تمرین

فرض کنید تابع f بر بازه $[0,1]$ پیوسته باشد و $f(0)=f(1)$

نشان دهید که عدد $a\in[0,\frac{1}{2}]$ چنان یافت می‌شود که

$$f(a)=f(a+\frac{1}{2})$$

یادآوری (قضیهٔ مقدار میانی)

فرض کنید تابع f بر بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته باشد

و $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ (همین دو تم در نقاط بازهٔ (a,b)) پیوسته باشد و

آن گاه $f(a)<f(b)$ فرض کنید $\left(\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)\right.$ و

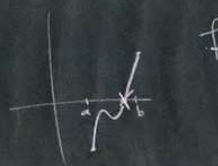
تابع f هر مقداری بین $f(a)$ و $f(b)$ را

اختیار می‌کند.

به طور خاص اگر $f(a)<0$ و $f(b)>0$ آن گاه

نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ موجود است به طوری که

$$f(c)=0$$



راهنمایی: تابع $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$ را در نظر بگیرید

تابع g در بازه $[0,\frac{1}{2}]$ پیوسته است

و

$$g(0)=f(0)-f(\tfrac{1}{2})$$

$$g(\tfrac{1}{2})=f(\tfrac{1}{2})-f(1)=f(\tfrac{1}{2})-f(0)$$

اگر $f(\frac{1}{2})=f(0)$ که مطلوب سوال است. $(a=0)$

اگر $f(0)\neq f(\frac{1}{2})$ آن‌گاه $g(0)$ و $g(\frac{1}{2})$ مختلف‌العلامه هستند. پس بنا بر پیوستگی تابع g در $[0,\frac{1}{2}]$ و بنا بر قضیه مقدار میانی (حالت خاص) نقطه $a\in(0,\frac{1}{2})$ پیدا می‌شود به طوری که $g(a)=0$.

$$g(a)=f(a)-f(a+\tfrac{1}{2})=0$$

یعنی: $f(a)=f(a+\frac{1}{2})$.

□

تمرین ثابت کنید که هر شرایط قضیه مقدار میانی برای درست بودن این قضیه لازم هستند.

تمرین ثابت کنید که تابع $g(x) = x^2 - 3 + \frac{1}{x}$ دارای حداقل 2 ریشه است.

ابتدا ثابت کنید که تابع g در بازه $(0,2]$ فقط یک ریشه دارد.

$g(1) = -1$

$g(2) = 4 - 3 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

از آنجایی که تابع g در بازه $[1,2]$ در شرایط قضیه مقدار میانی صدق می‌کند و $g(1)<0$ و $g(2)>0$ نتیجه می‌گیریم که این تابع دارای حداقل یک صفر در بازه $(1,2)$ است.

نتیجه این را ثابت کنید که $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

تابع g در نزدیکی صفر (از راست) مثبت بی‌کران است. پس طبق تعریف حد بی‌نهایت در نزدیکی صفر باید $g(b)>0$ باشد.

حال تابع g در $[1,b]$ پیوسته است و $g(1)<0$ و $g(b)>0$ پس این تابع دارای ریشه‌ای در $(1,b)$ است.

تمرین نشان دهید که تابع زیر در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{x^3-1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

حل ابتدا تابع f در نقاط $x\neq 0$ پیوسته است. زیرا در $x\neq 0$ تابع $\frac{x^3-1}{x}$ پیوسته است و تابع $\sin$ همه جا پیوسته است پس ترکیب این دو تابع، یعنی تابع $\sin\left(\frac{x^3-1}{x}\right)$ پیوسته است. هم چنین تابع x^2 پیوسته است پس $x^2\sin\left(\frac{x^3-1}{x}\right)$ پیوسته است.

برای $x=0$ پیوستگی را در حد بررسی می‌کنیم

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x^2 \sin\left(\frac{x^3-1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

پس تابع مورد نظر در نقطه 0 هم پیوسته است.