

۴ جلسه‌ی چهارم، شنبه

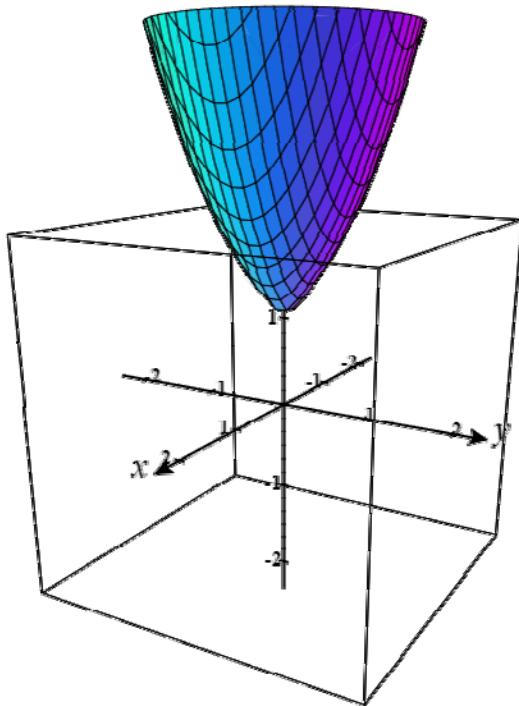
نخست مطلبی از جلسه‌ی قبل را یادآوری می‌کنیم:

$$\text{توجه ۳۸. رویه‌ی } z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

بنا به آنچه ثابت کردہ‌ایم رویه‌ی بالا از دوران منحنی $e^y = z$ حول محور z بدست می‌آید. به این نکته نیز باید توجه کرد که بنا به ضابطه‌ی تابع، باید $y > 0$ در نظر گرفته شود.

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(y)$$

باید منحنی $e^y = z$ برای $y > 0$ را حول محور z دوران دهیم:



۱.۴ هذلولی وار دوپارچه

مثال ۳۹. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$$

پاسخ.

توجه ۴۰. شکل را با فرض

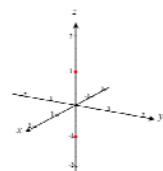
$$a = b = c = 1$$

رسم می‌کنیم؛ به بیان دیگر معادله‌ی زیر را رسم می‌کنیم.

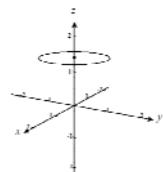
$$x^2 + y^2 = z^2 - 1$$

در فاصله‌ی $(-1, 1) \in z$ هیچ شکلی ایجاد نمی‌شود.

در $z = \pm 1$ تنها نقطه‌ی $(x, y) = (0, 0)$ را داریم.

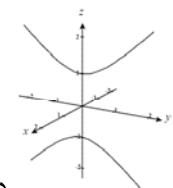


برای $z > 1$ معادله‌ی یک دایره را داریم:



برای $z < -1$ نیز دایره داریم. در صفحه‌ی $x = 0$ داریم:

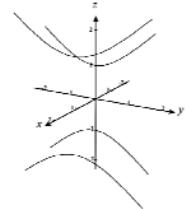
$$z^2 - y^2 = 1$$



در صفحه‌ی $x = 1$

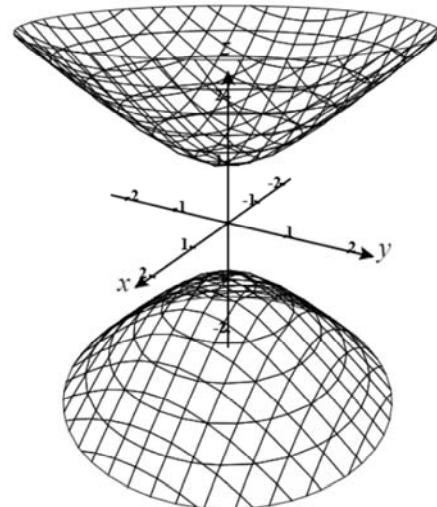
$$x = 1 \Rightarrow z^2 - y^2 = 2 \Rightarrow \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

در زیر تصاویر ایجاد شده در صفحات $\frac{1}{2}, x = 1, x = 2$ را رسم کرده‌ایم:

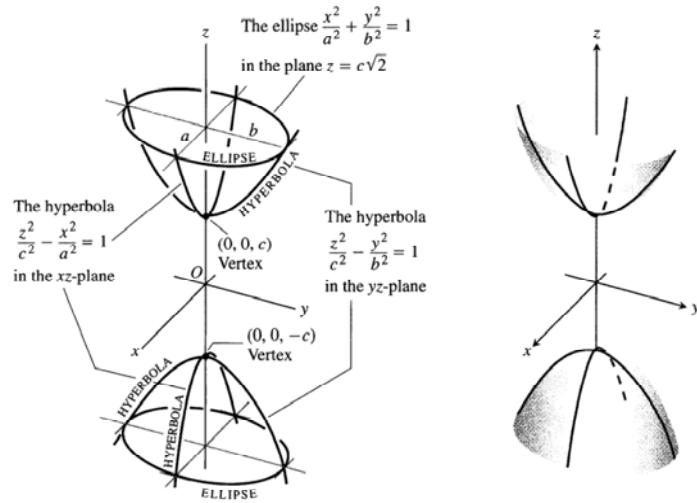


تحلیل شکل بالا برای مقادیر مختلف y را به عهده‌ی شما می‌گذاریم.

شکل کلی به صورت زیر است:



در زیر شکل را برای مقادیر دلخواه a, b, c کشیده‌ایم:



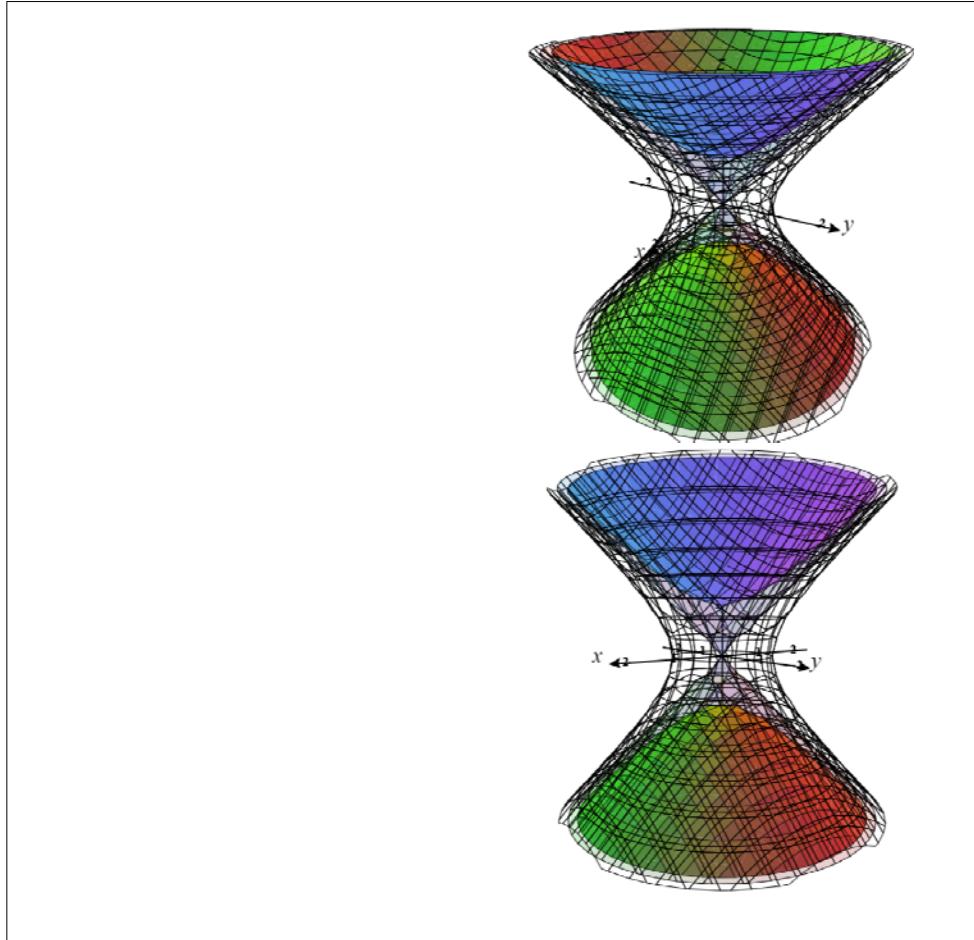
به شکل بدست آمده یک هذلولوی وار دو پارچه^۳ گفته می‌شود. این شکل با حرکت هذلولی‌های موازی صفحه‌ی zx و حرکت هذلولی‌های موازی محور zy ایجاد شده است.

