۲ جلسه‌ی دوم، مثالهایی از تئوریها

۱.۲ گروهها

در زبانِ $L_1 = \{*\}$ اصول زیر را تئوریِ گروهها می‌خوانیم و آن را با $T_{\text{گروه}}$ نشان می‌دهیم.

- $\sigma_1 : \quad \forall x \forall y \forall z \quad ((x*y)*z = x*(y*z))$

- $\sigma_2 : \quad \exists e\, (\forall x \quad x*e = e*x = x \quad \wedge \quad \forall x \exists y \quad x*y = e)$

به آسانی می‌توان دید که $\langle G,*\rangle \models T_{\text{گروه}}$ اگروتنهااگر $\langle G,*\rangle$ یک گروه باشد. نیز داریم

$$T_{\text{گروه}} \models \text{«عنصر خنثی یکتاست.»}$$

$$T_{\text{گروه}} \models \text{«وارون هر عنصر یکتاست»}$$

تمرین ۲۵: بررسی کنید که هرگاه $\langle G,*\rangle \models T_{\text{گروه}}$، هر زیرساخت از $\langle G,*\rangle$ یک شبه‌گروه [۲۱] است. [۲۲]

در تمرینِ بالا مشاهده کردیم که در زبانِ L_1، گروه‌بودن (یعنی مدلی از $T_{\text{گروه}}$ بودن) از G به زیرساختهای آن به ارث نمی‌رسد. درباره‌ی این که در یک تئوریِ داده‌شده، زیرساختها چقدر به ساختارهای شامل خود شبیه‌اند، در ادامه بیشتر خواهیم گفت.

گروهها را می‌توان در زبانهای مجهزتری نیز اصلبندی کرد. زبانهای $L_2 = \{*, e\}$ و $L_3 = \{*, ^{-1}, e\}$ را در نظر بگیرید. در زبانِ L_2 می‌توان تئوریِ $T^2_{\text{گروه}}$ را از اجتماع دو اصل زیر با اصلِ σ_1 حاصل کرد.

- $\theta_1 : \quad \forall x \quad x*e = e*x = x$.

- $\theta_2 : \quad \forall x \exists y \quad x*y = y*x = e$.

تمرین ۲۶: بررسی کنید هر زیرساخت از یک مدل از $T^2_{\text{گروه}}$ یک تکواره [۲۳] است. [۲۴]

---

[۲۱] semigroup

[۲۲] منظور از شبه‌گروه ساختاری است به همراه یک عملگرِ پخشپذیر.

[۲۳] monoid

[۲۴] منظور شبه‌گروهی است دارای عنصر خنثی.

در زبانِ L_3 نیز می‌توان تئوریِ T^3 را اجتماع اصولِ σ_1, θ_1 و اصل زیر در نظر گرفت.

- $\theta_3: \quad \forall x \quad x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

تمرین ۲۷: بررسی کنید که هر زیرساخت از یک مدل از $T^3_{\text{گروه}}$ خودْ مدلی از $T^3_{\text{گروه}}$ (یعنی یک گروه) است.

۲.۲ حلقه‌ها و میدانها

برای حلقه‌ها نیز می‌توان زبانهای مختلفی برگزید. ساختارِ $\langle R, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ را در زبانِ $L^1 = \{+, \cdot, 0, 1\}$ مدلی از تئوریِ حلقه‌ها، یا به طور کوتاه، حلقه می‌خوانیم هرگاه از اصول زیر پیروی کند (که مجموعه‌ی آنها را $T_{\text{حلقه}}$ می‌خوانیم).

- $\langle R, +, 0\rangle \models T^2_{\text{گروه}} \cup \{\forall x \forall y \quad x + y = y + x\}$
- $\forall x \forall y \forall z \quad (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$.

تمرین ۲۸: زبانِ $L^2_{\text{حلقه}} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ را برای حلقه‌ها در نظر گرفته نقش اصول مربوط به $\{-\}$ را در شناسایی مدلها و زیرساختارهاشان بررسی کنید. برای مثال بررسی کنید که در این زبان، هر زیرساخت از یک مدلِ دلخواه، حوزه‌ای صحیح است.

