مسأله ۱. توابع مشخصه

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

$$K_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in S-A \end{cases}$$

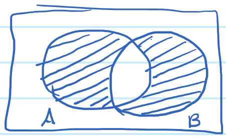
الف) $K_A \cdot K_B$ تابع مشخصه $A \cap B$ است.

$$(K_A K_B)(x) = K_A(x) \cdot K_B(x) = \begin{cases} 1 & K_A(x)=1 \text{ and } K_B(x)=1 \equiv x \in A \text{ and } x \in B \equiv x \in A \cap B \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$K_A K_B$ is characteristic Function of a set $M \Rightarrow (K_A K_B)(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases} \Rightarrow M = A \cap B$ $\boxed{\checkmark}$

ب) $K_A + K_B$ در پیمانه ۲ تابع مشخصه $A \cup B$ است.

$$\underbrace{(K_A +_2 K_B)}_{\text{characteristic Function of } M}(x) = K_A(x) +_2 K_B(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \text{ and } x \in B \\ 1 & x \in A \text{ and } x \notin B \\ 1 & x \notin A \text{ and } x \in B \\ 0 & x \notin A \text{ and } x \notin B \end{cases}$$



$K_A +_2 K_B$ $\boxed{\times}$

$$\Rightarrow x \in M \longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \Rightarrow M = (A-B) \cup (B-A)$$

ج) $K_A - K_{A\cap B}$ تابع مشخصه $A-B$ است. درست.

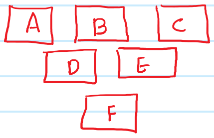
$$K_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \qquad K_{A\cap B} = \begin{cases} 1 & x \in A \;\&\; x \in B \\ 0 & x \notin A \vee x \notin B \end{cases} \rightarrow K_{A\cap B} = \begin{cases} 1 & x \in A \wedge x \in B \\ 0 & x \in A \wedge x \notin B \\ 0 & x \notin A \wedge x \in B \\ 0 & x \notin A \wedge x \notin B \end{cases}$$ $\boxed{\checkmark}$

$$\Rightarrow K_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \wedge x \in B \\ 1 & x \in A \wedge x \notin B \\ 0 & x \notin A \wedge x \in B \\ 0 & x \notin A \wedge x \notin B \end{cases}$$

$$\Rightarrow K_A(x) - K_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \wedge x \in B \\ 1 & x \in A \wedge x \notin B \\ 0 & x \notin A \wedge x \in B \\ 0 & x \notin A \wedge x \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \in A \wedge x \notin B \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{K_A - K_{A\cap B} = K_{A-B}}$$

مسائل ۲. مجموعه‌های پله‌ای؛ درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.



$D=A-B$
$E=B-C$
$F=D-E$

$\Rightarrow \boxed{F=D}$

الف) $B\subseteq F$

$F=D-E=(A-B)-(B-C)=(A\cap\bar{B})-(B\cap\bar{C})$
$=(A\cap\bar{B})\cap\overline{(B\cap\bar{C})}=(A\cap\bar{B})\cap(\bar{B}\cup\bar{\bar{C}})=A\cap\bar{B}\cap(\bar{B}\cup\bar{\bar{C}})=A\cap\bar{B}=A-B$

$\boxed{\times}$ الف غلط است. $x\in B\rightarrow x\notin F \Rightarrow B\nsubseteq F$

ب) $F\subseteq A\cap C$ درست نیست. از آنجایی که $F=A-B$ فرض کنید $A-B\neq\phi$ و C جوری باشد که با A اشتراک نداشته باشد.

$\boxed{\times}$ $A\cap C=\phi \Leftarrow$ F که یک مجموعه‌ی ناتهی است زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی تهی است پس فرض $F\subseteq A\cap C$ غلط است.

ج) $D\cap C\subseteq F$ درست است. $F=D \Rightarrow D\cap C=F\cap C\subseteq F$

$\boxed{\checkmark}$

د) $(P(A)\cup P(B))\subset P(A\cup B)$ برای هر دو مجموعه A و B درست است.

هـ) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$ درست است.

