گله حسن قلی:

من گرگ هستم ∨ من گوسفند هستم : A to B — گرگ ها دروغگو هستند ← T

A می گوید گوسفند است. : B to C — گوسفندها راستگو هستند ← T

C: A گوسفند نیست و گرگ است

A:
- یا گوسفند است ←
  - به B گفته من گوسفندم ← حالت اول
  - به B گفته من گرگ هستم ← حالت دوم
- یا گرگ است ←
  - به B گفته من گوسفند هستم ← حالت سوم
  - به B گفته من گرگ هستم ← حالت چهارم.

✓ حالت اول: B به C راست گفته است پس B گوسفند است و C دروغ گفته و C گرگ است ← T

✗ حالت دوم: A گوسفند است و همیشه راست می گوید پس به B نمی گوید من گرگ هستم و این حالت رخ نمی دهد ← F

✓ حالت سوم: چون A گرگ است پس به C می گوید من گوسفند هستم و B هم به C راست گفته پس B گوسفند است. و C هم راست گفته است پس C هم گوسفند است. ← T

✗ حالت چهارم هم رخ نمی دهد. چون گرگ نمی گوید من گرگ هستم. ← F

پس یکی از این دو حالت است:
1. A و B گوسفند و C گرگ
2. A گرگ و B و C گوسفند

← پس حتما یک گرگ و دو گوسفند هستند.

گرگ های گوسفند نما:

1. اگر A گوسفند باشد آنگاه B و C نیز گوسفندند.
2. اگر B گوسفند باشد حداقل یکی از A و C نیز گوسفندند.
3. اگر C گوسفند باشد آنگاه A گوسفند و B گرگ است.

فرض می کنیم این سه گزاره درست هستند و سعی می کنیم تشخیص بدهیم چه ترکیبی از A و B و C به درستی این گزاره ها منتج می شود.

$p \to$ A گوسفند، $q \to$ B گوسفند، $r \to$ C گوسفند $\Rightarrow$ $\neg p \to$ A گرگ، $\neg q \to$ B گرگ، $\neg r \to$ C گرگ

(1) $p \to q \wedge r$ (2) $q \to p \vee r$ (3) $r \to p \wedge \neg q$

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee r$	$p\wedge\neg r$	$p\to q\wedge r$	$q\to p\vee r$	$r\to p\wedge\neg q$
T	T	T	T	T	F	T	T	F
T	T	F	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	T	T	T

فقط در حالتی که A و B و C هر سه گرگ باشند هر سه گزاره درست است پس A و B و C هر سه گرگ هستند.

باران و مرغ تخم طلا: مرغ تخم طلا همیشه پیش از باران تخم می‌گذارد ← (1) پیش از همه‌ی باران‌ها تخم گذاشته است؟ یا

← (2) همه‌ی تخم‌ها را پیش از باران گذاشته است.

به نظر می‌رسد شماره یک منظور باشد. که در این صورت می‌تواند باران نیاید و مرغ دوباره تخم بگذارد و پس از آن باران بیاید. یعنی تا باران نیاید دیگر تخم نمی‌گذارد.

بالاخره، قبل از باران تخم گذاشته است ← پس این گزاره درست نیست.

جک و لوبیای سحرآمیز:

p: مرغ تخم طلا تخم می‌گذارد.

q: فروشگاه باز است.

r: امروز باران می‌بارد

s: جک خوشحال است.

الف) اگر باران ببارد مرغ تخم طلا تخم گذاشته است. تخم گذاشتن شرط لازم برای باران است. $r \to p \equiv \neg r \vee p$

ب) برای آنکه فروشگاه باز باشد نباید باران بیاید. پس نباریدن باران برای باز بودن فروشگاه لازم است. $q \to \neg r \equiv \neg q \vee \neg r$

ج) جک از اینکه امروز باران بیاید یا مرغ تخم بگذارد خوشحال خواهد شد.

