

۱ جلسه‌ی دوازدهم

مثال ۱. طول منحنی زیر را حساب کنید.

$$\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t) \quad -5 \leq t \leq 5$$

پاسخ. طول منحنی از زمان a تا b برابر است با

$$s(t) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

پس داریم:

$$\mathbf{r}'(t) = (1, -\sqrt{3} \sin t, \sqrt{3} \cos t)$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} = \sqrt{10}$$

$$s(t) = \int_{-5}^5 \sqrt{10} dt = \sqrt{10} t \Big|_{-5}^5 = 10\sqrt{10}$$

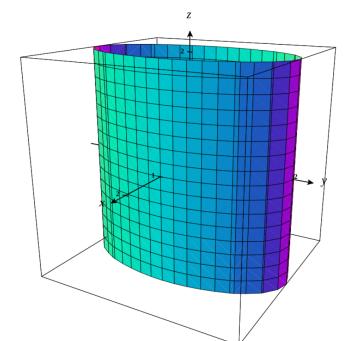
□

مثال ۲. طول منحنی محل تقاطع استوانه‌ی $4x^2 + y^2 = 4$ و صفحه‌ی $z + \sqrt{3}x = 0$ را بیابید.

پاسخ.

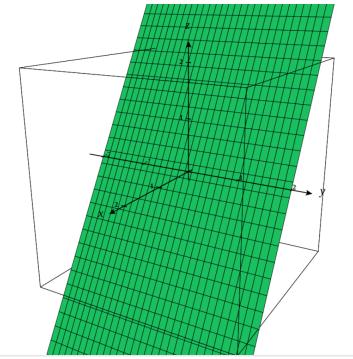
$$4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

پس معادله‌ی فوق، یک استوانه‌ی بیضوی را به دست می‌دهد:



$$z + \sqrt{3}x = 0 \Rightarrow z = -\sqrt{3}x$$

معادله‌ی فوق، معادله‌ی یک صفحه است.



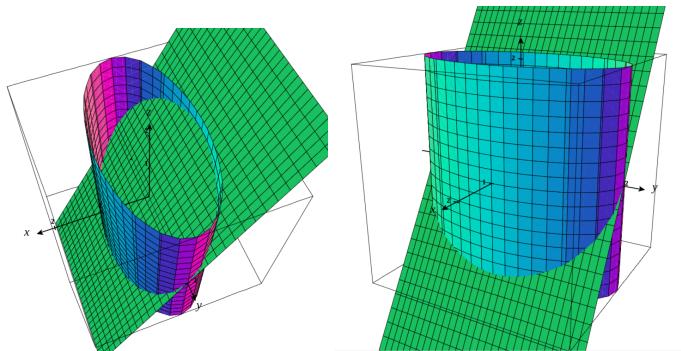
از آنجا که تصویر استوانه روی صفحه xy یک بیضی است، x, y را می‌توان به صورت زیر پارامتریندی کرد.

$$x = \cos \theta \quad y = 2 \sin \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = \cos^2 \theta + \frac{4 \sin^2 \theta}{4} = 1$$

برای یافتن پارامتریندی مناسب برای z از این فرض استفاده می‌کنیم که منحنی مورد نظر روی صفحه xy واقع است: $z = -\sqrt{3}x$

$$z = -\sqrt{3}x \Rightarrow z = -\sqrt{3} \cos \theta$$

$$\mathbf{r}(\theta) = (\cos \theta, 2 \sin \theta, -\sqrt{3} \cos \theta)$$



$$\mathbf{r}'(\theta) = (-\sin \theta, 2 \cos \theta, -\sqrt{3} \sin \theta)$$

$$\|\mathbf{r}'(\theta)\| = \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta} = \sqrt{4} = 2$$

$$s = \int_{-\pi}^{\pi} 2 d\theta = 4\pi$$

□

مثال ۳. منحنی زیر را بر حسب طول با شروع از نقطه‌ی $(1, 0)$ پارامتر بندی کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{2t}{t^2 + 1} \right) \mathbf{j}$$

پاسخ.

