Apuntes sobre vectores

10 de junio de 2024

Índice

1. Magnitudes

1.1. Magnitudes escalares

Están dadas por algún valor numérico, es decir, tienen sólo magnitud .

1.2. Magnitudes vectoriales

Son aquellas que tienen magnitud, dirección y sentido .

2. Sistema de coordenadas polares

Solo se necesita un eje para realizar un sistema de coordenadas polares.

Los ángulos del sistema polar siempre tomarán un valor positivo, si se miden de forma antihorario y toman valores negativos si se miden en sentido horario.

Recordar que:

a) $0\pi \text{ rad} = 0^\circ$

b) $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$

c) $1\pi \text{ rad} = 180^\circ$

d) $\frac{3}{2}\pi \text{ rad} = 270^\circ$

Para calcular puntos de una circunferencia, se puede:

$$x \text{ rad} = y^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$$
$$y^\circ = x \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}.$$

3. Vectores unitarios

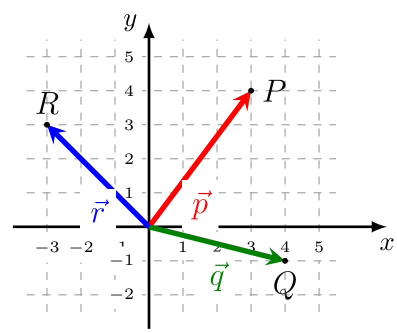
Son aquellos que tienen magnitud igual a 1, se suelen denotar como $\hat{j} :\equiv (0,1)$ o $\hat{i} :\equiv (1,0)$

Siempre se ponen a la hora de escribir un vector.

4. Representación gráfica de vectores

Def: Un vector es un objeto geométrico $\in \mathbb{R}^2$, donde poseen:

- Magnitud.
- Dirección.



De esta forma, dado un punto z de coordenadas (x, y), se puede escribir el vector $\vec{z}$ de la forma:

$$\vec{z} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j}.$$

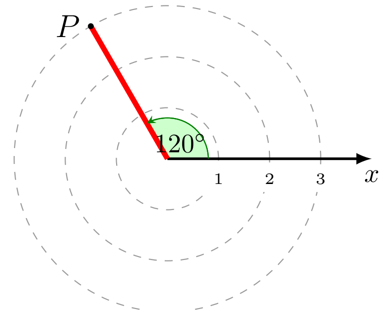
Además, notar que los vectores se pueden trasladar.

5. Coordenadas polares a rectangulares

Si se conoce la magnitud de r, y el ángulo Φ (medido con respecto al eje x^+), las coordenadas cartesianas con las polares se relacionan tal que:

$$\cos\Phi = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = r\cos\Phi$$
$$\sin\Phi = \frac{y}{r} \Longrightarrow y = r\sin\Phi.$$

- Notar que la magnitud de un vector siempre será un número positivo.
- Si $||\vec{r}|| \equiv 0$, entonces su ángulo Φ no está bien definido.



De las razones trigonométricas anteriores se puede deducir lo siguiente:

$$\vec{r} = x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j}$$
$$\vec{r} = +r\cdot\cos\Phi\cdot\hat{i} + r\cdot\sin\Phi\cdot\hat{j}.$$

- Observar que se cumple para todo ángulo $\Phi \in [0, 2\pi]$.

Por otro lado, si se conoce $\vec{r} = x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j}$ y se quiere conocer la magnitud y ángulo de dirección, se tiene que:

$$||\vec{r}|| := r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Recordando que también se puede tener que:

$$\tan\beta = \left|\frac{y}{x}\right| \Longrightarrow \beta = \arctan\left|\frac{y}{x}\right|.$$

6. Espacio vectorial

Observar que las operaciones de vectores cumplen todos los axiomas de cuerpo vistos anteriormente en AyT, ver: Clase 4 de AyT.

6.1. Base vectorial

Dado un plano en $\mathbb{R}^3$, se tiene que un punto P tiene coordenadas (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$.

Además, se definen los vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ como:

- $\hat{i} := (1, 0, 0)$
- $\hat{j} := (0, 1, 0)$
- $\hat{k} := (0, 0, 1)$

De esta forma se define como el vector $\vec{p}$ como:

$$\vec{p} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}.$$

Donde la magnitud de $\vec{p}$ está dada por:

$$||\vec{p}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + k^2}.$$

6.2. Operaciones en $\mathbb{R}$

Dado $\vec{v} = x_1 \cdot \hat{i} + y_1 \cdot \hat{j} + z_1 \cdot \hat{k} \wedge \vec{r} = x_2 \cdot \hat{i} + y_2 \cdot \hat{j} + z_2 \cdot \hat{k}$ se tiene que:

a) Suma de vectores:

$$\vec{v} + \vec{r} = (x_1 + x_2)\hat{i} + (y_1 + y_2)\hat{j} + (z_1 + z_2)\hat{k}.$$

b) Multiplicación de vector por escalar:

$$a \cdot \vec{v} = a \cdot x_1 \cdot \hat{i} + a \cdot y_1 \cdot \hat{j} + a \cdot z_1 \cdot \hat{k}.$$

- También, se puede definir como la multiplicación de un vector por escalar como:

$$a \cdot \vec{v} = a \cdot ||\vec{v}||.$$

c) Producto punto o escalar entre dos vectores.

- Sea $\vec{a} = x_1 \cdot \hat{i} + y_1 \cdot \hat{j} + z_1 \cdot \hat{k}$, $\vec{b} = x_2 \cdot \hat{i} + y_2 \cdot \hat{j} + z_2 \cdot \hat{k}$ y $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$, se define c como:

$$c = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

- Notar que:

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2 = ||\vec{r}|| = r^2.$$

7. Norma o magnitud de un vector en $\mathbb{R}^3$

Sea $\vec{a} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$, se define como magnitud de $\vec{a}$ como:

$$a = ||\vec{a}|| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

7.1. Propiedades de la norma o magnitud

Dado $\vec{a} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$, con $x, y, z \in \mathbb{R}$, se define que:

$$||\vec{a}|| \equiv 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$$
$$||w \cdot \vec{a}|| = |w| \cdot ||\vec{r}||.$$

Donde $|w|$, es el valor absoluto de w.

8. Producto vectorial

Dado dos vectores $\vec{a} \wedge \vec{b}$, se define como producto vectorial como:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} := ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin \Phi \cdot \hat{e}.$$

$\hat{e}$ es un vector unitario.

De lo anterior se desprende que si $\Phi = 0 \vee \Phi = \pi$, entonces, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Por otro lado, si tenemos dos vectores $\vec{a} = x_1 \cdot \hat{i} + y_1 \cdot \hat{j} + z_1 \cdot \hat{k}$, $\vec{b} = x_2 \cdot \hat{i} + y_2 \cdot \hat{j} + z_2 \cdot \hat{k}$, se define como $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, donde:

$$\vec{c} = (y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2)\hat{i} - (x_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot x_2)\hat{j} + (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)\hat{k}.$$

Notar que:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \perp \vec{a} \wedge \perp \vec{b}$$
$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$