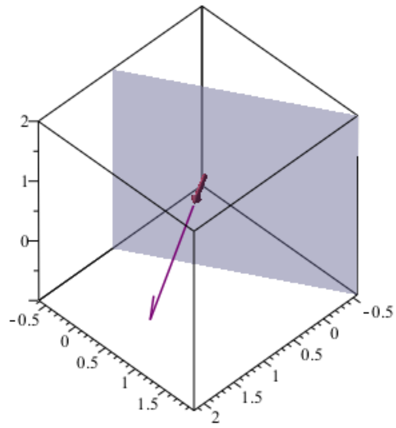
۱ جلسه‌ی هشتم

مثال ۱. نقطه‌ای روی منحنی $\mathbf{r}(t) = (۲\cos t, ۲\sin t, e^t)$ با دامنه‌ی $۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi$ بیابید که در آن نقطه، خط مماس به منحنی با صفحه‌ی $\sqrt{۳}x + y = ۱$ موازی باشد.

پاسخ.



Graph of a plane and related vectors. Included on the graph: the plane (leafgreen), a normal to the plane (purple), a vector (burgundy) from the origin to a specified point on the plane

$$M : \sqrt{۳}x + y = ۱$$

$$ax + by + cz + d = ۰$$

$$\mathbf{n} = (a, b, c) \quad \text{بردار عمود}$$

پس بردار عمود بر صفحه‌ی مورد نظر ما $\mathbf{n} = (\sqrt{۳}, ۱, ۰)$ است. بردار $\mathbf{n}$ بر صفحه‌ی M و بر هر خط موازی با صفحه‌ی M عمود است.

جهت خط مماس بر منحنی در هر لحظه‌ی t توسط بردار $\mathbf{r}'(t)$ مشخص می‌شود.

$$\mathbf{r}(t) = (۲\cos t, ۲\sin t, e^t)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-۲\sin t, ۲\cos t, e^t)$$

دنبال لحظه‌ی t هستیم که در آن بردار $\mathbf{r}'(t)$ بر بردار $\mathbf{n}$ عمود است. یعنی می‌خواهیم:

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{n} = ۰$$

$$-۲\sqrt{۳}\sin t + ۲\cos t = ۰ \Rightarrow -\sqrt{۳}\sin t + \cos t = ۰$$
$$\sqrt{۳}\sin t = \cos t \Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \tan t$$
$$t = \tan^{-۱}\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\pi}{۶}$$

نقطه‌ی مورد نظر برابر است با

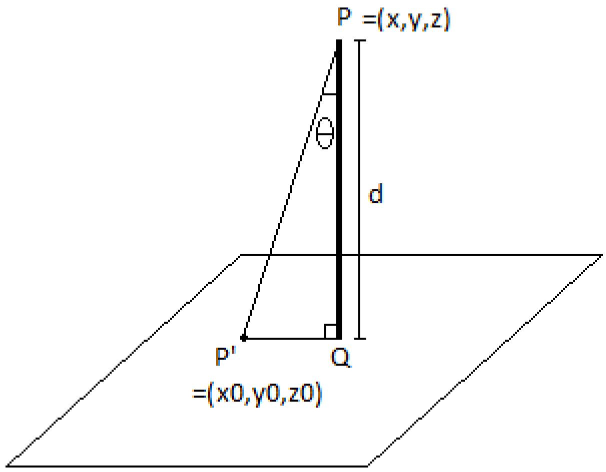
$$(۲\cos\frac{\pi}{۶}, ۲\sin\frac{\pi}{۶}, e^{\frac{\pi}{۶}})$$

$\square$

مثال ۲. نشان دهید که فاصله‌ی میان دو صفحه‌ی موازی $ax+by+cz+d_۱ = ۰$ و $ax + by + cz + d_۲ = ۰$ برابر است با $\frac{|d_۱-d_۲|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$. سپس معادله‌ی صفحه‌ای را بیابید که با صفحه‌ی $x + ۳y - ۲z = ۱$ موازی است و ۲ واحد با آن فاصله دارد

پاسخ. **مثال کمکی برای حل این مثال** . فاصله‌ی نقطه‌ی $P = (x, y, z)$ را از صفحه‌ی $ax + by + cz + d = ۰$ بیابید.

