

## ریاضی عمومی ۲

محسن خانی

۱۳۹۷ خرداد ۱۴

### چکیده

جزوه‌ی پیش رو در طی تدریس درس ریاضی عمومی ۲ در نیمسال دوم تحصیلی ۹۶-۹۷ در دانشگاه صنعتی اصفهان حاصل شده است. اکثر مثالها، از کتاب حساب جیمز استوارت برگرفته شده‌اند. در نگارش جزو، هر جلسه را سروقت به اتمام رساندن و به روی تارنمای گذاشتن برایم بیش از رعایت زیبائی ادبی، و حتی بخطائی اهمیت داشته است. بنابراین چه بسا جملاتی در جزو یافت شوند که به بهترین ادبیات نوشته نشده‌اند و نیاز به ویرایش داشته باشند، و چه بسا اشتباهاتی تایپی در آن موجود باشد. امیدوارم در سالهای پیش رو، با هر بار تدریس آن، بهبودش بخشم و مثالها و تمرینهای بهتر بر آن بیفزایم.

به عنوان یک مدرس، حداقل استانداردی که برای خود در نظر گرفته‌ام این بوده است که آنچه را که تدریس می‌کنم به صورت مُدوّن در اختیار دانشجویانم بگذارم، که دانشجو سر کلاس فقط درس را گوش کند و به خود زحمت نوشتند ندهد و نگرانی عقب ماندن و پریشان نوشتند و دنبال جزو دویدن نداشته باشد. فهمیده‌ام که میان آنچه استاد پای تخته می‌نویسد و آنچه دانشجو در دفترش ثبت می‌کند گاهی زمین تا آسمان فرق است. همچنین دیده‌ام که کسانی هستند که نمی‌توانند به سرعت بنویسند و جزو نویسی برایشان دشوار است. شاید اگر در زمان دانشجوئی خودم استادی چنین زحمتی به خودش داده بود، او را ستایش می‌کردم. اما افسوس که همت گماشته شده بر این، گاهی نومید و دلسردم کرده است: آنگاه که دانشجوئی پس از گذشت نمی‌از ترم، از موجودیت تارنمای درس و جزوی آنلاین بی‌خبر است. نیز آنگاه که شسته‌ورفته بودن جزو موجب این شود که دانشجو به خود زحمت کلاس آمدن و «استاد دیدن» ندهد و گمانش این باشد که همه‌ی حاصل دانشگاه رفتن، تحصیل کاغذپاره‌های جزوی این و آن است و آن «پیچش‌های مو» را هیچگاه درنیابد.

با این همه، هر مدرس همیشه دل به عده‌ای محدود خوش می‌کند که کلاس او را دوست می‌دارند و با جدیت دنبال می‌کنند. امیدوارم که آن محدود، حداقل بهره را از این جزو برد باشند و کاستی‌هایش را بر من بیخشارند. سرآخر، این جزو را با نهایت احترام به خانم «دُرسا پیری» تقدیم می‌کنم که زحمت تایپش را با علاقه و پشتکار به عهده گرفتند.

# فهرست مطالب

۱	جلسه‌ی اول	۷
۱.۱	رسم استوانه‌ها	۹
۲	جلسه‌ی دوم	۱۵
۱.۲	رسم رویه‌های درجه‌ی دوم	۲۲
۲.۱	بیضی‌وار	۲۳
۲.۲	سهمی‌وار بیضوی	۲۶
۳	نیم‌جلسه‌ی سوم، چهارشنبه	۲۹
۱.۳	مخروطها	۳۱
۲.۳	هدلولی‌وار یکپارچه	۳۳
۴	جلسه‌ی چهارم، شنبه	۳۶
۱.۴	هدلولی‌وار دوپارچه	۳۶
۲.۴	سهمی‌وار هدلولی	۳۹
۳.۴	مثالها و تمرینها	۴۲
۴.۴	توابع دو متغیره	۴۹
۵	جلسه‌ی پنجم، دوشنبه	۵۱
۱.۵	ادامه‌ی مبحث توابع	۵۳
۲.۵	منحنی‌های تراز	۵۷
۶	نیم‌جلسه‌ی ششم، چهارشنبه	۶۴
۱.۶	پاسخ سوال	۶۴
۲.۶	ادامه‌ی مبحث منحنی‌های تراز	۶۵
۳.۶	پاسخ سوال	۶۷
۴.۶	تمرین	۷۰
۵.۶	حد و پیوستگی	۷۱
۷	جلسه‌ی هفتم، شنبه	۷۲
۱.۷	ادامه‌ی حد و پیوستگی	۷۲
۸	جلسه‌ی هشتم، دوشنبه	۷۸
۱.۸	پیوستگی	۸۰
۲.۸	توابع با بیش از دو متغیر	۸۲

۹ نیم جلسه‌ی نهم، چهارشنبه

۸۵

۱۰ جلسه‌ی دهم

۸۹

۹۰ ..... مشتقات جزئی ..... ۱.۱۰

۹۱ ..... تعبیر هندسی ..... ۱.۱.۱۰

۱۱ جلسه‌ی یازدهم، دوشنبه

۹۵ ..... مروار حد ..... ۱.۱۱

۹۷ ..... ادامه‌ی بحث مشتقات جزئی ..... ۲.۱۱

۱۰۲ ..... مشتقات جزئی مراتب بالاتر برای تابع  $z = f(x, y)$  ..... ۳.۱۱

۱۰۲ ..... تمرین ..... ۴.۱۱

۱۲ نیم جلسه‌ی دوازدهم، چهارشنبه

۱۰۴ ..... ادامه‌ی مشتقات جزئی ..... ۱.۱۲

۱۰۵ ..... صفحه‌ی مماس ..... ۲.۱۲

۱۳ جلسه‌ی سیزدهم، شنبه

۱۱۰ ..... دیفرانسیل پذیری، مقدمه ..... ۱.۱۳

۱۱۱ ..... تعریف دقیق دیفرانسیل پذیری(برای توابع دو متغیره) ..... ۲.۱۳

۱۴ جلسه‌ی چهاردهم

۱۵ نیم جلسه‌ی پانزدهم، چهارشنبه

۱۲۱ ..... ادامه‌ی قاعده‌ی زنجیره‌ای ..... ۱.۱۵

۱۲۲ ..... مشتق‌گیری ضمنی ..... ۲.۱۵

۱۲۳ ..... مشتقات سوئی ..... ۳.۱۵

۱۶ جلسه‌ی شانزدهم، شنبه

۱۲۵ ..... ادامه‌ی مشتق سویی ..... ۱.۱۶

۱۷ جلسه‌ی هفدهم، دوشنبه

۱۳۰ ..... حل چند تمرین ..... ۱.۱۷

۱۳۲ ..... منحنی‌های فضایی ..... ۲.۱۷

۱۸ نیم جلسه‌ی هجدهم، چهارشنبه

۱۳۶ ..... حل چند تمرین ..... ۱.۱۸

۱۳۸ ..... ادامه‌ی درس (خمنها) ..... ۲.۱۸

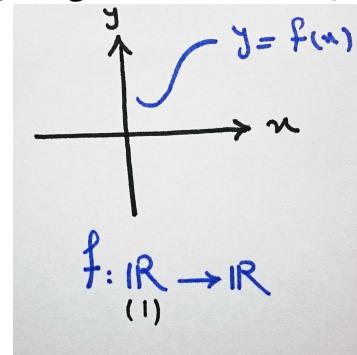
۱۳۹	۱۹ جلسه‌ی نوزدهم شنبه
۱۳۹ . . . . .	۱.۱۹ مرور درس‌های گذشته . . . . .
۱۴۱ . . . . .	۲.۱۹ ادامه‌ی درس . . . . .
۱۴۳ . . . . .	۳.۱۹ صفحات مماس بر رویه‌های تراز . . . . .
۱۴۷	۲۰ جلسه‌ی بیست، دوشنبه، حل چند تمرین
۱۵۴	۲۱ جلسه‌ی بیست و یکم، شنبه
۱۵۶ . . . . .	۱.۲۱ یافتن اکسترم‌های توابع دو متغیره . . . . .
۱۶۰	۲۲ جلسه‌ی بیست و دوم، دوشنبه
۱۶۰ . . . . .	۱.۲۲ نقاط بحرانی . . . . .
۱۶۱ . . . . .	۱.۱.۲۲ نقاط بحرانی تابع دو متغیره . . . . .
۱۶۲ . . . . .	۲.۲۲ محک مشتق دوم برای تعیین اکسترم‌ها و نقاط زینی . . . . .
۱۶۶	۲۳ نیم جلسه‌ی بیست و سوم، چهارشنبه
۱۷۰	۲۴ جلسه‌ی بیست و چهارم، دوشنبه
۱۷۲ . . . . .	۱.۲۴ اکسترم‌های مطلق . . . . .
۱۷۲ . . . . .	۲.۲۴ توپولوژی در $\mathbb{R}^2$ . . . . .
۱۷۶	۲۵ نیم جلسه‌ی بیست و پنجم، چهارشنبه
۱۷۶ . . . . .	۱.۲۵ اکسترم‌های مطلق . . . . .
۱۷۸	۲۶ جلسه‌ی بیست و ششم، شنبه
۱۸۰ . . . . .	۱.۲۶ روش ضرایب لاگرانژ . . . . .
۱۸۳	۲۷ جلسه‌ی بیست و هفتم، دوشنبه
۱۸۳ . . . . .	۱.۲۷ ادامه‌ی روش ضرایب لاگرانژ . . . . .
۱۸۵ . . . . .	۲.۲۷ انتگرال دوگانه . . . . .
۱۸۶ . . . . .	۳.۲۷ جمع‌های ریمانی دوگانه . . . . .
۱۸۹	۲۸ جلسه‌ی بیست و هشتم
۱۸۹ . . . . .	۱.۲۸ انتگرال دوگانه . . . . .
۱۹۰ . . . . .	۱.۱.۲۸ انتگرال جزئی . . . . .
۱۹۳	۲۹ جلسه‌ی بیست و نهم، شنبه
۱۹۴ . . . . .	۱.۲۹ انتگرالگیری در نواحی کلی . . . . .

۱۹۰ . . . . .	۱.۱.۲۹ نواحی نوع اول . . . . .
۱۹۰ . . . . .	۲.۱.۲۹ نواحی نوع دوم . . . . .
۱۹۸	<b>۳۰ جلسه‌ی سی‌ام دوشنبه</b>
۱۹۸ . . . . .	۱.۳۰ ویژگی‌های انگرال
۲۰۱ . . . . .	۲.۳۰ انگرال دوگانه در مختصات قطبی . . . . .
۲۰۷	<b>۳۱ جلسه‌ی سی‌ویکم، شنبه</b>
۲۰۷ . . . . .	۱.۳۱ تغییر متغیر . . . . .
۲۰۹ . . . . .	۲.۳۱ تغییر مختصات قطبی . . . . .
۲۱۰ . . . . .	۳.۳۱ مثالها . . . . .
۲۱۱	<b>۳۲ جلسه‌ی سی‌ودوم، انگرال‌های سه‌گانه</b>
۲۱۲ . . . . .	۱.۳۲ انگرال‌های سه‌گانه . . . . .
۲۱۲ . . . . .	۱.۱.۳۲ نواحی ساده‌تر . . . . .
۲۱۵ . . . . .	۲.۳۲ مختصات استوانه‌ای . . . . .
۲۱۹	<b>۳۳ نیم جلسه‌ی سی‌وسوم، چهارشنبه، انگرال‌گیری در مختصات کروی</b>
۲۱۹ . . . . .	۱.۰.۳۳ مساحت ناحیه‌ی محصور . . . . .
۲۲۰ . . . . .	۲.۰.۳۳ حجم ناحیه‌ی محصور . . . . .
۲۲۱ . . . . .	۱.۳۳ مختصات کُروی . . . . .
۲۲۴ . . . . .	۲.۳۳ ادامه‌ی مختصات کُروی . . . . .
۲۲۶ . . . . .	۳.۳۳ انگرال‌گیری از میدان‌های برداری روی مسیرهای خطی . . . . .
۲۲۶ . . . . .	۴.۳۳ میدان‌های برداری . . . . .
۲۳۱ . . . . .	۵.۳۳ انگرال‌گیری خطی از توابع عددی . . . . .
۲۳۳	<b>۳۴ جلسه‌ی سی‌وچهارم</b>
۲۳۳ . . . . .	۱.۳۴ ادامه‌ی مختصات کُروی . . . . .
۲۳۵ . . . . .	۲.۳۴ انگرال‌گیری از میدان‌های برداری روی مسیرهای خطی . . . . .
۲۳۵ . . . . .	۳.۳۴ میدان‌های برداری . . . . .
۲۴۰ . . . . .	۴.۳۴ انگرال‌گیری خطی از توابع عددی . . . . .
۲۴۲	<b>۳۵ جلسه‌ی سی‌وپنجم</b>
۲۴۲ . . . . .	۱.۳۵ انگرال‌گیری خطی از توابع عددی . . . . .
۲۴۸ . . . . .	۱.۱.۳۵ چند انگرال دیگر وابسته به خم . . . . .

۲۵۰	۳۶ نیم جلسه‌ی سی و ششم، چهارشنبه
۲۵۱ . . . . .	۱.۳۶ انتگرالگیری روی خط (روی خم) از توابع برداری
۲۵۵ . . . . .	۲.۳۶ قضیه‌ی گرین . . . . .
۲۵۶	۳۷ جلسه‌ی سی و هفتم، شنبه، قضیه‌ی گرین
۲۵۸ . . . . .	۱.۳۷ قضیه‌ی گرین . . . . .
۲۶۳	۳۸ جلسه‌ی سی و هشتم، دوشنبه
۲۶۳ . . . . .	۱.۳۸ استفاده‌ی بر عکس از قضیه‌ی گرین . . . . .
۲۶۵ . . . . .	۲.۳۸ انتگرالهای روی رویه . . . . .
۲۶۵ . . . . .	۱.۲.۳۸ رویه‌های پارامتری . . . . .
۲۶۶ . . . . .	۲.۲.۳۸ انتگرال توابع عددی روی رویه‌ها . . . . .
۲۶۹	۳۹ نیم جلسه‌ی سی و نهم، چهارشنبه
۲۷۰ . . . . .	۱.۳۹ انتگرالگیری از توابع برداری روی رویه‌ها . . . . .
۲۷۴	۴۰ جلسه‌ی چهلم، شنبه، قضیه‌ی استوکس
۲۷۵ . . . . .	۱.۴۰ کرْل . . . . .
۲۷۷ . . . . .	۲.۴۰ قضیه‌ی استوکس . . . . .
۲۸۰	۴۱ جلسه‌ی چهل و یکم، دوشنبه، قضیه‌ی دیورژانس
۲۸۱ . . . . .	۱.۴۱ قضیه‌ی دیورژانس . . . . .
۲۸۴ . . . . .	۲.۴۱ مرور درس . . . . .
۲۸۸	۴۲ تمرین

# ۱ جلسه‌ی اول

در درس ریاضی ۱ با حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع تک متغیره آشنا شدیم. یک تابع تک متغیره  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را می‌توان به دو طریق هندسی و جبری مطالعه کرد.



مطالعه‌ی هندسی این تابع یعنی رسم نمودار آن. مطالعه‌ی جبری تابع یعنی محاسبه‌ی مشتق آن، یافتن نقاط بحرانی و بررسی علامت مشتق. در ریاضی ۱ دیدیم که میان ویژگی‌های مشتق تابع و شکل هندسی آن رابطه وجود دارد. یعنی می‌توان شکل تابع را تنها با مطالعه‌ی جبری مشتقات آن حدس زد.

در درس ریاضی ۲ به حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چندمتغیره می‌پردازیم. هدف ما از این درس گذار از فضای دو بعدی  $\mathbb{R}^2$  به فضاهای با ابعاد بالاتر است، مانند  $\mathbb{R}^n$  برای  $n > 2$ . منظورمان از توابع چندمتغیره، توابعی است مانند

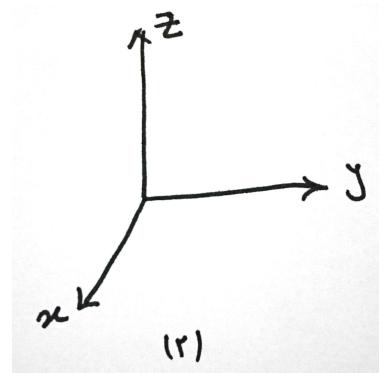
$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad n, m > 0$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$$

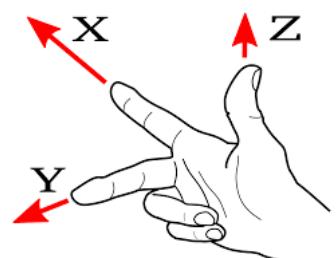
از میان این توابع، به طور خاص به توابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  و  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  علاقه‌مند خواهیم بود؛ زیرا این توابع را می‌توان

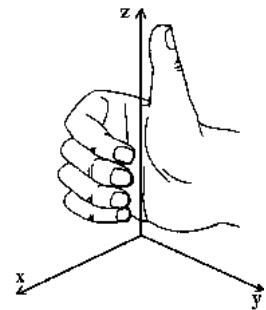
در فضای سه بعدی تجسم کرد. فضای سه بعدی برای مطالعه‌ی فیزیکی حرکت بسیاری از اجسام در فضا، مناسب است.

فضای سه بعدی  $\mathbb{R}^3$  توسط سه محور  $x$ ,  $y$  و  $z$  ساخته شده است.



برای تعیین ترتیب این محورها از قاعده‌ی دست راست استفاده می‌کنیم:

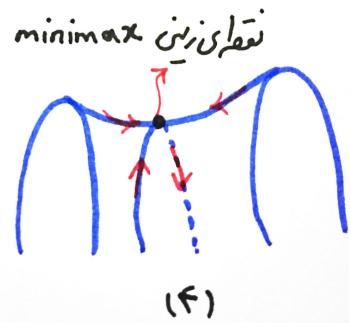




در این درس، نخست با نحوه‌ی رسم برخی توابع در  $\mathbb{R}^n$  آشنا خواهیم شد و سپس مفهوم مشتق‌پذیری را به تابع  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  تعمیم خواهیم داد.

**سوال ۱.** فرض کنید  $R \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تابع باشد و  $a, b \in \mathbb{R}^n$  نقطه‌ای دلخواه باشد. پیشنهاد شما برای تعریف مشتق این تابع در نقطه‌ی  $a$  چیست؟

در درس ریاضی ۱ دیدیم که توابع دیفرانسیل‌پذیر  $R \rightarrow \mathbb{R}$ ، توابعی هستند که رفتار آنها در نزدیکی نقاط را می‌توان با استفاده از رفتار خطوط مماس تخمین زد. در ریاضی ۲ خواهیم دید که در واقع مطالعه‌ی مشتق یک تابع  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  یعنی تخمین زدن این توابع توسط صفحات مماس و مطالعه‌ی تغییرات صفحات مماس. در این درس نیز با استفاده از مطالعه‌ی مشتق، شکل هندسی یک تابع را تخمین خواهیم زد. در اینجا علاوه بر مینیموم و ماکزیمم، نقطه‌ی زینی هم خواهیم داشت:



**رفع ابهام ۲.** تجسم هندسی توابع  $R \rightarrow \mathbb{R}^n$  به صورت رویه‌ها است. یک رویه را می‌توانید به صورت یک پارچه تصور کنید که می‌تواند چین و چروک هم داشته باشد. اما توابع  $R \rightarrow \mathbb{R}^n$  به صورت منحنی‌های مسطح هستند. منحنی‌های مسطح حالت خاصی از منحنی‌های فضائی هستند (و منحنی‌های فضائی توابعی مانند  $R \rightarrow \mathbb{R}^n$  هستند). یک منحنی فضائی را می‌توانید یک نخ تصور کنید که در فضا به شکلی درآمده است. در رسم منحنی‌های فضائی، فقط بُرد تابع را رسم می‌کنیم. در زیر، یک رویه و یک منحنی فضائی برای مثال رسم کرده‌ایم. شکل اول، توسط تابع زیر تولید شده است:

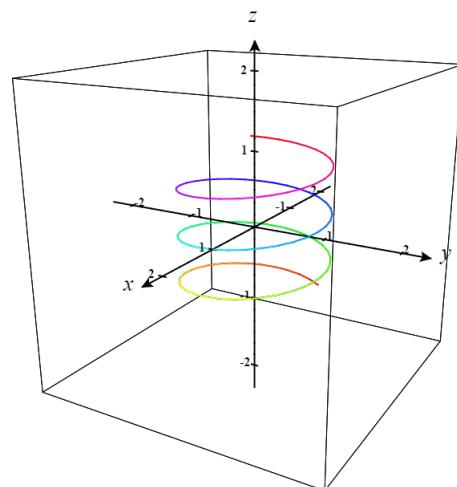
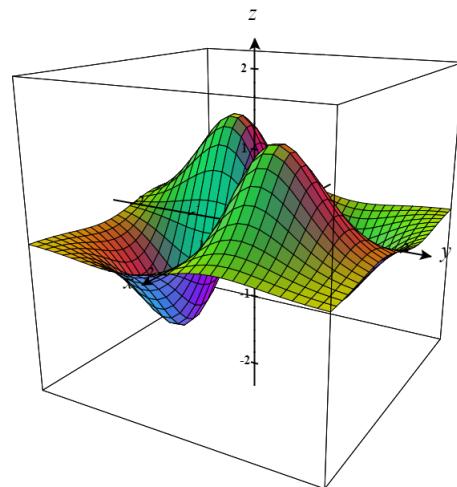
$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{e^{x+y}}$$

شکل دوم توسط تابع زیر تولید شده است:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t), \cdot / |t|)$$



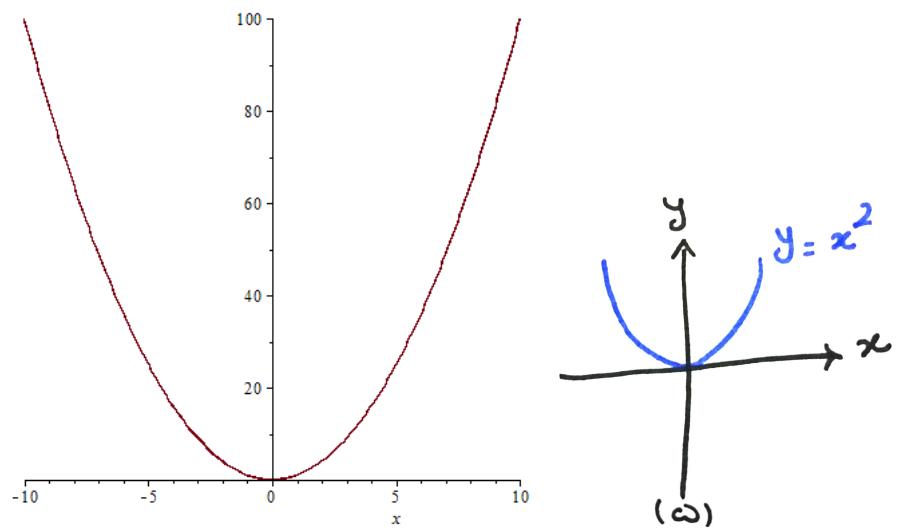
برای آشنائی بیشتر با فضای سه بعدی، نخست با نحوه‌ی رسم فضای هندسی برخی معادلات آشنا می‌شویم:

## ۱.۱ رسم استوانه‌ها

توجه کنید که در این بخش لزوماً به رسم تابع‌ها نخواهیم پرداخت. یعنی معادلاتی که آنها را رسم می‌کنیم، ممکن است لزوماً تابع نباشند.

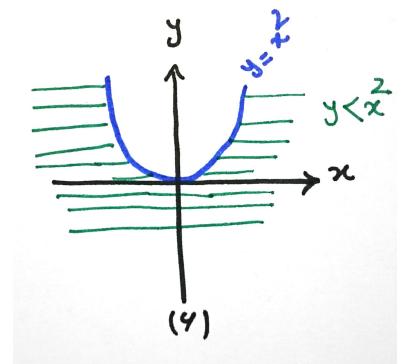
مثال ۳. در فضای دو بعدی  $\mathbf{R}^2$  مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  را رسم کنید؛ یعنی مجموعه‌ی زیر را در  $\mathbf{R}^2$  بکشید:

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

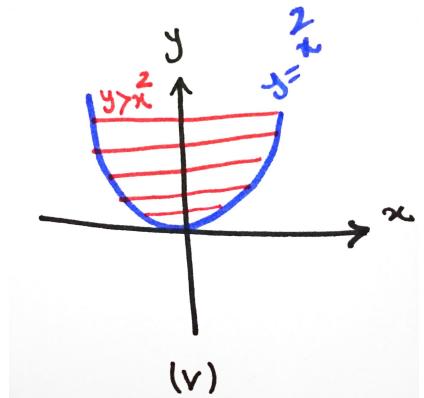


مثال ۴. در  $\mathbb{R}^2$  مجموعه‌های زیر را رسم کنید:

$$\{(x, y) | y < x^2\}$$



$$\{(x, y) | y > x^2\}$$

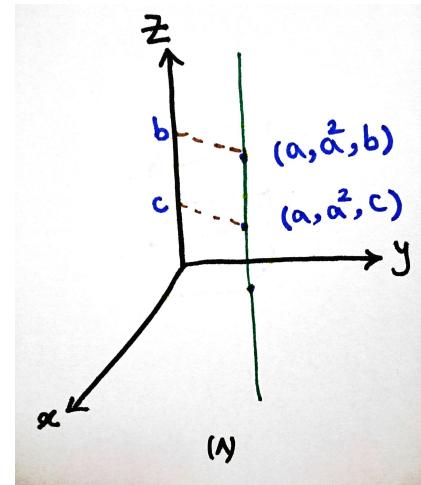


مثال ۵. مکان هندسی نقاط صادق در معادله  $y = x^2$  را در فضای سه بعدی رسم کنید.

پاسخ. می‌خواهیم مجموعه‌ی نقاط زیر را در  $\mathbb{R}^3$  رسم کنیم:

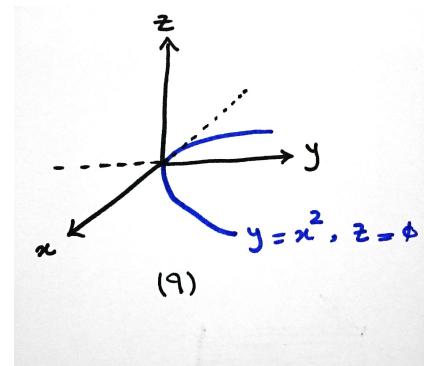
$$\{(x, y, z) | y = x^2\}$$

مشاهده ۶. اگر نقطه‌ی  $(a, a^2, b)$  روی شکل مورد نظر واقع باشد، آنگاه هر نقطه‌ی دیگر  $(a, a^2, c)$  نیز روی همان شکل خواهد بود. به بیان دیگر اگر نقطه‌ی  $p$  روی شکل مورد نظر ما واقع شود، آنگاه هر خطی که از  $p$  بگذرد و با محور  $z$  موازی باشد نیز روی شکل واقع است.



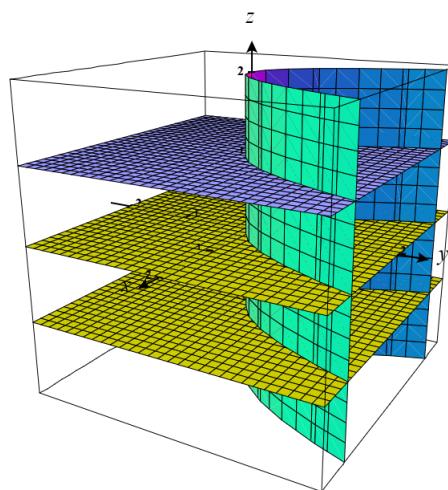
مشاهده ۷. تصویر شکل مورد نظر در صفحه‌ی  $xy$  به صورت زیر است:

$$\{(x, y, \cdot) | y = x^2\}$$

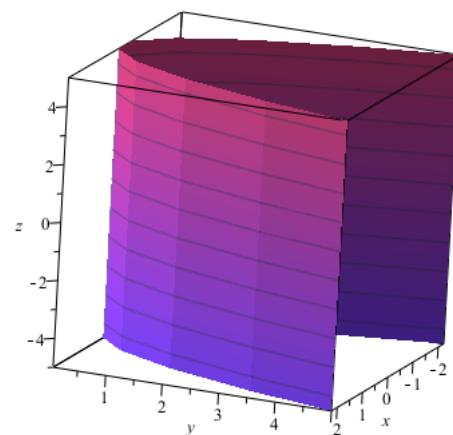


به بیان بهتر اشتراک شکل مورد نظر ما صفحه‌ی  $z = 0$  به صورت بالا است.

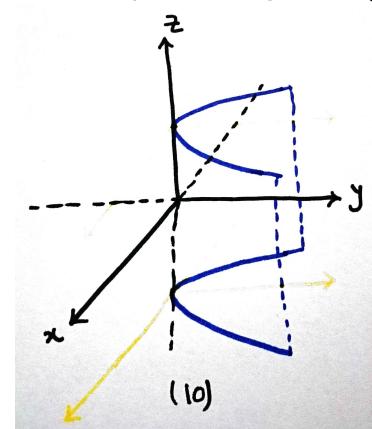
مشاهده ۸. اشتراک شکل مورد نظر ما با صفحات  $z = \pm 1$ ,  $z = 0$  به صورت زیر است:



در واقع در هر ارتفاعی یک بار منحنی  $y = x^2$  ایجاد شده است:

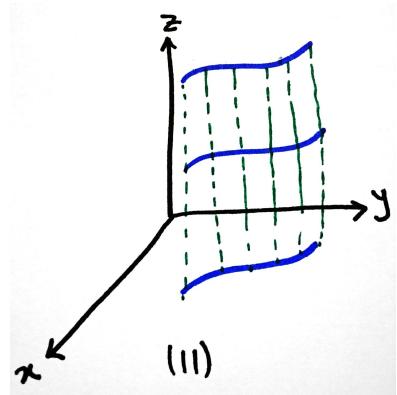


شکل بالا مثالی از یک استوانه است.

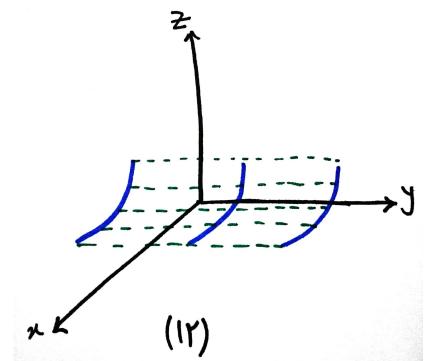


تعریف ۹. منظور از استوانه مجموعه‌ی همه‌ی خطوط موازی ای است که از یک منحنی دلخواه می‌گذرند.

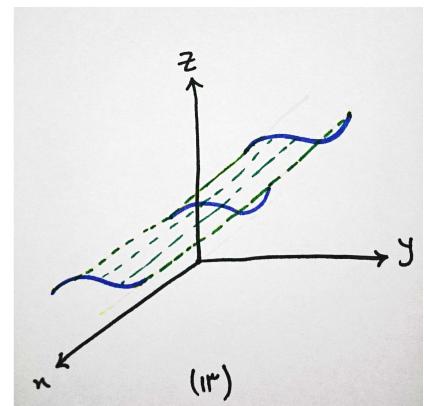
معادله‌ی  $f(x, y) = 0$  یک استوانه موازی محور  $z$ ‌ها به دست می‌دهد.



به منحنی  $f(x, y) = 0$  منحنی مولّد استوانه گفته می‌شود. به طور مشابه معادله  $f(x, z) = 0$  یک استوانه موازی محور  $y$  بست می‌هد.

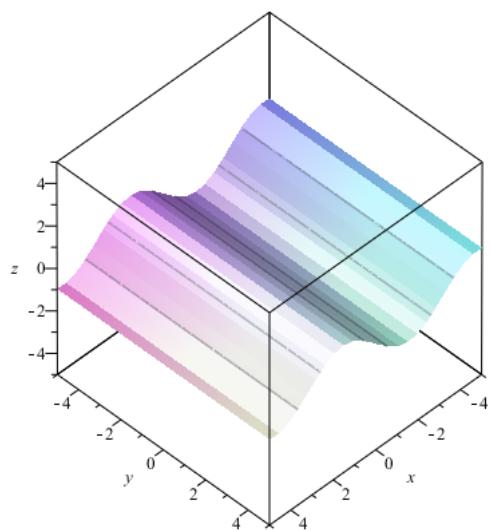


همچنین معادله  $f(y, z) = 0$  یک استوانه موازی محور  $x$  بست می‌دهد.



□

مثال ۱۰. مکان هندسی نقاط صادق در معادله  $z = \sin x$  را رسم کنید.



## ۲ جلسه‌ی دوم

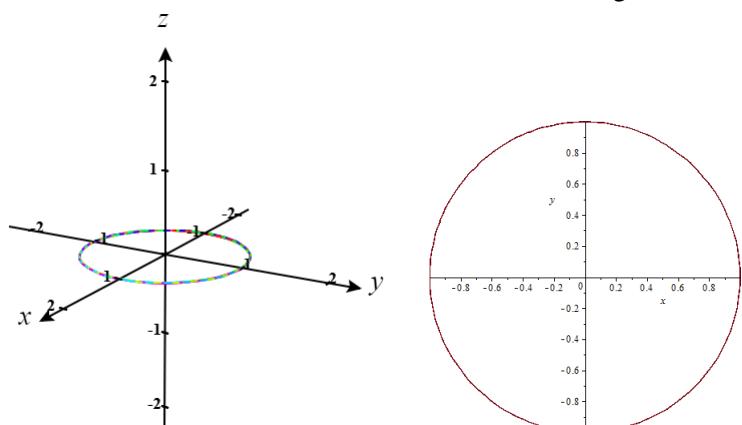
در جلسه‌ی قبل درباره‌ی استوانه‌ها، به عنوان مجموعه‌ای از خطوط موازی که از یک منحنی مشخص می‌گذرند، صحبت کردیم. بحث را با رسم چند استوانه پی می‌گیریم.

مثال ۱۱. استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  را رسم کنید.

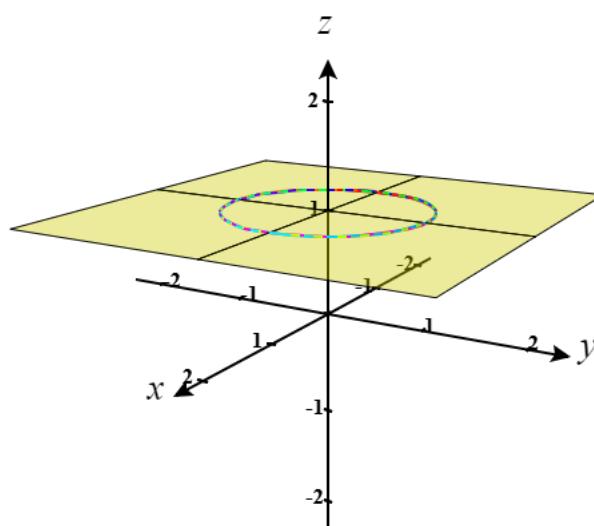
پاسخ. هدفمان رسم مجموعه‌ی نقاط زیر است.

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

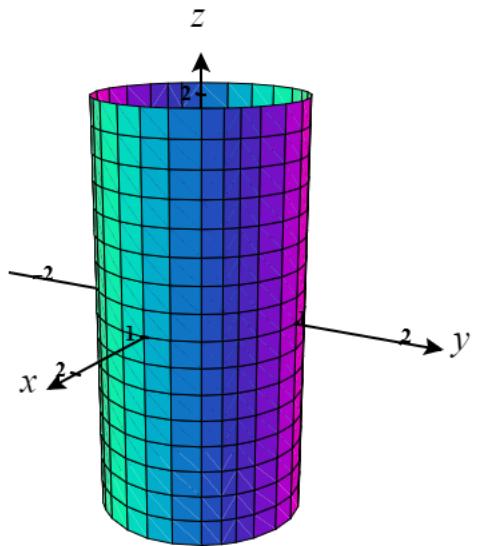
تصویر شکل مورد نظر روی صفحه‌ی  $z = 0$  به صورت زیر است.



به طور مشابه در هر صفحه‌ی  $z = k$ ,  $x^2 + y^2 = 1$  ایجاد می‌شود:



بنابراین شکل مورد نظر ما یک استوانه به صورت زیر است:

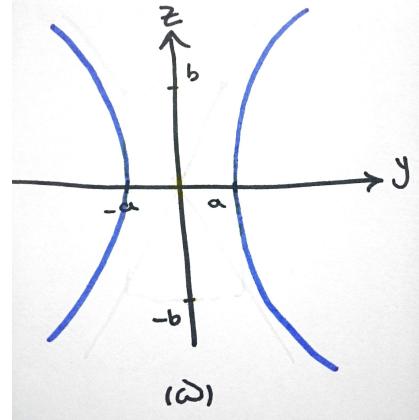


□

مثال ۱۲. استوانه‌ی  $z^2 - y^2 = 1$  را رسم کنید.

پاسخ. توجه کنید که از آنجا که  $x$  در معادله‌ی بالا ظاهر نشده است، شکل مورد نظر استوانه‌ای خواهد بود موازی محور  $x$ . پیش از آن که مثال بالا را پاسخ دهیم، نیازمند یادآوری چند مطلب از دوره‌ی دبیرستان هستیم:

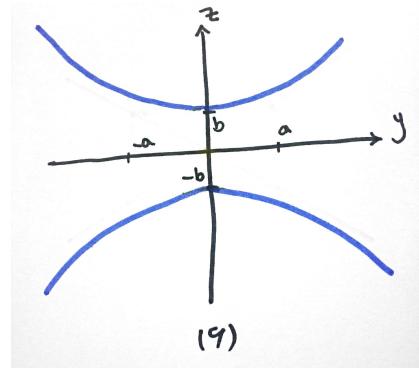
یادآوری ۱۳. معادله‌ی  $\frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$  در صفحه‌ی  $yz$  یک هذلولی به دست می‌دهد.



به طور مشابه، مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی

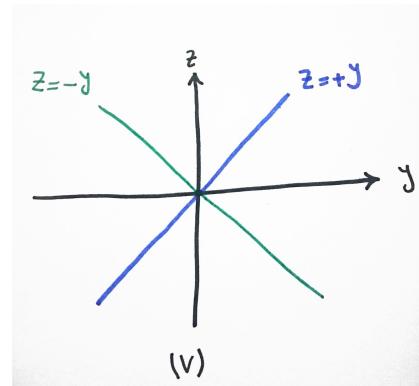
$$\frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

به صورت زیر است:

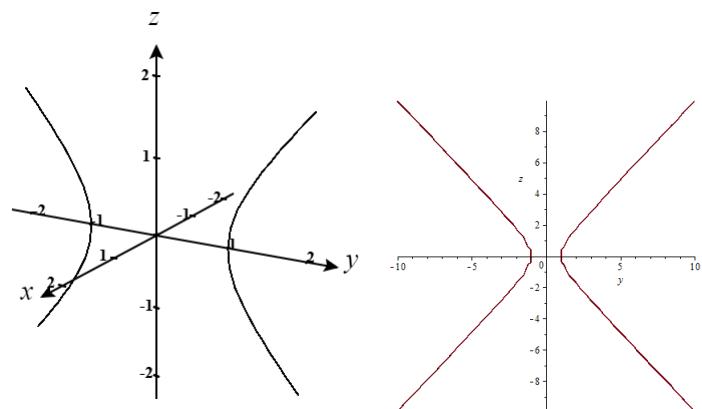


سوال ۱۴ (سوال یکی از دانشجویان). نقاط صادق در معادله  $y^2 - z^2 = 0$  چه شکلی تشکیل می‌دهند؟  
پاسخ:

$$y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow (y - z)(y + z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ y = -z \end{cases}$$

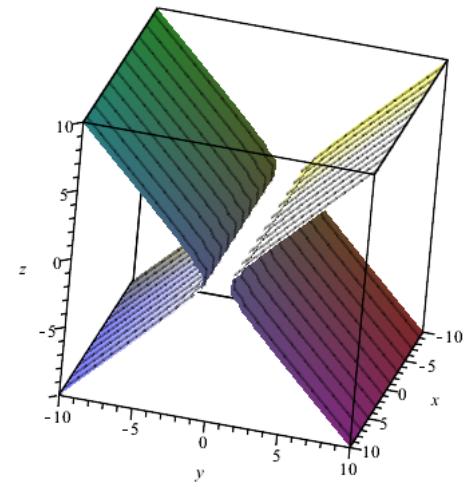


حال به حل مثال بالا می‌پردازیم. در صفحه‌ی  $x = 0$  شکل زیر ایجاد می‌شود که از معادله  $y^2 - z^2 = 1$  به دست آمده است.



در هر صفحه‌ی  $x = k$  نیز همان شکل زیر ایجاد می‌شود و از این رو معادله ذکر شده در مثال، منجر به استوانه‌ی زیر می‌شود:

□

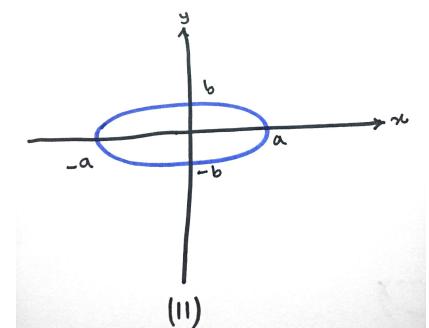


مثال ۱۵. استوانه‌ی  $x^2 + 4z^2 = 4$  را رسم کنید.

پاسخ. نخست روش رسم یک بیضی را یادآوری می‌کنیم.

یادآوری ۱۶. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را در فضای دو بعدی رسم کنید:

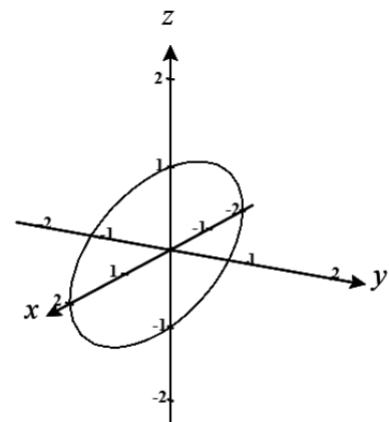
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



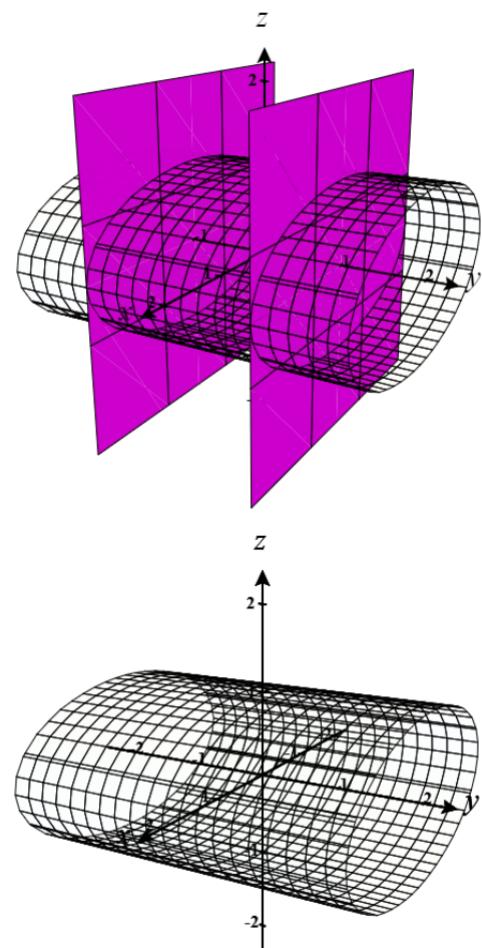
حال برای پاسخ به مثال ۱۵ نخست طرفین معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{x^2}{4} + z^2 = 1$$

در صفحه‌ی  $y = z$  شکل ایجاده شده به صورت زیر است:



مشابه مثالهای قبلی، استوانه‌ی مورد نظر ما به صورت زیر خواهد بود.



□

توجه ۱۷. تا کنون با نحوه‌ی رسم استوانه‌ها آشنا شده‌ایم. رسم رویه‌های سه بعدی در حالت کلی آسان نیست. در زیر چند رویه را برای نمونه رسم کرده‌ایم که آنها را در کلاس درس، با استفاده از نرم‌افزار میپل خواهیم کشید.

۱. معادله‌ی  $z = xy^3 - x^3$  که به «زین میمون» معروف است.

۲. معادله‌ی  $z = xy^3 - yx^3$  که به «زین سگ» معروف است.

۳. معادله‌ی  $z = x^3 - y^3$  که به «زین اسب» معروف است.

۴. معادله‌ی  $(x + y + z + 1)^3 = 0$

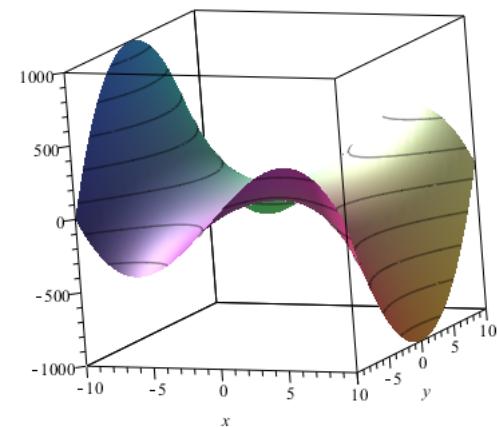
۵. معادله‌ی  $z = \sin(xy)$

۶. معادله‌ی  $z = \frac{xy}{1+x^3+y^3}$

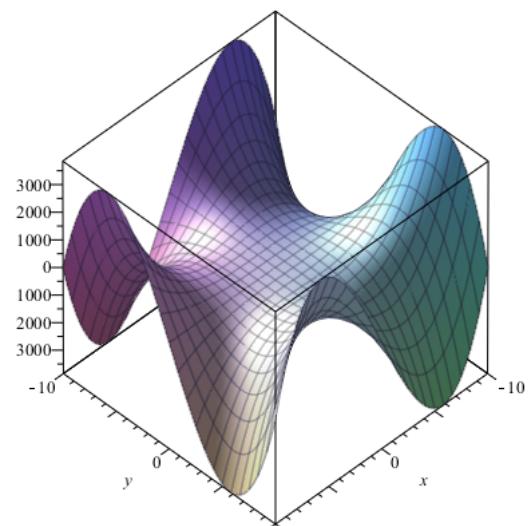
۷. معادله‌ی  $z = \frac{x-y}{1+x^3+y^3}$

۸. معادله‌ی  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ، از قضا خواهیم دید که رسم این معادله چندان دشوار نیست (دوران).

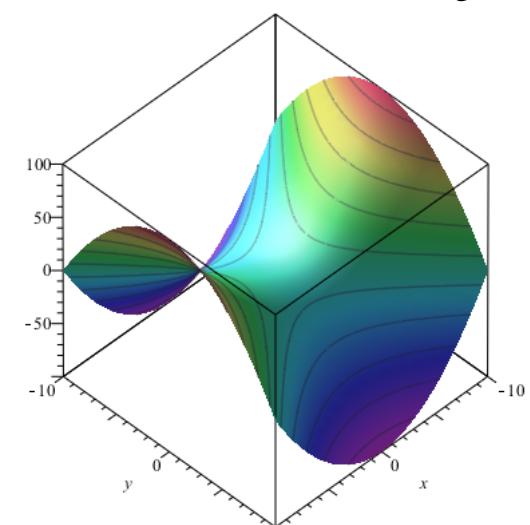
معادله‌ی ۱:



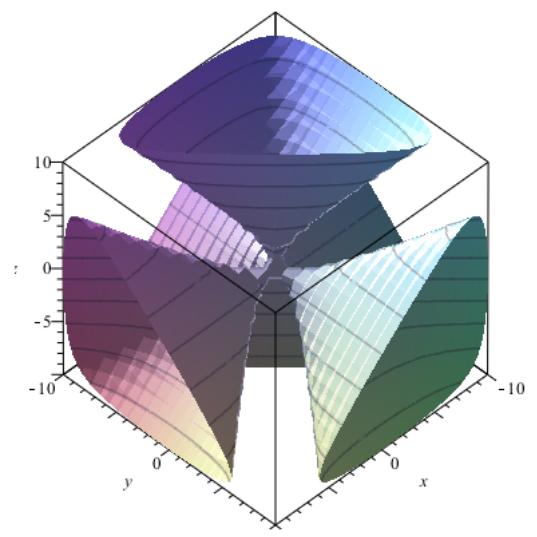
معادله‌ی ۲:



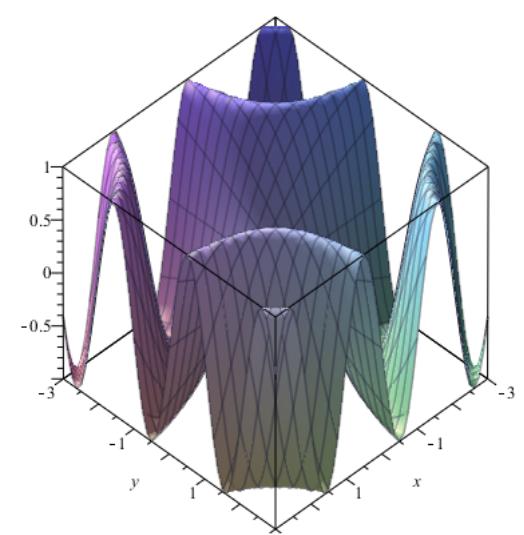
معادله‌ی ۳:



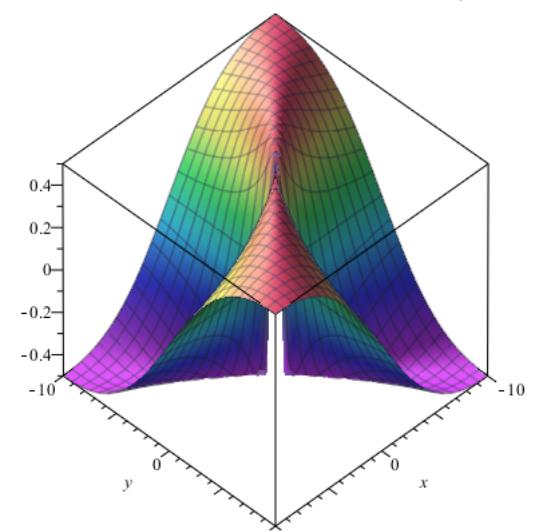
معادله‌ی ۴:



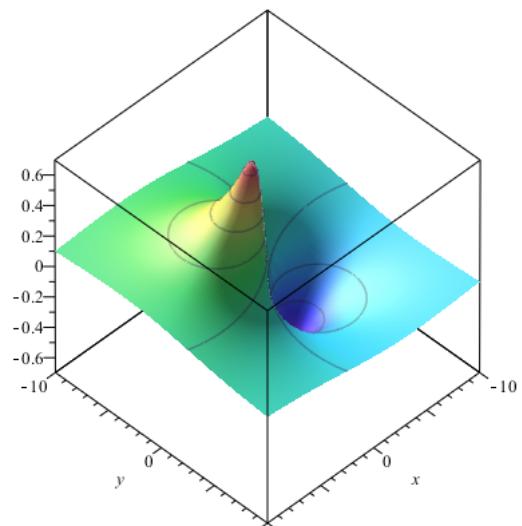
معادله‌ی ۵



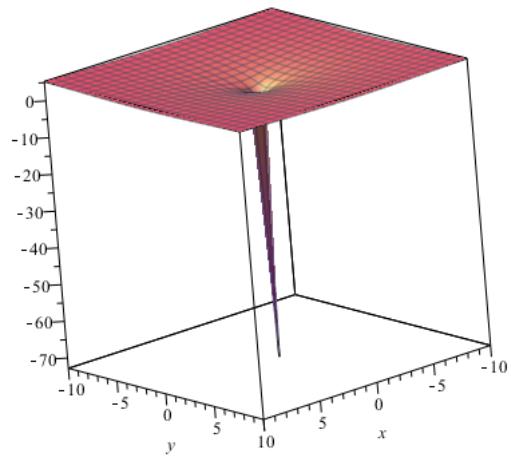
معادله‌ی ۶



معادله‌ی ۷:



معادله‌ی ۸:



در بخش آینده خواهیم کوشید تا مکان هندسی برخی معادلات ضمنی درجه‌ی دوم را رسم کنیم. توجه کنید که از کلمه‌ی ضمنی برای این استفاده کردہ‌ایم که در معادلات زیر مقدار  $z$  را بر حسب دو متغیر  $y, x$  به طور مستقیم نداریم. در واقع آنچه رسم می‌کنیم لزوماً یک تابع نیست.

## ۱۰.۲ رسم رویه‌های درجه‌ی دوم

منظور از یک رویه‌ی درجه‌ی دوم، رویه‌ای است که با معادله‌ای به صورت زیر ایجاد می‌شود:

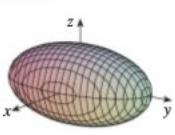
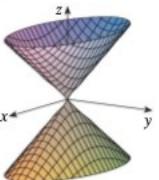
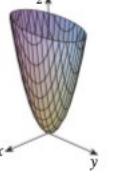
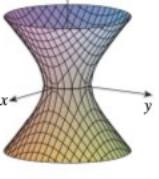
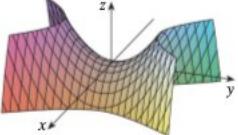
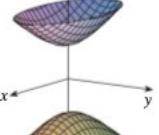
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

توجه ۱۸. جای حروف بزرگ انگلیسی در بالا عدد قرار می‌گیرد.

توجه ۱۹. عبارتی شامل  $xyz$  در بالا نداریم (و به همین علت، معادله را درجه‌ی دوم نامیده‌ایم).

توجه ۲۰. با استفاده از تبدیل‌های خطی دوران و انتقال می‌توان ضرایب  $xz, yz$  و  $xy$  را از بین برد.

توجه ۲۱. شکلی که از معادلهای بالا حاصل می‌شود به یکی از صورت‌های زیر است:

Surface	Equation	Surface	Equation
<b>Ellipsoid</b> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ All traces are ellipses. If $a = b = c$ , the ellipsoid is a sphere.	<b>Cone</b> 	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces in the planes $x = k$ and $y = k$ are hyperbolas if $k \neq 0$ but are pairs of lines if $k = 0$ .
<b>Elliptic Paraboloid</b> 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are parabolas. The variable raised to the first power indicates the axis of the paraboloid.	<b>Hyperboloid of One Sheet</b> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are hyperbolas. The axis of symmetry corresponds to the variable whose coefficient is negative.
<b>Hyperbolic Paraboloid</b> 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are hyperbolas. Vertical traces are parabolas. The case where $c < 0$ is illustrated.	<b>Hyperboloid of Two Sheets</b> 	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Horizontal traces in $z = k$ are ellipses if $k > c$ or $k < -c$ . Vertical traces are hyperbolas. The two minus signs indicate two sheets.

در زیر معادلات بالا را یکی یکی تحلیل می‌کنیم.

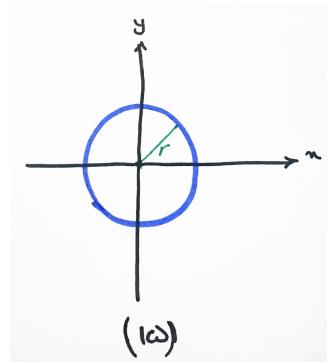
## ۲.۲ بیضی‌وار

یادآوری ۲۲. منظور از یک دایره در صفحه‌ی  $xy$  مجموعه‌ی نقاطی است که فاصله‌ی آنها تا مبدأ با هم برابر است.

$$\{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} = r\}$$

پس معادله‌ی یک دایره در صفحه‌ی  $xy$  به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



منظور از کُره مجموعه‌ی نقاطی است مانند  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  که فاصله‌ی آنها تا مبدأ با هم برابر است. (ثابت کنید که) فاصله‌ی نقطه‌ی  $(x, y, z)$  تا مبدأ برابر است با

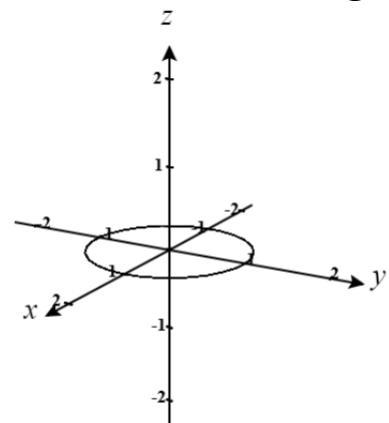
$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

پس معادله‌ی کلی یک گُره به مرکز مبدأ مختصات به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

مثال ۲۳. رویه‌ی حاصل از معادله‌ی  $1 = x^2 + y^2 + z^2$  را رسم کنید.

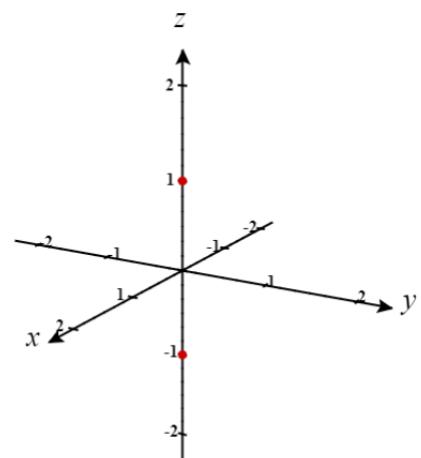
پاسخ. در صفحه‌ی  $z = 0$  شکل یک دایره با معادله‌ی  $1 = x^2 + y^2$  ایجاد می‌شود.



معادله‌ی دایره‌ی بالا عبارت است از  $z = 0, x^2 + y^2 = 1$ .

در صفحه‌های  $z = \pm 1$  تنها یک نقطه ایجاد می‌شود:

$$z = \pm 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

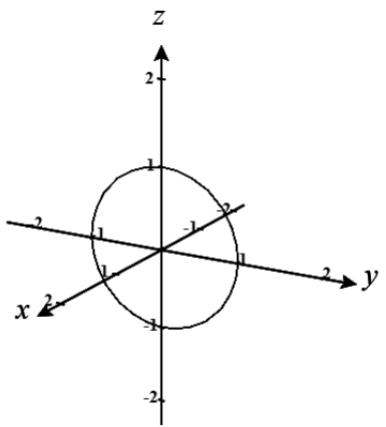


در صفحه‌های  $z = k > 1$  هیچ شکلی ایجاد نمی‌شود.

هیچ نقطه‌ای نداریم.  $z = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = -3$

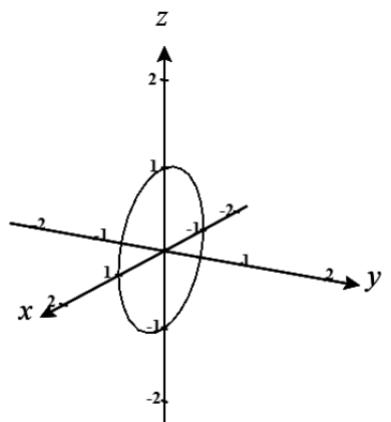
در صفحه‌ی  $x = 0$  نیز یک دایره ایجاد می‌شود:

$$x = 0 \Rightarrow y^2 + z^2 = 1$$

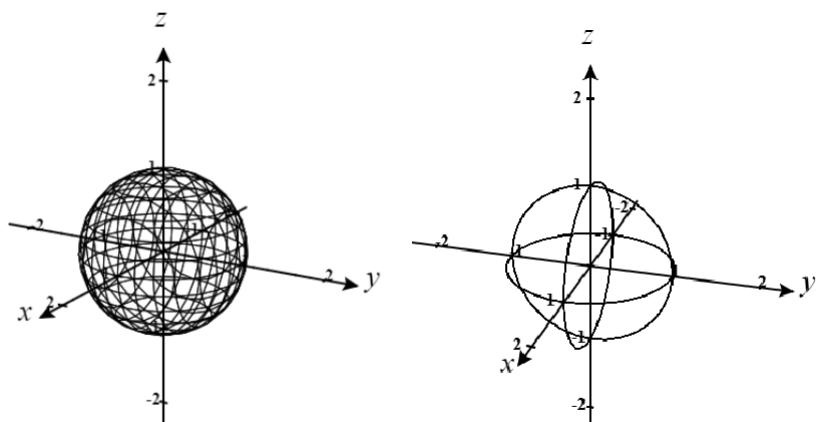


به همین ترتیب در صفحه  $y = 0$  نیز دایره‌ی زیر ایجاد می‌شود.

$$y = \bullet \Rightarrow x^2 + z^2 = 1$$



شکل کلی نیز به صورت زیر خواهد بود:



□

مثال ۲۴. شکل صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

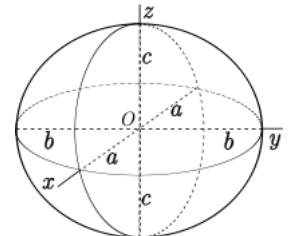
پاسخ.

$$z = \bullet \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$z = c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \bullet$$

$$x = \bullet \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$y = \bullet \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



شکل بالا بیضی وار نامیده می‌شود.<sup>۱</sup>

توجه ۲۵. اگر  $a = b = c$  شکل حاصل یک کره خواهد بود.

## ۳.۲ سهمی وار بیضوی

مثال ۲۶. شکل حاصل از معادله  $x^2 + y^2 + z = 0$  را رسم کنید.

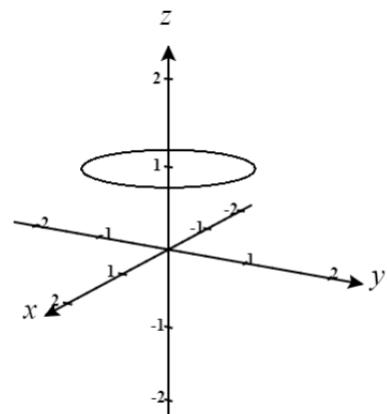
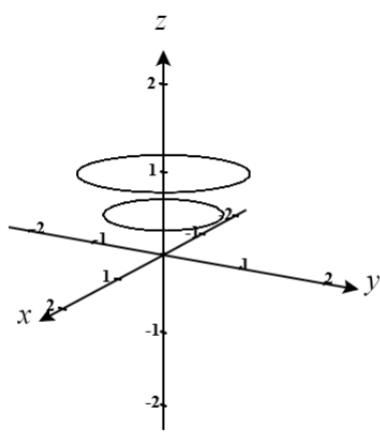
پاسخ.

$$z = \bullet \Rightarrow x^2 + y^2 = \bullet \Rightarrow (x, y) = \bullet.$$

شکلی ایجاد نمی‌شود.

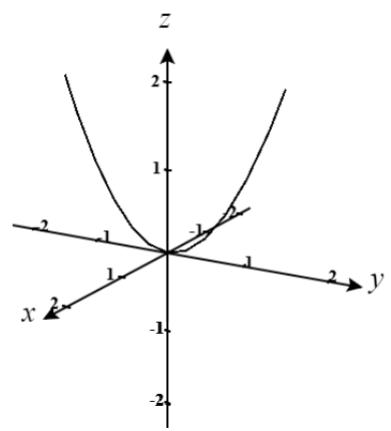
$$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{دایره}$$

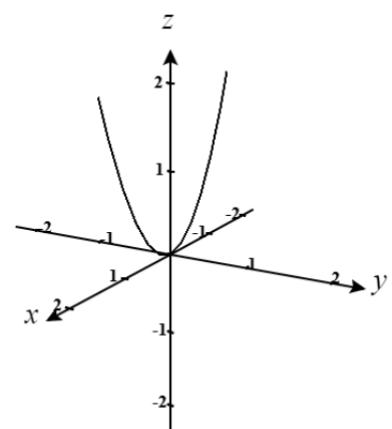


$$x = \bullet \Rightarrow z = y^2$$

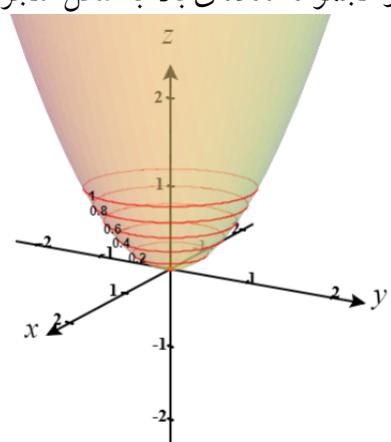
<sup>۱</sup>ellipsoid

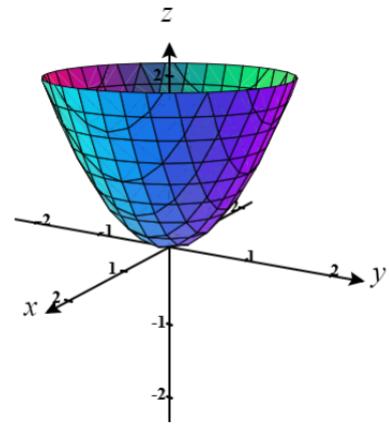


$$y = \cdot \Rightarrow z = x^2$$



و مجموعاً معادلهی بالا به شکل منجر می‌شود.





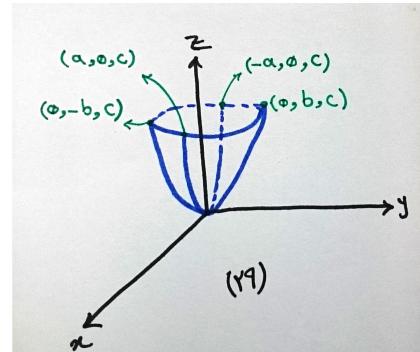
□

توجه ۲۷. در رسم اشکال از شما انتظار داریم که محل تلاقي شکل با محورها را دقیق مشخص کنید و مختصات آن را بنویسید.

مثال ۲۸. مکان هندسی نقاط صادق در معادله  $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  را رسم کنید. (فرض کردہ ایم کہ  $a > b > 0$  پاسخ.

$$z = \cdot \Rightarrow (x, y) = \cdot$$

$$x = \cdot \Rightarrow z = \frac{c}{b^2} y^2$$



□

شکل بالا را به دو صورت می‌توان مجسم کرد. به صورت بیضی‌هائی که بزرگتر و بزرگتر می‌شوند و توسط سهمی به هم وصل شده‌اند؛ یا توسط سهمی‌هائی که دارند بالاتر و بالاتر می‌روند و شکل ظرف را ایجاد می‌کنند. توجه کنید که در بالا تنها مقطعی از شکل را کشیده‌ایم، با این فرض که شکل تا نهایت به همین صورت ادامه می‌یابد.

توجه ۲۹. هر مایعی در هر نوع ظرفی، در اثر دوران حول مرکز به شکل یک سهمی‌وار بیضوی درمی‌آید. در تلسکوپها، برای صرفه‌جوئی در هزینه‌ها، با دوران جیوه، عدسی مورد نظر خود را تولید می‌کنند. برای دیدن تلسکوپهای اینچنین و مایعهای تحت دوران، به پیوندهای زیر مراجعه کنید (هر چند متأسفانه یوتیوب فیلتر است!)

<https://www.youtube.com/watch?v=Zip9ft1PgV0>

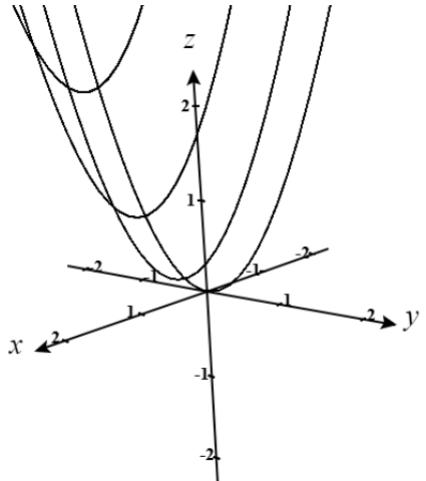
<https://www.youtube.com/watch?v=oY4zeQA1hD0>

<https://www.youtube.com/watch?v=Q5Cr9P-Q88Y>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Liquid\\_mirror\\_telescope](https://en.wikipedia.org/wiki/Liquid_mirror_telescope)

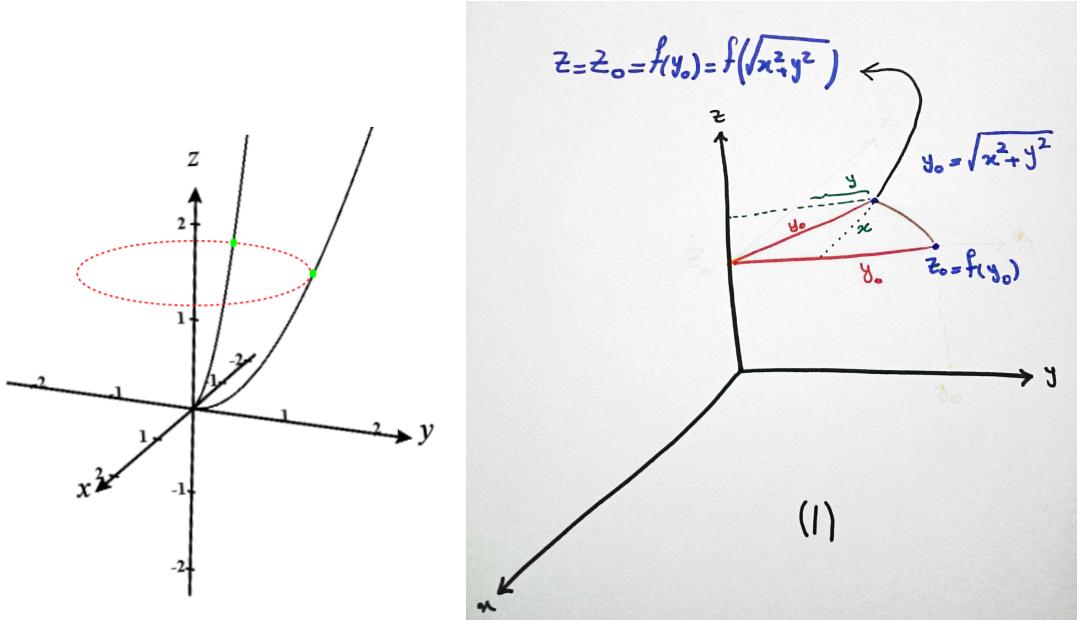
### ۳ نیم جلسه‌ی سوم، چهارشنبه

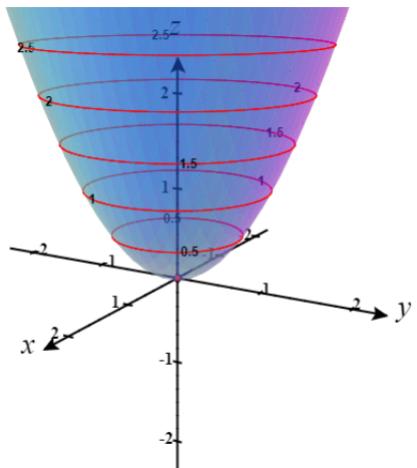
در پایان جلسه‌ی قبل گفتیم که رویه‌ی به معادله‌ی  $x^2 + y^2 = z$  را می‌توان مجموعه‌ی دوایری تصور کرد که شعاعشان با پیش رفتن در سوی محور  $z$  بیشتر و بیشتر می‌شود. این رویه را می‌توان همچنین مجموعه‌ی سه‌می‌هائی نیز تصور کرد که هر چه بالاتر می‌روند باریکتر می‌شوند:



در زیر روش دیگری نیز برای نگاه کردن به رویه‌ی مورد نظر آورده‌ایم.

**سوال ۳۰.** معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی  $z = f(y)$  حول محور  $z$  را بنویسید.





با توجه به آشکال بالا (و توضیحاتی که در کلاس درس داده‌ایم) معادله‌ی رویه‌ی مورد نظر عبارت است از  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$

به طور کلی معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی به معادله‌ی ضمنی  $f(z, y) = 0$  حول محور  $z$  عبارت است از

$$f(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

مثال ۳۱. رویه‌ی  $z = x^2 + y^2$  از دوران منحنی  $z = x^2 + y^2$  (یا  $z = x^2 + y^2$ ) ایجاد می‌شود؛ زیرا می‌توان نوشت:

$$z = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

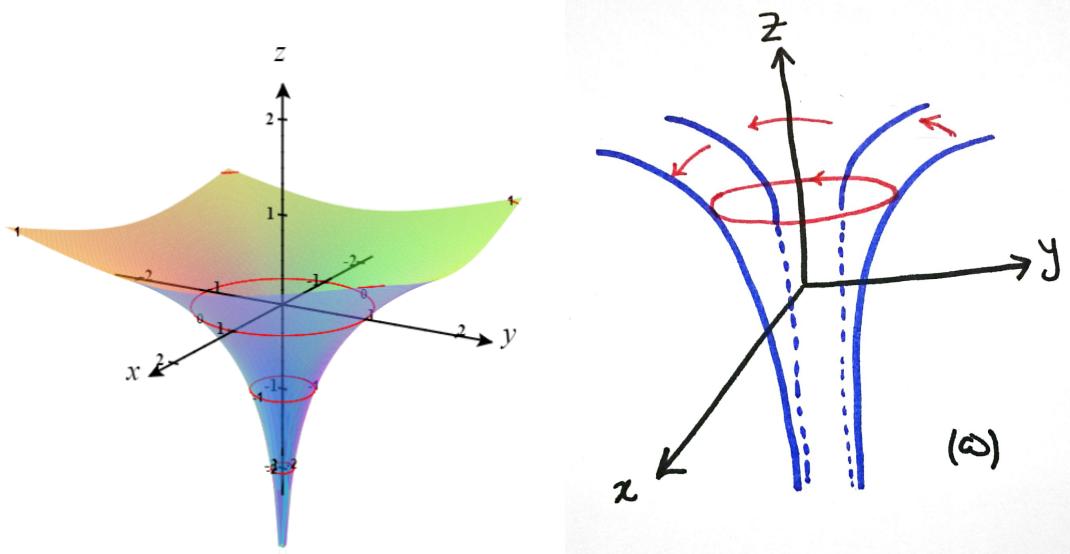
مثال ۳۲. رویه‌های زیر را رسم کنید.

$$z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad ۱$$

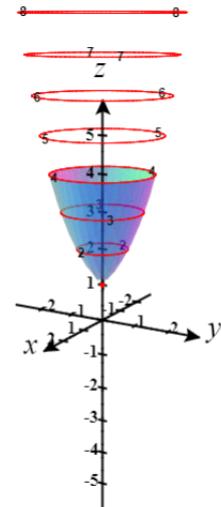
قرار دهید:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

بنا به آنچه گفته شد، رویه‌ی مورد نظر از دوران منحنی  $z = \ln(y)$  حول محور  $z$  ایجاد می‌شود.



. ۲.  $z = e^y$  این رویه نیز از دوران منحنی  $z = e^y$  (برای  $y > 0$ ) حول محور  $z$  ایجاد می‌شود.



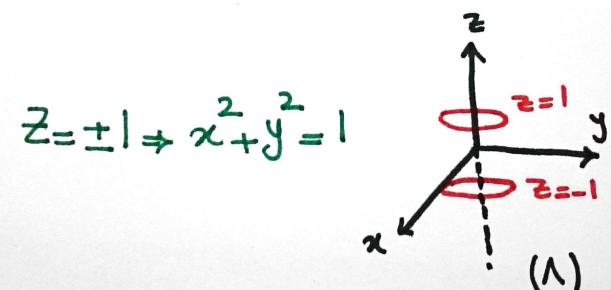
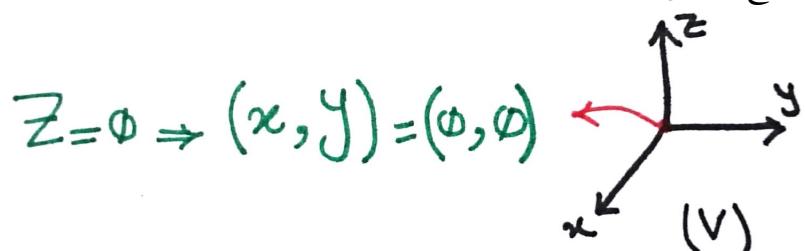
توجه ۳۳. از دوران منحنی  $f(t_1, \pm\sqrt{t_1^2 + t_2^2}) = f(t_1, t_2)$  حول محور  $t_1$  به رویه‌ی  $f(t_1, t_2) = 0$  می‌رسیم؛ در این عبارت، برای  $i \neq j$  داریم  $t_i \neq t_j \in \{x, y, z\}$ . این جمله را تفسیر کنید!

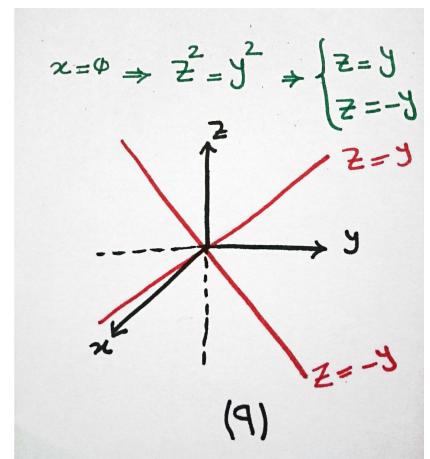
### ۱.۳ مخروطها

مثال ۳۴. رویه به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

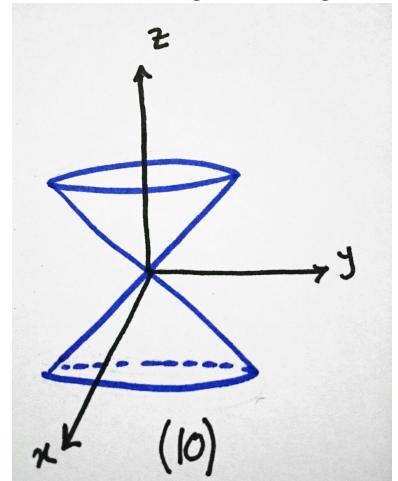
$$z^2 = x^2 + y^2$$

پاسخ. روش اول.

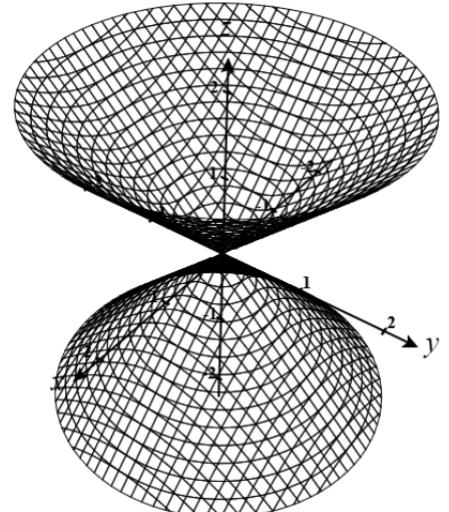




حاصل تلفیق شکل‌های بالا به صورت زیر است:



رویه‌ی مورد نظر را با نرم‌افزارهای رایانه‌ای به صورت زیر کشیده‌ایم:



روش دوم. معادله‌ی مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت:  $z = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$  بنابراین شکل مورد نظر از دوران منحنی  $y^2 + z^2 = 1$  حول محور  $z$  ایجاد می‌شود.  $\square$

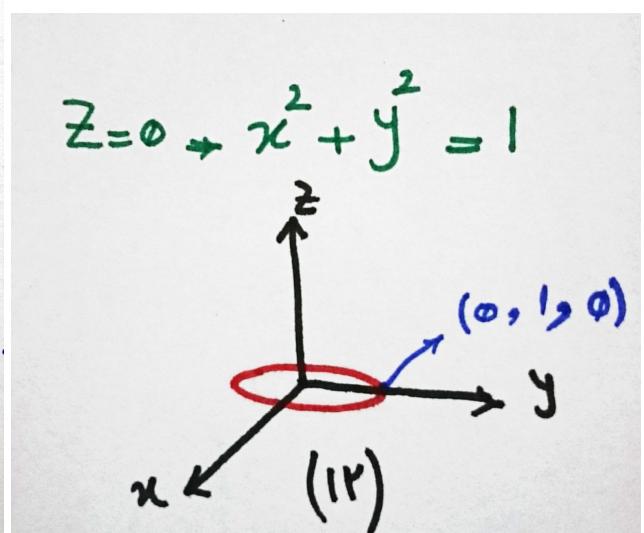
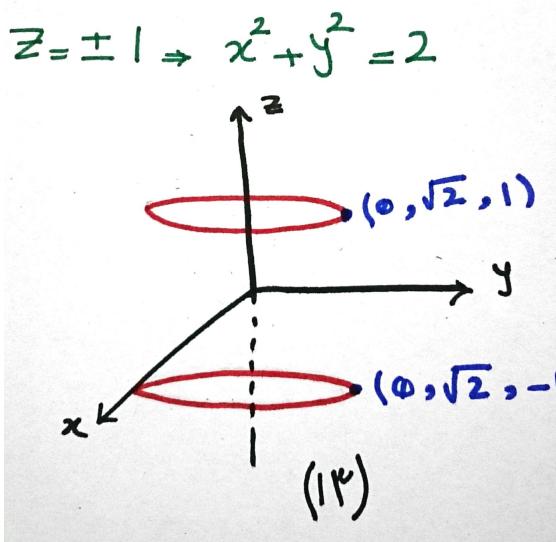
معادله‌ی کلی یک مخروط به صورت زیر است:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

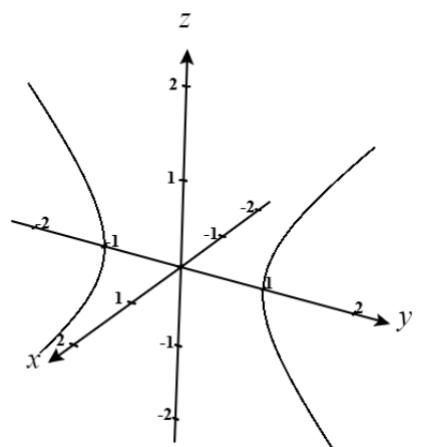
### ۲.۳ هذلولی واریکپارچه

مثال ۳۵. رویه‌ی به معادله  $z^2 = x^2 + y^2 + 1$  را رسم کنید.