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du$$

$$t = \bullet \rightarrow r(\bullet) = (1, \bullet) \Rightarrow a = \bullet$$

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{-4t}{(t^2 + 1)^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{4t^2 + 2 - 4t^2}{(t^2 + 1)^2} \right) \mathbf{j} = \left(\frac{-4t}{(t^2 + 1)^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{2}{(t^2 + 1)^2} \right) \mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2 + 1)^4} + \frac{4t^4 + 4 - 8t^2}{(t^2 + 1)^4}} = \sqrt{\frac{4t^4 + 8t^2 + 4}{(t^2 + 1)^4}} = \sqrt{\frac{(2t^2 + 2)^2}{(t^2 + 1)^4}} = \frac{2t^2 + 2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{2}{t^2 + 1}$$

$$s(t) = \int_{\bullet}^t \frac{2}{u^2 + 1} du = 2 \int_{\bullet}^t \frac{1}{u^2 + 1} du = 2 \arctan u |_{\bullet}^t = 2 \arctan t$$

$$\arctan t = \frac{s(t)}{2} \Rightarrow t = \tan \frac{s(t)}{2}$$

$$\mathbf{r}(s) = \left(\frac{2}{\tan^2 \frac{s(t)}{2} + 1} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{2 \tan \frac{s(t)}{2}}{\tan^2 \frac{s(t)}{2} + 1} \right) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(s) = (2 \cos^2 \left(\frac{s}{2} - \frac{\pi}{4} \right)) \mathbf{i} + (2 \sin \frac{s}{2}) (\cos^2 \frac{s}{2}) \mathbf{j} = (\cos s) \mathbf{i} + (\sin s) \mathbf{j}$$

□

توابع دو متغیره

منظور از یک تابع دو متغیره تابعی است از یک مجموعه مثل $D \subseteq \mathbb{R}^2$ به \mathbb{R} . یعنی تابعی که یک جفت مرتب (a, b) را می‌گیرد و یک عدد به دست می‌دهد.

$$f : \overset{\subseteq \mathbb{R}^2}{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \subseteq \mathbb{R}$$

$$z = f(x, y)$$

مثال ۴. دامنه‌ی توابع دو متغیره‌ی زیر را رسم کنید.

$$(1) \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

پاسخ. باید داشته باشیم:

