Biología Matemática
Modelo de población Lotka Volterra Mutualista

NOMBRE: Isaac Lehí Sánchez Morales
PROFESOR: Dr. Moisés Santillán Zerón

Las ecuaciones de Lotka-Volterra son dos ecuaciones con las cuales podemos lograr representar como podrían comportarse dos poblaciones de individuos llámese plantas, animales, microrganismos etc.
En casos como son la depredación de una población a otra, la competencia por recursos en un ecosistema o el mutualismo que al contrario de competir por los recursos estas poblaciones se benefician mutuamente.

Originalmente las ecuaciones de Lotka-Volterra son las siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta y)$$

Estas anteriores nos muestran el caso de depredación de una población.
Para lo que sería el modelado de dos poblaciones en una situación de competencia por recursos se utilizaría el modelo logístico en estas ecuaciones con lo cual quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = r_x x(1 - \frac{x}{K_x} - Ay)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_y y(1 - \frac{y}{K_y} - Bx)$$

De lo anterior tenemos que "x" y "y" serían nuestras dos poblaciones de individuos, en cuanto a r_x y r_y sería la tasa de crecimiento de las poblaciones si estas no tuvieran interacción entre sí, mientras que K_x y K_y nos representan la capacidad de carga de las poblaciones, es decir cuántos elementos de la población se pueden sostener con los recursos existentes, A y B determinan la competitividad de cada población.

Normalizando las ecuaciones tenemos que:

$$x' = x(1 - x - \alpha_{yx}y)$$

$$y' = \rho y(1 - y - \alpha_{xy}x)$$

Donde $\alpha_{yx}y$ y $\alpha_{xy}x$ cuanto afecta una población a la otra dependiendo de la agresividad que presente cada una, esto quiere decir que tantos recursos consume con respecto a la otra.
En cuanto a "ρ" es la comparación de tasas de crecimiento de ambas poblaciones.

Como se puede observar en las ecuaciones los términos $\alpha_{yx}y$ y $\alpha_{xy}x$ tiene un signo negativo debido a que las poblaciones se encuentran compitiendo por recursos.

En cambio cuando hablamos de mutualismo este último término en las dos ecuaciones pasaría de ser negativo a ser positivo con lo que podemos observar que es algo benéfico para las dos poblaciones el permanecer en el mismo ecosistema ya que el apoyo el uno al otro nos lleva a un estado de equilibrio en la vida de ambos especímenes.
Por lo cual tendremos las siguientes ecuaciones:

$$x' = x(1 - x + \alpha_{yx}y)$$

$$y' = \rho y(1 - y + \alpha_{xy}x)$$

Analizando donde se ubican los puntos estacionarios obtenemos

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2x + \alpha_{yx}y & \alpha_{yx}x \\ \rho\alpha_{xy}y & \rho(1 - 2y + \alpha_{xy}x) \end{pmatrix}$$

(0,0)

$$J_{\substack{x^*=0 \\ y^*=0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

$$T = 1 + \rho$$

$$\Delta = \rho$$

Biología Matemática
Modelo de población Lotka Volterra Mutualista
NOMBRE: Isaac Lehí Sánchez Morales
PROFESOR: Dr. Moisés Santillán Zerón

(0,1)

$$J_{\substack{x^*=0\\y^*=1}} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_{yx} & 0 \\ \rho\alpha_{xy} & \rho-2\rho \end{pmatrix}$$
$$T = 1+\alpha_{yx}-\rho$$
$$\Delta = -\rho(1+\alpha_{yx})$$