بدین‌ترتیب تئوری حلقه‌های جابجایی، $T_{\text{ح‌جابجایی}}$ از اجتماع $T_{\text{حلقه}}$ با تک‌اصلِ $\{\forall x \forall y \quad x \cdot y = y \cdot x\}$ حاصل می‌شود؛ تئوریِ $T_{\text{ح‌صحیح}}$، برای حوزه‌های صحیح، از اجتماعِ $T_{\text{ح‌جابجایی}}$ با تک‌اصلِ $\{\forall x \forall y \quad x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0\}$، و تئوریِ میدانها، $T_{\text{میدان}}$ از اجتماعِ $T_{\text{ح‌جابجایی}}$ با اصلِ زیر:

$$\forall x \quad (x \neq 0 \to \exists y \quad x \cdot y = y \cdot x = 1).$$

۱.۲.۲ میدانهای با مشخصه‌ی معین

دو میدانِ $\mathbb{Z}_p$ و $\mathbb{C}$ (به همراه عملهای جمع و ضرب و صفر و یکشان) مدلهایی ناهم‌ارزمقدماتیند از $T_{\text{میدان}}$؛ در اولی جمله‌ی زیر برقرار است ولی در دومی خیر.

$$\forall x \quad \underbrace{x + x + \ldots x}_{p \text{ بار}} = 0.$$

«مشخصه‌ی میدانها» میدانها را بر اساس این تفاوت متمایز می‌کند. بنا به تعریف، مشخصه‌ی یک میدانِ F عددی اول چون p است، هرگاه

$$\forall x \quad \underbrace{x + x + \dots x}_{p\ \text{بار}} = ۰.$$

نیز گوییم مشخصه‌ی میدانِ F صفر است هرگاه چنین عدد اول p موجود نباشد. بدین‌ترتیب می‌توان با افزودن جمله‌هایی به تئوری میدانها، مشخصه‌ی آنها را نیز تعیین کرد.

تمرین ۲۹: میدانی نامتناهی با مشخصه‌ی عدد اولِ p بیابید.

«متناهی بودن یا نبودن» چشمِ‌اسفندیار نظریه‌ی مدل است؛ در درسهای بعد دانش مدل‌تئوریک کافی را برای تجربه‌کردنِ این سخن فراهم خواهیم آورد. برای حال، به تمرین زیر بسنده کرده‌ایم.

تمرین ۳۰: آیا می‌توان یک تئوریِ T نوشت، به طوری که $T \models \langle F, +, \cdot, ۰, ۱\rangle$ اگروتنهااگر F میدانی با مشخصه‌ی متناهی باشد؟

پیش از آن که بیشتر درباره‌ی تئوریهای مربوط به میدانها بگوییم، در بخش بعد اندکی درباره‌ی جبر میدانها یادآوری می‌کنیم. بخش بعد تنها یادآور برخی مفاهیم جبری است و خواندن آن اختیاری.

۲.۲.۲ انحراف از بحث، جبر میدانها

فرض کنید F یک میدان با مشخصه‌ی $p < \infty$ باشد. آنگاه اشتراک همه‌ی زیرمیدانهای آن، که آن را با P نشان می‌دهیم، میدانی ایزومرف با $\mathbb{Z}_p$ است. اگر مشخصه‌ی F صفر باشد، آنگاه $P \cong \mathbb{Q}$. میدانِ P را زیرمیدانِ اولیه‌ی F می‌خوانیم. اگر F میدانی متناهی باشد، آنگاه عددی اول چون p و عددی چون $n \in \mathbb{N}$ موجودند، به طوری که $|F| = p^n$ و $\text{char}(F) = p$. گروه ضربی متشکل از همه‌ی عناصرِ ناصفر یک میدانِ متناهیِ F گروهی دوری است. نیز چنین میدانِ F توسیعی ساده از زیرمیدانِ اولیه‌ی خود، $\mathbb{Z}_p$ است؛ یعنی $F = \mathbb{Z}_p(u)$ برای یک $u \in F$.

