قضیه (مقدار میانی)

فرض کنید تابع f یک تابع پیوسته روی یک بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشد.
اگر $f(a).f(b)<0$ آن‌گاه نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ موجود است به طوری که $f(c)=0$.

ایدهٔ اثبات: فرض کنید $f(a)<0$ ، $f(b)>0$.
دنباله‌های (a_n) ، (b_n) را به صورت زیر بسازید:

$f(a_0)<0$ $\quad f(b_0)>0$

$a_0=a$ $\quad b_0=b$

نقطهٔ $\frac{a_0+b_0}{2}$ را در نظر بگیرید. سه حالت داریم:

الف) $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)=0$ √ تمام

ب) $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)>0$ آن‌گاه قرار دهید

$a_1=a_0$ $\quad b_1=\frac{a_0+b_0}{2}$

ج) اگر $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)<0$ آن‌گاه قرار می‌دهیم

$a_1=\frac{a_0+b_0}{2}$

$b_1=b_0$

توجه کنید که $[a_1,b_1]\subseteq[a_0,b_0]$ و طول بازهٔ $[a_1,b_1]$ نصف طول بازهٔ اول است.

با ادامهٔ همین روند یک دنباله

$\dots\subseteq[a_1,b_1]\subseteq[a_0,b_0]$

$\dots\subseteq[a_n,b_n]\dots$

دقت کنید که دنبالهٔ a_n صعودی است و دنبالهٔ b_n نزولی است و هر دو کراندارند.
یعنی $\lim a_n$ و $\lim b_n$ هر دو موجودند.
([illegible]) باید ثابت کرد که $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=l$
و l در تمام بازه‌های $[a_n,b_n]$ واقع است.
توجه کنید از هر n ، $f(a_n)<0$ و $f(b_n)>0$.

دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که f پیوسته است هر دوی این دنباله‌ها همگرا هستند. توجه کنید که

$a_n\to l$

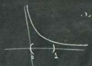
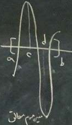
$b_n\to l$

$f(a_n)\to f(l)$

$f(b_n)\to f(l)$

از آنجا که جملات دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ منفی هستند $\lim_{n\to\infty} f(a_n)\le 0$
به همین ترتیب $\lim_{n\to\infty} f(b_n)\ge 0$ یعنی $l\le 0$ و $l\ge 0$
پس $l=0$.

برای شکل تابع $y=\frac{1}{x}$ در بازه‌ی $(0,1]$
پیوسته است ولی ماکزیمم ندارد.



توجه: تمام شرایط یاد شده برای درست بودن قضیه لازم هستند.

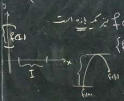
نتیجه اگر تابع f در یک بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد آن گاه f در این بازه دارای یک مینیمم مطلق و یک ماکزیمم مطلق است. (یعنی اولاً تابع در این بازه کراندار است و ثانیاً ماکزیمم و مینیمم دارد)

$\exists c\in[a,b] \quad \forall x\in[a,b] \quad f(x)\le f(c)$

$\exists d\in[a,b] \quad \forall x\in[a,b] \quad f(x)\ge f(d)$

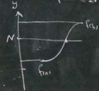
نتیجه. اگر f یک تابع پیوسته باشد و I یک بازه باشد ($I=(a,b)$, $I=[\ )$, $[\ ]$, $(\ +\infty)$, $(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,b)$)

آن گاه $f(I)$ نیز یک بازه است.
$= \{f(x) \mid x\in I\}$



قضیه (مقدار میانی)

فرض کنید تابع f یک تابع پیوسته روی یک بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ باشد.
آن گاه اگر $f(a)<f(b)$ و $f(a)<N<f(b)$ آن گاه عدد $a<c<b$ موجود است به طوری که $f(c)=N$



تابع نمایی (Exponential function)

تابع نمایی را می‌توان به چندین صورت معادل تعریف کرد

الف) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

ب) $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

ج) تابع نمایی تنها تابعی است که در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

د) تنها تابع y است که

$$x = \int_1^y \frac{1}{t}\,dt$$

در اینجا از تعریف اول استفاده خواهیم کرد.

در درسهای پیش دیدیم که سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

به ازای هر $x \in (-\infty, +\infty)$ همگرا است.

پس به ازای هر $a \in (-\infty, \infty)$ حاصل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ برابر با یک عدد می‌شود. به آن عدد e^a گفته می‌شود.

$$e^x : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a \mapsto 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots$$

ویژگی‌های تابع نمایی.

① دامنه تابع نمایی تمام $\mathbb{R}$ است، زیرا سری $\sum \frac{x^n}{n!}$ در تمام $x \in \mathbb{R}$ همگرا است.

② $e^0 = 1$

③ اگر $x \geq 0$ آنگاه $e^x \geq 1$.

$$e^x \geq 1 + x$$

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

④ $e^1 := e$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

5) تابع e^x در نقطه $x=0$ پیوسته است؛ یعنی $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$.

اثبات

باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon>0$ یک عدد $\delta>0$ چنان یافت می‌شود که اگر $|x|<\delta$ آن‌گاه $|e^x-1|<\varepsilon$.

