مباحثی در منطق

مسعود پورمهدیان، محسن خانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۳۰ خرداد ۱۳۹۶

چکیده

هدف نهایی در این دوره‌ی درسی، اثبات «قضیه‌ی جازمیت»، ثابت‌شده توسطِ «مُرْلی» است. بنا به این قضیه، هر تئوریِ الف‌یک‌جازم، در هر کاردینالِ ناشمارای κ، جازم است. تئوریِ T را در کاردینالِ κ جازم می‌خوانند، هرگاه همه‌ی مدلهای با اندازه‌ی κ از آن، با یکدیگر یکریخت باشند. درس را با مطالعه‌ی برخی ویژگی‌های جبری در منطق، مانند حذف سور و مدل‌کامل بودن می‌آغازیم. در ادامه به ساختمانهای نظریه‌ی مدلی، مانند فراضربها و ساختارهای سودومتناهی خواهیم پرداخت، و در نهایت قضیه‌ی مُرلی را پس از پرداختن به همه‌ی پیشنیازهای نظریه‌ی مدلی آن، مانند تئوری‌های پایدار، مرتبه‌ی مرلی، و تئوریهای بسیارکمینه، اثبات خواهیم کرد. در بخش دیگری از درس به «حذف موهومیات» خواهیم پرداخت و ثابت خواهیم کرد که در تئوری میدانهای بسته‌ی جبری، موهومیات قابل حذفند. پیشنیازهای این درس، گذرانده بودن درس منطق ریاضی، و آشنایی مقدماتی با نظریه‌ی مدل هستند. علاوه بر جزوه‌ای که مدرس و دستیار برای درس تهیه خواهند کرد، منابع زیر را نیز به دانشجویان پیشنهاد می‌کنیم.

- A Course in Model Theory, Katrin Tent, Martin Ziegler, Cambridge University Press.
- Model Theory: An Introduction, David Marker, Springer Science and Business Media.
- Model Theory, Chen Chung Chang, H. Jerome Keisler, Dover Books on Mathematics

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشنیازهای نظریه‌ی مدلی

۱.۱ جلسه‌ی اول

۱.۱.۱ مقدمات

هدف از نظریه‌ی مدل [۱] به عنوان شاخه‌ای از منطق ریاضی، مطالعه‌ی ساختارهای ریاضیاتی است با بهره‌گیری از زبان و منطق صوری [۲] و با بررسی فرمولهایی که در آن ساختارها درستند. ساختارهای ریاضیاتی گاهی جبرین‌د، همچون گروهها،فضاهای برداری، مدولها، میدانها و حلقه‌ها، گاهی ترکیبیاتی، مانند گرافها، و گاه آنالیزی مانند فضاهای متریک. مطالعه‌ی هر نوع از این ساختارها، انتخاب **زبانی** مناسب می‌طلبد که در آن بتوان ویژگی‌های این ساختارها را اصلبندی کرد. به علاوه نیاز به انتخاب **منطقی** مناسب و وابسته به زبان است که قابلیت حمل مفاهیم مورد نیاز را داشته باشد.

در برخورد نظریه‌ی مدلی با ریاضیات دو رهیافت کلی وجود دارد، که اولی را رهیافت کلاسیک و دومی را رهیافت نوین می‌توان نامید. مطالعه‌ی بسیاری ساختارهای برآمده از جبر و آنالیز عموماً موضوعِ رهیافت نخست بوده است. در زیر ایندو را بیشتر واکاویده‌ایم:

رهیافت اول. در این رهیافت، ساختارهای معروف و حائزِ اهمیت را در ریاضیات در نظر گرفته زبان مناسبی برای مطالعه‌ی آنها انتخاب و آنها را در این زبان اصل‌بندی می‌کنیم. ساختارهایی را که دارای

[۱] model theory

[۲] formal logic

اصلبندی‌های **کامل** مناسبی باشند که خوشرفتاری جبری یا آنالیزی آنها را توجیه کند، اصطلاحاً **رام** [۳] می‌خوانند. [۴] برای نمونه، میدان اعداد مختلط، به عنوان مدلی از تئوری کامل **میدانهای بسته‌ی جبری** مورد مطالعه قرار می‌گیرد و میدان اعداد حقیقی، به عنوان مدلی از تئوری کامل **میدانهای بسته‌ی حقیقی**. ایندو ساختار را نخستین بار تارسکی اصلبندی و خوشرفتاریهای جبریشان را از دیدگاه نظریه‌ی مدلی توجیه کرده است. روش تارسکی، اثبات **حذف سور** برای این تئوریها بوده است.

برای آشنا کردن بیشتر خواننده با طعم‌وبوی چنین رویکردی، درباره‌ی نتیجه‌ی تارسکی در میدانهای بسته‌ی حقیقی توضیح کوتاهی می‌دهیم. بنا به قضیه‌ی تارسکی، تئوری میدانهای بسته‌ی حقیقی سورها را حذف می‌کند؛ یعنی هر فرمولی را دراین تئوری معادلی بدون سور دارد. یک مصداق آشنای این گفته، در زیر آمده است:

$$\exists x \quad ax^۲ + bx + c = ۰ \leftrightarrow b^۲ - ۴ac > ۰.$$

فرمولهای بدون سور در میدانهای بسته‌ی حقیقی، دقیقاً **مجموعه‌های شبه‌جبری** را تعریف می‌کنند. از طرفی سور وجودی در منطق، معادل تصویرگیری در جبر است. از این رو، بیان جبری قضیه‌ی تارسکی، قضیه‌ی زیر است:

گزاره ۱: هر تصویر یک مجموعه‌ی شبه‌جبری، خود مجموعه‌ای است شبه‌جبری.

بسیاری مفاهیم در هندسه‌ی جبری مختلط و حقیقی با رهیافت اول تحت عنوان ساختارهای رام مطالعه شده‌اند.

رهیافت دوم. در این رهیافت، از یک تئوری نظریه‌ی مدلی دارای ویژگیهای مطلوب، آغاز و سعی بر **رسته‌بندی** [۵] مدلهای این تئوری می‌کنیم. نیز می‌کوشیم تا جایگاه خودِ این تئوری را در **رده‌بندی نظریه‌ی مدلیِ** [۶] تئوریها مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیه‌ی مُرلی، که در این دوره‌ی درسی بدان پرداخته خواهد شد، قضیه‌ای از نوع رسته‌بندی است.

---

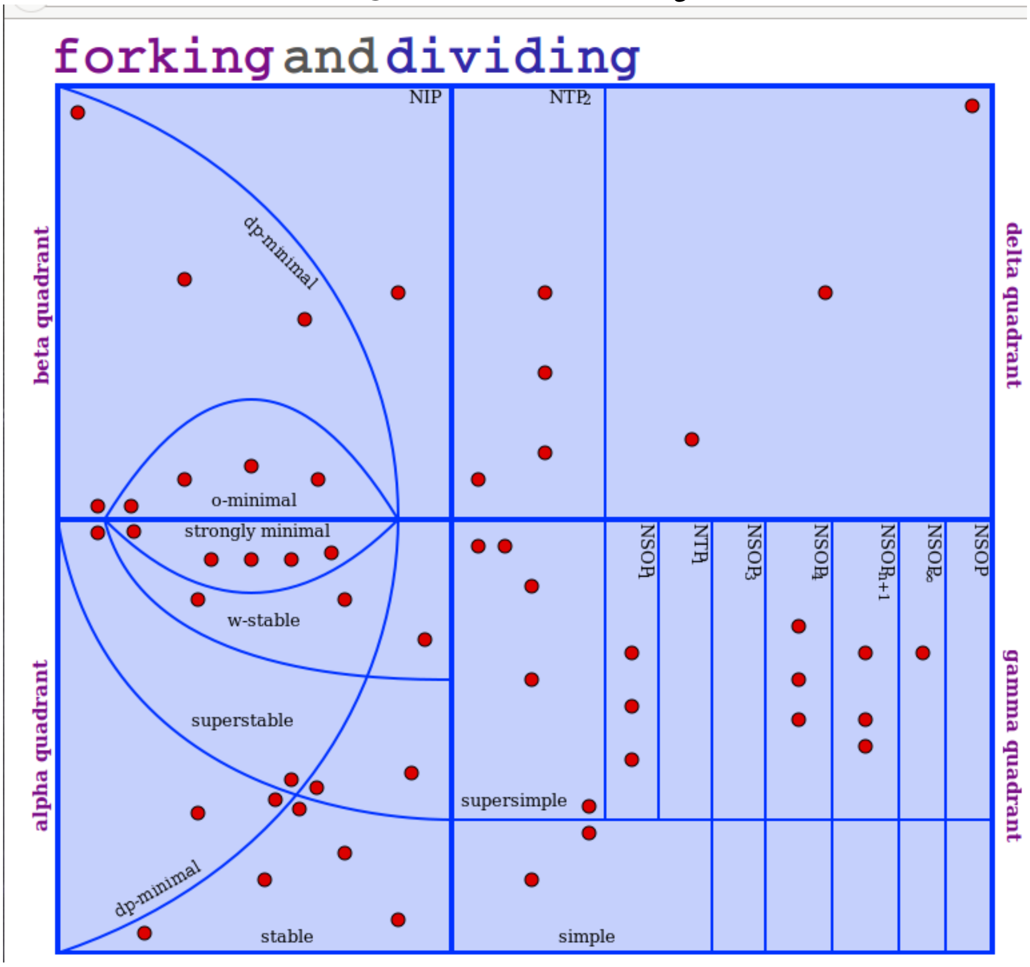
[۳] tame

[۴] شاید گروتندیک نخستین کسی باشد که از اصطلاح رام برای اطلاق به ساختارهای ریاضی استفاده کرده است. در مقدمه‌ی کتاب «توپولوژی رام» نوشته‌ی وَن‌دن‌دریز، یا در پایان‌نامه‌ی دکتری نویسنده‌ی دوم، درباره‌ی وجوه مختلف رام بودن یا نبودن ساختارها توضیح داده شده است.

[۵] categoricity

[۶] classification

شکل ۱.۱: رده‌بندی نظریه‌ی مدلی تئوریها



گزاره ۲ (قضیه‌ی مُرلی): اگر تئوریِ T در زبانِ شمارایِ L یک تئوریِ $\aleph_1$ ـ جازم باشد، آنگاه در هر کاردینالِ ناشمارایِ κ نیز جازم است.

قضیه‌ی بالا سرآغاز نظریه‌ی **پایداری** [۷] در نظریه‌ی مدل است که توسط شلاه بسط داده شده است. ادامه‌ی بسط نظریه‌ی پایداری نیز به **نظریه‌ی رده‌بندی** [۸] انجامیده است که آن نیز حاصل کار شلاه [۹] است. خواننده را برای آشنایی بیشتر با این رده‌بندی به تارنمای زیر ارجاع می‌دهیم:

http://forkinganddividing.com/

[۷] stability
[۸] classification theory
[۹] Shelah, Shahron, Hebrew University of Jerusalem

۲.۱.۱ زبان

تعریف ۳ (زبان صوری): منظور از یک *زبان صوری* [۱۰] مرتبه‌ی اول مجموعه‌ای است چون L متشکل از سه مجموعه‌ی جدا از همِ $\mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$. اطلاعات زیر نیز همواره در چنین زبانی لحاظ می‌شوند.

۱. مجموعه‌ی $\mathbf{F}$ مجموعه‌ی نمادهای تابعی زبان نامیده می‌شود و برای هر نماد تابعیِ $f \in \mathbf{F}$ یک عدد طبیعیِ n_f به نام تعداد متغیرهای نماد تابعیِ f در نظر گرفته می‌شود.

۲. مجموعه‌ی $\mathbf{R}$ مجموعه‌ی نمادهای محمولی زبان نامیده می‌شود و برای هر نماد محمولی $R \in \mathbf{R}$ یک عدد طبیعیِ n_R به نام تعداد متغیرهای نماد محمولیِ R در نظر گرفته می‌شود.

۳. مجموعه‌ی $\mathbf{C}$ مجموعه‌ی ثوابت نامیده می‌شود.

مثال ۴: ۱. زبانِ تهی، $L = \emptyset$.

۲. $\mathbf{F} = \{(f, ۲), (g, ۳)\}$، $\mathbf{R} = \mathbf{C} = \emptyset$.

۳. $L^{۱}_{\text{گروه}} = \{*, e\}$.

۴. $L^{۲}_{\text{گروه}} = \{*, e, ^{-۱}\}$.

۵. $L_{\text{میدان}} = L_{\text{حلقه}}\{+, \times, ۰, ۱\}$.

۶. زبانهای محمولی مانند $L_{\text{گراف}}$ متشکل از $\{(R, ۲)\}$ $\mathbf{F} = \mathbf{C} = \emptyset, \mathbf{R} =$ و $L_{\text{ترتیب}} = \{\leq\}$؛ توجه کنید که ایندو در واقع یک زبانند.

۷. زبانهای ترکیبی مانند $L_{\text{حلقه‌های‌مرتب}} = \{+, \times, ۰, ۱, \leq\}$.

در مواجهه با یک ساختارِ ریاضیاتی، نظریه‌مدل‌دان در انتخاب زبانْ مختار است؛ ولی این انتخاب را زمانی می‌توان معقول دانست که زبان یادشده گنجایش اطلاعات ریاضی ساختار مورد مطالعه را داشته باشد، و نیز تئوری‌ای که در این زبان اصلبندی می‌شود، با جبر، هندسه، آنالیز یا ترکیبات ساختار مورد نظر همسو باشد.

تعریف ۵ (ساختار): گیریم $L = \mathbf{F} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{C}$ زبانی صوری باشد. منظور از یک L ـ ساختار، یا یک L ـ تعبیر، [۱۱] چندتایی‌ای است چون $\mathfrak{M}$ که از گردهم‌آمدن موارد زیر حاصل شود.

[۱۰] formal language

[۱۱] L-structure, L-interpretation

۱. یک مجموعه‌ی ناتهی مانندِ M که بدان **عالمِ سخن** [۱۲] یا **جهانِ ساخت** یا **دامنه‌ی ساخت** گفته می‌شود.

۲. به ازای هر $f \in F$ تابعی چون $f^{\mathfrak{M}} : M^{n_f} \to M$، که بدان تعبیر تابعِ f در ساختارِ $\mathfrak{M}$ گفته می‌شود.

۳. به ازاء هر $R \in \mathbf{R}$ رابطه‌ای چون $R^{\mathfrak{M}} \subseteq M^{n_R}$ که آن را تعبیرِ رابطه‌ی یادشده در ساختار $\mathfrak{M}$ می‌خوانیم. (به بیان دیگر، برای هر رابطه‌ی R، تابعی چون $R^{\mathfrak{M}} : M^{n_R} \to \{۰, ۱\}$، که آن را تابعِ مشخصه‌ی رابطه‌ی یادشده می‌خوانیم).

۴. به ازاءِ هر $c \in \mathbf{C}$ عنصری چون $c^{\mathfrak{M}} \in M$ که بدانْ تعبیر ثابتِ c در ساختارِ $\mathfrak{M}$ می‌گوییم.

نمایش اطلاعات بالا عموماً به صورت زیر است:

$$\mathfrak{M} = \langle M, \{f^{\mathfrak{M}}\}_{f\in\mathbf{F}}, \{R^{\mathfrak{M}}\}_{R\in\mathbf{R}}, \{c^{\mathfrak{M}}\}_{c\in\mathbf{C}}\rangle.$$

ممکن است خواننده دچار این ابهام شود که در فضاهای متریک، تابعِ متریک که از M به $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود، در تعریف بالا نمی‌تواند مصداق داشته باشد. پاسخ این است که برای مطالعه‌ی چنین فضایی، از زبانها و ساختارهای چندبخشی [۱۳] استفاده می‌شود، که از پرداختن بدانها فعلاً خودداری می‌کنیم. [۱۴] نیز در منطق پیوسته، که آن نیز در چارچوب این دوره نمی‌گنجد، تعبیر هر رابطه‌ی R تابعی است چون $R^{\mathfrak{M}} : M^{n_R} \to [۰, ۱]$.

مثال ۶:

۱. ساختارهای $\mathfrak{Z} = \langle Z, +, ۰\rangle$ یا $\mathfrak{R} = \langle R, \times, ۱\rangle$ در زبان $L = \{*, e\}$.

۲. ساختارِ $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, \leq\rangle$ در زبانِ $L = \{(R, ۲)\}$

۳. ساختارِ $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, R^3\rangle$ در زبانِ $L = \{(R, ۳)\}$، آنجا که $R^3 = \{(x, y, z) | x \leq y \leq z\}$.

[۱۲] universe

[۱۳] many-sorted

[۱۴] به دانشجوی علاقه‌مند پیشنهاد می‌کنیم آنها را با کمک دستیار فراگرفته به کلاس عرضه کند.

تعریف ۷ (نشاندن): گیریم L زبانی صوری باشد و $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو ساختار در این زبان. تابعِ یک‌به‌یکِ $e : M \to N$ را یک L ـ *نشاندن* [۱۵] می‌خوانیم هرگاه

۱. برای هر $c \in \mathbf{C}$ داشته باشیم $e(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$.

۲. برای هر نماد تابعیِ n موضعیِ $f \in \mathbf{F}$ و هر $a_۱, \dots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$e(f^{\mathfrak{M}}(a_۱, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(e(a_۱), \dots, e(a_n)).$$

۳. برای هر نمادِ محمولیِ n موضعیِ $R \in \mathbf{R}$ و هر $a_۱, \dots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$\langle a_۱, \dots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow \langle e(a_۱), \dots, e(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{N}}.$$

تعریف ۸ (زیرساخت): ساختارِ $\mathfrak{M}$ را یک زیرساخت [۱۶] از ساختارِ $\mathfrak{N}$ می‌خوانیم، و آن را با $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ نمایش می‌دهیم، هرگاه اولاً $M \subseteq N$ و ثانیاً تابع شمول، $i : M \to N$، یک L ـ نشاندن باشد.

معلوم است که هرگاه $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$، آنگاه برای هر $f \in \mathbf{F}$ (با n موضع) داریم $f^{\mathfrak{N}}|_{M^n} = f^{\mathfrak{M}}$، و برای هر $R \in \mathbf{R}$ داریم $R^{\mathfrak{N}} \cap M^n = R^{\mathfrak{M}}$.

مثال ۹:

۱. ساختارِ $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ زیرساختاری از $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ است.

۲. نگاشت

$$e : \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle \to \langle \mathbb{R}^+, \times, ۱ \rangle$$

با ضابطه‌ی $e(x) = e^x$ یک نشاندن است.

۳.۱.۱ نحو

در نحو [۱۷]، هر زبانِ مرتبه‌ی اولِ L را به همراه نمادهای منطقی مرتبه‌ی اول زیر در نظر می‌گیریم.

۱. نمادهای موجود در مجموعه‌ی L.

[۱۵] L-embedding

[۱۶] L-substructure

[۱۷] syntax

۲. یک نماد متمایزِ دوموضعی به نام تساوی، که آن را با $\approx$ نشان می‌دهیم.

۳. مجموعه‌ی متغیرها، که آن را با var نشان می‌دهیم.

۴. ادوات منطقی، شامل

- ادوات بولی یا گزاره‌ای: $\neg, \leftrightarrow, \leftarrow, \vee, \wedge$.
- سورها، $\exists, \forall$.

۵. پرانتزهای باز و بسته، $(,)$ که از آنها صرفاً برای رفع ابهام بهره می‌جوییم.

تعریف ۱۰ (ترمها): مجموعه‌ای را که از موارد زیر حاصل شود، مجموعه‌ی L ـ *ترمها* [۱۸] می‌خوانیم.

۱. ثوابت و متغیرها جزوِ L ـ ترمها هستند.

۲. هرگاه f یک نماد تابعی n موضعی و $t_1, \ldots, t_n$ ترمهایی در زبان L باشند، آنگاه $f(t_1, \ldots, t_n)$ نیز L ـ ترم است.

۳. L ـ ترمها تنها از موارد ۱ و ۲ حاصل می‌شوند.

تعریف ۱۱ (فرمولها): فرمولها در زبانِ L به طریق زیر تعریف می‌شوند.

۱. L ـ فرمولهای بسیط (یا اتمیک) یه یکی از دو صورت زیر هستند:

(آ) عباراتی چون $R(t_1, \ldots, t_n)$ که در آن R رابطه‌ای است n موضعی و $t_1, \ldots, t_n$ ترم‌هایی در زبانِ L هستند.

(ب) عبارتی چون $t_1 \approx t_2$ که در آن t_1, t_2 ترم هستند.

۲. اگر ϕ_1 و ϕ_2 دو L ـ فرمول باشند، آنگاه $\phi_1 \wedge \phi_2$، $\phi_1 \vee \phi_2$، $\phi_1 \rightarrow \phi_2$، $\phi_1, \leftrightarrow \phi_2$، و $(\neg\phi_1)$ نیز L ـ فرمولند.

۳. اگر ϕ یک L ـ فرمول باشد و x یک متغیر، آنگاه $\forall x\phi$ و $\exists x\phi$ نیز L ـ فرمولند.

۴. L ـ فرمولها تنها از موارد بالا حاصل می‌شوند.

[۱۸] term

به متغیرهایی که در دامنه‌ی هیچ سوری واقع نباشند، متغیرهای آزاد، و به آنهایی که تحت سورند، متغیر پایبند می‌گوییم. منظور از نمادِ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ این است که متغیرهای آزادِ فرمولِ ϕ در میانِ $x_1,\ldots,x_n$ (و نه لزوماً همه‌ی آنها) هستند. یک متغیر می‌تواند در یک فرمول، حضوری آزاد و حضوری پایبند داشته باشد؛ برای مثال، متغیرِ x در فرمولِ زیر.

$$(\exists x \quad R(x,y)) \wedge R(x,z).$$

۴.۱.۱ تئوری صدق تارسکی

فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک L ـ ساختار باشد، $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ یک L ـ فرمول و $a_1,\ldots,a_n$ عناصری باشند در M. این را که فرمولِ ϕ در مصادیق $a_1,\ldots,a_n$ در ساختارِ $\mathfrak{M}$ صادق است، به صورتِ

$$\mathfrak{M} \models \phi(x_1,\ldots,x_n)[x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n]$$

یا با تسامح، به صورت

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1,\ldots,a_n)$$

نشان داده به صورت استقرایی زیر تعریف می‌کنیم:

- $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2[\bar{a}] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathfrak{M}}[\bar{a}]$.
- $\mathfrak{M} \models R(t_1,\ldots,t_n)[\bar{a}] \Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[\bar{a}],\ldots,t_n^{\mathfrak{M}}[\bar{a}])$.
- $\mathfrak{M} \models \neg\phi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models \phi[\bar{a}]$.
- $\mathfrak{M} \models (\phi_1 \wedge \phi_2)[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \phi_2[\bar{a}]$ و $\mathfrak{M} \models \phi_1[\bar{a}]$
- $\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi[\bar{a}]$ اگر عنصری چون $b \in M$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{M} \models \phi[\bar{b}]$.

بدیهی است که تعریف بالا، به طور خاص، وقتی که ϕ یک جمله (یعنی فرمولِ بدون متغیر آزاد) باشد نیز کارگر است. در صورتی که $\mathfrak{M} \models \phi$ گوییم M مُدِلی برای ϕ است. نقیض این سخن را با $\mathfrak{M} \not\models \phi$ نشان می‌دهیم.

به یک مجموعه از L ـ جملات، *تئوری*[۱۹] می‌گوییم. تئوریِ T را *ارضاشدنی* [۲۰] می‌خوانیم هرگاه مدلی برای آن موجود باشد؛ یعنی ساختاری چون $\mathfrak{M}$ موجود باشد، به طوری که برای هر $\phi \in T$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \phi$. در این صورت می‌نویسیم $\mathfrak{M} \models T$.

۵.۱.۱ نشاندن مقدماتی

در بخشِ ۲.۱.۱ درباره‌ی نشاندنها و زیرساختها سخن گفتیم. در برخی تئوریها، زیرساختها همه‌ی ویژگی‌های مرتبه‌ی اول یک ساختار را به ارث می‌برند. به هر زیرساختِ اینچنین، زیرساختی مقدماتی می‌گوییم (این مفهوم را در ادامه تعریف کرده‌ایم). برای مثال، اگر $M_۱, M_۲$ دو میدانِ بسته‌ی جبری باشند و $M_۱ \subseteq M_۲$، آنگاه هر چندجمله‌ای با ضرایبِ در $M_۱$ اگر در $M_۲$ ریشه داشته باشد، مسلماً در $M_۱$ هم ریشه دارد.

در این بخش (در طی چند تمرین) نخست به بررسی این نکته پرداخته‌ایم که زیرساختها چه ویژگی‌هایی از ساختار شامل خود به ارث می‌برند، و سپس محکی برای وارسی این ارائه می‌کنیم که چه هنگام یک زیرساخت، مقدماتی است.

تمرین ۱۲: گیریم $M \subseteq N$؛ نشان دهید که $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ اگروتنهااگر برای هر فرمولِ بدونِ سورِ $\phi(x_۱, \dots, x_n)$ و هر $a_۱, \dots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_۱, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(a_۱, \dots, a_n).$$

مجموعه‌ی همه‌ی فرمولهای **بدون سور** با پارامتر در M را (منظور جمله‌هایی است به شکلِ $\phi(a_۱, \dots, a_n)$ که در آن $a_۱, \dots, a_n \in M$) با $\mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ نشان می‌دهیم. مشخص است که $\mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ (دیاگرام اتمیکِ $\mathfrak{M}$) را می‌توان به عنوان یک تئوری، ولی در زبانِ L_M ـ یعنی زبانی که از افزودن ثابت برای عنصر در M به L حاصل شده است ـــ مورد مطالعه قرار داد. پس حکم تمرین بالا را می‌توان بدین صورت بازنوشت:

تمرین ۱۳: نشان دهید که $\mathfrak{N} \models^{L_M} \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ اگروتنهااگر L ـ نشاندنی از $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{N}$ موجود باشد.

---
[۱۹] theory
[۲۰] satisfiable

به طور مشابه، با $\mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$ (دیاگرام مقدماتیِ $\mathfrak{M}$) مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌هایی را در زبانِ L_M نشان می‌دهیم که در $\mathfrak{M}$ درستند. نیز با $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌هایی را **در زبانِ** L نشان می‌دهیم که در ساختارِ $\mathfrak{M}$ درستند.

نشاندنِ $j : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ را مقدماتی می‌خوانیم هرگاه همه‌ی فرمولها (و نه فقط فرمولهای بی‌سور) تحت آن حفظ شوند؛ به بیان دیگر هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x_۱, \dots, x_n)$ و $a_۱, \dots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_۱, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(a_۱, \dots, a_n).$$

هرگاه نگاشت شمول، یک نشاندن مقدماتی باشد، می‌نویسیم $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$، و می‌گوییم که $\mathfrak{M}$ زیرساختی مقدماتی از $\mathfrak{N}$ است (یا $\mathfrak{N}$ توسیعی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ است).

تمرین ۱۴: نشان دهید که $\mathfrak{N} \models^{L_M} \mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$ اگروتنهااگر نشاندنی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{N}$ در زبانِ L موجود باشد.

نشاندنِ $e : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ را یک *ایزومرفیسم* می‌خوانیم هرگاه یک‌به‌یک و پوشا باشد.

تمرین ۱۵: نشان دهید که هرگاه $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ یک ایزومرفیسم باشد، آنگاه $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ هم‌ارز مقدماتیند؛ یعنی هر L ـ جمله، در $\mathfrak{M}$ درست است اگروتنهااگر در $\mathfrak{N}$ درست باشد (این را با نمادِ $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ نشان می‌دهیم).

توجه کنید که هم‌ارز مقدماتی بودن $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ معادل این است که $\mathfrak{M} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

تمرین ۱۶: آیا عکسِ تمرین بالا درست است؟ نشان دهید هرگاه M, N هر دو متناهی باشند و $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ آنگاه M و N ایزومرفند.

تمرین ۱۷: تحقیق کنید که $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle \not\prec \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$. نیز نشان دهید که $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \prec \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$. (اثبات این دومی با ابزارهایی که هم‌اکنون در درست داریم آسان نمی‌نماید!)

تمرین ۱۸ (محک تارسکی): گیریم $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$؛ نشان دهید که $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ اگروتنهااگر برای هر فرمولِ $\phi(x, \bar{y})$ (دقت کنید که x تک‌متغیر است و نگفته‌ایم که ϕ فرمولی بدون سور است) و هر $\bar{b} \in M$، اگر $\mathfrak{N} \models \exists x \quad \phi(x, \bar{b})$ آنگاه

$$\mathfrak{N} \models \exists x \in M \quad \phi(x, \bar{b}).$$

حتماً خود به زیرکی دریافته‌اید که نوشتن عبارت بالا در منطق مرتبه‌ی اول، حداقل در زبانِ L، مجاز نیست. چنین جمله‌ای را تنها زمانی می‌توان نوشت که در زبان محمولی برای ساختارِ کوچکتر،

در اینجا $\mathfrak{M}$، داشته باشیم. با این حال هدفمان از آنگونه نوشتن تأکید بر این نکته بوده که منظورْ $\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi(x, \bar{b})$ نبوده است، که در آن صورت محک تارسکی، بدیهی می‌بود!

تمرین ۱۹: گیریم $L = \{\leq\}$؛ نشان دهید که $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle)$ دارای مدلی است که ترتیب اعدادِ گویا در آن می‌نشیند (یعنی ساختاری چون $\mathfrak{M} \equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ به همراه نشاندنی از $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ به M موجود هستند).

تمرین ۲۰: گیریم $\mathfrak{M}_۰ \subseteq \mathfrak{M}_۱ \subseteq \mathfrak{M}_۲$، $\mathfrak{M}_۰ \prec \mathfrak{M}_۲$ و $\mathfrak{M}_۱ \prec \mathfrak{M}_۲$. نشان دهید که $\mathfrak{M}_۰ \prec \mathfrak{M}_۱$.

تمرین ۲۱: گیریم $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ یک L ـ نشاندن باشد. نشان دهید زوج $(\mathfrak{N}, g)$ چنان موجود است که $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ و g اتومرفیسمی از $\mathfrak{N}$ است که f را بگستراند.

تمرین ۲۲: در زبان گروهها، برای $n \neq m$ نشان دهید که $\mathbb{Z}_{p^\infty}^n \not\equiv \mathbb{Z}_{p^\infty}^m$. منظور از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ گروه متشکل از همه‌ی ریشه‌های p^k اُمِ واحد است.

تمرین ۲۳: در زبان گروهها، نشان دهید که برای $n \neq m$ داریم $\mathbb{Z}^n \not\equiv \mathbb{Z}^m$.

تمرین ۲۴ (ضرب مستقیم): دو L ـ ساختارِ $\mathfrak{M}_۱, \mathfrak{M}_۲$ را در نظر بگیرید. L ـ ساختارِ $\mathfrak{M}_۱ \otimes \mathfrak{M}_۲$ را طوری تعریف کنید که جهانِ آن $M_۱ \times M_۲$ باشد و توابعِ طبیعیِ تصویر، یعنی $\pi_i : \mathfrak{M}_۱ \times \mathfrak{M}_۲ \to \mathfrak{M}_i$، نسبت بدان ویژگی جهانی زیر را داشته باشند:

برای هر L ـ ساختارِ $\mathfrak{N}$ و هموفریسمهای $\phi_i : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_i$ (برای $i = ۱, ۲$) هومرفیسمِ یکتای $\psi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}_۱ \otimes \mathfrak{M}_۲$ موجود باشد، به طوری که $\phi_i = \pi_i \circ \psi$.

تعریف هومرفیسم شبیه تعریف نشاندن است (تعریفِ ۷)، با این تفاوت که شرط یک‌به‌یک بودن در آن نیاز نیست و موردِ ۳ به صورت زیر است:

$$\langle a_۱, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}} \Rightarrow \langle e(a_۱), \ldots, e(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{N}}.$$

۲.۱ جلسه‌ی دوم، مثالهایی از تئوریها

۱.۲.۱ گروهها

در زبانِ $L_1 = \{*\}$ اصول زیر را تئوریِ گروهها می‌خوانیم و آن را با $T_{\text{گروه}}$ نشان می‌دهیم.

- $\sigma_1 : \quad \forall x \forall y \forall z \quad ((x*y)*z = x*(y*z))$
- $\sigma_2 : \quad \exists e\,(\forall x \quad x*e = e*x = x \quad \wedge \quad \forall x \exists y \quad x*y = e)$

به آسانی می‌توان دید که $\langle G, *\rangle \models T_{\text{گروه}}$ اگروتنهااگر $\langle G, *\rangle$ یک گروه باشد. نیز داریم

$$T_{\text{گروه}} \models \text{«عنصر خنثی یکتاست.»}$$

$$T_{\text{گروه}} \models \text{«وارون هر عنصر یکتاست»}$$

تمرین ۲۵: بررسی کنید که هرگاه $\langle G, *\rangle \models T_{\text{گروه}}$، هر زیرساخت از $\langle G, *\rangle$ یک شبه‌گروه [۲۱] است.
[۲۲]

در تمرینِ بالا مشاهده کردیم که در زبانِ L_1، گروه‌بودن (یعنی مدلی از $T_{\text{گروه}}$ بودن) از G به زیرساختهای آن به ارث نمی‌رسد. درباره‌ی این که در یک تئوریِ داده‌شده، زیرساختها چقدر به ساختارهای شامل خود شبیهند، در ادامه بیشتر خواهیم گفت.

گروهها را می‌توان در زبانهای مجهزتری نیز اصلبندی کرد. زبانهای $L_2 = \{*, e\}$ و $L_3 = \{*, ^{-1}, e\}$ را در نظر بگیرید. در زبانِ L_2 می‌توان تئوریِ $T^2_{\text{گروه}}$ را از اجتماع دو اصل زیر با اصلِ σ_1 حاصل کرد.

- $\theta_1 : \quad \forall x \quad x*e = e*x = x$.
- $\theta_2 : \quad \forall x \exists y \quad x*y = y*x = e$.

تمرین ۲۶: بررسی کنید هر زیرساخت از یک مدل از $T^2_{\text{گروه}}$ یک تکواره [۲۳] است. [۲۴]

---

[۲۱] semigroup

[۲۲] منظور از شبه‌گروه ساختاری است به همراه یک عملِ شرکت‌پذیر.

[۲۳] monoid

[۲۴] منظور شبه‌گروهی است دارای عنصر خنثی.

در زبانِ $L_۳$ نیز می‌توان تئوریِ $T^۳$ را اجتماع اصولِ $\sigma_۱, \theta_۱$ و اصل زیر در نظر گرفت.

- $\theta_۳: \quad \forall x \quad x * x^{-۱} = x^{-۱} * x = e$.

تمرین ۲۷: بررسی کنید که هر زیرساخت از یک مدل از $T^۳_{\text{گروه}}$ خودْ مدلی از $T^۳_{\text{گروه}}$ (یعنی یک گروه) است.

۲.۲.۱ حلقه‌ها و میدانها

برای حلقه‌ها نیز می‌توان زبانهای مختلفی برگزید. ساختارِ $\langle R, +, \cdot, -, ۰, ۱\rangle$ را در زبانِ $L^۱ = \{+, \cdot, ۰, ۱\}$ مدلی از تئوریِ حلقه‌ها، یا به طور کوتاه، حلقه می‌خوانیم هرگاه از اصول زیر پیروی کند (که مجموعه‌ی آنها را $T_{\text{حلقه}}$ می‌خوانیم).

- $\langle R, +, ۰\rangle \models T^۲_{\text{گروه}} \cup \{\forall x \forall y \quad x + y = y + x\}$
- $\forall x \forall y \forall z \quad (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$.

تمرین ۲۸: زبانِ $L^۲_{\text{حلقه}} = \{+, -, \cdot, ۰, ۱\}$ را برای حلقه‌ها در نظر گرفته نقش اصول مربوط به $\{-\}$ را در شناسایی مدلها و زیرساختارهاشان بررسی کنید. برای مثال بررسی کنید که در این زبان، هر زیرساخت از یک مدلِ دلخواه، حوزه‌ای صحیح است.

بدین‌ترتیب تئوری حلقه‌های جابجایی، $T_{\text{ح‌جابجایی}}$ از اجتماع $T_{\text{حلقه}}$ با تک‌اصلِ $\{\forall x \forall y \quad x \cdot y = y \cdot x\}$ حاصل می‌شود؛ تئوریِ $T_{\text{ح‌صحیح}}$، برای حوزه‌های صحیح، از اجتماعِ $T_{\text{ح‌جابجایی}}$ با تک‌اصلِ $\{\forall x \forall y \quad x \cdot y = ۰ \rightarrow x = ۰ \vee y = ۰\}$، و تئوریِ میدانها، $T_{\text{میدان}}$ از اجتماعِ $T_{\text{ح‌جابجایی}}$ با اصلِ زیر:

$$\forall x \quad (x \neq ۰ \rightarrow \exists y \quad x \cdot y = y \cdot x = ۱).$$

میدانهای با مشخصه‌ی معین

دو میدانِ $\mathbb{Z}_p$ و $\mathbb{C}$ (به همراه عملهای جمع و ضرب و صفر و یکشان) مدلهایی ناهم‌ارزمقدماتیند از $T_{\text{میدان}}$؛ در اولی جمله‌ی زیر برقرار است ولی در دومی خیر.

$$\forall x \quad \underbrace{x + x + \ldots x}_{p \text{ بار}} = ۰.$$

«مشخصه‌ی میدانها» میدانها را بر اساس این تفاوت متمایز می‌کند. بنا به تعریف، مشخصه‌ی یک میدانِ F عددی اول چون p است، هرگاه

$$\forall x \quad \underbrace{x + x + \ldots x}_{p \text{ بار}} = \text{۰}.$$

نیز گوییم مشخصه‌ی میدانِ F صفر است هرگاه چنین عدد اول p موجود نباشد. بدین‌ترتیب می‌توان با افزودن جمله‌هایی به تئوری میدانها، مشخصه‌ی آنها را نیز تعیین کرد.

تمرین ۲۹: میدانی نامتناهی با مشخصه‌ی عدد اولِ p بیابید.