جمعبندی ۱. رسم سه معادله‌ی

$$\begin{cases} x^{\gamma} + y^{\gamma} = z^{\gamma} \\ x^{\gamma} + y^{\gamma} = z^{\gamma} + 1 \\ x^{\gamma} + y^{\gamma} = z^{\gamma} - 1 \end{cases}$$

در یک دستگاه مختصات به صورت همزمان به صورت زیر است:

^۳hyperboloid of two sheets



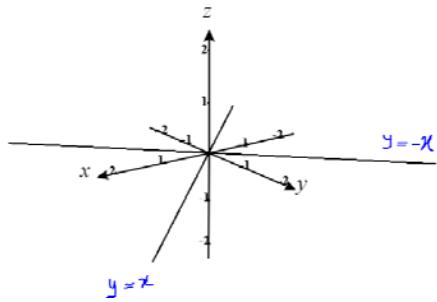
۲.۴ سه‌می‌وار هذلولوی

مثال ۴۱. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$z = y^{\gamma} - x^{\gamma}$$

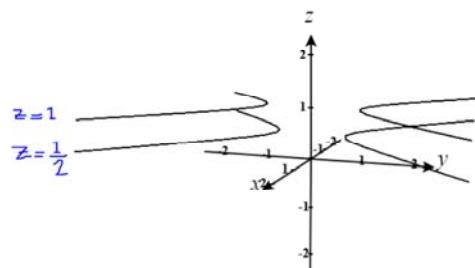
پاسخ.

$$z = \cdot \Rightarrow y^{\gamma} - x^{\gamma} = \cdot \Rightarrow (y - x)(y + x) = \cdot \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$



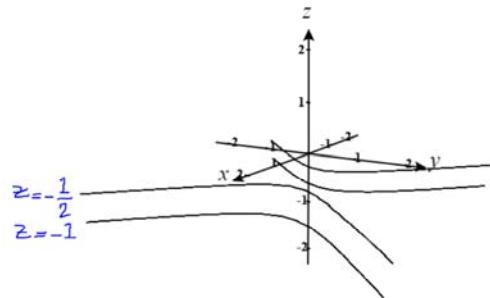
$$z = 1 \Rightarrow y^r - x^r = 1$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y^r}{2} - \frac{x^r}{2} = 1$$

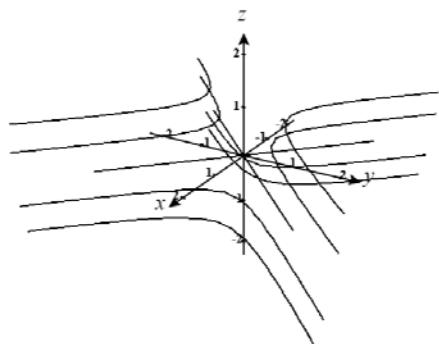


$$z = -1 \Rightarrow x^r - y^r = 1$$

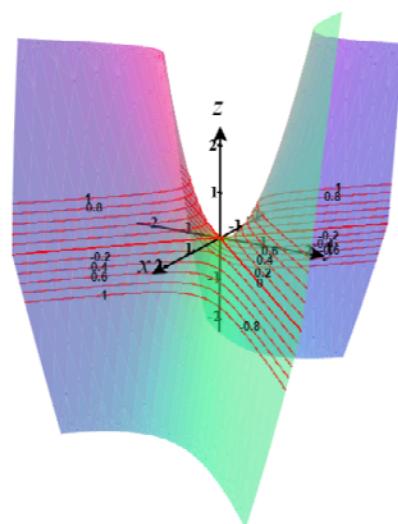
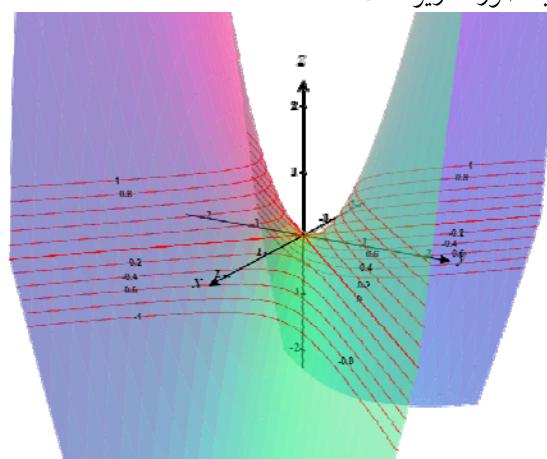
$$z = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^r}{2} - \frac{y^r}{2} = 1$$