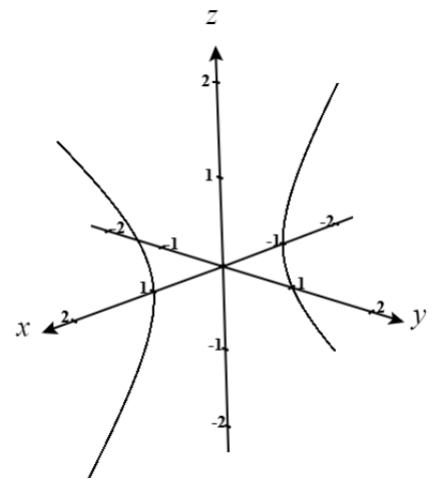
پاسخ.



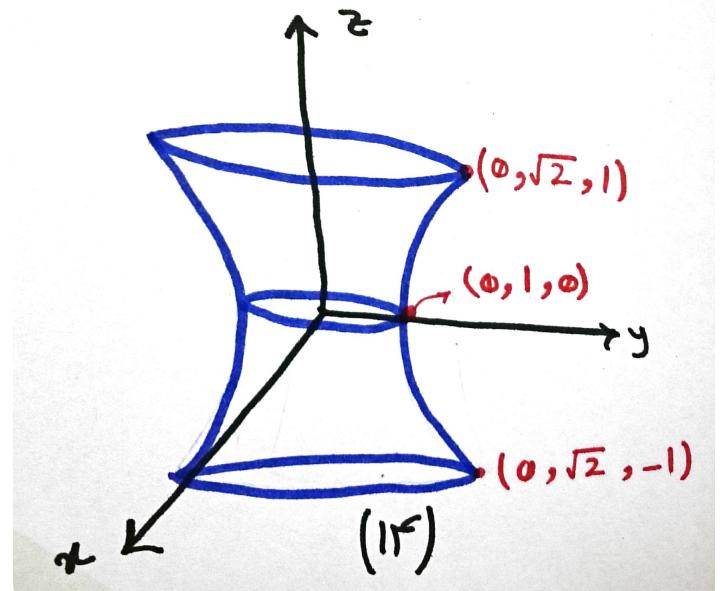
$$x = \bullet \Rightarrow y^2 - z^2 = 1$$



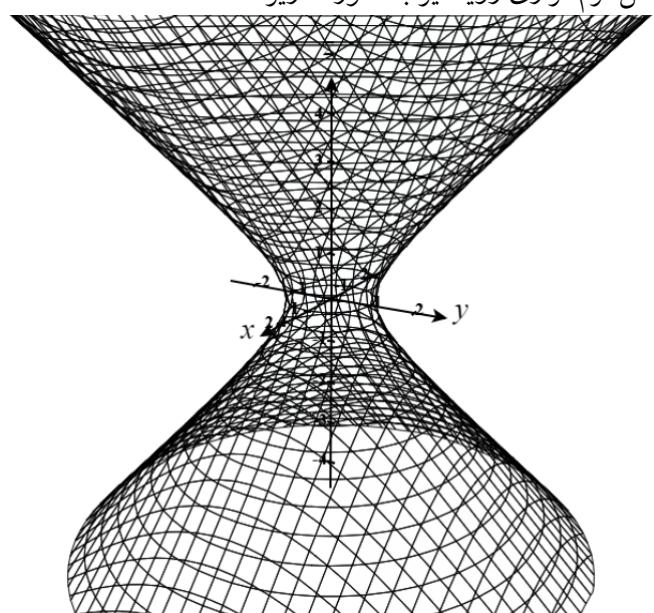
$$y = \bullet \Rightarrow x^2 - z^2 = 1$$



نتیجه‌ی تلفیق چهار شکل بالا به صورت زیر است:



شکل نرم‌افزاری رویه نیز به صورت زیر است:



□

تمرین ۱. شکل بالا را با استفاده از دوران رسم کنید.

پاسخ.

$$z^2 + 1 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$$

پس رویه‌ی مورد نظر از دوران منحنی به معادله‌ی  $z^2 + 1 = y^2$  حاصل می‌شود؛ به بیان دیگر از دوران یک هذلولی. به شکل حاصل هذلولوی یکپارچه<sup>۲</sup> می‌گویند.

□ معادله‌ی کلی هذلولوی یکپارچه به صورت زیر است:

$$\frac{z^2}{c^2} + 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

توجه ۳۶. (سوال یکی از دانشجویان) برای رسم معادله‌ی  $y^2 + z^2 = x^2 + 2$  طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، تا به معادله‌ی استاندارد بالا برسیم.

$$\frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} + 1 = \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}$$

---

<sup>۱</sup>Hyperboloid of one sheet

## ۴ جلسه‌ی چهارم، شنبه

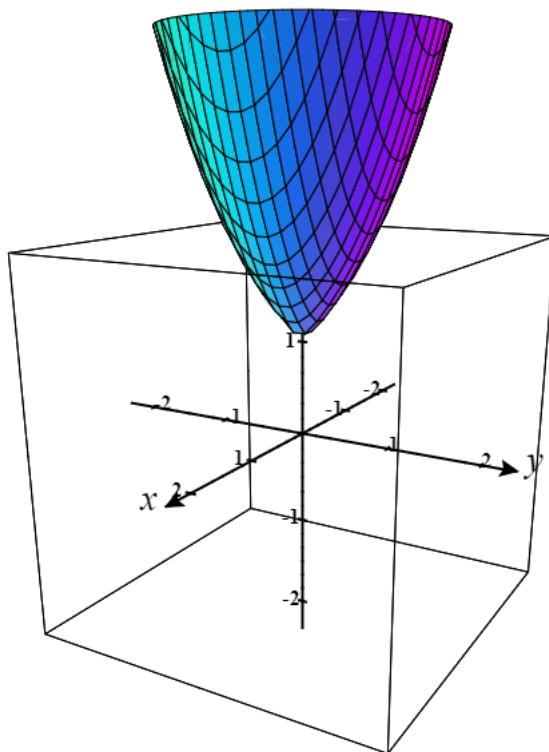
نخست مطلبی از جلسه‌ی قبل را یادآوری می‌کنیم:

توجه ۳۷. رویه‌ی  $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$  را رسم کنید.

بنا به آنچه ثابت کردہ‌ایم رویه‌ی بالا از دوران منحنی  $z = e^y$  حول محور  $z$  بدست می‌آید. به این نکته نیز باید توجه کرد که بنا به ضابطه‌ی تابع، باید  $y > 0$  در نظر گرفته شود.

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(y)$$

باید منحنی  $z = e^y$  برای  $y > 0$  را حول محور  $z$  دوران دهیم:



## ۱.۴ هذلولی وار دوپارچه

مثال ۳۸. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$$

پاسخ.

توجه ۳۹. شکل را با فرض

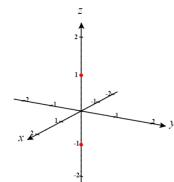
$$a = b = c = 1$$

رسم می‌کنیم؛ به بیان دیگر معادله‌ی زیر را رسم می‌کنیم.

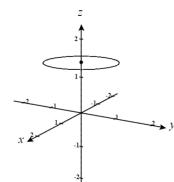
$$x^2 + y^2 = z^2 - 1$$

در فاصله‌ی  $(-1, 1)$  هیچ شکلی ایجاد نمی‌شود.

در  $z = \pm 1$  تنها نقطه‌ی  $(x, y) = (0, 0)$  را داریم.

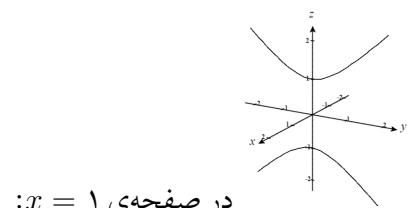


برای  $z = k > 1$  معادله‌ی یک دایره را داریم:



برای  $z = k < -1$  نیز دایره داریم. در صفحه‌ی  $x = 0$  داریم:

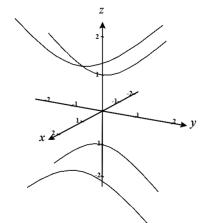
$$z^2 - y^2 = 1$$



در صفحه‌ی  $x = 1$

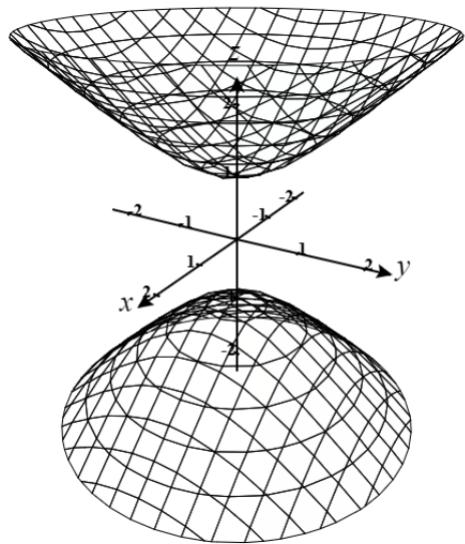
$$x = 1 \Rightarrow z^2 - y^2 = 2 \Rightarrow \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

در زیر تصاویر ایجاد شده در صفحات  $\frac{1}{2}, x = 1, x = \frac{1}{2}$  را رسم کردہ‌ایم:

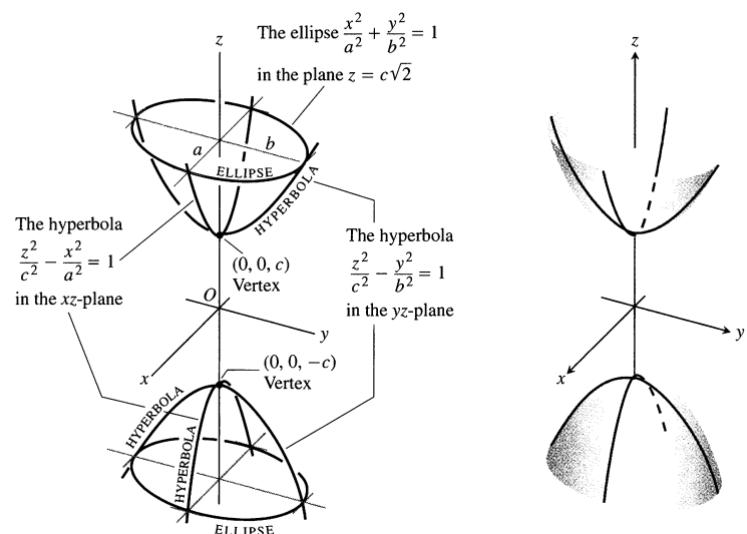


تحلیل شکل بالا برای مقادیر مختلف  $u$  را به عهده‌ی شما می‌گذاریم.

شکل کلی به صورت زیر است:



در زیر شکل را برای مقادیر دلخواه  $a, b, c$  کشیده ایم:



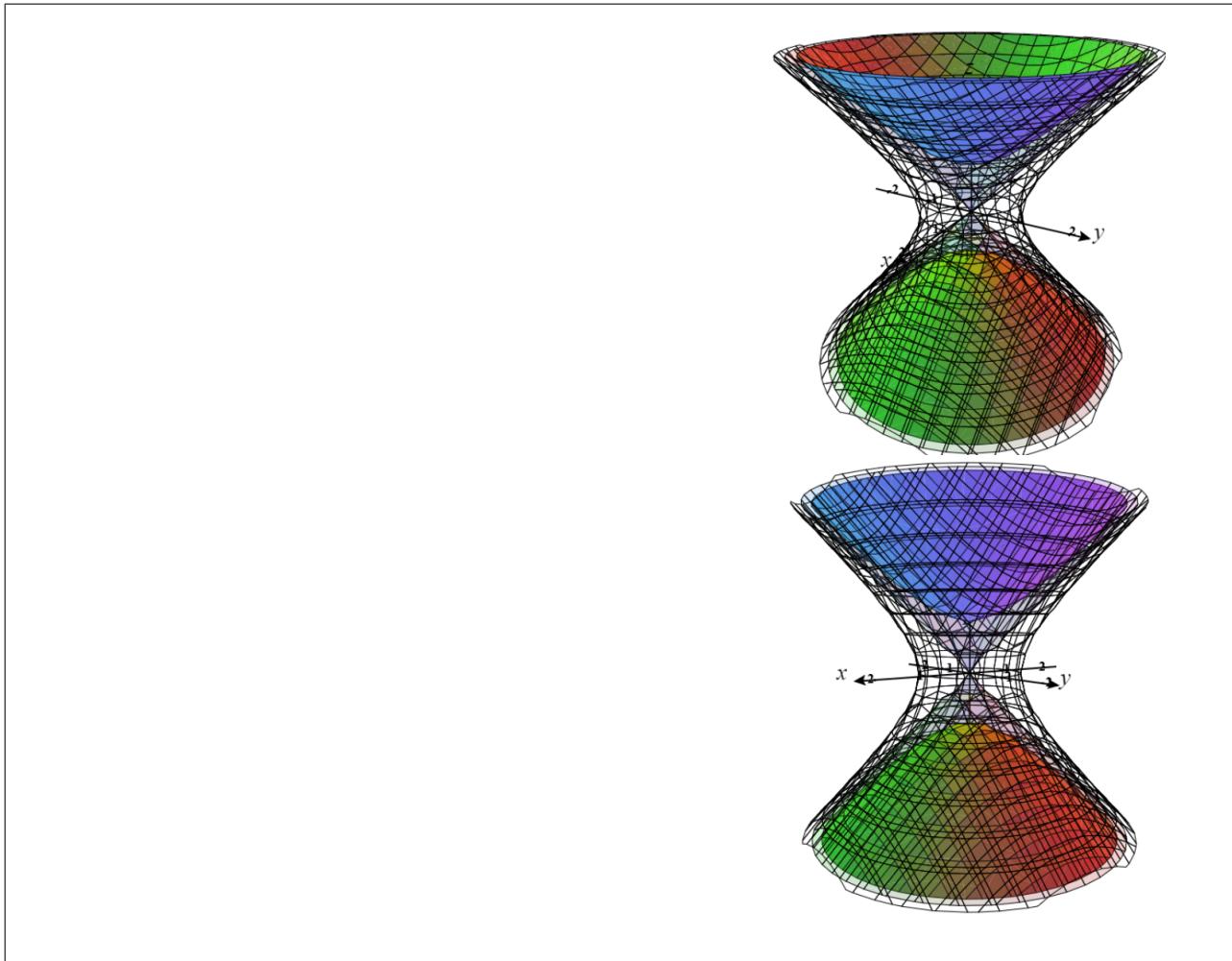
به شکل بدست آمده یک هذلولوی وار دو پارچه<sup>۳</sup> گفته می‌شود. این شکل با حرکت هذلولی‌های موازی صفحه‌ی  $xz$  و  $\square$  حرکت هذلولی‌های موازی محور  $zy$  ایجاد شده است.

#### جمعبندی ۱. رسم سه معادله‌ی

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 + 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 - 1 \end{cases}$$

در یک دستگاه مختصات به صورت همزمان به صورت زیر است:

<sup>۳</sup>hyperboloid of two sheets



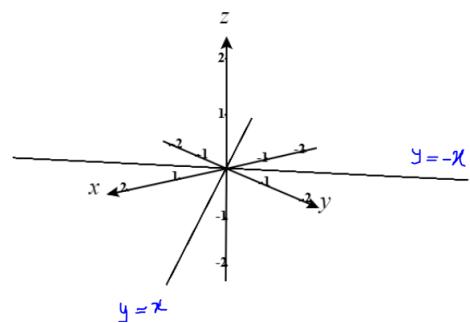
## ۲۰.۴ سهمیوار هذلولوی

مثال ۴۰. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$z = y^2 - x^2$$

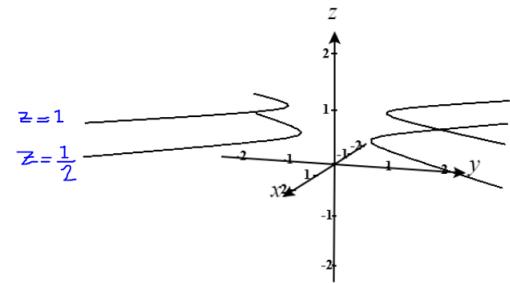
پاسخ.

$$z = \bullet \Rightarrow y^2 - x^2 = \bullet \Rightarrow (y-x)(y+x) = \bullet \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$



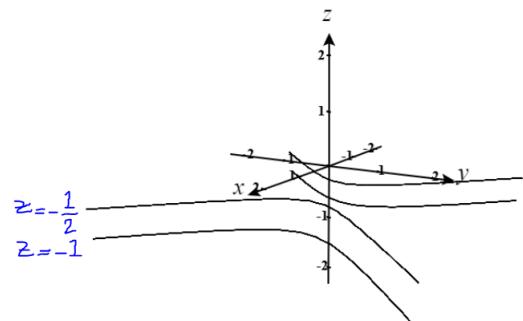
$$z = 1 \Rightarrow y^* - x^* = 1$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y^*}{2} - \frac{x^*}{2} = 1$$

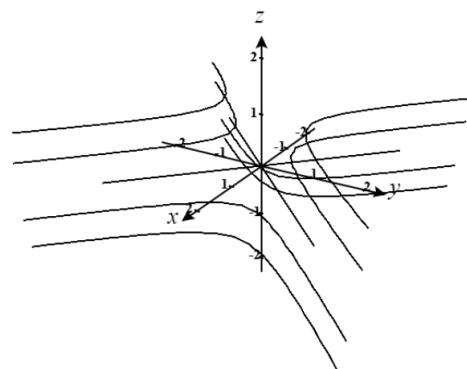


$$z = -1 \Rightarrow x^* - y^* = 1$$

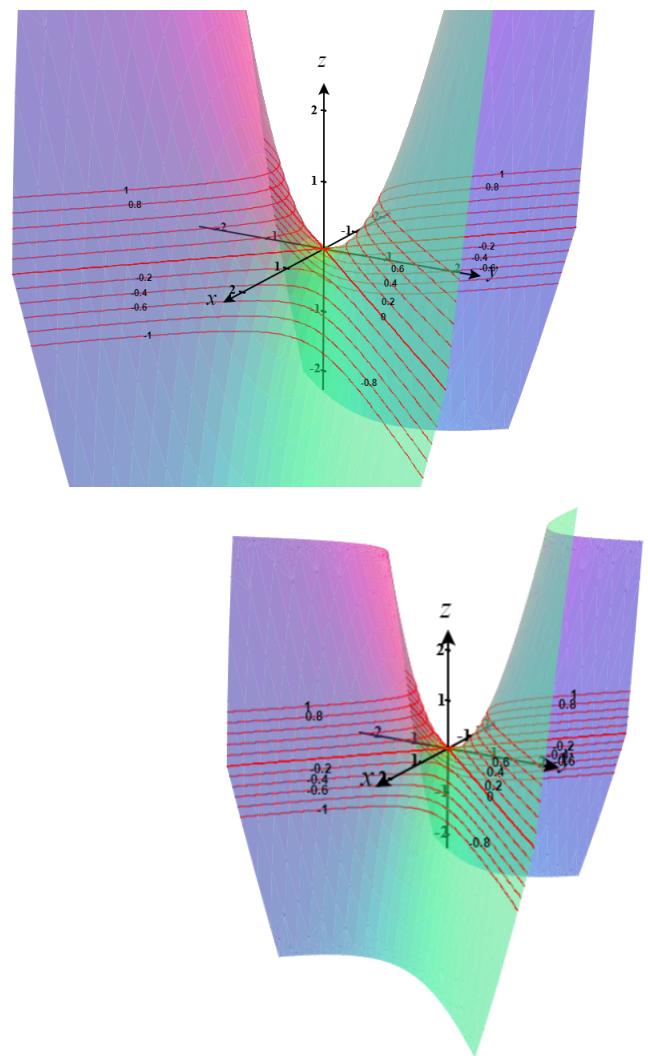
$$z = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^*}{2} - \frac{y^*}{2} = 1$$



تلفیق سه شکل بالا به صورت زیر است:



شکل کلی به صورت زیر است:

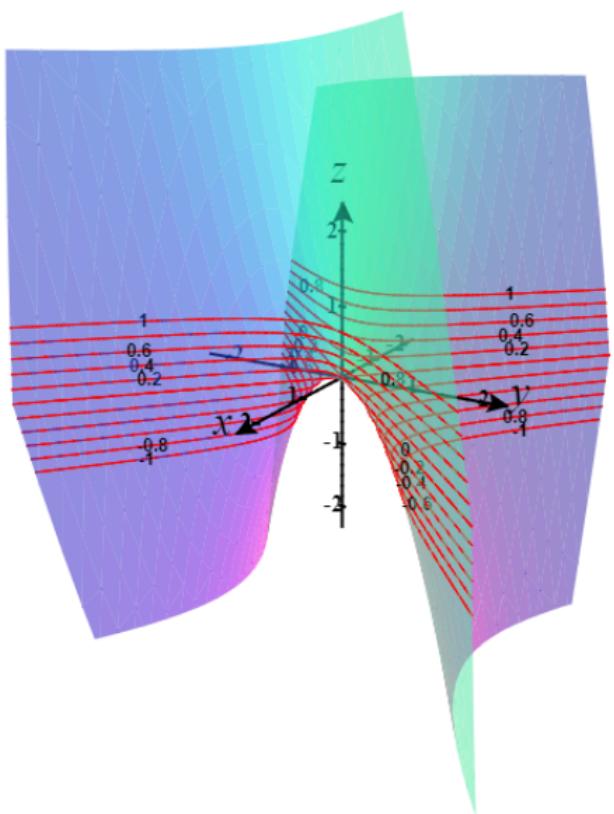


به شکل حاصل سهمیوار هذلولوی<sup>۴</sup> گفته می‌شود. این نکته جالب‌توجه است که در شکل بالا، به ازای مقادیر  $z = k > 0$  یک سری هذلولی موازی صفحه‌ی  $xy$  داریم که به سمت محور  $y$  باز می‌شوند. این هذلولی‌ها با کم شدن مقدار  $k$  تغییر می‌کنند تا این که در  $z = k = 0$  دو خط متقطع داریم. پس از آن در  $z = k < 0$  هذلولی‌هائی موازی صفحه‌ی  $xy$  داریم که به سمت محور  $x$  باز می‌شوند.

توجه ۴۱. نمودار معادله‌ی  $z = x^2 - y^2$  به شکل زیر است:

---

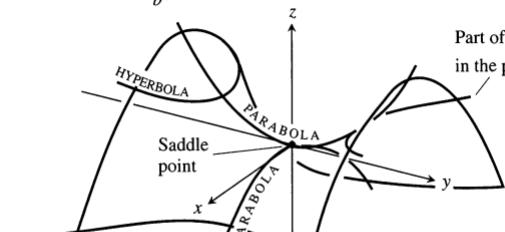
<sup>۴</sup>hyperbolic paraboloid



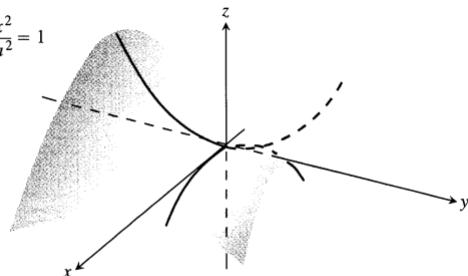
معادله‌ی کلی سهمی‌وار هذلولوی به شکل زیر است:

$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad c > 0$$

The parabola  $z = \frac{c}{b^2} y^2$  in the  $yz$ -plane



Part of the hyperbola  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  in the plane  $z = c$



The parabola  $z = -\frac{c}{a^2} x^2$  in the  $xz$ -plane

Part of the hyperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  in the plane  $z = -c$

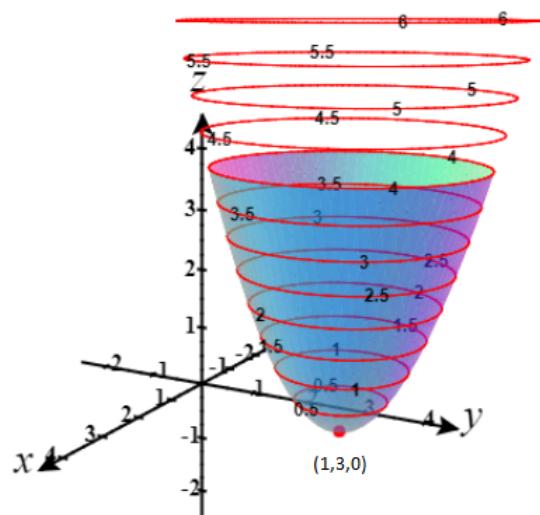
برای حل تمرین درباره‌ی این بخش درس، به صفحه‌ی ۸۸۰ (بخش ۱۲-۶) کتاب استوارت مراجعه کنید. پیش از این که از این بخش خارج شویم چند تمرین با هم حل می‌کنیم و چند تمرین حل نشده نیز برای شما باقی می‌گذاریم.

### ۳.۴ مثالها و تمرینها

مثال ۴۲. معادله‌ی  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - z + 10 = 0$  را به شکل استاندارد در آورده رویه را رسم کنید.

پاسخ.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = z$$



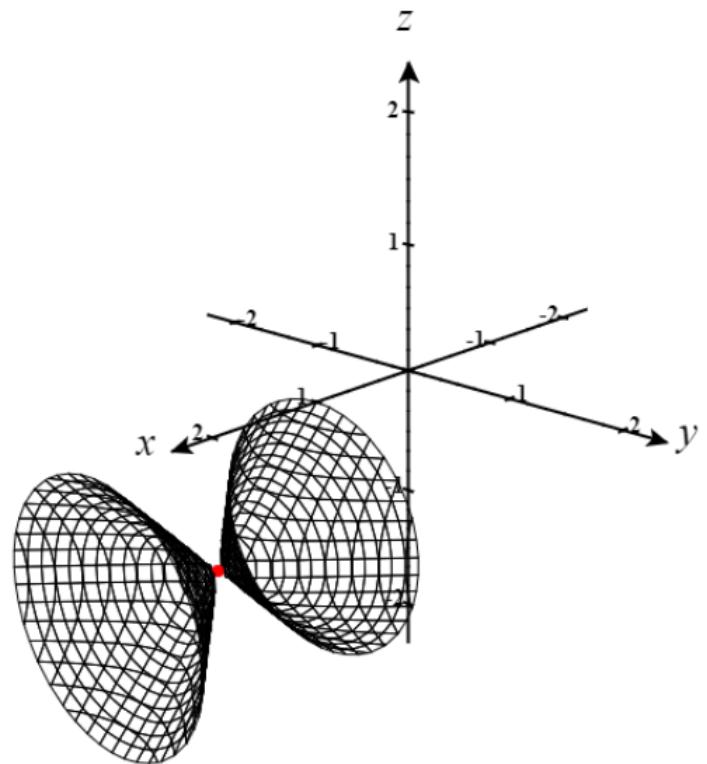
برای رسم رویه‌ی بالا، کافی است رویه‌ی  $x^2 + y^2 - z^2 - 4x - 2z + 3 = 0$  را در راستای بردار  $(1, 2, 0)$  انتقال دهیم. شکل حاصل یک سه‌می‌وار است.  $\square$

مثال ۴۳. معادله‌ی  $x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 2z + 3 = 0$  را به شکل استاندارد در آورده رویه را رسم کنید و نام رویه را ذکر کنید.

پاسخ.

$$(x - 2)^2 - 4 + 3 = y^2 + (z + 1)^2 - 1 \Rightarrow (x - 2)^2 = y^2 + (z + 1)^2 + 1$$

معادله‌ی بالا، معادله‌ی یک مخروط موازی محور  $x$  هاست. برای رسم آن، مخروط  $y^2 + z^2 = 1$  را در راستای بردار  $(0, 0, 1)$  انتقال می‌دهیم.



□

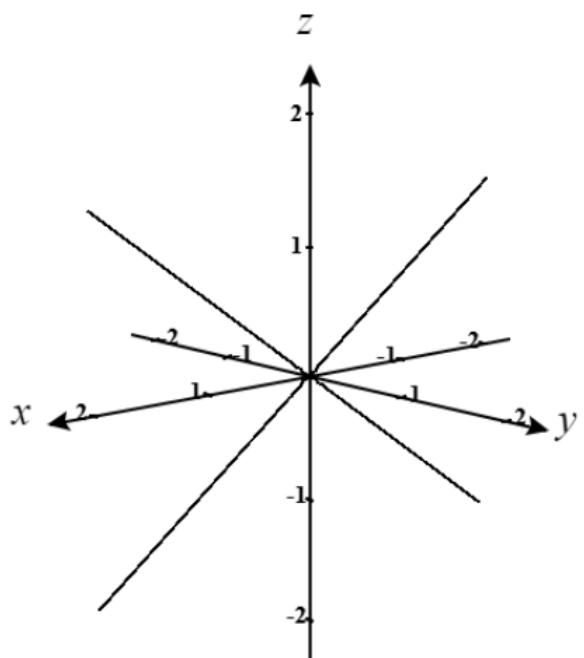
مثال ۴۴. مکان هندسی نقاط صادق در معادله  $x^2 + 2y - 2z^2 = 0$  را رسم کنید و نام رویه را بنویسید.

پاسخ.

$$x^2 - 2z^2 = -2y \Rightarrow y = z^2 - \frac{x^2}{2}$$

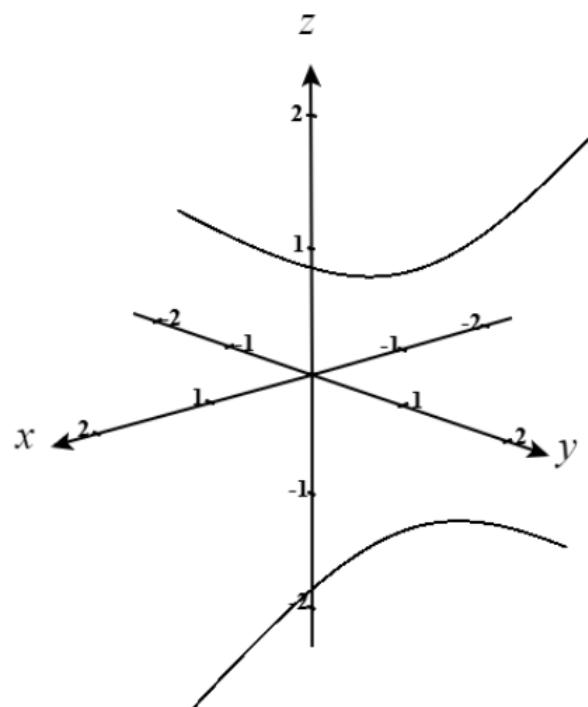
معادله بالا، معادله یک سهمی‌وار هذلولوی است. برای رسم راحتتر به نکات زیر توجه می‌کنیم: در صفحه‌ی  $y = 0$  داریم:

$$2z^2 = x^2 \Rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

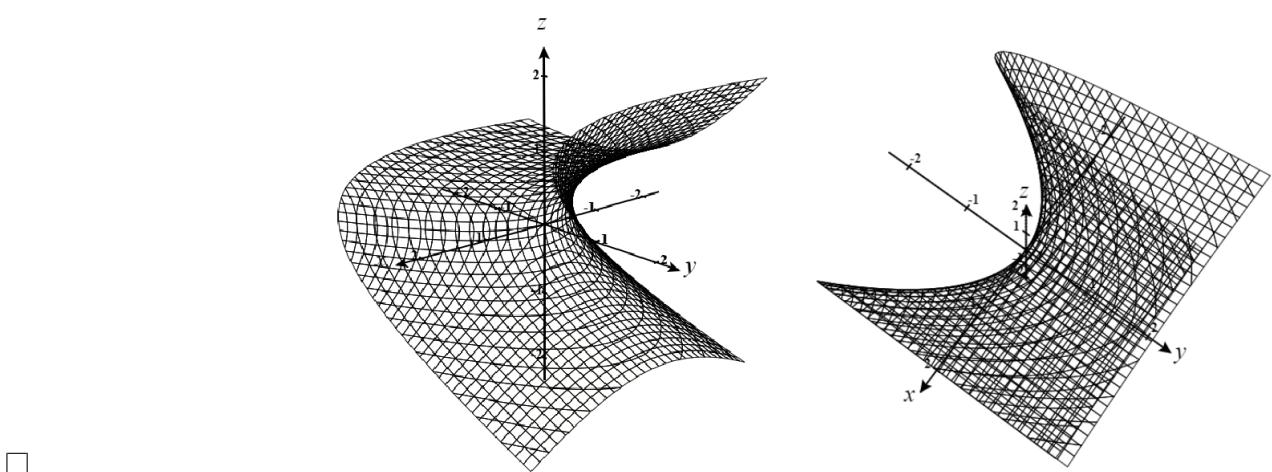


و در صفحه‌ی  $y = 1$  یک هذلولوی داریم:

$$z^2 - \frac{x^2}{4} = 1$$



شکل کلی نیز به صورت زیر است:



□

تمرین ۲. رویه‌های زیر را رسم کنید و نام آنها را ذکر کنید. نقاط تقاطع شکل با محورها را معین کنید.

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{9}z^2 \quad .1$$

$$x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 2z + 3 = 0 \quad .2$$

$$x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0 \quad .3$$

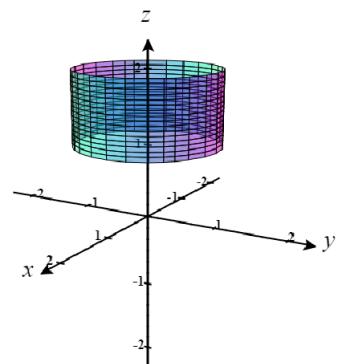
$$4x^2 - y + 2z^2 = 0 \quad .4$$

$$y^2 = x^2 + 4z^2 + 4 \quad .5$$

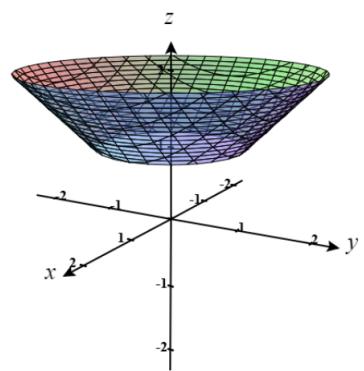
مثال ۴۵. معادله‌ی حاصل از دوران منحنی  $y = \sqrt{x}$  حول محور  $x$  را بیابید.

مثال ۴۶. ناحیه‌ی محاط شده بین رویه‌های  $x^2 + y^2 = 1$  و  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  را برای  $2 \leq z \leq 1$  را رسم کنید.

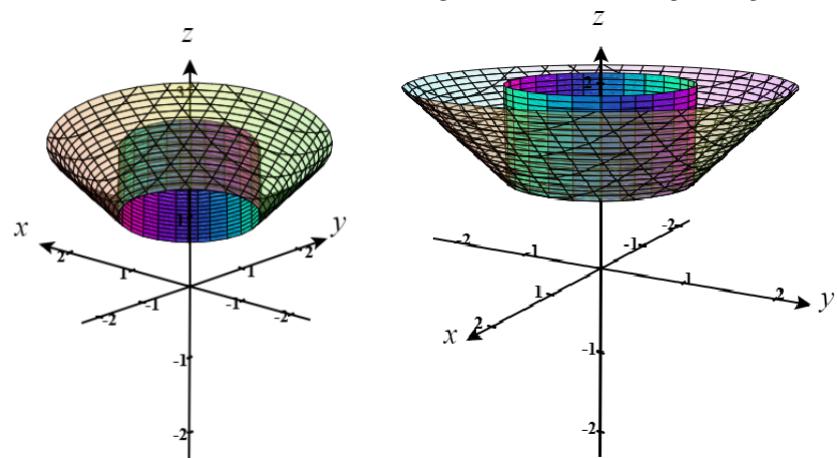
پاسخ. شکل معادله‌ی  $1 = x^2 + y^2$  در  $2 \leq z \leq 1$  به صورت زیر است:



شکل معادله‌ی  $z = x^2 + y^2$  در  $2 \leq z \leq 1$  به صورت زیر است:



شکل حاصل از تلفیق این دو شکل به صورت زیر است:

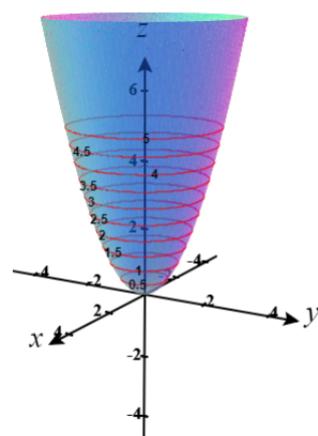


هاشور زدن ناحیه‌ی مورد نظر، به عهده‌ی شما!

تمرین ۳. یک معادله‌ی دلخواه از درجه‌ی دوم بنویسید و رویه‌ای را که آن معادله‌ی مشخص می‌کند رسم کنید.

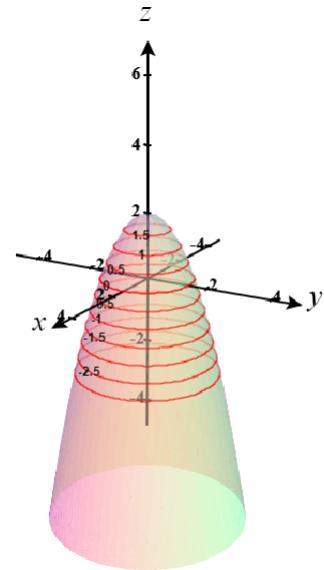
مثال ۴۷. ناحیه‌ی محاط شده توسط سه‌می‌وارهای  $z = x^2 + y^2$  و  $z = 2 - x^2 - y^2$  را رسم کنید.

پاسخ. معادله‌ی  $z = x^2 + y^2$  به شکل زیر است:

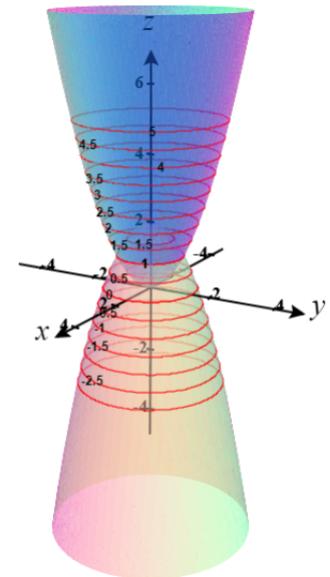


و معادله‌ی  $z = 2 - x^2 - y^2$  نیز به شکل زیر است:

$$x^2 + y^2 = 2 - z$$



دو شکل روی یک دستگاه مختصات به صورت زیر قرار می‌گیرند:



□

تعیین ناحیه‌ی اشتراک، به عهده‌ی شما!

تمرین ۴. معادله‌ی شکل حاصل از دوران منحنی  $z = 2 - x^2 - y^2$  حول محور  $z$  را بنویسید.

تمرین ۵. مکان هندسی نقاطی را بباید که فاصله‌ی آنها از صفحه‌ی  $x = 1$  برابر است با فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی  $(-1, 0, 0)$ . نام رویه‌ی مورد نظر را ذکر کنید.

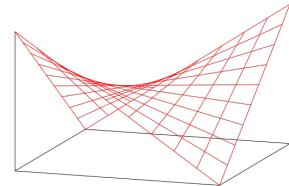
تمرین ۶. معادله‌ی رویه‌ای را بباید که از تمام نقاطی تشکیل شده است که فاصله‌ی آنها تا محور  $x$  دو برابر فاصله‌شان تا صفحه‌ی  $yz$  است. نام رویه‌ی مورد نظر را ذکر کنید.

تمرین ۷. فرض کنید که نقطه‌ی  $(a, b, c)$  روی رویه‌ی  $z = x^2 + y^2$  واقع باشد. نشان دهید که دو خط زیر (که از نقطه‌ی

یادشده می‌گذرند) روی این رویه واقعند:

$$(a, b, c) + t(1, 1, 2(b-a)) \quad (a, b, c) + t(1, -1, -2(b+a))$$

در واقع رویه مورد نظر را می‌توان با خطکش رسم کرد!



در پیوند زیر در این باره بیشتر مطالعه کنید.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Ruled\\_surface](https://en.wikipedia.org/wiki/Ruled_surface)

#### ۴.۴ توابع دو متغیره

منظور از یک تابع دو متغیره ضابطه‌ای است مانند  $f$  که هر نقطه‌ی  $(x, y)$  در یک مجموعه‌ی  $D \subseteq \mathbf{R}^2$  را به یک نقطه‌ی یکتای  $z \in \mathbf{R}$  می‌برد.

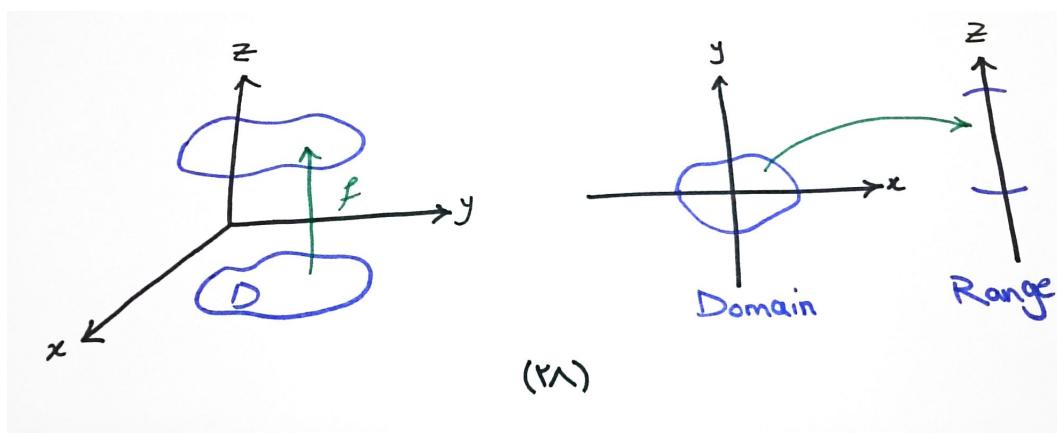
$$f : D \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

مجموعه‌ی  $D$  را دامنه‌ی تابع می‌خوانیم.

مجموعه‌ی زیر را بُرد تابع می‌خوانیم.

$$\{f(x, y) \in \mathbf{R} | (x, y) \in D\}$$

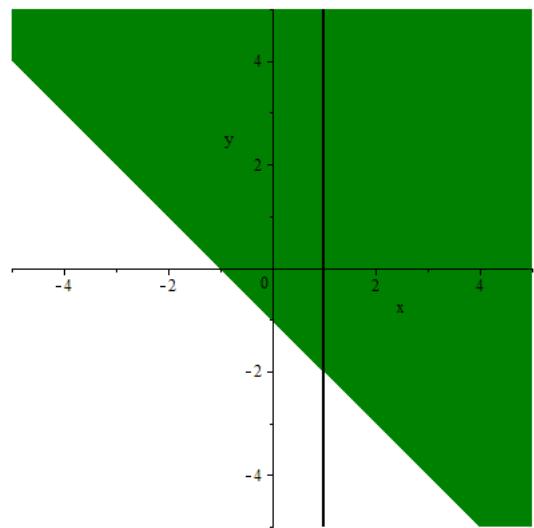


مثال ۴۸. دامنه‌ی تابع زیر را رسم کنید و مقدار آن را  $(3, 2)$  محاسبه کنید.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

پاسخ.

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x+y+1 \geq 0, x \neq 1\}$$



□ توجه کنید که خط  $x = 1$  جزو دامنه نیست. محاسبه‌ی مقدار تابع در نقطه‌ی داده شده به عهده‌ی شما!

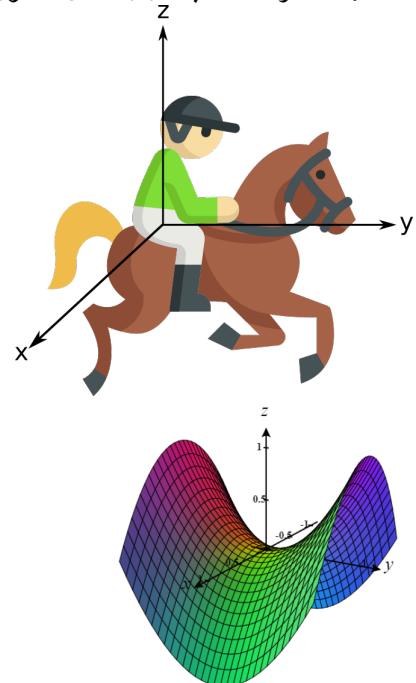
## ۵ جلسه‌ی پنجم، دوشنبه

پیش از ادامه‌ی دادن بحث توابع، دو نکته را درباره‌ی مباحث گذشته ذکر می‌کنیم.

توجه ۴۹. برای رسم معادله‌ی  $y^z - x^z = z$  به نکته‌های زیر توجه کنید که

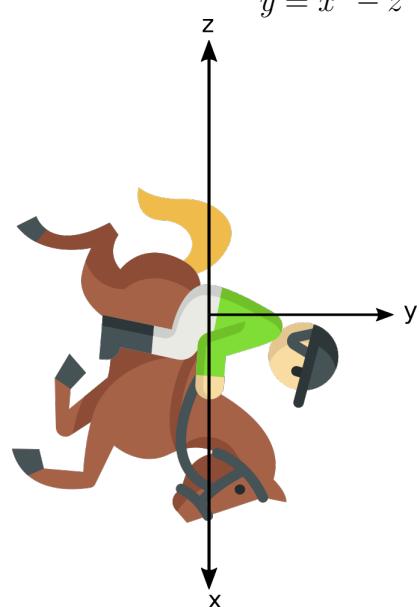
- سر سوارکار در راستای محور  $z$  باشد،

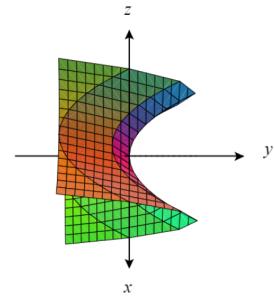
- جهت حرکت اسب در راستای محور  $y$  باشد.



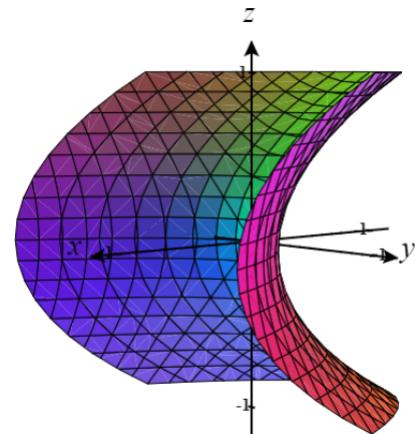
مثال ۵۰. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید:

$$y = x^z - z^x \quad .1$$





$$x = y^2 - z^2 . \quad 2$$



چند مثال نیز از بحث دوران حل می‌کنیم:

مثال ۵۱. معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی  $y = \sqrt{x}$  حول محور  $x$  را بنویسید، نوع رویه را مشخص کنید و آن را رسم کنید.

پاسخ. اگر داشته باشیم:

$$f(x, y) = y - \sqrt{x} = 0$$

آنگاه از دوران  $f(x, y)$  حول محور  $x$  معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = \pm\sqrt{y^2 + z^2} - \sqrt{x} = 0$$

با توجه به معادله‌ی اولیه به دلیل آنکه  $0 < y < \sqrt{y^2 + z^2}$  مدنظر ماست. در نتیجه داریم:

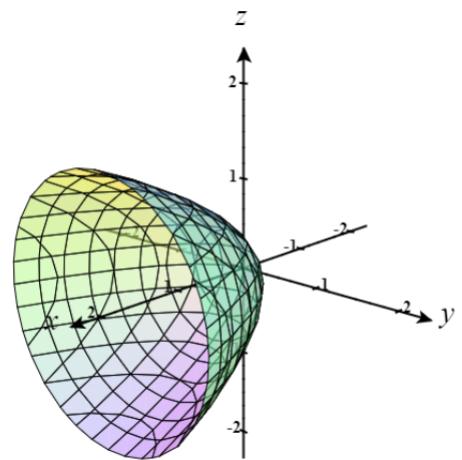
$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

اگر دو طرف معادله را به توان ۲ برسانیم داریم:

$$x = y^2 + z^2$$

شکل حاصل سه‌می‌وار است.

□



## ۱.۵ ادامهی مبحث توابع

مثال ۵۲. دامنهٔ توابع زیر را مشخص و رسم کنید:

$$f(x, y) = x \ln(y^x - x) . \quad ۱$$

پاسخ.

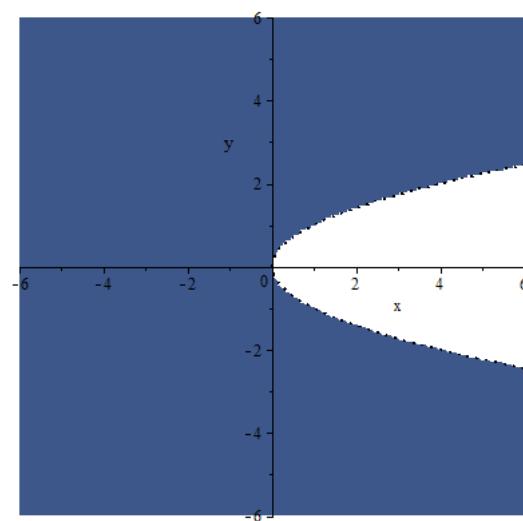
توجه ۵۳. معادلهٔ بالا را به شکل دیگری می‌توان نوشت:

$$z = x \ln(y^x - x)$$

در این معادله  $x$  و  $y$  متغیرهای مستقل هستند و  $z$  متغیر وابسته به متغیرهای  $x$  و  $y$  است.

بنا به دامنهٔ تابع  $\ln$  باید داشته باشیم:

$$y^x - x > 0$$



□

برد تابع نیز  $\mathbf{R}$  است.

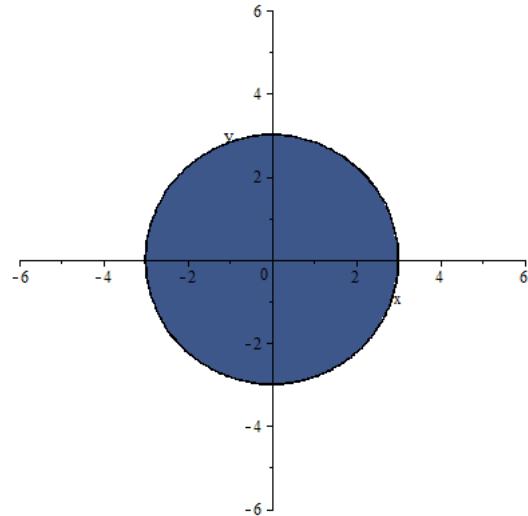
$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} . \quad ۲$$

پاسخ.

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

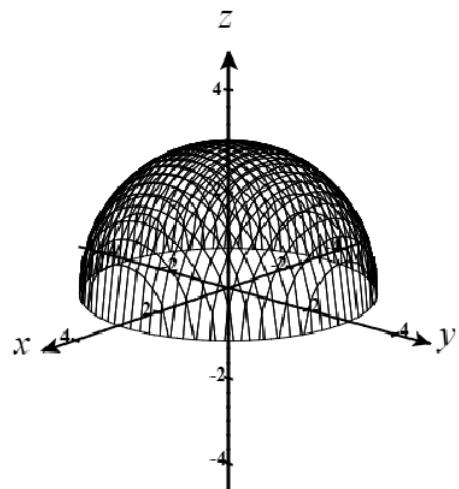
پس داریم:

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$



$$\text{Range}(g) = [0, 3]$$

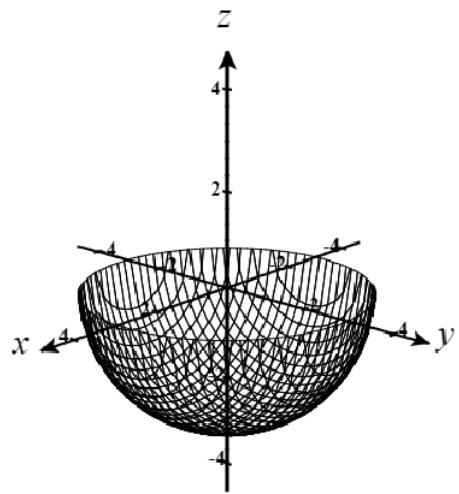
اگر بخواهیم تابع را رسم کنیم شکل آن به صورت زیر است:



توجه کنید که از آنجا که  $z > 0$  تنها بخش بالائی کره باید رسم شود (اگر داشته باشیم

$$z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

آنگاه شکل رویه به صورت زیر است:)



□

**تعريف ۵۴.** فرض کنید  $R \rightarrow R^z : f$  یک تابع باشد. مجموعه زیر را گراف تابع  $f$  می‌نامیم.

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in R^z | (x, y) \in Dom(f), z = f(x, y)\}$$

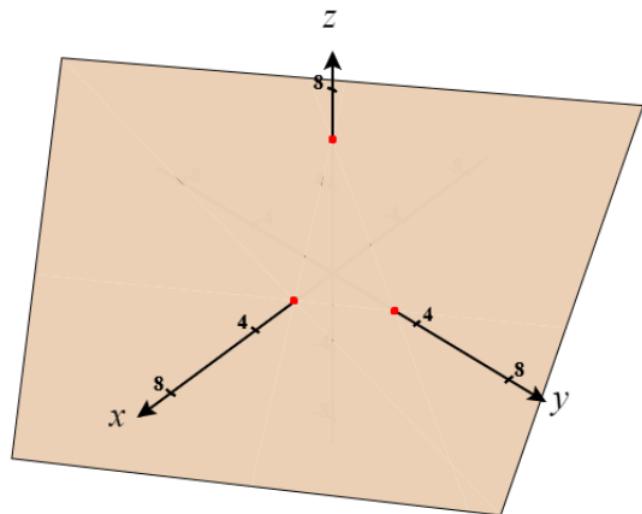
**مثال ۵۵.** گراف تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

پاسخ.

**یادآوری ۵۶.** معادله  $ax + by + cz = d$  معادله‌ی یک صفحه با بردار نرمال  $(a, b, c)$  است. کافیست سه نقطه پیدا کنیم که در معادله  $2y - 3x - z = 6$  صدق کنند.

$$(0, 0, 6) \quad (0, 3, 0) \quad (2, 0, 0)$$



□

**مثال ۵۷.** دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید و گراف آن را رسم کنید:

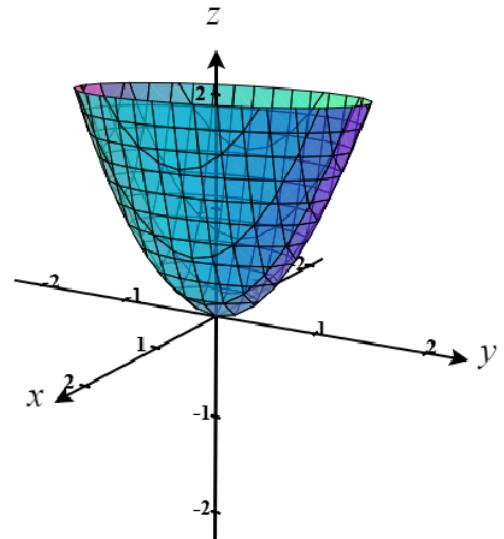
$$h(x, y) = 4x^2 + y^2$$

پاسخ.

$$D(h) = \mathbf{R}^{\geqslant}$$

$$\text{range}(h) = \mathbf{R}^{\geqslant}.$$

$$z = \sqrt[4]{x^4 + y^4} = (\sqrt[4]{x})^4 + y^4$$



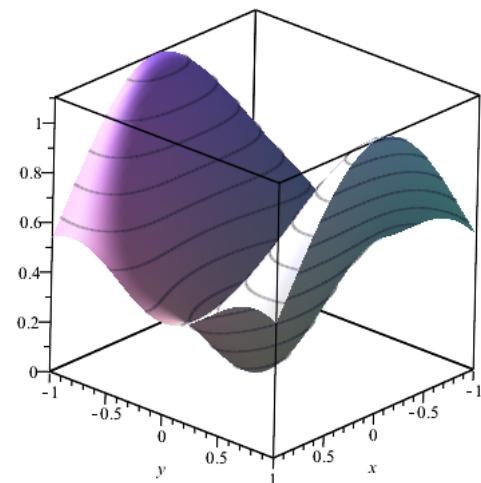
□

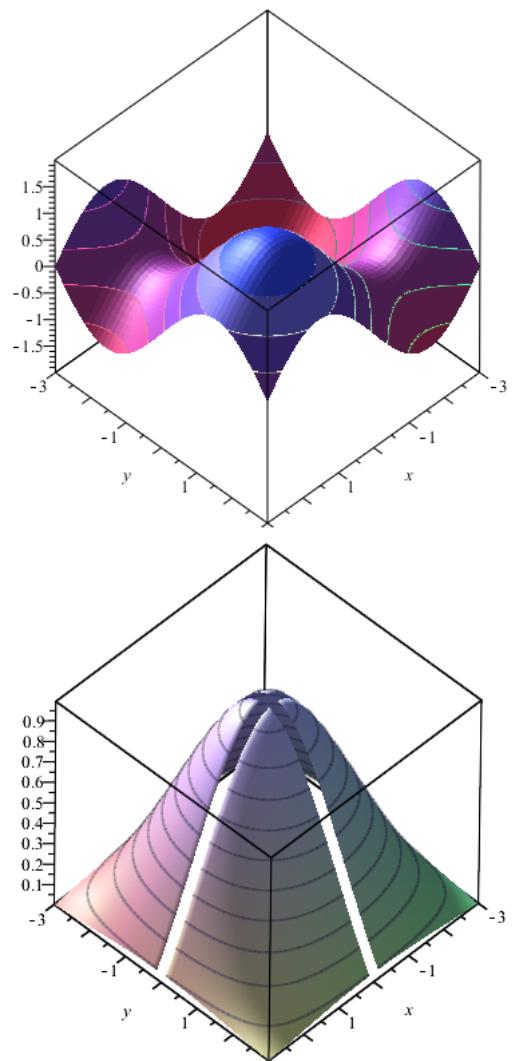
**مثال ۵۸.** حدس بزنید کدام شکل زیر مربوط به کدام معادله است:

$$f(x, y) = (x^4 + 2y^4)e^{-x^4-y^4} . \quad ۱$$

$$f(x, y) = \sin x + \sin y . \quad ۲$$

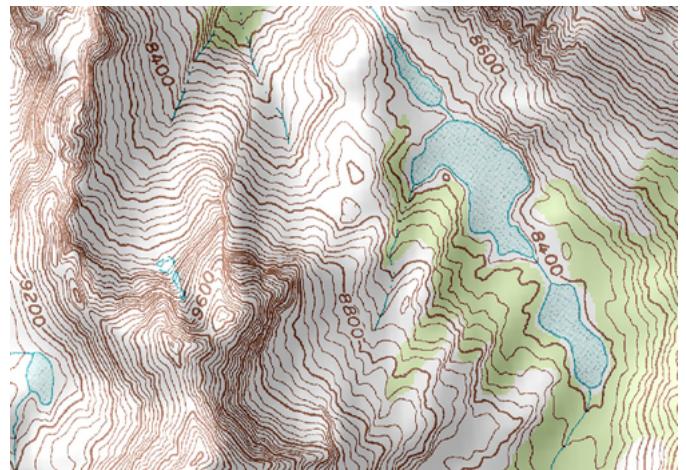
$$f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy} . \quad ۳$$





## ۲.۵ منحنی‌های تراز

احتمالاً دربارهٔ نقشه‌های توپوگرافیک شنیده‌اید. در این نقشه‌ها، مشخص می‌کنند که عوارض روی زمین در ارتفاعهای مشخص به چه صورتند. در زیر یک نمونه از چنین نقشه‌هایی را گذاشته‌ایم:



فرض کنید  $z = f(x, y)$  یک تابع باشد. به هر منحنی  $xy$  یک منحنی تراز برای تابع  $f$  گفته می‌شود. مجموعه‌ی منحنی‌های تراز یک تابع را به صورت همزمان در فضای دوبعدی  $xy$  رسم می‌کنند.

توجه ۵۹. دو مفهوم متفاوت داریم:

۱. منحنی‌های تراز (که در بالا تعریفشان کردیم)<sup>۵</sup>

۲. منحنی‌های هم‌مسیر<sup>۶</sup> (منحنی‌هایی فضائی هستند که از اشتراک‌گیری صفحات<sup>۷</sup>  $z = k$  با نمودار تابع  $z = f(x, y)$  ایجاد می‌شوند. تفاوت این منحنی‌ها با منحنی‌های تراز این است که این منحنی‌ها را در فضای  $\mathbb{R}^3$  رسم می‌کنند).

مثال ۶۰. منحنی‌های تراز تابع  $z = y^2 - x^2$  را به ازای  $z = 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$  رسم کنید.

پاسخ.

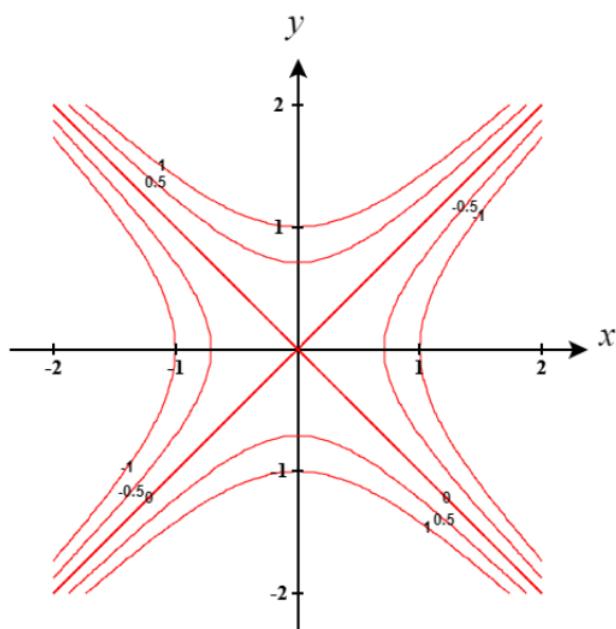
$$z = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

$$z = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

$$z = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (y-x)(y+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

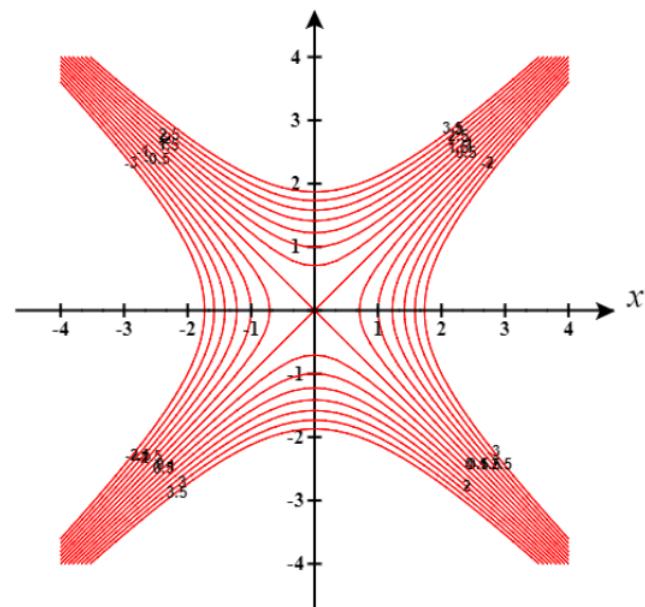
$$z = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$



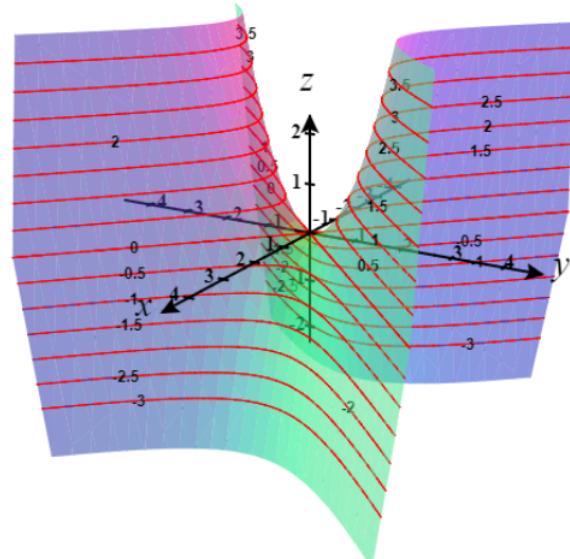
نقشه‌ی کاملتر منحنی‌های تراز تابع بالا به صورت زیر است:

<sup>5</sup>level curves

<sup>6</sup>contour maps



در زیر منحنی‌های هم‌مسیر با تابع بالا را رسم کرده‌ایم:



□

مثال ۶۱. منحنی‌های تراز تابع زیر را رسم کنید.

$$z = \frac{-y}{x^2 + y^2 + 1}$$

پاسخ.

$z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x$  محور

$$z = 1 \Rightarrow x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

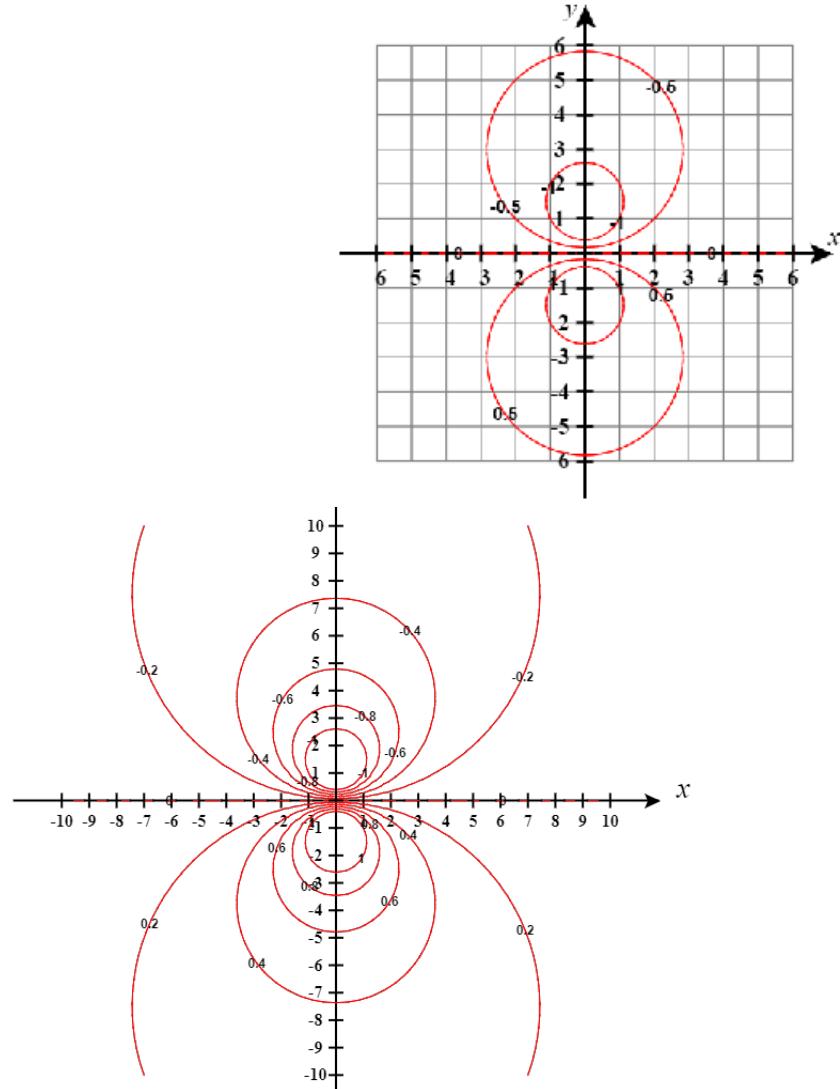
$$z = -1 \Rightarrow x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

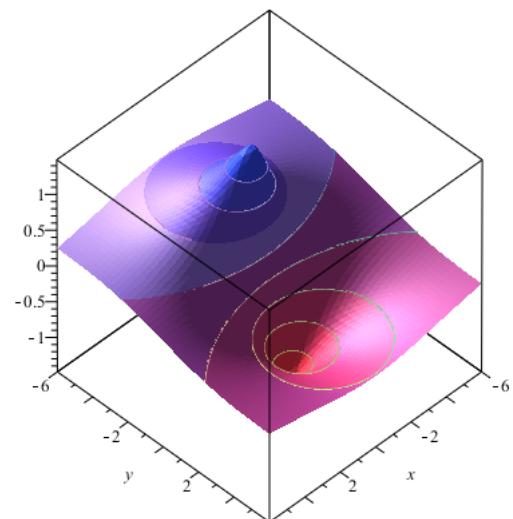
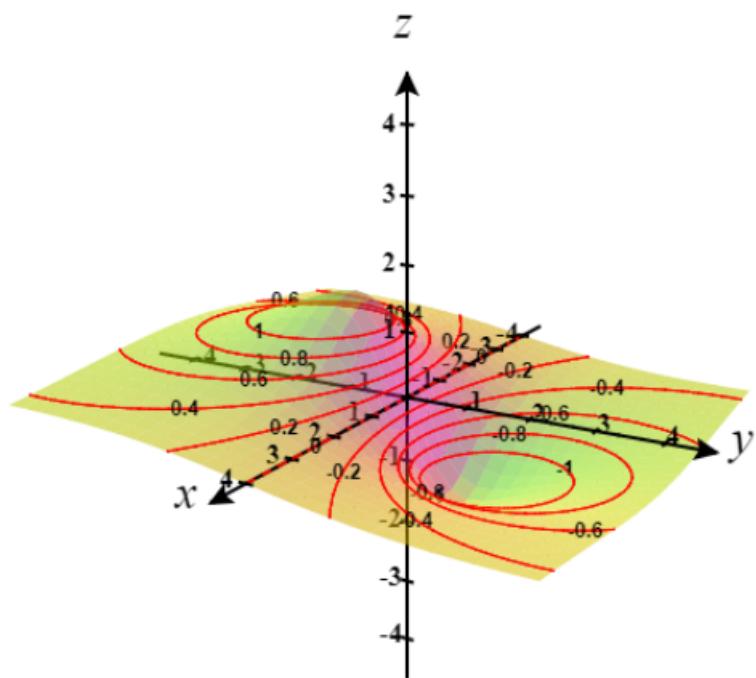
$$z = 2 \Rightarrow x^2 + (y + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} + 1 = 2$$

معادلهی بالا جوابی ندارد. پس در  $z = 2$  شکلی نداریم.

$$z = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow x^{\gamma} + y^{\gamma} + 1 + \gamma y = 0 \Rightarrow x^{\gamma} + (y + 1)^{\gamma} = -1$$

$$z = -\frac{1}{\gamma} \Rightarrow x^{\gamma} + y^{\gamma} + 1 + \gamma y = 0 \Rightarrow x^{\gamma} + (y - 1)^{\gamma} = -1$$





□

مثال ۶۲. منحنی‌های تراز تابع زیر را رسم کنید.

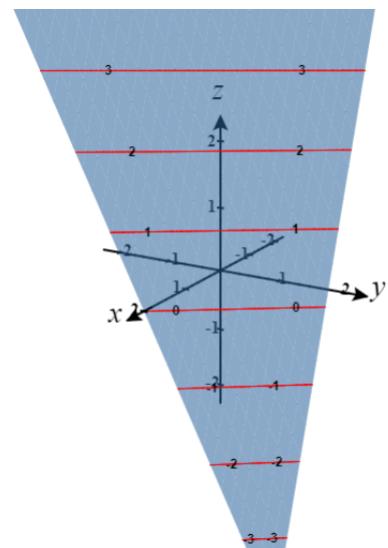
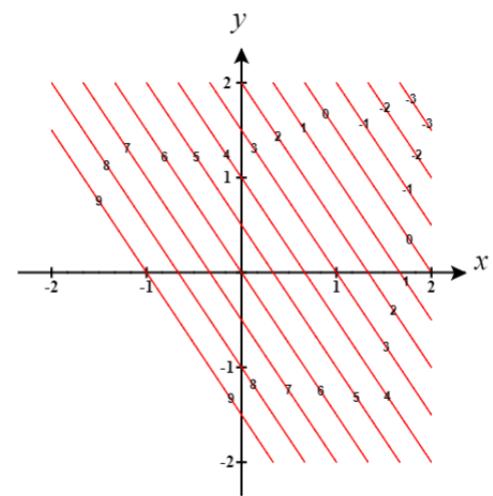
$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

پاسخ.

$$z = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 5$$

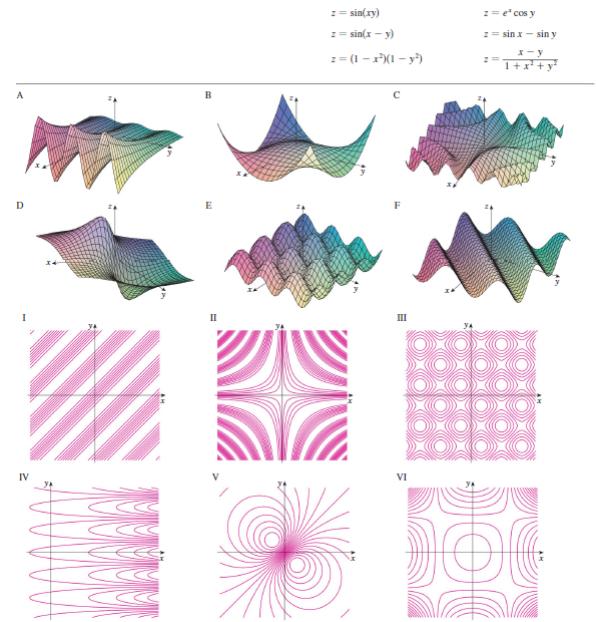
$$z = 2 \Rightarrow 3x + 2y = 4$$

$$z = 3 \Rightarrow 3x + 2y = 3$$



□

تمرین زیر از کتاب استوارت است. معادله‌ها را به رویه‌ها و رویه‌ها را به منحنی‌های تراز آنها وصل کنید:



## ۶ نیم جلسه‌ی ششم، چهارشنبه

### ۱.۶ پاسخ سوال

سوال ۶۳ (سوال دانشجویان). معادله‌ی  $z = x^2 + y^2$  را چگونه رسم کنیم؟ این معادله جزو معادله‌هایی که دسته‌بندی کرده‌ایم نیست.

معادله‌ی بالا به ظاهر جزو معادله‌های دسته‌بندی شده نیست، اما در حقیقت معادله‌ی یک استوانه است که دوران یافته است. پیش از آنکه این سوال را پاسخ گوئیم، بیائید یک مشاهده درباره‌ی معادله‌ی  $z = x^2 + y^2$  داشته باشیم (که از آن مشاهده برای رسم معادله‌ی  $z = x^2 + y^2$  استفاده خواهیم کرد).

مشاهده ۶۴.

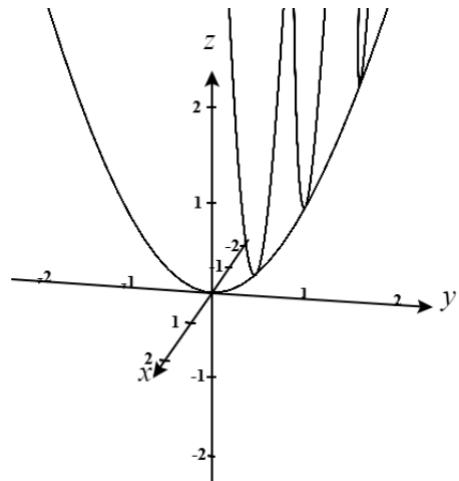
$$z = x^2 + y^2$$

تصاویر ایجاد شده روی صفحات  $y = k$  در نظر بگیرید:

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow z = x^2 + \frac{1}{4}$$

$$y = 1 \Rightarrow z = x^2 + 1$$

$$y = \frac{3}{2} \Rightarrow z = x^2 + \frac{9}{4}$$



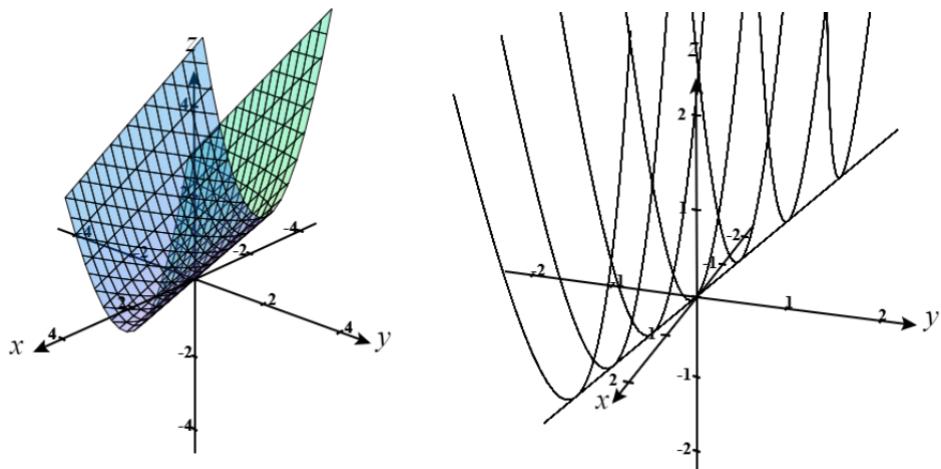
در واقع اگر همزمان تصاویر ایجاد شده روی همه‌ی صفحات  $y = k$  را رسم کنیم به شکل مورد نظر می‌رسیم. روی صفحه‌ی  $y = k$  منحنی  $z = k^2 + x^2$  ایجاد می‌شود. برای رسم این منحنی، کافی است روی صفحه‌ی  $y = k$  به اندازه‌ی  $k^2$  با شروع از نقطه‌ی  $(0, 0)$  به سمت محور  $z$  بالا برویم و از آنجا، منحنی  $z = k^2 + x^2$  را رسم کنیم (یعنی پائین ترین نقطه‌ی  $k^2$  نقطه‌ی  $z = k^2$  باشد). برای به اندازه‌ی  $k^2$  بالا رفتن روی صفحه‌ی  $y = k$  کافی است نقطه‌ی اشتراک این صفحه را با منحنی  $z = x^2$  (در صفحه‌ی  $zx$ ) در نظر بگیریم.

حال سوال مورد نظر را پاسخ می‌گوئیم:

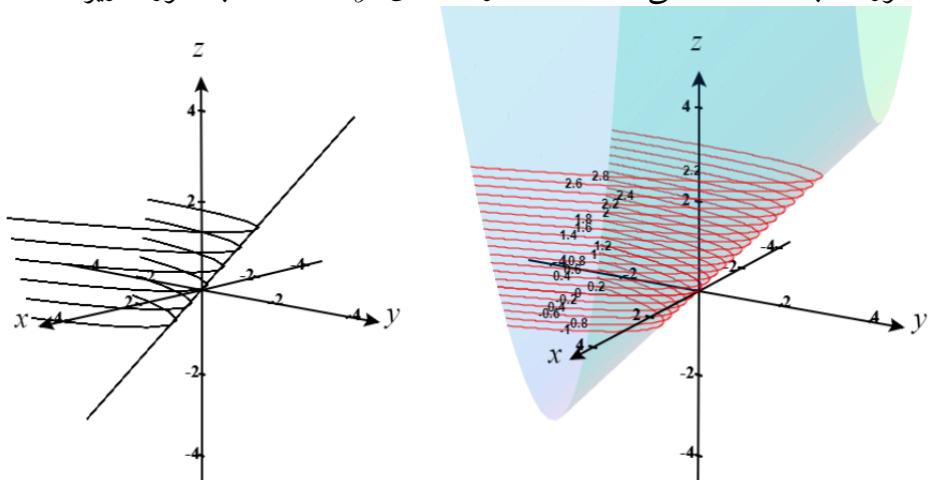
مثال ۶۵. رویه‌ی  $z = x^2 + y^2$  را رسم کنید.