پس باران باریدن یا تخم گذاشتن مرغ برای شادی جک کافی است. $(r \vee p) \to s \equiv \neg(r \vee p) \vee s \equiv (\bar{r} \wedge \bar{p}) \vee s$

تابع پی: $P(x,y): (y-x)^2 = y^2 - x^2 - 2xy$

الف) $\forall x \exists y\, P(x,y)$ → False.

$p(x,y): (y-x)^2 = y^2 - x^2 - 2xy \Rightarrow \cancel{y^2} + x^2 - \cancel{2xy} = \cancel{y^2} - x^2 - \cancel{2xy} \Rightarrow x^2 = -x^2 \Rightarrow x=0$

for any y & $x=0$ $p(x,y)$ is True

But No difference the value of y; This P is True only for $x=0$ and for other values of x it is False.

Counterexample:

$x=1 \Rightarrow P(1,y): (y-1)^2 = y^2 - 1 - 2y \Rightarrow y^2 + 1 - 2y = y^2 - 1 - 2y \to -1 = 1 \Rightarrow$ there is no such y for $x=1$

$\underbrace{\exists y \forall x\, P(x,y)}_{S}$

$\begin{matrix} x=1 \\ \text{any } y \end{matrix} \to \neg P \Rightarrow \exists x(\neg P) \Rightarrow \forall y \exists x(\neg P) \Rightarrow \bar{S}$ is True $\Rightarrow S$ is False

$\bar{S}$ is tautology $\to S$ is always False.

$\forall y \exists x\, P(x,y)$ $x=0 \Rightarrow P(x,y): y^2 = y^2$ always True $\Rightarrow$ we found a x such that always P ↳ $x=0$

$\to \forall y \exists x\, P(x,y)$ is True.

گزاره های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) $\underbrace{(p\vee q)\wedge(\neg p\wedge\neg r)}_{P} \Rightarrow \underbrace{\neg r\wedge q}_{Q}$ $\quad P\equiv((p\vee q)\wedge\neg p)\wedge\neg r\equiv F\wedge\neg r\equiv F$

$\Rightarrow P\to Q\equiv F\to\neg r\wedge q \Rightarrow$ it is always True.

ب) $\neg q\wedge(p\to q)\to\neg p\equiv F\to\neg p \Rightarrow$ is always True.

$p\to q\equiv\neg p\vee q \Rightarrow \neg q\wedge(p\to q)\equiv\neg q\wedge(\neg p\vee q)\equiv F \Rightarrow F\to\neg p$ is always True

ج) $\underbrace{(p\wedge(r\to\neg q)\wedge(p\to q)\wedge(s\vee r))}\to s\vee r\equiv F\to s\vee r \Rightarrow$ is always True

$p\wedge(\neg r\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(s\vee r)\equiv\underbrace{p\wedge(\neg p\vee q)}_{F}\wedge(\neg r\vee\neg q)\wedge(s\vee r)\equiv F$

د) $\underbrace{\forall x(f(x)\to g(x))}_{P}\to\underbrace{\exists x\, g(x)}_{Q} \Rightarrow$ غلط است $\Rightarrow$

مثال نقض: حالتی که P درست و Q غلط باشد.
اگر $f(x)\equiv F$ و $g(x)\equiv F$ باشد همیشه آنگاه $P\equiv T$ است.
در حالی که چون $g(x)\equiv F$ است سمت دوم همیشه F است. $(T\to F)$

ه) $\underbrace{[\exists x\, p(x)\to\exists x\, q(x)]}_{P}\to\underbrace{\exists x\,(p(x)\to q(x))}_{Q}\to$ درست است.

$*\ \exists x\, p(x)\quad x=x_0\quad p(x_0)$ is True $\quad q? \Rightarrow$

- $q(x_0)\equiv T \Rightarrow P\equiv T\ \&\ Q\equiv T \Rightarrow P\to Q\equiv T$
- $q(x_0)\equiv F \to \exists x_1\neq x_0\ q(x_1)$, $p(x_1)\equiv F$ $\Rightarrow P$ is T & Q is T
- $\to \nexists x_1\neq x_0\ q(x_1)$, $p(x_1)\equiv F$ $\Rightarrow P$ is F $\Rightarrow P\to Q$ is T

$**\ \forall x\,\neg p(x) \Rightarrow P$ is T & Q is T $\Rightarrow P\to Q$

و) $\underbrace{\forall x\,(p(x)\to q(x))}_{A}\to\underbrace{(\forall x\, p(x)\to\forall x\, q(x))}_{B} \Rightarrow$ در صورتی غلط است که A درست و B غلط باشد.

