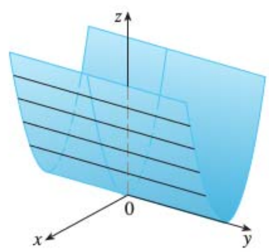
جلسه‌ی سوم

توجه ۳۹. کلیه‌ی تصاویر این جلسه از کتاب «حساب» نوشته‌ی جیمز استوارت وام گرفته شده است.

استوانه‌ها و رویه‌های درجه‌ی ۲

استوانه

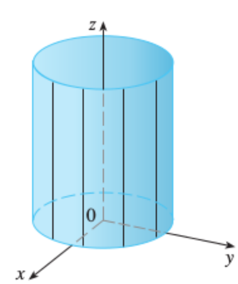
منظور از یک رویه‌ی استوانه‌ای، رویه‌ای است متشکل از همه‌ی خطوطی که با یک خط داده شده موازیند و از یک منحنی مسطحِ (یعنی منحنی‌ای که روی یک صفحه واقع شده است) داده شده می‌گذرند.

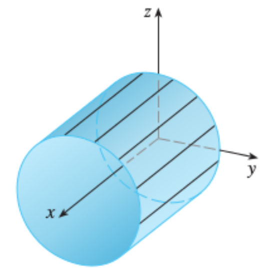


مثال ۴۰. رویه‌ی $z = x^{۲}$ را رسم کنید.

مثال ۴۱. رویه‌های زیر را رسم کنید.

- $x^{۲} + y^{۲} = ۱$
- $.y^{۲} + z^{۲} = ۱$





سطوح درجه‌ی دوم

منظور از یک رویه‌ی درجه‌ی ۲، گراف معادله‌ای درجه‌ی دوم به صورت زیر بر حسب x, y, z است:

$$Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = ۰.$$

که در آن $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ ثوابتی عددی هستند. هر معادله‌ی به فرم بالا را می‌توان با با استفاده از ماتریسهای دوران و انتقال به یکی از دو فرم «متعارف» زیر درآورد:

$$Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + J = ۰ \qquad\qquad Ax^۲ + By^۲ + Iz = ۰$$

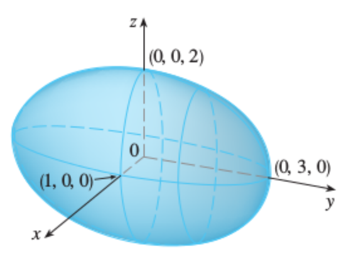
در این درس، به نحوه‌ی تبدیل معادله‌ی کلی بالا به یکی از دو فرم متعارف نخواهیم پرداخت (هر چند این کار دشوار نیست).

پروژه ۱ (نیم الی ۱ نمره)**.** تحقیق کنید که چگونه معادله‌ی اول را می‌توان به شکل متعارف درآورد.

رویه‌هائی که با استفاده از معادلات متعارف بالا به دست می‌آیند، به نُه شکل کلّیند که در زیر درباره‌ی آنها صحبت کرده‌ایم.

مثال ۴۲. رویه‌ی درجه دومِ دارای معادله‌ی زیر را با بهره‌گیری از «منحنی‌های تراز» آن بکشید:

$$x^۲ + \frac{y^۲}{۹} + \frac{z^۲}{۴} = ۱$$

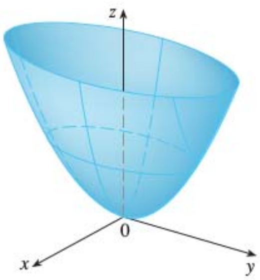


به رویه‌های بدین‌شکل، بیضی‌وار می‌گوئیم.

مثال ۴۳. رویه‌ی درجه‌ی ۲ به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

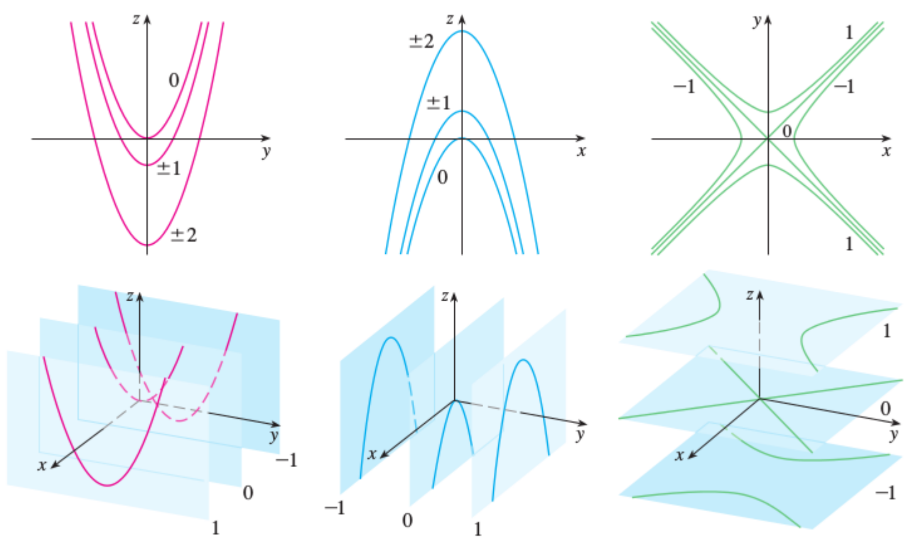
$$z = ۴x^۲ + y^۲$$

رویه‌ی تصویر زیر را یک سهمی‌وار بیضوی می‌خوانیم.

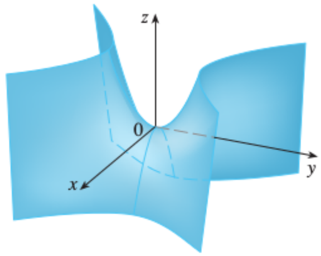


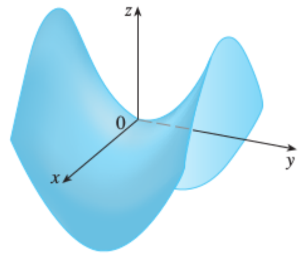
مثال ۴۴. رویه‌ی به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$z = y^۲ - x^۲$$



به رویه‌ی تصویر زیر سهمی‌وار هذلولوی می‌گوئیم.

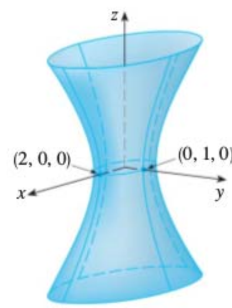




مثال ۴۵. رویه‌ی به معادله‌ی زیر را رسم کنید:

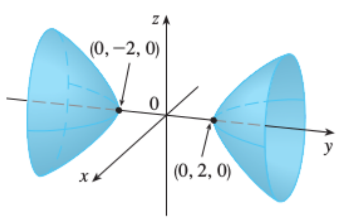
$$\frac{x^۲}{۴}+y^۲-\frac{z^۲}{۴}=۱$$

به رویه‌ی شکل زیر، یک هذلولی‌وارِ یکپارچه می‌گوئیم.



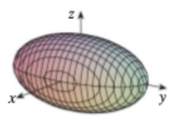
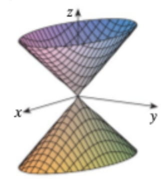
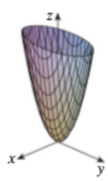
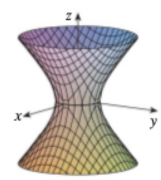
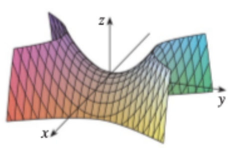
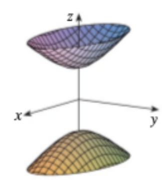
مثال ۴۶. رویه‌ی به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$۴x^۲-y^۲+۲z^۲+۴=۰$$



شکل زیر را یک هذلولی‌وار دوپارچه می‌خوانیم.

رویه‌های یادشده را در جدول زیر مشاهده کنید.