«متناهی بودن یا نبودن» چشمِ‌اسفندیار نظریه‌ی مدل است؛ در درسهای بعد دانش مدل‌تئوریک کافی را برای تجربه‌کردنِ این سخن فراهم خواهیم آورد. برای حال، به تمرین زیر بسنده کرده‌ایم.

تمرین ۳۰: آیا می‌توان یک تئوریِ T نوشت، به طوری که $\langle F, +, \cdot, \text{۰}, \text{۱} \rangle \models T$ اگروتنهااگر F میدانی با مشخصه‌ی متناهی باشد؟

پیش از آن که بیشتر درباره‌ی تئوریهای مربوط به میدانها بگوییم، در بخش بعد اندکی درباره‌ی جبر میدانها یادآوری می‌کنیم. بخش بعد تنها یادآور برخی مفاهیم جبری است و خواندن آن اختیاری.

انحراف از بحث، جبر میدانها

فرض کنید F یک میدان با مشخصه‌ی $p < \infty$ باشد. آنگاه اشتراک همه‌ی زیرمیدانهای آن، که آن را با P نشان می‌دهیم، میدانی ایزومرف با $\mathbb{Z}_p$ است. اگر مشخصه‌ی F صفر باشد، آنگاه $P \cong \mathbb{Q}$. میدانِ P را زیرمیدانِ اولیه‌ی F می‌خوانیم. اگر F میدانی متناهی باشد، آنگاه عددی اول چون p و عددی چون $n \in \mathbb{N}$ موجودند، به طوری که $|F| = p^n$ و $\text{char}(F) = p$. گروه ضربی متشکل از همه‌ی عناصرِ ناصفر یک میدانِ متناهیِ F گروهی دوری است. نیز چنین میدانِ F توسیعی ساده از زیرمیدانِ اولیه‌ی خود، $\mathbb{Z}_p$ است؛ یعنی $F = \mathbb{Z}_p(u)$ برای یک $u \in F$.

اگر F میدانی با مشخصه‌ی p باشد، آنگاه برای هر $r \geq \text{۰}$ نگاشتِ $\phi : F \to F$ که هر x را به x^{p^r} می‌برد، یک $\mathbb{Z}_p$ مونومرفیسم است. در صورتی که F متناهی باشد، این نگاشت یک $\mathbb{Z}_p$ اتومرفیسم است.

گزاره ۳۱: میدانِ متناهیِ F دارای p^n عضو است اگروتنهااگر میدانِ شکافنده‌ی (تعریف در زیر) چندجمله‌ایِ $x^{p^n} - x$ روی $\mathbb{Z}_p$ باشد. برای هر عدد اول p و هر $n \in \mathbb{N}$ میدانی (یکتا به پیمانه‌ی

ایزومرفیسم) از اندازه‌ی p^n موجود است. اگر K یک توسیع میدانی از F با بُعد متناهی باشد، آنگاه K متناهی و گالوا (تعریف در زیر) روی F است. نیز گروه گالوای Aut_F^K (تعریف در زیر) دوری است.

فرض کنید $F \subseteq K$ یک توسیع میدانی باشد. عنصرِ $u \in F$ را روی K جبری می‌خوانیم هرگاه ریشه‌ای از یک چندجمله‌ای مانند $f \in K[x]$ باشد؛ در غیر این صورت، u را روی K متعالی می‌خوانیم. اگر همه‌ی عناصرِ F روی K جبری باشند، F را توسیعی جبری از K، و در غیر این صورت آن را توسیعی متعالی از K می‌خوانیم.

اگر $u \in F$ روی K جبری باشد، آنگاه $K(u)$، میدان تولیدشده توسط K, u در F، ایزومرف با $K(x)$، میدان متشکل از توابعِ گویا است. اگر u روی K جبری باشد آنگاه

۱. $K(u) = k[u]$.

۲. $K(u) \cong K[x]/(f)$ که در آن f چندجمله‌ایِ کمینالِ u و فرضاً دارای درجه‌ی n است.

۳. $[K(u) : K] = n$.

۴. $K(u)$ به عنوان یک فضای برداری روی K توسط عناصرِ $\{1, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\}$ تولید می‌شود.

میدانِ F را یک توسیع گالوایی از K می‌خوانیم هرگاه

$$K = \{x \in F | \forall f \in \mathrm{Aut}_K^F \quad f(x) = x\}.$$

منظور از Aut_K^F مجموعه‌ی همه‌ی اتومرفیسمهایی از F است که K را نقطه‌وار حفظ می‌کنند.

گزاره ۳۲ (قضیه‌ی بنیادین نظریه‌ی گالوا): اگر F یک توسیع گالواییِ با بعدِ متناهی از K باشد، آنگاه میان دو مجموعه‌ی زیر تناظری یک‌به‌یک است:

- همه‌ی میدانهای H که $K \subseteq H \subseteq F$.
- همه‌ی زیرگروه‌های گروهِ Aut_K^F.

تناظرِ یادشده، نگاشتی است که هر میدانِ E را به Aut_E^F می‌فرستد و ویژگی‌های زیر را داراست:

- برای هر دومیدانِ $K \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq F$ داریم $[\mathrm{Aut}^F_{H_1} : \mathrm{Aut}^F_{H_2}] = [H_2 : H_1]$. بنابراین مرتبه‌ی گروه Aut^F_K برابر است با $[F : K]$.

- F روی هر میدانِ $K \subseteq H \subseteq F$ گالواست؛ ولی H روی K وقتی و تنها وقتی گالواست که Aut^F_H زیرگروهی نرمال از Aut^F_K باشد. در این صورت داریم $\mathrm{Aut}^H_K \cong \mathrm{Aut}^F_K / \mathrm{Aut}^F_H$.

گوییم چندجمله‌ایِ $f \in F[x]$ روی میدانِ F شکافته می‌شود [25] هرگاه آن را بتوان به صورتِ $u_0(x-u_0)(x-u_2)\dots(x-u_n)$ نوشت که در آن $u_i \in F$. به میدانِ $F(u_1, \dots, u_n)$ میدانِ شکافنده‌ی چندجمله‌ایِ f روی میدانِ F می‌گوییم. برای هر $f \in F[x]$ میدان شکافنده‌ای چون F_1 موجود است به طوری که $[F_1 : F] \leq n!$.

میدانِ F را بسته‌ی جبری می‌خوانیم هرگاه هر چند جمله‌ایِ $f \in F[x]$ در F ریشه داشته باشد (یعنی F میدان شکافنده‌ی همه‌ی چندجمله‌ایهای $f \in F[x]$ باشد). هر میدانِ K دارای یک بستارِ جبری است؛ یعنی میدانی بسته‌ی جبری چون $K \subseteq F$ موجود است که F روی K جبری است (معادلاً F میدان شکافنده‌ی همه‌ی چندجمله‌های تحویل‌ناپذیر در $K[x]$ است).

اگر F روی K جبری باشد، آنگاه $|F| \leq \aleph_0 |K|$. هر دو بستارِ جبری از یک میدانِ K با هم K ـ ایزومرفند.

چندجمله‌ایِ تحویل‌ناپذیرِ $f \in K[x]$ را جدایی‌پذیر [26] خوانیم هرگاه در یک میدانِ شکافنده‌ی f روی K همه‌ی ریشه‌های این چندجمله‌ای، ساده باشند. عنصرِ جبریِ $u \in F - K$ را جدایی‌پذیر خوانیم هرگاه چندجمله‌ای کمینال آن جدایی‌پذیر باشد. توسیعِ F از K را جدایی‌پذیر خوانیم هرگاه همه‌ی عناصر آن روی K جدایی‌پذیر باشند. موارد زیر با هم معادلند:

- F توسیعی جبری و گالوا از K است.

- F میدان شکافنده‌ی مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های جداشدنی در $K[x]$ است.

- F میدان شکافنده‌ی یک مجموعه از چندجمله‌ها در $K[x]$ است و F روی K جداشدنی است.

[25] splits
[26] separable

توسیعِ جبریِ F از K را نُرمال می‌خوانیم هرگاه هر چندجمله‌ایِ $f \in K[x]$ که ریشه‌ای در F دارد، همه‌ی ریشه‌هایش در F باشند (معادلاً هرگاه F روی K جبری و میدان شکافنده‌ی مجموعه‌ای از چندجمله‌ها در $K[x]$ باشد).

گزاره ۳۳: توسیعِ جبری F از K گالواست اگروتنهااگر نرمال و جدایی‌پذیر باشد. اگر مشخصه‌ی F صفر باشد، آنگاه F روی K گالواست اگروتنهااگر نرمال باشد.

گیریم E توسیعی جبری از K باشد. میدانِ F را بستارِنرمال [۲۷] میدان E روی K می‌خوانیم هرگاه شرایط زیر برآورده شود:

- F روی K نرمال باشد.
- هیچ زیرمیدانِ سره از F شاملِ E، روی K نرمال نباشد.
- اگر E روی K جدایی‌پذیر باشد، F روی K گالوا باشد.
- $[F:K]$ متناهی باشد اگروتنهااگر $[E:K]$ متناهی باشد.

گزاره ۳۴ (قضیه‌ی اساسیِ جبر): میدانِ اعداد مختلط، بسته‌ی جبری است (و هر بستار جبریِ اعداد حقیقی با آن ایزومرف است).

گفتیم که هر میدانی دارای بستارِ جبری است. بستارِ جبریِ میدانِ $\mathbb{F}_p$ میدانِ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}$ است (این میدان نیز دارای مشخصه‌ی p است).

میدانهای بسته‌ی جبری

تئوریِ میدانهای بسته‌ی جبری، که آن را با ACF نشان می‌دهیم از اجتماعِ $T_{\text{میدان}}$ با طرح‌اصول زیر حاصل می‌شود:

$$\theta_n : \quad \forall a_۱ \dots a_n \quad \exists x \quad x^n + a_۱ x^{n-۱} + \dots + a_n = ۰.$$

همانگونه که از توضیحِ پس از گزاره‌ی ۳۴ معلوم است، می‌توان میدانهای بسته‌ی جبری‌ای با مشخصه‌ی ناصفر داشت؛ بنابراین دو مدل از ACF لزوماً هم‌ارز مقدماتی نیستند. به بیانِ بهترِ ACF کامل [۲۸] نیست.

[۲۷] normal closure
[۲۸] complete

تئوریِ T را کامل می‌خوانیم هرگاه همه‌ی مدلهای آن هم‌ارز مقدماتی باشند. به بیان دیگر هرگاه T سازگار باشد و برای هر جمله‌ی θ یا $T \models \theta$ یا $T \models \neg\theta$.

با ACF_p و $ACF_\circ$ به ترتیب تئوری میدانهای بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی p و با مشخصه‌ی صفر را نشان می‌دهیم.

گزاره ۳۵ (تارسکی): $ACF_\circ$ و ACF_p تئوریهایی کامل هستند.

تمرین ۳۶: فرمولهای بدون سور (بدون‌پارامتر، و با پارامتر) را در ساختارِ $\langle F, +, \cdot, ۰, ۱\rangle$ شناسایی کنید.

۳.۲.۱ مدولها

گیریم R حلقه‌ای یکدار و نه لزوماً جابجایی باشد. گوییم M یک R ـ مدول است، هرگاه

۱. M گروهی باشد آبلی،

۲. نگاشتی $R \times M \to M$ موجود باشد، با ضابطه‌ی $(r, m) \mapsto rm$ به طوری که

(آ) $r(m+n) = rm + rn$.

(ب) $(r+s)m = rm + sm$.

(ج) $r(sm) = (rs)m$.

مثال ۳۷:

۱. اگر K یک میدان باشد، هر K ـ مدول یک فضای برداری است.

۲. $\mathbb{Z}$ ـ مدولها دقیقاً همان گروههای آبلی هستند: $na = a + \ldots + a$ و $(-n)a = -(na)$.)

۳. $\mathbb{Q}$ ـ مدولها، دقیقاً همان گروههای آبلیِ بدون تاب هستند.

۴. $\mathbb{F}_p$ ـ مدولها، گروههای آبلیِ دارای مرتبه‌ی p هستند (p عددی اول است).

زبانِ $L_{mod}(R) = \{۰, +, -, r\}_{r \in R}$ را در نظر بگیرید. هر R ـ مدول یک $L_{mod}(R)$ ـ ساختار است که در آن، تابعِ r به صورتِ $r(x) = rx$ تعبیر شده است (توجه کنید که در این زبان نمی‌توان

روی عناصرِموجود در R سور بست). در زبانِ یادشده، R ـ مدولها تشکیل کلاسی مقدماتی می‌دهند، با اصولی شاملِ خانواده‌ی زیر از اصول (دریافتن سایر اصول این تئوری بر عهده‌ی خواننده است)

$$\{\forall x \quad (rs)x = r(s(x))\}_{r,s\in R}$$

تمرین ۳۸: فرمولهای بدون سور را در زبان مدولها بررسی کنید.

۴.۲.۱ مجموعه‌های مرتب

مجموعه‌های مرتب را در زبانِ $L_{\text{ترتیب}} = \{\leq\}$ مطالعه می‌کنیم. تئوری مجموعه‌های جزئاًمرتب با اصول زیر اصلبندی می‌شود:

- $\forall x \quad x \leq x$.
- $\forall xy \quad (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$.
- $\forall xyz \quad (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow z \leq z)$.

اصل زیر، بیان «خطی» بودن ترتیب است:

- $\forall x \forall y \quad x \leq y \vee y \leq x$.

اصل زیر بیانگر چگال بودن ترتیب است:

- $\forall xy \quad (x < y \rightarrow \exists z \quad x < z < y)$.

تمرین ۳۹: تئوریِ مجموعه‌های مرتب خطی گسسته بدون ابتدا و انتها را اصل‌بندی کنید.

۵.۲.۱ گروههای مرتب خطی

تئوری گروههای مرتب خطی از افزودن دو اصل زیر به اصول تئوری گروهها حاصل می‌شود:

- $\forall xyz \quad (x + y < x + z \rightarrow y < z)$.

• $(y+x<z+x \to y<z)\quad \forall xyz$.

در این تئوری می‌توان ثابت کرد که گروههای مرتب خطی، بدون تاب هستند. به طور مشابه می‌توان تئوری میدانهای مرتب را نوشت که از آن نتیجه می‌شود که این میدانها مشخصه‌ی صفر دارند.

۶.۲.۱ انحراف از بحث، جبرِ میدانهای بسته‌ی حقیقی

میدانِ K را حقیقی می‌خوانند هرگاه در آن -1 را نتوان به صورت مجموعی از مربعات نوشت. برای مثال، هر میدان مرتب، حقیقی است. نیز، هر میدان حقیقی، ترتیب‌پذیر است. اگر R میدانی حقیقی باشد که هر توسیع جبری سره‌اش غیرحقیقی شود (یعنی هیچ توسیع جبری سره‌ای نداشته باشد که حقیقی باشد) به R یک میدان بسته‌ی حقیقی می‌گوییم. میدان اعداد حقیقی (بنا به قضیه‌ی اساسی جبر) یک چنین میدانی است. همان طور که می‌دانیم، تنها فاصله‌ی میدان اعداد حقیقی، تا بسته‌ی جبری شدن، $\sqrt{-1}$ است. همین، برای همه‌ی میدانهای بسته‌ی حقیقی برقرار است.

گزاره ۴۰: میدانِ حقیقیِ R، بسته‌ی حقیقی است اگروتنهااگر $R(i)$ یک میدان بسته‌ی جبری باشد (این گفته در واقع نتیجه‌ای از قضیه‌ی اساسی جبر است).

هر میدان حقیقی دارای یک بستار حقیقی است؛ یعنی اگر K حقیقی باشد، میدانی چون $K\subseteq R$ چنان موجود است که R توسیعی جبری از K و خودْ بسته‌ی حقیقی است.

هر میدان بسته‌ی حقیقی دارای ترتیبی یکتاست.

گزاره ۴۱: یک میدانِ حقیقی، بسته‌ی حقیقی است اگروتنهااگر ویژگیِ مقدار میانی داشته باشد؛ یعنی هر چندجمله‌ایِ p که در b مقداری مثبت دارد و در $a<b$ مقداری منفی، در نقطه‌ای در بازه‌ی (a,b) صفر شود.

گزاره‌ی زیر نیز محک دیگری برای بسته‌ی حقیقی بودن یک میدان ارائه می‌کند.

گزاره ۴۲: میدان R بسته‌ی حقیقی است اگروتنهااگر برای هر $a\in R$ یکی از $a,-a$ دارای مجذور، و هر چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد دارای ریشه باشد.

۷.۲.۱ میدانهای بسته‌ی حقیقی

گفتیم میدانهای بسته‌ی حقیقی، بنا تعریف میدانهایی هستند که در آنها -1 مجموعی از مربعات نیست ولی در هر توسیع جبریشان، -1 مجموعی از مربعات است. این گفته را نمی‌توان به صورت

مرتبه‌ی اول نوشت. با این حال، در بخش قبل تعاریف معادلی برای این میدانها عرضه کردیم که قابل بیان در زبان مرتبه‌ی اولند.

تئوری میدانهای بسته‌ی حقیقی، از اجتماعِ تئوری میدانهای مرتب با اصول زیر حاصل می‌شود (مورد سوم، طرحاصل است).

- $\forall x \quad (x > ۰ \to \exists y \quad y^۲ = x)$.
- $\forall xy \quad x^۲ + y^۲ = ۰ \to x = y = ۰$.
- $\sigma_n : \quad \forall \alpha_۱ \ldots \alpha_n \quad \forall a < b \quad (a^n + \alpha_۱ a^{n-۱} + \ldots + \alpha_n > ۰ \quad \wedge \quad b^n + \alpha_۱ b^{n-۱} + \ldots + \alpha_n < ۰ \to \exists a < x < b \quad x^n + \alpha_۱ x^{n-۱} + \ldots + \alpha_n = ۰)$

تئوری یادشده را با RCF نمایش می‌دهیم.

گزاره ۴۳ (تارسکی): RCF کامل و دارای حذف سور و از این رو تصمیمپذیر است.

۸.۲.۱ انحراف از بحث، حساب در نظریه‌ی مدل

تا اینجا چند مثال از تئوریها دیده‌ایم. برخي از این مثالها تئوریهای کامل هستند، از این حیث که درستی یا نادرستی هر جمله‌ی داده شده از اصول آنها قابل استنتاج است. به درست آوردن يك تئوری کامل چندان دشوار نیست. براي هر L ـ ساختارِ $\mathfrak{M}$ تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{m} = \{phi|\mathfrak{M} \models \phi\}$ يك تئوری کامل است که آن را تئوری کامل ساختار $\mathfrak{M}$ می‌خوانیم.

با این حال وجود یک اصلبندی مناسب براي تئوریِ کامل يك ساختار همواره مطلوب محقق نظریه‌ی مدل است. برای مثال دیدیم که تئوریِ ACF که معادل است با تئوری کامل ساختار اعداد مختلط دارای يك اصلبندیِ کامل محاسبه‌پذیر است. سوال این است که آیا ممکن است یک تئوری کامل مناسب برای کل دنیای ریاضیات نوشت. این اصلبندی باید آنقدر جامع باشد که دو روي متفاوت ریاضیات یعنی هندسه و حساب را دربربگیرد؛ درست همانگونه که چند اصل ساده‌ی هندسه‌ی اقلیدسی براي این هندسه مکفی است.

هیلبرت را شاید بتوان مهمترین ریاضیدان قائل به امکان ارائه‌ی دستگاهی از اصول براي ریاضیات دانست. او در سخنرانی تاریخیش در کونیکسبرگ در سال ۱۹۳۰ تأکید کرده بود که هیچ سؤال بی‌پاسخی در ریاضیات باقی نخواهند ماند و به زودي ریاضیات دارای دستگاهی کامل از اصول

خواهد شد که درستی یا نادرستی هر جمله‌ای از آن اصول نتیجه شود. درست بودن این گفته معادل امکان ساخت رایانه‌ای است که اصولی اولیه را به دست گیرد و خود همه‌ی ریاضیات را تولید کند. در همان سال و گویا چندی بعد، در همان فراهمایی، گودل سایر ریاضیدانان را از قضیه‌ی ناتمامیت خود آگاه کرده بود. بنا به قضیه‌ی گودل برای هر اصلبندی مناسبی که برای حساب در نظر بگیریم جمله‌ای هست که نه از این اصلبندی اثبات و نه با کمک آن رد می‌شود. اثبات گودل، از نوع اثباتهای خودبازگشت بود؛ یعني اثباتی با ایده‌های مشابه به تناقضات دروغگو یا راسل.

از قضیه تمامیت گودل نتیجه می‌شود که عاری بودن یا نبودن ریاضیات از تناقض قابل اثبات نیست. در واقع اصول زرملو ـ فرانکل که امروز به عنوان دستگاه کارآمدی براي مبانی ریاضیات در نظر گرفته می‌شود تنها در صورتی سازگار است که متناقض باشد! امروزه موضوع کار بسیاری منطقدانان بررسی سازگاری قضیه‌هاي معروف ریاضیاتی با اصول زرملو ـ فرانکل و بررسي اثباتپذیری یا عدم اثباتپذیری آنها در این دستگاه از اصول است.

برای حساب، و در ادامه‌ی اصول زرملو ـ فرانکل، اصول پئانو در نظر گرفته مي‌شود که در زیر درباره‌ي آن توضیحی داده‌ایم. خواننده‌ی علاقه‌مند را به مطالعه‌ی مقاله‌ی «تجاهل بورباکی» ترجمه نویسنده‌ی دوم ترغیب می‌کنیم.

۹.۲.۱ تئوری حساب

برای ساختارِ $\langle \mathbb{N}, s, +, \times, ۰, ۱, \leq \rangle$ که در آن $s(x) = x + ۱$ مجموعه‌ی اصول زیر (موسوم به اصول پئانو) را در نظر می‌گیریم.

- $\forall x \quad x + ۰ = x$
- $\forall xy(x + s(y) = s(x + y)$.
- $\forall x \quad (x \times ۱ = x)$.
- $\forall xy \quad (x \times s(y) = s \times y + x)$.
- $\forall x \quad (x < s(x) \wedge \neg\exists y \quad x < y < s(x)$.
- برای هر فرمولِ $\phi(x, \bar{y})$ اصلِ $I_\phi(x, \bar{y})$ که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall \bar{y} \quad \phi(۰, \bar{y}) \wedge \forall x(\phi(x, \bar{y}) \rightarrow \phi(s(x), \bar{y}) \rightarrow \forall x \phi(x, \bar{y}).$$

اصول پئانو را می‌توان بخش مقدماتی حساب به شمار آورد. همانگونه که در بخش قبل گفتیم، این اصول قابلیت در خود گنجاندن همه‌ی حساب را ندارند. علاوه بر اثباتی که گودل بر گفته ارائه کرده است، جملاتی پیدا شده است که در اعداد طبیعی صادقند ولی از این اصول نتیجه نمی‌شوند (قضیه‌ی پاریس هرینگتون را ببینید). نیز قضیه‌ی آخر فرما که معادله‌ی $x^n + y^n = z^n$ برای $n > 2$ ریشه‌ی غیربدیهی ندارد، در اعداد طبیعی درست است، ولی نتیجه شدن یا نشدن آن از اصول پئانو، هنوز سوالی باز است. در واقع اثبات قضیه‌ی فرما، از منطق مرتبه‌ی اول فاصله‌ی زیادی دارد.

۱.۲.۱۰ گرافها

تئوری گرافها در زبانِ $L_{\text{گراف}} = \{R\}$ شامل اصول زیر است.

- $\forall x \quad \neg R(x,x)$.
- $\forall xy \quad (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$.

گرافی که علاوه بر اصول فوق، از اصل زیر نیز پیروی کند، «تصادفی» خوانده می‌شود.

$$\forall x_1 \dots x_n \quad \forall y_1 \dots y_n (\bigwedge_{i,j \in \{1,\dots,n\}} x_i \neq y_i \rightarrow \exists x \quad (\bigwedge_{i=1,\dots,n} R(x,x_i) \wedge \bigwedge_{j=1,\dots,n} \neg R(x,y_i))$$

۱.۲.۱۱ انحراف از بحث، گرافهای تصادفی و قاعده‌ی صفرویک

بعداً تکمیل خواهد شد.

۱.۲.۱۲ فضاهای متریک

برای هر $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ یک محمولِ $R_r(x,y)$ در زبان در نظر می‌گیریم، که قرار است نقشِ $d(x,y) \leq r$ را ایفا کند. اصول زیر را برای فضاهای متریک با متر کراندار در نظر می‌گیریم.

- $\forall xy \quad R_r(x,y) \leftrightarrow R_r(y,x)$.
- $\forall xy (R_0(x,y) \leftrightarrow x = y)$.
- $\forall xy (R_1(x,y)$.

- $\forall xyz \quad (R_r(x,y) \wedge R_s(y,z) \to R_{r\dot{+}s}(x,z))$.

که در آن، $r \dot{+} s = \min\{۱, r+s\}$.

تمرین ۴۴: نشان دهید که هر مدل از تئوری بالا را می‌توان به عنوان یک فضای متریک با مقادیر متریِ واقع در بازه‌ی $[۰, ۱]$ در نظر گرفت (تعریف کنید $d(x,y) = \inf\{s | R_s(x,y)\}$).

۳.۱ جلسه‌ی سوم

کلاسِ $\mathcal{K}$ از L ـ ساختارها را **مقدماتی** [۲۹] می‌خوانیم هرگاه این کلاس، مجموعه‌ی همه‌ی L ـ ساختارهایی باشد که مدل یک تئوری مانند T هستند؛ به بیان دیگر هرگاه یک تئوریِ T موجود باشد، به طوری که $T = MOD(T)$ که در آن $MOD(T) = \{\mathfrak{M} | \mathfrak{M} \models T\}$.

تمرین ۴۵: ثابت کنید که کلاس میدانهای متناهی، مقدماتی نیست.

در زیر چند شرط لازم را برای مقدماتی بودن یک کلاس $\mathcal{K}$ فهرست کرده‌ایم.

۱. اگر $\mathcal{K}$ دارای مدلهای متناهیِ باندازه‌ی‌کافی‌بزرگ باشد، آنگاه $\mathcal{K}$ حاوی مدلهایی نامتناهی باشد.

۲. اگر $\mathcal{K}$ حاوی مدلی نامتناهی باشد، آنگاه $\mathcal{K}$ حاوی مدلهای نامتناهی از هر اندازه‌ی دلخواه باشد.

۳. $\mathcal{K}$ نسبت به هم‌ارزی مقدماتی بسته باشد.

۴. $\mathcal{K}$ تحت فراضربها بسته باشد؛ یعنی هرگاه $\langle \mathfrak{M}_i \rangle_{i \in I}$ دنباله‌ای از عناصرِ $\mathcal{K}$ باشد و $\mathbf{F}$ فرافیلتری روی I، آنگاه $\prod_{\mathbf{F}} \mathfrak{M}_i \in \mathcal{K}$.

مثال ۴۶: مفهوم کامل بودن یک میدان مرتب (یعنی اینکه هر زیرمجموعه از آن دارای سوپرمم و اینفیمم باشد) مفهومی مقدماتی نیست. در آنالیز مقدماتی ثابت می‌شود که هر میدان مرتب کامل با $\langle \mathbb{R}, +, ., \leq \rangle$ ایزومرف است. پس موردِ ۲ در بالا در این تئوری مصداق ندارد.

تئوریِ T را **ارضاپذیر** [۳۰] می‌خوانیم هرگاه مدلی برای آن موجود باشد.

قضیه ۴۷ (فشردگی): تئوریِ T ارضاپذیر است اگروتنهااگر هر زیرمجموعه‌ی متناهی از آن ارضاپذیر باشد.

اثباتِ قضیه‌ی فشردگی، جزو برنامه‌ی این درس نیست و فرض ما بر این است که دانشجو پیشتر اثباتی از آن را در درس نظریه‌ی مدلِ ۱ دیده است. با این حال یادآوری می‌کنیم که قضیه‌ی فشردگی را می‌توان با روشهای مختلفی ثابت کرد. نخستین روش استفاده از قضیه‌ی درستی و تمامیت گودل

[۲۹] elementary class
[۳۰] satisfiable

است؛ یعنی قضیه‌ای که بنا بر آن (برای هر مجموعه‌ی Σ از جمله‌ها)

$$\Sigma \models T \Leftrightarrow \Sigma \vdash T.$$

به ویژه، بنا به قضیه‌ی یاددشده

$$\Sigma \models \perp \Leftrightarrow \Sigma \vdash \perp;$$

به بیان دیگر، Σ سازگار است اگروتنهااگر دارای مدل باشد. از طرفی Σ سازگار است اگروتنهااگر هر بخش متناهی از آن سازگار باشد، اگروتنهااگر هر بخش متناهی از آن دارای مدل باشد. پس Σ دارای مدل است اگروتنهااگر هر بخش متناهی از آن دارای مدل باشد.

روش دیگر برای اثبات فشردگی، بهره‌گیری از ساختمانهای هنکین [۳۱] است. در این روش، تکنیکهای اثبات قضیه‌ی درستی و تمامیت، مستقیماً برای بناکردن یک مدل برای Σ استفاده می‌شوند.

روش سوم، که در تمرینهای درس بدان پرداخته خواهد شد، استفاده از فراضربهاست. در این روش مدل مورد نظر از فراضربی از مدلهای موجود برای هر بخشِ متناهی از Σ حاصل می‌شود.

برای یک زبان داده‌شده‌ی L تعریف کنید $\|L\| := \max\{\aleph_0, |L|\}$؛ به بیان دیگر،

$$\|L\| = \begin{cases} |L| & |L| \geq \aleph_0, \\ \aleph_0 & |L| \end{cases}$$

قضیه ۴۸ (لُونِهایم اسکولمِ کاهشی): اگر تئوریِ T ارضاپذیر باشد، مدلی با اندازه‌ی کمتریامساویِ $\|L\|$ دارد.

قضیه ۴۹ (لُونهایم اسکولمِ افزایشی): اگر تئوریِ T ارضاپذیر و دارای مدلی نامتناهی باشد، آنگاه برای هر کاردینالِ نامتناهیِ $\|L\| \leq \kappa$ مدلی از اندازه‌ی κ دارد.

تمرین ۵۰: فرض کنید تئوریِ T دارای مدلی نامتناهی باشد. با استفاده از لمهای لونهایم‌اسکولم و فشردگی، نشان دهید که آنگاه T مدلی با اندازه‌ی دقیقاً برابر با κ دارد.

گفتیم که اگر کلاسی مقدماتی باشد، تحتِ فراضربها بسته است. در زیر شرطی لازم و کافی برای مقدماتی بودن یک کلاس آورده‌ایم.

قضیه ۵۱:

[۳۱] Henkin

۱. کلاسِ $\mathcal{K}$ از L ـ ساختارها مقدماتی است اگروتنهااگر تحت فراضربها و تحت هم‌ارزی مقدماتی بسته باشد.

۲. کلاسِ $\mathcal{K}$ از L ـ ساختارها مقدماتی است اگروتنهااگر تحت فراضربها و تحت ایزومرفیسم بسته باشد.

مورد دوم، قضیه‌ای از شلاه و کیسلر [۳۲] است که اثبات آن را به عنوان پروژه بر عهده‌ی دانشجویان وامی‌نهیم.

اثبات قسمت اول. گیریم $\mathcal{K}$ تحت فراضربها و هم‌ارزی مقدماتی بسته باشد؛ هدفمان یافتن تئوریِ T است به طوری که

$$\mathcal{K} = MOD(T).$$

ادعا می‌کنیم که تئوریِ T در پایین، همانگونه است که می‌خواهیم:

$$T = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Th}(M_i) = \{\phi | \forall \mathfrak{M} \in \mathcal{K} \quad \mathfrak{M} \models \phi\}.$$

توجه ۵۲: بنابراین، ثابت خواهیم کرد که هرگاه $\langle \mathfrak{M}_i \rangle_{i \in I}$ خانواده‌ای از L ـ ساختارها باشد، آنگاه تئوری اشتراک آنها هم‌ارز مقدماتی با تئوری فراضربی از آنهاست.

نخست توجه کنید که T بوضوح ارضاپذیر است و $\mathcal{K} \subseteq MOD(T)$.

فرض کنید $\mathfrak{N}$ مدلی از T باشد. نشان خواهیم داد که خانواده‌ی $\langle \mathfrak{M}_i \rangle_{i \in I}$ و فرافیلترِ F روی I چنان موجودند که $\mathfrak{N} \equiv \prod_F \mathfrak{M}_i$. از آنجا که $\mathcal{K}$ تحت هم‌ارزی مقدماتی و فراضربها بسته است، از این نتیجه خواهد شد که $\mathfrak{N} \in \mathcal{K}$.

برای هر گزاره‌ی $\theta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ مدلی چون $\mathfrak{M}_\theta$ چنان موجود است که $\mathfrak{M}_\theta \models \theta$ (در غیر این صورت $\neg\theta \in \bigcap_{i \in I} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_i) = T$). حال می‌گیریم

$$I = \{\Delta | \Delta \subseteq_{\text{متناهی}} \mathrm{Th}(\mathfrak{N})\}$$

و برای هر $\Delta \in I$ قرار می‌دهیم

$$\Sigma_\Delta = \{\Delta' \in I | \Delta \subseteq \Delta'\}.$$

---
[۳۲] Shelah, Kiesler

مجموعه‌ی $X = \{\Sigma_\Delta | \Delta \in I\}$ ویژگی اشتراک متناهی ناتهی دارد و از این رو در فرافیلتری چون F روی I واقع می‌شود.

تمرین ۵۳: برای به پایان رساندن اثبات، نشان دهید که $\prod_F \mathfrak{M}_i \equiv \mathfrak{N}$.

□

در نظریه‌ی مدل، مدلها را با استفاده از فرمولهای صادق در آنها مطالعه می‌کنیم. در برخی تئوریها همه‌ی فرمولها معادل با نوع خاصی از فرمولهایند.

تعریف ۵۴: تئوریِ T را **دارای حذف سور** [۳۳] می‌خوانیم هرگاه هر فرمولی به پیمانه‌ی آن معادلی بدون سور داشته باشد؛ یعنی برای هر فرمولِ $\phi(x_۱, \ldots, x_n)$ فرمولی بدون سور چون $\psi(x_۱, \ldots, x_n)$ موجود باشد، به طوری که

$$T \models \forall x_۱, \ldots, x_n \quad \phi(x_۱, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_۱, \ldots, x_n).$$

برای اینکه تعریف بالا جمله‌ها را نیز در برگیرد، نیاز است که زبانِ L حاوی حداقل یک ثابت باشد.

حذف سور را از نظرگاههای زیر، یک «ویژگی جبری» از تئوریها به حساب می‌آورند. نخست این که هر فرمول بدون سور، در یک ساختار جبری ترکیبی بولی از چندگوناها [۳۴] را به دست می‌دهد. برای مثال، در تئوریِ ACF فرمولهای بدون سور، چندگوناهای جبری را، یعنی ترکیبات بولی مجموعه‌های به شکل $\{\bar{x} | f_۱(\bar{x}) = f_۲(\bar{x}) = \ldots = f_n(\bar{x}) = ۰\}$ را به دست می‌دهند که در این نمایش f_i ها چندجمله‌ایند. نیز در RCF فرمولهای بدون سور، مجموعه‌های شبه‌جبری [۳۵] را به دست می‌دهند؛ یعنی مجموعه‌هایی که از ترکیبات بولی مجموعه‌هایی به شکل زیر حاصل می‌شود: $\{\bar{x} | f_۱(\bar{x}) > ۰, \ldots, f_n(\bar{x}) > ۰\}$. پس حذف سور داشتن در این تئوریها یعنی برابر بودنِ مجموعه‌های تعریف‌پذیر با ترکیبات بولی چندگوناها.

دوم این که اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل از یک تئوریِ دارای حذف سورِ T باشند به طوری که $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$، آنگاه $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ (علت: می‌دانیم که اگر $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ آنگاه $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ درباره‌ی فرمولهای بدون سور با پارامتر در M همنظرند. حال بنا به حذف سور، همه‌ی فرمولها را می‌توان بدون سور در نظر گرفت).

---

[۳۳] quantifier elimination

[۳۴] variety

[۳۵] semialgebraic

مثال ۵۵: تئوریهای ACF و RCF سورها را حذف می‌کنند.

در ساختارِ $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, ۰, ۱, \leq \rangle$ فرمولِ $\exists x \quad ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای معادل بدون سورِ $b^۲ - ۴ac \geq ۰$ است. این را می‌توان با روشهای مقدماتی جبری ثابت کرد، اما یافتن معادل بدون سور برای همه‌ی فرمولها بدین سادگی نیست. عموماً برای بررسی حذف سور از محکهایی استفاده می‌شود که در تمرینهای درس، به یکی از آنها یعنی وجود سامانه‌های رفت و برگشتی خواهیم پرداخت.

تئوریهای دارای حذف سور را گاهی **زیرساختارْکامل** می‌خوانند:

تمرین ۵۶: موارد زیر با هم معادلند:

۱. تئوریِ T سورها را حذف می‌کند.

۲. $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) \cup T$ برای برای هر مدلِ $T \models \mathfrak{M}$ و هر زیرساختِ $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{A}$ یک تئوریِ کامل است.

تئوریِ T را **مدل‌کامل** می‌خوانند هرگاه هر فرمول به پیمانه‌ی آن دارای معادلی وجودی باشد؛ یعنی برای هر فرمولِ $\phi(x_۱, \dots, x_n)$ فرمولی بدون سور چون $\psi(x_۱, \dots, x_n, y_۱, \dots, y_m)$ موجود باشد، به طوری که

$$T \models \forall x_۱, \dots, x_n \quad \phi(x_۱, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y_۱, \dots y_m \quad \psi(x_۱, \dots, x_n, y_۱, \dots, y_m).$$

(واضح است که) حذف سور، مدل‌کامل بودن را نتیجه می‌دهد؛ ولی عکس این برقرار نیست.

تمرین ۵۷: نشان دهید که RCF در زبان $L = \{+, -, \cdot, ۰, ۱\}$ مدل‌کامل است ولی سورها را حذف نمی‌کند.

وجه تسمیهِ «مدل‌کامل» در تمرین زیر مشخص می‌شود.

تمرین ۵۸: نشان دهید که موارد زیر با هم معادلند:

۱. تئوریِ T مدل‌کامل است.

