



پرسش‌های مبانی ریاضی

دکتر مجتهدی

پاییز ۹۹

سری: پنج

مهلت تحویل: شنبه، ۱۳ دی

پرسش ۱. آ. فرض کنید R یک رابطه بازتابی باشد. نشان دهید $\text{dom}(R) = \text{ran}(R)$.

ب. فرض کنید R یک رابطه متقارن باشد. نشان دهید $\text{dom}(R) = \text{ran}(R)$.

پرسش ۲. شرط لازم و کافی برای آن که $R \circ R^{-1} = R$ چیست؟ ادعای خود را ثابت کنید.

پرسش ۳. نشان دهید ۴ جمله زیر معادل می‌باشند.

$$i. \quad x \in a \in A \implies x \in A;$$

$$ii. \quad \bigcup A \subseteq A;$$

$$iii. \quad a \in A \implies a \subseteq A;$$

$$iv. \quad A \subseteq P(A).$$

پرسش ۴. آ. فرض کنید $f : A \rightarrow A$ تابعی یک‌به‌یک باشد و $c \in A \setminus \text{ran}(f)$. تابع $h : \mathbb{N} \rightarrow A$ را به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم.

$$h(0) = c;$$

$$h(n^+) = f(h(n)).$$

آیا h یک‌به‌یک است؟ ثابت یا رد کنید.

ب. فرض کنید $f : A \rightarrow A$ تابعی پوشا باشد و $c \in A$. تابع $h : \mathbb{N} \rightarrow A$ را به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم.

$$h(0) = c;$$

$$h(n^+) = f(h(n)).$$

آیا h پوشا است؟ ثابت یا رد کنید.

پرسش ۵. آ. فرض کنید $n + k = m + k$. نشان دهید $n = m$.

ب. فرض کنید $n \cdot k = m \cdot k$ و $k \neq 0$. نشان دهید $n = m$.

پرسش ۶. نشان دهید هیچ عدد طبیعی مانند m وجود ندارد که $n < m < n^+$.

پرسش ۷. آ. عملگر $^- : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را به صورت بازگشتی چنان تعریف کنید که برای هر $n \neq 0$

$$(n^+)^- = n;$$

$$0^- = 0.$$

ب. عملگر $\dot{+} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را به کمک توابع بازگشتی چنان تعریف کنید که برای هر $n \leq m$

$$m \dot{+} n = k \iff m = n + k;$$

و برای هر $n > m$ ،

$$m \dot{+} n = 0.$$

پرسش ۸. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ دلخواه باشد.

آ. شرط لازم و کافی برای گزاره زیر را بیان کرده و ادعای خود را ثابت کنید.

$$(\bigcup n)^+ = n.$$

ب. شرط لازم و کافی برای گزاره زیر را بیان کرده و ادعای خود را ثابت کنید.

$$\bigcup (n^+) = n.$$

پ. اگر به جای شرط $n \in \mathbb{N}$ شرط « n متعدی است» را در نظر بگیریم آیا همچنان احکامی که ثابت کردید درست است؟

موفق باشید