این شکل (با توضیحی مشابه بالا) از کشیدن سهمی‌های  $z = x^2 + y^2$  روی خط  $y = z$  ایجاد می‌شود. پس یک استوانه‌ی موازی خط  $y = z$  است.

پاسخ.



به طور مشابه، مکان هندسی نقاط صادق در معادله  $z = x + y^2$  به صورت زیر است:



□

## ۲.۶ ادامهی مبحث منحنی‌های تراز

مثال ۶۶. منحنی‌های تراز تابع‌های زیر را رسم کنید.

$$h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1 \quad . \quad . \quad .$$

پاسخ.

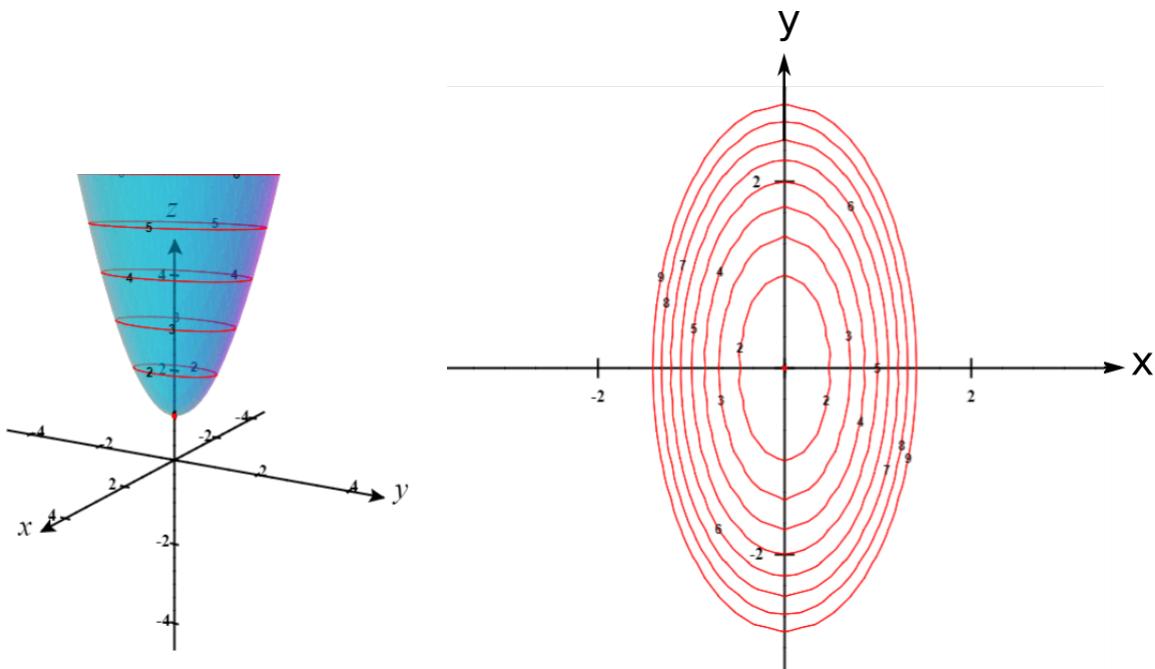
$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

در  $z < 1$  شکلی ایجاد نمی‌شود.

$$z = 1 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$z = 2 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$$

$$z = 5 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$



توجه ۶۷. در معادله‌ی بالا، در صفحه‌ی  $x = 0$  سهمی زیر را داریم:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = f(y) = y^2 + 1 \end{cases}$$

نقطه‌ی  $(1, 0, 0)$  یک مینی‌موم نسبی برای سهمی یادشده است. پس در این نقطه داریم  $f'(y) = 0$ . این نکته را در بخش مشتقهای جزئی مفصل‌اً بررسی خواهیم کرد.

□

$$z = xy . \quad ٢$$

پاسخ.

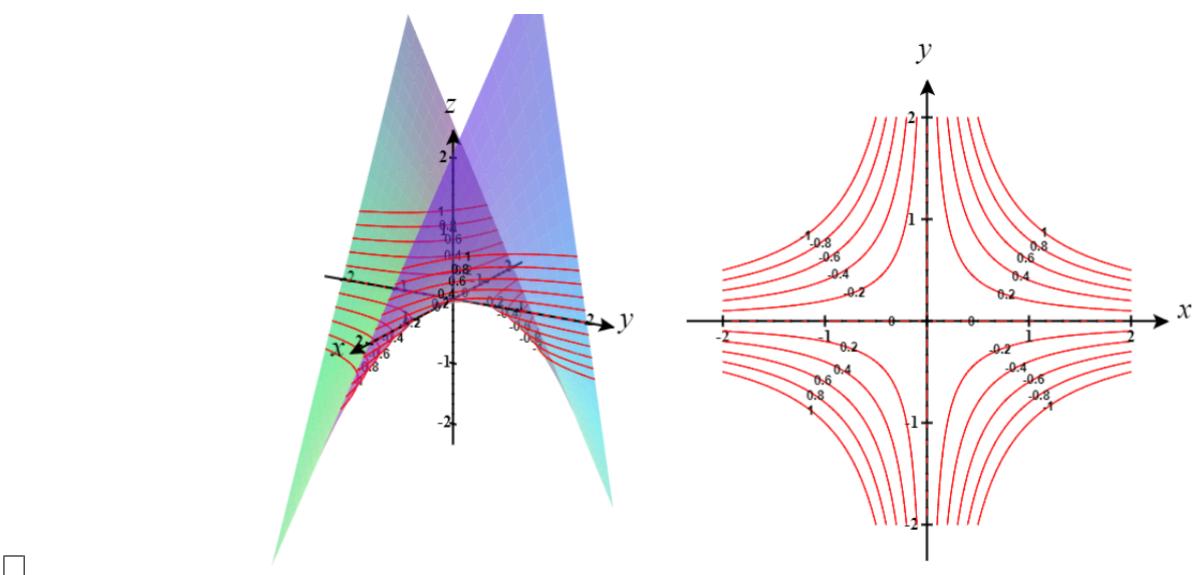
$$z = 0 \Rightarrow xy = 0$$

پس در  $x = 0$  یا  $y = 0$  داریم:  $z = 0$ .

$$z = 1 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$z = -1 \Rightarrow xy = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{x}$$

$$z = 2 \Rightarrow xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$



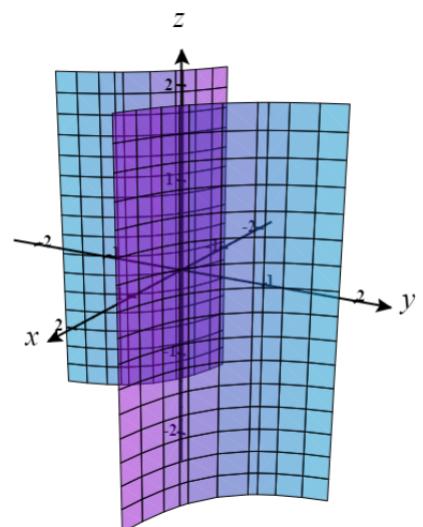
□

### ۳.۶ پاسخ سوال

دو رویه‌ی  $z = xy$  و  $xy = 1$  را رسم کنید.

**سوال ۶۸.** رویه‌ی  $xy = 1$  را رسم کنید.

پاسخ. توجه کنید که معادله‌ی بالا، به  $z$  بستگی ندارد. پس یک استوانه است موازی محور  $z$ ، که سطح مقطع آن منحنی  $y = \frac{1}{x}$  است.



□

**سوال ۶۹.** رویه‌ی  $z = xy$  را رسم کنید.

پاسخ. (همان طور که در دوره‌ی دبیرستان آموخته‌اید) اگر محورهای  $x$  و  $y$  را بطور همزمان به اندازه‌ی  $\theta$  دوران دهیم (یعنی صفحه‌ی  $xy$  را به اندازه‌ی  $\theta$  در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم): داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

$$z = xy \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2)$$

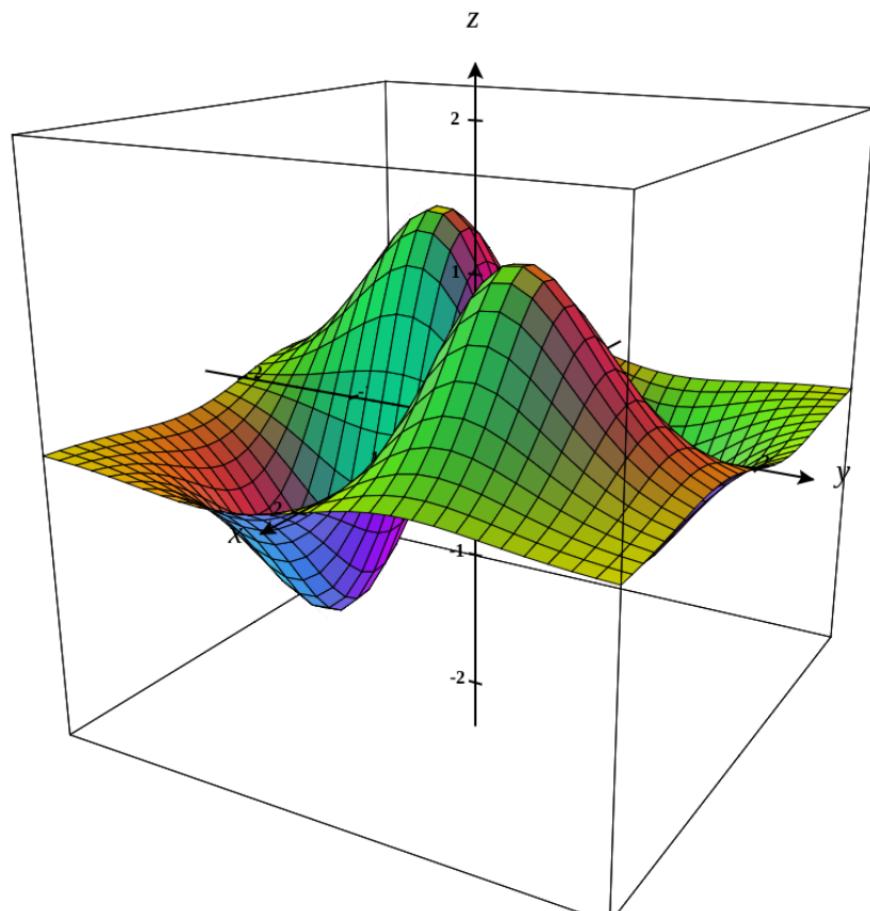
پس معادله‌ی جدید به صورت زیر است:

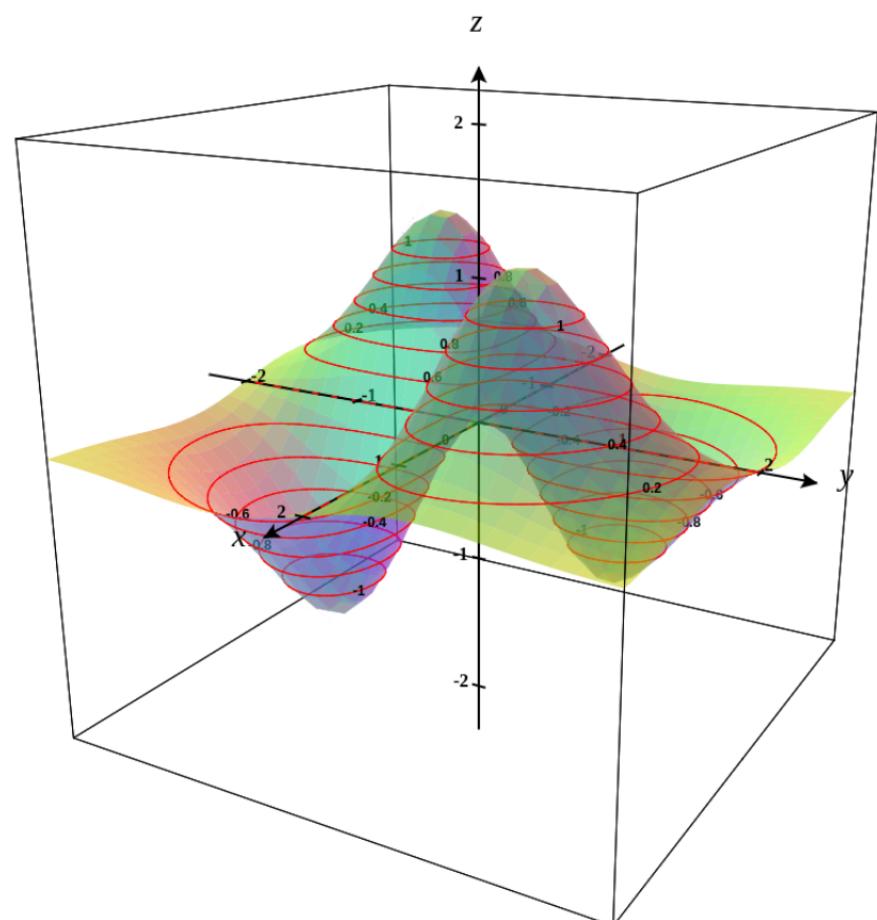
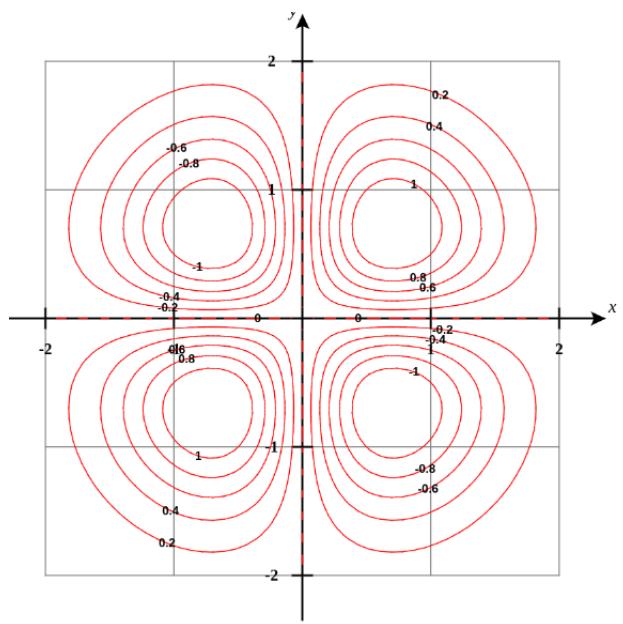
$$z = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2)$$

پس شکل بالا از دوران سه‌می وار هذلولوی  $z = x^2 - y^2$  به اندازه‌ی ۴۵ درجه روی صفحه‌ی  $xy$  به دست می‌آید (تصویر مورد نظر را در مثال منحنی‌های تراز در بالا کشیده‌ایم).  $\square$

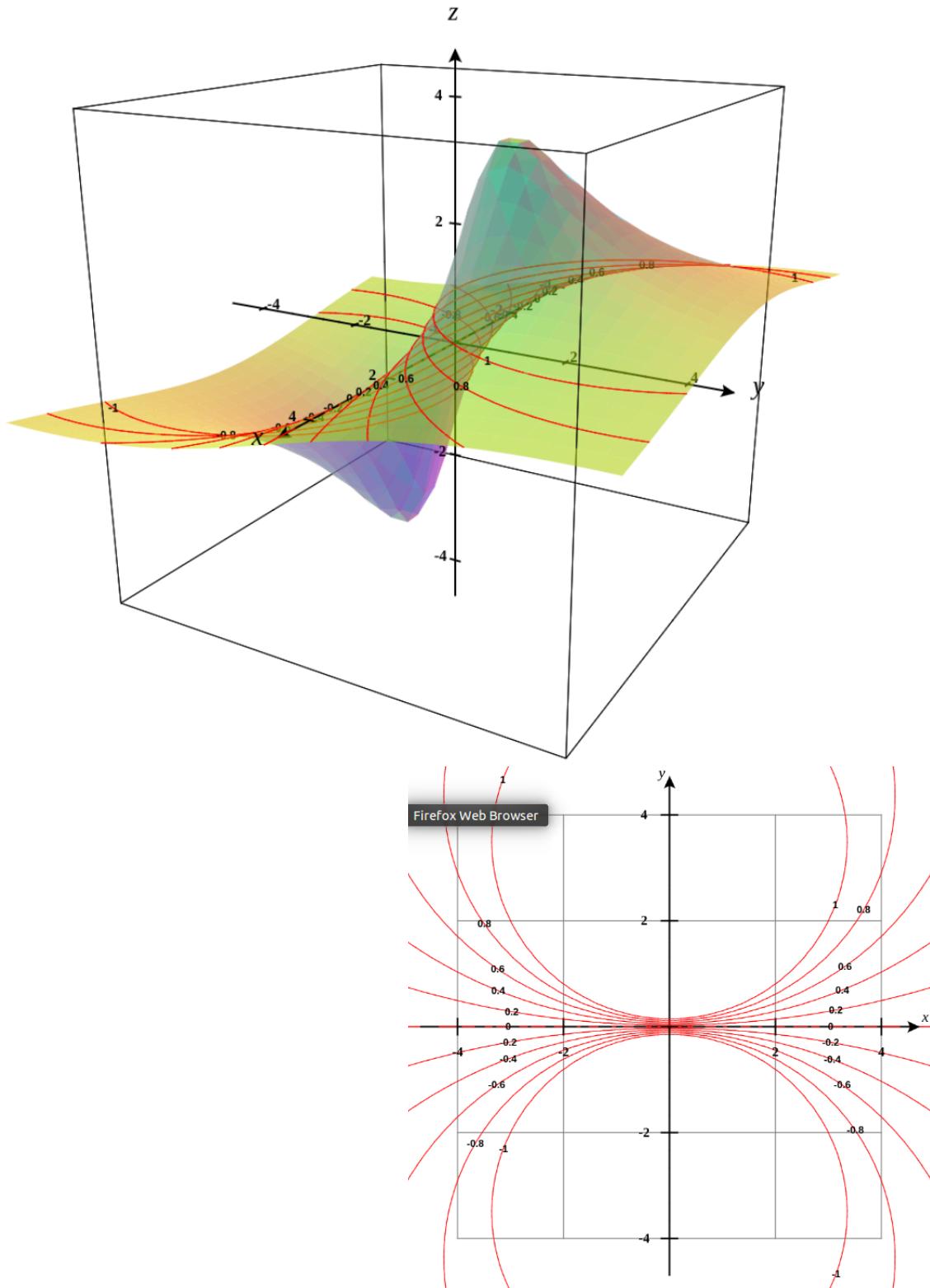
سوال ۷۰. منحنی‌های تراز توابع زیر را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای رسم کنید:

$$f(x, y) = \frac{xy}{e^{x^2+y^2}} . 1$$





$$f(x, y) = \frac{v_y}{x^r + y^r + 1} . \gamma$$



## ٤.٦ تمرین

تمرین ۸. منحنی‌های تراز توابع زیر را رسم کنید:

$$f(x, y) = \ln(x^y + y^x) \bullet$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x^y + y^x} \bullet$$

## ۵.۶ حد و پیوستگی

فرض کنید

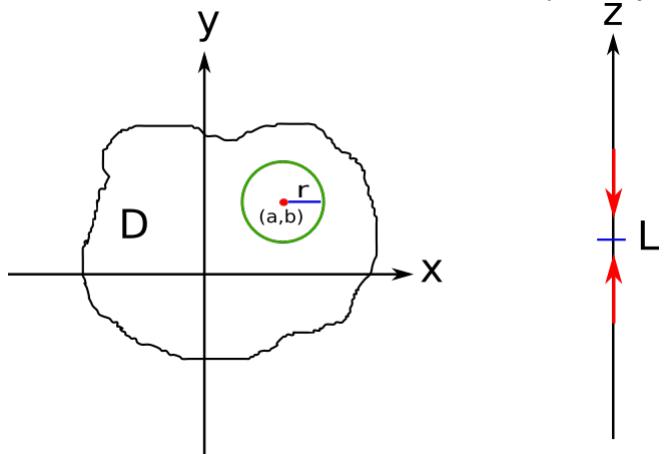
$$f : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$$

یک تابع باشد. می‌گوئیم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

هرگاه مقادیر  $(x, y)$  را بتوان به هر اندازه‌ی دلخواه به  $L$  نزدیک کرد، به شرط آنکه  $(x, y)$  به اندازه‌ی کافی به  $(a, b)$

نزدیک شود.



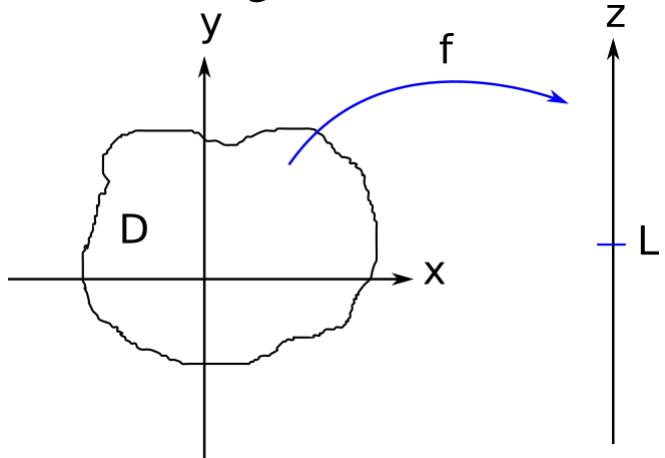
$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L &\iff \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left( \forall x, y \quad (x, y) \text{ کمتر از } \delta \text{ از } (a, b) \rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon \right) & \\ \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \quad \left( \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon \right) & \end{aligned}$$

این مطلب را در جلسه‌ی آینده دوباره توضیح خواهیم داد.

## ۷ جلسه‌ی هفتم، شنبه

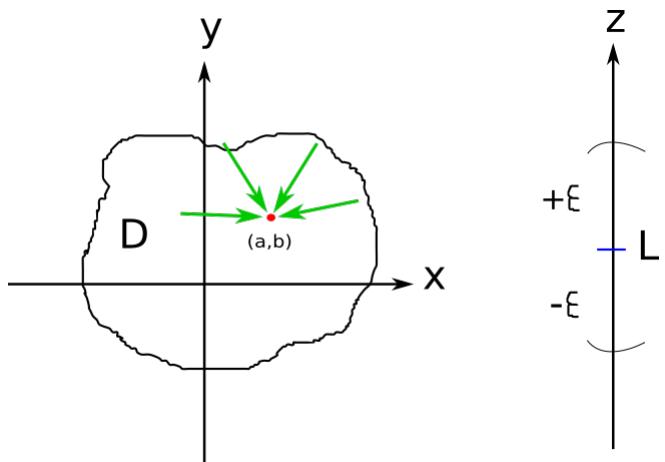
### ۱.۷ ادامه‌ی حد و پیوستگی

فرض کنید که  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع باشد،



می‌گوییم حد تابع  $f$  وقتی  $(x, y)$  به  $(a, b)$  میل می‌کند برابر است با  $L$  هرگاه مقادیر  $f(x, y)$  به هر اندازه‌ی دلخواه به  $L$  نزدیک شوند، به شرطی که  $(x, y)$  به اندازه‌ی کافی به  $(a, b)$  نزدیک شده باشد:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \left( \forall \begin{pmatrix} x, y \\ a, b \end{pmatrix} \quad \text{اگر فاصله‌ی } (x, y) \text{ از } (a, b) \text{ کمتر از } \delta(\epsilon) \text{ باشد} \rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon \right)$$

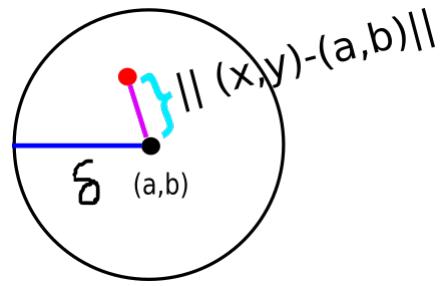


توجه ۷۱. وقتی می‌گوییم  $f(x, y)$  به  $(a, b)$  نزدیک است و می‌نویسیم:

$$\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$$

يعني

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

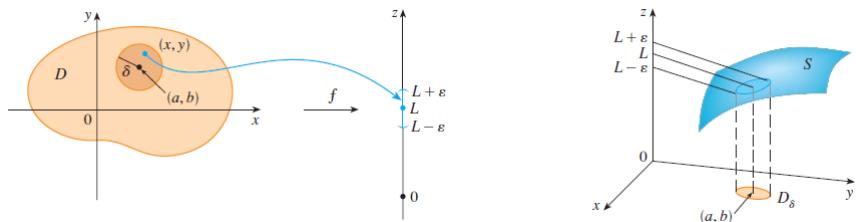


پس تعریف حد در بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \iff$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall (x,y) \in D(f) \quad \left( |x-a|^2 + |y-b|^2 < \delta^2 \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon \right)$$

در واقع وقتی که نقاط  $(x, y)$  در دامنه به  $(a, b)$  نزدیک می‌شوند (یعنی در داخل دوایر با شعاع کم قرار می‌گیرند) مقادیر تابع به  $L$  نزدیک می‌شود (یعنی داخل بازه‌های کوچک به مرکز  $L$  قرار می‌گیرند). تصویر زیر از کتاب استوارت گرفته شده است:



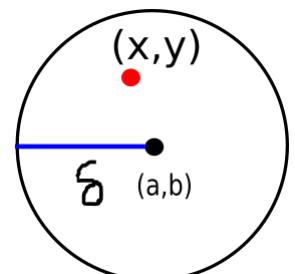
تمرین ۹. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \iff$$

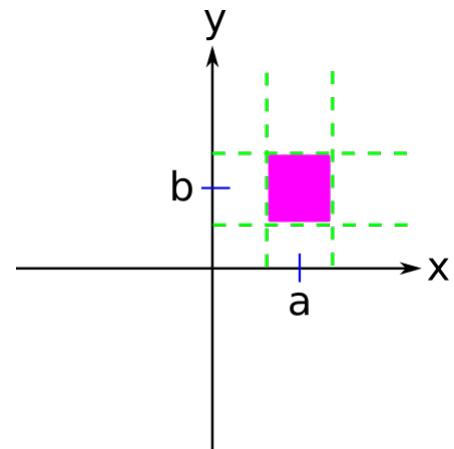
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall (x,y) \quad \left( (|x-a| < \delta) \wedge (|y-b| < \delta) \rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon \right)$$

توجه کنید که تمرین بالا در واقع می‌گوید که می‌توان به جای دیسکهای با شعاع کمتر و کمتر در مستطیلهای با طول و عرض کوچکتر و کوچکتر به نقطه‌ی  $(a, b)$  نزدیک شد:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta :$$

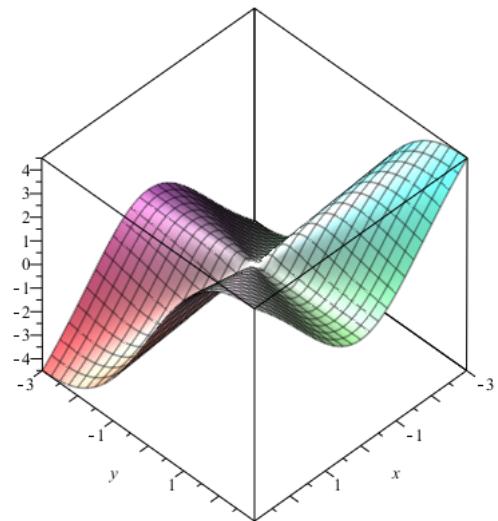


$$\begin{cases} |x-a| < \delta \\ |y-b| < \delta \end{cases} :$$



مثال ۷۲. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^2}y}{x^2 + y^2} = 0$$



پاسخ. فرض کنید  $0 < \epsilon$  را داشته باشیم، به دنبال  $\delta$  هستیم که اگر  $\delta < \epsilon < \sqrt{x^2 + y^2}$  آنگاه  $\left| \frac{\sqrt[3]{x^2}y}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon$

چرکنویس.

$$\left| \frac{\sqrt[3]{x^2}y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{y^2}}{x^2 + y^2}$$

می‌دانیم که

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

و

$$\sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

پس داریم:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{y^2}}{x^2 + y^2} \leq \frac{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \sqrt[3]{x^2 + y^2} *$$

کافی است که  $\delta$  یک عدد مثبت دلخواه باشد به طوری که  $\frac{\epsilon}{3} < \delta$ . آنگاه اگر  $\delta < \epsilon$ .

$$\frac{|3x^y|}{x^y + y^x} < 3\sqrt{x^y + y^x} \leqslant 3\delta < 3 \times \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

□

مثال ۷۳. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

پاسخ. فرض کنیم  $\epsilon > 0$  داده شده باشد.

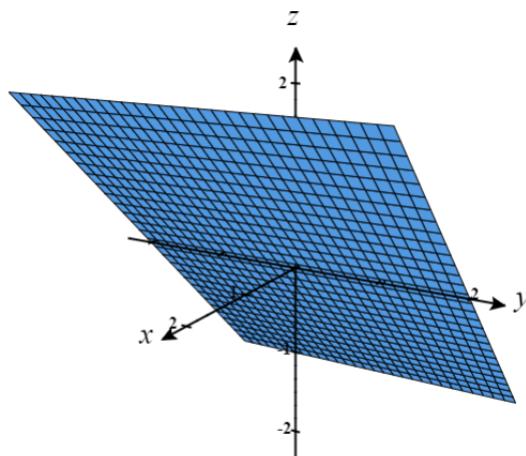
چرکنویس.

$$|f(x, y) - a| = |x - a|$$

$$|x - a| = \sqrt{|x - a|^2} \leqslant \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

کافی است  $\delta$  را یک عدد مثبت بگیریم به طوری که  $\epsilon < \delta < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ . در این صورت اگر  $\delta < \epsilon$ . آنگاه

$$|x - a| \leqslant \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta < \epsilon$$



در زیر تابع  $z = x$  را رسم کردہایم.

□

بطور مشابه می‌توان نشان داد که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$$

و

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k = k$$

که در بالا  $k$  یک عدد ثابت است.

قضیه ۷۴. فرض کنید آنگاه: (فرض کرده‌ایم که دامنه‌ی  $f$  و  $g$  در یک دیسک به مرکز  $(a, b)$  مشترک باشند.)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M . \quad ۱$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \times g(x,y) = L \times M . \quad ۲$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k \times f(x,y) = k \times L . \quad ۳$$

۴. اگر  $M \neq 0$  آنگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

۵. در صورتی که  $L^{\frac{m}{n}}$  موجود باشد (یعنی یک عدد حقیقی باشد)، آنگاه:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left( f(x,y) \right)^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$$

از ترکیب قضیه‌ی بالا با مثالهای قبل (درباره‌ی تابعهای ثابت،  $y = x, z = y$ ) به این نتیجه می‌رسیم که توابع چند جمله‌ای دارای حد هستند. منظور از یک تابع چندجمله‌ای، تابعی است که از جمع تعدادی متناهی عبارت به صورت  $ax^m y^n$  ایجاد شده است، مانند  $x^4 + 5xy^3 + x^7$ . همچنین توابع گویا در دامنه‌شان دارای حد هستند. منظور از یک تابع گویا، تابعی است که آن را به صورت خارج قسمت دو تابع چندجمله‌ای می‌توان نوشت.

مثال ۷۵. مقدار حد‌های زیر را بدست آورید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\cdot, -1)} \frac{x - xy + 3}{x^4 + 5xy - y^3} . \quad ۱$$

پاسخ.

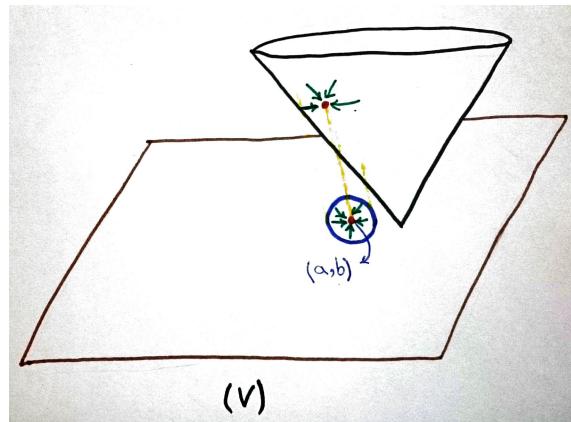
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\cdot, -1)} \frac{x - xy + 3}{x^4 + 5xy - y^3} = \frac{3}{1}$$

□

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3, 4)} \sqrt{x^4 + y^4} . \quad ۲$$

پاسخ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3, 4)} \sqrt{x^4 + y^4} = 5$$



□

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\cdot, \cdot)} \frac{x^\gamma - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} . \quad \text{۳}$$

پاسخ.

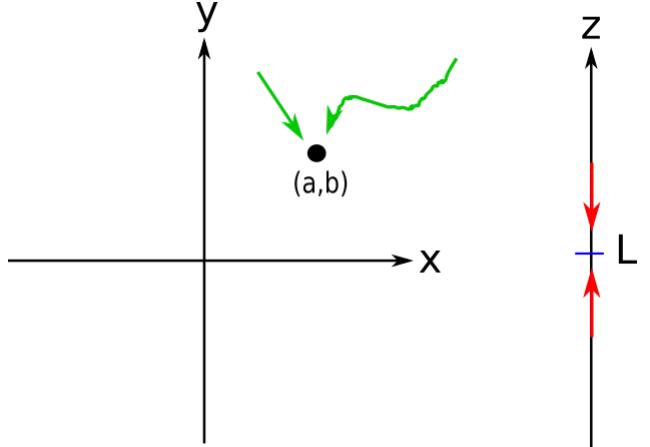
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\cdot, \cdot)} \frac{x^\gamma - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (\cdot, \cdot)} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (\cdot, \cdot)} x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \cdot$$

□

توجه ۷۶. تعریف وجود حد برای یک تابع ایجاب می کند که هرگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

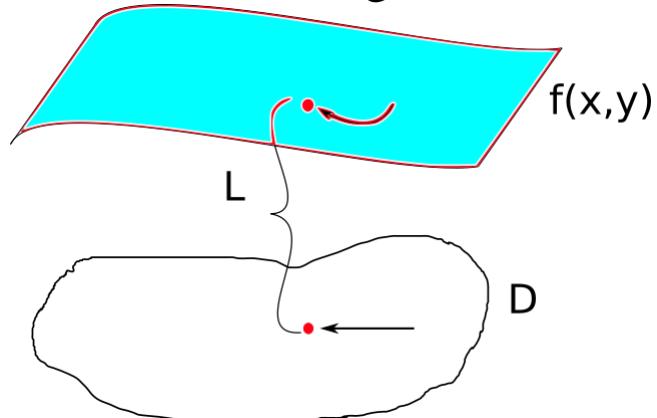
آنگاه از هر مسیری که زوج مرتبهای  $(x, y)$  در دامنه به  $(a, b)$  نزدیک شوند، مقادیر  $f(x, y)$  روی آن مسیر به  $L$  نزدیک می شود (شکل ۷ در بالا و شکل زیر را بینید).



نتیجه ۷۷. اگر با میل کردن  $(x, y)$  به  $(a, b)$  در دو مسیر متفاوت به حد متفاوت برسیم، تابع مورد نظر ما حد ندارد.

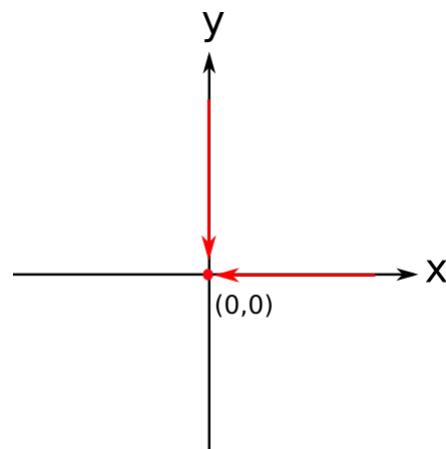
## ۸ جلسه‌ی هشتم، دوشنبه

توجه ۷۸. شرط لازم برای وجود حد تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  این است که از هر مسیری (در دامنه‌ی تابع) که  $(x, y)$  به  $(a, b)$  نزدیک شود، تابع حد یکسانی داشته باشد.



به بیان دیگر اگر دو مسیر به سمت  $(a, b)$  پیدا شوند که تابع روی آندو حد های مختلف داشته باشد، آنگاه حد تابع موجود نیست.

مثال ۷۹. نشان دهید که تابع  $\frac{x^y - y^x}{x^y + y^x}$  در هر نقطه‌ی  $(0, 0)$  حد ندارد.



پاسخ.

$$f(x, y) = \frac{x^y - y^x}{x^y + y^x}$$

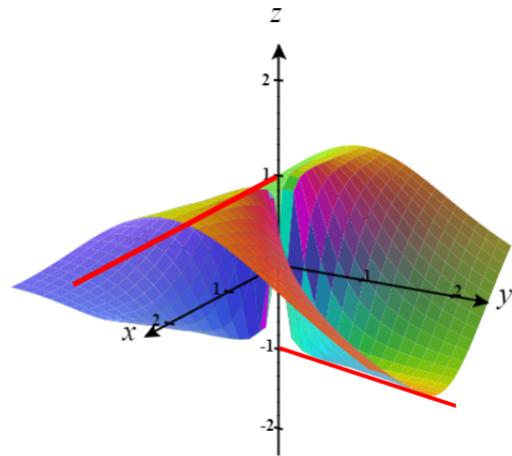
اگر روی نقاط  $(0, x)$  یعنی روی خط  $y = x$ ، نقطه‌ی  $(x, y)$  را به  $(0, 0)$  میل دهیم، داریم:

$$f(x, 0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$$

اگر روی نقاط  $(0, y)$  یعنی روی خط  $x = 0$ ، نقطه‌ی  $(x, y)$  به  $(0, 0)$  میل کند، داریم:

$$f(0, y) = -1$$



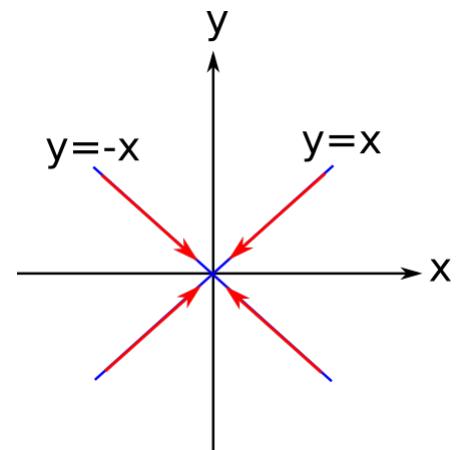
□ از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به دو حد متفاوت رسیده‌ایم، تابع  $f$  حد ندارد (تصویر بالا را ببینید)

مثال ۸۰. نشان دهید که تابع  $f(x, y) = \frac{xy}{x^4+y^4}$  در نقطه‌ی  $(0, 0)$  حد ندارد.

پاسخ.

$$y = x \Rightarrow \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

$$y = -x \Rightarrow \frac{-x^4}{2x^4} = -\frac{1}{2}$$



□ از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به دو حد متفاوت رسیده‌ایم، تابع  $f$  در  $(0, 0)$  حد ندارد.

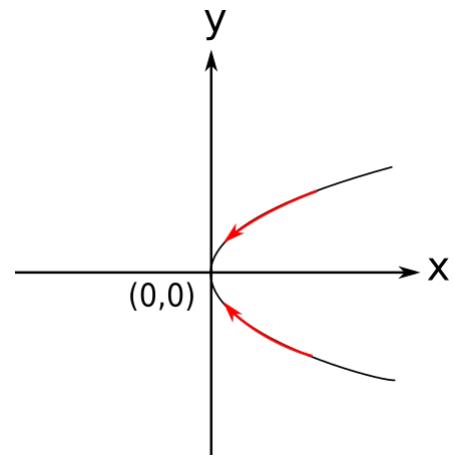
مثال ۸۱. نشان دهید که تابع  $f(x, y) = \frac{xy^4}{x^4+y^4}$  در نقطه‌ی  $(0, 0)$  حد ندارد.

پاسخ.

$$x = y^4 \Rightarrow f(y^4, y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

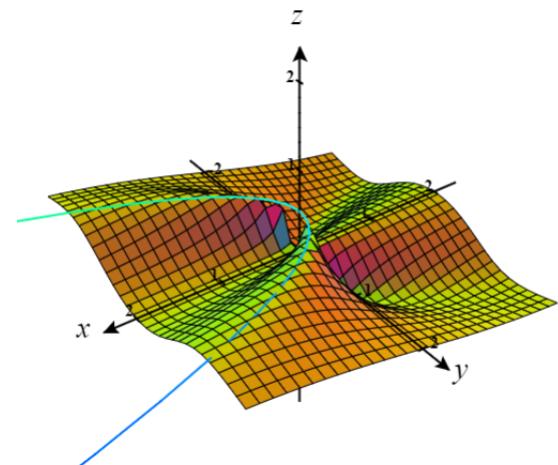
$$x = ky^4 \Rightarrow f(ky^4, y) = \frac{k}{2}$$

از آنجا که حد، به مقدار  $k$  بستگی دارد، روی مسیرهای متفاوت  $x = ky^4$  در صفحه‌ی  $xy$  به حدود متفاوتی می‌رسیم.



مسیر زیر را نیز می‌توانستیم انتخاب کنیم.

$$y = \cdot \Rightarrow f(x, \cdot) = \cdot$$



□

## ۱.۸ پیوستگی

تعريف ۸۲. تابع  $f(x, y)$  را در نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته می‌خوانیم هرگاه

۱. نقطه‌ی  $(a, b)$  در دامنه‌ی تابع باشد،

۲. موجود باشد، و  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

تابع  $f$  را پیوسته می‌خوانیم هرگاه در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد.

ترکیبات جبری توابع پیوسته، پیوسته‌اند.

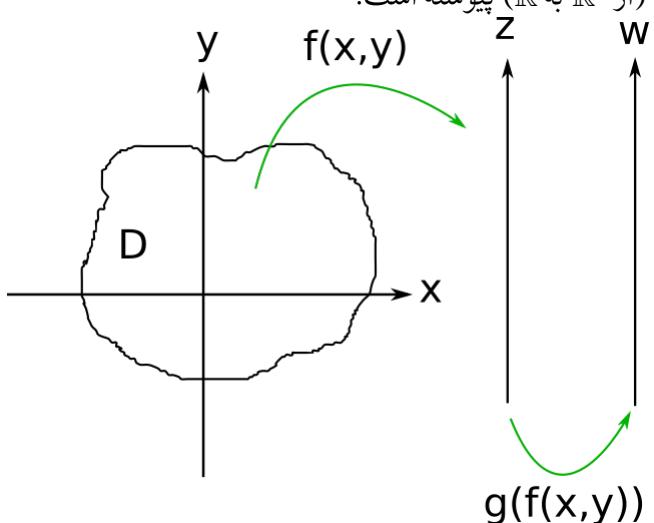
$$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g} \quad g(a, b) \neq 0, f^m$$

پیش‌تر گفتیم که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

پس  $x = z$  تابعی پیوسته است. پس توابع  $z = kx^n$  و  $z = ky^n$  نیز پیوسته‌اند. به طور مشابه توابع  $z = kxy^n$  و  $z = kx^n y^m$  پیوسته‌اند. از آنجا که حاصل جمع توابع پیوسته، پیوسته است، توابع چندجمله‌ای پیوسته‌اند. همچنین توابع خارج قسمتهای دو چندجمله‌ای، (در دامنه‌شان) پیوسته‌اند.

اگر  $w = g(z)$  (تابعی از  $\mathbb{R}^2$  به  $\mathbb{R}$ ) پیوسته باشد و  $z = f(x, y)$  (تابعی از  $\mathbb{R}^2$  به  $\mathbb{R}$ ) هم پیوسته باشد، آنگاه  $g(f(x, y))$  (از  $\mathbb{R}^2$  به  $\mathbb{R}$ ) پیوسته است.



مثال ۸۳. توابع زیر در  $\mathbb{R}^2$  پیوسته‌اند.

$$\ln(1 + x^2 y^2), \cos \frac{xy}{x^2 + 1}, e^{x-y}$$

مثال ۸۴. تابع زیر در چه نقاطی پیوسته است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

پاسخ. دامنه‌ی تابع کلی  $\mathbb{R}^2$  است. در نقاط  $(0, 0)$  تابع گویا است، پس پیوسته است. در مسیرهای  $y = mx$  به  $(0, 0)$  نزدیک می‌شویم:

$$f(x, mx) = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{2mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

مشاهده ۸۵. وقتی در مسیرهای یاد شده به نقطه‌ی  $(0, 0)$  نزدیک می‌شویم با تغییر شیب، حد تابع عوض می‌شود. در واقع اگر  $m = \tan \theta$  حد تابع برابر است با

$$\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$$

یعنی حد تابع روی این مسیرها، مقادیر مختلفی در بازه‌ی  $(1, 0)$  اتخاذ می‌کند.

□ پس تابع در نقطه‌ی  $(0, 0)$  ناپیوسته است.

تمرین ۱۰. نشان دهید که تابع  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  در نقطه‌ی  $(0, 0)$  حد ندارد. (راهنمایی: در مسیرهای  $y = kx$  حد تابع را بررسی کنید.)

تمرین ۱۱. تابع  $h(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$  در چه نقاطی پیوسته است.

## ۲.۸ توابع با بیش از دو متغیر

منظور از یک تابع سه متغیره ضابطه‌ای است مانند:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

که هر  $(x, y, z)$  متعلق به یک مجموعه‌ی  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  را به یک عنصر  $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$  می‌برد. مجموعه‌ی  $D$  را دامنه‌ی تابع  $f$  می‌خوانیم.

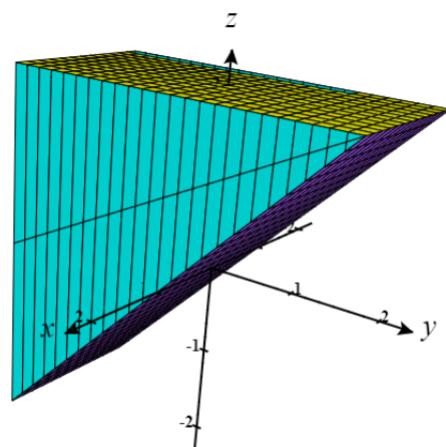
مثال ۸۶. دامنه‌ی تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin(z)$$

پاسخ.

$$D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

نیم فضای بالای صفحه‌ی  $z = y$ :



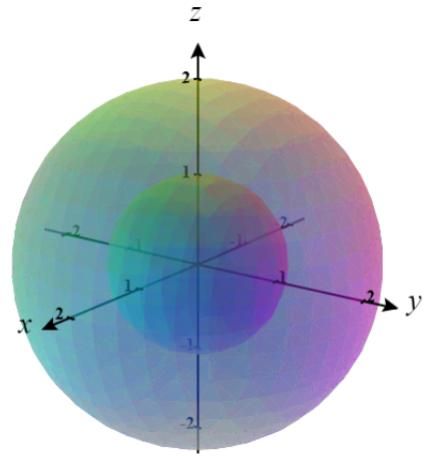
□

مثال ۸۷. رویه‌های تراز تابع  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  را رسم کنید.

پاسخ. هر رویه‌ی تراز تابع یادشده، یک کُره است:

$$k = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$k = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$



□

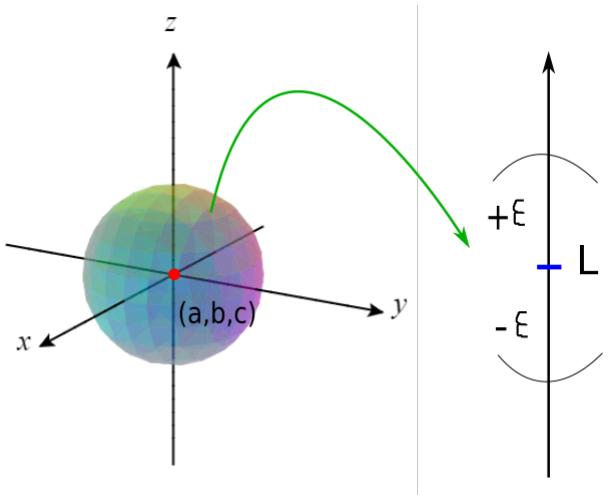
توجه کنید که رسم یک تابع از  $\mathbb{R}^3$  به  $\mathbb{R}$  ممکن نیست. عموماً دامنه‌ی چنین تابعی را در  $\mathbb{R}^3$  و بُرد آن را به عنوان زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  رسم می‌کنیم.

**تعريف ۸۸.** فرض کنید  $f$  یک تابع سه متغیره باشد.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

منظور از  $L$  این است که:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall (x, y, z) \quad \left( \underbrace{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta}_{\text{فاصله‌ی نقطه‌ی } (x, y, z) \text{ از } (a, b, c) \text{ کمتر از } \delta \text{ شود}} \rightarrow |f(x, y, z) - L| < \epsilon \right)$$



مفهوم پیوستگی برای توابع سه متغیره، بطور مشابه تعریف می‌شود. چنین تابعی را در نقطه‌ی  $(a, b, c)$  پیوسته می‌خوانیم هرگاه  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$ . به عنوان مثال تابع زیر پیوسته‌اند:

$$\ln(x, y, z), \frac{y \sin z}{x-1} \quad (x \neq 1)$$

پاسخ.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2 + \cos \sqrt{xy}} = \frac{1}{2}$$

□

تمرین ۱۲. فرض کنید  $\mathbf{R}^n \rightarrow f$ ، یک تابع باشد. با الگوگری از تعاریف حد برای توابع دو و سه متغیره، عبارت

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = L$$

را تعریف کنید.

پاسخ.

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = L \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in D(f) \\ \left( |x_1 - a_1|^r + |x_2 - a_2|^r + \dots + |x_n - a_n|^r < \delta \rightarrow |f(x_1, \dots, x_n) - L| < \epsilon \right)$$

□

مثال ۸۹. حد تابع زیر را بیابید.

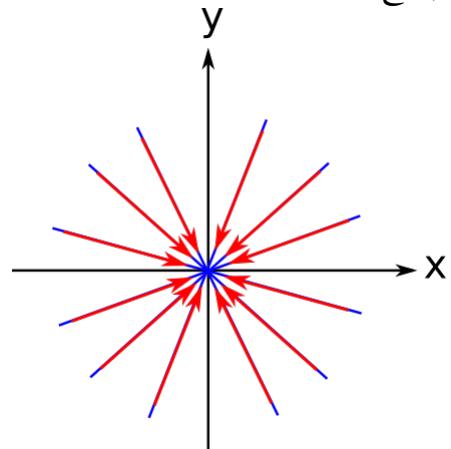
$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^r + \cos \sqrt{xy}}$$

## ۹ نیم جلسه‌ی نهم، چهارشنبه

### حل چند تمرین

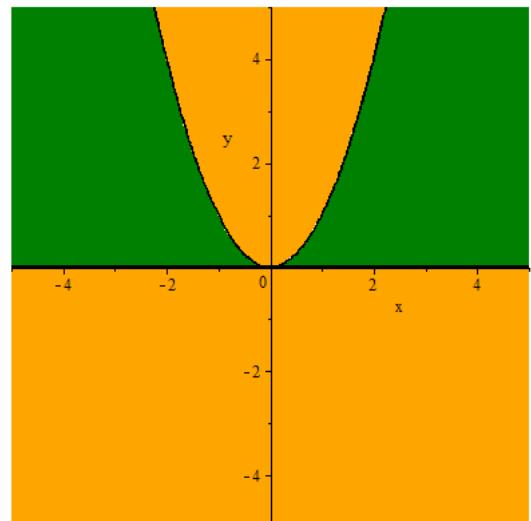
سوال ۹۰ (سوال دانشجویان). فرض کنیم تابع  $f(x, y)$  در تمام مسیرهای  $y = mx$  دارای حد برابر  $L$  باشد. آیا لزوماً حد تابع در نقطه‌ی  $(0, 0)$  برابر با  $L$  است؟

پاسخ.

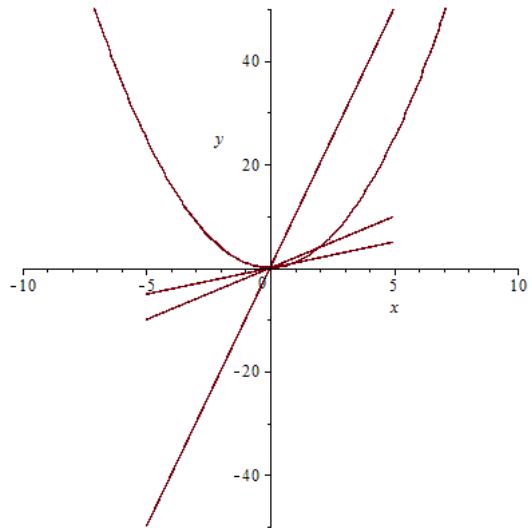


تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \text{ یا } y \geq x \\ 1 & 0 < y < x \end{cases}$$



ادعا می‌کنیم که روی تمام مسیرهای  $y = mx$  حد تابع در  $(0, 0)$  برابر با ۰ است. یک خط دلخواه  $y = mx$  را در نظر بگیرید (فرض کنیم  $m \neq 0$ ). اگر  $m > 0$  آنگاه  $mx < x$ . یعنی منحنی  $y = mx$  در بازه‌ی  $x \in (0, m)$  بالاتر از منحنی  $y = x$  قرار می‌گیرد. پس مقدار تابع مورد نظر ما روی این منحنی برابر با ۰ است. پس حد تابع نیز روی این منحنی برابر با صفر است. برای  $x$  های کمتر از صفر نیز از آنجا که  $y = mx$  دوباره مقدار تابع برابر با صفر است و حد تابع نیز صفر است. (منحنی‌های  $y = mx$  را در حالتی که  $m < 0$  شما برسی کنید).



حال ادعا می‌کنیم که حد تابع بالا در  $(0, 0)$  برابر با صفر نیست. می‌دانیم که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall (x,y) \quad \left( 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |f(x,y)| < \epsilon \right)$$

پس

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \neq 0 \iff \exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists (x,y) \quad \left( 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \wedge |f(x,y)| \geq \epsilon \right)$$

قرار دهید  $\frac{1}{\epsilon}$ . برای هر  $\delta > 0$  نقطه‌ای مانند  $(x, y)$  در دایره‌ی به شعاع  $\delta$  و مرکز  $(0, 0)$  پیدا می‌شود که در آن  $f(x, y) = 1 > \frac{1}{\epsilon}$ .  $\square$

تمرین ۱۳. نمودار تابع بالا را رسم کنید.

تمرین ۱۴. نقاطی را که تابع زیر در آنها پیوسته است، مشخص کنید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

پاسخ. از آنجا که تابع گویا در دامنه‌شان پیوسته‌اند، تابع مورد نظر در  $(0, 0) \neq (x, y)$  پیوسته است. حال باید بررسی کنیم که آیا

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1?$$

اگر قرار باشد حد بالا برقرار باشد، روی همه‌ی مسیرها به سمت  $(0, 0)$  تابع باید به ۱ میل کند. روی مسیر  $y = mx$ :

$$f(x, mx) = \frac{x^2(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{mx^2}{x^2(m^2 + 2)} = \frac{mx}{m^2 + 2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{mx}{m^2 + 2} = 0$$

بنابراین تابع در  $(0, 0)$  پیوسته نیست.

تمرین ۱۵. نشان دهید برای تابع تمرین قبل داریم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \left( \forall (x,y) \quad |x| + |y| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |f(x,y)| < \epsilon \right)$$

فرض کنید  $\epsilon > 0$  داده شده باشد.

چرکنویس.

$$\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|xy|}{x^2 + y^2}$$

حال برای آنکه کسری بزرگتر از کسر بالا بیاییم، مخرج را کوچک و صورت را بزرگ می‌کنیم.

$$\frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)|y|}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{y^2}(x^2 + y^2) \leq \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2) < \epsilon$$

حال اگر  $\delta$  هر عدد دلخواهی باشد به طوری که  $\sqrt{\epsilon} < \delta < 0$  آنگاه

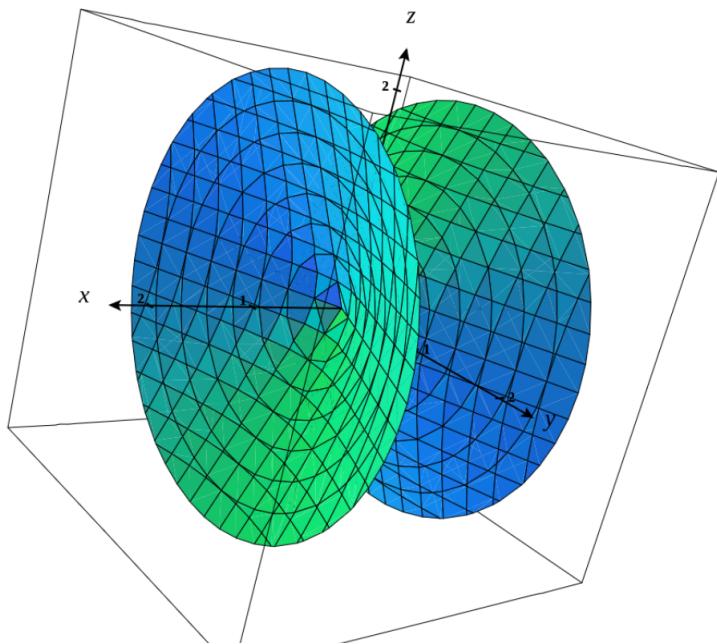
$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2) \leq \delta^2 < \epsilon$$

□

مثال ۹۱. مجموعه‌ی نقاطی را رسم کنید که فاصله‌ی آنها تا محور  $x$  دو برابر فاصله‌شان تا صفحه‌ی  $yz$  است.

پاسخ. هدفمان رسم مجموعه‌ی نقاط زیر است:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} = 2|x|\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 4x^2\}$$



□

ΛΛ

## ۱۰ جلسه‌ی دهم

تمرین ۱۶. برای  $\epsilon > 0$  داده شده،  $\delta$  را به گونه‌ای بباید که اگر  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$  آنگاه

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + 1} \quad \epsilon = 0.05 .1$$

پاسخ.

$$f(0, 0) = 0$$

چرکنویس.

$$\left| \frac{y}{x^2 + 1} \right| = \frac{\sqrt{y^2}}{x^2 + 1} \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{y^2 + x^2}$$

اگر  $\epsilon < \delta$  آنگاه اگر  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

$$\left| \frac{y}{x^2 + 1} \right| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta < \epsilon$$

□ برای  $\epsilon = 0.05$  کافیست برای مثال  $\delta = 0.005$  را در نظر بگیریم.

$$f(x, y) = \frac{y+x}{x^2 + 1} \quad \epsilon = 0.05 .2$$

$$f(x, y) = \frac{x+y}{1+\cos x} .3$$

تمرین ۱۷. آیا حد زیر وجود دارد؟

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

تمرین بالا را در جلسه‌ی بعد پاسخ گفته‌ایم.

تمرین ۱۸. نشان دهید توابع زیر در  $(0, 0)$  حد ندارند.

$$f(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} .1$$

پاسخ. مسیر  $x = y$ :

$$f(x, x) = \frac{-x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{2|x|}} = \begin{cases} x > 0 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ x < 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

در واقع در همان مسیر  $y = x$  در از دو طرف به دو حد متفاوت می‌رسیم. پس تابع مورد نظر در  $(0, 0)$  حد ندارد.

□

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} . \quad ۲$$

پاسخ. توجه کنید که مسیر  $x = y$  در این مثال، مجاز نیست زیرا این مسیر در دامنهٔ تابع قرار ندارد.

$$\begin{aligned} & \text{مسیر } y = -x \\ f(x, y) &= \frac{x + (-x)}{x - (-x)} = 0 \\ f(x, y) &= \frac{x}{x} = 1 \\ & \text{مسیر } (x, 0) \end{aligned}$$

□

## ۱.۱۰ مشتقات جزئی

در ریاضی ۱ دیدیم که مشتق توابع تک متغیره به صورت زیر تعریف می‌شود:

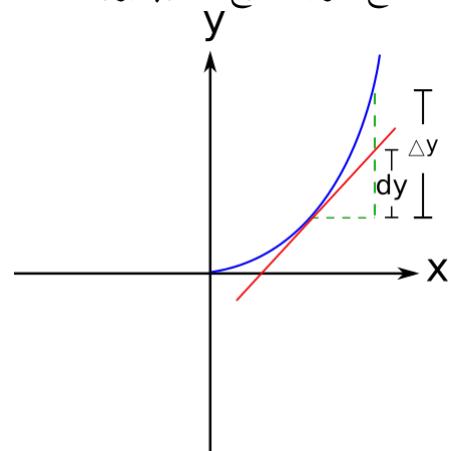
$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} x. &\in Dom(f) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x. + h) - f(x.)}{h} \end{aligned}$$

از روی مشتق، نیز «دیفرانسیل» یک تابع را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$dy = f'(x)dx$$

در واقع اگر یک تابع مشتق‌پذیر باشد، آنگاه  $\Delta y$  را می‌توان با استفاده از  $dy$  تقریب زد:



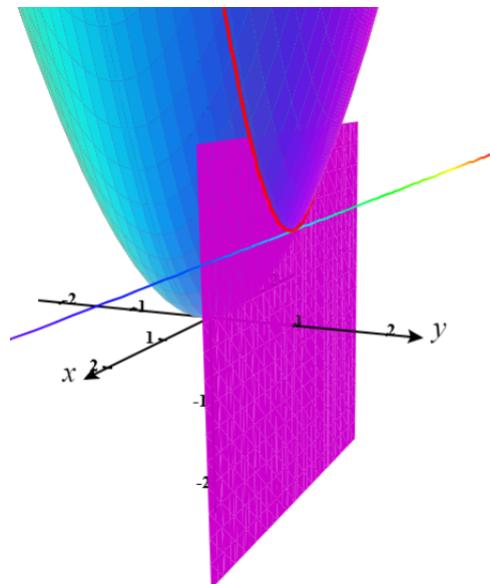
$$\Delta y \simeq dy$$

در واقع  $dy$  تغییر ارتفاع خط مماس را نشان می‌دهد و  $\Delta y$  تغییر ارتفاع تابع را. در جلسات آینده خواهیم دید که برای یک تابع  $f(x, y) = z$  نیز می‌توان  $dz$  را تعریف کرد و  $dz$  نیز قرار است تقریبی برای  $\Delta z$  باشد. در آنجا خواهیم دید که  $dz$  تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد و  $\Delta z$  تغییر ارتفاع تابع را. برای رسیدن به تعریف  $dz$  به مقدماتی

نیازمندیم که آنها را در این جلسه و چند جلسه‌ی آینده فراهم آورده‌ایم.

**مشتق جزئی تابع**  $f(x, y)$  نسبت به متغیر  $x$  در نقطه‌ی  $(x_., y_.) \in D$  به صورت زیر تعریف می‌شود: (در صورتی که حد زیر موجود باشد.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_+ + h, y_+) - f(x_+, y_+)}{h}$$



#### ۱.۱.۱۰ تعبیر هندسی

مشتق جزئی نسبت به متغیر  $x$  در نقطه‌ی  $(x_., y_.)$  در واقع شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در اشتراک رویه‌ی  $z = f(x, y)$  و صفحه‌ی  $y = y_+$  در نقطه‌ی  $(x_., y_.)$  است (به شکل بالا نگاه کنید).

**نمادگذاری**

$$f_x(x_., y_+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_+ + h, y_+) - f(x_+, y_+)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_+, y_+)$$

در واقع، مشتق جزئی بر حسب  $x$  در نقطه‌ی  $(x_., y_+)$  را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد: تابع  $(y_+, g(x))$  را در نظر بگیرید و مشتق این تابع را بر حسب  $x$  در نقطه‌ی  $x$  محاسبه کنید. در واقع، منحنی ایجاد شده در محل تقاطع صفحه‌ی  $y = y_+$  و رویه‌ی  $z = f(x, y)$  دارای معادله‌ی زیر است:

$$\begin{cases} z = g(x) = f(x, y_+) \\ y = y_+ \end{cases}$$

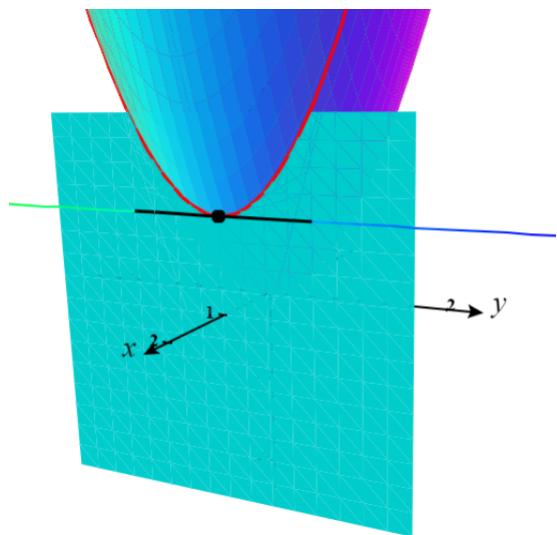
و مشتق جزئی بر حسب  $x$  در واقع شیب خط مماس بر منحنی بالاست در نقطه‌ی  $(x_., y_+)$ .

**تعریف ۹۲.**

$$f_y(x_., y_+) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_., y_+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_+, y_+ + h) - f(x_+, y_+)}{h}$$

در صورتی که این حد موجود باشد.

تمرین ۱۹. بر اساس شکل زیر  $f_y(x_0, y_0)$  را تحلیل هندسی کنید.



مثال ۹۳. مشتقات جزئی اول توابع زیر را در نقطه‌ی  $(4, 5) = (x_0, y_0)$  محاسبه کنید.

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1 \quad . \quad 1$$

پاسخ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + 3y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4, 5) = 23 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3x + 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(4, 5) = 13 \end{aligned}$$

توجه ۹۴. فرض کنید  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه

$$f_x : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x_0, y_0) \mapsto f_x(x_0, y_0)$$

خود نیز تابعی دو متغیره است، و می‌توان درباره‌ی پیوستگی یا عدم پیوستگی آن در یک نقطه سخن گفت.

راه دوم.

$$f(x, 5) = x^2 + 15x + 4 \Rightarrow f_x(x, 5) = 2x + 15 \Rightarrow f(4, 5) = 23$$

توجه ۹۵. تا کنون فهمیدیم که اگر  $(x_0, y_0) \in D(f)$  و  $z = f(x, y)$  یک تابع باشد، و

$$g(x) = f(x, y_0)$$

آنگاه

$$g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$$

و اگر قرار دهیم

$$h(y) = f(x., y)$$

آنگاه

$$h'(y.) = f_y(x., y.)$$

□

$$f(x, y) = y \sin(xy) . \quad \text{۲}$$

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^4 \cos(xy) \Rightarrow f_x(4, 5) = 25 \cos(20)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xy) + xy \cos(xy) \Rightarrow f_y(4, 5) = \sin(20) + 20 \cos(20)$$

□

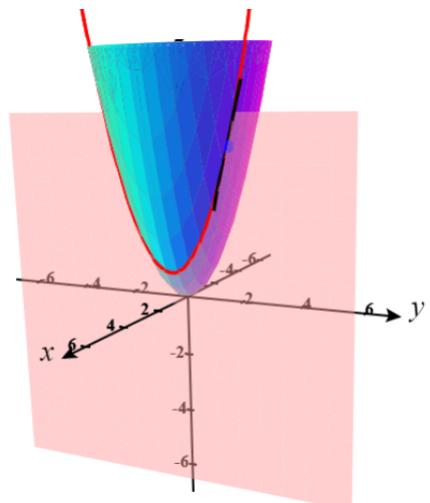
مثال ۹۶. صفحه‌ی  $1 = x$  سهمیوار  $y^2 + z = x^4 + y^2$  را در یک سهمی قطع می‌کند. شب خط مماس بر این سهمی را در نقطه‌ی  $(1, 2, 5)$  بیابید.

پاسخ. داریم

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 2y$$

مطابق آنچه گفتیم، شب خط مماس بر منحنی محل تلاقی صفحه‌ی  $1 = x$  و سهمیوار مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = 4$$



□

توجه ۹۷. در مثال بالا، در صفحه‌ی ۱ منحنی زیر را داریم:

$$\begin{cases} z = 1 + y^2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$z'(2) = 2 \times 2 = 4$$

مثال ۹۸. معادله‌ی خط مماس بر منحنی محل اشتراک رویه‌ی  $z = f(x, y)$  و صفحه‌ی  $y = y_0$  را بنویسید.

مثال بالا را در جلسه‌ی بعد حل خواهیم کرد.

## ۱۱ جلسه‌ی یازدهم، دوشنبه

### ۱.۱۱ مرور حد

مثال ۹۹. نشان دهید که  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(xy)}{x^r + y^r} = 0$

پاسخ. باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x,y) \in D \quad \left( 0 < \sqrt{x^r + y^r} < \delta \rightarrow \left| \frac{x \sin(xy)}{x^r + y^r} \right| < \epsilon \right)$$

چرکنویس.

$$\left| \frac{x \sin(xy)}{x^r + y^r} \right| = \frac{|x \sin(xy)|}{x^r + y^r}$$

$$\frac{|x \sin(xy)|}{x^r + y^r} \leq \frac{|x| |xy|}{x^r + y^r} \leq \frac{\sqrt{x^r} |x| |y|}{x^r + y^r} \leq \frac{\sqrt{x^r + y^r} \sqrt{x^r + y^r} \sqrt{x^r + y^r}}{x^r + y^r} \leq \sqrt{x^r + y^r}$$

پس اگر  $\epsilon < \delta$  آنگاه اگر  $\sqrt{x^r + y^r} < \delta$  آنگاه:

$$\left| \frac{x \sin(xy)}{x^r + y^r} \right| \leq \sqrt{x^r + y^r} < \delta < \epsilon$$

□

مثال ۱۰۰. آیا تابع زیر در نقطه‌ی  $(0,0)$  حد دارد؟

$$f(x,y) = \frac{x^r y^r}{x^r + y^r}$$

پاسخ. یک مسیر پیدا می‌کنیم که تابع روی آن حد ندارد.

چرک نویس:

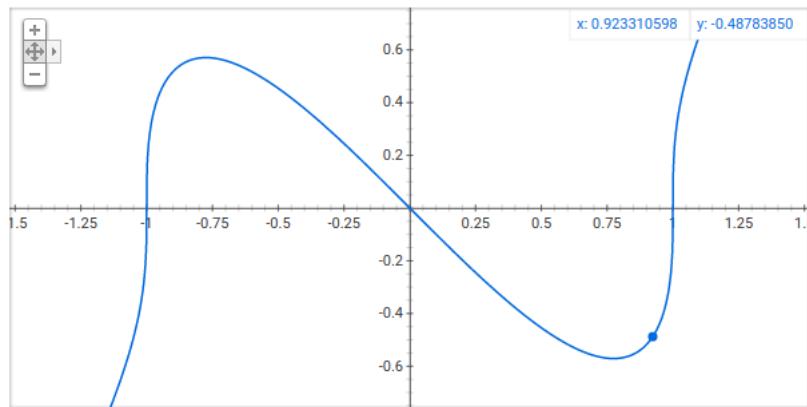
$$x^r + y^r = x^5 \Rightarrow y^r = x^5 - x^r \Rightarrow y = \sqrt[5]{x^5 - x^r}$$

اگر مسیر  $y = \sqrt[5]{x^5 - x^r}$  را انتخاب کنیم، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r (x^5 - x^r)^{\frac{1}{5}}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r (x^r (x^4 - 1))^{\frac{1}{5}}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^r - 1)^{\frac{1}{5}}}{x}$$

در کلاس گفتم که نیاز به یک همسایگی  $\delta$  داریم که در آن نامساوی  $|xy| \leq |xy| \leq |x| |y| \leq |x| |x^r (x^4 - 1)|^{\frac{1}{5}}$  برقرار باشد؛ ولی همان طور که خود شما به درستی اشاره کردید، نیازی بدان نداریم.

حد فوق وجود ندارد، پس حد تابع وجود ندارد. در زیر مسیر یادشده کشیده شده است:  
 Graph for  $(x^5 - x^3)^{1/3}$



□

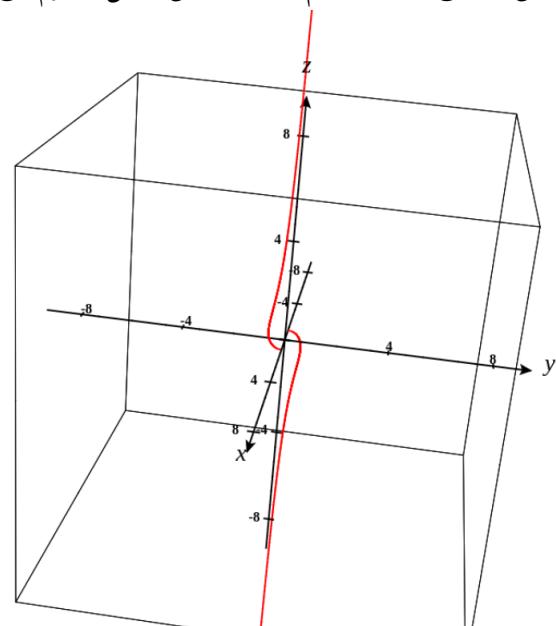
توجه کنید که خط به معادله  $y = \sqrt[3]{x^5 - x^3}$  را در فضای دو بعدی می‌توان یک تابع برداری به صورت زیر تصور کرد:

$$\vec{r}(t) = (t, \sqrt[3]{t^5 - t^3}).$$

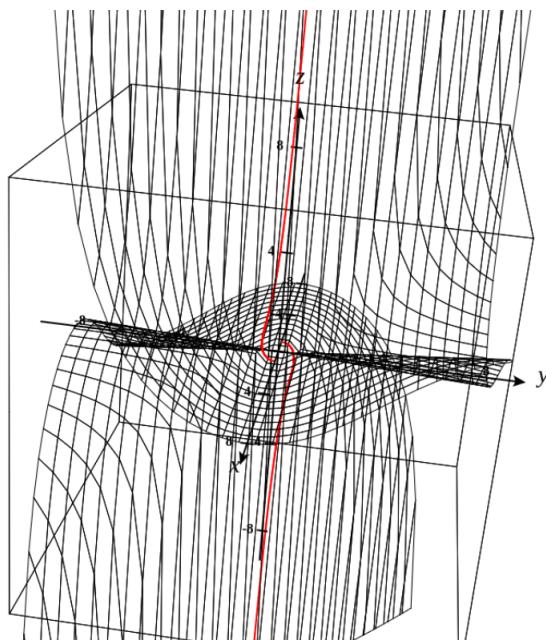
وقتی که روی منحنی فوق در صفحه  $xy$  حرکت کنیم، آنگاه، طبق محاسبات بالا، روی رویه، منحنی زیر ایجاد می‌شود:

$$\vec{r}(t) = (t, \sqrt[3]{t^5 - t^3}, \frac{(t^5 - 1)^{\frac{1}{3}}}{t})$$

در زیر شکل این منحنی را کشیده‌ایم (از روی این شکل معلوم می‌شود که چرا تابع بالا حد ندارد):



در زیر رویه را به همراه منحنی بالا که روی آن واقع است می‌بینید:

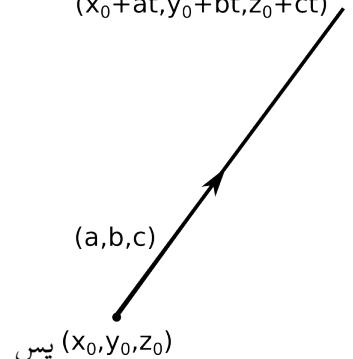


## ۲.۱۱ ادامهی بحث مشتقات جزئی

یادآوری ۱۰۱. معادله‌ای پارامتری، معادله‌ای است که در آن رابطه‌ی میان  $z, y, x$  به طور مستقیم نوشته نشود، بلکه رابطه‌ی میان آنها توسط وابستگی آنها به یک پارامتر دیگر، مثلاً زمان بیان شود. یک نمونه معادله‌ی پارامتری را در مثال بالا دیدید. به عنوان مثال دیگر، هر خط راست را می‌توان در فضای سه بعدی توسط یک معادله‌ی برداری به صورت زیر نوشت:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

از روی شکل زیر مشخص است که معادله‌ی بالا چگونه به دست آمده است:



$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

به بیان دیگر:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

بردار  $(a, b, c)$  را بردار جهت خط بالا می‌خوانیم.

توجه ۱۰۲. در واقع تابع برداری  $\mathbf{r}(t)$  یک عدد می‌گیرد و یک بردار می‌دهد:

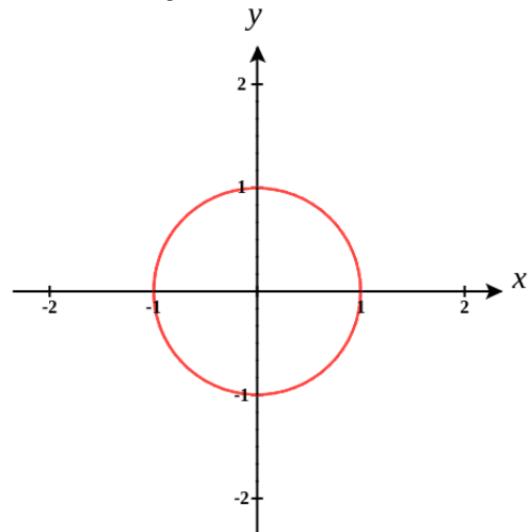
$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

$$(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

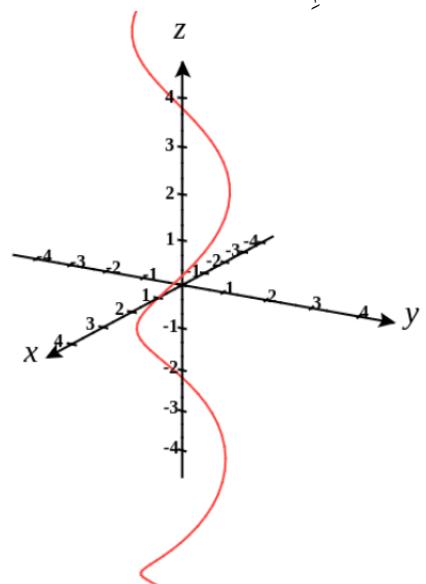
هنگام رسم چنین تابعی، پارامتر  $t$  را رسم نمی‌کنیم و فقط مقادیر برداری به دست آمده بر حسب آن را رسم می‌کنیم.

مثال ۱۰۳. منحنی فضائی  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  را رسم کنید.

توجه کنید که از آنجا که  $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ ، منحنی مورد نظر روی استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  واقع شده است. منحنی  $(\cos t, \sin t)$  نیز در دو بعد به شکل زیر است.

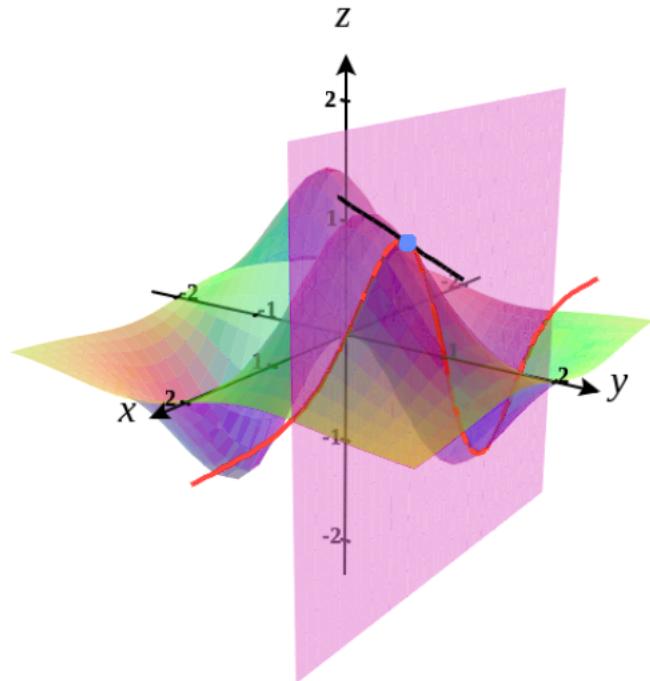


در زیر، خم  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  را رسم کرده‌ایم:



خم بالا به صورت مارپیچ دور استوانه می‌چرخد.

مثال ۱۰۴. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی  $z = f(x, y)$  و صفحه‌ی  $y = y_0$  را در نقطه‌ی  $(x_0, y_0, z_0)$  بنویسید.



پاسخ.

شیب خط مورد نظر برابر است با

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

معادلهٔ خط:

$$\begin{cases} z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

معادلهٔ پارامتری خط:

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = z_0 - \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)t \end{cases}$$

بردار مولد خط این مثال برابر است با

$$\left( 1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$$

بیان دوم. در صفحهٔ  $y = g(x) = f(x, y_0)$  منحنی  $z = g(x)$  را داریم. معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ  $x$  به صورت زیر است:

$$z - z_0 = g'(x_0)(x - x_0)$$

که در آن  $g'(x_0)$  برابر است با

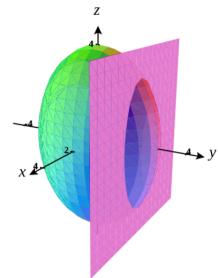
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

□

تمرین ۲۰. معادلهٔ پارامتری خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویهٔ  $z = f(x, y)$  و صفحهٔ  $x = x_0$  را در نقطهٔ  $(x_0, y_0, z_0)$  بنویسید.

مثال ۱۰۵. بیضیوار  $16 = 4x^2 + 2y^2 + z^2$  صفحه‌ی  $z = 2$  را در یک بیضی قطع می‌کند. معادلات پارامتری خط مماس بر این بیضی را در نقطه‌ی  $(1, 2, 2)$  بنویسید. (بیضی مورد نظر را نیز رسم کنید.)

پاسخ.



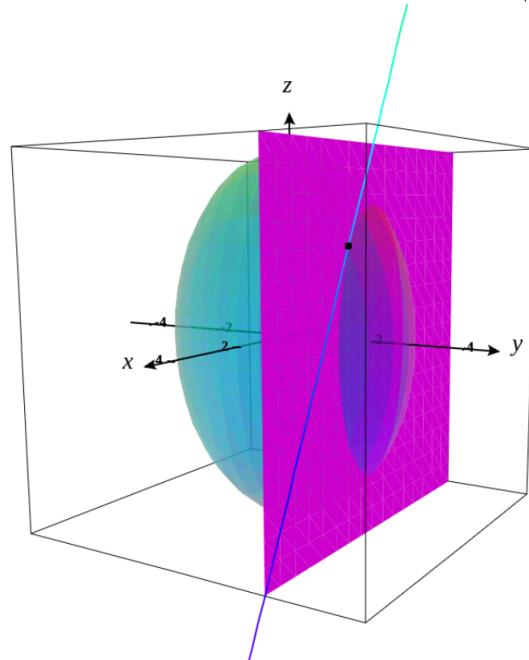
$$\begin{cases} z - z_* = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2)(x - 1) \\ y = 2 \end{cases}$$

برای محاسبه‌ی  $x$  از دو طرف معادله‌ی  $16 = 4x^2 + 2y^2 + z^2$  بر حسب  $x$  مشتق می‌گیریم.

$$8x + \cdot + 2Z \frac{\partial z}{\partial x} = \cdot \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = -2$$

$$\begin{cases} z = 4 - 2t \\ y = 2 \\ x = t \end{cases}$$

در زیر وضعیت بالا ترسیم شده است:



□

مثال ۱۰۶. فرض کنید  $x$  و  $y$  مستقل از هم باشند و  $z$  به آنها وابسته باشد و داشته باشیم:

$$yz - \ln z = x + y$$

آنگاه  $\frac{\partial z}{\partial x}$  را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} \left( y - \frac{1}{z} \right) = 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y - \frac{1}{z}}$$

□

تمرین ۲۱. اگر داشته باشیم

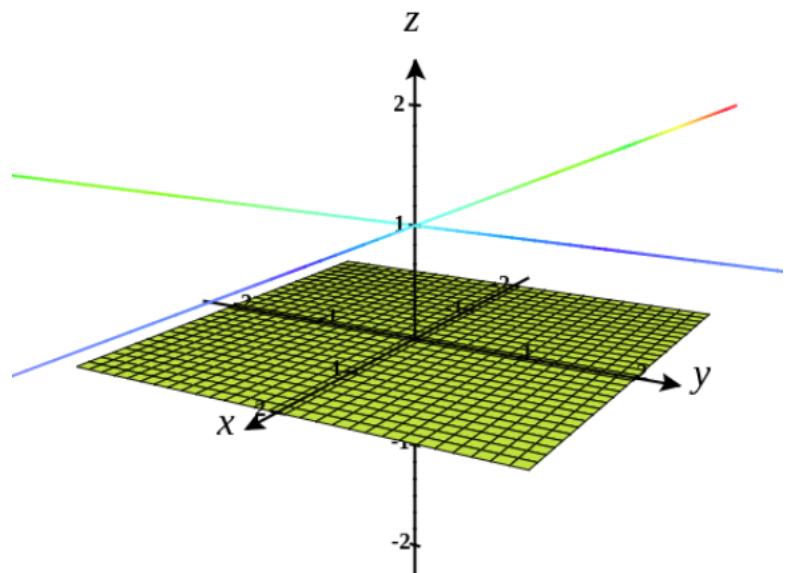
$$f(x, y) = x(x^y + y^x)^{-\frac{1}{y}} e^{\sin(x^y y)}$$

آنگاه  $(1, 0)$  را بیابید.

توجه ۱۰۷. در توابع تک متغیره (مثال تابع  $f(x) = y$ ) دیدیم که اگر مشتق تابع در یک نقطه‌ی  $x$  موجود باشد، آنگاه تابع در آن نقطه پیوسته است. اما در توابع  $z = f(x, y)$  ممکن است  $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$  هر دو موجود باشند و لی تابع در  $(x_0, y_0)$  پیوسته نباشد.

مثال ۱۰۸. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \cdot & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$



نشان دهید که تابع  $f$  در نقطه‌ی  $(0, 0)$  پیوسته نیست، اما  $(0, 0)$  و  $(0, 0)$  هر دو موجودند.

توجه ۱۰۹. اگر  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  هر دو در یک دیسک به مرکز  $(a, b)$  پیوسته باشند آنگاه  $f$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته است. در درسهای آینده خواهیم دید که تحت شرایط ذکر شده، در واقع، تابع مورد نظر دیفرانسیل پذیر است.

تمرین ۲۲.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^y y}{x^y + y^x} & \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

نشان دهید که  $f_x$  و  $f_y$  در تمام نقاط موجودند و در  $(0, 0)$  پیوسته نیستند. نشان دهید که  $f$  در مبدأ پیوسته نیست.

## ۳.۱۱ مشتقات جزئی مراتب بالاتر برای تابع $z = f(x, y)$

گفتیم که اگر  $z = f(x, y)$  یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه  $\partial z / \partial x$  و  $\partial z / \partial y$  نیز توابعی دو متغیره هستند. پس می‌توان مشتقات جزئی آنها را نیز در نظر گرفت:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{11} . ۱$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} . ۲$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} . ۳$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{22} . ۴$$

مثال ۱۱۰. مشتقات  $f_{xy}$  و  $f_{yx}$  را در یک نقطه دلخواه  $(a, b)$  بیابید.

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$$

پاسخ.

$$f_x = 3x^2 + 2xy^3 - 0$$

$$f_y = 3x^2 y^2 - 4y$$

$$f_{xy}(a, b) = 6ab^2 = f_{yx}$$

□

در مثال بالا مشاهده کردید که  $f_{xy}$  با  $f_{yx}$  برابر شد. هر چند این امر عجیب به نظر می‌رسد، ولی تحت شرایطی همواره برقرار است. در جلسه‌ی بعد در این باره صحبت خواهیم کرد.

## ۴.۱۱ تمرین

تمرین ۲۳. نشان دهید که حد های زیر موجود نیستند.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\cdot, \cdot, \cdot)} \frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2} . ۱$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\cdot, \cdot, \cdot)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^2} . ۲$$

تمرین ۲۴. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\cdot, \cdot, \cdot)} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

تمرین ۲۵. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

تابعی پیوسته است.

تمرین ۲۶. حد های زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1), x \neq 1} \frac{xy - y - x + 1}{x - 1} . \quad ۱$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,-1), x \neq -1, y \neq -1} \frac{y+1}{x+y-xy+x^2-y^2} . \quad ۲$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1), x \neq 1, y \neq 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+1}{x-y-1} . \quad ۳$$

تمرین ۲۷.  $\frac{\partial f}{\partial y}$  و  $\frac{\partial f}{\partial x}$  را بیابید.

$$f(x, y) = \frac{ax+by}{cx+dy} . \quad ۱$$

$$f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2) . \quad ۲$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x+y} . \quad ۳$$

$$f(x, y) = e^{xy} \ln y . \quad ۴$$

$$f(x, y) = \int_x^y g(t) dt . \quad ۵$$

تمرین ۲۸. تمام مشتقات جزئی دوم را بیابید.

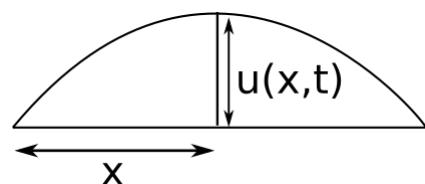
$$f(x, y) = x^2 y + \cos y + y \sin x . \quad ۱$$

$$h(x, y) = xe^y + y + 1 . \quad ۲$$

$$s(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) . \quad ۳$$

تمرین ۲۹. معادله موج به صورت کلی زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



در معادله بالا، ضریب  $a$  به جنس طناب بستگی دارد. نشان دهید که تابع  $u(x, t) = \sin(x - at)$  در معادله موج صدق می کند.

## ۱۲ نیم جلسه‌ی دوازدهم، چهارشنبه

پیش از آن که درس را شروع کنیم، لازم است در پاسخ به سوال یکی از دانشجویان مورد یک روش اشتباه برای محاسبه‌ی حد توضیحی بدهیم:

مثال ۱۱۱. ثابت کنید

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x^2 + 1} = 0$$

پاسخ. چرکنویس.

$$\left| \frac{y}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{\sqrt{y^2}}{x^2 + 1} \leq \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

پاسخ اشتباه برای سوال بالا:

بنا به محاسبات بالا باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{\delta} < \epsilon \rightarrow \delta > \frac{1}{\epsilon}$$

مثلاً اگر به ما  $0.5 = \epsilon$  داده باشند داریم:

$$\delta > 20!$$

پاسخ بالا درست نیست. توجه کنید که ما به دنبال یک  $\delta$  هستیم به طوری که عبارت زیر درست باشد:

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |f(x, y)| < \epsilon$$

بنا به محاسبات بالا اگر  $\delta < \sqrt{x^2 + y^2}$  آنگاه

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \geq \frac{1}{\delta}$$

و از قسمت آخر عبارت بالا نمی‌توان بهره‌ی چندانی برد!

برای دیدن پاسخ درست این سوال به جلسات قبل مراجعه کنید.

□

## ۱.۱۲ ادامه‌ی مشتقات جزئی

در جلسه‌ی قبل گفتیم برای یک تابع اتفاقی  $f$  دیدیم که شرطی کافی برای رویداد بالا به دست می‌دهد:

قضیه ۱۱۲ (اویلر). فرض کنید تابع  $f$  در یک دیسک  $D$  به مرکز  $(a, b)$  تعریف شده باشد. اگر  $f_{xy}$  و  $f_{yx}$  هر دو در این دیسک پیوسته باشند آنگاه

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

قضیه‌ی بالا با چند بار به کارگیری قضیه‌ی مقدار میانگین ثابت می‌شود. اثبات آن جزو اهداف این درس نیست ولی در پایان جزوی این جلسه، اثبات آن را از کتاب استوارت برای دانشجوی علاقه‌مند گذاشته‌ایم.

تمرین ۳۰. در مثال‌های زیر بررسی کنید که آیا محاسبه‌ی  $f_{xy}$  آسان‌تر است یا  $f_{yx}$ ؟

$$x \sin y + e^y . ۱$$

$$x \ln(xy) . ۲$$

$$\frac{1}{x} . ۳$$

مثال ۱۱۳ (مثال نقض برای قضیه‌ی بالا). در مثال زیر می‌بینیم که اگر شرایط قضیه‌ی بالا برقرار نباشند، آنگاه حکم آن نیز برقرار نیست. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^r y - xy^r}{x^r + y^r} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

داریم

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{(rx^r y - y^r)(x^r + y^r) - (x^r y - xy^r)(rx)}{(x^r + y^r)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

روش محاسبه‌ی  $f_x(0, 0)$ :

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0 + h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0 + h) - f_x(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-h^r)(h^r)}{h^5} = -1 \end{aligned}$$

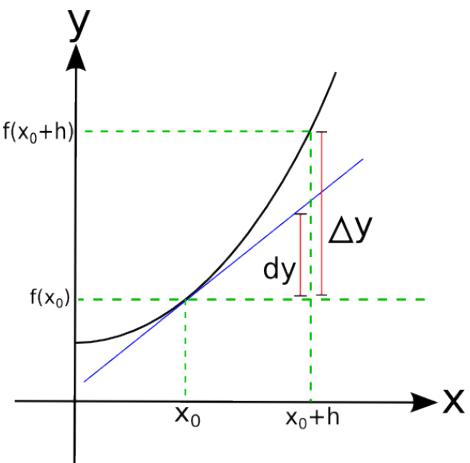
تمرین ۳۱. نشان دهید که  $f_{yx}(0, 0) = 1$

$$\cdot f_{xy}(0, 0) = -1 \quad f_{yx}(0, 0) = 1$$

تمرین ۳۲. نشان دهید که این مشاهده قضیه‌ی بالا را نقض نمی‌کند.

## ۲.۱۲ صفحه‌ی مماس

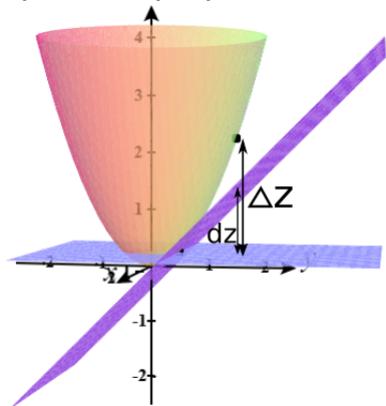
در جلسات آینده قرار است مفهوم دیفرانسیل گُلی را برای یک تابع دو متغیره تعریف کنیم. این مفهوم ارتباط تنگاتنگی با مفهوم صفحه‌ی مماس دارد. این ارتباط، البته دور از انتظار نیست. زیرا در حالت تک‌متغیره نیز، دیفرانسیل یک تابع تغییرات خط مماس بر منحنی را نشان می‌داد:



$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)h$$

$$y - y_0 \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

در حالت دو متغیره، قرار است دیفرانسیل، نمایانگر تغییرات صفحه‌ی مماس باشد:



$$\Delta z \approx dz$$

در درس‌های آینده،  $dz$  را تعریف خواهیم کرد. فعلاً در این جلسه به معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر یک رویه می‌پردازیم:

**قضیه ۱۱۴.** فرض کنید  $R \rightarrow f : R^2 \rightarrow R$  دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی  $z = f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  به صورت زیر است.

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**مشاهده ۱۱۵.** می‌دانیم معادله‌ی صفحه به صورت  $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$  است که آن را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

**توجه ۱۱۶.** بنا به قضیه‌ی بالا، بردار نرمال صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  برابر است با

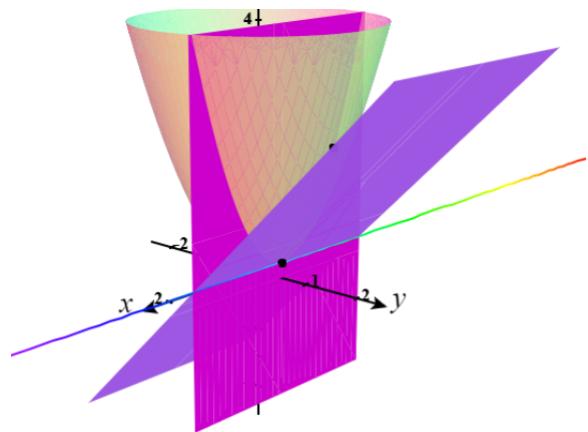
$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

اثبات قضیه. با توجه به مشاهده‌ی بالا می‌دانیم که معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$z - z_* = A(x - x_*) + B(y - y_*)$$

محاسبه‌ی  $A$ : قرار دهید  $y = y_*$ . اشتراک صفحه‌ی مماس با صفحه‌ی  $y = y_*$  خط مماس بر منحنی ایجاد شده از اشتراک رویه با صفحه‌ی  $y = y_*$  است. معادله‌ی خط مماس مورد نظر برابر است با

$$z - z_* = f_x(x_*, y_*)(x - x_*)$$



پس داریم

$$A = f_x(x_*, y_*)$$

به طور مشابه

$$B = f_y(x_*, y_*)$$

□

توجه کنید که صفحه‌ی مماس بر یک رویه در نقطه‌ی  $(x_*, y_*)$  در واقع شامل خطوط مماس (در نقطه‌ی  $(x_*, y_*, z_*)$ ) بر منحنی‌هایی است که از اشتراک رویه با صفحات گذرنده از نقطه‌ی  $(x_*, y_*)$  ایجاد می‌شوند.

اثبات قضیه اولیر:

**Clairaut's Theorem** Suppose  $f$  is defined on a disk  $D$  that contains the point  $(a, b)$ . If the functions  $f_{xy}$  and  $f_{yx}$  are both continuous on  $D$ , then  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ .

**PROOF** For small values of  $h$ ,  $h \neq 0$ , consider the difference

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a + h, b)] - [f(a, b + h) - f(a, b)]$$

Notice that if we let  $g(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$ , then

$$\Delta(h) = g(a + h) - g(a)$$

By the Mean Value Theorem, there is a number  $c$  between  $a$  and  $a + h$  such that

$$g(a + h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b + h) - f_x(c, b)]$$

Applying the Mean Value Theorem again, this time to  $f_x$ , we get a number  $d$  between  $b$  and  $b + h$  such that

$$f_x(c, b + h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combining these equations, we obtain

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

If  $h \rightarrow 0$ , then  $(c, d) \rightarrow (a, b)$ , so the continuity of  $f_{xy}$  at  $(a, b)$  gives

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \rightarrow (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Similarly, by writing

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a, b + h)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]$$

and using the Mean Value Theorem twice and the continuity of  $f_{yx}$  at  $(a, b)$ , we obtain

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

It follows that  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ . ■

## ۱۳ جلسه‌ی سیزدهم، شنبه

در<sup>۸</sup> جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی  $(x., y., z.)$  به صورت زیر است:

$$z - z. = \frac{\partial f}{\partial x}(x., y.)(x - x.) + \frac{\partial f}{\partial y}(x., y.)(y - y.)$$

**مثال ۱۱۷.** معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر سهمی‌وار بیضوی  $z = x^2 + y^2$  را در نقطه‌ی  $(1, 1)$  بنویسید.

پاسخ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= 2x|_{x=1} = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= 2y|_{y=1} = 2 \\ z - 2 &= 2(x - 1) + 2(y - 1) \end{aligned}$$

□

**توجه ۱۱۸.** صفحه‌ی به معادله‌ی  $z - z. = \frac{\partial f}{\partial x}(x., y.)(x - x.) + \frac{\partial f}{\partial y}(x., y.)(y - y.)$  در واقع تقریب خطی برای تابع  $z = f(x, y)$  حول نقطه‌ی  $(x., y.)$  است. منظور از یک تقریب خطی، تابعی است به صورت  $ax + by$ . در واقع هدفمان در بحث دیفرانسیل‌پذیری این است که تقریبی به صورت  $ax + by$  برای یک تابع  $f(x, y)$  پیدا کنیم.

**سوال ۱۱۹.** آیا تقریب خطی بالا همواره تقریب مناسبی برای مقادیر تابع است؟

**مثال ۱۲۰.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

تمرین ۳۳. نشان دهید که  $f_x$  و  $f_y$  در نقطه‌ی  $(0, 0)$  پیوسته نیستند و

$$f_x(0, 0) = 0$$

$$f_y(0, 0) = 0$$

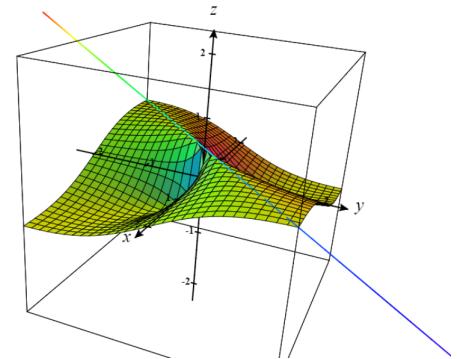
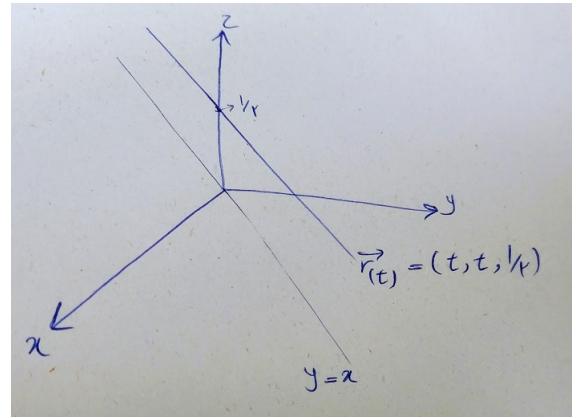
پس معادله‌ی (صفحه‌ی مماس) بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$z = 0.$$

صفحه‌ی بالا تقریب مناسبی برای مقادیر تابع نیست؛ زیرا روی روی خط  $y = x$  مقدار تابع برابر است با  $\frac{1}{2}$  و با این صفحه فاصله‌ی زیادی دارد.

---

<sup>۸</sup>زحمت تایپ جزوی این جلسه را خانم شیرجی کشیده‌اند.



در واقع صفحه‌ی مماس در صورتی تقریبی مناسب برای تابع است، که تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد.

**تعريف ۱۲۱** (غیررسمی). اگر تقریب خطی یاد شده تقریب مناسبی برای مقادیر تابع حول نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  باشد، می‌گوییم تابع مورد نظر در نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  دیفرانسیل‌پذیر است.

در ادامه، به بررسی دقیق این گفته می‌پردازیم.

### ۱.۱۳ دیفرانسیل‌پذیری، مقدمه

پیش از آنکه دیفرانسیل‌پذیری توابع دو متغیره را توضیح دهیم، مفهوم دیفرانسیل‌پذیری توابع تک‌متغیره را مرور می‌کنیم.  
فرض کنید

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

یک تابع تک‌متغیره باشد. در ریاضی ۱ دیدیم که حد زیر (در صورت وجود) مشتق تابع را به دست می‌دهد:

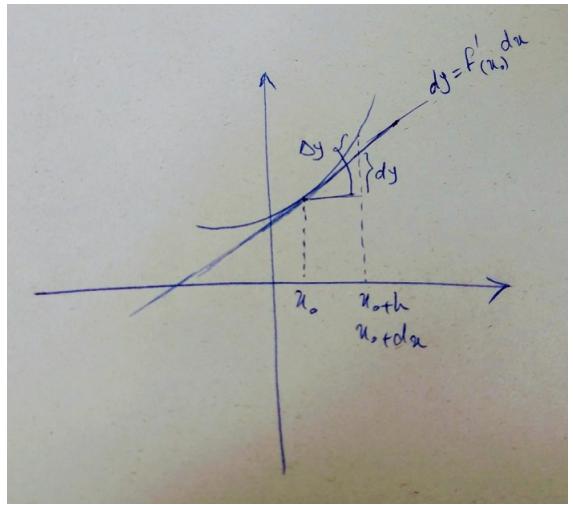
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

همچنانی گفتیم که اگر  $f'(x_0)$  موجود باشد آنگاه  $dy = f'(x_0)dx$  دیفرانسیل تابع نامیده می‌شود. گفتیم که  $dy$  در واقع تقریبی برای  $\Delta y$  است؛ پس

$$y - y_0 \approx dy = f'(x_0)(x - x_0)$$

توجه کنید که معادله‌ی خط مماس بر تابع در نقطه‌ی  $x_0$  به صورت زیر است (به شباهت دیفرانسیل و معادله‌ی این خط مماس توجه کنید).

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



تعريف دقیق دیفرانسیل‌پذیری برای توابع تک متغیره بدین صورت است: تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را در نقطه‌ی  $x_* \in D_f$  دیفرانسیل‌پذیر می‌خوانیم هرگاه  $\alpha \in \mathbb{R}$  به گونه‌ای موجود باشد که:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_* + h) - f(x_*) - \alpha h}{h} = 0.$$

در واقع وقتی تابع دیفرانسیل‌پذیر است، تابع خطی  $\alpha h$  شبیه به تابع  $f(x_* + h) - f(x_*)$  می‌شود. باید تابع صورت را  $\epsilon(h)$  بخوانیم؛ داریم

$$f(x_* + h) - f(x_*) - \alpha h = h\epsilon(h)$$

پس

$$f(x_* + h) - f(x_*) = h\epsilon(h) + \alpha h$$

دقیق کنید که<sup>۹</sup>

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

اگر  $f$  دیفرانسیل‌پذیر باشد، می‌توان ثابت کرد که  $\alpha = f'(x_*)$ . پس

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_* + h) - f(x_*) - f'(x_*)h}{h} = 0.$$

## ۲.۱۳ تعریف دقیق دیفرانسیل‌پذیری (برای توابع دو متغیره)

حال می‌خواهیم مفهوم دیفرانسیل‌پذیری را به توابع دو متغیره تعمیم بدهیم. در بالا گفتیم که تابع  $\alpha h$  تقریبی برای  $f(x_* + h) - f(x_*)$  است و دیفرانسیل به صورت  $\alpha dx$  است. در حالت دو متغیره، تقریب خطی ما برای تابع به صورت  $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$  است.

تابع  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را در نقطه‌ی  $(x_*, y_*)$  دیفرانسیل‌پذیر می‌خوانیم هرگاه  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  چنان موجود باشند که

<sup>۹</sup> معادله‌ی بالا در واقع قضیه‌ی نمود برای توابع تک متغیره است.

$$*\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_+ + h_1, y_+ + h_2) - f(x_+, y_+) - \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

مطابق حالت تک متغیره قرار دهید:

$$\epsilon(h_1, h_2) = \frac{f(x_+ + h_1, y_+ + h_2) - f(x_+, y_+) - \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

پس تابع  $f$  دیفرانسیل پذیر است هرگاه  $\alpha_1, \alpha_2, \epsilon(h_1, h_2)$  موجود باشند به طوری که

$$\Rightarrow \epsilon(h_1, h_2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2} + f(x_+, y_+) + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 = f(x_+ + h_1, y_+ + h_2)$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \epsilon(h_1, h_2) = 0$$

توجه ۱۲۲. اگر  $f$  تابعی دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_+, y_+), \frac{\partial f}{\partial y}(x_+, y_+) \right)$$

و می‌نویسیم:

$$f'(x_+, y_+) = (\alpha_1, \alpha_2).$$

برای اثبات این نکته کافیست حد اصلی بالا (\*) را روی مسیرهای  $(0, h)$  و  $(h, 0)$  محاسبه کنیم.

توجه ۱۲۳. تنها وجود  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_+, y_+)$  و  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_+, y_+)$  باعث دیفرانسیل پذیری نمی‌شود و باید حد نوشته شده در تعریف اصلی، صفر شود.

توجه ۱۲۴. اگر  $f$  در نقطه  $(x_+, y_+)$  دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه در این نقطه پیوسته است.

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} f(x_+ + h_1, y_+ + h_2) = f(x_+, y_+)$$

اثبات به عهده‌ی شما (از حد نوشته شده در تعریف \* کمک بگیرید)

. ۱۲۵ مثال

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در این مثال  $f_x$  و  $f_y$  در  $(0, 0)$  موجودند، ولی تابع در این نقطه پیوسته نیست، پس در این نقطه دیفرانسیل پذیر نیست.

مثال ۱۲۶. نشان دهید که تابع زیر در  $(0, 0)$  دیفرانسیل پذیر است.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

پاسخ. مشتقات جزئی:

$$f_x(\cdot, \cdot) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(\cdot + h_1, \cdot) - f(\cdot, \cdot)}{h_1} = .$$

$$f_y(\cdot, \cdot) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(\cdot, \cdot + h_2) - f(\cdot, \cdot)}{h_2} = .$$

حد دیفرانسیل پذیری:

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{f(\cdot + h_1, \cdot + h_2) - f(\cdot, \cdot) - \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

توجه ۱۲۷. اگر تابع  $f$  دیفرانسیل پذیر باشد، داریم:

$$\alpha_1 = f_x$$

$$\alpha_2 = f_y$$

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h_1 - f_y(x_0, y_0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = .$$

پس در مورد تابع بالا کافی است ثابت کنیم که

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{f(\cdot + h_1, \cdot + h_2) - f(\cdot, \cdot) - (\cdot)h_1 - (\cdot)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = .$$

یعنی باید ثابت کنیم که

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{h_1 h_2 (h_1^2 - h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = .$$

باید نشان داد که

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (h_1, h_2)$$

$$\left( \cdot < \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta \rightarrow \left| \frac{h_1 h_2 (h_1^2 - h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right| < \epsilon \right)$$

چرک نویس:

با توجه به  $|h_1^2 - h_2^2| \leq |h_1^2 + h_2^2|$  داریم:

$$\begin{aligned} \frac{|h_1 h_2| |(h_1^2 - h_2^2)|}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} &\leq \frac{\sqrt{h_1^2} \sqrt{h_2^2} |h_1^2 + h_2^2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} (h_1^2 + h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \end{aligned}$$

با توجه به محاسبات بالا، برای هر  $\epsilon > 0$  اگر  $\delta = \epsilon$  آنگاه اگر

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta$$

$$\frac{h_1 h_2 (h_1^* - h_2^*)}{\sqrt{(h_1^* + h_2^*)^*}} \leq \sqrt{h_1^* + h_2^*} < \delta = \epsilon$$

□

قضیه ۱۲۸ (قضیه نمود).<sup>۱۰</sup>

تابع  $f(x, y)$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  دیفرانسیل پذیر است اگر و تنها اگر توابع  $\epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$  و  $\epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$  موجود باشند بطوری که در یک همسایگی نقطه  $(x_0, y_0)$  بتوان نوشت:

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}_{=\Delta z} = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) + \epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$$

و

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$$

اثبات به عهده شما.

برای بررسی دیفرانسیل پذیری لزوماً از تعاریف استفاده نمی‌کنیم. در قضیه زیر شرطی کافی برای دیفرانسیل پذیر بودن بیان کردہ ایم:

قضیه ۱۲۹. اگر  $f_x$  و  $f_y$  هردو در یک همسایگی نقطه  $(x_0, y_0)$  پیوسته باشند، آنگاه  $f$  در آن نقطه دیفرانسیل پذیر است.

مثال ۱۳۰. نشان دهید که تابع  $f(x, y) = xe^{xy}$  در نقطه  $(0, 0)$  دیفرانسیل پذیر است و یک تقریب خطی برای این تابع در آن همسایگی بیابید.

پاسخ.

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy}$$

$$f_y(x, y) = x e^{xy}$$

تابع بالا در تمام نقاط از جمله نقطه  $(0, 0)$  پیوسته اند. پس تابع مورد نظر دیفرانسیل پذیر است. تقریب خطی:

$$\Delta z \approx f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y$$

$$f_x(0, 0) = 1 + 0 = 1$$

$$f_y(0, 0) = 0$$

$$\Delta z \approx \Delta x + \Delta y \Rightarrow f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) \approx f(0, 0) + \Delta x + \Delta y = 1 + \Delta x + \Delta y$$

<sup>۱۰</sup> Increment

پس می‌توان نوشت:

$$f(x, y) \approx 1 + (x - 1) + (y) = x + y$$

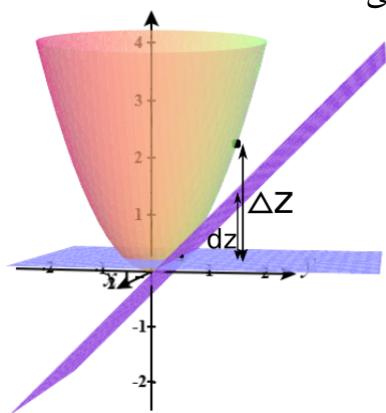
□

تعريف ۱۳۱. اگر  $f$  دیفرانسیل پذیر باشد، دیفرانسیل کلی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

با به آنچه دربارهٔ معادلهٔ صفحهٔ مماس گفتیم، دیفرانسیل کلی در واقع میزان تغییر ارتفاع صفحهٔ مماس را نشان

می‌دهد:



## ۱۴ جلسه‌ی چهاردهم

### حد توابع دو متغیره

یادآوری ۱۳۲. در بررسی حد توابع دو متغیره، دو عبارت زیر نقش کلیدی باز می‌کنند:

هر اندازه‌ی دلخواه

اندازه‌ی کافی

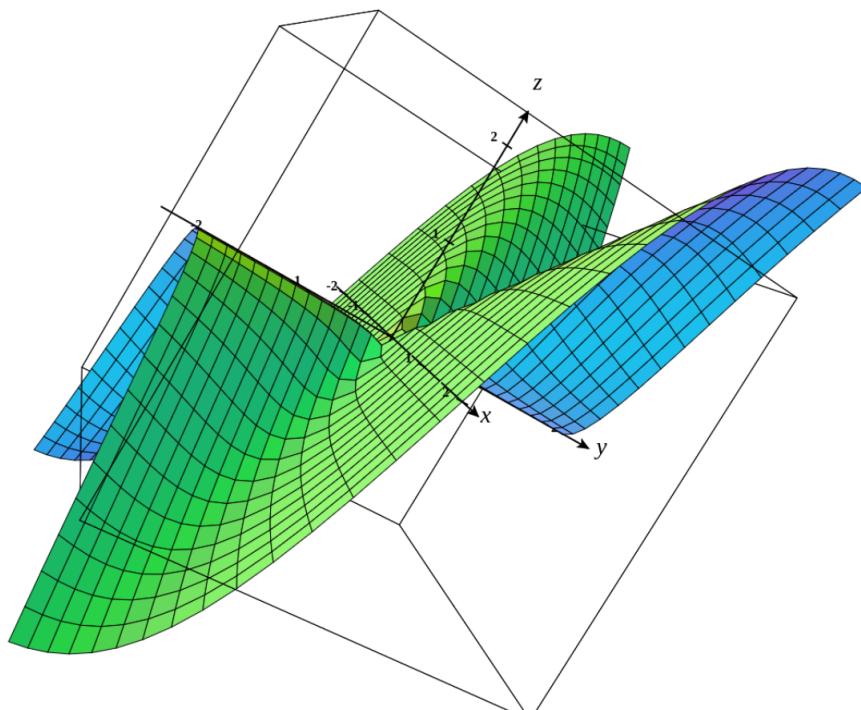
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \iff \forall \underbrace{\epsilon}_{\substack{\text{مقدار دلخواه \\ کافی}}} > 0 \quad \exists \underbrace{\delta}_{\text{kafyi}} (\|(x,y) - (a,b)\| < \delta \rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon)$$

توجه کنید که

$$\|(x,y) - (a,b)\| < r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$$

مثال ۱۳۳. با استفاده از تعریف نشان دهید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$$



پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\|(x,y) - (0,0)\| < \delta \rightarrow |f(x,y) - 0| < \epsilon)$$

## چرک نویس

$$\left| \frac{3x^{\gamma}y}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} - 0 \right| < \epsilon \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{3x^{\gamma}y}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} \right|}_{3\left| \frac{x^{\gamma}}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} \right| |y|} < \epsilon$$

با توجه به اینکه  $1 \leqslant \left| \frac{x^{\gamma}}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} \right| \leqslant 3$  اگر طرفین را در  $3|y|$  ضرب کنیم، داریم:

$$0 \leqslant 3\left| \frac{x^{\gamma}}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} \right| |y| \leqslant 3|y|$$

پس داریم:

$$\left| \frac{3x^{\gamma}y}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} \right| \leqslant 3|y|$$

$$\text{داریم } 3\sqrt{y^{\gamma}} \leqslant 3\sqrt{x^{\gamma} + y^{\gamma}}$$

در نتیجه

$$\left| \frac{3x^{\gamma}y}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} \right| \leqslant 3\sqrt{x^{\gamma} + y^{\gamma}}$$

بنا بر محاسبات بالا، برای اینکه  $\epsilon < \left| \frac{3x^{\gamma}y}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} \right|$  کافی است:

$$3\sqrt{x^{\gamma} + y^{\gamma}} < \epsilon$$

اگر  $\frac{\epsilon}{3} < \delta$  باشد، آنگاه

$$\sqrt{x^{\gamma} + y^{\gamma}} < \delta \Rightarrow 3\sqrt{x^{\gamma} + y^{\gamma}} < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{3x^{\gamma}y}{x^{\gamma} + y^{\gamma}} \right| < \epsilon$$

پس هرگاه  $\epsilon > 0$  داده شده باشد، برای اثبات این که حد تابع موجود است کافی است  $\frac{\epsilon}{3} = \delta$  در نظر گرفته شود. یعنی اگر  $\square$  آنگاه اگر فاصله‌ی  $(x, y)$  از  $L$  کمتر از  $\delta = \epsilon/3$  خواهد شد.

**مثال ۱۳۴.** ثابت کنید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_., y_.)} x = x_.$$

پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\|(x - x_.) - (y - y_.)\| < \delta \rightarrow |x - x.| < \epsilon)$$

یعنی برای یک  $\epsilon$  که به ما داده شده است، باید  $\delta$  را به گونه‌ای پیدا کنیم که

$$\sqrt{(x - x_.)^2 + (y - y_.)^2} < \delta \Rightarrow |x - x.| < \epsilon$$

دو عبارت بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x - x_.)^2 + (y - y_.)^2 < \delta^2 \quad (x - x_.)^2 < \epsilon^2$$

می‌دانیم که

$$(x - x_*)^\gamma \leq (x - x_*)^\gamma + (y - y_*)^\gamma$$

پس اگر  $\delta$  به گونه‌ای باشد که

$$\delta^\gamma < \epsilon^\gamma$$

آنگاه اگر

$$(x - x_*)^\gamma + (y - y_*)^\gamma < \delta^\gamma$$

خواهیم داشت:

$$(x - x_*)^\gamma < \epsilon^\gamma$$

یعنی

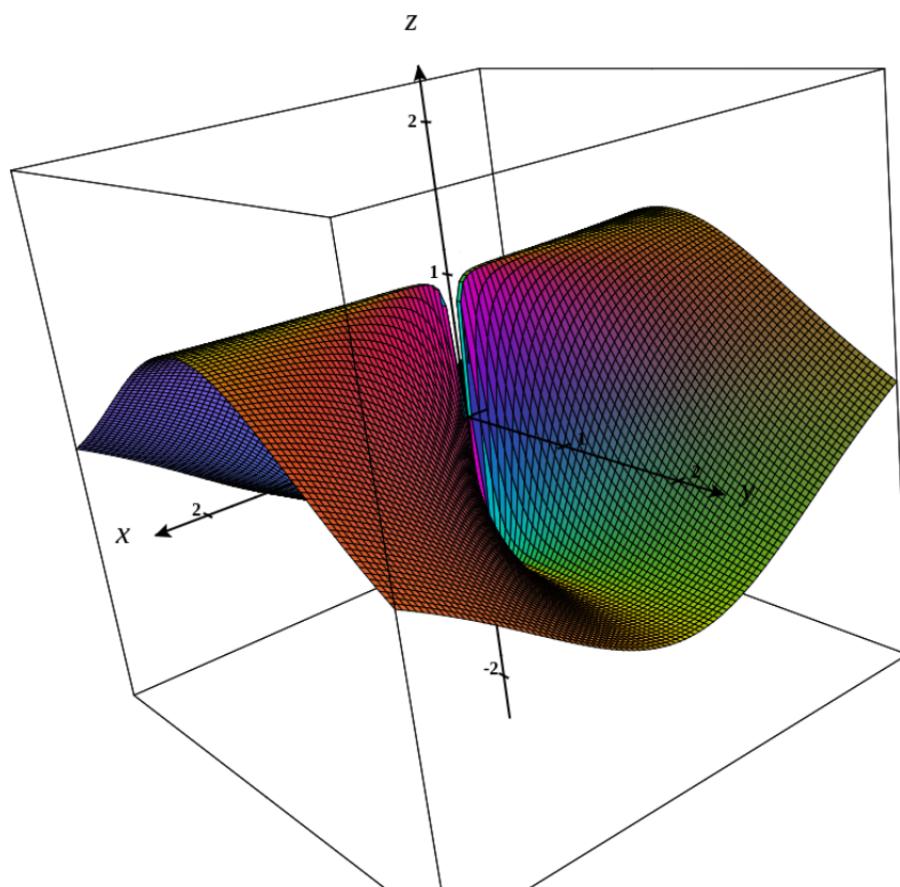
$$|x - x_*| < \epsilon$$

□

و این همان است که می‌خواستیم.

**توجه ۱۳۵.** داریم  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  اگر و تنها اگر از هر مسیری که  $(x,y)$  به  $(a,b)$  نزدیک شود، تابع  $f(x,y)$  به  $L$  نزدیک شود. پس برای این که ثابت کنیم تابعی در یک نقطه حد ندارد، کافی است دو مسیر پیدا کنیم که روی آنها حد تابع متفاوت شود.

**مثال ۱۳۶.** ثابت کنید که  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^\gamma - y^\gamma}{x^\gamma + y^\gamma}$  وجود ندارد.



پاسخ. فرض کنیم که بخواهیم روی خط  $(x, 0, 0)$  به  $(0, 0, 0)$  نزدیک شویم:

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

مقدار تابع  $z$  در نقاط  $(0, x, 0)$  برابر است با  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

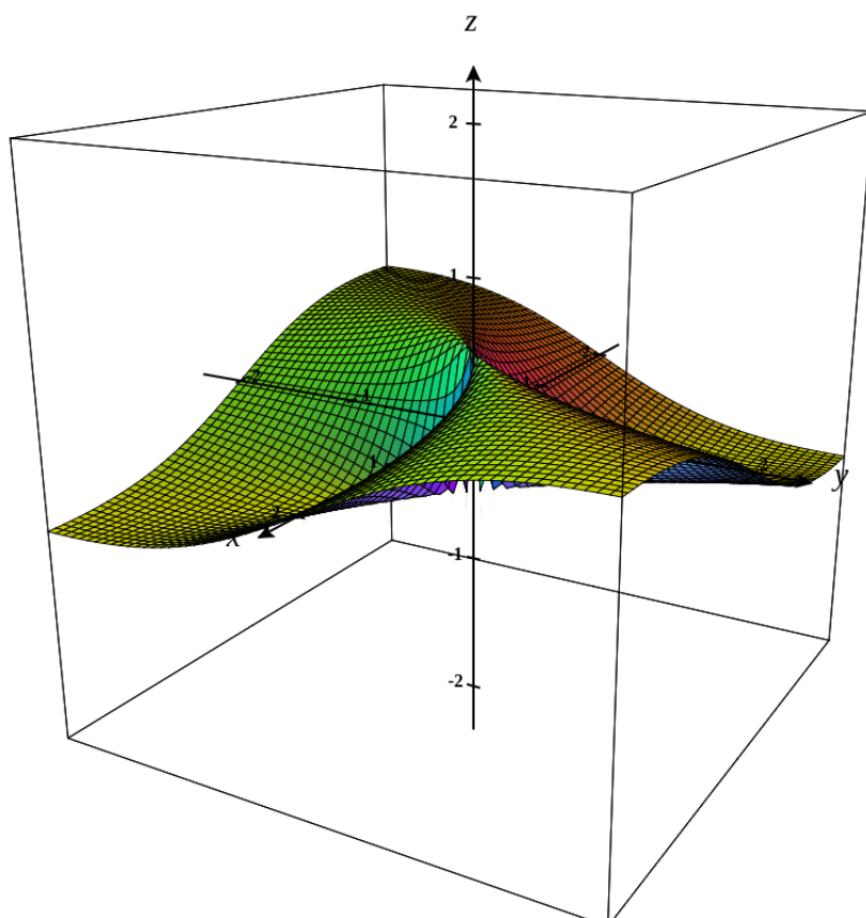
در نقاط  $(0, y, 0)$  مقدار تابع برابر است با  $\frac{-y^2}{x^2 + y^2}$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

و در نتیجه این تابع در  $(0, 0, 0)$  حد ندارد.

□

مثال ۱۳۷. نشان دهید که تابع  $\frac{xy}{x^2+y^2}$  در  $(0, 0, 0)$  حد ندارد.



پاسخ. اگر روی محور  $x$  (نقاط  $(x, 0, 0)$ ) به صفر نزدیک شویم، داریم:

$$\frac{\cdot}{x^2} = \cdot$$

و اگر روی محور  $y$  (نقاط  $(0, y, 0)$ ) به صفر نزدیک شویم، داریم:

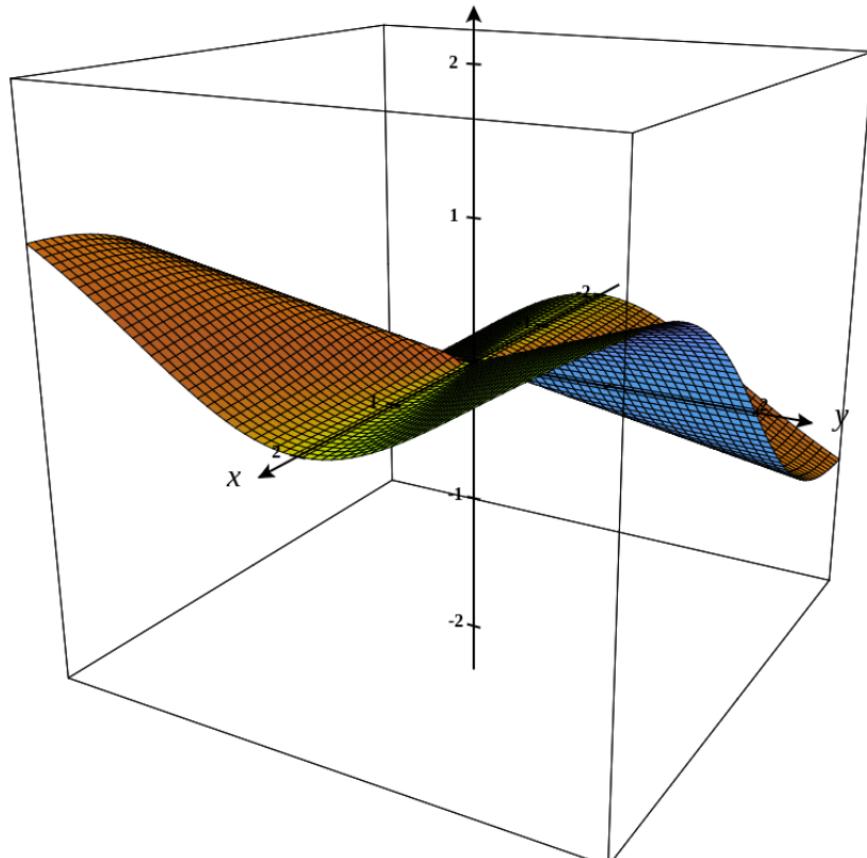
$$\frac{\cdot}{y^2} = \cdot$$

و اگر روی خط  $y = x$  به نقطه‌ی  $(0, 0)$  نزدیک شویم، داریم:

$$\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

□

مثال ۱۳۸. نشان دهید که تابع  $f(x, y) = \frac{xy^4}{x^4+y^4}$  در  $(0, 0)$  حد ندارد.



پاسخ. از سمت محور  $x$ :

$$\frac{x \times 0}{x^4} = \frac{0}{x^4} = 0$$

از سمت محور  $y$ :

$$\frac{0 \times y^4}{0 + y^4} = \frac{0}{y^4} = 0$$

روی خط  $x = y$  به  $(0, 0)$  نزدیک می‌شویم:

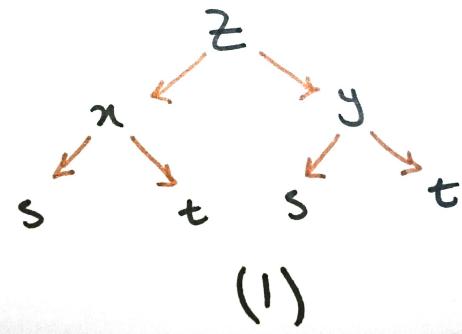
$$\frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

□

## ۱۵ نیم جلسه‌ی پانزدهم، چهارشنبه

### ۱.۱۵ ادامه‌ی قاعده‌ی زنجیره‌ای

برای به خاطر سپردن نحوه‌ی به کارگیری قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان از درخت زیر استفاده کرد:



مثلًا برای محاسبه‌ی مشتق جزئی بر حسب  $s$  باید تمام مسیرها از بالا درخت به سمت  $s$  طی شوند:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال ۱۳۹. فرض کنید  $z = f(x, y)$  مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته داشته باشد و

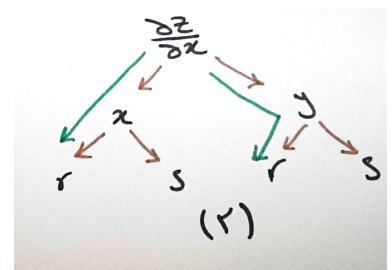
$$x = r^s + s^r$$

$$y = 2rs$$

آنگاه  $\frac{\partial z}{\partial r}$  و  $\frac{\partial z}{\partial s}$  را محاسبه کنید.

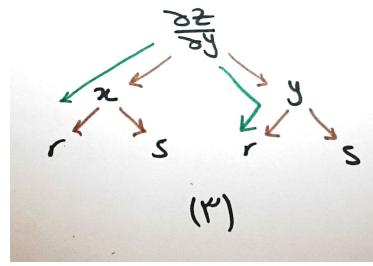
پاسخ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) (2r) + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) (2s) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} (2r) + \frac{\partial z}{\partial y} (2s) \right) = \\ &\quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} 2r \right)}_A + \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial y} 2s \right)}_B \\ A &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) 2r + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \times \frac{\partial y}{\partial r} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = \\ &\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \times (2s) + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \end{aligned}$$



$$B = 2s \times \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2s \times \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \times \frac{\partial y}{\partial r} \right) =$$

$$z \times \left( \frac{\partial z}{\partial x} \times r + \frac{\partial z}{\partial y} \times s \right)$$



□

مفهوم دیفرانسیل پذیری را می‌توان به توابع سه متغیره نیز تعمیم داد و قواعد دیفرانسیل پذیری و قاعده‌ی زنجیره‌ای برای توابع سه متغیره نیز درستند.

$$\omega = f(x, y, z) \quad \omega : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz$$

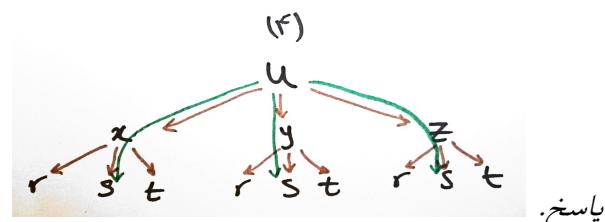
مثال ۱۴۰.  $\frac{\partial u}{\partial s}$  را محاسبه کنید.

$$u = x^r y + y^r z^r$$

$$x = rse^t$$

$$y = rs^t e^t$$

$$z = r^s s \sin t$$



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = \dots$$

□

## ۲.۱۵ مشتقگیری ضمنی

فرض کنید که مقادیر  $y$  بر حسب  $x$  در طی یک معادله‌ی  $F(x, y) = 0$  به طور ضمنی داده شده باشد. چنین معادله‌ای را می‌توان معادله‌ی یک منحنی تراز برای رویه‌ی  $f(x, y) = z$  فرض کرد.

توجه ۱۴۱.  $z = f(x, y)$  رویه‌است ولی  $f(x, y) = k$  یک عدد ثابت است، منحنی تراز رویه در ارتفاع  $k$  است.

فرض کنید که بدانیم که  $y$  تابعی از  $x$  است. پس داریم:

$$F\left(x, \overset{=y}{f(x)}\right) = \cdot$$

داریم

$$\begin{aligned} dF &= \cdot \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \cdot \\ \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} dx &= -\frac{\partial F}{\partial y} dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{-F_x}{F_y} \end{aligned}$$

قضیه ۱۴۲ (تابع ضمنی). فرض کنید  $F$  در یک دیسک شامل  $(a, b)$  تعریف شده باشد و  $F(a, b) = 0$  و  $F_y(a, b) \neq 0$ . روی آن دیسک پیوسته باشند. آنگاه از معادله  $\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y}$  می‌توان  $y$  را به عنوان تابعی از  $x$  استخراج کرد و مشتق این تابع از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

تمرین ۳۴. فرض کنید که معادله

$$F(x, y, z) = \cdot$$

مقادیر  $z$  را به طور ضمنی بر حسب  $x, y$  به دست دهد. آنگاه  $\frac{\partial z}{\partial x}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$  را محاسبه کنید.

قضیه ۱۴۳ (قضیهی تابع ضمنی برای توابع سه متغیره). فرض کنید که تابع سه متغیره  $F$  در یک کرهٔ شامل نقطهٔ  $(a, b, c)$  تعریف شده باشد و  $F_x, F_y, F_z$  هر سه در این کره پیوسته باشند و  $F(a, b, c) = 0$ . آنگاه  $F_z(a, b, c) \neq 0$ . آنگاه  $F(x, y, z) = 0$  متفاوت تابعی دیفرانسیل پذیر از  $y$  در یک همسایگی نقطهٔ  $(a, b, c)$  به دست رابطهٔ  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$  می‌دهد و برای این تابع داریم:

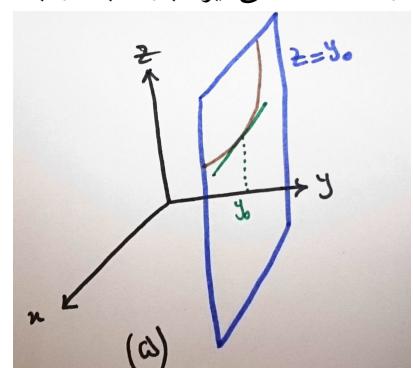
$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \end{aligned}$$

### ۳.۱۵ مشتقات سوئی

گفتیم که برای محاسبه  $\frac{\partial z}{\partial x}$  در نقطهٔ  $y = y_0$  کافی است از تابع زیر بر حسب  $x$  مشتق بگیریم:

$$z = f(x, y_0)$$

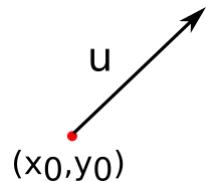
از لحاظ هندسی نیز عبارت بالا را به صورت زیر تحلیل کردیم:



مشتق مورد نظر از عبارت زیر به دست می‌آمد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(x_0 + h, y_0)}^{=f((x_0, y_0) + h(1, 0))} - f(x_0, y_0)}{h}$$

با به عبارتی که در آکولاد بالائی نوشته‌ایم، برای محاسبه‌ی مشتق جزئی بر حسب  $x$  از نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  در جهت بردار  $\vec{u}$  (۰، ۱) به اندازه‌ی  $h$  دور شده‌ایم و تغییرات تابع را اندازه‌گیری کرده‌ایم:



در واقع از یک تابع داده شده می‌توان در جهت هر بردار دلخواهی مشتق گرفت:

فرض کنید  $(a, b) = \vec{u}$  یک بردار یکه باشد. مشتق سوئی تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  در جهت بردار  $\vec{u}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$$

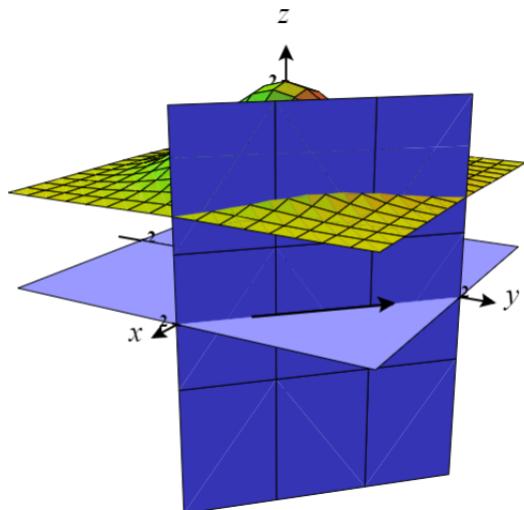
به طور خاص اگر  $\vec{u} = (1, 0)$  آنگاه

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$$

مشابهًا اگر  $\vec{u} = (0, 1)$  آنگاه

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

مشتق سوئی در جهت بردار  $u$  را به صورت زیر تعبیر هندسی می‌کنیم: صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  در جهت بردار  $u$  و موازی محور  $z$  را رسم می‌کنیم و شبی خط مماس بر منحنی ایجاد شده در اشتراک این صفحه با رویه را حساب می‌کنیم:



با استفاده از مشتقات سوئی می‌توانیم به بررسی این نکته بپردازیم که تابع ما در جهت‌های مختلف، با چه نرخی تغییر می‌کند و در کدام جهت، سریعتر تغییر می‌کند.

## ۱۶ جلسه‌ی شانزدهم، شنبه

یادآوری ۱۴۴. گفتیم<sup>۱۱</sup> که اگر تابع  $y$  تابعی دیفرانسیل پذیر بر حسب  $x$  باشد و معادله‌ی زیر برقرار باشد:

$$F(x, y) = 0$$

آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

مثال ۱۴۵. فرض کنید  $y$  تابعی از  $x$  باشد و  $y' = 6xy$  را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 6y \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + 6y}{3y^2 - 6x}$$

□

تعمیم ۱۴۶. فرض کنید که  $z$  تابعی از  $x$  و  $y$  باشد و  $w = F(x, y, z) = 0$  آنگاه:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

پس

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z}$$

مثال ۱۴۷. را بیابید، با این فرض که

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1 = 0$$

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(3x^2 + 6yz)}{3z^2 + 6xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \dots$$

□

---

<sup>۱۱</sup> زحمت تایپ جزوی این جلسه را خانم شیرجزی کشیده‌اند.

## ۱.۱۶ ادامه‌ی مشتق سویی

گفتیم که مشتق سوئی یک تابع دو متغیره‌ی  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  در جهت بردار یکه‌ی  $u = (a, b)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

گفتیم که از لحاظ هندسی، محاسبه‌ی مشتق سوئی در جهت بردار یاد شده، یعنی در نظر گرفتن اشتراک رویه با صفحه‌ی زیر:

$$\begin{cases} y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

و محاسبه‌ی شب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در نقطه‌ی  $(x_0, y_0, z_0)$ . نیز گفتیم که در جهت دو بردار زیر، مشتقهای سوئی همان مشتقهای جزئی هستند:

$$i = (1, 0) \quad D_i f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$j = (0, 1) \quad D_j f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

قضیه ۱۴۸. فرض کنید  $z = f(x, y)$  تابعی دیفرانسیل پذیر بر حسب  $x$  و  $y$  باشد. آنگاه مشتق  $f$  در جهت هر بردار یکه‌ی  $(a, b)$  موجود است و از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$u = (a, b) \quad D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (a, b)$$

تمرینهای ۵۷ و ۵۹ را ببینید.

اثبات. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$g(h) = f(x_0 + ah, y_0 + bh)$$

داریم

$$g'(\cdot) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h} = D_u f(x_0, y_0)$$

اما از طرفی

$$g = f(x, y)$$

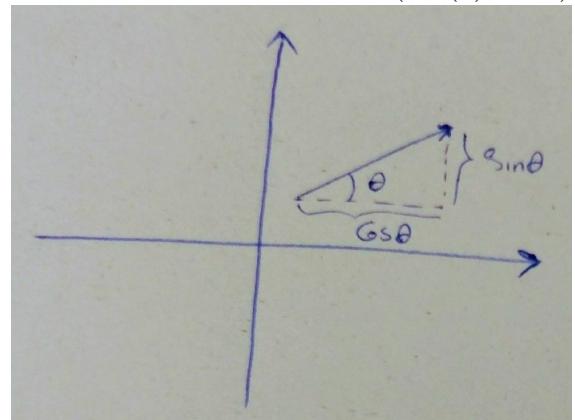
$$x = x_0 + ha, \quad y = y_0 + hb$$

پس

$$g'(\cdot) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b$$

□

توجه کنید که هر بردار یکه‌ی دو بعدی  $u$  را می‌توان با توجه به زاویه‌ای که با محور  $x$  می‌سازد به صورت  $u = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  نشان داد:



در این صورت داریم:

$$D_u f = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

مثال ۱۴۹. فرض کنید  $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$  و فرض کنید که  $u$  برداری باشد که با محور  $x$  زاویه‌ی  $\theta$  می‌سازد. مشتق تابع را در جهت این بردار محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \left( \cos \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \sin \frac{\pi}{6} \right) = (3x^2 - 3y) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + (-3x + 8y) \left( \frac{1}{2} \right)$$

□

در طی جلسات گذشته حتماً متوجه شده‌اید که بردار  $(f_x(x, y), f_y(x, y))$  در تعاریف مربوط به مشتق ظاهر می‌شود. این تابع برداری شایسته‌ی نامی است:

تعريف ۱۵۰. فرض کنید  $f(x, y)$  یک تابع دو متغیره باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \vec{j}$$

علامت  $\nabla$  نابلا خوانده می‌شود و نابلا کلمه‌ای یونانی به معنی ساز «چنگ» است. تابع بالا را تابع گرادیان می‌خوانیم. توجه کنید که گرادیان یک تابع برداری است. یعنی هر نقطه از  $\mathbb{R}^2$  را به یک بردار در  $\mathbb{R}^2$  می‌برد.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\nabla(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

مثال ۱۵۱. اگر آنگاه  $f(x, y) = \sin x + e^{xy}$

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \vec{j} = (\cos x + ye^{xy}) \vec{i} + (xe^{xy}) \vec{j}$$

$$(x, y) \mapsto (\cos x + ye^{xy}) \vec{i} + (xe^{xy}) \vec{j}$$

توجه ۱۵۲. با استفاده از نماد نابلا می‌توان نوشت: (اگر  $(u = (a, b)$ )

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (a, b) = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b$$

مثال ۱۵۳. مشتق تابع  $f(x, y) = x^4y^3 - 4y$  را در جهت بردار  $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$  و در نقطه‌ی  $(1, -1)$  محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D_u f(x., y.) = \nabla f(x., y.) \cdot \vec{u}$$

$$\nabla f(x., y.) = (4xy^3, 3x^4y^2 - 4)$$

$$\nabla f(1, -1) = (-4, 1)$$

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\|v\|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}} \vec{j}$$

$$D_{(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}})} f(1, -1) = -4 \times \frac{2}{\sqrt{29}} + 1 \times \frac{5}{\sqrt{29}}$$

□

توجه ۱۵۴. فرض کنید  $f : R^3 \rightarrow R$  تابعی سه متغیره باشد. آنگاه  $\nabla f : R^3 \rightarrow R^3$  دارای ضابطه‌ی زیر است:

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right)$$

همچنین اگر  $\vec{u} = (a, b, c)$  یک بردار یکه باشد، تعریف می‌کنیم:

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

مثال ۱۵۵. مشتق تابع  $f(x, y, z) = x \sin(yz)$  را در جهت بردار  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  در نقطه‌ی  $(1, 3, 0)$  محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\nabla f(x., y., z.) = (\sin(y.z.), x.z. \cos(y.z.), x.y. \cos(y.z.))$$

$$\nabla f(1, 3, 0) = (\sin(0), 0 \times \cos(0), 3 \times \cos(0)) = (0, 0, 3)$$

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\|v\|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}} \vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{k}$$

$$D_u f(1, 3, 0) = (0, 0, 3) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = 0 + 0 - \frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{3}{\sqrt{6}}$$

□

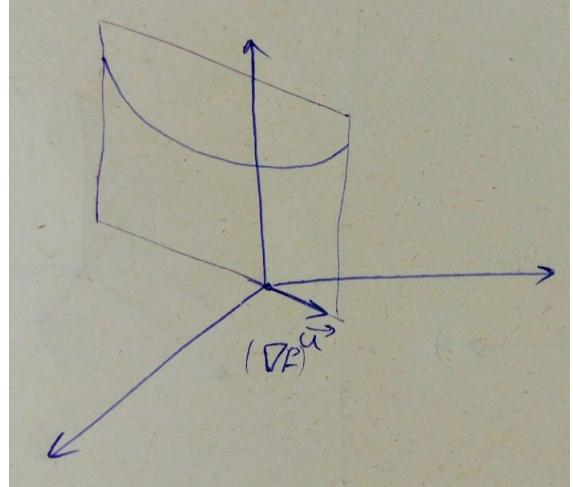
توجه ۱۵۶. فرض کنید  $f$  (دو متغیره یا سه متغیره) تابعی دیفرانسیل پذیر باشد. گفتیم که:

$$D_u f(x., y.) = \nabla f(x., y.). \vec{u} = \|\nabla f(x., y.)\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta$$

( $\theta$  زاویه‌ی بین و  $\vec{u}$  است).

بنابراین حداکثر مقدار  $D_u$  زمانی روی می‌دهد که  $\cos \theta = 1$ ; یعنی زمانی که  $\vec{u}$  در جهت بردار گرادیان باشد؛ و این

مقدار برابر است با:  $\|\nabla f(x., y.)\|$



### مثال ۱۵۷

الف) نرخ تغییرات تابع  $f(x, y) = xe^y$  را وقتی از نقطه‌ی  $(2, 0)$  به سمت نقطه‌ی  $(2, \frac{1}{2})$  حرکت می‌کنیم، بیابیم.

ب) در کدام جهت تابع حداکثر نرخ تغییرات را دارد و این مقدار چقدر است؟

پاسخ.

$$\vec{v} = (\frac{1}{2} - 2, 2 - 0) = (-\frac{3}{2}, 2)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(-\frac{3}{2}, 2)}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4}} = \frac{(-\frac{3}{2}, 2)}{\frac{5}{2}} = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$$

$$\nabla f(x., y.) = (e^{y.}, x \cdot e^{y.})$$

$$\nabla f(2, 0) = (1, 2)$$

$$D_u f(2, 0) = \nabla f \cdot \vec{u} = (1, 2) \cdot (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{-3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

□ تابع در جهت بردار  $(1, 2)$  حداکثر نرخ تغییرات را دارد و این مقدار برابر است با:  $\sqrt{4+1}$ .

۱.۱۷ حل چند تمرین

تمرین ۳۵. تابع  $f$  را همگن از درجه‌ی  $n$  می‌خوانیم هرگاه  $f$  مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد و

$$\forall t \quad f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

الف) نشان دهید که تابع زیر همگن از درجه‌ی ۳ است.

$$f(x, y) = x^3y + 2xy^3 + 5y^3$$

پاسخ.

$$f(x, y) = x^3y + 2xy^3 + 5y^3$$

$$f(tx, ty) = t^3(x^3y + 2xy^3 + 5y^3)$$

$$f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$$

□

ب) اگر  $f$  همگن از درجه‌ی  $n$  باشد، نشان دهید که

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$$

پاسخ. از آنجا که  $f$  همگن است داریم:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

پس، بنا به قاعده‌ی زنجیره‌ای:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \underset{\substack{\text{مولفه‌ی اول} \\ \text{مولفه‌ی اول}}}{t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \underset{\substack{\text{مولفه‌ی دوم} \\ \text{مولفه‌ی دوم}}}{t} = n t^{n-1} f(x, y)$$

پس:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) \times x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \times y = n t^{n-1} f(x, y)$$

برای رسیدن به معادله‌ی حکم سوال، تغییر متغیر زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) \times \frac{u}{t} + \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \times \frac{v}{t} = n t^{n-1} f\left(\frac{u}{t}, \frac{v}{t}\right)$$

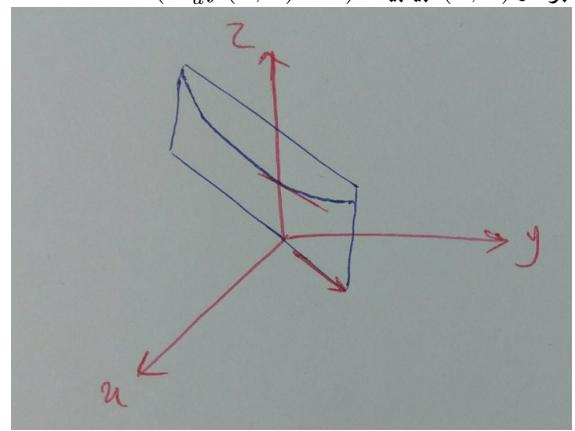
در  $t$  ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) \times u + \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \times v = n t^{n-1} f\left(\frac{u}{t}, \frac{v}{t}\right) = n f\left(t \times \frac{u}{t}, t \times \frac{v}{t}\right) = n f(u, v)$$

□

و حکم در اینجا ثابت می‌شود.

تمرین ۳۶. اگر  $f(x, y) = xe^{xy}$  مشتقهای مرتبه دوم پیوسته داشته باشد، مشتق سوئی دوم این تابع را در جهت بردار  $(4, 6)$  بیابید.



توجه ۱۵۸. فرض کنید  $f(x, y)$  و  $u = (a, b)$  داریم:

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b$$

$$\begin{aligned} D_u^2 f(x, y) &= D_u \left[ \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b \right] = D_u \left( \frac{\partial f}{\partial x} a \right) + D_u \left( \frac{\partial f}{\partial y} b \right) = \\ &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} ab + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} ab + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} b^2 = \\ &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} ab + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} b^2 \end{aligned}$$

توجه کنید که در قسمت آخر از این فرض استفاده کردہ ایم که مشتقهای مرتبه دوم تابع مورد نظر پیوسته‌اند.

با استفاده از توجه بالا تمرین را حل کنید. توجه کنید که باید بردار داده شده را تبدیل به یک بردار یکه کنید.

تمرین ۳۷. آیا تابع زیر در مبدأ پیوسته است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$

پاسخ. ادعا می‌کنیم که تابع بالا در نقطه  $(0, 0)$  پیوسته است. باید نشان دهیم که:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) (|x| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |f(x, y) - 1| < \epsilon)$$

توجه ۱۵۹. در نقاط نزدیک به صفر اگر تابع از ضابطه دوم پیروی کند، همواره داریم:

$$|f(x, y) - 1| = |1 - 1| < \epsilon$$

پس تنها  $(x, y)$  هایی را در نظر می‌گیریم که  $xy \neq 0$  داریم:

$$\left| \frac{\sin(xy)}{xy} - 1 \right| = \left| \frac{\sin(xy) - xy}{xy} \right|$$

بسط تیلور:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

ادعا: برای هر  $\epsilon > 0$  داریم:

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}$$

این ادعا را با روش‌هایی که در درس ریاضی ۱ فراگرفته‌اید ثابت کنید.

بنا به ادعای بالا:

$$\frac{|\sin(xy) - xy|}{|xy|} \leq \frac{|x^3y^3|}{36|xy|} \leq \frac{x^3y^3}{36}$$

اگر  $\sqrt{x^3 + y^3} < \delta$  آنگاه اگر  $\sqrt[3]{6\epsilon} < \delta$  آنگاه:

$$|f(x, y) - 1| < \epsilon$$

□

تمرین ۳۸. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^3+y^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در این صورت  $(0, 0)$  را بیابید.

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^3}}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3(x^3+y^3)-y^3(x^3+y^3)}{(x^3+y^3)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(h, 0) - f_x(0, 0)}{h} = \dots$$

ادامه دادن راه حل بالا را به عهده‌ی شما نهاده‌ایم.

□

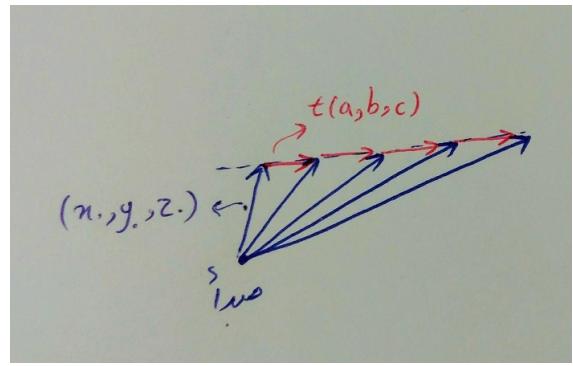
## ۲.۱۷ منحنی‌های فضایی

فرض کنید  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  :  $r$  یک تابع برداری باشد. چنین تابعی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

هر تابع به صورت بالا، یک «منحنی فضایی» را پارامتر بندی می‌کند. یک نمونه از منحنی‌های فضایی، خط مستقیم است:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

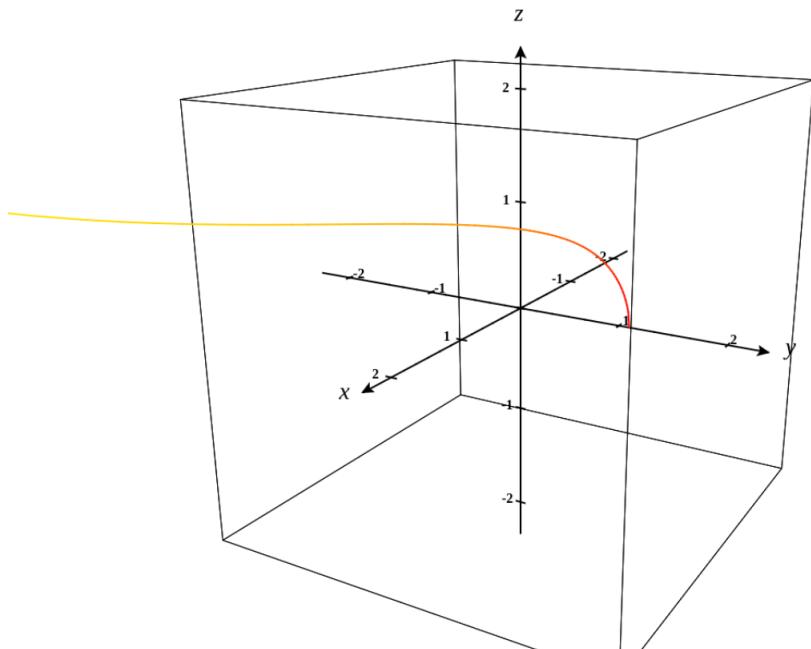


در زیر مثالهای دیگری از منحنی‌های فضائی آورده‌ایم:

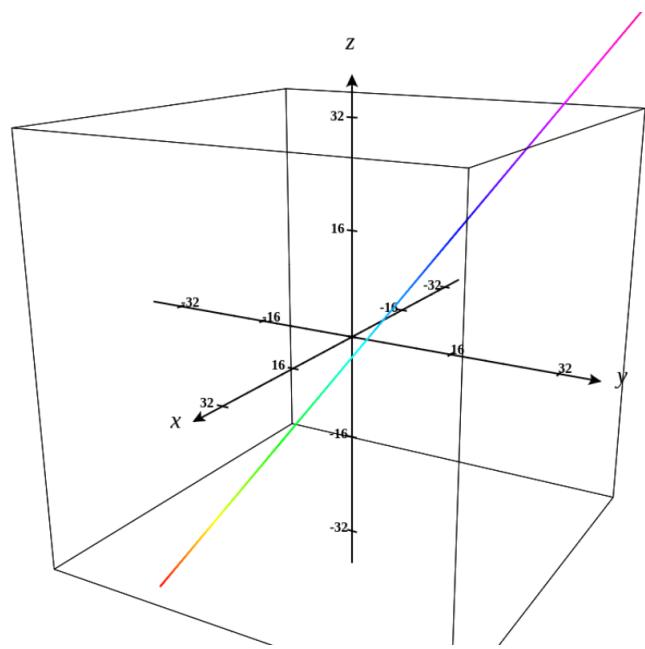
. ۱۶۰ . مثال

$$\vec{r}(t) = (t^3, \ln(3 - 2t), \sqrt{t})$$

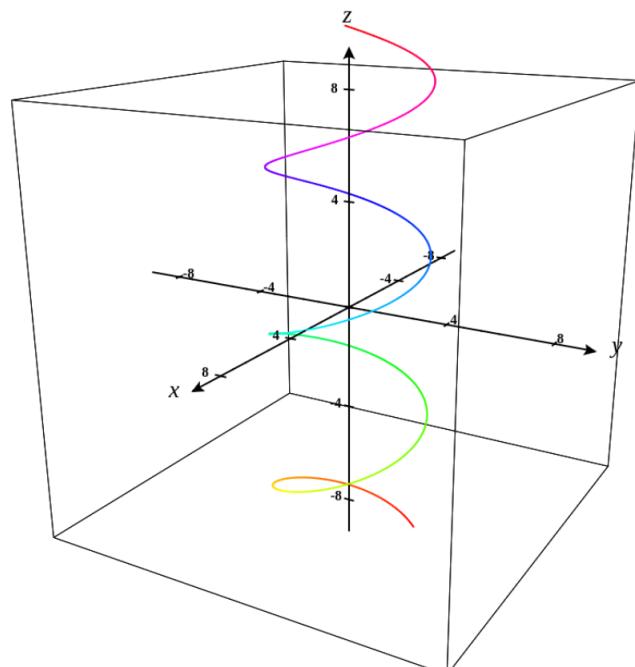
در زیر این منحنی را برای  $0 \leq t \leq 10$  رسم کرده‌ایم:



$$\vec{r}(t) = (1 + t, 2 + 5t, -1 + 8t)$$



$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, t)$$

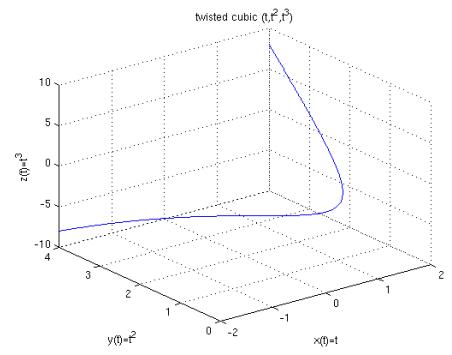
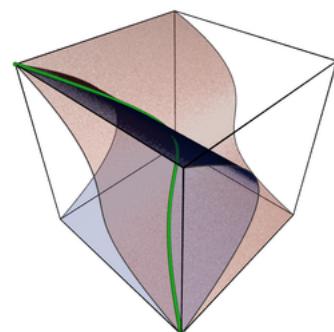
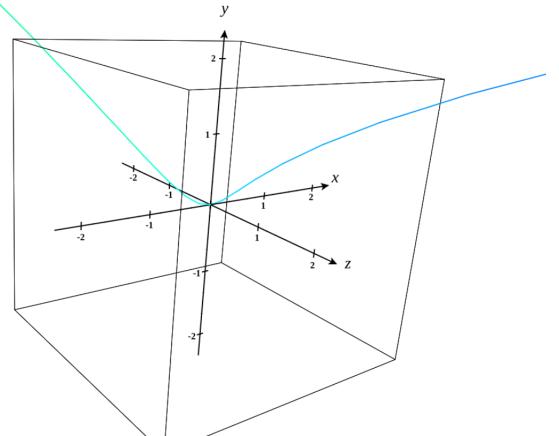
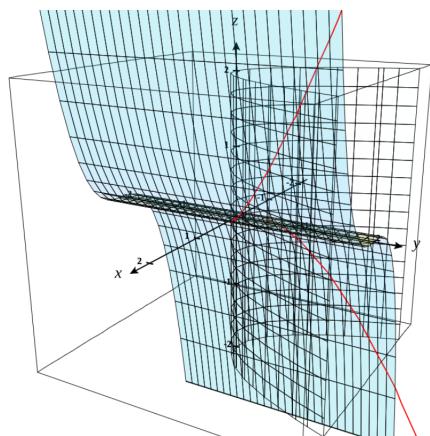
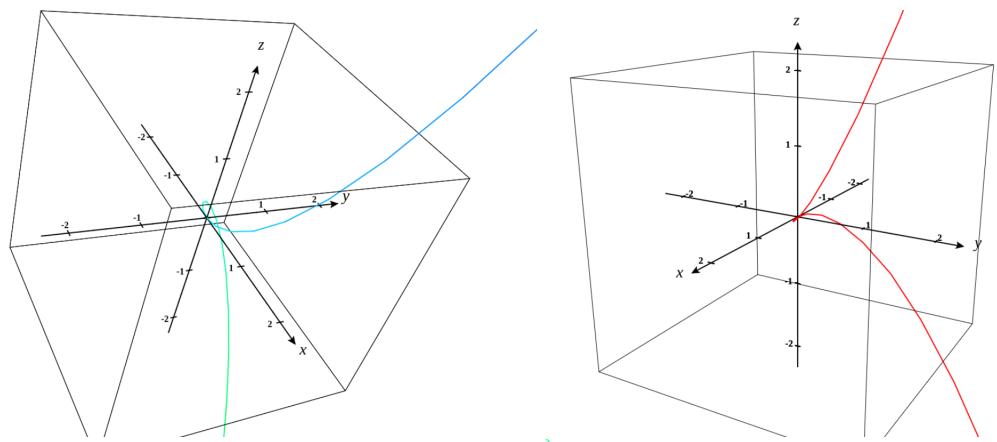


دقت کنید که منحنی بالا روی استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 4$  واقع است.

$$\vec{r}(t) = (t, t^\alpha, t^\alpha)$$

این منحنی فضائی، منحنی مکعبی پیچانده شده نام دارد و در واقع اشتراک رویه های زیر است:

$$\begin{cases} y = x^\alpha \\ z = x^\alpha \end{cases}$$



## ۱.۱۸ حل چند تمرین

تمرین ۳۹. فرض کنید آنگاه  $z = r\theta$  و  $y = r \sin \theta$  و  $x = r \cos \theta$  و  $w = xy + yz + zx$  را در ۲ و  $\frac{\partial w}{\partial r}$  محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = (y+z) \cos \theta + (x+z) \sin \theta + (x+y)\theta$$

در نقطه‌ی  $(r, \theta) = (2, \frac{\pi}{2})$  داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r}(2, \frac{\pi}{2}) &= (2 \sin \frac{\pi}{2} + \pi) \cos(\frac{\pi}{2}) + (2 \cos(\frac{\pi}{2}) + \pi) \sin(\frac{\pi}{2}) + (2 \cos(\frac{\pi}{2}) + 2 \sin(\frac{\pi}{2})) \frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi \sin(\frac{\pi}{2}) = 2\pi \end{aligned}$$

□

تمرین ۴۰. گیریم که ضابطه‌ی ضمنی زیر میان  $x$ ,  $y$  برقرار باشد.

$$y \cos x = x^y + y^x$$

حاصل  $\frac{dy}{dx}$  را بیابید.