پاسخ.



ابتدا نقطه‌ی دلخواه P' را روی صفحه در نظر بگیرید. فاصله‌ی d برابر است با اندازه‌ی تصویر بردار PP' روی بردار نرمال صفحه.

$$\|PP'\|\cos\theta = \cancel{\|PP'\|}\frac{\mathbf{PP'}\cdot\mathbf{n}}{\cancel{\|PP'\|}\|n\|} = \frac{\mathbf{PP'}\cdot\mathbf{n}}{\|n\|}$$

θ زاویه‌ی بین $\mathbf{PP'}$ و $\mathbf{n}$ است.

$$\frac{\mathbf{PP'}\cdot\mathbf{n}}{\|n\|}=\frac{(x-x_\circ,y-y_\circ,z-z_\circ)\cdot(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|ax-ax_\circ+by-by_\circ+cz-cz_\circ|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|ax+by+cz-(ax_\circ+by_\circ+cz_\circ)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$P'=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ نقطه‌ای روی صفحه است، در نتیجه در معاله‌ی صفحه صدق می‌کند.

$$ax_\circ+by_\circ+cz_\circ=-d$$

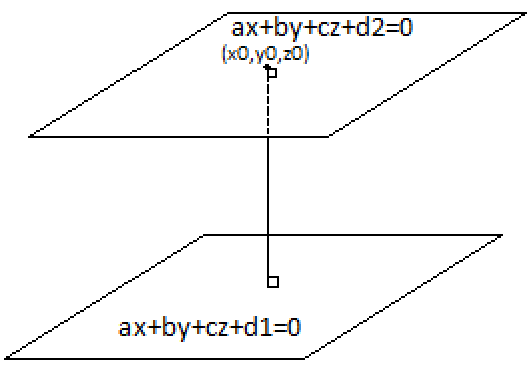
پس داریم:

$$\frac{|ax+by+cz-\overbrace{(ax_\circ+by_\circ+cz_\circ)}^{-d}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

در نتیجه فاصله‌ی نقطه‌ی $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ از صفحه‌ی $ax+by+cz+d_2=0$ برابر است با

$$\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

□



برای حل سوال کافی است یک نقطه روی صفحه‌ی اول برداریم و فاصله‌ی آن را تا صفحه‌ی دیگر

محاسبه کنیم. فرض کنید نقطه $(x_۰, y_۰, z_۰)$ روی صفحه‌ی $ax + by + cz + d_۲ = ۰$ باشد. فاصله‌ی این نقطه تا صفحه‌ی $ax + by + cz + d_۱ = ۰$ برابر است با

$$\frac{|\overbrace{ax_۰ + by_۰ + cz_۰}^{-d_۲} + d_۱|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

در نتیجه معادله‌ی فاصله‌ی بین دو صفحه به صورت زیر است:

$$\frac{|d_۱ - d_۲|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

قسمت دوم مثال:

بردار نرمال صفحه‌ای که می‌خواهیم با صفحه‌ی $x + ۳y - ۲z = ۱$ موازی باشد،برابر است با

$$\mathbf{n}_۲ = \mathbf{n}_۱ = (۱, ۳, -۲)$$

پس معادله‌ی صفحه برابر است با

$$x + ۳y - ۲z + d_۲ = ۰$$

در نتیجه چون فاصله‌ی این صفحه‌ای که قرار است با آن موازی باشد داده شده است داریم:

$$\frac{|d_۱ - d_۲|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} = \frac{|-۱ - d_۲|}{\sqrt{۱ + ۹ + ۴}} = ۲$$

$$\Rightarrow |-۱ - d_۲| = ۲\sqrt{۱۴} \Rightarrow -۱ - d = \begin{cases} -۲\sqrt{۱۴} \\ ۲\sqrt{۱۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \begin{cases} ۲\sqrt{۱۴} - ۱ \\ -۲\sqrt{۱۴} - ۱ \end{cases}$$

$\square$