(1,0)

$$J_{\substack{x^*=1\\y^*=0}} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha_{yx} \\ 0 & \rho(1+\alpha_{xy}) \end{pmatrix}$$
$$T = -1+\rho(1+\alpha_{yx})$$
$$\Delta = -\rho(1+\alpha_{xy})$$

$$x^* = \frac{1+\alpha_{yx}}{1-\alpha_{xy}\alpha_{yx}}, y^* = \frac{1+\alpha_{yx}}{1-\alpha_{xy}\alpha_{yx}}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{-1-\alpha_{yx}}{1-\alpha_{xy}\alpha_{yx}} & \frac{\alpha_{yx}(1+\alpha_{yx})}{1-\alpha_{xy}\alpha_{yx}} \\ \frac{\rho\alpha_{xy}(1+\alpha_{xy})}{1-\alpha_{xy}\alpha_{yx}} & \frac{\rho(-1-\alpha_{xy})}{1-\alpha_{xy}\alpha_{yx}} \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{-\rho\left(1+\alpha_{xy}\right)-(1+\alpha_{yx})}{1-\alpha_{xy}\alpha_{yx}}$$
$$\Delta = \frac{\rho\left(1+\alpha_{xy}\right)(1+\alpha_{yx})}{1-\alpha_{xy}\alpha_{yx}}$$

Obteniendo la traza y el determinante de cada uno de los puntos podemos darnos una idea de la estabilidad de dichos puntos y si estos atraerán o repelerán al sistema con respecto al transcurso del tiempo.
Cuando un punto fijo llega a ser inestable cualquier perturbación en el sistema hará que este se alejara en cambio cuando es estable siempre tiende a regresar al punto a la mas mínima perturbación.

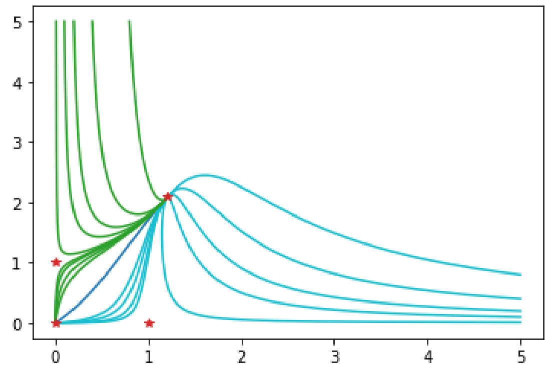
.A continuación analizaremos el comportamiento anterior con nuestro modelo ya escrito en computadora donde tenemos que "ρ" (rho) se considera como 1 donde si esta es más grande que 1, “y“ crece más rápido y si es menor que 1 “x” crece más rápido.

En cuanto a alpha*y y beta*x se consideran como $\alpha_{yx}y$ y $\alpha_{xy}x$ que en este caso sería que tanto beneficia una especie a otra.
Revisando el comportamiento de estos parámetros haciendo cambios en sus valores obtenemos las gráficas que se muestran después de nuestro código

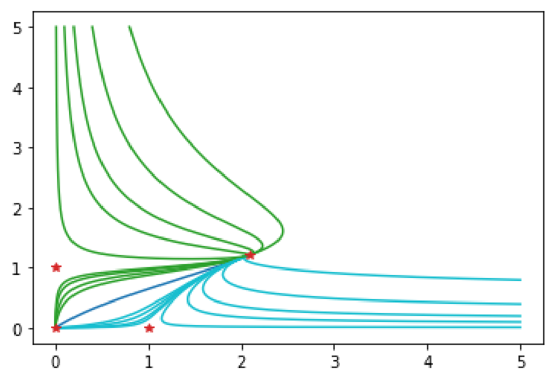
```python
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint


def modelo(p, t, alpha, beta, rho):
    x, y = p
    dx = x * (1 - x + alpha * y)
    dy = rho * y * (1 - y + beta * x)
    return dx, dy


alpha = 0.95
beta = 0.5
rho = 1


t = np.linspace(0, 100, 20000)
#------------------------------
p0 = [0.0001, 0.0001]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C0")
#------------------------------
p0 = [0.001, 0.0001]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C9")

p0 = [0.005, 0.0001]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C9")

p0 = [0.01, 0.0001]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C9")
#------------------------------
p0 = [0.0001, 0.001]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C2")

p0 = [0.0001, 0.005]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C2")

p0 = [0.0001, 0.01]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C2")
```

```python
#------------------------------
p0 = [5, 0.01]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C9")

p0 = [5, 0.1]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C9")

p0 = [5, 0.4]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C9")

p0 = [5, 0.8]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C9")
#------------------------------
p0 = [0.01,5]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C2")

p0 = [0.1, 5]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C2")

p0 = [0.2, 5]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C2")

p0 = [0.8, 5]
p = odeint(modelo, p0, t, args=(alpha, beta, rho))
plt.plot(p[:, 0], p[:, 1], color="C2")

#plt.plot([0, 0, 1], [0, 1, 0], 'o', color="C1")
plt.plot([0, 0, 1, (-1 - alpha)/(-
1 + alpha*beta)], [0, 1, 0, (-1 - beta)/(-
1 + alpha*beta)], '*', color="C3")
```

