$f(\{a_{j1} < \ldots, a_{jn}\}) = \{\psi(\bar{x}) | \models \psi(\{a_{j1} < \ldots < a_{jn}\})\}$ را در نظر می‌گیریم. بنا به قضیه‌ی رمزی، X زیرمجموعه‌ای متناهی چون Y دارد که همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضوی آن همرنگند. دنباله‌ی Y همان دنباله‌ی مورد نظر است. $\square$

بیان دیگری برای اثبات. روی $[X]^n$ رابطه‌ی هم‌ارزی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\{a_1 < \ldots < a_n\} \cong \{b_1 < \ldots < b_n\} \Leftrightarrow \mathrm{tp}_\Delta(\bar{a}) = \mathrm{tp}_\Delta(\bar{b}).$$

تعدادِ کلاسهای رابطه‌ی بالا (تعداد رنگها) متناهی است. زیرمجموعه‌ای از X که از اعمال لم رمزی حاصل می‌شود، دنباله‌ی مورد نظر است. $\square$

بنا به گزاره‌ی بالا، می‌توان از اندرون یک دنباله‌ی شمارا، یک دنباله‌ی بازنشناختنی نسبت به تعداد متناهی فرمول بیرون کشید. بنا به قضیه‌ی اردوش ـ رادو (که صورتی کلی‌تر است از رمزی و در این درس بدان نخواهیم پرداخت) برای هر مجموعه‌ی (نه لزوماً متناهی) Δ از فرمولها اگر اندازه‌ی دنباله‌ای که با آن شروع می‌کنیم به قدر کافی نسبت به اندازه‌ی Δ بزرگ باشد، می‌توان از دلِ آن دنباله‌ای با اندازه‌ی شمارا و در عین حال Δ ـ بازنشناختنی بیرون کشید.

روش معمول دیگر (غیر از روش استفاده از لم اردوش ـ رادو) برای یافتن دنباله‌های بازنشناختنی، آمیختن لم رمزی و لم فشردگی است. در زیر صورتی ساده از اعمال این روش را ارائه کرده‌ایم. در جلسات آینده صورتی کارگشاتر از قضیه‌ی زیر را بررسی خواهیم کرد که در آن ویژگی‌های دنباله‌ی بازنشناختنیِ موردنظر را (به صورت موضعی حول هر فرمول) تحت کنترل بیشتری درخواهیم آورد.[۷]

قضیه ۱۶۲: فرض کنیم I مجموعه‌ای باشد مرتب خطی. در آن صورت مدلِ T $\models$ $\mathfrak{M}$ و در آن دنباله‌ای بازنشناختنی چون $(a_i)_{i\in I}$ موجودند.

اثبات. نخست بسط زبانیِ $L' = L \cup \{c_i\}_{i\in I}$ را از L توسط ثوابت جدید در نظر بگیرید. تئوریِ زیر را در نظر بگیرید:

$$T' = T \cup \{\text{دنباله‌ای بازنشناختنی است } (c_i)_{i\in I}\}$$

[۷] جزوه‌ی «سادگی به زبان ساده» تألیف نویسنده‌ی دوم را برای دانستن تفاوت دنباله‌های حاصل از لم رمزی و لم اردوش رادو مطالعه بفرمایید.

به بیان دقیقتر، T' از اجتماعِ T با مجموعه‌های زیر از جملات حاصل شده است:

$$\{\phi(c_i) \leftrightarrow \phi(c_j)\}_{i,j\in I,\phi(x)\in L}$$

$$\vdots$$

$$\{\phi(c_{i۱},\ldots,c_{in}) \leftrightarrow \phi(c_{j۱},\ldots,c_{jn})\}_{\phi(x_۱,\ldots,x_n)\in L, i۱<\ldots<i_n, j۱<\ldots<jn\in I}$$

کافی است نشان دهیم که T' دارای مدل است، و برای آن کافی است مدل داشتن هر بخش متناهی از T' را ثابت کنیم. هر بخش متناهی از T' را می‌توان به مجموعه‌ای از جملات گستراند که بیانگرِ بازنشناختنی بودن یک دنباله‌ی متناهی، برای یک مجموعه‌ی متناهیِ Δ از فرمولها هستند. گزاره‌ی ۱۶۱ مدل مورد نظر را فراهم می‌آورد. $\square$

۳.۲ جلسه‌ی شانزدهم، توابع اسکولمی و اِسْکولِمیزه کردن

فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشد و A زیرمجموعه‌ای از آن. می‌دانیم که $\langle A\rangle$، زیرساختار تولیدشده توسطِ A، مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی $t^{\mathfrak{M}}(a_۱,\dots,a_n)$ هاست. این مجموعه، لزوماً یک زیرساخت مقدماتی نیست؛ برای مثال زیرساخت تولید شده توسطِ ۱ در ساختارِ $\langle \mathbb{Q},+,-,\cdot\rangle$ برابر است با $\langle \mathbb{Z},+,-,\cdot\rangle$. با این همه، در مثال یادشده، اگر در زبان توابعِ $f_{\frac{۱}{n}}(x)=\frac{x}{n}$ را می‌داشتیم، آنگاه زیرساخت تولیدشده توسط عنصر ۱ برابر می‌شد با خودِ $\langle \mathbb{Q},+,-,\cdot\rangle$، که مسلماً زیرساختی مقدماتی از ساختار یادشده است.

