### 第零章 复变函数

##### 1. 复数

有，则，，， 🡪循环往复

注意：

Ⅰ为的实部，记为；为的虚部，记为

Ⅱ 复数z的长度r称为z的模，记作

Ⅲ 幅角、幅角主值：

幅角：矢量与极轴正方向x的夹角，记作

幅角主值：规定，记作

##### 2. 【重点】复数的三种表示方法 🡺 代数式、三角式、指数式

**①代数式（平面坐标系）**

🡺

**②三角式（极坐标系）**

🡺

注意：

Ⅰ 和不需要计算出结果，且一般

③指数式（极坐标系）

🡺

**欧拉公式：**

注意：

Ⅰ复数主值：

##### 3. 【重点】复数运算 🡺 化简复数，描述复数的几何意义

**①加减法**

注意：

Ⅰ两边之和大于大三边

两边只差：

两边只和：

第三边： 或

**②乘除法**

由，，得

🡪模值相乘，幅角相加

🡪模值相除，幅角相减

**③乘开方**

棣莫弗公式：

故

即

由，得

**即开n次方，就有n个值：表示以为半径的圆周上的n个等分点**

### 第一章 拉普拉斯变换

##### 1. 定义：

其中，，称为拉普拉斯变换的核

称为拉普拉斯变换的象函数，称为拉普拉斯变换的原函数

##### 2. 常见拉普拉斯变换公式：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 原函数 | 像函数 | 公式 | 备注 |
| 1 |  |  |  |
| t |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  | 原函数的位移定律 |
|  |  |  |  |
|  |  |  | 原函数的位移定律 |
|  |  |  | 分子为 |
|  |  |  | 分子为 |
|  |  |  | 原函数的位移定律 |
|  |  |  | 原函数的位移定律 |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

##### 3. 拉普拉斯变换的性质

①线性定理

由 ，，则

②微分定理

由，则

注意：

Ⅰ 求n次方，则一共由n+1项



🡺 像函数 原函数一次导 n-1次导

* 减号-！减号-！减号-！

Ⅱ 常有：

③积分定理

由，则

特殊的，对于n重积分，有

④像函数的微分定理

由，则

⑤【难】延迟定理

由，则

注意：

Ⅰ符号与符号**相同**，如公式中，都是符号(-)

**Ⅱ由拉普拉斯变换成立的条件，故约定时，即时，**

⑥【常见】位移定理

由，则

注意：

Ⅰ符号与符号**相反**，如公式中，对应

⑦相似定理

由，则

⑧番外：

由于拉普拉斯变换的原函数满足：

故，单位阶跃函数

的拉普拉斯变换同一样，即

***那为何要区别和？？ 🡺 构建窗口函数和运用延迟定理***

🡪延迟定理应用的时候，需要满足**时，即时，，**

故，此时就要转换为

如：，则，运用线性定理和延迟定理，可得

##### 4. 亥维赛展开定理 🡺 已知，反演

**①条件：**

Ⅰ，且为不可约有理分式

Ⅱ最高次幂比最高次幂**低**

**②无重根，有n个单根：**

则可拆解为

即可拆解为

利用位移定理

两种求的方法

法1：

法2 （洛必达）：

③**有m重根：，其中有n个根=α**

即可拆解为

**注意：**

Ⅰn重根的有

④共轭复根（暂略）

##### 5. 卷积定理（折积定理）

①公式：

若，，则

即

**背公式：像函数点乘 原函数卷积**

用途：

**Ⅰ 已知像函数，反演原函数**

说明：如果像函数特别容易拆成两个函数相乘，那像函数的原函数就是两个函数原函数的卷积。

Ⅱ 已知原函数，求解像函数

说明：原函数是两个函数的卷积形式，则可以得像函数等于两个函数的像函数点乘

### 第二章 傅里叶展开

##### 1. 以为周期的函数

**注意：**

**①周期**

**②周期函数**

**注意**：

**①奇函数：==0，**

**②偶函数：=0，**

##### 2. 有限期间上函数的傅里叶展开

**三种延拓方式：**

**注意：**

**①有三种延拓方式：一般延拓、奇延拓、偶延拓**

**②模板（奇延拓为例）：先将奇延拓到区间，再以为周期延拓到整个实轴上形成。此时，，且函数为奇函数**

**①一般延拓方式：**

Ⅰ：周期

Ⅱ：公式：在，有

区别于传统傅里叶：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 传统 | 有限区间  （一般延拓） |
| 周期T |  |  |
| 相位 |  |  |
| 系数 |  |  |
| 、系数 |  |  |
| 积分区间 |  |  |

**②奇延拓方式🡺正弦傅里叶展开**

何时使用奇延拓：

Ⅰ题目说明需要用“奇延拓”或者“正弦傅里叶展开”

Ⅱ题目说明边界条件为

注意点：

Ⅰ==0

Ⅱ【重要】周期

Ⅱ需写清楚是奇延拓

Ⅳ是奇函数

公式：

在，有

注意点：

Ⅰ因为是奇函数，故是偶函数，当积分区间为是，系数为

区别于传统傅里叶：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 传统 | 有限区间  （一般延拓） | 奇延拓  （正弦傅里叶展开） |
| 周期T |  |  |  |
| 相位 |  |  |  |
| 系数 |  |  | 0 |
| 、系数 |  |  | =0 |
| 积分区间 |  |  |  |

**③偶延拓方式🡺余弦傅里叶展开**

何时使用偶延拓：

Ⅰ题目说明需要用“偶延拓”或者“余弦傅里叶展开”

Ⅱ题目说明边界条件为

注意点：

Ⅰ=0

Ⅱ【重要】周期

Ⅱ需写清楚是偶延拓

Ⅳ是偶函数

公式：

在，有

注意点：

Ⅰ由于周期，故相位=

Ⅱ因为是偶函数，故是偶函数，当积分区间为是，系数为

**④特殊情况：若要求，及要求为偶延拓，在为奇延拓**

##### 3.复数形式的傅里叶级数

①欧拉公式

②复数形式

##### 4.非周期函数的傅里叶变换

公式：

注意点：

Ⅰ为奇函数：

Ⅱ为奇函数：

🡺注意：和的积分上下限和系数

与周期函数傅里叶变换的区别

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 周期函数傅里叶展开 | 非周期函数傅里叶展开 | 区别 |
| 公式 |  |  | ①求和积分  ②非周期：🡺对进行积分 |
|  |  | ①求和积分  ②  ③：对进行积分  ④ |
|  |  | ①求和积分  ②  ③：对进行积分  ④ |