پاسخ.

$$F(x, y) = y \cos x - x^y - y^x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y \sin x - yx^{y-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \cos x - xy^{y-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x + yx^{y-1}}{\cos x - xy^{y-1}}$$

□

تمرین ۴۱. فرض کنید که مقادیر  $y$ ,  $x$  در رابطه‌ی زیر صدق کنند:

$$\tan^{-1}(xy) = x + xy^x$$

حاصل  $\frac{dy}{dx}$  را محاسبه کنید.

توجه ۱۶۱.

$$1) \quad F(x, y, z) = \bullet \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} \times \overset{\nearrow}{\frac{\partial z}{\partial x}} + \frac{\partial F}{\partial y} \times \overset{\nearrow}{\frac{\partial z}{\partial y}} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \bullet \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$2) \quad F(x, y) = \bullet \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

تمرین ۴۲. فرض کنید  $z$  تابعی از  $x$  و  $y$  باشد و آنگاه  $y^z + x \ln(y) = z$  را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$F(x, y, z) = yz + x \ln y - z = \bullet$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = y - z, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\ln y}{y - z}$$

□

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x-y)}{x+y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

تمرین ۴۳. فرض کنید  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  نشان دهید که  $(0, 0)$  پاسخ در نقطه‌ی  $(x, y) = (0, 0)$  را باید با استفاده از تعریف محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = ,$$

حال در نقاط  $(0, 0)$  داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(y(x-y) + x^2 y)(x+y) - x^2 y(x-y)}{(x+y)^2}$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{(y(x-y) + x^2 y)(x+y) - x^2 y(x-y)}{(x+y)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

پس:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0+h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h^2)}{h^5} = -1$$

ادامه‌ی حل سوال به عهده‌ی شما.

□

## ۲۰.۱۸ ادامه‌ی درس (خم‌ها)

گفتیم که هر تابع برداری به صورت

$$\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

یک خم را در فضا مشخص می‌کند.

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

مثال ۱۶۲. منحنی محل تلاقی استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  و  $y + z = 2$  را پارامتریندی کنید و معادله‌ی برداری آن را نیز بنویسید.

پاسخ. می‌خواهیم معادله‌ای مانند  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  برای خم به وجود آمده از تلاقی دو رویه بنویسیم. تصویر خم روی صفحه‌ی  $xy$  همان سطح مقطع استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  در صفحه‌ی  $xy$  است. پس می‌توان نوشت:

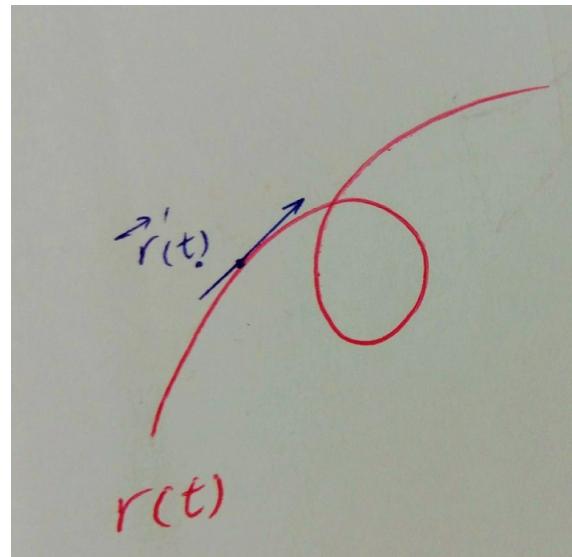
$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t)$$

□

مثال ۱۶۳. معادله‌ی  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  را پارامتر بندی کنید.

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t)$$

توجه ۱۶۴. اگر  $\vec{r}(t.)$  آنگاه بردار مماس بر منحنی  $r(t)$  در زمان  $t.$  به صورت  $(x'(t.), y'(t.), z'(t.))$  است. این مطلب را در جلسات آینده دوباره توضیح خواهیم داد.



از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

## ۱.۱۹ مرور درس‌های گذشته

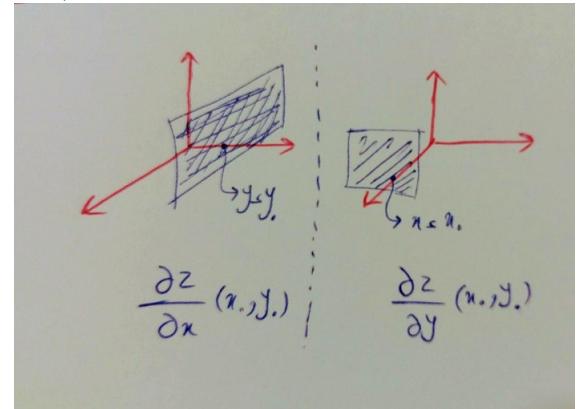
گفتیم که منظور از یک تابع دو متغیره، تابعی مانند  $z = f(x, y)$  است از  $\mathbb{R}^2$  به  $\mathbb{R}$ .

مشتقات ضمنی:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

در صورتی که حد های بالا موجود باشند. مفاهیم بالا را به صورت زیر تعبیر هندسی کردیم.



وجود  $\frac{\partial z}{\partial x}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$  تضمین کننده‌ی دیفرانسیل پذیری و حتی پیوستگی نیست.  
دیفرانسیل کلی تابع:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

گفتیم که دیفرانسیل کلی، از لحاظ هندسی، تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد. (با رسم تصویری، فرمول بالا را برای خود تعبیر کنید).

گرادیان:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

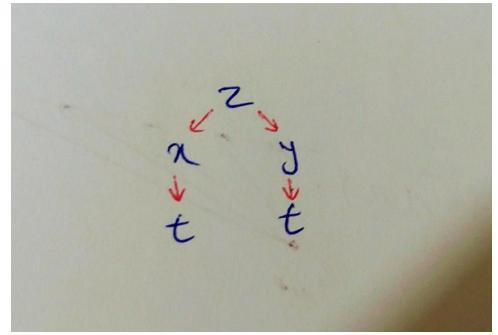
مشتق سوئی: نیز دیدیم که مشتق سوئی تابع در جهت بردار  $u$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D_u f = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \overrightarrow{u}$$

مشتق سوئی در جهت بردار گرادیان حداکثر می‌شود و حداکثر میزان تغییرات تابع در آن جهت برابر است با  $|\nabla f|$  توجه کنید که اگر آنگاه  $z = f(h_1(x, y), h_2(x, y))$

$$\frac{\partial z}{\partial h_1}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(h_1(x, y))$$

در واقع مشتق ضمنی بر حسب  $x$  یعنی مشتق ضمنی بر حسب مؤلفه‌ی اول تابع.  
مشتق تابع مرکب:



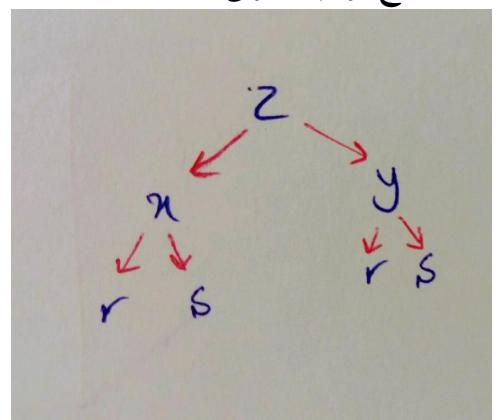
$$z = f(x, y)$$

$$y = h(t) \quad , \quad x = g(t)$$

$$z = f(g(t), h(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

مشتق تابع مركب (جزئي):



$$z = f(x, y)$$

$$x = g_r(r, t) \quad y = g_s(r, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

مشتق تابع ضمني (دو متغيره):

اگر  $z = F(x, y) = 0$  آنگاه:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

مشتق تابع ضمنی (سه متغیره):

$$F(x, y, z) = 0$$

اگر  $w = F(x, y, z) = 0$  آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \end{aligned}$$

تمرین ۴۴. اگر  $1$  آنگاه  $\cos(xyz) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$  را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(xz \sin(xyz) + 2y)}{-xy \sin(xyz) - 2z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(zy \sin(xyz) + 2x)}{-xy \sin(xyz) - 2z} \end{aligned}$$

□

تمرین ۴۵. فرض کنید که دما در هر نقطه توسط رابطه زیر داده شده باشد، در نقطه  $(1, 1, -2)$  در کدام جهت دما سریعتر افزایش می‌یابد؟

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

پاسخ. هر تابعی در هر نقطه در جهت بردار گرادیان حداکثر نرخ افزایش را دارد.

$$\nabla T = \left( \frac{-2x \times 80}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2y \times 80}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2z \times 80}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)$$

$$\nabla T(1, 1, -2) = \left( \frac{-160}{7^2}, \frac{-160}{7^2}, \frac{320}{7^2} \right)$$

□

تمرین ۴۶. نرخ تغییرات تابع را در جهت بردار بالا محاسبه کنید.  $(||\nabla T||)?$

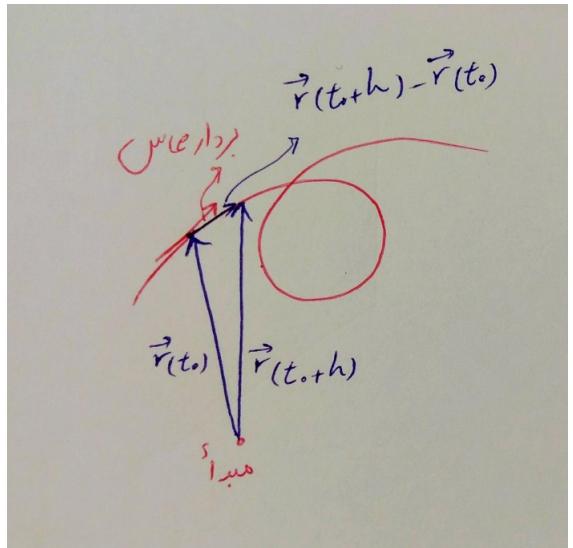
## ۲.۱۹ ادامه‌ی درس

فرض کنید

$$\vec{r}(t) : (f(t), g(t), h(t))$$

معادله‌ی برداری یک خم باشد. دقت کنید که در رسم خم‌ها، مؤلفه‌ی  $t$  را رسم نمی‌کنیم. حال در  $t = t_0$  تعریف می‌کنیم:

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h} = (f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0))$$



همان طور که در تصویر بالا مشاهده می‌کنید،  $r'(t_0)$  در واقع جهت بردار مماس بر خم را در نقطه‌ی  $P = \vec{r}(t_0)$  مشخص می‌کند.

تمرین ۴۷. منحنی‌های زیر روی یک رویه‌ی  $S$  واقعند و از نقطه‌ی  $(3, 1, 2)$  واقع بر آن روی می‌گذرند. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه را در آن نقطه بنویسید.

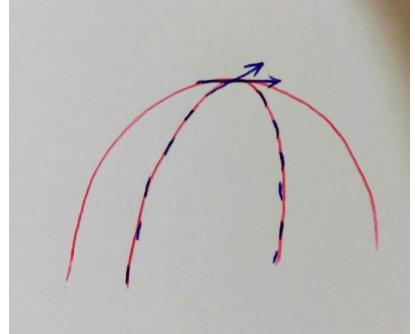
$$\vec{r}_1(t) = (2 + 3t, 1 + t^2, 3 - 4t + t^3)$$

$$\vec{r}_2(u) = (1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1)$$

پاسخ. نخست توجه کنید که

$$\vec{r}_1(0) = (2, 1, 3) \quad , \quad \vec{r}_2(1) = (2, 1, 3)$$

یعنی  $\vec{r}_1(t)$  در نقطه‌ی  $0 = t$  و  $\vec{r}_2(u)$  در نقطه‌ی  $1 = u$  به نقطه‌ی  $(2, 1, 3)$  می‌رسند:



$$\vec{r}_1'(t) = (3, 2t, -4 + 2t) \implies \vec{r}_1'(0) = (3, 0, -4)$$

$$\vec{r}_2'(u) = (2u, 6u^2, 2) \implies \vec{r}_2'(1) = (2, 6, 2)$$

دو بردار  $\vec{r}_2'(1), \vec{r}_1'(0)$  هر دو روی صفحه‌ی مماس مورد نظر واقعند. پس بردار نرمال صفحه‌ی مورد نظر از حاصل ضرب

خارجی آنهاست:

$$\vec{n} = (3, 0, -4) \times (2, 6, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 24\vec{i} - 14\vec{j} + 18\vec{k} = (24, -14, 18)$$

پس معادله‌ی صفحه مورد نظر به صورت زیر است:

$$24x - 14y + 18z = 24 \times 2 - 14 \times 1 + 18 \times 3 = 88$$

که به صورت زیر ساده‌تر می‌شود:

$$\implies 24x - 14y + 18z - 88 = 0$$

□

### ۳.۱۹ صفحات مماس بر رویه‌های تراز

در درسهای گذشته دیدیم که اگر  $z = f(x, y)$  یک تابع دو متغیره باشد (که یک رویه را مشخص می‌کند) آنگاه معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی  $(x_0, y_0, z_0)$  بر رویه‌ی یادشده به صورت زیر است:

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

در اینجا می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر یک رویه را پیدا کنیم که توسط یک معادله‌ی ضمنی به صورت  $F(x, y, z) = 0$  داده شده باشد.

فرض کنید  $w = F(x, y, z)$  تابعی سه متغیره باشد. همان طور که در درسهای پیشین دیدیم، هر معادله به صورت  $F(x, y, z) = k$  یک رویه‌ی تراز از این تابع را بدست می‌دهد. پس فرض کنید  $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$  یک رویه تراز باشد و  $F(x, y, z) = k$  را در نقطه‌ی  $t$  با  $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$  واقع شده است، داریم:

$$F(f(t), g(t), h(t)) = k$$

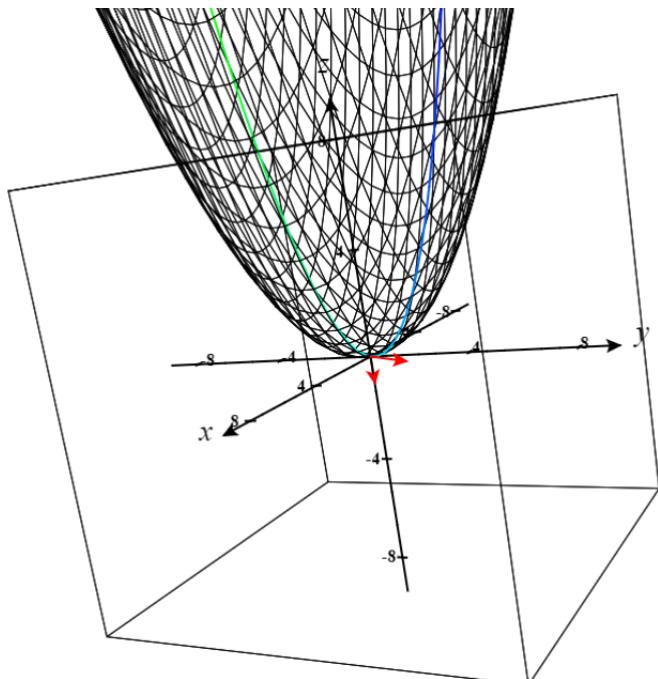
از عبارت بالا بر حسب  $t$  مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} g'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} h'(t) = 0$$

پس در هر نقطه‌ی  $P = r(t_0)$  داریم:

$$\nabla F(p) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0 \Rightarrow \nabla F(p) \perp \vec{r}'(t_0)$$

بنابراین برای هر منحنی  $\vec{r}(t)$  بردار  $\nabla F(p)$  بر نقطه‌ی  $p$  عمود است. پس  $\nabla F(p)$  بر صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی  $F(x, y, z) = k$  در نقطه‌ی  $p$  عمود است.



نتیجه ۱۶۵. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی  $F(x, y, z) = k$  در نقطه‌ی  $p = (x., y., z.)$  به صورت زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p)(x - x.) + \frac{\partial F}{\partial y}(p)(y - y.) + \frac{\partial F}{\partial z}(p)(z - z.) = 0$$

بطور خاص اگر  $z = f(x, y)$  آنگاه می‌توان نوشت:

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$$

پس معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$-f_x(x - x.) - f_y(y - y.) + 1(z - z.) = 0$$

يعني:

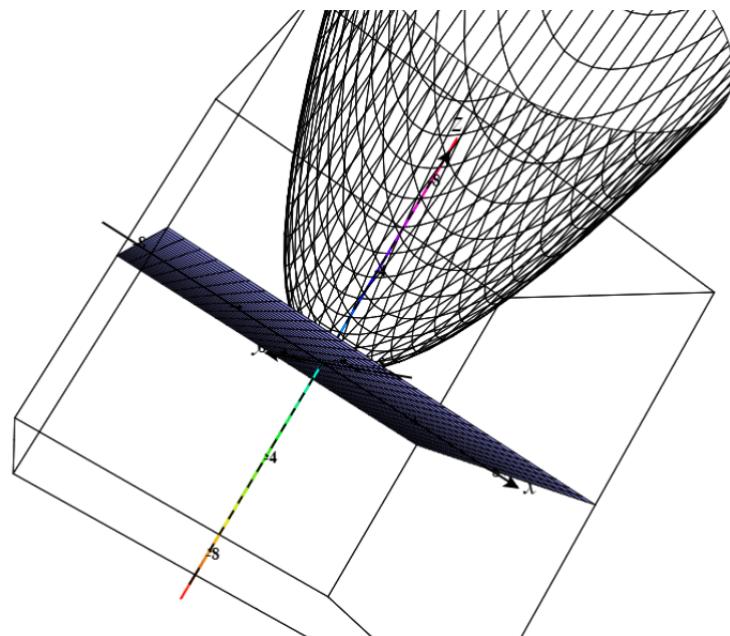
$$z - z. = f_x(x - x.) + f_y(y - y.)$$

و این بر آنچه قبلاً ثابت کردہ‌ایم نیز مطابقت دارد.

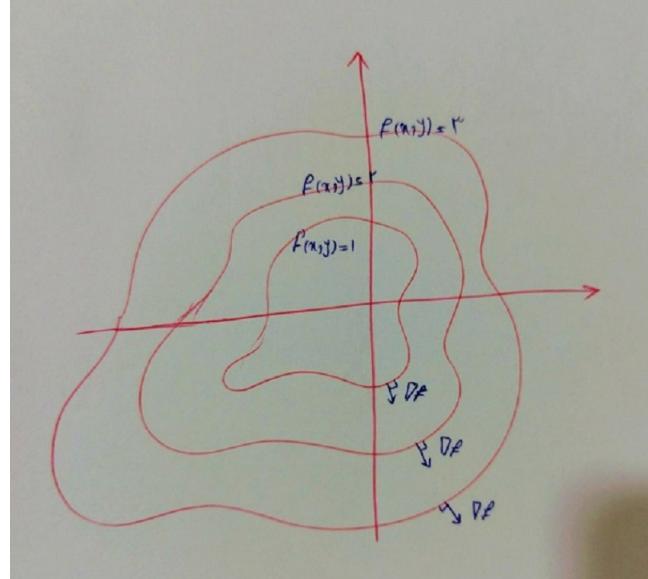
تعريف ۱۶۶. به خطی که در جهت عمود بر یک رویه از نقطه‌ی  $p$  بگذرد، خط نرمال بر آن رویه گفته می‌شود.

پس اگر  $0 = F(x, y, z)$  معادله‌ی رویه‌ی مورد نظر باشد، معادله‌ی خط نرمال آن در نقطه‌ی  $p$  به صورت زیر است:

$$\frac{x - x.}{\frac{\partial F}{\partial x}(p)} = \frac{y - y.}{\frac{\partial F}{\partial y}(p)} = \frac{z - z.}{\frac{\partial F}{\partial z}(p)}$$



توجه کنید که به طور مشابه اگر  $F(x, y) = k$  یک معادله‌ی دو متغیره باشد (که یک منحنی تراز از یک رویه را نشان می‌دهد) آنگاه  $\nabla f$  در نقطه‌ی  $(x, y)$  بر منحنی  $f(x, y) = k$  عمود است:



از طرفی گفتیم که  $\nabla$  در هر نقطه، جهتی را نشان می‌دهد کهتابع در آن جهت سریعتر افزایش می‌یابد. در واقع اگر نقشه‌ی توپوگرافیک یک کوه را داشته باشیم (فرض کنیم به صورت بالا)، آنگاه با استفاده از بردار گرادیان می‌توانیم پرشیبترین مسیر میان دو ارتفاع مشخص را پیدا کنیم. این مسیر بر تمام منحنی‌های  $f(x, y) = k$  عمود است.

**مثال ۱۶۷.** معادلات صفحه‌ی مماس و خط نرمال را بر بیضیوار  $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = ۳$  در نقطه‌ی  $(۲, ۱, -۳)$  بنویسید.

پاسخ. صفحه‌ی مماس:

$$F_x(x - x_0) = F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x_0}{2}(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + \frac{2z_0}{9}(z - z_0) = 0$$

$$(x - 2) + 2(y - 1) - \frac{6}{9}(z + 3) = 0$$

خط نرمال:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{6}{9}}$$

□

از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

## ۲۰ جلسه‌ی بیستم، دوشنبه، حل چند تمرین

تمرین ۴۸. فرض کنید  $\nabla f(x, y) = y^2 - x^2$ . آنگاه  $f(x, y)$  را رسم کنید.

پاسخ.

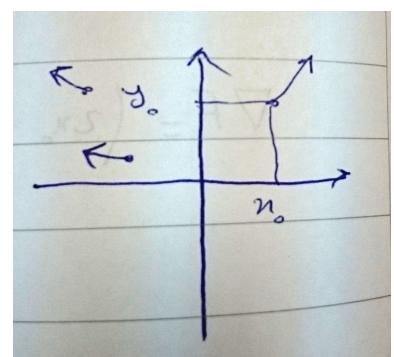
$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\nabla f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x., y.) \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x., y.), \frac{\partial f}{\partial y}(x., y.) \right)$$

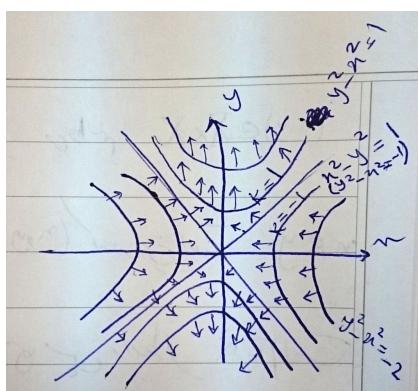
$$\nabla(x., y.) = (-2x., 2y.)$$

$$(x., y.) \mapsto (-2x., 2y.)$$



توجه ۱۶۸.  $\nabla f(x., y.) = k$  بر منحني تراز  $f(x, y) = k$  در نقطه‌ی  $(x., y.)$  عمود است (در صورتی که  $\nabla f(x., y.)$  همچنین  $\nabla f(x., y.)$  در جهت افزایش تابع است).

توجه ۱۶۹. (در حالت سه‌متغیره) اگر  $\nabla F(x., y., z.) = f(x, y, z)$  آنگاه  $\nabla F(x., y., z.)$  بر هر رویه‌ی تراز  $F(x., y., z.) = k$  بگزند در نقطه‌ی  $(x., y., z.)$  عمود است.



□ بنا به توجه‌های بالا، شکل مورد نظر سوال، به صورت زیر است:

تمرین ۴۹. در کدام نقطه روی بیضیوار  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$  صفحه‌ی مماس با صفحه‌ی  $x + 2y + z = 1$  موازی است؟

پاسخ. بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر بیضیوار  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$  در نقطه‌ی  $(x., y., z.)$  برابر است با

$$\nabla F(x., y., z.) = (2x., 2y., 4z.)$$

هدف ۱۷۰. یافتن نقاطی مانند  $(x_0, y_0, z_0)$  را که  $x_0 + y_0 + z_0 = 1$  و  $\frac{x_0}{1} = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{4}$  باشند.

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 1 \\ \frac{x_0}{1} = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{4} \end{cases}$$

□ حل معادلهای بالا و ادامه‌ی پاسخ سوال به عهده‌ی شما!

تمرین ۵۰. نشان دهید که بیضی‌وار  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$  و گُرهی  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$  در نقطه‌ی  $(1, 2, 1)$  برابر هم مماسند.

پاسخ:

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9 = 0$$

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$$

کافی است نشان دهیم که در نقطه‌ی  $(1, 2, 1)$  یادشده،  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \parallel \nabla G(x_0, y_0, z_0)$

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (6x_0, 4y_0, 2z_0)$$

$$\nabla G(x_0, y_0, z_0) = (2x_0 - 8, 2y_0 - 6, 2z_0 - 8)$$

$$\frac{6x_0}{2x_0 - 8} = \frac{4y_0}{2y_0 - 6} = \frac{2z_0}{2z_0 - 8} \quad (*)$$

□ کافی است بررسی کنیم که نقطه‌ی  $(1, 2, 1)$  در  $(*)$  صدق می‌کند. (بررسی کنید).

تمرین ۵۱. نشان دهید که صفحات مماس بر مخروط  $x^2 + y^2 = z^2$  همه از مبدأ مختصات می‌گذرند.

پاسخ. معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی  $(x_0, y_0, z_0)$  دارای معادله‌ی زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0$$

□ کافی است نشان دهیم نقطه‌ی  $(0, 0, 0)$  در معادله‌ی صفحه‌ی مماس صدق می‌کند (ادامه با شما!).

تمرین ۵۲. نشان دهید که هر خط عمود بر گُرهی  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  از مبدأ مختصات می‌گذرد.

پاسخ. معادله‌ی خط نرمال بر گره در نقطه‌ی  $(x_0, y_0, z_0)$  به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} &= \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \\ \Rightarrow \frac{x - x_0}{2x_0} &= \frac{y - y_0}{2y_0} = \frac{z - z_0}{2z_0} \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم که همه‌ی خطوطی به معادله‌ی بالا از مبدأ می‌گذرند (یعنی مبدأ در معادله‌ی این خطها صدق می‌کند).

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} \quad \checkmark$$

□

تمرین ۵۳. صفحه‌ی ۳ استوانه‌ی  $x^2 + y^2 + z = 5$  را در یک بیضی قطع می‌کند. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر این بیضی را در صفحه‌ی یاد شده در نقطه‌ی  $(1, 2, 1)$  بنویسید.

پاسخ. راه حل اول:

توجه ۱۷۱. خط مورد نظر هم روی صفحه‌ی مماس بر استوانه در نقطه‌ی  $(1, 2, 1)$  واقع است و هم روی صفحه‌ی  $y + z = 3$ .

پس بردار خط مورد نظر بر بردارهای نرمال دو صفحه یاد شده عمود است. بردار نرمال صفحه‌ی اول برابر است با  $(0, 1, 1)$  و بردار نرمال صفحه‌ی مماس برابر است با

$$\nabla F(x., y., z.)|_{(1, 2, 1)} = (2x., y., 0)|_{(1, 2, 1)} = (2, 4, 0)$$

پس بردار خط مورد نظر برابر است با

$$(0, 1, 1) \times (2, 4, 0) = (a, b, c) \quad (\text{محاسبه به عهده‌ی شما})$$

و معادله‌ی خط به صورت زیر است:

$$\frac{x - 1}{a} = \frac{y - 2}{b} = \frac{z - 1}{c}$$

پاسخ دوم. بیضی مورد نظر را به صورت زیر پارامتریندی می‌کنیم:

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{5} \cos t, \sqrt{5} \sin t, 3 - \sqrt{5} \sin t)$$

نقطه‌ی  $(1, 2, 1)$  به ازای

$$t = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

حاصل می‌شود. جهت خط مماس برابر است با جهت بردار

$$\vec{r}'(t) = \dots$$

□

تمرین ۵۴. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنی محل اشتراک سهمی‌وار  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  و بیضی‌وار  $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$  را در نقطه‌ی  $(2, 1, 1)$  بنویسید.

پاسخ. خط مورد نظر هم بر صفحه‌ی مماس بر سهمی‌وار و هم بر صفحه‌ی مماس بر بیضی‌وار واقع است.

$$\vec{n}_1 = (-2, 2, -1) \quad \text{نرمال سهمی‌وار}$$

$$\vec{n}_2 = (-8, 2, 4) \quad \text{نرمال بیضی‌وار}$$

بردار خط مورد نظر برابر است با

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (a, b, c) \quad \text{محاسبه به عهده‌ی شما}$$

معادله‌ی خط مورد نظر به صورت زیر است:

$$\frac{x+1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-2}{c}$$

□

(ادامه با شما!)

مثال ۱۷۲. نشان دهید که تابع زیر در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^2} & x+y \neq 0 \\ 0 & x+y = 0 \end{cases}$$

پاسخ. اگر تابع در مبدأ پیوسته باشد باید از هر مسیری که  $(x, y)$  به مبدأ میل می‌کند تابع به  $(0, 0)$  میل کند. روی مسیر  $(0, y)$  داریم:

$$f(0, y) = \frac{-1}{y^2}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) =$$

$$\begin{cases} (x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1}{y^2} = -\infty$$

□

پس تابع مورد نظر پیوسته نیست.

توجه. این مطالب را جناب آقای دکتر بهرامی درباره‌ی بسط تیلور توابع دو متغیره نوشته و در اختیار کلاس ما قرار داده‌اند. هر چند یادگرفتن آنها برای امتحان، ضروری نیست، خواندن‌شان را اکیداً توصیه می‌کنم.

## بسط تیلور توابع چندمتغیره

ابتدا مفهوم بسط تیلور را برای توابع حقیقی یک متغیره یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم  $\phi$  تابعی حقیقی تعریف شده بر بازه‌ای از اعداد حقیقی حاوی دو عدد  $t$ . و  $c$  باشد. اگر مشتق مرتبه  $(n+1)$ -ام  $\phi$  بر این بازه پیوسته باشد آنگاه عدد  $t$  و  $c$  وجود دارد که

$$\phi(t) = \phi(t.) + \phi'(t.)(t - t.) + \frac{\phi''(t.)}{2!}(t - t.)^2 + \cdots + \frac{\phi^{(n)}(t.)}{n!}(t - t.)^n + \frac{\phi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(t - t.)^{n+1}$$

به این ترتیب برای مقادیر  $t$  به اندازه کافی نزدیک  $t.$

$$\phi(t) \approx \phi(t.) + \phi'(t.)(t - t.) + \frac{\phi''(t.)}{2!}(t - t.)^2 + \cdots + \frac{\phi^{(n)}(t.)}{n!}(t - t.)^n$$

در قضیه زیر این خاصیت را برای توابع دو متغیره گسترش می‌دهیم.

قضیه. فرض کنیم  $D \subset \mathbb{R}^2$  و  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه  $n+1$  داشته باشد. برای دو نقطه  $(x, y)$  و  $(x., y.)$  در  $D$  با این خاصیت که پاره خط واصل بین دو نقطه در  $D$  قرار بگیرد، نقطه  $(x^*, y^*)$  بر این پاره خط وجود دارد که

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x., y.) + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x., y.)(x - x.) + \frac{\partial f}{\partial y}(x., y.)(y - y.) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x., y.)(x - x.)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x., y.)(x - x.)(y - y.) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x., y.)(y - y.)^2 \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(x., y.)(x - x.)^{n-k}(y - y.)^k \right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}(x^*, y^*)(x - x.)^{n+1-k}(y - y.)^k \right) \end{aligned}$$

اثبات. فرض کنیم  $L$  خط گذرکننده از دو نقطه  $(x., y.)$  و  $(x, y)$  باشد. در این صورت معادلات پارامتری  $L$  به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} x(t) = x. + t(x - x.) \\ y(t) = y. + t(y - y.) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

با توجه به فرض،  $\phi(t) := f(x(t), y(t))$ . قرار می‌دهیم  $\phi$  تابعی

تعريف شده بر  $[1, 0]$  بوده، بنابر قاعده رنجيري، برای هر  $t$  در اين بازه

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))(x - x.) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))(y - y.) \\ \phi''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(t), y(t))(x - x.)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(t), y(t))(x - x.)(y - y.) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(t), y(t))(y - y.)^2 \\ &\vdots \\ \phi^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(x(t), y(t))(x - x.)^{n-k}(y - y.)^k \\ \phi^{(n+1)}(t) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}(x(t), y(t))(x - x.)^{n+1-k}(y - y.)^k\end{aligned}$$

بنابر اين  $\phi$  بر بازه  $[1, 0]$  مشتق مرتبه  $(n+1)$ -ام پيوسته دارد. بنابر بسط تيلور برای توابع يك متغيره،  $(x, y) \in (0, 1)$  وجود دارد که

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0)(1-0) + \frac{\phi''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \frac{\phi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{(n+1)}$$

با جايگذاري مقادير در رابطه فوق و معرفی  $(x^*, y^*) := (x(c), y(c))$  نتیجه به دست مي آيد.

**نتیجه.** تحت شرایط قضیه فوق، برای  $(x, y)$  نزدیک  $(x., y.)$ ،

$$\begin{aligned}f(x, y) \approx f(x., y.) &+ \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x., y.)(x - x.) + \frac{\partial f}{\partial y}(x., y.)(y - y.) \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x., y.)(x - x.)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x., y.)(x - x.)(y - y.) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x., y.)(y - y.)^2 \right) \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(x., y.)(x - x.)^{n-k}(y - y.)^k \right)\end{aligned}$$

**مثال.** تابع  $f$  با ضابطه  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$  مفروض است. دامنه تعريف اين تابع برابر مجموعه  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$  است. به سادگي مشاهده مي شود،  $f$  بر دامنه تعريف خود داراي مشتقات جزئي پيوسته از هر مرتبه است. به اين ترتيب، به طور مثال اگر بخواهيم مقدار  $f$  را در يك همسایگي از نقطه  $(2, 1)$  با يك چندجمله اي درجه 2 تقریب بزنیم آنکاه

$$\begin{aligned}f(x, y) \approx f(2, 1) &+ \left( \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)(y - 1) \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1)(x - 2)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1)(x - 2)(y - 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1)(y - 1)^2 \right)\end{aligned}$$

با توجه به اينكه

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{1}{2}(x-y)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(x-y)^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{3}{4}(x-y)^{-\frac{5}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{3}{4}(x-y)^{-\frac{5}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{3}{4}(x-y)^{-\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) = \frac{3}{4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1) = -\frac{3}{4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1) = \frac{3}{4}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{x-y}} \approx 1 + \left( -\frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(y-1) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{3}{4}(x-2)(y-1) + \frac{3}{4}(y-1)^2 \right)$$

## ۲۱ جلسه‌ی بیست و یکم، شنبه

یادآوری ۱۷۳. بردار نرمال (عمود بر) رویه‌ی به معادله‌ی  $f(x, y, z) = 0$  به صورت زیر است

$$\mathbf{n} = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی  $(x_0, y_0, z_0)$  به صورت زیر است:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

به طور خاص بردار نرمال رویه‌ی  $f(x, y) = z$  در نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  به صورت زیر است

$$(-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$$

دقت کنید که مؤلفه‌ی آخر مثبت است و این بدان جهت است که بردار گرادیان در جهت افزایش تابع است. نیز معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی یادشده به صورت زیر است:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0.$$

گفتیم که اگر  $f(x, y) = z$  یک تابع دو متغیره باشد، چند جمله‌ای تیلور درجه‌ی اول آن (تقریب خطی آن) حول نقطه‌ی  $(x_0, y_0) = (a, b)$  به صورت زیر است:

$$f(x, y) \approx P_1(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

معادله‌ی بالا در واقع از فرمول دیفرانسیل کلی به دست آمده است:

$$\Delta z \approx dz = f_x dx + f_y dy$$

چندجمله‌ای تیلور درجه‌ی اول را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \begin{pmatrix} f_x(a, b), f_y(a, b) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$

اگر قرار دهیم:

$$f'(a, b) = \begin{pmatrix} f_x(a, b), f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

شباهت معادله‌ی بالا به حالت تک متغیره‌ی زیر آشکار می‌شود:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

## چند جمله‌ای تیلور در توابع تک متغیره

درجه‌ی اول

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

درجه‌ی دوم

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

درجه‌ی سوم

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3$$

بسط تیلور

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

## چند جمله‌ای تیلور در توابع دو متغیره

درجه‌ی دوم

$$\begin{aligned} z = f(x, y) \approx & f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \\ & \frac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2 \end{aligned}$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$f(x, y) \approx \underbrace{P_2(x, y)}_{\text{تیلور درجه‌ی دوم}} = f(a, b) + \begin{bmatrix} f_x(a, b) & f_y(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - a & y - b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$

احتمالاً تا اینجا توجه کرده‌اید که مشتقات توابع چندمتغیره، در واقع توابعی ماتریسی هستند.

$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$	$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$
$f(x.)$	$f(x., y.)$
$f'(x.)$	$\begin{bmatrix} f_x(x., y.) & f_y(x., y.) \end{bmatrix}$
$f''(x.)$	$\begin{bmatrix} f_{xx}(x., y.) & f_{xy}(x., y.) \\ f_{yx}(x., y.) & f_{yy}(x., y.) \end{bmatrix}$

<sup>۱۲</sup> این مطلب را در ریاضیات سطوح بالاتر خواهید آموخت. دانشجویان رشته‌ی ریاضی در درس هندسه‌ی دیفرانسیل یا آنالیز ۳ با این مطالب آشنا خواهند شد.

تمرین ۵۵. چند جمله‌ای تیلور درجه‌ی دوم را برای تابع  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  حول نقطه‌ی  $(0, 0)$  بنویسید.

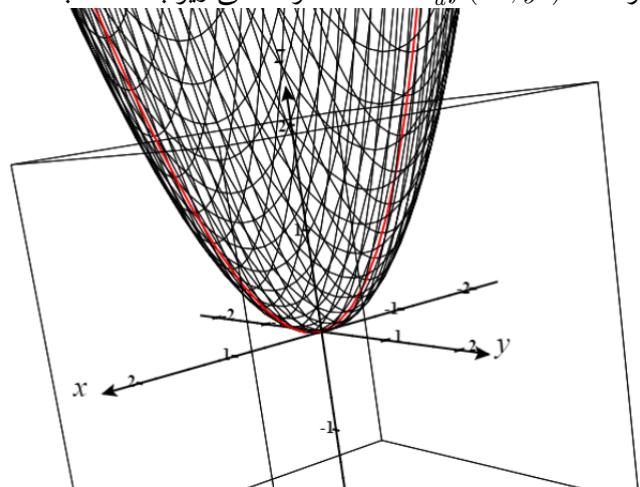
آخرین نکته‌ای که یادآوری می‌کنم این است که مشتق تابع  $z = f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  در جهت بردار یکه‌ی  $u = (a, b)$  به صورت زیر است:

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

مشتق سوئی در واقع شیب خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی مورد نظر با صفحه‌ای است که روی بردار  $(a, b)$  به موازات محور  $z$  رسم شده است. تقعیر این منحنی را می‌توان با استفاده از مشتق سوئی دوم بررسی کرد:

$$D_u^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)a^2 + f_{yy}(x_0, y_0)b^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)ab$$

اگر  $D_u^2 f(x_0, y_0) > 0$  آنگاه تقعیر منحنی زیر به سمت بالاست:



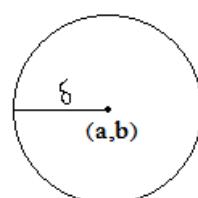
## ۱.۲۱ یافتن اکسترمم‌های توابع دو متغیره

یادآوری ۱۷۴ (تابع تک متغیره). فرض کنید  $f(x)$  یک تابع تک متغیره باشد که در سرتاسر  $\mathbb{R}$  تعریف شده است. اگر این تابع در یک نقطه‌ی  $a = x$  اکسترمم نسبی داشته باشد و در این نقطه مشتق پذیر باشد آنگاه  $f'(a) = 0$ . (محک مشتق اول). به نقطه‌ای که در آن مشتق موجود نباشد یا صفر باشد، یک نقطه‌ی بحرانی می‌گفتیم و آموختیم که اکسترممها در نقاط بحرانی رخ می‌دهند. در محک مشتق دوم نیز آموختیم که در نقطه‌ی بحرانی  $a = x$  اگر  $f''(a) > 0$  آنگاه تقعیر به سمت بالاست (مینیمم نسبی) و اگر  $f''(a) < 0$  آنگاه تقعیر به سمت پایین (ماکزیمم نسبی) است.

در ادامه‌ی این درس، متناظر مطالب بالا را برای تابع دو متغیره بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱۷۵. منظور از یک همسایگی باز به شعاع  $\delta$  از نقطه‌ی  $(a, b)$  مجموعه‌ی زیر است

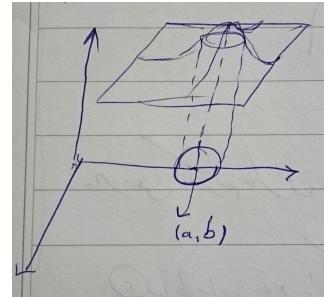
$$B_\delta(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\}$$



تعريف ۱۷۶. تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  دارای ماکزیمم نسبی است هرگاه  $\delta > 0$  موجود باشد به طوری که

$$\forall (x, y) \in B_\delta(a, b) \quad f(x, y) \leq f(a, b)$$

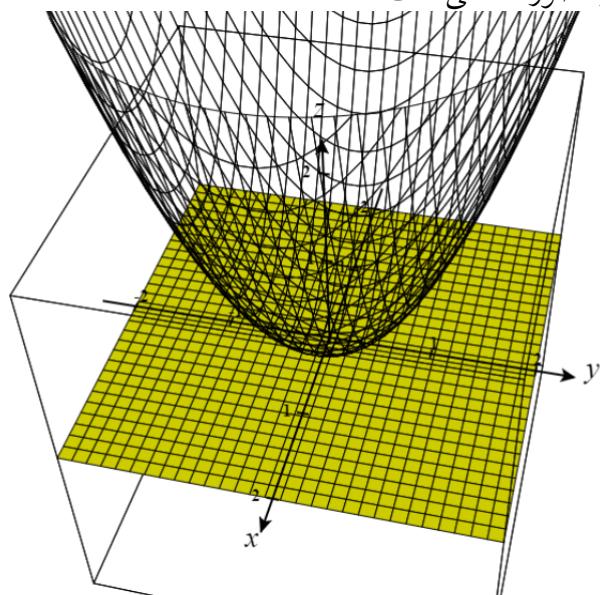
به طور مشابه مینیمم نسبی تعریف می‌شود.



تابع  $f$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  ماکزیمم مطلق دارد هرگاه

$$\forall (x, y) \in Dom(f) \quad f(x, y) \leq f(a, b)$$

مشاهدات ۱۷۷. وقتی می‌گوئیم صفحه‌ی  $A$  به رویه‌ی  $(a, b)$  مماس است، یعنی در یک همسایگی  $B_\delta(a, b)$  صفحه‌ی  $A$  رویه را تنها در یک نقطه قطع می‌کند. وقتی نقطه‌ای اکسترم نسبی باشد، صفحه‌ی مماس در آن نقطه به صورت افقی است:



قضیه ۱۷۸. اگر تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(x_*, y_*)$  اکسترم نسبی داشته باشد آنگاه اگر  $f_x(x_*, y_*) = 0$  و  $f_y(x_*, y_*) = 0$  موجود باشند داریم:

$$f_x(x_*, y_*) = f_y(x_*, y_*) = 0$$

به بیان دیگر

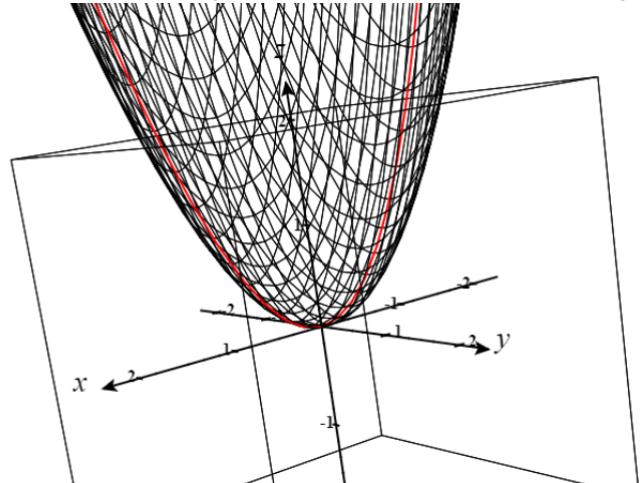
$$\nabla f(x_*, y_*) = (0, 0)$$

که تأییدکننده‌ی مشاهده‌ی بالاست که صفحه‌ی مماس در این نقاط افقی است.

اثبات. منحنی  $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$  را در نقطه  $(x_0, y_0)$  اکسٹرمم دارد، این منحنی در نقطه  $x = x_0$  دارای اکسٹرمم نسبی است. بنابراین

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

یعنی  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ؛ و به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ .

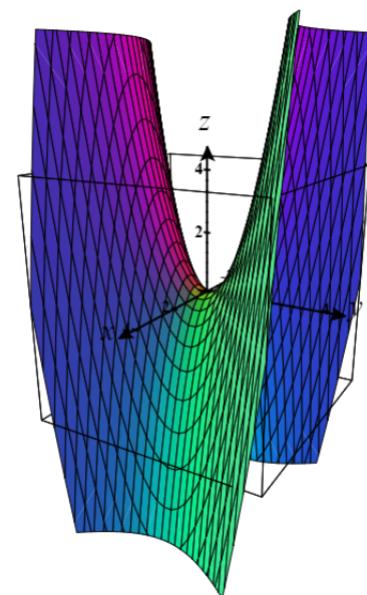


□

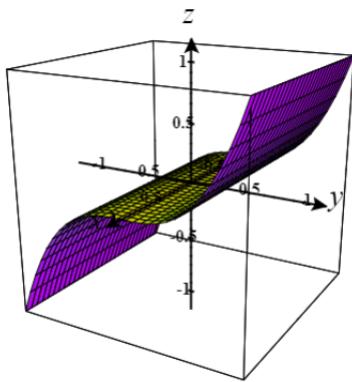
**تعريف ۱۷۹.** نقطه  $(a, b) \in \text{Dom}(f)$  را یک نقطه بحرانی برای تابع  $f$  می‌خوانیم هرگاه در آن  $f'_x(a, b) = 0$  یا  $f'_y(a, b) = 0$  موجود نباشد.

**توجه ۱۸۰.** اکسٹرممها همواره در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتد، اما هر نقطه بحرانی لزوماً اکسٹرمم نیست.

**مشاهدات ۱۸۱.** در توابع دو متغیره، علاوه بر اکسٹرمم می‌توانیم وضعیت زینی داشته باشیم:



توجه کنید که نقطه بالا در یک جهت ماقزیم است و در جهت دیگر مینیموم. به طور کلی نقطه زینی، یک نقطه بحرانی است که در آن  $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$  و این نقطه نه مینیموم است و نه ماقزیم. پس در این نقطه، نمی‌توان صفحه‌ای بر رویه مماس کرد که رویه را در تنها در یک نقطه قطع کند. به نمودار  $z = u^2 - v^2$  در زیر دقت کنید. نقطه  $(0, 0)$  نیز یک نقطه زینی است:



نتیجه ۱۸۲. اگر  $(x_0, y_0)$  یک نقطه‌ی بحرانی باشد، دو حالت داریم:

حالت اول:  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ . در این حالت نقطه‌ی مورد نظر یا ماکزیمم نسبی است یا مینیموم نسبی است یا زینی. (به نقطه‌ای که در آن  $f_x = f_y = 0$  یک نقطه‌ی ایستائی گفته می‌شود).

حالت دوم. یکی از  $f_x$  یا  $f_y$  موجود نیستند. در این حالت یا مینیموم نسبی داریم یا ماکزیمم نسبی یا هیچ‌کدام.

مثال ۱۸۳. اکسٹرمم‌های تابع زیر را بباید و نوع آنها را مشخص کنید.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

پاسخ. ابتدا نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم.

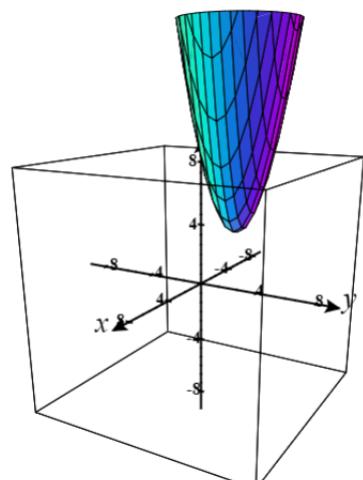
$$f_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f_y = 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$$

پس نقطه‌ی  $(1, 3)$  یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع بالا است. می‌توان نوشت:

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4$$

پس نقطه‌ی  $(1, 3)$  نقطه‌ی مینیموم نسبی و مطلق تابع مورد نظر است:



□

مثال ۱۸۴. نخست دامنه، و سپس نقاط بحرانی تابع  $f(x, y) = x \ln y$  را بباید.

## ۲۲ جلسه‌ی بیست و دوم، دوشنبه

تمرین ۵۶. فرض کنید  $f(x, y)$  تابعی مشتقپذیر باشد. اگر معادله‌ی  $z = f(z - ۳x, z - ۲y) = ۱$  را به عنوان تابعی مشتقپذیر از  $x$  و  $y$  مشخص کند، نشان دهید که

$$۲\frac{\partial z}{\partial x} + ۳\frac{\partial z}{\partial y} = ۶$$

یادآوری ۱۸۵. اگر معادله‌ی  $z = g(x, y, z) = ۰$  را بر حسب متغیرهای  $x$  و  $y$  به دست بدهد، آنگاه بنا به قضیه‌ی مشتق تابع ضمنی داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

پاسخ. راه حل اول.

$$g(x, y, z) = f(\underbrace{z - ۳x}_u, \underbrace{z - ۲y}_v) - ۱ = ۰$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial u}(-۳) + \frac{\partial f}{\partial v}(۰)\right)}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial v}(-۲)\right)}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}} \\ ۲\frac{\partial z}{\partial x} + ۳\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{۶\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}} + \frac{۶\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}} = ۶ \end{aligned}$$

راه حل دوم.

$$f(z - ۳x, z - ۲y) = ۱$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \bullet \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \bullet \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - ۳\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \bullet \\ &\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۳\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}} \end{aligned}$$

به همین ترتیب داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \bullet$$

□

و مقدار  $\frac{\partial z}{\partial y}$  را نیز به طریق بالا می‌توانیم محاسبه می‌کنیم (ادامه راه حل به عهده‌ی شما).

## ۱.۲۲ نقاط بحرانی

یادآوری ۱۸۶ (تابع تک متغیره). فرض کنید که

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

یک تابع تک متغیره‌ی پیوسته باشد که

$$x \mapsto f(x).$$

گفتیم که نقاط بحرانی یک چنین تابعی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. نقاطی مانند  $x$  به طوری که  $f'(x_0) = 0$ . این نقاط نیز یا

(آ) مینیموم نسبی، یا

(ب) ماکزیمم نسبی، و یا

(ج) زینی (مانند نقطه‌ی  $(0, 0)$  در  $y = x^3$ ) هستند.

۲. نقاطی مانند  $x$  به طوری که  $f'(x_0)$  موجود نیست. این نقاط یا

(آ) مینیموم نسبی، یا

(ب) ماکزیمم نسبی، هستند و یا

(ج) هیچکدام نیستند.

در زیر مفهوم نقاط بحرانی را برای توابع دو متغیره توضیح داده‌ایم.

### ۱.۱.۲۲ نقاط بحرانی توابع دو متغیره

نقاط بحرانی:

۱. نوع اول نقاطی هستند که در آنها به طور همزمان

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

این نوع نقاط را نقاط استائی می‌خوانند. این نقاط یکی از حالات زیر را دارند:

(آ) مینیموم نسبی

(ب) ماکزیمم نسبی

(ج) زینی (مانند نقطه‌ی  $(0, 0)$  در  $z = y^2 - x^2$  و  $z = x^3 - y^3$ )

۲. نوع دوم نقاطی هستند که در آنها یکی از  $\frac{\partial f}{\partial x}$  یا  $\frac{\partial f}{\partial y}$  یا هر دو موجود نباشند. این نقاط یکی از وضعیت‌های زیر را دارند:

(آ) مینیموم نسبی

(ب) ماکزیمم نسبی

(ج) هیچکدام

مثال ۱۸۷. نقاط بحرانی تابع  $z = y^2 - x^2$  و نوع آنها را مشخص کنید.

پاسخ.

$$z = f(x, y) = y^2 - x^2 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial x} = -2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

در نقطه‌ی  $(0, 0)$  داریم:

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

در مسیر  $(y^2, 0)$  روی روبه نقطه‌ی  $(0, 0)$  یک مینی‌موم نسبی است.

$$(0, y) \mapsto (0, y^2)$$

در مسیر  $(-x^2, 0)$  نقطه‌ی  $(0, 0)$  یک ماکزیمم نسبی است.

$$(x, 0) \mapsto (-x^2, 0)$$

$\square$  پس  $(0, 0)$  مینی‌موم و ماکزیمم نسبی است. یعنی نقطه‌ی  $(0, 0)$  زینی است.

## ۲.۲۲ محک مشتق دوم برای تعیین اکسترمم‌ها و نقاط زینی

فرض کنید مشتقات دوم تابع  $f(x, y)$  روی یک دیسک به مرکز  $(a, b)$  پیوسته باشند و

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

بنویسید:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b)$$

آنگاه وضعیت زیر را داریم:

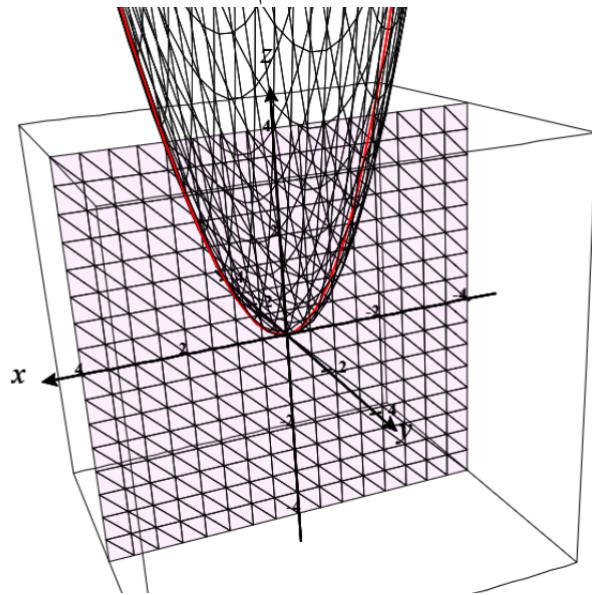
$$\begin{cases} D > 0, & \begin{cases} f_{xx}(a, b) > 0 \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a, b) \text{ یک مینی‌موم نسبی است.} \\ f_{xx}(a, b) < 0 \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a, b) \text{ یک ماکزیمم نسبی است.} \end{cases} \\ D < 0 \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a, b) \text{ یک نقطه‌ی زینی است.} \\ D = 0 \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a, b) \text{ ممکن است مینی‌موم نسبی، ماکزیمم نسبی یا زینی باشد.} \end{cases}$$

ایده‌ی اثبات. اگر  $u = (h, k)$  یک بردار یکه‌ی دلخواه باشد آنگاه مشتق دوم در جهت این بردار، نشان دهنده‌ی تقرر منحنی‌ای است که همزمان روی روبه و صفحه‌ی گذرنده از این بردار قرار دارد. اگر تقرر تمام این نوع منحنی‌های رو به بالا باشد، نقطه‌ی  $(a, b)$  یک مینی‌موم نسبی است.

$$D_{u=(h,k)}^2 f(a, b) > 0$$

$$\begin{aligned} D_{(h,k)}^2 f(a, b) &= f_{xx} h^2 + 2f_{xy} hk + f_{yy} k^2 \\ &= f_{xx} \left( h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} k \right)^2 + \underbrace{\frac{k^2}{f_{xx}} (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)}_D \end{aligned}$$

در عبارت بالا  $f_{xx}$  و قسمتی که  $D$  نام گذاری شده است تعیین کننده‌ی نوع نقاط بحرانی هستند.



□

مثال ۱۸۸. اکسٹرمم‌ها و نقاط زینی تابع  $f(x, y) = y^2 - x^2$  را مشخص کنید.

پاسخ. تعیین نقاط بحرانی:

$$f_x = -2x \Rightarrow (x = 0 \Rightarrow f_x = 0)$$

$$f_y = 2y \Rightarrow (y = 0 \Rightarrow f_y = 0)$$

پس نقطه‌ی  $(0, 0)$  یک نقطه‌ی بحرانی است.

$$f_{xx}(x, y) = -2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = -2$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 2$$

$$D(0, 0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

□

پس نقطه‌ی  $(0, 0)$  یک نقطه‌ی زینی است.

مثال ۱۸۹. اکسٹرمم‌ها و نقاط زینی تابع  $z = y^3$  را تعیین کنید.

مثال ۱۹۰. اکسٹرمم‌های موضعی و نقاط زینی تابع زیر را تعیین کنید و طرحی تقریبی از آن رسم کنید.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

پاسخ.

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4y \Rightarrow f_x(x, y) = 0 \Rightarrow y = x^3$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 - 4x \Rightarrow f_y(x, y) = 0 \Rightarrow x = y^3$$

با استفاده از دو معادلهٔ بالا داریم

$$x = (x^4)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

نقاط بحرانی تابع برابرند با

$$(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^3 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 0, f_{xx}(1, 1) = 12, f_{xx}(-1, -1) = 12$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -4$$

$$f_{yy}(x, y) = 12y^3 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 0, f_{yy}(1, 1) = 12, f_{yy}(-1, -1) = 12$$

نقطه‌ی  $(0, 0)$ :

$$D(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

پس نقطه‌ی  $(0, 0)$  نقطه‌ی زینی است.

نقطه‌ی  $(1, 1)$ :

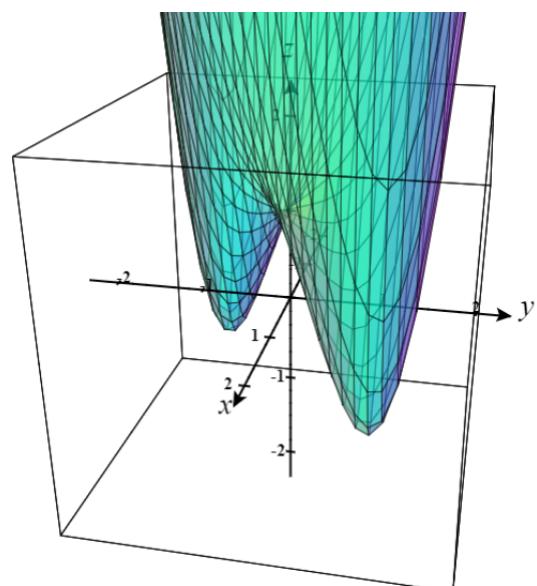
$$D(1, 1) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 > 0, f_{xx}(1, 1) > 0$$

پس نقطه‌ی  $(1, 1)$  مینی‌موم نسبی است.

نقطه‌ی  $(-1, -1)$ :

$$D(-1, -1) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 > 0, f_{xx}(-1, -1) > 0$$

پس نقطه‌ی  $(-1, -1)$  مینی‌موم نسبی است.



□

توجه کنید که تابع بالا یک تابع پیوسته است که دو مینیموم موضعی دارد بی آنکه هیچ ماکزیمم موضعی داشته باشد.  
آیا چنین چیزی در توابع تک متغیره ممکن است؟

## ۲۳ نیم جلسه‌ی بیست و سوم، چهارشنبه

تمرین ۵۷. تابع  $\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

(آ). در چه جهت‌هایی مانند  $\vec{u} = (a,b)$  در نقطه‌ی  $(0,0)$  تابع دارای مشتق سوئی است؟

پاسخ. فرض کنید  $(a,b) = u$  یک بردار یکه باشد.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

داریم:

$$D_u f(x,y)|_{(x,y)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h} \Rightarrow$$

$$D_u f(x,y)|_{(0,0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ah, bh)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(ah)(bh)}{h\sqrt{a^2h^2 + b^2h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{abuh}{h\sqrt{a^2 + b^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{abh}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{abh}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اگر  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  آنگاه حد بالا از یک طرف  $ab$  و از یک طرف  $-ab$  است. پس تابع در سوی  $(a,b)$  مشتق‌پذیر نیست. برای این که حد بالا موجود باشد، باید یا  $a = 0$  یا  $b = 0$ . یعنی تابع تنها در جهت بردارهای  $i, -i, j, -j$  مشتق سوئی دارد.  $\square$

(ب). آیا تابع در نقطه‌ی  $(0,0)$  مشتق‌پذیر است؟

پاسخ.

یادآوری ۱۹۱. اگر تابع  $f$  در نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  دیفرانسیل‌پذیر (مشتق‌پذیر) باشد، آنگاه  $f$  در نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  در هر جهتی مشتق‌پذیر است و مشتق سوئی  $f$  در جهت  $(a, b)$  با فرمول (\*) محاسبه می‌شود.

$$(*) \quad D_{u=(a,b)} f(x,y)|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (a, b)$$

نشان می‌دهیم رابطه‌ی (\*) در نقطه‌ی  $(0,0)$  برقرار نیست. پس این تابع مشتق‌پذیر نیست.

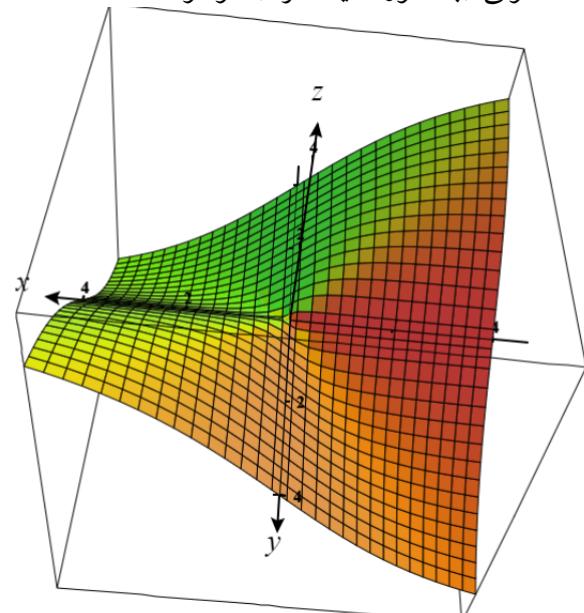
$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0$$

اگر تابع در  $(0,0)$  مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$D_{u=(a,b)} f(x,y)|_{(0,0)} = 0a + 0b$$

می‌بینیم که اگر  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  این فرمول برقرار نیست، پس این تابع نیز مشتق‌پذیر نیست.

در زیر تصویر تابع بالا کشیده است. دقت کنید که صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی  $(0, 0)$  قابل رسم نیست، هر چند مشتقات سوئی (به صورت یک‌طرفه) موجودند.



□

تمرین ۵۸. فرض کنید  $f$  تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر  $z$  به عنوان تابعی از  $x, y$  توسط رابطه‌ی ضمنی زیر داده شده باشد،

$$f(x+z, y+z) = 1$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

پاسخ.

$$g(x, y, z) = f(\underbrace{x+z}_{u(x,y)}, \underbrace{y+z}_{v(x,y)}) - 1 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} \left( 1 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left( 0 + \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

□

محاسبه‌ی  $\frac{\partial z}{\partial y}$  نیز بر عهده‌ی شما باشد.

تمرین ۵۹. تابع  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^r \sin y}{x^r + y^r} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  مفروض است.

(آ). نشان دهید  $f$  در  $(0, 0)$  پیوسته است.

پاسخ. باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in Dom \quad \left( 0 < \sqrt{x^r + y^r} < \delta \rightarrow |f(x, y) - 0| < \epsilon \right)$$

محاسبات:

$$\left| \frac{x^{\star} \sin y}{x^{\star} + y^{\star}} \right| \leqslant \frac{x^{\star} |\sin y|}{x^{\star} + y^{\star}}$$

می‌دانیم که  $1 \leqslant \frac{x^{\star}}{x^{\star} + y^{\star}} < \infty$ . پس داریم:

$$\frac{x^{\star} |\sin y|}{x^{\star} + y^{\star}} \leqslant |\sin y|$$

همچنین می‌دانیم  $|\sin y| \leqslant |y|$ . پس داریم

$$|\sin y| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^{\star} + y^{\star}}$$

(اتمام محاسبات و ادامه‌ی پاسخ:)

□ اگر  $\delta < \epsilon$  آنگاه اگر  $\sqrt{x^{\star} + y^{\star}} < \delta$  آنگاه  $|f(x, y)| < \epsilon$ .

(ب). را در تمام نقاط محاسبه کنید.

پاسخ. در نقاط  $(0, 0)$  و  $(x, y) \neq (0, 0)$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sin y(2x)(x^{\star} + y^{\star}) - (2x)x^{\star} \sin y}{(x^{\star} + y^{\star})^2}$$

محاسبه‌ی  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  در نقطه‌ی  $(0, 0)$  نیز به صورت زیر است

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\cdot + h, \cdot) - f(\cdot, \cdot)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cdot - \cdot}{h} = \cdot$$

پس داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y(2x)(x^{\star} + y^{\star}) - (2x)x^{\star} \sin y}{(x^{\star} + y^{\star})^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \cdot & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

□

(ج).  $\frac{\partial^{\star} f}{\partial x^{\star}}(x, y)$  را محاسبه کنید.

پاسخ.

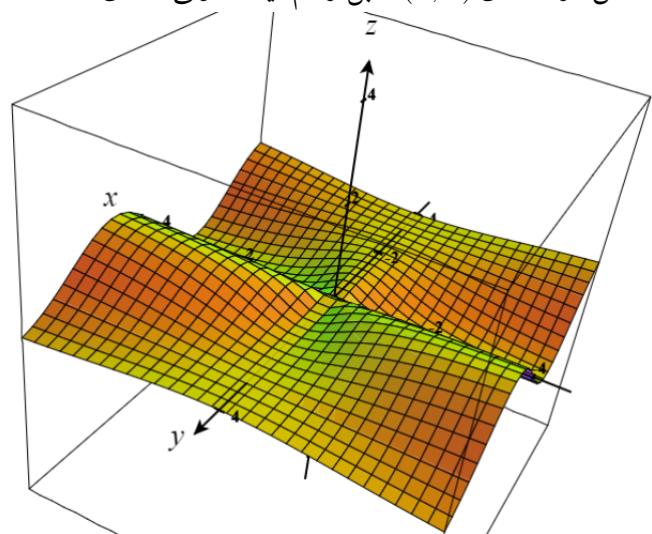
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(\cdot + h, \cdot) - f_x(\cdot, \cdot)}{h} = \dots$$

□

(د). در چه جهت‌هایی تابع بالا مشتق‌پذیر است؟

(ه). آیا تابع در نقطه‌ی  $(0, 0)$  مشتق‌پذیر است؟ (راهنمایی: رابطه‌ی  $D_u f = \nabla f \cdot u$  برقرار نیست. پس مشتق‌پذیر نیست.)

پاسخ قسمتهای د و ه مشابه سوال اول این جلسه است. در زیر نمودار این تابع را رسم کردہ‌ایم. دقت کنید که صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی  $(0, 0)$  قابل رسم نیست ولی همه‌ی مشتقات سوئی در این نقطه موجودند.



## ۲۴ جلسه‌ی بیست و چهارم، دوشنبه

تمرین ۶۰. نقاط بحرانی توابع زیر و نوع آنها را مشخص کنید.

$$f(x, y) = (x - 1) \ln(xy) \quad xy > 0. \quad ۱$$

پاسخ.

$$f_y(x, y) = \frac{(x - 1)x}{xy} = ,$$

تابع بالا در  $x = 0$  برابر صفر است ولی نظر به دامنه‌ی تابع  $x = 0$  غیر قابل قبول است. اگر  $x \neq 0$  داریم

$$f_y(x, y) = \frac{x - 1}{y} = ,$$

پس  $x = 1$ . حال

$$f_x(x, y) = \ln(xy) + \frac{y}{xy}(x - 1) = 0 \Rightarrow \ln(xy) + \frac{x - 1}{x} = 0$$

$$f_x(1, y) = 0 \Rightarrow y = 1$$

نقطه‌ی  $(1, 1)$  تنها نقطه‌ی بحرانی تابع مورد نظر است.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} (1, 1)$$

اگر  $D > 0$  و  $f_{xx} > 0$  آنگاه نقطه‌ی  $(1, 1)$  مینیموم نسبی است و اگر  $D < 0$  و  $f_{xx} < 0$  آنگاه نقطه‌ی  $(1, 1)$  یک ماکزیمم نسبی است.

$$f_{xx}(x, y) = \frac{y}{xy} + \frac{x - x + 1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f_{xx}(1, 1) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y} \Rightarrow f_{xy}(1, 1) = 1$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{1 - x}{y^2} \Rightarrow f_{yy}(1, 1) = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$\square$  پس نقطه‌ی  $(1, 1)$  یک نقطه‌ی زینی است.

$$f(x, y) = y(e^x - 1) . ۲$$

$$f(x, y) = xye^{\frac{-(x+y)}{r}} . ۳$$

$$f(x, y) = x^r + xy + y^r + y . ۴$$

مثال ۱۹۲. کوتاهترین فاصله‌ی نقطه‌ی  $(1, 0, -2)$  را به صفحه‌ی  $x + 2y + z = 4$  بیابید.

پاسخ. فرض کنید  $(x, y, z)$  نقطه‌ای روی صفحه باشد. پس  $z = 4 - x - 2y$ . فاصله‌ی نقطه‌ی  $(-2, 0, 1)$  از نقطه‌ی  $(x, y, z)$  برابر است با

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$$

$$F = d^2(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

کافی است نقطه‌ای مانند  $(x_0, y_0)$  پیدا کنیم که در آن تابع  $F$  مینی‌مم شود.  
تعیین نقاط بحرانی  $F$ :

$$F_x(x, y) = 2(x - 1) + (-2)(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0 \Rightarrow 2x + 2y = 7$$

$$F_y(x, y) = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0 \Rightarrow 2x + 5y = 12$$

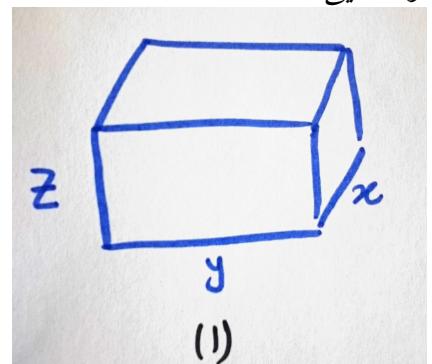
بعد از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به نقطه‌ی  $(\frac{5}{3}, \frac{11}{3})$  می‌رسیم. بنا به صورت سوال می‌دانیم که تابع  $F$  دارای مینی‌مم نسبی است. پس این مینی‌مم در نقطه‌ی  $(\frac{5}{3}, \frac{11}{3})$  رخ می‌دهد. (زیرا این نقطه، بحرانی است). پس فاصله‌ی مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{F(\frac{5}{3}, \frac{11}{3})} = \dots$$

□

مثال ۱۹۳. حداکثر حجم یک جعبه‌ی مکعب مستطیلی بدون در را بباید که بتوان با  $12m^2$  مقوا ساخت.

راهنمایی.



$$2xy + 2zx + xy = 12$$

$$V(x, y, z) = xyz$$

$$z = \frac{12 - xy}{2y + 2x}$$

تابع  $F(x, y)$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F(x, y) = xy \left( \frac{12 - xy}{2y + 2x} \right)$$

کافی است  $x, y$  را به گونه‌ای بباییم که تابع  $F$  ماقزیم داشته باشد. (یه محک دوم نیازی نیست).

## ۱.۲۴ اکسترم‌های مطلق

یادآوری ۱۹۴ (از توابع تک متغیره). فرض کنید  $f(x)$  یک تابع پیوسته در بازه‌ی بسته کراندار  $[a, b]$  باشد. آنگاه  $f$  در بازه‌ی  $[a, b]$  دارای ماکریزم و مینیموم مطلق است.

دستورالعمل محاسبه:

۱. نقاط بحرانی تابع را در بازه‌ی  $[a, b]$  بیابید.
۲. مقدار تابع را در نقاط مرزی  $a, b$  تعیین می‌کنیم.
۳. مقدار تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی مقایسه می‌کنیم.

اصطلاحات توپولوژیک در قضیه‌ی بالا:

۱. تابع پیوسته

۲. نقطه‌ی مرزی

۳. مجموعه‌ی بسته و کراندار

هدفمان در ادامه‌ی درس این است که متناظر آنچه در یادآوری ۱۹۴ بیان شده است، برای توابع دو متغیره ثابت کنیم. برای این منظور، باید مفاهیم بسته بودن، کراندار بودن و پیوسته بودن را برای این حالت نیز تعریف کنیم. مفهوم پیوسته بودن را در درسهای پیشین دیده‌ایم. در زیر به بقیه‌ی این مفاهیم توپولوژیک پرداخته‌ایم. یادگرفتن درست معنی توپولوژی، نیاز به گذراندن ۴ واحد درسی در رشته‌ی ریاضی دارد و جزو اهداف اصلی درس ریاضی ۲ نیست. شما تنها باید بدانید که هرگاه سخن از پیوستگی، فاصله، مجموعه‌ی باز و مجموعه‌ی بسته، و غیره به میان می‌آید، پای توپولوژی در کار است.

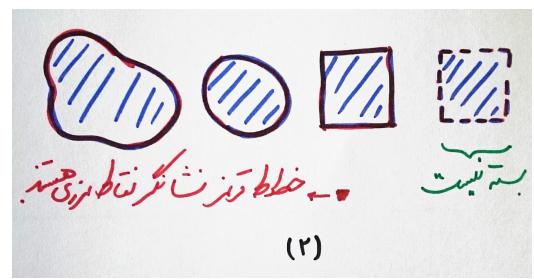
## ۲.۲۴ توپولوژی در $\mathbb{R}^2$

۱. دیسک باز به مرکز  $(a, b)$  و شعاع  $\delta$ :

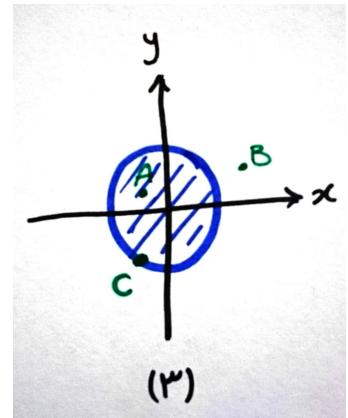
$$B_\delta((a, b)) = \{(x, y) | \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \underbrace{\delta}_{\text{اکید}}\}$$

۲. نقاط مرزی یک مجموعه‌ی  $\mathbb{R}^2 \subseteq X$ . نقطه‌ی  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  را یک نقطه‌ی مرزی برای مجموعه‌ی  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  می‌خوانیم هرگاه برای هر دیسک باز  $B_\delta((a, b))$  (به ازای مقادیر مختلف  $\delta$ ) داشته باشیم:

$$\begin{cases} B_\delta((a, b)) \cap D \neq \emptyset \rightarrow \text{این اشتراک باید خود } (a, b) \text{ شود.} \\ B_\delta((a, b)) \cap \underbrace{D^c}_{D^c = \mathbb{R}^2 - D} \neq \emptyset \rightarrow \text{این اشتراک باید خود } (a, b) \text{ شود.} \end{cases}$$



مثال ۱۹۵. دقت کنید که دایره‌ی  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$  جزو  $x^2 + y^2 = 1$  نیست.



$A$  نقطه‌ی مرزی نیست.

$B$  نقطه‌ی مرزی نیست.

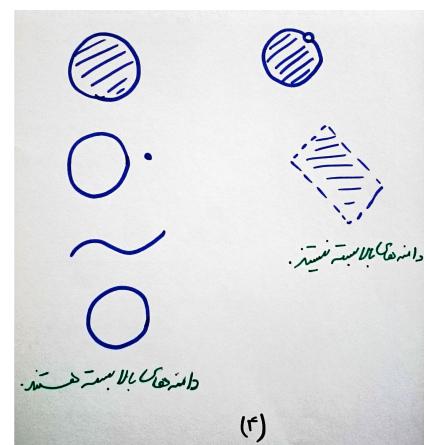
$C$  نقطه‌ی مرزی است. پس مجموعه‌ی نقاط مرزی  $D$  مجموعه‌ی زیر است:

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

### ۳. مجموعه‌ی بسته:

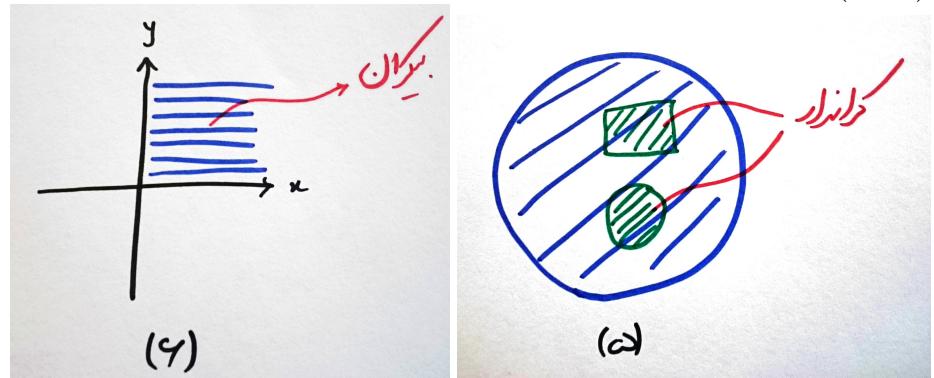
مجموعه‌ی  $D \subseteq \mathbf{R}^2$  را بسته می‌خوانیم هرگاه شامل تمام نقاط مرزی خود باشد.

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$



### ۴. مجموعه‌ی کراندار

مجموعه‌ی  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  را کراندار می‌خوانیم هرگاه نقطه‌ی  $(a, b) \in D$  و شعاع  $\delta$  موجود باشند به طوری که  $B_\delta((a, b))$



تعريف ۱۹۶. فرض کنید  $z = f(x, y)$  یک تابع دو متغیره باشد. می‌گوییم تابع  $f$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  ماکزیمم مطلق دارد هرگاه

$$\forall (x, y) \in Dom(f) \quad f(x, y) \leq f(a, b)$$

توجه کنید که نیازی نیست که تابع در یک همسایگی (دیسک باز) از نقطه‌ای که در آن ماکزیمم یا مینیموم مطلق اتفاق می‌افتد، تعریف شده باشد. در واقع ممکن است که اکسترممهای مطلق روی مرز یک ناحیه رخ دهند. حال آماده‌ایم تا قضیه‌ای مشابه درس ریاضی ۱، برای اکسترممهای مطلق توابع دو متغیره بیان کنیم:

قضیه ۱۹۷. اگر  $f(x, y)$  یک تابع پیوسته در یک مجموعه‌ی بسته و کراندار  $D$  باشد آنگاه  $f$  در  $D$  هم ماکزیمم و هم مینیموم مطلق دارد.

