

۱ جلسه‌ی پایانی

مثال ۱. سری مک‌لوران تابع $f(x) = \cos x$ را بیابید.

پاسخ.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\begin{array}{lll} f(x) = \cos x & f'(x) = \sin x & f''(x) = -\cos x \\ f'''(x) = \sin x & f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(5)}(x) = -\sin x \\ f^{(6)}(x) = -\cos x & f^{(7)}(x) = \sin x & f^{(8)}(x) = \cos x \end{array}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{-1}{6!}x^6 + \dots$$

□

مثال ۲. سری مک‌لوران تابع $x^3 \cos x$ را بنویسید.

پاسخ.

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ x^3 \cos x &= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+3} \end{aligned}$$

□

مثال ۳. سری مک‌لوران تابع $f(x) = (1+x)^k$ را بنویسید که در آن k یک عدد گویای دلخواه است.

اثبات.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$f(\bullet) = 1$$

$$f'(x) = k(1+x)^{k-1} \Rightarrow f'(\bullet) = k$$

$$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \Rightarrow f''(\bullet) = k(k-1)$$

$$f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} \Rightarrow f'''(\bullet) = k(k-1)(k-2)$$

\vdots

$$f^{(n)}(\bullet) = k(k-1)(k-2)\dots(k-(n-1))$$

$$f(x) = \sum_{n=\bullet}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-(n-1))}{n!} x^n$$

بیاید عبارت $\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-(n-1))}{n!}$ را با نماد $\binom{k}{n}$ نمایش دهیم. پس داریم

$$f(x) = (1+x)^k = \sum_{n=\bullet}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \dots$$

اگر k یک عدد طبیعی باشد، ضرایب از جایی به بعد همه صفر می شوند؛ مثلاً:

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

□

توجه ۴. در صورتی که $k < 0$ دامنه‌ی تابع $|x| < 1$ است. مثال:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f(\bullet) = 1$$

$$f(x) = 1 + (-1)x + \frac{2}{2}x^2 - \frac{(-2)(-1)(-3)}{3!}x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots =$$

$$\sum_{n=\bullet}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=\bullet}^{\infty} (-x)^n$$

یادآوری ۵. قبلاً ثابت کردیم که اگر $|x| < ۱$ آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

پس عبارت مثال بالا با این فرمول هم به دست می‌آید.

مثال ۶. سری مک‌لوران تابع $\frac{1}{1+x^2}$ را بیابید.

پاسخ.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

□

توجه ۷.

مثال ۸. سری مک‌لوران تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ را بدست آورید.

پاسخ.

توجه ۹. گفتیم که در بسط مک‌لوران تابع $(1+x)^k$ ، عدد k می‌تواند عدد غیر صحیح باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4(1-\frac{x}{4})}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{4})^{\frac{1}{2}}}$$

$$(1-y)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} y^n = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{15}{8} \frac{y^3}{3!} + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2(1-\frac{x}{4})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \right) - \frac{3}{8} \frac{x^2}{16} + \dots \right)$$

□

تمرین ۱۰. بسط مک‌لوران تابع $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ را بیابید.

مثال ۱۱. بسط مک‌لوران تابع زیر را بنویسید.

$$\ln(x+1)$$

پاسخ.

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) & f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2(1+x)}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3} & f^{(4)}(x) &= \frac{2 \times -3(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-6}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & f'(0) &= 1 & f''(0) &= -1 \\ f'''(0) &= 2 & f^{(4)}(0) &= -6 \end{aligned}$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

□

مثال ۱۲. حاصلجمع زیر را بیابید.

$$\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 2^2} + \frac{1}{3 \times 2^3} - \frac{1}{4 \times 2^4} + \frac{1}{5 \times 2^5} - \dots = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

پایان درس

آرزومند توفیق شما،

خانی