

Listado 1: Sistemas de Ecuaciones Lineales
Álgebra Lineal (527108)

1. Considere 2 planos arbitrarios P_1, P_2 en el espacio. Qué podría llegar a ser (geométricamente) la intersección $P_1 \cap P_2$? Y si P_3 es otro plano, qué podría ser $P_1 \cap P_2 \cap P_3$? Enumere todas las posibilidades y mencione cuántos puntos hay en cada intersección (0 puntos, 1 punto o infinitos).
2. Cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones son *lineales*?

$$a) \left| \begin{array}{rrcr} x & + & 6y & - & 2z & = & 3 \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 5x & & +3y & - & 2z & = & -1 \end{array} \right|$$

$$b) \left| \begin{array}{rrcr} 2x & - & 2y^2 & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ xy & & +3y & - & 2z^3 & = & -1 \end{array} \right|$$

$$c) \left| \begin{array}{rrcr} 3x & - & y & - & 2z & = & x \\ & & y & + & 4z & = & z \\ 1 & + & 3z & - & 2y & = & y - x - 1 \end{array} \right|$$

$$d) \left| \begin{array}{rrcr} \pi x & & - & e^\pi y & - & 2z & = & 1,001 \\ \cos(\frac{1}{2})x & + & y & + & z & = & 2^{-2025} \\ -x & + & \ln(2)y & - & 0,001z & = & 0 \end{array} \right|$$

3. Para los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, determine si el sistema tiene una solución o no. Si tiene solución, determine todas las soluciones:

$$a) \left| \begin{array}{rrcr} 2x & - & 2y & - & 2z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & 3 \\ x & & & - & z & = & 1 \end{array} \right|$$

$$b) \left| \begin{array}{rrcr} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & = & 0 \end{array} \right|$$

$$c) \left| \begin{array}{rrcr} x & & & + & z & = & -2 \\ -2x & + & y & + & z & = & 3 \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \end{array} \right|$$

$$d) \left| \begin{array}{rrcr} -2x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 12 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 7 \end{array} \right|$$

Pequeño truco: para hacer el algoritmo de eliminación de Gauss más sencillo, sume una ecuación a otra de forma de obtener un coeficiente igual a 1 en x . Después, trabaje como hicimos en clase partiendo de la nueva ecuación.

$$e) \left| \begin{array}{cccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & z & + & 4t & = & 0 \end{array} \right|$$

$$f) \left| \begin{array}{cccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 3z & = & -4 \\ x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right|$$

$$g) \left| \begin{array}{cccc} -y & + & x & + & 2z & = & 1 \\ 2z & & & + & 2x & = & 1 \\ x & + & 4z & - & 3y & = & 2 \end{array} \right|$$

$$h) \left| \begin{array}{cccc} x & - & 2y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & y & - & z & + & t & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 5z & - & t & = & 3 \end{array} \right|$$

$$i) \left| \begin{array}{ccccccc} 2x & - & 3y & - & 7z & + & 5t & + & 2w & = & -2 \\ x & - & 2y & - & 4z & + & 3t & + & w & = & -2 \\ 2x & & & - & 4z & + & 2t & + & w & = & 3 \\ x & - & 5y & - & 7z & + & 6t & + & 2w & = & -7 \end{array} \right|$$

4. Decida para qué valores de la constante $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left| \begin{array}{cccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array} \right|$$

- (i) No tiene solución.
(ii) Tiene una solución.
(iii) Tiene infinitas soluciones.
5. Decida para qué valores de la constante $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left| \begin{array}{cccc} x & + & 2y & - & kz & = & 1 \\ 2x & - & y & + & kz & = & 3 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ kx & - & y & + & z & = & k \end{array} \right|$$

- (i) No tiene solución.
(ii) Tiene una solución.
(iii) Tiene infinitas soluciones.
6. Considere el siguiente sistema:

$$\left| \begin{array}{ccc} x & - & y & = & a \\ y & - & z & = & b \\ z & - & t & = & c \\ t & - & x & = & d \end{array} \right|$$

- a)* Muestre que el sistema admite una solución si, y sólo si $a + b + c + d = 0$.
- b)* Cuando esta condición se verifica, encuentre el conjunto de soluciones del sistema.