۱ جلسه‌ی اول

دو رهیافت کلی به ریاضیات وجود دارد: رهیافت حسابی و رهیافت هندسی. عموماً هر ریاضیدان در هر سطحی با یکی از این دو رهیافت راحت‌تر است؛ گویا کسانی که نیم‌کره‌ی چپ مغزشان فعالتر است به رویکرد حسابی و آنها که نیم کره‌ی راستشان فعالتر است به رویکرد هندسی علاقه‌مندترند.[۱]

مثال ۱ (بحث در کلاس). سهمی از دیدگاههای هندسی و حسابی.

مثال ۲. کُره از دیدگاه هندسی و حسابی.

در درس ریاضی ۲ این دو رویکرد به صورت موازی پیش می‌روند. یعنی هر شیئی در این درس هم با معادلات و هم به صورت هندسی در نظر گرفته می‌شود.

۱.۱ فضای سه‌بعدی

فضای سه‌بعدی مناسب‌ترین فضا برای مدلسازی محیط پیرامون ماست. برای تجسم این فضا از سه محور عمود بر هم x, y, z استفاده می‌شود که بنابه قرارداد، جهت آنها با کمک انگشتهای دست بدین صورت تعیین می‌شود: انگشت اشاره محور x، انگشت میانی محور y و انگشت شست محور z (تصویر در کلاس). یک خطِ راست در فضای سه‌بعدی، با استفاده از یک **نقطه** و یک **بردار** در این فضا مشخص می‌شود. در ادامه به ایندو پرداخته‌ایم.

مثال ۳. فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $P = (a, b, c)$ و $P' = (a', b', c')$ را بیابید.

مثال ۴. فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $P = (۲, -۱, ۷)$ و $Q = (۱, -۳, ۵)$ را بیابید.

مثال ۵. معادله‌ی یک کُره را با مرکز $C = (c_۱, c_۲, c_۳)$ و شعاع r بیابید.

مثال ۶. فضای هندسیِ نقاط صادق در معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۴x - ۶y + ۲z + ۶ = ۰$ را در فضای سه بعدی بکشید.

مثال ۷. ناحیه‌ی تعیین شونده توسط نامعادله‌های $۱ \leq x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴$ و $z \leq ۰$ را در فضای $\mathbb{R}^۳$ بکشید.

[۱] در مقاله‌ی «تجاهل بورباکی» ترجمه‌ی اینجانب مفصلاً در این باره صحبت شده است.

تمرین تحویلی ۱ (تاریخ تحویل ۲۸ شهریور، پس از کلاس درس).

۱. معادله‌ی کُره‌ای را بیابید که مرکز آن نقطه‌ی $C = (۲, ۳, -۶)$ است و این کره بر صفحه‌ی xy مماس است.

۲. نشان دهید معادلات زیر هر کدام یک کُره را نمایش می‌دهند. شعاع هر کره و مرکز آن را بیابید.

(آ) $x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲x - ۴y + ۸z = ۱۵$

(ب) $x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۸x - ۶y + ۲z + ۱۷ = ۰$

چند صفحه‌ی ساده: معادله‌ی $x = ۰$ در فضای سه‌بعدی صفحه‌ی yz را مشخص می‌کند. معادله‌ی $y = ۰$ فضای سه‌بعدی، صفحه‌ی xz را مشخص می‌کند. معادله‌ی $z = ۰$ فضای سه‌بعدی، صفحه‌ی xy را مشخص می‌کند.

بردارها

نگاه هندسی: علاوه بر نقاط، جهت‌ها نیز در فضای سه‌بعدی اهمیت دارند. جهت‌ها را با استفاده از بردارها معین می‌کنیم. فرض کنید ذره‌ای از نقطه‌ی A به B رفته باشد (شکل در کلاس). از لحاظ جهت حرکت، این ذره با ذره‌ای که از C به D رفته باشد فرقی نمی‌کند (شکل در کلاس). بردارها را با پیکان نشان می‌دهیم. معمولا نقطه‌ی شروع آنها اهمیتی برای ما ندارد. اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار باشند، منظور از $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ برداری است که شروع آن نقطه‌ی ابتدائی $\mathbf{u}$ و پایان آن نقطه‌ی انتهایی $\mathbf{v}$ است. (شکل در کلاس)

مثال ۸. بردار $\mathbf{a} - ۲\mathbf{b}$ را رسم کنید. (شکل در کلاس).

نگاه جبری. در این نگاه برای همه‌ی بردارهای هم جهت یک نماینده انتخاب می‌کنیم که از مبدأ مختصات شروع می‌شود. هر بردارِ $\mathbf{a}$ را می‌توان توسط یک مختصات به صورت $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ در نظر گرفت. برای این کار شروع بردار را در نقطه‌ی $(۰, ۰, ۰)$ فرض می‌کنیم و $a_۱, a_۲, a_۳$ را به ترتیب میزان تغییر جهت آن در راستای x, y, z می‌گیریم. از دید ما، همه‌ی بردارهای زیر یکیند (شکل در کلاس).

