یادآوری

اگر a_n یک دنباله صعودی و از بالا کراندار باشد آن‌گاه a_n همگرا است.

نکته: (اصل کمال) هر زیرمجموعه از بالا کراندار از اعداد حقیقی دارای کوچکترین کران بالا است.

$$A=\{a_1, a_2, \dots\}$$

به طور مشابه هر دنباله نزولی از پایین کراندار همگرا است.

مثال: فرض کنید a_n با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده باشد

$$a_1=\sqrt{2}$$

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$

ادعا: دنباله a_n از بالا کراندار است.

اثبات ادعا: اولاً $a_1=\sqrt{2}<2$

حال دقت کنید که اگر $a_n < 2$ آن گاه

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$$

بنا به استقراء، برای هر n داریم $a_n \leq 2$.

اثبات صعودی بودن

با استقراء روی n نشان می‌دهیم که

برای هر n داریم: $a_{n+1} > a_n$. اولاً $a_2 > a_1$ زیرا

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

ثانیاً ادعا می‌کنیم که اگر $a_n > a_{n-1}$ آن‌گاه $a_{n+1} > a_n$

توجه- تنها کراندار بودن یک دنباله همگرایی آن را نتیجه نمی‌دهد. برای مثال دنباله $a_n=(-1)^n$ کراندار است ولی همگرا نیست.

قسمت دوم سوال یافتن حد دنباله a_n.

می‌دانیم که دنباله a_n همگراست. همچنین می‌دانیم که $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$. فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$a_{n+2} > a_{n+1}$. داریم:

$$a_{n+1} > a_n \Longrightarrow 2+a_{n+1} > 2+a_n$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2+a_{n+1}} > \sqrt{2+a_n}$$

$$\Longrightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$$

پس $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\ell$. پس $\ell=\sqrt{2+\ell}$

یعنی $\ell=2$. پس دنباله مورد نظر به عدد 2 همگرا است.

$$2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}}}$$

مثال فرض کنید a_n با رابطهٔ بازگشتی زیر داده شده باشد.

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$$

نشان دهید که a_n همگراست و حد آن را بیابید.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$$

$a_۲ > a_۱$

$a_۳ < a_۲$ $\quad$ $a_۱ < a_۲$

$a_۴ > a_۳$ $\quad$ $a_۱ < a_۳ < a_4 < a_2$

$a_1 < a_3 < a_5 < a_6 < a_4 < a_2$

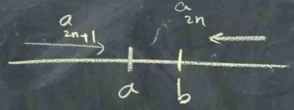
(اثبات کنید) $a_1 < a_3 < a_5 < a_7 < \dots\dots < a_6 < a_4 < a_2$

1- زیر دنباله (a_{2n+1}) صعودی

و از بالا کراندار است $\Leftarrow$ همگراست به ℓ.

2- زیر دنباله (a_{2n}) نزولی و از پایین

کراندار است $\Leftarrow$ همگراست به ℓ'.



$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$a_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$

$a_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$

$$(a_{2n+1}) = 1 + \frac{1}{1+a_{2n}}$$

$$(a_{2n}) = 1 + \frac{1}{1+(a_{2n-1})}$$

$$l = 1 + \frac{1}{1+l'}$$

$$l' = 1 + \frac{1}{1+l}$$

$$\Rightarrow l = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1+l}} \Rightarrow$$

$$l = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+l}} = 1 + \frac{1}{\frac{3+2l}{1+l}} = 1 + \frac{1+l}{3+2l} = \frac{1+l+3+2l}{3+2l} = \frac{3l+4}{3+2l} = l$$

$$\cancel{3l} + 4 = \cancel{3l} + 2l^2$$

$$l^2 = 2$$

$$l = \sqrt{2}$$

زیرا جملات مثبتند

به طور مشابه می‌توان دید که

$$l' = \sqrt{2}$$

توجه فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = L$

آن‌گاه دنباله‌ی a_n همگرا است و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

مثال قبل همگرا به $\sqrt{2}$ است.

بنا به توجه بالا، دنباله‌ی کسرهای مسلسل

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

توجه حد یک دنباله در صورت وجود یکتا است.

اثبات فرض کنید a_n یک دنباله باشد و فرض کنید که

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$

ادعا $a = b$.

اثبات ادعا از آنجا که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

می‌دانیم که عدد N_1 موجود است به طوری که برای هر $n > N_1$ داریم:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

از طرفی از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ برای هر $\varepsilon>0$

یک عدد N_2 موجود است که برای $n>N_2$ داریم

$$|a_n-b| < \varepsilon/2$$

پس برای هر $\varepsilon>0$ اگر $n>\max\{N_1,N_2\}$ آنگاه

$$|a-b| = |a-a_n+a_n-b| \leq$$

$$|a-a_n| + |a_n-b| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

نتیجه: برای هر $\varepsilon>0$ داریم

$$0\leq |a-b| < \varepsilon$$

بنا به ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی داریم

$$|a-b| = 0$$

پس $a=b$.

یادآوری اگر a_n یک دنباله باشد منظور از $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ عبارت زیر است:

$$a_0+a_1+a_2+\cdots$$

می‌گوییم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ هرگاه $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ که در آن

$$S_n = a_0+a_1+\cdots+a_n$$

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots\cdots$$

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \overset{}{\underset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow}} \lim_{n \to \infty} S_n = L$$

آزمونهای همگرائی سریها

آزمون اول (همگرائی دنباله)

لم) اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ بهمگرا باشد آن گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. به بیان دیگر اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا نیست.

توجه: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ نتیجه نمی‌گیریم که سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست. برای مثال

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ولی $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

واگراست. (در جلسات قبل دیدیم که)

مثال: همگرایی یا واگرائی سری‌های زیر را بررسی کنید

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ $\quad a_n$

جواب: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{5}$

از آنجاکه $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

نتیجه می‌گیریم که سری مورد نظر واگراست.

توجه عبارت‌های زیر هم‌ارزند:

۱) $p \to q$

۲) p شرط کافی برای q است.

۳) q شرط لازم برای p است (اگر q نباشد p نیست)

اثبات لم

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد بنابه تعریف $\lim_{n\to\infty} S_n = L$.

دنباله S_n همگراست فرض کنید

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}$$

پس $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = L$ یعنی $\lim_{n\to\infty} (\underbrace{S_{n+1} - S_n}_{= a_{n+1}}) = L - L = 0$

پس $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$ یعنی $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

آزمون‌های همگرائی سری‌ها

مثال همگرائی یا واگرائی سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+2^n}}$ ، a_n

پاسخ در جلسهٔ قبل دیدیم که $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n} = 2$ پس

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$ پس $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگرا است.

ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

پاسخ

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \neq 0$$

از آنجا که $\lim a_n = e \neq 0$ سری $\sum a_n$ واگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} \quad (8$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{n(n-1)}{2\, n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\, n^3}$$

$$+ \cdots = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

$$< \sum\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$\to \infty$