حل تکلیف سری اول درس ریاضی عمومی ۱

۱. حد هر یک از دنباله‌های زیر را با ذکر دلیل تعیین نمایید.

الف) $a_n = \frac{}{\sqrt{n}}\sin(n+)$ ب) $a_n = \sqrt{n+n} - \sqrt{n+}$

حل: الف)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| = |\frac{}{\sqrt{n}}\sin(n+)| = |\frac{}{\sqrt{n}}|\,|\sin(n+)| \leq \frac{}{\sqrt{n}}$$

با توجه به اینکه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{}{\sqrt{n}} =$ ، بنابر قضیه‌ی فشردگی خواهیم داشت $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| =$. در نتیجه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز همگرا به صفر است.

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+n} - \sqrt{n+} = \frac{(\sqrt{n+n} - \sqrt{n+})(\sqrt{n+n} + \sqrt{n+})}{(\sqrt{n+n} + \sqrt{n+})} \\ &= \frac{n+n-n-}{\sqrt{n+n} + \sqrt{n+}} = \frac{n-}{\sqrt{n+n} + \sqrt{n+}} \end{aligned}$$

با تقسیم صورت و مخرج عبارت اخیر بر $\sqrt{n}$، خواهیم داشت

$$a_n = \frac{\frac{n-}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+n}+\sqrt{n+}}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{\sqrt{n}} - \overline{\sqrt{n}}}{\sqrt{+\overline{\sqrt{n}}} + \sqrt{+\overline{\sqrt{n}}}} \to \quad =$$

حل تکلیف سری اول درس ریاضی عمومی ۱

۲. فرض کنید دنباله‌ی همگرای $a_n = (\ + \frac{}{n})^n$ حدی برابر α داشته باشد. حد هر یک از دنباله‌های زیر را بر حسب α تعیین کنید.

الف) $b_n = (+\frac{}{n})^{n+}$ ب) $c_n = (+\frac{}{n})^n$ ج) $d_n = (\frac{n}{n+})^n$

حل: الف) داریم

$$b_n = (\ + \frac{}{n})^{n+} = (\ + \frac{}{n})^n(\ + \frac{}{n})$$

با توجه به فرض، $(\ + \frac{}{n})^n \longrightarrow \alpha$. همچنین $(\ + \frac{}{n}) \longrightarrow$ و از آنجا $(\ + \frac{}{n}) \longrightarrow$. در نتیجه

$$b_n = (\ + \frac{}{n})^{n+} = (\ + \frac{}{n})^n(\ + \frac{}{n}) \longrightarrow \alpha \cdot \ = \alpha$$

ب)

$$c_n = (\ + \frac{}{n})^n = \left((\ + \frac{}{n})^n\right) \longrightarrow \alpha$$

ج)

$$d_n = (\frac{n}{n+})^n = (\frac{}{ \ + \frac{}{n}})^n = \frac{}{(\ + \frac{}{n})^n} \longrightarrow \frac{}{\alpha}$$

۳. دنباله‌ی $\{a_n\}$ را دنباله‌ای بازگشتی نامیم هرگاه جمله‌ی آغازین (یا چند جمله‌ی آغازین) دنباله داده شده باشد و جمله‌ی a_n به جمله‌ی a_{n-} یا چند جمله‌ی قبل از خود وابسته باشد. نشان دهید دنباله‌ی بازگشتی $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با دستور $a =$ و $a_n = \sqrt{+a_{n-}}$، برای $n \geq$ ، دنباله‌ای صعودی است. نشان دهید این دنباله همگرا است.

حل: با توجه به دستور بازگشت دنباله، $a = \sqrt{+a} = \sqrt{} > = a$. برای $k \geq$ ، فرض کنیم $a_k > a_{k-}$. در این صورت

$$+a_k > +a_{k-} \Rightarrow \sqrt{+a_k} > \sqrt{+a_{k-}} \Rightarrow a_{k+} > a_k$$

به این ترتیب، با استفاده از استقرای ریاضی، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_{n+} > a_n$. یعنی $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی است. با توجه به خاصیت دنباله‌های یکنوا، برای اثبات همگرایی این دنباله، کافی است ثابت کنیم این دنباله از بالا کراندار است. این کار را نیز با استفاده از استقرا انجام می‌دهیم.

$$a = <, \quad a = \sqrt{} <, \quad a = \sqrt{+\sqrt{}} < \sqrt{+\times} = .$$

برای $k \geq$ ، فرض کنیم $a_k <$. در این صورت $a_{k+} = \sqrt{+a_k} < \sqrt{+\times} =$. پس به استقرا، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n <$. به این ترتیب، $\{a_n\}$ دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار بوده، در نتیجه همگرا است.

۴. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را تحقیق نمایید.

الف) $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{}{+\ +\cdots+n}$ ب) $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$

ج) $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{}{\sqrt{+\frac{}{n}}}$ د) $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{\times\ \times\cdots\times(n-)}{\times\ \times\cdots\times(n)(^n+)}$

حل: الف)

$$\le a_n = \frac{}{+\ +\cdots+n} \le b_n = \frac{}{n}$$

سری $\sum_{n=}^{\infty} \frac{}{n}$ یک سری فوق همساز با $p = \ >$ است. در نتیجه همگرا است و بنا بر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=}^{\infty} \frac{}{++\cdots+n}$ نیز همگرا است.

ب) با اختیار $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$ و $b_n = \frac{}{n}$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} =$$

از آنجا که سری $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{}{n}$ همگرا است، بنا به آزمون مقایسه حدی سری $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$ نیز همگرا است.

ج) اگر قرار دهیم $a_n = \frac{}{\sqrt{+\frac{}{n}}}$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{}{\sqrt{+\frac{}{n}}} =$$

چون $\lim_{n\to\infty} a_n \neq$ سری داده شده واگرا است.

د)

$$a_n = \frac{\times\ \times\cdots\times(n-)}{\times\ \times\cdots\times(n)(^n+)} = \ \times\ \ \times\cdots\times \frac{(n-)}{n} \times \frac{}{^n+} \le \frac{}{^n}$$

سری $\sum_{n=}^{\infty} \frac{}{^n}$ یک سری هندسی با قدر نسبت $\ \le\ $ است. در نتیجه همگرا است و بنا به ازمون مقایسه سری داده شده نیز همگرا است.

۵. اگر $\sum_{n=}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات نامنفی و همگرا باشد، نشان دهید هر یک از سری‌های زیر همگرا است.

الف) $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} a_n$ ب) $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{a_n}{a_n +}$ ج) $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{a_n}{a_n +}$

حل:

الف) طبق فرض سری $\sum_{n=}^{\infty} a_n$ همگرا است. در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a_n =$. بنابراین یک n وجود دارد که برای هر $n \geq n$ داریم

$$\leq a_n \leq a_n \leq .$$

پس بنا به آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

ب)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{a_n+}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n(a_n+)} =$$

در نتیجه بنا به آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+}$ نیز همگرا است.

ج) از آنجا که سری داده شده در قسمت (الف) همگرا است، مشابه قسمت (ب) نتیجه می‌شود سری $\sum_{n=}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+}$ نیز همگرا است.