اگر F میدانی با مشخصه‌ی p باشد، آنگاه برای هر $r \geq ۰$ نگاشتِ $\phi : F \to F$ که هر x را به x^{p^r} می‌برد، یک $\mathbb{Z}_p$ مونومرفیسم است. در صورتی که F متناهی باشد، این نگاشت یک $\mathbb{Z}_p$ اتومرفیسم است.

گزاره ۳۱: میدانِ متناهیِ F دارای p^n عضو است اگروتنهااگر میدانِ شکافنده‌ی (تعریف در زیر) چندجمله‌ایِ $x^{p^n} - x$ روی $\mathbb{Z}_p$ باشد. برای هر عدد اول p و هر $n \in \mathbb{N}$ میدانی (یکتا به پیمانه‌ی

ایزومرفیسم) از اندازه‌ی p^n موجود است. اگر K یک توسیع میدانی از F با بُعد متناهی باشد، آنگاه K متناهی و گالوا (تعریف در زیر) روی F است. نیز گروه گالوای Aut_F^K (تعریف در زیر) دوری است.

فرض کنید $F \subseteq K$ یک توسیع میدانی باشد. عنصرِ $u \in F$ را روی K جبری می‌خوانیم هرگاه ریشه‌ای از یک چندجمله‌ای مانند $f \in K[x]$ باشد؛ در غیر این صورت، u را روی K متعالی می‌خوانیم. اگر همه‌ی عناصرِ F روی K جبری باشند، F را توسیعی جبری از K، و در غیر این صورت آن را توسیعی متعالی از K می‌خوانیم.

اگر $u \in F$ روی K جبری باشد، آنگاه $K(u)$، میدان تولیدشده توسط K, u در F، ایزومرف با $K(x)$، میدان متشکل از توابعِ گویا است. اگر u روی K جبری باشد آنگاه

۱. $K(u) = k[u]$.

۲. $K(u) \cong K[x]/(f)$ که در آن f چندجمله‌ایِ کمینالِ u و فرضاً دارای درجه‌ی n است.

۳. $[K(u) : K] = n$.

۴. $K(u)$ به عنوان یک فضای برداری روی K توسط عناصرِ $\{۱, u, u^۲, \ldots, u^{n-۱}\}$ تولید می‌شود.

میدانِ F را یک توسیع گالوایی از K می‌خوانیم هرگاه

$$K = \{x \in F | \forall f \in \mathrm{Aut}_K^F \quad f(x) = x\}.$$

منظور از Aut_K^F مجموعه‌ی همه‌ی اتومرفیسمهایی از F است که K را نقطه‌وار حفظ می‌کنند.

گزاره ۳۲ (قضیه‌ی بنیادین نظریه‌ی گالوا): اگر F یک توسیع گالواییِ با بعدِ متناهی از K باشد، آنگاه میان دو مجموعه‌ی زیر تناظری یک‌به‌یک است:

- همه‌ی میدانهای H که $K \subseteq H \subseteq F$.
- همه‌ی زیرگروه‌های گروهِ Aut_K^F.

تناظرِ یادشده، نگاشتی است که هر میدانِ E را به Aut_E^F می‌فرستد و ویژگی‌های زیر را داراست:

- برای هر دومیدانِ $K \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq F$ داریم $[\mathrm{Aut}^F_{H_1} : \mathrm{Aut}^F_{H_2}] = [H_2 : H_1]$. بنابراین مرتبه‌ی گروه Aut^F_K برابر است با $[F : K]$.

- F روی هر میدانِ $K \subseteq H \subseteq F$ گالواست؛ ولی H روی K وقتی و تنها وقتی گالواست که Aut^F_H زیرگروهی نرمال از Aut^F_K باشد. در این صورت داریم $\mathrm{Aut}^H_K \cong \mathrm{Aut}^F_K \,/\, \mathrm{Aut}^F_H$.

