مباحثی در منطق

مسعود پورمهدیان، محسن خانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱۳ بهمن ۱۳۹۵

چکیده

هدف نهایی در این دوره‌ی درسی، اثبات «قضیه‌ی جازمیت»، ثابت‌شده توسطِ «مُرْلی» است. بنا به این قضیه، هر تئوریِ الف‌یک‌جازم، در هر کاردینالِ ناشمارای κ، جازم است. تئوریِ T را در کاردینالِ κ جازم می‌خوانند، هرگاه همه‌ی مدلهای با اندازه‌ی κ از آن، با یکدیگر یکریخت باشند. درس را با مطالعه‌ی برخی ویژگی‌های جبری در منطق، مانند حذف سور و مدل‌کامل بودن می‌آغازیم. در ادامه به ساختمانهای نظریه‌ی مدلی، مانند فراضربها و ساختارهای سودومتناهی خواهیم پرداخت، و در نهایت قضیه‌ی مُرلی را پس از پرداختن به همه‌ی پیشنیازهای نظریه‌ی مدلی آن، مانند تئوری‌های پایدار، مرتبه‌ی مرلی، و تئوریهای بسیارکمینه، اثبات خواهیم کرد. در بخش دیگری از درس به «حذف موهومیات» خواهیم پرداخت و ثابت خواهیم کرد که در تئوری میدانهای بسته‌ی جبری، موهومیات قابل حذفند. پیشنیازهای این درس، گذرانده بودن درس منطق ریاضی، و آشنایی مقدماتی با نظریه‌ی مدل هستند. علاوه بر جزوه‌ای که مدرس و دستیار برای درس تهیه خواهند کرد، منابع زیر را نیز به دانشجویان پیشنهاد می‌کنیم.

- A Course in Model Theory, Katrin Tent, Martin Ziegler, Cambridge University Press.
- Model Theory: An Introduction, David Marker, Springer Science and Business Media.

- Model Theory, Chen Chung Chang, H. Jerome Keisler, Dover Books on Mathematics

فهرست مطالب

۱ مقدمات

نظریه‌ی مدل [1] شاخه‌ایست از منطق ریاضی که هدف آن مطالعه‌ی ساختارهای ریاضیاتی است با بهره‌گیری از زبان و منطق صوری [2] و با بررسی فرمولهایی که در آن ساختارها درستند. ساختارهای ریاضیاتی می‌توانند جبری باشد، همچون گروهها،فضاهای برداری، مدولها، میدانها و حلقه‌ها، یا ترکیبیاتی، مانند گرافها، یا آنالیزی مانند فضاهای متریک. مطالعه‌ی هر نوع از این ساختارها، انتخاب **زبانی** مناسب می‌طلبد که در آن بتوان ویژگی‌های این ساختارها را اصلبندی کرد. علاوه بر این، باید **منطقی** مناسب و وابسته به زبان انتخاب شود که قابلیت حمل مفاهیم مورد نیاز را داشته باشد.

در برخورد نظریه‌ی مدلی با ریاضیات دو رهیافت کلی وجود دارد، که اولی را می‌توان رهیافت کلاسیک و دومی را رهیافت نوین نامید. مطالعه‌ی بسیاری ساختارهای برآمده از جبر و آنالیز عموماً موضوع رهیافت اولی بوده است. در زیر این دو رهیافت را بیشتر واکاویده‌ایم:

رهیافت اول. در این رهیافت، ساختارهای معروف و حائزِ اهمیت را در ریاضیات در نظر گرفته زبان مناسبی برای مطالعه‌ی آنها انتخاب و در این زبان آنها را اصل‌بندی می‌کنیم. ساختارهایی را که دارای اصلبندی‌های **کامل** مناسبی باشند که خوشرفتاری جبری یا آنالیزی آنها را توجیه کند، اصطلاحاً **رام** [3] می‌خوانند. [4]

برای نمونه، میدان اعداد مختلط، به عنوان مدلی از تئوری کامل **میدانهای بسته‌ی جبری** مورد مطالعه قرار می‌گیرد و میدان اعداد حقیقی، به عنوان مدلی از تئوری کامل **میدانهای بسته‌ی حقیقی**. ایندو ساختار را نخستین بار تارسکی اصلبندی و خوشرفتاریهای جبریشان را از دیدگاه نظریه‌ی مدلی توجیه کرده است. روش تارسکی، اثبات **حذف سور** برای این تئوریها بوده است.

برای آشنا کردن بیشتر خواننده با طعم چنین رویکردی، درباره‌ی رویکرد تارسکی به میدانهای بسته‌ی حقیقی توضیح کوتاهی می‌دهیم. بنا به قضیه‌ی تارسکی، تئوری میدانهای بسته‌ی حقیقی سورها را حذف می‌کند؛ یعنی هر فرمولی را دراین تئوری معادلی بدون سور دارد. یک مصداق آشنای

[1] model theory

[2] formal logic

[3] tame

[4] شاید گروتندیک نخستین کسی باشد که از اصطلاح رام برای اطلاق به ساختارهای ریاضی استفاده کرده است. در مقدمه‌ی کتاب «توپولوژی رام» نوشته‌ی وَن‌دن‌دریز، یا در پایان‌نامه‌ی دکتری نویسنده‌ی دوم، درباره‌ی وجوه مختلف رام بودن یا نبودن ساختارها توضیح داده شده است.

این گفته، در زیر آمده است:

$$\exists x \quad ax^{۲} + bx + c = ۰ \leftrightarrow b^{۲} - ۴ac > ۰.$$

فرمولهای بدون سور در میدانهای بسته‌ی حقیقی، دقیقاً **مجموعه‌های شبه‌جبری** را تعریف می‌کنند. از طرفی سور وجودی در منطق، معادل تصویر در جبر است. از این رو، بیان جبری قضیه‌ی تارسکی، قضیه‌ی زیر است:

گزاره ۱: هر تصویر یک مجموعه‌ی شبه‌جبری، خود مجموعه‌ای است شبه‌جبری.

بسیاری مفاهیم در هندسه‌ی جبری مختلط و حقیقی با روشِ رهیافت اول تحت عنوان ساختارهای رام مطالعه شده‌اند.

رهیافت دوم. در این رهیافت، از یک تئوری نظریه‌ی مدلی دارای ویژگیهای خوب، آغاز و سعی می‌کنیم مدلهای این تئوری را **رسته‌بندی** [۵] کنیم. نیز می‌کوشیم تا جایگاه خودِ این تئوری را در **رده‌بندی نظریه‌ی مدلیِ** [۶] تئوریها مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیه‌ی مُرلی، که در این دوره‌ی درسی بدان پرداخته خواهد شد، قضیه‌ای از نوع رسته‌بندی است.

گزاره ۲ (قضیه‌ی مُرلی): اگر تئوریِ T در زبانِ شمارایِ L یک تئوریِ $\aleph_{۱}$ ـ جازم باشد، آنگاه در هر کاردینالِ ناشمارایِ κ نیز جازم است.

قضیه‌ی بالا سرآغاز نظریه‌ی **پایداری** [۷] در نظریه‌ی مدل است که توسط شلاه بسط داده شده است. ادامه‌ی بسط نظریه‌ی پایداری نیز به **نظریه‌ی رده‌بندی** [۸] انجامیده است که آن نیز حاصل کار شلاه [۹] است. خواننده را برای آشنایی بیشتر با این رده‌بندی به تارنمای زیر ارجاع می‌دهیم:

`http://forkinganddividing.com/`

[۵] categoricity

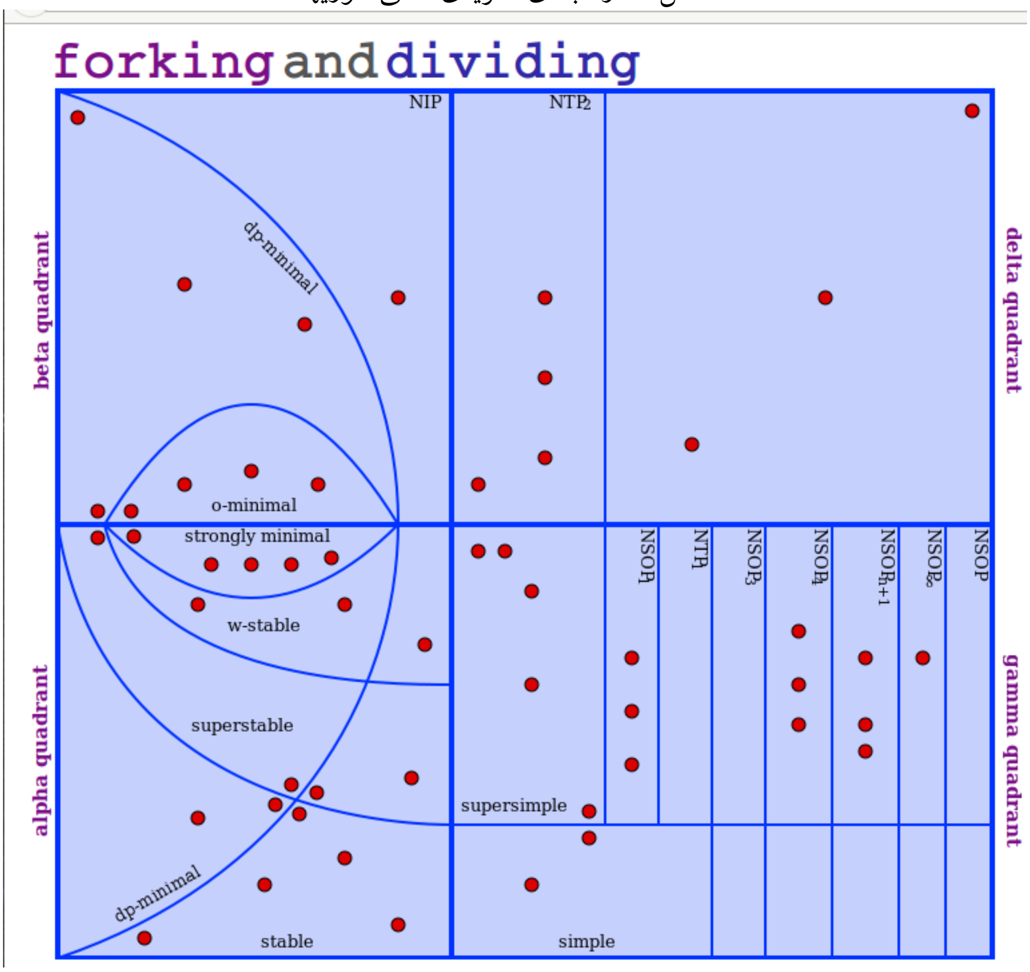
[۶] classification

[۷] stability

[۸] classification theory

[۹] Shelah, Shahron, Hebrew University of Jerusalem

شکل ۱: رده‌بندی نظریه‌ی مدلی تئوریها



۲ زبان

تعریف ۳ (زبان صوری): منظور از یک *زبانِ صوری*[۱۰] مرتبه‌ی اول مجموعه‌ای است چون L متشکل از سه مجموعه‌ی جدا از همِ $\mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$. اطلاعات زیر نیز همواره در چنین زبانی لحاظ می‌شوند.

۱. مجموعه‌ی $\mathbf{F}$ مجموعه‌ی نمادهای تابعی زبان نامیده می‌شود و برای هر نماد تابعیِ $f \in \mathbf{F}$ یک عدد طبیعیِ n_f به نام تعداد متغیرهای نماد تابعیِ f در نظر گرفته می‌شود.

۲. مجموعه‌ی $\mathbf{R}$ مجموعه‌ی نمادهای محمولی زبان نامیده می‌شود و برای هر نماد محمولی $R \in \mathbf{R}$ یک عدد طبیعیِ n_R به نام تعداد متغیرهای نماد محمولیِ R در نظر گرفته می‌شود.

۳. مجموعه‌ی $\mathbf{C}$ مجموعه‌ی ثوابت نامیده می‌شود.