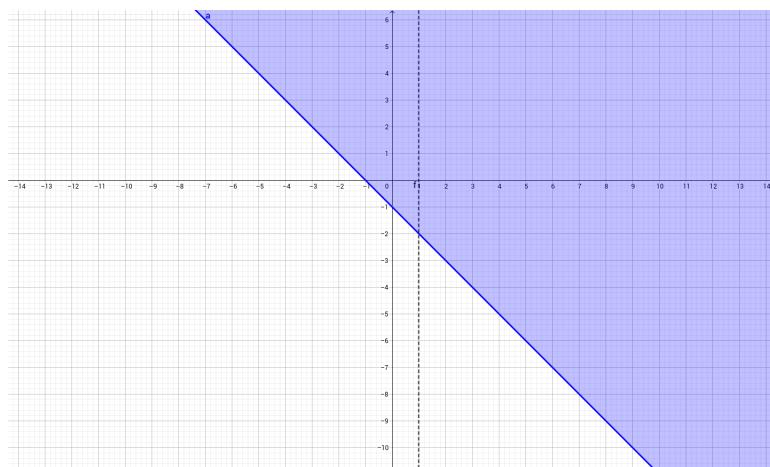
$$x + y + 1 \geq 0$$

و

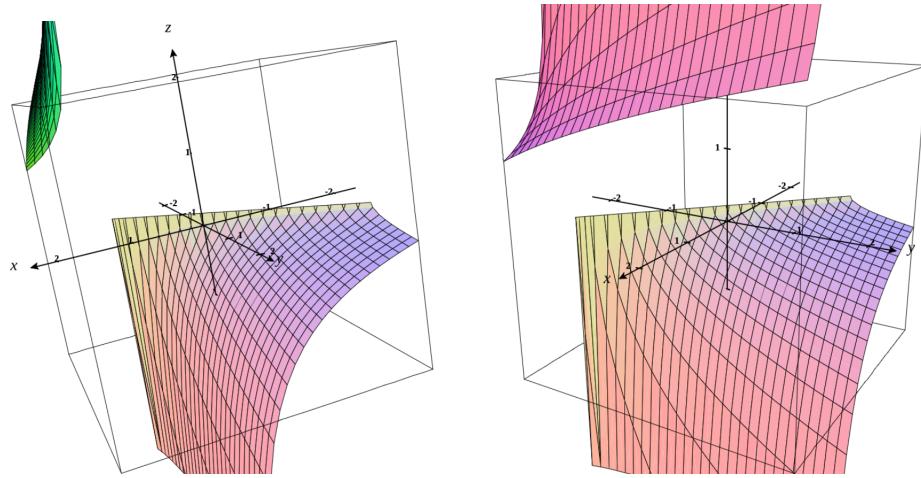
$$x \neq 1$$

بنابراین دامنه‌ی تابع عبارت است از

$$\{(x, y) | x + y + 1 \geq 0 \text{ و } x \neq 1\}$$



شکل تابع به صورت زیر است:



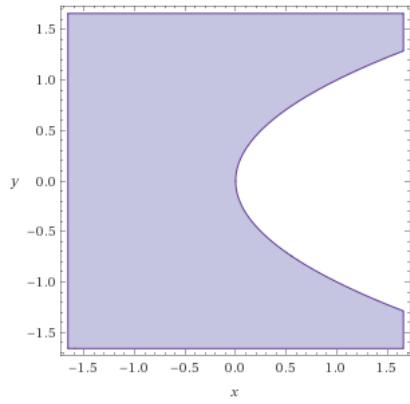
□

(ب)

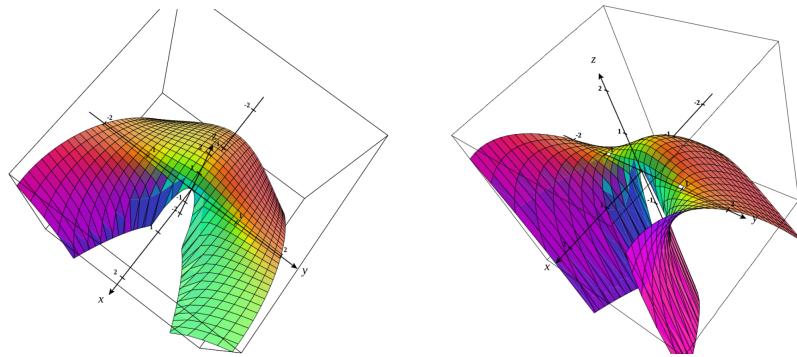
$$f(x, y) = x \ln(y - x)$$

پاسخ. $\ln t$ تنها برای $t > 0$ تعریف شده است. پس دامنهٔ تعریف تابع فوق عبارت است از

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - x > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > x\}$$



شکل تابع فوق به صورت زیر است:



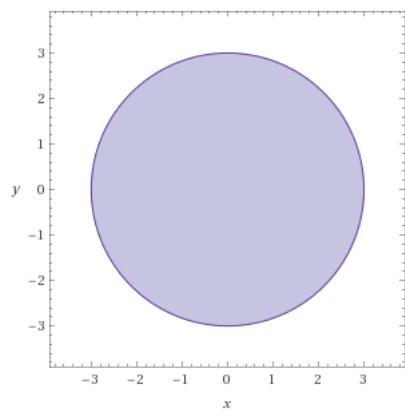
□

(ج)