### روش محاسبه‌ی اکسترممهای مطلق

۱. نقاط بحرانی تابع را بیابید.

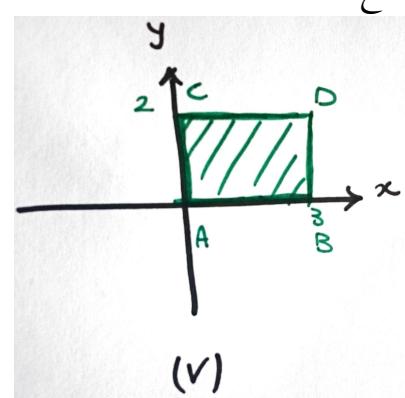
۲. مرز دامنه را مشخص کنید.

۳. مقادیر تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی مقایسه کنید.

مثال ۱۹۸. اکسترممهای مطلق تابع زیر را در دامنه‌ی مشخص شده بیابید.

$$f(x, y) = x^4 - 2xy + 2y \quad D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$$

پاسخ.



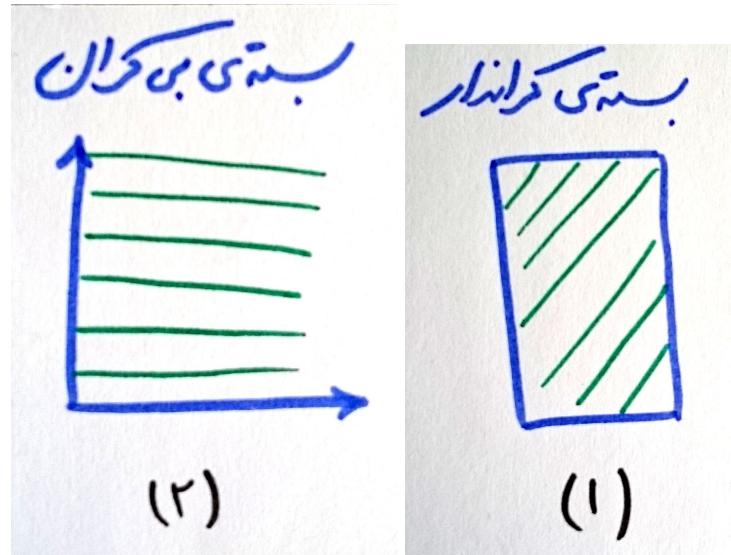
□

پاسخ سوال بالا را در جلسه‌ی بعدی خواهیم داد.

## ۲۵ نیم جلسه‌ی بیست و پنجم، چهارشنبه

### ۱.۲۵ اکسٹرمم‌های مطلق

گفتیم که اگر  $f(x, y)$  یک تابع دو متغیره‌ی پیوسته باشد که در یک مجموعه‌ی بسته‌ی کراندار  $D$  تعریف شده است آنگاه  $f$  در  $D$  دارای مینی‌موم و ماکزیمم مطلق است.



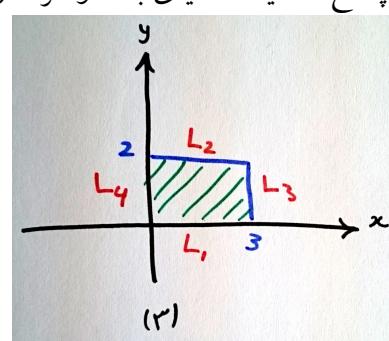
دستورالعمل:

مقادیر تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی با هم مقایسه کنید.

مثال ۱۹۹. اکسٹرمم‌های مطلق تابع  $f(x, y) = x^3 - 2xy + 2y$  را در مجموعه‌ی  $D$  پیدا کنید.

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$$

پاسخ.  $D$  یک ناحیه‌ی بسته و کراندار است. تابع  $f$  چند جمله‌ای و از این رو پیوسته است.



حال نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم. توجه کنید که نقاط بحرانی، روی مرزها نیستند، بلکه درون ناحیه‌ی داده شده هستند.

$$f_x(x, y) = 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$f_y(x, y) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

تنها نقطه‌ی بحرانی نقطه‌ی  $(1, 1)$  است. داریم:

$$f(1, 1) = 1 - 2 + 2 = 1$$

مجموعه نقاط روی خطوط مرزهای دامنه را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم:

$$L_1 = \{(x, \cdot) | 0 \leq x \leq 3\}, \quad L_2 = \{(x, 2) | 0 \leq x \leq 3\}$$

$$L_3 = \{(3, y) | 0 \leq y \leq 2\}, \quad L_4 = \{(\cdot, y) | 0 \leq y \leq 2\}$$

محاسبه مقادیر تابع در  $L_1$ :

$$f(x, \cdot) = x^2 \quad 0 \leq x \leq 2$$

این تابع در نقاط زیر اکسترمم دارد:

$$f(\cdot, 0) = 0, f(3, 0) = 9$$

پس  $(0, 0)$  مینی‌موم مطلق در  $L_1$  و  $(3, 0)$  ماکزیمم مطلق در  $L_1$  است.

محاسبه مقادیر تابع در  $L_2$ :

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \quad x \in (0, 3)$$

$$\text{ماکزیمم مطلق در مسیر } L_2 = 4$$

$$\text{مینی‌موم مطلق در مسیر } L_2 = 4$$

محاسبه مقادیر تابع در  $L_3$ :

$$f(3, y) = 9 - 6y + 2y = 9 - 4y \quad y \in [0, 2]$$

$$f(3, 2) = 9 - 8 = 1, f(3, 0) = 9$$

پس در مسیر  $L_3$  نقطه  $(3, 2)$  مینی‌موم مطلق و نقطه  $(3, 0)$  ماکزیمم مطلق است.

محاسبه مقادیر تابع در  $L_4$ :

$$f(\cdot, y) = 2y \quad y \in [0, 2]$$

$$f(\cdot, 0) = 0, f(\cdot, 2) = 4$$

پس در مسیر  $L_4$  نقطه  $(0, 0)$  مینی‌موم مطلق و نقطه  $(0, 2)$  ماکزیمم مطلق است. از مقایسه نقاط بدسته آمده نتیجه می‌گیریم که در نقاط  $(0, 0)$  و  $(0, 2)$  مینی‌موم رخ می‌دهد و مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است؛ همچنین در نقطه  $(3, 0)$  ماکزیمم مطلق رخ داده است و مقدار تابع در این نقطه ۹ است.  $\square$

تمرین ۶۱. اکسترمم‌های مطلق تابع  $f(x, y) = xy^2$  را در ناحیه  $D$  بیابید.

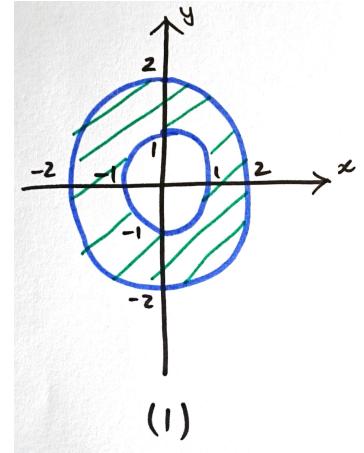
$$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$$

## ۲۶ جلسه‌ی بیست و ششم، شنبه

تمرین ۶۲. اکسٹرمم‌های مطلق تابع  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  را در ناحیه‌ی  $D$  بیابید.

$$D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

پاسخ.

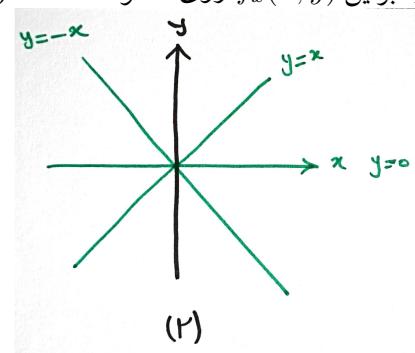


ناحیه‌ی  $D$  بسته و کراندار است و تابع  $f$  در ناحیه‌ی  $D$  پیوسته است. بنابراین  $f$  در  $D$  دارای اکسٹرمم‌های مطلق است. حال می‌خواهیم نقاط بحرانی تابع  $f(x, y)$  برای  $(x, y) \in D$  را بیابیم.

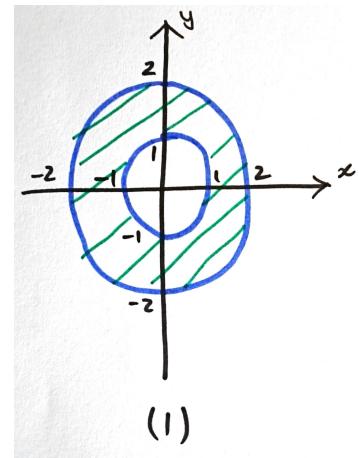
$$f_x(x, y) = \frac{y^2(x^2 + y^2) - 2x(xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

$$\Rightarrow y^2(y^2 - x^2) = 0$$

بنابراین  $f_x(x, y)$  روی خطوط  $y = \pm x$  و  $y = 0$  برابر صفر است.

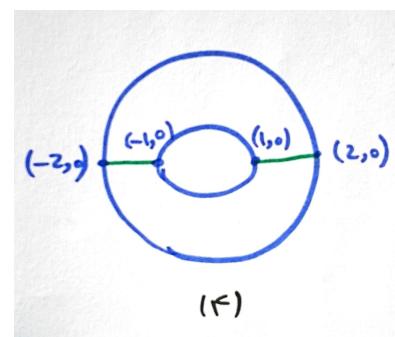


$$f_y(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2y(xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2y + 2xy^2 - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$



روی خطوط  $x = 0$  و  $y = 0$  مقدار  $f_y$  صفر است. پس نقاط بحرانی تابع که از اشتراک این خطوط به دست می‌آیند به صورت زیرند:

$$D \cap \{(x, y) | y = 0\}$$



مقادیر تابع در نقاط بحرانی برابر صفر است. حال اکسٹرمم‌های تابع را روی مرزهای  $D$  بدست می‌آوریم.

$$L_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

مقادیر تابع  $f(x, y)$  روی مرز  $L_1$  را توسط تابع تک متغیره‌ی  $g$  به صورت زیر پوشیده می‌شوند:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \stackrel{(x, y) \in L_1}{\Rightarrow} g(x) = x(1 - x^2) = x - x^3 \quad x \in [-1, 1]$$

برای تعیین اکسٹرمم‌های تابع  $(x, y)$  در ناحیه  $[1, -1]$  ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست می‌آوریم.

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مقادیر تابع در این نقاط به صورت زیر است.

$$g(x) = x - x^3 \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

پس برای تابع  $f(x, y)$  مقادیر زیر را داریم:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \sqrt{1 - \frac{1}{3}}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \sqrt{1 - \frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{3}}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

محاسبه‌ی  $g$  در نقاط مرزی:

$$g(1) = 0, g(-1) = 0$$

يعنى

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = 0.$$

حال به طور مشابه مقادیر تابع را روی مرز  $L_2$  محاسبه می‌کنیم.

$$L_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in L_2$$

$$h(x) = \frac{x(4 - x^2)}{4} \quad x \in [-2, 2]$$

روند بالا را برای تابع  $h$  نیز تکرار کنید. مقادیر تابع  $f$  را در نقاط بدست آمده با هم مقایسه کنید. ادامه با شما! اکسٹرمم‌های

بدست آمده به صورت زیر خواهند بود:

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) = 0/77 \text{ ماکزیمم مطلق}$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) = -0/77 \text{ مینیموم مطلق}$$

□

## ۱.۲۶ روش ضرایب لاگرانژ

در مثال قبل لازم بود که اکسٹرمم‌های مطلق تابع  $f(x, y)$  را روی ناحیه‌ی  $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$  محاسبه کنیم. برای این کار از توابع تک متغیره استفاده کردیم. در این بخش، می‌خواهیم روشی کلی برای محاسبه اکسٹرمم‌های مطلق یک تابع، تحت یک قید ارائه کنیم. نخست روش مورد نظر را به صورت یک دستورالعمل بیان می‌کنیم و سپس برای این دستورالعمل توجیه‌های هندسی و جبری خواهیم آورد:

برای تعیین اکسٹرمم‌های مطلق  $f(x, y)$  تحت قید  $g(x, y) = k$  از روش زیر استفاده می‌کنیم:

۱) دستگاه سه معادله با سه مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = k \end{cases}$$

۲) مقادیر اکسٹرمم مطلق تابع  $f$  دقیقاً در برخی از  $(x, y)$ ‌های جواب معادله‌ی بالا رخ می‌دهد. مقادیر تابع را در این نقاط با هم مقایسه می‌کنیم.

به بیان دیگر دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

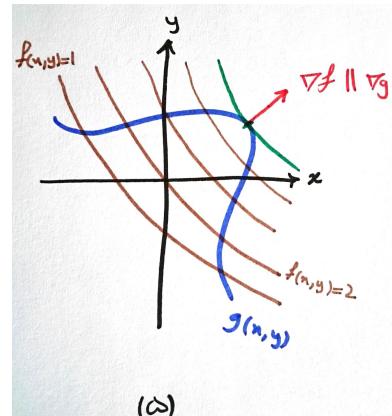
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \rightarrow \\ g(x, y) = k \end{cases}$$

گرادیان  $f$  با گرادیان  $g$  موازی شود.  $\rightarrow$

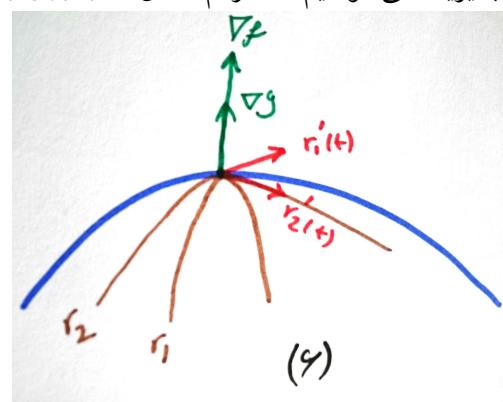
تعمیم ۲۰۰. برای تعیین اکسٹرمم‌های مطلق تابع  $(z) f(x, y, z) = k$  تحت قید  $g(x, y, z) = k$  دستگاه چهار معادله با چهار مجهول زیر را حل کرده مقادیر تابع را در  $(x, y, z)$  های بدست آمده با هم مقایسه می‌کنیم. حداکثر این مقادیر، ماکزیمم مطلق و حداقل آنها مینیموم مطلق خواهد شد.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

در شکل زیر توجیهی هندسی برای روش ضرایب لاگرانژ برای توابع دو متغیره آورده‌ایم. دقت کنید که در تقاطع با نمودار تابع  $f$  زمانی حداکثر می‌شود که منحنی تراز آن بر  $g$  مماس شود؛ دقیقاً در جائی که  $f$  می‌خواهد از  $g(x, y) = k$  خارج شود. در نقطه‌ای که ایندو بر هم مماسند، یايد گرادیانها با هم موازی باشند.



بیایید برای توابع سه متغیره، روش ضرایب لاگرانژ را به طور دقیق‌تر توجیه کنیم. تابع سه متغیره  $f(x, y, z)$  را در نظر بگیرید. می‌خواهیم اکسٹرمم مطلق آن را روی رویه‌ی  $g(x, y, z) = k$  محاسبه کنیم.



فرض کنید  $(t) \vec{r}$  یک منحنی فضایی باشد به طوری که  $p = \vec{r}(t)$  و  $p$  یک نقطه‌ی ماکزیمم مطلق برای تابع  $f$  باشد. پس تابع تک متغیره‌ی زیر از  $R \rightarrow R$  در  $t = t$  دارای ماکزیمم مطلق است.

$$t \stackrel{h}{\mapsto} f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$$

تابع  $h(t)$  در نقطه‌ی  $t = t_0$  دارای ماکزیمم مطلق است. پس  $h'(t_0) = 0$ .

$$\frac{\partial f(x(t), y(t), z(t))}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t_0) = 0$$

پس در نقطه‌ی  $p$  داریم:

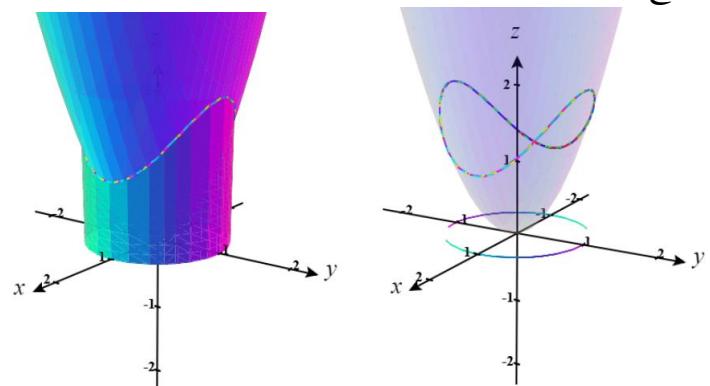
$$\vec{\nabla}f \cdot r'(t_0) = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \perp r'(t_0)$$

خلاصه ۲۰۱.  $\nabla f$  بر تمام بردارهای  $r'$  برای منحنی‌های گذرنده از  $p$  عمود است. پس  $\nabla f$  بر صفحه‌ی مماس بر  $g$  در نقطه‌ی  $p$  عمود است. از طرفی  $\nabla g$  نیز در همان نقطه بر صفحه‌ی مماس عمود است. پس

$$\nabla f \parallel \nabla g$$

مثال ۲۰۲. حداقل و حداکثر مقدار تابع  $x^2 + y^2 = 1$  را روی دایره‌ی  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  تعیین کنید.

پاسخ.



$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda(2y) \\ 4y = \lambda(2x) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

از معادله‌ی  $2x = \lambda(2y)$  نتیجه می‌گیریم که  $y = \pm \frac{x}{\lambda}$ . از معادله‌ی  $4y = \lambda(2x)$  نتیجه می‌گیریم که  $x = \pm \frac{\lambda y}{2}$ . از معادله‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  و جواب‌های معادله‌ی قبلی نتیجه می‌گیریم که

$$(1) \quad \lambda = 1 \rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (\pm 1, \pm 1)$$

$$(2) \quad x = 0 \rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow (0, \pm 1)$$

پس مینی‌مومهای مطلق تابع برابرند با

$$f(1, 1) = f(-1, 1) = 1$$

و ماکزیمم‌های مطلق تابع برابرند با

$$f(0, 1) = f(0, -1) = 2$$

□

### ۱.۲۷ ادامه‌ی روش ضرایب لاگرانژ

گفتیم که برای تعیین اکسٹرممهای مطلق تابع  $f(x, y, z) = k$  تحت قید  $g(x, y, z) = 1$  باید دستگاه زیر با چهار معادله با چهار مجهول  $x, y, z, \lambda$  را حل کنیم.

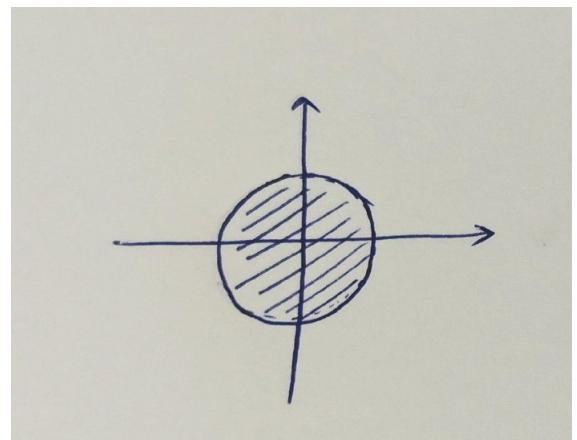
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases}$$

مثال ۲۰۳. ماکزیمم و مینیمم های مطلق تابع  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  را روی دیسک  $x^2 + y^2 \leq 1$  بیابید.

پاسخ. مراحل پاسخ به صورت زیر هستند:

- ۱) تعیین نقاط بحرانی تابع در درون دیسک  $x^2 + y^2 < 1$ .
  - ۲) تعیین اکسٹرمم های مطلق تابع روی مرز  $x^2 + y^2 = 1$ .
- مرحله‌ی اول:

$$f_x(x, y) = 2x \quad f_y(x, y) = 4y$$



پس نقطه‌ی  $(0, 0)$  نقطه‌ی بحرانی است.

$$f(0, 0) = 0$$

مرحله‌ی دوم: تعیین اکسٹرمم های تابع  $f = x^2 + 2y^2$  تحت قید  $1 = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda \Rightarrow x = 0 \quad or \quad \lambda = 1 \\ 4y = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

از معادله‌ی سوم:

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

نقاط:  $(0, \pm 1)$   $(\pm 1, 0)$

$$\underbrace{f(0, 0) = 0}_{\text{مینیمم مطلق}} \quad f(\pm 1, 0) = 1 \quad \underbrace{f(0, \pm 1) = 2}_{\text{ماکزیمم مطلق}}$$

□

مثال ۲۰۴. نقطه‌ای روی صفحه‌ی  $x + 4y + 3z = 2$  در آن نقطه پیدا کنید که تابع  $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$  دارای کمترین مقدار باشد.

پاسخ. استفاده از روش ضرایب لاگرانژ:

$$\begin{cases} 1 = \lambda(4x) \rightarrow x = \frac{1}{4\lambda} \\ 4 = \lambda(6y) \rightarrow y = \frac{2}{3\lambda} \\ 3 = \lambda(2z) \rightarrow z = \frac{3}{2\lambda} \\ x + 4y + 3z = 2 \rightarrow \frac{1}{4\lambda} + 4\left(\frac{2}{3\lambda}\right) + 3\left(\frac{3}{2\lambda}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{3 + 32 + 18}{12\lambda} = \frac{53}{12\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{53}{24} \simeq 2.2 \Rightarrow x = \frac{1}{4 \times 2.2}, \quad y = \frac{4}{3 \times 2.2}, \quad z = \frac{3}{2 \times 2.2}$$

□

مثال ۲۰۵. حداکثر حجم یک جعبه‌ی مکعب مستطیلی بدون در را بیابید که با  $12m^2$  مقوا ساخته شود.  
راهنمایی: از روش ضرایب لاگرانژ با قید و تابع زیر استفاده کنید:

$$\begin{cases} 2xy + 2yz + xz = 12 \\ V = xyz \end{cases}$$

مثال ۲۰۶. از بین مثلث‌ها، مثلثی را بیابید که مجموع سینوس زوایای آن حداکثر شود.

راهنمایی:  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$  تحت قید  $f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3$

مثال ۲۰۷. سه عدد بیابید که حاصل جمع آنها ۱۲۰۰ و حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

مثال ۲۰۸. سه عدد بیابید که حاصل ضرب آنها  $n$  شود و مجموع مربعات آنها حداکثر شود.  
راهنمایی:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz = n \end{cases}$$

مثال ۲۰۹. اکسترمم‌های توابع زیر را تحت قید داده شده بیابید.

(الف)

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x + y + z \\ g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

(ب)

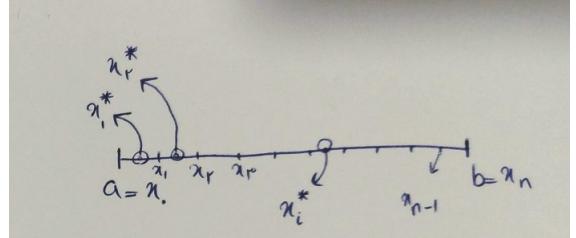
$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + \gamma y^2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

مثال ۲۱۰. نقاطی روی بیضی  $x^2 + y^2 - 2 = 0$  که فاصله‌ی آنها تا مبدأ حداقل باشد.

پاسخ. کافی است مینیموم مطلق تابع  $z^2 = x^2 + y^2$  را تحت قید  $x^2 + y^2 - 2 = 0$  بیابیم. (روش ضرایب لاگرانژ)  $\square$

## ۲.۲۷ انتگرال دوگانه

پیش از آنکه بخواهیم درباره‌ی انتگرال دوگانه توضیح دهم، لازم می‌دانم مفاهیمی ضروری را از درس ریاضی ۱ یادآوری کنم.



فرض کنید  $f(x)$  یک تابع تک متغیره باشد که روی بازه‌ی بسته‌ی  $[a, b]$  تعریف شده است. این بازه را به  $n$  قسمت با طولهای مساوی تقسیم کنید. طول هر قسمت برابر خواهد بود با:

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x$$

از بازه‌ی  $i$  ام عنصر  $x_i^*$  را انتخاب کنید و جمع ریمانی زیر را بسازید.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

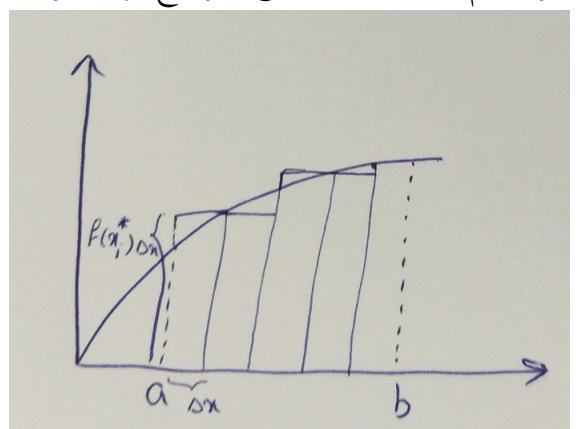
حال اگر تعداد بازه‌ها در این تقسیم بندی را زیاد کنیم، می‌توانیم به حد زیر می‌رسیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

اگر حاصل حد بالا موجود باشد، تابع  $f$  را در  $[a, b]$  انتگرال پذیر می‌خوانیم و می‌نویسیم:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

نیز گفتیم که از لحاظ هندسی، اگر تابع مورد نظر مثبت باشد، حد بالا در واقع مساحت زیر منحنی تابع را نشان می‌دهد.



عموماً برای محاسبه‌ی انتگرال از قضیه‌ی اساسی استفاده می‌کردیم. بنا به این قضیه، مفهوم انتگرالگیری به نوعی دوگان

مفهوم مشتقگیری است.

قضیه اساسی حسابان:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

به بیان دیگر اگر تابع  $F$  را به صورت زیر تعریف کنیم

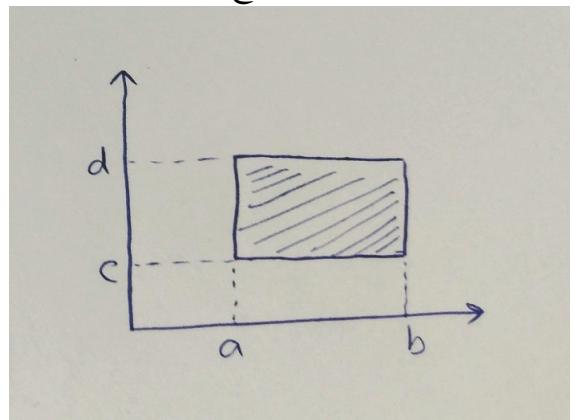
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

آنگاه

$$F'(x) = f(x)$$

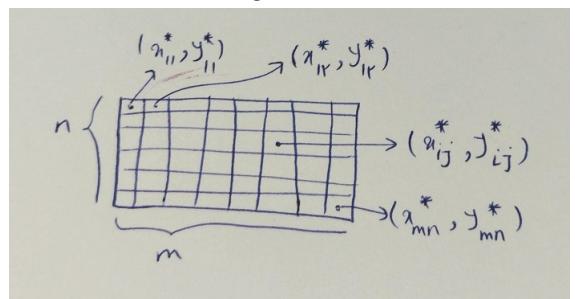
### ۳.۲۷ جمع‌های ریمانی دوگانه

فرض کنید  $f(x, y)$  یک تابع دو متغیره باشد که روی ناحیه‌ی مستطیلی  $R$  به صورت زیر تعریف شده باشد.



$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

دامنه‌ی  $R$  را به صورت مقابل به  $n \times n$  قسمت با مساحت‌های مساوی  $\Delta A$  تقسیم بندی می‌کنیم.



از هر کدام از مستطیل‌های ایجاد شده نقطه‌ای به دلخواه، مثلًاً نقطه‌ی  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  را، انتخاب می‌کنیم و جمع ریمانی را می‌سازیم:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

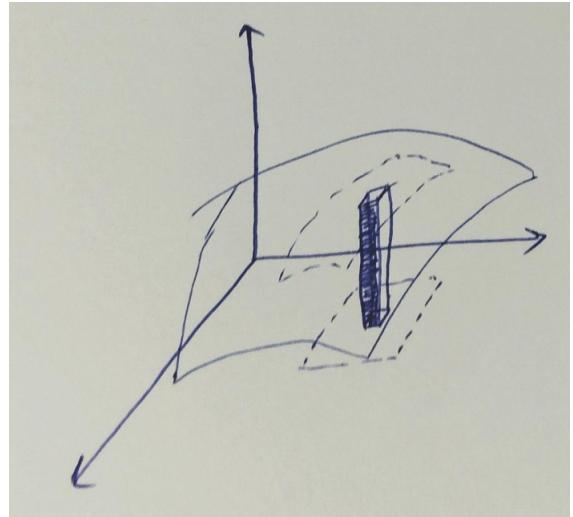
تعريف ۲۱۱. تابع  $f$  را در ناحیه‌ی مستطیلی  $R$  انتگرال پذیر می‌خوانیم هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

و در این صورت می‌نویسیم:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

تعابیر هندسی: فرض کنید تابع  $f(x, y) \geq 0$  روی ناحیه‌ی مستطیلی  $R$  تعریف شده باشد.

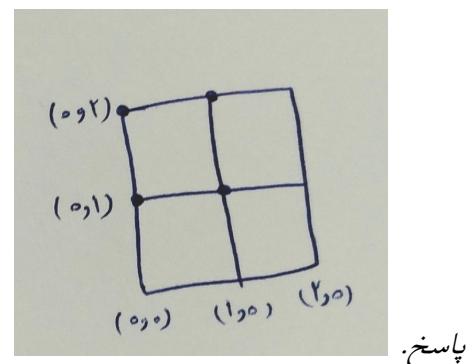


عبارة

$$f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A$$

حجم یک مکعب مستطیل را نشان می‌دهد که مقطع آن  $\Delta A$  است. حاصل جمع حجم این مکعب مستطیلها در واقع تقریبی برای حجم جسم واقع شده بر زیر رویه‌ی  $z = f(x, y)$  و بالای ناحیه‌ی مستطیلی  $R$  است. بنابراین  $\iint_R f(x, y) dA$  بیانگر حجم ناحیه‌ی زیر رویه‌ی  $f(x, y)$  و بالای مستطیل  $R$  است.

مثال ۲۱۲. حجم جسمی را که بالای مستطیل  $[0, 2] \times [0, 2] = R$  و زیر سه‌می وار بیضوی  $z = 16 - x^2 - 2y^2$  واقع شده است، تقریب بزنید



$$f(0, 2) = 8 \quad f(0, 1) = 14$$

$$f(1, 2) = 7 \quad f(1, 1) = 12 \quad \Delta A = 1$$

□

$$\text{حجم مورد نظر}^{13} \approx 1(8 + 7 + 14 + 12) = 42$$

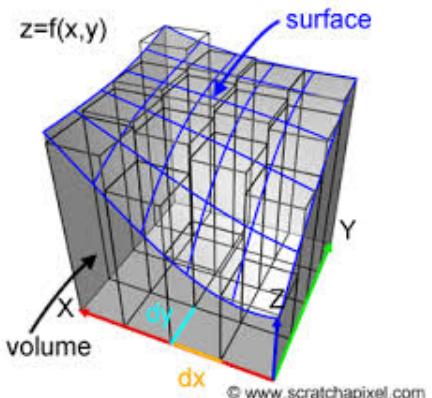
---

<sup>13</sup> زحمت تایپ جزوی این جلسه را خانم شیرجزی کشیده‌اند.

### ۱.۲۸ انتگرال دوگانه

در جلسات قبل گفتیم که جمعهای ریمانی در واقع تقریبی برای حجم یک ناحیه به دست می‌دهند و با حدگیری از آنها به انتگرال دوگانه می‌رسیم.

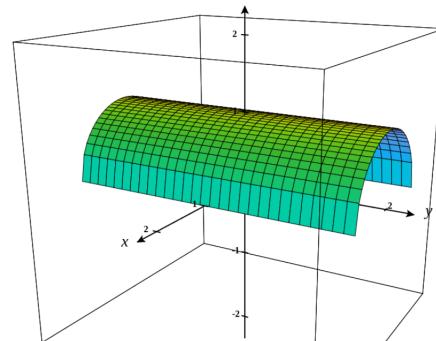
$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x, y)_{i,j} \Delta A = \iint_R f(x, y) dA$$



مثال ۲۱۳. فرض کنید  $\{ (x, y) | -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2 \}$  را محاسبه کنید.

پاسخ. بنابر آنچه گفته شد، کافی است حجم ناحیه زیر رویه  $z = \sqrt{1 - x^2}$  و بالای  $R$  را محاسبه کنیم. حجم نیم استوانه برابر است با

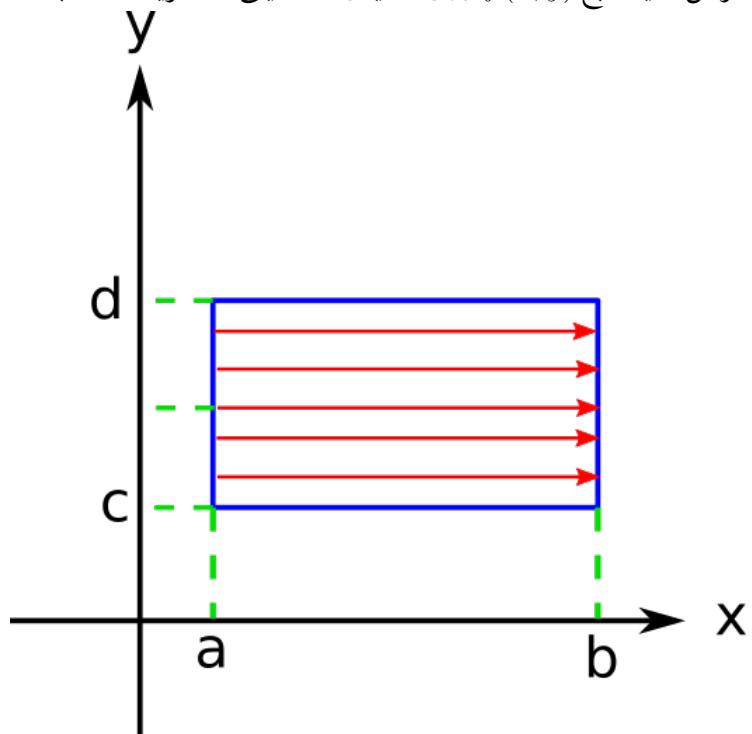
$$\frac{4\pi}{2} = 2\pi$$



□

## ۱.۱.۲۸ انتگرال جزئی

فرض کنید تابع  $f(x, y)$  روی ناحیه‌ی مستطیلی  $R$  تعریف شده باشد.



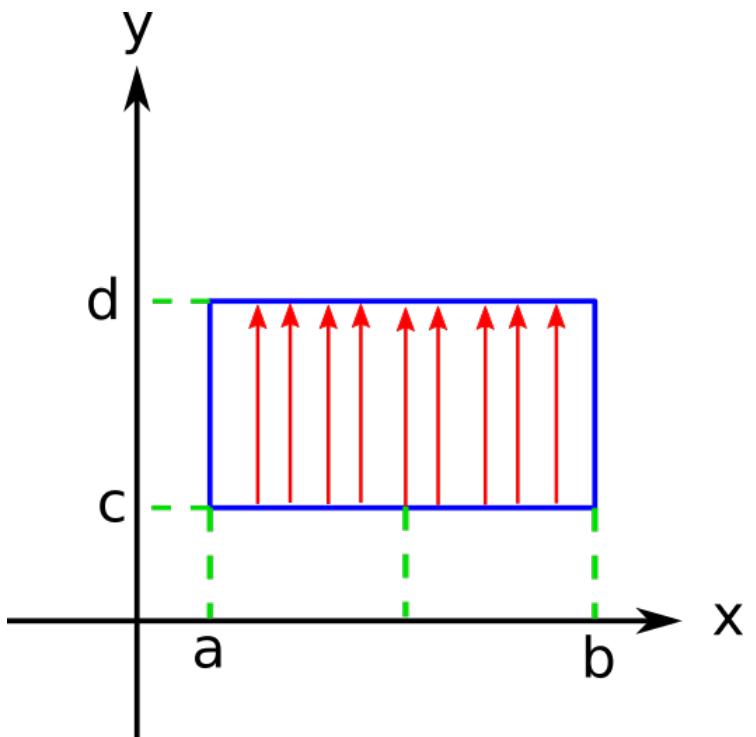
برای عدد دلخواه  $y$  در بازه‌ی  $[c, d]$  تعریف می‌کنیم:

$$h(y) = \int_a^b f(x, y) dx \rightarrow x$$

انتگرال جزئی نسبت به  $x$

عبارت بالا برای هر  $y$  دلخواه قابل تعریف است. پس تابع زیر را داریم:

$$y \xrightarrow{h} \int_a^b f(x, y) dx$$



به طور مشابه برای  $x$  دلخواه در بازه‌ی  $[a, b]$  تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \int_c^d f(x, y) dy \rightarrow y$$

انتگرال جزئی نسبت به  $y$

تعریف ۲۱۴.

$$(*) \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx := \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

بنا بر آنچه در بالا گفته شد، محاسبه‌ی انتگرال  $(*)$  یعنی محاسبه‌ی

$$\int_a^b h(x) dx$$

تعریف ۲۱۵.

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy := \int_c^d \left( \underbrace{\int_a^b f(x, y) dx}_{h(y)} \right) dy$$

تمرین ۶۳. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_1^3 \int_1^3 x^y y dy dx .$$

پاسخ.

$$\int_1^3 x^y y dy = x^y \frac{y}{2} \Big|_1^3 = 2x^3 - \frac{x^1}{2} = \frac{3}{2}x^3$$

$$\int_1^3 \int_1^3 x^y y dy dx = \int_1^3 \frac{3}{2}x^3 dx = \frac{x^3}{2} \Big|_1^3 = \frac{27}{2}$$

□

$$\int_1^3 \int_1^3 x^3 y dx dy . \quad 2$$

پاسخ.

$$\int_1^3 x^3 y dx = \frac{x^4}{4} y \Big|_1^3 = \frac{27}{4} y$$

$$\int_1^3 \int_1^3 x^3 y dx dy = \int_1^3 \frac{27}{4} y dy = \frac{27}{4} \frac{y^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{27}{4}$$

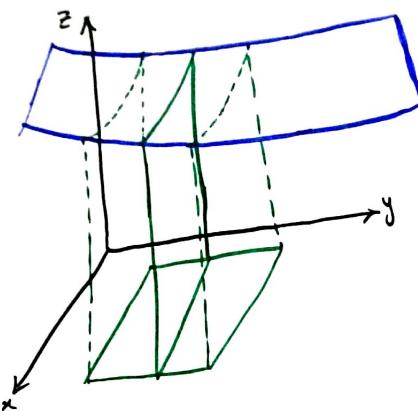
□

در بالا دیدیم که با تعویض ترتیب انتگرالگیری به جوابهای یکسانی رسیدیم. این امر تحت شرایط قضیه‌ی زیر همواره درست است:

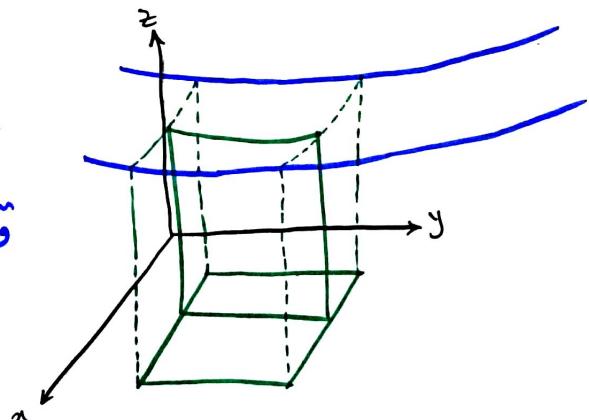
قضیه ۲۱۶ (فوبینی). اگر تابع  $f$  در ناحیه‌ی مستطیلی  $R = [a, b] \times [c, d]$  (یعنی  $R$  پیوسته باشد آنگاه

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

توجیه هندسی



توجیه هندسی  
قضیه فوبینی



## ۲۹ جلسه‌ی بیست و نهم، شنبه

در جلسات قبل درباره‌ی قضیه‌ی فوبینی صحبت کردیم:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

یکی از موهب این قضیه این است که گاهی تغییر ترتیب انتگرال‌گیری، انتگرال‌گیری را ساده‌تر می‌کند.

**مثال ۲۱۷.**  $\iint_R y \sin(xy) dA$  را محاسبه کنید که در آن  $R = [1, 2] \times [0, \pi]$ . (ترتیب مناسب انتگرال‌گیری را خودتان تشخیص دهید).

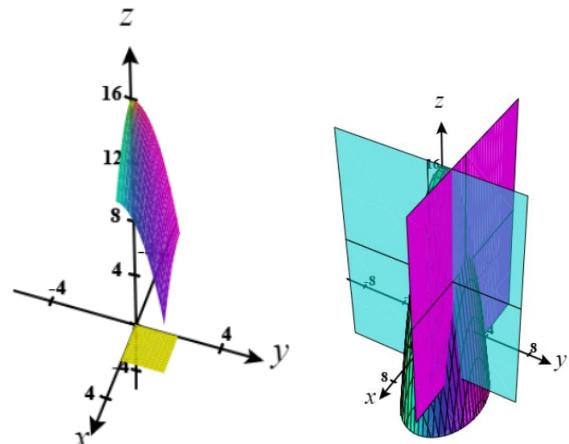
پاسخ.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) dy dx &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) dx dy \\ \int_1^2 y \sin(xy) dx &= -\cos(xy)|_1^2 = -\cos(2y) + \cos(y) \\ \int_0^\pi (-\cos(2y) + \cos(y)) dy &= \left( \frac{-\sin(2y)}{2} + \sin(y) \right)|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

□

**مثال ۲۱۸.** حجم جسمی را بایابید که توسط سه‌می‌وار بیضوی  $x^2 + 2y^2 + z = 16$  و صفحات  $z = 0$  و  $y = 2$  و  $x = 2$  و  $y = 0$  و  $z = 0$  محدود شده است.

اثبات.



ناحیه‌ی انتگرال‌گیری برابر است با

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

$$\int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dy dx$$

$$\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dy = (16y - yx^2 - \frac{2}{3}y^3)|_0^2 = 32 - 2x^2 - \frac{16}{3} = \frac{80}{3} - 2x^2$$

$$\int_1^4 \left( \frac{8}{3}x - 2x^3 \right) dx = \left( \frac{8}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^4 \right) \Big|_1^4 = \frac{160}{3} - \frac{16}{3} = \frac{144}{3} = 48$$

□

توجه ۲۱۹. حواستان باشد که انتگرال دوگانه، حاصلضرب دو تا انتگرال یکانه نیست:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \neq \int_a^b f(x, y) dx \times \int_c^d f(x, y) dy$$

توجه ۲۲۰. با این حال اگر  $f$  فقط تابعی از  $x$  و  $g$  فقط تابعی از  $y$  باشد داریم:

$$\underbrace{\int_a^b \int_c^d f(x) g(y) dy dx}_A$$

$$A = \int_c^d f(x) g(y) dy = f(x) \int_c^d g(y) dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x) g(y) dy dx = \int_a^b A dx = \int_a^b f(x) \int_c^d g(y) dy dx = \int_a^b f(x) dx \times \int_c^d g(y) dy$$

تمرین ۶۴. انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$\int_1^4 \int_1^4 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dy dx . \quad ۱$$

$$\int_1^4 \int_1^4 xy \sqrt{x^4 + y^4} dy dx . \quad ۲$$

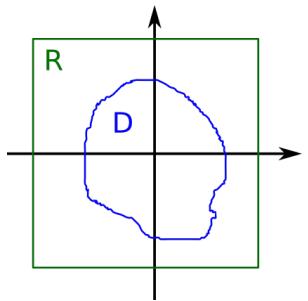
$$\begin{cases} z = 0 \\ x = \pm 1 \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

تمرین ۶۵. حجم جسمی را بیابید که توسط رویه‌ی  $z = 1 + x^2 ye^y$  و صفحات احاطه شده است.

## ۱.۲۹ انتگرال‌گیری در نواحی کلی

درباره‌ی انتگرال‌گیری در نواحی مستطیلی در جلسات پیش سخن گفتیم. فرض کنید  $D$  یک ناحیه‌ی دلخواه در  $\mathbb{R}^2$  باشد. تابع  $f$  را روی این ناحیه انتگرال‌پذیر می‌خوانیم هرگاه تابع  $F$  تعریف شده به صورت زیر، در ناحیه‌ای مستطیلی شامل  $D$  انتگرال‌پذیر باشد.

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in R - D \end{cases}$$

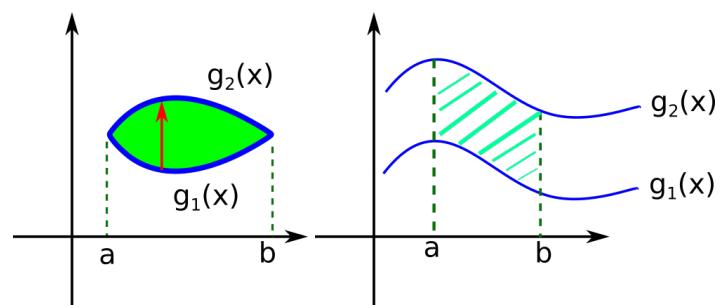


محاسبه‌ی انتگرال در نواحی کلی چندان آسان نیست؛ لیکن در نواحی خاصی می‌توان انتگرال را آسانتر حساب کرد. در زیر درباره‌ی این نواحی و نحوه‌ی انتگرال‌گیری در آنها سخن گفته‌ایم.

### ۱.۱.۲۹ نواحی نوع اول

نواحی به صورت زیر را نوع اول می‌خوانیم:

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



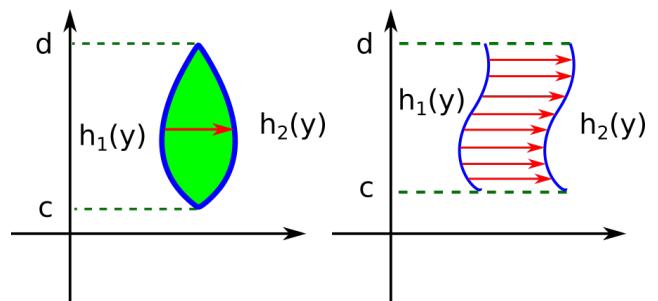
اگر  $D$  یک ناحیه‌ی نوع اول مانند بالا باشد داریم:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy}_{\text{تابعی از } x} dx$$

### ۲.۱.۲۹ نواحی نوع دوم

نواحی مانند  $D$  در زیر را نواحی نوع دوم می‌خوانیم:

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$



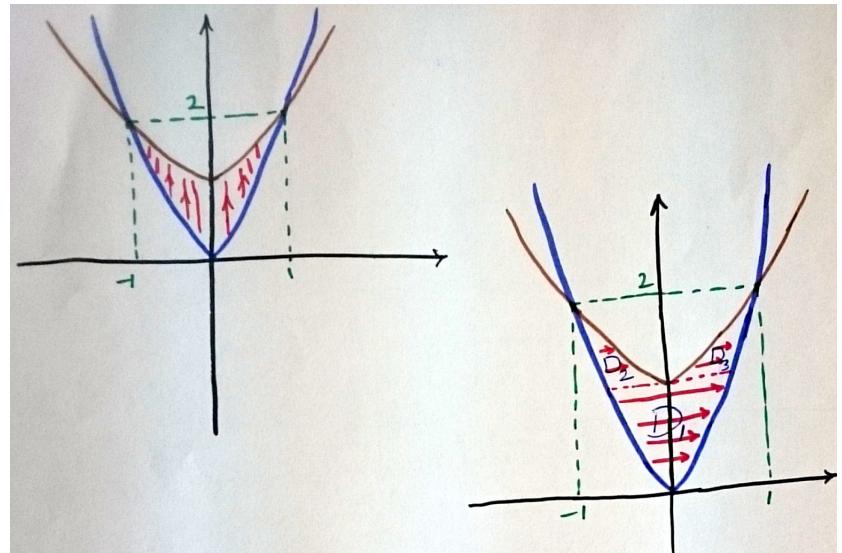
اگر  $D$  یک ناحیه‌ی نوع دوم باشد، آنگاه

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \underbrace{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx}_{\text{تابعی از } y} dy$$

مثال ۲۲۱. فرض کنید  $D$  ناحیه‌ی محصور بین سهمی‌های  $y = 1 + x^2$  و  $y = 2x^2$  باشد. آنگاه  $\iint_D (x + 2y) dA$  را محاسبه کنید.

پاسخ. ابتدا ناحیه‌ی انتگرالگیری را ترسیم می‌کنیم.

$$1 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm 1$$



$D$  را می‌توان یک ناجیه‌ی نوع اول در نظر گرفت و به صورت زیر انتگرالگیری کرد:

$$\iint_D (x + 2y) dA = \int_{-1}^1 \int_{1+x^2}^{1+2x^2} (x + 2y) dy dx$$

$$\int_{1+x^2}^{1+2x^2} (x + 2y) dy = xy \Big|_{1+x^2}^{1+2x^2} + y^2 \Big|_{1+x^2}^{1+2x^2} = x(1 + x^2 - 2x^2) + (1 + x^2)^2 - 4x^4 = -3x^4 - x^2 + 2x^2 + x + 1$$

$$\int_{-1}^1 (-3x^4 - x^2 + 2x^2 + x + 1) dx = \left( \frac{-3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{47}{15}$$

را می‌توان اجتماعی از نواحی نوع دوم در نظر گرفت و همین سوال را به صورت زیر حل کرد:

$$y = 2x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y}{2}}$$

$$\iint_{D_1} (x + 2y) dA = \int_{\cdot}^1 \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (x + 2y) dx dy$$

$$\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (x + 2y) dx = \left( \frac{1}{2}x^2 + 2yx \right) \Big|_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} = 4\sqrt{\frac{y}{2}}y$$

$$\int_{\cdot}^1 \left( \frac{4}{\sqrt{2}}\sqrt{y^2} \right) dy = \frac{4}{\sqrt{2}}\sqrt{y^3} \Big|_{\cdot}^1 = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

$$\iint_{D_2} (x + 2y) dA = \int_1^{\infty} \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{-\sqrt{y-1}} (x + 2y) dx dy = \dots$$

$$\iint_{D_1} (x + 2y) dA = \int_1^4 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (x + 2y) dx dy = \dots$$

□

مثال ۲۲۲. حجم جسمی را محاسبه کنید که زیر سهمی وار  $z = x^2 + y^2$  و بالای ناحیه‌ی محدود شده توسط خطوط  $y = x^2$  و  $y = 2x$  واقع شده است.

پاسخ.

$$x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 2$$

بر اساس ناحیه‌ی نوع دوم:

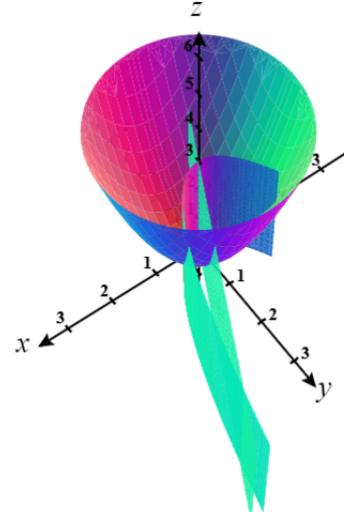
$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy$$

بر اساس ناحیه‌ی نوع اول:

$$\int_0^4 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx$$

$$\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy = (x^2 y + \frac{y^3}{3})|_{x^2}^{2x} = 2x^3 + \frac{8x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} = \frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3}$$

$$\int_0^4 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^4 (\frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3}) dx = \left( \frac{14}{12}x^4 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right)|_0^4$$



□

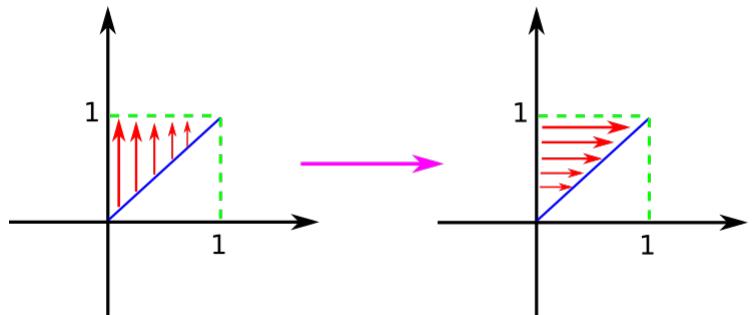
توجه ۲۲۳. هیچ نیازی نیست که هر سوالی را هم با در نظر گرفتن نواحی نوع اول و هم با در نظر گرفتن نواحی نوع دوم حل کنید. در مثالهای بالا تنها با اهداف آموزشی این کار را انجام داده‌ایم. در واقع، باید بتوانید نوعی از ناحیه را انتخاب کنید که شما را راحت‌تر به پاسخ انتگرال برساند.

## ۳۰ جلسه‌ی سی‌ام دوشنبه

مثال ۲۲۴.  $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y) dy dx$  را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$



$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y) dy dx = \int_0^1 \int_0^y \sin(y) dx dy$$

$$\int_0^y \sin(y) dx = x \sin(y)|_0^y = y \sin(y)$$

$$\int_0^1 y \sin(y) dy = \frac{-\cos(y)}{2}|_0^1 = \frac{-\cos(1)}{2} + \frac{1}{2}$$

□

## ۱.۳۰ ویژگی‌های انتگرال

$$\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA . ۱$$

$$\iint_D c \times f(x, y) dA = c \times \iint_D f(x, y) dA . ۲$$

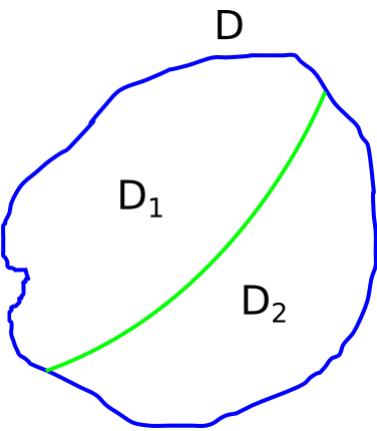
۳. اگر در ناحیه‌ی  $D$  داشته باشیم

$$f(x, y) \geq g(x, y)$$

آنگاه

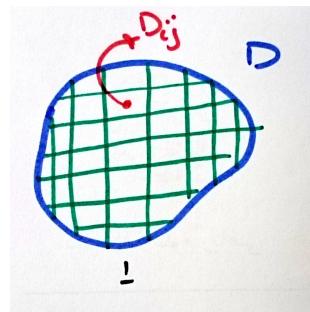
$$\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA . ۴$$



۵. مساحت ناحیه‌ی  $D$  برابر است با

$$\iint_D \underbrace{f(x, y)}_{=1} dA = \iint_D dA$$

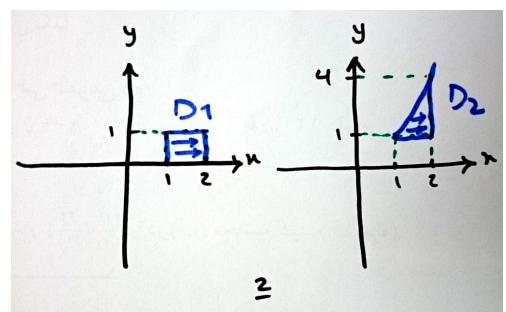


تمرین ۶۶. انتگرال مکرّر زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \int_1^x \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) dx dy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^x \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) dx dy$$

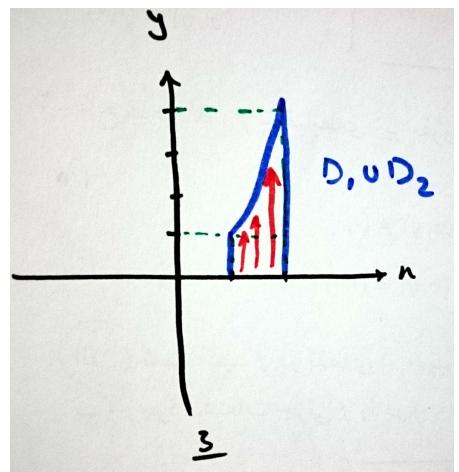
پاسخ.

$$\underbrace{\int_0^1 \int_1^x}_{D_1} \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) dx dy + \underbrace{\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^x}_{D_2} \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) dx dy$$



اگر ناحیه‌ی  $D_1$  و ناحیه‌ی  $D_2$  اشتراک نداشته باشند آنگاه داریم

$$\iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA = \iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dA$$



بنا به شکل بالا ناحیه‌ی انتگرالگیری را به صورت زیر پارامترنندی می‌کنیم:

$$\int_1^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{x^2} \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dy dx$$

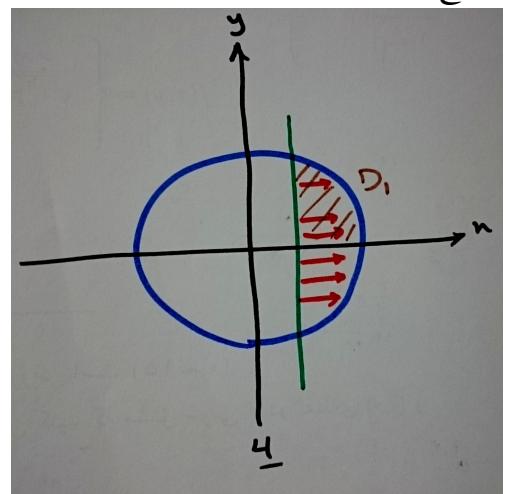
$$\int_1^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dy = \frac{1}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \int_1^{\sqrt{4-x^2}} y dy = \frac{1}{2x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) y^2 \Big|_1^{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$\int_1^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \dots$$

□

تمرین ۶۷. مساحت داخل دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 4$  و سمت راست خط  $x = 1$  را حساب کنید.

پاسخ.



$$\iint_D dA = \left( \iint_{D_1} dA \right) \times 2$$

$$\iint_{D_1} dA = \int_1^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy dx$$

$$\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = y \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2}$$

$$\int_1^{\sqrt{4-x}} dx$$

$$x = 2 \sin \theta \Rightarrow dx = 2 \cos \theta d\theta$$

ادامه با شما.

□

تمرین ۶۸. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

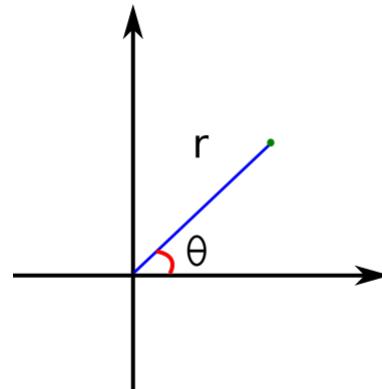
$$\int_1^2 \int_{\frac{x-y}{x+y}}^{\frac{4-x}{x+y}} \frac{xe^{xy}}{x-y} dy dx . \quad ۱$$

$$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dA . \quad ۲$$

ناحیه‌ی واقع بین خطوط  $x + y = 1$ ،  $x + y = 0$  و  $y = 0$  است.

## ۲.۳۰ انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

هر نقطه در صفحه را می‌توان با مختصات قطبی  $(r, \theta)$  نمایش داد. تبدیلهای لازم برای این تغییر مختصات به صورت



زیرند:

$$(x, y) = (r, \theta)$$

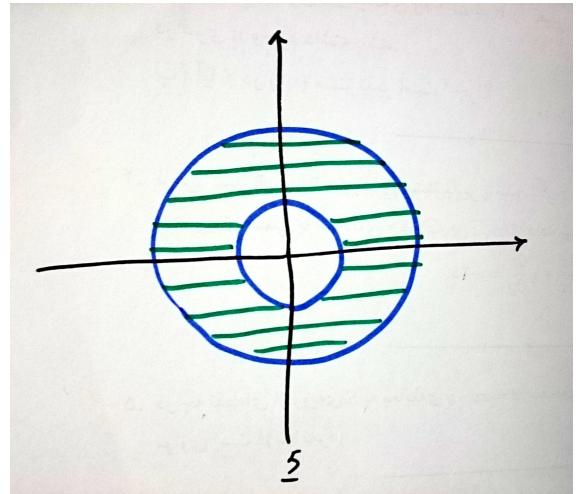
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

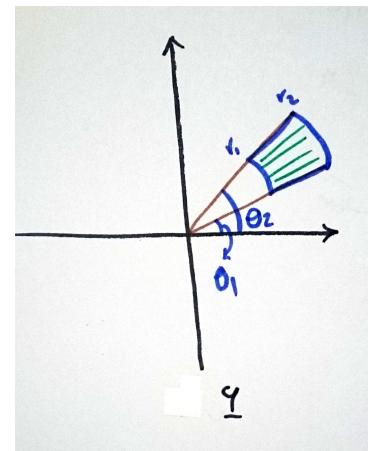
مجموعه‌ی زیر مثالی از یک مستطیل قطبی است.

$$D = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



به طور کلی به مجموعه‌ای مانند مجموعه‌ی زیر، یک مستطیل قطبی گفته می‌شود.

$$D = \{(r, \theta) | r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$



قضیه ۲۲۵. فرض کنید  $D$  یک ناحیه‌ی دلخواه باشد.

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

دقت کنید که این سطح، در انتگرال بالا به صورت زیر تغییر کرده است:

$$dxdy \approx rdrd\theta$$

توجه کنید که از ضرب کردن  $dx dy$  در  $r dr d\theta$  به عبارت  $r dr d\theta dy$  نمی‌رسیم. ضرب بالا قواعد خاص خود را دارد که پرداختن بدانها در سطح این درس نمی‌گنجد. پس اگر بنویسیم

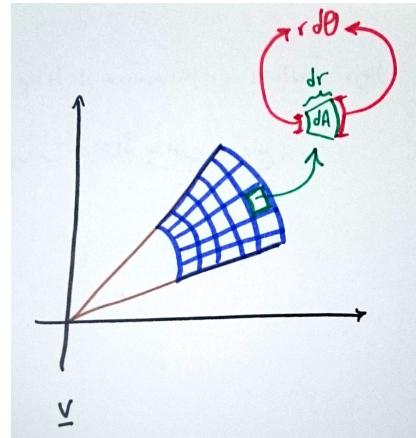
$$x = r \cos \theta \Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$$

$$y = r \sin \theta \Rightarrow dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

آنگاه

$$dxdy \neq rdrd\theta$$

هرچند قصد نداریم درباره‌ی ماهیت ضرب بالا توضیح دهیم، لازم است که فرمول  $dxdy = rdrd\theta$  را توجیه کنیم. توجیه اول. (توجیه نادقیق). عموماً در رویکرد مهندسی، مطابق شکل زیر، فرض کنیم که لیمان مساحت، تقریباً مستطیلی شکل است. این مستطیل دارای اضلاع به اندازه‌ی  $rd\theta$  و  $dr$  است. پس

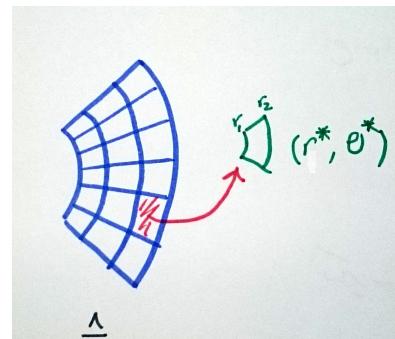


$$dA = dr(rd\theta) = rdrd\theta$$

توجیه دوم. برای محاسبه‌ی انتگرال در مختصات قطبی باید حاصل جمعی مانند زیر را محاسبه کنیم:

$$\sum_r \sum_{\theta} f(x(r^*, \theta^*), y(r^*, \theta^*)) dA$$

که در آن  $r^*$  و  $\theta^*$  عناصری دلخواه هستند که از میان المانهای سطح انتخاب شده‌اند.



داریم

$$\Delta A = \frac{1}{2} r_2 \Delta \theta - \frac{1}{2} r_1 \Delta \theta$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) \Delta \theta$$

می‌توانیم  $r^*, \theta^*$  را نقاط وسط هر سطح کوچک در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} r^* = \frac{r_1 + r_2}{2} \\ \theta^* = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \end{cases}$$

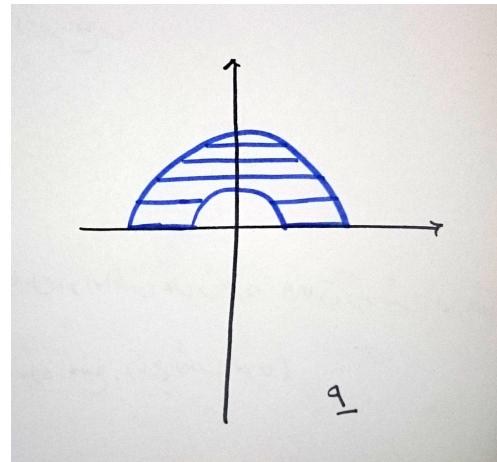
آنگاه داریم:

$$\Delta A = \Delta r(r^*) \Delta \theta = r^* \Delta r \Delta \theta$$

مثال ۲۲۶.  $\iint_R (3x + 4y^2) dA$  را محاسبه کنید که در آن  $R$  ناحیه‌ی محصور بین دوایر  $1 = x^2 + y^2$  و  $4 = x^2 + y^2$  و بالای محور مختصات است.

پاسخ.

$$D = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

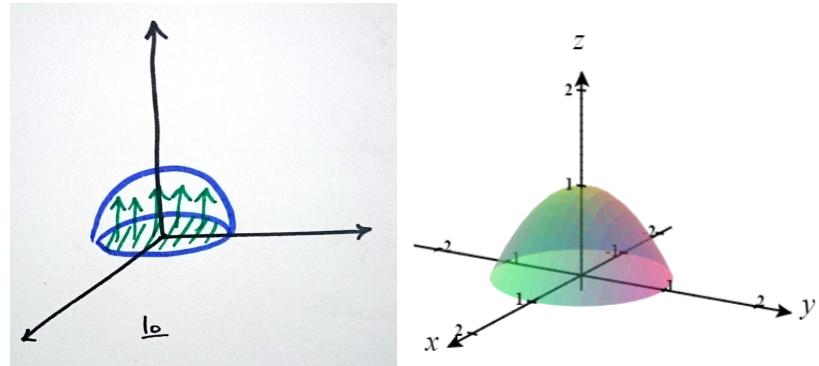


$$\begin{aligned} \iint_R (x + y) dA &= \int_1^2 \int_0^\pi (r \cos \theta + r \sin \theta) r d\theta dr = \\ &\quad \int_1^2 \int_0^\pi r^2 \cos \theta dr d\theta + \int_1^2 \int_0^\pi r^2 \sin \theta dr d\theta = \\ &\quad \int_1^2 \cos \theta d\theta \times \int_1^2 r^2 dr + \int_1^2 \sin \theta d\theta \times \int_1^2 r^2 dr = \dots \end{aligned}$$

□ برای محاسبه انتگرال  $\int_0^\pi \sin \theta d\theta$  کافیست که  $\frac{1-\cos 2\theta}{2}$  را با  $\theta$  جایگزین کنید.

مثال ۲۲۷. حجم جسمی را بیابید که توسط صفحه‌ی  $z = 1 - x^2 - y^2$  و سه‌می‌وار  $z = 0$  احاطه شده است.

پاسخ.

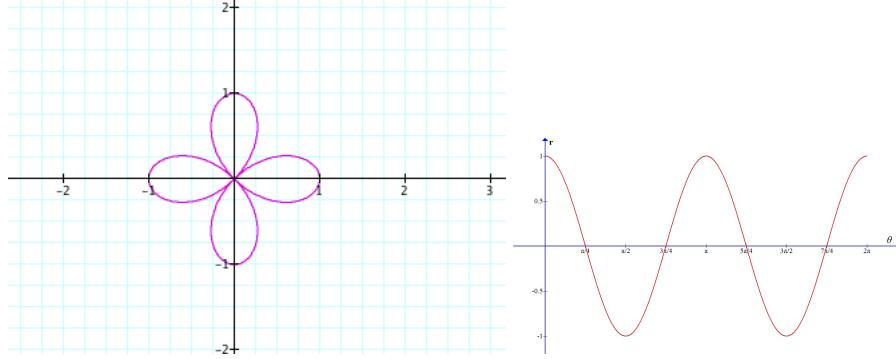


$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^\pi \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \dots$$

□

مثال ۲۲۸. مساحت محدود به گل رُزِ چهار برگ  $r = \cos 2\theta$  را حساب کنید.

پاسخ.



مساحت کل برابر است با چهار برابر مساحت قسمت یکی از گلبرگها:

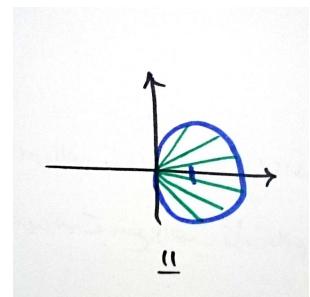
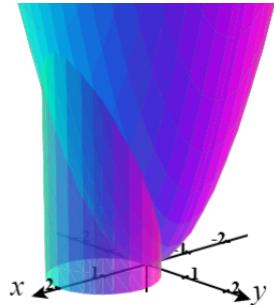
$$4 \times \iint_D dA = 4 \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{\cos 2\theta} r dr d\theta = \frac{\pi}{8}$$

□

**مثال ۲۲۹.** حجم جسمی را بیابید که زیر سهمیوار  $z = x^2 + y^2 = 2x$  و بالای صفحه‌ی  $xy$  و داخل استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 4$  واقع شده است.

پاسخ.

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$$



ناحیه‌ی انتگرالگیری را به صورت زیر پارامتریندی می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq r \leq 2 \cos \theta$$

دقت کنید که معادله‌ی  $r = 2 \cos \theta$  به صورت  $x^2 + y^2 = 2r \cos \theta$  و از آنجا به صورت  $r = 2 \cos \theta$  درآمده است و تابع  $z = x^2 + y^2$  به صورت  $r^2$  نوشته شده است.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2 \cos \theta} (r^2) r dr d\theta$$

□

## ۳۱ جلسه‌ی سی و یکم، شنبه

بحث انتگرال‌گیری در مختصات قطبی را با نکته‌ی زیر به پایان می‌رسانیم.

توجه ۲۳۰. مختصات قطبی ابزار مناسبی برای محاسبه‌ی برخی انتگرال‌های یکانه بدست می‌دهد.

مثال ۲۳۱. انتگرال ناسره‌ی  $x \int_{\cdot}^{\infty} e^{-x^2} dx$  را محاسبه کنید.

یادآوری ۲۳۲.

$$\int_c^d \int_a^b f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy$$

پاسخ.

$$\begin{aligned} \int_{\cdot}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{\cdot}^{\infty} e^{-y^2} dy &= \int_{\cdot}^{\infty} \int_{\cdot}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = \left( \int_{\cdot}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \\ \int_{\cdot}^{\infty} \int_{\cdot}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cdot}^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_{\cdot}^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left( \frac{e^{-r^2}}{-2} \right) \Big|_{\cdot}^{\infty} = \dots \end{aligned}$$

□

## ۱.۳۱ تغییر متغیر

گفتیم که در انتگرال‌گیری با مختصات قطبی، تغییر متغیر زیر را داریم:

$$dxdy = rdrd\theta$$

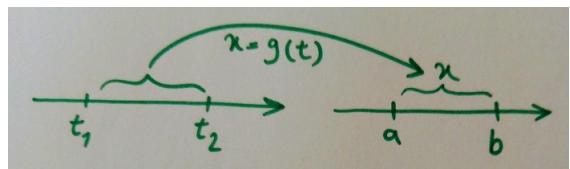
در ادامه‌ی درس، تغییر متغیر را به طور کلی بررسی می‌کنیم. نخست نکته‌ی زیر را از ریاضی ۱ یادآوری می‌کنیم.

یادآوری ۲۳۳. فرض کنید که  $x = g(t)$  تابعی مشتق‌پذیر باشد. در ریاضی ۱ دیدیم که

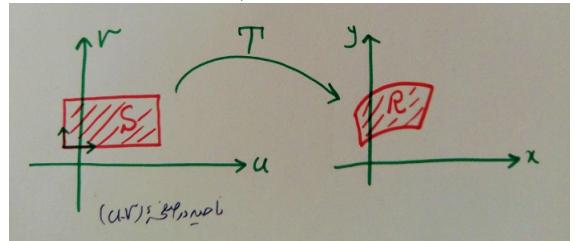
$$\int_{a=g(t_1)}^{b=g(t_2)} f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{f(g(t))}_{u} \underbrace{g'(t)dt}_{du}$$

به بیان دیگر

$$\int_{a=g(t_1)}^{b=g(t_2)} f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t)) \frac{\partial x}{\partial t} dt$$



در ادامه درس می‌خواهیم متناظر گفته‌ی بالا را برای انتگرال دوگانه به دست آوریم.



فرض کنید  $T$  یک نگاشت باشد که از مختصات  $uv$  به مختصات  $xy$  می‌رود. به بیان دیگر نگاشت  $T$  به صورت زیر است:

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

هم‌چنین فرض می‌کنیم که این نگاشت ویژگی توبولوژیک و آنانلیزی مطلوبی داشته باشد (تابع  $x(u, v), y(u, v)$  مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند و ژاکوبین این نگاشت (که در ادامه تعریف خواهد شد، ناصلفر باشد). چنین نگاشتی به گونه‌ای است که مرزهای ناحیه  $S$  (در شکل بالا) را به مرزهای ناحیه  $R$  می‌برد.

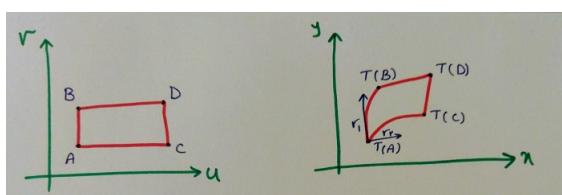
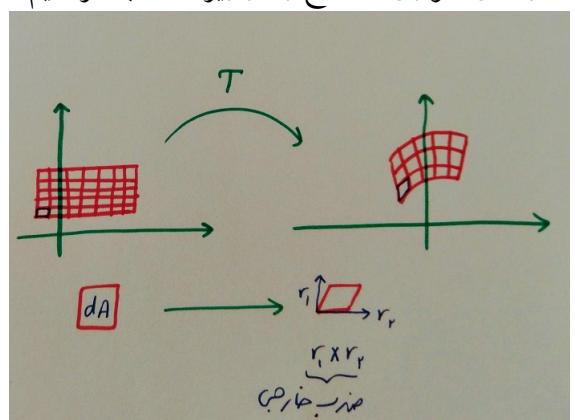
تحت شرط‌های بالا، می‌توان انتگرالگیری در ناحیه  $R$  را به انتگرالگیری در ناحیه  $S$  تبدیل کرد:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (*)}_{\text{قدر مطلق}}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

(ماتریس ژاکوبین تبدیل  $T$ )

دقت کنید که در فرمول (\*) علامت قدر مطلق آمده است، بنابراین اگر دترمینان منفی شود، آن را تبدیل به مثبت باید کرد. ایده‌ی اثبات از دیدگاه هندسی: دقت کنید که یک المان مستطیلی به یک المان متوازی‌الاضلاع تبدیل شده است. بردارهای سازنده‌ی متوازی‌الاضلاع را در زیر محاسبه کرده‌ایم.



گوشه‌های مشخص شده در بالا را در زیر بزرگتر کشیده‌ایم:

### توضیحات عکس:

$$A = (u., v.) \quad , \quad B = (u., v. + \Delta v) \quad , \quad C = (u. + \Delta u, v.) \quad , \quad D = (u. + \Delta u, v. + \Delta v)$$

$$T(A) = (x(u., v.), y(u., v.)) \quad T(B) = (x(u., v. + \Delta v), y(u., v. + \Delta v))$$

$$T(C) = (x(u. + \Delta u, v.), y(u. + \Delta u, v.)) \quad T(D) = (x(u. + \Delta u, v. + \Delta v), y(u. + \Delta u, v. + \Delta v))$$

$$\vec{r}_1 \approx T(B) - T(A) = (x(u., v. + \Delta v), y(u., v. + \Delta v)) - (x(u., v.), y(u., v.)) =$$

$$(x(u., v. + \Delta v) - x(u., v.), y(u., v. + \Delta v) - y(u., v.)) \\ \simeq (\Delta v \frac{\partial x}{\partial v}(u., v.), \Delta v \frac{\partial y}{\partial v}(u., v.)) = \Delta v \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

$$\vec{r}_1 \approx T(C) - T(A) = (x(u. + \Delta u, v.), y(u. + \Delta u, v.)) - (x(u., v.), y(u., v.)) =$$

$$(x(u. + \Delta u, v.) - x(u., v.), y(u. + \Delta u, v.) - y(u., v.))$$

$$\simeq (\Delta u \frac{\partial x}{\partial u}(u., v.), \Delta u \frac{\partial y}{\partial u}(u., v.)) = \Delta u \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

$$dA = \text{مساحت ناحیه} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \cdot \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \cdot \end{vmatrix} \Delta u \Delta v$$

$$dA = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \cdot \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \cdot \end{vmatrix} dudv$$

توجه ۲۳۴. روش فوق زمانی کار می کند که در ناحیه  $S$  داشته باشیم:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

## ۲.۳۱ تغییر مختصات قطبی

حال فرمول بالا برای تغییر مختصات قطبی امتحان می کنیم.

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

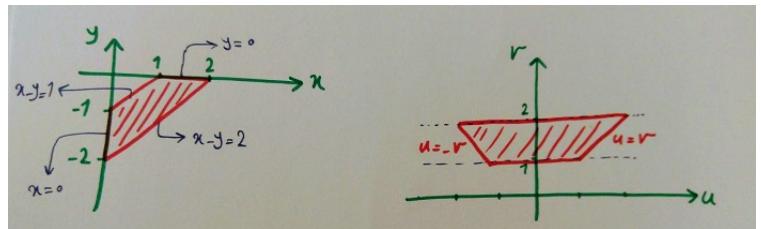
$$dA = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = r dr d\theta$$

### ۳.۳۱ مثالها

مثال ۲۳۵. را محاسبه کنید که در آن  $R$  ناحیه‌ی ذوزنقه‌ای محدود به نقاط  $(1, 0), (2, 0), (0, -1), (0, -2)$  است.

پاسخ.

$$u = x + y \quad v = x - y$$



$$x = \frac{1}{2}(u+v) \quad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_1^1 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} | -\frac{1}{2} | dudv = \frac{1}{2} \int_1^1 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} dudv$$

$$\int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} dv = ve^{\frac{u}{v}} = v(e^1 - e^{-1})$$

$$\int_1^1 \int_{-v}^v \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} dudv = \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right) \int_1^1 v dv = \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right) \frac{v^2}{2} \Big|_1^1 = \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right) \frac{3}{2}$$

□

مثال ۲۳۶. انتگرال دوگانه‌ی زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$$\iint_D \frac{x \sin(xy)}{y} dA$$

ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های  $y^2 = x$  و  $y^2 = \pi y$  و  $x^2 = \frac{\pi y}{2}$  و  $x^2 = \pi y$  است.<sup>۱۴</sup>

<sup>۱۴</sup> از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

## ۳۲ جلسه‌ی سی‌ودوم، انتگرال‌های سه‌گانه

پیش از شروع درس مثال دیگری از تغییر متغیر حل می‌کنیم.

مثال ۲۳۷. انتگرال دوگانه‌ی زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$$\iint_D \frac{x^{\frac{1}{2}} \sin(xy)}{y} dA$$

ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های  $y^{\frac{1}{2}} = x$  و  $x^{\frac{1}{2}} = \pi y$  و  $x^{\frac{1}{2}} = \pi$  است.