گوییم چندجمله‌ایِ $f \in F[x]$ روی میدانِ F شکافته می‌شود [25] هرگاه آن را بتوان به صورتِ $u_0(x-u_0)(x-u_2)\dots(x-u_n)$ نوشت که در آن $u_i \in F$. به میدانِ $F(u_1, \dots, u_n)$ میدانِ شکافنده‌ی چندجمله‌ایِ f روی میدانِ F می‌گوییم. برای هر $f \in F[x]$ میدان شکافنده‌ای چون F_1 موجود است به طوری که $[F_1 : F] \leq n!$.

میدانِ F را بسته‌ی جبری می‌خوانیم هرگاه هر چند جمله‌ایِ $f \in F[x]$ در F ریشه داشته باشد (یعنی F میدان شکافنده‌ی همه‌ی چندجمله‌ایهای $f \in F[x]$ باشد). هر میدانِ K دارای یک بستارِ جبری است؛ یعنی میدانی بسته‌ی جبری چون $F \supseteq K$ موجود است که F روی K جبری است (معادلاً F میدان شکافنده‌ی همه‌ی چندجمله‌های تحویل‌ناپذیر در $K[x]$ است).

اگر F روی K جبری باشد، آنگاه $|F| \leq \aleph_0 . |K|$. هر دو بستارِ جبری از یک میدانِ K با هم K ـ ایزومرفند.

چندجمله‌ایِ تحویل‌ناپذیرِ $f \in K[x]$ را جدایی‌پذیر [26] خوانیم هرگاه در یک میدانِ شکافنده‌ی f روی K همه‌ی ریشه‌های این چندجمله‌ای، ساده باشند. عنصرِ جبریِ $u \in F - K$ را جدایی‌پذیر خوانیم هرگاه چندجمله‌ای کمینال آن جدایی‌پذیر باشد. توسیعِ F از K را جدایی‌پذیر خوانیم هرگاه همه‌ی عناصر آن روی K جدایی‌پذیر باشند. موارد زیر با هم معادلند:

- F توسیعی جبری و گالوا از K است.

- F میدان شکافنده‌ی مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های جداشدنی در $K[x]$ است.

- F میدان شکافنده‌ی یک مجموعه از چندجمله‌ها در $K[x]$ است و F روی K جداشدنی است.

[25] splits
[26] separable

توسیعِ جبریِ F از K را نُرمال می‌خوانیم هرگاه هر چندجمله‌ایِ $f \in K[x]$ که ریشه‌ای در F دارد، همه‌ی ریشه‌هایش در F باشند (معادلاً هرگاه F روی K جبری و میدان شکافنده‌ی مجموعه‌ای از چندجمله‌ها در $K[x]$ باشد).

گزاره ۳۳: توسیعِ جبری F از K گالواست اگروتنهااگر نرمال و جدایی‌پذیر باشد. اگر مشخصه‌ی F صفر باشد، آنگاه F روی K گالواست اگروتنهااگر نرمال باشد.

گیریم E توسیعی جبری از K باشد. میدانِ F را بستارِنرمال [۲۷] میدان E روی K می‌خوانیم هرگاه شرایط زیر برآورده شود:

- F روی K نرمال باشد.
- هیچ زیرمیدانِ سره از F شاملِ E، روی K نرمال نباشد.
- اگر E روی K جدایی‌پذیر باشد، F روی K گالوا باشد.
- $[F:K]$ متناهی باشد اگروتنهااگر $[E:K]$ متناهی باشد.

گزاره ۳۴ (قضیه‌ی اساسیِ جبر): میدانِ اعداد مختلط، بسته‌ی جبری است (و هر بستار جبریِ اعداد حقیقی با آن ایزومرف است).

گفتیم که هر میدانی دارای بستارِ جبری است. بستارِ جبریِ میدانِ $\mathbb{F}_p$ میدانِ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}$ است (این میدان نیز دارای مشخصه‌ی p است).