۲. برای هر مدلِ $T \models \mathfrak{M}$ تئوریِ $\mathrm{Diag}(\mathfrak{M}) \cup T$ کامل است.

۳. برای هر دو مدلِ $T \models \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ داریم

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}.$$

۴.۱ فضای تایپها

تایپها مصداق نظریه‌ی مدلی ایده‌ی آشنای شناخت «ذات» از روی «صفات» هستند. در نظریه‌ی مدل نیز گاهی میان ذات یک عنصر و مجموعه‌ی صفات آن تمایز قائل نمی‌شویم. مجموعه‌ی ویژگی‌های یک عنصر داده شده را در نظریه‌ی مدل، تایپ خواهیم نامید.

گیریم $T \models \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$، $\bar{a} \in M$ و $\bar{b} \in N$. هدف پاسخ به این سوال است که در چه صورتی تئوریِ T نمی‌تواند میان دنباله‌های (نه لزوماً متناهی) $\bar{a}, \bar{b}$ تمایز بگذارد. خواهیم دید که این خواسته زمانی برآورده می‌شود که این دو دنباله نسبت به تئوری یادشده همتایپ باشند.

بگذارید بحث را با مثالی پی بگیریم. اگر x, y دو عنصر متعالی روی میدانِ $\mathbb{Q}$ باشند، آنگاه $\mathbb{Q}(x) \cong \mathbb{Q}(y)$؛ یعنی این دو عنصر از لحاظ جبری روی $\mathbb{Q}$ ارزش یکسانی دارند. به زبان نظریه‌ی مدلی، این دو عنصر روی $\mathbb{Q}$ همتایپند. در ادامه مطالب بالا را به زبان دقیق نظریه‌ی مدلی درآورده‌ایم.

یادآوری می‌کنیم که منظور از عبارتِ

فرمولِ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ با تئوری T سازگار است (*)

این است که $T \cup \{\exists x_1, \ldots x_n \quad \phi(x_1, \ldots x_n)\}$ مجموعه‌ای سازگار از جمله‌هاست؛ به بیان دیگر، مدل $\mathfrak{M}$ از T و عناصرِ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$ چنان موجودند که $\mathfrak{M} \models \phi(\alpha_1 \ldots, \alpha_n)$. فرض کنید $c_1, \ldots, c_n$ ثوابتی جدید باشند و $L' = L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$. آنگاه $(*)$ معادل این است که L' ـ تئوریِ $T \cup \{\phi(c_1, \ldots, c_n)\}$ سازگار باشد؛ یعنی L' ـ ساختارِ $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{M}, c_1, \ldots, c_n \rangle$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{M}' \models T$ و $\mathfrak{M}' \models \phi(c_1, \ldots, c_n)$. توجه کنید که هرگاه که $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{M}, \ldots \rangle$ بسطی از L ـ ساختارِ $\mathfrak{M}$ به زبانِ $L' = L \cup \{\ldots\}$ باشد، آنگاه برای هر L ـ جمله‌ی ϕ داریم

$$\mathfrak{M}' \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \phi.$$

در سرتاسرِ ادامه‌ی این جلسه، فرض کرده‌ایم که T یک تئوری کامل باشد در زبانِ L که هیچ مدل از آن متناهی نیست. برای تعریف بعدی، دو مدلِ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ و چندتایی‌های $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M$ و $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in N$ را در نظر بگیرید.

تعریف ۵۹: دنباله‌های $\bar{a}$ و $\bar{b}$ را **گالواهم‌ارز** می‌خوانیم هرگاه مدلِ $\mathbb{M}$ و نشاندنهای مقدماتیِ $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{M}$ و $g : \mathfrak{N} \to \mathbb{M}$ چنان موجود باشند که $f(\bar{a}) = g(\bar{b})$. در این صورت می‌نویسیم $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \sim_{Gal} \langle \mathfrak{N}, \bar{b} \rangle$ یا $\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b}$.

توجه کنید که در نماد $\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b}$ مدلها به چشم نمی‌آیند. بعدها خواهیم دید که در این نمادگذاری عمدی در کار است؛ مدلها، به پیمانه‌ی نشستنهای مقدماتی دراین تعریف بی‌نقشند.

مثال ۶۰: فرض کنید $\mathfrak{M} \models T$ و $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$. آنگاه برای هر $a_1, \dots a_n \in M$ داریم

$$a_1 \dots a_n \sim_{Gal} f(a_1) \dots f(a_n).$$

توجه ۶۱: اگر $\bar{b} \sim_{Gal} \bar{a}$ آنگاه برای هر L ـ فرمولِ $\phi(\bar{x})$ داریم $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{a})$ اگروتنهااگر $\mathfrak{N} \models \phi(\bar{b})$؛ به عبارت دیگر

$$\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b} \Rightarrow \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathfrak{N}, \bar{b} \rangle.$$

رابطه‌ی $\sim_{Gal}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. برای اثبات این گفته، به لم زیر نیاز داریم که آن را در جلسات تمرین اثبات خواهیم کرد.

تمرین ۶۲: فرض کنید تئوری T کامل باشد. نشان دهید در آن صورت

۱. T دارای ویژگیِ ادغام (یا ملغمه‌سازی) [۳۶] است؛ بدین معنی که هرگاه $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$ و $f_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ و $f_2 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ نشاندنهای مقدماتی باشند، آنگاه مدلِ $\mathfrak{D} \models T$ و نشاندنهای مقدماتیِ $g_1 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ و $g_2 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ چنان موجودند که $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

۲. T دارای ویژگیِ امکان‌نشاندن‌همزمان [۳۷] است؛ یعنی برای هر دو مدلِ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ مدلی چون $\mathfrak{C} \models T$ و نشاندنهایی مقدماتی چون $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ و $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ موجودند.

گزاره ۶۳: رابطه‌ی $\sim_{Gal}$ هم‌ارزی است.

اثبات. بررسی انعکاسی و تقارنی بودن رابطه‌ی یادشده چندان دشوار نیست؛ در اینجا تنها به اثبات تعدی آن پرداخته‌ایم. گیریم $\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b}$ و $\bar{b} \sim_{Gal} \bar{c}$. پس نگاشتهای مقدماتیِ $f_{\mathfrak{M}} : \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \to \langle \mathfrak{Q}_1, \bar{q}_1 \rangle$ و $f_{\mathfrak{N}} : \langle \mathfrak{N}, \bar{b} \rangle \to \langle \mathfrak{Q}_1, \bar{q}_1 \rangle$ چنان موجودند که $f_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = f_{\mathfrak{N}}(\bar{b}) = \bar{q}_1$. به همین ترتیب نگاشتهای مقدماتی $g_{\mathfrak{N}} : \langle \mathfrak{N}, \bar{b} \rangle \to \langle \mathfrak{Q}_2, \bar{q}_2 \rangle$ و $g_{\mathfrak{P}} : \langle \mathfrak{P}, \bar{p} \rangle \to \langle \mathfrak{Q}_2, \bar{q}_2 \rangle$ چنان موجودند که $g_{\mathfrak{N}}(\bar{b}) = g_{\mathfrak{P}}(\bar{p}) = \bar{q}_2$. هدفمان پیدا کردن مدل

[۳۶] amalgamation property (AP)

[۳۷] joint embedding property

$\langle \mathfrak{Q}_3, \bar{q}_3\rangle$ به همراه نگاشتهای مقدماتیِ $h_{\mathfrak{M}} : \langle \mathfrak{M}, \bar{a}\rangle \to \langle \mathfrak{Q}_3, \bar{q}_3\rangle$ و $h_{\mathfrak{P}} : \langle \mathfrak{P}, \bar{p}\rangle \to \langle \mathfrak{Q}_3, \bar{q}_3\rangle$ است به طوری که $h_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = h_{\mathfrak{p}}(\bar{p}) = \bar{q}_3$.

بنا به ویژگی ادغام، می‌توان $L \cup \{c_1, \dots, c_n\}$ ـ ساختارِ $\langle \mathfrak{Q}_3, \bar{q}_3\rangle$ و نشاندنهای $h_{\mathfrak{Q}_1} : \langle \mathfrak{Q}_1, \bar{q}_1\rangle \to \langle \mathfrak{Q}_3, \bar{q}_3\rangle$ و $h_{\mathfrak{Q}_2} : \langle \mathfrak{Q}_2, \bar{q}_2\rangle \to \langle \mathfrak{Q}_3, \bar{q}_3\rangle$ را چنان یافت که $h_{\mathfrak{Q}_1} \circ f_{\mathfrak{N}} = h_{\mathfrak{Q}_2} \circ g_{\mathfrak{N}}$. حال $h_{\mathfrak{Q}_1} \circ f_{\mathfrak{M}}$ و $h_{\mathfrak{Q}_2} \circ g_{\mathfrak{P}}$ نشاندنهای مورد نیاز هستند.

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathfrak{M}, \bar{a}\rangle \arrow[dr] & & \\
& \langle \mathfrak{Q}_1, \bar{q}_1\rangle \arrow[dr] & \\
\langle \mathfrak{N}, \bar{b}\rangle \arrow[ur] \arrow[dr] & & \langle \mathfrak{Q}_3, \bar{q}_3\rangle \\
& \langle \mathfrak{Q}_2, \bar{q}_2\rangle \arrow[ur] & \\
\langle \mathfrak{P}, \bar{p}\rangle \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

□

گفتیم که از $\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b}$ نتیجه می‌شود که $\langle \mathfrak{M}, \bar{a}\rangle \equiv \langle \mathfrak{N}, \bar{b}\rangle$. عکس این گفته نیز برقرار است:

گزاره ۶۴: اگر $\langle \mathfrak{M}, \bar{a}\rangle \equiv \langle \mathfrak{N}, \bar{b}\rangle$ آنگاه $\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b}$.

اثبات. فرض کنید $\langle \mathfrak{Q}, \bar{q}\rangle$ مدلی باشد از تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, \bar{b}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{a})$. نشاندنهای مورد نیاز به آسانی پیدا می‌شوند. □

تعریف ۶۵: گیریم $\mathfrak{M} \models T$ و $a_1, \dots, a_n \in M$. تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = \{\phi(x_1, \dots, x_n) | \mathfrak{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)\}.$$

بنابر آنچه گفته شد

$$\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b} \Leftrightarrow \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b});$$

به‌ویژه کلاسهای هم‌ارزی رابطه‌ی $\sim_{Gal}$ تشکیل **مجموعه** می‌دهند: قرار دهید

$$S_n(T) = \{\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) | \mathfrak{M} \models T, a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{M}\},$$

واضح است که $|S_n(T)| \leq 2^{\|L\|}$.

تعریف ۶۶ (تایپ جزئی): مجموعه‌ی $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ متشکل از L ـ فرمولهایی با متغیرهای در میانِ $x_1 \ldots, x_n$ را یک **تایپِ جزئی** [۳۸] می‌خوانیم هرگاه $T \cup \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ سازگار باشد؛ یعنی $\mathfrak{M} \models T$ و عناصرِ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$ چنان موجود باشند که برای هر $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{\alpha})$.

یک تایپ جزئی را می‌توان به عنوان دستگاهی از معادلات دانست که محدودیتهای آن شروط تئوری T است. سازگاری، ضامن پاسخدار بودن این مجموعه از معادلات است. بنابراین، $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ یک تایپ جزئی است اگروتنهااگر مدلِ $T \models \mathfrak{M}$ و عناصرِ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$ موجود باشند به طوری که

$$\Sigma(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

در صورتی که در بالا، تساوی رخ دهد، Σ را یک **تایپ کامل،** [۳۹] یا طور خلاصه یک **تایپ** می‌خوانیم.

نکته ۶۷: متناهی بودن تعداد متغیرها در تعریفهای بالا ضروری نیست. فرض کنید $\langle x_i : i \in I \rangle$ دنباله‌ای از متغیرها باشد. مجموعه‌ی $\Sigma(x_i | i \in I)$ متشکل از فرمولهایی چون $\phi(x_{i1}, \ldots, x_{in})$ را تایپ جزئی می‌خوانیم هرگاه با T سازگار باشد. بدینسان نیز می‌توان مجموعه‌ی $S_I(T)$ را متشکل از تایپهای کامل با این متغیرها تشکیل داد.

تعریف ۶۸ (توپولوژی استون): در یک زبانِ مشخصِ L قرار دهید

$$\mathrm{Th}_L = \{T | \text{ یک تئوری کامل است } T\}$$

داریم $\mathrm{Th}_L \subseteq 2^{2^{\text{جمله‌ها}}}$. برای هر L ـ جمله‌ی ϕ قرار دهید $[\phi] = \{T \in \mathrm{Th}_L | \phi \in T\}$. مجموعه‌های $[\phi]$ تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی روی Th_L می‌دهند که این توپولوژی، بنا به قضیه‌ی فشردگی،

[۳۸] partial type

[۳۹] complete type

فشرده است. به طور مشابه، می‌توان روی $S_n(T)$ توپولوژی ایجاد شونده توسط عناصر پایه‌ایِ زیر را در نظر گرفت:

$$[\phi(x_۱, \ldots, x_n] = \{p | p = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_۱, \ldots, a_n), \phi \in p, \mathfrak{M} \models T, a_۱, \ldots, a_n \in M\}.$$

توپولوژی یادشده را **توپولوژی استون** می‌خوانیم. این توپولوژی فشرده، تماماً ناهمبند و هاسدورف است.

۵.۱ جلسه‌ی پنجم، مثالهایی از تایپها

پیش از آن که به هدف این جلسه، یعنی بررسی چند مثال از تایپها بپردازیم، نکته‌ی زیر را درباره‌ی توپولوژی استون متذکر می‌شویم.

نکته ۶۹: فرض کنید $\langle B, \wedge, \vee, ۰, ۱\rangle$ یک جبر بولی باشد، که روی آن ترتیب $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ تعریف شده است. زیرمجموعه‌ی $A \subseteq B$ را یک فیلتر، یا یک پالایه می‌خوانیم هرگاه اصول زیر درباره‌ی آن صادق باشند.

- $a \in A \to \forall b \geq a \quad b \in A$
- $a, b \in A \to a \wedge b \in A$
- $۰ \notin A$.

مفهوم فیلتر، دوگان مفهوم ایده‌آل است (یک جبر بولی را می‌توان حلقه‌ای با مشخصه‌ی صفر در نظر گرفت. ایده‌آل در این بافتار معنا می‌یابد). فیلترِ A را یک فرافیلتر می‌خوانیم هرگاه برای هر $a, b \in B$ از $a \wedge b \in A$ نتیجه شود که $a \in A$ یا $b \in A$.

برای جبر بولیِ B قرار می‌دهیم

$$\max(B) = \{A \subseteq B | \text{یک فرافیلتر روی } B \text{ است } A\}$$

روی $\max(B)$ مجموعه‌های زیر تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی می‌دهند که آن را توپولوژی استون می‌خوانند:

$$[a] = \{A \in \max(B) | a \in A\}.$$

این توپولوژی، فشرده و تماماً ناهمبند است.

توپولوژی استون در فضایِ $S_n(T)$ نیز از توپولوژی استون جبری به دست می‌آید روی جبر لیندنبام ـ تارسکی که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_n(T) = \{[\phi(\bar{x})]_\sim | \phi(\bar{x}) \in Formul\}$$

که در آن منظور از $[\phi(\bar{x})]_\sim$ کلاس فرمولِ ϕ تحت رابطه‌ی هم‌ارزی زیر است:

$$\phi(\bar{x}) \sim \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow T \models \forall \bar{x} \quad \phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$$

و تعریف کرده‌ایم

$$
\begin{aligned}
&[\phi]_\sim \wedge [\psi]_\sim = [\phi \wedge \psi]_\sim \\
&[\phi]_\sim \vee [\psi]_\sim = [\phi \vee \psi]_\sim \\
&۰ = [x \neq x]_\sim \\
&۱ = [x = x]_\sim
\end{aligned}
$$

تمرین ۷۰: نشان دهید که ابرفیلترها در $B_n(T)$ همان تایپهای کامل هستند.

مثال ۷۱ (تایپها در DLO): تئوریِ DLO، یا تئوری مجموعه‌های مرتب خطی بدون ابتدا و انتها، در زبانِ $L = \{\leq\}$ به صورت زیر اصلبندی می‌شود.

- $\forall x \quad x \leq x$.
- $\forall xy \quad x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$
- $\forall xyz \quad x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$.
- $\forall xy \quad x \leq y \vee y \leq z$
- $\forall xy \quad x \leq y \rightarrow \exists x \quad x < z < y$.
- $\forall x \quad \exists y_۱ y_۲ \quad y_۱ < x < y_۲$.

به عنوان مثال $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ و $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ دو مدل از DLO هستند.

با استفاده از سامانه‌های رفت و برگشتی (به تمرینهای سری نخست و دوم مراجعه کنید) می‌توان نشان داد که تئوریِ DLO سورها را حذف می‌کند و $\aleph_۰$ـ جازم است؛ این دومی یعنی هر دو مدل شمارا از DLO با هم ایزومرفند. در ادامه برآنیم تا تایپها را در DLO بشناسانیم.

نخست به بررسی $S_۱(DLO)$ می‌پردازیم. بنا به حذف سور، هر فرمول معادل است با فصلی متناهی از عطفهای متناهی فرمولهای اتمی. فرمولهای اتمی و نقیض اتمیِ با تک متغیرِ x (و بدون پارامتر) تنها به یکی از صُوَرِ زیرند:

- $x \leq x$.
- $x = x$.
- $\neg(x \leq x)$
- $\neg(x = x)$.

توجه کنید که اگر p_1, p_2 دو تایپِ متفاوت باشند، از آنجا که تایپ کامل، مجموعه‌ای ماکزیمال از فرمولهاست، باید فرمولی چون $\phi(x)$ موجود باشد که ایندو را از هم متمایز کند؛ یعنی $\phi \in p_1$ و $\neg\phi \in p_2$. سه نوعِ فرمول بالا با هم سازگارند (و فرمول آخر نمی‌تواند در هیچ تایپی باشد چون ناسازگار است)؛ پس $1 = |[x \leq x]| = |[x = x]| = |S_1(DLO)|$.

حال به $S_n(DLO)$ می‌پردازیم. گیریم $\mathfrak{M} \models DLO$ و $a_1, \ldots, a_n \in M$. قرار می‌دهیم

$$\mathrm{Diag}(x_1, \ldots, x_n)_{a_1,\ldots,a_n} := \mathrm{qftp}(a_1, \ldots, a_n) = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) | M \models \phi(a_1, \ldots, a_n), \text{ اتمی یا نقیض اتمی است } \phi \}$$

بنا به حذف سور، $\mathrm{Diag}(x_1, \ldots, x_n)_{a_1,\ldots,a_n}$ را $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n)$ به طور کامل مشخص می‌کند؛ یعنی

$$\{\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n)\} = [\bigwedge_{\phi \in \mathrm{Diag}(x_1,\ldots,x_n)_{a_1,\ldots,a_n}} \phi]$$

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی $S_n(DLO)$ متناهی است.

در جلسات آینده قضیه‌ی ریل نارْدِوِسکی [40] را ثابت خواهیم کرد که بنا به آن، هر تئوری کامل، $\aleph_0$ـ جازم است اگروتنهااگر تعداد n تایپها در آن متناهی باشد.

حال به بررسی تایپهای دارای پارامتر می‌پردازیم. مدلِ $T \models \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ را در نظر گرفته قرار دهید $T_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Q}, \leq, r \rangle_{r \in \mathbb{Q}})$. طبیعتاً زبانِ این تئوری دارای ثوابتِ $\{c_r\}_{r \in \mathbb{Q}}$ و از این رو هر مدل از تئوریِ یادشده، توسیعی مقدماتی از $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ است. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $T_{\mathbb{Q}}$ سورها را حذف می‌کند (از آنجا که DLO چنین است). فرمولهای اتمی و نقیض اتمیِ تک‌متغیره در این حالت، به یکی از صُوَر زیرند:

- $x \leq x$

[40] Ryll-Nardewski

- $x = x$.
- $x < c_r$
- $x \geq c_r$.
- $x = c_r$.

برای تایپِ $p(x)$ در $S_1(T_{\mathbb{Q}})$ حالات زیر متصوَر است.

اگر $r \in \mathbb{Q}$ موجود باشد، به طوری که $``x = c_r" \in p$، آنگاه واضح است که

$$[x = r] = \{p(x)\}.$$

اگر برای هر $r \in \mathbb{Q}$ داشته باشیم $``x \neq c_r" \in p$ آنگاه مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$U_p = \{s \in \mathbb{Q} | ``x < s" \in p\}$$
$$L_p = \{s \in \mathbb{Q} | ``x > s" \in p\}$$

توجه کنید که $L_p \cap U_p = \emptyset$؛ نیز اگر $x < s \in p$ و $x > c_t \in p$ آنگاه $T_{\mathbb{Q}} \vdash t < s$. بنابراین $L_p < U_p$. نیز $L_p \cup U_p = \mathbb{Q}$.

اگر $U_p = \emptyset$ آنگاه $T_{\mathbb{Q}} \cup \{x > c_t\}_{t \in \mathbb{Q}}$ سازگار است و p را تایپِ $+\infty$ می‌خوانیم. این تایپ بیانگر بزرگتر بودنِ x ازهمه‌ی $r \in Q$ است.

به طور مشابه تایپِ $p = -\infty$ در حالتی که $L_p = \emptyset$ تعریف می‌شود.

اگر هر دوی L_p, U_p ناتهی باشند و L_p داری ماکزیزمم باشد و $\max L_p = r$ آنگاه p را با r^+ نشان می‌دهیم. این تایپ بیانگر نزدیکیِ بودن x از طرف راست به عدد گویای r است.

به طور مشابه تایپ r^- در صورتی که U_p دارای عنصر کمینه باشد تعریف می‌شود.

در صورتی که نه U_p مینیموم داشته باشد و L_p ماکزیموم، تایپ p را تایپ اصم می‌خوانیم. تعداد اینگونه تایپها $2^{\aleph_0}$ است.

مطالب بالا را به صورت زیر جمعبندی می‌کنیم:

$$S_1(\mathbb{Q}) = S_1(T_{\mathbb{Q}}) = \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \cup \{x = r\}_{r \in \mathbb{Q}} \cup \{r^-\}_{r \in \mathbb{Q}} \cup \{r^+\}_{r \in \mathbb{Q}} \cup \{r\}_{\text{اصم } r}.$$

بنابراین $|S_1(T_{\mathbb{Q}})| = 2^{\aleph_0}$؛ یعنی در این تئوری تعداد تایپهای تک‌متغیره حداکثرِممکن است.

مثال ۷۲ (تایپها در حساب پئانو): هدفمان بررسی تایپهای تک‌متغیره در $T_{\mathbb{N}} := \mathrm{Th}(\mathbb{N}, \{n\}_{n\in\mathbb{N}})$ است. فرمولِ $\theta(x,y)$ را در نظر بگیرید که

$$(\alpha, \beta) \models \theta \Leftrightarrow \alpha|\beta.$$

برای یک زیرمجموعه‌ی دلخواهِ A از اعداد اول، مجموعه‌ی زیر از فرمولها را در نظر بگیرید:

$$\pi_A = \{\text{``}p|x\text{''} : p \in A\} \cup \{\text{``}p \nmid x\text{''} : p \notin A\}.$$

واضح است که $T_{\mathbb{N}} \cup \pi_A$ سازگار است، پس مجموعه‌ی یادشده یک تایپ جزئی است. توجه کنید که اگر $A_۱ \neq A_۲$ دو زیرمجموعه از اعداد اول باشند آنگاه $\pi_{A_۱} \cup \pi_{A_۲} \cup T_{\mathbb{N}}$ ناسازگار است. بنابراین تایپهای کاملِ $\mathbb{P}_{A_۱}, \mathbb{P}_{A_۲}$ که از تکمیل تایپهای جزئی یادشده حاصل می‌آیند، با هم متفاوتند؛ یعنی به اندازه‌ی تعداد زیرمجموعه‌های اعداد اول می‌توان تایپ کامل پیدا کرد. پس

$$S_۱(T_{\mathbb{N}}) = ۲^{\aleph_۰}.$$

در جلسات آینده علاوه بر آوردن مثالهای دیگری از تایپها، به تحلیل تئوریها با کمک توپولوژی استون روی فضای تایپهایشان خواهیم پرداخت.

تعریف ۷۳ (تایپهای ایزوله): تایپِ $p(\bar{x}) \in S_n(T)$ را یک تایپِ **ایزوله** [۴۱] می‌خوانیم هرگاه به عنوان عنصری از $S_n(T)$ در توپولوژی استون ایزوله باشد؛ یعنی $\{p\}$ مجموعه‌ای باز باشد. بنابراین اگر p ایزوله باشد، آنگاه فرمولِ $\phi \in p$ چنان موجود است که $\{p\} = [\phi]$.

وقتی تایپِ p توسط فرمول ϕ ایزوله شود (یعنی هرگاه که $\{p\} = [\phi]$) فرمول یادشده تکلیف تایپ را به طور کامل مشخص می‌کند؛ به بیان دیگر برای هر فرمولِ $\psi(\bar{x}) \in p$ داریم

$$T \models \forall x \quad (\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})).$$

در DLO همه‌ی تایپها ایزوله‌اند، زیرا تعداد تایپها متناهی است و از این رو همه‌ی نقاط به لحاظ توپولوژیک ایزوله‌اند. اگر $S_n(T)$ نامتناهی باشد، حتماً دارای یک نقطه‌ی غیرایزوله است (زیرا توپولوژی استون فشرده است و اگر قرار باشد همه‌ی تایپها ایزوله باشند، پوششی نامتناهی از متشکل از مجموعه‌های باز تک‌نقطه‌ای برای $S_n(T)$ یافت می‌شود که دارای هیچ زیرپوشش متناهی‌ای نباشد).

[۴۱] isolated type

۶.۱ جلسه‌ی ششم، حذف تایپها

در جلسه‌ی پیش گفتیم که تایپِ $p(\bar{x})$ ایزوله است هرگاه تنها تایپِ شاملِ یک فرمولِ $\phi(\bar{x}) \in p$ باشد. هر تایپِ ایزوله‌ی $p(\bar{x})$ در تمام مدلهای T برآورده می‌شود [۴۲]: عناصری چون $a_1, \ldots, a_n$ که فرمولِ ایزوله‌کننده‌ی ϕ را برآورده می‌کنند، کُلِ تایپ را نیز برآورده می‌کنند. عکس این گفته تنها در صورتی برقرار است که زبان، شمارا باشد؛ یعنی اگر L زبانی شمارا باشد و T مدلی کامل در آن و $p(\bar{x})$ در همه‌ی مدلهای T برآورده شود، آنگاه $p(\bar{x})$ ایزوله است. باز به بیانی دیگر، اگر $p(\bar{x})$ تایپی غیرایزوله باشد، آنگاه مدلی چون $T \models \mathfrak{M}$ چنان موجود است که p در آن برآورده نمی‌شود؛ اصطلاحاً p در مدلِ $\mathfrak{M}$ حذف می‌شود [۴۳].

گفتیم که تایپِ p را می‌توان مجموعه‌ای نامتناهی از فرمولها در نظر گرفت. پس برآورده شدن آن در $\mathfrak{M}$ یعنی

$$\mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \quad \bigwedge_{\phi \in p} \phi(\bar{x}),$$

و حذف شدن آن یعنی

$$\mathfrak{M} \models \forall \bar{x} \quad \bigvee_{\phi \in p} \neg\phi(\bar{x});$$

پس حذف شدن p در $\mathfrak{M}$ معادل این است که برای هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ فرمولی چون $\phi(\bar{x}) \in p$ موجود باشد، به طوری که

$$\mathfrak{M} \models \neg\phi(\bar{a}).$$

قضیه ۷۴ (حذف‌تایپها): گیریم L زبانی باشد شمارا و T یک تئوریِ کامل در آن. اگر تایپِ $p(\bar{x})$ غیرایزوله باشد، آنگاه مدل شمارای $T \models \mathfrak{M}$ چنان موجود است که p در آن حذف شود.

نکته ۷۵: قضیه‌ی بالا برای زبانهای ناشمارا برقرار نیست؛ مثال نقض آن را در جلسات بعد ارائه خواهیم کرد.

معمولاً برای اثبات قضیه‌ی یادشده از ساختهای هنکینی استفاده می‌شود. اثبات قضیه را بدین روش، به عنوان یکی از پروژه‌ها به دانشجویان واگذاشته‌ایم تا در این جا به اثباتی توپولوژیک [۴۴]

[۴۲] is realised

[۴۳] is omitted

[۴۴] هر چند در این اثبات نیز از ساختمانهای هنکینی بهره خواهیم جست!

بپردازیم.

نکته ۷۶: قضیه‌ی حذف تایپها [۴۵] برای تعداد شمارا تایپ غیرایزوله به صورت همزمان و در تعدادی شمارا متغیر نیز برقرار است (و مدل مورداشاره در آن همچنان شماراست).

یادآوری ۷۷: فضای توپولوژیکِ هاسدورفِ (X,τ) را دارای ویژگیِ بئْر [۴۶] می‌خوانیم هرگاه در آن هر اشتراک شمارا از مجموعه‌های بازِ چگال، چگال باشد.

معادلاً (X,τ) ویژگی بئر دارد هرگاه در آن هر اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته‌ی هیچجاچگال [۴۷] هیچجاچگال باشد. [۴۸] نیز از آنالیز مقدماتی به خاطر دارید که هر فضای متریکِ کامل دارای ویژگی بئر است.

برای زبان شمارای L مجموعه‌ی

$$X_L := \mathrm{Th}_L = \{T | \text{یک تئوری کامل در زبان } L \text{ است } T\}$$

را به همراه پایه‌ی توپولوژیکِ

$$B = \{[\phi] | \text{یک جمله در زبانِ } L \text{ است } \phi\}$$

در نظر بگیرید. فضای یادشده، فشرده و دارای پایه‌ای شمارا و از این رو جدایی‌پذیر [۴۹] است. [۵۰] هر فضای فشرده‌ی جدایی‌پذیر، لهستانی [۵۱] است؛ یعنی هومئومرف است با یک فضای متریک کامل جدائی‌پذیر. پس X_L به ویژه دارای ویژگی بئر است.

زبان شمارایِ L را با مجموعه‌ی شمارای C از ثوابت گسترش می‌دهیم تا به زبانِ $L(C) = L \cup C$ برسیم. تعریف می‌کنیم

$$X^{L(C)} = \{T(C) | \text{یک تئوری کاملِ شاملِ } T \text{ در زبانِ } L(C) \text{ است } T(C)\}.$$

[۴۵] omitting type theorem

[۴۶] Baire property

[۴۷] nowhere-dense

[۴۸] منظور از مجموعه‌ی هیچجاچگال است آن است که بستارش هیچ نقطه‌ی درونی ندارد.

[۴۹] separable

[۵۰] جدائی‌پذیر بودن یعنی دارا بودن یک زیرمجموعه‌ی شمارای چگال.

[۵۱] Polish space

تمرین ۷۸: (به طور مستقیم) نشان دهید که $X^{L(C)}$ فشرده است.

فضای $X^{L(C)}$ فشرده، جدائی‌پذیر و دارای ویژگی بئر است. قرار دهید

$\Gamma_1 = \{T(C) \in X^{L(C)} |$

$T(C)$ یک تئوری هنکینی در زبانِ $L(C)$ است که جهانش مجموعه‌ی C است و در همین مجموعه شاهددار است.$\}$

یادآوری می‌کنیم که تئوریِ T یک تئوریِ دارای شواهد در C است هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x, c_1, \ldots, c_n)$ ثابتِ $c_\phi^{c_1,\ldots,c_n}$ موجود باشد به طوری که

$$T(C) \models \exists x \phi(x, c_1, \ldots, c_n) \rightarrow \phi(c_\phi^{c_1,\ldots,c_n}, c_1, \ldots, c_n).$$

تمرین ۷۹: روش هنکین را برای به دست آوردن یک تئوری دارای شواهد در یک مجموعه‌ی C مرور کنید.

تمرین ۸۰: نشان دهید (با استفاده‌ی مستقیم از تعاریف که) Γ_1 در $X^{L(C)}$ چگال است.

فرض کنید $p(\bar{x})$ تایپی غیرایزوله باشد و قرار دهید

$\Gamma_2 = \{T(C) \in X^{L(C)} |$

برای هر $c_1, \ldots, c_n \in C$ فرمولِ $\sigma(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ چنان موجود است که $\neg\sigma(c_1, \ldots, c_n) \in T(C)$$\}$.

ادعای ۸۱: Γ_2 چگال است.

از ادعا نتیجه خواهد شد که $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ چگال، و بالاخص ناتهی است. هر مدلی از یک تئوریِ هنکینیِ $T(C) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ تایپِ p را حذف می‌کند.

اثبات ادعا. داریم

$$\Gamma_2 = \bigcap_{c_1,\ldots,c_n \in C} \Gamma_2^{c_1,\ldots,c_n}$$

که در آن گرفته‌ایم

$$\Gamma_2^{c_1,\ldots,c_n} = \{T(C) | \neg\sigma(c_1, \ldots, c_n) \in T(C) \ \text{موجود است به طوری که}\ \sigma(\bar{x}) \in p\}.$$

ادعا می‌کنیم که هر $\Gamma_2^{c_1,\ldots,c_n}$ باز و چگال است؛ آنگاه ویژگی بئر ما را به مطلوب می‌رساند.

باز بودن. داریم

$$\Gamma_2^{c_1,\ldots,c_n} = \bigcup_{\sigma\in p} \Gamma_2^{c_1,\ldots,c_n,\sigma}$$

که در آن منظور از $\Gamma_2^{c_1,\ldots,c_n,\sigma}$ مجموعه‌ی زیر است:

$$\{T(C) | \neg\sigma(c_1,\ldots,c_n) \in T(C)\}.$$

مجموعه‌ی بالا یک باز پایه‌ای است.

چگال بودن. برای اثبات چگال بودن، باید نشان دهیم که $\Gamma_2^{c_1,\ldots,c_n}$ با هر باز پایه‌ایِ $[\theta(c'_1,\ldots,c'_n)]$ اشتراک ناتهی دارد. یعنی برای هر جمله‌ی $\theta(c'_1,\ldots,c'_n)$ باید تئوریِ $T(C)$ و فرمولِ $\sigma(\bar{x}) \in p$ را چنان یافت که $\theta(c'_1,\ldots,c'_n) \wedge \neg\sigma(c_1,\ldots,c_n) \in T(C)$.

اگر $\theta \in p(\bar{x})$ آنگاه از آن جا که p غیرایزوله است فرمولِ $\sigma \in p$ یافت می‌شود که از θ نتیجه نشود. پس $T \cup \{\neg\sigma, \theta\}$ سازگار است. پس تئوریِ هنکینی‌ای شامل $T \cup \{\neg\sigma, \theta\}$ یافت می‌شود، و این همان مطلوب است.

اگر $\neg\theta \in p$. اگر برای هر $\sigma \in p$ تئوریِ $T \cup \{\neg\sigma, \theta\}$ ناسازگار باشد، آنگاه برای هر $\sigma \in p$ داریم

$$T \models \theta \to \sigma;$$

یعنی تایپِ p ایزوله است، که این تناقض است. $\square$

درست نبودن قضیه‌ی حذف تایپها در زبانهای ناشمارا

قضیه ۸۲ (اِنگْلِر): گیریم T یک تئوری کامل مرتبه‌ی اول باشد در زبانی شمارا. گیریم p تایپی کامل باشد و Σ زیرمجموعه‌ای از آن. اگر Σ در همه‌ی مدلهای T برآورده شود، آنگاه فرمولی در p آن را ایزوله می‌کند.

در ادامه نشان داده‌ایم که شرط شمارا بودن زبان برای قضیه‌ی اِنگْلِر لازم است.

زبانِ $L = \{X, Y, (c_i)_{i\in\omega}, (d_i)_{i\in\omega_1}\}$ را در نظر بگیرید که در آن X, Y دو محمولند و $(c_i)_{i\in\omega}$ و $(d_i)_{i\in\omega_1}$ ثوابت. فرض کنیم که اصول تئوریِ T بیانگر متفاوت بودن دوبه‌دوی همه‌ی ثوابت باشد. تایپ جزئیِ Σ متشکل از فرمولهای زیر را در نظر بگیرید:

$$x \in X \wedge \{x \neq c_i\}_{i\in\omega}.$$

گیریم تایپ جزئی یادشده دارای تکمیلی چون p باشد که در آن فرمولی چون $\phi(x, c, d)$ هست به طوری که $c \in X, d \in Y$ و $\phi \vdash \Sigma$. از آنجا که تایپ جزئی Σ هیچ ثابتی در Y ندارد، در زبانِ $\{X, Y, (c_i)_{i\in\omega}\}$ داریم $T \models (\forall y \phi(x, c, y)) \to \Sigma$. اما این تناقض است، زیرا تئوریِ T در این زبان دارای مدلی است که در آن بخش X شماراست.

۷.۱ جلسه‌ی هفتم

قضیه ۸۳: در زبان شمارای L اگر $|S_n(T)| > \aleph_0$ آنگاه $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$.

در صورت پذیرش فرضیه‌ی پیوستار، قضیه‌ی بالا بدیهی است. بنا به فرضیه‌ی پیوستار اگر $\aleph_0 < \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ آنگاه $\kappa = 2^{\aleph_0}$؛ به بیان دیگر $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. فرضیه‌ی پیوستار از اصول ZFC برای نظریه‌ی مجموعه‌ها مستقل است، یعنی خود و نقیضش با ZFC سازگارند. با وجود این، برخی زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی در همان ZFC فرضیه‌ی پیوستار را برآورده می‌کنند. برای مثال اگر $X \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌ای بسته باشد آنگاه X یا شماراست یا $|X| = 2^{\aleph_0}$. نیز اگر $X \subseteq \mathbb{R}$ بورل باشد، آنگاه X فرضیه‌ی پیوستار را برآورده می‌کند. بررسی اینگونه خوشرفتاریِ زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی رسالت شاخه‌ای از ریاضیات است به نام نظریه‌ی توصیفی مجموعه‌ها. [۵۲]

قضیه ۸۴ (کانتور ـ بندیکسون): هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی A از فضای متریک تام [۵۳] و جدائی‌پذیرِ (X,d) را می‌توان به صورت اجتماع مجزایی چون $U_1 \cup U_2$ نوشت که در آن U_1 مجموعه‌ای شمارا و باز (در A با توپولوژی زیرفضایی) است و U_2 یک مجموعه‌ی بسته‌ی کامل. [۵۴]

مجموعه‌ی بسته‌ی C را کامل می‌خوانیم هرگاه همه‌ی نقاط آن حدی باشند؛ به بیان دیگر هرگاه هیچ نقطه‌ی ایزوله‌ای نداشته باشد. (ثابت کنید که) هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی کامل از X دارای اندازه‌ی $2^{\aleph_0}$ است. بنابر قضیه‌ی کانتور ـ بندیکسون، [۵۵] هر زیرمجموعه‌ی بسته (تحت شرایط آن قضیه) یا شماراست یا دارای اندازه‌ی $2^{\aleph_0}$.