بنا به لمِ تارسکی، اگر $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$ آنگاه $\mathfrak{N}\prec\mathfrak{M}$ اگروتنهااگر برای هر فرمولِ بدونِ سور $\phi(x,\bar{a})\in L_M$، اگر $\phi(x,\bar{a})$ $\mathfrak{N}\models\exists x$ آنگاه

$$\mathfrak{N}\models\exists x\in M\quad\phi(x,\bar{a}).$$

اگر ترمهایی مانند t در زبان داشتیم، چنانکه از

$$\mathfrak{N}\models\exists x\quad\phi(x,\bar{a})$$

نتیجه می‌شد

$$\mathfrak{N}\models\phi(t(\bar{a}),\bar{a}),$$

آنگاه دو ساختار مورد نظر، لوازم لم تارسکی را می‌داشتند.

تعریف ۱۶۳ (ویژگی اسکولم): گوئیم در تئوری T توابع اسکولم تعبیه شده‌اند [۸]، هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x,\bar{y})$ ترمِ $t_\phi(\bar{y})$ چنان موجود باشد که

$$T\models\forall\bar{y}\quad\left(\exists x\quad\phi(x,\bar{y})\rightarrow\phi(t_\phi(\bar{y}),\bar{y})\right).$$

توجه کنید که اگر $|\bar{y}|=۰$ آنگاه ترم مورد نظر باید یک ثابت باشد؛ یعنی

$$T\models\exists x\phi(x)\rightarrow\phi(c_\phi).$$

[8] T has built-in Skolem functions.

گزاره ۱۶۴: اگر T یک تئوری سازگار در زبانِ L باشد، زبانِ L' شامل L و تئوری T' در آن شاملِ T چنان موجودند که T' دارای توابع اسکولمیِ تعبیه‌شده است.

اثبات. قرار دهید $L_0 = L$ و $T_0 = T$ و فرض کنید L_1 زبانی باشد که در آن برای هر L_0 فرمولِ بدون سورِ $\phi(x, \bar{y})$ یک نماد تابعیِ f_ϕ داریم. نیز تئوریِ T_1 را اجتماعِ T_0 بگیرید با همه‌ی جمله‌های

$$\forall \bar{y} \left(\exists x \phi(x, \bar{y}) \rightarrow \phi(f_\phi(\bar{y}), \bar{y})\right)$$

که در آن $\exists x \phi(x, \bar{y}) \in T_0$. تئوریِ T_1 دارای مدل است؛ برای تعبیر تابعِ f کافی است هر $f_\phi(\bar{y})$ را عنصری بگیریم که ضامنِ $\exists x \quad \phi(x, \bar{y})$ باشد. بدین ترتیب، زبانِ L_{n+1} را زبانی می‌گیریم که از اجتماعِ L_n با نمادهای تابعیِ f_ϕ برای هر $\phi(x, \bar{y}) \in L_n$ حاصل شده است و فرض می‌کنیم تئوریِ T_{n+1} از اجتماعِ T_n با جملات زیر حاصل شده باشد:

$$\forall \bar{y} \left(\exists x \phi(x, \bar{y}) \rightarrow \phi(f_\phi(\bar{y}, \bar{y})\right).$$

برای هر $\phi(x, \bar{y}) \in L_n$. تئوریِ $T_\omega = \bigcup_{i<\omega} T_i$ در زبانِ $L_\omega = \bigcup_{i<\omega} L_i$ تئوریِ مورد نظر ماست. □

تعریف ۱۶۵: تئوریِ T_ω را اسکولمیزشِ (یا اسکولمیزه‌شده‌ی) [۹] T می‌خوانیم و آن را با T_{skolem} نشان می‌دهیم.

تمرین ۱۶۶:

۱. نشان دهید که T_{skolem} سورها را حذف می‌کند.

۲. نشان دهید که به هنگِ T_{skolem} همه‌ی جمله‌ها دارای معادل عمومیند (معادلی تنها دارای سور عمومی). به طور خاص، این تئوری دارای اصل‌بندی عمومی است.

۳. با استفاده اسکولمیزه‌سازی، و بدینسان تقلیل منطق مرتبه‌ی اول به منطق گزاره‌ها، اثباتی توپولوژیک برای قضیه‌ی فشردگی ارائه کنید.

فرض کنیم که تئوریِ T دارای توابع اسکولمی باشد. دیدیم که برای هر مجموعه‌ی مرتبِ خطیِ $\langle I, \leq \rangle$ می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی چون $(a_i)_{i \in \omega}$ در مدلی از T یافت. مدل تولیدشده توسطِ a_i ها را با $S_{EM}(a_i | i \in I)$ نشان می‌دهیم و آن را پوش اسکولمیِ (یا غلاف اسکولمیِ) [۱۰] این دنباله

[۹] Skolemization
[۱۰] Skolem hull

می‌خوانیم. (با توجه به نقش توابع اسکولمی نشان دهید که) داریم

$$S_{EM}(a_i|i \in I) \prec \mathfrak{M}$$

و به ویژه

$$S_{EM}(a_i|i \in I) \models T.$$

تمرین ۱۶۷: فرض کنید $f : I \rightarrow I$ یک اتومرفیسم ترتیبی باشد. نشان دهید که نگاشتِ $\hat{f} : S_{EM}(a_i|i \in I) \rightarrow S_{EM}(a_i|i \in I)$ با ضابطه‌ی $\hat{f}(t(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = \hat{f}(t(a_{f(i_1)}, \ldots, a_{f(i_n)}))$ یک اتومرفیسم است.