخی از ویژگی‌های معرفی شده در این بخش را دارند، برای ما حائز اهمیت ویژه‌اند. در سرتاسر این قسمت، فرض کنید R رابطه‌ای روی مجموعهٔ X باشد.

تعریف ۵.۶. رابطهٔ R را **انعکاسی** [1] می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad xRx.$$

مثال ۶.۶. رابطهٔ تساوی را روی یک مجموعهٔ دلخواهِ X در نظر بگیرید. داریم

$$\forall x \in X \quad x = x,$$

پس این رابطه، انعکاسی است.

مثال ۷.۶. رابطهٔ ترتیب اکید روی اعداد طبیعی، انعکاسی نیست ولی رابطهٔ ترتیب غیراکید، انعکاسی است.

مثال ۸.۶. هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است پس رابطهٔ $\subseteq$ روی یک مجموعهٔ $\mathbf{P}(X)$ نیز یک رابطهٔ انعکاسی است.

مثال ۹.۶ (دو مثالِ نقض)**.** رابطهٔ $\in$ را روی مجموعهٔ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ در نظر بگیرید. داریم

$$\varnothing \notin \varnothing.$$

پس این رابطه انعکاسی نیست. همچنین اگر روی مجموعهٔ انسان‌ها، رابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy \iff y \text{پدرِ } x \text{ باشد},$$

این رابطه نیز غیر انعکاسی است.

تعریف ۱۰.۶. رابطهٔ R روی یک مجموعهٔ X را **تقارنی** [2] می‌خوانیم هرگاه جملهٔ زیر درست باشد:

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \to yRx\Big).$$

توجه کنید که بنا به تعریف تقارنی بودن یک رابطه، رابطهٔ R روی یک مجموعهٔ X غیرتقارنی است (یعنی تقارنی نیست) هرگاه جملهٔ زیر درست باشد:

$$\exists x, y \in X \quad (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R.$$

به عنوان یک مثال ساده، رابطهٔ پسرخاله بودن روی مجموعهٔ پسرهای فامیل، یک رابطهٔ تقارنی است اما روی مجموعهٔ همهٔ فرزندان فامیل، تقارنی نیست.

---
[1] reflective
[2] symmetric

مثال ۱۱.۶. رابطهٔ مجزا بودن روی یک مجموعهٔ توانی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$XRY \iff X \cap Y = \varnothing.$$

واضح است که رابطهٔ فوق، تقارنی است.

تمرین ۵.۶. بررسی کنید که رابطه‌های تساوی ($x = y$) و تمایز ($x \neq y$) دو مجموعه روی $\mathbf{P}(X)$ روابطی تقارنی هستند. کدام‌یک از این روابط، انعکاسی هستند؟ آیا رابطهٔ مجزا بودن انعکاسی است؟

تمرین ۶.۶ (مثال نقض)**.** نشان دهید که رابطه‌های آمده در مثالِ ۹.۶ تقارنی نیستند.

تعریف ۱۲.۶. رابطهٔ R روی یک مجموعهٔ X را **پادتقارنی** می‌خوانیم هرگاه جملهٔ زیر درست باشد:

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \wedge yRx \to x = y\Big).$$

تمرین ۷.۶. بررسی کنید که رابطهٔ $=$ روی یک مجموعهٔ X و رابطهٔ $\subseteq$ روی $\mathbf{P}(X)$ هر دو پادتقارنی هستند.

تمرین ۸.۶. آیا رابطهٔ ترتیب غیراکید روی اعداد طبیعی، پادتقارنی است؟ رابطهٔ ترتیب اکید چه طور؟

مثال ۱۳.۶ (مثال نقض)**.** روابط دوستی و همسن بودن روی یک مجموعه از انسان‌ها پادتقارنی نیستند.

تمرین ۹.۶. برغم نحوهٔ نام‌گذاری، چنین نیست که هر رابطه‌ای که تقارنی نباشد، پادتقارنی است. به عنوان تمرین، یک رابطه مثال بزنید که نه تقارنی باشد و نه پادتقارنی. همچنین بررسی کنید که چه روابطی هم تقارنی و هم پادتقارنی هستند.

راهنمایی برای قسمت اول. رابطهٔ مورد نظر را به صورت یک مجموعه بنویسید.

تعریف ۱۴.۶. رابطهٔ R روی یک مجموعهٔ X را **متعدّی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y, z \in X \quad \Big(xRy \wedge yRz \to xRz\Big).$$

تمرین ۱۰.۶. بررسی کنید که رابطهٔ تساوی روی یک مجموعهٔ X، همسن بودن در مجموعهٔ انسان‌ها، و زیر مجموعه بودن روی یک مجموعهٔ $\mathbf{P}(X)$ هر سه متعدی هستند.

تمرین ۱۱.۶ (مثال نقض)**.** بررسی کنید که رابطهٔ دوستی روی مجموعهٔ انسان‌ها و رابطهٔ

$$xRy \iff \text{است } x \text{ پدر } y\ .$$

روابطی نامتعدی هستند.

قبلاً گفته بودیم که وقتی یک رابطهٔ R را روی یک مجموعهٔ X در نظر می‌گیریم، این گونه نیست که لزوماً هر دو عضو در X درگیر آن باشند:

تعریف ۱۵.۶ (تام بودن)**.** رابطهٔ R روی یک مجموعهٔ X را **تام** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \vee yRx\Big).$$

رابطهٔ پدری تام نیست؛ واضح است که وقتی دو نفر آدم را در نظر می‌گیریم، لزوماً این گونه نیست که یکی پدر دیگری باشد! به دلیلی مشابه، رابطهٔ مشمولیت و رابطهٔ تساوی نیز تام نیستند.

۴.۶ چند مثال از مبحث روابط

مثال ۱۶.۶. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. قرار دهید

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2} | y = x^{2}\}.$$

رابطهٔ R در این صورت یک رابطه روی $\mathbb{R}$ است.

مثال ۱۷.۶. نشان دهید که رابطهٔ دلخواهِ R روی مجموعهٔ X متعدی است اگر و تنها اگر $R \circ R \subseteq R$. (همچنین تمرین‌های ۱۸.۶ و ۱۹.۶ را مشاهده کنید.)

پاسخ. نخست یادآوری می‌کنیم که بنا به تعریفِ ترکیب روابط،

$$(x, y) \in R \circ R \iff \exists z \quad R(x, z) \wedge R(z, y).$$

ابتدا نشان می‌دهیم که اگر رابطهٔ R متعدی باشد آنگاه $R \circ R \subseteq R$.

پس فرض کنیم R متعدی است و $(x, y) \in R \circ R$. از این که $(x, y) \in R \circ R$ نتیجه می‌شود که

$$\exists z_0 \in X \quad (x, z_0) \in R \wedge (z_0, y) \in R. \tag{۱.۶}$$

حال از فرمولِ (۱.۶) و فرضِ متعدی بودن R نتیجه می‌گیریم که $(x, y) \in R$.

فارغ از دنیای فرمول‌ها، و در دنیای عقل، تا این جا تنها نشان دادیم که وقتی x با یک عنصر در رابطه است که آن عنصر در رابطه با y است، آنگاه x با y در رابطه است؛ و این نفس متعدی بودن است، و تا این جا مسئلهٔ دشواری حل نکرده‌ایم!

برای اثبات جهت عکس، فرض کنید $R \circ R \subseteq R$. برای اثبات متعدی بودنِ R، باید درستی جملهٔ زیر را تحقیق کنیم:

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \to (x, z) \in R.$$

پس، با فرضِ $(x, y) \in R$ و $(y, z) \in R$ و نیز فرض اصلیِ این که $R \circ R \subseteq R$، باید نشان دهیم که $(x, z) \in R$.

اما این که $(x, y) \in R$ و $(y, z) \in R$ بنا به تعریف ترکیب روابط، یعنی $(x, z) \in R \circ R$. حال از فرض $R \circ R \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که $(x, z) \in R$. □

پاسخی که در مثال بالا فراهم آوردیم،ناظر بر این نکته است که در ریاضیات مقدماتی دانشگاهی، همین که بدانیم که به دنبال رسیدن به چه خواسته‌ای هستیم، رسیدن به آن خواسته به راحتی حاصل می‌شود.

در بخشِ ۲.۶ رابطهٔ تساوی (یا قطری) روی یک مجموعهٔ X را معرفی کردیم و آن را با Δ_X نشان دادیم.

مثال ۱۸.۶. نشان دهید که رابطهٔ R روی مجموعهٔ X انعکاسی است اگر و تنها اگر $\Delta_X \subseteq R$.

پاسخ. دوباره، اثبات حکمی که از ما خواسته شده است تنها به اندازهٔ «فهم» آن دشوار است! نخست فرض کنیم R انعکاسی است و بیایید ثابت کنیم که در این صورت $\Delta_X \subseteq R$. به این منظور، عنصر دلخواهِ $(x, x) \in \Delta_X$ را در نظر بگیرید. بنا به این که R انعکاسی است، داریم $(x, x) \in R$. پس، به همین سادگی، $\Delta_X \subseteq R$.

حال، به سراغ جهت عکس می‌رویم. فرض کنید $\Delta_X \subseteq R$، می‌خواهیم ثابت کنیم که R انعکاسی است. به این منظور، عنصر دلخواه $x_0 \in X$ را در نظر بگیرید. بنا به تعریف رابطهٔ قطری، داریم: $(x_0, x_0) \in \Delta_X$. حال از فرض $\Delta_X \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که $(x_0, x_0) \in R$. از آنجا که x_0 به طور دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که R انعکاسی است. □

مثال بعدی، مفهوم «تام» بودن یک رابطه را روشن‌تر می‌کند:

مثال ۱۹.۶. نشان دهید که رابطهٔ R روی مجموعهٔ X تام است اگر و تنها اگر

$$R \cup R^{-1} = X \times X$$

پاسخ. فرض کنیم R تام باشد. اگر $(x_\circ, y_\circ) \in X \times X$ آنگاه از آنجا که R تام است یا $(x_\circ, y_\circ) \in R$ یا $(y_\circ, x_\circ) \in R$. پس یا $(x_\circ, y_\circ) \in R$ یا $(x_\circ, y_\circ) \in R^{-1}$. از آنجا که $(x_\circ, y_\circ)$ به طور دلخواه انتخاب شده است، داریم:

$$X \times X \subseteq R \cup R^{-1}.$$

اثباتِ این که $R \cup R^{-1} \subseteq X \times X$ نیز ساده است. می‌دانیم R یک رابطه روی X است پس $R \subseteq X \times X$. مشابهاً می دانیم R^{-1} یک رابطه روی X است پس $R^{-1} \subseteq X \times X$. پس $R \cup R^{-1} \subseteq X \times X$. پس تا اینجا ثابت کرده‌ایم که اگر R تام باشد آنگاه

$$X \times X = R \cup R^{-1}.$$

حال فرض کنید $X \times X = R \cup R^{-1}$. می‌خواهیم ثابت کنیم که R تام است. عناصر دلخواه $x_\circ, y_\circ \in X$ را در نظر بگیرید. واضح است که $(x_\circ, y_\circ) \in X \times X$، پس

$$(x_\circ, y_\circ) \in R \cup R^{-1},$$

یعنی یا $(x_\circ, y_\circ) \in R$ که در اینصورت $x_\circ R y_\circ$، یا $(x_\circ, y_\circ) \in R^{-1}$ که در این صورت $y_\circ R x_\circ$. و این همه یعنی، رابطهٔ R تام است. □

۵.۶ تمرین‌های تکمیلی

تمرین ۱۲.۶. پادتقارنی نبودن یک رابطه یعنی چه؟ پادتقارنی نبودن را با تقارنی نبودن مقایسه کنید.

تمرین ۱۳.۶. فرض کنید Σ مجموعهٔ همهٔ گزاره‌های یک منطق مرتبهٔ اول باشد. رابطهٔ R را روی این مجموعه به صورت زیر تعریف کنید:

$$PRQ \iff P \Rightarrow Q.$$

نشان دهید که رابطهٔ فوق نه تقارنی و نه پادتقارنی است.

تمرین ۱۴.۶. آیا رابطهٔ «عدم تساوی» یک رابطهٔ متعدّی است؟

تمرین ۱۵.۶. نشان دهید هر رابطهٔ تام، انعکاسی است.

تمرین ۱۶.۶. نشان دهید که تنها رابطه‌ای که هم انعکاسی باشد و هم تقارنی و هم پادتقارنی، رابطهٔ تساوی است.

تمرین ۱۷.۶. روی مجموعهٔ اعداد طبیعی، رابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy \iff x \leq y.$$

رابطهٔ بالا (رابطهٔ ترتیب) کدام یک از ویژگی‌های معرفی شده در این درس را دارد؟

تمرین ۱۸.۶. آیا عبارت زیر درست است:
اگر R یک رابطهٔ متعدی روی مجموعهٔ X باشد، آن‌گاه $R \subseteq R \circ R$.

تمرین ۱۹.۶.

۱. نشان دهید که اگر R یک رابطهٔ متعدی، تقارنی و انعکاسی باشد، آنگاه $R \subseteq R \circ R$.

۲. نشان دهید که مورد بالا، بدون شرط انعکاسی بودن هم برقرار است.

تمرین ۲۰.۶. عبارت زیر را در نظر بگیرید:
اگر R یک رابطهٔ متعدی و متقارن باشد، آنگاه R انعکاسی است.
دانشجویی عبارت بالا را به صورت زیر اثبات کرده است. اثبات او غلط است؛ اشتباه این اثبات را پیدا کنید. سپس نشان دهید که عبارت بالا نیز غلط است.
اثبات دانشجو: فرض کنیم R متعدی و متقارن باشد. برای اثبات این که R انعکاسی است، باید نشان دهیم که هر x با خودش در رابطه است. یک عنصر دلخواه x را در نظر می‌گیریم. فرض کنید xRy. بنا به متقارن بودن رابطه، داریم yRx. بنا به متعدی بودن رابطه، از این دو نتیجه می‌گیریم که xRx. پس رابطهٔ R انعکاسی است.

تمرین ۲۱.۶. با این که $\mathbf{V}$ یک مجموعه نیست، می‌توان روی آن هم رابطه در نظر گرفت. رابطهٔ $\in$ را روی $\mathbf{V}$ در نظر بگیرید. نشان دهید که این رابطه، غیرانعکاسی، غیرتقارنی و غیرمتعدی است.

تمرین ۲۲.۶. نشان دهید که اگر R یک رابطهٔ تامِ تقارنی روی X باشد، آن‌گاه $R = X \times X$.

تمرین ۲۳.۶. رابطهٔ عاد کردن در اعداد طبیعی، کدام‌یک از ویژگی‌های معرفی شده در این فصل (انعکاسی، تعدی، تقارنی، پادتقارنی، تام بودن) را دارد؟

تمرین ۲۴.۶. فرض کنید که R رابطه‌ای از A به B و S رابطه‌ای از B به C باشد. نشان دهید که

$$\mathrm{Dom}(S \circ R) = \{x \in A | \exists y \in \mathrm{Dom}(S) \qquad (x, y) \in R\}.$$

خلاصهٔ فصل ششم. منظور از یک رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، یک زیرمجموعه از $A \times B$ است. برخی ویژگی‌های مهم روابط، انعکاسی، متقارن و یا متعدی بودن است.

فصل ۷

روابط هم‌ارزی

هر چه گفتیم جز حکایت دوست
در همه عمر از آن پشیمانیم
سعدی

۱.۷ معرفی رابطهٔ هم‌ارزی

مسئلهٔ دسته‌بندی اشیاء بر اساس ویژگی‌های مشترکشان، هم در زندگی روزمره و هم در ریاضی بسیار پیش می‌آید: مثلاً ممکن است بخواهیم دانشجویان کلاسمان را بر حسب قد یا ماه تولد آن‌ها دسته‌بندی کنیم؛ یا این که اعداد طبیعی را بر حسب باقیماندهٔ آن‌ها به ۲ به دو دستهٔ اعداد زوج و فرد تقسیم کنیم؛ یا این که اعداد طبیعی را بر حسب باقیمانده‌شان به ۳ به سه دسته تقسیم کنیم.

بیایید همان مثال دسته‌بندی افراد کلاس بر حسب قد را بیشتر بکاویم:

۱. این دسته‌بندی بر اساس یک رابطه صورت گرفته است: رابطهٔ هم‌قد بودن. افرادی در یک دسته قرار می‌گیرند که هم‌قد با هم باشند.

۲. وقتی دانشجویان را بر حسب قدشان دسته‌بندی می‌کنیم، دسته‌های مختلف هیچ اشتراکی با هم ندارند؛ به بیان دیگر هیچ کس نیست که در دو دستهٔ قدّی قرار بگیرد! در واقع کسی نیست که دو قد متفاوت داشته باشد!

۳. اگر علی و حسن در یک دسته باشند، آنگاه دستهٔ افراد هم‌قد با علی، دقیقاً همان دستهٔ افراد هم‌قد با حسن است. این دسته را هم می‌توانیم دستهٔ همقدان علی بنامیم، و هم می‌توانیم دستهٔ همقدان حسن بنامیم. در واقع هم می‌توانیم علی را به عنوان نمایندهٔ دسته انتخاب کنیم و هم حسن را.

۴. اگر حسن و حسین دو دانشجو باشند، از دو حالت خارج نیست: یا حسن با حسین همقد است که در این صورت گروه افراد همقد حسن، دقیقاً همان گروه افراد همقد با حسین است؛ یا حسن با حسین همقد نیست، که در این صورت گروه افراد همقد با حسن، هیچ اشتراکی با گروه افراد همقد با حسین ندارد.

۵. هر یک از افراد کلاس با خودش همقد است! بنابراین هر یک از افراد کلاس در یکی از دسته‌ها (یعنی دستهٔ افراد هم‌قد با خودش) قرار می‌گیرد.

سازوکار دسته‌بندی در ریاضیات با استفاده از رابطه‌های هم‌ارزی صورت می‌پذیرد، و البته عموماً دسته‌بندی اعضای مجموعه‌ها منجر به ایجاد مجموعه‌های جذاب جدید می‌شود. به رابطه‌ای که ویژگی‌های **انعکاسی، تقارنی و تعدی** داشته باشد، یک **رابطهٔ هم‌ارزی** گفته می‌شود. رابطهٔ مد نظر ما، یعنی «همقد بودن» نیز یک رابطهٔ هم‌ارزی است؛ پس عجیب نیست که از آن برای دسته‌بندی استفاده شود.

گفتیم که اگر افراد کلاس را بر اساس قد دسته‌بندی کنیم، آنگاه دستهٔ افراد همقدِ علی، یعنی دستهٔ افرادی که قد آن‌ها با قد علی برابر است، و این یعنی افرادی که با علی در رابطهٔ همقدی هستند. بیایید نخست این گفته را ریاضی‌وار بیان کنیم.

فرض کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X، و $x_\circ \in X$ عنصری دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\text{کلاس هم‌ارزی عنصر } x_\circ \text{ تحت رابطهٔ } R := \{y \in X \mid yRx_\circ\} = \{y \in X \mid xRy_\circ\}.$$

از علامت $=:$ به این علت استفاده کرده‌ایم که طرف راست آن، تعریفی برای طرف چپ است. علامت $=$ در بالا، به علت تقارنی بودن رابطه استفاده شده است.

کلاس هم‌ارزی عنصر $x_\circ$ تحت رابطهٔ R را با $[x_\circ]_R$ نشان می‌دهیم. حتی گاهی اوقات به جای $[x_\circ]_R$ خواهیم نوشت $[x_\circ]$؛ این کار را در صورتی انجام می‌دهیم که خواننده به طریقی مطلع باشد که در حال گفتگو دربارهٔ رابطهٔ R هستیم. دقت کنید که عبارتِ $[x_\circ]_R$ مطابق آنچه در منطق مرتبهٔ اول آموختیم، تنها برای کوتاه‌نوشتِ یک واقعیت استفاده می‌شود که می‌توان در هر صورت آن را به صورت طولانی‌تری با جملات مرتبهٔ اول نوشت. پس ما همچنان به رعایت منطق مرتبهٔ اول مجموعه‌ها پای‌بند هستیم.

گفتیم که اگر حسن و علی همقد باشند، گروه افراد همقد با علی، دقیقاً همان گروه افراد همقد با حسن است. این گفته را در قضیهٔ زیر دقیق بیان کرده‌ایم:

قضیه ۱.۷. فرض کنید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد و $x_\circ, y_\circ \in X$ و $x_\circ R y_\circ$. آنگاه

$$[x_\circ]_R = [y_\circ]_R.$$

اثبات. $[x_\circ]_R$ و $[y_\circ]_R$ هر دو، مجموعه هستند؛ برای نشان دادن این که دو مجموعه برابرند، باید مطابق اصل گسترش نشان دهیم که اعضای یکسانی دارند.

فرض کنید $t \in [x_\circ]_R$، در این صورت بنا به تعریفِ $[x_\circ]_R$ داریم $tRx_\circ$. از طرفی بنا به فرض قضیه داریم $x_\circ R y_\circ$. حال بنا به این که رابطهٔ R یک رابطهٔ متعدی است داریم

$$tRx_\circ \wedge x_\circ R y_\circ \to tRy_\circ.$$

پس داریم $tRy_\circ$ و بنا به تعریفِ مجموعهٔ $[y_\circ]_R$ از این نتیجه می‌شود که $t \in [y_\circ]_R$.

در بالا نشان دادیم که هر عضو ازمجموعهٔ $[x_\circ]_R$ یک عضو از مجموعهٔ $[y_\circ]_R$ است. با تکرار متقارن همین اثبات، می‌توان نشان داد که هر عضو از مجموعهٔ $[y_\circ]_R$ نیز یک عضو از مجموعهٔ $[x_\circ]_R$ است و از این رو این دو مجموعه با هم برابر هستند. □

گفتیم که اگر علی و حسن همقد نباشند، هیچ کس نیست که با هر دوی آن‌ها همقد باشد. یعنی وقتی علی و حسن همقد نیستند، دستهٔ افراد همقد با علی با دستهٔ افراد همقد با حسن هیچ اشتراکی ندارد. این گفته را در قضیهٔ زیر دقیق بیان کرده‌ایم.

قضیه ۲.۷. فرض کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد و $x_\circ, y_\circ \in X$ و $\neg(x_\circ R y_\circ)$. آنگاه

$$[x_\circ] \cap [y_\circ] = \varnothing.$$

اثبات. بنا به تاتولوژی

$$(\neg q \to \neg p) \iff (p \to q)$$

کافی است ثابت کنیم که اگر $[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \varnothing$ آنگاه $x_\circ R y_\circ$. فرض کنید $[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \varnothing$؛ مثلاً $z_\circ \in [x_\circ] \cap [y_\circ]$. از آنجا که $[x_\circ] = \{y \mid y R x_\circ\}$ و $z_\circ \in [x_\circ]$ نتیجه می‌گیریم که

$$z_\circ R x_\circ \tag{۱.۷}$$

به طور مشابه، از این که $z_\circ \in [y_\circ]$ نتیجه می‌گیریم که

$$z_\circ R y_\circ. \tag{۲.۷}$$

از آنجا که R تقارنی است از (۱.۷) نتیجه می‌شود که

$$x_\circ R z_\circ \tag{۳.۷}$$

بنا به متعدی بودن R از (۲.۷) و (۳.۷) نتیجه می‌شود که $x_\circ R y_\circ$.

بد نیست استنتاج بالا را مرور کنیم:

$$[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \varnothing \Rightarrow \exists z \quad z \in [x_\circ] \cap [y_\circ]$$

فرض‌می‌کنیم $\quad z_\circ \in [x_\circ] \cap [y_\circ]$

$$z_\circ \in [x_\circ] \cap [y_\circ] \Rightarrow (z_\circ \in [x_\circ]) \wedge (z_\circ \in [y_\circ])$$

بنا به تعریف $\quad z_\circ \in [x_\circ] \Rightarrow z_\circ R x_\circ$

بنا به تعریف $\quad z_\circ \in [y_\circ] \Rightarrow z_\circ R y_\circ$

بنا به ویژگی تقارنی $\quad z_\circ R x_\circ \Rightarrow x_\circ R z_\circ$

بنا به ویژگی تعدی $\quad (x_\circ R z_\circ) \wedge (z_\circ R y_\circ) \Rightarrow x_\circ R y_\circ$

بنا به موارد بالا. $\quad [x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \varnothing \Rightarrow x_\circ R y_\circ$

□

بنا به آنچه گفته شد، برای دو عنصر $x_\circ, y_\circ$ از دو حال خارج نیست؛ یا $x_\circ R y_\circ$ که در این صورت $[x_\circ] = [y_\circ]$؛ و یا $\neg(x_\circ R y_\circ)$ که در این صورت $[x_\circ] \cap [y_\circ] = \varnothing$. بنابراین اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی یک مجموعهٔ X باشد، آنگاه همهٔ موارد زیر با هم معادل هستند:

$$x_\circ R y_\circ \qquad [x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \varnothing \qquad [x_\circ] = [y_\circ].$$

همچنین تمام موارد زیر نیز با هم معادلند:

$$\neg(x_\circ R y_\circ) \qquad [x_\circ] \cap [y_\circ] = \varnothing \qquad [x_\circ] \neq [y_\circ].$$

به طور خلاصه‌تر، دو کلاس هم‌ارزی یا بر هم منطبقند یا با هم هیچ اشتراکی ندارند.

تمرین ۱.۷. به طور مستقیم نشان دهید که اگر $[x_\circ] \cap [y_\circ] = \varnothing$ آنگاه $\neg(x_\circ R y_\circ)$.

تمرین ۲.۷. به طور مستقیم نشان دهید که اگر $[x_\circ] \cap [y_\circ] \neq \varnothing$ آنگاه $[x_\circ] = [y_\circ]$.

در یک دسته‌بندی، مجموعهٔ متشکل از همهٔ دسته‌ها، مجموعهٔ مهمی است: فرض کنید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد. تعریف می‌کنیم:

$$X/R = \{[x] \mid x \in X\}.$$

در تعریفِ بالا، X/R در واقع یک خانواده از مجموعه‌هاست؛ یعنی می‌شود آن را، با رعایت اصول منطق مرتبهٔ اول، به صورت اندیس‌دارِ $X/R = \{[x]_R\}_{x\in X}$ نوشت. طبیعتاً برخی از اعضای این خانواده می‌توانند تکراری باشند؛ در واقع همان طور که دیدیم اگر xRy آنگاه $[x] = [y]$. اما یک خانواده از مجموعه‌ها، در هر صورت یک مجموعه است؛ پس ما X/R را مجموعه خواهیم خواند. عضویت در این مجموعه، همان طور که گفتیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$t \in X/R \iff \big(\exists x_\circ \in X \quad t = [x_\circ]\big).$$

در تمثیلِ رابطهٔ هم‌قد بودن، گفتیم که هر کسی در یک دسته‌بندی قدی قرار می‌گیرد و هیچ کس نیست که وارد دسته‌بندی ما نشود. در واقع اجتماع همهٔ دسته‌ها، می‌شود همهٔ افراد کلاس. این واقعیت را قضیهٔ زیر بیان کرده است:

قضیه ۳.۷.

$$\bigcup X/R = X.$$

توجه ۴.۷. یادآوری می‌کنیم که اگر A یک مجموعه باشد آنگاه

$$\bigcup A = \{x \mid \exists y \in A \quad x \in y\},$$

همچنین اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\}.$$

در قضیهٔ بالا از نمادگذاری اولی استفاده کرده‌ایم.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $X \subseteq \bigcup X/R$. فرض کنید که $x_\circ \in X$. از آنجا که رابطهٔ R انعکاسی است داریم $x_\circ R x_\circ$؛ به بیان دیگر $x_\circ \in [x_\circ]$. از آنجا که $[x_\circ] \in X/R$ و $x_\circ \in [x_\circ]$ بنا به توجه بالا نتیجه می‌شود که $x_\circ \in \bigcup X/R$.

حال ثابت می‌کنیم که $\bigcup X/R \subseteq X$. اگر $x_\circ \in \bigcup X/R$ آنگاه $y \in X$ چنان وجود دارد که $x_\circ \in [y] = \{x \in X \mid xRy\} \subseteq X$ پس معلوم است که $x_\circ \in X$. □

توجه ۵.۷. تا اینجا فهمیده‌ایم که اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد آنگاه:

- X/R مجموعه‌ای متشکل از برخی زیرمجموعه‌های X است؛ یعنی $X/R \subseteq \mathbf{P}(X)$.
- هیچ دو عضو از X/R با هم اشتراک ندارند.

- $\bigcup X/R = X$.

اصطلاحاً می‌گوییم X/R مثالی از یک **افراز** برای مجموعهٔ X است. البته در بخشِ ۳.۷ تعریف دقیق افراز را بیان خواهیم کرد.

بنا بر آنچه گفته شد، از هر رابطهٔ هم‌ارزیِ R روی یک مجموعهٔ X به یک افراز برای آن دست می‌یابیم. در بخش‌های پیش رو، به طور دقیق‌تر در بخشِ ۳.۷، خواهیم دید که در واقع هر افراز از مجموعهٔ X نیز از یک رابطهٔ هم‌ارزی روی این مجموعه، ناشی می‌شود. یعنی **دو مفهوم افراز و رابطهٔ هم‌ارزی از یکدیگر ناشی می‌شوند.** به بیان دیگر، افرازهای یک مجموعهٔ X در **تناظر یک‌به‌یک** با روابط هم‌ارزی روی آن هستند. شالودهٔ اصلی این فصل، همین گفته است.

۲.۷ چند مثال از کاربرد روابط هم‌ارزی

مثال ۶.۷. روی یک مجموعهٔ X رابطهٔ تساوی، $(=)$، یک رابطهٔ هم‌ارزی است:

$$xRy \iff x = y$$

واضح است که:

$$X/_{=} = \{[x]_{=} \mid x \in X\} = \Big\{\{x\} \mid x \in X\Big\},$$

پس رابطهٔ تساوی، مجموعهٔ X را به کلاس‌های تک‌عضوی دسته‌بندی می‌کند.

در فصلِ ۴ با تعریفِ دقیق مجموعهٔ $\mathbb{N}$ بر طبق اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها و برخی ویژگی‌های آن آشنا شدیم. مثال زیر، نشان می‌دهد که مجموعهٔ اعداد صحیح چگونه از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها نشأت می‌گیرد.

مثال ۷.۷ (تعریف اعداد صحیح). در فصل ۴ با اعداد طبیعی آشنا شدیم و نشان دادیم که آن‌ها تشکیل یک مجموعه می‌دهند. در واقع $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعهٔ استقرایی است که وجود خود در جهان مجموعه‌ها را وام‌دارِ اصل موضوعهٔ وجود مجموعهٔ استقرایی است. همچنین گفتیم که حاصل‌ضربِ دکارتی دو مجموعه، یک مجموعه است؛ بنابراین به طور خاص: $\mathbb{N}^{۲} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ نیز یک مجموعه است. اعضای مجموعهٔ $\mathbb{N}^{۲}$ به صورت (x, y) هستند که در آن $x, y \in \mathbb{N}$. روی $\mathbb{N}^{۲}$ رابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$(x, y)R(x', y') \iff x + y' = y + x',$$

دقت کنید که (اگر معنای تفریق را بدانیم)

$$(x, y)R(x', y') \iff x - y = x' - y'.$$

در واقع زمانی دو زوج را با هم در رابطه گرفته‌ایم که تفاضل درایه‌هایشان یکسان باشد.

تمرین ۳.۷. نشان دهید که رابطهٔ بالا یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

مجموعهٔ کلاس‌های هم‌ارزی رابطهٔ بالا را **مجموعهٔ اعداد صحیح** می‌نامیم و آن را با نمادِ $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{Z} = \{[(x, y)]_R \mid (x, y) \in \mathbb{N}^{۲}\}.$$

بنابراین هر کلاسِ $[(x,y)]$ نمایندهٔ تفاضلِ $x-y$ است. پس $\mathbb{Z}$ را می‌توان به صورت زیر هم نشان داد:

$$\mathbb{Z}=\{۰,۱,-۱,۲,-۲,\dots\},$$

که در آن:

$$\begin{aligned} ۰ &= [(۱,۱)] = [(۲,۲)] = [(۳,۳)] = \dots \\ -۱ &= [(۰,۱)] = [(۱,۲)] = [(۲,۳)]] = \dots \\ ۱ &= [(۱,۰)] = [(۲,۱)] = [(۳,۲)] = \dots \end{aligned}$$

عبارت‌های $۰, ۱, -۱, \dots$ تنها کوتاه‌نوشتهایی برای کلاس‌های هم‌ارزی هستند. وقتی یک مجموعه، با استفاده از یک رابطهٔ هم‌ارزی دسته‌بندی می‌شود، اهمیت ندارد که روی هر یک این دسته‌ها چه نامی بگذاریم، اما مهم است که ویژگی‌ها، مستقل از انتخاب نماینده‌ها باشد. مثلاً وقتی می‌گوییم عدد صحیحِ ۱ «خوب است» هم باید $(۱,۰)$ و هم $(۲,۱)$ و هم هر نمایندهٔ دیگری برای این نام، ویژگی «خوب بودن» را داشته باشند. در تمرین زیر، بررسی کرده‌ایم که جمع اعداد صحیح به انتخاب نماینده‌ها وابسته نیست.

تمرین ۴.۷.

۱. مجموعهٔ $\mathbb{N}^۲$ را روی یک نمودار رسم کنید و کلاس‌های مختلف هم‌ارزی بالا را روی آن مشخص کنید. نیز مشخص کنید که هر کلاس نشان دهندهٔ چه عددی است.

۲. گفتیم که $[(۱,۰)]=[(۲,۱)]=۱$ و $[(۲,۱)]=[(۱,۲)]=-۱$. تعریف کنید

$$[(x,y)]+[(x',y')]=[(x+x',y+y')].$$

حاصل $۱+(-۱)$ را یک بار با استفاده از

$$[(۲,۱)+[(۱,۲)]$$

و یک بار با استفاده از

$$[(۱,۰)]+[(۰,۱)]$$

محاسبه و جوابها را با هم مقایسه کنید.

۳. فرض کنید $t=[(x,y)]_R$ و $u=[(x',y')]_R$ دو عدد صحیح باشند. نشان دهید که حاصل $t+u$ به انتخاب نمایندهٔ کلاس دو عددِ t و u بستگی ندارد.

۴. حاصلضرب دو عدد صحیح را چگونه تعریف می‌کنید؟[۱]

پس این گونه است که در هر جهان از نظریهٔ مجموعه‌ها، یک مجموعه به نام مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد؛ روی این مجموعه می‌توان یک رابطهٔ هم‌ارزی تعریف کرد که مجموعهٔ متشکل از کلاس‌های آن، مجموعهٔ اعداد صحیح نام دارد. مجموعهٔ اعداد صحیح، تنها به علت مجموعه بودن آن اهمیت ندارد، بلکه روی آن اعمالی جبری قابل تعریف است که توسیع اعمال جبری روی اعداد طبیعی هستند. حال که $\mathbb{Z}$ را به طور دقیق با استفاده از اصول موضوعه شناخته‌ایم، در باقی بحثهامان از آن استفاده می‌کنیم؛ و البته نیازی نیست پیچیده بدان فکر کنیم. ویژگی‌های این مجموعه، همان‌ها هستند که در تحصیلات مقدماتی آموخته‌ایم.

[۱] این روش را امتحان کنید: $(x,y)\cdot(x',y')=(xx'+yy',xy'+x'y)$.

مثال ۸.۷. روی مجموعهٔ اعدادِ صحیح، $\mathbb{Z}$، رابطهٔ $\equiv_۳$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$(x \equiv_۳ y) \iff (\exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = ۳k).$$

به بیان دیگر، می‌گوئیم $x \equiv_۳ y$ هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم هر دو عددِ x و y بر ۳ یکسان باشد.

تمرین ۵.۷. نشان دهید رابطهٔ بالا یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

در ادامه، می‌خواهیم تعداد کلاس‌های رابطهٔ هم‌ارزی بالا را مشخص کنیم. واضح است که کلاس‌های رابطهٔ بالا به صورت زیر هستند:

$$\mathbb{Z}/{\equiv_۳} = \{[۰], [۱], [۲], [۳], [۴], \ldots\}.$$

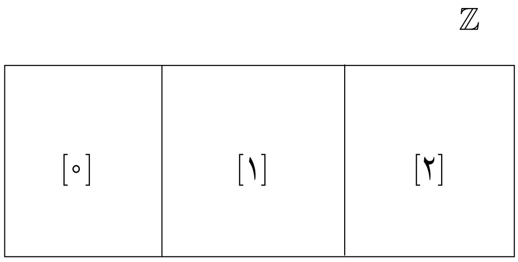
اما ادعا می‌کنیم که رابطهٔ بالا تنها سه کلاس متفاوت با هم دارد و این سه کلاس به صورت زیر هستند:

$$\mathbb{Z}/{\equiv_۳} = \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

برای اثبات گفتهٔ بالا، باید نشان دهیم که هر عدد صحیح، در یکی از کلاس‌های بالا قرار دارد. این واضح است؛ زیرا باقی‌ماندهٔ هر عدد صحیح بر ۳ یا ۰ است یا ۱ یا ۲. برای مثال، باقی‌ماندهٔ عدد ۷ بر ۳، عدد ۱ است، پس داریم

$$[۷] = [۱], [۸] = ۲, [۹] = [۰].$$

پس رابطهٔ $\equiv_۳$ اعداد صحیح را به سه قسمت افراز می‌کند و هر قسمت نشان‌دهنده یکی از باقیمانده‌های ممکن بر ۳ است. مثلاً $[۰]$ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیحی را نشان می‌دهد که بر ۳ بخش‌پذیر هستند. در جبر، مجموعهٔ $\mathbb{Z}/{\equiv_۳}$ را با $\mathbb{Z}_۳$ نشان می‌دهند.



تعمیم ۹.۷. برای عدد دلخواهِ $n \in \mathbb{N}$ روی $\mathbb{Z}$ رابطهٔ R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \iff x \equiv_n y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = nk;$$

نشان دهید که رابطهٔ بالا یک رابطهٔ هم‌ارزی با n کلاس است و

$$\mathbb{Z}/R = \{[۰], \ldots, [n - ۱]\}.$$

در جبر مجموعهٔ $\mathbb{Z}/R$ در بالا را با $\mathbb{Z}_n$ نشان می‌دهند.

در مثالِ ۷.۷ با نحوهٔ شکل‌گیری مجموعهٔ اعداد صحیح با استفاده از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا شدیم. مثال زیر، به نحوهٔ شکل‌گیری اعداد گویا می‌پردازد:

مثال ۱۰.۷ (اعداد گویا). گفتیم که $\mathbb{Z} = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\}$ یک مجموعه است. بنابراین $\mathbb{Z} - \{۰\}$ نیز مجموعه است، پس حاصل‌ضرب دکارتیِ $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{۰\})$ نیز یک مجموعه است که از عناصر به صورت (x, y) تشکیل شده است که در آن $x, y \in \mathbb{Z}$ و $y \neq ۰$. روی A رابطهٔ زیر را تعریف کنید:

$$(x, y)R(x', y') \iff x \cdot y' = y \cdot x'.$$

دقت کنید که (در صورتی که معنای تقسیم را بدانیم) در واقع گفته‌ایم که

$$(x, y)R(x', y') \iff \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}.$$

پس دو زوج با درایه‌های صحیح را زمانی در رابطه گرفته‌ایم که حاصل تقسیم درایه‌هایشان بر هم، یکسان باشد.

تمرین ۶.۷.

۱. نشان دهید که رابطهٔ بالا یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۲. مجموعهٔ A را در دو محور متعامد رسم کنید و عناصر هم‌کلاس آن را تحت رابطهٔ بالا مشخص کنید. روی هر کدام از این کلاس‌ها چه اسمی می‌گذارید؟

هر کلاسِ هم‌ارزیِ $[(x, y)]_R$ را با $\frac{x}{y}$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ این کلاس‌های هم‌ارزی تشکیل یک مجموعه می‌دهد که به آن مجموعهٔ اعداد گویا گفته می‌شود. این مجموعه را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم.

تمرین ۷.۷. گفتیم که هر کدام از کلاس‌های بالا، نشان‌دهندهٔ یک عدد گویا هستند. پس

$$\mathbb{Q} = \{[(x, y)]_R \mid (x, y) \in A\} = \{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \neq ۰\}.$$

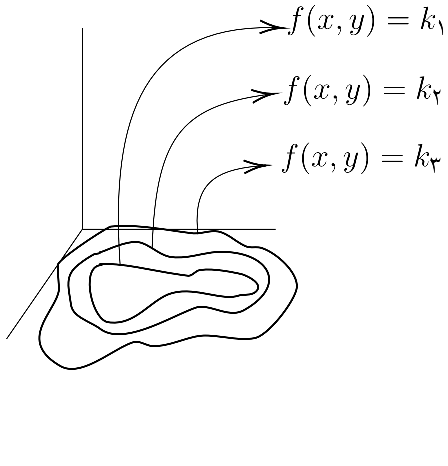
۱. حاصل $[(x, y)]_R + [(z, t)]_R$ را چگونه تعریف می‌کنید؟

۲. $[(x, y)]_R \cdot [(z, t)]_R$ را چگونه تعریف می‌کنید؟

مثال ۱۱.۷. مطابق آنچه در درس ریاضی عمومی ۲ می‌آموزید، فرض کنید $z = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد. رابطهٔ زیر یک رابطهٔ هم‌ارزی است:

$$(x, y)R(x', y') \iff f(x, y) = f(x', y').$$

مجموعهٔ X/R مجموعهٔ تمام منحنی‌های تراز تابع f نامیده می‌شود (که البته افرازی برای دامنهٔ این تابع هستند).



مثال ۱۲.۷. آیا می‌توانید یک رابطهٔ هم‌ارزیِ R روی مجموعهٔ $\mathbb{N}$ تعریف کنید به طوری که

$$\mathbb{N}/R = \{\{\text{اعداد زوج}\},\{\text{اعداد فرد}\}\}$$

پاسخ. رابطهٔ R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \iff x \equiv_{۲} y.$$

□

تمرین ۸.۷.

۱. نشان دهید که اگر رابطهٔ R روی یک مجموعهٔ X یک رابطهٔ هم‌ارزی باشد، آنگاه $R \circ R = R$.

۲. فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی روی مجموعه X باشند. نشان دهید که $R \circ S$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X است اگر و تنها اگر $R \circ S = S \circ R$.

۳.۷ افراز و تناظرِ آن با رابطهٔ هم‌ارزی

دریافتیم که رابطهٔ هم‌ارزی برای دسته‌بندی استفاده می‌شود. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که اساساً تنها راه دسته‌بندی استفاده از روابط هم‌ارزی است. نخست بیایید منظورمان از دسته‌بندی یا «افراز» را به طور دقیق بیان کنیم:

تعریف ۱۳.۷. فرض کنید X یک مجموعه باشد. مجموعهٔ $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{P}(X)$ را یک افراز برای X می‌خوانیم هرگاه

۱. $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B = X$

۲. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad (A \neq B \to A \cap B = \varnothing)$

۳. $\forall A \in \mathcal{A} \quad A \neq \varnothing$.

مثال ۱۴.۷. تمام افرازهای مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ را بنویسید.

پاسخ. تمام صورت‌هایی که می‌توان این مجموعه را افراز کرد، در زیر نوشته شده است:

$$\mathcal{A}_۱ = \{\{۱\},\{۲,۳\}\}, \mathcal{A}_۲ = \{\{۲\},\{۱,۳\}\}, \mathcal{A}_۳ = \{\{۳\},\{۱,۲\}\}, \mathcal{A}_۴ = \{\{۱\},\{۲\},\{۳\}\},$$
$$\mathcal{A}_۵ = \{\{۱,۲,۳\}\}$$

□

مثال ۱۵.۷. یک نمونه افراز از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ به صورت زیر است:

اعداد فرد	اعداد زوج

$$\mathbb{N} = \{\text{اعداد زوج}\} \cup \{\text{اعداد فرد}\}.$$

هر افرازِ $\mathcal{A}$ برای مجموعهٔ X مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X است. قبلا این را دیده‌ایم که از هر رابطهٔ هم‌ارزی می‌توان به یک افراز رسید:

قضیه ۱۶.۷. اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد، آنگاه $X/R = \{[x] \mid x \in X\}$ یک افراز X است.

اثبات. توجه شمارهٔ ۵.۷ و قضیه‌های مربوط به آن را در بخش قبل مشاهده کنید. □

پس مثلاً می‌توان از رابطهٔ همقد بودن، که یک رابطهٔ هم‌ارزی است استفاده کرد و دانشجویان کلاس را بر اساس قد دسته‌بندی کرد. اما حال ادعا می‌کنیم که عکس این گفته نیز درست است: یعنی هر دسته‌بندی‌ای در ریاضی، از یک رابطه هم‌ارزی ناشی می‌شود.

فرض کنید یک دسته‌بندی از اعضای مجموعهٔ X داشته باشیم. روی X می‌توانیم رابطهٔ زیر را تعریف کنیم: دو عنصر را با هم در رابطه می‌گیریم هرگاه هر دو در یک دسته قرار داشته باشند. در اثباتِ قضیهٔ زیر همین گفتهٔ ساده را ریاضی‌وار بیان کرده‌ایم.

قضیه ۱۷.۷. فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{P}(X)$ افرازی برای مجموعهٔ X باشد. آنگاه یک رابطهٔ هم‌ارزی (یکتای) R روی X چنان یافت می‌شود که

$$X/R = \mathcal{A}.$$

اثبات. داشتهٔ ما در صورت این قضیه، یک افرازِ $\mathcal{A}$ برای مجموعهٔ X است؛ یعنی یک دسته‌بندی از اعضای مجموعهٔ X را در اختیار داریم. هدفمان پیدا کردن یک رابطهٔ هم‌ارزیِ R روی X است به طوری که $X/R = \mathcal{A}$. رابطهٔ مورد نظر را R می‌نامیم و برای تعریف آن، به صورت زیر از دسته‌بندی داده شده استفاده می‌کنیم:

$$xRy \iff \text{x و y هر دو در یک مجموعهٔ یکسان در $\mathcal{A}$ واقع شده باشند؛ یعنی هم‌دسته باشند}$$

به بیان بهتر، تعریف کرده‌ایم

$$xRy \iff \exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A.$$

باید ثابت کنیم که

۱. رابطهٔ R در بالا یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۲. $X/R = \mathcal{A}$.

برای اثبات قسمت اول حکم، نخست ثابت می‌کنیم که R انعکاسی است. فرض کنید $x \in X$ عنصر دلخواهی باشد. از آنجا که $\bigcup \mathcal{A} = X$ می‌دانیم که $x \in \bigcup \mathcal{A}$. پس $A \in \mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که $x \in A$. پس $x \in A$ و $x \in A$ یعنی xRx پس R انعکاسی است.

دوم ثابت می‌کنیم که R تقارنی است. فرض کنید xRy. در این صورت:

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

به بیان دیگر

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad y, x \in A,$$

پس yRx یعنی R تقارنی است.

سوم ثابت می‌کنیم که R متعدی است. فرض کنید xRy و yRz. پس مجموعهٔ $A \in \mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که $x, y \in A$ و مجموعهٔ $B \in \mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که $y, z \in B$. اما در این صورت داریم:

$$y \in A \cap B$$

از آنجا که $\mathcal{A}$ یک افراز است اگر $A \neq B$ آنگاه $A \cap B = \varnothing$. پس امکانی نیست جز این که $A = B$؛ یعنی $x, y, z \in A = B$. و البته این هم یعنی xRz.

حال به اثبات قسمت دوم حکم، یعنی $\mathcal{A} = X/R$ می‌پردازیم. توجه کنید که هم X/R و هم $\mathcal{A}$ مجموعه‌هائی از زیرمجموعه‌های X هستند. نخست ثابت می‌کنیم که $\mathcal{A} \subseteq X/R$.

فرض کنید $A \in \mathcal{A}$. می‌دانیم که $X/R = \{[x] \mid x \in X\}$؛ پس کافی است ثابت کنیم که $x_\circ \in X$ چنان وجود دارد که $A = [x_\circ]$. توجه کنید که A ناتهی است (طبق تعریف افراز). فرض کنید $x_\circ$ یک عضو دلخواه از A باشد. ادعا می‌کنیم که $A = [x_\circ]$. داریم

$$[x_\circ] = \{y \mid yRx_\circ\} = \{y \mid y, x_\circ \in A\} = \{y \mid y \in A\} = A$$

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که $\mathcal{A} \subseteq X/R$. حال به اثبات این می‌پردازیم که $X/R \subseteq \mathcal{A}$.