مثال ۴:
۱. زبانِ تهی، $L = \emptyset$.

۲. $\mathbf{F} = \{(f, ۲), (g, ۳)\}$، $\mathbf{R} = \mathbf{C} = \emptyset$.

۳. $L^{۱}_{\text{گروه}} = \{*, e\}$.

۴. $L^{۲}_{\text{گروه}} = \{*, e, ^{-۱}\}$.

۵. $L_{\text{میدان}} = L_{\text{حلقه}}\{+, \times, ۰, ۱\}$.

۶. زبانهای محمولی مانند $L_{\text{گراف}}$ متشکل از $\mathbf{R} = \{(R, ۲)\}, \mathbf{F} = \mathbf{C} = \emptyset$ و $L_{\text{ترتیب}} = \{\leq\}$؛ توجه کنید که ایندو در واقع یک زبانند.

۷. زبانهای ترکیبی مانند $L_{\text{حلقه‌های‌مرتب}} = \{+, \times, ۰, ۱, \leq\}$.

در مواجهه با یک ساختارِ ریاضیاتی، نظریه‌مدل‌دان در انتخاب زبانْ مختار است؛ ولی این انتخاب را زمانی می‌توان معقول دانست که زبان یادشده گنجایش اطلاعات ریاضی ساختار مورد مطالعه را داشته باشد، و نیز تئوری‌ای که در این زبان اصلبندی می‌شود، با جبر، هندسه، آنالیز یا ترکیبات ساختار مورد نظر همسو باشد.

[۱۰] formal language

تعریف ۵ (ساختار): گیریم $L = \mathbf{F} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{C}$ زبانی صوری باشد. منظور از یک L ـ ساختار، یا یک L ـ تعبیر، [11] چندتاییای است چون $\mathfrak{M}$ که از گردهمآمدن موارد زیر حاصل شود.

۱. یک مجموعهی ناتهی مانندِ M که بدان **عالمِ سخن** [12] یا **جهانِ ساخت** یا **دامنهی ساخت** گفته میشود.

۲. به ازای هر $f \in F$ تابعی چون $f^{\mathfrak{M}} : M^{n_f} \to M$، که بدان تعبیر تابعِ f در ساختارِ $\mathfrak{M}$ گفته میشود.

۳. به ازاء هر $R \in \mathbf{R}$ رابطهای چون $R^{\mathfrak{M}} \subseteq M^{n_R}$ که آن را تعبیرِ رابطهی یادشده در ساختار $\mathfrak{M}$ میخوانیم. (به بیان دیگر، برای هر رابطهی R، تابعی چون $R^{\mathfrak{M}} : M^{n_R} \to \{۰, ۱\}$، که آن را تابعِ مشخصهی رابطهی یادشده میخوانیم).

۴. به ازاءِ هر $c \in \mathbf{C}$ عنصری چون $c^{\mathfrak{M}} \in M$ که بدانْ تعبیر ثابتِ c در ساختارِ $\mathfrak{M}$ میگوییم.

نمایش اطلاعات بالا عموماً به صورت زیر است:

$$\mathfrak{M} = \langle M, \{f^{\mathfrak{M}}\}_{f \in \mathbf{F}}, \{R^{\mathfrak{M}}\}_{R \in \mathbf{R}}, \{c^{\mathfrak{M}}\}_{c \in \mathbf{C}} \rangle.$$

ممکن است خواننده دچار این ابهام شود که در فضاهای متریک، تابعِ متریک که از M به $\mathbb{R}$ تعریف میشود، در تعریف بالا نمیتواند مصداق داشته باشد. پاسخ این است که برای مطالعهی چنین فضایی، از زبانها و ساختارهای چندبخشی [13] استفاده میشود، که از پرداختن بدانها فعلاً خودداری میکنیم. [14] نیز در منطق پیوسته، که آن نیز در چارچوب این دوره نمیگنجد، تعبیر هر رابطهی R تابعی است چون $R^{\mathfrak{M}} : M^{n_R} \to [۰, ۱]$.