$B\equiv\neg\forall x\, p(x)\vee\forall x\, q(x)\equiv\exists x\,\neg p(x)\vee\forall x\, q(x)\qquad \neg B\equiv\forall x\, p(x)\wedge\exists x\,\neg q(x)$

سمت دوم در صورتی غلط است که p همیشه برقرار باشد و q حداقل به ازای بعضی x ها برقرار نباشد.

آیا در این صورت سمت چپ می‌تواند درست باشد.

$A\equiv\forall x\,(\neg p(x)\vee q(x))\quad \neg A=\exists x\,(p(x)\wedge\neg q(x)) \Rightarrow \neg A\equiv T\to A$ is always False

$\boxed{A\to B \text{ درست است.}}$

پس هر وقت B غلط است A هم غلط است پس $\neg B\to\neg A$

عملگر کامل:

$a\uparrow b = \neg a\wedge b \Rightarrow$ It is complement of a with respect to b, it is T when a is F & b is T

$(\neg p\to q)\vee(p\wedge q\wedge r)$

we can generate Not operator if we have something which is always True, as $a\uparrow T = \neg a\wedge T = \neg a$

In the world restricted to $\uparrow$ operation if we have something that we know it is always True then we can generate $\neg a$. In the common logic we can generate T by $a\vee\neg a$ but now we are restricted to only $\uparrow$ operation.

$$(\neg p\to q)\vee(p\wedge q\wedge r)\equiv(p\vee q)\vee(p\wedge q\wedge r)\equiv p\vee q\equiv\neg(\neg p\wedge\neg q)$$

$$\equiv\neg(p\uparrow\neg q)\equiv\neg(p\uparrow(q\uparrow T)) = (p\uparrow(q\uparrow T))\uparrow T$$

In logic circuit we can use the $+V_{cc}$ as T because it is always a + constant voltage.

فرض کنید گزاره‌ی p همیشه غلط باشد. آیا می‌توان با استفاده از p ، ( ) ، ↑ یک گزاره‌ی همیشه درست ساخت.

خیر. از آنجایی که ① عملگر a↑b مکمل a نسبت به b می‌باشد

② برای رسیدن از T به F یا F به T باید بتوانیم Not آن را پیاده‌سازی کنیم

③ Not(A) هم مکمل A نسبت به T یا داشته مرجع می‌باشد

پس بدون در دست داشتن یک گزاره‌ی همیشه درست نمی‌توانیم عملگر Not را

پیاده‌سازی کنیم که بتوانیم از F به T برسیم.

نشان دهید عبارت زیر همیشه درست است.

$$\underbrace{[\overset{a_1}{(p_1\to p_2)}\wedge\overset{a_2}{(p_2\to p_3)}\wedge\cdots\wedge\overset{a_{n-1}}{(p_{n-1}\to p_n)}]}_{P}\to\underbrace{[(p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_{n-1})\to p_n]}_{Q}$$

$P = a_1\wedge a_2\wedge a_3\wedge\cdots\wedge a_{n-1} \Rightarrow P\to a_{n-1}$ is Tautology

$a_{n-1}\equiv(P_{n-1}\to P_n)$ and if $P_{n-1}\to P_n \Rightarrow P_{n-1}\wedge(\text{anything else})\to P_n$

P

$P\to(P_{n-1}\to P_n)$

$\therefore\ P_{n-1}\to P_n$

$P_{n-1}\to P_n$

$P_{n-1}\wedge X\to P_{n-1}$

$P_{n-1}\wedge(X)\to P_n$

$\Rightarrow\overbrace{(P_1\wedge P_2\cdots\wedge P_{n-1})\to P_n}^{Q}$

we started from p and reached Q