تلقیق سه شکل بالا به صورت زیر است:

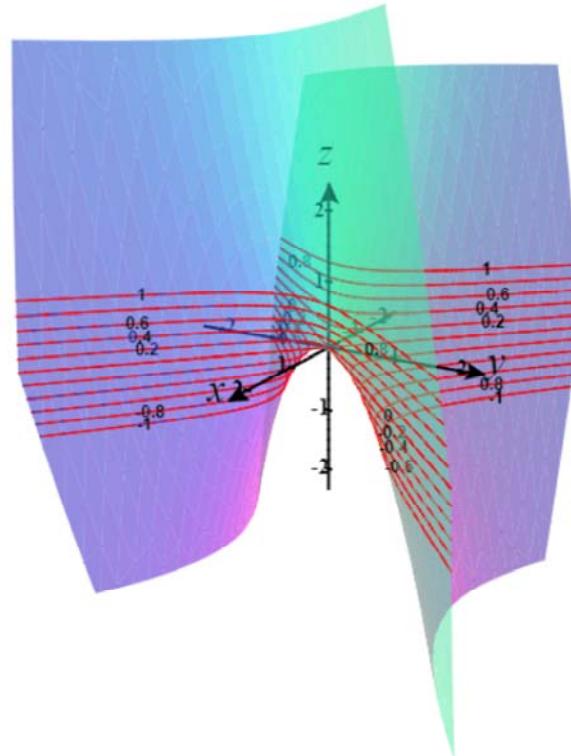


شکل کلی به صورت زیر است:



به شکل حاصل سهمی وار هذلولوی^۴ گفته می‌شود. این نکته جالب‌توجه است که در شکل بالا، به ازای مقادیر $z = k > 0$ یک سری هذلولی موازی صفحه‌ی xy داریم که به سمت محور y باز می‌شوند. این هذلولی‌ها با کم شدن مقدار k تغییر می‌کنند تا این که در $z = k = 0$ دو خط متقطع داریم. پس از آن در $z = k < 0$ هذلولی‌های موازی صفحه‌ی xy داریم که به سمت محور x باز می‌شوند. \square

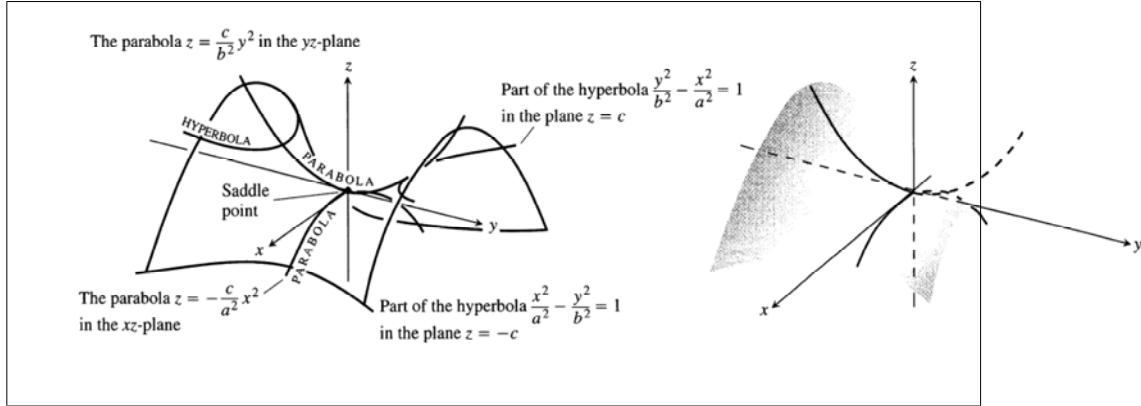
توجه ۴۲. نمودار معادله‌ی $z = x^2 - y^2$ به شکل زیر است:



معادله‌ی کلی سهمی وار هذلولوی به شکل زیر است:

$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad c > 0$$

⁴hyperbolic paraboloid



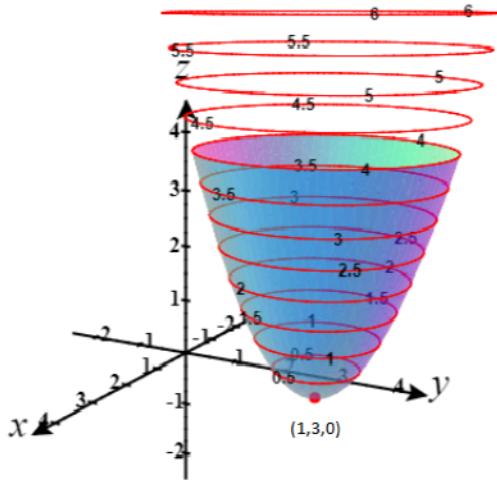
برای حل تمرین درباره‌ی این بخش درس، به صفحه‌ی ۸۸۰ (بخش ۱۲-۶) کتاب استوارت مراجعه کنید. پیش از این که از این بخش خارج شویم چند تمرین با هم حل می‌کنیم و چند تمرین حل نشده نیز برای شما باقی می‌گذاریم.