۳.۲.۲ میدانهای بسته‌ی جبری

تئوریِ میدانهای بسته‌ی جبری، که آن را با ACF نشان می‌دهیم از اجتماعِ $T_{\text{میدان}}$ با طرحاصول زیر حاصل می‌شود:

$$\theta_n : \quad \forall a_۱ \dots a_n \quad \exists x \quad x^n + a_۱ x^{n-۱} + \dots + a_n = ۰.$$

همانگونه که از توضیحِ پس از گزاره‌ی ۳۴ معلوم است، می‌توان میدانهای بسته‌ی جبری‌ای با مشخصه‌ی ناصفر داشت؛ بنابراین دو مدل از ACF لزوماً هم‌ارز مقدماتی نیستند. به بیانِ بهترِ ACF کامل [۲۸] نیست.

[۲۷] normal closure

[۲۸] complete

تئوریِ T را کامل می‌خوانیم هرگاه همه‌ی مدلهای آن هم‌ارز مقدماتی باشند. به بیان دیگر هرگاه T سازگار باشد و برای هر جمله‌ی θ یا $T \models \theta$ یا $T \models \neg\theta$.

با ACF_p و $ACF_\circ$ به ترتیب تئوری میدانهای بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی p و با مشخصه‌ی صفر را نشان می‌دهیم.

گزاره ۳۵ (تارسکی): $ACF_\circ$ و ACF_p تئوریهایی کامل هستند.

تمرین ۳۶: فرمولهای بدون سور (بدون‌پارامتر، و با پارامتر) را در ساختارِ $\langle F, +, \cdot, \circ, 1\rangle$ شناسایی کنید.

۳.۲ مدولها

گیریم R حلقه‌ای یکدار و نه لزوماً جابجایی باشد. گوییم M یک R ـ مدول است، هرگاه

۱. M گروهی باشد آبلی،

۲. نگاشتی $R \times M \to M$ موجود باشد، با ضابطه‌ی $(r, m) \mapsto rm$ به طوری که

(آ) $r(m + n) = rm + rn$.

(ب) $(r + s)m = rm + sm$.

(ج) $r(sm) = (rs)m$.

مثال ۳۷:

۱. اگر K یک میدان باشد، هر K ـ مدول یک فضای برداری است.

۲. $\mathbb{Z}$ ـ مدولها دقیقاً همان گروههای آبلی هستند: $na = a + \ldots + a$ و $(-n)a = -(na)$.)

۳. $\mathbb{Q}$ ـ مدولها، دقیقاً همان گروههای آبلیِ بدون تاب هستند.

۴. $\mathbb{F}_p$ ـ مدولها، گروههای آبلیِ دارای مرتبه‌ی p هستند (p عددی اول است).

زبانِ $L_{mod}(R) = \{\circ, +, -, r\}_{r\in R}$ را در نظر بگیرید. هر R ـ مدول یک $L_{mod}(R)$ ـ ساختار است که در آن، تابعِ r به صورتِ $r(x) = rx$ تعبیر شده است (توجه کنید که در این زبان نمی‌توان

روی عناصرِموجود در R سور بست). در زبانِ یادشده، R ـ مدولها تشکیل کلاسی مقدماتی می‌دهند، با اصولی شاملِ خانواده‌ی زیر از اصول (دریافتن سایر اصول این تئوری بر عهده‌ی خواننده است)

$$\{\forall x \quad (rs)x = r(s(x))\}_{r,s\in R}$$

تمرین ۳۸: فرمولهای بدون سور را در زبان مدولها بررسی کنید.

۴.۲ مجموعه‌های مرتب

مجموعه‌های مرتب را در زبانِ $L_{\text{ترتیب}} = \{\leq\}$ مطالعه می‌کنیم. تئوری مجموعه‌های جزئاًمرتب با اصول زیر اصلبندی می‌شود:

- $\forall x \quad x \leq x$.
- $\forall xy \quad (x \leq y \wedge y \leq x \to x = y)$.
- $\forall xyz \quad (x \leq y \wedge y \leq z \to z \leq z)$.

اصل زیر، بیان «خطی» بودن ترتیب است:

- $\forall x \forall y \quad x \leq y \vee y \leq x$.

اصل زیر بیانگر چگال بودن ترتیب است:

- $\forall xy \quad (x < y \to \exists z \quad x < z < y)$.