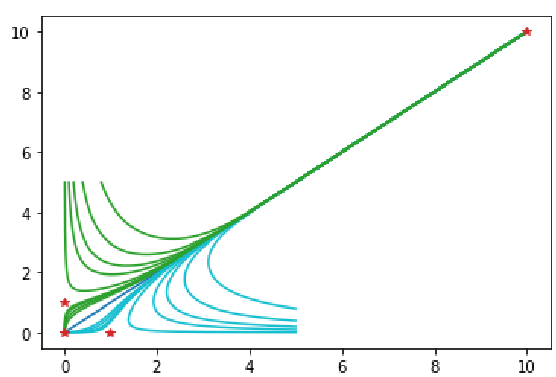
alpha = 0.1
beta = 0.9
rho = 1



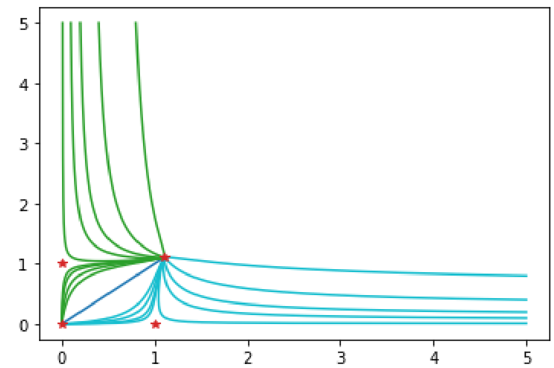
alpha = 0.9
beta = 0.1
rho = 1



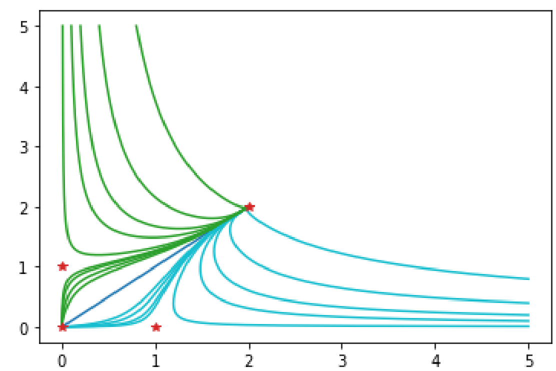
alpha = 0.9
beta = 0.9
rho = 1



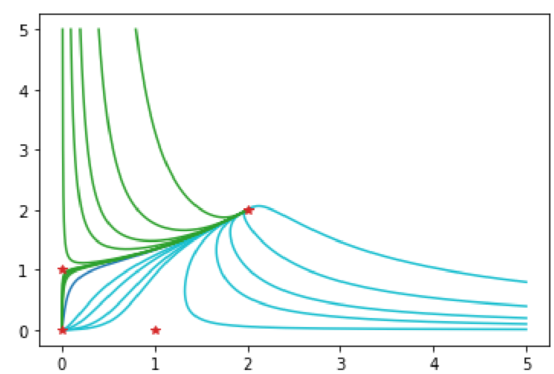
alpha = 0.1
beta = 0.1
rho = 1



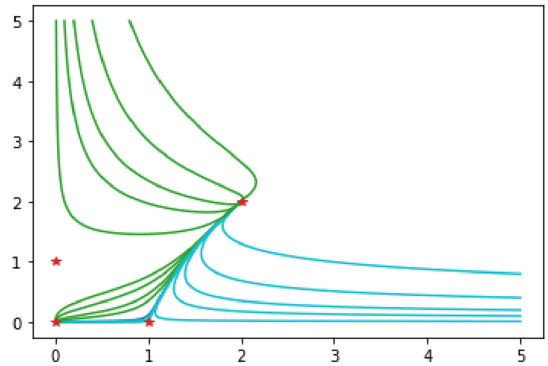
alpha = 0.5
beta = 0.5
rho = 1



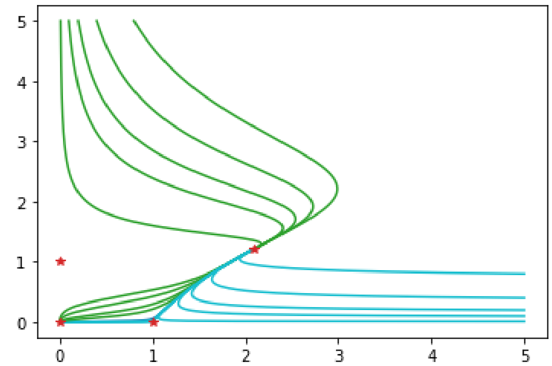
alpha = 0.5
beta = 0.5
rho = 1.5



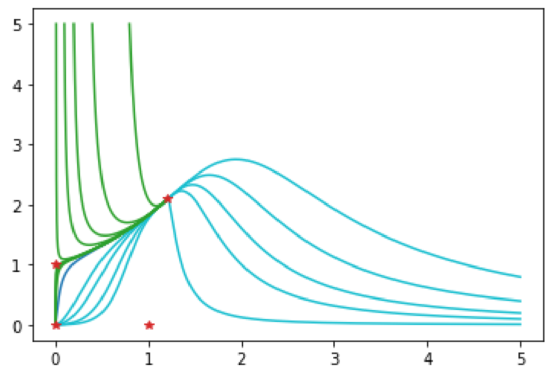
alpha = 0.5
beta = 0.5
rho = 0.5



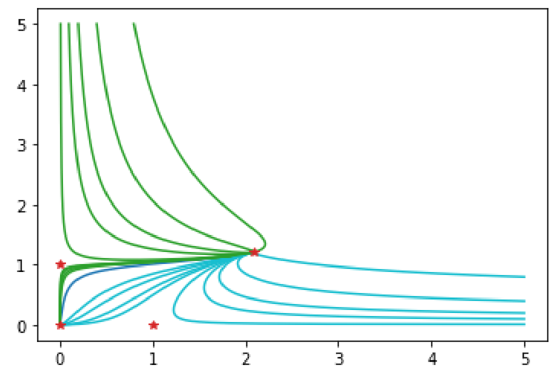
alpha = 0.9
beta = 0.1
rho = 0.5



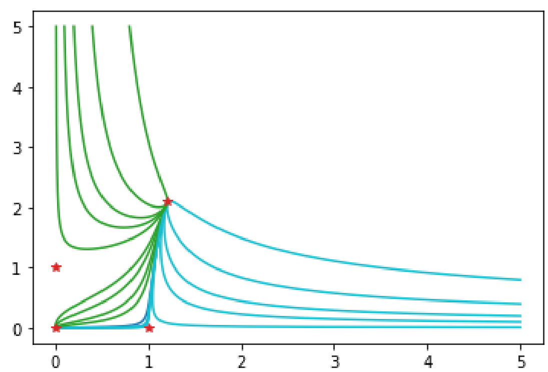
alpha = 0.1
beta = 0.9
rho = 1.5



alpha = 0.9
beta = 0.1
rho = 1.5



alpha = 0.1
beta = 0.9
rho = 0.5



Como se puede observar existen diferentes comportamientos de las poblaciones al encontrarse cerca de los estados estacionarios ya que estos serán atraídos o serán repelidos, una situación que nos represente el mutualismo como se aprecia tiene un punto estable el cual tienden a preferir así llegando a siempre contar con un equilibrio de coexistencia dentro del ecosistema en el que se encuentran las dos especies.

Bibliografía:

L. Glass, J. M. (2002). *Mathematical Biology.* New York Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

uri wilensky, w. r. (2015). *An Introduction to Agent-Based Modeling* . Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology.