قرار می‌دهیم $f'_\lambda = f_\lambda \cup \{(m_\lambda, d)\}$. اگر $m_\lambda \in \mathrm{range}(f'_\lambda)$ آنگاه قرار می‌دهیم $f_i = f'_\lambda$ و در غیر این صورت، از هم‌ارزیِ

$$\mathrm{dom}(f_\lambda)m_\lambda \equiv \mathrm{range}(f_\lambda)d$$

و همگنیِ $\mathfrak{M}$ استفاده کرده عنصرِ d' را چنان می‌یابیم که

$$\mathrm{dom}(f_\lambda)m_\lambda d' \equiv \mathrm{range}(f_\lambda)dm_\lambda$$

و قرار می‌دهیم $f_i = f'_\lambda \cup \{(d', m_\lambda)\}$.

تمرین ۱۳۸: نشان دهید که $f = \bigcup_{\lambda<|M|} f_\lambda$ اتومرفیسمی از $\mathfrak{M}$ است.

□

پیشتر ثابت کرده بودیم که هر مدلِ $\mathfrak{M}$ را می‌توان در یک مدل ω ـ اشباع نشاند که اندازه‌ی آن بزرگتر از $|M|^{\aleph_0}$ نباشد. در زیر خواهیم دید که همگنی در همان اندازه‌ی M دست‌یافتنی است.

گزاره ۱۳۹: هر مدلِ $\mathfrak{M}$ در مدلی ω ـ همگن چون $\mathfrak{N} \succeq \mathfrak{M}$ می‌نشیند که $|N| = |M|$.

اثبات. نخست ادعا می‌کنیم که مدل $\mathfrak{N}$ چنان موجود است که $|M| = |N|$ و برای هر دو دنباله‌ی متناهیِ $\bar{a}, \bar{b}$ از اعضای M اگرچنانچه $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})$ آنگاه برای هر $c \in M$ عنصرِ $d \in N$ چنان موجودند که

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}c) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b}d).$$

برای اثبات ادعا، مجموعه‌ی I را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$I = \{\langle \bar{a}, \bar{b}, c\rangle : |\bar{a}| = |\bar{b}|, \bar{a}, \bar{b}, c \in M, \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})\}.$$

دقت کنید که $|M| = |I|$ و شمارش $\{\langle \bar{a}_i, \bar{b}_i, c_i\rangle\}$ را برای I در نظر بگیرید. قرار دهید $\Sigma_i(\bar{x}, y_i) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}_i, c_i)$ و توجه کنید که $\bigcup \Sigma_i(\bar{b}_i, y_i) \cup \mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$ سازگار است (چرا؟ ــ توجه کنید که هر بخش متناهی آن، بنا به همتاییِ $\bar{a}_i$ ها با $\bar{b}_i$ ها در خودِ M برآورده می‌شود). بنابراین گسترشی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ چون $\mathfrak{N}$ و عناصرِ d_i در آن چنان موجودند که

$$\langle a_i, c_i\rangle \equiv \langle b_i, d_i\rangle \quad \forall i < |M|.$$

برای راحت شدن ادامه‌ی بحث، مدلی را که با شروع از مدلِ $\mathfrak{M}$ و اعمال روند بالا حاصل می‌شود، با $H(\mathfrak{M})$ نشان می‌دهیم.

یادآوری ۱۴۰: می‌شد برای اثبات ادعای بالا، مدلِ $\mathfrak{N}$ را از اجتماع زنجیری از مدلهای $\mathfrak{N}'_i$ به دست آورد که در هر N'_i عنصری چون d_i همتایپ با c_i موجود است.

تمرین ۱۴۱: ادعای بالا را با استفاده‌ی مستقیم از تعریفِ گالواتایپها ثابت کنید.

ادامه‌ی اثبات. زنجیرِ $\langle \mathfrak{N}_i \rangle_{i \in \omega}$ را از مدلها، با استقرا و با قرار دادنِ $\mathfrak{N}_۰ = \mathfrak{N}$ و $\mathfrak{N}_{i+۱} = H(\mathfrak{N}_i)$ می‌سازیم. (بررسی کنید که) $\mathfrak{N}_\omega = \bigcup \mathfrak{N}_i$ مدل مطلوب است. $\square$

تمرین ۱۴۲: هر مدلِ اتمیک، ω ـ همگن است؛ پس بویژه هر مدلِ اول، همگن است.

تمرین ۱۴۳: هر مدلِ κ ـ اشباع، κ ـ همگن است؛ به ویژه هر مدل اشباع، همگن است.