Surface	Equation	Surface	Equation
Ellipsoid  	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ All traces are ellipses. If $a=b=c$, the ellipsoid is a sphere.	Cone  	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces in the planes $x=k$ and $y=k$ are hyperbolas if $k\neq 0$ but are pairs of lines if $k=0$.
Elliptic Paraboloid  	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are parabolas. The variable raised to the first power indicates the axis of the paraboloid.	Hyperboloid of One Sheet  	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are hyperbolas. The axis of symmetry corresponds to the variable whose coefficient is negative.
Hyperbolic Paraboloid  	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are hyperbolas. Vertical traces are parabolas. The case where $c<0$ is illustrated.	Hyperboloid of Two Sheets  	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces in $z=k$ are ellipses if $k>c$ or $k<-c$. Vertical traces are hyperbolas. The two minus signs indicate two sheets.

مثال ۴۷. رویه‌ی به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$x^۲ + ۲z^۲ - ۶x - y + ۱۰ = ۰.$$

تمرین تحویلی ۵ (سه‌شنبه ۱۱ مهر).

- هر معادله‌ی زیر را به رویه‌ی مربوط بدان وصل کنید.

21. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

22. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

23. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

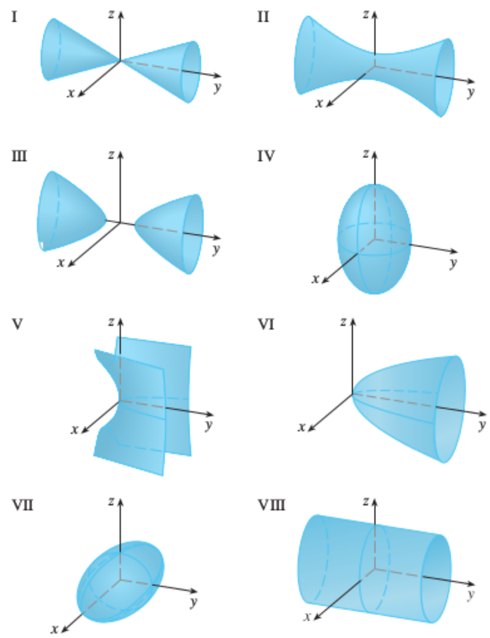
24. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

25. $y = 2x^2 + z^2$

26. $y^2 = x^2 + 2z^2$

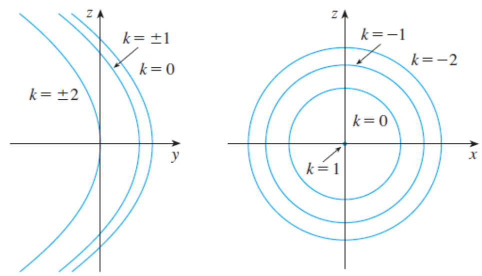
27. $x^2 + 2z^2 = 1$

28. $y = x^2 - z^2$

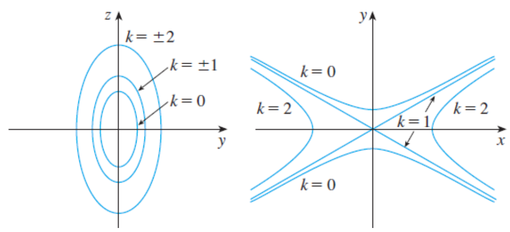


- در هر مورد، رویه‌هائی را که می‌توانند منحنی‌های تراز کشیده‌شده در شکل را داشته باشند نام ببرید و آنها را رسم کنید.

29. Traces in $x = k$ Traces in $y = k$



30. Traces in $x = k$ Traces in $z = k$



- رویه‌های زیر را رسم کنید.

$$y^{۲} = x^{۲} + \frac{۱}{۹} z^{۲} \qquad x^{۲} + ۲y - ۲z^{۲} = ۰$$

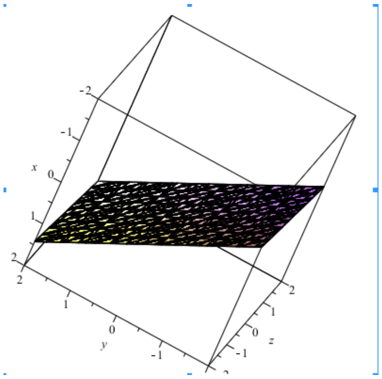
$$x^{۲} + y^{۲} - ۲x - ۶y - z + ۱۰ = ۰ \qquad y^{۲} = x^{۲} + ۴z^{۲} + ۴$$

$$x^{۲} - y^{۲} + z^{۲} - ۴x - ۲z = ۰ \qquad x^{۲} - y^{۲} + z^{۲} - ۴x - ۲z + ۳ = ۰.$$