فرض کنید $[x_\circ] \in X/R$. می‌دانیم که $A \in \mathcal{A}$ وجود دارد که $x_\circ \in A$؛ زیرا $X = \bigcup \mathcal{A}$. به طور مشابه با بالا ثابت کنید که $A = [x_\circ]$. در نتیجه $[x_\circ] \in \mathcal{A}$. تنها چیزی که هنوز اثبات نکرده‌ایم، یکتاییِ رابطهٔ هم‌ارزی یادشده است. این کار را در قضیهٔ بعدی انجام می‌دهیم. $\square$

پیش از آن که بحث را ادامه دهیم، دقت کنید که در قضیهٔ بالا گفتیم که اگر $\mathcal{A}$ یک افراز باشد، آنگاه رابطه هم‌ارزی R وجود دارد به طوری که $X/R = \mathcal{A}$. حکم قضیهٔ فوق، وجود یک رابطهٔ هم‌ارزی را طلب می‌کند. چنین حکمی می‌تواند دو نوع اثبات داشته باشد: اثبات وجودی، و اثبات ساختی. در اثبات وجودی، تنها ثابت می‌کنیم که آن موجودی در پی آن هستیم وجود دارد، ولی شاید نتوانیم دقیقاً آن را شناسایی کنیم. در اثبات ساختی، موجود مورد نظر را به طور دقیق پیدا می‌کنیم. به نظر شما، اثباتی که برای حکم فوق آمد، ساختی بود یا وجودی؟

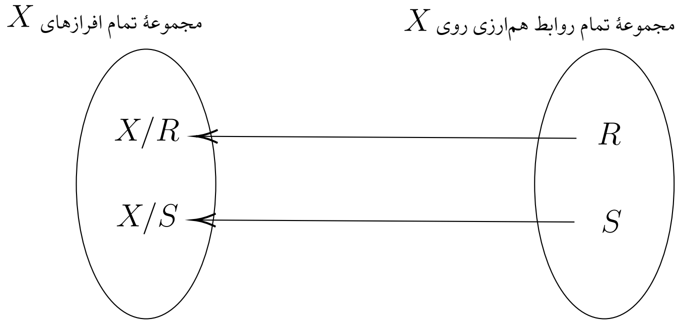
به بحث اصلی بازمی‌گردیم: فرض کنید $\mathcal{M}$ مجموعهٔ متشکل تمام روابط هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد؛ پس هر عضوِ مجموعهٔ $\mathcal{M}$ یک رابطه است (و البته هر رابطه، خودْ یک مجموعه است). نیز فرض کنید $\mathcal{N}$ مجموعهٔ تمام افرازهای ممکن برای مجموعهٔ X باشد؛ پس هر عضوِ $\mathcal{N}$ یک افراز است (و هر افراز خودش یک مجموعه از مجموعه‌هاست). از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ یک **تابع** f را به صورت زیر تعریف کنید: [2] برای هر $R \in \mathcal{M}$ تعریف کنید: $f(R) = X/R$.

تابعی که در بالا تعریف کردیم، هر رابطهٔ هم‌ارزی را به افرازی می‌برد که توسط این رابطهٔ هم‌ارزی ایجاد می‌شود. قضیهٔ ۱۷.۷ در واقع به ما می‌گوید که تابع f تابعی پوشاست؛ یعنی هر افرازی از یک رابطهٔ هم‌ارزی ناشی می‌شود.

در زیر ثابت کرده‌ایم که f یک‌به‌یک نیز هست؛ به بیان دیگر، دو رابطهٔ هم‌ارزی متفاوت، نمی‌توانند یک افراز یکسان ایجاد بکنند. باز به بیانی دیگر اگر افرازهای تولید شده از دو رابطهٔ هم‌ارزی با هم یکسان شوند، آن دو رابطه با هم یکی هستند. (تمرینِ ۲۴.۸ در صفحهٔ ۱۵۰ را مشاهده کنید.)

---

[2] مفاهیم تابع، یک‌به‌یک و پوشا بودن را در فصل بعدی معرفی کرده‌ایم. در این جا درک عمیقی از تابع، مد نظر ما نیست. فقط می‌خواهیم هر رابطه را به افراز به دست آمده توسط آن نظیر کنیم.



قضیه ۱۸.۷. فرض کنید R و S دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه X باشند. اگر $X/R = X/S$ آنگاه $R = S$. به بیان دیگر اگر $X/R = X/S$ آنگاه $\forall x, y \in X \quad (xRy \leftrightarrow xSy)$.

اثبات. فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی باشند و $X/R = X/S$. فرض کنید $(x_\circ, y_\circ) \in R$ هدفمان نشان دادن این است که $(x_\circ, y_\circ) \in S$.

این که $(x_\circ, y_\circ) \in R$ یعنی $x_\circ \ R \ y_\circ$. از این فرض، از آن‌جا که R رابطهٔ هم‌ارزی است، نتیجه می‌گیریم که $[x_\circ]_R = [y_\circ]_R$. حال از $X/R = X/S$ نتیجه می‌گیریم که عنصر $z_\circ$ وجود دارد به طوری که $[x_\circ]_R = [y_\circ]_R = [z_\circ]_S$. می دانیم که $x_\circ \in [x_\circ]_R$ پس $x_\circ \in [z_\circ]_S$. به طور مشابه می‌توانیم اثبات کنیم که $y_\circ \in [z_\circ]_S$، پس $x_\circ \ S \ z_\circ \ S \ y_\circ$. حال بنا به متعدی بودنِ رابطه S داریم: $x_\circ \ S \ y_\circ$ یعنی $(x_\circ, y_\circ) \in S$. پس ثابت شد که $R \subseteq S$. اثبات این که $S \subseteq R$ به طور کاملاً مشابه است. $\square$

اثبات قضیهٔ مهم زیر در اینجا به پایان رسید: (همچنین تمرینِ ۲۴.۸ را مشاهده کنید).

قضیه ۱۹.۷. میان افرازهای یک مجموعه و روابط هم‌ارزی روی آن، یک تناظر یک‌به‌یک وجود دارد.

توجه ۲۰.۷. در ریاضیات، مشابه آنچه در تعریف اعداد صحیح دیدیم، بسیار پیش می‌آید که اعضای یک مجموعه را نخست با استفاده از یک رابطهٔ هم‌ارزی افراز می‌کنیم. سپس روی هر دسته یک اسم می‌گذاریم (مثلاً اسم نمایندهٔ آن دسته را انتخاب می‌کنیم). آنگاه بین دسته‌ها روابط یا توابعی تعریف می‌کنیم. برای مثال، اعداد صحیح را می‌توان بر حسب باقیمانده به ۳ به سه دسته تقسیم کرد:

$$\mathbb{Z}_۳ = \{[۰], [۱], [۲]\} \tag{۴.۷}$$

معلوم است که دسته‌بندی فوق را به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\mathbb{Z}_۳ = \{[۹], [۳۱], [۲۶]\}. \tag{۵.۷}$$

حال می‌توان بین این دسته‌ها «جمع» تعریف کرد:

$$[a] + [b] = [a + b].$$

تمرین ۹.۷. حاصل‌جمع اعضای $\mathbb{Z}_۳$ را در حالت (۴.۷) به صورت دوبه‌دو بنویسید. آیا اگر $\mathbb{Z}_۳$ را به صورت (۵.۷) بگیریم، ممکن است حاصل جمع دو عنصر متفاوت با حالت قبل می‌شود؟

۴.۷ پیوست: اعداد

خواننده‌ای که علاقه‌مند به دنبال کردن سریع‌تر مباحث بعدی است، می‌تواند از خواندن این بخش صرف‌نظر کند. هدف ما در این بخش، پرداختن به این موضوع است که هر کدام از مجموعه‌های اعداد طبیعی، صحیح، گویا، حقیقی و مختلط چگونه از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها حادث می‌شوند. ما این موضوع مهم را تنها در قالب یک پیوست کوچک آورده‌ایم و حتی همان‌جا هم به جزئیات نپرداخته‌ایم؛ تنها به این خاطر که شناساندن اعداد حقیقی، بخشی از یک دورهٔ «آنالیز ریاضی» است. برای ما نحوهٔ «ساخت» اعداد حقیقی بر اساس اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها مهم است، اما قرار نداریم تا همهٔ ویژگی‌های جذاب این مجموعه را همین جا بیان و اثبات کنیم. انجام این کار، عملاً منجر به کپی‌برداری از یک کتاب استاندارد آنالیز در یک بخش نسبتاً طولانی از کتاب خواهد شد. کما این که اساساً هر آن چه که در یک دورهٔ کارشناسی ریاضی تدریس می‌شود، ریشه‌ای در مبانی ریاضی دارد که باید در حین تدریس همان موضوع به دانشجو آموزش داده شود. مثلاً می‌شود یک بخش کتاب مبانی ریاضی را به نظریهٔ «میدان‌ها»، «گروه‌ها» یا «گراف‌ها» نسبت داد، ولی بدیهی است که این کار ناضروری است.

در فصلِ ۴ با مجموعهٔ اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ آشنا شدیم. گفتیم که در جهانِ $\mathbf{V}$ از مجموعه‌ها، یک «کوچکترین مجموعهٔ استقرایی» وجود دارد که آن را با ω نشان می‌دهیم؛ این مجموعه، وجودش را وامدار یک اصل‌موضوعه به نام اصل موضوعهٔ وجود مجموعهٔ استقرایی است. در جهانِ خوش‌بنیاد مجموعه‌ها، ω همان $\mathbb{N} = \{۰, ۱, \ldots\}$ است. مهمترین ویژگیِ $\mathbb{N}$ استقرایی بودن آن است و از این ویژگی برای تعریف اعمال اصلی جمع و ضرب استفاده می‌شود. ساختارِ مرتبهٔ اول $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ مرجع مطالعات نظریهٔ اعدادی و علوم‌کامپیوتری فراوان است.

مجموعهٔ $\mathbb{N}$ دارای «خلأهای جبری» فراوان است. معادله‌ای به سادگی معادلهٔ $x + ۱ = ۰$ در این مجموعه دارای جواب نیست. پیدا کردن مجموعه‌ای که شامل $\mathbb{N}$ باشد و در آن چنین خلأهایی نداشته باشد، کار سختی نیست. در مثالِ ۷.۷ دیدیم که می‌توان روی $\mathbb{N}^۲$ یک رابطهٔ هم‌ارزی به صورت زیر تعریف کرد:

$$(x, y)R(z, t) \iff x + t = y + z.$$

مجموعهٔ متشکل از کلاس‌های هم‌ارزیِ رابطه فوق را با $\mathbb{Z}$ نشان دادیم. اعضای $\mathbb{Z}$ را به صورتِ

$$\mathbb{Z} = \{۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots\}$$

نشان دادیم و گفتیم که برای مثال،

$$-۱ = [(۰, ۱)] = [(۱, ۲)], [۲, ۳], \ldots$$

روی مجموعهٔ این کلاس‌های هم‌ارزی جمع و ضرب نیز تعریف کردیم. هر چند در این تعریف، نماینده‌های کلاس‌های هم‌ارزی با هم جمع (ضرب) می‌شوند، اما حاصل جمع (حاصلِ ضرب) مستقل از انتخاب یک نمایندهٔ خاص است. واضح است که -۱ به طور خاص جواب معادلهٔ $x + ۱ = ۰$ است.

مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ از لحاظ جبری کامل‌تر از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ است، ولی با این حال این مجموعه هم خلأهای جبری فراوان دارد. معادله‌ای به سادگیِ $۲x = ۱$ در این مجموعه جواب ندارد. طولهای زیادی روی خط‌کش وجود دارند که با اعداد صحیح قابل نمایش نیستند. در مثالِ ۱۰.۷ دیدیم که مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ چگونه با استفاده از یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{۰\})$ ایجاد می‌شود؛ در واقع $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ متشکل از همهٔ کلاس‌های هم‌ارزی رابطهٔ زیر است:

$$(x, y)R(z, t) \iff xt = yz.$$

گفتیم که کلاس هم‌ارزی یک عنصرِ (x,y) را با $\frac{x}{y}$ نشان می‌دهیم. بنا به تعریفِ رابطهٔ هم‌ارزی فوق داریم:

$$\frac{x}{y}=\frac{z}{t} \iff xt=yz.$$

روی این مجموعه، اعمال جمع و ضرب به صورت آشنای زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{x}{y}+\frac{x'}{y'}=\frac{xy'+yx'}{yy'},\quad \frac{x}{y}\cdot\frac{x'}{y'}=\frac{xx'}{yy'}.$$

به جای عنصر $\frac{x}{y}$ در بالا، می‌توانستیم هر نمایندهٔ دیگری در $[(x,y)]$ را انتخاب کنیم، ولی این انتخاب هیچ تأثیری روی حاصل جمع و ضرب بالا نخواهد داشت. روی اعداد گویا، می‌توان **ترتیب** را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{x}{y}<\frac{x'}{y'} \iff xy'<yx'.$$

ترتیب سمت چپ، ترتیبی است که می‌خواسته‌ایم تعریف کنیم، و ترتیب سمت راست، ترتیب روی اعداد صحیح است که آن را «دانسته» فرض کرده‌ایم: اعداد نامثبت از اعداد مثبت کمترند و اعداد مثبت همان ترتیب اعداد طبیعی را دارند.

واضح است که $\frac{۱}{۲}$ (یعنی هر نماینده‌ای از $[(۱,۲)]$) جواب معادلهٔ $۲x=۱$ است. به طور کلی مجموعهٔ اعداد گویا، نمایندهٔ خوبی برای «تصور ما از مجموعهٔ همهٔ اعداد» است؛ زیرا ظاهراً پیوسته به نظر می‌رسد و شهود خوبی برای «طول» به دست می‌دهد. با این حال، این مجموعه نیز، هم از لحاظ جبری و هم از لحاظ پیوستگیِ ترتیبی، حفره‌های زیادی دارد.

یک مثلث قائم الزاویه که طول هر ضلع آن یک باشد، وتری دارد که طول آن قابل نمایش با هیچ کسری نیست! یعنی معادلهٔ جبریِ سادهٔ $x^۲=۲$ در اعداد گویا جواب ندارد. همچنین اگر با استفاده یک پرگار، یک دایره به شعاعِ $\frac{۱}{۲}$ رسم کنیم، محیط این دایره نیز قابل نوشتن به صورت یک عدد کسری نیست. این دو مثال، بخشی از حقایق تاریخی مطالعهٔ اعداد در ریاضیات هستند.

می‌توان با دنباله‌ای از اعداد گویا، به طول وترِ مورد نظر در بالا «نزدیک» شد؛ دنبالهٔ زیر، مثالی از چنین دنباله‌ای است:

$$x_{n+۱}=\frac{۱}{۲}x_n+\frac{۱}{x_n}, x_{\circ}=۱.$$

همچنین در مثال دایره، محیط را می‌توان با استفاده از محاط کردن چندضلعی‌ها در آن تخمین زد: هر چه تعداد اضلاع چندضلعی محاط شده بیشتر باشد «تقریب» بهتری برای محیط دایره به دست می‌آید. امروزه یک دانش‌آموز پایهٔ راهنمایی احتمالاً می‌داند که محیط چنین دایره‌ای عددِ «بی‌پایانِ»

$$\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۹\ldots$$

است، اما بعید است اثباتی برای این که π را نمی‌توان به صورت یک کسر نوشت، دیده باشد. مهم‌ترین ویژگی عدد بالا، آن است که با اعداد کسریِ $۳, ۳/۱, ۳/۱۴, ۳/۱۴۱, ۳/۱۴۱۵, \ldots$ می‌توان «به هر اندازهٔ دلخواه» به آن نزدیک شد، ولی خودِ این عدد جزو اعداد گویا نیست. عددِ π در واقع، نامِ یک «شکاف ترتیبی» در اعداد گویا است؛ از هر دو طرف می‌توان به هر اندازهٔ دلخواه بدان نزدیک شد ولی نمی‌شود به آن رسید: [۳]

[۳] از آن بغرنج‌تر، این مسأله است که هیچ معادلهٔ چندجمله‌ای به صورتِ

$$a_{\circ}+a_۱x+\ldots+a_nx^n=\circ$$

با ضرایبِ در اعداد گویا وجود ندارد که ریشه‌اش، عدد π باشد. اصطلاحاً عددِ π یک عدد «غیرجبری» است. برای اثباتِ این گفته می‌توانید به عنوان مثال، کتابِ [۱۱] را ببینید.

π

مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، مجموعه‌ای است که با پُر کردنِ حفره‌های ترتیبی در اعداد گویا به دست می‌آید. به نحو جذابی پر کردن خلاهای ترتیبی، بسیاری خلاهای جبری رانیز پر می‌کند. در ادامه، روشی برای ساخت این مجموعه را مختصراً توضیح داده‌ایم.

فرض کنید $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ یک خانواده اندیس‌دار باشد که هر عنصر آن یک عدد گویا است. به چنین خانواده‌ای، یک **دنباله** از اعداد گویا گفته می‌شود. به بیان دیگر، اگر معنی تابع را بدانیم، هر چنین دنباله‌ای یک تابعِ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ است؛ پس به طور خاص (بنا به اصل جانشانی) یک مجموعه است.

کلاسِ متشکل از همهٔ دنباله‌های این‌چنین، نیز یک مجموعه است. اثبات این گفته بسیار ساده است ولی بگذارید فعلاً وارد آن نشویم.

تعریف ۲۱.۷. فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از اعداد گویا باشد. این دنباله را «کُشی» می‌نامیم هرگاه جملات آن با بزرگتر شدن اندیس‌ها، به هم نزدیک‌تر و نزدیک‌تر شوند. به بیان دیگر هرگاه

$$\forall\epsilon\in\mathbb{Q}^+\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad\forall n,m>N\quad |a_n-a_m|<\epsilon.$$

منظور از $\mathbb{Q}^+$ در بالا، اعداد گویای مثبت است.

پس اگر $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کشی از اعداد گویا باشد، از یک جا به بعد جملات آن فاصلهٔ کمتر از $\frac{۱}{۲}$ با هم دارند؛ از جایی بعدتر از آن، جملات دنباله، فاصله‌ای کمتر از $\frac{۱}{۳}$ با هم دارند،الی آخر. بیایید مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کُشی متشکل از اعداد گویا را با $\mathcal{R}$ نشان دهیم.

تعریف ۲۲.۷. روی مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کشی از اعداد گویا، یعنی $\mathcal{R}$، رابطهٔ R را به صورت زیر را تعریف کنید:

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}R(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \iff \text{دنبالهٔ } (a_i-b_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ یک دنبالهٔ کُشی باشد}$$

به عنوان یک تمرین، تحقیق کنید که رابطهٔ فوق یک رابطهٔ هم‌ارزی است. تعبیر شهودیِ تعریف بالا این است که دو دنباله، زمانی در رابطه باشند که جملات آن دو دنباله «به یکدیگر» نزدیک‌تر و نزدیک‌تر شود. هدف از تعریف رابطهٔ هم‌ارزی بالا این است که «دنباله‌های نزدیک به هم را در یک دسته، یا یکی بگیریم».

تعریف ۲۳.۷. هر کلاس هم‌ارزیِ رابطهٔ فوق، یک «عدد حقیقی» نام دارد. مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

پس به طور خلاصه، برای به دست آوردن مجموعهٔ اعداد حقیقی به این صورت عمل می‌کنیم: روی مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کشی متشکل از اعداد گویا، یک رابطهٔ هم‌ارزی تعریف می‌کنیم. هر عدد حقیقی، در واقع نامی برای یک کلاس هم‌ارزی است. به عنوان مثال، دنبالهٔ

$$۳, ۳/۱, ۳/۱۴, ۳/۱۴۱, ۳/۱۴۱۵, \ldots$$

یک دنبالهٔ کشی از اعداد گویا است. کلاس این دنباله را با علامتِ π نشان می‌دهیم:

$$\pi=[۳, ۳/۱, ۳/۱۴, ۳/۱۴۱, ۳/۱۴۱۵, \ldots].$$

مشابه قبل، باید بین این اعداد جدید، جمع و ضرب و رابطهٔ ترتیب تعریف می‌شود. این کار، چندان دشوار نیست، حاصل جمع دو دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را دنبالهٔ $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$، و حاصل‌ضرب آن‌ها را دنبالهٔ $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ می‌گیریم. مهم است که نشان دهیم که اولاً این دو دنباله هم کشی هستند، و ثانیاً این جمع و ضرب مستقل از انتخاب نماینده‌هاست؛ اما به این بحث ورود نمی‌کنیم.

ترتیب بین اعداد حقیقی را به صورت پیش رو تعریف می‌کنیم: اگر $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نمایندگانی از دو کلاس هم‌ارزی باشند، تعریف می‌کنیم $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هرگاه از جمله‌ای به بعد، جملات دنبالهٔ a_n از جملات دنبالهٔ b_n کمتر باشند:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall m>N \quad a_m<b_m.$$

خوانندهٔ با دقت می‌داند که نوشتنِ $\exists N\in\mathbb{N}$ ما را از اصول ریاضی نویسی در منطق مرتبهٔ اول دور نمی‌کند؛ زیرا «وجود یک عنصر در $\mathbb{N}$» یک کوتاه نوشت برای عبارت «وجود یک عنصر دارای ویژگی عدد طبیعی بودن» است؛ و این ویژگی قابل نوشتن در منطق مرتبهٔ اول است.

قضیه ۲۴.۷. مجموعهٔ اعداد حقیقی در «اصل کمال» صدق می‌کند؛ یعنی هر مجموعهٔ $A\subseteq\mathbb{R}$ که از بالا کراندار باشد، دارای کوچکترین کران بالاست (تمرین ۱۹.۲ را مشاهده کنید).

اثبات. پیش از این که اثبات را شروع کنیم، هشدار می‌دهیم که اثبات پیش رو، یک «اثبات استاندارد» است که پیدا کردن آن در یک منبع آنالیزی دشوار نیست. هدف ما در اینجا آموزش تکنیک این اثبات نیست؛ پس جزئیاتی را به عنوان تمرین به خوانندهٔ علاقه‌مند وامی‌گذاریم.

فرض کنید $A\subseteq\mathbb{R}$ یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی باشد که از بالا کران‌دار است؛ یعنی یک عدد حقیقیِ x وجود دارد به طوری که

$$\forall y\in A \quad y<x.$$

می‌خواهیم کوچکترین کران بالای این مجموعهٔ A را پیدا کنیم.

گفتیم که می‌دانیم که A کران بالا دارد (ولی فعلاً نمی‌دانیم که کوچکترینِ این کران‌های بالا وجود دارد یا نه). پس فرض کنید که x_1 یکی از کرانهای بالای مجموعهٔ A باشد. می‌توانیم فرض کنیم که x_1 یک عدد گویاست؛ زیرا اگر نبود یک عدد گویای بزرگتر از آن را به جای x_1 در نظر می‌گیریم. [4]

در ادامهٔ اثبات، با یک الگوریتم ساده، دو دنبالهٔ کشیِ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ می‌سازیم که در واقع هر دو یک عدد حقیقی یکسان هستند (یعنی دو دنبالهٔ مورد نظر با هم در رابطه‌اند). همین دنباله، قرار است کوچکترین کران بالای مورد نظر ما برای مجموعهٔ A باشد.

فرض کنید که y_1 یک عدد گویا باشد که به طور همزمان از همهٔ عناصر موجود در مجموعهٔ A بزرگتر نیست. قرار دهید: $m_1=\frac{x_1+y_1}{2}$.

اگر عدد m_1 یک کران بالا برای A باشد، قرار دهید $x_2=m_1$ و $y_2=y_1$؛ اما اگر این طور نبود قرار دهید $y_2=m_1$ و $x_2=x_1$. مشابهاً قرار دهید: $m_2=\frac{x_2+y_2}{2}$ و عناصر x_3,y_3 را با همان قانون قبلی تعریف کنید؛ و این کار را ادامه دهید.

به این طریق دو دنبالهٔ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ساخته می‌شود. در ساخت این دنباله، بارها میان یک کران بالا و یک عنصر که کران بالا نیست میانگین گرفته شده است.

[4] این کار به آسانی امکان‌پذیر است؛ زیرا x_1 یک دنباله از اعداد گویاست که ویژگی کشی بودن را داراست. یعنی جملات آن از جایی به بعد «متمرکز» می‌شوند. پس می‌شود یک دنبالهٔ ثابت از اعداد گویا پیدا کرد که جملهٔ ثابت آن از همهٔ جملات دنباله‌ای که توسط x_1 مشخص می‌شود بزرگتر است.

این دو دنباله دارای ویژگی‌های زیر هستند (چک کردن این ویژگی‌ها را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم)

۱. هر دو کشی اند.

۲. همهٔ عناصر دنبالهٔ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ کران بالای A هستند.

۳. هیچ کدام از عناصر دنبالهٔ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ کران بالای A نیست.

۴. هر دوی این دنباله‌ها، یک عنصر یکسان در $\mathbb{R}$ را مشخص می‌کنند؛ به بیان دیگر هر دو با هم طبق رابطهٔ هم‌ارزی‌ای که تعریف کردیم، در رابطه‌اند.

عناصرِ دو دنبالهٔ یادشده به هم نزدیک‌تر و نزدیک‌تر می‌شوند. دنبالهٔ y_n صعودی و دنبالهٔ x_n نزولی است. به عنوان تمرین، نشان دهید که $x = [(x_n)] = [(y_n)]$ کوچکترین کران بالا برای A است. $\square$

اصل کمال، یعنی ویژگی‌ای که در قضیهٔ بالا اثبات کرده‌ایم، مهم‌ترین ویژگی اعداد حقیقی است. همهٔ ویژگی‌های حیاتی مجموعهٔاعداد حقیقی در آنالیز و حساب دیفرانسیل، به نوعی از اصل کمال نتیجه می‌شوند. در واقع این اصل است که همهٔ حفره‌های ترتیبی اعداد را پُر می‌کند و پر شدن این حفره‌ها، موجب ایجاد مفاهیم با اهمیتی مانند حد، پیوستگی، ویژگی مقدار میانی و غیره است. به لطف اصل کمال است که در اعداد حقیقی موارد زیر درست است (با هر یک از این موارد در دوره‌های مختلف درسی ریاضی آشنا خواهید شد):

۱. هیچ عنصری وجود ندارد که از همهٔ اعداد طبیعی بزرگتر است (ویژگی ارشمیدسی).

۲. هر دنبالهٔ صعودی از بالا کران‌دار، دارای حد است.

۳. هر تابع پیوسته‌ای که در یک بازه تعریف شده است، اگر در نقطه‌ای منفی و در نقطه‌ای مثبت باشد، در نقطه‌ای میانی صفر می‌شود.

۴. بازه‌های بسته کران‌دار فشرده‌اند.

راههای دیگری برای ساختِ مجموعهٔ اعداد حقیقی با استفاده از مجموعهٔ اعداد گویا وجود دارند که البته ما قصد پرداختن به آن‌ها را نداریم. (برای مثال [۱۴] را ببینید).

پس تا اینجا با $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ آشنا شدیم. هر کدام از این مجموعه‌ها، یک حفرهٔ جبری یا یک حفرهٔ ترتیبی در مجموعهٔ پیش از خود را پر می‌کرد. مجموعهٔ اعداد حقیقی هیچ حفره‌ای از لحاظ ترتیبی ندارد و بهترین مجموعه برای نمایش «طول» هاست. با این حال هنوز از لحاظ جبری، حفره‌ای دارد.

معادلهٔ سادهٔ $x^۲ = -۱$ در این مجموعه، پاسخی ندارد. زیرا هر عدد وقتی به توان ۲ می‌رسد، حاصل، عددی مثبت است. مطلوبِ جبری ما، پیدا کردن یک مجموعه از اعداد است که در آن همهٔ معادله‌های چندجمله‌ای جواب داشته باشند.

بیایید یک عنصر خیالی، یا «موهومی»، خارج از $\mathbb{R}$ را به نام i در نظر بگیریم و فرض کنیم $i^۲ = -۱$. با مهمان‌نوازی اجازه دهیم که این i با مجموعهٔ اعداد حقیقی وارد «واکنش» شود. مثلاً اجازه بدهیم عناصری به صورت $a_n i^n + a_{n-۱} i^{n-۱} + \dots a_۱ i + a_۰$ ساخته شوند که در آن a_i ها عدد حقیقی‌اند. از آنجا که $i^۲ = -۱$ حاصل چنین واکنشی، تنها منجر به تولید عناصری به صورت $b_۰ + b_۱ i$ می‌شود. به هر چنین عنصری، یک عدد مختلط می‌گوییم.

مجموعهٔ اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم. واضح است که معادلهٔ $x^۲ = -۱$ در این مجموعه جواب دارد؛ هم i و هم $-i$ جوابهای این معادله هستند. اما یک واقعیت عجیب در اینجا به وقوع می‌پیوندد:

قضیه ۲۵.۷. همهٔ معادلات چندجمله‌ای (چه با ضرایب حقیقی و چه حتی با ضرایب مختلط) در مجموعهٔ $\mathbb{C}$ پاسخ دارند.

قضیهٔ بالا، «قضیهٔ اساسی جبر» نام دارد. همان طور که گفتیم، این قضیه می‌گوید که همین که ریشه‌ای برای معادلهٔ سادهٔ $x^۲ = -۱$ در نظر گرفته شود، همهٔ معادلات دیگر هم حل می‌شوند.

اثبات قضیهٔ فوق دورتر از اهداف درس مبانی ریاضی است.[5] مجموعهٔ اعداد مختلط، بهشت مطالعات جبری است؛ این مجموعه از لحاظ جبری اشباع است؛ بدین معنی که با داشتن این مجموعه، نیازی به مراجعه به مجموعه‌های بزرگتری برای پیدا کردن پاسخ معادلات نیست.

در پایان بحث معرفی مجموعه‌های اعداد، لازم می‌دانیم به یک سوال متداول در مورد اصل کمال پاسخ دهیم. عموماً وقتی دانشجویان با اصل کمال مواجه می‌شوند، می‌پرسند که «اگر کمال، یک اصل است پس چرا اثباتش می‌کنیم». پاسخ این است که «اصل کمال» یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های اعداد حقیقی است که در اثر روش ساخت این مجموعه، با استفاده از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها حادث می‌شود؛ دقیقاً همان طور که استقراء در اعداد طبیعی یکی از ویژگی‌های بنیادین است که درستی آن نتیجهٔ نحوهٔ ایجاد مجموعهٔ اعداد طبیعی است. اما تقریباً همهٔ ویژگی‌های بنیادین مجموعهٔ اعداد حقیقی از اصل کمال نتیجه می‌شوند. پس می‌شود اصول موضوعه‌ای، از جمله اصل کمال، را ثابت در نظر گرفت و گفت: «مجموعهٔ اعداد حقیقی، مجموعه‌ای در جهان $\mathbf{V}$ است که از این اصول پیروی کند». در این صورت هر ویژگیِ اعداد حقیقی، ویژگی‌ای است که با استفاده از این اصول موضوعه اثبات شود. در واقع می‌شود مجموعه‌هایی از جهانِ $\mathbf{V}$ خودْ دارای اصول موضوعه باشند و به صورت‌های مرتبهٔ اول یا مرتبه‌های بالاتر مورد مطالعه قرار گیرند.

خلاصهٔ فصل هفتم. رابطه‌ای که انعکاسی، تقارنی و متعدی باشد رابطهٔ هم‌ارزی نام دارد. دسته‌بندی اعضای یک مجموعه با استفاده از یک رابطهٔ هم‌ارزی صورت می‌گیرد. در این دسته‌بندی، همهٔ عناصری که با هم در رابطه هستند در یک دسته قرار می‌گیرند. هر دسته‌بندی‌ای از اعضای یک مجموعه، همیشه از یک رابطهٔ هم‌ارزی ناشی می‌شود.

مجموعهٔ اعداد صحیح از دسته‌بندی خاصی از اعضای مجموعهٔ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ایجاد می‌شود. مجموعهٔ اعداد گویا از دسته‌بندی خاصی از اعضای مجموعهٔ $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{۰\})$ ایجاد می‌شود. مجموعهٔ اعداد حقیقی با استفاده از دسته‌بندی مجموعهٔ متشکل از دنباله‌های خاصی در اعداد گویا به دست می‌آید.

۵.۷ تمرین‌های تکمیلی

تمرین ۱۰.۷. فرض کنید R و S دو رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشند. نشان دهید که

[5] می‌توان چنین اثباتی را در هر کتاب استاندارد جبر مانند [۹] یا [۱۱] پیدا کرد. خوانندهٔ در سطوح بالاتر می‌تواند در فیلم زیر از کلاس درس نظریهٔ گالوای خود نگارنده، اثباتی استاندارد برای این قضیه را ببیند:
https://www.aparat.com/v/LRq6t?playlist=305753
همین اثبات در [۳] نوشته شده است. نیز اثباتی با استفاده از تکنیک‌های توپولوژی جبری در فیلم زیر قابل مشاهده است:
https://www.aparat.com/v/VLM42?playlist=1799810.
اخیراً نیز در فیلم زیر، اثباتی مقدماتی‌تر برای این قضیه تدریس کرده‌ام:
https://www.aparat.com/v/nAofh?playlist=7632449.

۱. $R \cap S$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X است.

۲. نشان دهید که $[x]_{R \cap S} = [x]_R \cap [x]_S$.

۳. نشان دهید که $R \cup S$ لزوماً یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X نیست. (راهنمایی: ویژگی تعدی را بررسی کنید).

۴. R را همقد بودن و S را همسن بودن تعبیر کنید. دو عنصر x, y چه زمانی در رابطهٔ $R \cap S$ و چه زمانی در رابطهٔ $R \cup S$ هستند؟

تمرین ۱۱.۷. فرض کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X و S یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ Y باشند. آیا $R \cap S$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $X \cap Y$ است؟ آیا $R \cup S$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $X \cup Y$ است؟

تمرین ۱۲.۷. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ جمله‌های یک منطق گزاره‌ها باشد. روی A رابطهٔ زیر را تعریف کنید: $\varphi R \psi$ اگر و تنها‌اگر $\psi \iff \varphi$. نشان دهید که رابطهٔ R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

فصل ۸

توابع

پادشاهی پسر به مکتب داد
لوح سیمینْش بر کنار نهاد
بر سر لوح او نبشته به زر
جور استاد به ز مهر پدر
سعدی

۱.۸ مقدمه

تا به این جا، با اصول نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا شدیم و گفتیم که بنا داریم که تمام مفاهیم ریاضی پیش رو را بر پایهٔ آن‌ها توضیح دهیم. در این راستا، مفهوم اعداد طبیعی را مطابق با قوانین نظریهٔ مجموعه‌ها شرح دادیم، سپس مفهوم رابطه را تعریف کردیم و در میان روابط، به طور ویژه به روابط هم‌ارزی پرداختیم و دیدیم که چگونه با استفاده از روابط هم‌ارزی می‌توان مجموعه‌های تازه به دست آورد. مثلاً مجموعهٔ اعداد صحیح را با استفاده از یک رابطهٔ هم‌ارزی بین زوج‌های اعداد طبیعی، و مجموعهٔ اعداد گویا را با استفاده از یک رابطهٔ هم‌ارزی روی زوج‌هایی در اعداد صحیح تعریف کردیم.

مفهوم بنیادین دیگری که قرار است در این فصل بدان بپردازیم، مفهوم **تابع** است. این مفهوم، مقدمهٔ ورود ما به *جذابیت‌های اصلی مبانی ریاضی* خواهد بود. برای تعریف تابع بر اساس قوانین نظریهٔ مجموعه‌ها، مشکل چندانی نداریم؛ زیرا هر تابع یک نوع رابطه است:

تعریف ۱.۸. فرض کنید R یک رابطه از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y باشد. رابطهٔ R را یک تابع می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad \forall y_۱, y_۲ \in Y \quad (xRy_۱ \wedge xRy_۲ \to y_۱ = y_۲).$$

در واقع بنا به تعریفِ بالا، رابطهٔ R زمانی تابع است که یک عنصر در X را به بیش از یک عنصر در Y مرتبط نکند. هر تابع را می‌توان یک ماشین تصور کرد که به ازای هر ورودی مشخص، تنها یک خروجی دارد. یا می‌توان چنین پنداشت که یک تابع، نوعی نام‌گذاری است: یک تابعِ از X به Y به هر یک از اعضای مجموعهٔ X یک نام می‌دهد که این نام یکی از اعضای مجموعهٔ Y است. پس یک مثال خوب برای تابع، تابعی است که هر انسان را به نام او می‌برد؛ البته مطلوبِ این نام‌گذاری آن است که هر کس فقط یک نام داشته باشد!

برای نشان دادن توابع از نمادهایی مانند f، g، h و ... استفاده می‌کنیم. اگر رابطه f یک تابع از X به Y باشد و $(x, y) \in f$، می نویسیم

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto y.$$

به تفاوت پیکانهای بالا توجه کنید.[۱]

توجه ۲.۸. از این به بعد وقتی می گوییم رابطهٔ f از X به Y یک تابع است، و می‌نویسیم: $f : X \to Y$، همیشه به طور ضمنی فرض کرده‌ایم که $\mathrm{Dom}(f) = X$.[۲]

بنا به توجه بالا، اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه X را دامنه f می خوانیم و مجموعه $\{f(x) \mid x \in X\}$ را مجموعهٔ تصویرِ f یا بُردِ f می‌نامیم.

۲.۸ مثال‌هایی از توابع

مثال ۳.۸. فرض کنید X یک مجموعه باشد و R یک رابطه هم ارزی روی X. در مورد تابعِ زیر، در بخشِ ۳.۷ صحبت کردیم:

$$f : X \to X/R$$
$$x \mapsto [x]_R.$$

تابع بالا هر عنصر در مجموعهٔ X را به کلاس هم‌ارزی آن عنصر تحت رابطهٔ R می‌برد. پس $f(x)$ برای هر x، یک زیرمجموعه از X است.

مثال ۴.۸. فرض کنید X یک مجموعه باشد و R یک رابطه هم ارزی روی X. رابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$f : X/R \to X$$
$$[x]_R \mapsto x$$

رابطهٔ بالا در واقع مجموعهٔ زیر است:

$$f = \{([x]_R, x) \mid x \in X\}.$$

واضح است که این رابطه، یک تابع نیست. گفتیم که هر عنصر دلخواهی در یک کلاس هم‌ارزی، می‌تواند نمایندهٔ آن کلاس هم‌ارزی باشد؛ اما این نام‌گذاری مشخصهٔ مطلوب تابع بودن را ندارد. نباید یک کلاس، چند نام داشته

[۱] معمولاً وقتی بخواهیم تابع را به صورت رابطه ببینیم از «گراف» یا «نمودار» آن استفاده می‌کنیم. گراف تابع $f : X \to Y$ که آن را با $\Gamma(f)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

[۲] از آنجا که هر تابع یک رابطه است، نیازی به تعریف مجدد دامنهٔ f نداریم. وقتی $\mathrm{Dom}(f) \subset X$ عموماً گفته می‌شود که f یک «تابع جزئی» است.

باشد. به بیان دقیق‌تر، فرض کنید $x \neq y$ دو عنصر در X باشند، به طوری که xRy. در این صورت $[x]_R = [y]_R$ اما $f([x]_R) = x \neq f([y]_R) = y$.

مشکلی که رابطهٔ بالا را از نظر تابع بودن تهدید کرده است، «عدم خوش‌تعریفی» است. قرار است رابطهٔ بالا یک دستهٔ هم‌ارزی را بگیرد و عنصری در آن دسته را به ما بدهد. باید هر بار که این دسته را به تابع می‌دهیم، عنصر یکسانی به ما تحویل بدهد. اما رابطهٔ بالا این هوشمندی را ندارد، هر کسی که خود را نمایندهٔ دسته معرفی کند، او را می‌پذیرد. یعنی به راحتی می‌تواند این اتفاق رخ دهد که $[x]_R = [y]_R$ ولی $f([x])_R \neq f([y])_R$. در مثال ۱۲.۸ نیز دربارهٔ خوش‌تعریفی صحبت کرده‌ایم.

تمرین ۱.۸. چگونه می‌توان یک تابع از X/R به X تعریف کرد؟ بخشِ ۲.۴.۸ را مشاهده کنید.

مثال ۵.۸. فرض کنید X یک مجموعه و $B \subseteq X$ یک زیرمجموعه باشد که آن را ثابت در نظر گرفته‌ایم. رابطهٔ زیر یک تابع از $\mathbf{P}(X)$ به $\mathbf{P}(X)$ است:

$$f : \mathbf{P}(X) \to \mathbf{P}(X)$$
$$A \mapsto A \cup B.$$

تابع فوق یک مجموعه را می‌گیرد و اجتماع آن با B را می‌دهد.

مثال ۶.۸. تابع جمع از $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ هر (x, y) را به $x + y$ می‌برد.

مثال ۷.۸. فرض کنید X یک مجموعه باشد. تابع زیر را **تابع همانی** روی X می‌خوانیم:[۳]

$$\mathrm{id}_X : X \to X$$
$$x \mapsto x.$$

در واقع تابع همانی، همان رابطهٔ قطری، یعنی رابطهٔ Δ_X است.

مثال ۸.۸. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند و $b \in Y$ عنصر ثابتی باشد. رابطهٔ زیر یک تابع است:

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto b.$$

به تابع بالا، یک تابع ثابت گفته می‌شود.

مثال ۹.۸. فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. عملِ اجتماع‌گیریِ دو مجموعهٔ در $\mathbf{P}(X)$ در واقع یک تابعِ f از $\mathbf{P}(X) \times \mathbf{P}(X)$ به $\mathbf{P}(X)$ به صورت زیر است:

$$f : \mathbf{P}(X) \times \mathbf{P}(X) \to \mathbf{P}(X)$$
$$(A, B) \mapsto A \cup B.$$

به عنوان تمرینی ساده، بررسی کنید تابعی که دو مجموعه را می‌گیرد و حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها را می‌دهد، از چه مجموعه‌ای به چه مجموعه‌ای است.

---
[۳] علامت id مخفف کلمهٔ identity است.

مثال ۱۰.۸. فرض کنید X, Y دو مجموعه باشند. رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\pi_X : X \times Y \to X$$
$$(x, y) \mapsto x.$$

رابطهٔ بالا یک تابع است که بدان **تابع تصویر روی مؤلفهٔ اول** گفته می‌شود.
به طور مشابه تابع

$$\pi_Y : (X, Y) \to Y$$
$$(x, y) \mapsto y.$$

را تابع تصویر روی مؤلفهٔ دوم می‌خوانیم.

مثال ۱۱.۸ (مقدمه ورود به مفهوم خوش‌تعریفی)**.** مثال ۸.۷ را به یاد بیاورید: روی مجموعهٔ اعداد صحیح، رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۳ را در نظر گرفتیم. این رابطه، مجموعهٔ اعداد صحیح را به کلاس‌های زیر افراز می‌کند:

$$\{[۰], [۱], [۲]\}.$$

در بالا، هر عنصر $[x]$ نمایندهٔ تمام اعداد صحیحی است که باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۳ برابر با x است. گفتیم که مجموعهٔ بالا را با $\mathbb{Z}_۳$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم روی $\mathbb{Z}_۳$ یک «تابع جمع» تعریف کنیم. یعنی تابعی مانند $+_{\mathbb{Z}_۳} : (\mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۳) \to \mathbb{Z}_۳$ که دو عنصر در $\mathbb{Z}_۳$ را بگیرد و عنصری در همان $\mathbb{Z}_۳$ به عنوان حاصل‌جمع آن‌ها معرفی کند. رابطهٔ مورد نظر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$+_{\mathbb{Z}_۳}([x], [y]) = [x + y].$$

در واقع بنا به رابطهٔ جمع بالا، حاصل‌جمع دستهٔ اعدادی که باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۳ برابر با x است با دستهٔ اعدادی که باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۳ برابر با y است، برابر با دستهٔ اعدادی است که باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۳ برابر با باقی‌ماندهٔ عدد $x + y$ بر ۳ است. برای مثال

$$[۲] + [۱] = [۲ + ۱] = [۳] = [۰].$$

اما مطلوب است که رابطهٔ بالا تابع باشد. یعنی حاصل‌جمع دو عنصر، یکتا باشد و این طور نباشد که هر بار $[x]$ را با $[y]$ جمع کنیم، حاصل عدد متفاوتی شود.

به بیان فنی‌تر، خطری که این تعریف ما از جمع را تهدید می‌کند احتمال «عدم خوش‌تعریفی» است: از آن‌جا که ما حاصل‌جمع دسته‌های هم‌ارزی را با کمک نماینده‌ای از آن‌ها تعریف کرده‌ایم، این خطر وجود دارد که اگر نماینده‌های دیگری برای دسته‌ها انتخاب شود، حاصل‌جمع دسته‌ها متفاوت شود! این امر مطلوب ما نیست، زیرا می‌خواهیم حاصل‌جمع دو دستهٔ مشخص، همیشه یک دستهٔ مشخص شود و نماینده‌ای که برای کمک به یافتن حاصل‌جمع دسته‌ها به ما کمک می‌کند، روی حاصلِ جمع تأثیری نگذارد.

خوش‌بختانه، جمع بالا، یک تابع است و اثبات تابع بودنِ آن نیز بسیار آموزنده است. فرض کنید $[x] = [x']$ و $[y] = [y']$؛ به بیان دیگر فرض کنید زوجِ $([x], [y])$ با زوج $([x'], [y'])$ یکی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که $[x] + [y] = [x'] + [y']$.

از این که $[x] = [x']$ نتیجه می‌گیریم که باقی‌ماندهٔ دو عدد x و x' بر ۳ یکسان است. مشابهاً از $[y] = [y']$ نتیجه می‌گیریم که باقی‌ماندهٔ y و y' بر ۳ یکسان است. اما یک بررسی سادهٔ نظریهٔ اعدادی با ما نشان خواهد داد که در این صورت باقی‌مانده $x + y$ و $x' + y'$ بر ۳ نیز با هم برابر است؛ یعنی $[x + x'] = [y + y']$.

توجه ۱۲.۸ (خوش‌تعریفی). این جا نقطهٔ عطفی برای توضیح یک نکتهٔ مهم در ریاضی و نیز ریاضی نویسی است. در ریاضیات، روی برخی پدیده‌ها به علت ویژگی مطلوبی که دارند، نامی نهاده می‌شود. به این کار «تعریف» گفته می‌شود. همان طور که در بخش اصول نظریهٔ مجموعه‌ها دیدیم، تعاریف باعث می‌شوند که از تکرار جملات جلوگیری شود. برای مثال، روابطی که ویژگی مطلوبی دارند، تابع نامیده می‌شوند. هر تعریفی در ریاضیات، یک «تابع» است که یک پدیده را به «نام» ای که برایش در نظر گرفته شده می‌برد. پس مهم است که «تعریف، *ویژگی تابع بودن* را دارا باشد». به بیان دیگر، اصطلاحاً می‌گوییم پدیده‌ها باید «خوش‌تعریف» باشند؛ یعنی وقتی پدیدهٔ y همان ویژگی مطلوب پدیدهٔ x را دارد، نامی که بر x نهاده می‌شود، بر y هم نهاده شود.

در مثال قبلی، نشان دادیم که جمعی که روی $\mathbb{Z}_۳$ قرار داده‌ایم، «خوش‌تعریف» است. یعنی نمی‌شود حاصل جمع دو کلاسِ $[x], [y]$ یک چیز شود و حاصل جمع دو کلاس دیگر $[x'], [y']$ که با کلاس‌های قبلی یکی هستند، چیز دیگری شود.

اما یک نکتهٔ مهم در ریاضی‌نویسی را نیز می‌توان در همین جا توضیح داد. در برخی کتاب‌ها، از عبارت «اگر و تنها‌اگر» در تعاریف استفاده می‌شود که این کار غلط است. مثلاً گفته می‌شود: «رابطهٔ R یک تابع است اگر و تنها اگر هر عنصر را به عنصر یکتایی مربوط کند». تعریف، جملهٔ شرطی نیست؛ تنها یک نام‌گذاری است: رابطه‌ای که این ویژگی را دارد تابع می‌نامیم.

وقتی می‌گوییم رابطهٔ R را تابع می‌نامیم اگر و تنها‌اگر فلان ویژگی را داشته باشد، یعنی اگر این ویژگی را داشته باشد، آن را تابع می‌نامیم و اگر این ویژگی را نداشته باشد، آن را تابع نمی‌نامیم (و لابد یک چیز دیگر می‌نامیم!) در اینجا در واقع یک جملهٔ شرطی دربارهٔ حالات ما بیان شده است.

۳.۸ توابع یک‌به‌یک و پوشا

گفتیم که هر تابعِ $f : X \to Y$ یک نام‌گذاری برای عناصرِ مجموعهٔ X با استفاده از عناصر مجموعهٔ Y است که ضمن به کارگیری آن، برای هر عنصر در X فقط یک نام در Y در نظر گرفته می‌شود. یک حالت مطلوب دیگر برای نام‌گذاری این است که «هر نام فقط روی یک نفر گذاشته شود»؛ یعنی نام‌گذاری ما یک‌به‌یک باشد، و وقتی یک نام را صدا می‌کنیم، فقط یک نفر سربرگرداند! همچنین حالت مطلوب سوم نیز آن است که «از همهٔ نامها در مجموعهٔ Y استفاده شود»، یعنی نام‌گذاری ما *پوشا* باشد و نامی نباشد که وقتی آن را صدا می‌کنیم، کسی به ما توجه نکند!

تعریف ۱۳.۸.

- تابع $f : X \to Y$ را یک‌به‌یک می خوانیم هرگاه

$$\forall x_۱, x_۲ \in X \quad \Big(f(x_۱) = f(x_۲) \to x_۱ = x_۲\Big)$$

به بیان دیگر هرگاه

$$\forall x_۱, x_۲ \in X \quad (x_۱ \neq x_۲ \to f(x_۱) \neq f(x_۲)).$$

- تابع $f : X \to Y$ را پوشا می‌خوانیم هرگاه تمام مجموعهٔ مقصد را بپوشاند؛ یعنی

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y.$$

مثال ۱۴.۸. نشان دهید که تابع مثال ۵.۸ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد اگر و تنها اگر $B = \varnothing$.

پاسخ. نشان می‌دهیم تابع f در مثال ۵.۸ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر $B = \varnothing$. بقیهٔ اثبات را نیز به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.
اگر $B \neq \varnothing$ آنگاه B دارای حداقل دو زیر مجموعهٔ A_1, A_2 است به طوری که $A_1 \neq A_2$. اما در این صورت داریم $f(A_1) = f(A_2) = B$؛ یعنی f یک‌به‌یک نیست.
اگر $B = \varnothing$ آنگاه برای هر $A \in X$ داریم $f(A) = A$، و در این صورت واضح است که f یک‌به‌یک است. □

مثال ۱۵.۸. یک‌به‌یک یا پوشا بودن تابع مثال ۹.۸ را بررسی کنید.