تعریف ۱۴۴ (مدل جهانی): مدل $\mathfrak{M}$ را κ **ـ جهانی** می‌خوانیم هرگاه برای هر $T \models \mathfrak{N}$ اگر $|N| < \kappa$ آنگاه بتوان نگاشتی مقدماتی مانند $f : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ یافت.

تمرین ۱۴۵: اگر $\mathfrak{M}$ مدلی κ ـ اشباع باشد، آنگاه κ^+ ـ جهانی است.

قضیه‌ی زیر در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد.

قضیه ۱۴۶: مدلِ $\mathfrak{M}$ مدلی κ ـ اشباع است اگروتنهااگر κ ـ همگن و κ^+ جهانی باشد.

در حالت کلی اگر یک خانواده‌ی $(\mathcal{K}, \leq)$ از مدلها داشته باشیم که در آن $\leq$ نوعی نشانش اعضای این خانواده باشد دارای ویژگیهای مطلوبی چون ادغام و همنشانی، آنگاه با درنظرگرفتن گالواتایپها، مشابه بالا اشباع بودن با همگن و جهانی بودن معادل است. در این باره در یکی از پروژه‌های درس صحبت خواهد شد.

فصل ۲

قضیه‌ی مُرلی

۱.۲ جلسه‌ی چهاردهم

در فصل قبل و در جلسات آموختال، با یادگیریِ پیشنیازهای نظریه‌ی مدلی، ورزیدگی لازم را برای برای ورود به بحث اصلی کسب کرده‌ایم. از این نقطه‌ی درس به بعد با یادگیریِ مقدمات پیشرفته‌تری به سمت بیان و اثبات قضیه‌ی مُرلی پیش خواهیم رفت. نخست، به طور خلاصه به تبیین ابزار ترکیباتی مورد نظر خود، یعنی قضیه‌ی رمزی می‌پردازیم.

عموماً در نظریه‌ی مدل، از قضیه‌ی رمزی [۱] و یا از تعمیمی از آن، به نام قضیه‌ی اردوش ـ رادو [۲] برای یافتن دنباله‌های بازنشناختنی استفاده می‌شود. دنباله‌های بازنشناختنی، که در جلسات بعد مفصلاً بدانها خواهیم پرداخت، دنباله‌هایی هستند که هر تعداد از اعضایشان، بسته به ترتیب قرارگیریشان در دنباله، از منظرِ تئوری مورد نظر، هم‌ارزش هستند. برای یافتن این چنین دنباله‌ای، عناصر یک دنباله‌ی دلخواه را، بسته به هم‌ارزش بودنشان نسبت به فرمولها، «رنگ‌آمیزی» می‌کنیم و با استفاده از لم رمزی، زیرمجموعه‌ای «تک‌رنگ» از این دنباله استخراج می‌کنیم.

[۱] Ramsey
[۲] Erdös - Rado

۱.۱.۲ لم رمزی

برای مجموعه‌ی دلخواهِ X و عدد طبیعیِ k تعریف می‌کنیم:

$$[X]^k = \{Y \subseteq X : |Y| = k\}.$$

برای هر عددِ طبیعیِ $n \geq ۱$، هر تابعِ

$$f : [X]^k \to n = \{۰, ۱, \dots, n - ۱\}$$

را یک **رنگ‌آمیزی** از زیرمجموعه‌های k عضویِ مجموعه‌ی X توسط n رنگ می‌خوانیم. مجموعه‌ی $Y \subseteq X$ را برای رنگ‌آمیزیِ f همگن (یا تکرنگ) می‌خوانیم هرگاه همه‌ی زیرمجموعه‌های k عضوی آن، تحتِ f رنگ یکسان داشته باشند؛ به بیان دیگر، هرگاه $f|_{[Y]^n}$ ثابت باشد. پس اگر Y مجموعه‌ای تکرنگ برایِ رنگ‌آمیزیِ f باشد، عددِ $i < n$ چنان موجود است که برای هر $Z \subseteq Y$ با $|Z| = n$ داریم $f(Z) = i$.

قضیه ۱۴۷ (رمزی): فرض کنید مجموعه‌ی نامتناهیِ X و اعدادِ $k, n \geq ۱$ داده شده باشند. برای هر رنگ‌آمیزیِ $f : [X]^k \to n$ یک مجموعه‌ی تکرنگِ نامتناهیِ $Y \subseteq X$ موجود است.