توجه کنید که

$$|e^x-1| = \left|\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-1\right|$$

$$= \left|x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right| = \left|x\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\right)\right|$$

$$= |x|\,\underbrace{\left|1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\right|}_{A}$$

$$\le |x|\left|\left(1+\frac{|x|}{2!}+\frac{|x|^2}{3!}+\cdots\right)\right|$$

توجه کنید که اگر $|x|<1$ آن‌گاه

$$A \le |x|\underbrace{\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\right)}_{e-1}$$

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

برای $\varepsilon>0$ داده شده اگر $\delta<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{e-1}\right\}$

آن‌گاه اگر $|x|<\delta$ آن‌گاه

$$|e^x-1| \le |x|(e-1) < \delta(e-1)$$

$$< \frac{\varepsilon}{e-1}\times e-1 = \varepsilon$$

لم

$$e^{a+b} = e^a\times e^b$$

$$e^a = 1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots$$

$$e^b = 1+b+\frac{b^2}{2!}+\cdots$$

$$e^{(a+b)} = 1+(a+b)+\frac{(a+b)^2}{2!}+\frac{(a+b)^3}{3!}+\cdots$$

لم کلی

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} b_n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ دو سری مطلقاً همگرا باشند و

$\sum a_n \to \ell$

$\sum b_n \to \ell'$

آن‌گاه سری زیر (که آن را حاصل‌ضرب کوشی Cauchy دو سری $\sum a_n, \sum b_n$ می‌نامیم) همگرا است $\ell\times\ell'$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \qquad c_n = a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0$$

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!} = 1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots$$

$$e^b = \sum\frac{b^n}{n!} = 1+b+\frac{b^2}{2!}+\cdots$$

$$e^a\times e^b = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \frac{1}{1}\frac{b^n}{n!}+\frac{a}{}\frac{b^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{a^2}{2!}\frac{b^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{a^3}{3!}\frac{b^{n-3}}{(n-3)!}+\cdots+\frac{a^n}{n!} =$$

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^0b^n+\binom{n}{1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{2}a^2b^{n-2}+\dots$$

$$=a^0b^n+\frac{n!}{1!(n-1)!}a^1b^{n-1}+\frac{n!}{2!(n-2)!}a^2b^{n-2}+\dots$$

$$\Rightarrow c_n=\frac{(a+b)^n}{n!}\Rightarrow\sum c_n=\sum\frac{(a+b)^n}{n!}=e^{a+b}$$

$$\Rightarrow e^{a+b}=e^a\times e^b$$

۷) تابع e^x در هر $a\in\mathbb{R}$ پیوسته است.

اثبات: فرض کنید $a\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد. کافی است ثابت کنیم که

$$\lim_{h\to0}e^{a+h}=e^a$$

(تابع f در نقطه a پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{h\to0}f(a+h)=f(a)$)

$h\to0$, $a+h$

a, $a+h$

$h\to0$, $a+h\to a$

داریم:

$$\lim_{h\to0}e^{a+h}\overset{I}{=}\lim_{h\to0}e^a\times e^h=e^a\times\lim_{h\to0}e^h=e^a\times e^0=e^a\ \checkmark$$

از قسمت ۶

گفتیم که در صفر پیوسته است

۸) $e^{na}=e^{a+a+\dots+a}=e^a\times e^a\times\dots\times e^a=(e^a)^n$

۹) تابع e^x صعودی است.

اثبات: فرض کنید $x<y$. باید نشان دهیم که $e^x<e^y$.

داریم $y-x>0$. پس $e^{y-x}=1+(y-x)+\dots\geq1$

اگر ثابت کنیم که $e^{y-x}=\frac{e^y}{e^x}$ (*) را بپذیریم مسأله اثبات شده است.

۱۰) $e^x\times e^{-x}=e^0=1$

بنابراین $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$

۱۱) (*) $e^{y-x}=e^y\times e^{-x}=\frac{e^y}{e^x}$

۱۲) اگر $x>0$ آنگاه $e^x=1+x+\dots>1$

اگر $x<0$ آنگاه $0<e^x<1$

۱۳) برد تابع $e^x:(-\infty,\infty)\to(0,\infty)$ پوشاست.

اثبات: فرض کنید $c\in(0,+\infty)$. نشان می‌دهیم که عدد b وجود دارد بطوری که $e^b=c$.

تابع $g(x)=e^x-c$ را در نظر می‌گیریم

پس این تابع پیوسته است

$$e^{c} > c$$

$$e^{\frac{1}{c}} = 1 + \frac{1}{c} + \cdots > \frac{1}{c}$$

$$e^{-\frac{1}{c}} < c$$

$$g(c) = e^{c} - c \quad , \; g(c) > 0$$

$$e^{c} = 1 + c + \cdots > c$$

$$g\left(-\tfrac{1}{c}\right) = e^{-\frac{1}{c}} - c < 0$$

$$e^{\frac{1}{c}} > \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{1}{c}}} < c \Rightarrow e^{-\frac{1}{c}} < c$$

$$e^{c} - c > 0 \Rightarrow \exists b \in \left(-\tfrac{1}{c}, c\right) \quad e^{b} = c$$

$$e^{-\frac{1}{c}} - c < 0$$ ⇒ روی $\left[-\frac{1}{c}, c\right]$ ، e^{x} پیوسته