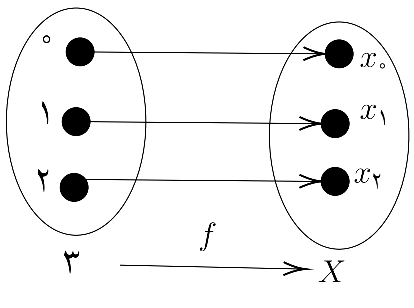
پاسخ. برای این که f یک‌به‌یک باشد، باید از $f(A_1, B_1) = f(A_2, B_2)$ نتیجه شود که $(A_1, B_1) = (A_2, B_2)$. یعنی از $A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2$ باید بتوان نتیجه گرفت که $A_1 = A_2, B_1 = B_2$. فرض کنید $A_1 \neq \varnothing$. داریم: $f(A_1, \varnothing) = f(\varnothing, A_1)$، ولی $(A_1, \varnothing) \neq (\varnothing, A_1)$، پس این تابع یک‌به‌یک نیست.
تابع یادشده پوشاست؛ فرض کنید $Y \in \mathbf{P}(X)$ یک مجموعهٔ دلخواه باشد. برای اثبات پوشا بودن تابع، باید مجموعه‌های $A, B \in \mathbf{P}(X)$ را طوری پیدا کنیم که $f(A, B) = Y$. واضح است که $Y \cup \varnothing = f(Y, \varnothing) = Y$. □

مثال ۱۶.۸. تابع مثال ۳.۸ را در نظر بگیرید که هر عنصر $x \in X$ را به $[x]_R$، یعنی کلاس هم‌ارزی آن تحت رابطهٔ R می‌برد. این تابع، لزوماً یک‌به‌یک نیست. فرض کنید x, x' دو عنصر متفاوت باشند که با هم در رابطهٔ R هستند. در این صورت $[x]_R$ و $[y]_R$ با هم برابرند.

یک‌به‌یک و پوشا بودن، برای توابعی که دامنه و برد آن‌ها «متناهی» است، معنی ویژه‌ای دارند. در ادامه پس از توضیح کوتاهی دربارهٔ مفهوم مجموعه‌های متناهی، این گفته را دقیق‌تر بیان کرده‌ایم.

تعریف ۱۷.۸.

۱. می‌گوییم مجموعهٔ X یک مجموعهٔ n عضوی است هرگاه یک تابعِ یک‌به‌یک و پوشا از مجموعهٔ $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ به مجموعهٔ X وجود داشته باشد:



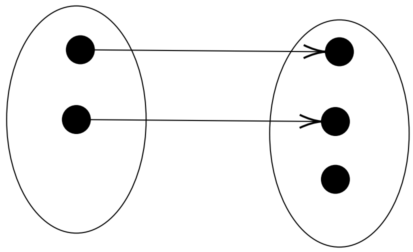
۲. می‌گوییم مجموعهٔ X متناهی است هرگاه یک عدد طبیعیِ $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که مجموعهٔ X یک مجموعهٔ n عضوی باشد.

تعریف بالا تا حد زیادی طبیعی به نظر می‌رسد: مجموعهٔ متناهی مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن برابر با یک عدد طبیعی باشد. در عین حال یک نکتهٔ جالب توجه در مورد تعریف بالا وجود دارد و آن بستگی این تعریف به مجموعهٔ اعداد طبیعی است. ممکن است در جهانِ $\mathbf{V}$ از مجموعه‌ها، مجموعهٔ اعداد طبیعی، یعنی ω، دارای «اعداد طبیعی» ای باشد که لزوماً شبیه اعداد طبیعی آشنای ما نباشد. در این حال هم، یک مجموعهٔ $X \in V$ زمانی متناهی

است که بین آن مجموعه و یک عضو در ω یک تابع یک‌به‌یک و پوشا وجود داشته باشد. این پیچیدگی جذاب را فعلاً کنار می‌گذاریم زیرا خللی در مباحث پیش رو ایجاد نمی‌کند.

مشاهده ۱۸.۸. فرض کنید که X,Y دو مجموعهٔ متناهی باشند و $f : X \to Y$ یک تابع باشد.

۱. اگر f یک‌به‌یک باشد، آنگاه تعداد اعضای Y بیشتر از یا مساوی با تعداد اعضای X است.



۲. اگر f پوشا باشد، آنگاه تعداد اعضای X بزرگتر از یا مساوی با تعداد اعضای Y است.

۳. اگر f یک‌به‌یک و پوشا باشد، آنگاه تعداد اعضای X,Y برابر است.

۴. اگر تعداد اعضای X با تعداد اعضای Y برابر باشد و $f : X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه f یک‌به‌یک است اگر و تنهااگر پوشا باشد.

اثبات موارد ۱ تا ۳ در بالا، حداقل به صورت شهودی، آسان است. مورد چهارم اما شاید نیاز به بررسی داشته باشد. فرض کنید X و Y دو مجموعه با تعدادِ اعضای برابر باشند. اگر تابعِ $f : X \to Y$ یک‌به‌یک باشد ولی پوشا نباشد، آنگاه تعداد اعضای Y از تعداد اعضای X بیشتر می‌شود و این تناقض است. مشابهاً اگر f پوشا باشد ولی یک‌به‌یک نباشد، تعداد اعضای X از تعداد اعضای Y بیشتر می‌شود و این هم تناقض است.

۴.۸ تصویر و تصویروارون

تعریف ۱۹.۸.

- فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ یک زیرمجموعهٔ دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:[۴]

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

پس چنین است که

$$\forall y \in Y \quad \big(y \in f(A) \leftrightarrow \exists x \in A \quad y = f(x)\big).$$

- فرض کنید $B \subseteq Y$؛ تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

پس چنین است که

$$\forall x \in X \quad \big(x \in f^{-1}(B) \leftrightarrow f(x) \in B\big).$$

[۴] در برخی کتاب‌ها از نمادِ $f[A]$ استفاده می‌شود که البته نماد بهتری است. ما از نمادِ آشناتر استفاده کرده‌ایم.

بنا به تعریف بالا، تابع $f : X \to Y$ پوشاست اگر و تنهااگر $f(X) = Y$؛ و یک‌به‌یک است اگر و تنهااگر برای هر $y \in Y$ مجموعهٔ $f^{-۱}(\{y\})$ یک مجموعهٔ تک‌عضوی باشد.

توجه ۲۰.۸. ادعا نکرده‌ایم که f دارای «وارون» است توجه ۲۹.۸ را ببینید). مراقب باشیم نماد $f^{-۱}$ موجب این ابهام نشود.

شاید خواننده (ای که توجه بالا را نادیده گرفته است!) تصور کند که همواره $A = f^{-۱}(f(A))$ و $f(f^{-۱}(B)) = B$. اما این چنین نیست:

لم ۲۱.۸. اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$، آنگاه $A \subseteq f^{-۱}(f(A))$.

اثبات. فرض کنید عنصرِ x در A باشد. برای این که نشان دهیم که x متعلق به مجموعهٔ $f^{-۱}(f(A))$ است، باید بنا به قسمتِ دومِ تعریفِ ۱۹.۸ (و با قرار دادنِ $B = f(A)$) نشان دهیم که $f(x) \in f(A)$. اما بنا به قسمت اولِ تعریفِ ۱۹.۸ واضح است که وقتی x در A است، $f(x) \in f(A)$. □

مثال ۲۲.۸. آیا لزوماً $f^{-۱}(f(A)) \subseteq A$؟

پاسخ. بنا به قسمتِ دومِ تعریفِ ۱۹.۸ می‌دانیم که

$$x_{\circ} \in f^{-۱}(f(A)) \leftrightarrow f(x_{\circ}) \in f(A).$$

فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و تابع $f : X \to X$ را چنان در نظر بگیرید که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) = ۱$. قرار دهید $A = \{۱, ۲\}$. مشخص است که $f(A) = \{۱\}$ و

$$f^{-۱}(f(A)) = \{x \mid f(x) \in \{۱\}\} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}.$$

□

تمرین ۲.۸. یک تابعِ غیرِثابت مثال بزنید که برای آن $f^{-۱}(f(A)) \subseteq A$ برقرار نباشد.

تمرین ۳.۸. نشان دهید که ممکن است که $x \notin A$ ولی $f(x) \in f(A)$. (بنابراین از این که $f(x) \in f(A)$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $x \in A$.)

لم ۲۳.۸. اگر تابع $f : X \to Y$ یک‌به‌یک باشد آنگاه برای هر $A \subseteq X$ داریم $f^{-۱}(f(A)) = A$.

اثبات. فرض کنید تابع $f : X \to Y$ یک‌به‌یک است. این که $A \subseteq f^{-۱}(f(A))$ حتی بدون فرض یک‌به‌یک بودن تابع، بنا به ۲۱.۸ برقرار است. حال فرض کنید $x \in f^{-۱}(f(A))$. در این صورت $f(x) \in f(A)$. پس عنصری مانندِ $t \in A$ وجود دارد به طوری که $f(x) = f(t)$. از طرفی از آنجا که تابعِ f یک تابع یک‌به‌یک است، $x = t$، یعنی $x \in A$.

□

تمرین ۴.۸. نشان دهید که عکس تمرین بالا نیز برقرار است: یعنی اگر برای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم $f^{-۱}(f(A)) = A$ آنگاه f یک تابع یک‌به‌یک است.

لم ۲۴.۸. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $B \subseteq Y$ در این صورت $f(f^{-۱}(B)) \subseteq B$.

اثبات. فرض کنید $y \in f(f^{-1}(B))$. در این صورت عنصری مانند $x \in f^{-1}(B)$ وجود دارد به طوری که $y = f(x)$. اما این که $x \in f^{-1}(B)$ نتیجه می‌دهد که $y = f(x) \in B$. □

تمرین ۵.۸. نشان دهید که برای $B \subseteq Y$ و $f : X \to Y$، عبارتِ $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ لزوماً برقرار نیست.

تمرین ۶.۸. نشان دهید اگر f پوشا باشد آنگاه برای هر $B \subseteq Y$ داریم $f(f^{-1}(B)) = B$ (همچنین تمرینِ ۱۸.۸ را مشاهده کنید).

مثال ۲۵.۸. نشان دهید که اگر $f : X \to Y$ یک‌به‌یک باشد آن‌گاه

$$\forall A, B \subseteq X \quad f(A - B) \subseteq f(A) - f(B).$$

(تمرینِ بعدی را نیز مشاهده کنید).

پاسخ. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک‌به‌یک باشد و $A_\circ, B_\circ$ دو زیرمجموعه دلخواه از X باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که $f(A_\circ - B_\circ) \subseteq f(A_\circ) - f(B_\circ)$. برای این منظور باید نشان دهیم که $f(A_\circ - B_\circ) = f(A_\circ) - f(B_\circ)$ و $f(A_\circ) - f(B_\circ) \subseteq f(A_\circ - B_\circ)$.

فرض کنید $y_\circ \in f(A_\circ - B_\circ)$، در این صورت $x_\circ \in A_\circ - B_\circ$ چنان وجود دارد که $f(x_\circ) = y_\circ$. ازآنجا که $x_\circ \in A_\circ$ داریم $f(x_\circ) \in f(A_\circ)$. می‌دانیم که $x_\circ \notin B_\circ$ و ادعا می کنیم که از این نتیجه می‌شود که $f(x_\circ) \notin f(B_\circ)$. اگر $f(x_\circ) \in f(B_\circ)$ آنگاه $x'_\circ \in B_\circ$ وجود دارد به طوری که $f(x'_\circ) = f(x_\circ)$. از آنجا که تابع f یک‌به‌یک است $x_\circ = x'_\circ \in B_\circ$ و این متناقض با فرضِ $x_\circ \in B_\circ$ است. □

تمرین ۷.۸. نشان دهید که اگر $f : X \to Y$ یک‌به‌یک باشد، همچنین داریم

$$\forall A, B \subseteq X \quad f(A) - f(B) \subseteq f(A - B).$$

(تمرینِ ۲۳.۸ را مشاهده کنید.)

تمرین ۸.۸. فرض کنید $D \subseteq X \times Y$ یک مجموعهٔ دلخواه باشد. نشان دهید که

$$\pi_X(D) = \{x \in X \mid \exists y \in Y \quad (x, y) \in D\}.$$

$$\pi_Y(D) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \quad (x, y) \in D\}.$$

تمرین ۹.۸. فرض کنید R یک رابطه از X به Y باشد. نشان دهید که

$$\mathrm{Dom}(R) = \pi_X(R), \quad \mathrm{Range}(R) = \pi_Y(R).$$

۱.۴.۸ توضیح اصل‌موضوعهٔ جانشانی

در این جا بالاخره دانش کافی برای توضیح دقیق اصل‌موضوعهٔ جانشانی را در اختیار گرفته‌ایم. گذر کردن از این زیربخش کوتاه، لطمه‌ای به ادامهٔ مطالعهٔ این کتاب وارد نمی‌کند. می‌دانیم که یک جهانِ $\mathbf{V}$ از همهٔ مجموعه‌ها، خودش مجموعه نیست؛ با این حال می‌شود مفاهیمی مانند ضربِ دکارتی، رابطه و تابع را برای آن هم در نظر گرفت. مثلاً زمانی می‌گوییم $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ یک تابع است که $f \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ و برای هر $x \in \mathbf{V}$ تنها یک $y \in \mathbf{V}$ موجود باشد به طوری که $(x, y) \in f$.

می‌گوییم یک تابعِ $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ تعریف پذیر است هرگاه یک فرمولِ مرتبهٔ اولِ $\varphi(x, y)$ در زبانِ نظریهٔ مجموعه‌ها وجود داشته باشد به طوری که جملهٔ زیر درست باشد:

$$(x, y) \in f \leftrightarrow \varphi(x, y).$$

اصل موضوعهٔ جانشانی در واقع می‌گوید که اگر $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ یک تابع تعریف‌پذیر باشد و $A \in \mathbf{V}$ یک مجموعه باشد، آنگاه $f(A)$، یعنی $\{f(x) \mid x \in A\}$ تشکیل یک مجموعه می‌دهد. به بیان دیگر وقتی یک «تابع بزرگ» به یک «مجموعهٔ کوچک» محدود می‌شود، تصویر آن یک مجموعه می‌شود.

۲.۴.۸ توضیح اصل موضوعهٔ انتخاب

این زیربخشِ کوتاه نیز مشابه زیربخش قبلی، ارتباط مستقیم با مطالب پیش‌رو ندارد و خواننده می‌تواند از آن فعلاً صرف نظر کند. در اصل انتخاب نیز صحبت از یک تابع به میان می‌آید. فرض کنید a یک مجموعه باشد. اصل انتخاب بیان‌گر این است که حداقل «یک تابع انتخاب» برای a وجود دارد. یعنی حداقل یک تابع مانند $f : a \to \bigcup a$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in a$ داریم $f(t) \in t$. از آنجا که هر تابع یک مجموعه است، نوشتن عبارت «یک تابع وجود دارد» به معنی نوشتن عبارت «یک مجموعه وجود دارد که آن مجموعه ویژگی تابع بودن را داراست» است و از این رو این عبارت به صورت مرتبهٔ اول قابل نوشتن است.

اصل انتخاب را می‌توان برای یک خانواده از مجموعه‌ها هم به صورت زیر نوشت: فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ یک خانواده متشکل از مجموعه‌های ناتهی باشد. در این صورت یک تابعِ $f : \Gamma \to \bigcup\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ وجود دارد به طوری که برای هر $\gamma \in \Gamma$ داریم $f(\gamma) \in A_\gamma$.

با توجه به این توضیح، برای پاسخ دادن به تمرینِ ۱.۸ نیازمند اصل انتخاب هستیم، یعنی تابعی که از هر کلاس هم‌ارزی، یک عنصر برای ما انتخاب کند (و در این انتخاب، خوش‌تعریف باشد یعنی به تغییر نماینده‌ها وابسته نباشد).

۵.۸ تحلیل عمیق‌تری از توابع یک‌به‌یک و پوشا

در تمرین‌های فصل گذشته، دیدیم که اگر A و B متناهی و $f : A \to B$ یک‌به‌یک باشند، آنگاه تعداد اعضای A کمتر یا مساوی با تعداد اعضای B است. در واقع، در آن تعبیر، وجود یک تابع یک‌به‌یک از A به B به نوعی نشان دهندهٔ کوچک‌تر بودنِ A از B و وجود یک تابع پوشا از A به B نشان دهندهٔ بزرگ‌تر بودن A از B بود. تمرین زیر، به نوعی تعمیمی از این گفته است، برای مجموعه‌های دلخواه است.

تمرین ۱۰.۸. نشان دهید که اگر تابعی یک‌به‌یک از X به Y موجود باشد آنگاه تابعی پوشا از Y به X وجود دارد (دقت کنید که یک تابع $f : X \to Y$ داریم و نیاز است که شما یک تابع $g : Y \to X$ **معرفی کنید.**)

حل تمرین بالا نباید دشوار باشد: برای این که یک تابع از Y به X تعریف کنیم، کافی است هر عنصرِ $f(x)$ را به x برگردانیم. اگر f پوشا نباشد عناصری در Y باقی می‌مانند که تصویر هیچ عنصری تحت x نیستند. تعریف تابع روی این عناصر نیز ساده است. کافی است همهٔ آن‌ها را به یک عنصر دلخواه در X تصویر کنیم.

تمرین ۱۱.۸. تمرین قبل را به صورت زیر دقیق‌تر کنید: اگر $f : X \to Y$ یک‌به‌یک باشد، یک تابعِ پوشای $g : Y \to X$ چنان پیدا می‌شود که

$$\forall x \in X \quad g(f(x)) = x.$$

آیا تابعِ g یکتاست؟

تمرینِ ۱۰.۸ و توضیحات پیش از آن، این انتظار را نیز برای ما طبیعی جلوه می‌دهد که وقتی از X به Y یک تابع پوشا وجود داشته باشد، از Y به X یک تابع یک‌به‌یک پیدا شود. برقراری این خواسته، بدون هزینه نیست!

قضیه ۲۶.۸. اگر از X به Y یک تابع پوشا موجود باشد آنگاه یک تابع یک‌به‌یک از Y به X وجود دارد.

اثبات. فرض کنید $y_\circ \in Y$. قرار دهید:

$$A_{y_\circ} = \{x \in X \mid f(x) = y_\circ\}.$$

در واقع $A_{y_\circ}$ از عناصری تشکیل شده است که f آن‌ها را به $y_\circ$ می‌برد. برای تعریف یک تابعِ $g : Y \to X$ کافی است برای هر $y_\circ \in Y$ یکی از عناصر $A_{y_\circ}$ را برداریم و آن را $g(y_\circ)$ بنامیم. اما آیا این کار به همین سادگی است؟

دقت کنید که برای هر y یک مجموعهٔ A_y وجود دارد و ما می‌خواهیم با استفاده از یک تابع هر عنصرِ y را به عنصری در A_y ببریم. اما این کار را چگونه باید انجام دهیم تا حاصل یک **تابع** شود؟ به بیان دیگر، چگونه این کار را به صورت «خوش‌تعریف» انجام دهیم؟

اینجاست که اصل انتخاب به یاری ما می‌آید. خانوادهٔ نامتناهی زیر از مجموعه‌ها را در نظر بگیرید:

$$\{A_y\}_{y\in Y}.$$

بنا به اصل انتخاب یک تابع انتخابِ g از Y به $\bigcup\{A_y\}_{y\in Y}$ وجود دارد به طوری که برای هر $y_\circ$ داریم

$$g(y_\circ) \in A_{y_\circ},$$

و این تابع، نیاز ما را برطرف می‌کند. □

دربارهٔ **اصل انتخاب،** در جای جای این کتاب سخن خواهیم گفت و این اصل همچنان این جا و آن جا گریبانمان را خواهد گرفت. قضیهٔ بالا تنها یک مثال برای احساس نیاز به این اصل بود، و این بهانه خوبی برای ارائهٔ یک بیان دیگر از اصل انتخاب است.

فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. حاصلضرب این خانواده را با نماد $\Pi_{i\in I}A_i$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Pi_{i\in I}A_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i\}.$$

تعریف بالا، تعمیمی از تعریفِ حاصل ضرب دو مجموعهٔ $A_۱, A_۲$ است؛ در واقع $A_۱ \times A_۲$ از زوج مرتب‌هایی به صورت $(x_۱, x_۲)$ تشکیل شده است که $x_۱ \in A_۱$ و $x_۲ \in A_۲$، و مشابهاً هر عنصر در $\Pi_{i\in I}A_i$ یک دنباله به صورت $(x_i)_{i\in I}$ است. بیان دیگر هر عنصر در $\Pi_{i\in I}A_i$ یک تابع $f : I \to \bigcup A_i$ است به طوری که $f(i) = x_i \in A_i$.

اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه

$$\Pi_{i\in I}A_i \neq \varnothing$$

به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌ها باشد، تابعی وجود دارد که از هر یک از آن‌ها یک عنصر بر می‌دارد:

$$\exists f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$$
$$\forall i \in I \quad f(i) \in A_i$$

آن چه در بالا گفته شد، بیانی دیگر از اصل انتخاب است.

تمرین ۱۲.۸. در سال اول دانشگاه، هرگز متوجه نمی‌شدم که چرا اصل انتخاب، یک *اصل* نامیده می‌شود. با خود می‌گفتم که اصل انتخاب را می‌توان ثابت کرد، پس اصل نیست. اثبات من این بود: فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. داریم

$$\forall i \in I \quad A_i \neq \varnothing,$$

پس فرض کنیم

$$\forall i \quad x_i \in X_i,$$

در این صورت، واضح است که خواهیم داشت: $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$. به نظر شما، اشکال استدلال من چه بوده است؟

تمرین ۱۳.۸. قضیهٔ ۲۶.۸ را بدین صورت دقیق کنید که اگر $f : X \to Y$ پوشا باشد، آنگاه تابع $g : Y \to X$ چنان پیدا می‌شود که برای هر $y \in Y$ داریم $f(g(y)) = y$. آیا تابع g یکتاست؟

تعریف ۲۷.۸. به یک تابعِ یک‌به‌یک و پوشا، یک **تناظر یک‌به‌یک** یا یک تابع **دوسوئی** گفته می‌شود.

علت نام «دوسوئی» در قضیهٔ زیر روشن شده است.

قضیه ۲۸.۸. اگر تابع $f : X \to Y$ یک‌به‌یک و پوشا باشد، آنگاه تابع یکتای $g : Y \to X$ چنان وجود دارد که

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

و

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = y.$$

توجه ۲۹.۸. تابع g در قضیهٔ بالا را تابع وارون f می‌خوانیم و آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم.

اثبات. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک‌به‌یک و پوشا باشد. رابطهٔ $g : Y \to X$ را به صورت پیش رو تعریف می‌کنیم: عنصر دلخواه $y_\circ \in Y$ را در نظر بگیرید. از آنجا که f پوشاست، عنصر $x_\circ \in X$ چنان وجود دارد که $f(x_\circ) = y_\circ$. از آن جا که f یک‌به‌یک است، عنصرِ $x_\circ$ یکتاست. تعریف می‌کنیم: $g(y_\circ) = x_\circ$. به بیان دقیق‌تر، $g(y_\circ)$ را برابر با عبارت زیر تعریف کرده‌ایم:

تنها عنصر $x_\circ$ با این ویژگی که $f(x_\circ) = y_\circ$.

خوب است پیش از آن که اثبات را ادامه دهیم، توضیح آموزشی پیش رو را لحاظ کنیم: از آنجا که فقط یک عنصرِ $x_\circ$ وجود دارد به طوری که $f(x_\circ) = y_\circ$ در تعریف تابعِ g نیازی به به‌کارگیری اصل انتخاب نداریم؛ یعنی اثباتِ قضیهٔ ما نیازمند برقراری اصل انتخاب نیست. در واقع علتِ این که g «تابع» است، و بیان دیگر علت این که g خوش‌تعریف است، یک‌به‌یک بودنِ f است.

حال توجه کنید که $\mathrm{Dom}(g) = Y$، زیرا به علتِ پوشا بودنِ تابعِ f هر عنصر در Y تصویر یک عنصر تحت f است؛ یعنی g روی آن عنصر تعریف‌شده است.

تأکید کردیم که $g : Y \to X$ یک تابع است. اما بیایید این گفته را به طور دقیق‌تر اثبات کنیم. فرض کنید $y_۱, y_۲ \in Y$ عناصر دلخواهی باشند. از آنجا که f پوشا است می‌توان فرض کرد که $y_۱ = f(x_۱)$ و $y_۲ = f(x_۲)$. اگر $y_۱ = y_۲$ آنگاه $f(x_۱) = f(x_۲)$ و از آنجا که f یک‌به‌یک است داریم $x_۱ = x_۲$. اما بنا به تعریف، داریم $g(y_۱) = x_۱ = g(y_۲) = x_۲$.

ادعا می‌کنیم که g به علاوه، یک‌به‌یک است. فرض کنید $y_۱, y_۲ \in Y$ دو عنصر باشند به گونه‌ای که $g(y_۱) = g(y_۲)$. بنا به پوشا بودنِ f می‌توانیم فرض کنیم که $y_۱ = f(x_۱)$ و $y_۲ = f(x_۲)$. بنا به تعریفِ تابعِ g از این که $g(y_۱) = g(y_۲)$ نتیجه می‌گیریم که $x_۱ = x_۲$. از آنجا که f تابع است، $y_۱ = f(x_۱) = f(x_۲) = y_۲$.

اثبات پوشایی g را به عنوان یک تمرین ساده رها می‌کنیم.

حال به اثبات این می‌پردازیم که

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x.$$

دقت کنید که عبارت بالا را می‌توان این گونه نوشت: $g \circ f = \mathrm{id}_X$. فرض کنید $x_۰ \in X$ عنصر دلخواهی باشد. اگر $y_۰ = f(x_۰)$ طبق تعریف داریم $g(y_۰) = x_۰$ یعنی $g \circ f(x_۰) = x_۰$. اثبات این را که $\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = y$ به خواننده واگذاشته‌ایم. این عبارت را نیز می‌توان به صورت $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ نوشت.

نهایتاً اثبات می‌کنیم که تابعِ g با شرایط خواسته شده در قضیه، یکتاست. فرض کنید $g_۱ : Y \to X$ و $g_۲ : Y \to X$ دو تابع باشند با این ویژگی که $f \circ g_۱(y) = \mathrm{id}_Y$ و $g_۱ \circ f(x) = \mathrm{id}_X$ و $f \circ g_۲(y) = \mathrm{id}_Y$ و $g_۲ \circ f(x) = \mathrm{id}_X$. نشان می‌دهیم که در این صورت $g_۱ = g_۲$. برای این منظور باید نشان می‌دهیم:

$$\forall y \in Y \quad g_۱(y) = g_۲(y).$$

فرض کنید $y_۰ \in Y$ عنصری دلخواه باشد. باید نشان دهیم که $g_۱(y_۰) = g_۲(y_۰)$. از آنجا که f پوشاست، عنصر $x_۰ \in X$ چنان وجود دارد که $f(x_۰) = y_۰$. داریم: $g_۱(y_۰) = g_۱\big(f(x_۰)\big)$، پس بنا به فرضِ $g_۱ \circ f(x) = \mathrm{id}_X$ داریم: $g_۱(y_۰) = g_۱\big(f(x_۰)\big) = x_۰$. مشابهاً بنا به فرضِ $g_۲ \circ f(x) = \mathrm{id}_X$ داریم: $g_۲(y_۰) = g_۲\big(f(x_۰)\big) = x_۰$. پس $g_۱(y_۰) = g_۲(y_۰)$. $\square$

تمرین ۱۴.۸. نشان دهید که عکس قضیهٔ بالا نیز برقرار است؛ یعنی اگر تابع g با ویژگی ذکر شده در قضیه وجود داشته باشد، آنگاه f هم یک‌به‌یک است و هم پوشا.

۶.۸ تمرین‌های تکمیلی

تمرین ۱۵.۸. آیا تابع مثال ۳.۸ در حالت کلی یک‌به‌یک است؟ آیا این تابع پوشاست؟

تمرین ۱۶.۸. آیا تابع جمع اعداد طبیعی یک‌به‌یک است؟ آیا این تابع پوشا است؟

تمرین ۱۷.۸. یک‌به‌یک و پوشا بودن توابع مثال ۱۰.۸ را بررسی کنید.

تمرین ۱۸.۸. آیا عکس حکم تمرینِ ۶.۸ برقرار است؟ یعنی اگر برای هر $B \subseteq Y$ داشته باشیم $f(f^{-۱}(B)) = B$ آیا از این نتیجه می‌شود که f پوشاست؟

تمرین ۱۹.۸. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد. نشان دهید که

$$A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

$$C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

در مورد آخر چرا تساوی برقرار نیست؟

تمرین ۲۰.۸. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد و $A \subseteq X$. آیا همواره چنین است که $(f(A))^c = f(A^c)$؟

تمرین ۲۱.۸ (یک‌به‌یک سازی یک تابع دلخواه)**.** فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. روی X رابطهٔ R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$(x, x') \in R \iff \big(f(x) = f(x')\big)$$

۱. نشان دهید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X است.

۲. نشان دهید که g در زیر، یک تابعِ یک‌به‌یک است:

$$g : X/R \to Y$$

$$g([x]_R) = f(x).$$

تمرین ۲۲.۸. فرض کنید که $f : X \to Y$ یک تابع باشد. نشان دهید که $f : X \to f(X)$ پوشاست.

تمرین ۲۳.۸. فرض کنید که $f : X \to Y$ به گونه‌ای باشد که برای هر $A, B \subseteq X$ داشته باشیم $f(A - B) = f(A) - f(B)$. نشان دهید که در این صورت f یک تابعِ یک به یک است. (پس بنا به مثال ۲۵.۸ و تمرین ۷.۸، تابع f یک‌به‌یک است اگر و تنهااگر برای هر A, B داشته باشیم $f(A - B) = f(A) - f(B)$.)

تمرین ۲۴.۸. فرض کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد. فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعهٔ همهٔ افرازهای ممکن از مجموعهٔ X، و $\mathcal{E}$ مجموعهٔ همهٔ روابط هم‌ارزی روی X باشد. تابعِ $f : \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(R) = X/R.$$

نشان دهید که تابع f یک‌به‌یک و پوشاست. (قضیهٔ ۱۹.۷ را ببینید).

تمرین ۲۵.۸. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. همچنین فرض کنید که یک تابعِ $g : Y \to X$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $g(f(x)) = x$. نشان دهید که در این صورت تابعِ f یک‌به‌یک است.

تمرین ۲۶.۸. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. همچنین فرض کنید که یک تابعِ $g : Y \to X$ موجود باشد به طوری که برای هر $y \in Y$ داشته باشیم $f(g(y)) = y$. نشان دهید که در این صورت تابعِ f پوشاست.

تمرین ۲۷.۸. فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعهٔ همهٔ توابعِ مشتق‌پذیرِ از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد. روی $\mathcal{A}$ رابطهٔ زیر را تعریف کنید:

$$(f, g) \in R \iff \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = g(x) + C.$$

به بیان دیگر، دو تابع مشتق‌پذیر را زمانی با هم در رابطهٔ R می‌گیریم که اختلافشان یک عدد ثابت باشد.

۱. نشان دهید که رابطهٔ R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۲. ضابطهٔ $h : \mathcal{A}/R \to \mathcal{A}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$h([f]) = f'.$$

نشان دهید که h یک تابع یک‌به‌یک و پوشاست. ضابطهٔ وارون تابعِ h چیست؟

تمرین ۲۸.۸. فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ دو تابع یک‌به‌یک باشند. نشان دهید که $g \circ f : X \to Z$ یک تابع یک‌به‌یک است.

تمرین ۲۹.۸. فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ دو تابع پوشا باشند. نشان دهید که $g \circ f : X \to Z$ یک تابع پوشاست.

تمرین ۳۰.۸. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد. تابعِ $g : \mathbf{P}(X) \to \mathbf{P}(Y)$ را با ضابطهٔ $g(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ در نظر بگیرید. نشان دهید که تابع g پوشاست اگروتنها اگر f پوشا باشد. همچنین نشان دهید که g یک‌به‌یک است اگر و تنهااگر f یک‌به‌یک باشد.

تمرین ۳۱.۸. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع یک‌به‌یک و پوشا باشد و $B \subseteq Y$. در این صورت $f^{-1}(B)$ می‌تواند به دو صورت زیر معنا شود:

$$\{x \mid f(x) \in B\}, \quad \{f^{-1}(y) \mid y \in B\}$$

نشان دهید دو مجموعهٔ فوق با هم یکی هستند.

تمرین ۳۲.۸. گفتیم که هر تابع، یک مجموعه است؛ پس اجتماع دو تابع معنا دارد.

۱. اگر f_1 و f_2 دو تابع باشند، آیا $f_1 \cup f_2$ نیز یک تابع است؟

۲. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک خانواده از توابع باشد به طوری که

$$f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \dots$$

نشان دهید که $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ نیز یک تابع است.

تمرین ۳۳.۸. فرض کنید p, q دو عدد اول باشند. تابعِ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با ضابطهٔ $f(m,n) = p^m q^n$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این تابع یک‌به‌یک است. آیا این تابع پوشا هم هست؟ چه عناصری تحت پوشش این تابع قرار نمی‌گیرند؟

خلاصهٔ فصل هشتم. منظور از یک تابع از یک مجموعهٔ X به یک مجموعهٔ Y یک رابطه از X به Y است که هر عنصر در X را فقط با یک عنصر یکتا در Y مرتبط می‌کند. وقتی می‌نویسیم $f : X \to Y$ دامنهٔ f را تمام X در نظر می‌گیریم. چنین تابعی را یک‌به‌یک می‌نامیم هرگاه هیچ دو عنصر متفاوتی تحت آن تصویر یکسان نداشته باشند. نیز تابع $f : X \to Y$ را پوشا می‌نامیم هرگاه هر عنصری در Y تصویر یک عنصر تحت f باشد. هر تابع یک‌به‌یک و پوشا، دارای یک وارون است.

فصل ۹

متناهی و نامتناهی

ساقیا در گردش ساغر تعلّل تا به چند
دور چون با عاشقان افتد تسلسل بایدش
حافظ

۱.۹ مقدمه

یکی از مفاهیم ابهام‌برانگیز در علم بشری، مفهوم نامتناهی است. هر جا که پای نامتناهی در یک مبحث ریاضی به میان آید، مفاهیم گنگ و پیچیده می‌شوند؛ باز در عین حال، در هیچ علمی، بهتر از ریاضیات نمی‌توان به سوال‌های زیر پاسخ داد:

۱. نامتناهی چیست؟

۲. آیا نامتناهی وجود دارد یا همه چیز متناهی است؟

۳. اگر نامتناهی وجود دارد، آیا همهٔ نامتناهی‌ها هم‌اندازه‌اند؟

در این بخش قرار است پاسخ این سوال‌ها را به نیکی دریابیم.

دو مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{\text{علی، حسن، حسین}\}$$

و

$$B = \{۰, ۱, ۲\}.$$

با این که این دو به ظاهر خیلی متفاوت به نظر می‌رسند ولی از نظر «اندازه» با هم برابرند. در واقع این طور به نظر می‌آید که اگر نام‌ها را در مجموعهٔ بالا عوض کنیم، به یک کپی از مجموعهٔ پائین می‌رسیم؛ یعنی اگر علی را ۰ و حسن را ۱ و حسین را ۲ بنامیم، به مجموعهٔ پائین می‌رسیم. اصطلاحاً در این موقع می‌گوئیم که این دو مجموعه **هم‌توان** هستند. بیائید همین نکته را دقیق‌تر بیان کنیم. فرض کنید f یک تابع از A به B باشد به طوری که

$$f(\text{علی}) = ۰, f(\text{حسن}) = ۱, f(\text{حسین}) = ۲.$$

تابع f هم یک‌به‌یک است و هم‌پوشا. در واقع این تابع، یک تابع «تغییر نام» است.

تعریف ۱.۹. دو مجموعهٔ دلخواهِ X و Y را هم‌توان (یا هم‌اندازه) می‌خوانیم هرگاه تابعی یک‌به‌یک و پوشا از X به Y موجود باشد.

وقتی دو مجموعهٔ X, Y هم‌توان باشند، می‌نویسیم: $X \cong Y$؛ گاهی نیز می‌نویسیم: $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$ یا $|X| = |Y|$. گاهی نیز می‌گوییم اعضای X و Y در تناظر یک‌به‌یک قرار دارند؛ یعنی هر عضو X در تناظر با یک عضو Y است. با این تفاصیل، تکلیف مجموعه‌های متناهی معلوم می‌شود:

تعریف ۲.۹.

۱. می‌گوئیم مجموعهٔ X دارای n عضو است هرگاه هم‌توان با مجموعهٔ $n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$ باشد؛ یعنی یک تابع یک‌به‌یک و پوشا بین n و X موجود باشد.

۲. می‌گوئیم مجموعهٔ X متناهی است هرگاه یک عددِ $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که X با n هم‌توان باشد. در واقع مجموعهٔ X متناهی است هرگاه یک عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که مجموعهٔ X دارای n عضو باشد.

خواننده حق دارد که اعتراض کند که برای این که یک مجموعهٔ X هم‌توان با یک عدد طبیعی باشد، باید نخست یک مجموعه از اعداد طبیعی وجود داشته باشد؛ یعنی برای تعریف متناهی هم نیاز به اصل وجود یک مجموعهٔ نامتناهی است. این اعتراض کاملاً وارد است؛ اما یک نحوهٔ دیگر تعریف هر عدد طبیعی وجود دارد که این مشکل را حل می‌کند. مجموعهٔ n یک عدد طبیعی است هرگاه با ترتیبِ $\in$ خوش ترتیب و دارای ماکزیموم و مینیموم باشد. اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی در واقع تنها بیان‌گر این است که چنین n هایی در کنار هم تشکیل یک مجموعه می‌دهند.

حال که معنای متناهی را دانسته‌ایم، تعریف نامتناهی کار دشواری نیست:

تعریف ۳.۹. مجموعهٔ X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه متناهی نباشد.

اولین سوالی که به ذهن می‌رسد این است که آیا در یک جهان از نظریهٔ مجموعه‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی نیز پیدا می‌شود؟ شگفتا که اثبات این گفته، بدون استفاده از اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی ممکن نیست. بیایید نخست این گفته را دقیق کنیم:

در درسهای پیشین با مفهوم اعداد طبیعی آشنا شدید. گفتیم که بنا به اصل وجود مجموعهٔ استقرائی یک مجموعهٔ استقرائی وجود دارد. ثابت کردیم که کوچکترین مجموعهٔ استقرائی نیز وجود دارد که آن را مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌خوانیم و با $\mathbb{N}$ نشان می دهیم. به بیان دیگر[۱] مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای اعضای زیر است:

$$\begin{aligned} ۰ &= \varnothing \\ ۱ &= \{۰\} \\ &\vdots \\ n &= \{۰, \ldots, n - ۱\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

[۱] در یک جهان خوش‌بنیاد!

اما به راحتی (و با استقراء) می‌توان نشان داد که مجموعهٔ اعداد طبیعی با هیچ مجموعهٔ متناهی‌ای در تناظر یک‌به‌یک نیست.[۲] به بیان دیگر:

قضیه ۴.۹. مجموعهٔ اعداد طبیعی نامتناهی است.

پس این که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد در نظریهٔ مجموعه‌ها معادل با یک اصل است: اصلی که می‌گوید مجموعه‌ای استقرائی وجود دارد. این اولین چالش فلسفی بحث متناهی و نامتناهی است.

دانستنِ این که مجموعه‌ای نامتناهی وجود داشته باشد، یا این که جهان هستی متناهی است یا نامتناهی، تأثیر شگرفی بر تصورات ایدئولوژیک می‌تواند داشته باشد. بسیاری از براهین فلسفی، مانند برهان علیت،[۳] بر این استوارند که گیتی، مجموعه‌ای متناهی است و زنجیرهای علت ـ معلولی در جائی می‌ایستند. همان طور که دیدیم نظریهٔ مجموعه‌ها، بر خلاف ظاهر استوار ریاضی‌وارش، در این زمینه کمک خاصی به ما نمی‌کند: در نظریهٔ مجموعه‌ها، وجود یک مجموعهٔ نامتناهی یک **اصل** است.

شاید این گفته، ناامید کننده به نظر برسد؛ اما پس از پذیرش این اصل، نظریهٔ مجموعه‌ها دنیای رنگارنگی از نامتناهی‌ها پیش چشم ما تصویر می‌کند که البته این دنیا با چشم غیرمسلح به ریاضیات قابل دیدن نیست.

پیش از پرداختن به دنیای نامتناهی‌ها، به یک نکتهٔ فلسفی دیگر دربارهٔ نامتناهی‌ها پرداخته‌ام که پذیرش آن مستلزم پذیرش اصل انتخاب است.

مجموعهٔ اعداد زوج، را به عنوان زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ اعداد طبیعی در نظر بگیرید.

$$E = \{۰, ۲, ۴, \ldots\}.$$

تابعِ $f : \mathbb{N} \to E$ را در نظر بگیرید که $f(x) = ۲x$. تابع بالا یک‌به‌یک و پوشاست. پس با استفاده از این تابع می‌توان نشان داد که مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و E هم‌اندازه هستند. در واقع E تنها یک نام‌گذاری دیگر برای $\mathbb{N}$ است!

اما چالش فلسفی دوم ما این است: اصل عمومیِ ششم اقلیدس برای ورود به اصول هندسهٔ اقلیدسی این است که «همواره یک کُل از جزء خودش بزرگتر است».[۴] پس، از نظر اقلیدس، هیچ کُلّی نمی‌تواند «هم‌اندازه» با جزئی از خودش باشد. گفتیم که دو مجموعهٔ X و Y را هم‌توان، یعنی هم‌اندازه، می‌خوانیم هرگاه بین آن‌ها یک تابع یک‌به‌یک و پوشا موجود باشد. به نظر می‌آید که در اینجا اصل اقلیدس رد شده است: زیرا مجموعهٔ اعداد طبیعی با جزئی از خودش (مجموعهٔ اعداد زوج) هم‌اندازه است.[۵] در واقع نکتهٔ بالا وجه تمایز مجموعه‌های نامتناهی با مجموعه‌های متناهی است:

قضیه ۵.۹. یک مجموعهٔ X نامتناهی است اگر و تنهااگر با زیرمجموعه‌ای از خودش هم‌توان باشد.

مثلاً مجموعهٔ $\mathbb{N}$ به این علت نامتناهی است که هم‌اندازهٔ مجموعهٔ اعداد زوج است. توجه کنید که مجموعهٔ اعداد فرد هم، هم‌اندازهٔ مجموعهٔ اعداد زوج است. پس مجموعهٔ اعداد طبیعی، از دو مجموعه ساخته شده است که هم‌اندازهٔ خودش هستند؛ و این از عجایب نامتناهی بودن است!

قضیهٔ بالا نیز دارای بار فلسفی است: اگر جهان هستی نامتناهی باشد، بخشی از جهان شبیه به کُلِّ جهان است. آن بخش نیز بخشی شبیه به خود دارد! بنابراین چه بسا نامتناهی کُپی از خودِ ما و سیارهٔ ما در جاهای دیگر گیتی وجود داشته باشد و این جهان‌ها به صورت موازی در جریان باشند.

---

[۲] این حقیقت را اصل لانهٔ کبوتری نیز می‌نامند.

[۳] حداقل آنگونه که نگارنده درک کرده است

[۴] برای آشنا شدن با اصول اقلیدس پیوند زیر را مطالعه کنید:

https://www.math.ust.hk/~mabfchen/Math4221/Euclidean20Geometry.pdf

[۵] اقلیدس با چه پیش‌فرضی اصل خود را نوشته است که ما آن پیش‌فرض را نداریم؟

بیایید پیش از ادامهٔ بحث، اول قضیهٔ بالا را اثبات کنیم.

اثبات قضیهٔ ۵.۹. طبق معمول، ابتدا اثبات معمول در اکثر کتاب‌های ریاضی را می‌نویسیم: فرض کنید مجموعهٔ X نامتناهی باشد. عنصر $x_0 \in X$ را انتخاب کنید. مجموعهٔ $X - \{x_0\}$ ناتهی است. پس عنصر $x_1 \in X - \{x_0\}$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $x_0, \ldots, x_n$ انتخاب شده باشند. دوباره $X - \{x_0, \ldots, x_n\}$ ناتهی است پس می‌توان $x_{n+1} \in X - \{x_0, \ldots, x_n\}$ را انتخاب کرد. بدین‌سان یک دنبالهٔ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعضای X انتخاب کرده‌ایم.

در نحوهٔ اثبات بالا، به کار گیری اصل انتخاب چندان مشهود نیست؛ و البته علتش معلوم است: این نحوهٔ بیان اشتباه است. بیایید درستش را بیان کنیم:

فرض کنید h یک تابع انتخاب روی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی باشد؛ یعنی تابعی که از هر زیرمجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ اعداد طبیعی، عنصری برمی‌دارد. بنا به قضیهٔ بازگشت در بخشِ ۳.۴، یک تابع با دامنهٔ $\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $f(n) = h(X - \{f(0), \ldots, f(n-1)\})$. بُردِ تابعِ f همان دنبالهٔ $\{x_n\}$ است که به دنبالش بودیم.

همان طور که از اثبات پیداست، در پیدا کردن این دنباله از قضیهٔ بازگشت و اصل انتخاب به طور همزمان بهره جسته‌ایم.

دقت کنید که دنبالهٔ بالا، در واقع یک کپی از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ داخل مجموعهٔ X است؛ بدین معنی که متناظر با هر عدد طبیعیِ n یک عنصر x_n داریم. پس بیایید قرار دهیم:

$$\mathbb{N}^* = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

پس می‌توان نوشت:

$$X = \mathbb{N}^* \cup (X - \mathbb{N}^*).$$

همچنین گفتیم که $\mathbb{N}$ هم‌توان با مجموعهٔ اعداد زوج است؛ پس $\mathbb{N}^*$ هم‌توان با مجموعهٔ $E^* = \{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ است. حال واضح است که

$$X = \mathbb{N}^* \cup (X - \mathbb{N}^*) \cong \mathbb{E}^* \cup (X - \mathbb{N}^*),$$

یعنی X با بخشی از خودش هم‌توان است.

برای اثبات سمت دیگر قضیه باید نشان دهیم که هیچ مجموعهٔ متناهی‌ای با جزئی از خودش هم‌توان نیست. این را نیز به راحتی می‌توان با استقراء ثابت کرد (بررسی کنید). □

تا کنون فهمیدیم که مجموعه‌ها، به دو دستهٔ کلی تقسیم می‌شوند؛ مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی. یک سوال طبیعی این است که آیا مجموعه‌های نامتناهی، همه هم‌اندازهٔ هم هستند؟ در بالا دیدیم که $\mathbb{N}$ و E هم‌اندازهٔ هم هستند؛ پس پرسیدن این سوال طبیعی است.

۲.۹ مجموعه‌های شمارا

گفتیم که هر عدد طبیعیِ n یک مجموعهٔ متناهی است؛ ولی مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی نامتناهی است. به مجموعه‌هائی که هم‌توان با مجموعهٔ اعداد طبیعی باشند، شمارا می‌گوییم:

تعریف ۶.۹. مجموعهٔ X را **شمارا** می‌خوانیم هرگاه $X \cong \mathbb{N}$.[۶]

[۶] در این کتاب، منظور از شمارا، شمارای نامتناهی است. در برخی کتاب‌ها، مجموعه‌های متناهی را نیز شمارا می‌گیرند.

پس یک مجموعهٔ X شماراست هرگاه به اندازهٔ اعداد طبیعی عضو داشته باشد. بنا به نمادگذاری‌ای که معرفی کردیم، این گونه هم می‌توان نوشت:

$$|X| = |\mathbb{N}|.$$

به عنوان مثال مجموعهٔ اعداد زوج شماراست؛ زیرا همان گونه که در زیر می‌بینید یک تابع یک‌به‌یک و پوشا میان مجموعهٔ اعداد زوج و مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد:

$$E \cong \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{cccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \dots \end{array}$$

ضابطهٔ تابع بالا به صورت زیر است:

$$f : E \to \mathbb{N} \quad x \mapsto ۲x.$$

یک تعبیر دیگر از شمارا بودن این است که، مجموعهٔ X شمارا است هرگاه اعضای آن را بتوان به صورت یک دنباله نوشت:

$$X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

خودِ مجموعهٔ $\mathbb{N}$ پس بدین دلیل شماراست که می‌توان نوشت:

$$\mathbb{N} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

همچنین مجموعهٔ اعداد زوج شماراست زیرا

$$\mathbf{E} = \{۲n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

قضیهٔ زیر، تأئیدی بر این گفته است که هر مجموعه‌ی نامتناهی، حداقل شمارا عضو دارد:

قضیه ۷.۹. مجموعهٔ دلخواهِ X نامتناهی است اگروتنها اگر شامل یک زیرمجموعهٔ شمارا باشد.

