تمرینهای تکمیلی

تمرین ۵۹: اگر $\mathfrak{M}$ مدلی باشد k اشباع، آنگاه اگر در آن یک عطف از اندازه‌ی κ یک فصل از اندازه‌ی κ را نتیجه دهد، آنگاه بخشی متناهی از آن عطف، فصل یادشده را نتیجه می‌دهد؛ به بیان دیگر اگر

$$\bigwedge_{i\in\kappa}\phi_i(x,a_i)\models\bigvee_{i\in\kappa}\psi_i(x,b_i)$$

آنگاه فرمولهای $\phi_{i_1}(x,a_{i_1}),\ldots,\phi_{i_n}(x,a_{i_n})$ موجودند که عطفشان سمت راست بالا را نتیجه دهد.

تمرین ۶۰: اگر $\mathfrak{M}$ مدلی κ اشباع باشد و $A\subseteq M$ دارای اندازه‌ی کمتر از κ باشد و X یک مجموعه‌ای تعریف‌شدنیِ A ناوردا باشد (یعنی چنان باشد که برای هر $f\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/A)$ داشته باشیم $f(X)=X$)، آنگاه X با پارامترهای A تعریف‌شدنی است.

تمرین ۶۱: تمرین قبل، در مورد مجموعه‌های تایپ‌تعریف‌شدنی هم درست است. آنها مجموعه‌هایی هستند که توسط عطفی (نامتناهی) از فرمولهای دارای متغیر مشترک (به طور خلاصه، توسط یک تایپ) تعریف می‌شوند.

تمرین ۶۲ (ادامه‌ی تمرینِ ۳۰): اگر M مدلی κ اشباع باشد، آنگاه هر مجموعه‌ی تایپ تعریف‌شدنی در آن (توسط تایپی با پارامتر در مجموعه‌ای از اندازه‌ی کمتر از κ) یا دارای اندازه‌ی متناهی است، یا دارای اندازه‌ی حداقل κ.

تمرین ۶۳: با استفاده ازتمرین بالا نشان دهید که در یک مدلِ κ اشباع، مدار هر عنصر (روی یک مجموعه‌ی از اندازه‌ی کمتر از κ) یا متناهی است یا دارای اندازه‌ی بیش از κ است. منظور از مدارِ عنصرِ a روی یک مجموعه‌ی A، مجموعه‌ی زیر است:

$$\{\sigma(a)|\sigma\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/A)\}.$$

تمرین ۶۴ (توجه به تمرین ۱۵): بنا به تمرینِ بالا، عنصرِ a روی A جبری است اگروتنهااگر دارای مدار متناهی باشد.

تمرین ۶۵: برای دو مدلِ $\mathfrak{M}_۱,\mathfrak{M}_۲$ و عناصرِ $a\in M_۱, b\in M_۲$ نشان دهید که $\mathrm{qftp}^{\mathfrak{M}_۱}(a)=\mathrm{qftp}^{\mathfrak{M}_۲}(b)$ اگروتنهااگر ساختار تولیدشده توسطِ a در $M_۱$ با ساختارِ تولیدشده توسطِ b در $M_۲$ ایزومرف باشد.

تمرین ۶۶: نشان دهید که اگر تئوریِ T چنان باشد که هرگاه $\mathrm{qftp}^{\mathfrak{M}_1}(a) = \mathrm{qftp}^{\mathfrak{M}_2}(b)$، برای دو مدلِ $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ و عناصرِ $a \in M_1, b \in M_2$، آنگاه ایزومرفیسم بین ساختار تولیدشده توسطِ a در M_1 و توسطِ b در M_2 در سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی از ایزومرفیسمها واقع شود، آنگاه T سورها را حذف می‌کند.