

۱ جلسه‌ی پنجم

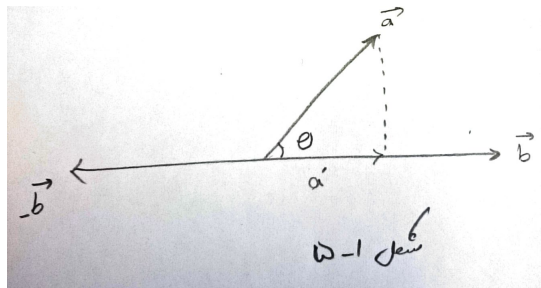
قبلاً ثابت کرده‌ایم که تصویر بردار a روی بردار b برابر است با

$$\|a\| \cos \theta \frac{b}{\|b\|}$$

همواره هنگام اثبات این فرمول شکل‌هایی کشیدیم که در آنها زاویه‌ی θ میان بردارهای a , b کمتر از 90° درجه بود. توجه کنید که اگر زاویه‌ی یادشده از 90° درجه بیشتر باشد، باز هم همان فرمول کار می‌کند و در این صورت $\cos \theta$ کمتر از ۰ خواهد شد. در واقع مطابق شکل زیر تصویر بردار a روی بردار $-b$ برابر است با

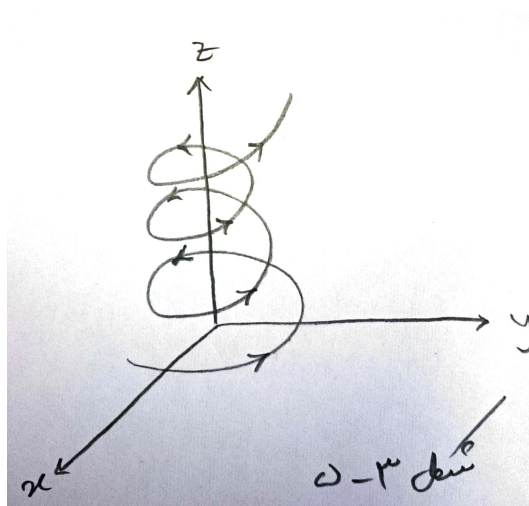
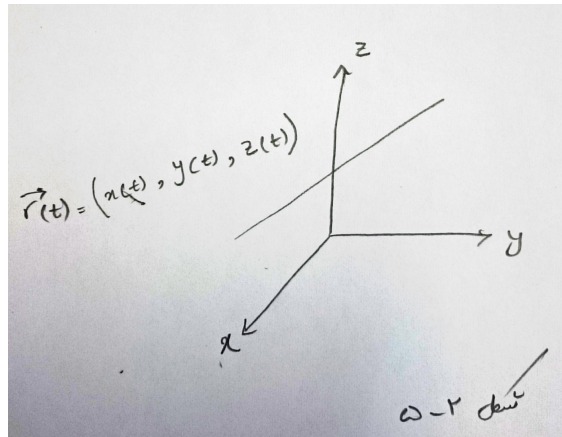
$$\|a\| \cos(\pi - \theta) \frac{-b}{\|b\|} = \|a\| \cos \theta \frac{b}{\|b\|}$$

یعنی تصویر بردار a روی بردار $-b$ برابر است با تصویر بردار a روی بردار b .



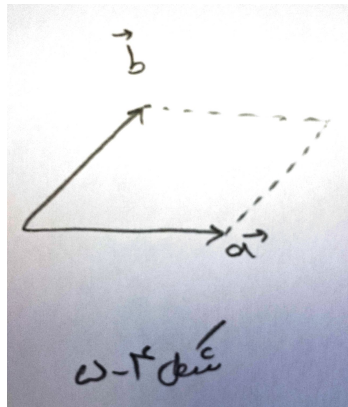
تا کنون با صفحه‌ها و خط‌ها آشنا شده‌ایم. نیز برخی رویه‌ها را نیز مطالعه کرده‌ایم. هدف بعدی ما در این درس، مطالعه‌ی «منحنی‌های فضائی» است. برای رسیدن به این هدف، نیازمند ابزارهای دیگری

در فضاهای برداری هستیم که در این جلسه آنها را مرور می‌کنیم.