اثبات قضیه‌ی ۸۳ . می‌دانیم که $S_n(T)$ فشرده و جدائی‌پذیر، و از این رو لهستانی است. پس بنا به قضیه‌ی کانتور ـ بندیکسون، $S_n(T)$ یا شمارا و یا دارای اندازه‌ی $2^{\aleph_0}$ است. $\square$

[۵۲] descriptive set theory
[۵۳] complete
[۵۴] perfect
[۵۵] Cantor - Bendixon

۱.۷.۱ تئوری رابطه‌های تک‌موضعیِ مستقل

تئوریِ T را در زبانِ $L=\{p_1(x),p_2(x),\dots,\}$ مشتمِل بر اصول‌موضوعه‌ی زیر، برای عناصرِ دوبه‌دومتفاوتِ $i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_k\in\mathbb{N}$ در نظر بگیرید:

$$\theta_{i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_k}:\quad \exists x\quad \left(\bigwedge_{i=i_1,\dots,i_n} p_i(x)\wedge\bigwedge_{j=j_1,\dots,j_n}\neg p_j(x)\right)$$

نخست توجه کنید که T سازگار است: ساختارِ $\langle\mathbb{N},p_0^{\mathbb{N}},p_1^{\mathbb{N}},\dots\rangle$ که در آن گرفته‌ایم

$p_0^{\mathbb{N}}=$ مضارب ۲

$\vdots$

$p_k^{\mathbb{N}}=$ مضاربِ k اُمین عدد اول

مدلی برای T است.

تمرین ۸۵:

- نشان دهید که T دارای حذف سور است.
- نشان دهید که

$$T\models\exists^\infty x\quad p_n(x).$$

هر تایپِ کامل در $S_1(T)$ دقیقاً تعیین می‌کند که x در کدام p_n ها واقع و در کدام ناواقع است. بنابراین برای هر $I\subseteq\mathbb{N}$ مجموعه‌ی $p_I(x)$ تعریف‌شده در زیر یک تایپ کامل مشخص می‌کند:

$$p_I(x)=\{p_i(x)|x\in I\}\cup\{\neg p_j(x)|j\notin I\}.$$

پس $|S_1(T)|=2^{\aleph_0}$؛ و در نتیجه تئوری یادشده $\aleph_0$ ـ جازم نیست (بنا به قضیه‌ای که در جلسات بعد ثابت خواهیم کرد). هر p_I تایپی غیرایزوله است و در جلسه‌ی بعد نشان خواهیم داد که در نتیجه‌ی این، تئوری T هیچ مدل اولی ندارد.

۸.۱ جلسه‌ی هشتم

هدف از بحثهای این جلسه، ارائه‌ی دسته‌بندی‌ای است برای تئوریها بر حسب برآورده شدن یا نشدن تایپها در آنها. در این نوع دسته‌بندی، مدلهایی را که حداقل تعدادِ تایپ در آنها محقَق شود، کوچک، و آنهایی را که حداکثر تعداد تایپها را برآورده کنند، بزرگ خواهیم دانست.

تعریف ۸۶: گیریم T کامل باشد و $\mathfrak{M} \models T$.

۱. مدلِ $\mathfrak{M}$ را اتمیک می‌خوانیم هرگاه برای هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ تایپِ $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ ایزوله باشد. در یک مدل اتمیک، تعداد تایپهایی که برآورده می‌شوند، حداقلِ ممکن است.

۲. مدلِ $\mathfrak{M}$ را اول [۵۶] می‌خوانیم هرگاه به صورت مقدماتی (یعنی به وسیله‌ی نگاشتی مقدماتی) در همه‌ی مدلهای T بنشیند.

در ادامه‌ی این بحث، زبان را شمارا در نظر گرفته‌ایم.

گزاره ۸۷: هر مدلِ اول، اتمیک است.

اثبات. مدلِ اولِ $\mathfrak{M}$ را در نظر بگیرید. اگر $\mathfrak{M}$ اتمیک نباشد، $a_1, \ldots, a_n \in M$ چنان یافت می‌شوند که $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ ایزوله نباشد. از آنجا که زبان شماراست، بنا به قضیه‌ی حذف تایپها، تایپِ یادشده در مدلی شمارا مانند $\mathfrak{N} \models T$ حذف می‌شود. از طرفی $\mathfrak{M}$ در این مدل، مثلاً توسط نگاشتِ مقدماتیِ f، به طور مقدماتی نشسته است؛ یعنی $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(f(a)_1, \ldots, f(a_n))$، و این حذف شدن تایپ را ناقض است. □

گزاره ۸۸: موارد زیر با هم معادلند:

۱. $\mathfrak{M}$ مدلی اول است.

۲. $\mathfrak{M}$ مدلی اتمیک و شماراست.

اثباتِ ۲ $\rightarrow$ ۱ را به دانشجو وامی‌گذاریم. برای اثباتِ ۱ $\rightarrow$ ۲ فرض کنید $M = (a_i)_{i \in \omega}$ مدلی اتمیک و شمارا باشد و $\mathfrak{N} \models T$ مدلی دلخواه. از آنجا که $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_\circ)$ ایزوله است، در هر مدلی و از

[۵۶] prime

جمله در $\mathfrak{N}$ برآورده می‌شود. از این رو عنصرِ $b_0 \in \mathfrak{N}$ چنان موجود است که $b_0 \equiv a_0$؛ که منظور از علامت یادشده، عبارت زیر است:

$$\langle \mathfrak{M}, a_0 \rangle \equiv \langle \mathfrak{N}, b_0 \rangle.$$

حال اگر $b_0, \ldots, b_{n-1} \in N$ چنان یافت شده باشند که

$$b_0, \ldots, b_{n-1} \equiv a_0, \ldots, a_{n-1} \quad (*)$$

آنگاه، نشان می‌دهیم که عنصرِ $b_n \in N$ چنان موجود است که

$$a_0, \ldots, a_n \equiv b_0, \ldots, b_n.$$

فرض کنیم تایپِ $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_0, \ldots, a_n)$ توسط فرمولِ $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ ایزوله شده باشد. از $\mathfrak{M} \models \phi(a_0, \ldots, a_n)$ نتیجه می‌شود که

$$\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi(a_0, \ldots, a_{n-1}, x).$$

بنا به $(*)$ داریم

$$\mathfrak{N} \models \exists x \quad \phi(b_0, \ldots, b_{n-1}, x)$$

تمرین ۸۹: نشان دهید که اگر $\mathfrak{N} \models \phi(b_0, \ldots, b_n)$ آنگاه

$$\langle \mathfrak{N}, b_0, \ldots, b_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, a_0, \ldots, a_n \rangle$$

تمرین ۹۰: نشان دهید که نگاشت $f : M \to N$ که هر a_i را به b_i می‌برد، مقدماتی است.

دیدیم که طبق تعریف، هر مدل اول به طور مقدماتی در سایر مدلها می‌نشیند. بنابراین اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل اول باشند، هر یک به طور مقدماتی در دیگری می‌نشیند؛ ولی از این ایزومرف بودنِ $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ نتیجه نمی‌شود.

تمرین ۹۱: مثالی از دو ساختارِ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ بزنید که ایزومرف نیستند ولی به طور مقدماتی در یکدیگر می‌نشینند.

با این همه، در زبان شمارا، این مطلوب برقرار است.

تمرین ۹۲: نشان دهید که اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل اول برای T باشند، آنگاه $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

در ادامه به بررسی چند مثال پرداخته‌ایم.

مثال ۹۳: قبلاً دیده‌ایم که در $T = DLO$ مجموعه‌ی $S_n(T)$ متناهی است، و در نتیجه همه‌ی تایپها در این تئوری ایزوله هستند. از این رو همه‌ی مدلهای DLO اتمیک هستند؛ به ویژه $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ یگانه مدلِ اول برای آن است.

بعداً ثابت خواهیم کرد که تمام مدلهای یک تئوریِ $\aleph_0$ـ جازم اتمیک هستند و یگانه مدلِ شمارای یک‌چنین تئوری‌ای، همواره اول است.

مثال ۹۴: در تئوریِ روابط تک‌موضعی مستقل دیدیم که $S_1(T)$ شامل هیچ تایپ ایزوله‌ای نیست. از این رو هیچیک از مدلهای تئوریِ یادشده اتمیک نیستند، و به ویژه این تئوری دارای مدل اول نیست.

مثال ۹۵: در زبانِ $L = \{E\}$ تئوریِ T را به گونه‌ای در نظر بگیرید که بیانگر این باشد که E رابطه‌ای هم‌ارزی است با نامتناهی کلاس و هر کلاس از این رابطه نیز نامتناهی است.

تمرین ۹۶: نشان دهید تئوری یادشده کامل، دارای حذف سور، و $\aleph_0$ـ جازم است (مورد آخر یعنی هر دو مدل شمارا از این تئوری با هم ایزومرفند).

حال زبانِ $L = \{E_1, E_2, \ldots\}$ و تئوریِ T در آن را در نظر بگیرید که بگوید که هر E_i یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و همه‌ی کلاسهای آن نامتناهی است و به‌علاوه هر E_i توسط E_{i+1} تظریف می‌شود؛ یعنی $E_{i+1} \subseteq E_i$.

تمرین ۹۷: نشان دهید T کامل و دارای حذف سور است ولی $\aleph_0$ـ جازم نیست.

تمرین ۹۸: نشان دهید که تایپِ جزئیِ $\Sigma(x,y)$ متشکل از فرمولهای $\{E_i(x,y)\}_{i\in\omega}$ و فرمولِ $x \neq y$ غیرایزوله است.

تمرین ۹۹: نشان دهید تئوری یادشده دارای مدل اول است و در این مدل اول،

$$x = y \leftrightarrow \bigwedge_{i\in\omega} E_i(x,y).$$

دقت کنید که رابطه‌ی

$$E_\infty := \bigwedge E_i(x,y)$$

خود نیز یک رابطه‌ی هم‌ارزی است که بنا به تمرین بالا، تعبیر آن در مدل اول، تساوی است. (در مدلِ اشباع این تئوری، رابطه‌ی یادشده دارای نامتناهی کلاس است).

تا اینجا با مدل اول آشنا شده‌ایم و دانسته‌ایم که هر مدل اتمیکِ شمارا اول است. در زیر محکی برای وجودِ چنین مدلی ارائه کرده‌ایم.

قضیه ۱۰۰ (وجود مدل اول): موارد زیر با هم معادلند.

۱. T دارای مدل اول است.

۲. T دارای مدل اتمیک است.

۳. برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی متشکل از تایپهای کاملِ ایزوله، در $S_n(T)$ چگال است.

توجه کنید که وجود مدل اول، متضمن کم بودن تعداد تایپها نیست؛ کمااینکه در $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ دیدیم که $S_۱(T) = ۲^{\aleph_۰}$ و داریم

تمرین ۱۰۱: نشان دهید که $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, ۰, ۱ \rangle$ مدلی اول برای تئوری یادشده است.

۹.۱ جلسه‌ی نهم

تمرین زیر در جلسه‌ی آموختال به طور کامل مورد بحث قرار خواهد گرفت، ولی در اینجا ایده‌ای برای حل آن ارائه کرده‌ایم.

تمرین ۱۰۲: آیا تئوریِ ساختارِ $\langle \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \leq \rangle$ دارای مدل اول است؟

برای پاسخ به سوال بالا، یک اصلبندی کامل برای ساختار یادشده بنویسید (کامل بودن اصلبندی مورد نظر را می‌توانید با به‌کارگیری یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی تحقیق کنید). ادعا می‌کنیم که ساختارِ $\langle \mathbb{Q}, P, \leq \rangle$ که در آن P به صورت زیر تعریف شده، یک مدل اول برای ساختار یادشده است.

$$P = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} | \text{توسط یک عدد اولِ } r_{2k} \text{ عاد می‌شود } q\}$$

در بالا فرض کرده‌ایم که $\{r_n\}$ شمارشی از همه‌ی اعداد اول باشد. نیز در نمایشِ $\frac{p}{q}$ فرض کرده‌ایم که $(p,q) = 1$. با به کارگیری یک سامانه‌ی رفت و برگشتی، نشان دهید که تئوری یادشده $\aleph_0$ ـ جازم است و از این رو، مدلی که در بالا معرفی کرده‌ایم تنها مدل شمارای آن، و از این رو اول است. $\square$

حال به ادامه‌ی درس بازمی‌گردیم. فرض کنید T یک تئوری کامل و فاقد مدل متناهی در زبانِ شمارای L باشد. موارد زیر با هم معادلند:

۱. T دارای مدل اول است.

۲. T دارای مدلی اتمی است.

۳. برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی n ـ تایپهای ایزوله در فضای $S_n(T)$ چگال است.

اثبات. ۳ $\rightarrow$ ۲. فرض کنید $T \models M$ اتمی باشد و $[\phi(x_1, \ldots, x_n)]$ بازی پایه‌ای در $S_n(T)$. معلوم است که $T \cup \{\phi(\bar{x})\}$ سازگار است و از این رو $\bar{a} \in M$ چنان موجود است که $M \models \phi(\bar{a})$. پس $\phi(\bar{x}) \in \text{tp}(\bar{a})$؛ بنا به اتمیک بودن مدلِ M تایپِ $\text{tp}(\bar{a})$ ایزوله است.

۱ $\rightarrow$ ۳. بنا بر آنچه در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم، کافی است مدلی شمارا و اتمیک بیابیم. در این کار از رهیافتی توپولوژیک، اما بر پایه‌ی ساختمانهای هنکین بهره پی خواهیم گرفت. درجلسات قبل، قضیه حذف تایپ را به روش مشابهی ثابت کرده بودیم.

قرار دهید

$$X = \{T(C) | \text{یک تئوری کامل در زبانِ } L \cup C \text{ است که } T \text{ را دربردارد } T(C)\}$$

با توپولوژی استون، X فشرده و دارای ویژگیِ بئر است. (بررسی کنید که) مجموعه‌ی $\Gamma_۱$ تعریف شده در زیر، در X چگال است.

$$\Gamma_۱ = \{T(C) | \text{هنکینی است.} \ T(C)\}$$

نیز با کمک ویژگی بئر نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی زیر چگال است.

$$\Gamma_۲ = \{T(C) | \text{برای هر } \bar{c} \in C \text{ فرمولی کامل چون } \sigma(\bar{c}) \text{ در } T(C) \text{ واقع است}\}$$

(در ادامه به طور دقیق تعریف خواهیم کرد که) منظور از فرمولِ کامل، فرمولی است که تایپی ایزوله کند. برای اثبات چگال بودنِ $\Gamma_۲$ آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\Gamma_۲ = \bigcap_{c_۱ \ldots c_n \in C} \Gamma_۲^{c_۱ \ldots c_n}$$

که در آن

$$\Gamma_۲^{c_۱ \ldots c_n} = \{T(C) | \text{شامل فرمول کاملی چون } \sigma(c_۱, \ldots, c_n) \text{ است.} \ T(C)\}$$

به بیان دیگر

$$\Gamma_۲^{c_۱ \ldots c_n} = \bigcup_{\sigma \text{ فرمولی کامل}} \{T(C) | \sigma(c_۱, \ldots, c_n) \in T(C)\}$$

یا $\Gamma_۲^{c_۱ \ldots c_n} = \bigcup_{\sigma \text{ فرمولی کامل}} [\sigma(c_۱, \ldots, c_n)]$. پس $\Gamma_۲$ اشتراکی شمارا از مجموعه‌های باز و چگال، و از این رو چگال است. هر مدلِ واقع در $\Gamma_۱ \cap \Gamma_۲$ شمارا و اتمیک است. $\square$

تمرین ۱۰۳: ۱ $\rightarrow$ ۳ را مستقیماً با روش هنکین (و نه با استفاده از روشهای توپولوژیک) ثابت کنید.

تعریف ۱۰۴: فرمولِ $\theta(x_۱, \ldots, x_n)$ را نسبت به تئوریِ T **کامل**[۵۷] می‌خوانیم هرگاه

۱. $T \models \exists \bar{x} \quad \theta(\bar{x})$.

۲. برای هر فرمولِ $\phi(\bar{x})$ اگر $T \models \exists \bar{x} \quad (\theta(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x}))$ آنگاه $T \models \forall \bar{x} \quad (\theta(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x}))$.

[۵۷] complete

به عبارت دیگر، فرمول $\theta(\bar{x})$ کامل خوانده می‌شود، هرگاه تایپ کاملی ایزوله کند. روی چنین فرمولی، نمی‌توان توسط هیچ فرمول دیگری انشعاب زد؛ یعنی، برای هر فرمولِ $\phi(\bar{x})$ اگر $T \cup \{\theta \wedge \phi\}$ سازگار باشد، آنگاه $T \cup \{\theta \wedge \neg\phi\}$ لزوماً ناسازگار است. عموماً از تکنیک ساخت درخت، در اثبات قضایای مربوط به تعداد تایپها استفاده می‌شود. چنین رویکردی را در جلسه‌های آموختال بیشتر خواهیم کاوید، و در این جا تنها به مثالی از این نوع کاربرد بسنده کرده‌ایم.

گزاره ۱۰۵: اگر تئوریِ T مدل اول نداشته باشد، آنگاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $|S_n(T)| \geq 2^{\aleph_0}$.

به عبارت دیگر، اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|S_n(T)| = \aleph_0$، آنگاه T دارای مدل اول است.

اثبات. اگر T دارای مدل اول نباشد، $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که n ـ تایپهای ایزوله در $S_n(T)$ چگال نیستند. پس بازی چون $[\phi(\bar{x})]$ موجود است، فاقد هیچ تایپ ایزوله‌ای. پس فرمولی چون $\theta(\bar{x})$ چنان موجود است، که هر دو مجموعه‌ی $T \cup \phi \cup \{\theta\}$ و $T \cup \phi \cup \{\neg\theta\}$ سازگار باشند.

$$\begin{tikzcd} \theta & & \neg\theta \\ & \phi \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

حال توجه کنید که هر دو فرمولِ $\phi \wedge \theta$ و $\phi \wedge \neg\theta$ ناکاملند. علت این است که اگر برای مثال، $\phi \wedge \theta$ تایپی ایزوله کند، این تایپ در $[\phi]$ واقع می‌شود، که این با فرض در تناقض است. بنابراین فرمولی چون ξ موجود است به طوری که $T \cup \phi \cup \{\theta\} \cup \{\xi\}$ و $T \cup \phi \cup \{\theta\} \cup \{\neg\xi\}$ هر دو سازگارند؛ نیز فرمول χ چنان موجود است که $T \cup \phi \cup \{\neg\theta\} \cup \{\chi\}$ و $T \cup \phi \cup \{\neg\theta\} \cup \{\neg\chi\}$ سازگارند. پس بر هر دو گره‌ی درخت بالا می‌توان انشعاب زد:

$$\begin{tikzcd} \xi & & \neg\xi & & \chi & & \neg\chi \\ & \theta \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & \neg\theta \arrow[ul] \arrow[ur] & \\ & & & \phi \arrow[ull] \arrow[urr] & & & \end{tikzcd}$$

فراروند بالا را می‌توان ادامه داد و به یک درخت نامتناهی رسید. از آنجا که تعداد گره‌های هر درختِ

اینچنین $\aleph_0$. و تعداد شاخه‌های آن $2^{\aleph_0}$ است و هر شاخه از درخت یک تایپ کامل مشخص می‌کند، تعداد تایپها، حداقل $2^{\aleph_0}$ است. $\square$

تعداد تایپها و درخت

گفتیم که اگر $(s)_{s\in 2^{<\omega}}$ یک درخت باشد، آنگاه تعداد گره‌های آن $\aleph_0$ و تعداد شاخه‌های آن $2^{\aleph_0}$ است. بنابراین اگر در تئوریِ T درختی از فرمولها مانند

$$\begin{tikzcd}
\xi & & \neg\xi & & \chi & & \neg\chi \\
& \theta \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & \neg\theta \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& & & \phi \arrow[ull] \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

موجود باشد که تا نامتناهی ادامه یابد، آنگاه تعداد تایپها در این تئوری بیشتر از یا مساوی با $2^{\aleph_0}$ است. نیز تأکید کردیم که برای ساخت درخت، همواره باید علتی برای شاخه زدن وجود داشته باشد. برای مثال در گزاره‌ی ۱۰۵ علت این که روی ϕ می‌شد انشعاب زد، این بود که $[\phi]$ تایپ ایزوله‌ای در برنداشت. همچنین (تحقیق کنید) که اگر ϕ تایپی ایزوله کند، روی آن نمی‌توان منشعب شد. در درختی که در اثبات گزاره‌ی زیر آمده است، با نوع دیگری از دلایل امکان انشعاب مواجهیم.

گزاره ۱۰۶: اگر $|S_n(T)| > \aleph_0$ آنگاه $|S_n(T)| \geq 2^{\aleph_0}$.

گزاره‌ی بالا را پیشتر در کلاس درس با روشی توپولوژیک ثابت کرده بودیم. در زیر (و در کلاس آموختال) دو اثبات مستقیم (با یک ایده‌ی واحد) برای آن آورده‌ایم.

اثبات اول. اگر تعداد تایپها ناشمارا باشد، فرمولی چون ϕ موجود است که در ناشمارا تایپ واقع شود؛ آن را در ریشه می‌گذاریم.

ادعای ۱۰۷: اگر $[\phi]$ ناشمارا باشد، آنگاه دو تایپِ متفاوتِ p_1, p_2 شاملِ ϕ موجودند، به طوری که برای هر $\psi \in p_i$ مجموعه‌ی $[\psi]$ ناشمارا باشد.

اثبات ادعا. فرمولِ ψ را کوچک بخوانید هرگاه $[\psi]$ شمارا باشد. تعداد تایپهایی که حداقل یک فرمولِ‌کوچک را شاملند، شماراست؛ زیرا زبان شماراست و اندازه‌ی مجموعه‌ی زیر کرانی برای این تعداد است:

$$\bigcup_{\psi \text{ کوچک}} [\psi]$$

پس در $[\phi]$ تایپهایی یافت می‌شوند که هیچ فرمول کوچکی ندارند. $\square$

فرض کنیم که $p_۱, p_۲$ دو تایپ متمایز باشند، هر دو تنها متشکل از فرمولهای غیرکوچک و شاملِ ϕ. فرض کنیم $\psi \in p_۱$ و $\neg\psi \in p_۲$ دو سر شاخه‌ی یادشده باشند. روی آنها نیز می‌توان دوشاخه شد؛ زیرا آنها نیز فرمولهایی غیرکوچکند. $\square$

اثبات دوم. فرض کنید فرمولِ ϕ در ناشمارا تایپ واقع شده باشد. تحقیق کنید که مجموعه‌ی زیر یک تایپ کامل است:

$$p_۱ = \{\psi | \text{ناشماراست } [\phi \wedge \psi]\}$$

بنابراین اگر $\psi \notin p_۱$ آنگاه $[\phi \wedge \neg\psi]$ ناشماراست. پس می‌توان روی ϕ توسط $\psi, \neg\psi$ منشعب شد. همین فراروند را برای فرمولهای $\phi \wedge \psi$ و $\phi \wedge \neg\psi$ و الی‌آخر اجرا کنید.

$\square$

۱۰.۱ جلسه‌ی دهم، آکَندِگی

در جلسه‌ی پیش درباره‌ی مدلهای اول و اتمیک، چونان مدلهای حداقلی بحث کردیم. در این جلسه، به مدلهای اشباع، بمثابه مدلهای حداکثری خواهیم پرداخت.

پیش از شروع بحث اصلی، کمی به فلسفه‌ی آکندگی می‌پردازیم. قبلاً درباره‌ی شناخت ذات از روی صفات و تناظر فلسفی آن با مفهوم تایپها گفتگو کرده بودیم. گفتیم گاهی ذات یک موجود در دسترس نیست، ولی می‌توان آن را از روی مجموعه‌ی صفاتش شناخت. بزرگترین مجموعه‌ی ممکن از این صفاتِ ثبوتیه و نقیضِ صفات سلبیه‌ی یک موجود را می‌توان با خودِ آن موجود یکی در نظر گرفت. در جهانهای اشباع، برای هر مجموعه‌ی سازگار از صفات، موجودی هست که آن صفات وصف اویند. در این جهان هر چه پیش آمدنش ممکن باشد، رخ می‌دهد و هر مجموعه از صفاتی که با هم در تناقض نباشند، در حقیقت مجموعه‌ی صفات یک ذات بخصوص است.

طبق تعریف، یک تایپ کامل در تئوریِ T مجموعه‌ای از فرمولهای سازگار با این تئوری است. این مجموعه از فرمولها لزوماً در هر مدلی برآورده نمی‌شود. در واقع اگر $p(x) \in S^M(A)$ تایپی کامل باشد در مدل M و روی مجموعه‌ی پارامترِ A آنگاه مدلی چون $N \succ M$ و در آن عنصری چون a موجودند به طوری که $p(x) = \mathrm{tp}^N(a/A)$. اگر مدلِ M به‌اندازه‌اشباع باشد، عنصرِ a را می‌توان در خودش جُست. به زبان دقیق بازگردیم:

فرض کنیم $\mathfrak{M}$ مدلی باشد از T و A زیرمجموعه‌ای از آن. زبانِ L_A توسیعی از زبانِ L است که با افزودن یک ثابتِ c_a برای هر $a \in A$ حاصل می‌شود. بدیهی است که $\mathfrak{M}$ را می‌توان با تعبیرِ طبیعی عناصرِ A به عنوان یک L_A ـ ساختارِ $\langle \mathfrak{M}, a \rangle_{a\in A}$ در نظر گرفت. قرار می‌دهیم $T_A := \mathrm{Th}\langle \mathfrak{M}, a \rangle_{a\in A}$ و تعریف می‌کنیم

$$S_n^{\mathfrak{M}}(A) = S_n(T_A).$$

هر $p(\bar{x}) \in S_n(A)$ را یک تایپ کامل با پارامتر در A می‌خوانیم. واضح است که اگر $p(\bar{x})$ یک تایپ کامل با پارامتر در A باشد، آنگاه $T_A \cup p(\bar{x})$ سازگار و از این رو برآورده‌شدنی در یک توسیعِ مقدماتیِ $\mathfrak{N}$ از $\mathfrak{M}$ است. به بیان دیگر، برای یکچنین تایپِ $p(\bar{x})$ مجموعه‌ی $\mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M}) \cup p$ سازگار است.

تعریف ۱۰۸ (مدل آکنده): مدلِ $\mathfrak{M}$ را ω ـ آکنده یا ω ـ اشباع [۵۸] می‌خوانیم هرگاه برای هر

[۵۸] ω-saturated

زیرمجموعه‌ی متناهیِ M $A \subseteq M$ و هر $n \in \mathbb{N}$، هر تایپِ کاملِ $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}$ در M برآورده شود.

مثال ۱۰۹: مدلِ اولِ DLO یعنی $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ مدلی ω ـ آکنده است. فرض کنید $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$ و تئوریِ $T = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Q}, \leq, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle)$ و تایپِ $p(\bar{x}) \in S_n(T)$ در نظر بگیرید. با استفاده از سامانه‌ای رفت و برگشتی، (تحقیق کنید که) می‌توان نشان داد که T یک تئوریِ $\aleph_0$ ـ جازم است. تایپِ $p(\bar{x})$ در مدلی شمارا باید برآورده شود. این مدل شمارا ایزومرف با مدل اولِ تئوریِ T است. یعنی یگانه (به پیمانه‌ی ایزومرفیسم) مدل شمارای این تئوری، اشباع نیز هست.

تمرین ۱۱۰: نشان دهید که یگانه مدل شمارای یک تئوریِ $\aleph_0$ ـ جازم، (هم اول است و هم) ω ـ اشباع است. اثبات قسمت داخل پرانتز آسان نیست و بعداً بدان خواهیم پرداخت).

مثال ۱۱۱: دیدیم که ساختارِ $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle$ مدلی اول برای تئوریِ حساب پئانو است. تایپ جزئی زیر را در نظر بگیرید

$$\pi(x) = \{x > 1, x > s(1), x > ss(1)), \ldots\}$$

و فرض کنید $p(x)$ کامل‌شده‌ی آن باشد. واضح است که $p(x)$ در $\mathbb{N}$ برآورده نمی‌شود؛ پس $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle$ مدلی ω ـ آکنده نیست. نیز قبلاً ثابت کرده‌ایم که $|S_1(\mathrm{Th}(\langle \mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle))| = 2^{\aleph_0}$؛ بنابراین تئوری یادشده هیچ مدل شمارای آکنده‌ای ندارد (تعداد تایپهای متفاوت ناشماراست و از این رو نمی‌توان آنها را با شمارا عنصر برآورده کرد).

تعریف ۱۱۲: مدل $\mathfrak{M}$ را شمارای‌اشباع [59] میخوانیم هرگاه هم شمارا و هم اشباع باشد.

مطابقِ مثال بالا، شرط لازم برای این که یک تئوری مدلی شمارای‌اشباع داشته باشد این است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|S_n(T)| \leq \aleph_0$. (در جلسات بعد خواهیم دید که) عکس این گفته نیز برقرار است. یعنی هر تئوری T که در آن $S_n(T) \leq \aleph_0$ یک مدل شمارای‌اشباع دارد. پس هر تئوری‌ای که یک مدل شمارای‌اشباع داشته باشد، دارای مدلی اول است (قبلاً ثابت کردیم که اگر یک تئوری مدل اول نداشته باشد، تعداد تایپهای آن ناشماراست). پس

گزاره ۱۱۳: اگر تئوریِ T دارای مدل شمارای‌اشباع باشد دارای مدل اول است.

هرگاه ویژگی‌ای بر حسب تایپها بیان شده باشد، رسم معمول در نظریه‌ی‌مدلْ تحقیق آن است که آیا برقرای این ویژگی برای تایپهای تک متغیره، برقراری آن را در حالت کلی نتیجه می‌دهد. برای مثال

[59] countably saturated

گفتیم که اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی تایپهای ایزوله‌ی n ـ متغیره، در $S_n(T)$ چگال باشد، آنگاه تئوری مورد نظر دارای مدل اول است. آیا چگال بودن تایپهای ایزوله‌ی تک‌متغیره در $S_n(T)$ برای برقراری این حکم کافی است؟ پاسخ این سوال منفی است. از طرفی گفتیم که مدلِ $\mathfrak{M}$ اشباع است هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ هر تایپِ $p \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ در آن برآورده شود. در زیر نشان داده‌ایم که آکندگی از برآورده‌شدنِ تنها تایپهای تک‌متغیره نیز نتیجه می‌شود. (مشابه این گفته برای ساده بودن یا وابسته بودن تئوریها نیز برقرار است، که پرداختن بدانها جزو چارچوب این درس نیست).

گزاره ۱۱۴: برای $\mathfrak{M} \models T$ موارد زیر با هم معادلند.

۱. $\mathfrak{M}$ مدلی ω ـ اشباع است.

۲. برای هر مجموعه‌ی متناهی مانند $A \subseteq M$ هر n ـ تایپِ جزئیِ $\pi(\bar{x})$ در $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, a\rangle_{a\in A})$ در M برآورده می‌شود.

۳. برای هر مجموعه‌ی متناهیِ $M \subseteq A$ هر تایپِ کاملِ $p(x) \in S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ در M برآورده می‌شود.

۴. حکم شماره‌ی ۳ برای تایپهای جزئی تک‌متغیره.

اثبات. ۱ $\to$ ۳. فرض کنید بدانیم که هر $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ در M برآورده می‌شود و تایپِ $p'(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S_{n+1}^{\mathfrak{M}}$ داده شده باشد. تعریف کنید

$$\exists y p' = \{\exists y \phi(x_1, \ldots, x_n, y) | \phi(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in p\}.$$

(بررسی کنید که) $\exists y p'$ یک n ـ تایپ جزئی است، پس در M توسط عناصری چون $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ برآورده می‌شود. روی مجموعه‌ی $A \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ادعا می‌کنیم که مجموعه‌ی زیر از فرمولهای دارای یک متغیر واحد تایپی جزئی است.

$$p'(\bar{\alpha}, x) = \{\theta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x)) | \theta(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in p'\}.$$

در این صورت این تایپ جزئی نیز بنا به فرض استقراء در M توسط عنصری چون α_{n+1} برآورده خواهد شد و به آسانی می‌توان دید که $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ تایپِ p' را برآورده می‌کنند.

برای اثبات ادعا، فرمولهای $\theta_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x)$ را در مجموعه‌ی بالا در نظر بگیرید ($i = 1, \ldots, k$). برای هر i داریم

$$\exists y \quad \theta_i(x_1, \ldots, x_n, y) \in \exists y p'$$

و از آنجا که p' تایپی کامل است،

$$\bigwedge_i \theta_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in p'.$$

بنابراین

$$\exists y \quad \bigwedge_i \theta_i(x_1, \ldots, x_n, y) \in \exists y p'.$$

فرمول بالا بنا به فرض استقراء در M برآورده می‌شود. $\square$

برای هر تئوریِ کاملِ T مدلی ωـ اشباع لزوماً موجود است:

گزاره ۱۱۵: اگر $\mathfrak{M} \models T$ آنگاه توسیعی مقدماتی مانند $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ موجود است چنانکه $\mathfrak{N}$ مدلی است ωـ اشباع و $|N| \leq |M|^{\aleph_0}$.

با ترکیب گزاره‌ی بالا با لم لونهایم اسکولم، می‌توان مدلِ $\mathfrak{N}$ را با اندازه‌ی دقیقاًبرابر با $|M|^{\aleph_0}$ به دست آورد.

اثبات کامل را در جلسه‌ی بعد خواهیم دید؛ در این جا به یک راهنمایی برای اثبات بسنده می‌کنیم.

قدم اول: توسیع مقدماتیِ $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ را چنان بیابید که اولاً $|N| \leq |M|^{\aleph_0}$ و ثانیاً برای هر زیرمجموعه‌ی متناهیِ $A \subseteq M$، هر تایپِ $p \in S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ در N برآورده شود.

قدم دوم. قدم اول را به مدلِ $\mathfrak{N}$ اعمال کنید.

قدم سوم. بررسی کنید که اگر $\mathfrak{N}_1 \prec \mathfrak{N}_2 \prec \ldots$ زنجیر حاصل‌شده بدین طریق باشد، آنگاه $\bigcup \mathfrak{N}_i$ مدل مطلوب است. $\square$

۱۱.۱ جلسه‌ی یازدهم

پیش از ورود به بحث، در زیر برای یادآوری تعاریفی معادل برای مفهوم تایپ آورده‌ایم. فرض کنید $\mathfrak{M} \models T$ و $\bar{a} \in M$ و $A \subseteq M$.

۱. می‌نویسیم $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$، و می‌گوییم که $p(\bar{x})$ یک تایپ کامل در $\mathfrak{M}$ روی A است، هرگاه $p(\bar{x})$ یک مجموعه‌ی سازگار بیشینال از فرمولها باشد با متغیرِ $\bar{x}$ که با $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, c\rangle_{c\in A})$ سازگار است. طبق این تعریف، اگر $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ آنگاه

$$p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A) \Leftrightarrow p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{N}}(A)$$

می‌گوییم دو عنصرِ $a, b \in M$ روی A همتایپند، و می‌نویسیم $a \equiv_A b$ هرگاه تایپی چون $p(x) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ چنان موجود باشد که هر دوی a, b آن را برآورده کنند؛ معادلاً هرگاه توسیع $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ و تایپی چون $p(x) \in S_n^{\mathfrak{N}}(A)$ موجود باشد چنان که a, b هر دو $p(x)$ را برآورند. در این صورت، نیز می‌نویسیم $p(x) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(b/A)$.

فرض کنیم $A \subseteq \mathfrak{N}$ نه لزوماً توسیعی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ باشد و $b \in N$. در این صورت می‌نویسیم $a \equiv_A b$ هرگاه هر دوی a و b یک تایپِ $p(x) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ را برآورده کنند.

۲. می‌نویسیم $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$، و می‌گوییم که $p(\bar{x})$ یک تایپ کامل در $\mathfrak{M}$ روی A است، هرگاه توسیعِ مقدماتیِ $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ و عنصر $\bar{b} \in N$ چنان موجود باشند که $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b}/A)$ که در این جا، بنا به تعریف

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b}/A) = \{\phi(\bar{x}) | \mathfrak{N} \models \phi(\bar{b})\}.$$

۳. برای هر دو مدلِ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ که $A \subseteq M, N$ و هر $\bar{a} \in M$ و $\bar{b} \in N$ تعریف می‌کنیم $\bar{a} \equiv_A \bar{b}$ هرگاه مدلِ $\mathfrak{K}$ و نگاشتهای مقدماتیِ $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ و $g : \mathfrak{N} \to \mathfrak{K}$ چنان موجود باشند که $g(\bar{a}) = g(\bar{b})$. در این صورت می‌نویسیم $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b}/A)$.

۴. برای دو چندتاییِ $\bar{a}, \bar{b} \in M$ می‌نویسیم $\bar{a} \equiv_A \bar{b}$ هرگاه یک توسیع مقدماتیِ $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ موجود باشد به همراه یک اتومرفیسمِ $\sigma : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ چنان که $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.