تمرین ۳۹: تئوریِ مجموعه‌های مرتب خطی گسسته بدون ابتدا و انتها را اصل‌بندی کنید.

۵.۲ گروههای مرتب خطی

تئوری گروههای مرتب خطی از افزدون دو اصل زیر به اصول تئوری گروهها حاصل می‌شود:

- $\forall xyz \quad (x + y < x + z \to y < z)$.

• $\forall xyz \quad (y+x<z+x \to y<z)$.

در این تئوری می‌توان ثابت کرد که گروههای مرتب خطی، بدون تاب هستند. به طور مشابه می‌توان تئوری میدانهای مرتب را نوشت که از آن نتیجه می‌شود که این میدانها مشخصه‌ی صفر دارند.

۶.۲ انحراف از بحث، جبرِ میدانهای بسته‌ی حقیقی

میدانِ K را حقیقی می‌خوانند هرگاه در آن ۱− را نتوان به صورت مجموعی از مربعات نوشت. برای مثال، هر میدان مرتب، حقیقی است. نیز، هر میدان حقیقی، ترتیب‌پذیر است. اگر R میدانی حقیقی باشد که هر توسیع جبری سره‌اش غیرحقیقی شود (یعنی هیچ توسیع جبری سره‌ای نداشته باشد که حقیقی باشد) به R یک میدان بسته‌ی حقیقی می‌گوییم. میدان اعداد حقیقی (بنا به قضیه‌ی اساسی جبر) یک چنین میدانی است. همان طور که می‌دانیم، تنها فاصله‌ی میدان اعداد حقیقی، تا بسته‌ی جبری شدن، $\sqrt{-1}$ است. همین، برای همه‌ی میدانهای بسته‌ی حقیقی برقرار است.

گزاره ۴۰: میدانِ حقیقیِ R، بسته‌ی حقیقی است اگروتنهااگر $R(i)$ یک میدان بسته‌ی جبری باشد (این گفته در واقع نتیجه‌ای از قضیه‌ی اساسی جبر است).

هر میدان حقیقی دارای یک بستار حقیقی است؛ یعنی اگر K حقیقی باشد، میدانی چون $K \subseteq R$ چنان موجود است که R توسیعی جبری از K و خودْ بسته‌ی حقیقی است.

هر میدان بسته‌ی حقیقی دارای ترتیبی یکتاست.

گزاره ۴۱: یک میدانِ حقیقی، بسته‌ی حقیقی است اگروتنهااگر ویژگیِ مقدار میانی داشته باشد؛ یعنی هر چندجمله‌ایِ p که در b مقداری مثبت دارد و در $a<b$ مقداری منفی، در نقطه‌ای در بازه‌ی (a,b) صفر شود.

گزاره‌ی زیر نیز محک دیگری برای بسته‌ی حقیقی بودن یک میدان ارائه می‌کند.

گزاره ۴۲: میدان R بسته‌ی حقیقی است اگروتنهااگر برای هر $a \in R$ یکی از $a, -a$ دارای مجذور، و هر چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد دارای ریشه باشد.

۷.۲ میدانهای بسته‌ی حقیقی

گفتیم میدانهای بسته‌ی حقیقی، بنا تعریف میدانهایی هستند که در آنها ۱− مجموعی از مربعات نیست ولی در هر توسیع جبریشان، ۱− مجموعی از مربعات است. این گفته را نمی‌توان به صورت

مرتبه‌ی اول نوشت. با این حال، در بخش قبل تعاریف معادلی برای این میدانها عرضه کردیم که قابل بیان در زبان مرتبه‌ی اولند.

تئوری میدانهای بسته‌ی حقیقی، از اجتماعِ تئوری میدانهای مرتب با اصول زیر حاصل می‌شود (مورد سوم، طرح‌اصل است).

