۵ نوبت پنجم، زمان تحویل ۲۱ اسفند

تمرین ۳۰: فرض کنید $\mathfrak{M}$ مدلی باشد κ ـ آکنده؛ یعنی هرگاه $A \subseteq M$ دارای اندازه‌ی کمتر از κ باشد، آنگاه هر تایپِ $p(x) \in S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ در M برآورده شود. نشان دهید که در این صورت

۱. هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر (با پارامتر) از M یا متناهی است یا اندازه‌ی حداقل κ دارد.

۲. هرگاه $B \subseteq M$ و $|B| < \kappa$، هر تابعِ $f : M \to B$ متناهی‌مقدار است (یعنی دارای برد متناهی است).

اصل‌بندیِ $\forall\exists$ و مدلهای بسته‌ی وجودی

تمرین ۳۱ (ادامه‌ی تمرین ۱۲): مدلِ M از تئوریِ T را **بسته‌ی وجودی** بخوانید هرگاه برای هر $T \models N \supseteq M$ و هر فرمولِ بدون سورِ $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ و $\bar{m} \in M$، از $N \models \exists \bar{a} \quad \phi(\bar{a}, \bar{m})$ نتیجه شود $M \models \exists \bar{a} \quad \phi(\bar{a}, \bar{m})$.

نشان دهید هر تئوریِ دارای اصلبندیِ به فرم $\forall\exists$ دارای مدلی بسته‌ی وجودی است. (تحقیق کنید که اگر $T \models M$ آنگاه مدلی بسته‌ی وجودی چون $M \supseteq N$ موجود است به طوری که $|N| = |M| + |L| + \aleph_0$.)[5]

تمرین ۳۲: فرض کنید تئوری T کامل باشد. نشان دهید در آن صورت

۱. T دارای ویژگیِ ادغام (یا ملغمه‌سازی)[6] است؛ بدین معنی که هرگاه $T \models \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ و $f_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ و $f_2 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ نشاندنهای مقدماتی باشند، آنگاه مدلِ $T \models \mathfrak{D}$ و نشاندنهای مقدماتیِ $g_1 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ و $g_2 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ چنان موجودند که $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

۲. بررسی کنید که در بالا شرط مقدماتی بودن نشاندنها لازم است.

۳. T دارای ویژگیِ امکان‌نشاندن‌همزمان[7] است؛ یعنی برای هر دو مدلِ $T \models \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ مدلی چون $T \models \mathfrak{C}$ و نشاندنهایی مقدماتی چون $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ و $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ موجودند.

[5] این تمرین ادامه دارد.

[6] amalgamation property (AP)

[7] joint embedding property

تمرین ۳۳: (با روش هنکین و نه روش توپولوژیک) نشان دهید که اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی nـ تایپهای ایزوله در فضای $S_n(T)$ چگال باشد، آنگاه T دارای مدل اول است (اثبات را در کتاب تنت و زیگلر یا در کتاب مارکر بیابید).