ضرب خارجی دو بردار

با دو بردار می‌توان به یک صفحه رسید. مانند شکل زیر:



چگونه می‌توان برداری پیدا کرد که بر هر دو بردار a و b عمود باشد؟
فرض کنیم $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند. ضرب خارجی a و b که آن را با $a \times b$ نشان می‌دهیم، بردار معرفی شده در زیر است:

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

به بیان دیگر

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

توجه. بردار $a \times b$ هم بر a و هم بر b عمود است؛ یعنی

$$(a \times b) \cdot a = 0$$

$$(a \times b) \cdot b = 0$$

جهت بردار $a \times b$ با استفاده از قاعده‌ی دست راست تعیین می‌شود. (در کلاس توضیح داده شده است)

$$a \times b = -a \times b$$

برای به خاطر سپردن فرمول ضرب خارجی دو بردار، از دترمینان یک ماتریس فرضی به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det(A) =$$

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

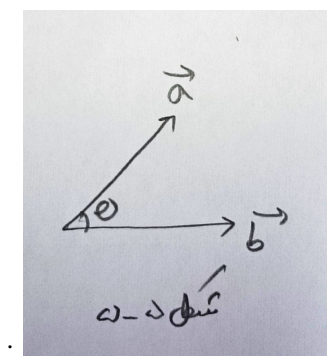
قضیه ۱.

۱. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ هم بر \mathbf{a} و هم بر \mathbf{b} عمود است.

۲. ضرب خارجی هر بردار در خودش صفر است.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

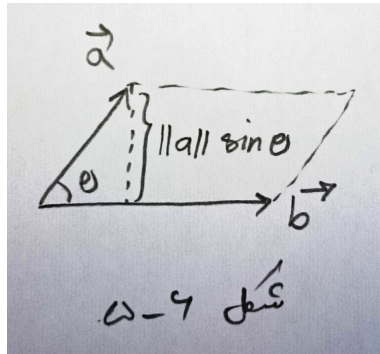
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = (a_2 a_3 - a_3 a_2)\mathbf{i} - (a_1 a_3 - a_3 a_1)\mathbf{j} + (a_1 a_2 - a_2 a_1)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

قضیه ۲. اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} دو بردار و θ زاویه بین آن دو باشد، آنگاه

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$$



بنابراین اندازهی ضرب خارجی \mathbf{a} و \mathbf{b} برابر است با مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط \mathbf{a} و \mathbf{b} .

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \underbrace{\sin^2 \theta}_{1 - \cos^2 \theta}$$

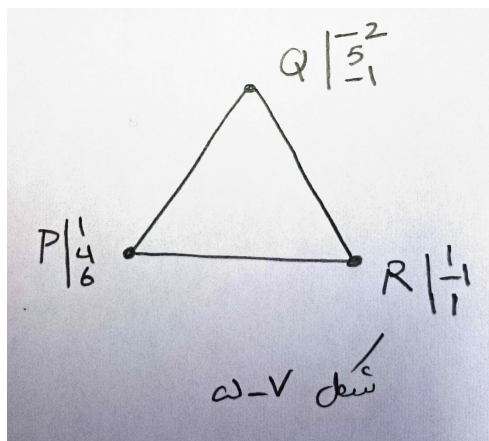
اثبات به عهدهی دانشجو است.

نتیجه ۳. دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} با هم موازیند اگر و تنها اگر

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \vec{0}$$

زیرا دو بردار در صورتی موازیند که زاویهی بین آنها یا صفر باشد یا π و در هر دو صورت $\sin \theta$ صفر است.

مثال ۴. معادله‌ی صفحه‌ای را بیابید که شامل نقاط زیر است.



پاسخ. برای پیدا کردن معادله‌ی صفحه نیازمند دانستن بردار عمود بر آن و نقطه‌ای روی آن صفحه هستیم.

$$\mathbf{PQ} = (-3, 1, -7)$$

$$\mathbf{PR} = (0, -5, -5)$$

می‌دانیم که بردار $\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}$ برداری است عمود بر صفحه‌ی مورد نظر ما. در نتیجه بردار نرمال صفحه برابر است با

$$\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-5 - 35)\mathbf{i} + (-15)\mathbf{j} + (15)\mathbf{k} = (-40, -15, 15)$$

یادآوری می‌کنیم که معادله‌ی صفحه‌ای که بردار عمودش (a, b, c) است و از نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد به صورت زیر است:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

