کاربرد دنباله‌ها و سری‌ها

① دنباله‌ها ابزاری برای توصیف مفهوم میل کردن هستند.

② سری‌ها برای وصف و تقریب توابع بسیاری کاربرد دارند.

$$\left(\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

③ حل معادلات دیفرانسیل $(y'' + 2y' = y)$

یادآوری آزمون نسبت (Ratio test)

اگر $a_n \geq 0$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ آن‌گاه $\sum a_n$ همگراست. اگر $l > 1$ سری مورد نظر واگراست و اگر $l = 1$ این آزمون استفاده‌ای ندارد.

مثال آیا آزمون نسبت می‌تواند واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را ثابت کند؟

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

آزمون نسبت به کار نمی‌آید.

مثال $\sum \frac{1}{n!}$

$$0! := 1$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

بنابه آزمون نسبت سری مورد نظر همگرا است.

مثال

فرض کنید که t یک عدد حقیقی دلخواه باشد. نشان دهید که سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ همگرا است.

$$1+\frac{t}{1}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

$$a_n=\frac{t^n}{n!}$$

$$a_{n+1}=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

= یک عدد =

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{t^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{t}{n+1}=0<1 \Longrightarrow$$

بنابر آزمون نسبت همگرا است.

توجه: در مثال قبل به شرط $t\neq 0$ نیازی نداریم کافی است با آزمون نسبت نشان دهیم که $\sum\left|\frac{t^n}{n!}\right|$ همگرا است. و از آن نتیجه بگیریم که $\sum\frac{t^n}{n!}$ همگرا است.

توجه: گفتیم که سری $\sum\frac{t^n}{n!}$ برای هر مقدار t همگرا است. پس می‌توانیم یک تابع به صورت زیر تعریف کنیم:

$$t \longmapsto 1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$t\mapsto\sum\frac{t^n}{n!}$$

تابع فوق را «تابع نمایی» می‌نامیم و می‌نویسیم

$$e^t=\sum\frac{t^n}{n!}=1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots$$

توجه جالب. از این نتیجه می‌شود که برای هر عدد دلخواه t

مثلاً $\frac{t^n}{n!}$ به صفر همگراست

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t^n}{n!}=0$$

تمرین

① $\sum \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

② $1-\frac{2!}{1.3}+\frac{3!}{1.3.5}-\frac{4!}{1.3.5.7}+\cdots$

$$=\sum \frac{(-1)^{n-1}\, n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$$

مثال $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{1000}}{2^n}$

$$a_n=\frac{n^{1000}}{2^n}$$

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)^{1000}}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{\frac{(n+1)^{1000}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{1000}}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1000}}{2} = \frac{1}{2}<1$$

بنابه آزمون نسبت این سری مورد نظر همگراست

توجه جالب) اگر $a>1$ و k عدد دلخواهی (طبیعی) باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$$

آزمون ۸ (آزمون ریشه)

فرض کنید $0 \le a_n$ یک دنباله باشد به طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

① اگر $l < 1$ سری $\sum a_n$ همگرا است.

② اگر $l > 1$ یا $l = \infty$ آن‌گاه $\sum a_n$ واگرا است.

③ اگر $l = 1$ آزمون ریشه کمکی نمی‌کند.

مثال

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{2n+3}{3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} < 1$$

پس بنا به آزمون ریشه، سری مورد نظر همگرا است.

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 1+1+\frac{1}{2!}+\dots$$

$$e > 1$$

در نتیجه بنا به آزمون ریشه سری مورد نظر واگرا است.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots$$

تمرین: آزمون ریشه را (حداقل بخش اول) ثابت کنید.

تمرین: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

آزمون ۹ (سری‌های متناوب)

مثال: درباره‌ی همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ بحث کنید.

$S_1 = +1$

$S_2 = +1 - \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < S_1$

$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ $\quad S_4 \geq S_2$

$S_6 = (1) - \frac{1}{2} + (\frac{1}{3}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{5}) - \frac{1}{6}$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} +$

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

دنباله‌ی S_{2n} صعودی است و از بالا کراندار است. پس S_{2n} همگراست.

$S_6 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$
$- \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

$\square < 1$

همچنین داریم

$S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} = \frac{1}{2n}$

همگرا $\quad$ به صفر همگرا

در نتیجه $\lim S_{2n-1} = \lim S_{2n}$ بنابراین دنباله S_n همگراست. بنابراین سری $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ نیز همگراست.

آزمون ۱۰ (لایبنیتز) (Leibniz)

فرض کنید $0 \le a_n$ یک دنباله نزولی و همگرا به صفر باشد.

آن گاه سری $\sum (-1)^n a_n$ همگراست.

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+}$$

مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ ([illegible])

توجه حد $\lim \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ موجود نیست

پس این سری واگراست

مثال $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$

تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ در xهای بزرگتر از ۱ نزولی است

$f'(x) = 2x$

اثبات آزمون ریشه

فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l<1$. آن گاه بنا به تعریف حد دنباله‌ها

برای هر $\varepsilon>0$ اندیس N پیدا می‌شود به گونه‌ای که برای هر $n>N$

داشته باشیم

$$l-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon$$

حال $\varepsilon>0$ را به گونه‌ای انتخاب کنید که $l+\varepsilon<1$، بنابراین داریم

$$a_{N+1} < (l+\varepsilon)^{N+1}$$

$$a_{N+2} < (l+\varepsilon)^{N+2}$$

$$\vdots$$

پس

$$\sum a_n = \overbrace{a_0+\cdots+a_N}^{\text{کراندار}} + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

$$\leq a_0+\cdots+a_N + (l+\varepsilon)^{N+1} + (l+\varepsilon)^{N+2} + \cdots$$

$$= a_0+\cdots+a_N + (l+\varepsilon)^{N+1}\left(1+(l+\varepsilon)+(l+\varepsilon)^2+\cdots\right)$$

عبارت داخل پرانتز یک سری هندسی با قدر نسبت $l+\varepsilon<1$ است پس همگراست.

بنابراین سری $\sum a_n$ نیز همگراست.

تمرین نشان دهید $\sum (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$ همگراست.

تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ برای x های به اندازه‌ی کافی بزرگ نزولی است. نکته:

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - 3x^2 \times x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4+2x}{(x^3+1)^2} = \frac{-x(x^3-2)}{(x^3+1)^2}$$

عبارت مخرج همواره مثبت است. عبارت صورت برای $x > \sqrt[3]{2}$ منفی است. پس دنباله‌ی $\frac{n^2}{n^3+1}$ برای $n \geq 2$ نزولی است. هم چنین

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = 0$$

پس بنا به آزمون لایبنیتز سری $\sum (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$ همگراست.

تمرین آیا سری $\sum \frac{n^2}{n^3+1}$ همگراست؟