مثال ۹. هر نقطه یک بردار مشخص می‌کند.

مثال ۱۰. اگر $P=(x_۱,x_۲,x_۳)$ و $Q=(y_۱,y_۲,y_۳)$ دو نقطه باشند مختصات بردارِ PQ، یعنی برداری که از P شروع می‌شود و به Q ختم می‌شود را بیابید.

معادله‌ی خط در فضای سه‌بعدی

معادله‌ی یک خط را در فضای سه‌بعدی می‌توان به صورتهای متقارن و برداری نوشت. همانگونه که گفتیم هر خط توسط یک نقطه و یک بردار جهت مشخص می‌شود. معادله‌ی برداری خطی که از نقطه‌ی $P_۰$ می‌گذرد و با بردارِ $\mathbf{r}_۰$ موازی است به صورت زیر است (شکل در کلاس)

$$\mathbf{r}(t)=P_۰+t\mathbf{r}_۰$$

که در معادله‌ی بالا با تغییر پارامترِ t خط در فضای سه‌بعدی رسم می‌شود.

مثال ۱۱. بررسی کنید که با تغییرِ پیوسته‌ی t خط چگونه رسم می‌شود. در t های مثبت و t های منفی کدام قسمتهای خط رسم می‌شوند.

معادله‌ی پارامتری بالا را می‌توان به صورت جزئی‌تر نیز بیان کرد. معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ می‌گذرد و همجهت است با بردارِ $\mathbf{v}=(a,b,c)$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=(x_۰,y_۰,z_۰)+t(a,b,c).$$

معادله‌ی بالا در سه معادله‌ی زیر بسط داده می‌شود:

$$\begin{aligned}x(t)&=x_۰+ta\\y(t)&=y_۰+tb\\z(t)&=z_۰+tc\end{aligned}$$

با حذفِ پارامترِ t از معادلات بالا به «معادلات تقارنی» یک خط در فضای سه‌بعدی (نکته‌ی زیر می‌رسیم).

نکته ۱۲. معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $(x_۰, y_۰, z_۰)$ می‌گذرد و با بردار (a, b, c) موازی است، عبارت است از

$$\frac{x - x_۰}{a} = \frac{y - y_۰}{b} = \frac{z - z_۰}{c}.$$

مثال ۱۳. معادله‌ی خطی را بیابید که از نقطه‌های $A = (۲, ۴, -۳)$ و $B = (۳, -۱, ۱)$ می‌گذرد. نقطه‌ی تقاطع خط یادشده را با صفحه‌ی xy بیابید.

مثال ۱۴. معادله‌ی برداریِ پارامتریِ پاره‌خط میان انتهای بردار $r_۰$ و انتهای بردارِ $r_۱$ را بیابید. (شکل در کلاس).

$$r(t) = r_۰ + t(r_۱ - r_۰) \quad ۰ \leq t \leq ۱$$

$$r(t) = (۱ - t)r_۰ + tr_۱ \quad ۰ \leq t \leq ۱.$$

مثال ۱۵. نشان دهید که دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به معادلات زیر، متنافرند؛ یعنی نه همدیگر را قطع می‌کنند و نه با هم موازیند.

$$L_۱ : x = ۱ + t, y = -۲ + ۳t, z = ۴ - t$$

$$L_۲ : x = ۲s, y = ۳ + s, z = -۳ + ۴s$$

تمرین تحویلی ۲ (تاریخ تحویل ۲۸ شهریور، پس از کلاس درس). هر سه معادله‌ی تقارنی، برداری پارامتری و برداری پارامتری با جزئیات را برای خطی که از نقطه‌ی $(۶, -۵, ۲)$ می‌گذرد و با بردار $(۱, ۳, -\frac{۲}{۳})$ موازی است بنویسید.

جمعبندی ۱.

۱. معادله‌ی تقارنی خطی که از نقطه‌ی $P = (x_۰, y_۰, z_۰)$ می‌گذرد و با بردارِ (a, b, c) موازی است به صورت زیر است

$$\frac{x - x_۰}{a} = \frac{y - y_۰}{b} = \frac{z - z_۰}{c}.$$

۲. معادله‌ی برداریِ پارامتری خط بالا به صورت زیر است:

$$\mathbf{r}(t) = P_۰ + t\mathbf{a}.$$

۳. معادله‌ی برداری پارامتری خط یادشده را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$(x(t), y(t), z(t)) = (x_{\cdot} + at, y_{\cdot} + bt, z_{\cdot} + ct)$$