مثال ۶:

۱. ساختارهای $\mathfrak{Z} = \langle Z, +, ۰ \rangle$ یا $\mathfrak{R} = \langle R, \times, ۱ \rangle$ در زبان $L = \{*, e\}$.

۲. ساختارِ $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ در زبانِ $L = \{(R, ۲)\}$

[11] L-structure, L-interpretation

[12] universe

[13] many-sorted

[14] به دانشجوی علاقهمند پیشنهاد میکنیم آنها را با کمک دستیار فراگرفته به کلاس عرضه کند.

۳. ساختارِ $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, R^3 \rangle$ در زبانِ $L = \{(R, ۳)\}$، آنجا که $R^3 = \{(x, y, z) | x \leq y \leq z\}$.

تعریف ۷ (نشاندن): گیریم L زبانی صوری باشد و $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو ساختار در این زبان. تابعِ یک‌به‌یکِ $e : M \to N$ را یک L ـ *نشاندن* [۱۵] می‌خوانیم هرگاه

۱. برای هر $c \in \mathbf{C}$ داشته باشیم $e(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$.

۲. برای هر نماد تابعیِ n موضعیِ $f \in \mathbf{F}$ و هر $a_۱, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$e(f^{\mathfrak{M}}(a_۱, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(e(a_۱), \ldots, e(a_n)).$$

۳. برای هر نمادِ محمولیِ n موضعیِ $R \in \mathbf{R}$ و هر $a_۱, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$\langle a_۱, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow \langle e(a_۱), \ldots, e(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{N}}.$$

تعریف ۸ (زیرساخت): ساختارِ $\mathfrak{M}$ را یک زیرساخت [۱۶] از ساختارِ $\mathfrak{N}$ می‌خوانیم، و آن را با $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ نمایش می‌دهیم، هرگاه اولاً $M \subseteq N$ و ثانیاً تابع شمول، $i : M \to N$، یک L ـ نشاندن باشد.

معلوم است که هرگاه $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$، آنگاه برای هر $f \in \mathbf{F}$ (با n موضع) داریم $f^{\mathfrak{N}}|_{M^n} = f^{\mathfrak{M}}$، و برای هر $R \in \mathbf{R}$ داریم $R^{\mathfrak{N}} \cap M^n = R^{\mathfrak{M}}$.

مثال ۹:

۱. ساختارِ $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ زیرساختاری از $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ است.

۲. نگاشت

$$e : \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle \to \langle \mathbb{R}^+, \times, ۱ \rangle$$

با ضابطه‌ی $e(x) = e^x$ یک نشاندن است.

[۱۵] L-embedding
[۱۶] L-substructure

۳ نحو

در نحو [۱۷]، هر زبانِ مرتبه‌ی اولِ L را به همراه نمادهای منطقی مرتبه‌ی اول زیر در نظر می‌گیریم.

۱. نمادهای موجود در مجموعه‌ی L.

۲. یک نماد متمایزِ دوموضعی به نام تساوی، که آن را با $\approx$ نشان می‌دهیم.

۳. مجموعه‌ی متغیرها، که آن را با var نشان می‌دهیم.

۴. ادوات منطقی، شامل

- ادوات بولی یا گزاره‌ای: $\neg, \leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge$.
- سورها، $\exists, \forall$.

۵. پرانتزهای باز و بسته، $(\,,\,)$ که از آنها صرفاً برای رفع ابهام بهره می‌جوییم.

تعریف ۱۰ (ترمها): مجموعه‌ای را که از موارد زیر حاصل شود، مجموعه‌ی L ـ *ترمها* [۱۸] می‌خوانیم.

۱. ثوابت و متغیرها جزوِ L ـ ترمها هستند.

۲. هرگاه f یک نماد تابعی n موضعی و $t_1, \ldots, t_n$ ترمهایی در زبان L باشند، آنگاه $f(t_1, \ldots, t_n)$ نیز L ـ ترم است.

۳. L ـ ترمها تنها از موارد ۱ و ۲ حاصل می‌شوند.

تعریف ۱۱ (فرمولها): فرمولها در زبانِ L به طریق زیر تعریف می‌شوند.

