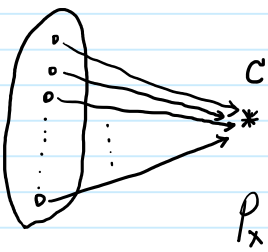
Constant - Bernoli

امید ریاضی و واریانس توزیع احتمال های "ثابت"، "برنولی"، "دوجمله‌ای"، "پواسون" و "هندسی" را حساب کنید.



$X = C$

$P_X(C) = 1$

- **تابع توزیع احتمال ثابت:** تابع توزیع احتمال ثابت یعنی متغیر تصادفی X فقط یک مقدار ثابت دارد. به بیان دیگر تمام اعضای فضای نمونه‌ها به یک مقدار در فضای تارگت T تصویر می‌شوند.

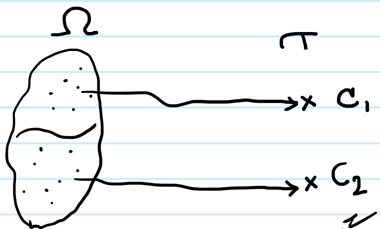
$$E(X) = \sum_{i=1}^{1} x_i P_X(x_i) = C \times 1 = C \Rightarrow \boxed{E(X) = C}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = C^2 - C^2 = 0$$

$$\text{or: } E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{1} P_X(x_i)(x_i - E(X))^2 = C(C-C)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{Var(X) = 0}$$

از آنجایی که متغیر تصادفی فقط یک مقدار ثابت دارد پس منطقی است که امید ریاضی برابر با همان مقدار باشد و واریانس نیز صفر است.

تابع توزیع احتمال برنولی: متغیر تصادفی برنولی فقط دو مقدار دارد و کل فضای نمونه را به این دو مقدار در فضای تارگت T تصویر می‌کند



$$P_X(x) = \begin{cases} p & x = c_1 \\ 1-p & x = c_2 \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i P_X(x_i) = c_1 p + c_2(1-p) \Rightarrow \boxed{E(X) = c_1 p + c_2(1-p)}$$

چون در این متغیر تصادفی فقط دو خروجی داریم معمولاً آن‌ها را 0 و 1 در نظر می‌گیرند. یعنی $c_1 = 1$ & $c_2 = 0$

این متغیر تصادفی معمولاً نشان دهنده‌ی آزمایش‌های با دو خروجی ممکن می‌باشند مثل بازی‌های برد و باخت یا انداختن سکه و یا هر آزمایشی که منجر به نتیجه‌ی شکست و یا پیروزی شود.

$$\boxed{c_1 \& c_2 = 1, 0 \Rightarrow E(x) = p}$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{2} (x_i - E(X))^2 p(x_i) = (c_1 - \mu)^2 p + (c_2 - \mu)^2 (1-p) \qquad E(X) = \mu$$

$$= p\left((c_1-\mu)^2 - (c_2-\mu)^2\right) + (c_2-\mu)^2 = p\left(c_1^2 + \cancel{\mu^2} - 2c_1\mu - c_2^2 - \cancel{\mu^2} + 2c_2\mu\right) + (c_2-\mu)^2$$

$$= p\left(c_1^2 - c_2^2 + 2\mu(c_2 - c_1)\right) + (c_2-\mu)^2 = p\left[(c_1-c_2)(c_1+c_2) - 2\mu(c_1-c_2)\right] + (c_2-\mu)^2 = p(c_1-c_2)(c_1+c_2-2\mu) + (c_2-\mu)^2$$

$$= p(c_1-c_2)\left(c_1+c_2-2(c_1p + c_2(1-p))\right) + (c_2-\mu)^2 = p(c_1-c_2)(c_1+c_2-2c_1p-2c_2+2c_2p) + (c_2 - pc_1 - (1-p)c_2)^2$$

$$= p(c_1-c_2)(c_1-c_2-2p(c_1-c_2)) + (pc_2 - pc_1)^2 = p(c_1-c_2)^2(1-2p) + p^2(c_1-c_2)^2 = (c_1-c_2)^2(p - 2p^2 + p^2) = (p - p^2)(c_1-c_2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(X) = p(1-p)(c_1-c_2)^2} \qquad \text{if } c_1 = 1, c_2 = 0 \quad 1-p = q \Rightarrow \boxed{Var(X) = pq}$$