همان گونه که از تعاریف بالا برمی‌آید، تعریف تایپ بسته به توسیعهای مقدماتی یک مدل است. اگر یک مدل سِتُرگ (فعلاً نه به معنای اصطلاحیش و تنها به معنی بسیار بزرگ)، مثلاً به نام $\mathbb{M}$ داشتیم که همه‌ی مدلها به طور مقدماتی در آن می‌نشستند به راحتی می‌شد بگوییم هر تایپِ $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ در واقع برابر است با $\mathrm{tp}^{\mathbb{M}}(\bar{a}/A)$ برای یک $\bar{a} \in \mathbb{M}$. در جلسات بعد بدین نکته خواهیم پرداخت.

در پایان جلسه‌ی پیش گزاره‌ی زیر را بیان و اثباتش را به این جلسه موکول کرده بودیم.

گزاره ۱۱۶: اگر $T \models \mathfrak{M}$ آنگاه T مدلی ωـ اشباع مانند $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ دارد چنان که $|N| \leq |M|^{\aleph_0}$.

اثبات. فرض کنید $\langle p_\gamma(x) \rangle_{\gamma \in \lambda}$ شمارشی از همه‌ی تایپهای روی زیرمجموعه‌های متناهیِ M باشد. تعداد این چنین تایپها، حداکثر $2^{\aleph_0} \times |M|$ است. (تحقیق کنید که $\mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M}) \cup \bigcup p_\gamma(c_\gamma)$ به طور متناهی ارضاء پذیر است ((c_γ) را مجموعه‌ای از ثوابت در نظر گرفته‌ایم). بنا بر فشردگی، مجموعه‌ی یادشده دارای مدلی از اندازه‌ی حداکثر (و بنا به لونهایم اسکولم از اندازه‌ی دقیقاً برابر با) $|M|^{\aleph_0}$ است. این مدل را $\mathfrak{N}_0$ می‌نامیم و روند بالا را بدان اعمال می‌کنیم تا به مدلِ $\mathfrak{N}_1$ برسیم. گیریم $(\mathfrak{N}_i)$ زنجیری باشد که بدین رهگذر حاصل شده است و قرار می‌دهیم $\mathfrak{N}_\omega = \bigcup \mathfrak{N}_i$. اگر $\beta_1, \ldots \beta_n \in N_\omega$ و $p(x) \in S^{\mathfrak{N}_\omega}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ باشد، آنگاه مدلی چون $\mathfrak{N}_k$ برای یک $k < \omega$ همه‌ی β_i ها را دربردارد. بنابراین $p(x)$ در $\mathfrak{N}_{k+1}$ (و از این رو در $\mathfrak{N}_\omega$) برآورده می‌شود. □

نکته ۱۱۷:

۱. اگر $T \models \mathfrak{N}$ مدلی ωـ اشباع باشد و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in N$ آنگاه $\langle \mathfrak{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ مدلی ωـ اشباع برای $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle)$ است.

۲. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی $S_n(\mathrm{Th}(\mathfrak{N}))$ شمارا باشد، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی $S_n(\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle))$ نیز شماراست.

اثبات شماره‌ی ۲. نگاشتِ

$$S_n(\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle)) \to S_{n+k}(T)$$
$$p(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \mapsto p(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$$

نگاشتی یک به یک است. شمارا بودنِ فضای دامنه‌ی آن از شمارا بودن فضای بُردِ آن نتیجه می‌شود. □

بنا به تمرین زیر، ممکن است که در یک تئوریِ T مجموعه‌ی $S_1(T)$ شمارا باشد ولی $S_2(T)$ ناشمارا:

تمرین ۱۱۸:

۱. نشان دهید که در $\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$ تعداد تایپهای با یک متغیر، دو تاست و تعداد تایپهای با دو متغیر برابر با $\aleph_0$.

۲. نشان دهید که در $\langle \mathbb{R}, +, 0, < \rangle$ تعداد تایپهای با یک متغیر، سه تاست و تعداد تایپهای با دو متغیر برابر با $2^{\aleph_0}$.

در جلسه‌ی پیش همچنین اثبات قضیه‌ی زیر را وعده کرده بودیم.

قضیه ۱۱۹: تئوریِ T دارای یک مدل شمارای‌اشباع است اگروتنهااگر $S_n(T)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ شمارا باشد.

اثبات. اگر T دارای مدل شمارای‌اشباعِ $\mathfrak{M}$ باشد، برای هر $n \in \mathbb{N}$ هر تایپِ در $S_n(T)$ در M برآورده می‌شود. بنابراین $|S_n(T)| \leq \aleph_0$.

اگر هر $S_n(T)$ شمارا باشد، بنا بر مورد دوم در نکته‌ی بالا، برای هر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$ مجموعه‌ی $S_1(\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, \bar{\alpha} \rangle))$ نیز شماراست. پس مدل شمارای $\mathfrak{N}_1$ چنان موجود است که هر تایپِ متعلق به $S_1(\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, \bar{\alpha} \rangle))$ در آن برآورده شود. نیز مدلی شمارا چون $\mathfrak{N}_2$ چنان موجود است که همه‌ی تایپهای متعلق به $S_1(\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{N}_1, \bar{\alpha} \rangle))$ برای هر $\bar{\alpha} \in N$ در آن برآورده می‌شوند. اجتماع زنجیرِ $\mathfrak{N}_i$ هایی که از این رهگذر حاصل می‌شود، مدل مطلوب است. □

تمرین ۱۲۰: نشان دهید که اگر T یک مدل اول داشته باشد که ωــ اشباع باشد، آنگاه T یک تئوریِ $\aleph_0$ــ جازم است.

گزاره ۱۲۱: اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل شمارای‌اشباع باشند آنگاه $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$.

اثبات. گیریم $M = (a_i)_{i \in \omega}$ و $N = (b_i)_{i \in \omega}$. از آنجا که $\mathfrak{N}$ اشباع است، عنصری چون b را چنان شامل است که

$$b \equiv a.$$

به همین ترتیب از آنجا که $\mathfrak{M}$ اشباع است، عنصری چون a را چنان شامل است که

$$b_{\circ}b \equiv aa_{\circ}$$

برای اثبات این گفته، فرض کنید $\phi(x,b)$ فرمولی باشد که توسط $b_{\circ}$ برآورده می‌شود. پس داریم $\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi(x,b)$. از آنجا که $b \equiv a_{\circ}$ داریم $\mathfrak{N} \models \exists x \quad \phi(x,a_{\circ})$. از این رو، اگر $p(x,b) = \mathrm{tp}(b_{\circ}/b)$ آنگاه هر بخش متناهی از $p(x,a_{\circ})$ در N برآورده می‌شود و از آنجا که $\mathfrak{N}$ شماراست، این تایپ در آن به‌کلی برآورده می‌شود.

پس نگاشتِ مقدماتیِ $f_{\circ}$ را با ضابطه‌ی $f_{\circ}(a_{\circ}) = b$ و $f_{\circ}(a) = b_{\circ}$ تعریف می‌کنیم (این نگاشت، $a_{\circ}$ را در دامنه و $b_{\circ}$ را در بُرد دارد). فرض کنیم نگاشتِ مقدماتیِ f_n ساخته شده است که $a_{i\leq n}$ را در دامنه و $b_{i\leq n}$ را در بُرد دارد. قرار می‌دهیم $p(x,\bar{c}) = \mathrm{tp}(a_{n+1}/\operatorname{dom} f_n)$ و بنا به مقدماتی بودنِ نگاشتِ f_n عنصری چون $b' \in N$ را چنان می‌یابیم که $b' \models p(x,f(\bar{c}))$. به همین ترتیب قرار می‌دهیم $q(x,b'f(\bar{c})) = \mathrm{tp}(b_{n+1}/b'f(\bar{c}))$ و عنصری چون $a' \in N$ می‌یابیم که $a' \models q(x,a_{n+1},\bar{c})$. نگاشت مقدماتیِ f_{n+1} را توسیعی از f_n می‌گیریم که a_{n+1} را به b' می‌برد و a' را به b_{n+1}. نگاشتِ $f = \bigcup f_i$ نگاشتی یک و یک و پوشا و ضامنِ ایزومرف بودنِ $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ است. $\square$

نکته ۱۲۲: مدلهای اشباع را گاهی مدلهای **فشرده** نیز می‌خوانند، از آن جهت که هرگاه $\pi(x)$ مجموعه‌ای از فرمولها باشد که به طور متناهی در یک مدلِ اشباعِ $\mathfrak{M}$ برآورده می‌شود، آنگاه M عنصری دارد که این تایپ را برآورده کند.

گزاره ۱۲۳: فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مدلهای تئوریِ T باشد و F فرافیلتری روی I. آنگاه $\prod_F M_i$ مدلی است ωـ اشباع.

گزاره‌ی بالا را در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد. پیش از آن بدین نکته توجه می‌دهیم که مدلی که در گزاره‌ی بالا بدان اشاره شده است، در حقیقت، ω_1ـ اشباع است؛ بدین معنی که هر تایپ روی یک زیرمجموعه‌ی شمارا از آن در آن برآورده می‌شود.

۱۲.۱ جلسه‌ی دوازدهم

تعریف ۱۲۴: فرض کنید $\kappa \geq \aleph_0$ یک کاردینال نامتناهیِ دلخواه باشد. مدلِ $\mathfrak{M}$ را κ ـ **اشباع** می‌خوانیم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی $A \subseteq M$ با $|A| < \kappa$، هر n تایپِ متعلق به $S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ در خودِ M برآورده شود.

بنابراین مدلِ $\mathfrak{M}$ را $\aleph_1$ ـ اشباع می‌خوانیم هرگاه همه‌ی تایپهای روی زیرمجموعه‌های شمارای M در آن محقق شوند. نیز واضح است که هرگاه $\mathfrak{M}$ مدلی κ ـ اشباع باشد، آنگاه λ ـ اشباع نیز برای هر $\lambda < \kappa$ هست. منظور از مدلِ $\aleph_0$ اشباع نیز، دقیقاً همان است که پیشتر به نام ω ـ اشباع معرفی کرده بودیم.

تعریف ۱۲۵: مدلِ $\mathfrak{M}$ را اشباع می‌خوانیم هرگاه $|M|$ ـ اشباع باشد.

در تعریفِ آکندگی، این که مجموعه‌ی پارامتر اندازه‌ی اکیداً کمتر از κ داشته باشد ضروری است؛ برای مثال مجموعه‌ی زیر یک تایپ جزئی روی مجموعه‌ی پارامترِ M است که برآورده شدنش در M میسر نیست:

$$p(x) = \{x \neq m | m \in M\}.$$

گزاره‌ای مشابه گزاره‌ی زیر در بحثِ ω ـ آکندگی اثبات کرده بودیم و از این رو در زیر به بیان گزاره بسنده می‌کنیم.

گزاره ۱۲۶: برای $T \models \mathfrak{M}$ موارد زیر با هم معادلند.

۱. $\mathfrak{M}$ مدلی κ ـ اشباع است.

۲. برای هر مجموعه‌ی $A \subseteq M$ با اندازه‌ی اکیداً کمتر از κ هر n ـ تایپِ جزئیِ $\pi(\bar{x})$ در $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, a\rangle_{a\in A})$ در M برآورده می‌شود.

۳. برای هر مجموعه‌ی $A \subseteq M$ با اندازه‌ی اکیداً کمتر از κ هر تایپِ کاملِ $p(x) \in S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ در M برآورده می‌شود.

۴. حکم شماره‌ی ۳ برای تایپهای جزئی تک‌متغیره.

تمرین ۱۲۷ (وجود مدل اشباع): برای هر $T \models \mathfrak{M}$ مدلی κ ـ اشباع چون $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ چنان موجود است که $|N| \leq |M|^\kappa$.

تمرین ـ قضیه‌ی بالا مشابه گزاره‌ی ۱۱۶ اثبات می‌شود با این تفاوت که در اینجا به اجتماع زنجیری از مدلها با طول κ^+ نیاز است. بررسی کنید که اگر κ کاردینالی منتظم [۶۰] باشد، می‌توان با زنجیری از طول κ نیز به مطلوب رسید.

تمرین ۱۲۸: اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل اشباع برای T باشند و $|M| = |N|$ آنگاه $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

مثال ۱۲۹: فرض کنید $T \models \mathfrak{M}$ و F یک فرافیلترِ غیراصلی روی $\mathbb{N}$ باشد. آنگاه $\prod_F \mathfrak{M}$ مدلی $\aleph_1$ ـ اشباع است.

مثال ۱۳۰ (حکمی کلّی‌تر): اگر F یک فرافیلترِ غیراصلی روی $\mathbb{N}$ باشد و $\{\mathfrak{M}^h\}_{h\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مدلها، آنگاه $\prod_F M^h$ مدلی $\aleph_1$ ـ اشباع است.

پیش از آنکه حکم مثال بالا را اثبات کنیم، یادآوری می‌کنیم که اگر $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای باشد از مدلهای یک تئوریِ T، آنگاه عناصرِ $\prod_F \mathfrak{M}_i$ دنباله‌های $(a_i)_{i\in I}$ هستند به هنگِ رابطه‌ی هم‌ارزی زیر:

$$(a_i) \sim (b_i) \Leftrightarrow \{i|\mathfrak{M} \models a_i = b_i\} \in F.$$

کلاسهای هم‌ارزی اینچنین را با نمادی چون $[(a_i)]$ نمایش می‌دهیم. بنا به قضیه‌ی واش [۶۱] (که آن را در کلاس آموختال ثابت خواهیم کرد) داریم

$$\prod_F \mathfrak{M}_i \models \phi([(a_i)_{i\in I}], \ldots, [(b_i)_{i\in I}]) \Leftrightarrow \{i \in I|\mathfrak{M} \models \phi(a_i, \ldots, b_i)\} \in F.$$

اثبات حکم مثال بالا. فرض کنید $\Sigma(x)$ تایپی جزئی باشد با مجموعه‌ی پارامترِ شمارای $A = (a_i)_{i\in\omega}$. فرض می‌کنیم $a_i = [(a_i^h)_{h\in\omega}]$. از آنجا که Σ با $\mathrm{Th}(\prod_F \mathfrak{M}^h)$ سازگار است، برای هر $i \in \omega$ داریم $\prod_F \mathfrak{M}^h \models \exists x \quad \phi_\cdot(x, a_\cdot) \wedge \ldots \wedge \phi_i(x, a_i)$؛ یعنی مجموعه‌های D_i، تعریف‌شده در زیر، همه اعضایی از F هستند.

$$D_i := \{h \in \omega|\mathfrak{M}^h \models \exists x \quad \phi_\cdot(x, a_\cdot^h) \wedge \ldots \wedge \phi_i(x, a_i^h)\}$$

برای این که نشان دهیم Σ در $\prod_F \mathfrak{M}^h$ برآورده می‌شود، کافی است عنصر $x = [(x^h)_{h\in\omega}]$ را چنان بیابیم که برای هر $i \in \omega$ داشته باشیم $\prod_F \mathfrak{M}^h \models \phi_i(x, a_i) \wedge \ldots \wedge \phi_\cdot(x, a_\cdot)$؛ به بیان بهتر

[۶۰] regular

[۶۱] Łoś's theorem

چنان، که:

$$\{h \in \omega | \mathfrak{M}^h \models \phi_i(x^h, a_i^h) \wedge \phi_{i-۱}(x^h, a_{i-۱}^h) \wedge \ldots \wedge \phi_۰(x_۰, a_۰^h)\} \in F.$$

طبق تعریف داریم

$$D_۰ = \{h \in \omega | \mathfrak{M}^h \models \exists x \quad \phi_۰(x, a_۰^h)\}$$

فرض کنیم $x_۰ = (x_۰^h)_{h\in\omega}$ به گونه‌ای باشد که

$$\forall h \in D_۰ \quad \mathfrak{M}^h \models \phi(x_۰^h, a_۰^h).$$

نیز طبق تعریف داریم:

$$D_۱ = \{h \in \omega | \mathfrak{M}^h \models \exists x \quad \phi_۰(x, a_۰^h) \wedge \phi_۱(x, a_۱^h)\}$$

فرض کنیم $x_۱ = (x_۱^h)_{h\in\omega}$ از رهگذر زیر حاصل شده باشد:

- $(x_۱^h)_{h \leq minD_۰} = (x_۰^h)_{h \leq minD_۰}$.
- برای $h > \min D_۰$ اگر $h \in D_۱$ آنگاه $x_۱^h$ را یکی از عناصری می‌گیریم که شاهد $\mathfrak{M}^h \models \exists x \quad \phi_۰(x, a_۰^h) \wedge \phi_۱(x, a_۱^h)$ هستند. اگر $h \in D_۰ - D_۱$ آنگاه قرار می‌دهیم $x_۱^h = x_۰^h$. به سایرِ $h > \min D_۰$ دست نمی‌زنیم.

تا اینجا داریم $\{h \in \omega | \mathfrak{M}^h \models \phi_۰(x_۱^h, a_۰^h)\} = D_۰ \in F$. نیز

$$\{h \in \omega | \mathfrak{M}^h \models \phi_۱(x_۱^h, a_۱^h) \wedge \phi_۰(x_۱^h, a_۰^h)\} \quad (*)$$

از دو حال خارج نیست. یا برابر با $D_۱$ است که در این صورت عضوی است از F؛ و یا برابر است با $D_۱ - \min D_۰$. به دو نکته توجه کنیم. از آنجا که فیلتر مورد نظر غیر اصلی است، برداشتن یک عضو از یکی از عناصر آن موجب خارج شدن از فیلتر نمی‌شود. زیرا اولاً هر فیلتر غیراصلی شامل فیلتر فرشه است؛ پس $\{i | i \geq \min D_۰ + ۱\} \in F$. ثانیاً $D_۰ \cap \{i | i \geq \min D_۰ + ۱\} \in F$ همان $(*)$ است.

بدین ترتیب برای تعریفِ $(x_۲^h)$ قرار می‌دهیم:

- $(x_۲^h)_{h \leq \min(D_۱ - \{\min D_۰\})} = (x_۱^h)_{h \leq \min(D_۱ - \{\min D_۰\})}$.

- برای $h > \min(D_1 - \{\min D_0\})$ اگر $h \in D_1$ آنگاه x^h_2 را یکی از عناصری می‌گیریم که ضامنِ $\mathfrak{M}^h \models \exists x \quad \phi_0(x, a^h_0) \wedge \phi_1(x, a^h_1) \wedge \phi_2(x, a^h_2)$ هستند.

بدینسان اگر $(x^h_\omega)_{h\in\omega}$ از ادامه‌ی همین روند به صورت استقرائی حاصل شود، در شرط مطلوب ما صدق می‌کند. $\square$

پیشتر درباره‌ی سامانه‌های رفت‌وبرگشتی و رابطه‌ی آنها با حذف سور و هم‌ارز بودنِ مقدماتی صحبت کرده بودیم (بخش بحثهای جانبی در تارنمای درس). گفته بودیم که سامانه‌های رفت و برگشتی، گاه از نگاشتهای مقدماتی جزئی تشکیل می‌شوند و گاه از ایزومرفیسمهای جزئی. گاه میان زیرمجموعه‌های یک مدل در نظر گرفته می‌شوند، گاه میان زیرمجموعه‌های دو مدل مختلف. گاه تحت اجتماعگیری بسته‌اند و گاه خیر، و آنجا که تحت اجتماعگیری بسته باشند، ایزومرفیسم یا اتومرفیسم به دست می‌دهند. در زیر با مدلهای همگن آشنا می‌شویم که در آنها، بنا به تعریف، هم‌ارزیهای کوچک در سامانه‌های رفت‌وبرگشتی واقعند.

تعریف ۱۳۱ (همگن): مدل $\mathfrak{M}$ را ω ـ **همگن** [62] می‌خوانیم یا $\aleph_0$ ـ همگن می‌خوانیم هرگاه برای هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ و $b_1, \ldots, b_n \in M$ اگر

$$\langle \mathfrak{M}, a_1, \ldots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, b_1, \ldots, b_n \rangle$$

آنگاه برای هر $c \in M$ عنصر $d \in M$ چنان یافت شود که

$$\langle \mathfrak{M}, a_1, \ldots, a_n, c \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, b_1, \ldots, b_n, d \rangle.$$

به بیان دیگر مدل $\mathfrak{M}$ وقتی ω ـ همگن است که مجموعه‌ی I در زیر یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی از نگاشتهای مقدماتیِ جزئی باشد:

$$\{(\bar{a}, \bar{b}) : |\bar{a}| = |\bar{b}|, \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})\}.$$

یا به بیان دیگر، در یک مدلِ ω ـ همگن، هر نگاشت مقدماتیِ جزئیِ $f : \bar{a} \to \bar{b}$ در یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی از نگاشتهای جزئیِ مقدماتی واقع است.

[62] homogeneous

تعریف ۱۳۲: مدل $\mathfrak{M}$ را κ ـ همگن می‌خوانیم هرگاه برای هر $\lambda < \kappa$ و هر دو دنباله‌ی $(a_i)_{i<\lambda}$ و $(b_i)_{i<\lambda}$ از عناصرِ M، اگر

$$\langle \mathfrak{M}, (a_i)_{i<\lambda} \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, (b_i)_{i<\lambda} \rangle$$

آن گاه برای هر $c \in M$ عنصر $d \in M$ چنان موجود باشد که

$$\langle \mathfrak{M}, (a_i)_{i<\lambda}, c \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, (b_i)_{i<\lambda}, d \rangle.$$

به بیان دیگر هر نگاشت مقدماتیِ جزئیِ $f : (a_i)_{i<\lambda} \to (b_i)_{i<\lambda}$ در سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی از نگاشتهای مقدماتی جزئی میان زیرمجموعه‌های M واقع شود.

تعریف ۱۳۳: مدلِ $\mathfrak{M}$ را همگن می‌خوانیم هرگاه $|M|$ ـ همگن باشد.

تعریف ۱۳۴: مدلِ $\mathfrak{M}$ را **قویّاً** κ **ـ همگن** می‌خوانیم هرگاه برای هر $\lambda < \kappa$ چنانچه برای دو دنباله‌ی $(a_i)_{i<\lambda}$ و $(b_i)_{i<\lambda}$ از عناصرِ M داشته باشیم

$$\langle \mathfrak{M}, (a_i)_{i<\lambda} \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, (b_i)_{i<\lambda} \rangle$$

آنگاه اتومرفیسمِ $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ چنان موجود باشد که

$$\forall i < \lambda \quad f(a_i) = b_i.$$

به بیان دیگر هرگاه هر نگاشتِ مقدماتی جزئی میان زیرمجموعه‌های کوچکتر از κ قابل گسترش به یک اتومرفیسم باشد. مدل $\mathfrak{M}$ را قویّاً همگن می‌خوانیم هرگاه $|M|$ ـ قویاًهمگن باشد.

گزاره ۱۳۵: اگر $\mathfrak{M}$ همگن باشد، قویاًهمگن است.

قضیه‌ی بالا را در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد. توجه کنید که در بالا ادعا **نکرده‌ایم** که اگر مدلی، κ ـ همگن باشد، آنگاه κ ـ قویاً همگن است.

۱۳.۱ جلسه‌ی سیزدهم

یادآوری ۱۳۶: مدلِ $\mathfrak{M}$ را κ ـ همگن خواندیم هرگاه برای هر $\bar{a}$ و $\bar{b}$ با $|\bar{a}|,|\bar{b}| < \kappa$ اگر $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})$ آنگاه برای هر $c \in M$ عنصر $d \in M$ موجود باشد، به طوری که

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}, c) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b}, d).$$

به بیان دیگر، در یک مدلِ κ ـ همگن هر نگاشت مقدماتی میان دو زیرمجموعه‌ای از اندازه‌ی کمتر از κ در سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی از نگاشتهای مقدماتی جزئی واقع می‌شود.

در پایان جلسه‌ی قبل گفتیم (و در زیر ثابت خواهیم کرد) که اگرچنانچه هر نگاشت مقدماتی در سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی از نگاشتهای مقدماتی واقع شود، آنگاه هر نگاشت مقدماتی را می‌توان به یک اتومرفیسم گستراند:

گزاره ۱۳۷: اگر $\mathfrak{M}$ همگن باشد، قویاً همگن است.

اثبات. شمارشِ $M = (m_i)_{i<|M|}$ را برای M در نظر گرفته فرض کنید $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})$ و $|\bar{a}| = |\bar{b}| < |M|$. دنباله‌ی $\langle f_i | i < |M| \rangle$ را از نگاشتهای مقدماتی جزئی به طریق زیر می‌سازیم.

قرار می‌دهیم $f_\circ = \{(a_t, b_t) : t < |\bar{a}|\}$. اگر برای یک $i < |M|$ دنباله‌ی $(f_\lambda)_{\lambda<i}$ ساخته شده باشد، آنگاه

- اگر i حدی باشد،قرار می‌دهیم $f_i = \bigcup_{\lambda<i} f_\lambda$.
- اگر $i = \lambda + ۱$ آنگاه به طریق زیر، از قرارگرفتنِ m_λ را در دامنه و بردِ f_i اطمینان حاصل می‌کنیم:

اگر m_λ هم در دامنه و هم در بُردِ f_λ باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $f_i = f_\lambda$. اگر m_λ در دامنه‌ی f_λ نباشد، آنگاه هم‌ارزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathrm{dom}(f_\lambda) \equiv \mathrm{range}(f_\lambda).$$

از آنجا که $\mathfrak{M}$ همگن است، می‌توان عنصرِ d را چنان یافت که

$$\mathrm{dom}(f_\lambda) m_\lambda \equiv \mathrm{range}(f_\lambda) d.$$

قرار می‌دهیم $f'_\lambda = f_\lambda \cup \{(m_\lambda, d)\}$. اگر $m_\lambda \in \mathrm{range}(f'_\lambda)$ آنگاه قرار می‌دهیم $f_i = f'_\lambda$ و در غیر این صورت، از هم‌ارزیِ

$$\mathrm{dom}(f_\lambda) m_\lambda \equiv \mathrm{range}(f_\lambda) d$$

و همگنیِ $\mathfrak{M}$ استفاده کرده عنصرِ d' را چنان می‌یابیم که

$$\mathrm{dom}(f_\lambda) m_\lambda d' \equiv \mathrm{range}(f_\lambda) d m_\lambda$$

و قرار می‌دهیم $f_i = f'_\lambda \cup \{(d', m_\lambda)\}$.

تمرین ۱۳۸: نشان دهید که $f = \bigcup_{\lambda < |M|} f_\lambda$ اتومرفیسمی از $\mathfrak{M}$ است.

$\square$

پیشتر ثابت کرده بودیم که هر مدلِ $\mathfrak{M}$ را می‌توان در یک مدل ω ـ اشباع نشاند که اندازه‌ی آن بزرگتر از $|M|^{\aleph_0}$ نباشد. در زیر خواهیم دید که همگنی در همان اندازه‌ی M دست‌یافتنی است.

گزاره ۱۳۹: هر مدلِ $\mathfrak{M}$ در مدلی ω ـ همگن چون $\mathfrak{N} \succeq \mathfrak{M}$ می‌نشیند که $|N| = |M|$.

اثبات. نخست ادعا می‌کنیم که مدل $\mathfrak{N}$ چنان موجود است که $|N| = |M|$ و برای هر دو دنباله‌ی متناهیِ $\bar{a}, \bar{b}$ از اعضای M اگرچنانچه $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})$ آنگاه برای هر $c \in M$ عنصرِ $d \in N$ چنان موجودند که

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}c) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b}d).$$

برای اثبات ادعا، مجموعه‌ی I را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$I = \{\langle \bar{a}, \bar{b}, c\rangle : |\bar{a}| = |\bar{b}|, \bar{a}, \bar{b}, c \in M, \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})\}.$$

دقت کنید که $|M| = |I|$ و شمارش $\{\langle \bar{a}_i, \bar{b}_i, c_i\rangle\}$ را برای I در نظر بگیرید. قرار دهید $\Sigma_i(\bar{x}, y_i) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}_i, c_i)$ و توجه کنید که $\bigcup \Sigma_i(\bar{b}_i, y_i) \cup \mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$ سازگار است (چرا؟ ــ توجه کنید که هر بخش متناهی آن، بنا به همتاییِ $\bar{a}_i$ ها با $\bar{b}_i$ ها در خودِ M برآورده می‌شود). بنابراین گسترشی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ چون $\mathfrak{N}$ و عناصرِ d_i در آن چنان موجودند که

$$\langle a_i, c_i\rangle \equiv \langle b_i, d_i\rangle \quad \forall i < |M|.$$

برای راحت شدن ادامه‌ی بحث، مدلی را که با شروع از مدلِ $\mathfrak{M}$ و اعمال روند بالا حاصل می‌شود، با $H(\mathfrak{M})$ نشان می‌دهیم.

یادآوری ۱۴۰: می‌شد برای اثبات ادعای بالا، مدلِ $\mathfrak{N}$ را از اجتماع زنجیری از مدلهای $\mathfrak{N}'_i$ به دست آورد که در هر N'_i عنصری چون d_i همتایپ با c_i موجود است.

تمرین ۱۴۱: ادعای بالا را با استفاده‌ی مستقیم از تعریفِ گالواتایپها ثابت کنید.

ادامه‌ی اثبات. زنجیرِ $\langle \mathfrak{N}_i \rangle_{i \in \omega}$ را از مدلها، با استقرا و با قرار دادنِ $\mathfrak{N}_۰ = \mathfrak{N}$ و $\mathfrak{N}_{i+۱} = H(\mathfrak{N}_i)$ می‌سازیم. (بررسی کنید که) $\mathfrak{N}_\omega = \bigcup \mathfrak{N}_i$ مدل مطلوب است. □

تمرین ۱۴۲: هر مدلِ اتمیک، ω ـ همگن است؛ پس بویژه هر مدلِ اول، همگن است.

تمرین ۱۴۳: هر مدلِ κ ـ اشباع، κ ـ همگن است؛ به ویژه هر مدل اشباع، همگن است.

تعریف ۱۴۴ (مدل جهانی): مدل $\mathfrak{M}$ را κ ـ **جهانی** می‌خوانیم هرگاه برای هر $T \models \mathfrak{N}$ اگر $|N| < \kappa$ آنگاه بتوان نگاشتی مقدماتی مانند $f : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ یافت.

تمرین ۱۴۵: اگر $\mathfrak{M}$ مدلی κ ـ اشباع باشد، آنگاه κ^+ ـ جهانی است.

قضیه‌ی زیر در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد.

قضیه ۱۴۶: مدلِ $\mathfrak{M}$ مدلی κ ـ اشباع است اگروتنهااگر κ ـ همگن و κ^+ جهانی باشد.

در حالت کلی اگر یک خانواده‌ی $(\mathcal{K}, \leq)$ از مدلها داشته باشیم که در آن $\leq$ نوعی نشانش اعضای این خانواده باشد دارای ویژگیهای مطلوبی چون ادغام و همنشانی، آنگاه با درنظرگرفتن گالواتایپها، مشابه بالا اشباع بودن با همگن و جهانی بودن معادل است. در این باره در یکی از پروژه‌های درس صحبت خواهد شد.

فصل ۲

قضیه‌ی مُرلی

۱.۲ جلسه‌ی چهاردهم، لم رمزی

در فصل قبل و در جلسات آموختال، با یادگیریِ پیشنیازهای نظریه‌ی مدلی، ورزیدگی لازم را برای ورود به بحث اصلی کسب کرده‌ایم. از این نقطه‌ی درس به بعد با یادگیریِ مقدمات پیشرفته‌تری به سمت بیان و اثبات قضیه‌ی مُرلی پیش خواهیم رفت. نخست، به طور خلاصه به تبیین ابزار ترکیباتی مورد نظر خود، یعنی قضیه‌ی رمزی می‌پردازیم.

عموماً در نظریه‌ی مدل، از قضیه‌ی رمزی [۱] و یا از تعمیمی از آن، به نام قضیه‌ی اردوش ـ رادو [۲] برای یافتن دنباله‌های بازنشناختنی استفاده می‌شود. دنباله‌های بازنشناختنی، که در جلسات بعد مفصلاً بدانها خواهیم پرداخت، دنباله‌هایی هستند که هر تعداد از اعضایشان، بسته به ترتیب قرارگیریشان در دنباله، از منظرِ تئوری مورد نظر، هم‌ارزش هستند. برای یافتن این چنین دنباله‌ای، عناصر یک دنباله‌ی دلخواه را، بسته به هم‌ارزش بودنشان نسبت به فرمولها، «رنگ‌آمیزی» می‌کنیم و با استفاده از لم رمزی، زیرمجموعه‌ای «تک‌رنگ» از این دنباله استخراج می‌کنیم.

[۱] Ramsey
[۲] Erdös - Rado

۱.۱.۲ لم رمزی

برای مجموعه‌ی دلخواهِ X و عدد طبیعیِ k تعریف می‌کنیم:

$$[X]^k = \{Y \subseteq X : |Y| = k\}.$$

برای هر عددِ طبیعیِ $n \geq ۱$، هر تابعِ

$$f : [X]^k \to n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$$

را یک **رنگ‌آمیزی** از زیرمجموعه‌های k عضویِ مجموعه‌ی X توسط n رنگ می‌خوانیم. مجموعه‌ی $Y \subseteq X$ را برای رنگ‌آمیزیِ f همگن (یا تکرنگ) می‌خوانیم هرگاه همه‌ی زیرمجموعه‌های k عضوی آن، تحتِ f رنگ یکسان داشته باشند؛ به بیان دیگر، هرگاه $f|_{[Y]^n}$ ثابت باشد. پس اگر Y مجموعه‌ای تکرنگ برایِ رنگ‌آمیزیِ f باشد، عددِ $i < n$ چنان موجود است که برای هر $Z \subseteq Y$ با $|Z| = n$ داریم $f(Z) = i$.

قضیه ۱۴۷ (رمزی): فرض کنید مجموعه‌ی نامتناهیِ X و اعدادِ $k, n \geq ۱$ داده شده باشند. برای هر رنگ‌آمیزیِ $f : [X]^k \to n$ یک مجموعه‌ی تکرنگِ نامتناهیِ $Y \subseteq X$ موجود است.

قضیه‌ی بالا، صورت نامتناهی لمِ رمزی است. عموماً در ترکیبیات، نخست صورت متناهی این لم را ثابت می‌کنند و از آن صورت نامتناهیش را نتیجه می‌گیرند، اما طرزفکرِ نظریه‌ی مدلی، ما را بر آن می‌دارد که همواره برای یافتن رابطه میان متناهی و نامتناهی از قضیه‌ی فشردگی استفاده کنیم.

یادآوری ۱۴۸: حکم قضیه‌ی بالا در نمادگذاری زیر خلاصه می‌شود:

$$\aleph_۰ \to (\aleph_۰)^n_k$$

پیش از اثبات قضیه به بیان چند مصداق آشنا از آن می‌پردازیم.

مثال ۱۴۹: در حالتِ $k = ۱$ قضیه‌ی رمزی همان اصل خانه‌ی کبوتری است: اگر نامتناهی عنصر در متناهی جایگاه قرار گرفته باشند،حداقل در یک جایگاه، نامتناهی عنصر جای گرفته است.

مثال ۱۵۰: فرض کنید (V, R) گرافی نامتناهی باشد. روی $[V]^۲$ یک رنگ‌آمیزی به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(\{x, y\}) = \begin{cases} ۱ & V \models R(x, y) \\ ۰ & V \models \neg R(x, y). \end{cases}$$

بنا به قضیه‌ی رمزی، یا زیرگرافی نامتناهی از گرافِ V موجود است که همه‌ی رأسهای آن دوبه‌دو به هم متصلند (زیرگراف کامل)، و یا زیرگرافی نامتناهی موجود است که هیچ یالی میان رأسهای آن وجود ندارد.

مثال ۱۵۱: با استفاده از قضیه‌ی رمزی ثابت کنید که هرگاه $(X, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتبِ خطی نامتناهی باشد، آنگاه X یا شامل یک دنباله‌ی صعودی نامتناهی و یا شامل یک دنباله‌ی نزولی نامتناهی است.

در ادامه، قضیه‌ی رمزی را با استقراء روی k ثابت کرده‌ایم.

اثبات قضیه‌ی رمزی. اگر $k = ۱$ آنگاه قضیه‌ی رمزی همان اصل لانه‌ی کبوتری است. فرض کنیم حکم قضیه‌ی برای k برقرار باشد؛ یعنی برای هر n داشته باشیم:

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k.$$

می‌خواهیم درستی آن را برای $k + ۱$ تحقیق کنیم. فرض کنیم که X مجموعه‌ای نامتناهی باشد و f یک رنگ‌آمیزی از زیرمجموعه‌های $k + ۱$ عضوی آن با n رنگ. بدون کاسته شدن از کلیت، مجموعه‌ی X را شمارا و دارای ترتیبِ $x_۱ < x_۲ < \dots$ فرض می‌کنیم. در ادامه دو دنباله‌ی $(y_i)_{i\in\omega}$ از عناصرِ X و $(n_i)_{i\in\omega}$ از اعضای $\{۰, ۱, \dots, n\}$ خواهیم ساخت و مجموعه‌ی مورد نظر را از میان عناصر دنباله‌ی اول استخراج می‌کنیم. قرار می‌دهیم $y_۱ = x_۱$.

رنگ‌آمیزی $f_۱ : [X - \{x_۱\}]^k \to n$ را با ضابطه‌ی $f_۱(Z) = f(Z \cup \{x_۱\})$ در نظر می‌گیریم. بنا به فرض استقراء، این رنگ‌آمیزی دارای یک مجموعه‌ی همگن به نامِ $Y_۱$ است. قرار می‌دهیم $y_۲ = \min Y_۱$ و $n_۲$ را رنگ مشترکِ همه‌ی زیرمجموعه‌های k عضویِ $Y_۱$ فرض می‌کنیم. به همین ترتیب روی زیرمجموعه‌های k عضویِ $Y_۱ - \{y_۲\}$ رنگ آمیزیِ $f_۲(Z) = f(Z \cup \{y_۲\})$ را در نظر گرفته فرض می‌کنیم که $Y_۲$ مجموعه‌ی همگنِ آن و $n_۳$ رنگ مشترک زیرمجموعه‌های k عضویِ $Y_۲$ باشند. نیز قرار می‌دهیم $y_۳ = \min Y_۲$. فراروند بالا را ادامه داده به عناصرِ

$$y_۱ < y_۲ < \dots$$

می‌رسیم. نیز داریم

$$Y_۱ \subseteq Y_۲ \subseteq \dots.$$

قرار دهید $Y' = \{y_۱, \ldots\}$. هر زیرمجموعه‌ی $k+۱$ عضوی از Y' اگر شاملِ $y_۱$ باشد، به رنگِ $n_۲$ است و اگر شاملِ y_i باشد به رنگ $n_{i+۱}$. از آنجا که تعداد رنگها متناهی است، یکی از رنگها بی‌نهایت بار تکرار می‌شود و مجموعه‌ی y_i های متناظر این رنگ، همان مجموعه‌ی مطلوب ماست. $\square$

قضیه ۱۵۲ (رمزی متناهی): برای اعداد طبیعیِ دلخواهِ n, m, k عددی طبیعی چون $r(n,m,k)$ موجود است، به طوری که

$$r(n,m,k) \to (m)^k_n;$$

یعنی بدان گونه که اگر X مجموعه‌ای با اندازه‌ی حداقل $r(n,m,k)$ باشد و f یک رنگ‌آمیزی از زیرمجموعه‌های k عضوی آن با استفاده از n رنگ، آنگاه زیرمجموعه‌ای از X با اندازه‌ی حداقل m یافت می‌شود که همه‌ی زیرمجموعه‌های k عضوی آن همرنگ هستند.