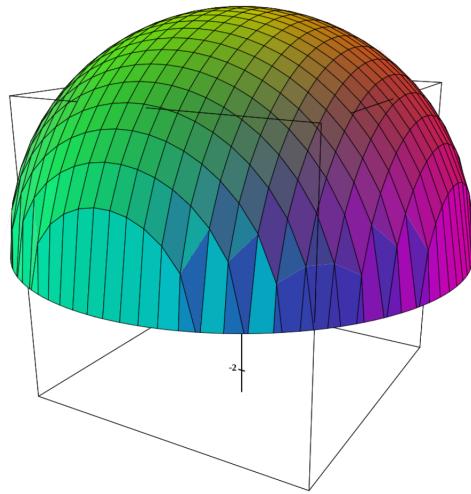
$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

پاسخ. دامنهٔ تابع فوق به صورت زیر است.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$



شکل تابع فوق به صورت زیر است:



□

تعريف ۵. اگر $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد، مجموعه زیر را گراف تابع f می‌خوانیم:

$$\Gamma(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

مثال ۶. گراف $f(x) = x^2$ برابر است با

$$\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

مثال ۷. گراف توابع زیر رارسم کنید.

(۱)

$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

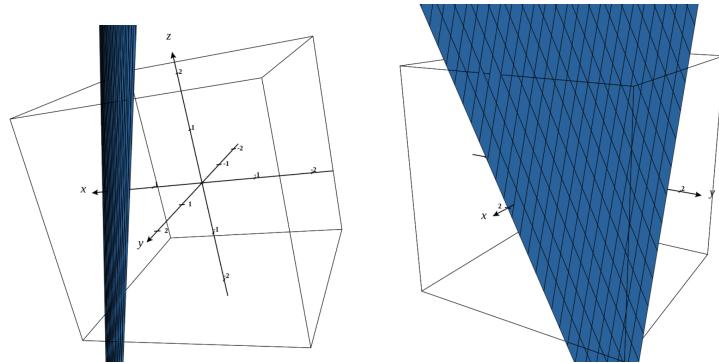
پاسخ.

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \mid z = 6 - 3x - 2y\}$$

$$3x + 2y + z = 6$$

برای رسم یک صفحه نیازمند دانستن سه نقطه روی آن هستیم:

$$P(0, 0, 6) \quad Q(2, 0, 0) \quad R(0, 3, 0)$$



□

(ب)

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

پاسخ.

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) | z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$$

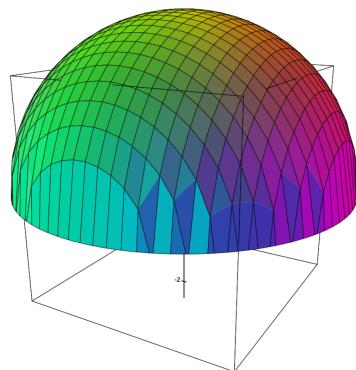
توجه کنید که همواره داریم

$$z \geq 0.$$

دو طرف معادلهٔ فوق را به توان دو می‌رسانیم:

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

حال با توجه به این که $z \geq 0$ معادلهٔ مورد نظر ما شکل زیر را به دست می‌دهد:



