• $\phi[\bar{a}] \quad \exists x \models \mathfrak{M}$ اگر عنصری چون $b \in M$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{M} \models \phi[\bar{b}]$.

بدیهی است که تعریف بالا، به طور خاص، وقتی که ϕ یک جمله (یعنی فرمولِ بدون متغیر آزاد) باشد نیز کارگر است. در صورتی که $\mathfrak{M} \models \phi$ گوییم M مُدِلی برای ϕ است. نقیض این سخن را با $\mathfrak{M} \not\models \phi$ نشان می‌دهیم.

به یک مجموعه از L ـ جملات، *تئوری*[19] می‌گوییم. تئوریِ T را *ارضاشدنی*[20] می‌خوانیم هرگاه مدلی برای آن موجود باشد؛ یعنی ساختاری چون $\mathfrak{M}$ موجود باشد، به طوری که برای هر $\phi \in T$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \phi$. در این صورت می‌نویسیم $\mathfrak{M} \models T$.

۵ معادل و نشاندن مقدماتی

در بخشِ ۲ درباره‌ی نشاندنها و زیرساختها سخن گفتیم. در برخی تئوریها، زیرساختها همه‌ی ویژگی‌های مرتبه‌ی اول یک ساختار را به ارث می‌برند. به هر زیرساختِ اینچنین، زیرساختی مقدماتی می‌گوییم (این مفهوم را در ادامه تعریف کرده‌ایم). برای مثال، اگر M_1, M_2 دو میدانِ بسته‌ی جبری باشند و $M_1 \subseteq M_2$، آنگاه هر چندجمله‌ای‌ای با ضرایبِ در M_1 اگر در M_2 ریشه داشته باشد، مسلماً در M_1 هم ریشه دارد.

در این بخش (در طی چند تمرین) نخست به بررسی این نکته پرداخته‌ایم که زیرساختها چه ویژگی‌هایی از ساختار شامل خود به ارث می‌برند، و سپس محکی برای وارسی این ارائه می‌کنیم که چه هنگام یک زیرساخت، مقدماتی است.

تمرین ۱۲: گیریم $N \subseteq M$؛ نشان دهید که $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ اگروتنهااگر برای هر فرمولِ بدونِ سورِ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(a_1, \ldots, a_n).$$

مجموعه‌ی همه‌ی فرمولهای **بدون سور** با پارامتر در M را (منظور جمله‌هایی است به شکلِ $\phi(a_1, \ldots, a_n)$ که در آن $a_1, \ldots, a_n \in M$) با $\mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ نشان می‌دهیم. مشخص است که $\mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ (دیاگرام اتمیکِ $\mathfrak{M}$) را می‌توان به عنوان یک تئوری، ولی در زبانِ L_M ـ یعنی زبانی که

[19] theory
[20] satisfiable

از افزودن ثابت برای عنصر در M به L حاصل شده است ــ مورد مطالعه قرار داد. پس حکم تمرین بالا را می‌توان بدین صورت بازنوشت:

تمرین ۱۳: نشان دهید که $\mathfrak{N} \models^{L_M} \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ اگروتنهااگر L ـ نشاندنی از $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{N}$ موجود باشد.

به طور مشابه، با $\mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$ (دیاگرام مقدماتیِ $\mathfrak{M}$) مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌هایی را در زبانِ L_M نشان می‌دهیم که در $\mathfrak{M}$ درستند. نیز با $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌هایی را **در زبانِ** L نشان می‌دهیم که در ساختارِ $\mathfrak{M}$ درستند.

نشاندنِ $j : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ را مقدماتی می‌خوانیم هرگاه همه‌ی فرمولها (و نه فقط فرمولهای بی‌سور) تحت آن حفظ شوند؛ به بیان دیگر هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ و $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(a_1, \ldots, a_n).$$

هرگاه نگاشت شمول، یک نشاندن مقدماتی باشد، می‌نویسیم $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$، و می‌گوییم که $\mathfrak{M}$ زیرساختی مقدماتی از $\mathfrak{N}$ است (یا $\mathfrak{N}$ توسیعی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ است).

تمرین ۱۴: نشان دهید که $\mathfrak{N} \models^{L_M} \mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$ اگروتنهااگر نشاندنی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{N}$ در زبانِ L موجود باشد.

نشاندنِ $e : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ را یک *ایزومرفیسم* می‌خوانیم هرگاه یک‌به‌یک و پوشا باشد.

تمرین ۱۵: نشان دهید که هرگاه $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ یک ایزومرفیسم باشد، آنگاه $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ هم‌ارز مقدماتیند؛ یعنی هر L ـ جمله، در $\mathfrak{M}$ درست است اگروتنهااگر در $\mathfrak{N}$ درست باشد (این را با نمادِ $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ نشان می‌دهیم).

توجه کنید که هم‌ارز مقدماتی بودن $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ معادل این است که $\mathfrak{M} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

تمرین ۱۶: آیا عکسِ تمرین بالا درست است؟ نشان دهید هرگاه M, N هر دو متناهی باشند و $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ آنگاه M و N ایزومرفند.

تمرین ۱۷: تحقیق کنید که $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle \not\prec \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$. نیز نشان دهید که $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \prec \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$. (اثبات این دومی با ابزارهایی که هم‌اکنون در درست داریم آسان نمی‌نماید!)

تمرین ۱۸ (محک تارسکی): گیریم $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$؛ نشان دهید که $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ اگروتنهااگر برای هر فرمولِ $\phi(x, \bar{y})$ (دقت کنید که x تک‌متغیر است و نگفته‌ایم که ϕ فرمولی بدون سور است) و هر $\bar{b} \in M$،

اگر $\mathfrak{N} \models \exists x \quad \phi(x, \bar{b})$ آنگاه

$$\mathfrak{N} \models \exists x \in M \quad \phi(x, \bar{b}).$$

حتماً خود به زیرکی دریافته‌اید که نوشتن عبارت بالا در منطق مرتبه‌ی اول، حداقل در زبانِ L، مجاز نیست. چنین جمله‌ای را تنها زمانی می‌توان نوشت که در زبان محمولی برای ساختارِ کوچکتر، در اینجا $\mathfrak{M}$، داشته باشیم. با این حال هدفمان از آنگونه نوشتن تأکید بر این نکته بوده که منظورْ $\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi(x, \bar{b})$ نبوده است، که در آن صورت محک تارسکی، بدیهی می‌بود!

تمرین ۱۹: گیریم $L = \{\leq\}$؛ نشان دهید که $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle)$ دارای مدلی است که ترتیب اعدادِ گویا در آن می‌نشیند (یعنی ساختاری چون $\mathfrak{M} \equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ به همراه نشاندنی از $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ به M موجود هستند).

تمرین ۲۰: گیریم $\mathfrak{M}_۲ \subseteq \mathfrak{M}_۱ \subseteq \mathfrak{M}_۰$، $\mathfrak{M}_۲ \prec \mathfrak{M}_۰$ و $\mathfrak{M}_۲ \prec \mathfrak{M}_۱$. نشان دهید که $\mathfrak{M}_۱ \prec \mathfrak{M}_۰$.

تمرین ۲۱: گیریم $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ یک L ـ نشاندن باشد. نشان دهید زوج $(\mathfrak{N}, g)$ چنان موجود است که $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ و g اتومرفیسمی از $\mathfrak{N}$ است که f را بگستراند.

تمرین ۲۲: در زبان گروهها، برای $m \neq n$ نشان دهید که $\mathbb{Z}_{p^\infty}^m \not\equiv \mathbb{Z}_{p^\infty}^n$. منظور از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ گروه متشکل از همه‌ی ریشه‌های p^k اُمِ واحد است.

تمرین ۲۳: در زبان گروهها، نشان دهید که برای $m \neq n$ داریم $\mathbb{Z}^m \not\equiv \mathbb{Z}^n$.

تمرین ۲۴ (ضرب مستقیم): دو L ـ ساختارِ $\mathfrak{M}_۱, \mathfrak{M}_۲$ را در نظر بگیرید. L ـ ساختارِ $\mathfrak{M}_۱ \otimes \mathfrak{M}_۲$ را طوری تعریف کنید که جهانِ آن $M_۱ \times M_۲$ باشد و توابعِ طبیعیِ تصویر، یعنی $\pi_i : \mathfrak{M}_۱ \times \mathfrak{M}_۲ \to \mathfrak{M}_i$، نسبت بدان ویژگی جهانی زیر را داشته باشند:

برای هر L ـ ساختارِ $\mathfrak{N}$ و هومورفیسمهای $\phi_i : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_i$ (برای $i = ۱, ۲$) هومورفیسمِ یکتای $\psi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}_۱ \otimes \mathfrak{M}_۲$ موجود باشد، به طوری که $\phi_i = \pi_i \circ \psi$.

تعریف هومورفیسم شبیه تعریف نشاندن است (تعریفِ ۷)، با این تفاوت که شرط یک‌به‌یک بودن در آن نیاز نیست و موردِ ۳ به صورت زیر است:

$$\langle a_۱, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}} \Rightarrow \langle e(a_۱), \ldots, e(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{N}}.$$