# ۱ جلسه‌ی نهم

**یادآوری ۱.** اگر $\mathbf{r}(t)$ یک تابع برداری (منحنی فضایی) باشد به صورت زیر:

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$

آنگاه

$$\mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

$$\mathbf{r}''(t) = (f''(t), g''(t), h''(t))$$

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) = (\int_a^b f(t), \int_a^b g(t), \int_a^b h(t))$$

## ۱.۱ قضیه‌ی اساسی حساب

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

به زبان برداری:

$$\int_a^b \mathbf{r}'(t)dt = \mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)$$

**مثال ۱.** اگر $\mathbf{r}(t) = (۲\cos t, \sin t, ۲t)$، آنگاه مقدار $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \mathbf{r}(t)dt$ را بیابید.

*پاسخ.*

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \mathbf{r}(t)dt = (۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos t dt, \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin t dt, \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} ۲t dt) = (۲\sin t|_۰^{\frac{\pi}{۲}}, -\cos t|_۰^{\frac{\pi}{۲}}, t^۲|_۰^{\frac{\pi}{۲}}) =$$

$$(۲\sin\frac{\pi}{۲} - ۲\sin ۰, -\cos\frac{\pi}{۲} + \cos ۰, \frac{\pi^۲}{۴} - ۰) = (۲, ۱, \frac{\pi^۲}{۴})$$

□

**مثال ۲.** بردار مماسِ واحد بر منحنی زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید.

$$\mathbf{r}(t) = (t^۲ - ۲t, ۱ + ۳t, \frac{۱}{۳}t^۳ + \frac{۱}{۲t^۲})$$

بردار مماس واحد را در $t = ۲$ بیابید.

*پاسخ.* جهت بردار مماس بر منحنی در نقطه‌ی $t$ :

$$\mathbf{r}'(t) = (۲t - ۲, ۳, t^۲ + t)$$

بردار مماسِ واحد بر منحنی:

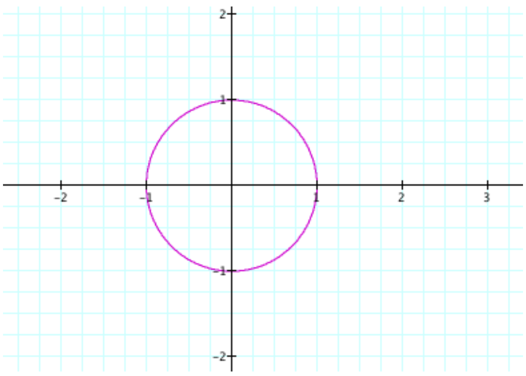
$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$
$$T(۲) = \frac{\mathbf{r}'(۲)}{\|\mathbf{r}'(۲)\|}$$
$$\mathbf{r}'(۲) = (۲, ۳, ۶)$$
$$\|\mathbf{r}'(۲)\| = \sqrt{۴ + ۹ + ۳۶}$$
$$T(۲) = \frac{۱}{\sqrt{۴۹}}(۲, ۳, ۶)$$

□

## ۲.۱ محاسبه‌ی طول یک منحنی فضائی

فرض کنید منحنیِ فضائیِ $c$ توسط معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ داده شده باشد (که در آن $f'$ ، $g'$ و $h'$ هر سه پیوسته هستند و منحنی تنها با یک بار رفتن $t$ از $a$ به $b$ پیموده شده است.) مثلاً

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad ۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi$$




یا در فضای دو بعدی

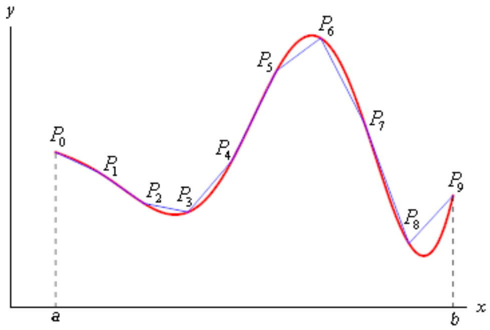
$$y = f(x)$$

به صورت برداری زیر:

$$\mathbf{r}(x) = (x, f(x))$$

برای محاسبه‌ی طول منحنی، آن را به $n$ پاره‌خط تقسیم می‌کنیم. حاصلجمع طول این پاره‌خطها وقتی $n \to \infty$، برابر با طول منحنی خواهد شد. طول هر پاره‌خط وقتی $n$ خیلی زیاد شود، یعنی وقتی فاصله‌ها خیلی کم شوند، برابر می‌شود با

$$\sqrt{dx^۲ + dy^۲ + dz^۲}$$




پس طول منحنی از نقطه‌ی $a$ تا $b$ برابر است با:

$$\sum_{x=a}^{b} \sqrt{dx^۲ + dy^۲ + dz^۲}$$

$$dx, dy, dz \to ۰$$

$$\text{طول منحنی} = \lim_{n\to\infty} \sum \text{طول}n\text{پاره خط}$$

$$\lim_{dx,dy,dz\to ۰} \sum_{x=a}^{b} \sqrt{dx^۲ + dy^۲ + dz^۲} = \int_a^b \sqrt{dx^۲ + dy^۲ + dz^۲}$$

از آنجا که داریم:

$$x = f(x)$$

$$dx = f'(t)dt, \quad dy = g'(t)dt, \quad dz = h'(t)dt$$

پس

$$\int_a^b \sqrt{(f'(t))^۲dt^۲ + (g'(t))^۲dt^۲ + (h'(t))^۲dt^۲} = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^۲ + (g'(t))^۲ + (h'(t))^۲}dt$$

به بیان دیگر طول منحنی $\mathbf{r}(t)$ از $t=a$ تا $t=b$ برابر است با

$$\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

**مثال ۳.** پیچار دایره‌ای $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ را در نظر گرفته طول کمان آن را از نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$ تا $(۱,۰,۲\pi)$ محاسبه کنید.

*پاسخ.*

$$P = (۱,۰,۰) \to t = ۰$$

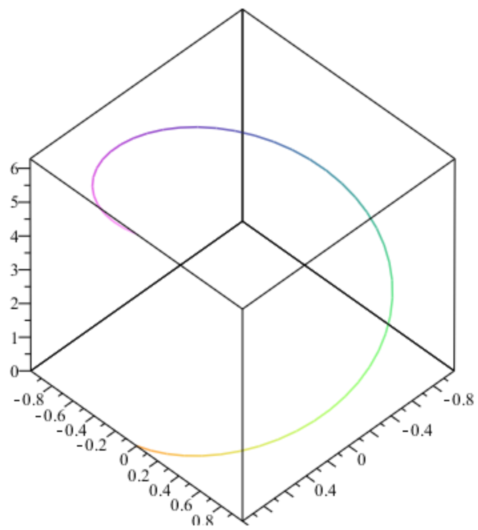
$$Q = (۱,۰,۲\pi) \to t = ۲\pi$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, ۱)$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^۲ t + \cos^۲ t + ۱} = \sqrt{۲}$$

$$\int_۰^{۲\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_۰^{۲\pi} \sqrt{۲} dt = \sqrt{۲} t|_۰^{۲\pi} = ۲\sqrt{۲}\pi$$




□

**تمرین ۴.** طول کمان دایره‌ی زیر را از $t=۰$ تا $t=\theta$ محاسبه کنید.

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

نتیجه را با فرمولِ محیط دایره مقایسه کنید.

منحنی مکعبیِ $\mathbf{r}(t) = (t, t^۲, t^۳)$ را برای $۱ \leqslant t \leqslant ۲$ در نظر بگیرید. این منحنی را می‌توان با استفاده از تابع برداری زیر نیز پارامتربندی کرد و دقیقاً به همان شکل رسید.