$A\cap(B\Delta C)=A\cap[(B\cup C)-(B\cap C)]=A\cap[(B\cup C)\cap(\bar{B}\cup\bar{C})]$
$=((A\cap B)\cup(A\cap C))\cap(\bar{B}\cup\bar{C})=((A\cap B)\cap(\bar{B}\cup\bar{C}))\cup((A\cap C)\cap(\bar{B}\cup\bar{C}))=\underbrace{\boxed{(A\cap B\cap\bar{C})\cup(A\cap C\cap\bar{B})}}_{\text{طرف اول}}$

$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=[(A\cap B)\cup(A\cap C)]-[(A\cap B)\cap(A\cap C)]=[(A\cap B)\cup(A\cap C)]\cap\overline{(A\cap B\cap C)}$
$=((\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})\cap(A\cap C))\cup[(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})\cap(A\cap B)]=\underbrace{\boxed{(A\cap C\cap\bar{B})\cup(A\cap B\cap\bar{C})}}_{\text{طرف دوم}}$

$\Rightarrow$ طرف اول = طرف دوم

و) $|A\cup B|+|A\cap B|=|A|+|B|$

درست است. $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|\Rightarrow|A\cup B|+|A\cap B|=|A|+|B|$ ✓

مسأله ۳: اگر عبارت زیر را داشته باشیم ثابت کنید $A \subset B$

$$A' \cup (B-A) = (A' \cup B') \cup \big((A \cap B') \cap (C \cap D)\big)$$

طرف دوم $\rightarrow \big((A' \cup B') \cup (A \cap B')\big) \cap \big((A' \cup B') \cup (C \cap D)\big) = \big[(A' \cup B') \cap (A' \cup B')\big] \cup \big[(A' \cup B') \cap C \cap D\big]$

$$= (A' \cup B') \cup \big[(A' \cup B') \cap C \cap D\big] = A' \cup B'$$

طرف اول $\Rightarrow A' \cup (B-A) = A' \cup (B \cap A') = (A' \cup B) \cap (A' \cap A') = A' \cap (A' \cup B) = A'$

$$\Rightarrow A' = A' \cup B' \Rightarrow B' \subset A' \Rightarrow A \subset B$$

مسأله ۴.
نشان دهید به ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد طبیعی n داریم:

$$[x] + [x + \tfrac{1}{n}] + [x + \tfrac{2}{n}] + \cdots + [x + \tfrac{n-1}{n}] = [nx]$$

We know that $x - [x] = \alpha$ and $0 \leqslant \alpha < 1 \Rightarrow 0 \leqslant n\alpha < n$. As α is specific for any x then we can assume that there is an integer $k < n$ such that $k \leqslant n\alpha < k+1 \Rightarrow \frac{k}{n} \leqslant \alpha < \frac{k+1}{n}$

$$[x] + [x + \tfrac{1}{n}] + \cdots + [x + \tfrac{n-1}{n}] = n[x] + [\alpha] + [\alpha + \tfrac{1}{n}] + [\alpha + \tfrac{2}{n}] + \cdots + [\alpha + \tfrac{n-1}{n}]$$

Second side: $[nx] = n[x] + [n\alpha]$ $\Rightarrow$ So we should prove that $[n\alpha] = [\alpha] + [\alpha + \frac{1}{n}] + \cdots + [\alpha + \frac{n-1}{n}]$

We already know that $[n\alpha] = k$

For second side:

$$\frac{k}{n} \leqslant \alpha < \frac{k+1}{n}$$

$$\frac{k+1}{n} \leqslant \alpha + \frac{1}{n} < \frac{k+2}{n}$$

$$\frac{k+2}{n} \leqslant \alpha + \frac{2}{n} < \frac{k+3}{n}$$

$$\vdots$$

$$\frac{k+(n-1)}{n} \leqslant \alpha + \frac{n-1}{n} < \frac{k+(n-1)}{n}$$

$k < n$ so we should look that how many of the numbers $\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n}, \ldots, \frac{k+(n-1)}{n}$

$\Rightarrow$ will exceed one.

when Nominator exceeds denominator.

$k + p \geqslant n$ when $\boxed{p \geqslant n-k}$

and $\boxed{p \leqslant n-1}$

$n-k \leqslant p \leqslant n-1 \Rightarrow$ There are k such numbers.

From $n-k$ to $n-1$ How many numbers are there?