اثبات. اثبات قضیهٔ ۵.۹ را (به دقت) بخوانید. اگر X یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه مجموعهٔ $\mathbb{N}^*$ که در اثبات قضیهٔ یادشده ساخته شد، شمارای نامتناهی است و $\mathbb{N}^* \subseteq X$. □

در ادامه، می‌خواهیم به بررسی این نکته بپردازیم که آیا مجموعه‌ای نامتناهی پیدا می‌شود که هم‌توان با $\mathbb{N}$ نباشد؟ به بیان دیگر، آیا مجموعه‌ای نامتناهی پیدا می‌شود که شمارا نباشد؟
بیایید با اضافه کردن اشیائی به مجموعهٔ $\mathbb{N}$ آن را بزرگتر کنیم (بدین امید که به مجموعه‌ای غیرشمارا برسیم!). مثلاً فرض کنید یک دوچرخه به مجموعهٔ اعداد طبیعی اضافه کنیم! واضح است که مجموعهٔ حاصل نامتناهی است زیرا شامل اعداد طبیعی است؛ اما ادعا می‌کنیم که که این مجموعه هم‌اندازهٔ $\mathbb{N}$ است. در واقع ادعا می‌کنیم که:

$$\mathbb{N} \cup \{\text{🚲}\} \cong \mathbb{N}.$$

برای اثبات نوشتهٔ بالا کافی است یک تناظر یک‌به‌یک میان مجموعه‌های یادشده برقرار کنیم. به شکل زیر نگاه کنید:

$$\begin{array}{lcccccc} \mathbb{N} \cup \{\text{🚲}\} & \text{🚲} & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{N} & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \dots \end{array}$$

بنا به شکل بالا، اگر به یک مجموعهٔ شمارا، یک عنصر اضافه شود، همچنان شمارا باقی می‌ماند. در زیر این گفته را دقیق‌تر کرده‌ایم:

قضیه ۸.۹. فرض کنید A یک مجموعهٔ شمارا باشد و $x \notin A$. آنگاه $A \cup \{x\}$ هم شماراست.

اثبات. از آنجا که A شماراست داریم $A \cong \mathbb{N}$؛ یعنی $A = \{x_۰, x_۱, x_۲, \ldots\}$. بنویسید: $A \cup \{x\} = \{x, x_۰, x_۱, x_۲, \ldots\}$. تابع $f : \mathbb{N} \to A \cup \{x\}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(۰) = x$$
$$f(i) = x_{i-۱} \quad i \neq ۰,$$

بررسی کنید که تابع بالا یک‌به‌یک و پوشاست. □

نکتهٔ بالا به «پارادوکس هیلبرت» معروف است: فرض کنید که یک هتل داریم که به اندازهٔ اعداد طبیعی اتاق دارد و همهٔ اتاقهای آن پُر است. اگر یک مسافر جدید بیاید آیا می‌شود او را هم در هتل جای داد؟ به نظر می‌آید که بشود: کافی است که به هر کس بگوئیم که یک اتاق جلوتر برود تا اتاق شمارهٔ صفر خالی شود! جالب اینجاست که اگر از یک مجموعهٔ شمارا یک عضو برداریم هم کوچکتر نمی‌شود:

تمرین ۱.۹. اگر A شمارا باشد و $x \in A$ آنگاه $A - \{x\}$ هم شماراست.

حال بیایید به جای یک عنصر، n عنصر (یعنی تعدادی متناهی عنصر) به مجموعهٔ اعداد طبیعی اضافه کنیم:

تمرین ۲.۹. فرض کنید A شماراست و $x_۱, \ldots, x_n \notin A$ نشان دهید که $A \cup \{x_۱, \ldots, x_n\}$ شماراست.

باز هم مجموعهٔ حاصل بزرگتر نشد! حال بیایید n عنصر از آن کم کنیم:

تمرین ۳.۹. اگر A شمارا باشد و $x_۱, \ldots, x_n \in A$ آنگاه $A - \{x_۱, \ldots, x_n\}$ هم شماراست.

مثال هتل هیلبرت را به صورت زیر ادامه می‌دهیم: فرض کنید هتل یادشده به اندازهٔ اعداد طبیعی جا دارد و همهٔ اتاقهای آن پر است. حال به اندازهٔ اعداد طبیعی مسافر تازه وارد می‌شوند که نیازمند اتاق هستند. در این صورت هم هتل برای آن‌ها جا دارد: کافی است که هر کس که در اتاق n است به اتاق $۲n$ برود. در این صورت اتاقهای فرد خالی می شوند و مسافران جدید می‌توانند وارد آن‌ها شوند؛ هر چند در این روش عدالت بین کسی که در اتاق اول است و کسی که در اتاق هزارم است رعایت نشده است! در زیر این گفته را دقیق کرده‌ایم:

قضیه ۹.۹. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ شمارا باشند و $A \cap B = \varnothing$. آنگاه $A \cup B$ نیز شماراست.

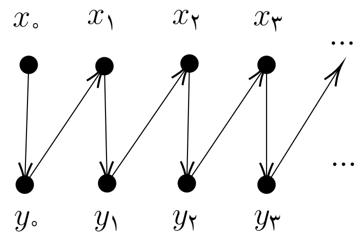
اثبات. فرض کنید $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ شمارشی برای A باشد و $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ شمارشی برای B باشد. داریم:

$$A \cup B = \{x_۰, y_۰, x_۱, y_۱, x_۲, y_۲, x_۳, y_۳, \ldots\}.$$

تابع $f : \mathbb{N} \to A \cup B$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\begin{cases} f(۲i) = x_i \\ f(۲i + ۱) = y_i \end{cases}.$$

تابع بالا، مجموعهٔ $A \cup B$ را به صورت زیر می‌شمارد:



بررسی کنید که تابع f یک‌به‌یک و پوشاست. □

توجه ۱۰.۹. در مثال بالا مجموعهٔ A را با اعداد زوج و مجموعهٔ B را با اعداد فرد متناظر کردیم. از این رو $A \cup B$ با مجموعهٔ اعداد طبیعی متناظر شد و از اینجا فهمیدیم که شماراست.

مثال ۱۱.۹. مجموعهٔ اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، شماراست.

پاسخ. واضح است که

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-$$

که در آن منظور از $\mathbb{Z}^-$ مجموعهٔ اعداد صحیح منفی است. می‌دانیم که

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^- = \varnothing,$$

پس، بنا به مثال قبلی، کافی است نشان دهیم که $\mathbb{Z}^-$ شماراست؛ و البته شمارشی به شکل زیر ما را به این اطمینان می‌رساند:

$$\mathbb{Z}^- = \{-\overset{0}{1}, -\overset{1}{2}, -\overset{2}{3}, -\overset{3}{4}, \ldots\}.$$

به بیان دقیق‌تر، تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^-$ با ضابطهٔ

$$x \mapsto -x - 1$$

یک‌به‌یک و پوشاست، و شمارا بودنِ $\mathbb{Z}^-$ از این رو نتیجه می‌شود. □

به نظر عجیب می‌آید؛ اگر به اندازهٔ اعداد طبیعی، به اعداد طبیعی عنصر اضافه کنیم اندازهٔ مجموعهٔ حاصل برابر با اندازهٔ مجموعهٔ اعداد طبیعی است. حتی با استقراء می‌توان ثابت کرد که:

تمرین ۴.۹. اگر A_1، ... و A_n مجموعه‌هایی شمارا باشند به طوری که $A_i \cap A_j = \varnothing$، برای هر $1 \leqslant i, j \leqslant n$، آنگاه $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ مجموعه‌ای شماراست.

حال، حالتی عجیب‌تر در پارادوکس هتل هیلبرت را در نظر بگیرید: یک هتل داریم که به اندازهٔ اعداد طبیعی جا دارد و تمام اتاقهای آن پر است. اگر به‌اندازهٔ اعداد طبیعی اتوبوس بیایند که هر کدام حاوی به اندازهٔ اعداد طبیعی مسافرند، باز هم در هتل برای آن‌ها جا پیدا می‌شود؛ به بیان دیگر، اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارا، مجموعه‌ای شماراست. این گفته را در ادامه اثبات کرده‌ایم؛ با این حال برای درک بهتر پارادوکس هتل هیلبرت، فیلم‌های آموزشی زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

https://www.youtube.com/watch?v=faQBrAQ87l4

https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

همچنین اخیراً فیلمی با کمک دانشجویان دانشگاه صنعتی اصفهان تهیه کرده‌ایم که به همین موضوع اختصاص یافته است:

https://www.aparat.com/v/tbDwf

قضیه ۱۲.۹. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های شماراست و برای هر $i \neq j \in \mathbb{N}$ داریم $A_i \cap A_j = \varnothing$. آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ شماراست.

اثبات. اعضای مجموعه‌های A_i را به صورت زیر فهرست کنید:

$$\begin{array}{cccccc}
A_۱ & x_{۰۰} & x_{۰۱} \rightarrow & x_{۰۲} & x_{۰۳} \rightarrow & \cdots \\
A_۲ & x_{۱۰} & x_{۱۱} & x_{۱۲} & x_{۱۳} & \cdots \\
A_۳ & x_{۲۰} \rightarrow & x_{۲۱} & x_{۲۲} & x_{۲۳} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_n & x_{n۰} & x_{n۱} & x_{n۲} & x_{n۳} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

سپس در مسیری که در شکل مشخص شده حرکت کنید و به هر عضو به ترتیب، یک شمارهٔ طبیعی بدهید. اثبات زمانی دقیق می‌شود، که ضابطهٔ این شمارش، که تابع یک‌به‌یک و پوشا است، نوشته شود (تمرین بعدی را مشاهده کنید). □

تمرین ۵.۹. ضابطهٔ نگاشت شمارش بالا را به دست بیاورید.[۷]

تمرین ۶.۹. حکم قضیهٔ قبل را با حکم تمرین ۴.۹ مقایسه کنید. حکم آن تمرین را با استقرا باید ثابت می‌کردید. اما آیا حکم قضیهٔ قبل را می‌شد با استقراء ثابت کرد؟

پس ثابت کردیم که اگر $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های شمارا باشد آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ شماراست. تا به حال هر چه تلاش کرده‌ایم نتوانسته‌ایم مجموعه‌ای بزرگتر از مجموعهٔ اعداد طبیعی پیدا کنیم؛ شاید از ضرب دکارتی کمکی برآید:

مثال ۱۳.۹. مجموعهٔ $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \{(x,y) \mid x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N}\}$ شماراست.

پاسخ. داریم

$$\{۰\}\times\mathbb{N} = \{(۰,۰),(۰,۱),(۰,۲),\ldots\},$$

$$\{۱\}\times\mathbb{N} = \{(۱,۰),(۱,۱),(۱,۲),\ldots\},$$

$$\vdots$$

[۷] تابع $۲^y(۲y+۱)-۱$ را امتحان کنید. پیوند زیر را نیز مطالعه کنید:
https://en.wikipedia.org/wiki/Pairing_function

اما

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\{n\}\times\mathbb{N}\right)$$

هم شماراست؛ زیرا همان طور که دیدیم اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارائی که دو به دو متمایز هستند، شماراست. □

نتیجه ۱۴.۹. اگر X و Y شمارا باشند آنگاه $X\times Y$ هم شماراست (با همان اثبات بالا).

مثال ۱۵.۹. هر زیر مجموعهٔ نامتناهی از $\mathbb{N}$ شماراست.

پاسخ، با اثباتی نادقیق. فرض کنید $A\subseteq\mathbb{N}$ نامتناهی باشد. هر زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ دارای یک کوچکترین عضو است. فرض کنید x_0 کوچکترین عضو A باشد. حال فرض کنید $x_0,\dots,x_n$ پیدا شده باشند؛ x_{n+1} را کوچکترین عضو $A-\{x_0,\dots,x_n\}$ بگیرید. تابع زیر را از $\mathbb{N}$ به A در نظر بگیرید:

$$f(i)=x_i.$$

یک‌به‌یک بودن تابع فوق از روی ساختِ آن واضح است؛ زیرا $f(i+1)\notin\{f(0),\dots,f(i)\}$.

تابع فوق پوشاست: فرض کنید t عنصر دلخواهی از A باشد. پس $t=n$ یک عدد طبیعی است. تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از n برابر با n است. پس حداکثر پس از طی n مرحله در بالا به t می‌رسیم؛ به بیان دیگر از میان $f(0),\dots,f(n-1)$ حتما یکی برابر با t خواهد بود. □

تمرین ۷.۹. همان طور که در موقعیت‌های مشابه، مثلاً در اثباتِ قضیهٔ ۶.۴ تأکید کردیم، اثبات بالا به نحوی نادقیق نوشته شده است؛ آن را دقیق کنید. در واقع نشان دهید که در اثبات بالا از قضیهٔ بازگشت و ترکیب توابع استفاده شده است. توضیح دهید که آیا در اثبات بالا از اصل انتخاب استفاده شده است؟

شاید مجموعه‌های پیوسته‌تر، مثلاً مجموعهٔ اعداد گویا ناشمارا باشند! بیایید این را بررسی کنیم:

مثال ۱۶.۹. مجموعهٔ $\mathbb{Q}^{\geqslant 0}$، یعنی مجموعهٔ متشکل از اعداد گویای نامنفی، شماراست.

پاسخ. واضح است که

$$\mathbb{Q}^{\geqslant 0}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{N},b\neq 0,(a,b)=1\}.$$

اعضای مجموعهٔ فوق را در آرایه‌ای به صورت زیر قرار دهیم:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & & & & & \cdots\\
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots\\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{5} & \cdots\\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots\\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & & \frac{4}{5} & \cdots
\end{array}$$

با کمی دقت درمی‌یابیم که هر سطر از آرایهٔ فوق، شماراست، پس $\mathbb{Q}^{\geqslant 0}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارا، و از این رو شماراست. □

قبول داریم که اثبات شمارا بودن هر سطر در درایهٔ بالا، دقت بیشتری می‌طلبد، اما فعلاً پرداختن به این جزئیات جزو اهدافمان نیست. در فصل‌های پیش رو اثبات دقیق‌تری برای مثال فوق ارائه خواهیم کرد.

مثال ۱۷.۹. مجموعهٔ اعداد گویا شماراست.

پاسخ. با $\mathbb{Q}^{<۰}$ مجموعهٔ اعداد گویای منفی را نشان دهید. واضح است که $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\geqslant ۰} \cup \mathbb{Q}^{<۰}$. دو مجموعهٔ سمت راست شمارا هستند و اشتراکشان تهی است. □

تمرین ۸.۹. نشان دهید مجموعهٔ اعداد طبیعی، اجتماعی از شمارا تا مجموعهٔ شماراست؛ یعنی نشان دهید که یک خانوادهٔ $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ از زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که اعضای آن، دو به دو با هم اشتراکی ندارند و $\bigcup A_i = \mathbb{N}$.

تمرین ۹.۹. نشان دهید که تعداد بازه‌های دو به دو مجزا در اعداد حقیقی، شماراست.

۳.۹ الفِ صفر، اولین الف!

در بخش‌های قبلی گفتیم که دو مجموعهٔ X و Y را هم‌توان می‌خوانیم و می‌نویسیم $X \cong Y$ هرگاه یک تابع یک‌به‌یک و پوشا از X به Y موجود باشد. گفتیم که مفهوم رابطه را می‌توان از مجموعه‌ها به کلاس‌ها هم گسترش داد. با این توضیح، رابطهٔ هم‌توانی یک رابطهٔ هم‌ارزی روی کلاس همهٔ مجموعه‌هاست؛ یعنی ویژگی‌های زیر را داراست:

۱. اگر X یک مجموعه باشد آنگاه $X \cong X$،

۲. اگر $X \cong Y$ آنگاه $Y \cong X$،

۳. اگر $X \cong Y$ و $Y \cong Z$ آنگاه $X \cong Z$.

پس بنا به آن چه در بخشِ ۳.۷ رابطهٔ هم‌توانی ($\cong$) کلاس همهٔ مجموعه‌ها را افراز می‌کند. هر کلاس از این افراز را یک «کاردینال» یا یک «عدد اصلی» می‌نامیم. کلاس مجموعهٔ X را با $\mathbf{card}(X)$ نشان می‌دهیم. پس $\mathbf{card}(X)$ نامی است که ما برای کلاسِ همهٔ مجموعه‌های هم‌اندازه با X در نظر گرفته‌ایم. بنا به این تعریف، واضح است که:

$$\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y) \iff X \cong Y.$$

برای بعضی از این کلاس‌های هم‌ارزی، که بیشتر مورد توجه ما هستند، اسامی جذاب‌تری لازم داریم که در ادامه برخی از آن‌ها را خواهیم دید.

قبلاً تعریف کرده بودیم که X متناهی است هرگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که

$$X \cong n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}.$$

حرف n نام مناسبی برای کلاس مجموعه‌هایی است که n عضو دارند! می‌نویسیم:

$$\mathbf{card}(X) = n.$$

شکل زیر افراز تمام مجموعه‌ها را به کلاس‌های هم‌ارزی کاردینال‌ها نشان می دهد. در این افراز اولین خانه از سمت چپ نشان دهندهٔ کلاس همهٔ مجموعه‌های صفر عضوی است. خانهٔ بعد از آن (حرکت به سمت راست) نشان دهندهٔ کلاس همهٔ مجموعه‌های یک عضوی است و بقیه نیز به همین ترتیب:

$\varnothing$	۱	۲	$\ldots$	$[\mathbb{N}]$	$\ldots$

تا این که به کلاس اعداد طبیعی می‌رسیم. کلاس اعداد طبیعی را تحت رابطهٔ هم‌ارزی بالا با $\aleph_\circ$ (الفِ صفر) نشان می‌دهیم. $\aleph$ حرف اول الفبای عبری است و عدد صفر اشاره به این دارد که $\aleph_\circ$ اولین کاردینال نامتناهی است. بنا بر آن چه در بخش قبل دیدیم، یک مجموعهٔ X شماراست هرگاه

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_\circ.$$

در فصل‌های پیش رو قرار است با این اعداد جدید بیشتر آشنا شویم و جمع و ضرب و ترتیب آن‌ها را نیز بشناسانیم. تعاریفی که برای این اعمال ارائه خواهیم کرد، به اندازه‌ای طبیعی هستند که همین جا می‌توانیم حدس بزنیم که برخی حقایقی که در بخش قبل اثبات کرده‌ایم، چطور می‌توان با استفاده از جمع و ضرب کاردینال‌ها نوشت:

$$a < \aleph_\circ \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad a \cong n$$

یعنی الف‌صفر اولین کاردینال نامتناهی است.

$$\aleph_\circ + ۱ = \aleph_\circ$$

یعنی اگر به یک مجموعهٔ شمارا یک عنصر اضافه کنیم شمارا می‌ماند.

$$\aleph_\circ + \aleph_\circ = \aleph_\circ$$

یعنی اجتماع دو مجموعهٔ شمارا، شماراست.

$$\aleph_\circ \cdot \aleph_\circ = \aleph_\circ$$

یعنی اگر X, Y شمارا باشند آنگاه $X \times Y$ نیز شماراست.

۴.۹ مجموعه‌های ناشمارا و برهان قطری

در بخش‌های قبلی، تلاش کردیم تا با افزودن عناصری به مجموعهٔ اعداد طبیعی، و یا با استفاده از حاصل‌ضرب‌های دکارتی، به مجموعه‌ای بزرگ‌تر دست یابیم، اما توفیقی نیافتیم. حتی دیدیم که اجتماع شماراتا مجموعهٔ شمارا نیز یک مجموعهٔ شمارا است. در زیر می‌خواهیم سرانجام مجموعه‌ای معرفی کنیم که شمارا نیست. انجام این کار تحت یک روش استدلال معروف، به نام **روش قطری کانتور** صورت می‌گیرد.

فرض کنید که مجموعهٔ A متشکل از تمام دنباله‌های شمارای ساختهٔ شده از اعداد طبیعی ۰ تا ۹ باشد؛ یعنی هر عضو درمجموعهٔ A به صورت $(a_i)_{i\in\omega}$ باشد، به طوری که $a_i \in \{۰, ۱, \ldots, ۹\}$. ادعا می‌کنیم که تعداد اعضای مجموعهٔ A را نمی‌توان شمارش کرد.

به برهان خلف فرض کنید که تمام دنباله‌های موجود در A به صورت زیر شمارش شده‌اند:

$$\begin{array}{cccccccc}
۰ & \rightarrow & a_{۰۰} & a_{۰۱} & a_{۰۲} & a_{۰۳} & \ldots \\
۱ & \rightarrow & a_{۱۰} & a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \ldots \\
۲ & \rightarrow & a_{۲۰} & a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \ldots \\
\vdots & & & & & & \\
n & \rightarrow & a_{n۰} & a_{n۱} & a_{n۲} & a_{n۳} & \ldots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

پس ادعا شده است که هر دنبالهٔ ممکنی به صورت $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ که در آن a_i یک عدد طبیعی از ۰ تا ۹ باشد، در لیست بالا قرار دارد. اما در زیر دنباله‌ای معرفی می‌کنیم که در لیست بالا قرار ندارد و این تناقض است:

دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید (برای راحتی، هر عنصر دنباله را در یک خانه جداگانه نوشته‌ایم)

عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۰۰}$	عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۱۱}$	عددی بین صفر تا ۹ به غیر از $a_{۲۲}$	...

دنبالهٔ بالا با تمام دنباله‌های نوشته شده در لیست متفاوت است: با دنبالهٔ صفرم متفاوت است زیرا صفرمین عنصرش با $a_{۰۰}$ متفاوت است؛ با دنبالهٔ اول متفاوت است زیرا یکمین عنصرش $a_{۱۱}$ نیست؛ و به این ترتیب با دنبالهٔ i ام متفاوت است، زیرا عنصر i ام آن، a_{ii} نیست. این دنباله، با تغییر دادن قطر آرایهٔ بالا حاصل شده است و از این رو، این برهان را *برهان قطری* کانتور می‌نامند. مجموعهٔ بالا متناهی نیست و شمارا نیز نیست. به چنین مجموعه‌ای، **ناشمارا** گفته می‌شود.

استدلال بالا حقایق جذابی را برای ما روشن می‌کند: در بخشِ ۴.۷ دیدیم که هر عدد حقیقی یک دنبالهٔ شمارا ازاعداد طبیعی است. مثلاً

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۹\ldots.$$

بنابراین تعداد اعداد حقیقی، برابر با تعداد دنباله‌های شمارا از اعداد طبیعی است؛ پس این تعداد شمارا نیست. [۸]

همچنین بازهٔ $(۰, ۱)$ را در نظر بگیرید. در هر عدد در بازهٔ $(۰, ۱)$ یک عدد اعشاری به صورت زیر است:

$$۰/a_۰a_۱, \ldots$$

پس تعداد عناصر موجود در بازهٔ $(۰, ۱)$ نیز برابر با تعداد دنباله‌های شمارای ساخته شده از اعداد ۰ تا ۹ است؛ یعنی حتی بازهٔ $(۰, ۱)$ هم شمارا نیست (جالب اینجاست که این استدلال نشان می‌دهد که تعداد کل اعداد حقیقی برابر با تعداد اعداد حقیقی در بازهٔ $(۰, ۱)$ است؛ زیرا هر دو هم‌اندازهٔ مجموعهٔ متشکل از دنباله‌های شمارای ساخته شده از اعداد ۱ تا ۹ هستند). در زیر به روش دیگری هم این نکته را ثابت کرده‌ایم. البته قبل از آن نشان می‌دهیم که اصولاً همهٔ بازه‌ها هم‌اندازه‌اند!

لم ۱۸.۹. اگر $a \neq b$ آنگاه

$$(a, b) \cong (۰, ۱).$$

اثبات. کافی است یک تناظر یک‌به‌یک بین بازهٔ (a, b) و بازهٔ $(۰, ۱)$ پیدا کنیم. برای این کار، کافی است معادلهٔ خطی را بیابیم که از نقاط $(a, ۰)$ و $(b, ۱)$ می‌گذرد. □

پس همهٔ بازه‌های باز، هم‌اندازه‌اند و همهٔ آن‌ها نامتناهی و ناشمارا هستند. در زیر نشان داده‌ایم که کُلِّ $\mathbb{R}$ نیز هم‌اندازهٔ بازهٔ $(۰, ۱)$ است. پس $\mathbb{R}$ ناشمارای نامتناهی است.

مثال ۱۹.۹. نشان دهید که $\mathbb{R} \cong (۰, ۱)$.

---

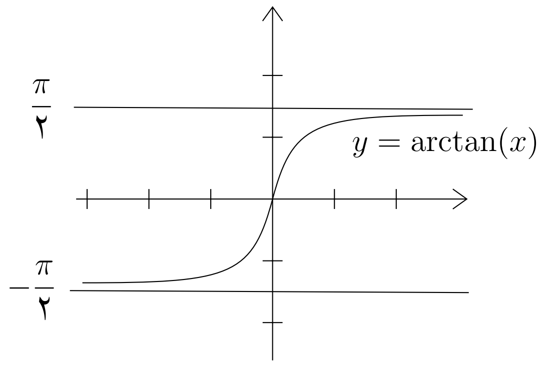
[۸] بنا به اصل جایگزینی هر دنباله از اعداد طبیعی یک مجموعه است. با استفاده از اصل تصریح می‌توان نشان داد که $\mathbb{R}$ یک مجموعه است.

پاسخ. بنا به لم قبل کافی است یک بازه پیدا کنیم که با $\mathbb{R}$ هم‌توان باشد. تابعِ

$$\arctan(x) : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$$

که در درس ریاضی ۱ با آن آشنا می‌شویم، تنها یک مثال از یک تابع یک‌به‌یک و پوشاست که هدف مورد نظر ما را تأمین می‌کند. پس

$$\mathbb{R} \cong (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \cong (۰, ۱).$$



□

تمرین ۱۰.۹. فرض کنید (a,b) و (c,d) دو بازهٔ ناتهی باشند. با پیدا کردن یک تابع یک‌به‌یک و پوشا، نشان دهید که $(a,b) \cong (c,d)$.

تمرین ۱۱.۹. با استفاده از تمرین قبل نشان دهید که اگر X, Y دو مجموعهٔ با اندازهٔ برابر با اندازهٔ $\mathbb{R}$ باشند که با هم اشتراکی ندارند، آنگاه $X \cup Y$ نیز هم‌توان با $\mathbb{R}$ است.

۵.۹ تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی

در قسمت قبل، نشان دادیم که مجموعه‌هایی وجود دارند که ناشمارا هستند، و مجموعهٔ اعداد حقیقی یکی از آن‌هاست. در این بخش می‌خواهیم به بررسی این نکته بپردازیم که مجموعهٔ اعداد حقیقی، از مجموعهٔ اعداد طبیعی چقدر بزرگتر است.

نخست به این نکته توجه کنید که تعداد دنباله‌های به طول شمارا، ساخته شده از دو عدد ۰ و ۱ ناشماراست. این گفته را می‌توان به راحتی با استفاده از برهان قطری کانتور اثبات کرد، و اثباتی که در بخش ۴.۹ ارائه شد، ربطی به اعداد یک تا نُه نداشت:

تمرین ۱۲.۹. با برهان قطری کانتور، نشان دهید که تعداد دنباله‌های به صورت

$$a_۰ a_۱ a_۲ \dots$$

که در آن $a_i \in \{۰, ۱\}$ ناشماراست.

دقت کنید که هر دنباله ساخته شده با صفر و یک چیزی شبیه به دنبالهٔ زیر است:

$$۰, ۱, ۰, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۰, \dots$$

پس هر چنین دنباله‌ای، در واقع، تصویرِ یک تابعِ $f : \mathbb{N} \to \{۰, ۱\}$ است که به صورت

$$f(۰), f(۱), f(۲), \ldots$$

نوشته شده است. پس نتیجه می‌گیریم که:

تمرین ۱۳.۹. نشان دهید که تعداد توابعِ $f : \mathbb{N} \to \{۰, ۱\}$ دقیقاً برابر با تعداد دنباله‌های شمارای ساخته‌شده از صفر و یک است.

مجموعهٔ همهٔ توابعِ $f : \mathbb{N} \to \{۰, ۱\}$ را با $۲^{\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم. پس فهمیده‌ایم که اندازهٔ مجموعهٔ $۲^{\mathbb{N}}$ برابر است با تعداد دنباله‌های به طولِ شمارای ساخته شده از ۰ و ۱.

هر عدد حقیقی دارای یک بسط شمارا در مبنای دو است. پس هر عدد حقیقی، در مبنای ۲، در واقع دنباله‌ای شمارا از ۰ و۱ است. بنابراین: تعداد اعداد حقیقی= تعداد دنباله‌های شمارای ساخته‌شده از صفر و یک = تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به $\{۰, ۱\}$ = اندازهٔ مجموعهٔ $۲^{\mathbb{N}}$. اما یک مجموعهٔ مهم دیگر هم هست، که همین اندازه را دارد:

قضیه ۲۰.۹. اندازهٔ $\mathbf{P}(\mathbb{N})$، یعنی مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$، برابر است با اندازهٔ مجموعهٔ $۲^{\mathbb{N}}$، یعنی مجموعهٔ همهٔ توابع از $\mathbb{N}$ به $\{۰, ۱\}$. به بیان دیگر

$$\mathbf{P}(\mathbb{N}) \cong ۲^{\mathbb{N}}.$$

اثبات. باید یک تابع یک و پوشای h را از $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ به $\{۰, ۱\}^{\mathbb{N}}$ تعریف کنیم. تابع h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: فرض کنید $A \in \mathbf{P}(\mathbb{N})$ یعنی $A \subseteq \mathbb{N}$. قرار است $h(A)$ خودْ تابعی از $\mathbb{N}$ به $\{۰, ۱\}$ باشد. تابع $h(A)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$h(A)(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

بررسی کنید که تابع h یک‌به‌یک و پوشاست. دوباره یادآوری می‌کنم که h مجموعهٔ A را به تابعِ $h(A)$ می‌برد و تابع $h(A)$ به صورت بالاست. $\square$

برای درک بهتر اثبات بالا، نخست یک لیست از اعداد طبیعی آماده کنید. حال زیر برخی از اعداد لیست عدد یک، و زیر برخی دیگر عدد صفر قرار دهید. اعدادی که زیر آن‌ها، عدد یک قرار گرفته است، یک زیرمجموعه از اعداد طبیعی را مشخص می‌کنند. پس تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، برابر است با تعداد دنباله‌های ساخته شده با صفر و یک. برای مثال در شکل زیر، یکی از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ را مشخص کرده‌ایم:

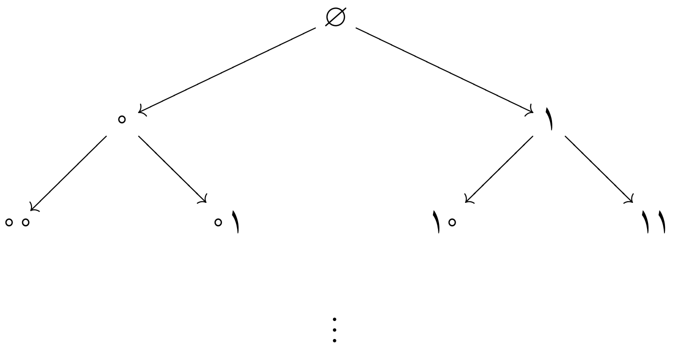
$$\begin{array}{ccccccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \ldots \end{array}$$

بنا به قضیهٔ بالا و آنچه پیش از آن گفته شد:

اندازهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی = تعداد زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ = اندازهٔ مجموعهٔ $۲^{\mathbb{N}}$.

همان طور که پیش تر گفتیم، روی برخی کاردینال‌ها، یعنی کلاس‌های هم‌ارزی رابطهٔ هم‌اندازه بودن، اسم‌های جذابی می‌گذاریم: اندازهٔ مجموعهٔ $۲^{\mathbb{N}}$ را با $۲^{\aleph_۰}$ نشان می‌دهیم. پس اندازهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی، برابر است با $۲^{\aleph_۰}$.

دقت کنید که یک روش مشاهدهٔ همهٔ دنباله‌های شمارای ساخته شده از ۰ و۱ استفاده از یک درخت دودوئی به صورت زیر است:



هر شاخهٔ درخت بالا (البته اگر آن را تا آخر ادامه بدهید!) نشان دهندهٔ یک دنباله شمارا از ۰, ۱ است. پس تعداد شاخه‌های این درخت برابر است با $۲^{\aleph_۰}$.

دقت کنید که اگر مجموعه‌ای متناهی و دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲^n است که اکیداً از n بیشتر است. در بالا ثابت کردیم که اگر مجموعه‌ای شمارا عضو داشته باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایش $۲^{\aleph_۰}$ است. در بخش بعدی خواهیم دید که روی کاردینال‌ها ترتیبی وجود دارد که با آن ترتیب، $\aleph_۰ < ۲^{\aleph_۰}$.

شاید از خود بپرسید که تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ اعداد طبیعی چقدر است. در ادامه به پاسخ این سوال خواهیم پرداخت.

تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی $\mathbb{N}$ برابر با $\aleph_۰$ است. در قسمت قبلی نشان دادیم که اگر X, Y شمارا باشند، آنگاه $X \times Y$ شماراست. پس $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست. از طرفی تعداد زیرمجموعه‌های دوعضویِ $\mathbb{N}$ از اندازهٔ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ کوچکتر است، پس این تعداد نیز حداکثر شماراست. همچنین تعداد زیرمجموعه‌های n عضویِ $\mathbb{N}$ از اندازهٔ $\mathbb{N}^n$ کمتر است، پس حداکثر شماراست.

از طرفی مجموعهٔ زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ برابر با مجموعهٔ زیر است:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{زیرمجموعه‌های } n \text{ عضویِ } \mathbb{N}$$

یعنی اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست. پس

قضیه ۲۱.۹. تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ $\mathbb{N}$ شماراست. [۹]

تمرین ۱۴.۹. نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ $\mathbb{N}$ برابر است با تعداد دنباله‌های با طول متناهی ساخته شده از ۰ و ۱.

تمرین ۱۵.۹. با کمک تمرین قبل، نشان دهید که تعداد گره‌های درخت بالا (یعنی جایگاه‌هایی که در آن‌ها عدد نوشته شده است) شماراست. آیا این عجیب نیست که تعداد شاخه‌های درخت دودوئی نامتناهی از تعداد گره‌های آن بیشتر است؟

تمرین ۱۶.۹. نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهیِ $\mathbb{N}$ شمارا **نیست**.

[۹] البته استدلالی که در بالا ارائه شد، ناقص است. فعلا هدفهم تنها دادن شهود است.

مثال ۲۲.۹. نشان دهید که مجموعهٔ $\mathbb{Q}^c$ (اعداد گنگ) ناشماراست.

پاسخ. اگر $\mathbb{Q}^c$ شمارا باشد آنگاه $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ شماراست که این تناقض است. $\square$

تمرین ۱۷.۹. بنا به تعاریف، توضیح دهید که فرقِ میانِ دو نمادِ $2^{\aleph_0}$ و $2^{\mathbb{N}}$ چیست؟

۶.۹ پیوست؛ مسئلهٔ توقف و ناتمامیت اول گودل

در بخشِ ۴.۹ برای اثباتِ ناشمارا بودن مجموعهٔ متشکل از تمام دنباله‌های شمارای ساخته شده از ۰ و۱ از «برهان قطری کانتور» استفاده کردیم. در این بخش دربارهٔ دو کاربرد مهم این برهان سخن خواهیم گفت.

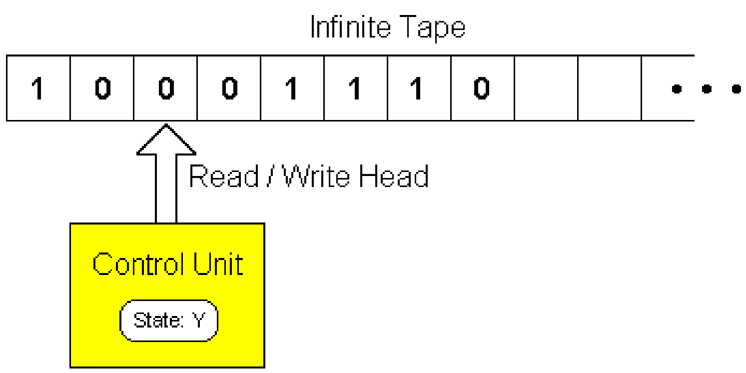
یکی از مسائل معروف در علوم رایانهٔ نظری، مسئلهٔ توقف است. بنا بر این مسئله، هیچ الگوریتمی وجود ندارد که همزمان توقف و عدم توقف همهٔ الگوریتمهای رایانه‌ای را تعیین کند. پیش از ورود به توضیح و اثبات این قضیه، کمی دربارهٔ مفهوم کلمهٔ الگوریتم در ریاضیات سخن گفته‌ایم.

۱.۶.۹ تعریف الگوریتم

معمولاً هر فردی با حداقل دانش رایانه‌ای، درکی از مفهوم «الگوریتم» دارد؛ هر الگوریتمی یک شروع و پایان دارد، چند خط دستور دارد و می‌تواند از یک خطِ دستور، به یک خط دیگرِ دستور برود، می‌تواند دارای حلقه‌های IF، FOR و غیره باشد، ممکن است به ازای یک ورودی روی «دور» یا «تسلسل» بیفتد و «متوقف» نشود، یا ممکن است به ازای یک ورودی، دستورات خواسته شده را به انجام برساند و با تحویل دادن یک خروجی مناسب متوقف شود.

اما در ریاضیات، الگوریتم باید دقیق تعریف شود. برای این تعریف دو روش وجود دارد که به ما نحو مختصری آن‌ها را توضیح داده‌ایم. یک منبع مناسب برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه، کتابِ [۴] است.

در روش اول، یک رایانهٔ فرضی خیلی ساده به نام «ماشین تورینگ» معرفی می‌شود که «مدل فرضی» همهٔ رایانه‌هاست. این رایانه، یک نوار طولانی است که روی هر خانهٔ آن، می‌تواند یک علامت ۰ یا یک علامت ۱ قرار بگیرد. یک «هد» بالای این نوار وجود دارد و می‌تواند نوار را بخواند، خانه‌ای را پاک کند، از خانه‌ای به یکی از خانه‌های بغلی حرکت کند، صفر را به یک تبدیل کند و یک را به صفر. هر کاری که این ماشین قادر به انجامش باشد «یک الگوریتم» نامیده می‌شود. مثلاً برای اجرای جمع دو عدد توسط این ماشین، لازم است که به نحوی این دو عدد به صورت دنباله‌های صفر و یک روی نوار وارد شوند و با دستورات مناسبی، صفر و یک‌هایی روی نوار چاپ شود که نشان دهنده حاصل جمع دو عدد مورد نظر است:



روش دوم تعریف الگوریتم، ریاضی‌وارتر است. در این روش، هر الگوریتم، اساساً یک تابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ در نظر گرفته می‌شود که این تابع، با استفاده از یک تعداد توابع ساده، و با قوانینی برای ترکیب این توابع ساده به دست آمده است. برای مثال، استفاده از توابعِ جمع، تابع ثابتِ صفر و ترکیب توابع در این ساخت مجاز است. همچنین اگر f یک تابع باشد که با این قوانین ساده ساخته شده است، تابع $g(x)$ که یک مقدار x را می‌گیرد و اولین عدد طبیعیِ y را تحویل می‌دهد که $f(y) = ۰$ جزو توابع مجاز ما در این ساخت است. توابعی که با این روش به دست می‌آیند، توابع «بازگشتی» نامیده می‌شوند. پس در این تعریف، هر الگوریتم یک «تابع بازگشتی» است.

قضیهٔ مهمی در علوم رایانهٔ نظری، به نامِ «تزِ چرچ» این دو تعریف را به هم مرتبط می‌کند. بنا به این قضیه، هر کاری که ماشین تورینگ انجام می‌دهد، دقیقاً قابل پیاده سازی توسط یک تابع بازگشتی است و نیز عملِ هر تابع بازگشتی را می‌توان توسط یک ماشین تورینگ اجرا کرد.[۱۰]

۷.۹ مسئلهٔ توقف و اثباتِ آن

بنا به آنچه در زیربخش قبلی گفته شد، در ادامهٔ بحث، هر الگوریتم رایانه‌ای را یک تابع از اعداد طبیعی به اعداد طبیعی در نظر گرفته‌ایم. پس ورودی هر الگوریتم رایانه‌ای، یک عدد طبیعی است. همچنین اگر f یک الگوریتم رایانه‌ای باشد و ورودیِ n را بدان بدهیم، دو حالت وجود دارد: یا این الگوریتم متوقف می‌شود و جواب مورد نظر ما را می‌دهد، یا این که این الگوریتم روی دور می‌افتد و هیچ‌گاه متوقف نمی‌شود.[۱۱] گفتیم که مسئلهٔ توقف، به این سوال می‌پردازد که آیا الگوریتمی وجود دارد که به نحوی دربارهٔ همهٔ الگوریتمها تصمیم بگیرد؟ یعنی تعیین کند که هر کدام الگوریتم‌ها با کدام ورودی‌ها می‌ایستند و با کدام ورودی‌ها نمی‌ایستند (یعنی روی دور می‌افتد).

دقت کنید که تعداد همهٔ الگوریتمها شماراست. این گفته از نحوهٔ ساخت الگوریتمها با استفاده از توابع بازگشتی ناشی می‌شود. فرض کنید $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ فهرستی از همهٔ الگوریتمهای رایانه‌ای باشد. همچنین فرض کنید که پاسخ مسئلهٔ توقف مثبت باشد؛ یعنی الگورتیمی وجود داشته باشد که تعیین کند کدام الگوریتم‌ها با کدام ورودی‌ها می‌ایستند و کدامها نمی‌ایستند.

می‌خواهیم یک الگوریتم تازه معرفی کنیم. الگوریتمِ f را در نظر بگیرید که ورودی‌های آن اعداد طبیعی هستند و به صورت زیر خروجی می‌دهد:

$$f(i) = \begin{cases} \text{STOP} & \text{اگر الگوریتم } f_i \text{ با دریافت ورودی } i \text{ روی دور بیفتد} \\ \text{LOOP} & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

دقت کنید که f با تک‌تکِ الگوریتمهای فهرست شده فرق دارد. زیرا اگر الگوریتمِ i ام با ورودی i بایستد، f با این ورودی نمی‌ایستد. از طرفی خودِ f یک الگوریتم است؛ پس باید در فهرست بالا ظاهر شود؛ و این غیرممکن است.

بحث را به صورت زیر نیز می‌شد بیان کرد. اگر الگوریتم f اگر در لیست بالا ظاهر شده باشد، مثلاً به عنوان الگوریتم شمارهٔ j ظاهر می‌شود. پس این الگوریتم در ورودی j می‌ایستد اگر و تنهااگر روی دور بیفتد! بنابراین پاسخ مثبت داشتنِ مسئلهٔ توقف منجر به تناقض می‌شود.

---

[۱۰] برای آشنایی بهتر با این مفاهیم می‌توانید فیلم‌های کلاس منطق مرا مشاهده کنید:
https://www.aparat.com/v/Rucfm?playlist=295290
https://www.aparat.com/v/ebmrK?playlist=295290
https://www.aparat.com/v/05gRF?playlist=295290

[۱۱] پس بهتر می‌گفتیم هر الگوریتم، یک تابع جزئی است؛ یعنی برخی نقاط طبیعی جزو دامنهٔ آن نیستند زیرا تابع برای محاسبهٔ آن‌ها روی دور می‌افتد.

۱.۷.۹ ناتمامیت اول

در بخشِ ۴ با مجموعهٔ اعداد طبیعی و اعمال روی آن آشنا شدیم. مجموعهٔ اعداد طبیعی به همراه اعمالِ جمع و ضربِ روی آن، یک ساختار مرتبهٔ اول است که در الفبایی دارای علائمِ $+$ و $\cdot$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این مطالعه، نخست یک تعداد «اصول موضوعه» در این الفبا، برای ساختارِ یادشده نوشته می‌شود. این اصول موضوعه، اصول «پئانو» نام دارند. در میان اصول موضوعهٔ یادشده، که قصد فهرست کردن آن‌ها را در اینجا نداریم جملاتی نوشته شده‌اند که ویژگی‌های توابع جمع و ضرب را بیان می‌کنند؛ مثلاً جملهٔ زیر یکی از اصول موضوعهٔ پئانو است:

$$\forall x, y, z \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

علاوه بر جملاتی که ویژگی‌های طبیعی جمع و ضرب را بیان می‌کنند، اصول موضوعهٔ استقراء نیز در پئانو قرار داده می‌شود. هر اصل موضوعهٔ استقراء، جمله‌ای به صورت زیر است:

$$\big(p(\circ) \wedge \forall x (p(x) \rightarrow p(x+۱))\big) \rightarrow \forall x \quad p(x).$$

که در آن $p(x)$ یک جملهٔ مرتبهٔ اول است که در الفبای شامل علامت جمع و ضرب نوشته شده است. به بیان دیگر، لازم است فهرستی از تمام جملاتِ $p(x)$ تهیه شود و به ازای هر کدام از آن‌ها، یک اصل موضوعه به صورت بالا نوشته شود که استقراء را برای حکمِ جملهٔ $p(x)$ بیان کند.

اصول موضوعهٔ پئانو در یک زبانِ مرتبهٔ اول نوشته شده‌اند و برخی ویژگی‌های ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ را بیان می‌کنند. اما همان طور که در بخشِ منطق مرتبهٔ اول، ۲، دیدیم، برای یک مجموعه از جملات، جهان‌های ذهنی مختلفی وجود دارند که این جملات را بتوان در آن‌ها نیز تعبیر کرد. بنابراین احتمالاً ساختارهای گوناگونی به صورت $(\mathbb{M}, +^{\mathbb{M}}, \cdot^{\mathbb{M}})$ وجود دارند که در تمامی آن‌ها اصول پئانو برقرار است.

حال، بنا به قضیهٔ تمامیت گودل، اگر حکمی از اصول موضوعه پئانو استنتاج شود، به طور همزمان در همهٔ این ساختارها درست است و هر چه که به طور همزمان در همهٔ این ساختارها درست باشد، برایش اثباتی با استفاده از اصول موضوعهٔ پئانو وجود دارد.

اما یک سوال جالب توجه این است: آیا اصول موضوعهٔ پئانو، به طور کامل همهٔ حقایق مربوط به ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ را اثبات می‌کند؟ به بیان دیگر، آیا عبارت زیر درست است:

> هر حکمی مانند φ در مورد ساختارِ آشنای اعداد طبیعی، یعنی $(\mathbb{N}, +, \cdot)$، درست است اگروتنها اگر از اصول موضوعهٔ پئانو نتیجه شود.

نحوهٔ دیگر بیان جملهٔ بالا به صورت زیر است:

> هر حکمی مانند φ در مورد ساختار اعداد طبیعی، یعنی $(\mathbb{N}, +, \cdot)$، درست است اگر و تنهااگر همزمان در مورد همهٔ ساختارهای $(\mathbb{M}, +^{\mathbb{M}}, \cdot^{\mathbb{M}})$ که در آن‌ها اصول پئانو برقرار است، درست باشد.

هنوز هم مایلیم بیان عبارت بالا را کمی تغییر دهیم. دقت کنید که اصول موضوعه پئانو را می‌توانیم به نحوی «کُد» کنیم. معنای کد کردن این است که به نحوی به هر جمله یک عدد طبیعی نسبت دهیم که وقتی آن عدد طبیعی به ما داده شود، بتوانیم جملهٔ مربوطه را بنویسیم.

حال فرض کنید که h یک الگوریتم باشد که کدهای اصول موضوعه پئانو را به همراه همهٔ نتایج آن‌ها چاپ می‌کند. پیدا کردن چنین الگوریتمی کار دشواری نیست. زیرا عمل استنتاج در منطق، یک کار ماشینی است پس می‌توان از الگوریتم ماشینی انتظار داشت که استنتاج را انجام دهد و نتایج آن را چاپ کند. بنا بر این عبارت مورد نظر ما را به صورت در می‌آید:

هر حکمی مانند φ در مورد اعداد طبیعی درست است اگر و تنهااگر در خروجی‌های الگوریتم h چاپ شود. $(*)$

عبارت بالا نادرست است و البته این نادرستی در حیطهٔ «قضیهٔ ناتمامیت اول گودل» قرار می‌گیرد. در زیر نحوهٔ اثبات این پاسخ منفی را توضیح داده‌ایم.
گفتیم که هر الگوریتم در واقع یک تابع بازگشتی است، بنابراین منطقی است که بتوان محتوای اطلاعات چنین تابعی را با استفاده از اعمال جمع و ضرب بیان کرد. در واقع چیزی خیلی بیش از این درست است:

قضیه ۲۳.۹. یک جملهٔ $\varphi(n,m)$ وجود دارد که تنها با استفاده از علائم جمع و ضرب نوشته شده است و بیان‌گر عبارت زیر است:

الگوریتمِ شمارهٔ n هنگامی که عددِ m را به عنوان ورودی دریافت می‌کند، می‌ایستد.

اگر عبارتِ $(*)$ درست باشد، الگوریتمِ h می‌تواند تعیین کند که کدام $\varphi(n,m)$ ها برقرارند و کدام برقرار نیستند؛ در واقع هر جملهٔ $\varphi(n,m)$ اگر در مورد اعداد طبیعی درست باشد در خروجی الگوریتم h چاپ می‌شود و اگر مورد اعداد طبیعی غلط باشد، نقیضش در خروجی h چاپ می‌شود. اما این یک تناقض است؛ زیرا در این صورت الگوریتم h یک پاسخ مثبت به مسئلهٔ توقف است. [۱۲]

۸.۹ تمرین‌های تکمیلی

تمرین ۱۸.۹. نشان دهید که اگر A متناهی باشد، آنگاه هر زیرمجموعه از A نیز متناهی است.

تمرین ۱۹.۹. فرض کنید که $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد به طوری که $\bigcup A_i$ شمارا نیست. نشان دهید که حداقل یکی از A_i ها ناشماراست.

تمرین ۲۰.۹. نشان دهید که مجموعهٔ اعداد طبیعی را می‌توان به صورت اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارای دو به دو مجزا نوشت؛ به بیان دیگر $\mathbb{N}$ شامل نامتناهی کُپی از خود است.

تمرین ۲۱.۹. آیا می‌توان مجموعهٔ اعداد حقیقی را به صورت اجتماع ناشمارا بازهٔ باز که هیچ‌کدام با هم اشتراک ندارند نوشت؟

تمرین ۲۲.۹. نشان دهید که تعداد اعداد اصم موجود در بازهٔ ناتهی (a,b) به اندازهٔ کل اعداد حقیقی است.

تمرین ۲۳.۹. نشان دهید که تعداد نقاط روی یک دایره برابر با تعداد اعداد حقیقی است.

تمرین ۲۴.۹. نشان دهید که تعداد نقاط داخل و روی یک مربع برابر با تعداد نقاط روی یک ضلع آن است.

[۱۲] اثبات قضیهٔ ناتمامیت اول را می‌توانید در [۶] و [۱۵] مشاهده کنید. در فیلم زیر نیز، به زبان انگلیسی خلاصه‌ای از مطالب این پیوست قابل مشاهده است:
https://www.aparat.com/v/s9iUm
همچنین در فیلم زیر از کلاس منطق نیز اثبات این قضیه را می‌توانید مشاهده کنید:
https://www.aparat.com/v/lSBqa?playlist=295290

خلاصهٔ فصل نهم. یک مجموعه، نامتناهی است هرگاه با هیچ مجموعهٔ متناهی‌ای هم‌توان نباشد. با استفاده از اصل انتخاب، می‌توان ثابت کرد که یک مجموعه نامتناهی است اگر و تنهااگر با بخشی از خودش هم‌توان باشد.

مجموعه‌هایی که با مجموعهٔ اعداد طبیعی هم‌توان هستند، شمارا نامیده می‌شوند. مجموعهٔ متشکل از تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اعداد طبیعی، شمارا نیست. به طور کلی مجموعه‌ها از لحاظ اندازه به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

$$\text{مجموعه‌ها}\begin{cases}\text{متناهی}\\[2ex] \text{نامتناهی}\begin{cases}\text{شمارا} & \cong \mathbb{N}\\ \text{ناشمارا} & \ncong \mathbb{N}\end{cases}\end{cases}$$

اندازهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی برابر با تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی است.

فصل ۱۰

ترتیب کاردینال‌ها

یکی را از وزرا پسری کودن بود. پیش یکی از دانشمندان فرستاد که مرین را تربیتی می‌کن مگر که عاقل شود. روزگاری تعلیم کردش و مؤثر نبود. پیش پدرش کس فرستاد که این عاقل نمی‌شود و مرا دیوانه کرد.

چون بود اصل گوهری قابل
تربیت را در او اثر باشد
هیچ صیقل نکو نداند کرد
آهنی را که بدگهر باشد
خرِ عیسی گرش به مکه برند
چون بیاید هنوز خر باشد!
گلستان سعدی (با کمی حذف).

۱.۱۰ مرور تعاریف

در فصل قبل، مفهوم هم‌توانی مجموعه‌ها را تعریف کردیم. گفتیم که دو مجموعهٔ X و Y را هم‌توان می‌خوانیم، و این را به صورت $X \cong Y$ نشان دادیم، هرگاه یک تابع یک‌به‌یک و پوشا از X به Y موجود باشد. هم‌توانی، هم‌اندازه بودن، یا هم‌کاردینال بودن هر سه اشاره به یک واقعیت دارند و در صورتی که دو مجموعهٔ X, Y هم‌توان باشند از هر سه نماد زیر می‌توانیم استفاده کنیم: $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$، یا $|X| = |Y|$ یا $X \cong Y$. گفتیم که یک مجموعهٔ دلخواهِ X را **متناهی** می‌نامیم هرگاه هم‌توان با یک مجموعهٔ $n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$ باشد؛ یعنی هرگاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که $X \cong \{۰, ۱, \ldots, n\}$. همچنین یک مجموعهٔ دلخواهِ X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه با هیچ $n \in \mathbb{N}$ هم‌توان نباشد؛ به بیان دیگر هرگاه متناهی نباشد.

رابطهٔ $\cong$ روی مجموعه‌ها، یک رابطهٔ هم‌ارزی است؛ [۱] پس کلاس همهٔ مجموعه‌ها را افراز می‌کند. پس $X \cong Y$ در واقع بدین معنی است که X, Y در یک کلاس هم‌ارزی نسبت به رابطهٔ هم‌توانی قرار دارند. به هر کلاس در این رابطهٔ هم‌ارزی، یک کاردینال، یا یک **عدد اصلی** گفته می‌شود. کاردینال‌ها را معمولاً با حروفی مانند α، κ، λ و غیره نشان می‌دهیم. گفتیم که کلاس همهٔ مجموعه‌های شمارا را با $\aleph_۰$ نشان می‌دهیم. پس مجموعهٔ X شماراست

[۱] این گفته شاید دانشجوی دقیق را گیج کند. روابط هم‌ارزی را روی مجموعه‌ها تعریف کردیم ولی کلاس همهٔ مجموعه‌ها مجموعه نیست که روی آن رابطهٔ هم‌ارزی تعریف کنیم. با این حال این مشکل به راحتی قابل حل است: اولا می‌توان روی کلاس‌ها رابطهٔ هم‌ارزی تعریف کرد. ثانیاً می‌توان روی بخشی از مجموعه‌های مورد نیازمان این رابطه را تعریف کنیم تا مجموعه بودن از میان برداشته نشود.

هرگاه

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_0.$$

همچنین گفتیم که می‌توانیم برای اشارهٔ به کلاس کاردینالی یک مجموعهٔ X از نمادِ $\mathbf{card}(X)$ استفاده کنیم.

روی اعداد اصلی (کاردینال‌ها)، تساوی، جمع، ضرب، توان و رابطهٔ ترتیب نیز تعریف می‌شود. در این بخش، تنها به رابطهٔ تساوی و ترتیب میان کاردینال‌ها پرداخته‌ایم، ولی در فصل بعدی سایر اعمال روی کاردینال‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

تعریف ۱.۱۰. فرض کنید که α, β, γ سه کاردینال باشند. پس مجموعه‌های X, Y, Z وجود دارند، به طوری که $\alpha = \mathbf{card}(X)$، $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $\gamma = \mathbf{card}(Z)$.

۱. می‌گوییم $\alpha = \beta$ هرگاه $X \cong Y$. به بیان دیگر، می‌گوییم $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$ هرگاه تابعی یک‌به‌یک و پوشا میان X و Y موجود باشد.

۲. می‌گوییم $\alpha \leqslant \beta$ یا $\mathbf{card}(X) \leqslant \mathbf{card}(Y)$ هرگاه تابعی یک‌به‌یک از X به Y موجود باشد.

تمرین ۱.۱۰. نشان دهید که اگر $\alpha = \beta$ و $\beta = \gamma$ آن‌گاه $\alpha = \gamma$.

تمرین ۲.۱۰. نشان دهید که اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ آنگاه $\alpha \leq \gamma$.

۲.۱۰ ترتیب کاردینال‌ها، قضایای کانتور و شِرودر برنشتاین

بنا به آنچه در قسمت قبل، دربارهٔ ترتیب کاردینال‌ها گفتیم، به سادگی می‌توان دید که برای هر کاردینالِ متناهیِ n داریم

$$n \lneqq \aleph_0.$$

تمرین نسبتاً سادهٔ زیر بیان می‌کند که در واقع کاردینال‌های کمتر از الف‌صفر، همان اعداد طبیعی هستند.

تمرین ۳.۱۰. فرض کنید که a یک کاردینال باشد به گونه‌ای که $a \lneqq \aleph_0$. نشان دهید که a یک کاردینال متناهی است.

قضیه ۲.۱۰. $\aleph_0$ کوچکترین کاردینال نامتناهی است. به بیان دیگر اگر a یک کاردینال نامتناهی باشد آنگاه $\aleph_0 \leq a$.

اثبات. فرض کنید a یک کاردینال نامتناهی باشد و $a = \mathbf{card}(X)$. بنا به قضیهٔ ۵.۹ یک مجموعهٔ $Y \subseteq X$ وجود دارد به طوری که $Y = \{y_0, y_1, \dots\}$. بنابراین تابعی یک‌به‌یک از $\mathbb{N}$ به X وجود دارد که هر عدد طبیعیِ n را به y_n می‌برد؛ و این گفته دقیقاً هم‌معنی با $\aleph_0 \leq a$ است. □

پیش‌تر تأکید کردیم در اثبات قضیهٔ بالا از اصل انتخاب استفاده شده است.

کاردینالِ $\aleph_0$ کاردینال عجیبی است؛ زیرا از همهٔ کاردینال‌های متناهی اکیداً بزرگتر است، و هر کاردینال که از آن اکیداً کوچکتر باشد، متناهی است. پس مثلاً هیچ کاردینالی وجود ندارد که یک واحد از الف‌صفر کمتر باشد و الف‌صفر بلافاصله پس از آن بیاید. از طرفی الف‌صفر از همه‌ی کاردینال‌های نامتناهی کمتر است. در واقع الف‌صفر کوچکترین کاردینال نامتناهی است. پس

$$0 \lneqq 1 \lneqq 2 \lneqq \cdots \lneqq \aleph_0.$$

در بخش قبلی ثابت کردیم که اگر به الف‌صفر یک عنصر اضافه کنیم، اندازهٔ آن بیشتر نمی‌شود، هم چنین دیدیم که اجتماع دو مجموعهٔ شمارا شماراست و حاصلضرب دو مجموعهٔ شمارا، شماراست پس:

$$0 \lneq 1 \lneq 2 \lneq \dots \lneq$$

$$\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2 = \dots = \aleph_0 + n = \dots$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \dots \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = \dots \underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0}_{n\ \text{مرتبه}} = \dots$$

$$\dots = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0 + 1 = \aleph_0 \times \aleph_0 + 2 = \dots$$

تلاشمان برای پیدا کردن کاردینال‌های بزرگتر بی‌نتیجه بود تا این که به مجموعهٔ $2^{\mathbb{N}}$ رسیدیم که گفتیم اندازهٔ آن را با $2^{\aleph_0}$ نشان می‌دهیم. واضح است که

تمرین ۴.۱۰. نشان دهید که $\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0}$.

همچنین با برهان قطری کانتور نشان دادیم که $2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$ پس $\aleph_0 \lneq 2^{\aleph_0}$. دوباره اتفاق عجیبی در حال رخ دادن است. هر چه تلاش می‌کنیم به الف‌صفر عنصر اضافه کنیم اندازهٔ آن تغییر نمی‌کند، ولی از طرفی می‌دانیم که $2^{\aleph_0}$ از $\aleph_0$ بیشتر است! یک سوال طبیعی این است که آیا کاردینالی وجود دارد که از $\aleph_0$ اکیداً بزرگتر باشد و از $2^{\aleph_0}$ اکیداً کمتر باشد؟ یکی از فرضیه‌های معروف در نظریهٔ مجموعه‌ها، فرضیهٔ پیوستار است که می‌گوید بین الف‌صفر و $2^{\aleph_0}$ هیچ اندازه‌ای وجود ندارد:

(فرضیهٔ پیوستار) عددی بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ وجود ندارد.

دقت کنید که فرضیهٔ پیوستار، یک جملهٔ مرتبهٔ اول است که می‌توان آن را در زبانِ نظریهٔ مجموعه‌ها نوشت؛ البته تحقیق این گفته نیاز به تأمل دارد. در منطق ریاضی اثبات می‌شود که فرضیهٔ پیوستار از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها مستقل است؛ یعنی هیچ اثباتی برای آن با استفاده از اصول موضوعهٔ **ZFC** وجود ندارد و همچنین هیچ اثباتی برای نقیض آن با استفاده از اصول موضوعهٔ **ZFC** وجود ندارد. به بیان دیگر، اگر جهانی از مجموعه‌ها وجود داشته باشد، جهان‌هایی از مجموعه‌ها وجود دارند که در آن‌ها فرضیهٔ پیوستار درست است و جهان‌هایی از مجموعه‌ها وجود دارند که در آن‌ها فرضیهٔ پیوستار غلط است. پیدا کردن جهانی که در آن فرضیهٔ پیوستار درست یا غلط باشد با روشی در نظریهٔ مجموعه‌ها به نام «فُرسینگ» صورت می‌پذیرد.[2] معمولاً در ریاضیات پیشرفته، برخی قضایا را با شرط درست بودن یا غلط بودنِ فرضیهٔ پیوستار در جهان نظریهٔ مجموعه‌هامان ثابت می‌کنیم. در مورد استقلال قضایا از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها در فصلِ ۴.۱۳ بیشتر سخن گفته‌ایم.

شاید برای علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی، جالب باشد که که رویکرد منطقی کانتور به نامتناهی‌ها و مقایسهٔ آن‌ها با هم، در میان هم‌عصران ریاضی‌دانش که هنوز آماده پذیرش جایگاه واقعی منطق در ریاضی نبودند، مطرود و عجیب بود و به اندازهٔ کافی جدی گرفته نشد. وی سال‌های پایانی عمر خود را، غرق در مشکلات روحی صرف پرداختن به فرضیهٔ پیوستار کرد [۲].

اکنون و پس از این مقدمهٔ نسبتاً طولانی، به موضوع مورد نظرمان در این بخش می‌رسیم: می‌خواهیم بدانیم که ترتیب کاردینال‌ها، چه شباهتهایی با ترتیب میان اعداد طبیعی دارد.

یک انتظار طبیعی ما از ترتیب، می‌تواند ویژگی زیر باشد؛ که ترتیب‌های آشنا مثل ترتیب اعداد طبیعی مشخصاً آن را دارا هستند:

[2] کتابِ [۱۰] منبع خوبی برای فرسینگ است.

برای هر n و m اگر $(m \leqslant n) \wedge (n \leqslant m)$ آنگاه $m = n$.

پس می‌پرسیم:

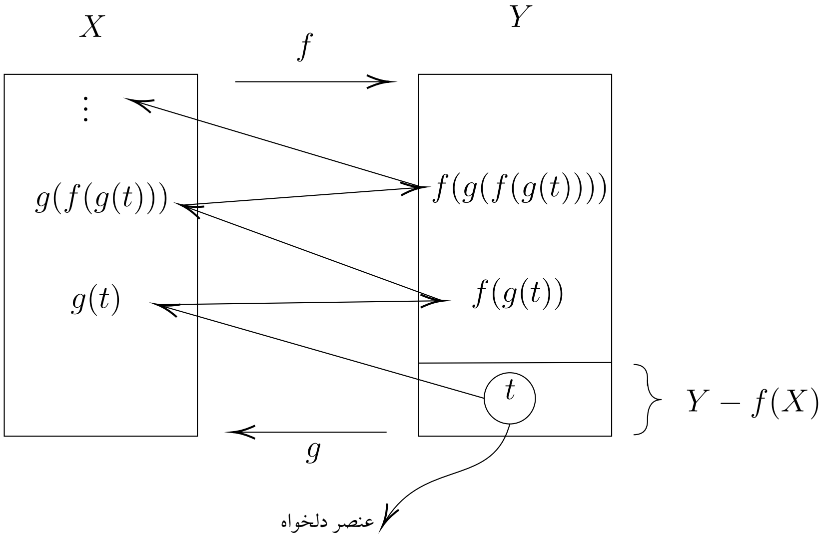
آیا مشابه عبارت بالا برای ترتیب کاردینال‌ها هم برقرار است؟ یعنی اگر $\mathbf{card}(X) \leqslant \mathbf{card}(Y)$ و $\mathbf{card}(Y) \leqslant \mathbf{card}(X)$ آیا لزوماً $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$؟

آنچه در سؤال بالا پرسیده شده است، پاسخی مثبت دارد، و قضیهٔ زیر بیان دیگری از همین پاسخ است:

قضیه ۳.۱۰ (شرودِر ـ برنشتاین). فرض کنید یک تابع یک‌به‌یک از X به Y موجود باشد و یک تابع یک‌به‌یک از Y به X موجود باشد. آنگاه یک تابع یک‌به‌یک و پوشا از X به Y وجود دارد.

برای قضیهٔ کانتور برنشتاین اثبات‌های مختلفی وجود دارد که می‌توانید آن‌ها را صفحهٔ ویکی‌پدیای فارسی بیابید. در اینجا سعی کرده‌ام اثباتی را بیاورم که قابل فهمتر باشد.[۳] این قضیه، یکی از مهمترین قضایائی است که تا این‌جا آن را ثابت کرده‌ایم.

اثبات. اگر X و Y متناهی و به ترتیب دارای اندازه‌های m و n باشند، باشند، آنگاه وجود تابع یک‌به‌یک از X به Y معادلِ $m \leq n$ و وجود تابع یک‌به‌یک از Y به X معادل $m \leq n$ است. از این دو نتیجه می‌شود که $m = n$. این که یکی متناهی باشد و دیگری نامتناهی ممکن نیست، زیرا از یک مجموعهٔ نامتناهی نمی‌توان تابعی یک‌به‌یک به یک مجموعهٔ متناهی تعریف کرد.
پس فرض کنیم این‌دو نامتناهی باشند. فرض کنید f تابعی یک‌به‌یک از X به Y باشد و g تابعی یک‌به‌یک از Y به X باشد.

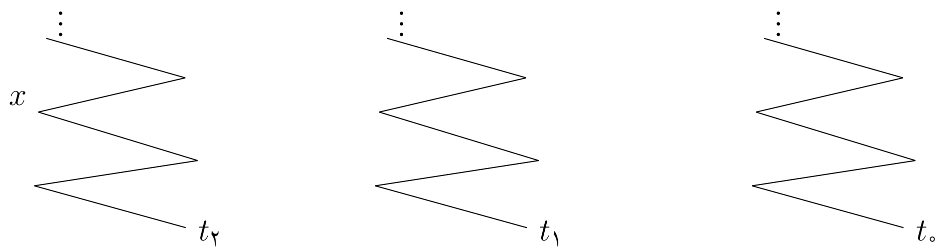


فرض کنید t یک عنصر دلخواه در $Y - f(X)$ باشد. مطابق شکل بالا، دنباله‌ی زیر را بسازید:

$$t \to g(t) \to f\big(g(t)\big) \to g\Big(f\big(g(t)\big)\Big) \to f\left(g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)\right) \to \dots$$

این کار را برای همهٔ tهای موجود در $Y - f(X)$ انجام دهید.

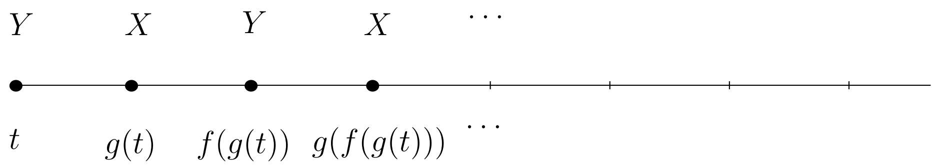
[۳] البته آن صفحه را نیز همین نگارنده نوشته است!



ادعای اول. هر کدام از دنباله‌های نوشته شده در بالا نامتناهی است؛ یعنی از سمت چپ و راست هیچ‌گاه در طولی متناهی متوقف نمی‌شوند.
ادعای دوم. دنباله‌های بالا هیچ اشتراکی با هم ندارند. یعنی جملات سمت چپ یکی با دیگری جملات سمت راست یکی با دیگری اشتراکی ندارد.
فرض کنید ادعاهای اول و دوم هر دو ثابت شده باشند. تابع $h : X \to Y$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{اگر } x \text{ در سمت چپ یکی از دنباله‌های یادشده باشد.} \\ f(x) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

ادعای سوم. تابع h یک‌به‌یک و پوشاست.
اثبات ادعای اول.



برای سادگی نشان می‌دهیم که جملهٔ اول و سوم هیچ‌گاه با هم برابر نیستند. فرض کنید

$$f\big(g(t)\big) = f\Bigg(g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)\Bigg).$$

در این صورت از آنجا که f یک‌به‌یک است داریم:

$$g(t) = g\Big(f\big(g(t)\big)\Big).$$

حال از آنجا که g یک‌به‌یک است داریم

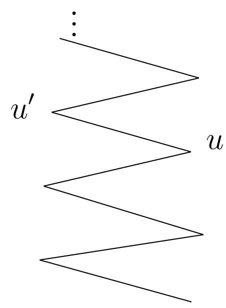
$$\underbrace{t}_{\in Y - f(X)} = \underbrace{f\big(g(t)\big)}_{\in f(X)}.$$

عبارت بالا، تناقض آمیز است. با همین ایده می‌توانید نشان دهید که هیچ دو جملهٔ واقع در یک طرف یکسان از دنبالهٔ بالا با هم برابر نیستند. ادعای دوم نیز به طور کاملاً مشابه ثابت می‌شود.
اثبات ادعای سوم. می‌خواهیم ثابت کنیم تابع h یک‌به‌یک و پوشاست.

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{اگر } x \text{ در سمت چپ یکی از دنباله‌های یادشده باشد.} \\ f(x) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اثبات پوشایی. عنصر دلخواه $u \in Y$ را در نظر بگیرید. اگر یک زیگزاک، مشابه شکل زیر، از u بگذرد آنگاه داریم:

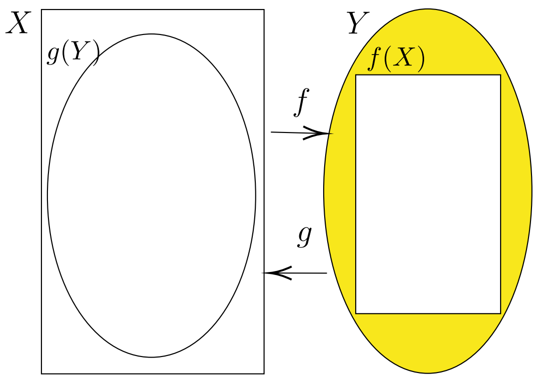
$$u = h(u')$$



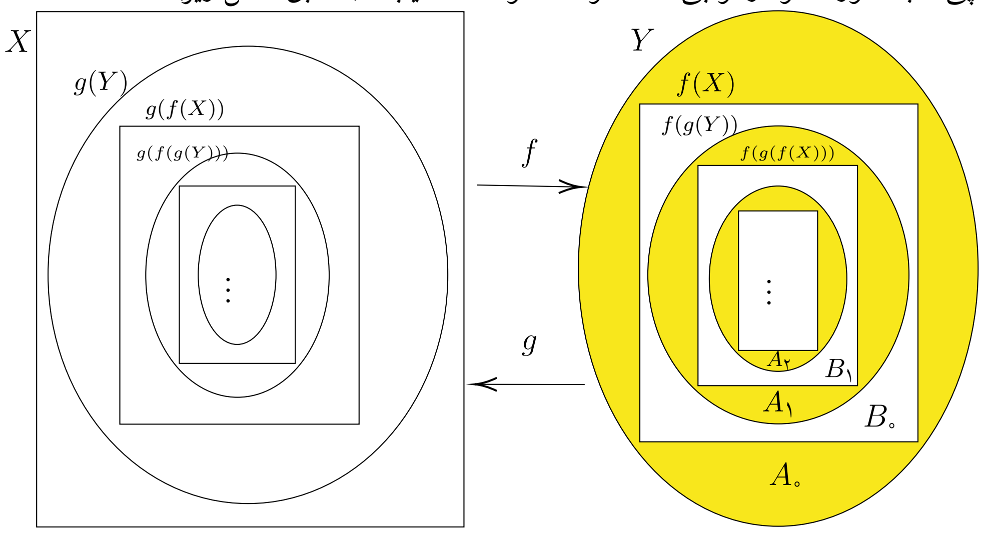
اگر هیچ زیگزاگی از u نگذرد معلوم می‌شود که $u \notin Y - f(X)$؛ زیرا در غیر این صورت u شروع یک زیگزاگ خواهد بود. پس $u \in f(X)$ یعنی $u' \in X$ به گونه‌ای موجود است که $f(u') = u$. اثبات یک‌به‌یک بودن تابع h را به عهدهٔ خواننده رها می‌کنیم. □

اثبات به بیانی دیگر. ایدهٔ اثبات بالا را می‌توان به صورت زیر نیز پیاده کرد (دقت کنید که بیان زیر، برای توفیق در انتقال ایده، به دقیق‌ترین شکل ممکن نوشته نشده است).

مجموعه‌های X و Y را به ترتیب با رنگهای سفید و زرد نشان داده‌ایم. اگر $Y = f(X)$ آنگاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند؛ ولی اگر $Y \neq f(X)$ آنگاه در داخل Y یک کپی از X داریم. به طور مشابه اگر $g(Y) = X$ آنگاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند ولی اگر $X \neq g(Y)$ آنگاه در داخل X یک کپی از Y داریم. به شکل زیر نگاه کنید:



فرض کنید این کپی‌ها به صورت تو در تو بی‌آنکه متوقف شوند ادامه یابند (مطابق شکل زیر).



هدفمان تعریف یک تابع یک‌به‌یک و پوشا به نام h از Y به $f(X)$ است. برای این منظور مجموعه‌های A_i و B_i را به صورت شکل بالا، تعریف می‌کنیم.
قرار دهید:

$$h(x) = \begin{cases} h(x) = f(g(x)) & \text{اگر } x \text{ در یکی از } A_i \text{ ها باشد.} \\ x & \text{اگر } x \text{ در یکی از } B_i \text{ ها باشد.} \end{cases}$$

□

قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین، با این اثبات جذابش، به ما می‌گوید که برای دو کاردینالِ α, β اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ آنگاه $\alpha = \beta$؛ و این یک ویژگی مطلوب ترتیب است که در اعداد طبیعی برقرار است.
اما یکی دیگر از ویژگی‌های ترتیب اعداد، این است که اگر برای دو عدد طبیعیِ m, n همواره یا $m < n$ یا $m > n$ یا $m = n$. دقت کنید که قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین، به ما نمی‌گوید که کاردینال‌ها چنین ویژگی‌ای دارند. این قضیه به ما نگفته است که اگر α و β دو کاردینال باشند، لزوماً با هم قابل مقایسه هستند؛ فقط گفته است که اگر هر دو از هم دیگر کمتر یا مساوی باشند، با هم برابرند.
اما در هر صورت، در بخش‌های بعدی، ثابت خواهیم کرد که:

قضیه ۴.۱۰. برای هر دو کاردینال α, β داریم: یا $\alpha < \beta$ یا $\beta < \alpha$ و یا $\alpha = \beta$.

اثبات. به قضیهٔ ۲۲.۱۲ مراجعه کنید. □

ترجمهٔ قضیهٔ بالا به زبان تابع‌ها، عمق آن را بیشتر روشن می‌کند: اگر X و Y دو مجموعه باشند، یا یک تابع یک به یک از X به Y وجود دارد، یا یک تابع یک به یک از Y به X وجود دارد!
پس از این اوج دلنشین، می‌ارزد در بقیهٔ این بخش، استراحتی به خود بدهیم و با استفاده از ترتیب کاردینال‌ها برخی مطالب فصل قبل را بازاثبات کنیم.

مثال ۵.۱۰. تعداد زیر مجموعه‌های متناهیِ $\mathbb{N}$ شماراست.

پاسخ. تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی $\mathbb{N}$ برابر $\aleph_0$ است. ادعا می‌کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbb{N}$ نیز برابر است با $\aleph_0$.
برای اثبات این ادعا توجه می‌کنیم که تعداد زوج مرتب‌های (a, b) که در آن $a, b \in \mathbb{N}$ بزرگتریامساوی تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbb{N}$ است. اما قبلاً ثابت کرده‌ایم که $\mathbb{N}^2$ هم‌اندازهٔ $\mathbb{N}$ است. پس

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی } \mathbb{N} \leqslant \aleph_0.$$

حال ادعا می‌کنیم که به علاوه:

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی } \mathbb{N} \geqslant \aleph_0$$

برای اثبات این گفته به یک تابع یک‌به‌یک از $\mathbb{N}$ به مجموعهٔ زیر مجموعه‌های دو عضوی $\mathbb{N}$ نیازمندیم؛ تابعی که کار زیر را بکند:

$$\mathbb{N} \to \{\text{تمام زیر مجموعه‌های دو عضوی}\}$$

$$n \mapsto \text{یک زیرمجموعهٔ دوعضوی}$$

تعریف کنید: $f(n) = \{n, n+۱\}$. واضح است که تابع بالا یک‌به‌یک است.

مشابهاً ادعا می‌کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های n عضویِ $\mathbb{N}$ برابر $\aleph_۰$ است. از یک طرف داریم:

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های } n \text{ عضوی } \mathbb{N} \leqslant |\mathbb{N}^n| = |\{(x_۱, \dots, x_n) | x_۱, \dots, x_n \in \mathbb{N}\}|$$

پس کافی است از طرف دیگر نشان دهیم که

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های } n \text{عضوی } \mathbb{N} \leqslant \aleph_۰$$

تابع یک‌به‌یکِ f از $\mathbb{N}$ به مجموعهٔ زیر مجموعه‌های n عضوی $\mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \{x, x+۱, \dots, x+n-۱\}$$

بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های n عضوی $\mathbb{N}$ برابر با $\aleph_۰$ است.

پس مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های متناهی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست؛ و از این رو شماراست:

$$\underbrace{\{\text{تک عضوی}\} \cup \{\text{دو عضوی}\} \cup \dots}_{\text{شمارا}}$$

□

سوال. تعداد **زیرمجموعه‌های نامتناهی** $\mathbb{N}$ چندتاست؟

پاسخ سوال بالا را در بخش بعدی خواهیم داد. در ادامه به سوال زیر خواهیم پرداخت:

سوال. غیر از $\aleph_۰$ و $۲^{\aleph_۰}$ چه اندازه‌های دیگری وجود دارند؟

کانتور قضیهٔ زیبای دیگری نیز دارد: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعهٔ دلخواه، همواره از تعداد اعضای آن بیشتر است. به بیان دیگر اگر κ یک کاردینال دلخواه باشد، آنگاه $\kappa < ۲^{\kappa}$. (این گفته را برای $\kappa = \aleph_۰$ قبلاً ثابت کرده‌ایم.) **بدینسان همواره یک نامتناهیِ بزرگتر از یک نامتناهی داده شده وجود دارد:**

$$\aleph_۰ < ۲^{\aleph_۰} < ۲^{۲^{\aleph_۰}} < ۲^{۲^{۲^{\aleph_۰}}} < \dots$$

به بیان دیگر، در دنیای کانتور، نامتناهی‌های بزرگتر و بزرگتر همواره پیدا می‌شوند و هیچ نامتناهی‌ای وجود ندارد که از همهٔ نامتناهی‌ها بزرگتر باشد.

پیش از آن که به اثبات این قضیهٔ کانتور بپردازیم، نکتهٔ کوتاه دیگری دربارهٔ فرضیهٔ پیوستار داریم: می‌دانیم که $۲^{\aleph_۰} > \aleph_۰$. نیز می‌دانیم که $\aleph_۰$ اولین کاردینالِ نامتناهی است. دومین کاردینالِ نامتناهی را با $\aleph_۱$ نشان می‌دهیم. فرضیهٔ پیوستار در واقع می‌گوید که $\aleph_۱ = ۲^{\aleph_۰}$.

قضیه ۶.۱۰ (کانتور). همواره $\mathbf{card}(\mathbf{P}(X)) \gneqq \mathbf{card}(X)$.

اثبات. اولاً $\mathbf{card}(\mathbf{P}(X)) \geq \mathbf{card}(X)$ زیرا تابع زیر یک‌به‌یک است:

$$f : X \to \mathbf{P}(X)$$

$$x \to \{x\}.$$

در ادامهٔ ثابت می‌کنیم که هیچ تابعی بین X و $\mathbf{P}(X)$ وجود ندارد که همزمان یک‌به‌یک و پوشا باشد؛ در نتیجه $\mathbf{card}(\mathbf{P}(X)) \neq \mathbf{card}(X)$.

به طور کلی‌تر ادعا می‌کنیم که هیچ تابع $g : X \to \mathbf{P}(X)$ پوشا نیست. فرض کنید g یک تابع از X به $\mathbf{P}(X)$ باشد. ادعا می‌کنیم که g مجموعهٔ زیر در $\mathbf{P}(X)$ را نمی‌تواند بپوشاند:

$$A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$$

اگر عنصر $t_\circ \in X$ موجود باشد به طوری که $g(t_\circ) = A$ آنگاه اگر $t_\circ \in g(t_\circ)$ آنگاه $t_\circ \notin g(t_\circ)$ و اگر $t_\circ \notin g(t_\circ)$ آنگاه $t_\circ \in g(t_\circ)$. این تناقض نشان می‌دهد که تابع g نمی‌تواند پوشا باشد. $\square$

اثبات قضیهٔ فوق به نحوی تکرار اثباتِ قضیهٔ ۴.۹ است. در واقع اگر فرض کنیم که تناظر یک‌به‌یکی میان زیرمجموعه‌های X و اعضای X وجود دارد، درواقع شمارشی مانند زیر را فرض کرده‌ایم:

$$\begin{array}{ccc}
X & & \mathbf{P}(X) \\
x_i & \text{———————} & \{-,-,-,\ldots\} \\
\vdots & & \vdots \\
x_j & \text{———————} & \{-,-,-,\ldots\} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

سپس ادعا کرده‌ایم که مجموعهٔ $\{x : x \notin g(x)\}$ در هیچ جای این فهرست در سمت راست قرار نگرفته است.

اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ یک کادرینال باشد، تعریف می‌کنیم: $۲^\alpha = \mathbf{cardP}(X)$. پس در قضیهٔ بالا ثابت کردیم که $۲^\alpha \gneqq \alpha$.

۳.۱۰ تمرین‌های تکمیلی

برخی از تمرین‌های زیر در فصل‌های آینده پاسخ گفته شده اند. با این حال، تلاش برای حل آن‌ها در این فصل، برای درک مطالب درس بسیار مفید است.

تمرین ۵.۱۰. با استفاده از قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین نشان دهید که $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

تمرین ۶.۱۰. نشان دهید که

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

تمرین ۷.۱۰. نشان دهید که تعداد دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی شماراست.

تمرین ۸.۱۰. عدد $x \in \mathbb{R}$ را یک عدد جبری می‌گوئیم هرگاه یک چندجمله‌ای f با ضرایب در اعداد گویا موجود باشد، به طوری که $f(x) = ۰$. نشان دهید که تعداد اعداد جبری شماراست.

تمرین ۹.۱۰. فرض کنید که اندازهٔ مجموعه‌های A, B برابر با $2^{\aleph_0}$ باشد و این‌دو با هم اشتراکی نداشته باشند. نشان دهید که اندازهٔ $A \cup B$ برابر با $2^{\aleph_0}$ است.

خلاصهٔ فصل دهم. از هر مجموعه‌ای، مجموعه‌ای بزرگتر وجود دارد. بنا به قضیهٔ کانتور، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه از اندازهٔ خود آن مجموعه بزرگتر است. پس در جهان نظریهٔ مجموعه‌ها یک مجموعه که حداکثر اندازه را داشته باشد وجود ندارد. وقتی می‌گوییم اندازهٔ مجموعهٔ X کمتراز یا مساوی‌با اندازهٔ مجموعهٔ Y است، یعنی تابعی یک‌به‌یک از X به Y وجود دارد؛ در این صورت می‌نویسیم $\mathbf{card}(X) \leq \mathbf{card}(Y)$. بنا به قضیهٔ شرودر برنشتاین، اگر $\mathbf{card}(X) \leq \mathbf{card}(Y)$ و $\mathbf{card}(Y) \leq \mathbf{card}(X)$ آنگاه $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$.

فصل ۱۱

حساب کاردینال‌ها

اِنَّ هذِهِ الْقُلُوبَ تَمَلُّ کَما تَمَلُّ الأبْدانُ، فَابْتَغُوا لَها طَرائِفَ الْحِکَمِ.
نهج‌البلاغه

در طی فصل‌های گذشته، با اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا شدیم. یکی از این اصول، **اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی** بود. گفتیم که به محض پذیرفتن این اصل، متوجه می‌شویم که اگر نامتناهی وجود داشته باشد، نامتناهی‌ها نیز اندازه‌های متفاوتی خواهند داشت. سپس با اندازه‌های نامتناهی مختلف، تحتِ عنوان کاردینال‌ها آشنا شدیم.

به بیان دقیق‌تر روی کلاس همهٔ مجموعه‌ها رابطهٔ هم‌ارزیِ زیر را تعریف کردیم:

$$X \cong Y \iff \text{یک تابع یک‌به‌یک و پوشا از } X \text{ به } Y \text{ موجود باشد.}$$

و کلاس هم‌ارزی هر مجموعهٔ X را در رابطهٔ هم‌ارزی بالا با $\mathbf{card}(X)$ نشان دادیم و هر چنین کلاسی را یک **کاردینال** خواندیم. پس هرگاه بگوئیم $\mathbf{card}(X)$ برابر است با $\mathbf{card}(Y)$ یعنی $X \cong Y$. در میان این کلاس‌ها، کلاس مجموعهٔ تهی را با ۰، کلاس همهٔ مجموعه‌های تک عضوی را با ۱، و کلاس همهٔ مجموعه‌های n عضوی را با n نشان دادیم. کلاس همهٔ مجموعه‌های شمارا، مانند $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ را با $\aleph_0$ نمایش دادیم. نیز گفتیم که اگر فرضیهٔ پیوستار درست باشد، اولین کلاس بعدی، کلاس مجموعه‌های هم‌اندازهٔ اعداد حقیقی، یا کلاس مجموعه‌های هم‌اندازهٔ $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ است؛ که آن را با $2^{\aleph_0}$ نشان دادیم. دریافتیم که تعداد این کلاس‌های هم‌ارزی نامتناهی است؛ در واقع اگر A در یک کلاس واقع شده باشد آنگاه $\mathbf{P}(A)$ در کلاسی متفاوت واقع است. در این فصل، به حساب کاردینال‌ها، یعنی بررسی اعمال اصلی و ترتیب روی آن‌ها خواهیم پرداخت. خواهیم دید که چگونه نماینده‌های دو کلاس در بالا می‌توانند با هم ضرب یا جمع شوند و نمایندهٔ یک کلاس دیگر را بدهند. این تعاریف آن قدر طبیعی هستند که قبل از آن که به صورت دقیق بیانشان کرده باشیم، در فصل قبل که موضوع ترتیب کاردینال‌ها را بررسی می‌کردیم، توانستیم چندین بار با احتیاط از آن‌ها استفاده کنیم. در این فصل فرصت داریم مطلب را دقیق‌تر توضیح دهیم. خواننده می‌تواند برای رسیدن به موضوعات جذاب دیگری مانند اثباتِ لم زُرن، به راحتی از خواندنِ این فصل خودداری کند.

۱.۱۱ یادآوری ترتیبِ کاردینال‌ها

فرض کنید α و β دو کاردینال باشند به طوری که $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha \leqslant \beta \iff \text{یک تابع یک‌به‌یکِ } f : X \to Y \text{ وجود داشته باشد.}$$

همان طور که در توجه ۱۲.۸ تأکید کردیم، یک نکتهٔ حائز اهمیت در مورد تعاریف این چنین، «خوش‌تعریف‌بودن» آن‌هاست. در همان توجه دیدیم که خوش‌تعریف بودنِ مفاهیمی مانند مفهوم فوق، به معنی «عدم وابستگی آن به انتخاب نماینده کلاس» است. در تعریف بالا گفته‌ایم: زمانی $\beta \leq \alpha$ که یک تابعِ یک‌به‌یک از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y موجود باشد. اما X فقط **یکی** از مجموعه‌هایی است که $\mathbf{card}(X) = \alpha$ و تعریف ما نباید به X بلکه باید به $\mathbf{card}(X)$ بستگی داشته باشد. یعنی اگر یک خواننده، به جای X از یک نمایندهٔ دیگر برای کلاسِ $\mathbf{card}(X)$، و به جای Y از یک نمایندهٔ دیگر برای کلاسِ $\mathbf{card}(Y)$ استفاده کند، نباید به ترتیب متفاوتی برای این دو کاردینال دست یابد. در قضیهٔ زیر این گفته را دقیق کرده‌ایم.

قضیه ۱.۱۱. ترتیب کاردینال‌ها خوش‌تعریف است؛ یعنی به انتخاب نمایندهٔ کلاس‌ها بستگی ندارد.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(X')$ و $\beta = \mathbf{card}(Y) = \mathbf{card}(Y')$. نشان می‌دهیم که اگر $\alpha = \mathbf{card}(X) \leq \mathbf{card}(Y)$ آنگاه $\alpha = \mathbf{card}(X') \leq \mathbf{card}(Y')$.

فرض کنید $f : X \to Y$ تابعی یک‌به‌یک است که تضمین کرده است که $\mathbf{card}(X) \leq \mathbf{card}(Y)$. از آنجا که X, X' هم‌توان هستند یک تابعِ یک‌به‌یک و پوشای $g_1 : X' \to X$ وجود دارد. نیز از آنجا که Y, Y' هم‌توان هستند یک تابع یک‌به‌یک و پوشای $g_2 : Y' \to Y$ وجود دارد. پس تابعِ $h = g_2^{-1} \circ f \circ g_1 : X' \to Y'$ یک تابع یک‌به‌یک است که تضمین می‌کند که $\mathbf{card}(X') \leq \mathbf{card}(Y')$:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' & Y \arrow[l, "g_2^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "h"] & g_1(x) \arrow[d, "f"] \\ g_2^{-1}(f(g_1(x))) & f(g_1(x)) \arrow[l, "g_2^{-1}"] \end{tikzcd}$$

خلاصهٔ ایدهٔ اثبات، قابل دنبال کردن در شکل بالا است. $\square$

رابطهٔ $\leqslant$ بین کاردینال‌ها، ویژگی‌های مطلوب یک ترتیب را داراست:

۱. برای هر کاردینالِ α داریم $\alpha \leqslant \alpha$. زیرا اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ آنگاه تابعِ $\mathrm{id} : X \to X$ یک تابع یک‌به‌یک است.

۲. برای هر سه کاردینالِ α, β, γ اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \gamma$ آنگاه $\alpha \leqslant \gamma$. برای اثباتِ این گفته، فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$، $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $\gamma = \mathbf{card}(Z)$. نیز فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ به ترتیب تضمین کنندهٔ $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ باشند. در این صورت $g \circ f : X \to Z$ تضمین کنندهٔ $\alpha \leq \gamma$ است:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

۳. برای دو کاردینالِ α, β اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \alpha$ آنگاه $\alpha = \beta$. اثبات این مورد البته به آسانی موارد قبل نیست. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. اگر تابعی یک‌به‌یک از X به Y و تابعی یک‌به‌یک از Y به X موجود باشد، آنگاه قضیهٔ شرودر ــ برنشتاین تضمین می‌کند که $X \cong Y$؛ یعنی $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$.

۴. برای هر دو کاردینالِ α و β داریم یا $\alpha \leqslant \beta$ یا $\beta \leqslant \alpha$. اثبات این گفته نیاز به مقدماتی دارد؛ اثباتی برای این خواسته را یک بار در قضیهٔ ۲۲.۱۲ و بار دیگر در قضیهٔ ۱۰.۱۳ خواهیم دید.

در فصل قبل دیدیم که اگر $\alpha \leqslant \aleph_0$ و $\alpha \neq \aleph_0$ آنگاه $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\alpha = n$. این نکته به نحو جذابی تأئید کنندهٔ اصل انتظام برای خوش‌بنیادی مجموعه‌هاست: با این که $\aleph_0$ یک کاردینال نامتناهی است، نمی‌شود یک دنبالهٔ نامتناهی نزولی با شروع از $\aleph_0$ نوشت؛ به محض این که کاردینالی از $\aleph_0$ کوچکتر باشد، متناهی است و پس از متناهی مرتبه به صفر می‌رسد. همچنین کاردینالی وجود ندارد که بلافاصله پیش از $\aleph_0$ قرار بگیرد:

$$0 \longrightarrow n \quad n+1 \quad n+2 \quad \cdots \longrightarrow \aleph_0$$

همچنین متوجه شدیم که مجموعهٔ $\{\alpha | \alpha \lneqq \aleph_0\}$ ماکزیموم ندارد. گفتیم که اگر $\alpha < \aleph_0$ آنگاه α را متناهی و اگر $\alpha \geqslant \aleph_0$ آنگاه α را نامتناهی می‌نامیم.

۲.۱۱ جمع کاردینال‌ها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند به گونه‌ای که $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $X \cap Y = \varnothing$. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \mathbf{card}(X \cup Y).$$

لازم است که تأکید کنیم که تعریف جمعِ بالا نیز، خوش‌تعریف است؛ یعنی به انتخاب نمایندهٔ کلاس‌ها بستگی ندارد. اثباتِ این گفته، با همان روش استاندارد صورت می‌گیرد و ترجیحاً آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم:

تمرین ۱.۱۱. نشان دهید که تعریفِ جمع کاردینال‌ها، خوش‌تعریف است.

تمرین ۲.۱۱. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. نشان دهید که

$$\alpha + \beta = \mathbf{card}(X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}).$$

دقت کنید که در این تمرین، شرطِ $X \cap Y = \varnothing$ را برداشته‌ایم.

در فصل‌های قبلی ثابت کرده‌ایم که $\aleph_0 + n = \aleph_0$ و $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. حال، نشان می‌دهیم که

قضیه ۲.۱۱. اگر κ یک کاردینالِ نامتناهی باشد، آنگاه $\kappa + \aleph_0 = \kappa$.

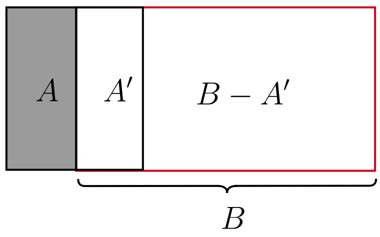
به لم زیر توجه کنید:

لم ۳.۱۱. فرض کنید A شمارا باشد و B یک مجموعهٔ نامتناهی دلخواه باشد و $A \cap B = \varnothing$. در این صورت $A \cup B \cong B$.

ترجمان لم بالا در حساب کاردینال‌ها، همان قضیهٔ ۲.۱۱ است. پس به جای اثبات قضیه، لم را اثبات خواهیم کرد. به طور خاص، از این قضیه نتیجه می‌شود که:

$$۲^{\aleph_۰} + \aleph_۰ = ۲^{\aleph_۰}.$$

اثبات. از آنجا که B نامتناهی است، بنا به قضیهٔ ۷.۹ مجموعهٔ B شامل یک زیرمجموعهٔ شمارای A' است. البته در اینجا باید دقت کنیم که اصل انتخاب نیز در اثبات قضیهٔ یادشده استفاده شده است:



از آنجا که A, A' هر دو شمارا هستند داریم: $A \cup A' \cong A'$. پس

$$A \cup B = (A \cup A') \cup (B - A') \cong A' \cup (B - A') \cong B.$$

□

مثال ۴.۱۱. تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهیِ $\mathbb{N}$ را بیابید.

پاسخ. داریم

$$\underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی } \mathbb{N}}_{?} + \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های متناهی } \mathbb{N}}_{\aleph_۰} = \underbrace{\text{تعداد زیر مجموعه‌های } \mathbb{N}}_{۲^{\aleph_۰}}$$

بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ برابر **نیست** با $\aleph_۰$. زیرا قبلاً ثابت کرده‌ایم که اجتماع دو مجموعهٔ شمارا، شماراست، و مجموعهٔ سمت چپ در بالا شمارا نیست. پس تعداد زیر مجموعه‌های **نامتناهی** $\mathbb{N}$ برابر با $۲^{\aleph_۰}$ است؛ زیرا اگر این حاصل، کاردینالی غیر از $۲^{\aleph_۰}$ مانند κ باشد، آنگاه حاصل جمع بالا نیز κ می‌شود. □

قضیهٔ ۲.۱۱ را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

قضیه ۵.۱۱. اگر κ, λ دو کاردینال باشند به طوری که $\kappa \leqslant \lambda$ آنگاه $\kappa + \lambda = \lambda$.

قضیهٔ فوق را در فصل‌های بعدی (نتیجهٔ ۱۳.۱۳) اثبات کرده‌ایم.

۳.۱۱ ضرب کاردینال‌ها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند به طوری که $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \cdot \beta = \mathbf{card}(X \times Y).$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که ضرب کاردینال‌ها هم از انتخاب نمایندهٔ کلاس‌ها مستقل است.

ضرب کاردینال‌ها، بسیاری از ویژگی‌های مطلوب مورد انتظار از یک «عمل ضرب» را داراست. برخی این ویژگی‌ها را در لم‌های زیر بررسی کرده‌ایم.

لم ۶.۱۱. ضرب کاردینال‌ها، ویژگی «جابجایی» دارد؛ یعنی برای هر دو کاردینالِ α, β داریم

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. در این صورت $\alpha \cdot \beta = \mathbf{card}(X \times Y)$ و $\beta \cdot \alpha = \mathbf{card}(Y \times X)$. اما دو مجموعهٔ $X \times Y$ و $Y \times X$ با هم هم‌توان هستند؛ زیرا به عنوان مثال، تابعِ $h : X \times Y \to Y \times X$ با ضابطهٔ $h(x, y) = (y, x)$ شاهدی بر این هم‌توانی است. □

لم ۷.۱۱. داریم: $\alpha \cdot ۱ = \alpha$.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$. در این صورت

$$\alpha \cdot ۱ = \mathbf{card}(X \times ۱) = \mathbf{card}(X \times \{۰\}).$$

پس کافی است نشان دهیم که

$$X \times \{۰\} = \{(x, ۰) | x \in X\} \cong X.$$

اما تابع سادهٔ $(x, ۰) \mapsto x$ ما را به این خواسته می‌رساند. □

لم ۸.۱۱. ضرب کاردینال‌ها با ترتیب آن‌ها «سازگاری» دارد؛ یعنی اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\gamma \leqslant \lambda$ آنگاه $\alpha \cdot \gamma \leqslant \beta \cdot \lambda$.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$، $\beta = \mathbf{card}(Y)$، $\gamma = \mathbf{card}(Z)$ و $\lambda = \mathbf{card}(W)$. نیز فرض کنید که توابعِ $X \xrightarrow{f} Y$ و $Z \xrightarrow{g} W$ به ترتیب ضمانتگرِ $\alpha \leqslant \beta$ و $\gamma \leqslant \lambda$ باشند. تابعِ h را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$h : X \times Z \to Y \times W$$

$$(x, z) \mapsto \big(f(x), g(z)\big).$$

به راحتی می‌توان تحقیق کرد که تابع فوق، شاهدی بر این است که $\alpha \cdot \gamma \leqslant \beta \cdot \lambda$. □

در فصل قبل بررسی کردیم که $\aleph_۰ \times ۱ = \aleph_۰$، $\aleph_۰ \times n = \aleph_۰$ و $\aleph_۰ \times \aleph_۰ = \aleph_۰$. بیایید باز اثبات دیگری برای مورد سوم ارائه کنیم:

برای این که نشان دهیم $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ با استفاده از قضیهٔ کانتور برنشتاین کافی است نشان دهیم $\aleph_۰ \leq \aleph_۰ \cdot \aleph_۰$ و $\aleph_۰ \cdot \aleph_۰ \leq \aleph_۰$. برای اثبات اولی، تابع یک‌به‌یک $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ با ضابطهٔ $g(n) = (n, n)$ را، و برای اثبات دومی، تابعِ یک به یکِ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با ضابطهٔ $f(n, m) = ۲^n \times ۳^m$ را در نظر بگیرید. اثبات یک‌به‌یک بودن توابعِ فوق را به صورت تمرین رها می‌کنیم.

در قضیهٔ ۱۲.۱۳ ثابت خواهیم کرد که برای هر دو کاردینالِ κ, λ اگر $\kappa \leqslant \lambda$ آنگاه $\kappa \cdot \lambda = \lambda$. البته این ویژگی ضرب کاردینال‌ها تا حد زیادی با آنچه معمولاً از ضرب و ترتیب انتظار داریم متفاوت است.

۴.۱۱ توان کاردینال‌ها

تعریف ۹.۱۱. فرض کنید X, Y دو مجموعه باشند. مجموعهٔ متشکل از همهٔ توابع از مجموعهٔ Y به مجموعهٔ X را با X^Y نشان می‌دهیم. قبلاً مجموعهٔ همهٔ توابع از $\mathbb{N}$ به $\{۰, ۱\}$ را بررسی کرده بودیم که آن را با $۲^{\mathbb{N}}$ نشان دادیم. در این جا، همین نمادگذاری را تعمیم دادیم.

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند و $\alpha = \mathbf{card}(X), \beta = \mathbf{card}(Y)$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha^\beta = \mathbf{card}\big(X^Y\big).$$

دوباره باید تأکید کنیم که تعریف فوق از انتخاب نمایندهٔ کلاس‌ها مستقل است. همچنین شبیه آنچه قبلاً هم گفته بودیم، مطابق تعریف توان کاردینال‌ها، اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ آنگاه $۲^\alpha = \mathbf{card}(\{۰, ۱\}^X)$.

لم ۱۰.۱۱. اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ آنگاه $۲^\alpha = \mathbf{card}(\mathbf{P}(X))$.

اثبات. کافی است نشان دهیم که دو مجموعهٔ $\mathbf{P}(X)$ و $\{۰, ۱\}^X$ با هم‌توان هستند. قبلاً در بخشِ ۵.۹ این کار را برای مجموعه‌های $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ و $۲^\mathbb{N}$ انجام داده‌ایم و اینجا هم از همان ایده استفاده می‌کنیم.

تابعِ h را از $\{۰, ۱\}^X$ به $\mathbf{P}(X)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $f \in \{۰, ۱\}^X$؛ در این صورت f تابعی از X به $\{۰, ۱\}$ است. تعریف کنید:

$$h(f) = \{x \in X \mid f(x) = ۱\}.$$

بررسی این که تابع فوق یک‌به‌یک و پوشاست را به عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم. □

در بخش‌های قبلی دیدیم که

$$|\mathbb{R}| = |(a, b)| = |(۰, ۱)| = ۲^{\aleph_۰} = |\mathbf{P}(\mathbb{N})|.$$

همچنین قضیهٔ کانتور را ثابت کردیم که می‌گفت $|X| < |\mathbf{P}(X)|$. این قضیه، در زبان کاردینال‌ها می‌گوید که برای هر کاردینالِ α داریم $\alpha < ۲^\alpha$. مانند اعداد طبیعی، به توان رسانی کاردینال‌ها با جمع و ضرب آن‌ها سازگار است:

قضیه ۱۱.۱۱. فرض کنید α, β, γ سه کاردینال باشند. در این صورت

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta + \gamma}.$$

قضیهٔ فوق، در واقع بیان دیگری از این حقیقت است که برای هر سه مجموعهٔ X, Y, Z، با این فرض که $Y \cap Z = \varnothing$، داریم:

$$X^Y \times X^Z \cong X^{Y \cup Z}.$$

پس در ادامه، حقیقت بالا را اثبات می‌کنیم.

اثبات. هدف، پیدا کردن یک تابع یک‌به‌یک و پوشا (مثلاً به نام H) از مجموعهٔ $X^Y \times X^Z$ به مجموعهٔ $X^{Y \cup Z}$ است. دامنهٔ تابع H قرار است به صورت زیر باشد.

$$\mathrm{Dom}(H) = \{(f, g) \mid f : Y \to X, g : Z \to X\}$$

پس برای هر (f, g) در دامنه، باید داشته باشیم $H(f, g) \in X^{Y \cup Z}$؛ یعنی

$$H(f, g) : Y \cup Z \to X.$$

تابع $H(f, g)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(f, g)(t) = \begin{cases} f(t) & t \in Y \\ g(t) & t \in Z. \end{cases}$$

بررسی این که تابعِ H در بالا یک‌به‌یک و پوشاست را به عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم. □

در درسهای گذشته، اثباتی نادقیق برای شمارا بودن مجموعهٔ اعداد گویا آوردیم. در اینجا با استفاده از قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین، اثباتی دقیق و ساده ارائه می‌کنیم. عموماً پیدا کردن یک تابع یک‌به‌یک و پوشا برای اثبات هم‌توانی دو مجموعه، کار آسانی نیست؛ ولی بنا به قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین، اگر تابعی یک‌به‌یک از هر یک به دیگری پیدا کنیم، هم‌توان بودن آن دو مجموعه محرز خواهد شد.

مثال ۱۲.۱۱. نشان دهید که مجموعهٔ اعداد گویا شماراست.

پاسخ. می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathbf{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. برای این منظور کافی است نشان دهیم که $\mathbf{card}(\mathbb{Q}) \leqslant \aleph_0$ و $\aleph_0 \leqslant \mathbf{card}(\mathbb{Q})$. اثبات دومی آسان است؛ زیرا تابعِ همانی، $\mathbb{N}$ را به طور یک‌به‌یک در $\mathbb{Q}$ می‌نشاند. برای اثبات اولی، دقت کنید که در بخش‌های قبل ثابت کردیم که $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست. پس برای اثباتِ $\mathbf{card}(\mathbb{Q}) \leqslant \aleph_0$ کافی است تابعی یک‌به‌یک از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ بیابیم:

تمرین ۳.۱۱. نشان دهید که تابع زیر از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ یک‌به‌یک است.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = (x, y),$$

که در بالا فرض کرده‌ایم که ب‌م‌مِ x, y برابر با یک باشد. دقت کنید که عبارت سمت راست، زوج مرتب متشکل از x, y است.

□

توانی که برای کاردینال‌ها تعریف کردیم، موافق انتظار، با ضرب کاردینال‌ها سازگار است:

لم ۱۳.۱۱. فرض کنید α, β, γ سه کاردینال باشند آنگاه

$$\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}.$$

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$، $\beta = \mathbf{card}(Y)$، و $\gamma = \mathbf{card}(Z)$. کافی است ثابت کنیم که

$$\left(X^{Y}\right)^{Z} \cong X^{Y\times Z}.$$

برای این منظور کافی است یک تابع یک‌به‌یک و پوشا (مثلاً به نام H) از $\left(X^{Y}\right)^{Z}$ به $X^{Y\times Z}$ بیابیم. فرض کنید $f \in \left(X^{Y}\right)^{Z}$. در این صورت f تابعی از Z به X^{Y} است. باید $H(f)$ گونه‌ای تعریف شود که $H(f) \in X^{Y\times Z}$. یعنی $H(f)$ باید تابعی از $Y\times Z$ به X باشد. پس باید برای هر $(y, z) \in Y\times Z$ داشته باشیم: $H(f)(y, z) \in X$. فرمول‌های زیر وضعیت تابع f را روشن‌تر می‌کند:

$$f : Z \to X^{Y}$$

$$\forall z \in Z \quad f(z) \in X^{Y}$$

$$\forall z \in Z \quad f(z) : Y \to X$$

$$y \mapsto f(z)(y)$$

پس برای تعریفِ $H(f)(y,z)$ کافی است که z را به f و y را به $f(z)$ بسپاریم. به بیان دیگر، $H(f)$ را تابع زیر در نظر می‌گیریم:

$$H(f): Y \times Z \to X$$
$$(y,z) \mapsto f(z)(y).$$

□

مثال ۱۴.۱۱. نشان دهید که $\mathbb{R} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. به بیان دیگر $\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

پاسخ. خوش داریم این سوال را با دو راه حل پاسخ دهیم. در راه حل اول، از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{Z} \times [0,1)$ تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x \mapsto (\lfloor x \rfloor, x - \lfloor x \rfloor).$$

منظور از $\lfloor \cdot \rfloor$ در بالا، تابع جزء صحیح است. در واقع ما تابعی را در نظر گرفته‌ایم که یک عدد حقیقی را تحویل می‌گیرد و بخش‌های صحیح و اعشاری آن را جداگانه تحویل می‌دهد. به عنوان تمرین نشان دهید که تابع فوق یک‌به‌یک و پوشا است. می‌دانیم که $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$ و $\mathbb{R} \cong [0,1)$. پس ثابت کردیم که $\mathbb{R} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

در راه حل دوم، از حساب کاردینال‌ها و قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین استفاده می‌کنیم؛ نشان می‌دهیم که $\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_0}$ و $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}$. داریم:

$$2^{\aleph_0} = 1 \cdot 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0 \times 2^{\aleph_0}$$

و از طرفی از آنجا که $\aleph_0 \leqslant 2^{\aleph_0}$ داریم

$$\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

□

مثال ۱۵.۱۱. نشان دهید که $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

پاسخ. این مثال را هم به دو راه حل می‌کنیم. راه اول با استفاده از حساب کاردینال‌هاست:

$$2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

اما راه حل دوم بدین صورت است: می‌دانیم که $|\mathbb{R}|$ برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی، و تعداد زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی با تعداد زیر مجموعه‌های اعداد زوج برابر است و آن هم با تعداد زیرمجموعه‌های اعداد فرد برابر است. در زیر نشان خواهیم داد که:

زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی $\cong$ زیر مجموعه‌های اعداد زوج $\times$ زیر مجموعه‌های اعداد فرد

کافی است تابع زیر را در نظر بگیریم

$$A \mapsto \left(A \cap \mathbb{N}_E, A \cap \mathbb{N}_O\right)$$

که در آن $\mathbb{N}_E$ مجموعهٔ اعداد زوج و $\mathbb{N}_O$ مجموعهٔ اعداد فرد را نشان می‌دهند. به طور مثال مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ را به $\left(\{2,4\},\{1,3\}\right)$ تصویر می‌کنیم. □

مثال ۱۶.۱۱. تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ را بیابید.

پاسخ. کافی است $\aleph_{\circ}^{\aleph_{\circ}}$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$\aleph_{\circ}^{\aleph_{\circ}} \leqslant \left(۲^{\aleph_{\circ}}\right)^{\aleph_{\circ}} = ۲^{\aleph_{\circ}\times\aleph_{\circ}} = ۲^{\aleph_{\circ}} \leqslant \aleph_{\circ}^{\aleph_{\circ}}$$

پس

$$\aleph_{\circ}^{\aleph_{\circ}} = ۲^{\aleph_{\circ}}$$

پس تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ برابر است با $|\mathbb{R}|$. به بیان دیگر تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ برابر است با تعداد توابع از $\mathbb{N}$ به مجموعهٔ $\{\circ, ۱\}$. $\square$

۵.۱۱ تمرین‌های تکمیلی

تمرین ۴.۱۱. نشان دهید که برای هر سه کاردینالِ α, β, γ داریم

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

تمرین ۵.۱۱. برای هر دو کاردینالِ دلخواهِ α, β نشان دهید که $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ و $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

تمرین ۶.۱۱.

- نشان دهید که اگر $\alpha = \alpha'$ و $\beta = \beta'$ آنگاه $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و $\alpha \cdot \beta = \alpha' \cdot \beta'$.
- نشان دهید که اگر $\alpha \leqslant \beta$ و γ یک کاردینال دلخواه باشد، آنگاه $\alpha^{\gamma} \leqslant \beta^{\gamma}$.
- نشان دهید که اگر $\alpha \leqslant \beta$ و γ یک کاردینال دلخواه باشد، آنگاه $\alpha \cdot \gamma \leqslant \beta \cdot \gamma$.

تمرین ۷.۱۱. هر عدد مختلط به صورت $a + bi$ است که در آن a, b اعداد حقیقی هستند. تعداد کل اعداد مختلط چقدر است؟

تمرین ۸.۱۱. برای هر دو عدد حقیقیِ $a \neq b$ نشان دهید که

۱. $(a, b) \cong [a, b]$.

۲. $[a, b) \cong [a, b]$.

۳. $(a, b] \cong [a, b]$.

تمرین ۹.۱۱. تعداد توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{N}$ را بیابید.

تمرین ۱۰.۱۱. تعداد توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ را بیابید.

تمرین ۱۱.۱۱. تعداد نقاط در صفحهٔ مختصات دو بعدی چقدر است؟

خلاصهٔ فصل یازدهم. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$، $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $\gamma = \mathbf{card}(Z)$ سه کاردینال باشند. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \mathbf{card}(X \times \{۰\} \cup Y \times \{۱\})$$

$$\alpha \cdot \beta = \mathbf{card}(X \times Y)$$

$$\alpha^{\beta} = \mathbf{card}(X^{Y}).$$

$\alpha \leqslant \beta \iff$ تابعی یک‌به‌یک از X به Y موجود باشد

$$\big(\alpha \leqslant \beta\big) \wedge \big(\beta \leqslant \alpha\big) \iff \alpha = \beta.$$

فصل ۱۲

اصل انتخاب، لم زُرن و اصل خوشترتیبی

از هر طرف که رفتم جز وحشتم نیفزود
زینهار زین بیابان وین راه بی‌نهایت
حافظ

تأکید کردیم که اصل انتخاب یکی از اصول‌موضوعهٔ مهم در نظریهٔ مجموعه‌هاست؛ نیز چندین بار در اثبات‌ها از آن بهره جستیم. در این فصل نشان خواهیم داد که این اصل‌موضوعه را می‌توان با اصول دیگری، با همان اندازه توانایی، جایگزین کرد. بیایید پیش از آن، نسخه‌های مختلفی از صورت اصل را با هم مرور کنیم:

۱. اگر به تعداد نامتناهی مجموعهٔ ناتهی داشته باشیم، آنگاه **یک تابع انتخاب** وجود دارد که از هر یک از این مجموعه‌ها عنصری انتخاب می‌کند.

۲. اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه یک تابع $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ وجود دارد به طوری که برای هر $i \in I$ داریم $f(i) \in A_i$.

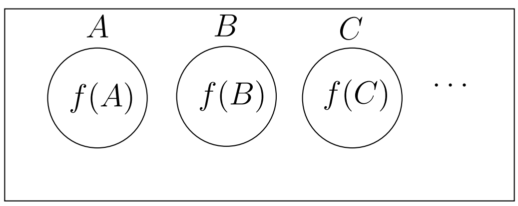
۳. اگر X یک مجموعهٔ ناتهیِ دلخواه باشد و $\mathbf{P}(X)$ مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های آن باشد، آنگاه تابعی مانند f از $\mathbf{P}(X) - \{\varnothing\}$ به X وجود دارد به طوری که برای هر $A \in \mathbf{P}(X)$ داریم $f(A) \in A$.

۴. اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه $\Pi_{i\in I}A_i \neq \varnothing$. توجه کنید که طبق تعریف حاصلضرب نامتناهی مجموعه، داریم:

$$(x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}A_i \iff \forall i \quad x_i \in A_i.$$

۵. اگر x یک مجموعهٔ متشکل از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه یک تابع $f : x \to \bigcup x$ وجود دارد به طوری که $\forall y \in x \quad f(y) \in y$.

زیرمجموعه‌های X



لم زُرن، [1] عنوان یک قضیه در نظریهٔ مجموعه‌ها است. این قضیه، در مورد مجموعه‌هایی است که برخی اعضای آن‌ها به نحوی با هم قابل مقایسه هستند، مثلاً برخی از برخی دیگر بهترند! بنا به لم زرن، تحت شرایطی، یک چنین مجموعه‌ای، عنصری دارد که از او بهتر وجود ندارد! در ادامه خواهیم توانست لم زرن را به صورت دقیق بیان کنیم و خواهیم دید که این قضیه با اصل انتخاب معادل است؛ یعنی اولاً لم زرن با استفاده از اصل انتخاب اثبات می‌شود؛ ثانیاً اگر اصل انتخاب را از اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها حذف کنیم و به جای آن لم زرن را قرار دهیم، از این اصول موضوعهٔ جدید اصل انتخاب به عنوان یک قضیه اثبات می‌شود.

با توجه به معادل بودن لم زرن با اصل انتخاب، می‌توان گفت که این قضیه یک صورت دیگر از اصل انتخاب است. اما این صورت از اصل انتخاب، کاربرد بسیار وسیع‌تری از خودِ اصل انتخاب در ریاضیات دارد. به زودی در درس‌های مختلف حتی در دورهٔ کارشناسی، خواهید دید که وجود پایه برای فضاهای برداری (جبر خطی)، وجود ایده‌آل ماکزیمال (جبر)، قضیهٔ تیخونوف (توپولوژی)، قضیهٔ هان‌باناخ (آنالیز تابعی)، قضیهٔ فشردگی (نظریهٔ مدل‌ها) و بسیاری از قضایای مهم پایه‌ای، همه با استفاده از لم زرن اثبات می‌شوند. در ادامهٔ این فصل پس از بیان مقدماتی، به لمِ زرن خواهیم پرداخت.

۱.۱۲ مجموعه‌های مرتب

پیش از آن به طور جدی وارد بحث شویم، بیایید همان تمثیل «خوب‌تر بودن» را ادامه دهیم. یک مجموعهٔ X داریم که برخی اعضایش از برخی دیگر خوب‌ترند و برخی اعضا نیز به طور کلی با هم قابل مقایسه نیستند. مفاهیم زیر را تعریف خواهیم کرد:

۱. عنصر ماکزیموم: شخصی که با همه افراد قابل مقایسه و از همه خوب‌تر است.

۲. عنصر ماکزیمال: کسی که از او خوب‌تر وجود ندارد؛ این شخص از هر کس با او قابل مقایسه باشد بهتر است، اما ممکن است برخی‌ها از لحاظ خوب بودن به طور کلی قابل مقایسه با او نباشند.

۳. کران بالا: شخصی که لزوماً جزو افراد مجموعهٔ ما نیست، ولی با همهٔ افراد مجموعهٔ ما قابل مقایسه و از همهٔ افراد مجموعهٔ ما بهتر است.

۴. زنجیر: تعدادی از افراد که از لحاظ خوب بودن، قابل مقایسه هستند و پشت سر هم قرار گرفته‌اند.

حال نوبت آن رسیده که تمثیل بالا را دقیق کنیم. برای این کار از رابطه‌ها کمک خواهیم گرفت. پیش‌تر در این درس با رابطه‌ها و ویژگی‌های مختلف آن‌ها آشنا شده‌ایم، ولی در این قسمت توجه‌مان معطوف به نوع خاصی از روابط به نام **روابط ترتیبی** است.

رابطهٔ R روی مجموعهٔ X را یک **رابطهٔ ترتیبی** می‌خوانیم هرگاه انعکاسی، **پادتقارنی** و متعدی باشد. معمولاً در این صورت به جای xRy می‌نویسیم $x \leqslant y$. اگر R یک رابطهٔ ترتیبی روی X باشد، (X, R) یا همان $(X, \leqslant)$ را یک مجموعهٔ مرتب می‌خوانیم. بیایید تعریف را به صورت دقیق بیان کنیم:

تعریف ۱.۱۲. مجموعهٔ X را به همراه رابطهٔ $\leqslant$ یک مجموعهٔ مرتب می‌خوانیم هرگاه جملات زیر درست باشند:

$$\forall x \in X \quad x \leqslant x$$

[1] ماکس زُرن، ۱۹۳۵

$$\forall x,y \in X \quad \big(x \leqslant y \wedge y \leqslant x \to x = y\big)$$
$$\forall x,y,z \in X \quad \big(x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z\big).$$

وقتی می‌گوییم $(X,\leqslant)$ یک مجموعهٔ **مرتب جزئی** است یعنی می‌خواهیم تأکید کنیم که جملهٔ زیر در مورد آن لزوماً درست نیست:

$$\forall x,y \in X \quad \big(x \leqslant y \vee y \leqslant x\big),$$

یعنی هر دو عضو داده شده، لزوماً با هم قابل مقایسه نیستند.

تعریف ۲.۱۲. مجموعهٔ مرتب $(X,\leqslant)$ را مرتب خطی (مرتب تام) می‌نامیم هرگاه

$$\forall x,y \in X \quad (x \leqslant y \vee y \leqslant x),$$

در غیر این صورت $(X,\leqslant)$ را مرتب جزئی می‌نامیم.

با این که معمولاً یک رابطهٔ ترتیب را با علامت $\leqslant$ نشان می‌دهیم، منظورمان این نیست که اعضای مجموعه، عدد هستند. اعضای مجموعه می‌توانند هر چیزی باشند و رابطهٔ $\leqslant$ فقط باید دارای ویژگی‌های انعکاسی، پادتقارنی و تعدی باشد.

مثال ۳.۱۲. ساختارِ $(\mathbb{N},\leqslant)$، یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی با ترتیب معمولش (همان ترتیبی که شما از ریاضی مقدماتی به خاطر دارید و در این کتاب متوجه شدید که با رابطهٔ عضویت یکی است) یک مجموعهٔ مرتب است، که البته مرتب خطی است.

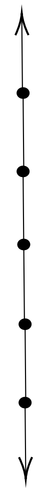
یک عامل گیج‌کننده در تعریف ترتیب جزئی و خطی این است که هم در مجموعه‌های مرتب جزئی و هم در مجموعهٔ مرتب خطی عبارت زیر درست است:

$$\forall x,y \quad (x \leq y \wedge y \leq x \to x = y).$$

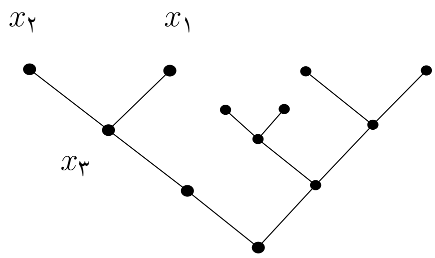
به بیان دیگر در هر دو نوع ترتیب، اگر $x < y$ آنگاه $\neg(y < x)$. اما جملهٔ زیر در مجموعهٔ مرتب خطی درست است و در مجموعهٔ مرتب جزئی لزوماً درست نیست:

$$\forall x,y \quad (x < y \vee y < x \vee x = y).$$

در یک مجموعهٔ مرتب جزئی ممکن است دو عنصرِ x,y پیدا شوند که با هم قابل مقایسه نباشند (یعنی نه مساوی باشند و نه هیچیک از دیگری بیشتر یا کمتر باشد). مجموعهٔ مرتب خطی را می‌توان به صورت یک زنجیر تجسم کرد که ممکن است نامتناهی باشد:



مجموعهٔ مرتب جزئی را می‌توان به صورت درختی تجسم کرد:



در شکل بالا x_3 با هر یک از عناصر x_1 و x_2 قابل مقایسه است و از آن‌ها کمتر است، ولی عناصر x_2 و x_1 قابل مقایسه با هم نیستند. همچنین x_2 با آخرین نقطه سمت راست درخت قابل مقایسه نیست. عنصر پایین درخت با همهٔ عناصر قابل مقایسه و از همهٔ آن‌ها کمتر است. دقت کنید که درخت بالا می‌تواند از بالا و پائین نامتناهی باشد و نیز ممکن است در جاهائی از آن شکل لوزی نیز داشته باشیم.

مثال ۴.۱۲. روی مجموعهٔ اعداد طبیعی رابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$x \overset{\bullet}{\leqslant} \iff x|y.$$

نشان دهید رابطهٔ بالا یک رابطهٔ ترتیبی است که خطی (تام) نیست.

پاسخ. می‌دانیم که جملات زیر دربارهٔ رابطهٔ عاد کردن درست هستند:

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x|x$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad \big((x|y \wedge y|x) \to x = y\big)$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} \quad \big((x|y \wedge y|z) \to x|z\big);$$

پس | یا همان رابطهٔ عاد کردن یک رابطهٔ ترتیبی است. اما داریم ۱۳ $\overset{\bullet}{\nleqslant}$ ۲ زیرا ۲∤۱۳ و همچنین ۲ $\overset{\bullet}{\nleqslant}$ ۱۳ زیرا ۱۳∤۲.
پس رابطهٔ ترتیبی فوق خطی (تام) نیست. □

مثال ۵.۱۲. فرض کنید X یک مجموعه باشد. روی $\mathbf{P}(X)$ رابطهٔ $\leqslant$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$A \leqslant B \iff A \subseteq B$$

نشان دهید که $(\mathbf{P}(X), \subseteq)$ یک مجموعهٔ مرتب است. نشان دهید که اگر X حداقل دو عضو داشته باشد، $(\mathbf{P}(X), \subseteq)$ مرتب غیرخطی است.

پاسخ. می‌دانیم که عبارت‌های زیر درستند:

$$\forall A \in \mathbf{P}(X) \quad A \subseteq A$$

$$\forall A, B \in \mathbf{P}(X) \quad \big(A \subseteq B \wedge B \subseteq A \to A = B\big)$$
$$\forall A, B, C \in \mathbf{P}(X) \quad \big(A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C\big).$$

پس رابطهٔ فوق یک رابطهٔ ترتیبی است. فرض کنیم X دارای دو عضو a, b باشد که $a \neq b$ در این صورت $\{b\} \nsubseteq \{a\}$ و $\{a\} \nsubseteq \{b\}$؛ پس $(\mathbf{P}(X), \subseteq)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی نیست. □

وقتی دامنهٔ تابعِ f زیرمجموعه‌ای از Y باشد، می‌گوییم $f : Y \to X$ یک «تابعِ جزئی» است.

مثال ۶.۱۲. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. قرار دهید

$$\mathcal{A} = \text{مجموعهٔ همهٔ توابع جزئی از } Y \text{ به } X$$

به بیان دیگر تابع f در $\mathcal{A}$ است هرگاه دامنهٔ آن زیرمجموعه‌ای از Y و برد آن زیرمجموعه‌ای از X باشد. می‌خواهیم روی $\mathcal{A}$ یک رابطهٔ ترتیبی تعریف کنیم. فرض کنید $f, g \in \mathcal{A}$. تعریف کنید

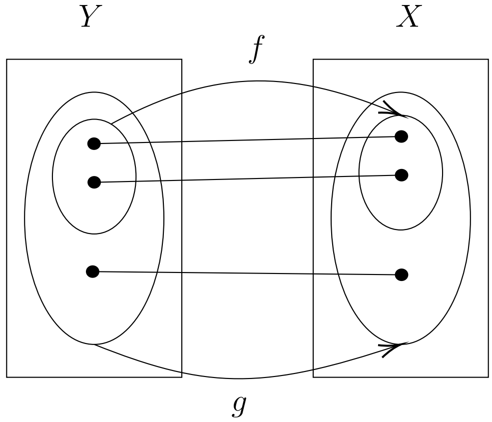
$$f \leqslant g \iff \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g) \wedge g|_{\mathrm{Dom}(f)} = f.$$

در بالا، منظور از عبارتِ $g|_{\mathrm{Dom}(f)} = f$ این است که تابعِ f از محدود کردن تابع g به یک دامنهٔ کوچک‌تر ایجاد شده است. به بیان دیگر، در تعریف بالا خواسته‌ایم تابع f زمانی از تابع g کمتر باشد که دامنهٔ آن زیرمجموعهٔ دامنهٔ g باشد و تابع g تعمیمی از تابع f باشد؛ یعنی

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \quad f(x) = g(x).$$

و باز به بیان دیگر تابع f از تابع g کمتر است هرگاه به عنوان دو مجموعه (یا به عنوان دو رابطه)،

$$f \subseteq g.$$



مثلاً اگر $f = \{(a, b), (c, d)\}$ آنگاه g می‌تواند به صورت زیر باشد

$$g = \{(a, b), (c, d), (h, k)\}.$$

تمرین ۱.۱۲. نشان دهید که رابطهٔ بالا یک رابطهٔ ترتیبی است ولی لزوماً خطی نیست (از آنجا که ترتیب فوق، عملاً زیرمجموعه بودن است، حل این تمرین آسان است).

مثال ۷.۱۲. روی مجموعهٔ $\{a, b, c, d, e\}$ می‌توانیم ترتیب زیر را با بیان این که کدام عناصر با هم در رابطهٔ ترتیبی هستند، در نظر بگیریم:

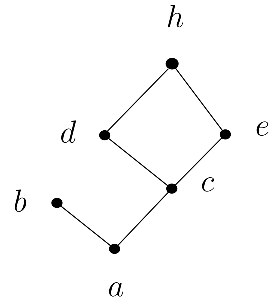
$$a \leqslant b, a \leqslant c, a \leqslant d, a \leqslant e$$

$$c \leqslant d, c \leqslant e.$$

به بیان دیگر رابطهٔ ترتیبی مورد نظر ما شامل زوج‌های زیر است:

$$\{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (c, d), (c, e), (a, h), (d, h), (c, h)\}$$

که آن را می‌توانیم به صورت زیر تجسم کنیم:



تمرین ۲.۱۲. فرض کنید $\leqslant$ یک رابطهٔ ترتیبی باشد. ویژگی‌های رابطهٔ $<$، یعنی کمتری اکید، را بنویسید.

۲.۱۲ ماکزیمال، کران بالا و زنجیر

تعریف ۸.۱۲. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعهٔ مرتب باشد. عنصر $a \in X$ را عنصر ماکزیموم (یا بیشینه) می‌خوانیم هرگاه این گونه باشد که

$$\forall x \in X \quad x \leqslant a.$$

دقت کنید که در تعریف ماکزیموم دو نکته نهفته است: اولاً هر عنصری با عنصر ماکزیموم قابل مقایسه است و ثانیاً هر عنصری از آن کمتر یا مساوی است. برای این که یک مجموعه، ماکزیموم داشته باشد نیازی نیست که همهٔ اعضا با هم قابل مقایسه باشند، کافی است عنصر ماکزیموم از همه بیشتر باشد.

مثال ۹.۱۲. در مجموعهٔ مرتبِ $(\{۴, ۶, ۱۲\}, |)$، عدد ۱۲ ماکزیموم است زیرا ۱۲|۴، ۱۲|۶ و ۱۲|۱۲. در این مجموعه، دو عدد ۴، ۶ با هم قابل مقایسه نیستند، یعنی هیچ‌یک از دیگری بیشتر نیست.

مثال ۱۰.۱۲. مجموعهٔ اعداد طبیعی با ترتیب عادی خود، دارای ماکزیموم (بیشینه) نیست، زیرا اگر $n \in \mathbb{N}$ آنگاه $n + ۱ > n$.

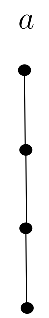
مثال ۱۱.۱۲. در $(\mathbf{P}(X), \subseteq)$ مجموعهٔ X ماکزیموم است.

اما فقط ماکزیموم بودن حائز اهمیت نیست. گاهی یک عنصر از «تمام عناصری که با آن قابل مقایسه‌اند» بیشتر است:

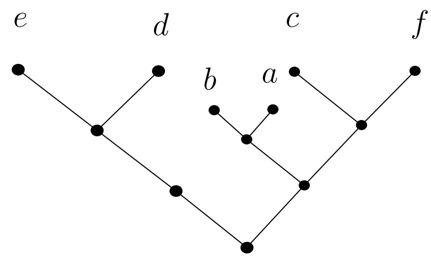
تعریف ۱۲.۱۲. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعهٔ مرتب باشد. عنصر $a \in X$ را یک عنصر ماکزیمال (بیشینال) می‌خوانیم هرگاه این گونه باشد که

$$\neg\big(\exists x \in X \quad x > a\big).$$

پس باید دقت کنیم که هیچ عنصری ازعنصر ماکزیمال بیشتر نیست؛ اما عنصر ماکزیمال لزوماً با همهٔ عناصر قابل مقایسه نیست. هر عنصری که با عنصر ماکزیمال قابل مقایسه باشد، از آن کمتر یا با آن مساوی است. برای مثال، دو مجموعهٔ مرتب را در نظر بگیرید که به صورت زیر مجسم شده‌اند:

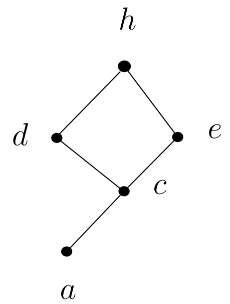


(۱)



(۲)

در شکلِ ۲ عنصر a ماکزیموم نیست، زیرا a با b قابل مقایسه نیست. اما a در شکل ۱ ماکزیموم است. در همان شکلِ ۲ تمامی عناصر $\{a, b, c, d, e, f\}$ ماکزیمال هستند ولی هیچ یک ماکزیموم نیستند. در شکل زیر عنصر h ماکزیموم است:



مثال ۱۳.۱۲. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی باشد. تردیدی نیست که جملهٔ زیر می‌گوید که a ماکزیموم مجموعهٔ X است:

$$\forall x \in X \quad x \leqslant a$$

اما آیا جملهٔ زیر، نقیض جملهٔ بالاست؟

$$\exists x \in X \quad x > a$$

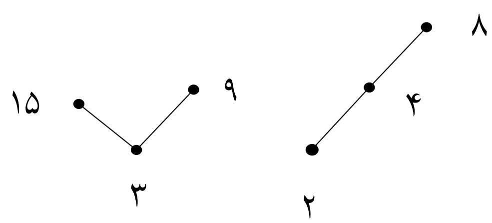
نشان دهید که این گونه نیست و نقیض جملهٔ اول را بنویسید.

پاسخ. نقیض این که a ماکزیموم باشد، این است که عنصری پیدا شود که از آن کمتر نباشد. چنین عنصری یا از a بیشتر است یا با آن قابل مقایسه نیست:

$$\exists x \in X \quad \Big(x > a \vee \underbrace{\big(\neg(x \leqslant a) \wedge \neg(x \geqslant a)\big)}_{\text{قابل مقایسه نیستند.}}\Big).$$

□

مثال ۱۴.۱۲. در $\Big(\{۳, ۹, ۱۵, ۲, ۴, ۸\}, |\Big)$ عناصر ۹, ۱۵, ۸ ماکزیمال هستند ولی هیچ یک ماکزیموم نیستند.



تعریف ۱۵.۱۲. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعهٔ مرتب باشد و $A \subseteq X$. عنصر $a \in X$ را یک کران بالا برای A می‌خوانیم هرگاه a با همهٔ عناصر موجود در A قابل مقایسه باشد و

$$\forall x \in A \quad x \leqslant a.$$

در تعریف بالا، ممکن است a در $X - A$ باشد. اگر $a \in A$ آنگاه a عنصر ماکزیمومِ A است.

مثال ۱۶.۱۲. مجموعهٔ مرتب $(\mathbb{R}, \leqslant)$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $A = (۰, ۱)$. مجموعهٔ کران‌های بالای A برابر است با

$$\{x \in \mathbb{R}, ۱ \leqslant x\}.$$

در مثال بالا هیچ کدام از کران‌های بالای A در A واقع نشده است.

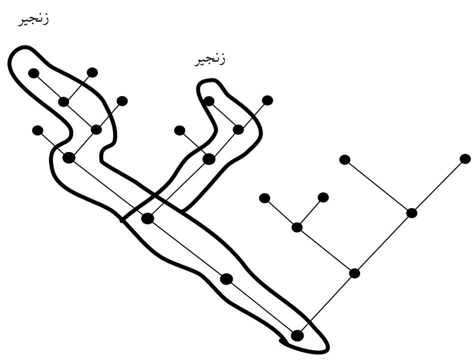
مثال ۱۷.۱۲. فرض کنید X یک مجموعهٔ نامتناهی باشد. مجموعهٔ مرتبِ $(\mathbf{P}(X), \subseteq)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های متناهی X باشد. تنها کران بالا برای این مجموعه، خود X است و این کران بالا در A نیست.

همان طور که در مثال فوق نیز قابل مشاهده است، اگر $(X, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب باشد، برای تعریف کران بالا برای یک زیرمجموعه $A \subseteq X$ مرتب خطی یا جزئی بودن ترتیب مجموعهٔ X اهمیتی ندارد.

مثال ۱۸.۱۲. نشان دهید که در $(\mathbb{N}, |)$ مجموعهٔ اعداد اول دارای کران بالا نیست.

فرض کنید X یک مجموعهٔ مرتب جزئی متناهی باشد؛ یعنی X یک درخت متناهی باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که X دارای عنصر یا عناصر ماکزیمال است. کافی است هر یک از شاخه‌های درخت را طی کنیم تا به یک نقطهٔ انتهائی برسیم؛ در این صورت عناصر انتهای هر شاخه، ماکزیمال هستند. حال اگر X یک مجموعهٔ مرتب نامتناهی باشد، یعنی یک درخت نامتناهی باشد، وجود یا عدم وجود عناصر ماکزیمال در آن به راحتی قابل تشخیص نیست. در این حالت نمی‌توان یکی از شاخه‌ها را به راحتی ادامه داد و امیدوار بود که به پایان برسد! لم زرن یک محک برای تشخیص وجود عناصر ماکزیمال به دست می‌دهد.

تعریف ۱۹.۱۲. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی باشد. مجموعهٔ $A \subseteq X$ را یک زنجیر در X می‌نامیم هرگاه $(A, \leqslant)$ مرتب خطی باشد.



یک زنجیر در یک مجموعهٔ مرتب جزئی در واقع یک «مسیر» در درخت آن است. توجه کنید که زنجیرها لزوماً متناهی یا شمارا نیستند یعنی همیشه نمی‌توان آن‌ها را به صورت $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ نمایش داد. امکان دارد اندازهٔ یک زنجیر ناشمارا باشد. مهم فقط این است که همهٔ عناصر مجموعهٔ زنحیر با هم قابل مقایسه هستند.

۳.۱۲ لم زُرن

گفتیم که لم زرن ابزار بسیار قدرتمندی در بسیاری اثبات‌های ریاضیاتی، خصوصاً در علم جبر است. در ابتدای این فصل گفتیم که این لم با اصل انتخاب معادل است؛ یعنی با استفاده از اصل انتخاب و سایر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توان لم زرن را اثبات کرد و نیز با استفاده از لم زرن و بقیهٔ اصول نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توان اصل انتخاب را ثابت کرد. در منطق ریاضی این گفته را به صورت زیر می‌نویسیم: [۲]

$$\mathbf{ZF} + \mathbf{Zorn} \Rightarrow \mathbf{C}\ (= \text{Choice})$$

$$\mathbf{ZFC} \Rightarrow \mathbf{Zorn}.$$

حال زمان مناسب برای پاسخ به اشتیاق خواننده به لم زرن فرارسیده است: فرض کنید که در داخلِ یک مجموعهٔ مرتب جزئی هستیم. فرض کنید از نقطه‌ای که در آن هستیم به صورت زنجیروار در داخل مجموعه حرکت می‌کنیم؛ یعنی از مسیری رد می‌شویم که همهٔ عناصرش با هم قابل مقایسه هستند، یا به بیان دیگر در طول یک زنجیر بالا می‌رویم. امکان دارد به سرعت به جائی برسیم که دیگر نتوان مسیر را ادامه داد؛ یعنی دیگر عنصر بزرگتری وجود نداشته باشد. آنجا یک عنصر ماکزیمال و یک اوج قله است.

با این حال امکان دارد مادامی که در راه هستیم انتهای مسیر را دقیقاً نبینیم ولی عنصری را از دور بینیم که معلوم است از همهٔ عناصر زنجیر بزرگتر است. شاید انتهای زنجیر آنجا باشد و این مطلوب ماست! اما شاید آن نقطه فقط سراب باشد! شاید وقتی به آن نقطه رسیدیم ببینیم که راه ادامه دارد، ولی باز دوباره از دور چیزی را بزرگتر از همهٔ عناصر ببینیم. دقیقاً مثل زمانی که کوه‌نوردی می‌کنیم و نقطه‌ای را قلهٔ اصلی تصور می‌کنیم ولی وقتی بدان می‌رسیم می‌بینیم که هنوز راه زیادی تا قلهٔ اصلی مانده است.

لم زرن به ما می‌گوید که مسیر بالاخره به پایانی خواهد رسید. در واقع لم زرن بیان‌گر این است که **در داخل یک مجموعه، زنجیری بی پایان به طول دنیای همهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد.** [۳] بیانی که در زیر آمده است، کمی کلی‌تر از این گفته است:

قضیه ۲۰.۱۲. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک **مجموعهٔ مرتب جزئیِ ناتهی** باشد. اگر هر زنجیرِ $A \subseteq X$ دارای یک کران بالا در X باشد، آنگاه X دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال است.

دقت کنید که در لم زرن ادعا **نکرده‌ایم** که هر زنجیری که دارای کران بالاست، همان کران بالایش یک عنصر ماکزیمال است. در واقع اگر x یک کران بالا برای زنجیر A باشد، آنگاه $A \cup \{x\}$ نیز یک زنجیر است که به x ختم می‌شود. اگر بعد از x عنصری وجود نداشته باشد، آنگاه x انتهای زنجیر است ولی اگر عنصری وجود داشته باشد یعنی زنجیر $A \cup \{x\}$ را می‌توان ادامه داد. فرضِ لم زرن این است که این زنجیر جدید هم کران بالا داشته باشد. لم زرن را یک بار در بخشِ ۴.۱۲ و یک بار با تکنولوژی ساده‌تری در بخشِ ۳.۱.۱۳ اثبات خواهیم کرد. به خواننده‌ای که مشتاق دیدن اثبات است پیشنهاد می‌کنیم از سه تمرین زیر صرف نظر کند.

تمرین ۳.۱۲. نشان دهید که از لم زرن نتیجه می‌شود که هر عنصری در X کمتر یا مساویِ یک عنصر ماکزیمال است. به بیان دیگر با شروع از هر شاخهٔ درخت به یک عنصر ماکزیمال خواهیم رسید.

---

[۲] «زُرن» را در برخی کتاب‌ها، به صورت تسرن می‌نویسند؛ بدین علت که z در زبان آلمانی، «تْزْ» خوانده می‌شود.

[۳] اثباتی که در فصلِ ۱۳ برای لم زرن آورده‌ایم این شهود را توجیه می‌کند.

تمرین ۴.۱۲. آیا مجموعهٔ $(\circ, 1)$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی، با ترتیب اعداد حقیقی، شرایط لم زرن را داراست؟ آیا مجموعهٔ اعداد حقیقی با ترتیب خود، شرایط لم زرن را داراست؟

تمرین ۵.۱۲. فرض کنید که X یک مجموعه باشد و K یک ویژگی دربارهٔ زیرمجموعه‌های آن باشد به گونه‌ای برخی زیرمجموعه‌های X ویژگیِ K را داشته باشند و برخی نداشته باشند. همچنین فرض کنید که ویژگیِ K تحت اجتماع دلخواه بسته باشد؛ به بیان دیگر اگر $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ گردایه‌ای از عناصر باشند که هر کدام ویژگیِ K را داراست، آنگاه $\bigcup A_\gamma$ نیز ویژگیِ K را دارا باشد. نشان دهید که یک مجموعهٔ ماکزیمال با ویژگیِ K وجود دارد؛ یعنی مجموعه‌ای وجود دارد که ویژگیِ K را داراست و هیچ مجموعه‌ای از آن بزرگتر پیدا نمی‌شود که ویژگیِ K را داراست.

۴.۱۲ اثبات لمِ زُرن با استفاده از اصل انتخاب

بهترین تکنولوژی برای اثبات لم زرن استفاده از ابزار اُردینال‌هاست. اثبات لم زرن با این ابزار در بخشِ ۳.۱.۱۳ صورت گرفته است و خواننده می‌تواند پس از اندکی مطالعهٔ آن بخش، این اثبات را مشاهده کند. حقیقت آن است که اثباتی که در این بخش نوشته شده است نیز مبتنی بر همان ایده‌هاست؛ با این تفاوت که از آوردن نام ترسناک «اُردینال» در آن صرف نظر شده است. هدف ما از بیان اثبات در این بخش، این است که برای مدرسی که در یک دوره تدریس به مبحث اُردینال‌ها نمی‌رسد، بیان ایدهٔ اثبات لم زرن میسر باشد. به همین دلیل، در عین حال برخی جزئیات مهم اثبات را به صورت تمرین رها کرده‌ایم تا از شلوغ شدن اثبات جلوگیری کنیم و اجازه دهیم جریان اثبات ادامه داشته باشد.

در ادامه به اثبات لم زرن، با **فرض درست بودن اصل انتخاب** پرداخته‌ایم. ایدهٔ کلی اثبات لم زرن به صورت زیر است:

اگر لم زرن درست نباشد، یعنی اگر مجموعهٔ X، در عین داشتن شرایط لم زرن، هیچ عنصر ماکزیمالی نداشته باشد، آنگاه اگر یک عنصرِ دلخواهِ $x_\circ \in X$ را انتخاب کنیم، این عنصر، ماکزیمال نیست؛ یعنی از آن عنصری بزرگتر مانند x_1 پیدا می‌شود. پس

$$x_\circ < x_1$$

اما خودِ x_1 نیز ماکزیمال نیست پس عنصری از آن بزرگتر پیدا می‌شود؛ بدین ترتیب زنجیری مانند زیر داریم:

$$x_\circ < x_1 < x_2 < \dots$$

اما کار در اینجا ختم نمی‌شود. هیچ عنصری وجود ندارد که در انتهای این زنجیر، حتی پس از شمارا مرتبه قرار بگیرد؛ زیرا از آن عنصر بزرگتر هم وجود دارد. پس طول زنجیری که می‌توان بدین طریق ساخت، از هر چه مجموعه وجود دارد، بیشتر است و این یک تناقض است. در ادامه این ایده را دقیق‌تر کرده‌ایم. البته آماده باشید زیرا اثبات پیش رو اثبات آسانی نیست![۴]

فرض کنید اصل انتخاب درست باشد و X یک مجموعه باشد که شرایط ذکر شده در لم زرن را داراست. می‌دانیم که هر زنجیر در X دارای حداقل یک کران بالاست. **با استفاده از اصل انتخاب، برای هر زنجیرِ A در X یک کرانِ بالای x_A انتخاب می‌کنیم.**

[۴] همان طور که گفته شد بخش‌های مهمی از اثبات را به عنوان تمرین رها کرده‌ایم، خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند اثبات کامل را در فیلم هیجدهم از فیلمهای درس در لینک زیر به طور دقیق مشاهده کند: https://www.aparat.com/v/K4F1B?playlist=252517

در ادامه به نوع خاصی از زنجیرها علاقه‌مند هستیم. این زنجیرها ساختاری وابسته به تابع انتخاب دارند؛ مثلاً اگر $x_1 < x_2 < x_3$ چنین زنجیری باشد، آنگاه x_3 همان کران بالائی است که تابع انتخاب مورد نظر ما برای زنجیرِ $x_1 < x_2$ انتخاب کرده است و x_2 همان کران بالائی است که تابع انتخاب ما برای زنجیر تک عضویِ x_1 انتخاب کرده است. چنین زنجیری را مطلوب می‌نامیم. در زیر این گفته را دقیق‌تر کرده‌ایم. ابتدا یک عنصرِ $c \in X$ را در نظر بگیرید.

زنجیرِ A را یک زنجیر **مطلوب** بنامید هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد:

- $c = \min A$.
- هر زیرمجموعه از A دارای عنصر مینیموم باشد.
- هر عنصر در این زنجیر، کران بالای عناصر قبلی این زنجیر باشد؛ همان کران بالائی که تابع انتخابمان انتخاب کرده است.

زنجیرهای مطلوب دارای ویژگی‌های جالبی هستند:

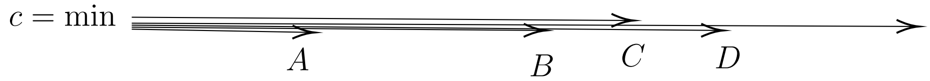
تمرین ۶.۱۲. اگر A, B دو زنجیر مطلوب باشند آنگاه $A \cap B$ نیز یک زنجیر مطلوب است.

