بنام خدا

توجه: منظور از $\sum$، عبارت $\sum_{n=0}^{\infty}$ است.

یادآوری (آزمونها)

- اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آن گاه $\sum a_n$ واگرا است.
- اگر $0 \leq a_n \leq b_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشد، آن گاه $\sum a_n$ همگراست.

آزمون 5) اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آن گاه $\sum a_n$ همگراست.

اثبات غلط: از آنجا که $a_n \leq |a_n|$ با استفاده از آزمون مقایسه به نتیجه می‌رسیم. (این اثبات اشتباه است زیرا در آزمون مقایسه، جملات دنباله‌ها باید نامنفی باشند)

اثبات درست: داریم $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ بنابراین داریم

$$(*) \quad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

حال می‌توان از آزمون مقایسه بهره جست.

سری $\sum 2|a_n|$ همگراست، پس بنابه (*) سری $\sum (a_n + |a_n|)$ همگراست. از آنجا که $\sum |a_n|$ همگراست پس $\sum a_n + |a_n| - |a_n|$ یعنی $\sum a_n$ همگراست.

بنام خدا

مثال: همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2}$$

پاسخ: داریم $0 \le \left|\frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ از آنجا که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، بنابه آزمون مقایسه، $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2}\right|$ نیز همگراست. پس بنا به آزمون قبلی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{n^2}$ همگراست.

توجه: اگر $\sum a_n$ همگرا باشد نتیجه نمی‌شود که $\sum |a_n|$ همگراست.

مثال نقض: سری $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگراست (فعلاً بپذیرید!)

اما سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست.

سوال: آیا سری $\sum (-1)^n$ همگراست؟ (خیر، چرا؟)

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum \frac{1}{2^n+1}$ را بررسی کنید.

(توجه $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$ از آزمون مقایسه و آزمون سری‌های هندسی نتیجه بگیرید که $\sum \frac{1}{2^n+1}$ همگراست)

تمرین: همگرایی یا واگرایی $\sum \frac{1}{2^n-1}$ را بررسی کنید.

آزمون 6 (آزمون مقایسهٔ حدی)

فرض کنید a_n و b_n دو دنباله با جملات نامنفی باشند. فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$. آن‌گاه

$\sum a_n$ همگراست $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ همگرا باشد

($\sum a_n$ واگراست $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ واگرا باشد)

اثبات: از این که $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ نتیجه می‌گیریم که برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه

از جمله‌ای به بعد داریم: $l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$ (*).

می‌توان ε را به گونه‌ای انتخاب کرد که (*) برقرار باشد و $l - \varepsilon > 0$.

پس: جایی به بعد داریم $a_n < (l+\varepsilon) b_n$. حال بنا به آزمون مقایسه اگر $\sum b_n$ همگرا باشد $\sum a_n$ هم همگراست. از طرفی $a_n > (l-\varepsilon) b_n$ پس اگر $\sum b_n$ واگرا باشد آن‌گاه $\sum a_n$ واگراست.

مثال. $\sum \frac{1}{2^n - 1}$

پاسخ: قرار دهید $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$ و $b_n = \frac{1}{2^n}$.

داریم
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1 > 0$$

از آن‌جا که $\sum \frac{1}{2^n}$ همگراست با مقایسه حدی نتیجه می‌گیریم که $\sum \frac{1}{2^n - 1}$ همگراست.

مثال

$$\sum \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$$

جزء اولش : $\frac{n^2}{n^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

پاسخ

قرار دهید $a_n=\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ و $b_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+3n)\times n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{5+n^5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n^{2-\frac{5}{2}}+3n^{1-\frac{5}{2}}\right)\times n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{5}{n^5}+1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty} 2n^{2-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}+3n^{1-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}2+3n^{-1}=2$$

از آنجا که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ واگرا است (سری p‌ها ; با $p=\frac{1}{2}$) ; $\lim\frac{a_n}{b_n}=2\neq 0$

نتیجه می‌گیریم که $\sum a_n$ واگرا است.

تمرین همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید

الف) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3n+2n^5}}$$

ب) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

حل ب) $a_n=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ و $b_n=\frac{1}{n}$. آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt[n]{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$$

از آنجا که $\sum\frac{1}{n}$ واگرا است نتیجه می‌گیریم که $\sum\frac{n}{n\sqrt[n]{n}}$ واگرا است.

مثال

$$\sum \frac{2^n - n}{3^n + 2}$$

حد زیر

$$\lim \frac{2^n - n}{3^n + 2} \times \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{n}{2^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} = 1$$

قرار می دهیم $a_n = \frac{2^n - n}{3^n + 2}$ ، $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ حال از آنجا که $\sum b_n$ یک سری هندسی همگراست نتیجه می گیریم که $\sum a_n$ همگراست.

راه حل دوم می دانیم $\sum \frac{2^n}{3^n}$ همگرا است و همچنین می دانیم که

$$\frac{2^n - n}{3^n + 2} < \frac{2^n}{3^n}$$

پس با آزمون مقایسه سری مورد نظر همگراست.

تمرین همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \sin k}{1 + k^3}$

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n}}{2+n}$

آزمون 7 (آزمون نسبت)

فرض کنید $0 \le a_n$ یک دنباله باشد. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

آنگاه: ۱) اگر $0 \le \ell < 1$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

② اگر $\ell > 1$ یا $\ell = \infty$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

③ اگر $\ell = 1$ آن گاه این آزمون جواب نمی دهد.

اثبات ۱. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$. پس از یک N به بعد داریم

$$\ell-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell+\varepsilon.$$

حال ε را به گونه‌ای بگیرید که $\ell+\varepsilon<1$. پس از یک N به بعد داریم $a_{n+1} < (\ell+\varepsilon)\,a_n$. پس

$$a_{N+1} < a_N(\ell+\varepsilon),\quad a_{N+2} < a_{N+1}(\ell+\varepsilon) < a_N(\ell+\varepsilon)^2,\quad a_{N+3} < a_N(\ell+\varepsilon)^3$$

و به همین ترتیب.

$$\sum a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

$$\le a_0 + a_1 + \cdots + a_N + a_N(\ell+\varepsilon) + a_N(\ell+\varepsilon)^2 + a_N(\ell+\varepsilon)^3 + \cdots = a_0 + \cdots + a_N\underbrace{\left(1 + (\ell+\varepsilon) + (\ell+\varepsilon)^2 + (\ell+\varepsilon)^3 + \cdots\right)}_{\text{یک سری هندسی همگراست}}$$

یک سری هندسی همگراست. زیرا $\ell+\varepsilon<1$.