۳.۴ مثالها و تمرینها

مثال ۴۳. معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 6y - z + 10 = 0$ را به شکل استاندارد در آورده رویه را رسم کنید.

پاسخ.

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = z$$



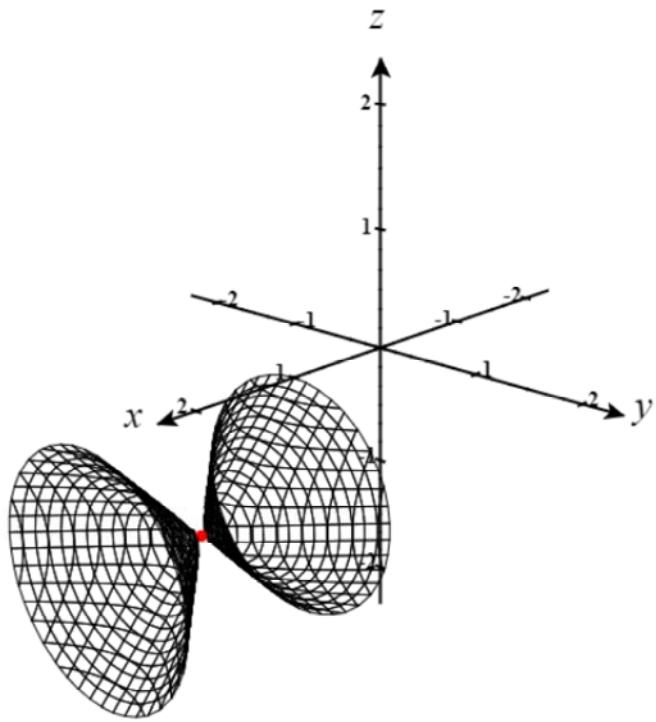
برای رسم رویه‌ی بالا، کافی است رویه‌ی $z = x^2 + y^2$ را در راستای بردار $(1, 3, 0)$ انتقال دهیم.
□
 شکل حاصل یک سهمی‌وار است.

مثال ۴۴. معادله‌ی $x^2 - 4x - 2z + 3 = y^2 - z^2$ را به شکل استاندارد در آورده رویه را
 رسم کنید و نام رویه را ذکر کنید.

پاسخ.

$$(x - 2)^2 - 4 + 3 = y^2 + (z + 1)^2 - 1 \Rightarrow (x - 2)^2 = y^2 + (z + 1)^2$$

معادله‌ی بالا، معادله‌ی یک مخروط موازی محور x هاست. برای رسم آن، مخروط $y^2 + z^2$
 را در راستای بردار $(1, 0, -2)$ انتقال می‌دهیم.



□

مثال ۴۵. مکان هندسی نقاط صادق در معادله $x^2 - 2z^2 = -2y$ را رسم کنید و نام رویه را بنویسید.

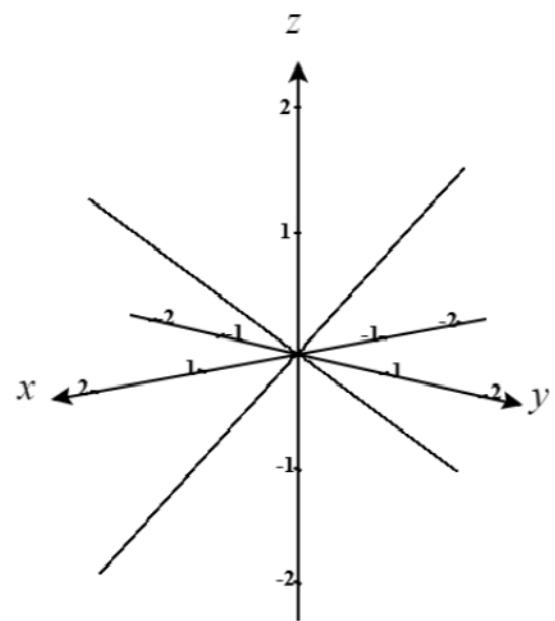
پاسخ.

$$x^2 - 2z^2 = -2y \Rightarrow y = z^2 - \frac{x^2}{2}$$

معادله بالا، معادله یک سهمی وار هذلولوی است. برای رسم راحتتر به نکات زیر توجه می‌کنیم:

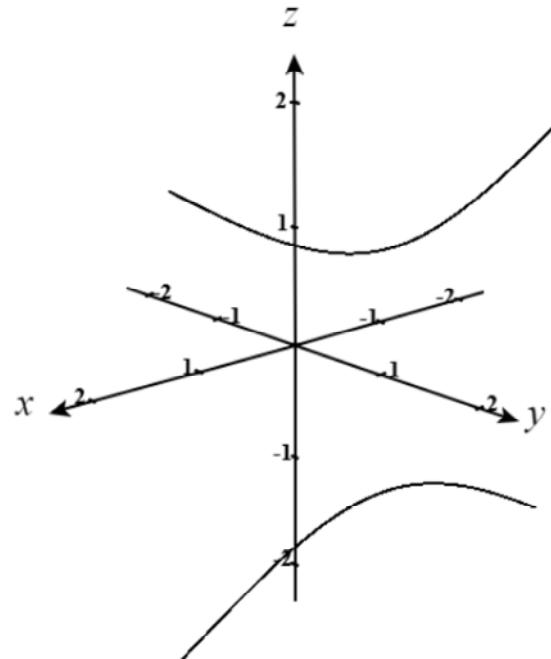
در صفحه $y = 0$ داریم:

$$2z^2 = x^2 \Rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

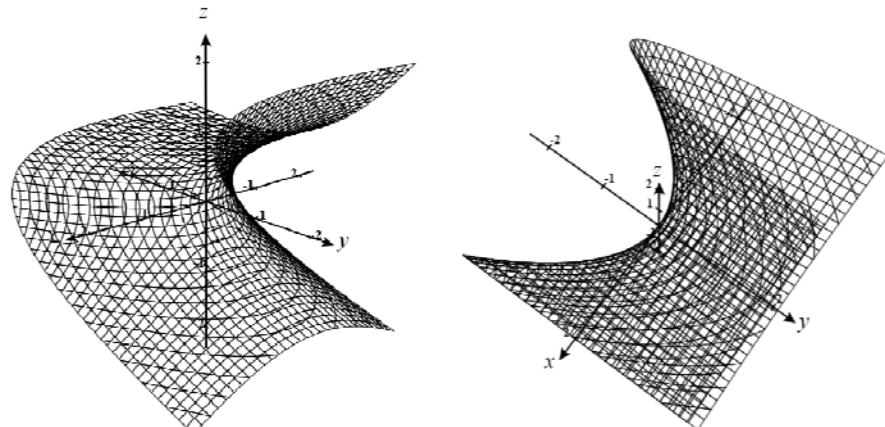


و در صفحه‌ی $y = 1$ یک هذلولوی داریم:

$$z^r - \frac{x^r}{2} = 1$$



شکل کلی نیز به صورت زیر است:



تمرین ۴۶. رویه‌های زیر را رسم کنید و نام آنها را ذکر کنید. نقاط تقاطع شکل با محورها را معین کنید.

$$y^z = x^z + \frac{1}{9}z^z \quad .1$$

$$x^z - y^z - z^z - 4x - 2z + 3 = 0 \quad .2$$

$$x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 4z = 0 \quad . \quad 3$$

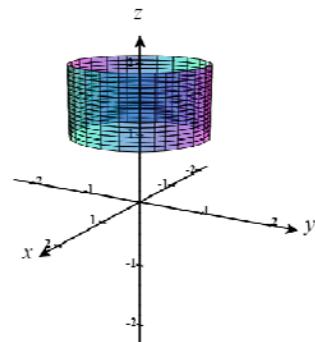
$$4x^2 - y^2 + 2z^2 = 0 \quad . \quad 4$$

$$y^2 = x^2 + 4z^2 + 4 \quad . \quad 5$$

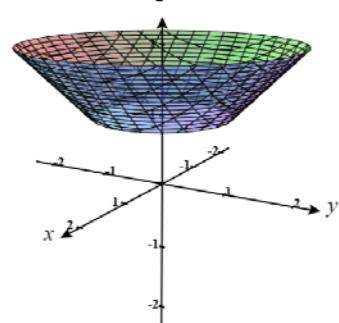
مثال ۴۷. معادلهی حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$ حول محور x را بیابید.

