۳.۲ جلسه‌ی شانزدهم، توابع اسکولمی و اِسْکولِمیزه کردن

فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشد و A زیرمجموعه‌ای از آن. می‌دانیم که $\langle A\rangle$، زیرساختار تولیدشده توسطِ A، مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی $t^{\mathfrak{M}}(a_1,\ldots,a_n)$ هاست. این مجموعه، لزوماً یک زیرساخت مقدماتی نیست؛ برای مثال زیرساخت تولید شده توسطِ ۱ در ساختارِ $\langle \mathbb{Q},+,-,\cdot\rangle$ برابر است با $\langle \mathbb{Z},+,-,\cdot\rangle$. با این همه، در مثال یادشده، اگر در زبان توابعِ $f_{\frac{1}{n}}(x)=\frac{x}{n}$ را می‌داشتیم، آنگاه زیرساخت تولیدشده توسط عنصر ۱ برابر می‌شد با خودِ $\langle \mathbb{Q},+,-,\cdot\rangle$، که مسلماً زیرساختی مقدماتی از ساختار یادشده است.

بنا به لمِ تارسکی، اگر $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$ آنگاه $\mathfrak{N}\prec\mathfrak{M}$ اگروتنهااگر برای هر فرمولِ بدونِ سور $\phi(x,\bar{a})\in L_M$، اگر $\mathfrak{N}\models\exists x\quad\phi(x,\bar{a})$ آنگاه

$$\mathfrak{N}\models\exists x\in M\quad\phi(x,\bar{a}).$$

اگر ترمهایی مانند t در زبان داشتیم، چنانکه از

$$\mathfrak{N}\models\exists x\quad\phi(x,\bar{a})$$

نتیجه می‌شد

$$\mathfrak{N}\models\phi(t(\bar{a}),\bar{a}),$$

آنگاه دو ساختار مورد نظر، لوازم لم تارسکی را می‌داشتند.

تعریف ۱۶۳ (ویژگی اسکولم): گوئیم در تئوری T توابع اسکولم تعبیه شده‌اند [۸]، هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x,\bar{y})$ ترمِ $t_\phi(\bar{y})$ چنان موجود باشد که

$$T\models\forall y\quad\left(\exists x\quad\phi(x,\bar{y})\rightarrow\phi(t_\phi(\bar{y}),\bar{y})\right).$$

توجه کنید که اگر $|\bar{y}|=0$ آنگاه ترم مورد نظر باید یک ثابت باشد؛ یعنی

$$T\models\exists x\phi(x)\rightarrow\phi(c_\phi).$$

[۸] T has built-in Skolem functions.

گزاره ۱۶۴: اگر T یک تئوری سازگار در زبانِ L باشد، زبانِ L' شامل L و تئوری T' در آن شاملِ T چنان موجودند که T' دارای توابع اسکولمیِ تعبیه‌شده است.

اثبات. قرار دهید $L_0 = L$ و $T_0 = T$ و فرض کنید L_1 زبانی باشد که در آن برای هر فرمولِ L_0 بدون سورِ $\phi(x, \bar{y})$ یک نماد تابعیِ f_ϕ داریم. نیز تئوریِ T_1 را اجتماعِ T_0 بگیرید با همه‌ی جمله‌های

$$\exists x \quad \phi(x, \bar{y}) \rightarrow \phi(f_\phi(\bar{y}), \bar{y})$$

که در آن $\exists x \quad \phi(x, \bar{y}) \in T_0$. تئوریِ T_1 دارای مدل است؛ برای تعبیر تابعِ f کافی است هر $f_\phi(\bar{y})$ را عنصری بگیریم که ضامنِ $\exists x \quad \phi(x, \bar{y})$ باشد. بدین ترتیب، زبانِ L_{n+1} را زبانی می‌گیریم که از اجتماعِ L_n با نمادهای تابعیِ f_ϕ برای هر $\phi(x, \bar{y}) \in L_n$ حاصل شده است و فرض می‌کنیم تئوریِ T_{n+1} از اجتماعِ T_n با جملات زیر حاصل شده باشد:

$$\exists x \quad \phi(x, \bar{y}) \rightarrow \phi(f_\phi(\bar{y}), \bar{y}).$$

برای هر $\phi(x, \bar{y}) \in L_n$. تئوریِ $T_\omega = \bigcup_{i<\omega} T_i$ در زبانِ $L_\omega = \bigcup_{i<\omega} L_i$ تئوریِ مورد نظر ماست. □

تعریف ۱۶۵: تئوریِ T_ω را اسکولمیزشِ (یا اسکولمیزه‌شده‌ی) [۹] T می‌خوانیم و آن را با T_{skolem} نشان می‌دهیم.

تمرین ۱۶۶:

۱. نشان دهید که T_{skolem} سورها را حذف می‌کند.

۲. نشان دهید که به هنگِ T_{skolem} همه‌ی جمله‌ها دارای معادل عمومیند (معادلی تنها دارای سور عمومی). به طور خاص، این تئوری دارای اصل‌بندی عمومی است.

۳. با استفاده اسکولمیزه‌سازی، و بدینسان تقلیل منطق مرتبه‌ی اول به منطق گزاره‌ها، اثباتی توپولوژیک برای قضیه‌ی فشردگی ارائه کنید.

فرض کنیم که تئوریِ T دارای توابع اسکولمی باشد. دیدیم که برای هر مجموعه‌ی مرتبِ خطیِ $\langle I, \leq \rangle$ می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی چون $(a_i)_{i\in\omega}$ در مدلی از T یافت. مدل تولیدشده توسطِ a_i ها را با $S_{EM}(a_i | i \in I)$ نشان می‌دهیم و آن را پوش اسکولمیِ (یا غلاف اسکولمیِ) [۱۰] این دنباله

[۹] Skolemization
[۱۰] Skolem hull

می‌خوانیم. (با توجه به نقش توابع اسکولمی نشان دهید که) داریم

$$S_{EM}(a_i|i \in I) \prec \mathfrak{M}$$

و به ویژه

$$S_{EM}(a_i|i \in I) \models T.$$

تمرین ۱۶۷: فرض کنید $f : I \to I$ یک اتومرفیسم ترتیبی باشد. نشان دهید که نگاشتِ $\hat{f} : S_{EM}(a_i|i \in I) \to S_{EM}(a_i|i \in I)$ با ضابطه‌ی $\hat{f}(t(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = \hat{f}(t(a_{f(i_1)}, \ldots, a_{f(i_n)}))$ یک اتومرفیسم است.