اثبات. به برهان خلف، گیریم اعدادِ m, n, k چنان موجود باشند که مجموعه‌ای با هیچ‌اندازه‌ی متناهی یافت نشود که اگر زیرمجوعه‌های k عضوی آن را n رنگ کنیم زیرمجموعه‌ای همگن و m عضوی پیدا شود. زبانِ $L = \{R_۱(v_۱, \ldots, v_k), \ldots, R_n(v_, \ldots, v_k)\}$ و تئوری T را در آن با اصول زیر در نظر بگیرید:

$$\forall x_۱, \ldots, x_k \quad R_i(x_۱, \ldots, x_k) \to \bigwedge_{l \neq k \in \{۱, \ldots, k\}} x_l \neq x_t \quad i \in \{۱, \ldots, n\}$$

$$\forall x_۱, \ldots, x_k \quad R_i(x_۱, \ldots, x_k) \to R_i(x_{\sigma(۱)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) \quad \sigma \in \textbf{جایگشت}(k), i \in \{۱, \ldots, n\}$$

$$\forall x_۱, \ldots, x_k \quad \left(\bigwedge x_l \neq x_t \to \bigvee_{i=۱}^{n} R_i(x_۱, \ldots, x_k)\right)$$

$$\forall x_۱, \ldots, x_k \quad \neg\left(R_i(x_۱, \ldots, x_k) \wedge R_j(x_۱, \ldots, x_k)\right) \quad i \neq j.$$

بنابراین اگر $T \models M$ آنگاه هر k عنصر از آن توسط رابطه‌های $R_۱, \ldots, R_n$ در کلاسِ یک رنگ قرار می‌گیرند (عناصر هم رنگ را در یک کلاس قرار داده‌ایم). جمله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\psi_m := \neg\left[\exists Y \quad |Y| \geq m \quad \wedge \quad \bigvee_i (\forall y_۱, \ldots, y_k \in Y \quad R_i(y_۱, \ldots, y_k))\right].$$

جمله‌ی ψ_m می‌گوید که هیچ مجموعه‌ی همگنی از اندازه‌ی حداقل m وجود ندارد. تئوریِ $T \cup \{\psi_m\}$ بنا به فرض، دارای مدلهای متناهیِ به‌اندازه‌ی‌دلخواه‌بزرگ، و بنا به فشردگی، دارای مدلی نامتناهی

است. وجود مدل نامتناهی برای این تئوری، معادل وجود یک رنگ‌آمیزی از زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی نامتناهی است که هیچ زیرمجموعه‌ی همگن نامتناهی‌ای برایش یافت نشود، و این لمِ رمزی نامتناهی را نقض می‌کند. $\square$

قضیه‌ی رمزیِ متناهی از حساب پئانو اثبات شدنی است؛ لیکن صورتی پیشرفته‌تر از آن [۳] هست که بنا به قضیه‌ای از پاریس و هرینگتون [۴] با آنکه در اعداد طبیعی درست است، از حساب پئانو قابل اثبات نیست. این صورتْ در واقع اولین مثال عینی برای ناتمامیت بوده است.

[۳] در این صورت روی مجموعه‌ی همگنِ Y قیدِ $|Y| > \min Y$ گذاشته می‌شود.

[۴] Paris, Harrington

۲.۲ جلسه‌ی پانزدهم، دنباله‌های بازنشناختنی

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که:

یادآوری ۱۵۳ (رمزی): فرض کنیم X یک مجموعه‌ی متناهی باشد و $[X]^n$ گردایه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضویِ آن. نیز فرض کنیم که یک رابطه‌ای هم‌ارزی روی $[X]^n$ داریم که تعداد کلاسهای آن متناهی است. آنگاه زیرمجموعه‌ای نامتناهی چون $Y \subseteq X$ چنان موجود است که همه‌ی اعضای $[Y]^n$ در یک کلاس واقع باشند.

تئوریِ T را کامل و زبانْ را شمارا انگاشته‌ایم.

تعریف ۱۵۴: گیریم $\mathfrak{M} \models T$ و $A \subseteq M$ و فرض می‌کنیم که $(I, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب خطی باشد. دنباله‌ی $(a_i)_{i \in I}$ از اعضای M را نسبت به مجموعه‌ی $\Delta \subseteq L_A$ بازنشناختنی می‌خوانیم (یا آن را Δ بازنشناختنی می‌خوانیم) هرگاه برای هر دو دنباله‌ی $i_1 < i_2 < \ldots < i_n \in I$ و $j_1 < j_2 < \ldots < j_n \in I$ و هر فرمولِ $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \leftrightarrow \phi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}).$$

اگر $\Delta = L_A$ آنگاه دنباله‌ی یادشده را بازنشناختنی (روی A) می‌خوانیم. [۵]

به بیان دیگر، دنباله‌ی $(a_i)_{i \in I}$ وقتی روی A بازنشناختنی است که در آن برای هر $i_1 < \ldots < i_n$ و $j_1 < \ldots < j_n$ داشته باشیم

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{i_1} \ldots a_{i_n}/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{j_1} \ldots a_{j_n}/A).$$

باز به بیان دیگر، دنباله‌ی یادشده وقتی روی A بازنشناختنی است که هر تایپِ $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{i_1} \ldots a_{i_n}/A)$ تنها به تایپِ بدون سورِ $\mathrm{qftp}_{DLO}(i_1, \ldots, i_n)$ بستگی داشته باشد. پس مثلاً اگر $(a_i)_{i \in \omega}$ روی A بازنشناختنی باشد، داریم

$$a_0 \equiv_A a_1 \equiv_A a_2 \ldots$$

$$a_0 a_1 \equiv_A a_0 a_2 \equiv_A a_0 a_3 \ldots \equiv_A a_1 a_2 \equiv_A a_1 a_3 \ldots a_{240} a_{897} \ldots$$

$$a_0 a_1 a_2 \equiv_A a_0 a_1 a_3 \equiv_A a_1 a_2 a_3 \ldots \equiv a_{10} a_{50} a_{62} \equiv_A \ldots$$

[۵] چنین دنباله‌ای را می‌توان «تمییزناپذیر» یا «تشخیص‌ناپذیر» هم خواند. ترجیح من همان واژه‌ی بازنشناختنی است. درواقع یک دنباله‌ی این چنینْ از اعضایی تشکیل شده است که توسط تئوری از هم بازشناخته نمی‌شوند.

مثال ۱۵۵ (میدانهای بسته‌ی جبری): فرض کنیم $F \models ACF$ و $k \subseteq F$ زیرمیدانی از آن باشد. هر دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ از عناصرِ F که روی k متعالیند، روی k بازنشناختنی است.

برای اثبات گفته‌ی فوق، توجه کنید که برای هر $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ بنا به متعالی بودنِ عناصر دنباله داریم $k(a_1,\ldots,a_n) \cong k(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}) \cong k(X_1,\ldots,X_n)$. بنا به حذف سور، این ایزومرفیسم در سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی واقع است که همتاییِ $a_1\ldots a_n$ و $a_{i_1}\ldots a_{in}$ را روی k ضامن می‌شود.

به زبان ساده‌تر، توجه کنید که بنا به حذف سور، دو دنباله‌ی $a_0\ldots a_n$ و $a_{i_0}\ldots a_{in}$ وقتی و تنها وقتی روی A همتایند که برای هر چندجمله‌ایِ $p(x_0,\ldots,x_n) \in k[X_0,\ldots,X_n]$ داشته باشیم

$$p(a_0,\ldots,a_n) = 0 \Leftrightarrow p(a_{i_0},\ldots,a_{in}) = 0;$$

یعنی وقتی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها درباره‌ی آنها هم‌نظر باشند. برقراری عبارت بالا برای دنباله‌ی ما واضح است؛ زیرا بنا به متعالی بودن عناصرِ دنباله، برای هر $i_0,\ldots,i_n$ و هر چندجمله‌ایِ چنان، داریم

$$p(a_{i_0},\ldots,a_{in}) \neq 0.$$

مثال ۱۵۶ (میدانهای بسته‌ی حقیقی): گیریم $\mathbb{R}^*$ توسیع (نااستانداردِ) مقدماتی‌ای از $\langle \mathbb{R},+,\cdot,0,1,\leq\rangle$ باشد. بنا به حذف سور داریم $\mathrm{tp}(a/\mathbb{Q}) = \mathrm{tp}(b/\mathbb{Q})$ اگروتنهااگر a,b در نامساوی‌های یکسانی به شکلِ $f(x) > 0$ صدق کنند که $f(x) \in \mathbb{Q}[X]$. از طرفی، با دستکاریهای جبری می‌توان نشان داد که $f(x) > 0$ معادل است با عبارتی چون $x \in (a_1,b_1)\cup\ldots\cup(a_n,b_n)\cup\{c_1,\ldots,c_m\}$ که در آن نقاط پایانی بازه‌ها را می‌توان به صورت تعریف‌پذیر (حتی تنها به صورت چند جمله‌ای) بر حسب ضرایبِ f محاسبه کرد. این ویژگی، **ترتیب‌کمینگی** [۶] نام دارد. بنا به ترتیب‌کمینگی، هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیرِ یک‌بعدی از $\mathbb{R}^*$ اجتماعی است متناهی از بازها و نقطه‌ها. پس یک دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ از عناصرِ $\mathbb{R}^*$ روی $\mathbb{Q}$ بازنشناختنی است هرگاه عناصرِ آن همه در یک شکاف از $\mathbb{Q}$ واقع باشند و دنباله‌ی یادشده اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد.

[۶] o-minimality

توجه کنید که در خودِ $\mathbb{R}$ نمی‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی حتی روی مجموعه‌ی تهی یافت. اگر قرار باشد که (a_n) بازنشناختنی باشد، برای هر $\alpha \in \mathbb{Q}$ از آنجا که α را می‌توان به صورت $\frac{a}{b}$ در تئوری نوشت، باید داشته باشیم $a_i < \alpha \Leftrightarrow a_j < \alpha$. این در حالی است که برای هر دو جمله‌ی $a_i < a_j$ در دنباله‌ی مورد نظر، عنصری چون $\alpha \in \mathbb{Q}$ یافت می‌شود که $a_i < \alpha < a_j$.

مثال ۱۵۷ (ترتیبهای خطی چگال): از آنجا که DLO سورها را حذف می‌کند، هر دنباله‌ی صعودی در هر مدل آن، روی تهی بازنشناختنی است. روی یک مجموعه‌ی داده‌شده‌ی A یک دنباله تنها در صورتی بازنشناختی است که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد و اعضایش همه در شکاف یکسانی واقع شده باشند.

مثال ۱۵۸: اعضای یک دنباله‌ی بازنشناختنی نمی‌توانند جبری باشند. در واقع اگر جمله‌ی اول جبری باشد، تایپِ آن تنها توسط تعداد متناهی عنصر برآورده می‌شود. از طرفی همه‌ی بقیه‌ی دنباله نیز تایپ آن را برمی‌آورند. پس دنباله‌ی یادشده باید متناهی باشد (دنباله‌های بازنشناختنی را نامتناهی فرض کرده‌ایم).

مثال ۱۵۹: اگر دنباله‌ی (a_i) روی A بازنشناختنی باشد هر تصویر آن تحت اتومرفیسمی چون $f \in \mathrm{Aut}(M/A)$ نیز روی A بازنشناختنی است.

مثال ۱۶۰: اگر K یک فضای برداری باشد و $\mathrm{a} = (a_i)_{i\in\omega}$ پایه‌ای نامتناهی از آن، آنگاه a دنباله‌ای بازنشناختنی است.

در ادامه، به مسئله‌ی وجود دنباله‌های بازنشناختنی می‌پردازیم. در زیر نشان داده‌ایم که Δ ـ بازنشناختنی بودن، برای یک مجموعه‌ی متناهیِ Δ از فرمولها، به آسانی حاصل‌شدنی است.

گزاره ۱۶۱: گیریم Δ مجموعه‌ای متناهی باشد از فرمولها و $(I, \leq)$ مجموعه‌ای مرتبِ خطی و $X = (a_i)_{i\in I}$ دنباله‌ای دلخواه در یک مدلِ M. آنگاه X دارای زیردنباله‌ای Δ ـ بازنشناختنی (مانند $(b_j)_{j\in\omega}$) است.

اثبات. گیریم $\Delta = \{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ که در آن متغیرهای آزادْ $x_1, \ldots, x_n$ هستند، و قرار می‌دهیم

$$A = \{\psi(\bar{x}) | \psi = \bigwedge_{i=1}^{k} \theta_i, \theta_i \in \{\phi_i, \neg\phi_i\}\}.$$

مجموعه‌ی A متناهی است و برای هر $\bar{\alpha} \in M$ فرمول یکتایی چون $\psi \in A$ موجود است به طوری که $\models \psi(\bar{\alpha})$. روی $[X]^n = \{\{a_{j_1} < \ldots < a_{j_n}\} | j_1 < \ldots < j_n \in I\}$ رنگ‌آمیزیِ

$f(\{a_{j1} < \ldots, a_{jn}\}) = \{\psi(\bar{x}) | \models \psi(\{a_{j1} < \ldots < a_{jn}\})\}$ را در نظر می‌گیریم. بنا به قضیه‌ی رمزی، X زیرمجموعه‌ای متناهی چون Y دارد که همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضوی آن همرنگند. دنباله‌ی Y همان دنباله‌ی مورد نظر است. □

بیان دیگری برای اثبات. روی $[X]^n$ رابطه‌ی هم‌ارزی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\{a_1 < \ldots < a_n\} \cong \{b_1 < \ldots < b_n\} \Leftrightarrow \mathrm{tp}_\Delta(\bar{a}) = \mathrm{tp}_\Delta(\bar{b}).$$

تعدادِ کلاسهای رابطه‌ی بالا (تعداد رنگها) متناهی است. زیرمجموعه‌ای از X که از اعمال لم رمزی حاصل می‌شود، دنباله‌ی مورد نظر است. □

بنا به گزاره‌ی بالا، می‌توان از اندرون یک دنباله‌ی شمارا، یک دنباله‌ی بازنشناختنی نسبت به تعداد متناهی فرمول بیرون کشید. بنا به قضیه‌ی اردوش ـ رادو (که صورتی کلی‌تر است از رمزی و در این درس بدان نخواهیم پرداخت) برای هر مجموعه‌ی (نه لزوماً متناهی) Δ از فرمولها اگر اندازه‌ی دنباله‌ای که با آن شروع می‌کنیم به قدر کافی نسبت به اندازه‌ی Δ بزرگ باشد، می‌توان از دلِ آن دنباله‌ای با اندازه‌ی شمارا و در عین حال Δ ـ بازنشناختنی بیرون کشید.

روش معمول دیگر (غیر از روش استفاده از لم اردوش ـ رادو) برای یافتن دنباله‌های بازنشناختنی، آمیختن لم رمزی و لم فشردگی است. در زیر صورتی ساده از اعمال این روش را ارائه کرده‌ایم. در جلسات آینده صورتی کارگشاتر از قضیه‌ی زیر را بررسی خواهیم کرد که در آن ویژگی‌های دنباله‌ی بازنشناختنیِ موردنظر را (به صورت موضعی حول هر فرمول) تحت کنترل بیشتری درخواهیم آورد. [۷]

قضیه ۱۶۲: فرض کنیم I مجموعه‌ای باشد مرتب خطی. در آن صورت مدلِ $\mathfrak{M} \models T$ و در آن دنباله‌ای بازنشناختنی چون $(a_i)_{i\in I}$ موجودند.

اثبات. نخست بسط زبانیِ $L' = L \cup \{c_i\}_{i\in I}$ را از L توسط ثوابت جدید در نظر بگیرید. تئوریِ زیر را در نظر بگیرید:

$$T' = T \cup \{\text{دنباله‌ای بازنشناختنی است } (c_i)_{i\in I}\}$$

[۷] جزوه‌ی «سادگی به زبان ساده» تألیف نویسنده‌ی دوم را برای دانستن تفاوت دنباله‌های حاصل از لم رمزی و لم اردوش رادو مطالعه بفرمایید.

به بیان دقیقتر، T' از اجتماعِ T با مجموعه‌های زیر از جملات حاصل شده است:

$$\{\phi(c_i) \leftrightarrow \phi(c_j)\}_{i,j\in I,\phi(x)\in L}$$

$$\vdots$$

$$\{\phi(c_{i1},\ldots,c_{in}) \leftrightarrow \phi(c_{j1},\ldots,c_{jn})\}_{\phi(x_1,\ldots,x_n)\in L, i1<\ldots<i_n, j1<\ldots<jn\in I}$$

کافی است نشان دهیم که T' دارای مدل است، و برای آن کافی است مدل داشتن هر بخش متناهی از T' را ثابت کنیم. هر بخش متناهی از T' را می‌توان به مجموعه‌ای از جملات گستراند که بیانگرِ Δ بازنشناختنی بودن یک دنباله‌ی متناهی، برای یک مجموعه‌ی متناهیِ Δ از فرمولها هستند. گزاره‌ی ۱۶۱ مدل مورد نظر را فراهم می‌آورد. $\square$

۳.۲ جلسه‌ی شانزدهم، توابع اسکولمی و اِسْکولِمیزه کردن

فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشد و A زیرمجموعه‌ای از آن. می‌دانیم که $\langle A\rangle$، زیرساختار تولیدشده توسطِ A، مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی $t^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)$ هاست. این مجموعه، لزوماً یک زیرساخت مقدماتی نیست؛ برای مثال زیرساخت تولید شده توسطِ ۱ در ساختارِ $\langle \mathbb{Q},+,-,\cdot\rangle$ برابر است با $\langle \mathbb{Z},+,-,\cdot\rangle$. با این همه، در مثال یادشده، اگر در زبان توابعِ $f_{\frac{1}{n}}(x)=\frac{x}{n}$ را می‌داشتیم، آنگاه زیرساخت تولیدشده توسط عنصر ۱ برابر می‌شد با خودِ $\langle \mathbb{Q},+,-,\cdot\rangle$، که مسلماً زیرساختی مقدماتی از ساختار یادشده است.

بنا به لمِ تارسکی، اگر $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$ آنگاه $\mathfrak{N}\prec\mathfrak{M}$ اگروتنهااگر برای هر فرمولِ بدونِ سور $\phi(x,\bar{a})\in L_M$، اگر $\mathfrak{N}\models\exists x\quad\phi(x,\bar{a})$ آنگاه

$$\mathfrak{N}\models\exists x\in M\quad\phi(x,\bar{a}).$$

اگر ترمهایی مانند t در زبان داشتیم، چنانکه از

$$\mathfrak{N}\models\exists x\quad\phi(x,\bar{a})$$

نتیجه می‌شد

$$\mathfrak{N}\models\phi(t(\bar{a}),\bar{a}),$$

آنگاه دو ساختار مورد نظر، لوازم لم تارسکی را می‌داشتند.

تعریف ۱۶۳ (ویژگی اسکولم): گوئیم در تئوری T توابع اسکولم تعبیه شده‌اند [۸]، هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x,\bar{y})$ ترمِ $t_\phi(\bar{y})$ چنان موجود باشد که

$$T\models\forall\bar{y}\quad\left(\exists x\quad\phi(x,\bar{y})\to\phi(t_\phi(\bar{y}),\bar{y})\right).$$

توجه کنید که اگر $|\bar{y}|=0$ آنگاه ترم مورد نظر باید یک ثابت باشد؛ یعنی

$$T\models\exists x\phi(x)\to\phi(c_\phi).$$

[8] T has built-in Skolem functions.

گزاره ۱۶۴: اگر T یک تئوری سازگار در زبانِ L باشد، زبانِ L' شامل L و تئوری T' در آن شاملِ T چنان موجودند که T' دارای توابع اسکولمیِ تعبیه‌شده است.

اثبات. قرار دهید $L_\circ = L$ و $T_\circ = T$ و فرض کنید $L_۱$ زبانی باشد که در آن برای هر $L_\circ$ فرمولِ بدون سورِ $\phi(x, \bar{y})$ یک نماد تابعیِ f_ϕ داریم. نیز تئوریِ $T_۱$ را اجتماعِ $T_\circ$ بگیرید با همه‌ی جمله‌های

$$\forall \bar{y} \left(\exists x \phi(x, \bar{y}) \to \phi(f_\phi(\bar{y}), \bar{y})\right)$$

که در آن $\exists x \phi(x, \bar{y}) \in T_\circ$. تئوریِ $T_۱$ دارای مدل است؛ برای تعبیر تابعِ f کافی است هر $f_\phi(\bar{y})$ را عنصری بگیریم که ضامنِ $\exists x \quad \phi(x, \bar{y})$ باشد. بدین ترتیب، زبانِ $L_{n+۱}$ را زبانی می‌گیریم که از اجتماعِ L_n با نمادهای تابعیِ f_ϕ برای هر $\phi(x, \bar{y}) \in L_n$ حاصل شده است و فرض می‌کنیم تئوریِ $T_{n+۱}$ از اجتماعِ T_n با جملات زیر حاصل شده باشد:

$$\forall \bar{y} \left(\exists x \phi(x, \bar{y}) \to \phi(f_\phi(\bar{y}, \bar{y})\right).$$

برای هر $\phi(x, \bar{y}) \in L_n$. تئوریِ $T_\omega = \bigcup_{i<\omega} T_i$ در زبانِ $L_\omega = \bigcup_{i<\omega} L_i$ تئوریِ مورد نظر ماست. $\square$

تعریف ۱۶۵: تئوریِ T_ω را اسکولمیزشِ (یا اسکولمیزه‌شده‌ی) [۹] T می‌خوانیم و آن را با T_{skolem} نشان می‌دهیم.

تمرین ۱۶۶:

۱. نشان دهید که T_{skolem} سورها را حذف می‌کند.

۲. نشان دهید که به هنگِ T_{skolem} همه‌ی جمله‌ها دارای معادل عمومیند (معادلی تنها دارای سور عمومی). به طور خاص، این تئوری دارای اصل‌بندی عمومی است.

۳. با استفاده اسکولمیزه‌سازی، و بدینسان تقلیل منطق مرتبه‌ی اول به منطق گزاره‌ها، اثباتی توپولوژیک برای قضیه‌ی فشردگی ارائه کنید.

فرض کنیم که تئوریِ T دارای توابع اسکولمی باشد. دیدیم که برای هر مجموعه‌ی مرتبِ خطیِ $\langle I, \leq \rangle$ می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی چون $(a_i)_{i\in\omega}$ در مدلی از T یافت. مدل تولیدشده توسطِ a_i ها را با $S_{EM}(a_i | i \in I)$ نشان می‌دهیم و آن را پوش اسکولمیِ (یا غلاف اسکولمیِ) [۱۰] این دنباله

[۹] Skolemization
[۱۰] Skolem hull

می‌خوانیم. (با توجه به نقش توابع اسکولمی نشان دهید که) داریم

$$S_{EM}(a_i|i \in I) \prec \mathfrak{M}$$

و به ویژه

$$S_{EM}(a_i|i \in I) \models T.$$

تمرین ۱۶۷: فرض کنید $f : I \to I$ یک اتومرفیسم ترتیبی باشد. نشان دهید که نگاشتِ $\hat{f} : S_{EM}(a_i|i \in I) \to S_{EM}(a_i|i \in I)$ با ضابطه‌ی $\hat{f}(t(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = \hat{f}(t(a_{f(i_1)}, \dots, a_{f(i_n)}))$ یک اتومرفیسم است.

۴.۲ جلسه‌ی هفدهم

یکی از سودمندیهای مدلهای اهغن‌فُیشت موستفسکیِ تولیدشده توسط دنباله‌های بازنشناختنی، که در اثباتهای بعدی بسیار به کارمان خواهد آمد، این است که در آنها تایپهای زیادی برآورده نمی‌شوند.

لم ۱۶۸: فرض کنید که I مجموعه‌ای خوشترتیب باشد، $(a_i)_{i\in I}$ دنباله‌ای بازنشناختنی، و $\mathfrak{M}$ مدلِ اسکولمی تولیدشده توسط دنباله‌ی یادشده. برای هر مجموعه‌ی شمارای $A \subseteq M$، حداکثر تعدادِ شمارا تایپِروی A، در M محقق می‌شوند.

اثبات. نخست لم بالا را در حالت خاصِ $A = (a_i)_{i\in I_0} \subseteq (a_i)_{i\in I}$ اثبات می‌کنیم. نیز نخست ادعا می‌کنیم که در این حالت

$$|\{\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_i/A) | i \in I\}| \leq \aleph_0.$$

توجه کنید که اگر $i, j \in I_0$ وضعیت ترتیبیِ یکسانی نسبت به I_0 داشته باشند، آنگاه a_i, a_j تایپ یکسانی روی A دارند؛ به بیان دیگر اگر $\mathrm{qftp}_{DLO}(i/I_0) = \mathrm{qftp}_{DLO}(j/I_0)$ آنگاه $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_i/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_j/A)$. علت این امر ساده است؛ برای هر $i_0, \ldots, i_k \in I_0$ اگر وضع ترتیبیِ i, j نسبت به این دنباله یکسان باشد، آنگاه وضعیت ترتیبی دو دنباله‌ی $i, i_0, \ldots, i_k$ و $j, i_0, \ldots, i_k$، نیز یکسان است؛ که این بنا به بازنشناختنی بودنِ دنباله‌ی $(a_i)_{i\in I}$ نتیجه می‌دهد که

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_i, a_{i_0}, \ldots, a_{i_k}) \leftrightarrow \phi(a_j, a_{i_0}, \ldots, a_{i_k})$$

حالات مخلتفی که i از لحاظ ترتیبی نسبت به I_0 می‌تواند داشته باشد، به صورت زیر است.

- در I_0 باشد (شمارا حالت).
- از تمام عناصرِ I_0 بزرگتر باشد. (یک حالت)
- از تمام عناصرِ I_0 کوچکتر باشد (یک حالت).
- از برخی از عناصرِ I_0 کوچکتر باشد و از برخی دیگر بزرگتر (ادعا: شماراحالت)

حال به محاسبه‌ی تعداد حالات در مورد آخر می‌پردازیم. طبیعتاً تعداد آن حالات برابر است با تعداد شکافها در مجموعه‌ی I_0. شهود ما عموماً ما را بدین تصور وامی‌دارد که تعداد شکافها در یک

مجموعه‌ی مرتبِ شمارا، ناشماراست. این شهود در اینجا کار نمی‌کند و فرض خوشترتیب بودن مجموعه‌ی I در اینجا به کار می‌آید.

قرار دهید $I^i = \{k \in I.|k > i\}$. بنا به خوشترتیبی، $\min I^i$ موجود است. برای هر $i, j \in I$ داریم $I^i = I^j$ اگروتنهااگر $\min I^i = \min I^j$. پس تعداد شکافهای اینچنین، بنا به شمارا بودنِ $I.$ شماراست.

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که تعداد تایپهای تک متغیره‌ی به صورت $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_i/A)$ حداکثر شماراست. همین گفته درباره‌ی تایپهای n متغیره نیز برقرار است. تعداد این تایپها نیز برابر با تعداد حالات ترتیبیِ مجموعه‌های $i., \ldots, i_n$ از اعضای I است نسبت به $I.$. به بیان دیگر اگر $i., \ldots, i_n$ و $j., \ldots, j_n$ وضعیت ترتیبی یکسانی نسبت به $I.$ داشته باشند آنگاه

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{i.}, \ldots, a_{i_n}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{j.}, \ldots, a_{j_n}).$$

تعداد حالات ترتیبی متصوَر برای $i., \ldots, i_n$ نسبت به $I.$ نیز شماراست؛ زیرا تعداد حالات ترتیبی آنها نسبت به هم متناهی است، و تعداد حالات ترتیبی هر یک نسبت به $I.$ شماراست. پس تا اینجا ثابت کرده‌ایم که تعداد تایپهای به شکلِ $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{i.}, \ldots, a_{i_n})/A)$ شماراست.

می‌خواستیم تعداد تایپهای برآورده شونده در M را بیابیم. می‌دانیم که عناصر M به شکل زیر هستند:

$$M = \{t^{\mathfrak{M}}(a_{i.}, \ldots, a_{i_n}) | i., \ldots, i_n \in I, \text{ ترمی اسکولمی } t\}$$

دوباره معلوم است که اگر $\mathrm{qftp}_{DLO}(i., \ldots, i_n/I.) = \mathrm{qftp}_{DLO}(j., \ldots, j_n/I.)$ آنگاه

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(t^{\mathfrak{M}}(a_{i.}, \ldots, a_{i_n})/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(t^{\mathfrak{M}}(a_{j.}, \ldots, a_{j_n})/A)$$

پس تعداد تایپها روی A در حالتی که $A \subseteq (a_i)_{i \in I}$ شماراست.

همان بحث بالا برای اثبات این که تعداد تایپهای روی هر $A \subseteq M$ شماراست کار می‌کند. فرض کنیم

$$A = \{t^{\mathfrak{M}}(a_{i.}, \ldots, a_{i_k}) | i., \ldots, i_k \in I., t \in T\}$$

که در آن T مجموعه‌ای است از ترمها و $I. \subseteq I$. تعداد تایپهای برآورده شونده در M روی A کمتر یا مساوی تعداد تایپها روی مجموعه‌ی $A' = \{a_i | i \in I.\}$ است؛ و آنْ شماراست. $\square$

بحث جدید، قضیه‌ی مُرلی

همچنان تئوریِ T را شمارا، کامل و فاقد مدل متناهی فرض کرده‌ایم. فرض کنید $\kappa > \aleph_0$ یک کاردینال نامتناهی باشد.

تعریف ۱۶۹: تئوریِ T را κ **جازم** [11] می‌خوانیم هرگاه هر دو مدلِ آن از اندازه‌ی κ با هم ایزومرف باشند. در حالتی که $\kappa = \aleph_0$ تئوری دارای شرط یادشده را $\aleph_0$ جازم می‌خوانیم. تئوریِ T را به **جازم‌درکاردینالی‌نامتناهی** می‌خوانیم هرگاه در یک کاردینالِ ناشمارای κ جازم باشد.

همانگونه که بارها گفته‌ایم، هدف نهایی این درس اثبات قضیه‌ی زیر است:

گزاره ۱۷۰ (مُرلی): اگر T جازم‌درکاردینالی‌ناشمارا باشد، آنگاه در تمامِ کاردینالهای $\kappa \geq \aleph_0$، جازم است.

مثال ۱۷۱: فرض کنید V یک فضای برداری باشد روی یک میدان شمارا. اگر V دارای یک پایه‌ی متناهی یا شمارا باشد، آنگاه V شماراست. از این رو، دو فضای برداری شمارا لزوماً با هم ایزومرف نیستند (شاید یکی دارای بعد n و دیگری دارای بعد $m \neq n$ باشد). برای این که اندازه‌ی V ناشمارا شود، نیازمند پایه‌ای ناشمارا هستیم. در واقع

$$|V| = \aleph_0 \times \dim(V) = \max\{\aleph_0, \dim(V)\}.$$

از طرفی، هر دو فضای برداریِ دارای بُعدِ مساوی با هم ایزومرفند. پس هر دو فضای برداریِ از اندازه‌ی $\kappa > \aleph_0$ از آنجا که همبُعدند با هم ایزومرفند.

[11] κ-categorical

۵.۲ جلسه‌ی هیجدهم

۱.۵.۲ تئوری‌های پایدار

در جلسه‌ی قبل گفتیم که در هر مدلی که در یک زبان اسکولمیزه، توسط یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ با اندیس در یک مجموعه‌ی خوشترتیب تولید شود، روی هر مجموعه‌ی شمارا، تعداد تایپهایی که برآورده می‌شوند حداکثر شماراست.

لم ۱۷۲: برای هر کاردینالِ دلخواهِ κ تئوریِ T دارای مدلی چون $\mathfrak{M}$ است به طوری که $|M| = \kappa$ و برای هر $A \subseteq M$ تعداد تایپهایِ روی A که در M محقق می‌شوند، حداکثر شماراست.

اثبات. در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که اگرچنانکه $(I, \leq)$ خوشترتیب باشد و $(a_i)_{i\in I}$ دنباله‌ای باشد بازنشناختنی، آنگاه در $\mathfrak{M} = S_{EM}(a_i | i \in I)$ روی هر مجموعه‌ی شمارا حداکثر شمارا تایپ برآورده می‌شوند. کافی است قرار دهیم $I = (\kappa, \leq)$. در این صورت $|S_{EM}(a_i | i \in I)| = \kappa$.
□

تئوریهای پایدار

تعریف ۱۷۳: تئوریِ T را ω **پایدار** [۱۲] می‌خوانیم هرگاه برای هر مدلِ شمارای $T \models \mathfrak{M}$ مجموعه‌ی $S_1(M)$ (=مجموعه‌ی همه‌ی تایپهای با پارامتر در M) شمارا باشد.

یادآوری ۱۷۴: اگر M شمارا باشد، تعداد تایپهای با پارامتر در M حداقل برابر با $\aleph_0$ است. قبلاً ثابت کرده‌ایم که اگر تعداد تایپها از $\aleph_0$ بیشتر باشد، آنگاه برابر با $2^{\aleph_0}$ است.

تمرین ۱۷۵: نشان دهید که ACF یک تئوریِ ω پایدار است.

تمرین ۱۷۶: نشان دهید که تئوری فضاهای برداریِ روی یک میدانِ شمارای F یک تئوریِ ω پایدار است.

هر دو مثالِ بالا، $\aleph_1$ جازم هستند و بعداً ثابت خواهیم کرد که هر تئوریِ $\aleph_1$ جازم، ω پایدار است.

تمرین ۱۷۷: نشان دهید که اگر در تئوریِ T یک ترتیبْ قابل تعریف باشد، این تئوری ω پایدار نیست.

---
[۱۲] ω-stable

تعریف ۱۷۸: برای $\kappa > \aleph_0$ تئوریِ T را κ **پایدار** می‌خوانیم هرگاه برای هر مدلِ $\mathfrak{M} \models T$ با $|M| = \kappa$ داشته باشیم $|S_1(M)| = \kappa$. تئوری T را **پایدار** می‌خوانیم هرگاه $\kappa \geq \aleph_0$ موجود باشد، به طوری که این تئوری κ پایدار باشد.

تمرین ۱۷۹: تئوریِ T پایدار است اگروتنها دارای ویژگی ترتیبی نباشد (یعنی هیچ ترتیبی در آن کُد نشود؛ در این باره در کلاس آموختال صحبت خواهیم کرد).

تمرین ۱۸۰: اگر T یک تئوریِ ω پایدار باشد، آنگاه برای هر $\kappa > \aleph_0$ این تئوری κ پایدار است.

انحراف از بحث. به طور کلی بنا به قضیه‌ای از شلاخ، یکی از حالات زیر برقرار است.

۱. برای هیچ کاردینالِ κ تئوریِ T، κ پایدار نیست.

۲. به ازای هر $\kappa \geq \aleph_0$ تئوریِ T، κ پایدار است. (معادلاً تئوری یادشده ω پایدار است.)

۳. به ازای هر $k \geq 2^{\aleph_0}$ تئوری T، κ پایدار است (به بیان دیگر، این تئوری، فوق پایدار است).

۴. به ازای هر کاردینالِ λ که $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ تئوریِ T، λ پایدار است (به طور محدود، پایدار است).

به طور ناشمارا جازم $\Leftarrow$ ωپایدار.

قضیه ۱۸۱: اگر تئوریِ T در یک کاردینالِ ناشمارا جازم باشد، ω پایدار است.

اثبات. فرض کنید که $\kappa \geq \aleph_0$ و تئوری یادشده κ جازم است. نیز فرض کنید به برهان خلف که برای مدلِ شمارایِ $\mathfrak{M}$ داریم $|S_1(\mathfrak{M})| \geq \aleph_1$. بنا به لمِ لونهایم‌اسکولم و بنا به ویژگی ادغام، مدلی چون $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N} \models T$ موجود است به طوری که $|N| = \kappa$ و در N حداقل به تعدادِ $\aleph_1$ عنصر موجود است که تایپهای آنها روی M دو به دو متمایزند (این گفته را ثابت کنید). از طرفی بنا به لمِ ۱۷۲ تئوری یادشده دارای مدلی است از اندازه‌ی κ مانند $\mathfrak{N}'$ به طوری که روی هر زیرمجموعه‌ی شمارای آن حداکثر شمارا تایپ موجود است. پس $\mathfrak{N} \ncong \mathfrak{N}'$، که این خلافِ κ جازم بودن است (در دو مدل ایزومرف ویژگی‌های مرتبه‌ی دوم نیز حفظ می‌شود). □

۲.۵.۲ تئوری‌های کاملاً متعالی و مرتبه‌ی مُرلی

مفهومِ ω پایدار بودن مفهومی جهانی است؛ یعنی، حداقل در تعریف، به فرمول خاصی وابسته نیست. در نظریه‌ی مدل بسیار پیش می‌آید که مفهومی جهانی، مفهومی موضعی را نتیجه دهد یا با آن معادل شود. در زیر خواهیم دید که ω پایدار بودن، کاملاً متعالی بودن را نتیجه می‌دهد، که آن مصداقی از مفاهیم موضعی است.