مثال ۴۸. ناحیهی محاط شده بین رویههای $z = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ و $z = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$ را برای $0 \leq z \leq 2$ را برای $x^2 + y^2 = 1$ را رسم کنید.

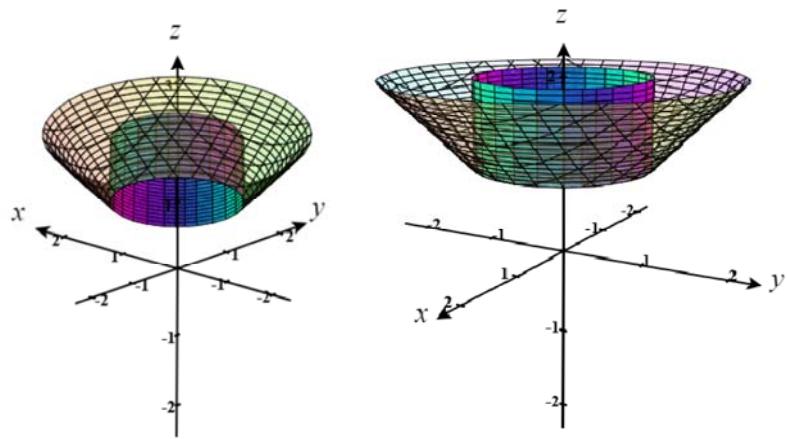
پاسخ. شکل معادلهی $x^2 + y^2 = 1$ در $0 \leq z \leq 2$ به صورت زیر است:



شکل معادلهی $z = x^2 + y^2$ در $0 \leq z \leq 2$ به صورت زیر است:



شکل حاصل از تلفیق این دو شکل به صورت زیر است:

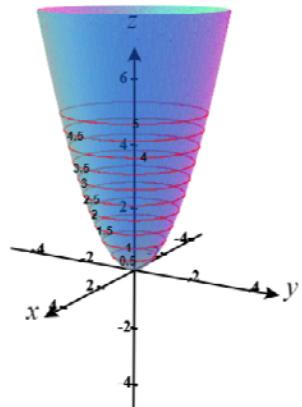


هاشور زدن ناحیه‌ی مورد نظر، به عهده‌ی شما!

تمرین ۴۹. یک معادله‌ی دلخواه از درجه‌ی دوم بنویسید و رویه‌ای را که آن معادله‌ی مشخص می‌کند رسم کنید.

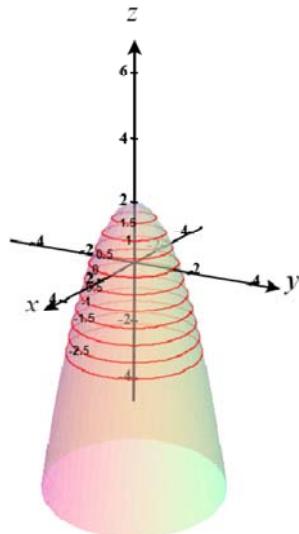
مثال ۵۰. ناحیه‌ی محاط شده توسط سه‌می‌وارهای $z = x^2 + y^2$ و $z = 2 - x^2 - y^2$ را رسم کنید.

پاسخ. معادله‌ی $z = x^2 + y^2$ به شکل زیر است:

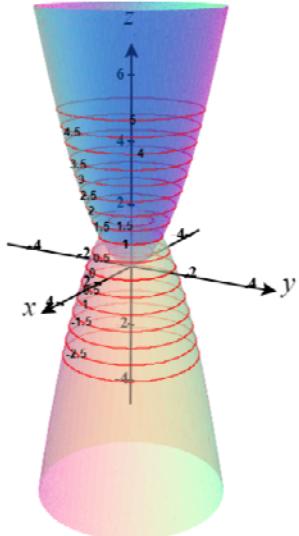


و معادله $z = 2 - x^2 - y^2$ نیز به شکل زیر است:

$$x^2 + y^2 = 2 - z$$



دو شکل روی یک دستگاه مختصات به صورت زیر قرار می‌گیرند:



تعیین ناحیه اشتراک، به عهده شما!

تمرین ۵۱. معادله شکل حاصل از دوران منحنی $y = 2z$ حول محور z را بنویسید.