$$\mathbf{r}_۲(u) = (e^u, e^{۲u}, e^{۳u}) \quad ۰ \leqslant u \leqslant \ln ۲$$

$$u = ۰ \to (۱, ۱, ۱)$$

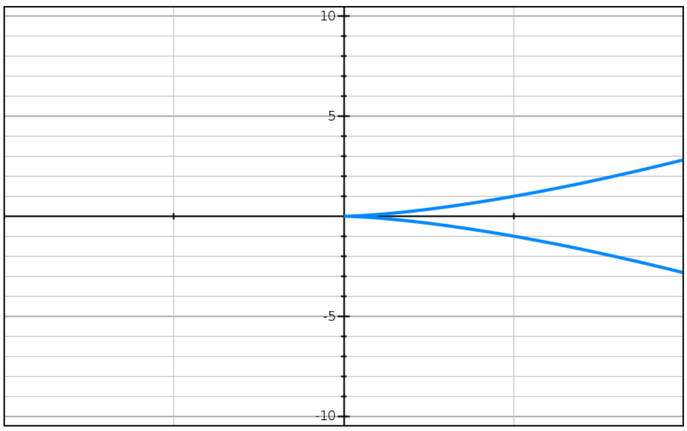
$$u = \ln ۲ \to (۲, ۴, ۸)$$

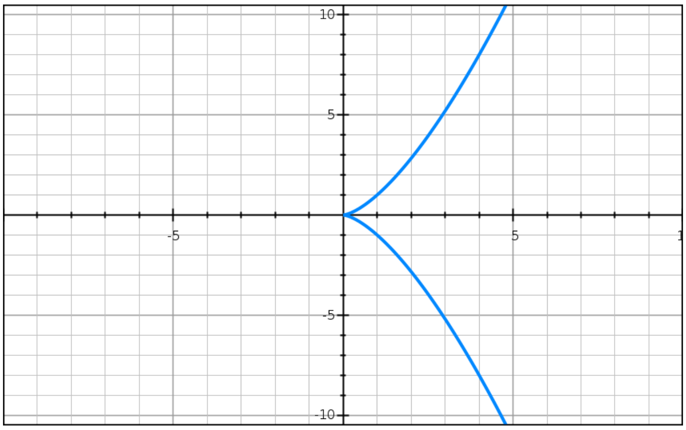
**توجه ۵.** طول منحنی وابسته به نحوه‌ی پارامتربندی آن نیست.

هدف ما در ادامه‌ی درس پارامتربندی منحنی بر حسب طول کمان آن است. یعنی یک نقطه‌ی $P$ روی آن را در نظر می‌گیریم. سپس معادله‌ی برداریِ $r(s)$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که $r(s)$ نشان دهنده‌ی این باشد که وقتی به اندازه‌ی $s$ روی منحنی از نقطه‌ی $p$ حرکت می‌کنیم، در کجای منحنی واقع می‌شویم.