پاسخ.

$$u = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y} \quad \frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi$$

$$v = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x} \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 1$$

$$uv = \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{xy} = xy$$

$$\iint_D \frac{x^{\frac{1}{2}} \sin(xy)}{y} dA = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 u \sin(uv) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv du$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$y^{\frac{1}{2}} = vx \Rightarrow x = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{v}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = uy \Rightarrow \frac{y^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}} = uy \Rightarrow y = v^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{v} \Rightarrow x = v^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = v^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 u \sin(uv) \cdot \frac{1}{2} dv du$$

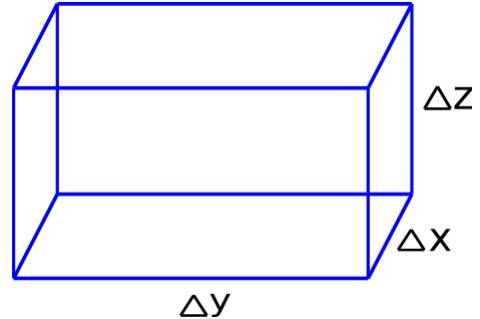
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 u \sin(uv) \cdot \frac{1}{2} dv = \cos(uv) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \cos u - \cos \frac{u}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos u - \cos \frac{u}{2}) du = \dots$$

□

## ۱.۳۲ انتگرال‌های سه‌گانه

فرض کنید  $B$  یک ناحیه‌ی مکعبی با حدود معلوم زیر باشد و  $f$  تابعی از  $\mathbb{R}^3$  به  $\mathbb{R}$  باشد:



$$B = \{(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s)\}$$

تعریف می‌کنیم:

$$\iiint_B f(x, y, z) dv = \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_r^s f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

مثال ۲۳۸. انتگرال  $\iiint_B xyz^3 dv$  را محاسبه کنید که در آن ناحیه‌ی  $B$  به صورت زیر است:

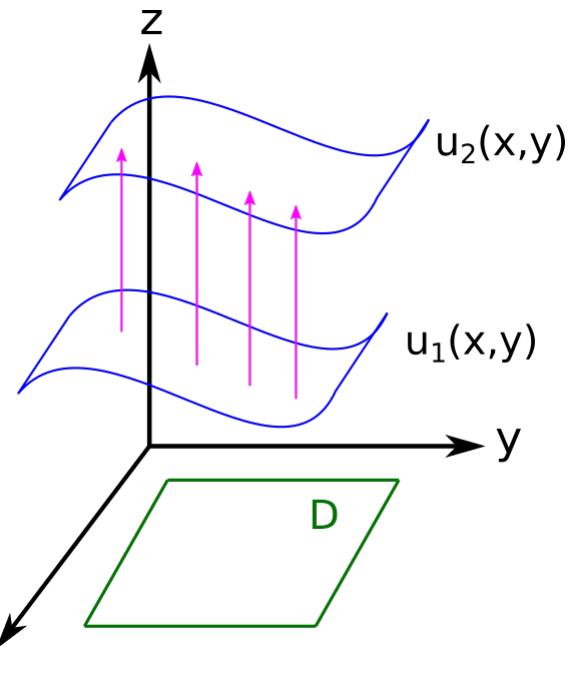
$$B = \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 xyz^3 dx dy dz \\ & \int_{-1}^1 xyz^3 dx = \frac{x^2}{2}yz^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}yz^3 \\ & \int_{-1}^2 \frac{1}{2}yz^3 dy = \frac{y^2}{4}z^3 \Big|_{-1}^2 = z^3 - \frac{z^3}{4} = \frac{3z^3}{4} \\ & \int_0^3 \frac{3z^3}{4} dz = \frac{z^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

انتگرال‌گیری سه‌گانه تنها روی نواحی مکعبی صورت نمی‌گیرد. انتگرال‌گیری روی نواحی کلی کارآسانی نیست ولی اگر خوش‌شانس باشیم ناحیه‌ی انتگرال‌گیری ما ممکن است به صورت ساده‌تری باشد.

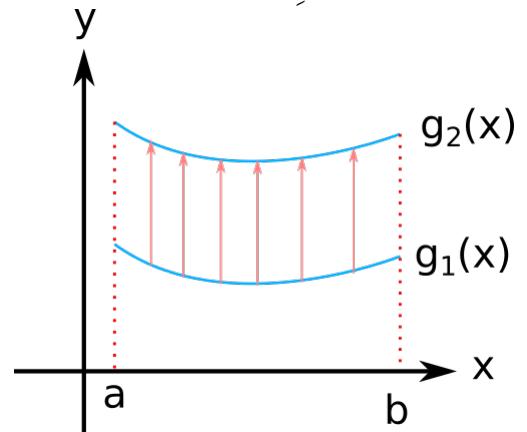
### ۱.۱.۳۲ نواحی ساده‌تر

$$B = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$



$$\iiint_B f(x, y, z) dv = \iint_D \left( \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dA$$

باز ممکن است خود ناحیه‌ی  $D$  نیز به صورت زیر باشد:



آنگاه خواهیم داشت:

$$\iiint_B f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

وضعیتی که در بالا شرح داده شد، ممکن است با یک جایه‌جایی متغیرها برقرار باشد. مثلاً ممکن است ناحیه‌ی انتگرالگیری به صورت زیر باشد:

$$c \leq y \leq d \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \quad u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)$$

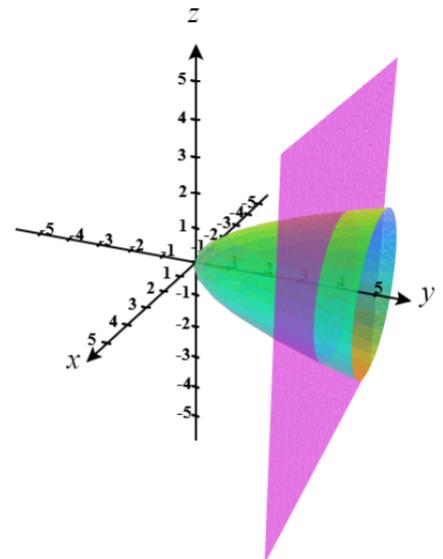
یا به صورت زیر:

$$r \leq z \leq s \quad g_1(z) \leq x \leq g_2(z) \quad u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)$$

سایر نواحی ممکن را شما بررسی و ترسیم کنید. همه‌ی آنچه درباره‌ی انتگرالگیری دوگانه فراگرفته‌ایم در محاسبه‌ی انتگرالهای سه‌گانه به کارمان می‌آید:

مثال ۲۳۹ را محاسبه کنید که در آن  $E$  ناحیه‌ی محدود به سهمی‌وار  $y = x^2 + z^2$  و صفحه‌ی  $y = 4$  است.

پاسخ.



ابتدا انتگرالی را که باید محاسبه کنیم به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2+z^2} dy \right) dx dz &= \iint_D \left( y \sqrt{x^2+z^2} \Big|_{x^2+z^2}^4 \right) dx dz = \\ \iint_D \left( 4\sqrt{x^2+z^2} - (x^2+z^2)\sqrt{x^2+z^2} \right) dx dz \end{aligned}$$

پس از اینجا به بعد با یک انتگرال دوگانه مواجهیم که آن را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3) r dr d\theta &= 2\pi \int_0^2 (4r^2 - r^4) dr = \\ 2\pi \left( \frac{4}{3}r^3 - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^2 &= \frac{128}{15}\pi. \end{aligned}$$

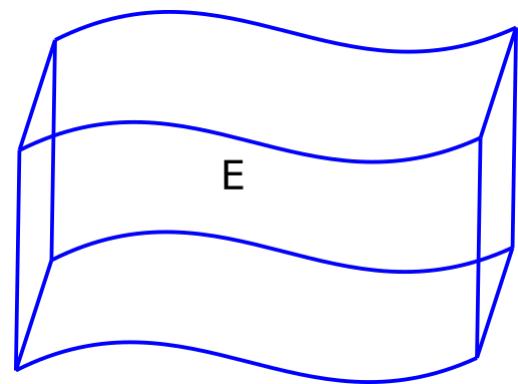
□

تمرین ۶۹. انتگرال  $\iiint f(x, y, z) dx dz dy$  را به صورت  $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$  بنویسید.

توجه ۲۴۰. در درس‌های پیشین روشی برای محاسبه‌ی حجم با استفاده از انتگرال دوگانه ارائه کردیم ولی محاسبه‌ی احجام با استفاده از انتگرال سه‌گانه غالباً راحت‌تر است.

حجم ناحیه‌ی سه‌بعدی  $E$  با فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$v = \iiint_E dv$$

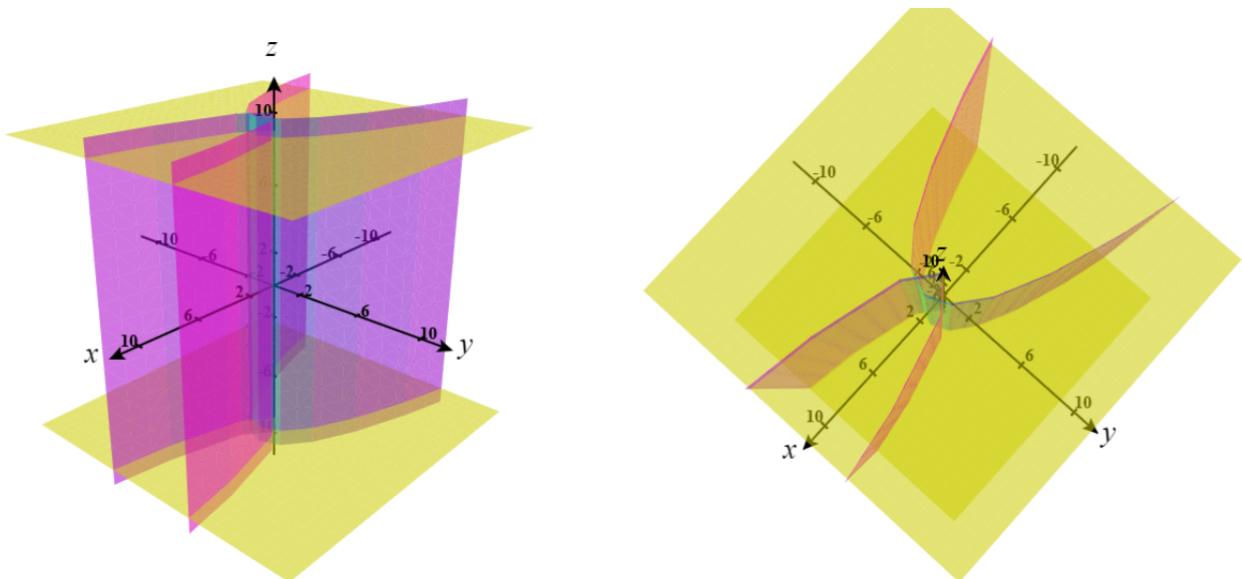


مثال ۲۴۱. حجم ناحیه‌ی محدود به استوانه‌ی  $x = 4 - 3y^2$  و  $y^2 = z = -x$  و صفحات  $z = 9$  و  $z = 4 - y^2$  را محاسبه کنید.

پاسخ. حجم مورد نظر برابر است با

$$\iint_D \left( \int_{-x}^x dz \right) dA = \iint_D 18 dA = 18 \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{4-y^2} dx dy =$$

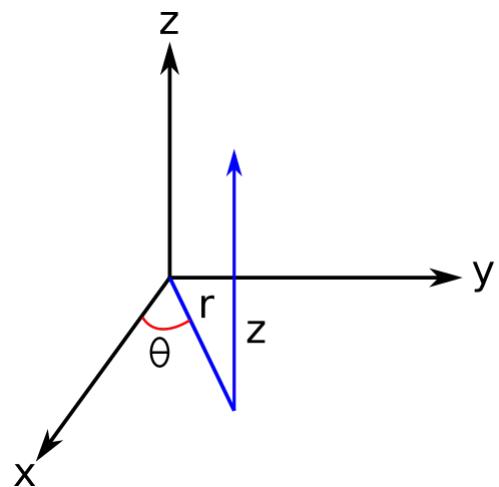
$$18 \int_{-1}^1 \left( \frac{4-y^2}{3} - y^2 \right) dy = \dots$$



□

## ۲.۳۲ مختصات استوانه‌ای

برای محاسبه‌ی انتگرال‌های سه‌گانه برای احجامی که حول یک محور، حالت استوانه‌ای دارند، تغییر متغیر استوانه‌ای کار را آسانتر می‌کند:



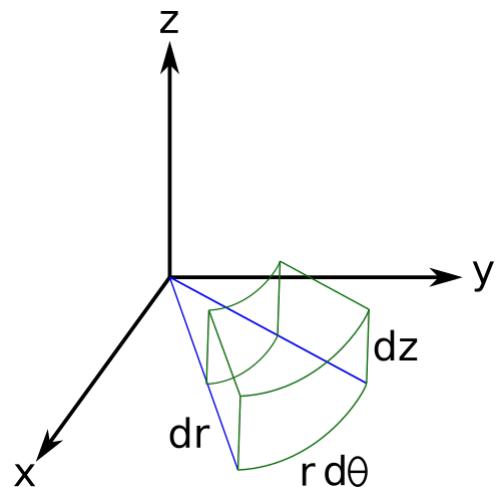
$$(x, y, z) \cong (r, \theta, z)$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

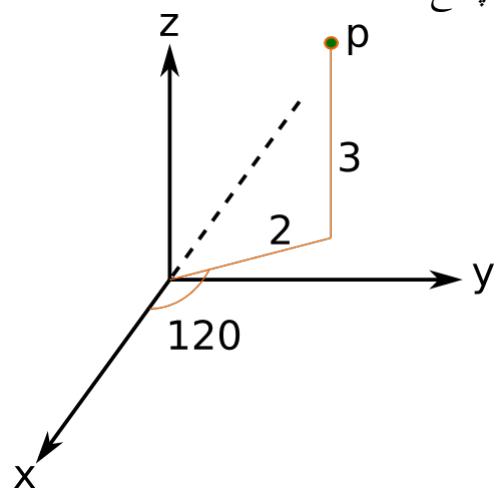
$$z = z$$

به وجود  $r$  دقت کنید



مثال ۲۴۲. نقطه‌ی  $(2, \frac{2\pi}{3}, 3)$  را در مختصات استوانه‌ای مشخص کنید.

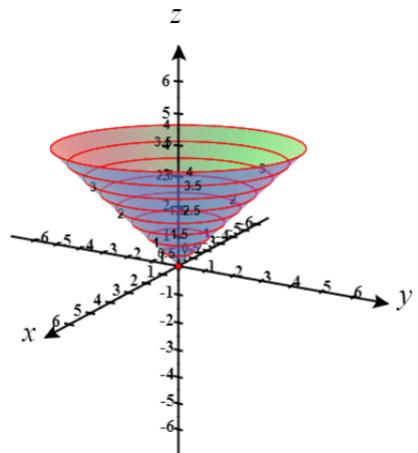
پاسخ.



□

مثال ۲۴۳. رویه‌ی  $r = z$  را رسم کنید.

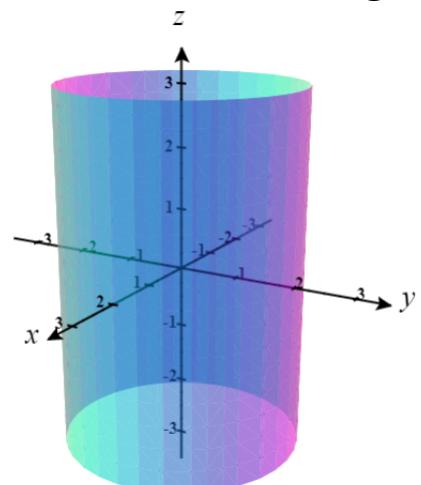
پاسخ.



□

مثال ۲۴۴. رویه‌ی  $r = 2$  را رسم کنید.

پاسخ.



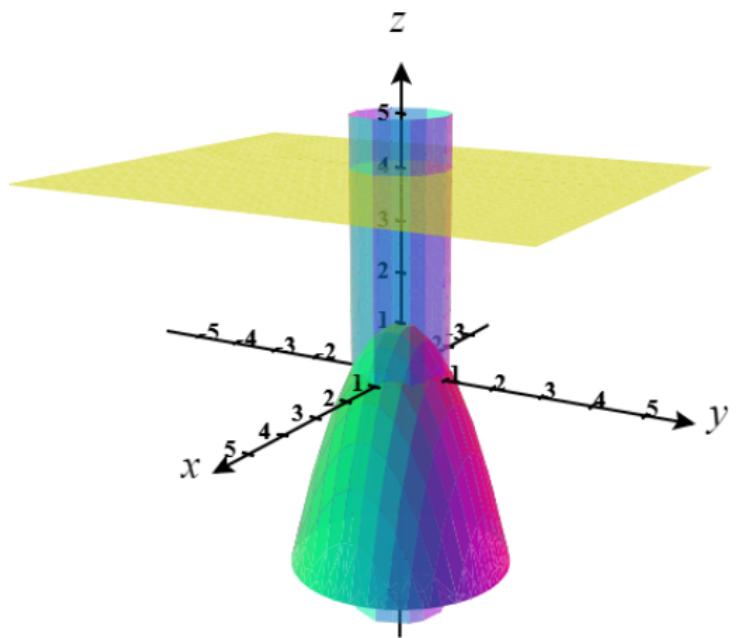
□

مثال ۲۴۵. جسم  $E$  داخل استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  و زیر صفحه‌ی  $z = 1 - x^2 - y^2$  و بالای سهمیوار  $z = 1 - x^2 - y^2 - r$  واقع شده است. چگالی این جسم در هر نقطه رابطه‌ی خطی زیر را با فاصله‌ی آن نقطه تا محور مرکزی استوانه دارد.

$$f(x, y, z) = \underbrace{K}_{\text{ثابت}} r$$

جرم جسم را بیابید.

پاسخ.



$$\begin{aligned}
 \iiint_E K r dV &= \int_0^{\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^r (Kr) r dz dr d\theta = \\
 K \int_0^{\pi} \int_0^1 r^3 (\frac{3}{2} + r^2) dr d\theta &= \frac{1}{2}\pi K
 \end{aligned}$$

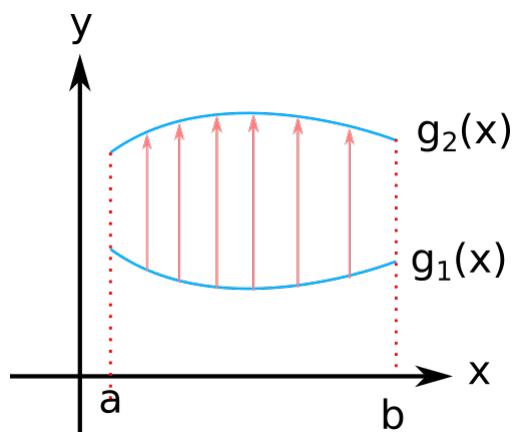
□

تمرینهای تمرین ۳۷، ۳۸ در صفحه‌ی ۳۰ جزوی تمرینها را حل کنید.

## ۳۳ نیم جلسه‌ی سی و سوم، چهارشنبه، انتگرال‌گیری در مختصات کروی

پیش از آنکه درس درباره‌ی مختصات کروی را آغاز کنیم، نیاز به رفع یک ابهام است. برای محاسبه‌ی مساحت هم می‌توان از انتگرال یگانه و هم دوگانه استفاده کرد. برای محاسبه‌ی حجم نیز هم می‌توان از انتگرال دوگانه و هم از انتگرال سه‌گانه به صورتهای زیر استفاده کرد:

### ۱۰.۳۳ مساحت ناحیه‌ی محصور

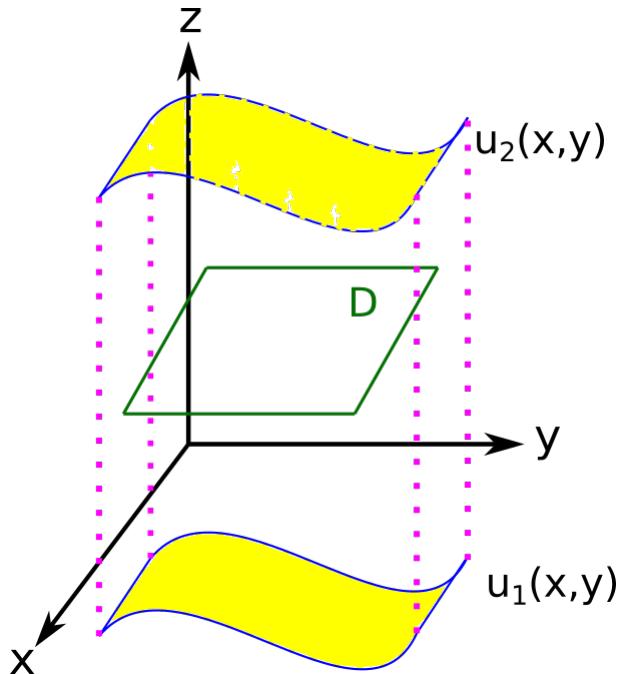


با استفاده از انتگرال یگانه:

$$\int_a^b |g_2(x) - g_1(x)| dx$$

با استفاده از انتگرال دوگانه:

$$\iint_A dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dA = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx$$



با استفاده از انتگرال دوگانه:

$$\iint_D (u_2(x, y) - u_1(x, y)) dA$$

با استفاده از انتگرال سهگانه:

$$\iiint_E dv = \iint_D \left( \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} dz \right) dA = \iint_D (u_2(x, y) - u_1(x, y)) dA$$

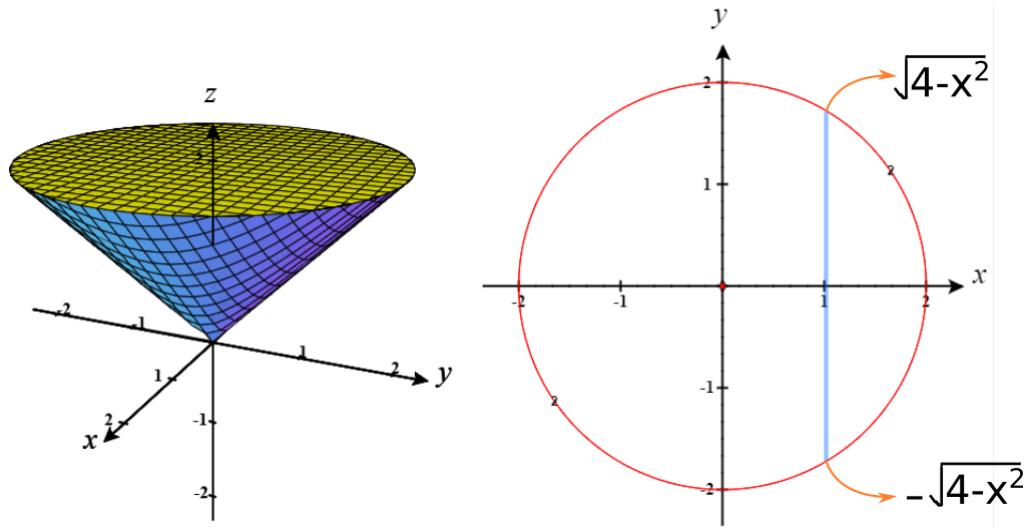
در جلسه‌ی قبل انتگرالگیری با استفاده از مختصات استوانه‌ای را بررسی کردیم:

$$\iiint_E \square dx dy dz = \iiint_E \square r dr d\theta dz$$

بگذارید این بحث را با مثالی به پایان ببریم:

. ۲۴۶ مثال

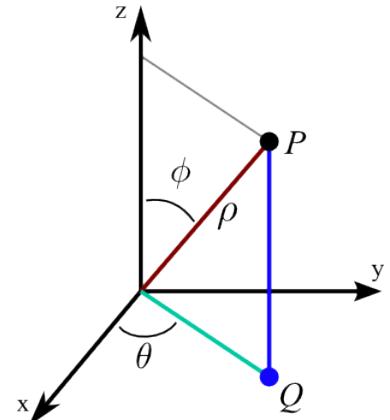
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x + y) dz dy dx$$



برای محاسبه انتگرال فوق کافی است انتگرال زیر را محاسبه کنیم. محاسبه‌ی آن را به عهده‌ی شما می‌گذاریم:

$$\int_{-2}^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{\sqrt{4-x^2}} (r^z) r dz dr d\theta = \dots$$

### ۱.۳۳ مختصات کُروی



فاصله‌ی نقطه‌ی  $P$  تا مبدأ برابر است با  $\rho$ . مختصات نقطه‌ی  $(x, y, z)$  در دستگاه دکارتی را در دستگاه کروی به صورت  $(\rho, \theta, \phi)$  نشان می‌دهیم. با مختصات  $(\rho, \theta, \phi)$  که  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq \phi \leq \pi$  و  $0 \leq \rho \leq \infty$  می‌توان تمام هشت قسمت دستگاه مختصات سه بعدی را پوشش داد.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \phi$$

$$x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

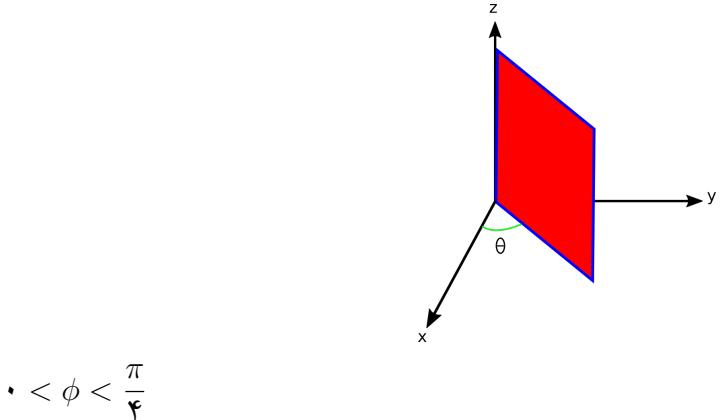
$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

معادله‌ی کُره  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$  در دستگاه کُروی به صورت زیر است:

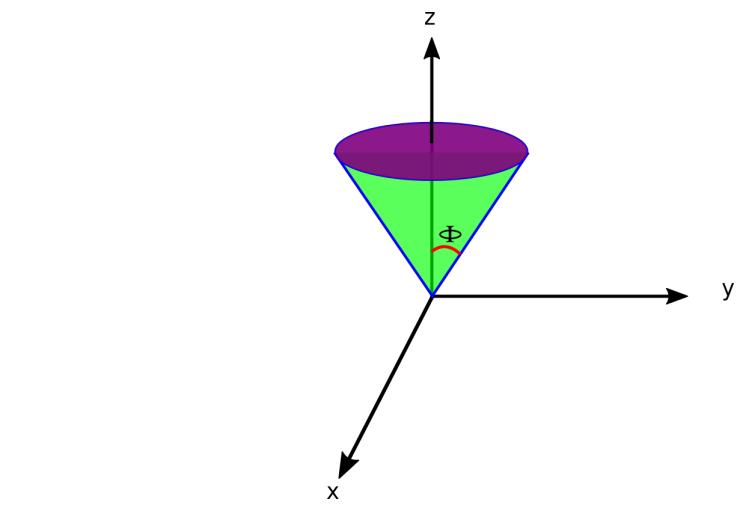
$$\rho = c$$

در زیر چند شکل با استفاده از دستگاه کروی کشیده شده‌اند.

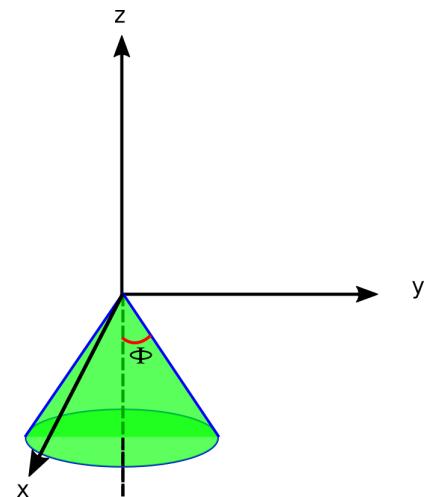
$$\theta = c$$



$$0 < \phi < \frac{\pi}{4}$$



$$\frac{3\pi}{4} < \phi < \pi$$

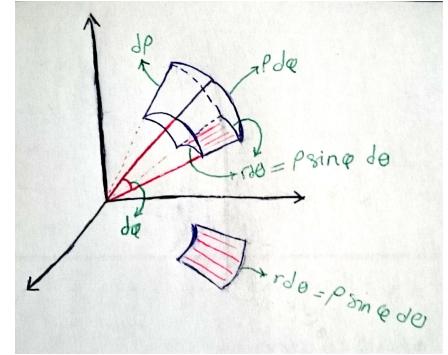


تغییرات متعیر لازم برای محاسبه انتگرال در مختصات کروی به صورت زیرند:

$$\iiint_E f(x, y, z) dv$$

$$dv = dx dy dz = \rho^r \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dv = \iiint_E f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$



مثال ۲۴۷. انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} dv$$

که در آن:

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

پاسخ.

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$\int_0^\pi \int_0^{\pi} \int_0^1 e^{\rho^2} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

$$\int_0^1 e^{\rho^2} \rho^2 \sin \phi d\rho = \sin \phi \frac{e^{\rho^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{\sin \phi}{2} (e - 1)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin \phi}{2} (e - 1) d\theta = \frac{\pi}{2} \sin \phi (e - 1)$$

$$\int_0^\pi \frac{\pi}{2} \sin \phi (e - 1) d\phi = \frac{\pi}{2} (e - 1) (-\cos \phi) \Big|_0^\pi$$

توجه ۲۴۸. اگر حدود انتگرالها مشخص باشد و هر تابعی تنها به یک متغیر بستگی داشته باشد، آنگاه

$$\int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x) g(y) h(z) dz dy dx = \int_r^s h(z) dz \times \int_c^d g(y) dy \times \int_a^b f(x) dx$$

تمرین ۷۰. تمرینهای ۳۸ تا ۴۱ صفحه‌ی ۳۰ جزوی تمرینها را حل کنید.

## ادامهی مختصات کُروی ۲.۳۳

مثال ۲۴۹. حجم جسمی را بیابید که بالای مخروط  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  و زیر کُرهی  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  واقع شده است.

پاسخ.

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$$

یادآوری ۲۵۰.

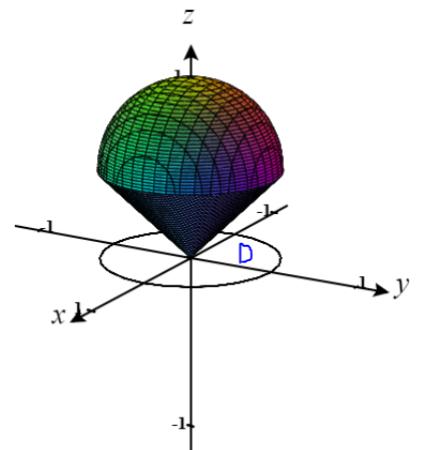
$$z^2 + az = (z + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

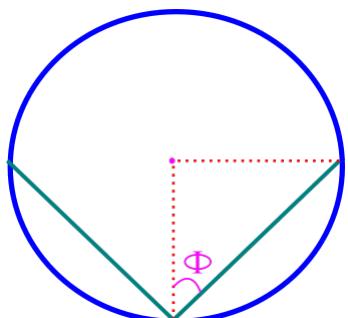
حجم ناحیهی بین مخروط و کره برابر است با

$$\iiint_E dv$$

$$E = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \text{کُره} \\ (x, y) \in D \end{cases}$$



$$\tan \phi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

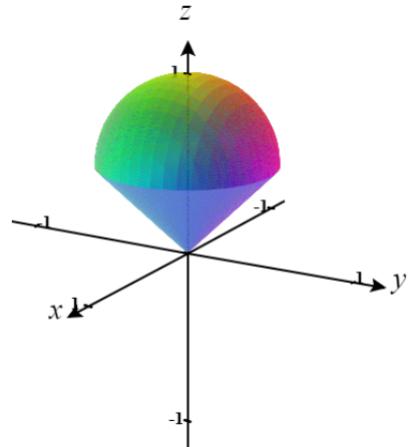


معادلهی کره را در مختصات کُروی به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow \rho^2 = \rho \cos \phi \Rightarrow \rho = \cos \phi$$

انتگرال مورد نظر ما در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \int_{\cdot}^{2\pi} \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\cdot}^{\cos \phi} \rho^3 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ & \int_{\cdot}^{\cos \phi} \rho^3 \sin \phi d\rho = \sin \phi \frac{\rho^4}{4} \Big|_{\cdot}^{\cos \phi} = \frac{\sin \phi \cos^4 \phi}{4} \\ & \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \phi \cos^4 \phi}{4} d\phi = \frac{-\cos^4 \phi}{4 \times 4} \Big|_{\cdot}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{12} + 1 \\ & \int_{\cdot}^{2\pi} \left(-\frac{1}{12} + 1\right) d\theta = 2\pi \left(-\frac{1}{12} + 1\right) \end{aligned}$$



□

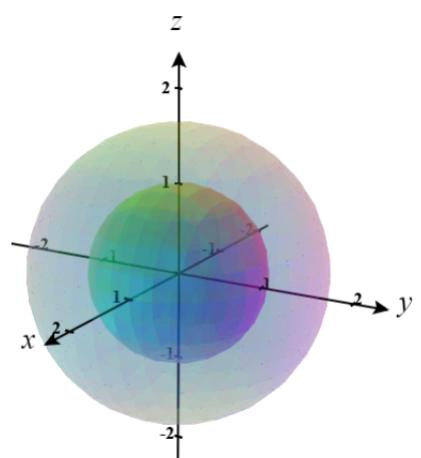
تمرین ۷۱. سعی کنید مثال بالا را در دستگاههای استوانه‌ای و مکعبی حل کنید.

مثال ۲۵۱. انتگرال  $\iiint_T \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dv$  را محاسبه کنید که در آن که ناحیه‌ی بین دو کُره‌ی  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq e$  است.

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$1 \leq \rho \leq \sqrt{e}$$



تمرین ۷۲. حجم ناحیه‌ی محدود بین کُره‌های  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  و  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  را بیابید.

### ۳.۳۳ انتگرالگیری از میدان‌های برداری روی مسیرهای خطی

تابع فصل قبل، توابعی مانند  $R \rightarrow \mathbb{R}^3 : f$ ، بودند که به آنها توابع عددی می‌گویند. در فصل قبل آموختیم که چگونه از توابع عددی در نواحی مختلف انتگرالگیری کنیم.

تمرین ۷۳. در یک صفحه، با کشیدن شکل، انواع انتگرالگیری‌های را که تا اینجا آموخته‌ایم مرور کنید.

در ادامه‌ی درس قرار است با چند نوع دیگر از انتگرالگیری آشنا شویم که در فیزیک کاربردهای بی‌شماری دارند. هدف ما در ادامه‌ی درس، آشنا شدن با مفاهیم زیر است:

۱. انتگرال توابع عددی روی خط (منحنی) و روی رویه

۲. انتگرالگیری از توابع برداری روی خط و روی رویه

۳. رابطه‌ی انتگرال‌های بالا با انتگرال دوگانه و سه‌گانه

بحث را با معرفی مفهوم میدان‌های برداری شروع می‌کنیم.

### ۴.۳۳ میدان‌های برداری

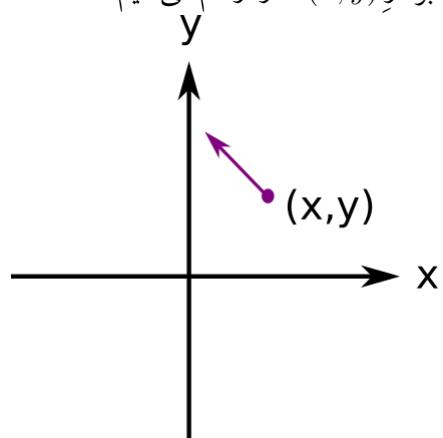
منظور از یک میدان برداری روی  $\mathbb{R}^2$  تابعی است از  $\mathbb{R}^2$  به  $\mathbb{R}^2$ :

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

دقت کنید که یک تابع برداری مانند بالا، از دو تابع عددی تشکیل شده است:

$$F(x, y) = (h(x, y), k(x, y))$$

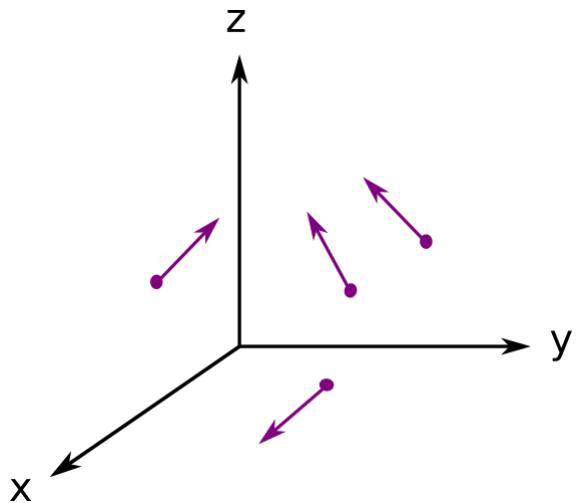
معمولًاً دامنه و برد این تابع را در یک دستگاه به صورت همزمان می‌کشیم بدین صورت که با شروع از هر نقطه‌ی  $(x, y)$  بردار  $F(x, y)$  را رسم می‌کنیم.



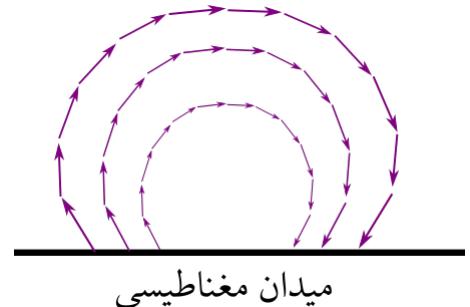
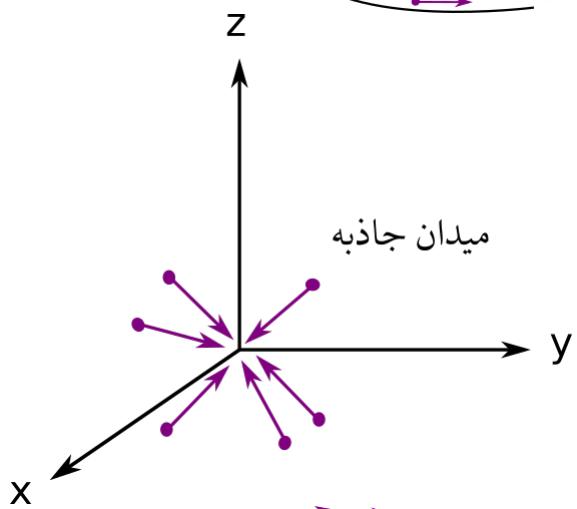
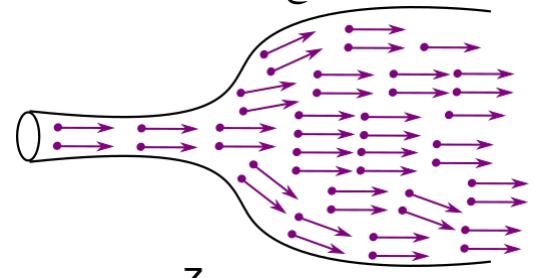
به طور مشابه منظور از یک میدان برداری روی  $\mathbb{R}^3$  تابعی است مانند تابع زیر:

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (h(x, y, z), k(x, y, z), l(x, y, z))$$



میدان سرعت یک مایع در درون یک لوله، میدانهای جاذبه و مغناطیسی مثالهایی از میدانهای برداری هستند:

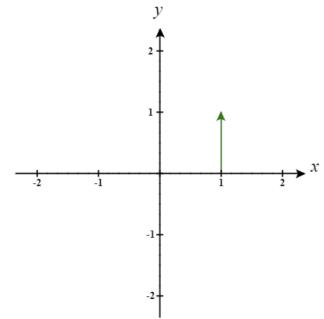


مثال ۲۵۲. تابع برداری  $F(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$  را رسم کنید.

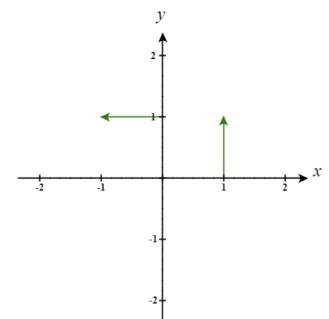
پاسخ.

$$F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

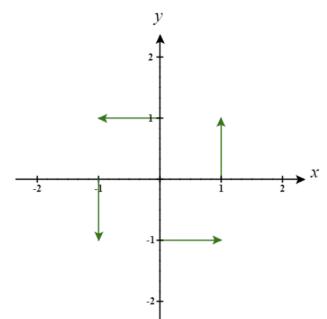
$$(1, \cdot) \rightarrow (\cdot, 1)$$



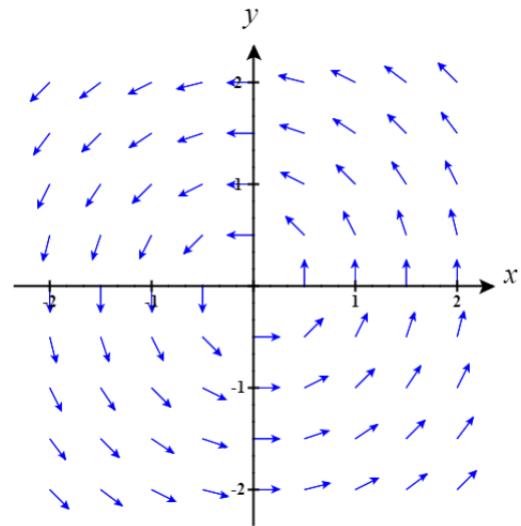
$$(\cdot, 1) \rightarrow (-1, \cdot)$$



$$(-1, \cdot) \rightarrow (\cdot, -1) \quad \text{و} \quad (\cdot, -1) \rightarrow (1, \cdot)$$



و به همین ترتیب برای نقاط دیگر ادامه دهیم در نهایت شکل زیر حاصل می‌شود.



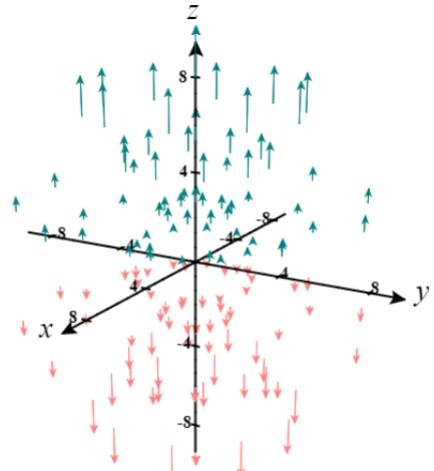
به طور دقیقت اگر  $\vec{r}(x, y)$  بردار مکان نقطه‌ی  $(x, y)$  باشد، آنگاه

$$(x, y) \cdot (-y, x) = -xy + xy = 0 \Rightarrow \vec{r}(x, y) \perp \vec{F}(x, y)$$

□ یعنی میدان برداری مورد نظر همواره بر بردار مکان عمود است و بدینسان از بردارهای مماس بر دوایر ایجاد می‌شود.

**مثال ۲۵۳.** میدان برداری  $F(x, y, z) = z \vec{k}$  را رسم کنید.

پاسخ.

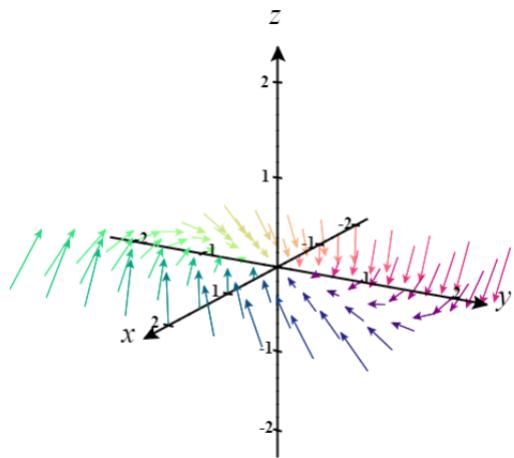


□

**مثال ۲۵۴.** میدان برداری  $F(x, y, z) = y \vec{i} - z \vec{j} + x \vec{k}$  را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای رسم کنید.

پاسخ.

□



مثال ۲۵۵. اگر  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

یک میدان برداری است. همچنین اگر  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

یک میدان برداری است.

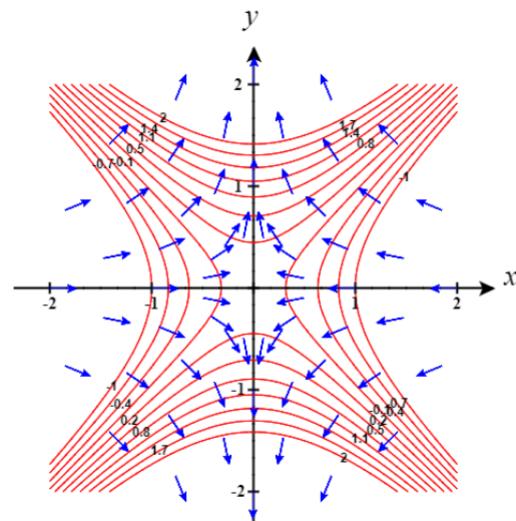
مثال ۲۵۶. فرض کنید  $f(x, y) = y^2 - x^2$ . میدان برداری  $\nabla f$  را رسم کنید.

پاسخ.

$$\nabla f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-2x, 2y)$$

قبله گفته ایم که میدان گرادیان بر منحنی های تراز عمود است و در جهت افزایش تابع است:



□

برخی میدانهای برداری، برابر با گرادیان توابع عددی هستند:

**تعریف ۲۵۷.** فرض کنید  $F$  یک میدان برداری دلخواه روی  $\mathbb{R}^3$  باشد. میدان  $F$  را پایستار می‌خوانیم هرگاه تابع  $f$  موجود باشد به طوری که

$$\begin{array}{ccc} F & = & \nabla f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} & & \end{array}$$

میدانهای پایستار روی فضای دو بعدی نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

در درس‌های آینده روش‌هایی معرفی خواهیم کرد که با استفاده از آنها به راحتی می‌توان تشخیص داد که یک میدان داده شده پایستار است یا خیر. همچنین خواهیم دید که انتگرالهای میدانهای پایستار، از مسیر مستقلند. بحث میدانهای برداری را فعلًا رها می‌کنیم ولی به زودی به آن بازخواهیم گشت.

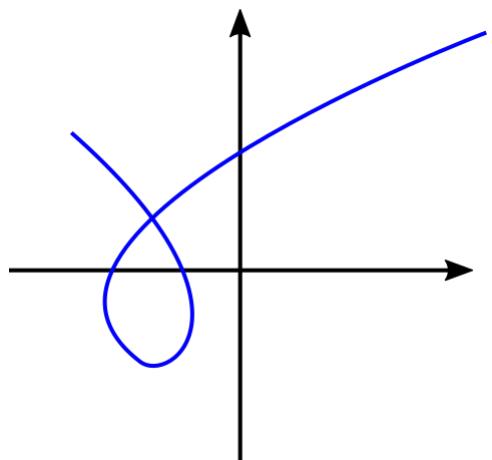
### ۵.۳۳ انتگرالگیری خطی از توابع عددی

فرض کنید  $f(x, y)$  تابعی عددی از  $\mathbb{R}^2$  به  $\mathbb{R}$  باشد.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

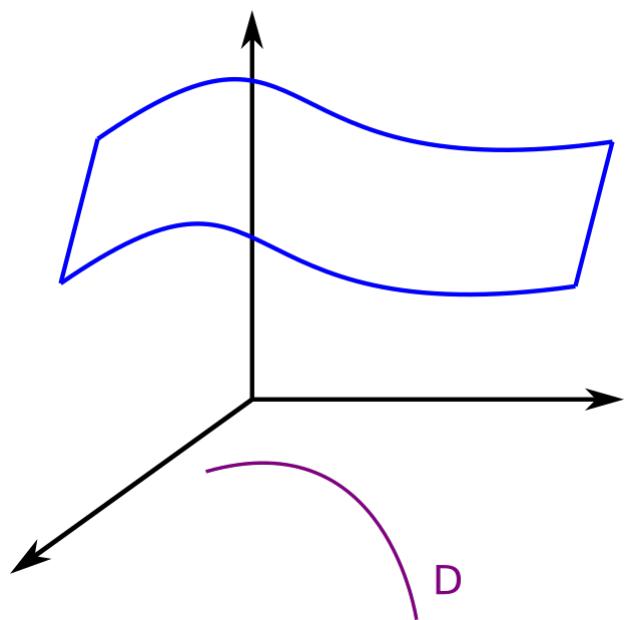
فرض کنید  $\vec{r}(t) : C \rightarrow \mathbb{R}^2$  یک خم هموار در  $\mathbb{R}^2$  باشد. منظور از هموار این است که  $(\vec{r}'(t))'$  پیوسته باشد و  $\vec{r}'(t) \neq 0$ . صفر نبودن مشتق بدین معنی است که در حین پیمودن مسیر خم، سرعت صفر نمی‌شود، یعنی خم بی هیچ توقفی طی می‌شود.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$



در جلسه‌ی آینده روش انتگرالگیری از تابع  $f$  روی مسیر خم  $C$  را فراخواهیم گرفت و با انتگرال زیر آشنا خواهیم شد:

$$\int_C f(x, y) ds$$



## ۳۴ جلسه‌ی سی و چهارم

### ۱.۳۴ ادامه‌ی مختصات کُروی

مثال ۲۵۸. حجم جسمی را بیابید که بالای مخروط  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  و زیر کُره‌ی  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$  واقع شده است.

پاسخ.

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$$

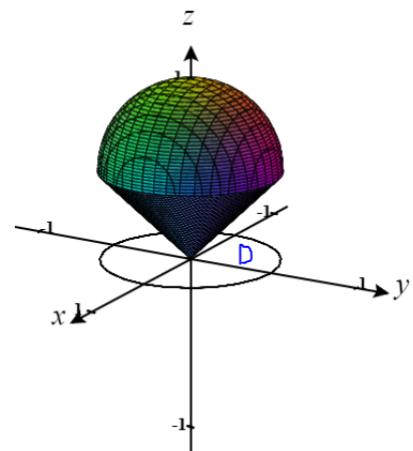
یادآوری ۲۵۹.

$$z^2 + az = (z + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$$

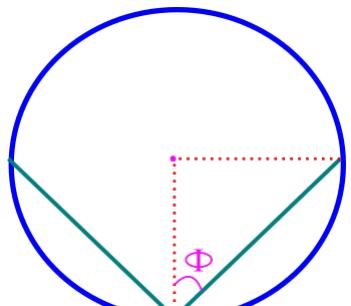
$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

حجم ناحیه‌ی بین مخروط و کُره برابر است با

$$E = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \\ (x, y) \in D \end{cases}$$



$$\tan \phi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$$

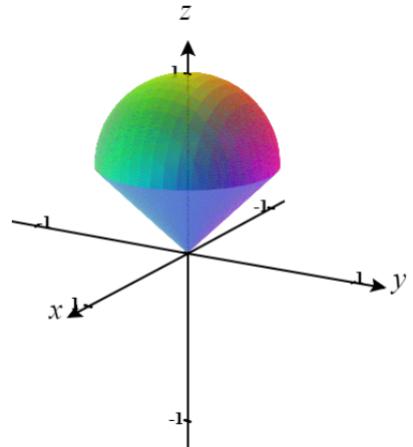


معادله‌ی کُره را در مختصات کُروی به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow \rho^2 = \rho \cos \phi \Rightarrow \rho = \cos \phi$$

انتگرال مورد نظر ما در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \phi} \rho^3 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ & \int_0^{\cos \phi} \rho^3 \sin \phi d\rho = \sin \phi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\cos \phi} = \frac{\sin \phi \cos^4 \phi}{4} \\ & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \phi \cos^4 \phi}{4} d\phi = \frac{-\cos^4 \phi}{4 \times 3} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{12} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{1}{16}. \\ & \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{16} \right) d\theta = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$



□

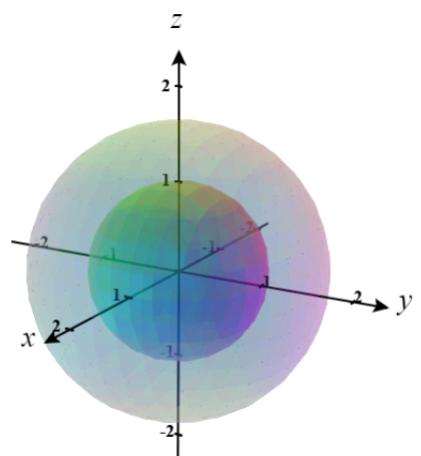
تمرین ۷۴. سعی کنید مثال بالا را در دستگاههای استوانه‌ای و مکعبی حل کنید.

مثال ۲۶۰. انتگرال  $\iiint_T \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dv$  را محاسبه کنید که در آن  $T$  ناحیه‌ی بین دو کره‌ی  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  و  $x^2 + y^2 + z^2 = e$  است.

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$1 \leq \rho \leq \sqrt{e}$$



تمرین ۷۵. حجم ناحیه‌ی محدود بین کره‌های  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  و  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  را بیابید.

## ۲.۳۴ انتگرالگیری از میدان‌های برداری روی مسیرهای خطی

تابع فصل قبل، توابعی مانند  $R \rightarrow \mathbb{R}^3 : f$ ، بودند که به آنها توابع عددی می‌گویند. در فصل قبل آموختیم که چگونه از توابع عددی در نواحی مختلف انتگرالگیری کنیم.

تمرین ۷۶. در یک صفحه، با کشیدن شکل، انواع انتگرالگیری‌های را که تا اینجا آموخته‌ایم مرور کنید.

در ادامه‌ی درس قرار است با چند نوع دیگر از انتگرالگیری آشنا شویم که در فیزیک کاربردهای بی‌شماری دارند. هدف ما در ادامه‌ی درس، آشنا شدن با مفاهیم زیر است:

۱. انتگرال توابع عددی روی خط (منحنی) و روی رویه

۲. انتگرالگیری از توابع برداری روی خط و روی رویه

۳. رابطه‌ی انتگرال‌های بالا با انتگرال دوگانه و سه‌گانه

بحث را با معرفی مفهوم میدان‌های برداری شروع می‌کنیم.

## ۳.۳۴ میدان‌های برداری

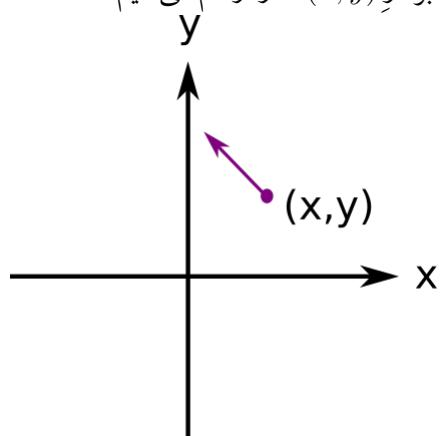
منظور از یک میدان برداری روی  $\mathbb{R}^2$  تابعی است از  $\mathbb{R}^2$  به  $\mathbb{R}^2$ :

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

دقت کنید که یک تابع برداری مانند بالا، از دو تابع عددی تشکیل شده است:

$$F(x, y) = (h(x, y), k(x, y))$$

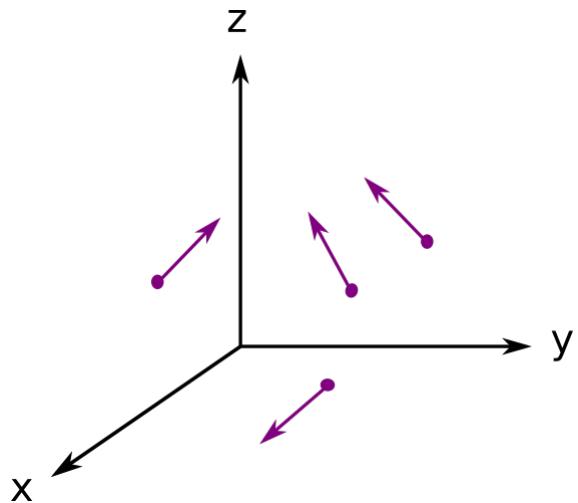
معمولًاً دامنه و برد این تابع را در یک دستگاه به صورت همزمان می‌کشیم بدین صورت که با شروع از هر نقطه‌ی  $(x, y)$  بردار  $F(x, y)$  را رسم می‌کنیم.



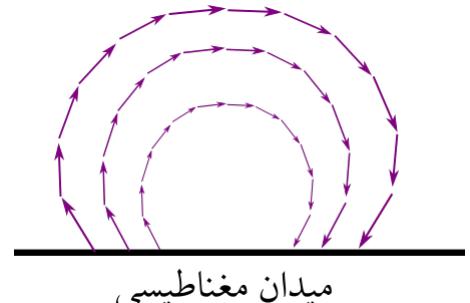
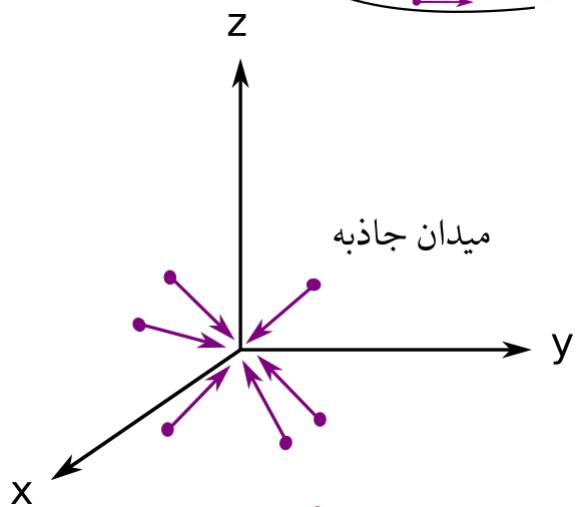
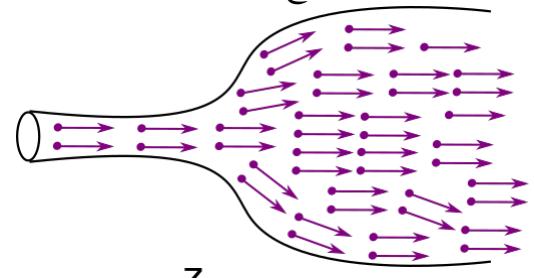
به طور مشابه منظور از یک میدان برداری روی  $\mathbb{R}^3$  تابعی است مانند تابع زیر:

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (h(x, y, z), k(x, y, z), l(x, y, z))$$



میدان سرعت یک مایع در درون یک لوله، میدانهای جاذبه و مغناطیسی مثالهایی از میدانهای برداری هستند:



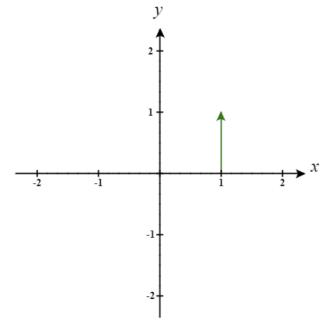
میدان مغناطیسی

مثال ۲۶۱. تابع برداری  $F(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$  را رسم کنید.

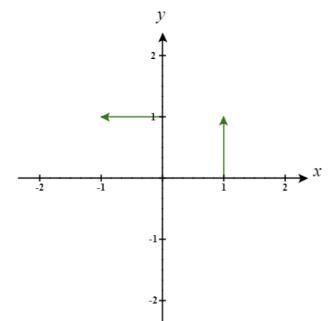
پاسخ.

$$F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

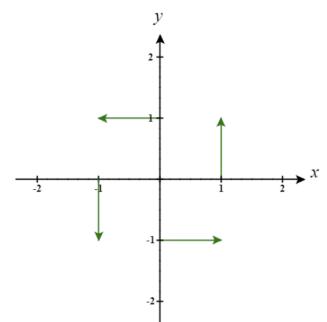
$$(\mathbb{1}, \cdot) \rightarrow (\cdot, \mathbb{1})$$



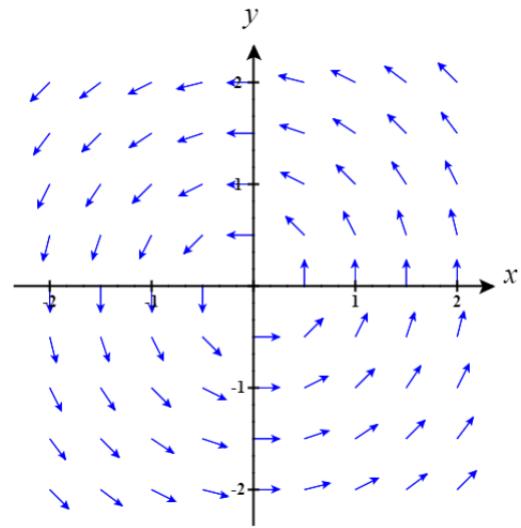
$$(\cdot, \mathbb{1}) \rightarrow (-\mathbb{1}, \cdot)$$



$$(-\mathbb{1}, \cdot) \rightarrow (\cdot, -\mathbb{1}) \quad \text{و} \quad (\cdot, -\mathbb{1}) \rightarrow (\mathbb{1}, \cdot)$$



و به همین ترتیب برای نقاط دیگر ادامه دهیم در نهایت شکل زیر حاصل می‌شود.



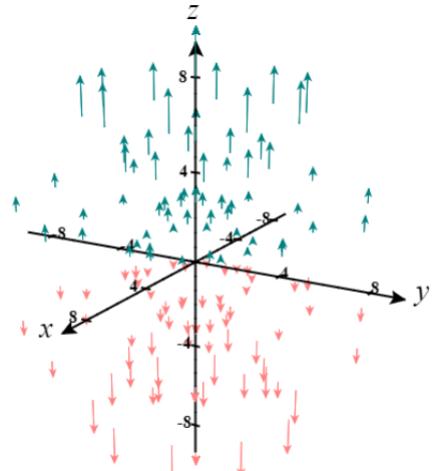
به طور دقیقت اگر  $\vec{r}(x, y)$  بردار مکان نقطه‌ی  $(x, y)$  باشد، آنگاه

$$(x, y) \cdot (-y, x) = -xy + xy = 0 \Rightarrow \vec{r}(x, y) \perp \vec{F}(x, y)$$

□ یعنی میدان برداری مورد نظر همواره بر بردار مکان عمود است و بدینسان از بردارهای مماس بر دوایر ایجاد می‌شود.

**مثال ۲۶۲.** میدان برداری  $F(x, y, z) = z \vec{k}$  را رسم کنید.

پاسخ.

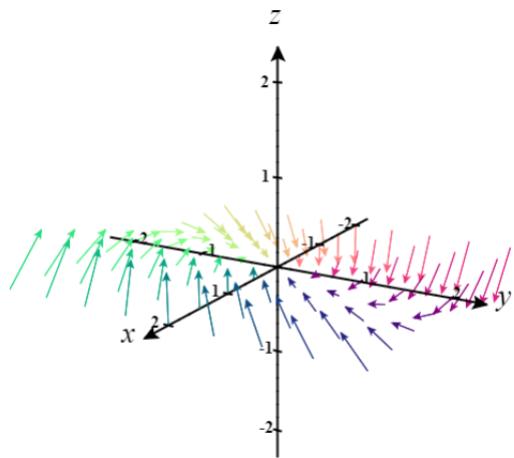


□

**مثال ۲۶۳.** میدان برداری  $F(x, y, z) = y \vec{i} - z \vec{j} + x \vec{k}$  را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای رسم کنید.

پاسخ.

□



مثال ۲۶۴. اگر  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

یک میدان برداری است. همچنین اگر  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

یک میدان برداری است.

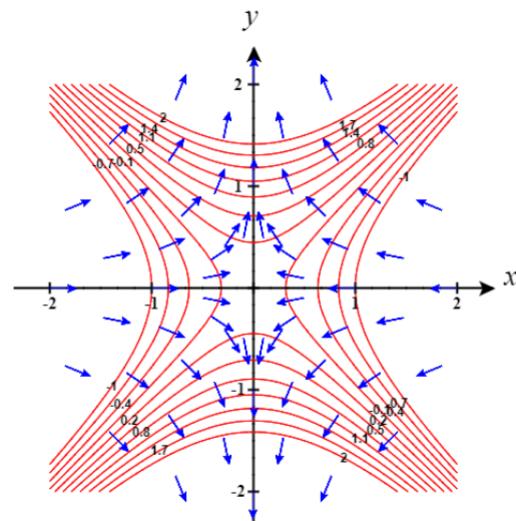
مثال ۲۶۵. فرض کنید  $f(x, y) = y^2 - x^2$ . میدان برداری  $\nabla f$  را رسم کنید.

پاسخ.

$$\nabla f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-2x, 2y)$$

قبله گفته ایم که میدان گرادیان بر منحنی های تراز عمود است و در جهت افزایش تابع است:



□

برخی میدانهای برداری، برابر با گرادیان توابع عددی هستند:

**تعريف ۲۶۶.** فرض کنید  $F$  یک میدان برداری دلخواه روی  $\mathbb{R}^3$  باشد. میدان  $F$  را پایستار می‌خوانیم هرگاه تابع  $f$  موجود باشد به طوری که

$$\begin{array}{ccc} F & = & \nabla f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} & & \end{array}$$

میدانهای پایستار روی فضای دو بعدی نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

در درس‌های آینده روش‌هایی معرفی خواهیم کرد که با استفاده از آنها به راحتی می‌توان تشخیص داد که یک میدان داده شده پایستار است یا خیر. همچنین خواهیم دید که انتگرالهای میدانهای پایستار، از مسیر مستقلند. بحث میدانهای برداری را فعلًا رها می‌کنیم ولی به زودی به آن بازخواهیم گشت.

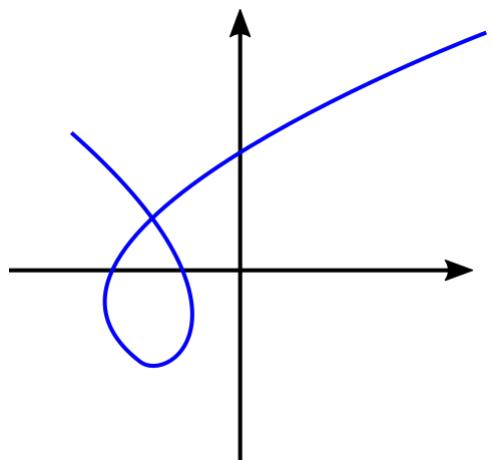
#### ۴.۳۴ انتگرالگیری خطی از توابع عددی

فرض کنید  $f(x, y)$  تابعی عددی از  $\mathbb{R}^2$  به  $\mathbb{R}$  باشد.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

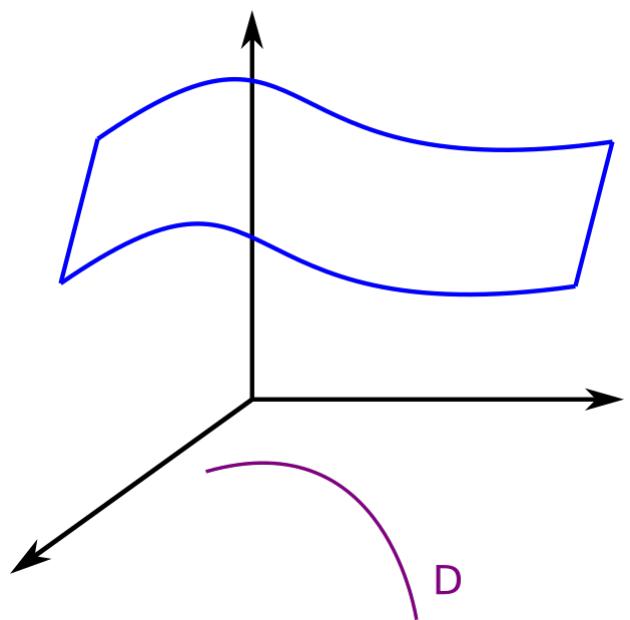
فرض کنید  $\vec{r}(t) : C \rightarrow \mathbb{R}^2$  یک خم هموار در  $\mathbb{R}^2$  باشد. منظور از هموار این است که  $(\vec{r}'(t))'$  پیوسته باشد و  $|\vec{r}'(t)| \neq 0$ . صفر نبودن مشتق بدین معنی است که در حین پیمودن مسیر خم، سرعت صفر نمی‌شود، یعنی خم بی هیچ توقفی طی می‌شود.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$



در جلسه‌ی آینده روش انتگرالگیری از تابع  $f$  روی مسیر خم  $C$  را فراخواهیم گرفت و با انتگرال زیر آشنا خواهیم شد:

$$\int_C f(x, y) ds$$



در جلسه‌ی قبل درباره میدانهای برداری (مانند توابع زیر) صحبت کنیم.

$$F : \mathbf{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbb{R}}$$

$$G : \mathbf{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbb{R}}$$

گفتیم که یک میدان برداری  $F : \mathbf{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{R}^{\mathbb{R}}$  را پایستار می‌خوانیم هرگاه تابع عددی  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  موجود باشد که

$$F = \nabla f = (f_x, f_y)$$

در درس‌های آینده محکی معرفی خواهیم کرد که به وسیله‌ی آن می‌توانیم پایستار بودن یک میدان برداری را تشخیص دهیم. پیش از آن نیاز به مقدماتی داریم. فعلاً بحث توابع برداری را رها می‌کنیم و به توابع عددی می‌پردازیم.

### ۱.۳۵ انتگرالگیری خطی از توابع عددی

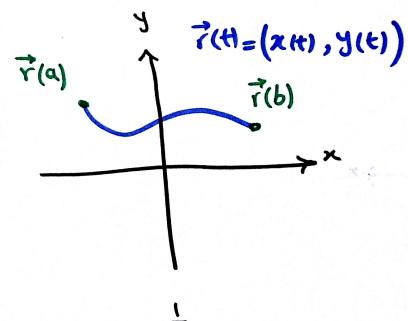
فرض کنید  $c$  یک خم هموار در  $\mathbf{R}^{\mathbb{R}}$  باشد که با معادله‌ی برداری

$$\vec{r}(t) \quad a \leq t \leq b$$

داده شده باشد. فرض می‌کنیم که

$$\forall t \in [a, b] \quad r'(t) \neq 0$$

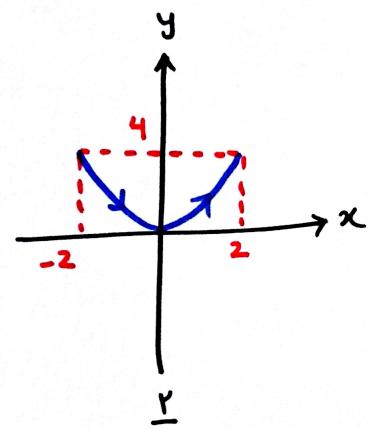
و  $\vec{r}'(t)$  پیوسته باشد.



مثال ۲۶۷. منحنی  $x^2 = y$  را به صورت یک خم نمایش دهید. ( $-2 \leq x \leq 2$ .)

پاسخ.

$$\vec{r}(t) = (t, t^2) \quad -2 \leq t \leq 2$$

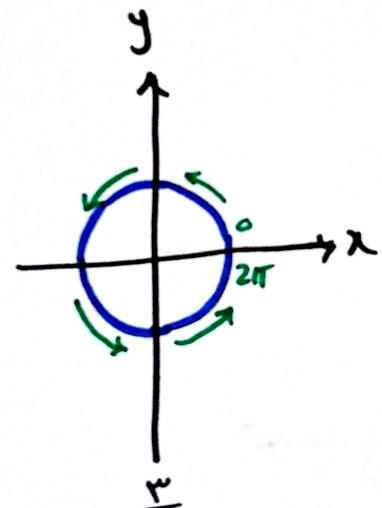


□

مثال ۲۶۸. خم  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$  را  $0 \leq t \leq 2\pi$  کنید.

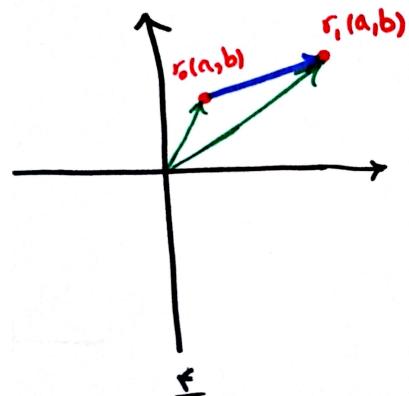
پاسخ.

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



□

مثال ۲۶۹. معادله‌ی برداری پاره خطی را بنویسید که نقطه‌ی A را به نقطه‌ی B وصل کند.



فرض کنید نقطه‌ی A دارای بردار مکان  $r_0$  و نقطه‌ی B دارای بردار مکان  $r_1$  باشد.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t \quad 0 \leq t \leq 1$$

به بیان دیگر:

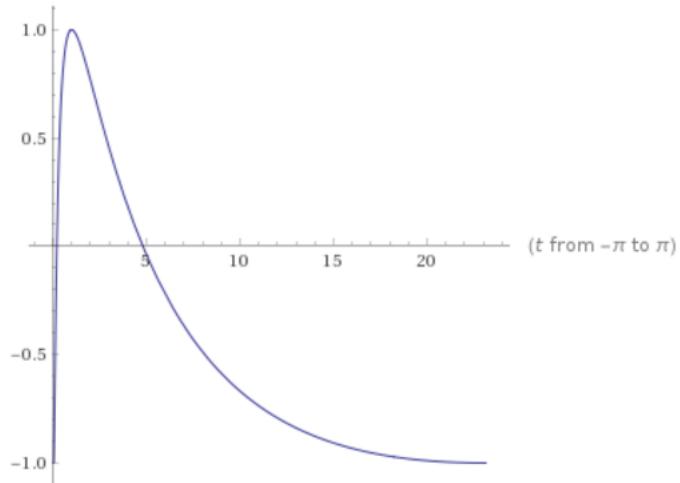
$$\vec{r}(t) = t \vec{r}_1 + (1-t) \vec{r}_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

مثال ۲۷۰. خم‌های زیر را (با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای) رسم کنید.

$$(\cos t, 2 \sin t), \quad 1$$

$$(e^t, \cos t), \quad 2$$

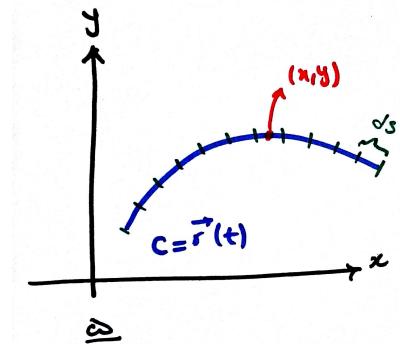
در زیر دومی را به عنوان نمونه رسم کردہ‌ایم:



فرض کنید  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  یک تابع عددی باشد.

هدف ۲۷۱. تعریف

$$\int_c f ds$$



خم مورد نظر را به قطعاتی به طول  $\Delta s$  تقسیم می‌کنیم و از هر قطعه یک نقطه انتخاب می‌کنیم و حد زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum f(x, y) \Delta s$$

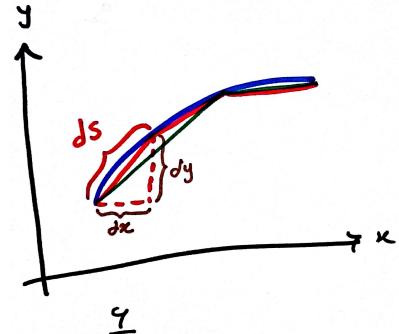
اگر حد بالا موجود باشد می‌نویسیم:

$$\int_c f(x, y) ds = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum f(x, y) \Delta s$$

توجه ۲۷۲. طول خم برابر است با

$$\int_c ds$$

اندازه‌ی  $ds$  را وقتی تعداد قطعات زیاد باشند، می‌توان با طول پاره‌خطی که دو سر  $ds$  را به هم وصل می‌کند تخمین زد.



پس:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

منحنی مورد نظر ما توسط معادله‌ی برداری  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  داده شده است. پس

$$dx = x'(t)dt \quad dy = y'(t)dt$$

پس داریم:

$$ds = |\vec{r}'(t)|dt$$

که در آن

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

و

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

حال می‌توانیم همه چیز را در یک تعریف خلاصه کنیم:

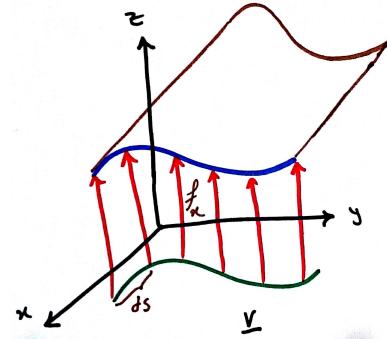
**تعریف ۲۷۳.** فرض کنید خم  $c$  توسط معادله‌ی برداری  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$   $a \leq t \leq b$  داده شده باشد و تابعی عددی باشد. داریم  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$$\int_c f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

**توجه ۲۷۴.** طول خم به معادله‌ی  $\vec{r}(t)$   $a \leq t \leq b$  برابر است با

$$\int_c^b ds = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

دقیق کنید که دامنه‌ی یک تابع  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  می‌تواند تمام  $\mathbf{R}^2$  باشد ولی در انتگرالگیری خطی ما به مقادیر تابع روی یک منحنی که در دامنه‌ی تابع واقع شده است توجه داریم.



توجه ۲۷۵. یک خم مشخص را شاید بتوان به گونه‌های مختلفی پارامتر بندی کرد. برای مثال یک دایره را در زیر به دو صورت پارامتر بندی کرده‌ایم.

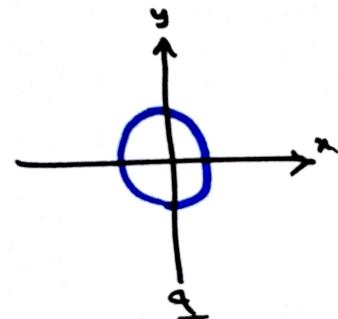
$$c : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$c : \vec{h}(t) = (\cos 2t, \sin 2t) \quad 0 \leq t \leq \pi$$

حاصل انتگرال از یک تابع عددی به نوع پارامتر بندی خم بستگی ندارد:

$$\int_c f(x, y) ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^{\pi} f(\vec{h}(t)) |\vec{h}'(t)| dt$$

دقیق کنید که فرق دو پارامتر بندی بالا این است که در دومی خم سریعتر پیموده می‌شود.



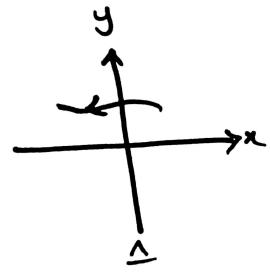
توجه ۲۷۶. طول خم نیز مستقل از نوع پارامتر بندی آن است.

توجه ۲۷۷. انتگرال یک تابع عددی روی یک خم به جهت خم بستگی ندارد:

$$c : \vec{r}(t)$$

$$-c : \vec{h}(t)$$

$$\int_c f(x, y) ds = \int_{-c}^c f(x, y) ds$$



تعمیم ۲۷۸ (سه بعدی). فرض کنید  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  یک تابع عددی باشد و  $c$  یک خم هموار با معادله‌ی برداری

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad a \leq t \leq b$$

باشد آنگاه

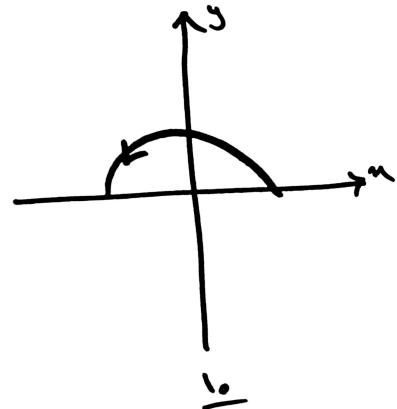
$$\int_c f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

$$ds = |\vec{r}'(t)| dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

مثال ۲۷۹ را محاسبه کنید که در آن  $c$  نیمه‌ی بالائی دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  است.

پاسخ.

$$c : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq \pi$$



$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$\int_c f(x, y) ds = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \times 1 dt = 2\pi + \int_0^\pi \underbrace{\cos^2 t}_{u} \underbrace{\sin t dt}_{-du} = 2\pi + \frac{-\cos^3 t}{3} \Big|_0^\pi =$$

$$2\pi - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 2\pi + \frac{2}{3}$$

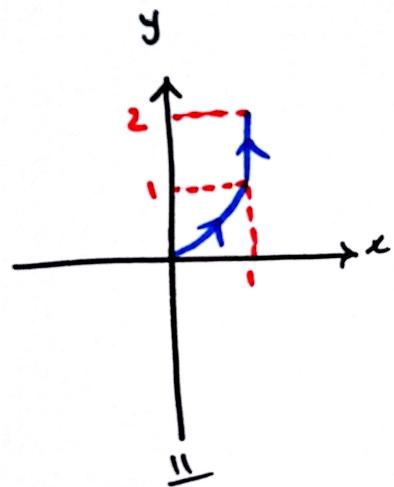
□

تمرین ۷۷. را حساب کنید که در آن  $c_1 \cup c_2$  سهمی  $y = x^2$  از نقطه‌ی  $(0, 0)$  تا نقطه‌ی  $(1, 1)$  است و  $c_2$  خطی عمودی از  $(1, 1)$  تا  $(2, 1)$  است.