- $\forall x \quad (x > 0 \rightarrow \exists y \quad y^2 = x)$.
- $\forall xy \quad x^2 + y^2 = 0 \rightarrow x = y = 0$.
- $\sigma_n : \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \quad \forall a < b \quad (a^n + \alpha_1 a^{n-1} + \dots + \alpha_n > 0 \quad \wedge \quad b^n + \alpha_1 b^{n-1} + \dots + \alpha_n < 0 \rightarrow \exists a < x < b \quad x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0)$

تئوری یادشده را با RCF نمایش می‌دهیم.

گزاره ۴۳ (تارسکی): RCF کامل و دارای حذف سور و از این رو تصمیم‌پذیر است.

۸.۲ انحراف از بحث، حساب در نظریه‌ی مدل

تا اینجا چند مثال از تئوریها دیده‌ایم. برخي از این مثالها تئوریهای کامل هستند، از این حیث که درستی یا نادرستی هر جمله‌ی داده شده از اصول آنها قابل استنتاج است. به درست آوردن يك تئوری کامل چندان دشوار نیست. براي هر L ـ ساختارِ $\mathfrak{M}$ تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{m} = \{phi|\mathfrak{M} \models \phi\}$ يك تئوری کامل است که آن را تئوری کامل ساختار $\mathfrak{M}$ می‌خوانیم.

با این حال وجود يك اصلبندی مناسب براي تئوریِ کامل يك ساختار همواره مطلوب نظریه‌مدل‌دان است. براي مثال دیدیم که تئوریِ ACF که معادل است با تئوری کامل ساختار اعداد مختلط دارای يك اصل بندیِ کامل محاسبه‌پذیر است. سوال این است که آیا ممکن است يك تئوری کامل مناسب براي کل دنیای ریاضیات نوشت. این اصلبندی باید آنقدر جامع باشد که دو روي متفاوت ریاضیات یعني هندسه و حساب را دربربگیرد؛ درست همانگونه که چند اصل ساده‌ی هندسه‌ی اقلیدسی براي این هندسه مکفی است.

هیلبرت را شاید بتوان مهمترین ریاضیدان قائل به امکان ارائه‌ی دستگاهی از اصول براي ریاضیات دانست. او در سخنرانی تاریخیش در کونیکسبرگ در سال ۱۹۳۰ تأکید کرده بود که هیچ سؤال بي‌پاسخی در ریاضیات باقی نخواهند ماند و به زودي ریاضیات دارای دستگاهی کامل از اصول

خواهد شد که درستی یا نادرستی هر جمله‌ای از آن اصول نتیجه شود. درست بودن این گفته معادل امکان ساخت رایانه‌ای است که اصولی اولیه را را به دست گیرد و خود همه‌ی ریاضیات را تولید کند. در همان سال و گویا چندی بعد، در همان فراهمایی، گودل سایر ریاضیدانان را از قضیه‌ی ناتمامیت خود آگاه کرده بود. بنا به قضیه‌ی گودل براي هر اصلبندی مناسبي که برای حساب در نظر بگیریم جمله‌ای هست که نه از این اصلبندی اثبات و نه با کمک آن رد مي‌شود. اثبات گودل، از نوع اثباتهای خودبازگشت بود؛ یعني اثباتی با ایده‌های مشابه به تناقضات دروغگو یا راسل.

از قضیه تمامیت گودل نتیجه مي‌شود که عاری بودن یا نبودن ریاضیات از تناقض قابل اثبات نیست. در واقع اصول زرملو ـ فرانکل که امروز به عنوان دستگاه کارآمدی براي مبانی ریاضیات در نظر گرفته مي شود تنها در صورتي سازگار است که متناقض باشد! امروزه موضوع کار بسیاري منطقدانان بررسي سازگاري قضیه‌هاي معروف ریاضي با اصول زرملو ـ فرانکل و بررسي اثباتپذیری یا عدم اثباتپذیری آنها در این دستگاه از اصول است.

برای حساب، و در ادامه‌ی اصول زرملو ـ فرانکل، اصول پئانو در نظر گرفته مي‌شود که در زیر درباره‌ي آن توضیحی داده‌ایم. خواننده‌ي علاقه‌مند را به مطالعه‌ی مقاله‌ی «تجاهل بورباکی» ترجمه نویسنده‌ی دوم ترغیب می‌کنیم.