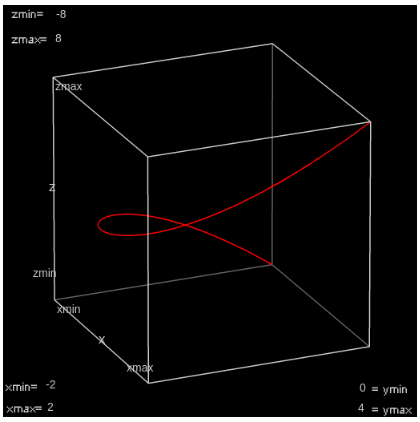
## رفع چند اشکال

$$\mathbf{r}(t) = (t^۲, t^۳) \quad -۲ \leqslant t \leqslant ۲$$






$$\mathbf{r}(t) = (t, t^۲, t^۳)$$



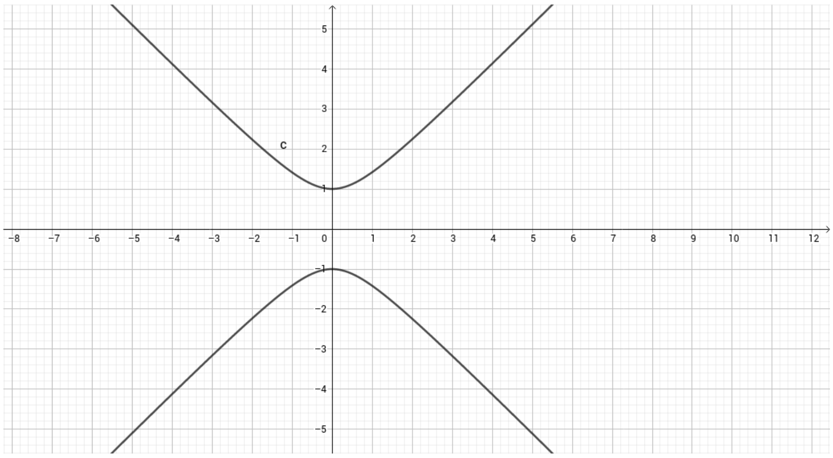

**مثال ۶.** دو رویه‌ی $z^۲ = x^۲ - y^۲ + ۱$ و $z^۲ = x^۲ - y^۲ - ۱$ را با هم مقایسه کنید.

پاسخ. ۱.

$$z^۲ = x^۲ - y^۲ + ۱$$

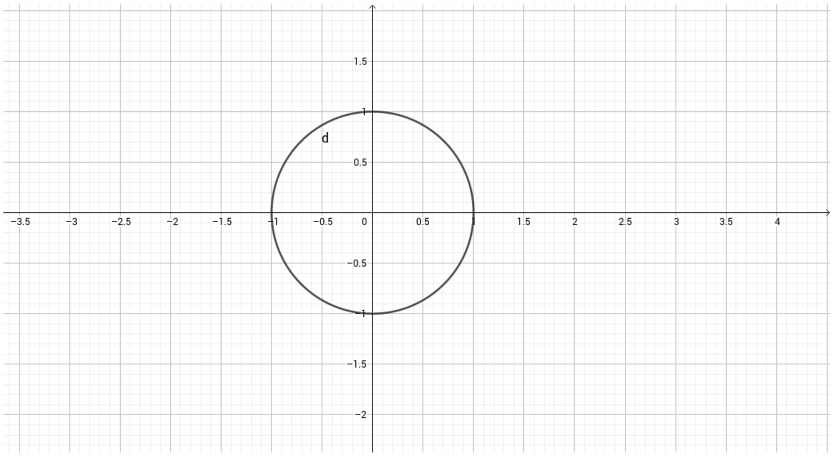
تصویر در صفحه‌ی $z = ۰$ :

$$x^۲ - y^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow y^۲ - x^۲ = ۱$$



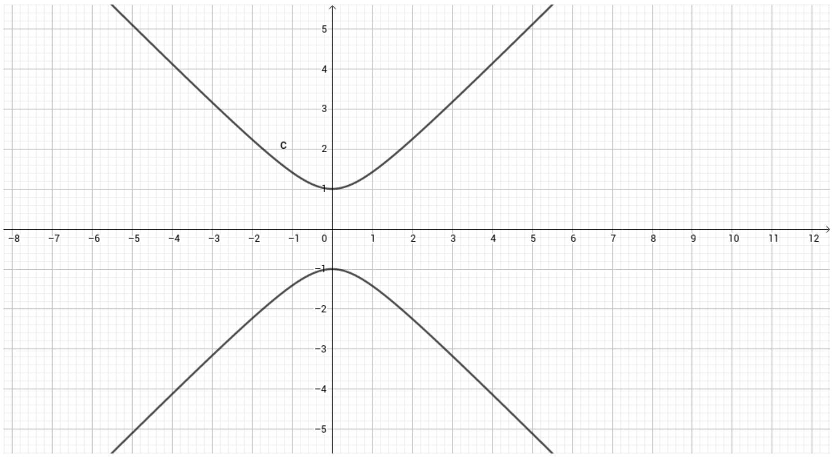

تصویر در صفحه‌ی $x = ۰$ :

