بسمه تعالی

تمرین ٤

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

محسن کربلائی امینی، ۹۸۲٤۲۱۲۸

اسفند ۱۴۰۲

سوال ۱:

a) نامنظم است. با استفاده از لم تزریق اگر شرط اول یعنی n=m را در نظر بگیریم. می‌توان این زبان را با یک آتاماتای k عضوی نشان داد، بنابراین:

$$Z = a^k b^k a^z$$

بنابراین در a^k حتما یک چرخه داشته ایم:

$$i = 1 \rightarrow z1 = a^s a^l a^t b^k a^z, s + l + t = k, 1 < |l| < k$$
$$i = 2 \rightarrow z2 = a^s a^l a^l a^t b^k a^z, l + k! = k$$

بنابراین شرط سوم لم تزریق که می‌گوید به ازای هر i باید عبارت حاصل جزو زبان باشد نقض می‌شود پس این زبان به ازای این شرط منظم نیست.

در صورتی که شرط دوم را در نظر بگیریم، Z عضوی از زبان می‌تواند به این شکل باشد:

$$Z = a^n b^k a^k$$

چون برای n محدودیتی نداریم، در نظر می‌گیریم که این آتاماتا از ادغام دو آتاماتا که یکی از آنها یک حالت با حلقه a باشد، به دست آمده. بنابراین در b^k حتما یک چرخه داشته ایم:

$$i = 1 \rightarrow z1 = a^n b^s b^l b^t a^k, s + l + t = k, 1 < |l| < k$$
$$i = 2 \rightarrow z2 = a^n b^s b^l b^l b^t a^k, l + k! = k$$

بنابراین شرط سوم لم تزریق که می‌گوید به ازای هر i باید عبارت حاصل جزو زبان باشد نقض می‌شود پس این زبان به ازای این شرط نیز منظم نیست.

b) نامنظم است. اگر در نظر بگیریم که این ماشین را بتوان با یک آتاماتای kعضوی نمایش داد، Z عضوی از این زبان است:

$$Z = (a,b)^k a^{2k}$$

بنابراین در $(a,b)^k$ حتما یک چرخه داشته ایم:

$$i = 1 \rightarrow z1 = (a,b)^s (a,b)^l (a,b)^t a^{2k}, s + l + t = k, 1 < |l| < k$$
$$i = 2 \rightarrow z2 = (a,b)^s (a,b)^l (a,b)^l (a,b)^t a^{2k}, l + k! = k$$

بنابراین شرط سوم لم تزریق که می‌گوید به ازای هر i باید عبارت حاصل جزو زبان باشد نقض می‌شود پس این زبان منظم نیست.

c) نامنظم است. اگر در نظر بگیریم که این ماشین را بتوان با یک آتاماتای kعضوی نمایش داد، Z عضوی از این زبان است:

$$\boldsymbol{Z = a^k b^{2^n} c^k d^{2^n}}$$

بنابراین در a^k حتما یک چرخه داشته ایم:

$$\boldsymbol{i = 1 \rightarrow z1 = a^s a^l a^t b^{2^n} c^k d^{2^n}, s + l + t = k, 1 < |l| < k}$$
$$\boldsymbol{i = 2 \rightarrow z2 = a^s a^l a^l a^t b^{2^n} c^k d^{2^n}, l + k! = k}$$

بنابراین شرط سوم لم تزریق که می‌گوید به ازای هر i باید عبارت حاصل جزو زبان باشد نقض می‌شود پس این زبان منظم نیست.

d) نامنظم است. این زبان را می‌توان ادغام چند آتاماتا در نظر گرفت. در نهایت اگر زبان $(۱^n ۰ ۱^n)$ یک زبان منظم باشد، کل زبان منظم خواهد بود.