در تئوریهای کاملاًمتعالی، که در زیر به طور دقیق تعریف شده‌اند، به هر مجموعه‌ی تعریف‌پذیر می‌توان یک «رتبه» با مقادیر اردینالی نسبت داد. با کمک این رتبه، تایپها و مفهوم «استقلال» مدیریت می‌شوند.

یادآوری ۱۸۲: اگر $\mathfrak{M} \models T$، مجموعه‌ی $A \subseteq M^k$ را تعریف‌پذیرِ با پارامتر می‌خوانیم هرگاه فرمولِ $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ چنان موجود باشد که

$$A = \{\bar{c} \in M^k | \mathfrak{M} \models \phi(\bar{c}, \bar{b})\}.$$

در ادامه، هدفمان تعریف مرتبه‌ی مُرلی روی همه‌ی مجموعه‌های تعریف‌پذیر است. مقادیر مرتبه‌ی یادشده در $Ord \cup \{\infty\} \cup \{-۱\}$ خواهند بود. معمولاً بی‌آنکه ابهامی رخ دهد، مرتبه‌ی مرْلیِ مجموعه‌ای چون A را که با فرمولی چون $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ تعریف می‌شود، با $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a}))$ یا $\mathrm{RM}(A)$ نشان می‌دهیم. نیز، فعلاً مرتبه‌ی مُرلی را در یک مدلِ مشخصِ $\mathfrak{M}$ تعریف می‌کنیم. خواهیم گفت $\mathrm{RM}(A)^{\mathfrak{M}} = \alpha$ هرگاه $RM(A)^{\mathfrak{M}} \geq \alpha$ و $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A) \not\geq \alpha + ۱$. پس کافی است، $\mathrm{RM}(A) \geq \alpha$ را برای هر اردینالِ دلخواهِ α در زیر تعریف کنیم. ماهیت چنین تعریفی، علی‌القاعده استقرائی خواهد بود. در زیر، مجموعه‌های مورد اشاره، تعریف‌پذیر با پارامتر در مدلِ M هستند.

تعریف ۱۸۳:

۱. $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A) \geq ۰$ اگروتنهااگر $A \neq \emptyset$.

۲. اگر β اردینالی حدی باشد، آنگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A) \geq \beta$ هرگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A) \geq \alpha$ برای هر $\alpha < \beta$.

۳. $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A) \geq \alpha + ۱$ اگروتنهااگر مجموعه‌های دوبه‌دومجزای $(A_i)_{i \in \omega}$ چنان موجود باشند که برای هر i، $A_i \subseteq A$ و $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A_i) \geq \alpha$.

تعریف ۱۸۴:

$$\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A)=\begin{cases}\alpha & \alpha=\min\{\beta|\,\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A)\ngeq\beta+۱\}\\ \infty & \forall\beta\quad \mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A)\geq\beta.\end{cases}$$

تعریف ۱۸۵: تئوریِ T را **کاملاً متعالی**[۱۳] می‌خوانیم هرگاه برای هر مدلِ $T\models\mathfrak{M}$ و هر فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ که در آن $\bar{a}\in M$ داشته باشیم $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))\in Ord$.

به بیان دیگر، در یک تئوری کاملاً متعالی، هر فرمولْ دارای مرتبه‌ی مُرلی است.

تمرین ۱۸۶: برای کاملاً متعالی بودن کافی است شرط بالا برای یک مدلِ ω اشباع برقرار باشد.

مثال ۱۸۷: در زبانِ $L=\{E\}$ تئوریِ یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ دارای نامتناهی کلاس، و هر کلاسْ نامتناهی را T بنامید.

- $\mathrm{RM}(x=a)=۰$.
- $\mathrm{RM}(E(x,a))=۱$.
- $\mathrm{RM}(x=x)=۲$.

تمرین ۱۸۸: برای هر $\alpha\in Ord$ یک تئوریِ T معرفی کنید که در آن $\mathrm{RM}(x=x)=\alpha$.

[۱۳] totally transcendental

۶.۲ جلسه‌ی نوزدهم

برای یک تئوریِ فاقد مدل متناهی در یک زبان شمارا، مفهوم مرتبه‌ی مُرلی را تعریف کردیم.

مثال ۱۸۹: در زبانِ $L=\{E_1,E_2\}$ تئوریِ T را در نظر بگیرید که می‌گوید

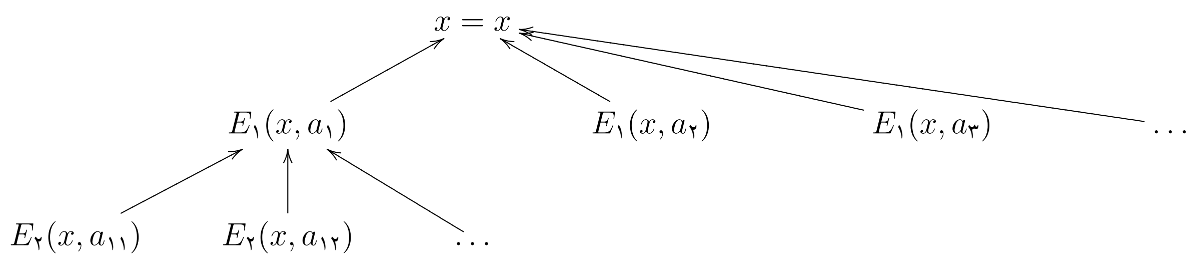
- E_1 یک رابطه‌ی هم‌ارزی است با نامتناهی کلاس و هر کلاس آن نامتناهی است.
- E_2 یک رابطه‌ی هم‌ارزی است که E_1 به طور نامتناهی را تظریف می‌کند (یعنی هر کلاسِ E_1 اجتماعی از نامتناهی کلاسِ E_2 است)، و هر کلاسِ آن نامتناهی است.

(بررسی کنید که) T کامل، دارای حذف سور و ω جازم است و $\mathrm{RM}(x=x)=3$.

مثال ۱۹۰: به طور مشابه در زبانِ $L=\{E_1,E_2,E_3\}$ می‌توان یک تئوری از روابط هم‌ارزی نوشت که در آن $\mathrm{RM}(x=x)=4$.

مثال ۱۹۱: زبانِ $L=\{E_1,E_2,\ldots\}$ و تئوریِ T را در آن در نظر بگیرید که طبق آن هر E_i یک رابطه‌ی هم‌ارزی است با نامتناهی کلاس و هر کلاس آن نامتناهی است و E_{i+1} تظریفی است از E_i. تئوری یاددشده $\aleph_0$ جازم نیست. ادعا می‌کنیم که در این تئوری، فرمولهای $\{\phi(\bar{x},\bar{b}_\tau)\}_{\tau\in\omega^{<\omega}}$ به شکلِ درختی ω انشعابی، چنان موجودند که هر $\{\phi(\bar{x},b_{\tau\frown i})\}_{i\in\omega}$ ناسازگار است و برای هر i داریم $\phi(\bar{x},\bar{b}_\tau)\rightarrow\phi(\bar{x},\bar{b}_{\tau\frown i})$. توجه کنید که $\omega^{<\omega}$ درختی است ساخته شده از زیرمجموعه‌های متناهیِ ω به طوری که در ریشه‌ی آن مجموعه‌ی $\emptyset$ قرار می‌گیرد، روی تهی شاخه‌های $0,1,2,\ldots$ قرار می‌گیرند، و بدین ترتیب روی 0 شاخه‌های $00,01,02,\ldots$ جای گرفته‌اند و درخت به طور مشابه ادامه می‌یابد.

درخت یادشده را به صورت زیر می‌سازیم:



توجه کنید که بنا به وجود درخت بالا، تعداد تایپها روی یک مجموعه‌ی شمارا (پارامترهای درخت) برابر با $2^{\aleph_0}$ است. پس تئوری بالا، ω پایدار نیست. در جلسات بعد نشان خواهیم داد که ω پایداری

معادل با کاملاً متعالی بودن، یعنی داشتن مرتبه‌ی مرلیِ اردینالی است. پس در تئوری بالا فرمولِ $x = x$ دارای مرتبه‌ی مرلیِ ∞ است؛ به طور کلی،

ادعای ۱۹۲: اگر یک تئوریِ T فرمولهای $\{\phi(\bar{x}, \bar{b}_\tau)\}_{\tau \in \omega^{<\omega}}$ در درختی ω انشعابی به سان بالا قرار بگیرند، در این تئوری، مرتبه‌ی مرلی فرمول نشسته در بالای درخت، بی‌نهایت است.

اثبات. توجه کنید که در یک درخت این‌چنین، اگر مرتبه‌ی فرمول نشسته در بالا از اردینالِ α بیشتریامساوی باشد، آنگاه از $\alpha + ۱$ نیز بیشتریامساوی است؛ زیرا تصویر درخت در هر فرمولِ زیرین تکرار شده است. حال توجه کنید که مرتبه‌ی مرُلی فرمولِ $\phi_\emptyset$ از هر $n \in \omega$ بیشتر است. $\square$

توجه ۱۹۳: وجود درخت دوشاخه شونده نیز وجود درخت ω انشعابی را نتیجه می‌دهد؛ زیرا از میان درخت دو شاخه شونده با حذف برخی شاخه‌ها می‌شود درخت ۴ شاخه شونده و بدین ترتیب $۲n$ شاخه شونده درآورد، و بنا به فشردگی به درختی ω انشعابی رسید.

در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد که

گزاره ۱۹۴: تئوریِ T یک تئوریِ ω پایدار است اگروتنهااگر کاملاً متعالی باشد.

لم ۱۹۵ (ویژگی‌های مرتبه‌ی مرُلی):

- $\mathrm{RM}(\phi) \geq ۰$ اگروتنهااگر $\phi(M) \neq \emptyset$.
- $\mathrm{RM}(\phi) \geq ۱$ اگروتنهااگر $\phi(M)$ نامتناهی باشد.
- اگر

$$\mathfrak{M} \models \forall \bar{x} \quad (\phi(\bar{x}, \bar{m}) \to \psi(\bar{x}, \bar{b}))$$

آنگاه $\mathrm{RM}(\psi) \geq \mathrm{RM}(\phi)$.

- $\mathrm{RM}(\phi \vee \psi) = \max\{\mathrm{RM}(\phi), \mathrm{RM}(\psi)\}$.

اثبات. تنها مورد آخر را ثابت می‌کنیم، و برای آن ثابت می‌کنیم که برای هر اردینالِ α

$$\mathrm{RM}(\phi \vee \psi) \geq \alpha \Leftrightarrow \max\{\mathrm{RM}(\phi), \mathrm{RM}(\psi)\} \geq \alpha.$$

اثبات گفته‌ی بالا برای $\alpha = 0$ و اردینالهای حدی، آسان است. فرض کنیم $\mathrm{RM}(\phi \vee \psi) \geq \alpha + 1$. آنگاه فرمولهای $\gamma_i \subseteq \phi \vee \psi$ چنان موجودند که $\mathrm{RM}(\gamma_i) \geq \alpha$. داریم

$$(\phi \vee \gamma_i) \wedge (\psi \vee \gamma_i) \equiv \gamma_i.$$

بنا به فرض استقراء، از آنجا که $\mathrm{RM}(\gamma_i) \geq \alpha$ داریم

$$\max\{\mathrm{RM}(\phi \vee \gamma_i), \mathrm{RM}(\psi \vee \gamma_i)\} \geq \alpha.$$

پس برای هر i یا $\mathrm{RM}(\phi \vee \gamma_i) \geq \alpha$ یا $\mathrm{RM}(\psi \vee \gamma_i) \geq \alpha$. یکی از دو مورد ذکر شده برای نامتناهی i رخ می‌دهد؛ بی کاسته شدن از کلیت فرض کنیم $\mathrm{RM}(\phi \vee \gamma_i) \geq \alpha$ برای نامتناهی i. از این نتیجه می‌شود که $\mathrm{RM}(\phi) \geq \alpha$. $\square$

۷.۲ جلسه‌ی بیستم

در جلسه‌ی قبل دیدیم که وجود یک درختِ ω انشعابی، موجب بی‌نهایت شدنِ مرتبه‌ی مُرلیِ فرمول نشسته در بالاترین گره (و بدینسان همه‌ی فرمولهای نشسته در درخت) می‌شود.

تا اینجا، مرتبه‌ی مُرلی را در یک مدلِ خاص تعریف کرده‌ایم. در ادامه می‌خواهیم تعریف را طوری گسترش دهیم که وابستگی آن به مدلها برطرف شود. عموماً (در تئوریِ کامل) برای برطرف کردن وابستگی تعریف به یک مدل خاص دو رهیافت وجود دارد:

رویکرد اول. ویژگی مورد نظر را در یک مدلِ خاص تعریف کنیم و ثابت کنیم که این ویژگی تحت توسیعهای مقدماتی حفظ می‌شود. مثلاً قبلاً گفتیم که منظور از تایپ کامل، مجموعه‌ای بیشینال از فرمولهاست که با تئوری یک مدلِ M سازگارند. اگر p با تئوریِ M سازگار باشد، با تئوریِ هر توسیع مقدماتی از آن نیز سازگار است.

رویکرد دوم. یک مدل بسیار بزرگ را از تئوری تحت مطالعه در نظر گرفته فرض کنیم که همه‌ی مدلها به طور مقدماتی در آن می‌نشینند. سپس ویژگی مورد نظر را در آن مدل تعریف کنیم. وجود چنین مدلی، که آن را **مدل سترگ** [۱۴] یا **مدل هیولا** می‌خوانیم، در کلاس آموختال ثابت شده است.

بگذارید فعلاً بحث را با رویکرد اول ادامه دهیم، و سپس آن را برای جلوگیری از پیچیدگی‌های مصنوعی، در یک مدل سترگ پی بگیریم.

تمرین زیر را در کلاس آموختال حل کردیم:

تمرین ۱۹۶: فرض کنید که $\mathfrak{M}$ مدلی ωاشباع باشد. نشان دهید که هرگاه $\bar{a} \equiv \bar{b}$ آنگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\bar{x},\bar{a}) = \mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\bar{x},\bar{b})$.

گزاره ۱۹۷: اگر $\mathfrak{M} \models T$ مدلی ωاشباع باشد، آنگاه برای هر توسیعِ مقدماتیِ $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ و هر فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ با $\bar{a} \in M$ داریم

$$\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) = \mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x},\bar{a})).$$

به ویژه اگر $\mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) = \infty$ آنگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) = \infty$.

[۱۴] monster model

اثبات. به آسانی می‌توان نشان داد که (بنا به مقدماتی بودن توسیع)

$$\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) \leq \mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x},\bar{a})).$$

در ادامه به اثبات عکس نامساوی بالا پرداخته‌ایم.

فرض کنید که بدانیم که هرگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) \geq \alpha$ آنگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) \geq \alpha$. می‌خواهیم همین را برای $\alpha+۱$ ثابت کنیم. گیریم $\mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) \geq \alpha+۱$. پس فرمولهای $\{\psi_i(\bar{x},\bar{b}_i)\}_{i\in\omega}$ چنان موجودند که $\bar{b}_i \in N$ و $\mathfrak{N} \models \forall \bar{x} \quad (\psi_i(\bar{x},\bar{b}_i) \to \phi(\bar{x},\bar{a}))$ و نیز $\psi_i(\bar{x},\bar{b}_i)$ و $\psi_j(\bar{x},\bar{b}_j)$ برای $i \neq j$ در N با هم اشتراکی ندارند. به کمکِ اشباع بودن، دنباله‌ی $(\bar{b}'_i)_{i\in\omega}$ را از اعضای M به گونه‌ای می‌سازیم که برای هر $n \in \omega$

$$\bar{b}'_۰ \ldots \bar{b}'_n \equiv_a \bar{b}_۰ \ldots \bar{b}_n. \quad (*)$$

از معادله‌ی $(*)$ (و با کمک تمرینِ پیش از این گزاره) نتیجه می‌شود که فرمولهای $\psi_i(\bar{x},\bar{b}'_i)$ ضامن ایند که $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a}) \geq \alpha+۱$. □

تئوریِ T کاملاً متعالی است اگروتنهااگر در یک مدلِ اشباعِ $T \models \mathfrak{M}$ برای هر $n \in \mathfrak{N}$ مرتبه‌ی مُرلیِ M^n اردینال باشد (یعنی بینهایت نباشد):

نتیجه ۱۹۸: موارد زیر با هم معادلند:

۱. تئوریِ T کاملاً متعالی است.

۲. برای هر مدلِ ωاشباعِ $\mathfrak{M}$ و هر فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ با پارامترِ $\bar{a} \in M$ داریم $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) \in Ord$؛ یعنی هر فرمول دارای مرتبه‌ی مُرلی (اردینالی و نه بی‌نهایت) است.

۳. مدلی ωاشباع مانند $\mathfrak{M}$ چنان موجود است که برای هر فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ با پارامترِ $\bar{a} \in M$ داشته باشیم $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) \in Ord$.

۴. مدلی ωاشباع مانندِ $\mathfrak{M}$ موجود است به طوری که برای هر $n \in \omega$ داریم $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(M^n) \in Ord$؛ به بیان دیگر فرمولِ $x_۱ = x_۱ \wedge \ldots \wedge x_n = x_n$ دارای مرتبه‌ی مُرلی است.

توجه ۱۹۹: در واقع در مورد آخر کافی است مرتبه‌ی مُرلیِ فرمولِ تک‌متغیره‌ی $x = x$ را لحاظ کنیم. اثبات این گفته فعلاً در برنامه‌مان نیست.

اثبات گزاره. ۴ به ۱. فرض کنید که ۴ برقرار باشد و در عین حال، مدلی چون $\mathfrak{N} \models T$ و فرمولی چون $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in L_N$ چنان موجود باشند که $\mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\bar{x}, \bar{a}) = \infty$. می‌دانیم که در مدلِ ω اشباعِ مورد ۴، که آن را $\mathfrak{M}$ می‌نامیم، مرتبه‌ی مرلی همه‌ی فرمولها کمتر از بی‌نهایت است. بنا به ویژگی ادغام مدلی چون $\mathfrak{Q}$ موجود است که هر دوی $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ به طور مقدماتی در آن می‌نشینند. این مدل را نیز ω اشباع فرض می‌کنیم. از $\mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$ نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{RM}^{\mathfrak{Q}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$. از آنجا که $\mathfrak{M}$ مدلی ω اشباع است، در آن عنصری چون a' موجود است که $a \equiv a'$. پس $RM^{\mathfrak{Q}}((\phi(\bar{x}, \bar{a}')) = \mathrm{RM}^{\mathfrak{Q}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$. دوباره از آنجا که $\mathfrak{M}$ مدلی ωاشباع است

$$\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}((\phi(\bar{x}, \bar{a}')) = \mathrm{RM}^{\mathfrak{Q}}(\phi(\bar{x}, \bar{a}')) = \infty;$$

پس $RM^{\mathfrak{M}}(\bar{x} = \bar{x}) = \infty$ (زیرا بوضوح $\bar{x} = \bar{x} \supseteq \phi(\bar{x}, \bar{a})$) که این با ۴ در تناقض است. $\square$

در کلاس آموختال ثابت کردیم که در یک نظریه‌ی مناسب برای مجموعه‌ها و کلاسها می‌توان زنجیری مقدماتی چون $(M_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ از مدلها ساخت، به طوری که همه‌ی تایپها در هر مدلِ M_α در مدل $M_{\alpha+1}$ برآورده شوند. مدلِ $\mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M}_i$ مدلی است با اندازه‌ی کلاسی (و نه مجموعه‌ای) و κاشباع برای هر کاردینالِ κ. نیز همه‌ی مدلهای مجموعه‌ایِ T در آن به صورت مقدماتی می‌نشینند. این مدل، به پیمانه‌ی ایزومرفیسم یکتاست و آن را مدلِ سترگ، یا مدلِهیولای تئوریِ T می‌خوانند. **از این پس وقتی صحبت از مدل، مجموعه یا عنصری شود، منظور زیرمدلی مقدماتی یا زیرمجموعه و یا عنصری از آن مدل سترگ است. این مدل را از این پس با $\mathbb{M}$ نشان داده‌ایم**. نیز هر جا برای مرتبه‌ی مُرلی یا تایپ به مدلِ محیط اشاره نشده باشد، مدلِ مورد نظر همان مدل سترگ است. همان گونه که گفتیم، برای کنترل ویژگی‌های مقدماتی، یعنی هر ویژگی‌ای که تحت توسیع‌های مقدماتی حفظ می‌شود، کار در مدل سترگ راحتتر است.

در زیر تعریفِ‌مرتبه‌ی مرلی را به تایپها گسترش داده‌ایم.

تعریف ۲۰۰ (مرتبه‌ی مُرلی): برای مجموعه‌ی A و تایپِ $p(\bar{x}) \in S_n(A)$ تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{RM}(p(\bar{x})) = \min(\mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{a}))|\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p)$$

اگر T کاملاً متعالی باشد، برای هر تایپِ $p(\bar{x})$ داریم $\mathrm{RM}(p(\bar{x})) \in Ord$. اگر $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ به جای $\mathrm{RM}(p(\bar{x}))$ گاهی می‌نویسیم $\mathrm{RM}(\bar{a}/A)$. پس

$$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \min(\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{b})|\mathbb{M} \models \phi(\bar{a},\bar{b}), \bar{b} \in A).$$

توجه ۱۰۲: مرتبه‌ی مرلی، تعبیری از استقلال به دست می‌دهد. برای مجموعه‌های $A \subseteq B$ و عنصرِ a می‌نویسیم $a \downarrow_A B$ هرگاه $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/B)$. در تئوریهای کاملاً متعالی، این استقلال خوش‌رفتاری‌های مورد انتظار از یک تعبیر برای استقلال را دارد:

همنوایی و تعدی اگر $A \subseteq B \subseteq C$ آنگاه

$$\left(\bar{a} \underset{A}{\downarrow} B \quad \wedge \quad \bar{a} \underset{B}{\downarrow} C\right) \quad \Leftrightarrow \bar{a} \underset{A}{\downarrow} C.$$

ناوردایی تحت اتومرفیسمها

$$\bar{a} \underset{A}{\downarrow} B \Leftrightarrow f(\bar{a}) \underset{f(A)}{\downarrow} f(B) \quad \forall f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}).$$

تقارن

$$\bar{a} \underset{A}{\downarrow} \bar{b} \Leftrightarrow \bar{b} \underset{A}{\downarrow} \bar{a}.$$

ویژگی تناهی برای هر مجموعه‌ی A و عنصرِ $\bar{a}$ زیرمجموعه‌ای متناهی چون $A' \subseteq A$ چنان موجود است که $\bar{a} \downarrow_{A'} A$.

ویژگی استقلال اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$a \underset{A}{\downarrow} a', \quad b \underset{A}{\downarrow} b', \quad a' \underset{A}{\downarrow} b'$$

$$a \equiv_A b$$

آنگاه عنصرِ c چنان موجود است که

$$c \underset{A}{\downarrow} a'b', \quad c \equiv_{Ma'} a, \quad c \equiv_{Mb'} b.$$

مشاهدات ۲۰۲:

۱. در کلاس تمرین، ثابت کردیم که اگر تئوری T داشته باشیم $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\alpha$ آنگاه برای هر $\beta<\alpha$ فرمولی چون $\theta(\bar{x},\bar{b})$ چنان موجود است که $\theta\to\phi \vdash$ و $\mathrm{RM}(\theta)=\beta$؛ یعنی مرتبه‌ی مرلی، مقادیر را به صورت پیوسته اتخاذ می‌کند.

۲. گفته‌ی بالا، بالاخص برای فرمولِ $\bar{x}=\bar{x}$ برقرار است. اگر تئوریِ T کاملاً متعالی باشد، $\mathrm{RM}(\bar{x}=\bar{x})<\infty$. فرض کنیم $\mathrm{RM}(\bar{x}=\bar{x}))=\mathrm{RM}(\mathbb{M}^n)=\alpha$. در این صورت برای هر $\beta<\alpha$ فرمولی با مرتبه‌ی مرلیِ برابر با β موجود است.

۳. فرض کنیم $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))<\alpha$. قبلاً گفته‌ایم که $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))$ به $\mathrm{tp}(\bar{a})$ بسته است؛ یعنی اگر $\mathrm{tp}(\bar{b})=\mathrm{tp}(\bar{a})$ آنگاه $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{b}))$. بنابراین تعدادِ مقادیرِ متصورَ برای $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))$ حداکثر برابر با تعداد تایپهای n متغیره است؛ یعنی برابر با $|S_n(T)|$. پس تعداد این مقادیر حداکثر برابر با $۲^{\aleph_۰}$ است.

۴. گفته‌های بالا را به هم می‌آمیزیم:

$$|\{\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))|\bar{a}\in\mathbb{M}\}|\leq ۲^{\aleph_۰}$$ بنا به ۳

$$|\{\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))|\bar{a}\in\mathbb{M}\}|=\alpha$$ بنا به ۱ و۲

پس $|\alpha|<۲^{\aleph_۰}$. بنابراین $\alpha<(۲^{\aleph_۰})^+$.

۵. اگر تئوریِ مورد نظر ω پایدار بود، می‌داشتیم $\alpha_۱<\aleph_۱$.

۶. پس در یک تئوریِ ωپایدار اگر مرتبه‌ی مرلی یک فرمول، بی‌نهایت نباشد، حتماً از $(۲^{\aleph_۰})^+$ کمتر است.

مشاهده‌ی بالا ما را برای اثبات قضیه‌ی زیر آماده می‌سازد:

قضیه ۲۰۳: هر تئوریِ ω پایدار، کاملاً متعالی است.

اثبات. فرض کنیم در یک تئوریِ ω پایدار داشته باشیم $\mathrm{RM}(\bar{x}=\bar{x})=\infty$. در مشاهدات بالا گفتیم که اگر مرتبه‌ی مرلی یک فرمول، بی‌نهایت نباشد، حتماً از $(۲^{\aleph_۰})^+$ کمتر است. از آنجا که

$\mathrm{RM}(\bar{x}=\bar{x}) \geq (2^{\aleph_0})^+ + 1$ فرمولهای دو به دو مجزای $\{\psi_i\}_{i\in\omega}$ باید موجود باشند که مرتبه‌ی مرلی هر یک حداقل $(2^{\aleph_0})^+$ است. پس مرتبه‌ی مرلی هر یک از این فرمولها نیز بی‌نهایت است. دو فرمولِ اینچنین، مثلاً ψ_0, ψ_1 را، در درختی در زیرِ $\bar{x}=\bar{x}$ قرار می‌دهیم. از آنجا که $\mathrm{RM}(\psi_0)=\infty$ به طور مشابه، دو فرمولِ مجزای ψ_{00}, ψ_{01} یافت می‌شوند که ψ_0 آنها را در بردارد؛ و بدینسان می‌توان به درختی رسید از فرمولهای دو به دو مجزا در هر طبقه‌ی افقی، و با مرتبه‌ی مُرلیِ بی‌نهایت. وجود چنین درختی، موجب افزایش تعداد تایپها و نقضِ ω پایدار بودن می‌شود.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \bar{x}=\bar{x} & & & \\
 & \psi_0 \arrow[urr] & & & & \psi_1 \arrow[ull] & \\
\psi_{00} \arrow[ur] & & \psi_{01} \arrow[ul] & & \psi_{10} \arrow[ur] & & \psi_{11} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$\square$

در جلسه‌ی بعد عکس قضیه‌ی بالا را ثابت می‌کنیم.

۸.۲ جلسه‌ی بیست‌ویکم

در جلسه‌ی پیش ثابت کردیم که هر تئوریِ ω پایدار، کاملاً متعالی است. اثبات عکسِ این گفته را برای این جلسه وعده کرده بودیم. پیش از آن قضیه‌ی زیر را یادآوری می‌کنیم:

یادآوری ۲۰۴ (کانتور بندیکسون): اگر (X,d) یک فضای متریک کاملِ جدائی‌پذیر باشد، آنگاه $X=A\cup B$ که در آن A یک زیرفضای بسته‌ی تام است (یعنی همه‌ی عناصرِ آن حدی هستند) و B یک زیرفضای بازِ شمارا. (B را مجموعه‌ی نقاطِ پراکنده‌ی فضای X می‌خوانیم.). به ویژه اگر X ناشمارا باشد، $A\neq\emptyset$.

تمرین ۲۰۵: نشان دهید که با تعبیری مناسب، مرتبه‌ی مُرلی، معادل با مرتبه‌ی کانتور ـ بندیکسون است. به ویژه اگر تئوریِ‌مورد نظر ω پایدار باشد، همه‌ی نقاط در قسمت بازِ شمارا می‌افتند.

قضیه ۲۰۶ (قضیه‌ی اصلی): تئوریِ T کاملاً متعالی است اگروتنهااگر ωپایدار باشد.

اثبات. اگر تئوری T، ω پایدار نباشد مدلی شمارا چون $\mathfrak{M}\models T$ دارد، به طوری که $|S_n(M)|=2^{\aleph_0}$. فرض کنیم که A زیرمجموعه‌ی بسته‌ی تامِ قضیه‌ی کانتوربندیسکون برای $S_n(M)$ باشد. گیریم $p(\bar{x})\in A$. باز پایه‌ایِ $[\theta(\bar{x},\bar{m})]$ را چنان در نظر بگیرید که $p(\bar{x})\in[\theta(\bar{x},\bar{m})]$. از آنجا که $A\cap[\theta(\bar{x},\bar{m})]$ ناتهی، و از این رو نامتناهی است، تایپی چون $p_1(\bar{x})\neq p(\bar{x})$ در آن موجود است. فرض کنید که ψ از فرمولهای جداکننده‌ی p_1,p باشد؛ یعنی مثلاً $\psi\in p, \neg\psi\in p_1$. فرمولِ $\theta\wedge\psi$ را در گِرِهی زیرِ فرمولِ θ قرار می‌دهیم. توجه می‌کنیم که $p_1\in[\theta\wedge\neg\psi]$. به دلیلِ مشابه، $[\theta\wedge\neg\psi]\cap A$ نامتناهی، و ازاین رو شاملِ $p_2\neq p_1$ است. فرض می‌کنیم که ψ_1 فرمول جداکننده‌ی p_1,p_2 باشد؛ فرض می‌کنیم که $\psi_2\in p_1$ و $\neg\psi_2\in p_2$. پس داریم $p_1\in[\theta\wedge\neg\psi\wedge\psi_2]$ و $p_2\in[\theta\wedge\neg\psi\wedge\neg\psi_2]\cap A$. مشابه بالا فرمولِ $\theta\wedge\neg\psi\wedge\psi_2$ را در گره زیرِ θ قرار می‌دهیم و همین کار را یافتنِ $p_3\neq p_2$ و $p_3\in[\theta\wedge\neg\psi\wedge\neg\psi_2]\cap A$ ادامه می‌دهیم. در این روند به درختی ω انشعابی ولی با ارتفاع ۱ می‌رسیم. از طرفی هر گره درخت را می‌توان در فراروند بالا قرار داد و بدینسان ω انشعاب به زیر آن زد. یعنی در تئوریمان یک درخت نامتناهیِ ω انشعابی داریم؛ به بیان دیگر تئوریِ ما کاملاً متعالی نیست.

$$\begin{tikzcd} & \theta \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \theta\wedge\psi & \theta\wedge\neg\psi\wedge\psi_2 & \dots \end{tikzcd}$$

۹.۲ جلسه‌ی بیست و دوم

همان طور که دانسته‌ایم، وقتی $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\alpha$ آنگاه در داخلِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ نمی‌توان نامتناهی فرمولِ مجزای با مرتبه‌ی مُرلی برابر با α پیدا کرد (در غیر این صورت، مرتبه‌ی مُرلی می‌شد $\alpha+1$). به بیان دیگر، تعداد فرمولهای مجزای با مرتبه‌ی مرُلیِ برابر با α که هر کدامشان $\phi(\bar{x},\bar{a})$ را نتیجه می‌دهند متناهی است.

سوال ۲۰۷: اگر مرتبه‌ی مُرلی فرمولی برابر با α باشد، آیا ممکن است بشود برای هر $n\in\mathbb{N}$ به تعدادِ n فرمولِ مجزا با مرتبه‌ی مرلی برابر با α یافت که هر یک ϕ را نتیجه دهد؟

در ادامه ثابت خواهیم کرد که پاسخ سوال بالا منفی است؛ هرگاه $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\alpha$ آنگاه عددی چون $d\in\omega$ چنان موجود است که تعداد فرمولهای مجزای نتیجه‌دهنده‌ی ϕ در داخلِ آن حداکثر برابر با d است. این عدد را **درجه‌ی مُرلیِ** [15] فرمول $\phi(\bar{x},\bar{a})$ خواهیم نامید و آن را با $\deg(\phi(\bar{x},\bar{a}))$ نشان خواهیم داد.

بحث را با یک لم نظریه‌ی مجموعه‌ای می‌آغازیم.

لم ۲۰۸ (کونیگ): [16] در هر درختِ نامتناهیِ به‌طورمتناهی‌شاخه‌زننده مسیری نامتناهی یافت می‌شود.

قضیه ۲۰۹: برای فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ با $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\alpha$ عدد طبیعیِ $d\in\omega$ چنان موجود است که $\phi(\bar{x},\bar{a})$ را می‌توان به صورت اجتماعی از حداکثر d فرمولِ دوبه‌دومجزای با مرتبه‌ی مرُلی برابر با α نوشت. به بیان دیگر، فرمولهای $\psi_1,\ldots,\psi_d$ چنان موجودند که $\mathrm{RM}(\psi_i)=\alpha$ و $\phi=\bigvee_{i=1,\ldots,d}\psi_i$ و اگر فرمولهای دیگری چون ψ'_i با مرتبه‌ی مُرلی برابر با α یافت شوند به طوری که $\phi=\bigvee_{i=1,\ldots,k}\psi'_i$ آنگاه $k\leq d$.

تعریف ۲۱۰: اگرچنانکه در بالا $d=1$ فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ را **تحویل‌ناپذیر** [17] می‌خوانیم. نیز اگر $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\deg\phi(\bar{x},\bar{a})=1$ آنگاه فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ را **بسیارکمینال** [18] می‌خوانیم.

توجه ۲۱۱: برای توجیه وجه تسمیه‌ی «تحویل‌ناپذیر» خواننده را به قضایای زیر از نظریه‌ی اعداد، جبر و هندسه‌ی جبری توجه می‌دهیم:

گزاره ۲۱۲:

---

[15] Morley degree

[16] König

[17] irreducible

[18] strongly minimal

۱. هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت حاصلضربی متناهی از **اعداد اول** نوشت.

۲. هر گروه آبلی متناهیاً تولیدشده را می‌توان به صورت (تصویری ایزومرفیک) از جمعی مستقیم از **گروه‌های اولیه** نوشت.

۳. هر ایده‌آل را در یک حلقه‌ی نوتری، می‌توان به صورت اشتراکی متناهی از **ایده‌آلهای اولیه** نوشت.

۴. هر مجموعه‌ی جبری را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از **چندگوناهای تحویل‌ناپذیر** نوشت.

اثبات قضیه‌ی **۲۰۹** . فرض کنید که $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\alpha$. اگر داخلِ ϕ هیچ فرمول سره‌ای با مرتبه‌ی مُرلیِ مساوی با α یافت نشود، که هیچ؛ اگر تنها یک فرمولِ ψ با مرتبه‌ی مُرلی برابر با α یافت شود، همان را در زیرشاخه‌ای از ϕ قرار می‌دهیم؛ وگرنه فرض می‌کنیم که $\psi_۱,\psi_۲$ افرازی برای ϕ به دو فرمول باشد با مرتبه‌ی مُرلی برابر با α و به طوری که $\psi_۱\cap\psi_۲=\emptyset$. حال همین پردازش را برای هر یک از ψ_i ها انجام می‌دهیم تا به درختی متناهیاً شاخه‌زننده برسیم. اگر درخت یادشده نامتناهی باشد، آنگاه بنا بر لم کُنیگ می‌توان زنجیر زیر را از مجموعه‌های تعریف‌پذیر با مرتبه‌ی مرلی برابر با α یافت:

$$\phi=\phi_۰\supsetneq\phi_۱\supsetneq\phi_۲\supsetneq\dots$$

در زنجیر بالا برای هر i داریم

$$\mathrm{RM}(\phi_i-\phi_{i+۱})=\alpha.$$

پس گردایه‌ی نامتناهیِ $\{\phi_i-\phi_{i+۱}\}$ در داخلِ ϕ پدیدار می‌شود که این ناقض مرتبه‌ی مُرلی برابر با α است. پس **برای هر فرمولِ ϕ با** $\mathrm{RM}(\phi)=\alpha$ **روند درخت‌سازی با شاخه‌زدن بر زیرمجموعه‌های سره‌ی دوبه‌دومجزای با مرتبه‌ی مُرلیِ برابر با α پس از متناهی مرحله به پایان می‌رسد.**

فرض کنید که پس از پیمایش این روند برای ϕ به گردایه‌ی متناهیِ $\{\psi_i\}_{i=۱,\dots,k}$ از فرمولهای نشسته بر گره‌های انتهایی تمام شاخه‌ها رسیده باشیم. توجه کنید که

۱. $\mathrm{RM}(\psi_i)=\alpha$.

۲. برای $i\neq j$ داریم $\psi_i\cap\psi_j=\emptyset$.

۳. $\bigvee_{i=1}^{k} \psi_i = \phi$.

پس فرمولهای یادشده تجزیه‌ای برای ϕ به فرمولهای تحویل‌ناپذیرِ دارای مرتبه‌ی مُرلیِ α به دست می‌دهند: $\phi = \bigvee_{i=1,\dots,d} \psi_i(\bar{x}, \bar{c}_i)$.

حال اگر ϕ را بتوان به گونه‌ی دیگری (به صورت $\phi = \bigcup_{i=1,\dots,k} \xi_i(\bar{x}, \bar{e}_i)$) به صورت اجتماعِ k فرمول با مرتبه‌ی مرلی برابر با α نوشت، آنگاه

$$\bigvee_{i=1,\dots,d} \psi_i(\bar{x}, \bar{c}_i) = \bigvee_{i=1,\dots,k} \xi_i(\bar{x}, \bar{e}_i)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که $k \leq d$. برای این کار، با کمک ادعای زیر، نگاشتی یک‌به‌یک از $\{1, \dots, k\}$ به $\{1, \dots, d\}$ پیدا می‌کنیم.