$\rightarrow k \Rightarrow [\alpha] + [\alpha + \frac{1}{n}] + [\alpha + \frac{2}{n}] + \cdots + [\alpha + \frac{n-1}{n}] = k$

$\Rightarrow [x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \cdots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx]$ for any real x and integer n

مسئله ۵. نشان دهید به ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\left[\sqrt{[x]}\right] = \left[\sqrt{x}\right]$$

Any real number is a $\underbrace{\text{complete squared}}_{*}$ or $\underbrace{\text{between two successive squared numbers.}}_{**}$

in Case $* \Rightarrow$ $x = k^2 \Rightarrow \left[\sqrt{x}\right] = [k] = k$ & $\left[\sqrt{[x]}\right] = \left[\sqrt{k^2}\right] = [k] = k$ ✓

in Case $** \Rightarrow$ there is a m such that $m^2 \leqslant x < (m+1)^2$

$$\Rightarrow m \leqslant \sqrt{x} < m+1 \Rightarrow \left[\sqrt{x}\right] = m$$

$$m^2 \leqslant x < (m+1)^2 \Rightarrow m^2 \leqslant [x] < (m+1)^2 \Rightarrow m \leqslant \sqrt{[x]} < (m+1) \Rightarrow \left[\sqrt{[x]}\right] = m$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{[x]}\right] = \left[\sqrt{x}\right]$$ ✓

مسالهی ۶:

فرض کنید $f:A\to B$ یک تابع باشد.

تعاریف
$$\begin{cases}\forall X\subseteq A: f(X)=\{b\in B\mid \exists a\in X\,(f(a)=b)\}\\ \forall Y\subseteq B: f^{-1}(Y)=\{a\in A\mid f(a)\in Y\}\end{cases}$$

کدام یک از روابط زیر درست است؟ (اثبات کنید یا مثال نقض بیاورید.)

۱) $\forall X,Y,Z\subseteq A: f(X\cap(Y\Delta Z))=f(X)\cap(f(Y)\Delta f(Z))$

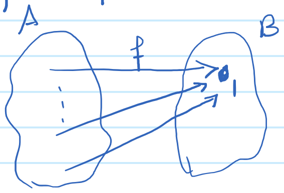
می‌دانیم که تابع $\forall x\in X$ را فقط به یک $y\in Y$ تصویر می‌کند و اگر یک $x\in X$ توسط یک تبدیل به بیش از یک $y\in Y$ تصویر شود آنگاه این تبدیل تابع نیست. با استفاده از تعریف داریم:

$$\forall X,Y\subseteq A: f(X\cap Y)=\{b\in B\mid \exists a\in(X\cap Y)\,(f(a)=b)\}$$

$$\forall X,Y\subseteq A: f(X)\cap f(Y)=\{b\in B\mid \exists a\in X\,(f(a)=b)\}\cap\{b'\in B\mid \exists a'\in Y\,(f(a')=b')\}$$

این دو تابع بالا الزامی ندارد با هم مساوی باشند. مثال نقض:

فرض کنید:
$$\begin{cases}X=\{1,2,3,4\}\\ Y=\{4,5,6,7\}\\ Z=\{6,7,8\}\end{cases}$$



$\forall a\in X,Y,Z: f(a)=1$

$f(X)=\{1\}$

$f(Y)=\{1\}$

$f(Z)=\{1\}$

$$\Rightarrow f(X)\cap(f(Y)\Delta f(Z))=f(X)\cap\phi=\phi$$

$$f(X\cap(Y\Delta Z))=f(\{4\})=\{1\}$$

$$\Rightarrow f(X\cap(Y\Delta Z))\neq f(X)\cap(f(Y)\Delta f(Z))$$

۲) $\forall X,Y,Z\subseteq B: f^{-1}(X\cap(Y\Delta Z))=f^{-1}(X)\cap(f^{-1}(Y)\Delta f^{-1}(Z))$

این عبارت درست است.

طبق تعریف:

I $\forall X,Y\subseteq B: f^{-1}(X\cap Y)=\{a\in A\mid f(a)\in(X\cap Y)\}=\{a\in A\mid f(a)\in X\wedge f(a)\in Y\}$

$$=\{a\in A\mid f(a)\in X\}\cap\{a\in A\mid f(a)\in Y\}=f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)$$

II طبق تعریف $\forall X,Y\subseteq B: f^{-1}(X\Delta Y)=\{a\in A\mid f(a)\in(X\Delta Y)\}$

$$=\{a\in A\mid (f(a)\in X\wedge f(a)\notin Y)\vee(f(a)\in Y\wedge f(a)\notin X)\}$$

$$=\{a\in A\mid f(a)\in X\wedge f(a)\notin Y\}\cup\{a\in A\mid f(a)\in Y\wedge f(a)\notin X\}$$

$$=(f(X)-f(Y))\cup(f(Y)-f(X))=f(X)\Delta f(Y)$$

I & II $\Rightarrow f^{-1}(X\cap(Y\Delta Z))=f^{-1}(X)\cap(f^{-1}(Y)\Delta f^{-1}(Z))$