اگر در نظر بگیریم که این ماشین را بتوان با یک آتاماتای kعضوی نمایش داد، Z عضوی از این زبان است:

$$\boldsymbol{Z = \left(1^k 0 1^k\right)}$$

بنابراین در ۱^k اول حتما یک چرخه داشته ایم:

$$\boldsymbol{i = 1 \rightarrow z1 = 1^s 1^l 1^t 0 1^k, s + l + t = k, 1 < |l| < k}$$
$$\boldsymbol{i = 2 \rightarrow z2 = 1^s 1^l 1^l 1^t 0 1^k, l + k! = k}$$

بنابراین شرط سوم لم تزریق که می‌گوید به ازای هر i باید عبارت حاصل جزو زبان باشد نقض می‌شود پس این زبان منظم نیست.

e) نامنظم است. اگر در نظر بگیریم که این ماشین را بتوان با یک آتاماتای kعضوی نمایش داد، Z عضوی از این زبان است :

$$\boldsymbol{Z = 0^{p-1} 1^p, \mathrm{p} > \mathrm{k}\ \&\ \mathrm{p\ is\ prime}}$$

به طوری که بنابراین در ۰^p حتما یک چرخه داشته ایم:

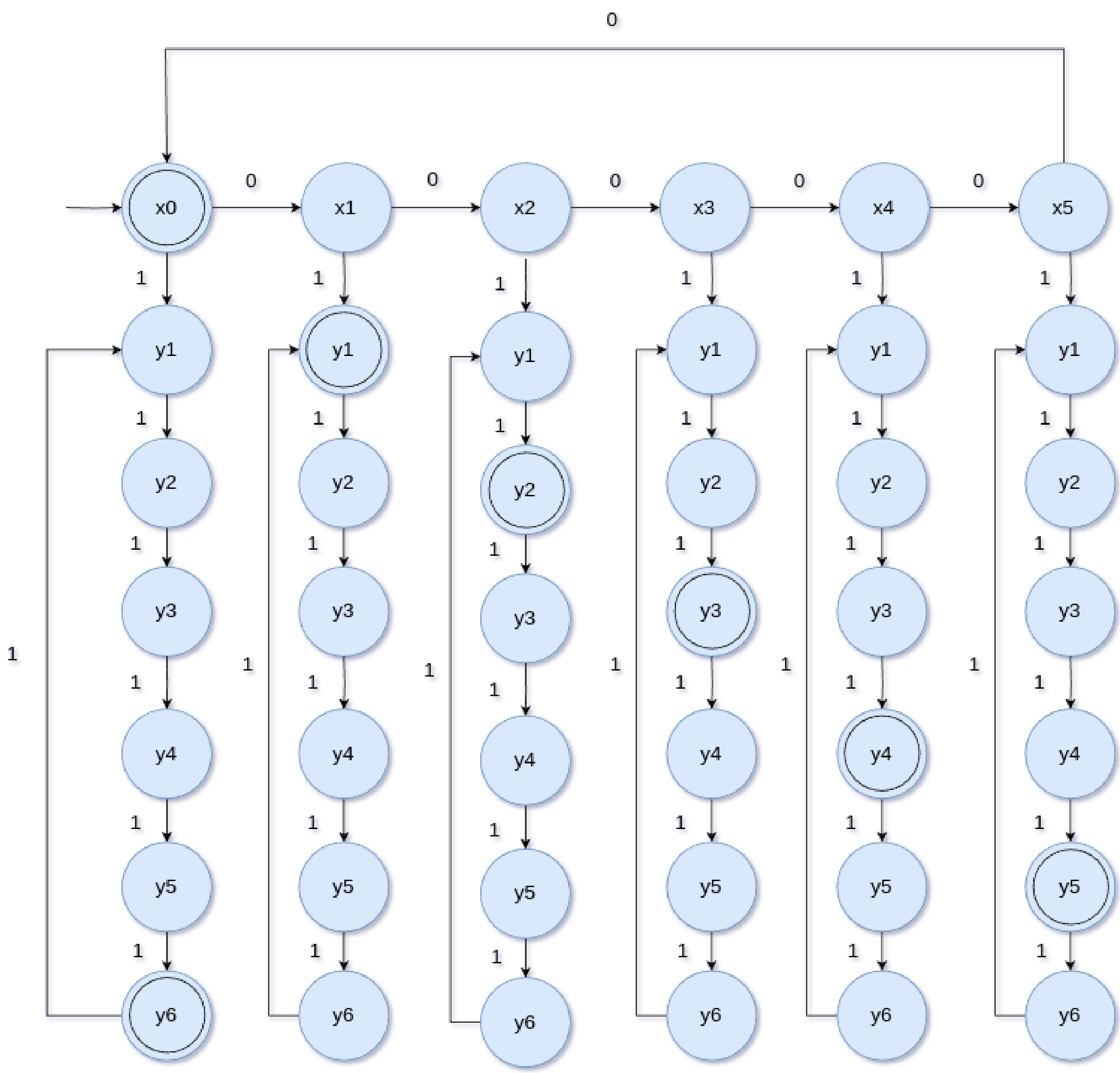
$$\boldsymbol{i = 1 \rightarrow z1 = 0^{(s+l+t)} 1^p, s + l + t = p - 1, 1 < |l| < p}$$
$$\boldsymbol{k = i + 1 \rightarrow zk = 0^{p-1+il} 1^p}$$

