

۷.۲ جلسه‌ی بیستم

در جلسه‌ی قبل دیدیم که وجود یک درخت ω انشعابی، موجب بی‌نهایت شدن مرتبه‌ی مُرلی فرمول نشسته در بالاترین گره (و بدینسان همه‌ی فرمولهای نشسته در درخت) می‌شود.

تا اینجا، مرتبه‌ی مُرلی را در یک مدل خاص تعریف کرده‌ایم. در ادامه می‌خواهیم تعریف را طوری گسترش دهیم که وابستگی آن به مدلها برطرف شود. عموماً (در تئوری کامل) برای این کار دو رهیافت وجود دارد:

رویکرد اول. ویژگی مورد نظر را در یک مدل خاص تعریف کنیم و ثابت کنیم که این ویژگی تحت توسیعیهای مقدماتی حفظ می‌شود. مثلاً قبلاً گفتیم که منظور از تایپ کامل، مجموعه‌ای بیشینال از فرمولهاست که با تئوری یک مدل M سازگارند. اگر p با تئوری M سازگار باشد، با تئوری هر توسیع مقدماتی از آن نیز سازگار است.

رویکرد دوم. یک مدل بسیار بزرگ را از تئوری تحت مطالعه در نظر گرفته فرض کنیم که همه‌ی مدلها به طور مقدماتی در آن می‌نشینند. سپس ویژگی مورد نظر را در آن مدل تعریف کنیم. وجود چنین مدلی، که آن را **مدل سترگ**^{۱۴} یا **مدل هیولا** می‌خوانیم، در کلاس آموختال ثابت شده است.

بگذارید فعلاً بحث را با رویکرد اول ادامه دهیم، و سپس آن را برای جلوگیری از پیچیدگی‌های مصنوعی، در یک مدل سترگ پی بگیریم.

تمرین زیر را در کلاس آموختال حل کردیم:

تمرین ۱۹۶: فرض کنید که \mathfrak{M} مدلی ω اشباع باشد. نشان دهید که هرگاه $\bar{a} \equiv \bar{b}$ آنگاه $\text{RM}^{\mathfrak{M}}(\bar{x}, \bar{a}) = \text{RM}^{\mathfrak{M}}(\bar{x}, \bar{b})$.

گزاره ۱۹۷: اگر $\mathfrak{M} \models T$ مدلی ω اشباع باشد، آنگاه برای هر توسیع مقدماتی $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ و هر فرمول $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ با $\bar{a} \in M$ داریم

$$\text{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \text{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})).$$

به ویژه اگر $\text{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$ آنگاه $\text{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$.

^{۱۴}monster model

اثبات. به آسانی می‌توان نشان داد که (بنا به مقدماتی بودن توسیع)

$$\text{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \leq \text{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})).$$

در ادامه به اثبات عکس نامساوی بالا پرداخته‌ایم.

فرض کنید که بدانیم که هرگاه $\text{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq \alpha$ آنگاه $\text{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq \alpha$.
می‌خواهیم همین را برای $\alpha + 1$ ثابت کنیم. گیریم $\text{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq \alpha + 1$. پس فرمولهای $\{\psi_i(\bar{x}, \bar{b}_i)\}_{i \in \omega}$ چنان موجودند که $\bar{b}_i \in N$ و $\mathfrak{N} \models \forall \bar{x} (\psi_i(\bar{x}, \bar{b}_i) \rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{a}))$ و نیز $\psi_i(\bar{x}, \bar{b}_i)$ و $\psi_j(\bar{x}, \bar{b}_j)$ برای $i \neq j$ در N با هم اشتراکی ندارند. به کمک اشباع بودن، دنباله‌ی $(\bar{b}'_i)_{i \in \omega}$ را از اعضای M به گونه‌ای می‌سازیم که برای هر $n \in \omega$

$$\bar{b}'_1 \dots \bar{b}'_n \equiv_a \bar{b}_1 \dots \bar{b}_n. \quad (*)$$

از معادله‌ی (*) (و با کمک تمرین پیش از این گزاره) نتیجه می‌شود که فرمولهای $\psi_i(\bar{x}, \bar{b}'_i)$ ضامن اینند که $\text{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq \alpha + 1$.
□

تئوری T کاملاً متعالی است اگر و تنها اگر در یک مدل اشباع $\mathfrak{M} \models T$ برای هر $n \in \mathfrak{N}$ مرتبه‌ی M^n مُرلی اردینال باشد (بینهایت نباشد):

نتیجه ۱۹۸: موارد زیر با هم معادلند:

۱. تئوری T کاملاً متعالی است.

۲. برای هر مدل ω اشباع \mathfrak{M} و هر فرمول $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ با پارامتر $\bar{a} \in M$ داریم $\text{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \in \text{Ord}$ ؛ یعنی هر فرمول دارای مرتبه‌ی مُرلی (اردینالی و نه بی‌نهایت) است.

۳. مدلی ω اشباع مانند \mathfrak{M} چنان موجود است که برای هر فرمول $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ با پارامتر $\bar{a} \in M$ داشته باشیم $\text{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \in \text{Ord}$.

۴. مدلی ω اشباع مانند \mathfrak{M} موجود است به طوری که برای هر $n \in \omega$ داریم $\text{RM}^{\mathfrak{M}}(M^n) \in \text{Ord}$ ؛ به بیان دیگر فرمول $x_1 = x_1 \wedge \dots \wedge x_n = x_n$ دارای مرتبه‌ی مُرلی است.

توجه ۱۹۹: در واقع در مورد آخر کافی است مرتبه‌ی مُرلی فرمولِ تک‌متغیره‌ی $x = x$ را لحاظ کنیم. اثبات این گفته فعلاً در برنامه‌مان نیست.

اثبات گزاره ۴ به ۱. فرض کنید که ۴ برقرار باشد و در عین حال، مدلی چون $\mathfrak{M} \models T$ و فرمولی چون $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ چنان موجود باشند که $RM^{\mathfrak{M}}(\bar{x}, \bar{a}) = \infty$. می‌دانیم که در مدل ω اشباع مورد ۴، که آن را \mathfrak{M} می‌نامیم، مرتبه‌ی مرلی همه‌ی فرمولها کمتر از بی‌نهایت است. بنا به ویژگی ادغام مدلی چون Ω موجود است که هر دوی \mathfrak{M}, Ω به طور مقدماتی در آن می‌نشینند. این مدل را نیز ω اشباع فرض می‌کنیم. از $RM^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$ نتیجه می‌گیریم که $RM^{\Omega}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$. از آنجا که \mathfrak{M} مدلی ω اشباع است، در آن عنصری چون a' موجود است که $a' \equiv a$. پس $RM^{\Omega}((\phi(\bar{x}, \bar{a}')) = RM^{\Omega}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$. از آنجا که \mathfrak{M} مدلی ω اشباع است

$$RM^{\mathfrak{M}}((\phi(\bar{x}, \bar{a}')) = RM^{\Omega}(\phi(\bar{x}, \bar{a}')) = \infty;$$

پس $RM^{\mathfrak{M}}(\bar{x} = \bar{x}) = \infty$ (زیرا بوضوح $\bar{x} = \bar{x} \supseteq \phi(\bar{x}, \bar{a})$ که این با ۴ در تناقض است). \square

در کلاس آموختال ثابت کردیم که در یک نظریه‌ی مناسب برای مجموعه‌ها و کلاسها می‌توان زنجیری مقدماتی چون $(M_{\alpha})_{\alpha \in Ord}$ از مدلها ساخت، به طوری که همه‌ی تایپها در هر مدل M_{α} در مدل $M_{\alpha+1}$ برآورده شوند. مدل $\mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M}_i$ مدلی است با اندازه‌ی کلاسی (و نه مجموعه‌ای) و κ اشباع برای هر کاردینال κ . نیز همه‌ی مدلها‌ی مجموعه‌ای T در آن به صورت مقدماتی می‌نشینند. این مدل، به پیمانه‌ی ایزومرفیسم یکتااست و آن را مدلِ سترگ، یا مدلِ هیولای تئوری T می‌خوانند. از این پس وقتی صحبت از مدل، مجموعه یا عنصری شود، منظور زیرمدلی مقدماتی یا زیرمجموعه و یا عنصری از آن مدل سترگ است. این مدل از این پس با \mathbb{M} نشان داده‌ایم. نیز هر جا برای مرتبه‌ی مُرلی یا تایپ به مدل محیط اشاره نشده باشد، مدل مورد نظر همان مدل سترگ است. همان گونه که گفتیم، برای کنترل ویژگی‌های مقدماتی، یعنی هر ویژگی‌ای که تحت توسیع‌های مقدماتی حفظ می‌شود، کار در مدل سترگ راحتتر است.

در زیر تعریف مرتبه‌ی مرلی را به تایپها گسترش داده‌ایم.

تعریف ۲۰۰ (مرتبه‌ی مُرلی): برای مجموعه‌ی A و تایپ $p(\bar{x}) \in S_n(A)$ تعریف می‌کنیم

$$RM(p(\bar{x})) = \min(RM(\phi(\bar{x}, \bar{a})) | \phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p)$$

اگر T کاملاً متعالی باشد، برای هر تایپ $p(\bar{x})$ داریم $\text{RM}(p(\bar{x})) \in \text{Ord}$. اگر $p(\bar{x}) = \text{tp}(\bar{a}/A)$ به جای $\text{RM}(p(\bar{x}))$ گاهی می‌نویسیم $\text{RM}(\bar{a}/A)$. پس

$$\text{RM}(\bar{a}/A) = \min(\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b}) | \mathbb{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b}), \bar{b} \in A).$$

توجه ۲۰۱: مرتبه‌ی مرلی، مفهومی از استقلال به دست می‌دهد. برای مجموعه‌های $A \subseteq B$ و عنصر a می‌نویسیم $a \perp_A B$ هرگاه $\text{RM}(\bar{a}/A) = \text{RM}(\bar{a}/B)$. در تئوریهای کاملاً متعالی، این استقلال خوش رفتاری‌های مورد انتظار از یک رابطه‌ی استقلال را دارد:

همنوايي و تعدی اگر $A \subseteq B \subseteq C$ آنگاه

$$\left(\bar{a} \perp_A B \quad \wedge \quad \bar{a} \perp_B C \right) \Leftrightarrow \bar{a} \perp_A C.$$

ناوردایی تحت اتومرفیسمها

$$\bar{a} \perp_A B \Leftrightarrow f(\bar{a}) \perp_{f(A)} f(B) \quad \forall f \in \text{Aut}(\mathbb{M}).$$

تقارن

$$\bar{a} \perp_A \bar{b} \Leftrightarrow \bar{b} \perp_A \bar{a}.$$

ویژگی تناهی برای هر مجموعه‌ی A و عنصر \bar{a} زیرمجموعه‌ای متناهی چون $A' \subseteq A$ چنان موجود است که $\bar{a} \perp_{A'} A$.

ویژگی استقلال اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$a \perp_A a', \quad b \perp_A b', \quad a' \perp_A b'$$

$$a \equiv_A b$$

آنگاه عنصر c چنان موجود است که

$$c \perp_A a'b', \quad c \equiv_{Ma'} a, \quad c \equiv_{Mb'} b.$$