قضیه‌ی بالا، صورت نامتناهی لمِ رمزی است. عموماً در ترکیبیات، نخست صورت متناهی این لم را ثابت می‌کنند و از آن صورت نامتناهیش را نتیجه می‌گیرند، اما طرزفکرِ نظریه‌ی مدلی، ما را بر آن می‌دارد که همواره برای یافتن رابطه میان متناهی و نامتناهی از قضیه‌ی فشردگی استفاده کنیم.

یادآوری ۱۴۸: حکم قضیه‌ی بالا در نمادگذاری زیر خلاصه می‌شود:

$$\aleph_۰ \to (\aleph_۰)^n_k$$

پیش از اثبات قضیه به بیان چند مصداق آشنا از آن می‌پردازیم.

مثال ۱۴۹: در حالتِ $k = ۱$ قضیه‌ی رمزی همان اصل خانه‌ی کبوتری است: اگر نامتناهی عنصر در متناهی جایگاه قرار گرفته باشند،حداقل در یک جایگاه، نامتناهی عنصر جای گرفته است.

مثال ۱۵۰: فرض کنید (V, R) گرافی نامتناهی باشد. روی $[V]^۲$ یک رنگ‌آمیزی به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(\{x, y\}) = \begin{cases} ۱ & V \models R(x, y) \\ ۰ & V \models \neg R(x, y). \end{cases}$$

بنا به قضیه‌ی رمزی، یا زیرگرافی نامتناهی از گرافِ V موجود است که همه‌ی رأسهای آن دوبه‌دو به هم متصلند (زیرگراف کامل)، و یا زیرگرافی نامتناهی موجود است که هیچ یالی میان رأسهای آن وجود ندارد.

مثال ۱۵۱: با استفاده از قضیه‌ی رمزی ثابت کنید که هرگاه $(X, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتبِ خطی نامتناهی باشد، آنگاه X یا شامل یک دنباله‌ی صعودی نامتناهی و یا شامل یک دنباله‌ی نزولی نامتناهی است.

در ادامه، قضیه‌ی رمزی را با استقراء روی k ثابت کرده‌ایم.

اثبات قضیه‌ی رمزی. اگر $k = ۱$ آنگاه قضیه‌ی رمزی همان اصل لانه‌ی کبوتری است. فرض کنیم حکم قضیه‌ی برای k برقرار باشد؛ یعنی برای هر n داشته باشیم:

$$\aleph_۰ \to (\aleph_۰)^n_k.$$

می‌خواهیم درستی آن را برای $k + ۱$ تحقیق کنیم. فرض کنیم که X مجموعه‌ای نامتناهی باشد و f یک رنگ‌آمیزی از زیرمجموعه‌های $k + ۱$ عضوی آن با n رنگ. بدون کاسته شدن از کلیت، مجموعه‌ی X را شمارا و دارای ترتیبِ $x_۱ < x_۲ < \dots$ فرض می‌کنیم. در ادامه دو دنباله‌ی $(y_i)_{i\in\omega}$ از عناصرِ X و $(n_i)_{i\in\omega}$ از اعضای $\{۰, ۱, \dots, n\}$ خواهیم ساخت و مجموعه‌ی مورد نظر را از میان عناصر دنباله‌ی اول استخراج می‌کنیم. قرار می‌دهیم $y_۱ = x_۱$.

رنگ‌آمیزی $f_۱ : [X - \{x_۱\}]^k \to n$ را با ضابطه‌ی $f_۱(Z) = f(Z \cup \{x_۱\})$ در نظر می‌گیریم. بنا به فرض استقراء، این رنگ‌آمیزی دارای یک مجموعه‌ی همگن به نامِ $Y_۱$ است. قرار می‌دهیم $y_۲ = \min Y_۱$ و $n_۲$ را رنگ مشترکِ همه‌ی زیرمجموعه‌های k عضویِ $Y_۱$ فرض می‌کنیم. به همین ترتیب روی زیرمجموعه‌های k عضویِ $Y_۱ - \{y_۲\}$ رنگ آمیزیِ $f_۲(Z) = f(Z \cup \{y_۲\})$ را در نظر گرفته فرض می‌کنیم که $Y_۲$ مجموعه‌ی همگنِ آن و $n_۳$ رنگ مشترک زیرمجموعه‌های k عضویِ $Y_۲$ باشند. نیز قرار می‌دهیم $y_۳ = \min Y_۲$. فراروند بالا را ادامه داده به عناصرِ

$$y_۱ < y_۲ < \dots$$

می‌رسیم. نیز داریم

$$Y_۱ \subseteq Y_۲ \subseteq \dots.$$