۱. L ـ فرمولهای بسیط (یا اتمیک) یه یکی از دو صورت زیر هستند:

(آ) عباراتی چون $R(t_1, \ldots, t_n)$ که در آن R رابطه‌ای است n موضعی و $t_1, \ldots, t_n$ ترم‌هایی در زبانِ L هستند.

(ب) عبارتی چون $t_1 \approx t_2$ که در آن t_1, t_2 ترم هستند.

[۱۷] syntax

[۱۸] term

۲. اگر ϕ_1 و ϕ_2 دو L ـ فرمول باشند، آنگاه $\phi_1 \wedge \phi_2$، $\phi_1 \vee \phi_2$، $\phi_1 \to \phi_2$، $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$، و $(\neg\phi_1)$ نیز L ـ فرمولند.

۳. اگر ϕ یک L ـ فرمول باشد و x یک متغیر، آنگاه $\forall x\phi$ و $\exists x\phi$ نیز L ـ فرمولند.

۴. L ـ فرمولها تنها از موارد بالا حاصل می‌شوند.

به متغیرهایی که در دامنه‌ی هیچ سوری واقع نباشند، متغیرهای آزاد، و به آنهایی که تحت سورند، متغیر پایبند می‌گوییم. منظور از نمادِ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ این است که متغیرهای آزادِ فرمولِ ϕ در میانِ $x_1, \ldots, x_n$ (و نه لزوماً همه‌ی آنها) هستند. یک متغیر می‌تواند در یک فرمول، حضوری آزاد و حضوری پایبند داشته باشد؛ برای مثال، متغیرِ x در فرمولِ زیر.

$$(\exists x \quad R(x, y)) \wedge R(x, z).$$

۴ تئوری صدق تارسکی

فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک L ـ ساختار باشد، $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ یک L ـ فرمول و $a_1, \ldots, a_n$ عناصری باشند در M. این را که فرمولِ ϕ در مصادیق $a_1, \ldots, a_n$ در ساختارِ $\mathfrak{M}$ صادق است، به صورتِ

$$\mathfrak{M} \models \phi(x_1, \ldots, x_n)[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

یا با تسامح، به صورت

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$$

نشان داده به صورت استقرایی زیر تعریف می‌کنیم:

- $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2[\bar{a}] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathfrak{M}}[\bar{a}]$.
- $\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)[\bar{a}] \Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[\bar{a}], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}[\bar{a}])$.
- $\mathfrak{M} \models \neg\phi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models \phi[\bar{a}]$.
- $\mathfrak{M} \models \phi_2[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\phi_1 \wedge \phi_2)[\bar{a}]$ و $\mathfrak{M} \models \phi_1[\bar{a}]$

- $\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi[\bar{a}]$ اگر عنصری چون $b \in M$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{M} \models \phi[\bar{b}]$.

بدیهی است که تعریف بالا، به طور خاص، وقتی که ϕ یک جمله (یعنی فرمولِ بدون متغیر آزاد) باشد نیز کارگر است. در صورتی که $\mathfrak{M} \models \phi$ گوییم M مُدِلی برای ϕ است. نقیض این سخن را با $\mathfrak{M} \not\models \phi$ نشان می‌دهیم.

به یک مجموعه از L ـ جملات، *تئوری*[۱۹] می‌گوییم. تئوریِ T را *ارضاشدنی* [۲۰] می‌خوانیم هرگاه مدلی برای آن موجود باشد؛ یعنی ساختاری چون $\mathfrak{M}$ موجود باشد، به طوری که برای هر $\phi \in T$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \phi$. در این صورت می‌نویسیم $\mathfrak{M} \models T$.