$$z^۲ + y^۲ = ۱$$

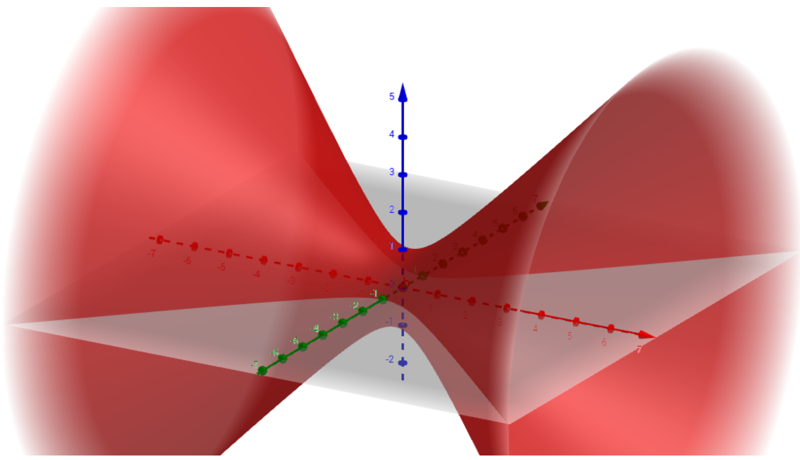



تصویر در صفحه‌ی $y = ۰$ :

$$z^۲ - x^۲ = ۱$$




شکل نهایی:

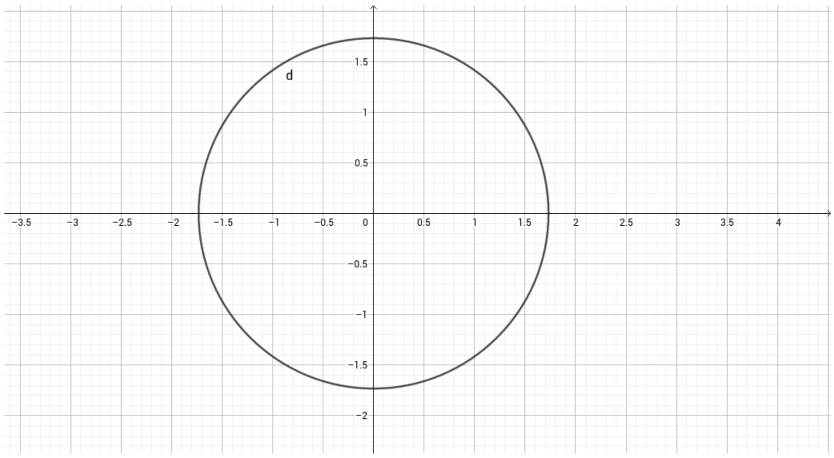


۲.

$$z^2 = x^2 - y^2 - 1$$

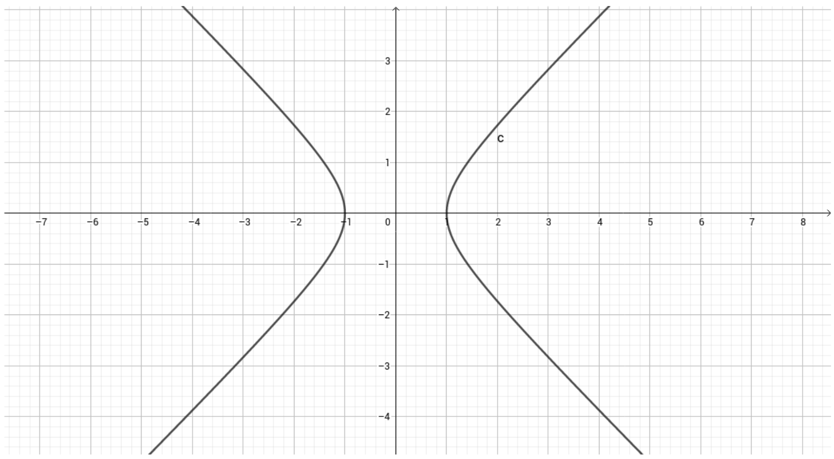
در صفحه‌ی $x = 0$ : $z^2 + y^2 = -1$ پس در این صفحه شکلی نیست. یعنی شکل نهائی با صفحه‌ی $x = 0$ اشتراکی نخواهد داشت. پس بخشی از شکل خالی خواهد بود.

