۱ جلسه‌ی دهم

مثال ۱. دایره‌ی $x^2 + y^2 = r^2$ را در نظر بگیرید و محیط آن را با استفاده از فرمول طول منحنی محاسبه کنید.

دایره را می‌توان به صورت زیر پارامتربندی کرد.

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$x(t) = r\cos\theta$$

$$y(t) = r\sin\theta$$

محیط دایره:

$$\int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = \sqrt{r^2} = r$$

بنابراین محیط دایره برابر است با

$$\int_0^2 \pi r dt = 2\pi r.$$

مثال ۲. طول کمان دایره روبروی زاویه‌ی θ چقدر است؟

$$\int_0^{\theta} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = r\theta$$

معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$P = (x_0, y_0, z_0) \quad v = (a, b, c)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + ae^u \\ y = y_0 + be^u \\ z = z_0 + ce^u \end{cases}$$

با این که این دو معادله با هم متفاوت به نظر می‌رسند ولی هر دو معادله‌ی یک خط یکسان هستند که با «سرعتهای» متفاوتی کشیده شده است. برای این که متوجه شویم که هر دو معادله‌ی خط هستند، کافی است در معادله‌ی دومی به جای e^t از متغیری مانند s استفاده کنیم.
دو پیچار زیر را با هم مقایسه کنید. در می‌یابید که هر دو به یک شکلند ولی دومی سریعتر پیموده می‌شود.

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos ۲t, \sin ۲t, ۲t)$$

بنابراین برای یک منحنی یکسان، می‌توان پارامتربندیهای متفاوتی را در نظر گرفت که همه‌ی آنها یک شکل یکسان را به دست می‌دهند. در ادامه‌ی درس علاقه‌مندیم که منحنیِ $\mathbf{r}$ را بر حسب طول پارامتربندی کنیم. یعنی یک معادله‌ی $\mathbf{r}(s)$ به دست بیاوریم که بگوید که وقتی به اندازه‌ی s واحد روی منحنی (با شروع از یک نقطه‌ی مشخص) حرکت می‌کنیم به کدام قسمتِ منحنی می‌رسیم.

۱.۱ تابع طول منحنی

فرض کنید منحنی فضاییِ c توسط معادله‌ی برداری $a \leqslant t \leqslant b \quad \mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ داده شده باشد. (f' ، g' و h' هر سه پیوسته‌اند و منحنی از a تا b تنها یک بار پیموده شده است.)
تابع $S(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$S(t) = \quad t \quad \text{تا زمان} \quad a \quad \text{طول منحنی از زمانِ}$$

پس

$$S(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du$$

سوال:

$$S'(t) = \frac{ds}{dt}$$

را بیابید.
یادآوری از حساب دیفرانسیل: اگر

$$f(x) = \int_a^x g(u) du$$

آنگاه

$$f'(x) = g(x).$$

بنابراین:

$$S'(t) = \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| = \quad (t \quad \text{طول بردار مماس در لحظه‌ی})$$

در زیر یک منحنی را بر حسب طول پارامتربندی کرده‌ایم.

مثال ۳. پیچار $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ را بر حسب طول کمان با شروع از نقطه‌ی $(۱, ۰, ۰)$ پارامتربندی کنید.

پاسخ. نقطه‌ی $(۱, ۰, ۰)$ در زمان $t = ۰$ حاصل می‌شود.

$$s(t) = \int_{۰}^{t} \|\mathbf{r}'(u)\| du$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, ۱)$$

$$\|\mathbf{r}'(u) = \|\sqrt{\sin^{۲} t + \cos^{۲} t + ۱} = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_{۰}^{t} \sqrt{۲} du = \sqrt{۲} t$$

$$s(t) = \sqrt{۲} t \Rightarrow t = \frac{s(t)}{\sqrt{۲}}$$

پس منحنیِ مورد نظر بر حسب طول به صورت زیر پارامتربندی می‌شود:

$$\mathbf{r}(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{۲}}, \sin \frac{s}{\sqrt{۲}}, \frac{s}{\sqrt{۲}})$$

□

۲.۱ انحناء منحنی

فرض کنید $\mathbf{r}(t)$ یک منحنی هموار باشد (یعنی $\mathbf{r}'(t)$ پیوسته باشد و $\mathbf{r}'(t) \neq ۰ \quad \forall t$) گفتیم که بردار مماس واحد بر منحنی در لحظه‌ی t به صورت زیر است.

$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

بردار $T(t)$ در هر لحظه t جهت حرکت منحنی را مشخص می‌کند. **انحنای** یک منحنی محکی است برای بررسی این که منحنی در یک لحظه‌ی t به چه اندازه تغییر جهت می‌دهد. به بیان دیگر، فرض کنیم که ما روی منحنی در حال حرکت هستیم. زیاد بودن انحنای منحنی یعنی این که در طی مسیر کوتاهی، منحنی پیچ زیادی داشته باشد (مانند یک دایره با شعاع کوچک) و کم بودن انحنای منحنی یعنی این که در طی مسیری طولانی، منحنی به مقدار کمی بپیچد (مانند یک دایره با شعاع بسیار بزرگ). گفتیم که جهت منحنی توسط بردار مماس واحد بر آن مشخص می‌شود. پس باید تغییرات این بردار را بررسی کنیم.

تعریف ۴. انحناء : اندازه‌ی تغییر بردارِ مماس واحد نسبت به طول

تعریف ۵. انحناء یک منحنی با فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$\kappa = |\frac{dT}{ds}|$ $\quad$ بردار مماس واحد : T

طول مسیر پیموده شده روی منحنی با شروع از نقطه‌ای مشخص : s

محاسبه‌ی انحناء برحسب t:

$$\kappa = |\frac{dT}{ds}| = |\frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}}| = \frac{|\frac{dT}{dt}|}{|\frac{ds}{dt}|}$$

علت:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \times \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dT}{ds} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

همچنین گفتیم که

$$S = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

و

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

پس

$$\kappa = \frac{\|T'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

سوال ۶. انحناء یک دایره با شعاعِ a را در زمانهای دلخواه t محاسبه کنید.

معادله‌ی برداری دایره:

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t)$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{a^۲\sin^۲ t + a^۲\cos^۲ t} = a$$

$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{(-a\sin t, a\cos t)}{a} = (-\sin t, \cos t)$$

$$T'(t) = (-\cos t, -\sin t)$$

$$\|T'(t)\| = \sqrt{\cos^۲ t + \sin^۲ t} = ۱$$

در نتیجه

$$\kappa(t) = \frac{۱}{a}$$

یعنی ا نحناء دایره در همه‌ی زمانها یکسان است. همچنین هر چه شعاع دایره بیشتر شود، انحناء آن کمتر می‌شود و برعکس.

مثال ۷. انحناء یک خط راست را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\mathbf{r}(t)\begin{cases} x = x_۰ + at \\ y = y_۰ + bt \\ z = z_۰ + ct \end{cases}$$

$$\mathbf{r}'(t) = (a, b, c)$$

$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

$$T'(t) = (۰, ۰, ۰) \Rightarrow \|T'(t)\| = ۰$$

$$\kappa = ۰$$

□

در جلسه‌ی بعدی ثابت خواهیم کرد که:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \overset{\text{ضرب خارجی}}{\times} \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^۳}$$