۵ معادل و نشاندن مقدماتی

در بخشِ ۲ درباره‌ی نشاندنها و زیرساختها سخن گفتیم. در برخی تئوریها، زیرساختها همه‌ی ویژگی‌های مرتبه‌ی اول یک ساختار را به ارث می‌برند. به هر زیرساختِ اینچنین، زیرساختی مقدماتی می‌گوییم (این مفهوم را در ادامه تعریف کرده‌ایم). برای مثال، اگر $M_۱, M_۲$ دو میدانِ بسته‌ی جبری باشند و $M_۱ \subseteq M_۲$، آنگاه هر چندجمله‌ای با ضرایبِ در $M_۱$ اگر در $M_۲$ ریشه داشته باشد، مسلماً در $M_۱$ هم ریشه دارد.

در این بخش (در طی چند تمرین) نخست به بررسی این نکته پرداخته‌ایم که زیرساختها چه ویژگی‌هایی از ساختار شامل خود به ارث می‌برند، و سپس محکی برای وارسی این ارائه می‌کنیم که چه هنگام یک زیرساخت، مقدماتی است.

تمرین ۱۲: گیریم $M \subseteq N$؛ نشان دهید که $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ اگروتنهااگر برای هر فرمولِ بدونِ سورِ $\phi(x_۱, \dots, x_n)$ و هر $a_۱, \dots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_۱, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(a_۱, \dots, a_n).$$

مجموعه‌ی همه‌ی فرمولهای **بدون سور** با پارامتر در M را (منظور جمله‌هایی است به شکلِ $\phi(a_۱, \dots, a_n)$ که در آن $a_۱, \dots, a_n \in M$) با $\mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ نشان می‌دهیم. مشخص است که $\mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ (دیاگرام اتمیکِ $\mathfrak{M}$) را می‌توان به عنوان یک تئوری، ولی در زبانِ L_M ـ یعنی زبانی که

[۱۹] theory
[۲۰] satisfiable

از افزودن ثابت برای عنصر در M به L حاصل شده است ــ مورد مطالعه قرار داد. پس حکم تمرین بالا را می‌توان بدین صورت بازنوشت:

تمرین ۱۳: نشان دهید که $\mathfrak{N} \models^{L_M} \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ اگروتنهااگر L ـ نشاندنی از $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{N}$ موجود باشد.

به طور مشابه، با $\mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$ (دیاگرام مقدماتیِ $\mathfrak{M}$) مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌هایی را در زبانِ L_M نشان می‌دهیم که در $\mathfrak{M}$ درستند. نیز با $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌هایی را **در زبانِ** L نشان می‌دهیم که در ساختارِ $\mathfrak{M}$ درستند.

نشاندنِ $j : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ را مقدماتی می‌خوانیم هرگاه همه‌ی فرمولها (و نه فقط فرمولهای بی‌سور) تحت آن حفظ شوند؛ به بیان دیگر هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ و $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(a_1, \ldots, a_n).$$

هرگاه نگاشت شمول، یک نشاندن مقدماتی باشد، می‌نویسیم $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$، و می‌گوییم که $\mathfrak{M}$ زیرساختی مقدماتی از $\mathfrak{N}$ است (یا $\mathfrak{N}$ توسیعی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ است).

تمرین ۱۴: نشان دهید که $\mathfrak{N} \models^{L_M} \mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$ اگروتنهااگر نشاندنی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{N}$ در زبانِ L موجود باشد.

نشاندنِ $e : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ را یک *ایزومرفیسم* می‌خوانیم هرگاه یک‌به‌یک و پوشا باشد.

تمرین ۱۵: نشان دهید که هرگاه $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ یک ایزومرفیسم باشد، آنگاه $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ هم‌ارز مقدماتیند؛ یعنی هر L ـ جمله، در $\mathfrak{M}$ درست است اگروتنهااگر در $\mathfrak{N}$ درست باشد (این را با نمادِ $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ نشان می‌دهیم).

توجه کنید که هم‌ارز مقدماتی بودن $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ معادل این است که $\mathfrak{M} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

تمرین ۱۶: آیا عکسِ تمرین بالا درست است؟ نشان دهید هرگاه M, N هر دو متناهی باشند و $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ آنگاه M و N ایزومرفند.