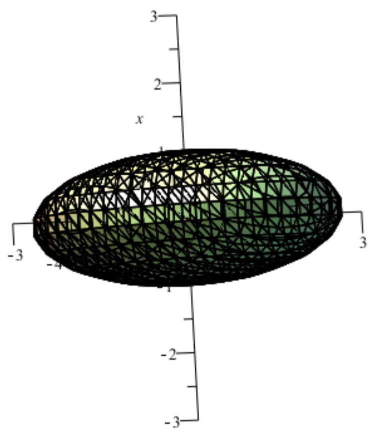
در زیر رویه‌های یادشده را در نرم‌افزارِ میپل رسم کرده‌ایم (و آنها را برای بهتر دیده شدن کمی چرخانده‌ایم):

$> with(plots)$

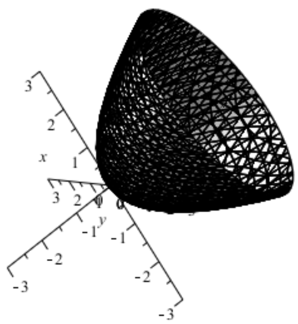
$> implicitplot3d(7 * x - 4 * y - z = 4, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2)$



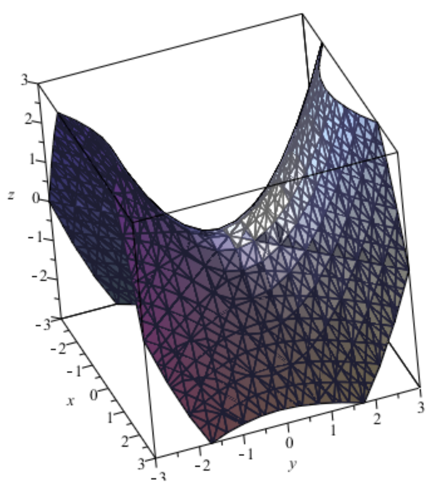
$> implicitplot3d(x^2 + (1/9) * y^2 + (1/4) * z^2 = 1, x = -3..3, y = -4..4, z = -3..3, scaling = constrained, numpoints = 10000)$



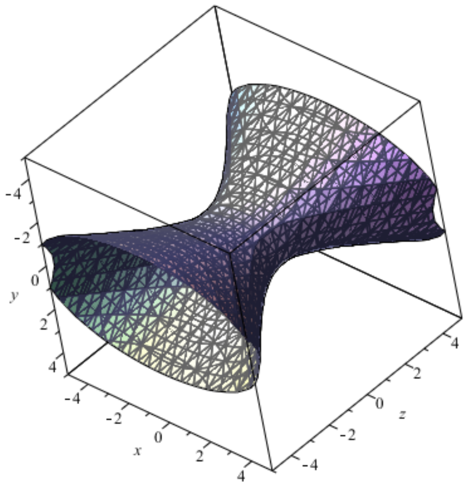
$> implicitplot3d(z = (1/2) * x^2 + (1/2) * y^2, x = -3..3, y = -3..3, z = -3..3, scaling = constrained, numpoints = 10000)$



$> implicitplot3d(z = (1/2)*y^2 - (1/2)*x^2, x = -3..3, y = -3..3, z = -3..3, scaling = constrained, numpoints = 2000)$



$> implicitplot3d((1/4)*x^2 + y^2 - (1/4)*z^2 = 1, x = -5..5, y = -5..5, z = -5..5, scaling = constrained, numpoints = 5000)$



$> implicitplot3d(4*x^2 - y^2 + 2*z^2 + 4 = 0, x = -5..5, y = -5..5, z = -5..5, scaling = constrained, numpoints = 5000)$