تمرین ۷.۱۲ (نسبتاً سخت)**.** فرض کنید که A, B دو زنجیر مطلوب باشند. نشان دهید که در این صورت یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

تمرین ۸.۱۲ (نسبتاً سخت)**.** اگر $A \subseteq B$ دو زنجیر مطلوب باشند آنگاه A یک بخش ابتدائیِ B است؛ یعنی:[5]

$$\forall x \in A \quad (\{y \in A \mid y < x\} = \{y \in B \mid y < x\}).$$

اردینال‌ها در بخش بعدی تعریف خواهیم کرد، ولی یک خوانندهٔ بالغ‌تر می‌تواند در همین جا سایهٔ آن‌ها را در تمرین‌های بالا ببیند؛ چون زنجیرهای مطلوب در واقع، همه در امتداد هم قرار دارند:



بنا به تمرین بالا، حال یک ترتیب روی مجموعهٔ زنجیرهای مطلوب تعریف می‌کنم. برای دو چنین زنجیری می‌نویسیم

$$A \leq B$$

هرگاه

$$A \subseteq B.$$

به بیان دیگر زنجیر B را از زنجیر A بزرگتر می‌گیریم زمانی که از ادامه دادن زنجیر A ایجاد شده باشد. در تمرین زیر، می‌بینیم که اجتماع همهٔ زنجیرهای مطلوب که در پشت سر هم قرار می‌گیرند، خودْ ویژگی زنجیر مطلوب بودن را داراست:

تمرین ۹.۱۲. فرض کنید که $\{A_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر (با ترتیب شمول) از زنجیرهای مطلوب باشد، نشان دهید که $\bigcup_{i \in I} A_i$ نیز خودْ یک زنجیر مطلوب است.

[5] در فیلم‌های درس که روی آپارات قرار دارند، اثبات به طور کامل بیان شده و پاسخ این تمرین‌ها گفته شده است.

اما دقت کنید که مجموعهٔ همهٔ زنجیرهای مطلوب، با ترتیب شمول، بنا به تمرینِ ۷.۱۲ خود تشکیل یک زنجیر می‌دهد. همچنین اجتماع همهٔ زنجیرهای مطلوب، بنا به تمرینِ ۹.۱۲ خود یک زنجیر است. پس بنا به ویژگی‌های مجموعهٔ X این زنجیر دارای یک کران بالا در X است. اگر این کران بالا در خودِ زنجیر باشد، یک عنصر ماکزیمال است و قضیه ثابت می‌شود. اما اگر این کران بالا در خودِ زنجیر نباشد آنگاه با اضافه کردن آن به این زنجیر به زنجیر مطلوب بزرگتری می‌رسیم و این متناقض با این فرض است که زنجیر ما اجتماع همهٔ زنجیرهای مطلوب است.

۵.۱۲ اثبات اصل انتخاب با استفاده از لم زرن

بر خلاف اثبات قبلی، نتیجه گرفتن اصل انتخاب از لم زُرن کار دشواری نیست:

قضیه ۲۱.۱۲. اصل انتخاب از لم زُرن نتیجه می‌شود.

بیایید یک بار دیگر اصل انتخاب را یادآوری کنیم: اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه یک تابع $f : I \to \bigcup A_i$ وجود دارد به طوری که

$$\forall i \in I \quad f(i) \in A_i.$$

قبلاً گفتیم که اگر A یک مجموعهٔ ناتهی باشد برای انتخاب یک عنصر در A نیازی به اصل انتخاب نداریم. همچنین اگر $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد، برای انتخاب عناصرِ $a_i \in A_i$ نیازی به اصل انتخاب نداریم. تنها وقتی که خانوادهٔ مورد نظر نامتناهی است به این اصل نیاز است.

در زیر ثابت خواهیم کرد که اصل انتخاب چگونه از لم زُرن نتیجه می‌شود. عموماً وقتی می‌خواهیم اثبات یک قضیهٔ پیچیده را بیان کنیم، مطلوب است که نخست دورنمایی از مراحل اثبات را توضیح بدهیم. چه این قضیه توسط خود ما اثبات شده باشد یا شخص دیگری، این روش بیان، فهم اثبات را آسان‌تر می‌کند. یادمان باشد که در نوشتن متون ریاضی، حق نداریم خوانندهٔ با دانش در سطح نوشتهٔ خود را در فهم آن نوشته به چالش بیندازیم.

فرض کنید که لم زرن درست باشد. حال فرض کنید که $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. برای پیدا کردنِ یک تابع انتخاب از I به $\bigcup A_i$، روی **مجموعهٔ همهٔ توابع جزئیِ انتخاب** یک ترتیب جزئی تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از لمِ زرن یک **تابع انتخاب ماکزیمال** پیدا می‌کنیم؛ که همان تابع انتخابِ مورد نیاز ما خواهد بود.

اثبات قضیهٔ ۲۱.۱۲. فرض کنید لم زُرن درست باشد. مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{A} = \{(f,J) \mid J \subseteq I \quad \text{و} \quad f : J \to \bigcup_{i\in I} A_i \ \text{یک تابع است} \quad \text{و} \ \forall j \in J \quad f(j) \in A_j\}$$

به بیان دیگر $\mathcal{A}$ مجموعهٔ همهٔ **توابعِ جزئیِ** انتخاب است (که به همراه دامنه‌شان نوشته شده‌اند)؛ یعنی توابعی که به ازای تعدادی از اندیس‌ها، عمل انتخاب را انجام می‌دهند. نخست ادعا می‌کنیم که $\mathcal{A} \neq \varnothing$. به بیان دیگر ادعا می‌کنیم که یک تعداد توابع جزئی انتخاب در هر صورت وجود دارند.

اثبات ادعا. فرض کنید $i_\circ \in I$. از آنجا که $A_{i_\circ} \neq \varnothing$، فرض کنید $a_{i_\circ} \in A_{i_\circ}$. تابع زیر در $\mathcal{A}$ است.

$$\{i_\circ\} \xrightarrow{f} \bigcup A_{i_\circ}$$

$$i_\circ \mapsto a_{i_\circ},$$

به بیان دیگر $(f,\{i_\circ\}) \in \mathcal{A}$. □

پایان اثبات ادعا

حال روی $\mathcal{A}$ ترتیب زیر را تعریف می‌کنیم:

تابعِ جزئی انتخابِ $f_۲$ را از تابعِ جزئیِ انتخابِ $f_۱$ بزرگتر می‌خوانیم هرگاه $f_۲$ انتخاب‌های $f_۱$ را حفظ کند و انتخاب‌های دیگری نیز بر آن‌ها بیفزاید. به بیان دقیق‌تر ریاضی:

$$(f_۱, J_۱) \leqslant (f_۲, J_۲) \iff (J_۱ \subseteq J_۲ \wedge f_۲ \mid_{J_۱} = f_۱),$$

و باز به بیان دیگر

$$(f_۱, J_۱) \leqslant (f_۲, J_۲) \iff J_۱ \subseteq J_۲ \wedge \forall j \in J_۱ \quad f_۱(j) = f_۲(j),$$

و باز به بیان دیگر

$$(f_۱, J_۱) \leqslant (f_۲, J_۲) \iff \underbrace{f_۱}_{\{(i,f_۱(i))|i\in J_۱\}} \subseteq \underbrace{f_۲}_{\{(i,f_۲(i))|i\in J_۲\}}.$$

اثبات این که رابطهٔ بالا یک رابطهٔ ترتیب است، آسان است؛ زیرا بنا به آخرین بیان در بالا، عملاً با رابطهٔ زیرمجموعه بودن سروکار داریم.

تمرین ۱۰.۱۲. نشان دهید که رابطهٔ بالا رابطهٔ ترتیبی است. (یعنی انعکاسی، پادتقارنی و متعدی است).

پس تا اینجا دیدیم که مجموعهٔ $\mathcal{A}$ یک مجموعهٔ مرتب ناتهی است. در ادامه نشان خواهیم داد که هر زنجیر در این مجموعه، دارای یک کران بالاست، یعنی این مجموعه در شرط لم زرن صدق می‌کند.

فرض کنید $\{(f_k, J_k)\}_{k\in K}$ زنجیری در $\mathcal{A}$ باشد. دقت کنید که از آنجا که طول زنجیر لزوماً شمارا نیست، مجموعهٔ اندیس آن را $\mathbb{N}$ ننوشته‌ایم. ادعا می‌کنیم که این زنجیر در $\mathcal{A}$ یک کران بالا دارد. زوجِ $(h, L) \in \mathcal{A}$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم و ادعا می‌کنیم که این زوج، کران بالای زنجیر یادشده است. فرض کنید h یک تابع باشد که دامنهٔ آن، مجموعهٔ $\bigcup J_k$ است. همچنین فرض کنید که ضابطهٔ این تابع به صورت زیر باشد:

$$x \in J_k \Rightarrow \quad h(x) = f_k(x)$$

تمرین ۱۱.۱۲. نشان دهید که $(h, L) \in \mathcal{A}$ و برای هر تابعِ (f_k, J_k) در زنجیر یادشده داریم $(f_k, J_k) \leq (h, L)$.

می‌دانیم که هر تابع، یک مجموعه است. از لحاظ مجموعه‌ای، تابعِ h در بالا، همان مجموعهٔ $\bigcup_{k\in K} f_k$ است (همچنین خوب است که تمرینِ ۳۲.۸ را مشاهده کنید).

پس $\mathcal{A}$ شرایط استفاده از لم زرن را داراست. از این رو، بنا به لم زُرن، دارای یک عنصر ماکزیمال است. فرض کنید (p, Q) عنصر ماکزیمالِ $\mathcal{A}$ باشد. کافی است ثابت کنیم که

$$Q = I.$$

اگر عبارت بالا ثابت شود، از آنجا که $(p, Q) \in \mathcal{A}$ و بنا به نحوهٔ تعریفِ $\mathcal{A}$، تابع $p : I \to \bigcup A_i$ یک تابع انتخاب خواهد بود. در واقع وقتی نشان می‌دهیم که دامنهٔ تابعِ p کلِ I است، یعنی این تابع دیگر «جزئی» نیست، بلکه یک تابع انتخاب است.

فرض کنید $Q \neq I$ و $i \in I - Q$. فرض کنید $a_i \in A_i$ عنصر دلخواهی باشد. داریم

$$\underbrace{p \cup \{(i, a_i)\}}_{r} \in \mathcal{A}$$

و

$$P \lneqq r.$$

فرمول بالا، با ماکزیمال بودن p متناقض است. در واقع نشان دادیم که اگر p یک تابع انتخاب نباشد، آنگاه یک تابعِ انتخابِ جزئیِ بزرگتر از آن در مجموعهٔ $\mathcal{A}$ پیدا می‌شود و این ماکزیمال بودن تابعِ p در مجموعهٔ $\mathcal{A}$ را نقض می‌کند. □

بیایید یک بار دیگر اثبات را مرور کنیم. فرض کنیم لم زرن درست باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که اصل انتخاب درست است. فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و به دنبال یک تابع انتخاب از I به $\bigcup A_i$ هستیم. نخست مجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{A} = \{(f, J) \mid J \subseteq I, \quad \forall j \in J \quad f(j) \in A_j \text{ و } f : J \to \bigcup_{i\in I} A_i \text{ یک تابع است}\}$$

روی مجموعهٔ بالا یک ترتیب تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با آن ترتیب، مجموعه بالا یک مجموعهٔ ناتهی مرتب است. سپس نشان می‌دهیم که هر زنجیر با آن ترتیب دارای یک کران بالاست، پس مجموعهٔ بالا در شرایط لم زرن صدق می‌کند، و بنا به این لم، عنصر ماکزیمال دارد. عنصر ماکزیمال این مجموعه، همان تابع انتخابی است که در پی آن هستیم.
این بخش را با یک قضیهٔ خیلی زیبا به پایان می‌بریم. می‌دانیم که اعداد طبیعی همیشه با هم قابل مقایسه‌اند؛ یعنی اگر m, n دو عدد طبیعی باشند همواره یا $m \leq n$ یا $n \leq n$. در درسهای گذشته با اعداد جدیدی به نام کاردینال‌ها آشنا شدیم و برای آن‌ها یک ترتیب تعریف کردیم. گفتیم که اگر u, v دو کاردینال باشند و $u = \mathbf{card}(A)$ و $v = \mathbf{card}(B)$ آنگاه می‌گوییم $u \leq v$ هرگاه یک تابع یک‌به‌یک از A به B موجود باشد. حال طبیعی است از خودمان بپرسیم که آیا لزوماً دو کاردینال با هم قابل مقایسه‌اند؟ به بیان دیگر اگر A, B دو مجموعه باشند آیا لزوماً یا تابعی یک‌به‌یک از A به B وجود دارد یا تابعی یک‌به‌یک از B به A؟ پاسخ سوال بالا (در نتیجهٔ لم زرن) مثبت است.

قضیه ۲۲.۱۲. فرض کنید X و Y دو مجموعهٔ ناتهی دلخواه باشند. آنگاه یا یک تابعِ یک‌به‌یک از X به Y وجود دارد و یا یک تابع یک‌به‌یک از Y به X وجود دارد. در نتیجه اگر α, β دو کاردینال باشند، آنگاه یا $\alpha \leqslant \beta$ یا $\beta \leqslant \alpha$.

اثبات. ایدهٔ اثبات پیش رو مشابه ایدهٔ اثبات قضیهٔ قبل است، به همین خاطر در توضیح آن کمی خلاصه‌گویی کرده‌ایم. مجموعهٔ $\mathcal{A}$ را متشکل از تمامی توابع جزئی یک‌به‌یک از X به Y بگیرید؛ به بیان دیگر قرار دهید:

$$\mathcal{A} = \{(f, Z) \mid Z \subseteq X, \quad f : Z \to Y \text{ یک تابع یک‌به‌یک است}\}.$$

توجه کنید که $\mathcal{A} \neq \varnothing$، زیرا اگر $y_\circ \in Y$ و $z_\circ \in X$ آنگاه تابع $f = \{(z_\circ, y_\circ)\}$ در $\mathcal{A}$ است. به بیان دقیق‌تر $(f, \{z_\circ\}) \in \mathcal{A}$. ترتیب زیر را روی $\mathcal{A}$ تعریف کنید:

$$(f_1, Z_1) \leqslant (f_2, Z_2) \iff f_1 \subseteq f_2.$$

فرض کنید $\{(f_j, Z_j)\}_{j\in J}$ زنجیری در A باشد آنگاه این زنجیر دارای یک کران بالا در $\mathcal{A}$ است که این کران بالا، مشابه قضیهٔ قبل، اجتماع تمام توابع به کار رفته در این زنجیر است. بنا به لم زرن، $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکزیمال

است. فرض کنید تابع جزئیِ $P : Z \to Y$ عنصر ماکزیمال مورد نظر باشد. به بیان دیگر فرض کنید $(P, Z) \in \mathcal{A}$ ماکزیمال باشد. اگر $Z = X$ حکم اثبات شده است، یعنی تابع یک‌به‌یکِ P از X به Y پیدا شده است و این مطلوبِ قضیه است. اما اگر $Z \neq X$ آنگاه از دو حال خارج نیست.

۱. یا P پوشاست.

۲. یا P پوشا نیست (مثلاً P عنصر $y \in Y$ را نمی‌پوشاند).

در حالتی که P پوشا نیست، فرض کنید $x \in X - Z$. حال $P \cup \{(x, y)\} \in \mathcal{A}$ و این ماکزیمال بودن P را نقض می‌کند.
در حالتی که P پوشا است، بنا به قضیهٔ ۲۶.۸ یک تابع یک‌به‌یک از Y به X وجود دارد. □

تمرین ۱۲.۱۲. فرض کنید که $\mathcal{A}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد که تحت اجتماع زنجیرها بسته است؛ یعنی اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathcal{A}$ باشد، به طوری که برای هر $i < j \in I$ داریم $A_i \subseteq A_j$، آنگاه $\bigcup A_i \in \mathcal{A}$. نشان دهید که $\mathcal{A}$ حاوی یک مجموعه است که زیرمجموعهٔ سرهٔ هیچکدام از مجموعه‌های موجود در $\mathcal{A}$ نیست.

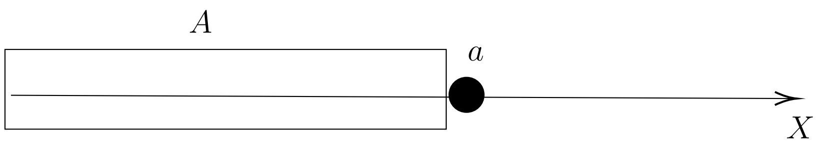
تمرین ۱۳.۱۲. فرض کنید همهٔ افراد یک جامعهٔ نامتناهی (!) را با رابطهٔ «دانایی» مرتب جزئی کرده‌ایم، بدین صورت که در مورد برخی افراد می‌دانیم چه کسی از چه کسی داناتر است، اما داناتر بودن برخی از افراد نسبت به هم را اطلاع نداریم. همچنین فرض کنید که می‌دانیم که همیشه وقتی یک تعداد آدم را در نظر می‌گیریم، یک نفر داناتر از همه‌شان وجود دارد. نشان دهید که یک نفر هست که از او داناتر کسی نیست.

۶.۱۲ اصل خوش‌ترتیبی

یک صورت دیگر از اصل انتخاب یا لم زرن، اصل خوش‌ترتیبی است. بنا به این اصل، هر مجموعهٔ دلخواه را می‌توان به نحو مطلوبی تبدیل به یک مجموعهٔ مرتب کرد.

تعریف ۲۳.۱۲. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی باشد. (یعنی یک مجموعهٔ مرتب باشد که همهٔ اعضای آن با هم قابل مقایسه‌اند). می‌گوییم $(X, \leqslant)$ خوش ترتیب است هرگاه هر زیرمجموعه از X دارای یک مینیموم باشد (به بیان دیگر هر زیرمجموعه‌ای یک عضو ابتدا داشته باشد).

خوش‌ترتیبی عملاً به این معنی است که همیشه وقتی بخشی از مجموعهٔ X را جدا می‌کنیم، قسمت باقی‌مانده دارای اولین عنصر است؛ یعنی مثلاً اگر A یک بخش ابتدایی از مجموعهٔ X باشد، عنصری در X مانندِ a وجود دارد که بلافاصله به A «چسبیده» است. این عنصر، مینیمومِ باقی‌ماندهٔ X است:



به خوانندهٔ کنجکاو پیشنهاد می‌کنیم مثال‌ها و تمرین‌های بعدی را نادیده بگیرد و زودتر به سراغ قضیهٔ ۲۶.۱۲ برود.

مثال ۲۴.۱۲. در قضیهٔ ۶.۴ اثبات کردیم که $(\mathbb{N}, \leqslant)$ خوش ترتیب است.

مثال ۲۵.۱۲. $(\mathbb{R}, \leqslant)$ خوش ترتیب نیست. برای مثال بازهٔ $(۰, ۱) \subseteq \mathbb{R}$ دارای مینیموم نیست. همچنین $(-\infty, ۰)$ مینیموم ندارد.

تمرین ۱۴.۱۲. دقیقاً با همان ایدهٔ اثباتِ قضیهٔ ۶.۴ نشان دهید که $(X, \leq)$ خوش‌ترتیب است اگر و تنهااگر هیچ دنبالهٔ نزولیِ به صورتِ

$$x_۰ > x_۱ > x_۲ > \dots$$

از اعضای X پیدا نشود. به نقش اصل انتخاب در این اثبات دقت داشته باشید.

تمرین ۱۵.۱۲. نشان دهید که اصل انتظام بیان‌گر این است که $(V, \in)$ خوش‌ترتیب است.

قضیه ۲۶.۱۲ (اصل خوش ترتیبی)**.** فرض کنید X یک مجموعه باشد. می‌توان یک ترتیبِ $\leqslant$ روی X قرار داد، به طوری که $(X, \leqslant)$ خوش ترتیب باشد.

دقت کنید که $\mathbb{R}$ با ترتیب معمولی خودش، خوشترتیب نیست؛ ولی بنا به اصل خوشترتیبی می‌توان یک ترتیب دیگر روی آن در نظر گرفت که با آن ترتیب، خوش ترتیب باشد. پیش از آن که قضیهٔ بالا را اثبات کنیم، نشان می‌دهیم که در صورت پذیرش آن، اصل انتخاب تبدیل به یک قضیه می‌شود:

قضیه ۲۷.۱۲. اصل انتخاب از اصل خوش ترتیبی نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید اصل خوش ترتیبی درست باشد. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. هدفمان، تعریف یک تابع $f : I \to \bigcup A_i$ است به طوری که $f(i) \in A_i$ برای هر $i \in I$. اگر این هدف برآورده شود، در واقع اصل انتخاب را اثبات کرده‌ایم.

از آنجا که اصل خوش ترتیبی را داریم، می‌دانیم که روی هر A_i یک ترتیب $\leqslant_i$ وجود دارد به طوری که $(A_i, \leqslant_i)$ خوش ترتیب است. پس تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(i) = \min_{\leqslant_i} A_i.$$

و به همین راحتی، اثبات به پایان می‌رسد! □

برای اثبات اصل انتخاب با استفاده از خوشترتیبی، تابع انتخاب را تابعی در نظر گرفته‌ایم که از هر مجموعه، مینیموم آن را برمی‌دارد. در اینجا دیگر تابع انتخاب دارای یک ضابطه است و وجودش به اصل انتخاب نیازی ندارد.

در زیر نشان داده‌ایم که چگونه با استفاده از لم زرن می‌توان اصل خوشترتیبی را ثابت کرد.

قضیه ۲۸.۱۲. لم زُرن اصل خوش ترتیبی را نتیجه می‌دهد.

اثبات. یادآوریِ می‌کنیم که بنا به لم زرن، اگر $(X, \leqslant)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی و ناتهی باشد به طوری که هر زنجیر $A \subseteq X$ دارای کران بالا در X باشد، آنگاه X دارای یک عنصرِ ماکزیمال است.

بیایید دوباره پیش از وارد شدن به جزئیات اثبات، روش آن را توضیح دهیم: یک مجموعهٔ دلخواه را در نظر می‌گیریم، روی بخش‌هایی از آن که به صورت اتفاقی خوش‌ترتیب هستند، یک ترتیب تعریف می‌کنیم. ترتیب این بخش ها در شرایط لم زرن صدق خواهد کرد، پس یک بخش خوش‌ترتیبِ ماکزیمال پیدا می‌شود. نشان می‌دهیم که این بخشِ خوش‌ترتیب ماکزیمال، همان کل مجموعه است.

و اما بیان اثبات به صورت رسمی؛ فرض کنیم لم زُرن درست باشد و Y یک مجموعهٔ دلخواه باشد. هدفمان تعریف یک ترتیبِ $\leqslant_Y$ روی Y است به طوری که $(Y, \leqslant_Y)$ یک مجموعهٔ خوش ترتیب باشد.
مجموعهٔ $\mathcal{A}$ را متشکل از بخش‌هایی از Y در نظر می‌گیریم که به طور اتفاقی دارای یک ترتیب خوش‌ترتیب هستند؛ به طور دقیق‌تر:

$$\mathcal{A} = \{(B, \leqslant_B) \mid \text{یک مجموعهٔ خوش ترتیب است } (B, \leqslant_B) \text{ و } B \subseteq Y\}.$$

ادعا می‌کنیم که چنین بخش‌هایی وجود دارند؛ یعنی $\mathcal{A}$ ناتهی است. فرض کنید $y_۰ \in Y$. روی $\{y_۰\}$ ترتیب زیر را در نظر بگیرید:

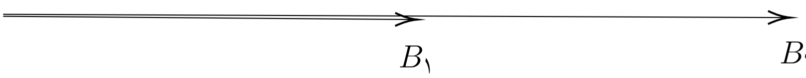
$$y_۰ \leqslant y_۰.$$

مجموعهٔ $\{y_۰\}$ به همراه ترتیبِ بالا در $\mathcal{A}$ است. پس $\mathcal{A} \neq \varnothing$. در گام دوم، روی $\mathcal{A}$ یک ترتیب تعریف می‌کنیم. تعریف کنید:

$$(B_۱, \leqslant_{B_۱}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_۲, \leqslant_{B_۲}) \iff (B_۱ \subseteq B_۲) \wedge \text{ باشد } \leqslant_{B_۱} \text{ گسترشی از ترتیب } \leqslant_{B_۲}$$

$$\wedge \quad \forall b_۱ \in B_۱ \forall b_۲ \in B_۲ \quad b_۱ \leq_{B_۲} b_۲$$

در واقع $B_۱$ را زمانی کمتر از $B_۲$ گرفته‌ایم که $B_۱$ بخشی از $B_۲$ باشد و در ابتدای آن قرار گرفته باشد:



در گام سوم ادعا می‌کنیم که هر زنجیر در $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای کران بالا در $\mathcal{A}$ است. فرض کنید

$$(B_۱, \leqslant_{B_۱}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_۲, \leqslant_{B_۲}) \leqslant_{\mathcal{A}} (B_۳, \leqslant_{B_۳}) \leqslant_{\mathcal{A}} \dots$$

یک زنجیر دلخواه در $\mathcal{A}$ باشد.[۶] ادعا می‌کنیم که این زنجیر دارای کران بالا در $\mathcal{A}$ است: قرار دهید $B = \bigcup B_i$ و روی B ترتیب زیر را تعریف کنید.

$$x \leqslant_B y \iff \exists i \quad \big(x, y \in B_i \ \wedge \ x \leqslant_{B_i} y\big).$$

تمرین ۱۶.۱۲. نشان دهید که $(B, \leqslant_B) \in \mathcal{A}$ و همچنین نشان دهید که $(B, \leqslant_B)$ یک کران بالا برای زنجیر یادشده است.

احتمالاً قسمت سختِ حل تمرین بالا نشان دادن این است که هر زیرمجموعه از B دارای یک مینیموم است؛ پس بیایید این گفته را اثبات کنیم. فرض کنید $C \subseteq B$. می‌خواهیم عنصر مینیممِ C را بیابیم. از آنجا که $C \subseteq \bigcup B_i$ واضح است که i وجود دارد به طوری که

$$C \cap B_i \neq \varnothing.$$

می‌دانیم که $C \cap B_i \subseteq B_i$ پس از آنجا که B_i خوش‌ترتیب است، $C \cap B_i$ دارای یک عنصر مینیموم است. فرض کنیم نام این عنصر t باشد. ادعا می‌کنیم که $t = \min C$. فرض کنید $y \in C$ عنصر دلخواهی باشد. کافی است نشان دهیم که $t \leq y$. از آنجا که $y \in C \subseteq \bigcup B_i$ می‌دانیم که $i_۱ \in I$ وجود دارد به طوری که $y \in B_{i_۱}$. از آنجا که B_i ها زنجیر می‌سازند، یا $B_i \subseteq B_{i_۰}$ یا $B_{i_۰} \subseteq B_i$. اگر $B_i \subseteq B_{i_۰}$ آنگاه هر عنصر در B_i از تمام عناصرِ $B_{i_۰}$

---

[۶] زنجیرها می‌توانند ناشمارا باشند و اینجا تنها برای سادگی، زنجیر را شمارا گرفته‌ایم.

کمتر است، پس $t \leq y$. اگر $B_{i_0} \subseteq B_i$ آنگاه $C \cap B_{i_0} \subseteq C \cap B_i$ و از این رو $\min C \cap B_i$ از تمام عناصرِ $C \cap B_{i_0}$ از جمله y کمتر است.

بنا بر این، (ب حل تمرین بالا دیدیم که) هر زنجیر در $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای کران بالاست . بنا به لم زُرن $(\mathcal{A}, \leqslant_{\mathcal{A}})$ دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال به نام $(C, \leqslant_C)$ است.

ادعا می‌کنیم که $C = Y$. اگر این ادعا اثبات شود، در واقع اثبات شده است که خودِ Y خوش‌ترتیب است.

برای اثبات ادعا فرض کنید $y_0 \in Y - C$. هدفمان در اینجا پیدا کردن یک عنصر بزرگتر از $(C, \leqslant_C)$ در $\mathcal{A}$ است. قرار دهید $C' = C \cup \{y_0\}$ و فرض کنید $\forall c \in C \quad y_0 \geqslant c$. آنگاه $(C', \leqslant_{C'}) \in \mathcal{A}$ و $(C', \leqslant_{C'}) \gneqq_{\mathcal{A}} (C, \leqslant_C)$ و این متناقض با فرضِ ماکزیمال بودن C است. $\square$

دقت کنید که در بالا با استفاده از لم زرن ثابت کردیم که روی هر مجموعه‌ای می‌توان یک ترتیب تعریف کرد که مجموعهٔ مورد نظر با آن خوشترتیب باشد. در اثبات بالا، تنها وجود یک ترتیب را ثابت کردیم بی آنکه کوچکترین ایده‌ای دربارهٔ چگونگی این ترتیب به دست بدهیم. این نوع اثبات‌ها از توانِ بالای لم زرن ناشی می‌شوند. در درسهای جبری (احتمالاً در ترم‌های آینده) قضایای فراوانی را خواهید دید که همه بر پایهٔ لم زرن بنا شده‌اند.

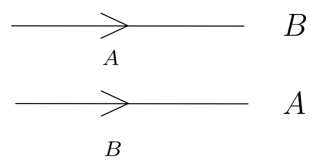
تا اینجا ثابت کرده‌ایم که:

اصل‌خوش‌ترتیبی $\longrightarrow$ لم‌زرن $\longleftrightarrow$ اصل‌انتخاب

در واقع نشان داده‌ایم که سه اصل بالا با هم معادلند؛ هر کدام از دیگری نتیجه می‌شوند.

اصل خوشترتیبی مقدمهٔ مقولهٔ مهم دیگری در نظریهٔ مجموعه‌ها، به نام اُردینال‌ها است که در بخش بعدی بدان ورود خواهیم کرد. اما برای خواننده‌ای که ممکن است به فصل آینده نرسد، ایده‌ای دربارهٔ اُردینال‌ها را در همین جا فراهم آورده‌ایم:

گفتیم که بنا اصل خوشترتیبی هر مجموعه‌ای را می‌توان دارای ترتیبی فرض کرد که با آن ترتیب خوشترتیب باشد. اگر $(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ خوش ترتیب باشند آنگاه (بنا به قضیه‌ای) یا A بخشی آغازین از B است یا B بخشی آغازین از A است:



منظور از این که A بخش آغازینِ B است، عبارت زیر است:

$$\exists y \in B \quad A = \{x \in B \mid x \leqslant y\}.$$

پس مجموعه‌های خوشترتیب همه مانند اعداد پشت سر هم قرار می‌گیرند. به اعدادی که از این طریق حاصل می‌شوند، اعداد ترتیبی، یا **اُردینال‌ها** گفته می‌شود. برخی از اُردینال‌ها را در زیر نوشته‌ایم:

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega, \omega+\omega+\omega, \ldots, \omega.\omega, (\omega.\omega)+1, \ldots, \omega.\omega+\omega, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

دقت کنید که اُردینال‌های $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega$ و بسیاری اُردینال‌های دیگر بعد از آن‌ها، از لحاظ کاردینالی همه برابر با $\aleph_0$ هستند. به بیان دیگر اگر ترتیب روی آن‌ها در نظر گرفته نشود، همه، هم‌اندازه با هم هستند. اما

وقتی پای ترتیب به میان می‌آید، $\omega + ۱$ دارای عنصری است که از همهٔ عناصرِ ω بزرگتر است؛ پس $\omega + ۱$ از لحاظ اُردینالی با ω برابر نیست. حساب اُردینال‌ها داستان مفصل خود را دارد: روی آن‌ها هم جمع و ضرب و توان تعریف می‌شود و این اعمال، با آن‌هائی که برای کاردینال‌ها تعریف کردیم کاملاً متفاوتند. می‌نامیم.

خلاصهٔ فصل دوازدهم. اصل انتخاب بیان‌گر این است که اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های ناتهی باشد، یک تابعِ انتخاب، به صورتِ $f : I \to \bigcup A_i$ وجود دارد. ویژگی مهم تابع انتخاب این است که برای هر $i \in I$ داریم $f(i) \in A_i$. لم زُرن بیان‌گر این است که مجموعهٔ مرتبی که همهٔ زنجیرهایش کران‌دارند، دارای عنصری است که از آن بزرگ‌تر عنصری وجود ندارد. اصل‌خوش‌ترتیبی نیز بیان‌گر این است که همهٔ مجموعه‌ها در جهان مجموعه‌ها را می‌توان به نحو مطلوبی مرتب کرد. این نحو مطلوب به گونه‌ای است که هر وقت بخشی از مجموعه، جدا شود بخش باقی‌مانده دارای کوچک‌ترین عنصر باشد. سه قضیهٔ یادشده در دنیای ریاضیات، قدرت مساوی با هم دارند و از همدیگر نتیجه می‌شوند.

فصل ۱۳

اُردینال‌ها، ناتمامیت دوم و استقلال حقایق از نظریهٔ مجموعه‌ها

یک روز شیخ ابوسعید قدس اللّه روحه العزیز در نشابور مجلس می‌گفت، خواجه بوعلی سینا از در خانقاه شیخ درآمد و ایشان هر دو پیش ازین یکدیگر را ندیده بودند، اگرچه میان ایشان مکاتبه رفته بود. چون بوعلی از در درآمد، شیخ روی بِوِیْ کرد و گفت حکمت‌دانی آمد. خواجه بوعلی درآمد و بنشست، شیخ با سر سخن رفت و مجلس تمام کرد و در خانه رفت. بوعلی سینا با شیخ در خانه شد و در خانه فراز کردند و با یکدیگر سه شبانروز بخلوت سخن گفتند. بعد سه شبانروز خواجه بوعلی سینا برفت؛ شاگردان او سؤال کردند کی شیخ را چگونه یافتی؟ گفت هرچ من می‌دانم او می‌بیند، و مریدان از شیخ سؤال کردند کی ای شیخ، بوعلی را چگونه یافتی؟ گفت هرچ ما می‌بینیم او می‌داند.
اسرارالتوحید

۱.۱۳ اُردینال‌ها

۱.۱.۱۳ معرفی اُردینال‌ها

در بخش‌های گذشته دربارهٔ کاردینال‌ها صحبت کردیم و مفاهیمی مانند جمع و ضرب و ترتیب آن‌ها را مورد بررسی قرار دادیم. بار ریاضیاتی آن مباحث بیشتر روی اصل انتخاب بود که البته لم زرن و اصل خوش‌ترتیبی صورت‌های دیگری از آن هستند. اثباتِ لم زُرن با استفاده از اصل انتخاب، اثبات اصل خوش‌ترتیبی و نیز اثبات این که برای یک کاردینال نامتناهیِ κ داریم $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ با استفاده از آن تکنولوژی، دچار پیچیدگی‌های مصنوعی فراوان است.

در این بخش می‌خواهیم بار ریاضیاتی را بر دوش اصل انتظام بگذاریم و با استفاده از آن اثبات‌های آسان‌تری برای این قضایا بیان کنیم. پیش از آن بد نیست یک بار دیگر اصل انتظام را بیان کنیم: روی جهانِ همهٔ مجموعه‌ها، $\mathbf{V}$، رابطهٔ $\in$ را «شبیه»[۱] یک «ترتیب» تصور کنید. اصل انتظام می‌گوید که هر مجموعه‌ای (با این ترتیب) دارای عنصر مینیموم (و البته به بیان درست‌تر، عنصر مینی‌مال) است. یعنی هر مجموعه‌ای مانندِ x دارای یک عنصر مانند y است به طوری که هیچ عنصری در x وجود ندارد که با ترتیبِ $\in$ از y کوچکتر باشد. ترکیب اصول انتخاب، جانشانی و وجود مجموعهٔ نامتناهی، منجر به بیان دیگری از اصل انتظام به صورت پیش رو می‌شد: در جهان $\mathbf{V}$ هیچ دنبالهٔ نزولیِ $\ldots \ni a_1 \ni a_0$ وجود ندارد.

[۱] علت این که از کلمهٔ شبیه استفاده کرده‌ایم این است که $\in$ لزوماً همهٔ ویژگی‌های ترتیب، مثلاً متعدی بودن را دارا نیست.

گفتیم که مجموعه‌ای به نام مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد که ترتیبِ آن همان $\in$ است و این مجموعه با ترتیبِ یادشده، خوش‌ترتیب است؛ یعنی هر زیرمجموعه‌اش دارای عنصر ابتدا است. در اینجا $\in$ واقعاً یک ترتیب است؛ یعنی ویژگی‌های پادتقارنی، انعکاسی و متعدی بودن را داراست. نکتهٔ جالب‌تر این است که هر عددِ طبیعی، یعنی هر عضوِ مجموعهٔ اعداد طبیعی، نیز با ترتیبِ $\in$ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب است. این دو ایده، یعنی اصلِ انتظام و ویژگی خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی، ایده‌های اصلی تعریف اُردینال هستند.

تعریف ۱.۱۳. مجموعهٔ α را یک اُردینال می‌نامیم هرگاه دو ویژگی زیر را داشته باشد:

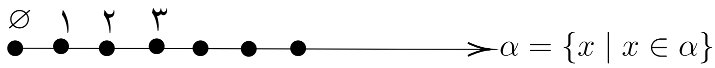
۱. رابطهٔ $\in$ روی α یک ترتیبِ خطی خوش‌ترتیب باشد.

۲. هر مجموعهٔ β که متعلق به یکی از مجموعه‌های موجود در α است، در خودِ α باشد.

ویژگی دوم را می‌توان به صورتِ $\bigcup \alpha \subseteq \alpha$ نوشت. یک بیانِ جذاب‌تر از این واقعیت می‌تواند وضعیت را روشن‌تر کند. فرض کنید $x \in \alpha$. در این صورت:

$$\{y \in \alpha \mid y \in x\} = \{y \in \mathbf{V} \mid y \in x\}.$$

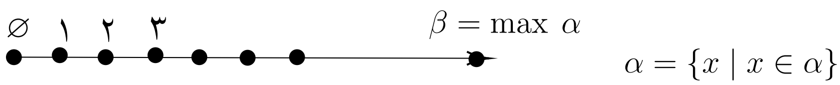
پس یک اُردینال، در واقع بخشی از جهانِ $\mathbf{V}$ است که بدون هیچ «شکافی» با استفاده از رابطهٔ $\in$ مرتب شده است:



همان طور که می‌بینید یک اُردینال باید با تهی شروع شود، مگر این که خودش تهی باشد. بیایید این گفته را اثبات کنیم. اُردینال دلخواهِ α را در نظر بگیرید. بنا به خوش‌ترتیبی، عنصری مانند $x \in \alpha$ وجود دارد به طوری که $x = \min \alpha$. اما، از این که x بنا به رابطهٔ تعلق، کوچکترین است، نتیجه می‌گیریم که عنصری متعلق به x در جهانِ $\mathbf{V}$ وجود ندارد؛ اگر وجود داشت این عنصر نیز بنا به ویژگی دوم در α می‌بود و البته این مینیموم بودنِ x را نقض می‌کرد. پس x باید خودِ مجموعهٔ تهی باشد.

اما چرا باید بعد از تهی، مجموعهٔ $\{\varnothing\} = ۱$ بیاید؟ علت این هم آسان است. دوباره بنا به خوش‌ترتیبی، $\alpha - \{\varnothing\}$ باید دارای مینیموم باشد. دوباره فرض کنید $x = \min \alpha - \{\varnothing\}$. در این صورت اگر مجموعهٔ x بخواهد دارای عنصری باشد، آن عنصر نباید در $\alpha - \{\varnothing\}$ باشد؛ یعنی آن عنصر مجموعهٔ تهی است.

بدین ترتیب، به این نتیجه می‌رسیم که اولاً هر عدد طبیعی، یک اُردینال است؛ ثانیاً شروع هر اُردینالی اعداد طبیعی است. یک اتفاق مهم دیگر نیز ممکن است برای اُردینال‌ها بیفتد:



امکان دارد که اُردینالِ α دارای یک عنصر ماکزیموم باشد، که در این صورت α را یک اُردینال تالی می‌نامیم؛ و نیز امکان دارد که α دارای ماکزیموم نباشد که در این صورت آن را یک اُردینال حدی می‌نامیم.

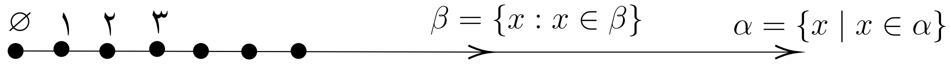
قضیه ۲.۱۳. اُردینالِ α، حدی است اگروتنها اگر $\alpha = \bigcup \alpha$.

اثبات. این که $\bigcup \alpha \subseteq \alpha$ برای هر اُردینالی برقرار است. اگر α حدی باشد و $y \in \alpha$ در این صورت، از آنجا که y ماکزیموم نیست، عنصرِ $x \in \alpha$ وجود دارد به طوری که $y \in x$. این، طبقِ تعریفِ اجتماعِ یک مجموعه، یعنی $y \in \bigcap \alpha$. □

قضیهٔ زیر، که اثبات آن آسان است و آن را به عنوان تمرین رها کرده‌ایم، دلیل نام‌گذاری «تالی» را مشخص می‌کند:

قضیه ۳.۱۳. اگر α یک اُردینال تالی باشد و $y = \max \alpha$، در این صورت $\alpha = y \cup \{y\}$.

گفتیم که شروع اُردینال‌ها همیشه با تهی است و هر دو اُردینال همیشه تا کمی پس از شروع، شبیه به هم هستند. مهمترین ویژگی اُردینال‌ها این است که آن‌ها «در امتداد هم» هستند. یعنی اگر α و β دو اُردینال متفاوت باشند، یکی از ادامه دادن دیگری ایجاد شده است:



قضیه ۴.۱۳. فرض کنید α و β دو اُردینال متفاوت باشند. در این صورت یا α یک بخش اولیهٔ β است و یا β یک بخش اولیهٔ α است.

پیش از آن که اثبات را آغاز کنیم، این توضیح را بدهیم که وقتی می‌گوییم β یک بخش اولیهٔ α است، منظور این است که در عنصری مانند $x \in \alpha$ وجود دارد به طوری که $\beta = \{y \in \alpha \mid y \in x\}$. به بیان دیگر، $\beta = x \in \alpha$. پس این قضیه در واقع بیان‌گر این است که اگر α, β دو اُردینال باشند، آنگاه یا $\alpha \in \beta$ یا $\beta \in \alpha$ و یا $\alpha = \beta$.

اثبات. فرض کنید α و β دو اُردینال متفاوت باشند. می‌دانیم که α و β تا بخشی، با هم مشترک هستند. از طرفی به راحتی می‌توانید دید که $\alpha \cap \beta$ یک اُردینال است.

حال فرض کنید در جایی این دو اُردینال عنصری متفاوت پیدا کنند؛ مثلاً فرض کنید که x اولین مجموعه‌ای باشد که در α هست ولی در β نیست. نشان می‌دهیم که در این صورت β یک بخش اولیهٔ α است؛ در واقع نشان می‌دهیم که $\beta = \{y \in \alpha \mid y \in x\} = x$.

عناصری که از x کمترند، همه در β هستند؛ زیرا در غیر این صورت $\alpha - \beta$ مینیمومی غیر از x خواهد داشت. پس $x \subseteq \beta$.

از طرفی دیگر اگر β عنصری داشته باشد که در x نیست، دارای کوچکترین عنصر با این ویژگی خواهد بود. فرض کنید y کوچکترین عنصری در β باشد که در x نیست. در این صورت $y = x$ زیرا هر چه که در y است در x است. اما این یعنی $x \in \beta$ و این تناقض است. پس $\beta \subseteq x$؛ و از این رو، همان‌طور که ادعا کرده بودیم، $\beta = x$. □

۲.۱.۱۳ کلاس همهٔ اُردینال‌ها و استقرای فرامتناهی

گفتیم که اُردینال بودن یک مجموعهٔ x یعنی این که x با رابطهٔ $\in$ مرتب خطی و خوش‌ترتیب باشد، و نیز $\bigcup x \subseteq x$. این ویژگی‌ها را می‌توان به راحتی در زبانِ مرتبهٔ اول نظریهٔ مجموعه‌ها نوشت. پس اُردینال‌ها تشکیل یک کلاس می‌دهند (یعنی گردایه‌ای از مجموعه‌ها هستند که ویژگی مشخصی دارند). کلاسِ همهٔ اُردینال‌ها را با ord نشان می‌دهیم. جالب اینجاست که خودِ ord همهٔ ویژگی‌های اُردینال بودن را داراست: عناصر متعلق به آن با ترتیبِ $\in$ و به صورت خوش‌ترتیب مرتب شده‌اند:

$$\varnothing \quad ۱ \quad ۲ \quad \cdots \quad \alpha \quad \beta \longrightarrow \mathrm{ord} = \{x \in V \mid x \in \mathrm{ord}\}$$

تنها چیزی که ord از اُردینال بودن کم دارد، مجموعه بودن است:

قضیه ۵.۱۳. کلاسِ ord مجموعه نیست.

اثبات. اگر ord مجموعه بود، اُردینال می‌شد. در این صورت می‌داشتیم $\mathrm{ord} \in \mathrm{ord}$ و این اصل انتظام را نقض می‌کرد. □

از این که ord مجموعه نیست، نتیجه می‌شود که:

قضیه ۶.۱۳. اگر x مجموعه باشد، هیچ تابع یک‌به‌یکی مانند $f : \mathrm{ord} \to x$ وجود ندارد.

اثبات. اگر تابعِ $f : \mathrm{ord} \to x$ یک‌به‌یک باشد، در این صورت می‌توان معکوس آن را از یک زیرمجموعهٔ x به ord تعریف کرد. اما این باعث می‌شود که ord تصویر یک تابع باشد که دامنهٔ آن یک مجموعه است. پس اصل جانشانی موجب می‌شود که ord یک مجموعه باشد و این تناقض است. □

اما در عین حال، ویژگی شبیه اُردینال بودنِ کلاسِ ord منجر به اثبات تعمیمی از استقراء می‌شود:

قضیه ۷.۱۳ (استقرای فرامتناهی)**.** فرض کنید که $p(x)$ یک حکم در مورد مجموعه‌ها باشد. فرض کنید برای هر اُردینالِ α جملهٔ زیر درست باشد:

$$\big(\forall x \in \alpha \quad p(x)\big) \to p(\alpha)$$

یعنی اگر حکم p برای اُردینال‌های کمتر از α درست باشد، از این نتیجه شود که حکمِ p برای α هم درست است. آنگاه

$$\forall \alpha \in \mathrm{ord} \quad p(\alpha).$$

اثبات. فرض کنید حکم p ویژگی گفته شده را داشته باشد. اگر این حکم برای همهٔ اُردینال‌ها برقرار نباشد، بنا به خوش‌ترتیبیِ ord کوچکترین اُردینالِ α به طوری که حکم p برای آن برقرار نباشد، وجود دارد. اما در این صورت حکم p برای همهٔ اُردینال‌های کمتر از α برقرار است؛ چون همان گونه که گفتیم اولین جایی که حکم برقرار نیست، α است. از این بنا به فرض استقراء نتیجه می‌شود که حکم برای α درست باشد و این تناقض است. □

استقرای اعداد طبیعی، حالت خاصی از استقرای فرامتناهی است. در واقع مجموعهٔ اعداد طبیعی، خودش یک اُردینال است که کوچکترین اُردینال حدی است.

می‌شد تعریف کنیم که مجموعهٔ a یک عدد طبیعی است هرگاه یک اُردینال باشد که هر زیرمجموعه‌اش دارای عنصر ماکزیموم است. همچنین می‌شد اصل وجود مجموعهٔ متناهی را با اصل وجود حداقل یک اُردینال حدی جایگزین کرد.

همچنین مشابه آنچه در مورد استقرای اعداد طبیعی گفتیم، استقرای فرامتناهی نیز منجر به قضیهٔ «بازگشت فرامتناهی» می‌شود. این قضیه به ما کمک می‌کند که از ord به جهان $\mathbf{V}$ به صورت استقرایی تابع تعریف کنیم؛ بدین صورت که مقدار تابع مورد نظر در یک اُردینال α به مقادیر آن در x های متعلق به α بستگی داشته باشد.

۳.۱.۱۳ اثبات لم زُرن و اصل خوش‌ترتیبی

دو قضیهٔ ۶.۱۳ و ۷.۱۳ منجر به ارائهٔ اثبات‌های ساده‌ای برای لم زرن و اصل خوش‌ترتیبی می‌شوند. یادآوری می‌کنیم که منظور از یک مجموعهٔ مرتب جزئی، یک مجموعهٔ $(X,\leq)$ است که در ترتیب روی آن، لزوماً هر دو عنصر قابل مقایسه با هم نیستند. مجموعهٔ $A\subseteq X$ را یک زنجیر در X می‌نامیم هرگاه همهٔ عناصر آن با هم قابل مقایسه باشند.

قضیه ۸.۱۳ (لم زُرن). فرض کنید $(X,\leq)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی ناتهی باشد، به طوری که هر زنجیرِ $A\subseteq X$ دارای کران بالا در X باشد. در این صورت X دارای حداقل یک عنصرِ ماکزیمال است.

اثبات. به برهان خلف فرض کنید که X ویژگی‌های یادشده را داشته باشد ولی دارای عنصر ماکزیمال نباشد. تابعِ $f:\mathrm{ord}\to X$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(\alpha)=\text{یک کرانِ بالا برای مجموعهٔ}$$

$$X-\{f(\beta)|\beta\in\alpha\}.$$

در تعریف تابع بالا، از اصل انتخاب و نیز از قضیهٔ بازگشت فرامتناهی استفاده کرده‌ایم. اگر مجموعهٔ X دارای عنصر ماکزیمال نباشد، تابعِ فوق تابعی یک‌به‌یک از کلاس ord به مجموعهٔ X است؛ و این قضیهٔ ۶.۱۳ را نقض می‌کند. □

یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ مرتبِ خطیِ $(X,\leq)$ را خوش‌ترتیب می‌نامیم هرگاه هر زیرمجموعه از آن دارای مینیموم باشد.

قضیه ۹.۱۳ (اصل خوش‌ترتیبی). فرض کنید X یک مجموعهٔ دلخواه باشد. در این صورت می‌توان روی X یک ترتیبِ $\leq$ قرار داد به گونه‌ای که $(X,\leq)$ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب شود.