تمرین ۱۷: تحقیق کنید که $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \not\prec \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$. نیز نشان دهید که $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \prec \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$. (اثبات این دومی با ابزارهایی که هم‌اکنون در درست داریم آسان نمی‌نماید!)

تمرین ۱۸ (محک تارسکی): گیریم $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$؛ نشان دهید که $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ اگروتنهااگر برای هر فرمولِ $\phi(x, \bar{y})$ (دقت کنید که x تک‌متغیر است و نگفته‌ایم که ϕ فرمولی بدون سور است) و هر $\bar{b} \in M$،

اگر $\phi(x,\bar{b}) \quad \mathfrak{N} \models \exists x$ آنگاه

$$\mathfrak{N} \models \exists x \in M \quad \phi(x,\bar{b}).$$

حتماً خود به زیرکی دریافته‌اید که نوشتن عبارت بالا در منطق مرتبه‌ی اول، حداقل در زبانِ L، مجاز نیست. چنین جمله‌ای را تنها زمانی می‌توان نوشت که در زبان محمولی برای ساختارِ کوچکتر، در اینجا $\mathfrak{M}$، داشته باشیم. با این حال هدفمان از آنگونه نوشتن تأکید بر این نکته بوده که منظورْ $\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi(x,\bar{b})$ نبوده است، که در آن صورت محک تارسکی، بدیهی می‌بود!

تمرین ۱۹: گیریم $L = \{\leq\}$؛ نشان دهید که $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle)$ دارای مدلی است که ترتیب اعدادِ گویا در آن می‌نشیند (یعنی ساختاری چون $\mathfrak{M} \equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ به همراه نشاندنی از $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ به M موجود هستند).

تمرین ۲۰: گیریم $\mathfrak{M}_۰ \subseteq \mathfrak{M}_۱ \subseteq \mathfrak{M}_۲$، $\mathfrak{M}_۰ \prec \mathfrak{M}_۲$ و $\mathfrak{M}_۱ \prec \mathfrak{M}_۲$. نشان دهید که $\mathfrak{M}_۰ \prec \mathfrak{M}_۱$.

تمرین ۲۱: گیریم $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ یک L ـ نشاندن باشد. نشان دهید زوج یکتای $(\mathfrak{N}, g)$ چنان موجود است که $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ و g اتومرفیسمی از $\mathfrak{N}$ است که f را بگستراند.

تمرین ۲۲: در زبان گروهها، برای $m \neq n$ نشان دهید که $\mathbb{Z}_{p^\infty}^m \not\equiv \mathbb{Z}_{p^\infty}^n$. منظور از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ گروه متشکل از همه‌ی ریشه‌های p^k اُمِ واحد است.

تمرین ۲۳: در زبان گروهها، نشان دهید که برای $m \neq n$ داریم $\mathbb{Z}^m \not\equiv \mathbb{Z}^n$.

تمرین ۲۴ (ضرب مستقیم): دو L ـ ساختارِ $\mathfrak{M}_۱, \mathfrak{M}_۲$ را در نظر بگیرید. L ـ ساختارِ $\mathfrak{M}_۱ \otimes \mathfrak{M}_۲$ را طوری تعریف کنید که جهانِ آن $M_۱ \times M_۲$ باشد و توابعِ طبیعیِ تصویر، یعنی $\pi_i : \mathfrak{M}_۱ \times \mathfrak{M}_۲ \to \mathfrak{M}_i$، نسبت بدان ویژگی جهانی زیر را داشته باشند:

برای هر L ـ ساختارِ $\mathfrak{N}$ و هموفریسمهای $\phi_i : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_i$ (برای $i = ۱, ۲$) هومرفیسمِ یکتای $\psi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}_۱ \otimes \mathfrak{M}_۲$ موجود باشد، به طوری که $\phi_i = \pi_i \circ \psi$.

تعریف هومرفیسم شبیه تعریف نشاندن است (تعریفِ ۷)، با این تفاوت که شرط یک‌به‌یک بودن در آن نیاز نیست و موردِ ۳ به صورت زیر است:

$$\langle a_۱, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}} \Rightarrow \langle e(a_۱), \ldots, e(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{N}}.$$