برای $\alpha \in Ord$ روی فرمولهای با مرتبه‌ی مُرلیِ α رابطه‌ی $\simeq$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\phi(\bar{x}, \bar{a}) \simeq \psi(\bar{x}, \bar{b}) \Leftrightarrow \mathrm{RM}(\phi \Delta \theta) < \alpha.$$

که در آن $\phi \Delta \theta = (\phi \wedge \neg\theta) \vee (\theta \wedge \neg\phi)$.

توجه کنید که $\mathrm{RM}(\phi \vee \theta) = \max(\mathrm{RM}(\phi \wedge \theta), \mathrm{RM}(\phi \Delta \theta))$، و نیز از طرفی $\mathrm{RM}(\phi \vee \theta) = \max(\mathrm{RM}(\phi), \mathrm{RM}(\theta))$. پس اگرچنانکه $\mathrm{RM}(\phi \Delta \theta)) < \alpha$ آنگاه $\mathrm{RM}(\phi \vee \theta) = \mathrm{RM}(\phi \wedge \theta) = \alpha$؛ به تعبیری، در این صورت دو فرمولِ ϕ, θ تقریباً بر هم منطبقند.

ادعای ۲۱۳: برای هر $1 \leq i \leq k$ عدد یکتای $1 \leq j \leq d$ چنان موجود است که

$$\xi_i(\bar{x}, \bar{e}_i) \simeq \psi_j(\bar{x}, \bar{c}_i).$$

در صورت وجود، یگانگی و یک‌به‌یک بودن چنین تابعی واضح است. در ادامه وجود آن را اثبات کرده‌ایم.

داریم $\xi_i \subseteq \bigvee_{j=1,\dots,d} \psi_j$. بنابراین

$$\xi_i \wedge \phi = \bigvee_{j=1,\dots,d} (\psi_i \wedge \psi_j)$$

که اجتماع بالا، مجزاست. پس $\alpha = \mathrm{RM}(\xi_i) = \max_{1 \leq j \leq d}(\mathrm{RM}(\xi_i \wedge \psi_j))$ و از این رو $1 \leq j \leq d$ چنان موجود است که $\mathrm{RM}(\psi_i \wedge \phi_j) = \alpha$.

از آنجا که فرمولِ ψ_j تحویل‌ناپذیر است، داریم $\alpha < \mathrm{RM}(\psi_j - \xi_i)$؛ زیرا $\psi_j = (\psi_j \cap \xi_i) \cup (\psi_j - \xi_i)$ و اگر $\mathrm{RM}(\psi_j - \xi_i) = \alpha$ آنگاه تحویل‌ناپذیریِ ψ_j نقض می‌شود.
به طور مشابه، $\mathrm{RM}(\xi_i - \psi_j) < \alpha$. در نتیجه $\mathrm{RM}(\xi_i \Delta \psi_j) < \alpha$؛ یعنی $\psi_j \simeq \xi_i$. $\square$

۱۰.۲ جلسه‌ی بیست و سوم

قضیه ۲۱۴: اگر T یک تئوریِ ωپایدار باشد، آنگاه برای هر $\kappa \geq \omega$ نیز κپایدار است.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{M} \models T$ و $|M| = \kappa$. می‌خواهیم نشان دهیم که $|S_1(M)| \leq \kappa$.

تایپِ $p(x) \in S_1(M)$ را در نظر بگیرید. بنا بر آنچه در جلسات قبل ثابت کرده‌ایم، هر تئوریِ ωپایدار، کاملاً متعالی است. پس $\alpha \in Ord$ موجود است به طوری که $\mathrm{RM}(p) = \alpha < \infty$. بنابراین فرمولی در p چنان موجود است که که مرتبه‌ی مُرلی آن برابر با α است. از میان فرمولهای این‌چنین، فرمولِ ϕ را با کمینه‌ی درجه‌ی مُرلی انتخاب می‌کنیم. پس $\mathrm{RM}(\phi) = \alpha$ و برای هر $\psi \in p$ اگر $\mathrm{RM}(\psi) = \alpha$ آنگاه $\deg \psi \geq \deg \phi$.

توجه کنید که برای هر $\psi \in p$

$$\alpha \leq \mathrm{RM}(\phi \wedge \psi) \leq \alpha$$

و

$$d \leq \deg(\phi \wedge \psi) \leq d,$$

پس $\mathrm{RM}(\phi \wedge \psi) = \alpha$ و $\deg(\phi \wedge \psi) = d$. بنابراین

$$\mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha$$

زیرا اگر می‌داشتیم $\mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi) = \alpha$ آنگاه از آنجا که $\phi \wedge \psi, \phi \wedge \neg\psi$ افرازی برای ϕ است، درجه‌ی مُرلیِ ϕ باید بیشتر از d می‌بود.

همچنین توجه کنید که مجموعه‌ای متناهی مانند $A \subseteq M$ موجود است، به طوری که $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(p|_A)$ و $\deg(p) = \deg(p|_A)$. (منظور از $p|_A$ مجموعه‌ی همه‌ی فرمولهایی از p است که پارامترهای آنها در مجموعه‌ی A قرار دارند.) برای اثبات این گفته کافی است A را مجموعه‌ی پارامترهایی بگیریم که در فرمولِ ϕ (همان فرمولِ دارای مینیمومِ مرتبه و درجه در تایپ) ظاهر شده‌اند.

ادعا می‌کنیم که برای دانستن تعداد تایپهای روی M کافی است تعداد تایپهای روی زیرمجموعه‌های متناهی از M و مرتبه و درجه‌ی مُرلی آنها را بدانیم. در واقع اگر $p, q \in S_1(M)$ و $A \subseteq M$ و $p|_A = q|_A$ و $\mathrm{RM}(p|_A) = \mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(q)$ و

$\deg(p|_A) = \deg(q|_A) = \deg(q)$ آنگاه $p = q$. اگر خواسته‌های ادعا برقرار باشند و $p \neq q$ آنگاه فرمولی چون ψ_1 موجود است به طوری که $\psi_1 \in p$ و $\neg\psi_1 \in q$. فرض کنید ϕ فرمولِ با کمینه‌ی مرتبه و درجه‌ی مرلی در $p|_A = q|_A$ باشد. از آنجا که $\phi \wedge \psi_1 \in p$ داریم $\mathrm{RM}(\phi \wedge \psi_1) = \alpha$. مشابهاً از q $\phi \wedge \neg\psi \in$ نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{RM}(\phi \wedge \psi) = \alpha$. به دلیل مشابه $\deg(\phi \wedge \psi_1) = \deg(\phi \wedge \neg\psi_1) = d$ و این ناقضِ $\deg \phi = d$ است.

تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ M حداکثر برابر با κ است. تعداد مرتبه‌های مُرلیِ‌ممکن نیز κ است (زیرا مرتبه‌ی مُرلی به صورت پیوسته باید هر مقداری را اتخاذ کند؛ وقتی تعداد مجموعه‌های مورد نظر حداکثر κ است، حداکثر κ مقدار متفاوت می‌توان برای مرتبه‌ی مُرلی تصور کرد). نیز تعداد حالات ممکن برای درجه‌ی مرُلی شماراست. پس (بنا بر ادعای بالا) حداکثر تعداد تایپهای ممکن، κ است. $\square$

خلاصه‌ی اثبات بالا: از آن جا که تئوری مورد نظر بسیار متعالی است، همه‌ی تایپها در آن دارای مرتبه‌ی مُرلیند. هر تایپی توسط مرتبه و درجه‌ی مُرلیِ فرمولی در آن تعیین می‌شود. مرتبه و درجه‌ی مرلی این فرمول، بسته به بخشی متناهی از تایپ است. تعداد حالات ممکن، کمتر از κ است.

در خلال اثبات بالا به نکته‌ی زیر اشاره کردیم.

مشاهده ۲۱۵: گیریم T یک تئوریِ کاملاً متعالی باشد، $\mathfrak{M} \models T$ و $p \in S_n(M)$ تایپی باشد کامل. فرض کنیم فرمولِ $\phi \in p$ به گونه‌ای باشد که زوجِ $(\mathrm{RM}(\phi), \deg \phi)$، با ترتیب قاموسی، کوچکترین عنصر در مجموعه‌ی زیر باشد:

$$\{(\mathrm{RM}(\psi), \deg \psi) | \psi \in p\}.$$

آنگاه با استفاده از معادله‌ی زیر می‌توان واقع شدن یا نشدن یک فرمول دلخواه را در p تحقیق کرد:

$$\psi \in p \Leftrightarrow \mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha.$$

قضیه ۲۱۶: فرض کنید که T یک تئوریِ ωپایدار باشد، κ کاردینالی باشد دلخواه و $\lambda \leq \kappa$ کاردینالی منتظم باشد (یعنی آنگونه که $\mathrm{cof}(\lambda) = \lambda$.) آنگاه تئوریِ T دارای مدلی λاشباع است با اندازه‌ی κ. به ویژه اگر κ منتظم باشد، تئوریِ T دارای مدلی اشباع با اندازه‌ی κ است.

طرح اثبات. مدل دلخواهِ $T \models \mathfrak{M}$ را در نظر بگیرید و زنجیری مقدماتی مانند $\langle \mathfrak{M}_i | i < \lambda \rangle$ را از مدلهای T با استقراء چنان بسازید که

۱. $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$.

۲. برای هر $i < \lambda$ داشته باشیم $|M_i| < \lambda$.

۳. اگر $\alpha < \lambda$ حدی باشد، آنگاه $\mathfrak{M}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$.

۴. هر تایپِ متعلق به $S_1(M_\alpha)$ در $M_{\alpha+1}$ برآورده شود.

قرار دهید $\mathfrak{N} = \bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{M}_i$ و با کمک گرفتن از فرضِ منتظم بودنِ λ نشان دهید که $\mathfrak{N}$ مدلی λ اشباع است. $\square$

قضیه ۲۱۷ (قضیه‌ی اصلیِ این جلسه): گیریم $\kappa \geq \aleph_1$ و فرض کنیم که T یک تئوریِ κ جازم باشد. آنگاه یگانه‌ی مدلِ T (به پیمانه ایزومرفیسم) از اندازه‌ی κ، اشباع است.

اثبات. اگر κ منتظم باشد، آنگاه از آنجا که هر تئوریِ جازم در یک کاردینالِ ناشمارا، ω پایدار است، بنا به قضیه‌ی قبل تئوری مورد نظر دارای مدلی اشباع با اندازه‌ی κ است. اگر κ تکین [۱۹] باشد، آنگاه برای هر $\lambda < \kappa$ کاردینالِ $\lambda^+ < \kappa$ منتظم است. بنابراین یگانه‌ی مدلِ T با اندازه‌ی κ مدلی است λ^+ اشباع. با همین استدلال، مدل یادشده، برای هر $\lambda' < \kappa$ نیز λ'^+ اشباع است. پس این مدل، اشباع است (و اگر κ منتظم می‌بود تئوری مورد نظر بنا به قضیه‌ی قبل اشباع می‌بود). $\square$

[۱۹] singular

۱۱.۲ جلسه‌ی بیست و چهارم

پیشتر درباره‌ی مدلهای اولیه، به عنوان مدلهایی که به صورت مقدماتی در بقیه‌ی مدلها می‌نشیند، صحبت کرده‌ایم. نیز مدلهای اتمیک را معرفی کردیم که در آنها تایپها ایزوله‌اند. نشان دادیم که در یک زبان شمارا، مدل اولیه، به پیمانه‌ی ایزومرفیسم یکتاست و علتش این است که در زبان شمارا، مدلهای اولیه، اتمیکند. یعنی از آنجا که تایپها ایزوله‌اند، به آسانی می‌توان میان دو مدل اولیه، یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی برقرار کرد. با این حال، همان گونه که اشاره شد، در آنجا زبان را شمارا فرض کرده بودیم. برای ادامه‌ی بحث نیاز به بسط تئوری مشابهی با زدودن فرضِ شمارا بودن زبان هستیم. نخست آنچه را که گفته شد در قالب یادآوری زیر می‌آوریم:

یادآوری ۲۱۸: مدلِ $T \models \mathfrak{M}$ را اول می‌خوانیم هرگاه برای هر $T \models \mathfrak{N}$ نشاندنی مقدماتی مانند $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ موجود باشد. بنا به کاربردی از لون‌هایم‌اسکولم، همواره داریم $|M| \leq \|T\| := |T| + |L|$. مدلِ $\mathfrak{M}$ را اتمیک می‌خوانیم هرگاه $\operatorname{tp}(c_1, \ldots, c_n)$ برای هر $c_1, \ldots, c_n \in M$ ایزوله باشد. اگر زبان مورد نظر شمارا باشد، آنگاه هر مدل اول اتمیک است؛ زیرا، هر تایپِ غیرایزوله، بنا به قضیه‌ی حذف تایپ (که آن هم در زبانهای شمارا برقرار است) در توسیعی مقدماتی حذف می‌شود، پس در مدل اول نیز باید حذف شود.

سوال ۲۱۹: اگر $\mathfrak{M}$ مدلی اتمیک باشد و $|M| \leq \|T\|$ آیا آنگاه $\mathfrak{M}$ مدلی اول است؟ برای پاسخ به این سوال، دو حالتِ زبان شمارا و ناشمارا را در نظر بگیرید. توجه کنید که در حالتی که زبان شماراست، پاسخ سوال مثبت است و می‌توان توسط یک سامانه‌ی رفت (بدون نیاز به برگشت)، به حکم رسید.

در ادامه، پرسش بالا یکی از محورهای بحث است.

۱۲.۲ مدلهای ساخته‌شدنی

فرض می‌کنیم که T یک تئوریِ ωپایدار باشد.

تعریف ۲۲۰: گیریم $\mathfrak{M} \models T$ و $A \subseteq M$. گوییم مدلِ M روی مجموعه‌ی A ساخته‌شدنی [۲۰] است هرگاه دنباله‌ای چون $(b_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ چنان موجود باشد که

[۲۰] constructible

۱. $M = A \cup \{b_\alpha | \alpha < \gamma\}$.

۲. به ازای هر $\alpha < \gamma$ تایپِ b_α روی $Ab_{<\alpha}$ ایزوله باشد، که منظور از $b_{<\alpha}$ مجموعه‌ی $\{b_i | i < \alpha\}$ است.

تمرین ۲۲۱: اگر $\mathfrak{M}$ روی A ساخته‌شدنی باشد، نشان دهید که آنگاه

۱. $\mathfrak{M}$ مدلی اول برای تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$ است.

۲. $\mathfrak{M}$ مدلی اتمیک برای تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$ است (از لم زیر استفاده کنید).

برای حل قسمت دوم تمرین بالا، به لم زیر نیاز خواهید داشت:

لم ۲۲۲: اگر $\mathrm{tp}(a/A)$ و $\mathrm{tp}(b/Aa)$ هر دو ایزوله باشند، آنگاه $\mathrm{tp}(ab/A)$ نیز ایزوله است.

اثبات. فرض کنید $\mathrm{tp}(a/A)$ توسط $\phi(x)$ و $\mathrm{tp}(b/Aa)$ توسط $\psi(y, a)$ ایزوله شده باشند. ادعا می‌کنیم که در این صورت $\mathrm{tp}(ab/A)$ توسط فرمولِ $\phi(x) \wedge \psi(y, x)$ ایزوله می‌شود.

کافی است نشان دهیم که فرمول یادشده تایپْ ایزوله می‌کند. برای این منظور باید نشان دهیم که برای هر فرمولِ داده شده‌ی $\xi(x, y)$ فقط یکی از موارد زیر می‌تواند رخ دهد:

$$T \models \exists x, y \quad \xi(x, y) \wedge \phi(x) \wedge \psi(y, x).$$

$$T \models \exists x, y \neg\xi(x, y) \wedge \phi(x) \wedge \psi(y, x).$$

به برهان خلف فرض کنیم هر دوی آنها رخ داده باشند. در آن صورت فرمولِ $\phi(x)$ هم با $\exists y(\xi(x, y) \wedge \psi(y, x))$ سازگار است و هم با $\exists y(\neg\xi(x, y) \wedge \psi(y, x))$. از آنجا که فرمولِ $\phi(x)$ تایپْ‌ایزوله می‌کند داریم

$$T \models \phi(x) \to \exists y \quad (\xi(x, y) \wedge \psi(y, x))$$

$$T \models \phi(x) \to \exists y \quad (\neg\xi(x, y) \wedge \psi(y, x)).$$

عبارات بالا برای $x = a$ هم برقرارند؛ یعنی

$$T \models \phi(a) \to \exists y \quad (\xi(a, y) \wedge \psi(y, a))$$

$$T \models \phi(a) \to \exists y \quad (\neg\xi(a, y) \wedge \psi(y, a)).$$

عبارات سمت راست بالا، ناقضِ اینند که $\psi(y, a)$ تایپْ ایزوله می‌کند. □

تمرین ۲۲۳: در تئوریِ ACF، نشان دهید که $\mathbb{Q}^{alg}$، یعنی بستارِ جبری اعداد گویا، روی $\mathbb{Q}$ ساخته‌شدنی است.

تمرین ۲۲۴: مدلهای ساخته‌شدنی را در تئوریهای روابط هم‌ارزی تحلیل کنید.

در جلسه‌ی بعد قضیه‌ی زیر را ثابت خواهیم کرد. تئوریِ مورد نظر همچنان ωپایدار و شمارا است.

قضیه ۲۲۵: فرض کنید $\mathfrak{N} \models T$ و $A \subseteq N$. آنگاه مدلی مانند $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ ساخته‌شدنی روی A موجود است.

۱۳.۲ جلسه‌ی بیست و پنجم

قضیه ۲۲۶: فرض کنید $\mathfrak{N}$ مدلی دلخواه از T باشد و $A \subseteq N$ زیرمجموعه‌ای داده شده از آن. آنگاه $\mathfrak{N}$ دارای یک زیرمدل مقدماتیِ $\mathfrak{M}$ شاملِ A است که روی A ساخته‌شدنی است.

پیش از اثبات قضیه، لمی ساده را به عنوان تمرین آورده‌ایم:

تمرین ۲۲۷: فرض کنید $T \models \mathfrak{M}$ و A زیرمجموعه‌ای از M باشد. آنگاه $\mathfrak{M}$ روی A ساخته‌شدنی است اگروتنهااگر روی $\langle A \rangle$ ساخته‌شدنی باشد. منظور از $\langle A \rangle$ زیرساختاری از $\mathfrak{M}$ است که توسط A تولید شده است.

اثبات قضیه. اگر A خودْ جهانِ یک زیرساختِ‌مقدماتی باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. در غیر این صورت، بنا به محکِ تارسکی (برای تشخیص مقدماتی بودن زیرساختها) فرمولی چون $\phi(x)$ با پارامتر در A موجود است به طوری که

$$\mathfrak{N} \models \exists x \quad \phi(x) \quad \text{و} \qquad \forall a \in A \quad \mathfrak{N} \models \neg\phi(a). \quad (*)$$

فرض کنید فرمولِ ϕ در بالا چنان باشد که $(\mathrm{RM}\,\phi, \deg\phi) = (\alpha, d)$ در میان مقادیرِ $(\mathrm{RM}, \deg)$ در فرمولهایی که در $(*)$ صدق می‌کنند، با ترتیب قاموسی، مینی‌موم باشد.

ادعای ۲۲۸: فرمولِ ϕ کامل است؛ یعنی در تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a\in A}$، یک تایپِ کامل ایزوله می‌کند.

توجه کنید که کامل بودنِ فرمولِ ϕ معادل این است که هر فرمولِ سازگار با ϕ از ϕ نتیجه شود. به بیان دیگر برای هر فرمولِ $\psi(x)$ اگر داشته باشیم $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a\in A} \models \exists x \quad \phi(x) \wedge \psi(x)$ آنگاه $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a\in A} \models \forall x \quad (\phi(x) \rightarrow \psi(x))$.

اگر فرمولِ ϕ کامل نباشد، آنگاه فرمولِ $\psi(x)$ با پارامتر در A چنان موجود است به طوری که $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a\in A} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \neg\psi(x))$ و $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a\in A} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \psi(x))$. پس فرمولهای $\phi \wedge \psi$ و $\phi \wedge \neg\psi$ هر دو در $(*)$ صدق می‌کنند. از طرفی $\mathrm{RM}(\phi \wedge \psi) = \mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi) = \alpha$ و $\deg(\phi \wedge \psi) = \deg(\phi \wedge \neg\psi) = d$؛ و این ناقضِ $\deg\phi = d$ است.

فرض کنید $b_0 \in M$ چنان باشد که $\mathfrak{N} \models \phi(b_0)$. بنا به کامل بودنِ‌فرمولِ $\phi(x)$ روی A، $\mathrm{tp}(b_0/A)$ ایزوله است. حال زیرساخت تولید شده توسط A و b_0 را در نظر می‌گیریم. اگر این زیرساخت، مقدماتی نباشد، به طور مشابه می‌توان $b_1 \in M$ را چنان یافت که $\mathrm{tp}(b_1/Ab_0)$ ایزوله

باشد. از آنجا که $\mathfrak{N}$ به طور واضح، زیرساختی مقدماتی از خودْ است، این روند سرانجام (با به دست دادن زیرساختی مقدماتی و شاملِ A پایان می‌پذیرد). $\square$

توجه ۲۲۹: گفتیم که اگر $\mathfrak{M}$ روی A ساخته‌شدنی باشد، آنگاه مدلی اول است از تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$. بنابراین اندازه‌ی آن حداکثر برابر است با $|A| + \|L\|$.

قبلاً (در کلاس درس و تمرین) ثابت کرده‌ایم که در یک مدلِ κاشباع می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی با اندازه‌ی κ پیدا کرد. بازنشناختنی بودنْ از رمزی می‌آمد و قرار گرفتن دنباله در مدل، از اشباع بودن نتیجه می‌شد. در زیر نشان داده‌ایم که برای تئوریِ مفروض ما (که شمارا، کامل و کاملاً متعالی است)، در هر مدل ناشمارا می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی یافت.

نمادگذاری ۲۳۰: برای تایپِ کاملِ p منظورمان از $(\mathrm{RM}, \deg)(p) = (\alpha, d)$ این است که $\mathrm{RM}(p) = \alpha$ و در میان فرمولهای $\phi \in p$ که $\mathrm{RM}(\phi) = \alpha$ کمینه‌ی درجه‌ی مرلی برابر است با d.

قضیه ۲۳۱: گیریم $\mathfrak{M}$ مدلی ناشمارا باشد از T و A زیرمجموعه‌ای نامتناهی از M باشد به طوری که $|M| > |A|$. آنگاه M حاوی یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ $(a_i)_{i\in\omega}$ روی A است.

اثبات. گیریم $\kappa = |M|$ و $\kappa > \lambda = |A|$. واضح است که فرمولِ $x = x$ در M دارای بیش از λ جواب است. پس مجموعه‌ی A متشکل از فرمولهای دارای بیش از λ جواب، ناتهی است. فرمولِ $\phi(x, \bar{b}) \in L_M$ را چنان در نظر بگیرید که در میان فرمولهای موجود در A، دارای کمینه‌مقدارِ قاموسیِ $(\mathrm{RM}, \deg) = (\alpha, d)$ باشد. با افزودن پارامترهای $\bar{b}$ به A فرض می‌کنیم که $\phi(x, \bar{b}) \in L_A$.

ادعای ۲۳۲: عنصری چون $a. \in M$ چنان موجود است که $\models \phi(a., \bar{b})$ و $(\mathrm{RM}, \deg)\,\mathrm{tp}(a./A) = (\alpha, d)$. به بیان دیگر، فرمولِ ϕ را می‌توان به تایپی کامل روی A گستراند که همان درجه و مرتبه‌ی ϕ را داشته باشد. باز به بیان بهتر، فرمولِ $\psi(x)$ در تایپِ $a.$ قرار می‌گیرد اگروتنهااگر $(\mathrm{RM}, \deg)\psi \wedge \phi = (\alpha, d)$.

فرض کنیم که غیرِ این صورت باشد، یعنی برای هر $a \in M$ که $\models \phi(a, \bar{b})$ داشته باشیم $(\mathrm{RM}, \deg)(\mathrm{tp}(a/A)) < (\alpha, d)$. (توجه کنید که از آنجا که $\phi \in \mathrm{tp}(a/A)$، بزرگتری نمی‌تواند رخ دهد). پس برای هر $a \in \phi(M, \bar{b})$ فرمولِ $\psi_a(x) \in \mathrm{tp}(a/A)$ چنان موجود است

که $(\mathrm{RM},\deg)\psi_a < (\alpha,d)$. بی کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم که $\psi_a \subseteq \phi$ (اگر این طور نبود فرمولهای $\psi'_a = \psi_a \wedge \phi$ را در نظر می‌گیریم).

توجه کنید که تعدادِ ψ_a ها حداکثر برابر با $|A| = |A| + \aleph_0$ است. پس از آن جا که همه‌ی آنها زیرمجموعه‌ی ϕ هستند، حداقل یکی از آنها دارای اندازه‌ی بیش از λ است. به بیان دیگر، فرمولِ ψ را چنان یافته‌ایم که دارای بیش از λ جواب است و $(\mathrm{RM},\deg)\psi < (\alpha,d)$، که این ناقضِ نحوه‌ی انتخابِ ϕ است.

پس فرض کنید که $a_0 \in M$ به گونه‌ای باشد که $(\mathrm{RM},\deg)(\mathrm{tp}(a_0/A)) = (\alpha,d)$.

حال با همان استدلال بالا، $a_1 \in M$ را چنان می‌یابیم که $(\mathrm{RM},\deg)(\mathrm{tp}(a_1/Aa_0)) = (\alpha,d)$. بدینسان دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ حاصل می‌شود که در آن $(\mathrm{RM},\deg)(\mathrm{tp}(a_{n+1}/Aa_0\dots a_n)) = (\alpha,d)$.

ادعا می‌کنیم که دنباله‌ی (a_i) در بالا، بازنشناختنی است. برای اثبات ادعا، نشان خواهیم داد که برای هر $i_0 < \dots < i_n$ داریم $a_0\dots a_n \equiv a_{i_0}\dots a_{i_n}$. نخست حکم را برای $n = 0$ ثابت می‌کنیم؛ یعنی نشان می‌دهیم که برای هر i داریم $a_i \equiv a_0$. توجه کنید که $a_i, a_0 \in \phi(M)$. اگر فرمولی چون ψ موجود باشد به طوری که $\psi \in \mathrm{tp}(a_i/A)$ و $\neg\psi \in \mathrm{tp}(a_0/A)$ آنگاه $(\mathrm{RM},\deg)\phi \wedge \neg\psi = (\alpha,d)$. از طرفی از آنجا که $\psi \in \mathrm{tp}(a_i/a_0\dots a_{i-1})$ بنا به روش ساخت دنباله داریم $(\mathrm{RM},\deg)\phi \wedge \psi = (\alpha,d)$. این دو ناقضِ $(\mathrm{RM},\deg)\phi = (\alpha,d)$ هستند.

حال فرض می‌کنیم که داشته باشیم $a_0\dots a_n \equiv a_{i_0}\dots a_{i_n}$. می‌خواهیم از آن نتیجه بگیریم که $a_0\dots a_n a_{n+1} \equiv a_{i_0}\dots a_{i_n} a_{i_{n+1}}$. داریم

$$\psi(x,a_0,\dots,a_n) \in \mathrm{tp}(a_{n+1}/Aa_0\dots a_n) \Leftrightarrow (\mathrm{RM},\deg)(\psi(x,a_0,\dots,a_n) \wedge \phi) = (\alpha,d).$$

$$\psi(x,a_{i_0},\dots,a_{i_n}) \in \mathrm{tp}(a_{i_{n+1}}/Aa_{i_0}\dots a_{i_n}) \Leftrightarrow (\mathrm{RM},\deg)(\psi(x,a_{i_0},\dots,a_{i_n}) \wedge \phi) = (\alpha,d).$$

از طرفی از $a_0\dots a_n \equiv a_{i_0}\dots a_{i_n}$ نتیجه می‌شود که

$$(\mathrm{RM},\deg)(\psi(x,a_0,\dots,a_n) \wedge \phi) = (\mathrm{RM},\deg)(\psi(x,a_{i_0},\dots,a_{i_n}) \wedge \phi) = (\alpha,d)$$

و این حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

توجه ۲۳۳: در اثبات بالا بی آنکه به نامشان اشاره کنیم، از دنباله‌های مُرلی استفاده کردیم. منظورْ دنباله‌ای بازنشناختنی چون $(a_i)_{i\in\omega}$ است که در آن $a_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A a_0,\ldots,a_{n-1}$. در این نمادگذاری، $\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}$ می‌تواند هر درکی از استقلال باشد. عموماً این استقلالْ از آزاد بودن توسیع تایپها در تعبیری مناسب حاصل می‌شود؛ یعنی عموماً می‌نویسیم $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A a$ هرگاه $\operatorname{tp}(a/Ab)$ توسیعی «آزاد» باشد از $\operatorname{tp}(a/A)$.

در اثبات بالا از تعبیر عدمِ تغییر مرتبه و درجه‌ی مرلی در گسترشها استفاده کردیم: گفته‌ایم $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A a$ هرگاه $(\mathrm{RM},\deg)(\operatorname{tp}(a/Ab)) = (\mathrm{RM},\deg)\operatorname{tp}(a/A)$. در این تعبیر، دنباله‌ای که در اثبات ساختیم، مُرلی بود. تعاریف دقیقتر در زیر آمده‌اند.

فرمولِ $\phi(x,b)$ را گوییم که روی مجموعه‌ی A بخش می‌شود هرگاه دنباله‌ای Aبازنشناختنی چون $(b_i)_{i\in\omega}$ یافت شود که $b_0 = b$ و $\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ ناسازگار باشد. می‌گوییم فرمول یادشده روی A منشعب می‌شود هرگاه فصلی از فرمولهای بخش شونده را نتیجه دهد. یک تایپ کامل، بنا به تعریف روی یک مجموعه منشعب می‌شود، هرگاه فرمولی از آن روی آن مجموعه منشعب شود.

تمرین ۲۳۴: تعریف کنید $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A a$ هرگاه $\operatorname{tp}(a/Ab)$ توسیعی غیرانشعابی باشد از $\operatorname{tp}(a/A)$؛ به بیان دیگر هرگاه $\operatorname{tp}(a/Ab)$ روی A منشعب نشود. نشان دهید که (در یک تئوری کاملاًمتعالی) داریم $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A a$ اگروتنهااگر $\mathrm{RM}(\operatorname{tp}(a/Aa) = \mathrm{RM}(\operatorname{tp}(a/A))$.

تمرین ۲۳۵: دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ را مُرلی بخوانید هرگاه بازنشناختنی باشد و بعلاوه برای هر $n \in \omega$ داشته باشیم $a_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!|} a_{<n}$. نشان دهید که دنباله‌های مُرلی دقیقاً آنهایند که با روش زیر ساخته می‌شوند: یک تایپ جهانیِ $p = \operatorname{tp}(a/\mathbb{M})$ پیدا می‌کنیم که $\mathbb{M} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{\emptyset} a$. هر دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ که در آن $a_n \models p|_{a_{<n}}$، یک دنباله‌ی مُرلی است.

تمرین ۲۳۶: نشان دهید دنباله‌ای که در اثبات قضیه‌ی بالا ساخته شد، مُرلی است. (تنها نشان دهید که دنباله‌ی یادشده بازنشناختنی است).

تمرین ۲۳۷: مربوط به کلاس آموختال: بحث درباره‌ی دنباله‌های مُرلی در تئوریهای بسیارکمینال.

۱۴.۲ جلسه‌ی بیست و ششم

سرانجام همه‌ی مقدمات برای اثبات قضیه‌ی زیر از مُرلی فراهم آمد. در این جلسه این قضیه را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲۳۸ (قضیه‌ی مُرلی): فرض کنیم که T یک تئوریِ کاملِ شمارای به‌طورناشمارا جازم باشد. آنگاه T در هر کاردینالِ $\kappa \geq \aleph_1$، جازم است.

قضیه‌ی بالا از لم زیر به آسانی نتیجه می‌شود:

لم ۲۳۹: فرض کنیم که T یک تئوریِ ωپایدار باشد و κ کاردینالی ناشمارا. فرض کنیم که تمام مدلهای دارای اندازه‌ی κ از T اشباع باشند. آنگاه برای هر کاردینال ناشمارای λ همه‌ی مدلهای دارای اندازه‌ی λ از T اشباعند.

اثبات قضیه‌ی مُرلی به عنوان نتیجه‌ی لم بالا. قبلاً ثابت کرده‌ایم که اگر T در یک کاردینالِ ناشمارا، جازم باشد، آنگاه تنها مدلِ (همه‌ی مدلهای) آن با اندازه‌ی κ اشباعند. برای هر کاردینال ناشمارای دلخواهِ λ نیز بنا به لمِ بالا، تمام مدلهای T از اندازه‌ی λ، اشباعند. از این رو (با کمک سامانه‌های رفت‌وبرگشتی) همه‌ی مدلهای با اندازه‌ی λ از T با هم ایزومرفند؛ یعنی تئوری یادشده، λجازم است. $\square$

اثباتِ لم. فرض کنید که T مدلی چون $\mathfrak{M}$ داشته باشد دارای اندازه‌ی λ، که اشباع نباشد. بنابراین $A \subseteq M$ با $|A| < \lambda$ و $p(x) \in S_1(A)$ چنان موجودند که p در M برآورده نمی‌شود. قبلاً ثابت کرده‌ایم که دنباله‌ی بازنشناختنی چون $I = (a_i)_{i \in \omega}$ روی A در M موجود است.

از آنجا که p در M برآورده نمی‌شود، به ویژه $p(x)$ روی $A \cup I$ ایزوله نیست (اگر ایزوله بود، برآورده می‌شد). بنابراین هیچ فرمولی چون $\phi(x) \in L_{A\cup I}$ سازگار با $\mathfrak{M}$ موجود نیست، به طوری که برای هر $\theta(x) \in p$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \phi(x) \to \theta(x)$. پس برای هر فرمولِ $\phi(x) \in L_{A\cup I}$ که با $\mathfrak{M}$ سازگار باشد، فرمولی چون $\theta(x) \in p$ چنان موجود است که $\mathfrak{M} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \neg\theta(x))$.

ادعای ۲۴۰: بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که مجموعه‌ی A شماراست.

برای توجیه ادعای بالا، فرض کنیم که $A_0 \subseteq A$ شمارا باشد. در این صورت، مجموعه‌ی شمارای $A_1 \supseteq A_0$ چنان موجود است که برای هر فرمولِ $\phi(x) \in L_{A_0\cup I}$ که با $\mathfrak{M}$ سازگار باشد، فرمولِ $\theta(x) \in p(x)$ یافت شود که $\theta(x) \in L_{A_1}$ و $\mathfrak{M} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \neg\theta(x))$. بدین ترتیب

می‌توان مجموعه‌های $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$ را چنان یافت که برای هر فرمولِ $\phi \in L_{A_n \cup I}$ فرمولی چون $\theta \in L_{A_{n+1}}$ یافت شود به طوری که $\mathfrak{M} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \neg\theta(x))$. می‌توانیم قرار دهیم $A' = \bigcup_n A_n$ و تایپِ $p' = p|_{A'}$ را در نظر بگیریم. در این صورت برای هر فرمول θ متعلق به این تایپ، فرمولی در $L_{A' \cup I}$ مانند ϕ موجود است به طوری که $\mathfrak{M} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \neg\theta(x))$.

بنا به فشردگی، مدلی چون $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ و در آن دنباله‌ی بازنشناختنی روی A مانند $I' = (b_i)_{i \in \kappa}$ چنان موجودند که برای هر $i_1 < \dots < i_n$ داریم $b_{i_1} \dots b_{i_n} \equiv_A a_1 \dots a_n$. از سوئی، بنا به قضایای گذشته، $\mathfrak{N}$ دارای زیرمدلی مقدماتی چون $\mathfrak{M}'$ است که روی $A \cup I'$ ساخته‌شدنی است.

طبق فرض قضیه، $\mathfrak{M}'$ مدلی اشباع است (چون اندازه‌اش κ است)؛ پس تایپِ p در آن توسط عنصری چون c برآورده می‌شود. از آن جا که $\mathfrak{M}'$ روی $A \cup I'$ ساخته‌شدنی است، $\mathrm{tp}(c/A \cup I')$ ایزوله است؛ فرض کنیم فرمولِ $\psi(x, b_{i_1}, \dots, b_{i_n}, \bar{a}) \in \mathrm{tp}(c/A \cup I')$ آن را ایزوله کند. پس برای هر فرمولِ $\theta(x) \in p(x)$ داریم

$$\mathfrak{N} \models \psi(x, b_{i_1}, \dots, b_{i_n}, \bar{a}) \to \theta(x).$$

پس

$$\forall x(\psi(x) \to \theta(x)) \in \mathrm{tp}(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}/A) = \mathrm{tp}(a_1, \dots, a_n/A).$$

پس برای هر $\theta(x) \in p(x)$ داریم $\mathfrak{M} \models \psi(x, a_1, \dots, a_n, \bar{a}) \to \theta(x)$؛ تناقض. □

خلاصه‌ی اثبات. فرض کنیم همه‌ی مدلهای از اندازه‌ی κ اشباع باشند ولی مدلی داشته باشیم از اندازه‌ی λ که اشباع نباشد. در این مدل یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ I موجود است. اگر p تایپی باشد که در M برآورده نشود، روی AI ایزوله نیست.

از طرفی در یک توسیع مقدماتی از $\mathfrak{M}$ دنباله‌ای مانند I' همتایپ با I داریم که اندازه‌اش κ است. روی این دنباله و A مدلی ساخته‌شدنی در نظر می‌گیریم. تایپِ p در این مدل توسط فرمولی در $L_{A \cup I'}$ ایزوله می‌شود؛ بنابراین،از آنجا که دنباله‌ی I' با دنباله‌ی I روی A همتایپ است، این تایپ توسط فرمولی در $L_{A \cup I}$ نیز ایزوله می‌شود؛ تناقض با انتهای بند قبل.