۸

□

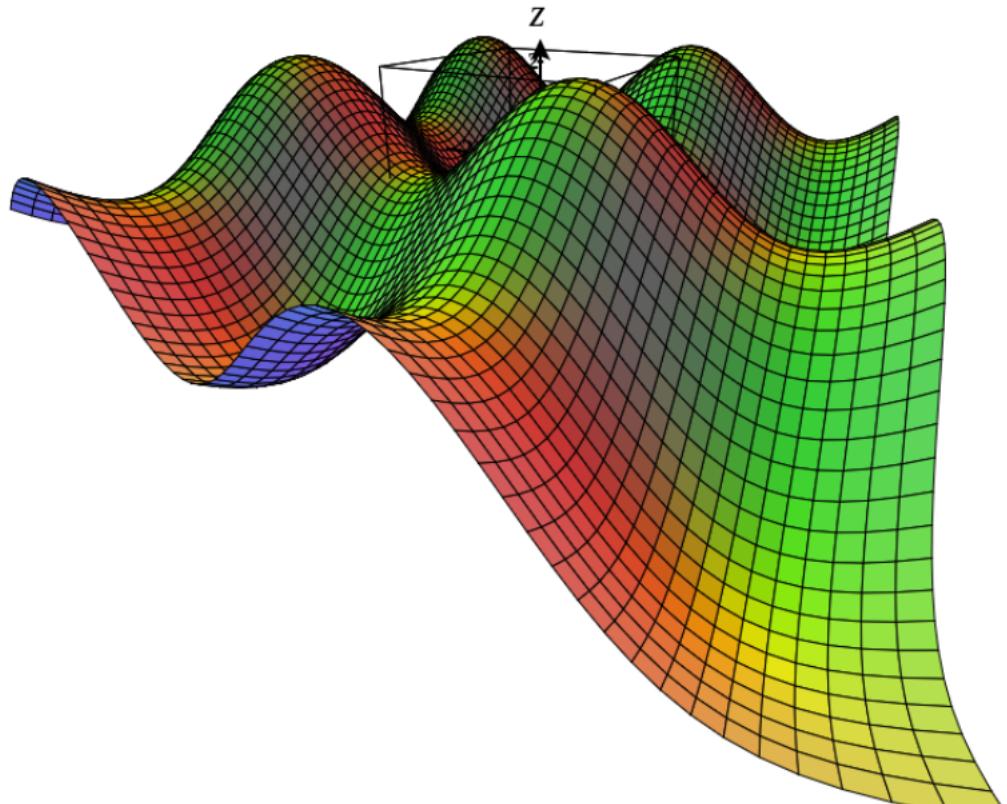
رسم توابع دو متغیره در حالت کلی کار آسانی نیست. در زیر چند تابع دو متغیره را برای نمونه

با استفاده از تارنمای زیر رسم کرده‌ایم:

<http://web.monroecc.edu/manila/webfiles/pseeburger/CalcPlot3D/>

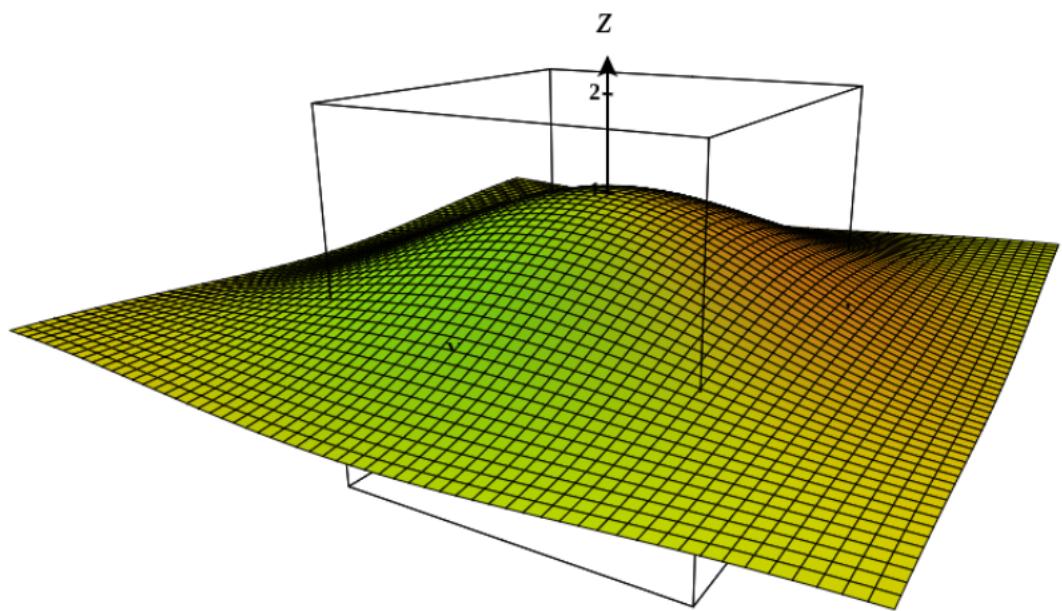
(ج)

$$f(x, y) = \sin x + \sin y$$



(د)

$$f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$$



(a)

$$f(x, y) = (x^r + r y^r) e^{-x^r - y^r}$$