در صفحه‌ی $x = 2$ : $z^2 + y^2 = 3$

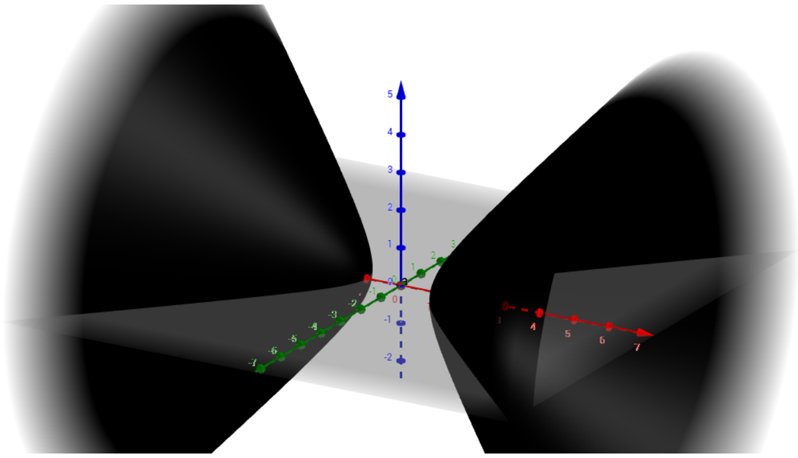



در صفحه‌ی $z = ۰$ :

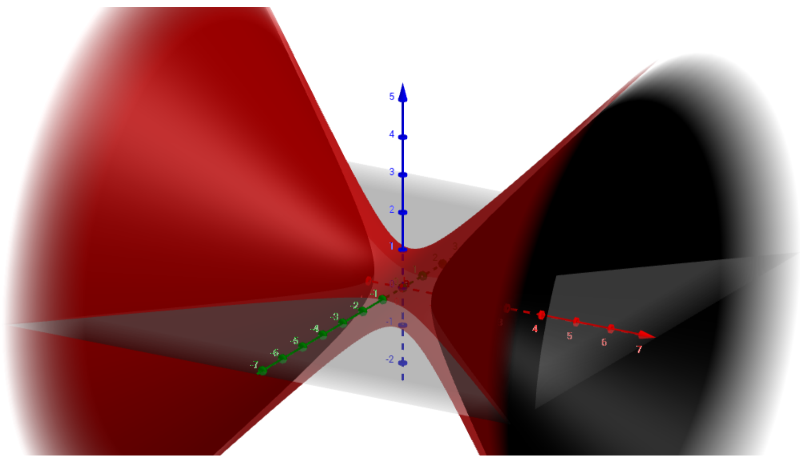
$$x^۲ - y^۲ = ۱$$




شکل نهایی:



مقایسه‌ی دو شکل با هم (یکی با رنگ قرمز و دیگری با رنگ مشکی)

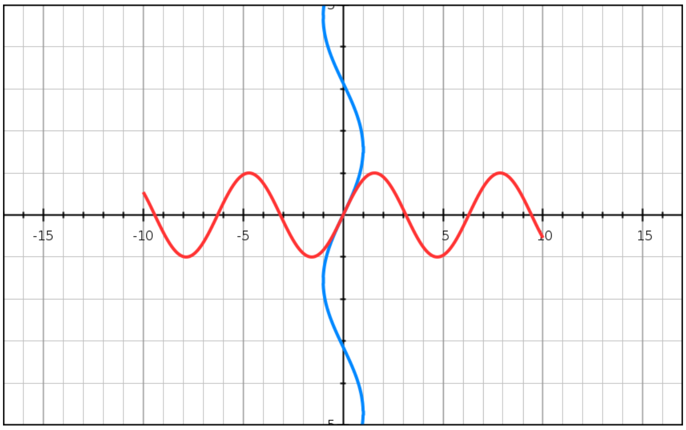


$\square$

مقایسه‌ی دو منحنی $\mathbf{r}(t)=(\sin t,t)$ و $\mathbf{r}(t)=(t,\sin t)$ :

منحنی آبی رنگ $\mathbf{r}(t)=(\sin t,t)$

منحنی قرمز رنگ $\mathbf{r}(t)=(t,\sin t)$




نمودارهای این قسمت با استفاده از دو تارنمای زیر کشیده شده‌اند.

https://www.geogebra.org/classic/2d

https://www.geogebra.org/classic/3d