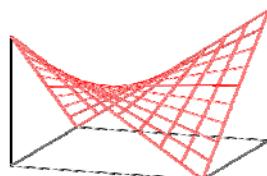
تمرین ۵۲. مکان هندسی نقاطی را بباید که فاصله‌ی آنها از صفحه‌ی $x = 1$ برابر است با فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی $(-1, 0, 0)$. نام رویه‌ی مورد نظر را ذکر کنید.

تمرین ۵۳. معادله‌ی رویه‌ای را بباید که از تمام نقاطی تشکیل شده است که فاصله‌ی آنها تا محور x دو برابر فاصله‌شان تا صفحه‌ی yz است. نام رویه‌ی مورد نظر را ذکر کنید.

تمرین ۵۴. فرض کنید که نقطه‌ی (a, b, c) روی رویه‌ی $x^2 - y^2 = z$ واقع باشد. نشان دهید که دو خط زیر (که از نقطه‌ی یادشده می‌گذرند) روی این رویه واقعند:

$$(a, b, c) + t(1, 1, 2(b-a)) \quad (a, b, c) + t(1, -1, -2(b+a))$$

در واقع رویه‌ی مورد نظر را می‌توان با خطکش رسم کرد!



در پیوند زیر در این باره بیشتر مطالعه کنید.

https://en.wikipedia.org/wiki/Ruled_surface

۴.۴ توابع دو متغیره

منظور از یک تابع دو متغیره ضابطه‌ای است مانند f که هر نقطه‌ی (x, y) در یک مجموعه‌ی $D \subseteq \mathbf{R}^2$ را به یک نقطه‌ی یکتای $z \in \mathbf{R}$ می‌برد.

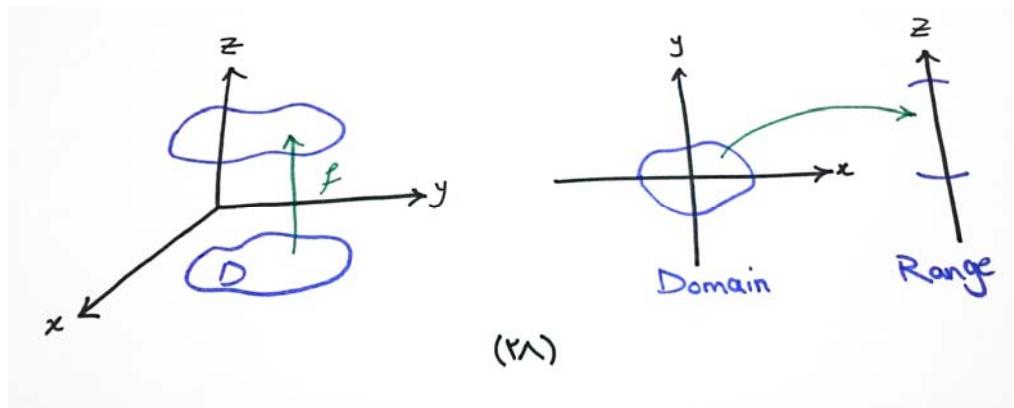
$$f : D \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

مجموعه‌ی D را دامنه‌ی تابع می‌خوانیم.

مجموعه‌ی زیر را بُرد تابع می‌خوانیم.

$$\{f(x, y) \in \mathbf{R} | (x, y) \in D\}$$

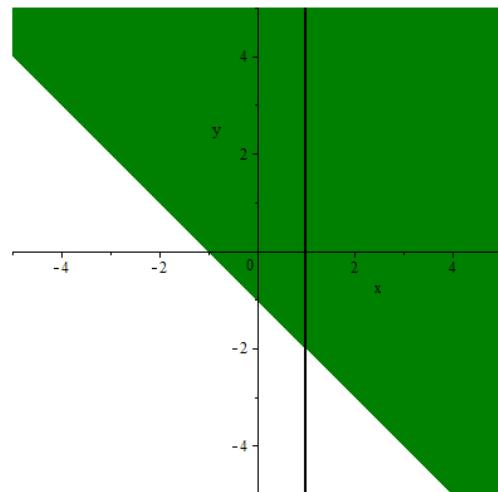


مثال ۵۵. دامنهٔ تابع زیر را رسم کنید و مقدار آن را $(2, 3)$ محاسبه کنید.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

پاسخ.

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$



توجه کنید که خط $x = 1$ جزو دامنه نیست. محاسبهٔ مقدار تابع در نقطهٔ داده شده به عهدهٔ شما!