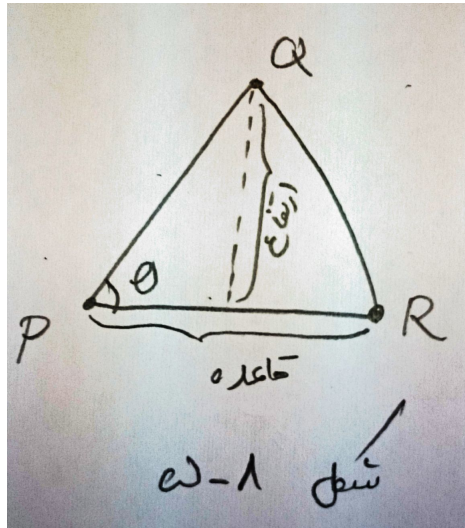
در نتیجه با توجه به بردار نرمال بدست آمده داریم:

$$-40x - 15y + 15z = -40 \times 1 - 15 \times 4 + 15 \times 6 = 10$$

□

مثال ۵. مساحت مثلث با رئوس زیر را حساب کنید.

$$P = (1, 4, 6), Q = (-2, 5, -1), R = (1, -1, 1)$$



پاسخ. قاعده برابر است با اندازه‌ی خط PR و ارتفاع برابر است با $\|PQ\| \sin \theta$ بنابراین مساحت مثلث برابر است با

$$\frac{\|PR\| \|PQ\| \sin \theta}{2} = \frac{\|\mathbf{PR} \times \mathbf{PQ}\|}{2}$$

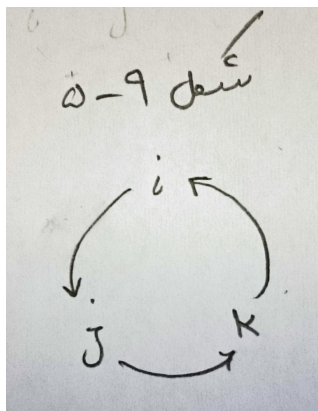
□

توجه ۶.

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$



ویژگی‌های ضرب خارجی

توجه کنید که در رابطه‌های زیر از آنجا که $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ باید به ترتیب بردارها دقت داشته باشیم.

۱.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

۲.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

۳.

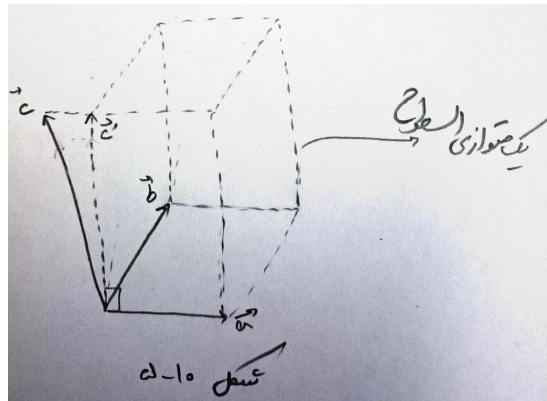
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

توجه ۷. روش محاسبه‌ی $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ به صورت زیر است: فرض کنید $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ، $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ داریم:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

تعبیر هندسی $c \cdot (a \times b)$

حجم متوازی السطوح برابر است با مساحت قاعده در ارتفاع آن.



مطابق شکل بالا مساحت قاعده برابر است با $\|a \times b\|$.

برای محاسبه ارتفاع کافی است اندازه‌ی تصویر بردار c را روی یک بردار عمود بر a و b محاسبه کنیم. بردار $a \times b$ بر a و b عمود است. پس کافی است تصویر بردار c را روی $a \times b$ پیدا کنیم:

$$(\|c\| \cos \theta)$$

پس حجم متوازی السطوح یادشده برابر است با:

$$(\|c\| \cos \theta)(\|a \times b\|)$$

داریم

$$\cos \theta = \frac{c \cdot (a \times b)}{\|c\| \|a \times b\|}$$

با قرار دادن عبارت بالا در رابطه‌ی * می‌بینیم که حجم متوازی السطوح برابر است با

$$|c \cdot (a \times b)|$$

نتیجه ۸. حجم متوازی السطوح ساخته شده توسط بردارهای a ، b و c برابر است با

$$|c \cdot (a \times b)|$$

مثال ۹. نشان دهید که بردارهای $a = (1, 4, -7)$ ، $b = (2, -1, 4)$ و $a = (0, -9, 18)$ در یک صفحه هستند.

پاسخ. کافیست نشان دهیم

$$a \cdot (b \times c) = 0$$

در واقع اگر این بردارها در یک صفحه نباشند یک متوازی السطوح می سازند که حجم آن ناصفر است. محاسبه عبارت بالا را به عهده دانشجو می گذاریم. \square

تمرین تحویلی ۱.

۱. معادله خطی را بیابید که از نقاط $(4, -1, 2)$ و $(1, 1, 5)$ می گذرد.

۲. معادله صفحه ای را بنویسید که شامل نقاط $(3, -1, 1)$ ، $(4, 0, 2)$ و $(6, 3, 1)$ است.