۹.۲ تئوری حساب

برای ساختارِ $\langle \mathbb{N}, s, +, \times, ۰, ۱, \leq \rangle$ که در آن $s(x) = x + ۱$ مجموعه‌ی اصول زیر (موسوم به اصول پئانو) را در نظر می‌گیریم.

- $\forall x \quad x + ۰ = x$
- $\forall xy(x + s(y) = s(x + y)$.
- $\forall x \quad (x \times ۱ = x)$.
- $\forall xy \quad (x \times s(y) = s \times y + x)$.
- $\forall x \quad (x < s(x) \wedge \neg\exists y \quad x < y < s(x)$.
- برای هر فرمولِ $\phi(x, \bar{y})$ اصلِ $I_\phi(x, \bar{y})$ که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall \bar{y} \quad \phi(۰, \bar{y}) \wedge \forall x(\phi(x, \bar{y}) \to \phi(s(x), \bar{y}) \to \forall x \phi(x, \bar{y}).$$

اصول پئانو را می‌توان بخش مقدماتی حساب به شمار آورد. همانگونه که در بخش قبل گفتیم، این اصول قابلیت در خود گنجاندن همه‌ی حساب را ندارند. علاوه بر اثباتی که گودل بر گفته ارائه کرده است، جملاتی پیدا شده است که در اعداد طبیعی صادقند ولی از این اصول نتیجه نمی‌شوند (قضیه‌ی پاریس هرینگتون را ببینید). نیز قضیه‌ی آخر فرما که معادله‌ی $x^n + y^n = z^n$ برای $n > ۲$ ریشه‌ی غیربدیهی ندارد، در اعداد طبیعی درست است، ولی نتیجه شدن یا نشدن آن از اصول پئانو، هنوز سوالی باز است. در واقع اثبات قضیه‌ی فرما، از منطق مرتبه‌ی اول فاصله‌ی زیادی دارد.

۱۰.۲ گرافها

تئوری گرافها در زبانِ $L_{\text{گراف}} = \{R\}$ شامل اصول زیر است.

- $\forall x \quad \neg R(x,x)$.
- $\forall xy \quad (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$.

گرافی که علاوه بر اصول فوق، از اصل زیر نیز پیروی کند، «تصادفی» خوانده می‌شود.

$$\forall x_۱ \ldots x_n \quad \forall y_۱ \ldots y_n (\bigwedge_{i,j \in \{۱,\ldots,n\}} x_i \neq y_i \rightarrow \exists x \quad (\bigwedge_{i=۱,\ldots,n} R(x,x_i) \wedge \bigwedge_{j=۱,\ldots,n} \neg R(x,y_i))$$

۱۱.۲ انحراف از بحث، گرافهای تصادفی و قاعده‌ی صفرویک

بعداً تکمیل خواهد شد.

۱۲.۲ فضاهای متریک

برای هر $r \in \mathbb{Q} \cap [۰,۱]$ یک محمولِ $R_r(x,y)$ در زبان در نظر می‌گیریم، که قرار است نقشِ $d(x,y) \leq r$ را ایفا کند. اصول زیر را برای فضاهای متریک با متر کراندار در نظر می‌گیریم.

- $\forall xy \quad R_r(x,y) \leftrightarrow R_r(y,x)$.
- $\forall xy (R_۰(x,y) \leftrightarrow x = y)$.
- $\forall xy (R_۱(x,y)$.

- $\forall xyz \quad (R_r(x,y) \wedge R_s(y,z) \rightarrow R_{r\dot{+}s}(x,z))$.

که در آن، $r \dot{+} s = \min\{۱, r+s\}$.

تمرین ۴۴: نشان دهید که هر مدل از تئوری بالا را می‌توان به عنوان یک فضای متریک با مقادیر متریِ واقع در بازه‌ی $[۰, ۱]$ در نظر گرفت (تعریف کنید $d(x,y) = \inf\{s | R_s(x,y)\}$).