شنبه ۷ مهر - تمرین ۴

تمرین 1

نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\sqrt[1]{1}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$

راه حل پیشرفته

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{0} = 1$$

راه حل بالا را هنوز درس نداده‌ایم!

راه حل مقدماتی

اولاً که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n}$

یعنی تمامی جملات دنباله از یک بزرگتر یا مساوی با 1 هستند. بنویسیم: $a_n = \sqrt[n]{n}$

از آنجا که $a_n \geq 1$ می‌نویسیم $a_n = 1 + b_n$ ، $b_n \geq 0$

را داریم ثابت می‌کنیم که $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$$a_n = 1 + b_n \Rightarrow$$

$$a_n^n = (1+b_n)^n \Rightarrow$$

$$n = 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 + \cdots$$

از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که

$$\Rightarrow n \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$$

پس $0 \leq b_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} b_n^2 = 0$

(بنابه فشردگی)

و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

یادآوری

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots$$

$$+ \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

شنبه ۷ مهر - تمرین ۴

تمرین ۲

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$$

راه اول

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^{0} = 1$$

راه دوم

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{n}$$

$$\overset{\text{فشردگی}}{\Longrightarrow} \lim \sqrt[n]{2} = 1.$$

تمرین ۳ (تعمیم تمرین ۲)

فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

راه حل تمرین ۳: از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ می‌دانیم که اگر $\varepsilon > 0$ یک عدد دلخواه باشد

از یک جمله ی N به بعد داریم

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$

می دانیم که $a>0$ پس ε را به گونه ای میگیریم

که $a-\varepsilon>0$. بنابراین

$$\underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{\sqrt[n]{a-\varepsilon}}} < \underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{\sqrt[n]{a_n}}} < \underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{\sqrt[n]{a+\varepsilon}}}$$

بنا به قضیه ی فشردگی

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$$

شنبه ۷ مهر - تمرین ۴

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$$

تمرین ۴

اگر $a \geq 1$ نشان دهید که 1

$$\underbrace{\sqrt[n]{1}}_{\downarrow\, 1} \leq \sqrt[n]{a} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow\, 1} \quad (n > a)$$

1

تمرین ۵

اگر $0 < a < 1$ نشان دهید که $\sqrt[n]{a} \to 1$

$$\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \longrightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1$$

تمرین ۷

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = ?$$

توجه: گفتیم که اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ آن گاه $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. ثابت کنید که از این نتیجه می‌شود که اگر $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^n = a > 0$ و $b_n \geq 0$ آن گاه $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$

تمرین ۶

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n}$$

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{1+2^n} \leq \sqrt[n]{2^n+2^n} = \sqrt[n]{2\times 2^n} = \sqrt[n]{2} \times 2$$

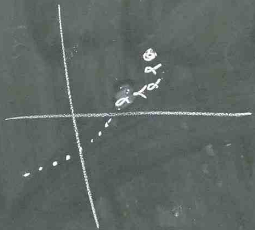
بنا به قضیه‌ی فشردگی

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n} = 2$$

شنبه ۷ مهر - تمرین ۴

تمرین 8 فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$

نشان دهید که از جائی به بعد $a_n \geq 0$



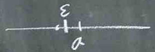
نتیجه

یک دنباله با جملات منفی نمی‌تواند به یک عدد مثبت میل کند.

$$a_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq 0$$

جواب تمرین 8 می‌دانیم که $a > 0$. فرض کنید $\varepsilon > 0$

به گونه‌ای باشد که $a - \varepsilon > 0$.

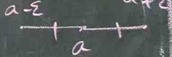


بنابر همگرائی دنباله a_n به a از جائی به بعد داریم

$0 < a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$

پس از جایی به بعد $\{a_n\}$ مثبت هستند.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N$$



$$\underbrace{|a_n - a| < \varepsilon}$$

$$0 < a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$

تمرین 9

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = a < 0$

از جایی به بعد جملات دنباله منفی هستند.

شنبه ۷ مهر - تمرین ۴

تمرین 10 فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = a > L$

نشان دهید که از جایی به بعد $a_n > L$.

راهنمایی) $b_n = a_n - L$ و از تمرین 18 استفاده کنید.

تمرین ۱۱ فرض کنید دنباله a_n با فرمول بازگشتی زیر داده شده باشد.

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

نشان دهید که دنباله a_n همگرا است و حد آن

را بیابید.

پاسخ: اثبات همگرایی

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$a_4 = \dots$$

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

(تمرین: با استقرا نشان دهید که دنباله مورد نظر صعودی است)

دنباله مورد نظر صعودی است.

$$\sqrt{2} < 2$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < \sqrt{2+2} = 2$$

پس همه جملات دنباله از 2 کمترند.

یادآوری

اگر a_n صعودی و از بالا کراندار باشد، همگراست (بنا به اصل کمال)

اگر a_n نزولی و از پایین کراندار باشد، همگراست

در نتیجه مثال قبل همگراست.