برای نقض شرط لم تزریق اگر بتوانیم i>۱ ای برای این معادله پیدا کنیم به شکلی که:

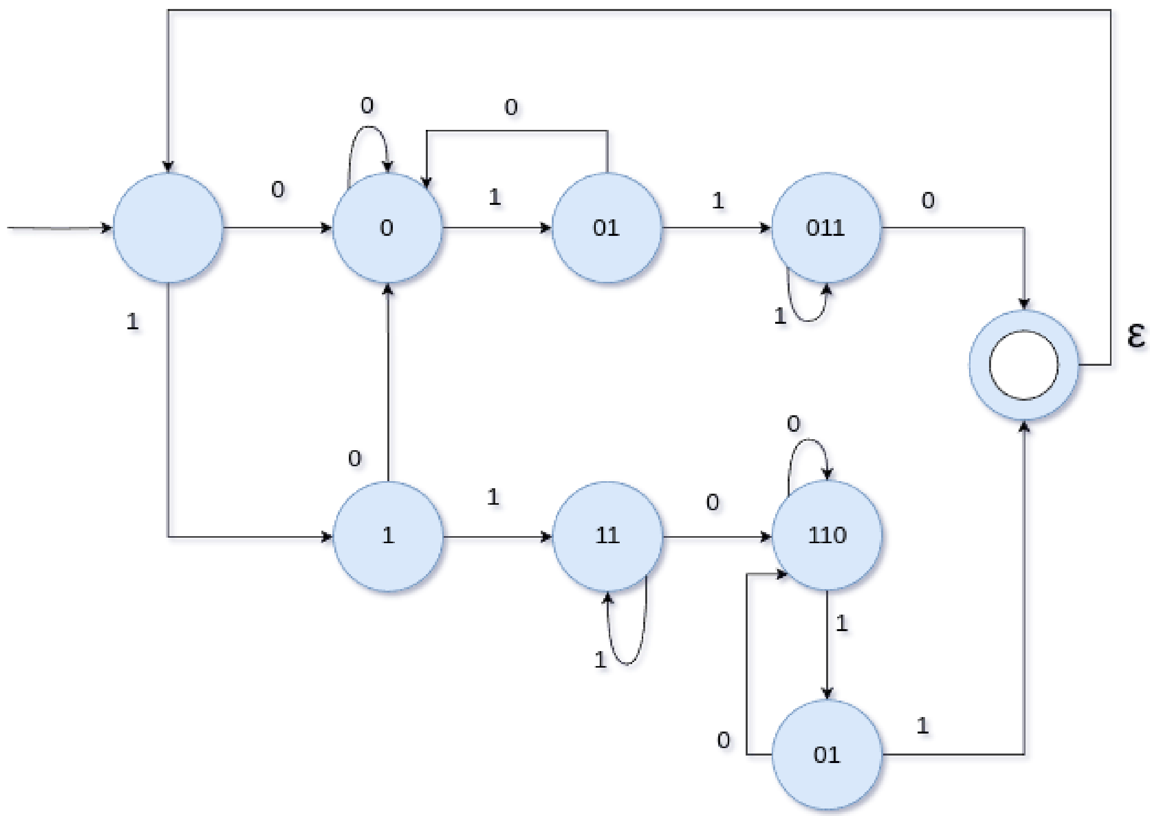
$$i.l \bmod p = 1 \rightarrow \quad i = l^{-1}$$

که با در نظر گرفتن معکوس پیمانه ای جوابی حقیقی برای i می توان متصوربود.
بنابراین شرط سوم لم تزریق که می‌گوید به ازای هر i باید عبارت حاصل جزو زبان باشد نقض می‌شود
پس این زبان منظم نیست.

f) منظم است.



g) منظم است.