اثبات. تابعِ $f:\mathrm{ord}\to X$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(\alpha)=\text{یک عنصر انتخاب‌شده در}$$

$$X-\{f(\beta)|\beta\in\alpha\}.$$

در تعریف تابع بالا هم از بازگشتِ فرامتناهی و اصل انتخاب استفاده کرده‌ایم. تابع فوق تمامِ X را پوشش می‌دهد؛ زیرا در غیر این صورت X از کلاس ord بزرگتر می‌شود. به دلیل مشابه، دامنهٔ این تابع نمی‌تواند تمامِ ord باشد؛ پس بخشی ابتدایی از آن، یعنی یک اُردینال است.

پس X در یک تناظر یک‌به‌یک با یک اُردینال قرار دارد. می‌توان ترتیب همان اُردینال را روی X در نظر گرفت و X با این ترتیب، خوش‌ترتیب است. □

۴.۱.۱۳ الف‌های دیگر

گفتیم که $\aleph_0$ اولین کاردینال ناشماراست. همچنین $2^{\aleph_0}$ یک کاردینال بزرگتر از $\aleph_0$ است؛ پس مجموعهٔ کاردینال‌های بزرگتر از $\aleph_0$ ناتهی است. هر کدام از این کاردینال‌ها، یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب، یعنی یک اُردینال هستند. پس کوچکترین کاردینال اکیداً بزرگتر از $\aleph_0$ وجود دارد. این کاردینال را با $\aleph_1$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب، کاردینال‌های

$$\aleph_0<\aleph_1<\aleph_2<\dots$$

نیز تعریف می‌شوند. اما پس از کاردینال‌های n ام نوبت به کادرینالِ ω ام می‌رسد. داریم

$$\aleph_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \aleph_n$$

پس از آن اُردینالِ $\aleph_{\omega+1}$ می‌آید و الفها به همین صورت ادامه می‌یابند و برای هر اُردینالِ α یک کاردینالِ $\aleph_\alpha$ وجود دارد. پس در کلاس کاردینال‌ها، هر کاردینالی یک شماره دارد که شمارهٔ آن یک اُردینال است.

۲.۱۳ اثبات این که هر دو کاردینال با هم قابل مقایسه‌اند و $\kappa \cdot \kappa = \kappa$

برای درک بهتر مطالب این بخش، توجه به تفاوتِ ترتیب کاردینال‌ها و اُردینال‌ها اهمیت خاصی دارد. اگر κ, λ دو کاردینال باشند در این صورت $\kappa \leq \lambda$ یعنی یک تابع یک‌به‌یک از κ، یا مجموعه‌ای که هم‌اندازهٔ κ است، به λ، یعنی مجموعه‌ای که هم‌اندازهٔ λ است وجود دارد. اما وقتی α, β دو اُردینال هستند، $\alpha < \beta$ یعنی $\alpha \in \beta$؛ و این یعنی α بخش اولیه‌ای از β است.

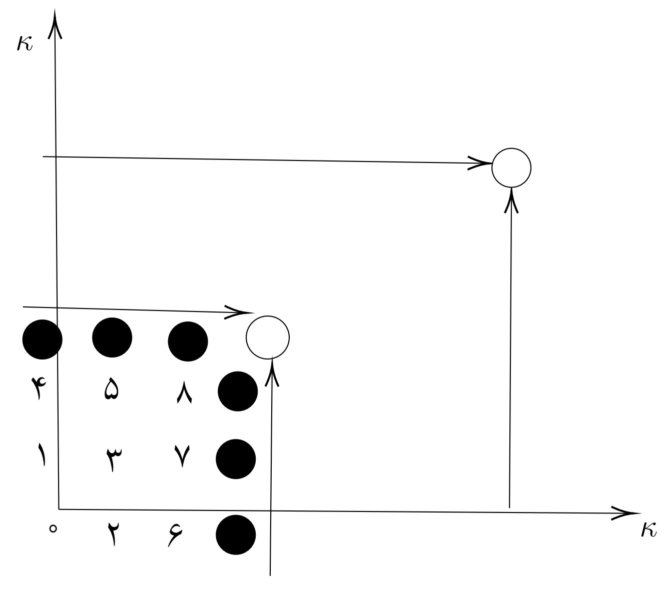
قضیه ۱۰.۱۳. فرض کنید κ و λ دو کاردینال باشند. در این صورت یا $\kappa \leq \lambda$ و یا $\lambda \leq \kappa$.

اثبات. دو کاردینالِ κ, λ به طور خاص دو مجموعه هستند؛ پس بنا به قضیهٔ ۹.۱۳ هر کدام از آن‌ها با یک اُردینال در تناظر یک‌به‌یک هستند. از طرفی از بین دو اُردینال، یکی بخش اولیهٔ دیگری است؛ و این مطلوب ما را حاصل می‌کند. مثلاً اگر κ در تناظر با اُردینالِ α باشد و λ در تناظر با اُردینالِ β باشد و α بخش اولیهٔ β باشد، به راحتی می‌توان نگاشتی پیدا کرد که κ را در λ به صورت یک‌به‌یک بنشاند. □

قضیه ۱۱.۱۳. فرض کنید κ یک کاردینال نامتناهی باشد. در این صورت

$$\kappa \cdot \kappa = \kappa.$$

اثبات. می‌دانیم که $\kappa \cdot \kappa$ اندازهٔ مجموعهٔ $\kappa \times \kappa$، یعنی حاصل‌ضرب دکارتی κ در κ را مشخص می‌کند. مجموعهٔ $\kappa \times \kappa$ را به صورت زیر مرتب کنید:



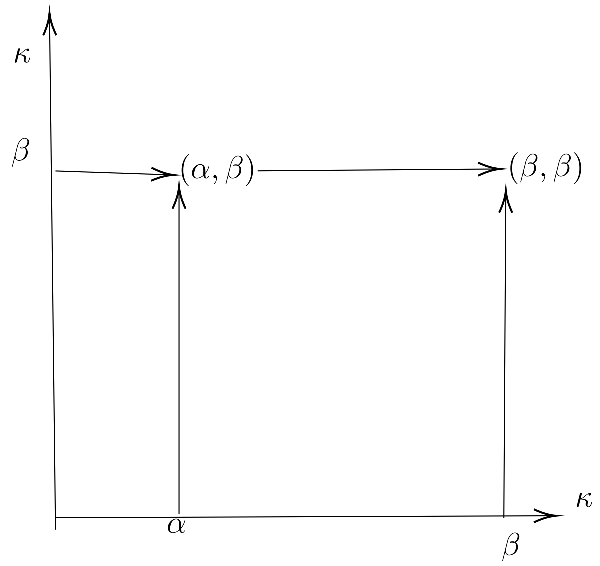
روش بالا، نوعی «کاشی‌کاری» است. ابتدا یک عنصر، با طول و عرض برابر، مانند دایره‌های توخالی در شکل بالا در نظر گرفته می‌شود، سپس از دو طرف به سمت آن کاشی‌کاری صورت می‌گیرد. ضابطهٔ ترتیب یادشده به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&(x,y)\prec(z,t)\iff\\&\big(\max\{x,y\}\in\max\{z,t\}\big)\vee\\&\big(\max\{x,y\}=\max\{z,t\}\wedge x\in z\big)\vee\\&\big(\max\{x,y\}=\max\{z,t\}\wedge x=z\wedge y\in t\big).\end{aligned}$$

مجموعهٔ $\kappa\times\kappa$ با ترتیب کاشی‌کاری بالا، خوش‌ترتیب است؛ یعنی در تناظر یک‌به‌یک با اُردینال قرار دارد. بیایید این اُردینال را با $(\kappa\times\kappa,\prec)$ نشان دهیم. یک نکتهٔ مهم در ادامهٔ این اثبات، توجه همزمان به ترتیبِ $\prec$ است که موجب خوش‌ترتیبیِ $\kappa\times\kappa$ شده است و ترتیبِ $\in$ که ترتیب تعلق بین اُردینال‌هاست.

واضح است که $\kappa \in_= (\kappa\times\kappa,\prec)$؛ زیرا اُردینالِ κ به همراه ترتیبش در $(\kappa\times\kappa,\prec)$ مشهود است.

فرض کنید $\kappa \ni (\kappa\times\kappa,\prec)$. در این صورت κ یک بخشِ ابتداییِ $(\kappa\times\kappa,\prec)$ می‌شود؛ یعنی اُردینال‌های $\alpha,\beta\in\kappa$ موجودند به طوری که $\kappa=(\alpha\times\beta,\prec)$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $\alpha\in\beta$:



اما در این صورت

$$(\kappa,\in)=\big((\alpha,\beta),\prec\big)\in\big((\beta,\beta),\prec\big).$$

اما در این جا، پای استقرا به میان می‌آید: فرض کنید که برای اُردینال‌های کمتر از κ مانندِ β بدانیم که اندازهٔ $\beta\times\beta$ با β برابر است؛ در این صورت $(\beta,\in)=\big((\beta,\beta),\prec\big)$. ترکیب این گفته با عبارت بالا منجر به این می‌شود که $\kappa\in\beta$؛ ولی این یک تناقض است زیرا $\beta\in\kappa$. $\square$

نتیجه ۲.۱۳. فرض کنید α,β دو کاردینال باشند به طوری که $\alpha<\beta$. در این صورت $\alpha\cdot\beta=\beta$.

اثبات. داریم

$$\beta\in\alpha\cdot\beta<\beta\cdot\beta=\beta.$$

یعنی از یک طرف از β به $\alpha\cdot\beta$ تابعی یک‌به‌یک وجود دارد و از طرفی از $\alpha\cdot\beta$ به β تابعی یک‌به‌یک وجود دارد. بنا به قضیهٔ کانتور برنشتاین، تساوی مورد نظر حاصل می‌شود. $\square$

نتیجه ۱۳.۱۳. اگر α, β دو کاردینال باشند به طوری که $\alpha \leqslant \beta$، آنگاه $\alpha + \beta = \beta$.

اثبات. از قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین و نامساوی‌های زیر، نتیجهٔ مورد نظر ما حاصل می‌شود:

$$\beta \leqslant \alpha + \beta \leqslant \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta = \beta + \beta = \beta.$$

□

گفتیم که ترتیبِ اُردینال‌ها، رابطهٔ تعلق است. برای اُردینال‌ها جمع و ضرب و توان‌رسانی هم تعریف می‌شود و این اعمال بسیار متفاوت با اعمال کاردینال‌ها هستند. برای مثال حاصل‌جمع اُردینال‌ها از قرار دادن آن‌ها پشت سر هم ایجاد می‌شود:

پس در دنیای اُردینال‌ها، $\omega + ۱$ از ω یک واحد بزرگتر است؛ در حالی که دیدیم از نظر اندازه، این دو با هم برابرند. ترتیب اُردینال‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&۰ \in ۱ \in ۲ \ldots \in \omega \in \omega + ۱ \in \omega + ۲ \in \ldots \\
&\omega + \omega \in \omega + \omega + ۱ \in \ldots \\
&\omega + \omega + \omega \in \omega + \omega + \omega + ۱ \in \ldots \\
&\omega + \omega + \omega + \omega \in \ldots
\end{aligned}$$

همان طور که گفته شد همهٔ اُردینال‌هایی که در بالا بعد از ω نوشته شده‌اند (تا پیش از سه نقطهٔ آخری) با ω هم‌اندازه هستند، در حالی که در ترتیب اُردینالی از آن بزرگترند. نیز گفتیم جمع و ضرب اُردینال‌ها قواعد متفاوتی با کاردینال‌ها دارد؛ اما قصد ورود به این مبحث را در اینجا نداریم.

۳.۱۳ ناتمامیت دوم

در فصلِ ۳ با اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا شدیم. مجموعهٔ اصولی را که در آنجا معرفی کردیم، با **ZFC** نشان می‌دهیم که مخفف نام‌های زِرمِلو، فرانکل به علاوه حرف **C** برای اصل انتخاب است. گفتیم که یک جهانِ نظریهٔ مجموعه‌ها، جهانی است مانند **V** که در آن یک رابطهٔ $\in$ بین اعضا وجود دارد و اصول موضوعهٔ ما در آن جهان برقرار است. گفتیم که منظور از یک قضیه φ در نظریهٔ مجموعه‌ها، یک جمله است که در تمام جهان‌هایی که از اصول موضوعه ما پیروی می‌کنند درست باشد.

با این حال، یک سوال مهم را بی پاسخ گذاشتیم: آیا اصلاً جهانی مانند **V** وجود دارد که از اصول موضوعهٔ ما پیروی کند؟ به طور دقیق‌تر، آیا این گونه است که اصول موضوعهٔ ما با هم منجر به تناقض نمی‌شوند؟[۲]

سرانجام در این بخش، این سوال را پاسخ خواهیم گفت. در بیان این پاسخ، بسیاری از جزئیاتِ بسیار مهم را مجبوریم نادیده بگیریم تا نوشتهٔ ما خواننده را به درک مناسبی از قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل برساند. پیشنهاد می‌کنیم که کمربندهای ایمنی را محکم ببندید و سطور پیش رو را با دقت و احتیاط مطالعه بفرمایید. البته اگر چندین بار خواندن آن‌ها نیز نتیجه نداد، حمل بر بدنویسی نگارنده نکنید!

[۲] این که این دو سوال با هم معادلند، را قضیهٔ تمامیت گودل نتیجه می‌دهد.

این که از اصول موضوعهٔ **ZFC** تناقضی به اثبات نرسد را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{ZFC} \nRightarrow \perp$$

عبارت بالا، در ظاهری که دارد، معلوم است که یک جملهٔ مرتبهٔ اول در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها نیست؛ بلکه جمله‌ای دربارهٔ اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌هاست. اما به نحو شگفت‌آوری، می‌توان ثابت کرد که جمله‌ای در خودِ زبانِ نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد که همین معنی را می‌دهد. جملهٔ یادشده را با $\mathrm{con}(\mathbf{ZFC})$ نشان می‌دهیم که در آن con مخفف واژهٔ consistency به معنی سازگاری است. پس می‌توان جمله‌ای در زبانِ نظریهٔ مجموعه‌ها نوشت که معنی‌اش این باشد: «نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است».

اما چنین جمله‌ای را چگونه می‌توان نوشت؟ در بخشِ ۱.۷.۹ گفتیم که می‌شود همهٔ علائم منطقی را با استفاده از اعداد طبیعی کد گذاری کرد. با این کار می‌توان تمام جملات منطقی را نیز به نحوی کدگذاری کرد که وقتی یک عدد طبیعی به ما داده شود، بتوانیم تشخیص دهیم که دقیقاً کدِ کدام جمله است.

اما چیزی بیش از این نیز درست است: می‌توان اثبات‌ها را هم کد گذاری کرد. هر اثبات، دنباله‌ای متناهی از جمله‌هاست که به جمله‌ای ختم می‌شود؛ به چنین دنباله‌ای هم می‌توان یک عدد طبیعی یکتا نسبت داد. به این طریق، می‌توان جمله‌ای نوشت که بگوید «نظریهٔ مجموعه‌ها تناقض نمی‌دهد». جملهٔ مورد نظر در واقع باید بگوید که هیچ عدد طبیعی‌ای وجود ندارد که آن عددْ کدِ اثباتی برای تناقض باشد. پرداختن به نحوهٔ دقیق این کدگذاری ممکن است ما را از هدف اصلی دور کند؛ آن را به کتاب دیگری موکول خواهیم کرد.

حال که $\mathrm{con}(\mathbf{ZFC})$ خودش یک جمله است، می‌توان پرسید که آیا این گونه است که:

$$\mathbf{ZFC} \Rightarrow \mathrm{con}(\mathbf{ZFC})$$

در ادامه قرار است به پاسخ دادن به سوال بالا بپردازیم.

بیایید یک کد گذاری برای همهٔ جملاتِ تک متغیرهِ به صورتِ $\psi(x)$ در مورد اعداد طبیعی را در نظر بگیریم. لیستی به صورتِ $\{\varphi_i(x)\}$ در اختیار داریم. یکی از جملاتِ موجود در این لیست، مثلاً جملهٔ e ام، این جمله است که می‌گوید:

جملهٔ $\varphi_x(x)$ قابل اثبات نیست.

در واقع این جمله، که جملهٔ e ام در فهرست ماست، می‌گوید که اگر در جملهٔ شمارهٔ x عدد x را قرار دهیم، جملهٔ حاصل اثبات‌پذیر نیست. اما جملهٔ $\varphi_e(e)$ چه می‌گوید؟

جملهٔ $\phi_e(e)$ می‌گوید که اگر در جملهٔ e ام عدد e را قرار دهید جملهٔ حاصل اثبات‌پذیر نیست. اما وقتی در جملهٔ e ام عدد e را قرار می‌دهیم به همان جملهٔ $\varphi_e(e)$ می‌رسیم! پس جملهٔ $\varphi_e(e)$ جمله‌ای است که می‌گوید:

من قابل اثبات نیستم

این جمله را می‌توان به صورت زیر تصور کرد:

من

قابل اثبات نیستم   من

قابل اثبات نیستم   من

من قابل اثبات نیستم

قضیه ۱۴.۱۳. اگر **ZFC** سازگار باشد، آنگاه

$$\mathbf{ZFC} \not\Rightarrow \varphi_e(e).$$

اثبات. اگر $\mathbf{ZFC} \Rightarrow \varphi_e(e)$ آنگاه در **ZFC** جملهٔ «من ثابت نمی‌شوم» ثابت می‌شود و این تناقض است. □

جملهٔ بالا به ظاهر در فرازبان نوشته شده است؛ اما محتوای آن را می‌توان در خودِ زبان مرتبهٔ اول نیز نوشت:

قضیه ۱۵.۱۳.

$$\mathbf{ZFC} \Rightarrow \big(\mathrm{con}(\mathbf{ZFC}) \to \neg\varphi_e(e)\big).$$

اثبات. این قضیه، در واقع همان قضیهٔ قبل است که به زبانِ دیگری نوشته شده است. □

نتیجه ۱۶.۱۳ (قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل).

$$\mathbf{ZFC} \not\Rightarrow \mathrm{con}(\mathbf{ZFC}).$$

اثبات. اگر $\mathbf{ZFC} \Rightarrow \mathrm{con}(\mathbf{ZFC})$ آنگاه بنا به قضیهٔ ۱۵.۱۳ داریم $\mathbf{ZFC} \Rightarrow \varphi_e(e)$. اما این بنا به قضیهٔ ۱۴.۱۳ امکان‌پذیر نیست. □

قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل، ارزشی فراتر از «بررسی سازگاری یا عدم سازگاری اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها» دارد. در واقع هر سیستم اصول موضوعه‌ای دیگری که به اندازهٔ **ZFC** امکانات بیانی داشته باشد، در معرض این قضیه قرار می‌گیرد. از این رو، قضیهٔ یادشده مورد علاقه و توجه غیرریاضی‌دانان، به خصوص فیلسوفان نیز قرار گرفته است.

هر زمانی که نگارنده در این باره سخنرانی کرده یا مطلبی نوشته است مورد سوال‌های فراوان علاقه‌مندان به فلسفه واقع شده است. اکثر این سوال‌ها، ناشی از «تفسیرهای» این قضیه است، نه فهم آن. از این رو عموماً پاسخ دادن به سوالات در این زمینه همواره برایم دشوار بوده است.

عجیب‌تر این است که بسیاری از سوالات، ناشی از عدم باور قضیه توسط پرسشگر است؛ حال آن که قضیهٔ ناتمامیت دوم، یک «قضیهٔ ریاضی» مشابه همهٔ قضایای ریاضی است. یک قضیه در ریاضی نیازی به تفسیر یا قصه‌پردازی ندارد؛ خودش به دقیق‌ترین، صریح‌ترین و زیباترین زبان ممکن نوشته شده است. یک قضیهٔ ریاضی همواره می‌گوید که اگر نحوهٔ جمله نویسی و استدلال را در ریاضیات را قبول داشته باشیم، از فرض آ حکم ب نتیجه می‌شود. خوب است که یک نفر بتواند یک قضیهٔ ریاضی را تفسیر کند؛ اما هیچ وقت تفسیر، مساوی با خودِ قضیه نیست. پس برای درست فهمیدن یک قضیهٔ ریاضی، باید ریاضی یاد گرفت. می‌شود قضیهٔ خم جردن، یا قضیهٔ اساسی جبر (همان طور که نسبیت خاص و عام انیشتن) را نیز تفسیر فلسفی کرد، اما از آن بهتر این است که «اثباتِ ریاضی» این قضایا را فراگرفت. وقتی عمق اثبات یک قضیه را فرامی‌گیریم، دیگر نیازی به تفسیرهای فلسفی نداریم و اثبات قضیه همان تفسیر آن است.

۴.۱۳ استقلال حقایق از نظریهٔ مجموعه‌ها

در طول این کتاب، با اصول موضوعهٔ **ZFC** برای جهان نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا شدیم. همهٔ اشیای ریاضی مانند تابع و رابطه و عدد، به همراه همهٔ مفاهیم انتزاعی مانند متناهی و نامتناهی تعریف و تثبیتی با استفاده از این اصول

موضوعه یافتند. در بخش ۳.۱۳ دیدیم که یک جمله به نام $\mathrm{con}(\mathbf{ZFC})$ در نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توان نوشت که تعبیرش این است: «در نظریهٔ مجموعه‌ها تناقض به اثبات نمی‌رسد». دیدیم که اگر نظریهٔ مجموعه‌ها دارای حداقل یک جهان باشد، آنگاه

$$\mathbf{ZFC} \nvDash \mathrm{con}(\mathbf{ZFC}).$$

در بخشِ ۱.۷.۹ دیدیم که در صورتی که نظریهٔ مجموعه‌ها دارای یک جهان باشد، و $\mathbf{V}$ جهان خوش‌بنیادِ آن باشد، هیچ الگوریتمی وجود ندارد که یک جمله را به عنوان ورودی بگیرد و در صورتی که جملهٔ مورد نظر در $\mathbf{V}$ برقرار باشد خروجی ۱ و در صورتی که جملهٔ مورد نظر در $\mathbf{V}$ برقرار نباشد خروجی ۰ بدهد. [۳]

در بخشِ ۲.۱۰ دیدیم که فرضیهٔ پیوستار و نقیض آن، هیچ کدام در $\mathbf{ZFC}$ قابل اثبات نیستند. این واقعیت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{ZFC} \nvDash \left(\aleph_1 = 2^{\aleph_0}\right) \qquad \mathbf{ZFC} \nvDash \neg\left(\aleph_1 = 2^{\aleph_0}\right)$$

نتیجهٔ عبارت بالا این است که اگر جهانی برای نظریهٔ مجموعه‌ها وجود داشته باشد، جهانی وجود دارد که در آن فرضیهٔ پیوستار درست است و جهانی وجود دارد که در آن نقیض فرضیهٔ پیوستار درست است [۳]. گفتیم که ساختن چنین جهان‌هایی با استفاده از تکنیک «فُرسینگ» در نظریهٔ مجموعه‌ها امکان‌پذیر است.

اما گزارهٔ زیاد دیگری نیز هستند که نه خود و نه نقیضشان در در $\mathbf{ZFC}$ اثبات نمی‌شود. این که جهان مجموعه‌ها برابر با جهانِ تعریف‌پذیر [۴] مجموعه‌هاست $(V = L)$، این که نوع خاصی از کاردینال‌ها به نام کاردینال‌های اندازه‌پذیر وجود دارند، این که نوع خاص دیگری از کاردینال‌ها به نام کاردینال‌های دست‌نیافتنی وجود دارند، و چندین و چندین عبارت دیگر، وضعیتی مشابه با فرضیهٔ پیوستار دارند. مطالعه دربارهٔ موضوعات این‌چنین بخشی از مطالعات در گرایش نظریهٔ مجموعه‌هاست.

---

[۳] البته در آن بخش این قضیه را دربارهٔ مجموعهٔ اعداد طبیعی بیان کردیم.
[۴] بخشی از جهانِ $\mathbf{V}$ است که با استقرای فرامتناهی و با استفاده از طبقات تعریف‌پذیری ساخته می‌شود.

فصل ۱۴

سخن آخر

سال‌ها باید که تا یک سنگ اصلی ز آفتاب
لعل گردد در بدخشان یا عقیق اندر یمن
ماهها باید که تا یک پنبه‌دانه ز آب و خاک
شاهدی را حلّه گردد یا شهیدی را کفن
روزها باید که تا یک مشت پشم از پشت میش
زاهدی را خرقه گردد یا حماری را رَسَن
عمرها باید که تا یک کودکی از روی طبع
عالمی گردد نکو یا شاعری شیرین سخن
قرنها باید که تا از پشت آدم نطفه‌ای
بوالوفای کُرد گردد یا شود وِیْسِ قَرَن
سنائی

۱.۱۴ نتیجه‌گیری‌ها

امیدوارم که خواننده‌ای که تا به اینجای این کتاب را مطالعه کرده باشد، به درکی از «مبانی ریاضی» رسیده باشد. در هِرَمِ علوم، مبانی ریاضیات، در پائین‌ترین قسمت واقع است. منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها علومی هستند که مبانی ریاضیاتِ محض با استفاده از آن‌ها بیان می‌شود. سایر شاخه‌های ریاضی محض، مانندِ جبر، هندسه، آنالیز و غیره در طبقه‌ای بالاتر در این هرم واقعند.

عموماً آنچه در ریاضیات محض بررسی می‌شود مسائل خام ریاضی هستند که شاید حل آن‌ها مستقیماً کاربردی در زندگی روزمره نداشته باشد، بلکه پاسخ آن‌ها باید در هرم علوم بالا برود تا به کاربرد برسد. ریاضی محض از این حیث، به فلسفه می‌ماند که در آن دغدغهٔ یافتن حقیقت بر همه چیز مقدم است. البته، با این تفاوت که همواره این امید وجود دارد که آنچه که امروز در ریاضی محض بدان پرداخته می‌شود، در آینده راهگشای صنعت یا موجب ایجاد صنعتی جدید شود. [۱]

در پلهٔ بالاتر این هرم به ریاضیات کاربردی می‌رسیم که در آن، از قضایائی که در پائین هرم، در ریاضیات محض

[۱] پیش می‌آید که دانشجویان ریاضی محض در دوره‌های مختلف تحصیل مأیوس و دلسرد می‌شوند و کار خود را بی‌ارزش برای اجتماع می‌پندارند. یکی از دوستانم با ریاضی‌دان بزرگی درددل کرده بود و از او شنیده بود که :«کار ما در واقع تولید و تزریق اندیشه به درون جامعه است».

ثابت می‌شود، استفاده‌های کاربردی می‌کنیم و قضایایی (شاید با عمق کمتر ولی با کاربرد بیشتر) بدانها می‌افزائیم. در ریاضی کاربردی، مسئلهٔ پیش روی ما، عموماً مسئله‌ای است که به جهانی که در آن زندگی می‌کنیم می‌پردازد و حل آن قرار است به درد طبقه‌های بالاتر هرم بخورد. عموماً این مسائل خودشان نیز از طبقات بالاتر هرم می‌آیند. در این طبقات، انواع مهندسی‌ها واقع شده‌اند. آنچه برای مهندس بیش از همه‌چیز اهمیت دارد، پاسخ دادن به سوالی است که پاسخ آن موجب چرخش چرخ صنعت شود. شاید از این حیث، مهندس کمتر وقتش را صرف دانستن کُنهِ فلسفی سوالی بکند. مسئله برای او زمانی حل است که مشکل صنعت را حل کند یا موجب پیشرفتی در امور زندگی روزمره شود.

به عنوان تمرین، هرم علوم را برای خود رسم کنید و بررسی کنید که علومی مانند پزشکی، جامعه‌شناسی، جغرافیا و فیزیک در کجای این هرم می‌توانند واقع شوند. دقت کنید که برخی از این علوم می‌توانند به چند طبقهٔ مختلف از هرم تعلق داشته باشند.

۲.۱۴ متون ریاضی

یکی از زیبائی‌های متون ریاضی این است که در آن‌ها مطالب در بسته‌های مختلف بیان می‌شوند. ابتدای هر متن ریاضی باید یک بستهٔ نمادگذاری وجود داشته باشد تا خواننده را با نمادهای به کار رفته در آن متن آشنا کند.

در ریاضی هیچ مطلب جدیدی به صورت غیر منتظره وارد بحث نمی‌شود. هر چیز جدیدی نخست در یک بستهٔ **تعریف**، تعریف می‌شود و از آن پس آزادانه وارد بحث می‌شود.

اما مهمترین بسته‌ها، بستهٔ **قضیه** هستند. در آنجا در یک جملهٔ خلاصه و دقیق حکمی بیان می‌شود که قرار است در بستهٔ اثبات به اثبات آن پرداخته شود.

گاهی اثبات یک قضیه خیلی طولانی و ثقیل است. در این جا نیاز است که در بسته‌های مفهومی دیگری به نام **لم**، قضیهٔ مورد نظر به بخش‌های مختلف شکافته شود. لم‌ها قضایای کوچکی هستند که برای اثبات قضایای اصلی بدانها نیاز است؛ هر چند بسیار پیش آمده است که لمی از یک مقالهٔ علمی از قضیهٔ اصلی ثابت شده در آن مقاله معروفتر شده است.

آنچه در کتاب‌های دانشگاهی نوشته می‌شود، حاوی ریاضیات نیم تا یک قرن است. هر چند در برخی کتاب‌های دانشگاهی به قضایای جدید ریاضی هم اشاره می‌شود، ولی جدیدترین قضایای ریاضی در مقاله‌های روز ریاضی قرار دارند. معمولاًروش کار این گونه است که دانشجو تحت نظر یک استاد، سابقهٔ قدیم و جدید یک موضوع را در کتاب‌ها و مقالات مطالعه می‌کند و پس از باخبر شدن از آخرین پیشرفت‌ها، به دنبال حل سوالی در همان راستا می‌افتد. در صورتی که در حل آن سوال موفق باشد، حاصل یافته‌های خود را، با رعایت دقیق زبان علمی، در یک مقاله می‌نویسد و از یک مجلهٔ معتبر درخواست چاپ آن را می‌کند. در صورتی که مقاله، توسط آن مجله تأئید شود، چاپ می‌شود. هر چه مسألهٔ پرداخته شده در مقاله مهم‌تر و سخت‌تر باشد، در مجلهٔ معتبرتری می‌توان آن را به چاپ رساند.

متأسفانه باور بسیاری عوام بر این است که هر کسی که کمی ریاضی بداند می‌تواند وارد این رشته شود و ناگهان از تمام بزرگان ریاضی پیش بیفتد. بارها شده است که دانشجویانی، حتی از رشته‌هائی غیر از ریاضی، به اینجانب مراجعه کرده‌اند و ادعای حل مسائل مهم ریاضی، در سطح مسألهٔ فرما داشته‌اند؛ بی‌آنکه از مسیر طی شده در طی سال‌ها برای حل آن خبری داشته باشند و یا حتی سطح ریاضی خود را دقیق بدانند! در ریاضی محض، داشتن هوش کافی تنها یک شرط لازم و بسیار ناکافی است. فقط مسائل آسان را می‌توان یک روزه و دوروزه حل کرد و تحقیق روی مسائل سخت، نیاز به سال‌ها فکر و تلاش دارد. ریاضی‌دان خوب کسی است که روش تحقیق بداند و بتواند به

طور مستمر، سال‌ها روی یک مسئله فکر کند. صدالبته تربیت چنین شخصیتی، از طریق کنکورهای تستی و سرعتی و کم‌عمق، محال است. حتی سیستمی که به المپیادهای دانشجوئی اهمیت فراوان می‌دهد، از تربیت ریاضی‌دان واقعی بازمی‌ماند؛ زیرا همان طور که گفتم ریاضیات فقط توانائی حل سریع یک مسأله نیست. [۲]

از نظر من مهمترین کاری که یک دانشجوی کارشناسی می‌تواند انجام دهد این است که در طول چهارسال دورهٔ کارشناسی، نقاط قوت و ضعف خود را به خوبی بشناسد و ارتباطات سازنده با اساتید و هم قطاران پیدا کند. در صورتی که خود را برای کار در خارج از دانشگاه می‌داند، به هیچ روی به تحصیلات تکمیلی روی نیاورد ولی در صورتی که دقیقا موضوع مورد علاقهٔ خود، و استاد مورد علاقهٔ خود را پیدا کرده است، به ادامهٔ تحصیل بپردازد. در واقع، از پس از دورهٔ کارشناسی، داشتن دغدغهٔ علمی مهم است. قبول شدن در کنکور کار سختی نیست، ولی کسانی که بدون انگیزه و دغدغه وارد تحصیلات تکمیلی شوند، علاوه بر محروم کردن خود از کسب درآمد، نخواهند توانست تولید علمی قابل دفاعی داشته باشند.

۳.۱۴ پارادوکس همیشگی ریاضی محض و زندگی

پسرم در دانشگاه فلسفه و روان‌شناسی خوانده است. نمی‌تواند هیچ شغلی پیدا کند؛ اما در عوض علتش را به خوبی می‌داند!
جیمی کار، کمدین انگلیسی

تحصیل در ریاضی محض، از اول تا آخر، توأم با سرخوردگی و خستگی فراوان است. دانشجوی ریاضی از روز اول نگران است تا روز آخر! از یک طرف ریاضی محض، مانند یک وسواس و یک اعتیاد، دانشجو را به خود جلب می‌کند و روز به روز جلوهٔ جدیدی از زیبائی خود را می‌نمایاند، ولی از طرفی، پس از سال‌ها صرف وقت در آن، پیدا کردن شغلی مربوط بدان با حداقل حقوق هم بسیار دشوار است. همیشه پارادوکس رقابت دشوار برای بدست آوردن جایگاه در دانشگاه، و رقابت آسان برای قبول شدن در رشتهٔ ریاضی برقرار است و هیچ گاه نیز از بین نخواهد رفت. از آن بدتر اختلاف شدید نسلی مدرسان و یادگیرندگان است که گاهی انتقال تجارب را دشوار می‌کند: اساتید متعلق به نسلی هستند که تمام عمر جنگیده‌اند و برای رسیدن به ساده‌ترین چیزها ز گهواره تا گور رقابت کرده‌اند و شب‌بیداری کشیده‌اند؛ و دانشجویان متعلق به نسلی هستند که اگر منفی نزنند دانشگاه‌های تراز اول کشور قبول می‌شوند. این که راه درست چیست همیشه بی‌جواب می‌ماند و هر استادِ نوعیِ ریاضیات، از این که کسی را به کار خود علاقه‌مند کند دلهره دارد. البته ناگفته نماند که هر چه ریاضی‌اش، «ریاضی‌تر» باشد مشکلاتش بیشتر است!

اگر قرار بود متناسب با سختی و عمق کار به افراد حقوق بدهند، احتمالاً ریاضی‌دانان محض غنی‌ترین افراد می‌بودند، اما این گونه نیست! لزوماً افکار پیچیده و خردمندی درونی، مایهٔ ثروتمندی مالی نمی‌شوند. این روزها پولدارترین قشرها، فوتبالیستها، بازیگران، مدل‌ها، برخی پزشکان و غیره (حتی شاید کسانی که غذا می‌خورند و فیلمش را به اشتراک می‌گذارند پولدار باشند) هستند. کار این هیچکدام از اینان کشف و معرفی حقایق پیچیدهٔ هستی نیست.

پس اگر کسی می‌خواهد ثروتمند شود، خواندن ریاضی محض به هیچ کار او نمی‌آید. برای ثروتمند شدن، باید به ثروتمند شدن فکر کرد؛ و ریاضی محض تنها کمکی که می‌تواند بکند، کمک در بهینگی تفکر است. و البته در این

[۲] پس اگر هیچ مدال المپیادی کسب نکرده‌اید یا رتبهٔ کنکور تک‌رقمی ندارید، اصلاً ناراحت نباشید. در راه ریاضی‌دان خوب شدن، آن‌ها فقط بیراهه هستند. هر چند متاسفانه در برخی کشورها، مانند کشور ما ریاضی با «مسابقه» هم‌مفهوم شده است، اما من به شما قول می‌دهم که وقتی پا به دانشگاه‌های معتبر دنیا بگذارید اسمی از مسابقهٔ ریاضی به گوشتان نخواهد خورد.

حد، شاید یک مدرک کارشناسی ریاضی محض بیش از کافی باشد.

همهٔ اینها، باعث نمی‌شود که ریاضی محض از مُد یا از اهمیت بیفتد. اصالت و زیبائی این رشته همواره علاقه‌مندان را در خود نگه می‌دارد. از زمانی که من دانشجو بودم تا امروز که من تدریس می‌کنم، هیچ وقت بهترین دانشجویان وارد رشتهٔ ریاضی نشده‌اند، و هیچ وقت نیز رشتهٔ ریاضی تهی از دانشجویان قوی، با هوش و پرتلاش نبوده است. انگار، ریاضی محض برای پایداری مستقل از رغبت و عدم رغبت ما نیست.

توصیهٔ نگارنده به شما دانشجوی ریاضی، این است که نگرانی‌های همیشگی ترم اول را به فال نیک بگیرید. این که دانشجوی ریاضی از ترم اول نگران آینده است، نکتهٔ مثبتی است؛ زیرا دیگران پس از چهار سال یاد این نگرانی‌ها می‌افتند. این که شما به درد ریاضی می‌خورید، یا این که ریاضی به درد شما می‌خورد، خودش بعد از سه چهار سال تحصیل پر تلاش مشخص می‌شود. نیازی به کار خاصی نیست و نیازی به نگرانی نیست. اگر مناسب برای این رشته باشید خود به خود در آن می‌مانید. اما مادامی که به ریاضی عشق می‌ورزید، یادتان نرود که ریاضی کار کردن یک امر شیک و مجلسی است؛ زمانی فکر خوب کار می‌کند که نیازهای اولیهٔ زندگی برطرف شده باشد. پس همیشه کسب بضاعت مالی را در اولویت اول زندگی خود قرار دهید و ریاضی را در اولویت دوم.[۳]

۴.۱۴ سخن آخر نویسنده

سرانجام به بخش آخر کتاب رسیدیم. این بخش، مشابه وصیت‌نامه‌ها و دردنامه‌هایی است که برخی دانشجویان در پایان برگهٔ امتحانی خود می‌نویسند، اما در عین حال امیدواریم خواندن آن‌ها هم بی‌لذت نباشد.

کتابی که تا به اینجا مطالعه کردید، احتمالاً منعکس کنندهٔ کامل سبک نگارش این نگارنده نباشد. یک دلیلش این است که نگارنده از اول، قصد نوشتن کتاب نداشته است و این کتاب از جزوات کلاسی او پر و بال گرفته است. کتاب‌های احتمالی بعدی او قطعاً این گونه نخواهند بود.

اما چه بسا نشأت گرفتن کتاب از بحثهای یک کلاس درس و گچ و تختهٔ آن، موجب صمیمیت بیشتر شده باشد؛ خصوصاً که کتاب حاصل یادداشتهای اولین تدریس مدرس است. اگر نگارنده با دغدغه‌های امروز و پس از سال‌ها تجربه کتاب را نوشته بود، شاید بسیاری سوال‌های مورد علاقهٔ دانشجویان جواب داده نمی‌شد. علت تصمیم به چاپ کتاب نیز همین احساس دغدغه‌مندی در طول کتاب است. هر ویرایشی که منجر به پختگی بیشتر شد، در تقابل با زبان معلمانهٔ کتاب قرار گرفت. امیدوارم نقایص به مرور زمان کمتر و کمتر شوند و کتاب مورد استفاده واقع گردد.

۵.۱۴ ارجاع به برخی صفحات مورد علاقه

زمانی که تصمیم به چاپ این نوشتار به عنوان یک کتاب گرفتم، کتاب مورد نظر تحت یک داوری اولیه در دانشکده قرار گرفت. کم بودن تعداد صفحات کتاب و کوتاه بودن برخی بخش‌ها قسمتی از معایب این کتاب از نظر داور بود. اما مهم‌ترین سوالی که داور پرسیده بود این بود که «این کتاب چه فرقی با کتاب‌های دیگر دارد» و «نویسنده با چه هدفی چنین کتابی نوشته است». تصور اولیه من این بود که کتاب، خط به خط در حال فریاد زدن تفاوت خود و علت به نگارش درآمدن خود است، اما داوری کتاب نشان داد که ظاهراً این گونه نیست. از این رو تصمیم گرفتم به صورتی بسیار خلاصه‌وار، به برخی صفحات کتاب که حاوی نکات مورد علاقه‌ام در نگارش آن بوده است، ارجاع

[۳] در صورتی که علاقه‌مند به پند و نصحیت هستید «نصیحتهای یک کهنه‌دانشجو به نودانشجویان» را در لینک زیر مطالعه کنید:

https://mathdept.iut.ac.ir/fa/node/2446

دهم.

۱. در صفحهٔ ۲۱ و در توجه ۳.۱ به توضیح نقش سورها در منطق گزاره‌ها پرداخته شده است.

۲. در توجه ۶.۱ در صفحهٔ ۶.۱ بیان شده است که ارزش گزاره‌ها در ریاضی «تعریف می‌شود».

۳. در رفع ابهام ۱۴.۱ در صفحهٔ ۱۴.۱ فرق میان نمادهای $\leftrightarrow$ و $\Longleftrightarrow$ در منطق گزاره‌ها توضیح داده شده است و دربارهٔ «فرامنطق» صحبت شده است.

۴. در توجه ۲۸.۱ در صفحهٔ ۳۳ صورت قضیهٔ تمامیت گودل بیان شده است.

۵. در صفحهٔ ۳۶ بیان شده است: این که از اثبات‌پذیر بودن گزارهٔ اول، اثبات‌پذیر بودن گزارهٔ دوم نتیجه شود، نشان نمی‌دهد که گزارهٔ دوم از گزارهٔ اول نتیجه می‌شود.

۶. در توجه ۱۷.۲ در صفحهٔ ۴۸ توضیح داده شده است که کلمهٔ ربط «که» را چگونه در فرمول‌نویسی ریاضی می‌گنجانیم.

۷. در توجه ۱۸.۲ در صفحهٔ ۴۹ توضیح داده شده است که چگونه حرف ربط «و» را در فرمول‌های ریاضی می‌نویسیم.

۸. در صفحهٔ ۶۹ اشاره به این نکتهٔ ظریف شده است: با آن‌که هر کدام از اعداد ۰،۱،۲، ... یک مجموعه است، دلیلی ندارد که همهٔ آن‌ها با هم یک مجموعه بسازند. این مطلب دوباره در بخش‌های دیگر توضیح داده شده است.

۹. در توجه ۲۰.۳ در صفحهٔ ۷۴ در مورد «توسیع تعریف‌پذیر» صحبت شده است. در واقع این مطلب توضیح داده شده است که نمادهای جدیدی که در نظریهٔ مجموعه‌ها وارد می‌شوند، همه قابل نوشتن توسط نماد عضویت هستند.

۱۰. در بخش ۳.۴ در صفحهٔ ۷۵ دربارهٔ این که آیا جهانی برای مجموعه‌ها وجود دارد، توضیحی داده شده و اولین مواجهه خواننده با «ناتمامیت دوم گودل» صورت پذیرفته است.

۱۱. در صفحهٔ ۷۷ در بخشی تحت عنوان «اول مرغ یا تخم‌مرغ» به این ابهام پاسخ داده شده است که آیا منطق از نظریهٔ مجموعه‌ها حاصل می‌شود یا نظریهٔ مجموعه‌ها از منطق.

۱۲. در توجه ۲.۴ در صفحهٔ ۸۷ تفاوت بین نمادهای ω و $\mathbb{N}$ برای مجموعهٔ اعداد طبیعی توضیح داده شده است.

۱۳. در توجه ۵.۴ در صفحهٔ ۸۹ دربارهٔ یک اشتباه رایج دانشجویان هنگام به کار بردن استقراء روی اعداد طبیعی توضیح داده شده است.

۱۴. در صفحهٔ ۹۰ ضمن اثبات قضیهٔ ۶.۴ دربارهٔ یک اشتباه رایج در اثبات خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی توضیح داده شده است.

۱۵. در صفحهٔ ۹۲ و صفحات پیش از آن، دربارهٔ تفاوت «بازگشت و استقراء» توضیح داده شده است.

۱۶. در صفحهٔ ۹۶ و در توجه ۱.۵ دربارهٔ تفاوت واژه‌های «مجموعه، گردایه،کلاس» توضیح داده شده است.

۱۷. در بخش ۴.۷ در صفحهٔ ۱۲۹ توضیحی دربارهٔ نحوهٔ ایجاد مجموعه‌های اعداد آورده شده است.

۱۸. در توجه ۱۲.۸ در صفحهٔ ۱۴۱ توضیحی دربارهٔ مفهوم «خوش‌تعریفی» در ریاضیات آمده است.

۱۹. در زیربخش ۱.۴.۸ در صفحهٔ ۱۴۵ اصل جانشانی به صورت دقیق توضیح داده شده است.

۲۰. در زیربخش ۲.۴.۸ در صفحهٔ ۱۴۶ اصل انتخاب به نحو دقیق توضیح داده شده است.

۲۱. در تمرینِ ۱۲.۸ در صفحهٔ ۱۴۸ به یک ابهام دانشجویی دربارهٔ اصل انتخاب اشاره شده است.

۲۲. در صفحهٔ ۱۵۵ دربارهٔ هم‌اندازه بودن جزء با کل سخن گفته شده است و مفهوم نامتناهی در ریاضیات با آن پیوند زده شده است.

۲۳. در صفحهٔ ۱۵۷ و صفحات بعد از آن، ضمن توضیح «پارادوکس هتل هیلبرت» مفهوم شمارا در ریاضیات توضیح داده شده است.

۲۴. در بخش ۶.۹ در صفحهٔ ۱۶۸ مسئلهٔ توقف و ارتباط آن با برهان قطری کانتور توضیح داده شده است.

۲۵. در زیربخش ۱.۷.۹ در صفحهٔ ۱۷۰ دربارهٔ اثبات قضیهٔ ناتمامیت اول گودل با ایده گرفتن از برهان قطری کانتور توضیح داده شده است.

۲۶. در صفحهٔ ۲۰۱ صورت لم زرن ضمن تمثیل کوه‌نوردی شرح داده شده است.

۲۷. در بخش ۳.۱۳ در صفحهٔ ۲۲۰ اثبات قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل بیان شده است.

۲۸. در بخش ۴.۱۳ در صفحهٔ ۲۲۲ دربارهٔ استقلال حقایق از نظریهٔ مجموعه‌ها توضیح داده شده است.

نمایه

جزواتِ برخطِ استفاده شده

[۱] م. خانی. *مبانی منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها* .
mohsen-khani.github.io/logic97-1/jozve/logic-full.pdf.

[۲] م. خانی و ا. زارعی. *نظریهٔ مجموعه‌ها*.
khani.iut.ac.ir/sites/khani.iut.ac.ir/files//u145/jozve-kamel.pdf.

[۳] م. خانی و ح. محمدی. *نظریهٔ گالوا*.
khani.iut.ac.ir/sites/khani.iut.ac.ir/files//u145/galois_theory.pdf.

[4] M. Ziegler. *Mengenlehre.*
home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/skripte/mengenle.pdf.

منابع

[1] G. Cantor. “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre”. *Math. Ann.*, 46:481-512, 1895.

[2] J. W. Dauben. Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. United States: Princeton University Press. 1990.

[3] P. J. Cohen. “The independence of the continuum hypothesis” *J.Symbolic Logic*, 1:40-41, 1936.

[4] S. B. Cooper. *Computability Theory.* Chapman Hall/CRC Mathematics Series. Taylor & Francis, 2003.

[5] H. D. Ebbinghaus, J. Flum, and W. Thomas. *Mathematical Logic.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1996.

[6] H. B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.* Elsevier Science, 2001.

[7] K. Gödel. “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme”, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, v. 38 n. 1, pp. 173–198.

[8] S. Hedman. *A First Course in Logic: An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity.* Number no. 9 in Oxford texts in logic. Oxford University Press, 2004.

[9] T. W. Hungerford. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2003.

[10] K. Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs.* Mathematical Programming Study. North-Holland Publishing Company, 1980.

[11] S. Lang. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2005.

[12] E. Mendelsohn. *Introduction to Mathematical Logic.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Springer US, 2012.

[13] A. Robinson. *Non-standard Analysis.* United States: Princeton University Press, 2016

[14] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976.

[15] M. Ziegler. *Mathematische Logik.* Mathematik Kompakt. Birkhäuser Basel, 2011.

[16] M. Ziegler. *Mengenlehre.* Mathematik Kompakt. Birkhäuser Basel, 2011.

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

اتم، گزارهٔ اتمی ۱۸	atom
اجتماع (اصل اجتماع) ۱۳۹	union
ارجاع به خود ۶۱	self-reference
اُردینال ۲۱۴	ordinal
استقرای فرامتناهی ۲۱۶	transfinite induction
استنتاج ۱۷، ۵۱،۳۳	deduction
استلزام ۵۱،۲۸	implication
اصل رد شق ثالث ۲۸	law of excluded middle
اصل کمال ۵۷	completeness axiom
اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی ۷۳	axiom of infinity
افراز ۱۲۵	partition
الگوریتم ۱۶۸	algorithm
انتخاب (اصل انتخاب) ۱۴۶،۷۳	choice
انتظام (اصل انتظام) ۷۱	regularity
انعکاسی ۱۱۱	reflexive
بازگشت (قضیهٔ بازگشت) ۸۸، ۹۲	recursion
بخش اولیه ۲۱۵	initial part
برهان خلف ۳۵	reductio ad absurdum
برهان قطری کانتور ۱۶۳	Cantor’s diagonal argument
پادتقارنی ۱۱۲	antisymmetric
پارادوکس بری ۶۱	Berry paradox
پارادوکس هیلبرت (هتل هیلبرت) ۱۵۸	Hilbert’s Paradox (of the Grand Hotel)
پخش‌پذیری ۱۰۰	distributive property
پوشا ۱۴۱	surjective
تابع ۱۳۷	function
تاتولوژی ۲۸	tautology
تام ۱۱۲	total
تصریح ۶۶	specification
تقارنی ۱۱۱	symmetric