Binomial

متغیر تصادفی دوجمله‌ای (Binomial) : متغیر تصادفی دوجمله‌ای توزیع احتمال x پیروزی در N بار تکرار آزمایش برنولی را مدل می‌کند. برای مثال اگر N بار یک سکه را پرتاب کنیم احتمال اینکه x بار نتیجه دلخواه (مثلاً پشت) را ببینیم با متغیر تصادفی دوجمله‌ای بیان می‌شود.

$$P_X(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} \qquad E(X) = ? \qquad Var(X) = ?$$

از قبل می‌دانیم $\Rightarrow \binom{N}{x} = \dfrac{N!}{x!\,(N-x)!} \qquad (p+q)^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p^i q^{N-i}$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{N} x P_X(x) \underset{q=1-p}{=} \sum_{x=0}^{N} x \binom{N}{x} p^x q^{N-x} = \sum_{x=0}^{N} \frac{x N!}{x!\,(N-x)!} p^x q^{N-x} = \sum_{x=1}^{N} \frac{N!}{(x-1)!\,(N-x)!} p^x q^{N-x}$$

$$\underset{x-1=i}{=} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{N!}{i!\,(N-1-i)!} p^{i+1} q^{N-i-1} = \sum_{i=0}^{N-1} pN \frac{(N-1)!}{i!\,(N-1-i)!} p^i q^{N-1-i} = pN \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{i!\,(N-1-i)!} p^i q^{N-1-i}$$

$$= pN (p+q)^{N-1} = pN(p+1-p)^{N-1} = pN \Rightarrow \boxed{E(X) = pN}$$

$Var(X) = E\left((X-E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2 \qquad E(X) = pN \Rightarrow$ ما باید $E(X^2)$ را حساب کنیم تا بتوانیم $Var(X)$ را حساب کنیم.

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{N} x^2 P_X(x) = \sum_{x=0}^{N} x^2 \binom{N}{x} p^x q^{N-x} = \sum_{x=0}^{N} \left(x + x(x-1)\right) \binom{N}{x} p^x q^{N-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{N} x \binom{N}{x} p^x q^{N-x} + \sum_{x=0}^{N} x(x-1) \binom{N}{x} p^x q^{N-x} = pN + \sum_{x=0}^{N} x(x-1) \frac{N!}{x!\,(N-x)!} p^x q^{N-x}$$

$$= pN + \sum_{x=2}^{N} \frac{x(x-1) N!}{x!\,(N-x)!} p^x q^{N-x} \underset{x-2=i}{=} pN + \sum_{i=0}^{N-2} \frac{N!}{i!\,(N-2-i)!} p^{i+2} q^{N-2-i} = pN + p^2 N(N-1) \sum_{i=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{i!\,(N-2-i)!} p^i q^{N-2-i}$$

$$= pN + p^2 N(N-1) \sum_{i=0}^{N-2} \binom{N-2}{i} p^i q^{N-2-i} = pN + p^2 N(N-1)(p+q)^{N-2} \underset{p+q=1}{=} pN + p^2 N(N-1) = pN(pN-p+1)$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = pN(pN-p+1) - p^2N^2 = pN(pN-p+1-pN) = pN(1-p) = Np(1-p)$$

$$= Npq \Rightarrow \boxed{Var(X) = Np(1-p) = Npq}$$