h) نامنظم است. اگر در نظر بگیریم که این ماشین را بتوان با یک آتاماتای kعضوی نمایش داد، Z عضوی از این زبان است :

$$Z = a^p b^p, \mathbf{p} > \mathbf{k} \;\&\; \mathbf{p\ is\ prime}$$

به طوری که بنابراین در a^p حتما یک چرخه داشته ایم:

$$i = 1 \rightarrow z1 = a^{(s+l+t)} b^p, s + l + t = p, 1 < |l| < p$$
$$i = p + 1 \rightarrow zi = a^{(s+l+pl+t)} b^p \rightarrow 2p + 2pl - p = p + 2pl = (2l + 1)p$$

از آنجایی که $(2l + 1)p$ یک عدد اول نیست، بنابراین شرط سوم لم تزریق که می‌گوید به ازای هر i باید عبارت حاصل جزو زبان باشد نقض می‌شود پس این زبان منظم نیست.

i) احتمالا نامنظمه ☹

j) نامنظم است. اگر در نظر بگیریم که این ماشین را بتوان با یک آتاماتای kعضوی نمایش داد، Z عضوی از این زبان است :

$$Z = 1^{a}\#(0 \ldots (l \text{ تا } 0)..01)^{a-1}\#(0 \ldots (l \text{ تا } 0)..01)^{a-1}, a > k$$

$$y + z = (10 \ldots (l \text{ تا } 0)..0)^{a-1}0 \rightarrow (a-1)(l+1) + 1 = a(l+1) - l \text{ رقم}$$

$$2(y + z) = (10 \ldots (l \text{ تا } 0)..0)^{a-1}00 \rightarrow a(l+1) - l + 1 \text{ رقم}$$

در حال حاضر x<y+z و در ۱^{a} حتما یک چرخه داشته ایم و :

$$i = 1 \rightarrow z1 = 1^{(s+l+t)}\#(10 \ldots (l \text{ تا } 0)..0)^{a-1}\#(10 \ldots (l \text{ تا } 0)..0)^{a-1}, s + l + t = a, 1 < |l| < a$$

$$i = a \rightarrow zi = 1^{(s+(a-1)l+l+t)}\#(10 \ldots (l \text{ تا } 0)..0)^{a}\#(10 \ldots (l \text{ تا } 0)..0)^{a}$$

$$1^{a(l+1)-l} > y + z \ \& \ 1^{a(l+1)-l} < 2(y + z)$$

بنابراین شرط سوم لم تزریق که می‌گوید به ازای هر i باید عبارت حاصل جزو زبان باشد نقض می‌شود پس این زبان منظم نیست.

سوال ۲:

a) بله رشته $a^{n}b^{n}ab^{n}a^{n}$ از این عبارت می تواند برای اثبات نامنظم‌بودن این زبان استفاده شود که به راحتی با لم تزریق قابل اثبات می‌باشد:

$$i = 2, a^{(s+l+l+t)} \ldots . \rightarrow z2 = a^{n+l} \ldots .$$

b) بله:

$$z = a^{k}bab^{k+1}$$

$$i = 1 \rightarrow z1 = a^{(s+l+t)}bab^{k+1}, s + l + t = k, 1 < |l| < k$$

$$i = k + 1 \rightarrow zi = a^{k(l+1)}bab^{k+1}, m = k, n\ can't\ be\ both\ (l + 1)\ and\ 1$$

سوال ۳:

اگر در نظر بگیریم که این ماشین را بتوان با یک آتاماتای kعضوی نمایش داد، Z عضوی از این زبان است :

$$Z = 5^k 0 3^{k-1} \rightarrow w = 5^k, v^R = 3^{k-1}0 \rightarrow \frac{H2D(w)}{5} = 16^k + 16^{k-1} + \cdots + 1$$
$$= \frac{H2D(v^R)}{3} + 1$$

بنابراین در 5^k حتما یک چرخه داشته ایم:

$$i = 1 \rightarrow z1 = 5^{(s+l+t)} 0 3^{k-1}, s + l + t = k, 1 < |l| < k$$
$$i = 2 \rightarrow z2 = 5^{(s+l+l+t)} 0 3^{k-1} \rightarrow \frac{H2D(w)}{5} = 16^{k+l} + 16^{k+l-1} + \cdots + 1$$
$$\neq \frac{H2D(v^R)}{3} + 1$$