پاسخ.

$$c_1 : \vec{r}_1(t) = (t, t^2) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$c_2 : \vec{r}_2(t) = (1, t) \quad 1 \leq t \leq 2$$



$$\vec{r}'_1(t) = (1, 2t) \Rightarrow |\vec{r}'_1(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\vec{r}'_2(t) = (t, 1) \Rightarrow |\vec{r}'_2(t)| = \sqrt{1 + t^2} = 1$$

توجه ۲۸۰. اگر  $c$  اجتماعی از خم‌های هموار  $c_1, \dots, c_n$  باشد آنگاه

$$\int_c f(x, y) ds = \int_{c_1} f(x, y) ds + \dots + \int_{c_n} f(x, y) ds$$

$$\int_{c_1} 2x ds = \int_1^2 2t(\sqrt{1 + 4t^2}) dt$$

$$u = 1 + 4t^2 \Rightarrow du = 8t dt \Rightarrow \frac{du}{8} = t dt$$

$$\int_1^2 2t(\sqrt{1 + 4t^2}) dt = 2 \int_1^5 \sqrt{u} \frac{du}{8} = \frac{1}{4} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^5 = \dots$$

$$\int_{c_2} 2x ds = \int_1^2 dt = 2 - 1 = 1$$

$$\int_c f(x, y) ds = \int_{c_1} f(x, y) ds + \int_{c_2} f(x, y) ds$$

□

### ۱.۱.۳۵ چند انتگرال دیگر وابسته به خم

تا اینجا با انتگرال‌گیری یک تابع عددی روی یک خم آشنا شدیم. دقت کنید که مقادیر تابع روی خم محاسبه می‌شدند و  $ds$  در پایان انتگرال نوشته می‌شد. در زیر چند نوع انتگرال دیگر را معرفی کردہ‌ایم.

تعريف ۲۸۱. برای محاسبه‌ی

$$\int_c f(x, y) dx$$

روی خم

$$c : \vec{r}(t) \quad a \leq t \leq b$$

که در آن

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_c f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

به طور مشابه

$$\int_c f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

برای توابع  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  هم مطالب فوق را می‌توان تعمیم داد.

$$\int_c f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

$$\int_c f(x, y, z) dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt$$

$$\int_c f(x, y, z) dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt$$

$$\int_c f(x, y, z) dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt$$

خلاصه: در درس امروز با انتگرال‌های آشنا شدیم. دقت کنید که

$$\int_c f ds = \int_{-c}^c f ds$$

ولی

$$\int_c f dx = - \int_{-c}^c f dx$$

و

$$\int_c f dy = - \int_{-c}^c f dy$$

همچنین دیدیم که اگر منحنی  $c$  دارای یک معادله‌ی پارامتری  $r(t)$  باشد انتگرال‌های بالا را چگونه می‌توان محاسبه کرد.

## ۳۶ نیم جلسه‌ی سی و ششم، چهارشنبه

تمرین ۷۸. را محاسبه کنید که در آن  $c$  اجتماع پاره خط از  $(-3, -5)$  تا  $(2, 0)$  و سهمی از  $(-3, 0)$  تا  $(2, -5)$  است.

توجه ۲۸۲. انتگرال یک تابع عددی روی یک خم، به جهت خم بستگی ندارد:

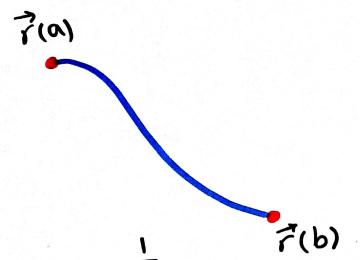
$$\int_c f(\vec{r}(t)) ds = \int_{-c} f(\vec{r}(t)) ds$$

یعنی انتگرال بالا از جهت منحنی مستقل است. اما انتگرال زیر از جهت منحنی مستقل نیست.

$$\int_c f dx = - \int_{-c} f dx$$

همین گفته برای انتگرال‌های ختم شونده به  $dy$  و  $dz$  هم برقرار است.

علت این است که در انتگرال اول مقادیر تابع در  $ds$  ضرب می‌شوند که همواره مثبت است، اما در دومی،  $dx$  به جهت بستگی دارد. به بیان دقیقتر:



$$c : \vec{r}(t) : a \leq t \leq b$$

$$f(x, y) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\int_c f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

$$\int_{-c} f ds = \int_b^a f(x(t), y(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

$$\int_c f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

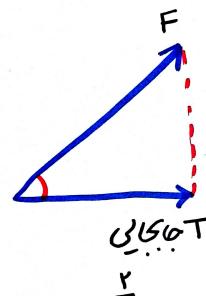
$$\int_{-c} f(x, y) dx = \int_b^a f(x(t), y(t)) x'(t) dt = - \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

پس با انتگرالگیری از توابع عددی روی خم آشنا شدیم. در ادامه با نحوه انتگرالگیری از توابع برداری روی خمها آشنا می‌شویم:

## ۱.۳۶ انتگرالگیری روی خط (روی خم) از توابع برداری

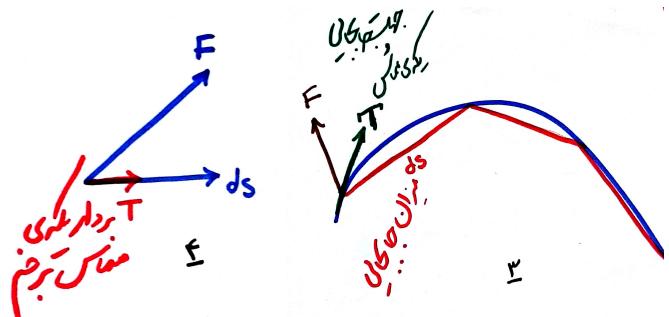
فرض کنید  $F$  یک بردار نیرو باشد و  $T$  بردار جابجایی باشد. می‌دانیم که کار برابر است با حاصل ضرب نیروی در جهت حرکت در میزان جابجایی.

$$w = |F| \cos \theta |T| = F \cdot T$$



حال فرض کنید که میدان نیروی  $F$  جسمی را روی منحنی  $c$  جابجا کند. هدفمان محاسبه کار انجام شده، طی این جابجایی است.

$$c : \vec{r}(t) \quad a \leq t \leq b$$



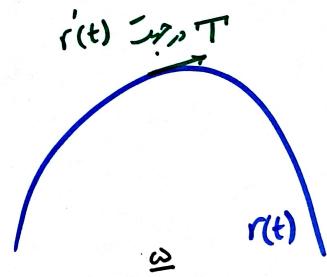
هدف ۲۸۳. محاسبه کار انجام شده.

منحنی مورد نظر را با طولهای  $ds$  تقسیم بندی می‌کنیم و فرض می‌کنیم که میزان جابجایی در هر قطعه برابر باشد با  $ds$  ولی جهت جابجایی برابر باشد با  $T$ ، که منظور از  $T$  بردار یکهی مماس بر منحنی است. برای محاسبه کل کار انجام شده باید تمام کارهای کوچک را با هم جمع بزنیم:

$$\text{کار انجام شده توسط میدان } F \text{ در مسیر منحنی } c = \int_c (F \cdot \underbrace{T}_{\substack{\text{بردار یکهی مماس}}}) ds$$

حال ببینید فرمول بالا را بر حسب پارامتر بندی منحنی بازنویسی کنیم؛ نخست توجه کنید که

$$T = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$



همچنین:

$$ds = |\vec{r}'(t)|dt$$

پس:

$$\int_c(F \cdot T)ds = \int_a^b \frac{F \cdot \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b F \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b F \cdot dr$$

به علامت ضرب داخلی در انتگرال بالا توجه کنید.

فرمول بالا را می‌توان به صورت گستردگی زیر نیز نوشت: فرض کنید  $F = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$

(آنگاه  $(x'(t), y'(t))$ )

$$\int_a^b F \cdot dr = \int_c P \underbrace{dx}_{x'(t)dt} + Q \underbrace{dy}_{y'(t)dt}$$

در تمرین ابتدای همین جلسه، نحوه محاسبه انتگرال سمت راست بالا را دیده‌اید.

#### خلاصه ۲۸۴.

$$\text{میدان برداری } F = (P(x, y), Q(x, y))$$

$$\text{خم } c : \vec{r}(t) \quad a \leq t \leq b$$

$$\int_c F \cdot T ds = \int_c F \cdot dr = \int_c P dx + Q dy$$

مثال ۲۸۵. کار انجام شده توسط میدان نیروی

$$F(x, y) = x\vec{i} - xy\vec{j}$$

که ذره‌ای را روی دایره

$$(\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

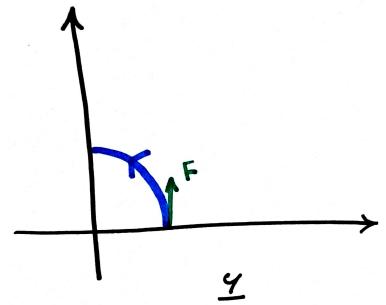
جابجا می‌کند، بیابید.

پاسخ.

$$P(x, y) = x$$

$$Q(x, y) = -xy$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$$



$$dx = x'(t)dt = -\sin t dt$$

$$dy = y'(t)dt = \cos t dt$$

$$\int_c P dx = \int_c x' dx = \int_c^{\frac{\pi}{2}} \cos'(t)(-\sin t) dt = -\cos'(t)/2|_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_c Q dy = \int_c -xy dy = \int_c^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)(\sin t)(\cos t) dt = -\cos'(t)/2|_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_c F \cdot dr = \frac{1}{2}.$$

□

توجه ۲۸۶. برای توابع برداری روی  $\mathbb{R}^3$  نیز به طور مشابه عمل می‌کنیم:

$$\int_c F \cdot dr = \int_c P dx + Q dy$$

$$\int_c F \cdot dr = \int_c P dx + Q dy + R dz \quad F = (P, Q, R)$$

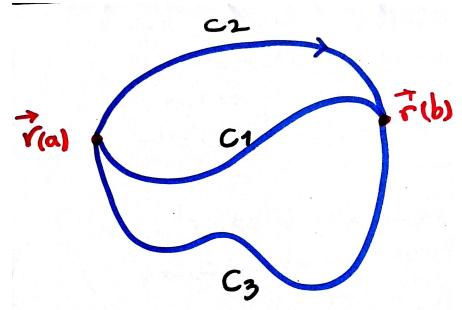
یادآوری ۲۸۷. در ریاضی ۱ دیده‌اید که:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

از فرمول بالا نتیجه می‌شود که:

$$c : \vec{r}(t) \quad a \leq t \leq b$$

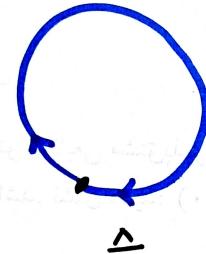
$$\begin{aligned} \int_c \nabla f \cdot dr &= \int_c f_x dx + f_y dy + f_z dz = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) \\ &= f(\text{نقطه‌ی ابتدائی خم}) - f(\text{نقطه‌ی انتهائی خم}) \end{aligned}$$



▽

پس به نتیجه‌ی جالب زیر می‌رسیم:

توجه ۲۸۸. اگر  $F$  یک میدان برداری پایستار باشد آنگاه  $\int_c F \cdot dr$  تنها به نقاط ابتدائی و انتهایی  $c$  بستگی دارد و انتگرال فوق روی مسیرهای بسته صفر است.



انتگرال توابع برداری پایستار از مسیر مستقل است (فقط به ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد). همچنین انتگرال توابع پایستار روی مسیرهای بسته برابر با صفر است.

حال از کجا می‌توانیم تشخیص دهیم که یک میدان برداری داده شده پایستار است یا خیر؟

فرض کنید  $F = (P, Q)$  یک میدان برداری پایستار باشد.

$$\exists \underbrace{f}_{\text{تابع عددی}} \quad P = f_x \quad Q = f_y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

در واقع تحت شرایطی مشخص،<sup>۱۵</sup> میدان برداری  $F = (P(x, y), Q(x, y))$  پایستار است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

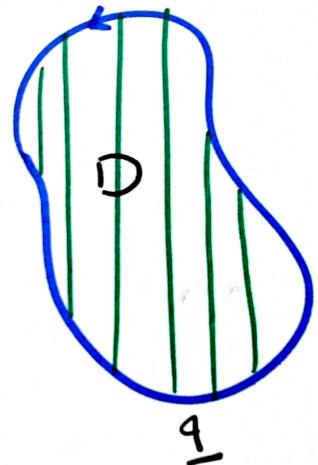
در جلسه‌ی آینده خواهیم دید که گاهی می‌توان انتگرال یک تابع برداری روی یک مسیر را با استفاده از یک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ی احاطه شده توسط آن مسیر حساب کرد.

---

<sup>۱۵</sup> تابع برداری مورد نظر روی یک ناحیه‌ی همبند ساده تعریف شده باشد و در این ناحیه،  $P, Q$  دارای مشتقه‌های جزئی اول پیوسته باشند.

## ۲.۳۶ قضیه‌ی گرین

در جلسه‌ی آینده درباره‌ی قضیه‌ی گرین صحبت خواهیم کرد:



$$F = (P, Q)$$

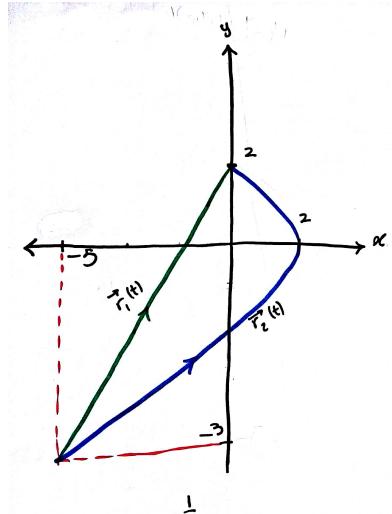
انتگرال روی مسیر بسته‌ی  $c$  برابر است با

$$\oint_c F \cdot dr = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

تمرین ۷۹. را محاسبه کنید که در آن  $c$  شامل یک پاره خط از  $(-3, -5)$  تا  $(0, 2)$  و سهمی از  $(0, 2)$  تا  $(-5, -3)$  است.

پاسخ.

$$\int_c \square = \int_{c_1} \square + \int_{c_2} \square$$



$$\vec{r}_1(t) : (-5, -3) + (5, 5)t = (\underbrace{-5 + 5t}_{x(t)}, \underbrace{-3 + 5t}_{y(t)}) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{c_1} y dx + x dy = \underbrace{\int_{c_1} y dx}_A + \underbrace{\int_{c_1} x dy}_B$$

$$x = -5 + 5t \Rightarrow dx = 5dt$$

$$A = \int_{c_1} y dx = \int_0^1 (-3 + 5t)^2 5 dt = \frac{(-3 + 5t)^2}{2} \Big|_0^1 = \dots$$

$$B = \int_{c_1} x dy = \int_0^1 (-5 + 5t) 5 dt = \dots$$

$$\vec{r}_2(t) : (4 - t^2, t)$$

$$\int_{c_2} y dx + x dy = \int_{-3}^1 (t^2)(-2t) dt + (4 - t^2) dt = \dots$$

حاصل انتگرال  $\int_c y dx + x dy$  برابر است با

$$\int_{c_1} y dx + x dy + \int_{c_2} y dx + x dy$$

□

تکمیل پاسخ بالا و انجام محاسبات را به عهده‌ی دانشجو می‌گذارم.

انتگرال سوال قبل دارای صورت برداری زیر است:

$$\int_c^P \vec{r}(t) \cdot dr$$

گفتیم که اگر  $P_y = Q_x$  میدان برداری پایستار است، پس در سوال قبل میدان برداری مورد نظر پایستار نیست.

یادآوری ۲۸۹. اگر  $F = (P, Q, R)$  یک میدان برداری باشد و آنگاه

$$\int_c F \cdot dr = \int_c P dx + Q dy + R dz$$

مثال ۲۹۰.  $F(x, y, z) = xy \vec{i} + yz \vec{j} + zx \vec{k}$  را حساب کنید که در آن  $\int_c F \cdot dr$ .

$$c = \vec{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

پاسخ.

$$\int_c F \cdot dr = \int_c xy dx + yz dy + zx dx = \int_0^1 (t \times t^2) dt + \int_0^1 (t^2 \times t^2) 2t dt + \int_0^1 (t^2 \times t) 3t^2 dt = \dots$$

□

سوال ۲۹۱. ۱. تعیین کنید که آیا میدان پایستار است؟  $F(x, y) = \underbrace{(3 + 2xy)}_{P(x)} \vec{i} + \underbrace{(x^2 - 2y^2)}_{Q(x)} \vec{j}$

پاسخ.

$$Q_x = 2x, \quad P_y = 2x \quad Q_x = P_y$$

□

بنابراین میدان  $F$  پایستار است.

۲. یک تابع  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  چنان باید که  $\nabla f = F$

پاسخ.

$$F(P, Q) = \nabla f = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

$$f_x(x, y) = 3 + 2xy \Rightarrow f(x, y) = 3x + x^2 y + g(y)$$

$$f_y(x, y) = x^2 - 2y^2$$

مشتق  $f(x, y) = 3x + x^2 y + g(y)$  بر حسب  $y$  برابر است با

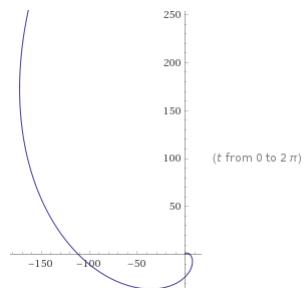
$$x^2 + g'(y) = x^2 - 2y^2 \Rightarrow g'(y) = -2y^2 \Rightarrow g(y) = -y^3 + k$$

بنابراین

$$f(x, y) = 3x + x^2 y - y^3 + k$$

□

۳. حاصل  $\int_c F \cdot dr$  را باید که در آن  $c$  توسط معادله‌ی برداری داده شده است.



پاسخ.

$$F(x, y) = (3 + 2xy)\vec{i} + (x^3 - 3y^3)\vec{j}$$

$$\int_c F \cdot dr = \int_c P dx + Q dy = \int_0^\pi 3 + 2e^t \sin t e^t \cos t d(e^t \sin t) dt + \dots$$

محاسبه‌ی انتگرال بالا بسی دشوار است اما می‌دانیم که

$$\int_c F \cdot dr = \int_c \nabla f \cdot dr = f(\text{نقطه‌ی شروع}) - f(\text{نقطه‌ی انتهایی})$$

$$f(x, y) = 3x + x^3y - y^3 + k$$

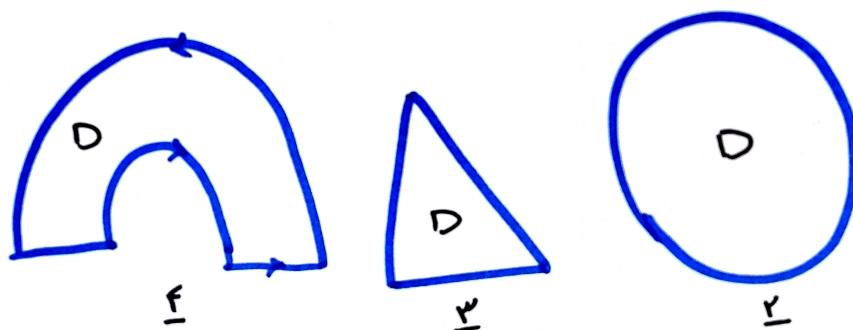
نقطه‌ی شروع  $c$  برابر است با  $(0, 0)$  و نقطه‌ی پایان برابر است با  $(0, -e^\pi)$ .

$$\int_c F \cdot dr = f(0, -e^\pi) - f(0, 0) = \dots$$

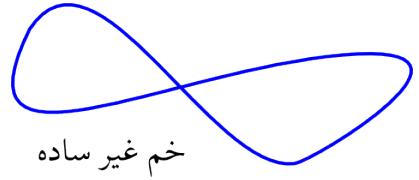
□

### ۱.۳۷ قضیه‌ی گرین

قضیه ۲۹۲ (قضیه‌ی گرین)<sup>۱۶</sup>). فرض کنید  $c$  یک خم بسته‌ی به طور قطعه‌ای هموار، ساده و جهتدار در جهت مثبت باشد و ناحیه‌ی احاطه شده توسط  $c$  باشد. دقت کنید که ساده بودن یعنی این که خم مورد نظر خودش را تنها در نقطه‌ی انتهائی قطع کند. جهتدار بودن در جهت مثبت یعنی وقتی در جهت خم به روی حرکت کنیم، ناحیه‌ی احاطه شده توسط آن در سمت چپمان قرار گیرد. عکس‌های ۲ و ۳ و ۴ نمونه‌های مطلوب برای اینگونه خمها هستند.



<sup>۱۶</sup>Green's theorem

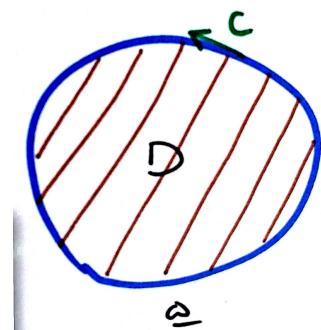


فرض کنید  $P$  و  $Q$  مشتقات جزئی پیوسته در یک مجموعه‌ی باز شامل  $D$  داشته باشند. آنگاه

$$\oint_c \underbrace{Pdx + Qdy}_{F \cdot dr} = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$\int_c \underbrace{F \cdot dr}_{\text{انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ی احاطه شده توسط خم}} = \iint_D (Q_x(x, y) - P_x(x, y)) dxdy$$

انتگرال از یک تابع برداری روی خم مرزی

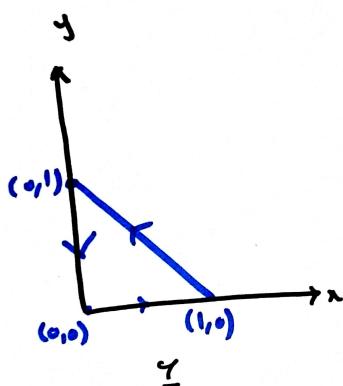


توجه ۲۹۳. فرض کنید  $P, Q$  روی  $c$  صفر باشند، آنگاه

$$\iint_D (Q_x - P_y) dA = 0$$

مثال ۲۹۴. انتگرال زیر را با توجه به مسیر کشیده شده بیابید.

$$\oint_c x^4 dx + xy dy$$



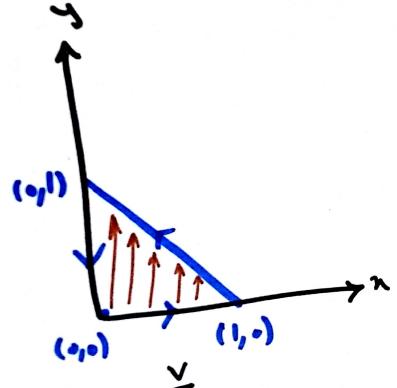
پاسخ.

$$P(x, y) = x^4, \quad Q(x, y) = xy$$

$$P_y(x, y) = 0, \quad Q_x(x, y) = y$$

$$\int_c Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$\iint_D ydy = \int_0^1 \int_0^{1-x} ydy dx$$



$$\int_0^{1-x} ydy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = -\frac{(1-x)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

□

مثال ۲۹۵. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\oint_c (3y - e^{\sin x})dx + (\sqrt{y^2 + 1})dy$$

$$c : x^2 + y^2 = 9$$

$$P(x, y) = 3y - e^{\sin x}$$

$$Q(x, y) = \sqrt{y^2 + 1}$$

$$P_y(x, y) = 3, \quad Q_x(x, y) = 0$$

$$\oint Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$\iint_D 3dA = 3 \underbrace{\iint_D dA}_{\text{مساحت دایره}} =$$

$$3 \int_0^{\pi} \int_0^r r dr d\theta = 3\pi \times 3^2$$

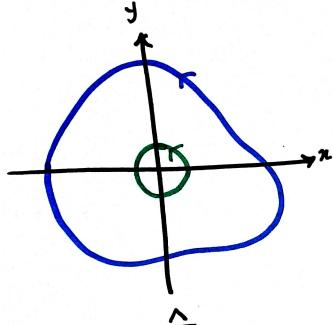
مثال ۲۹۶. فرض کنید  $F(x, y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$  نشان دهید که روی هر منحنی ساده‌ی بسته در جهت مثبت که مبدأ را احاطه کند داریم:

$$\int_c F \cdot dr = 2\pi$$

پاسخ. دقت کنید که تابع تحت انتگرال در مبدأ تعريف نشده است. پس نمی‌توان روی هر منحنی دلخواه به راحتی از قضیه‌ی گرین استفاده کرد. منحنی دلخواه  $c$  را در نظر بگیرید که در شکل زیر به رنگ آبی نشان داده شده است. یک منحنی کوچکتر جهت‌دار در داخل آن به رنگ سبز رسم کرده‌ایم که آن را  $c_1$  می‌نامیم. هدفمان نشان دادن این است که انتگرال برداری تابع مورد نظر، روی دو منحنی رسم شده با هم برابر است. برای این کار انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{c \cup (-c_1)} P dx + Q dy$$

از آنجا که تابع  $F$  در ناحیه‌ی بین دو خم تعريف شده است و در این ناحیه در شرایط قضیه‌ی گرین صدق می‌کند، برای

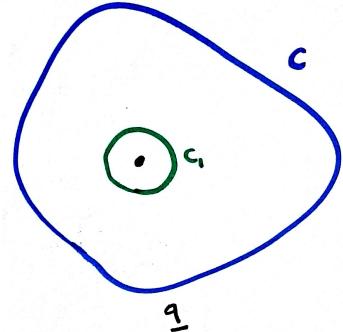


محاسبه‌ی انتگرال بالا از قضیه‌ی گرین، روی ناحیه‌ی بین خمها استفاده می‌کنیم:

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow Q_x(x, y) = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow P_y(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\begin{aligned} Q_x = P_y \Rightarrow \int_{c \cup (-c_1)} P dx + Q dy &= \iint_D (Q_x - P_y) dA = 0 \\ \Rightarrow \int_c F \cdot dr &= \int_{c_1} F \cdot dr \end{aligned}$$



توجه ۲۹۷. از آنچه در بالا گفتیم نتیجه می‌شود که برای هر خم  $c_1$  و  $c_2$  دلخواه شامل مبدأ

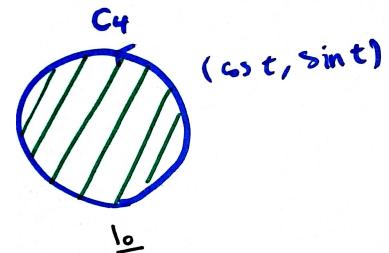
$$\int_{c_1} F dr = \int_{c_2} F dr$$

کافی است که یک خم  $c_2$  کوچکتر از  $c_1, c_2$  در نظر بگیریم. آنگاه بنا بر آنچه در بالا ثابت کردیم انتگرال روی هر دوی این خمها برابر با انتگرال روی  $c_2$  است. حال از آنجا که انتگرال مورد نظر روی تمام خم‌ها با هم برابر است، برای دانستن مقدار این انتگرال، کافی است

$$\int_c F \cdot dr$$

را روی خم ساده‌ی  $2\pi$  محاسبه کنیم.

دقت کنید که در اینجا نیز باز نمی‌توان از قضیه‌ی گرین استفاده کرد زیرا تابع در مبدأ تعريف نشده است. پس انتگرال مورد نظر را با استفاده از تعريف حساب می‌کنیم.



$$\int_{C_4} F \cdot dr = \int_{C_4} P dx + Q dy = \int_{C_4} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy =$$

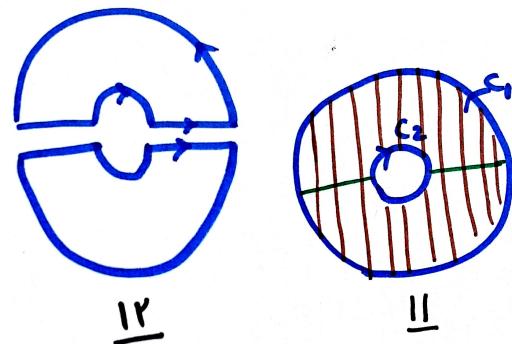
$$\int_0^{2\pi} -\sin t (-\sin t) dt + \cos t (\cos t) dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \cos^2 t dt = 2\pi$$

□

در مثال بالا از قضیه‌ی گرین برای نواحی حفره‌دار استفاده کردیم:

تمرین ۸۰. نشان دهید قضیه‌ی گرین برای نواحی دارای حفره مانند ناحیه‌ی زیر درست است (به جهت خمها توجه کنید)

$$\int_{C_1 \cup C_2} F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$



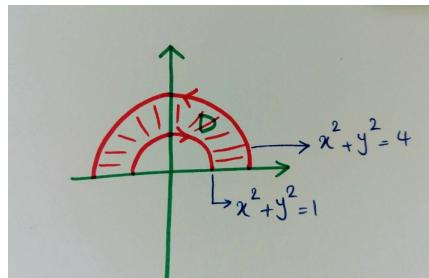
موضوعات جلسه‌ی بعد:

۱. انتگرال توابع عددی روی رویه

۲. انتگرال توابع برداری روی رویه (شار)

## ۳۸ جلسه‌ی سی و هشتم، دوشنبه

مثال ۲۹۸ را محاسبه کنید که  $c$  مرز ناحیه‌ی  $D$  و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است.



پاسخ. بنا به قضیه‌ی گرین:

$$\begin{aligned} \oint_c \underbrace{y^2}_{P} dx + \underbrace{xy}_{Q} dy &= \iint_D (\underbrace{y - y}_{y}) dA = \int_0^\pi \int_0^r r(\sin \theta) r dr d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \times \int_0^r r dr \\ &= -\cos(\theta)|_0^\pi \times \frac{r^2}{2}|_0^r = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

□

## ۱.۳۸ استفاده‌ی برعکس از قضیه‌ی گرین

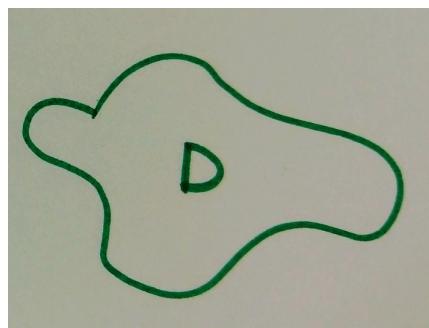
محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی  $D$ :

می‌دانیم که مساحت یک ناحیه‌ی  $D$  در فضای دو بعدی توسط انتگرال  $\iint_D dA$  محاسبه می‌شود. فرض کنید ناحیه‌ی  $D$  توسط یک خم  $c$  احاطه شده باشد. بنا به قضیه‌ی گرین برای هر تابع برداری  $F$  داریم

$$\iint_D (Q_x - P_y) dA = \int_c F \cdot dr$$

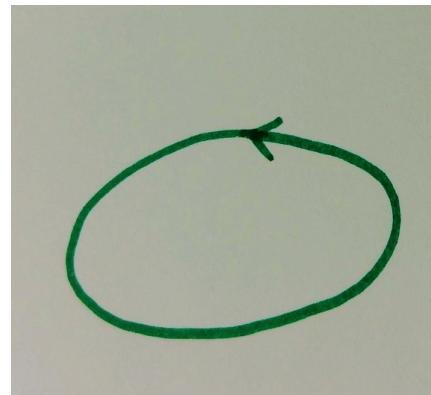
حال اگر یک تابع برداری  $F = (P, Q)$  می‌توانیم مساحت ناحیه‌ی  $D$  را به آسانی با به دست آوردن مقدار  $\int_c F \cdot dr$  حساب کنیم. تابع  $F$  می‌تواند به عنوان مثال یکی از توابع زیر باشد:

$$F(x, y) = (\cdot, x) \quad F(x, y) = (-y, \cdot), \quad F(x, y) = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)$$



$$\iint_D 1 dA = \iint_D (Q_x - P_y) dA = \oint_c x dy = - \oint_c y dx = \oint_c \underbrace{-\frac{1}{2}y}_{P} dx + \underbrace{\frac{1}{2}x}_{Q} dy$$

مثال ۲۹۹. مساحت بیضی ۱  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  را محاسبه کنید.



پاسخ.

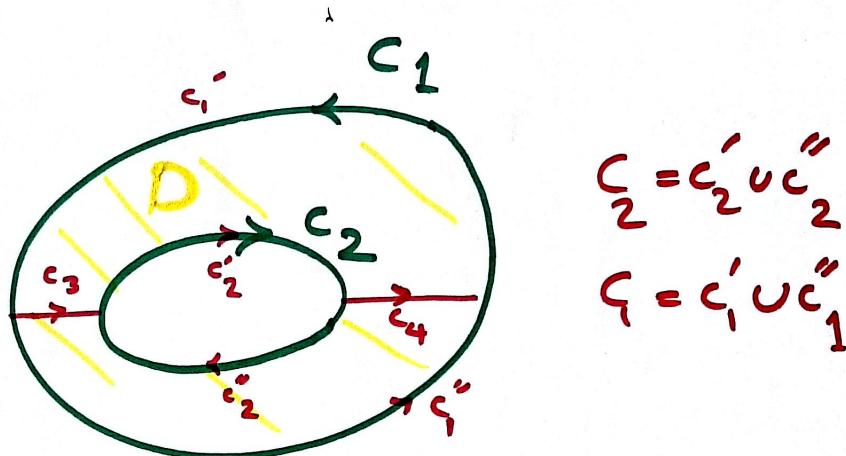
$$\iint_D 1 dA = \frac{1}{2} \oint_c -y dx + x dy$$

$$c : \vec{r}(t) : (a \cos \theta, b \sin \theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\iint_D 1 dA = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (b \sin \theta) a \sin \theta + a \cos \theta b \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab d\theta = \frac{1}{2} ab \times 2\pi = \pi ab$$

□

از قضیهی گرین می‌توان برای محاسبهی انتگرال روی نواحی حفره‌دار نیز به صورت زیر استفاده کرد:



$$\int_{C_1 \cup C_2} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

اثبات.

$$D_1 \bigcup D_2 = D \quad , \quad c'_1 \bigcup c''_1 = c_1 \quad , \quad c'_2 \bigcup c''_2 = c_2$$

$$D : \oint_{c_1 \cup c_1} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$D_1 : \oint_{c'_1 \cup c'_1 \cup c_1 \cup c_1} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} (Q_x - P_y) dA$$

$$D_2 : \oint_{c''_1 \cup c''_1 \cup (-c_1) \cup (-c_1)} Pdx + Qdy = \iint_{D_2} (Q_x - P_y) dA$$

با جمع دو طرف تساوی‌های بالا:

$$\iint_D (Q_x - P_y) dA = \oint_c Pdx + Qdy$$

□

## ۲.۳۸ انتگرال‌های روی روبه

تا کنون با انتگرال‌های روی خم آشنا شده‌ایم و دیدیم که دو نوع انتگرال‌گیری روی خم داریم:

۱) انتگرال توابع عددی روی خم

$$\int_c f ds = \int f(r(t)) r'(t) dt$$

۲) انتگرال توابع برداری روی خم

$$\int_c F \cdot T ds = \int_c F \cdot r'(t) dt = \int P dx + Q dy + R dz$$

همچنین بررسی کردیم که

$$\int_c f ds = \int_{-c} f ds$$

$$\int_c F \cdot dr = - \int_{-c} F \cdot dr$$

در ادامه‌ی درس قرار است با دو نوع انتگرال‌گیری روی رویه‌ها آشنا شویم:

۱) انتگرال‌گیری از توابع عددی روی رویه ها

۲) انتگرال‌گیری از توابع برداری روی رویه ها

پیش از آن لازم است با رویه‌های پارامتری آشنا شویم:

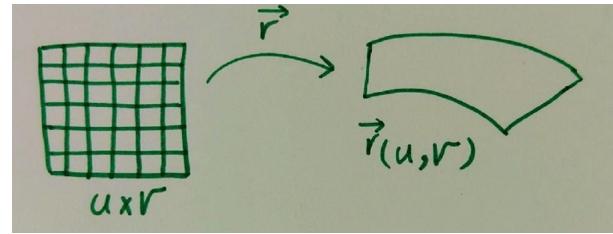
## ۱.۲.۳۸ رویه های پارامتری

یادآوری ۳۰۰. گفتیم که خمها را می‌توان به صورت زیر پارامتر بندی کرد:

$$c : r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad a \leq t \leq b$$

برای پارامتریندی رویه‌ها به دو متغیر نیازمندیم. یک رویه‌ی پارامتری توسط معادله‌ای برداری مانند معادله‌ی زیر داده می‌شود:

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d$$



مثال ۳۰۱. معادله‌ی پارامتری رویه‌ی  $z = f(x, y)$  را بنویسید. (فرض کنید  $a \leq x \leq b$  و  $c \leq y \leq d$ ) رویه‌ی یادشده را می‌توان بدین صورت پارامتریندی کرد:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

مثال ۳۰۲. کره‌ای به شعاع ۱ را پارامتریندی کنید.

پاسخ.

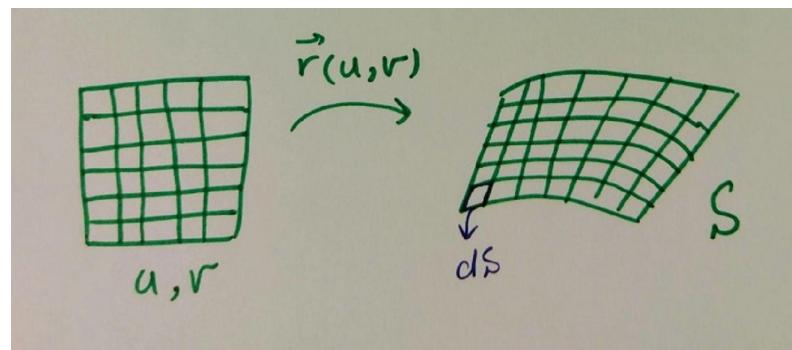
$$\rho = 1$$

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

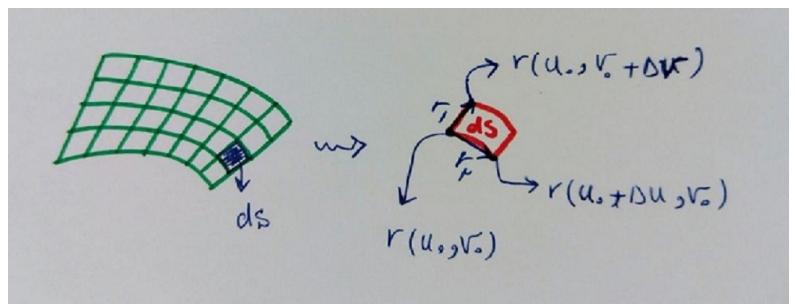
□

### ۲.۲.۳۸ انتگرال توابع عددی روی رویه‌ها



فرض کنید  $f : R^3 \rightarrow R$  یک تابع باشد.

هدف: تعریف  $\iint_S f(x, y, z) dS$  دقت کنید که از حالت بزرگ حرف  $S$  استفاده کرده‌ایم تا با انتگرال روی خمها اشتباہ گرفته نشود.



$$\vec{r}_v : \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v r_v$$

$$\vec{r}_u : \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u r_u$$

$$dS = |r_u \times r_v| dudv$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{u,v}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |r_u \times r_v| dudv$$

نتیجه ۳۰۳. مساحت رویه‌ی  $S$  برابر است با:

$$\iint_S dS = \iint_D |r_u \times r_v| dudv$$

مثال ۳۰۴. حاصل  $\iint_S x^2 dS$  را محاسبه کنید که در آن  $S$  کره‌ی  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  است.

پاسخ. نحست باید کره‌ی مورد نظر را پارامتریندی کنیم.

$$r(\theta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$dS = |r_\varphi \times r_\theta| d\varphi d\theta$$

$$r_\varphi(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi)$$

$$r_\theta(\theta, \varphi) = (-\sin \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

$$r_\varphi \times r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} (+\sin^2 \varphi \cos \theta) - \vec{j} (-\sin^2 \varphi \sin \theta) + \vec{k} \underbrace{(\sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta + \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta)}_{\cos \varphi \sin \varphi}$$

$$|r_\varphi \times r_\theta| = \sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} =$$

$$\sqrt{\sin^2 \varphi \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{1} + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = \sqrt{\sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \iint_S x^y dS = \int_0^\pi \int_0^{y\pi} (\sin \varphi \cos \theta)^y \sin \varphi d\theta d\varphi = \underbrace{\int_0^\pi \sin^y \varphi d\varphi}_A \times \underbrace{\int_0^{y\pi} \cos^y \theta d\theta}_B$$

$$A = \int \sin^y \varphi (\sin \varphi) d\varphi = \int \underbrace{(1 - \cos^y \varphi)}_{1-u^y} \underbrace{(\sin \varphi) d\varphi}_{du} = \dots$$

$$B = \int \frac{1 + \cos^y \theta}{y} d\theta = \dots$$

□

تمرین ۸۱. مساحت کره‌ی واحد را محاسبه کنید.

فرض کنید رویه‌ی مورد نظر دارای معادله‌ی صریح  $z = f(x, y)$  باشد. آنگاه داریم:

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$r_x(x, y) = (1, 0, f_x) \quad r_y(x, y) = (0, 1, f_y)$$

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = i(-f_x) - j(f_y) + k(1) = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

اندازه‌ی بردارگردیان

مثال ۳۰۵. را حساب کنید که در آن  $S$  رویه‌ی

$$z = x + y \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$$

باشد.

پاسخ.

$$dS = \sqrt{1 + (1)^2 + (2y)^2} dx dy$$

$$\iint_S y dS = \int_0^2 \int_0^1 y \sqrt{1 + 4y^2} dx dy = \int_0^2 y \sqrt{\underbrace{1 + 4y^2}_u} dy = \int \frac{\sqrt{u}}{2} du = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

□

از خانم شیرجزی بابت تایپ جزوی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

## ۳۹ نیم جلسه‌ی سی و نهم، چهارشنبه

در جلسه‌ی قبل با انتگرالگیری از توابع عددی روی رویه‌ها آشنا شدیم:

$$\iint_S f dS = \iint_{u,v} f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

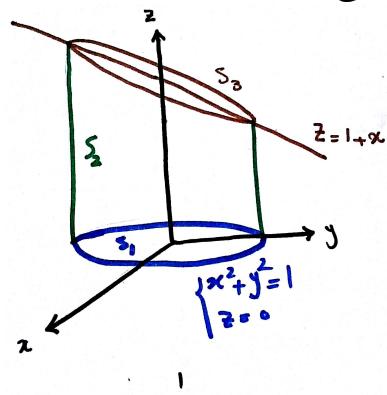
مثال ۳۰۶.  $\iint_S z dS$  را بیابید که در آن  $S$  شامل سه رویه زیر است:

$$1. \text{ از بغل، استوانه‌ی } 1 = x^2 + y^2 = 1$$

$$2. \text{ از زیر، دیسک محدود به دایره‌ی } 1 = x^2 + y^2 = 0 \text{ در صفحه‌ی } z = 0$$

$$3. \text{ از بالا، صفحه‌ی } z = 1 + x$$

پاسخ.



:  $S_2$  پارامتریندی

$$r(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1 + x = 1 + \cos \theta$$

$$r_\theta(\theta, z) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$r_z(\theta, z) = (0, 0, 1)$$

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(\cos \theta) + \vec{j}(\sin \theta) + \vec{k}$$

$$|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z| = 1$$

$$\iint_{S_2} f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} z dz d\theta = \dots$$

حال به سطح  $S_1$  می‌پردازیم. این سطح دارای معادله‌ی  $z = g(x, y)$  دارد. گفتیم که اگر سطحی با معادله‌ی  $z = g(x, y)$  باشد، آنگاه  $dS = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dudv$

$$\iint_{S_1} f dS = \iint_{u,v} z \underbrace{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}_{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}} du dv \iint_{S_1} \cdot \times 1 dA = \cdot$$

دقیق کنید که در سطح  $S_1$  مقدار  $z$  برابر با صفر است.  
حال به سطح  $S_2$  می پردازیم. این سطح هم دارای معادله‌ای به صورت  $z = g(x, y)$  است.

$$S_2 : (x, y, g(x, y))$$

$$z = g(x, y) \rightarrow |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\iint_{S_2} z dS = \iint (1 + x) \sqrt{2} dx dy = \int_0^{\pi} \int_0^1 (1 + \cos \theta) \sqrt{2} r dr d\theta = \dots$$

□

یادآوری ۳۰۷. دوباره نحوه پارامترنندی رویه‌های به فرم  $z = g(x, y)$  را یادآوری می‌کنم:

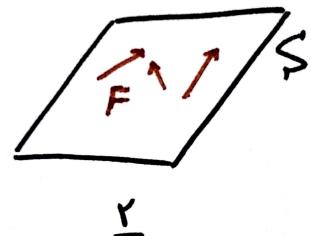
$$S : z = g(x, y)$$

$$S : \text{پارامترنندی رویه} \quad \vec{r}(x, y) = (x, y, g(x, y))$$

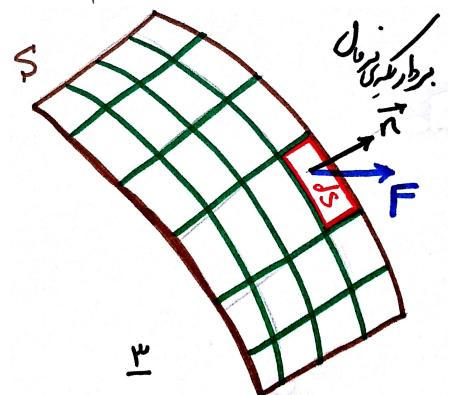
$$|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}$$

$$dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dA$$

### ۱.۳۹ انتگرالگیری از توابع برداری روی رویه‌ها



فرض کنید  $S$  یک رویه جهت‌دار باشد. یعنی فرض کنید که این رویه، دارای پشت و روی مشخص باشد. برای مثال یک توب پلاستیکی که از وسط دونیم شده باشد. فرض کنید  $F(x, y, z) = (P, Q, R)$  یک میدان برداری باشد.



هدف ۳۰۸. محاسبه شار میدان  $F$  گذرنده از رویه  $S$ .

دقت کنید که شار گذرنده از واحد سطح به صورت زیر محاسبه می‌شود (منظور از واحد سطح، سطحی به مساحت ۱ است):

$$F \cdot \vec{n}$$

در بالا منظور از  $\vec{n}$  بردار یکه‌ی عمود است. پس شار گذرنده از سطح کوچک  $dS$  برابر است با

$$(F \cdot \vec{n})dS.$$

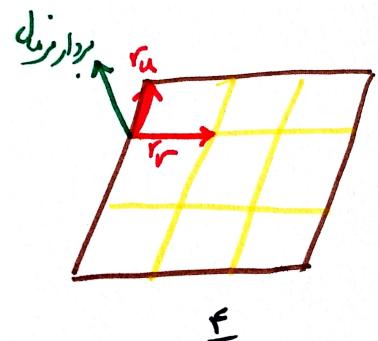
پس برای محاسبه شار گذرنده از سطح  $S$  باید تمام این شارهای کوچک را با هم جمع کنیم. تعریف می‌کنیم:

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_S (F \cdot \vec{n}) \stackrel{\text{مقادیر عددی}}{\uparrow} dS$$

فرض کنید رویه‌ی  $S$  با معادله‌ی زیر داده شده باشد.

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$



۴

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_{(u,v)} \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \iint_{(u,v)} F \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv$$

توجه ۳۰۹. برای انتگرالگیری از توابع برداری روی یک رویه، نخست یک جهت مشخص را برای رویه انتخاب می‌کنیم و سپس نسبت به آن جهت، شار گذرنده از رویه را حساب می‌کنیم. منظور، جهتی است که روی رویه به صورت پیوسته عوض شود و به صورت ناگهانی تغییر نکند. وقتی از فرمول  $r = r_u \times r_v$  استفاده می‌کنیم، این فرمول، به صورت خود به خود یک جهت مشخص را برای رویه به دست می‌دهد، زیرا فرض کردہ‌ایم که توابع  $r_u, r_v$  پیوسته‌اند.

مثال ۳۱۰. شار میدان  $F(x, y, z) = z \vec{i} + y \vec{j} + x \vec{k}$  را از سطح کره‌ی  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  بیابید.

پاسخ.

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

$$r_\theta \times r_\phi = (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi)$$

$$\begin{aligned}
& \iint_S (z, y, x) \cdot (\sin^r \phi \cos \theta, \sin^r \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta = \\
& \int_0^{r\pi} \int_0^\pi (\cos \phi, \sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta) \cdot (\sin^r \phi \cos \theta, \sin^r \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta = \\
& \int_0^{r\pi} \int_0^\pi (\sin^r \phi \cos \theta \cos \phi) + (\sin^r \phi \sin^r \theta) + (\sin^r \phi \cos \theta \cos \phi) d\phi d\theta = \\
& \int_0^{r\pi} \int_0^\pi \sin^r \phi \cos \theta \cos \phi d\phi d\theta = \int_0^{r\pi} \underbrace{\cos \theta d\theta}_{u^r} \times \int_0^\pi \underbrace{\sin^r \phi \cos \phi du}_{du}
\end{aligned}$$

محاسبه انتگرالهای سوال بالا به عهده‌ی شما.

توجه ۳۱۱. برای ادامه‌ی حل سوال بالا، از درس ریاضی ۱ نحوه‌ی محاسبه‌ی دو انتگرال را یادآوری می‌کنم

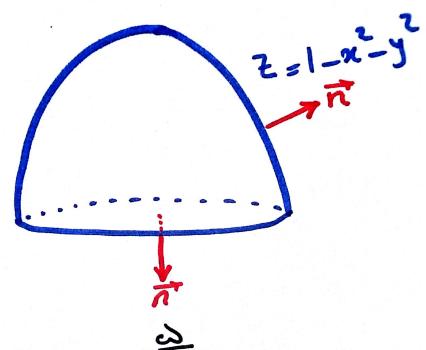
$$\begin{aligned}
\int \sin^r \phi d\phi &= \int \sin^r \phi \sin \phi d\phi = \int (1 - \cos^r \phi) \sin \phi = \int -(1 - u^r) du = \dots \\
\int \sin^r x dx &= \int \frac{(1 - \cos(2x))}{2} dx = \dots \\
\int \cos^r x dx &= \int \frac{(1 + \cos(2x))}{2} dx = \dots
\end{aligned}$$

□

مثال ۳۱۲. انتگرال  $\iint_S F \cdot \vec{dS}$  را بیابید که در آن  $S$  مرز ناحیه‌ی صلب  $E$  باشد که توسط سه‌می‌وار  $z = 1 - x^2 - y^2$  و صفحه‌ی  $z = 0$  احاطه شده است.

$$F(x, y, z) = y \vec{i} + x \vec{j} + z \vec{k}$$

پاسخ.



توجه ۳۱۳. فرض کنید  $S : z = g(x, y)$ . اگر آنگاه  $F = (P, Q, R)$ .

$$\iint_S F \cdot \vec{dS} = \iint_{(x,y)} (-Pg_x - Qg_y + R) dx dy$$

$$r_u \times r_v = (-g_x, -g_y, 1)$$

□

در این جلسه با انتگرال زیر آشنا شدیم:

$$\iint_S F \cdot n dS = \iint_S F \cdot \vec{dS}$$

به هر دو نمادگذاری بالا دقت داشته باشد. در طی این چند جلسه‌ی آخر با انتگرالهای زیر آشنا شده‌ایم. تعریف هر یک را برای خود مرور کنید:

$$\begin{array}{ll} \int_c f dr & \int_c F \cdot dr \\ \iint_S f dS & \iint_S F \cdot n dS \end{array}$$

نامهای این انتگرالها بدین صورت هستند: تابع عددی روی خم، تابع برداری روی خم، تابع عددی روی رویه، تابع برداری روی رویه.

## ۴۰ جلسه‌ی چهلم، شنبه، قضیه‌ی استوکس

یادآوری ۳۱۴. گفتیم که اگر  $r(u, v)$  یک رویه‌ی پارامتریندی شده باشد و  $F$  یک میدان برداری باشد، آنگاه

$$\iint_S F \cdot n dS = \iint_{u,v} (F \cdot r_u \times r_v) du dv$$

همچنین دیدیم که اگر رویه‌ی مورد نظر دارای معادله‌ی صریح  $z = g(x, y)$  باشد و میدان مورد نظر به صورت  $F = (P, Q, R)$  باشد، فرمول بالا به صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید:

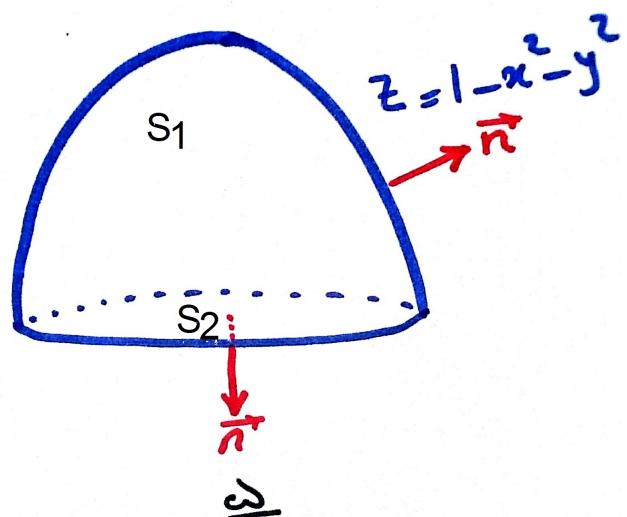
$$\iint_S F \cdot n dS = \iint_{(x,y)} (-Pg_x - Qg_y + R) dx dy$$

همچنین گفتیم که دو نماد  $\iint F \cdot d\vec{S}$ ,  $\iint F \cdot n dS$  هر دو برای یک معنی به کار می‌روند.

مثال ۳۱۵. انتگرال  $\iint_S F \cdot d\vec{S}$  را بیابید که در آن  $S$  مرز ناحیه‌ی چوبی  $E$  باشد که توسط سه‌می‌وار  $z = 1 - x^2 - y^2$  و صفحه‌ی  $z = 0$  احاطه شده است و

$$F(x, y, z) = y \vec{i} + x \vec{j} + z \vec{k}$$

پاسخ.



$$S_1 : z = 1 - x^2 - y^2$$

$$r_x \times r_y = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

$$(x, y) \in x^2 + y^2 = 1$$

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS =$$

$$\iint_{(x,y) \in x^2 + y^2 \leq 1} (x, y, z) \cdot (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) dx dy = \iint_{(x,y) \in x^2 + y^2 \leq 1} (xy, yx, z) dx dy =$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta + (1 - r^2)r dr d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta dr d\theta + \int_0^{\pi} \int_0^1 (1 - r^2)r dr d\theta =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \underbrace{\sin \theta}_{u} \underbrace{\cos \theta d\theta}_{du} \times \int_{\frac{1}{2}}^1 4r^3 dr + 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (r - r^3) dr =$$

$$\left( \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \times r^4 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + 2\pi \left( \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \pi$$

$$S_4 : z = 0$$

$$r_x \times r_y = (0, 0, 1)$$

چون جهت به سمت پائین است پس می‌نویسیم:

$$r_x \times r_y = (0, 0, -1)$$

دقت کنید که جهت پائین را به این علت در نظر گرفته‌ایم که جهتگیری کلی به سمت خارج از جسم احاطه شده باشد.

$$\iint_{(x,y) \in x^2 + y^2 \leq 1} (x, y, z) \cdot (0, 0, -1) dx dy = \iint_{(x,y) \in x^2 + y^2 \leq 1} (-z) dx dy = 0$$

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \pi + 0 = \pi$$

□

تمرین ۸۲. مثال بالا را با استفاده از قضیه دیورژانس حل کنید (این تمرین را وقتی جلسه‌ی آخر درس تمام شد، حل کنید!).

توجه ۳۱۶. فرض کنید  $E$  یک میدان الکتریکی باشد. بنا به قانون گاووس بار احاطه شده در درون یک رویه‌ی بسته‌ی  $S$  برابر است با

$$Q = \epsilon_0 \iint_S E \cdot \vec{n} dS$$

که در آن

$$\epsilon_0 \simeq 8.8542 \times 10^{-12}$$

ضریب گذردهی خلاً است.

## کرْل ۱۰۴

کلمه‌ی کرْل<sup>۱۷</sup> به معنی پیچش است. فرض کنید  $F(x, y, z)$  یک میدان برداری باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\text{curl } F := \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\nabla} \times F$$

فرمول بالا تنها یک نمایش ساده‌تر برای فرمول دقیقی است که در ادامه درباره‌ی آن گفته‌ایم.  
دقت کنید که

$$\text{curl } F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

---

<sup>۱۷</sup>curl

خود یک میدان برداری است. اگر  $F$  میدان سرعت یک مایع باشد، آنگاه جهت  $\text{curl}F$  با استفاده از قانون دست راست تعیین می‌شود و اندازه‌ی  $\text{curl}F$  میزان تمایل این مایع را به چرخش حول یک نقطه نشان می‌دهد. بیائید فرمول دقیق کرل را بنویسیم:

$$F = (P, Q, R) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\text{curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

توجه ۳۱۷. به دلایلی که بعداً خواهیم دید (قضیه‌ی استوکس) اگر  $F$  یک میدان برداری باشد آنگاه  $\text{curl}F(x, y, z)$  تمایل  $F$  به چرخش حول  $(x, y, z)$  را نشان می‌دهد. (نادقيق).

مثال ۳۱۸. فرض کنید  $F = xz \vec{i} + xyz \vec{j} - y^2 \vec{k}$ . آنگاه  $\text{curl}F$  را حساب کنید.

پاسخ.

$$\text{curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2y - xy) + \vec{j}(x) + \vec{k}(yz)$$

□

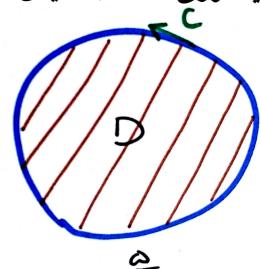
توجه ۳۱۹. (در صورتی که اجزاء میدان برداری  $F$  دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشند) میدان  $F$  پایستار است اگر و تنها اگر  $\text{curl}F = (0, 0, 0)$

□

اثبات. به آسانی می‌توان دید که اگر  $F = (g_x, g_y, g_z)$  آنگاه  $\nabla \times F = (0, 0, 0)$ .

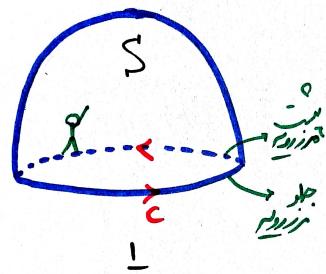
حال همه چیز برای بیان قضیه‌ی استوکس مهیا است. قضیه‌ی استوکس در واقع تعمیمی از قضیه‌ی گرین است. بیائید قضیه‌ی گرین را دوباره با هم مرور کنیم.

یادآوری ۳۲۰ (قضیه‌ی گرین).



$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

$$\oint_c F \cdot d\vec{r} = \oint_c P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$



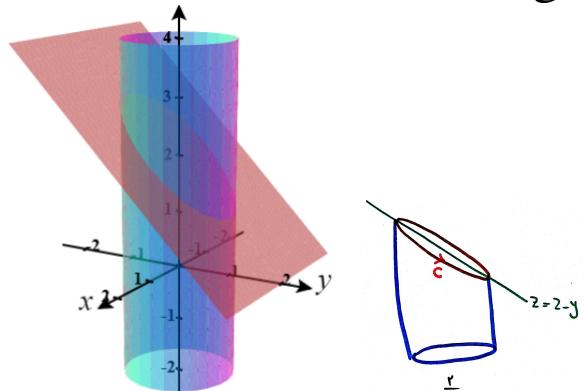
$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

شرایط قضیه: اجزای  $F$  مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند.  $S$  یک رویه‌ی جهتدار به طور قطعه‌ای هموار است (یعنی می‌تواند اجتماعی متناهی از رویه‌های هموار باشد).  $c$  منحنی ساده‌ی بسته در جهت مثبت است و در واقع مرز رویه است. جهت مثبا یعنی وقتی روی منحنی حرکت می‌کنیم و سرمان به سمت بردار نرمال رویه است، آنگاه رویه در سمت چپ ما قرار می‌گیرد.

تمرین ۸۳. نشان دهید که قضیه‌ی گرین از قضیه‌ی استوکس نتیجه می‌شود.

مثال ۳۲۱. حاصل  $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  را بیابید که در آن  $\mathbf{F} = (-y^z, x, z^x)$  و  $c$  منحنی محل اشتراک صفحه‌ی  $z = 2$  و  $y + z = 2$  است که با نگاه از بالا در جهت عکس عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

پاسخ.



پاسخ اول. بدون قضیه‌ی استوکس:

$$c : \vec{r}(t) : (\cos t, \sin t, 2 - \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{F} = (-y^z, x, z^x)$$

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} P dx + Q dy + R dz =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin^x t)(-\sin t) dt + \cos t \cos t dt + (2 - \sin t)^x (-\cos t) dt = \dots$$

پاسخ دوم. با استفاده از قضیه استوکس:

$$\int_c F \cdot dr = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot n dS$$

که  $S$  را سطحی در نظر گرفته‌ایم که دور آن محل تماس استوانه با رویه است.

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^z & x & z^x \end{vmatrix} = \vec{i}( \cdot ) + \vec{j}( \cdot ) + \vec{k}( 1 + 2y )$$

$$S : z = 2 - y$$

$$n = (0, 1, 1)$$

$$\iint_{(x,y) \in x^z + y^z \leq 1} (\cdot, \cdot, 1 + 2y) \cdot (0, 1, 1) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin \theta) r dr d\theta = \dots$$

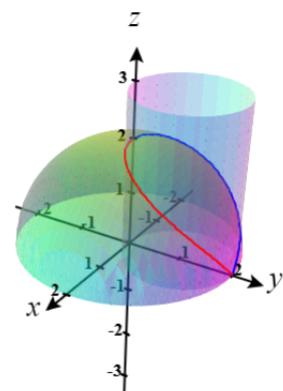
□

سوال ۳۲۲. فرض کنید رویه‌ی  $S$  بخشی از نیم کره‌ی  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2y$  باشد که توسط استوانه‌ی  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  محصور شده است.

آ. حاصل  $\iint_S zdS$  را محاسبه کنید.

ب. اگر  $F = (-y, x, z)$  و  $c$  مرز رویه‌ی بالا باشد (در جهت مثبت نسبت به قائم کره) آنگاه  $\int_c F \cdot dr$  را بیابید.

پاسخ. آ.



$$\iint_S f dS = \iint_S f |r_u \times r_v| du dv$$

در اینجا ضابطه‌ی صریحی به صورت

$$z = g(x, y)$$

داریم. پس انتگرال بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$\iint_{(x,y)} f \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dx dy$$

$$g_x = \frac{-\gamma x}{\sqrt{\gamma - x^2 - y^2}} \quad g_y = \frac{-\gamma y}{\sqrt{\gamma - x^2 - y^2}}$$

$$dS = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dx dy = \sqrt{\frac{\gamma x^2 + \gamma y^2}{\gamma(\gamma - x^2 - y^2)} + 1} dx dy =$$

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + \gamma - x^2 - y^2}{(\gamma - x^2 - y^2)}} dx dy = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$\iint_{(x,y)} z dS = \iint \sqrt{\gamma - x^2 - y^2} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma - x^2 - y^2}} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} \int_{-\sin \theta}^{\sin \theta} \gamma r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} \gamma \sin^2 \theta d\theta =$$

$$\gamma \int_{-\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \dots$$

.

$$\int F \cdot dr = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot \vec{n} dS$$

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = \vec{i}(\cdot) + \vec{j}(\cdot) + \vec{k}(1+1) = 2\vec{k}$$

$$\iint \operatorname{curl} F \cdot n dS = \iint_S (-g_x, -g_y, 1) \cdot (0, 0, 2) dS = \iint_S 2 dS = \dots$$

انتگرال بالا را در قسمت قبلی سوال حساب کرده‌ایم.

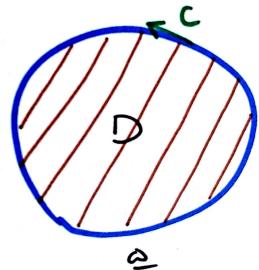
□

## ۴۱ جلسه‌ی چهل و یکم، دوشنبه، قضیه‌ی دیورژانس

در جلسات گذشته با قضایای گرین و استوکس آشنا شدیم. قضیه‌ی گرین به صورت زیر بود:

$$F = (P(x, y), Q(x, y))$$

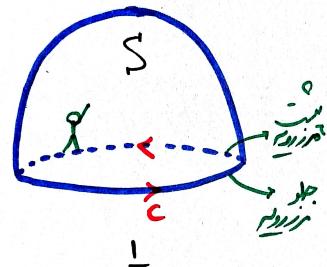
$$\oint_c F \cdot dr = \oint_c P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$



و قضیه‌ی استوکس به صورت زیر است:

$$F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

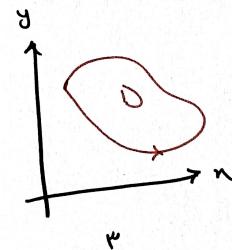
$$\oint_c F \cdot \vec{dr} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot \vec{n} dS$$



توجه ۳۲۳. قضیه‌ی گرین در واقع حالت خاصی از قضیه‌ی استوکس است.

$$\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$$

$$\text{یکه‌ی عمود } \vec{n} = (0, 0, 1)$$



با به قضیه‌ی استوکس:

$$\oint_c F \cdot dr = \int P dx + Q dy = \iint_D \operatorname{curl} F \cdot \vec{n} dA$$

محاسبهی  $\text{curl } F$ :

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & \cdot \end{vmatrix} = \vec{i}(\cdot) + \vec{j}(\cdot) + \vec{k}(Q_x - P_y)$$

جایگذاری در فرمول بالا:

$$\oint F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

در ادامه‌ی درس با قضیه‌ی دیورژانس آشنا خواهیم شد. شهود پشت این قضیه بدین صورت است. فرض کنید که جسمی کُروی در معرض میدان سرعت یک سیال گذاشته شود. شار گذرنده از سطح این جسم، بستگی به میزان مایع احاطه شده در درون آن دارد. بنابراین یک انتگرال برداری روی یک سطح را باید بتوان با یک انتگرال عددی روی حجم درون آن محاسبه کرد.

## ۱.۴۱ قضیه‌ی دیورژانس

تعريف ۳۲۴. فرض کنید  $F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  یک میدان برداری باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\text{div } F := \nabla \cdot F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = P_x + Q_y + R_z$$

مثال ۳۲۵. فرض کنید  $F = xz \vec{i} + xyz \vec{j} - y \vec{k}$  دیورژانس  $F$  را بدست آورید.

پاسخ.

$$\text{div } F = z + xz + \cdot = z + zx$$

□

توجه ۳۲۶. اگر  $F = (P, Q, R)$  یک تابع برداری از  $\mathbf{R}^3$  به  $\mathbf{R}^3$  باشد آنگاه

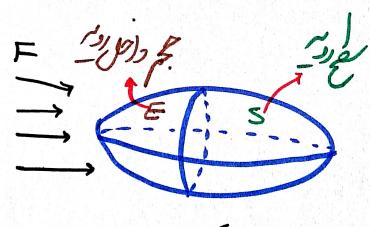
$$\text{curl } F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\text{div } F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

قضیه ۳۲۷ (دیورژانس).

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \text{div } F dv$$

شکل زیر یک رویه‌ی بسته است.



شرایط قضیه:

۱. جهت  $S$  به سمت بیرون از جسم احاطه شده توسط رویه است.
۲. اجزای  $F$  دارای مشتقات جزئی پیوسته‌اند. (در یک ناحیه‌ی باز شامل کل سیستم)
۳. رویه‌ی  $S$  به طور قطعه‌ای هموار (یعنی اجتماعی متناهی از رویه‌های هموار) و بسته است. (به بسته بودن رویه دقت داشته باشید. این رویه در واقع یک جسم صلب را به طور کامل احاطه کرده است).

قضیه‌ی دیورژانس را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \nabla \cdot F dv$$

مثال ۳۲۸. شار میدان  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  را از سطح کُره‌ی واحد  $F(x, y, z) = z \vec{i} + y \vec{j} + x \vec{k}$  بیابید.

پاسخ. راه اول. با محاسبه‌ی مستقیم

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS$$

راه دوم. با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس

$$\operatorname{div} F = 1$$

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \operatorname{div} F dv = \underbrace{\iiint_E 1 dv}_{\text{حجم کُره}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

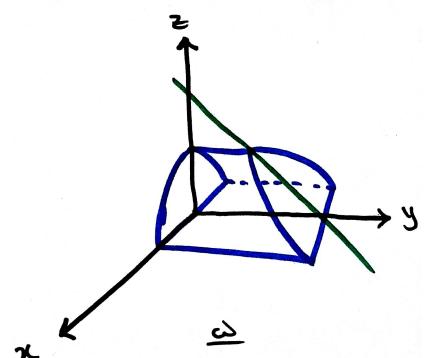
□

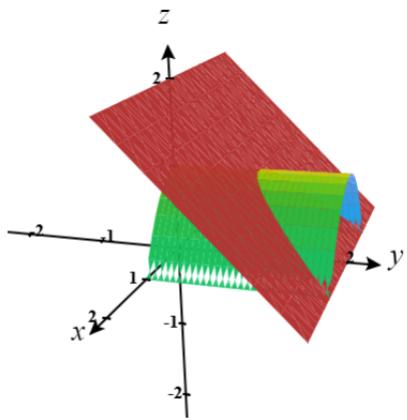
مثال ۳۲۹. فرض کنید  $F(x, y, z) = xy \vec{i} + (y^2 + e^{xz}) \vec{j} + \sin(x, y) \vec{k}$  و فرض کنید  $S$  سطح احاطه کننده‌ی ناحیه‌ی محصور به استوانه‌ی  $z = 1 - x^2 - y^2$  و صفحات  $z = 0$  و  $z = 1$  باشد.  $\iint_S F \cdot \vec{n} dS$  را بیابید.

پاسخ.

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \operatorname{div} F dv$$

$$\operatorname{div} F = y + 2y + 0 = 3y$$





$$E = \{ -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x^2, 0 \leq z \leq 1-x^2 \}$$

$$\iiint_E \operatorname{div} F dv = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x^2} 3y dy dz dx$$

$$\int_0^{1-x^2} 3y dy = \frac{3}{2} y^2 \Big|_0^{1-x^2} = \frac{3}{2} (1-x^2)^2 = \frac{3}{2} (1-2x+x^2)$$

$$\frac{3}{2} \int_0^{1-x^2} (1-2x+x^2) dz = \frac{3}{2} (z - x^2 + \frac{x^3}{3}) \Big|_0^{1-x^2} =$$

$$\frac{3}{2} (1-x^2) - \frac{(1-x^2)^2}{2} + \frac{(1-x^2)^3}{6} = 6(1-x^2) - \frac{3(1-x^2)^2}{2} + \frac{(1-x^2)^3}{2}$$

حاصل نهایی برابر است با

$$\int_{-1}^1 \left( 6(1-x^2) - \frac{3(1-x^2)^2}{2} + \frac{(1-x^2)^3}{2} \right) dx = \dots$$

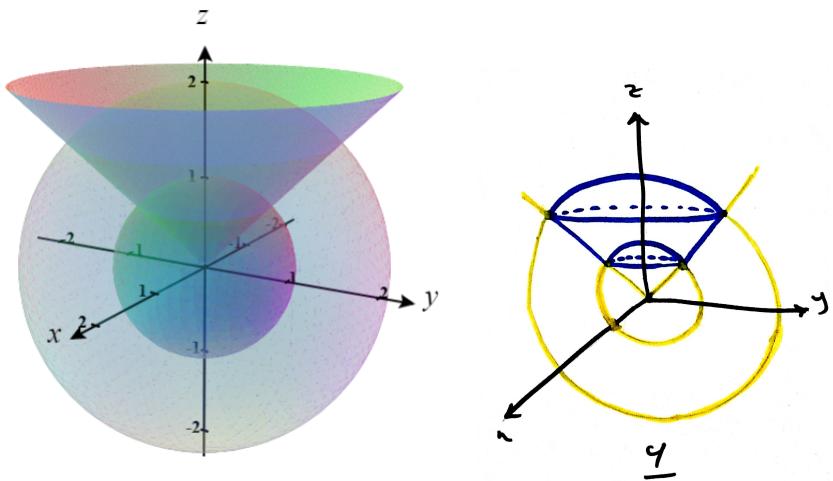
□

مثال ۳۳۰. فرض کنید  $T$  ناحیه‌ی محدود بین کُره‌های  $1 = x^2 + y^2 + z^2 = 4$  و  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  و مخروط احاطه باشد.

۱. حجم ناحیه‌ی  $T$  را بیابید.

۲. فرض کنید  $\int \int_S F \cdot ndS$  آنگاه  $F = (x+z^2 e^y, y - x \sin(xz^2), z + \frac{y}{1+x^2})$  را بیابید که در آن  $S$  سطح احاطه کننده‌ی ناحیه‌ی بالا است.

پاسخ.



. ۱

$$1 \leq \rho \leq 2 \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} T_{\text{حجم}} &= \iiint_E dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \\ &\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi d\phi \int_1^2 \rho^2 d\rho = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \frac{8}{3} \end{aligned}$$

. ۲

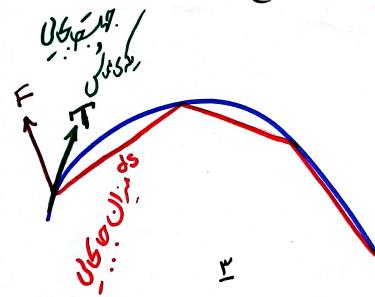
$$\operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \operatorname{div} F dv = 3 \times T_{\text{حجم}} = 12\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

□

## ۲.۴۱ مرور درس

۱. انتگرال تابع  $f(x, y, z)$  روی یک خم  $c$  به معادله  $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$



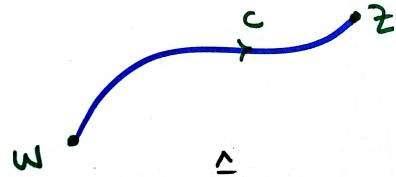
$$\int_c f ds = \int_c f(x(t), y(t), z(t)) |r'(t)| dt$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} dt = |r'(t)| dt$$

۲. طول خم از نقطه‌ی  $t = a$  تا  $t = b$ :

$$\int_c^d ds = \int_a^b |r'(t)| dt$$

۳. انتگرال تابع برداری روی خم  $\vec{r}(t) = (P, Q, R)$



$$\int_c^d \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c^d P dx + Q dy + R dz =$$

$$\int_a^b P(\vec{r}(t)) x'(t) dt + Q(\vec{r}(t)) y'(t) dt + R(\vec{r}(t)) z'(t) dt$$

۴. انتگرال تابع عددی روی رویه

$$S : r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\begin{aligned} \iint_S f dS &= \iint_{u,v} f(r(u, v)) |r_u \times r_v| du dv \\ dS &= |r_u \times r_v| du dv \end{aligned}$$

اگر معادله‌ی صریح رویه را داشته باشیم:

$$S : z = g(x, y)$$

$$dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}$$

$$\iint_S f dS = \iint_{x,y} f \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy$$

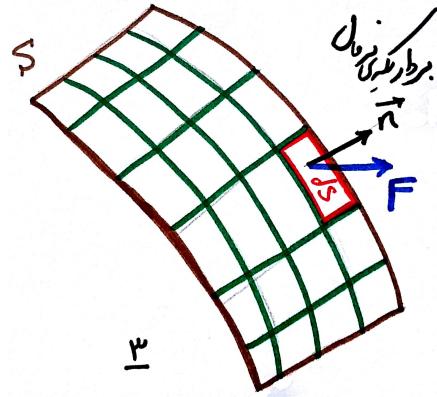
۵. مساحت یک رویه با معادله‌ی پارامتری  $r(u, v)$ :

$$\iint_S dS = \iint_{u,v} |r_u \times r_v| dy dv$$

۶. مساحت یک رویه با معادله‌ی صریح  $z = g(x, y)$ :

$$\iint_S dS = \iint_{x,y} \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy$$

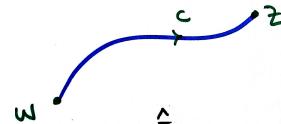
۷. انتگرال توابع برداری روی رویه‌ها



$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \begin{cases} r(u, v) & \text{رویه‌ی پارامتری} \\ z = g(x, y) & \text{رویه‌ی} \end{cases} \iint_{u,v} F \cdot (r_u \times r_v) dudv + \iint_{(x,y)} F \cdot (-g_x, -g_y, 1) dx dy = \iint (-Pg_x - Qg_y + R) dx dy$$

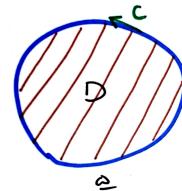
.۸

$$\int_c \nabla f dr = f(Z) - f(W)$$



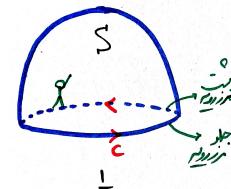
۹. (قضیه‌ی گرین)

$$\underbrace{\oint_c F \cdot dr}_{= \oint_c P dx + Q dy} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$



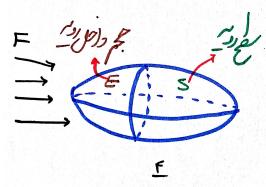
۱۰. (قضیه‌ی استوکس)

$$\oint_c F \cdot dr = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot \vec{n} dS$$



۱۱. (قضیه‌ی دیورژانس)

$$\iint_S F \cdot n dS = \iiint_E \operatorname{div} F dv$$



## ۴۲ تمرین

تمرین ۸۴. فرض کنید  $F(x, y) = (\sin x, \sin y + xy^3 + \frac{1}{3}x^3)$  یک میدان نیرو باشد که ذرهای را با شروع از مبدأ ابتدا در راستای محور  $x$  تا نقطه‌ی  $(0, 0, 5)$  می‌برد و سپس روی دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 25$  و در ربع اول، به نقطه‌ی  $(0, 5)$  می‌برد و سپس در راستای محور  $y$  به مبدأ بازمی‌گرداند. کار انجام شده توسط این میدان نیرو، در طی این مسیر را بیابید.

تمرین ۸۵. فرض کنید  $F(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$  و نیز فرض کنید رویه‌ی  $S$  بخشی از گرهی  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  باشد که در بالای صفحه‌ی  $xy$  توسط استوانه‌ی  $1 = x^2 + y^2$  احاطه شده است. حاصل  $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot dS$  را بیابید.

تمرین ۸۶. فرض کنید  $C$  یک منحنی بسته‌ی هموار باشد که در صفحه‌ی  $1 = x + y + z$  واقع شده است. نشان دهید که حاصل انتگرال خطی

$$\int_C zdx - 2xdy + 3ydz$$

تنها به مساحت ناحیه‌ی احاطه شده توسط  $C$  بستگی دارد و به شکل  $C$  و محل آن در صفحه بستگی ندارد.

تمرین ۸۷. با استفاده از قضیه‌ی استوکس، حاصل

$$\int_C (y + \sin x)dx + (z^2 + \cos(y))dy + x^3dz$$

را بیابید که در آن  $c$  منحنی داده شده توسط معادله‌ی برداری زیر است:

$$\vec{r}(t) = (\sin(t), \cos(t), \sin(2t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(راهنمایی: توجه کنید که  $c$  روی رویه‌ی  $z = 2xy$  واقع شده است).

تمرین ۸۸. فرض کنید  $F(x, y, z) = (xy + 2xz)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + (xy - z^2)\mathbf{k}$ . نیز فرض کنید که  $S$  سطح دور جسمی باشد که توسط استوانه‌ی  $4 = x^2 + y^2$  و صفحه‌های  $z = y - 2$  و  $z = 0$  احاطه شده است. حاصل  $\iint_S F \cdot dS$  را محاسبه کنید.

تمرین ۸۹. فرض کنید  $F(x, y, z) = (2x^3 + y^3)\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\mathbf{j} + 3yz\mathbf{k}$  و فرض کنید که  $S$  سطح سه‌می‌وار  $z = 1 - x^2 - y^2$  در بالای محور  $z$  باشد. (راهنمایی: برای استفاده از قضیه‌ی استوکس باید سطح رویه‌ی  $z = 0$  را نیز به رویه‌ی  $S$  اضافه کنید تا به یک سطح بسته برسید).

تمرین ۹۰. حاصل انتگرال  $\iiint_E y^2 z^2 dv$  را بیابید که در آن  $E$  ناحیه‌ی واقع در بالای مخروط  $\phi = \frac{\pi}{3}$  و زیر کره‌ی  $\rho = 1$  است.

تمرین ۹۱. حاصل  $\iiint_E xe^{x^2 + y^2 + z^2} dv$  را بیابید که در آن  $E$  بخشی از کره‌ی  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  است که در یک هشتم اول مختصات واقع شده است.