Modelo logístico

Pablo Alvarado

Centro de Investigación y Estudios Avanzados, Unidad Monterrey

Email: pablo.alvarado@cinvestav.mx

Introducción

La dinámica de poblaciones es el estudio de los cambios que sufren las comunidades biológicas así como los factores y mecanismos que los regulan. El estudio de los cambios en el tamaño y/o densidad de las poblaciones naturales se basa en tres pilares fundamentales: una serie de principios teóricos generales que subyacen al cambio poblacional, la formalización e interpretación de estos principios a través de modelos matemáticos, y por último, la interpretación de estos principios y modelos en términos de mecanismos biológicos (1). Algunos ejemplos de los modelos matemáticos utilizados son el crecimiento o decaimiento exponencial, no obstante, estos modelos tienen sus limitaciones, por lo tanto se hace uso del modelo logístico, en el que se observan diferentes casos como el efecto Allee.

El efecto Allee es un fenómeno de la dinámica de poblaciones atribuido al biólogo W.C. Allee. Allee propuso que la tasa de natalidad per cápita disminuye a bajas densidades de población (2). Bajo tal escenario, una población con bajas densidades puede deslizarse hacia la extinción. Este descubrió que las tasas de crecimiento per cápita más altas de la población de escarabajos de la harina, *Tribolium cofusum*, se encontraban en densidades intermedias. Además, cuando había menos parejas disponibles, las hembras producían menos huevos, un resultado bastante inesperado. Allee no proporcionó una definición definitiva y precisa de esta nueva noción, por lo que otros estudios definen el efecto Allee como "una relación positiva entre cualquier componente de la aptitud individual y el número o la densidad de los congéneres" (3,4). En este trabajo comprobaremos que el efecto Alle se comporta como un modelo logístico.

Metodología y Resultados

Primero tomamos en cuenta la fórmula del efecto Allee[1].

[1] $$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})(\frac{N}{A} - 1)$$

Luego la normalizamos la fórmula para no tener 3 variables, la nueva variable (α) es igual a ($\frac{A}{K}$). La fórmula normalizada nos quedaría de la siguiente manera [2]:

[2] $$x' = x(1 - x)(\frac{x}{\alpha} - 1)$$

Después de normalizar, el siguiente paso es encontrar los puntos fijos para luego hacer el análisis de estabilidad.

Para encontrar los puntos fijos tenemos que derivar [2]:

[2] $$x' = x(1 - x)(\frac{x}{\alpha} - 1)$$

$$x' = (1 * (1 - x) * \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)) + \left(x * -1 * \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)\right) + (x * (1 - x)\left(\frac{1}{\alpha}\right))$$

Resolviendo y sustituyendo nos queda [3]:

[3] $$x' = -\frac{3x^2}{\alpha} + \frac{2x}{\alpha} + 2x - 1$$

El análisis de estabilidad se evaluó cuando x = 0, 1 y ∝, sustituyendo en [3].

Tenemos entonces que cuando x = 0

$$x' = -\frac{3(0)^2}{\propto} + \frac{2(0)}{\propto} + 2(0) - 1$$

$$x' = -1$$

Aquí el único resultado es -1, entonces este punto es estable

Cuando x = 1

$$x' = -\frac{3(1)^2}{\propto} + \frac{2(1)}{\propto} + 2(1) - 1$$

$$x' = -\frac{3}{\propto} + \frac{2}{\propto} + 2 - 1$$

$$x' = -\frac{1}{\propto} + 1$$

En este punto fijo:

Si ∝ = 0 entonces el punto fijo es inestable;

Si ∝ > 0>1 entonces el punto fijo es estable;

Si ∝ >1 entonces el punto fijo es inestable

Cuando **x =** ∝

$$x' = -\frac{3(\propto)^2}{\propto} + \frac{2(\propto)}{\propto} + 2(\propto) - 1$$

$$x' = -3 \propto +2 \propto +2 - 1$$

$$x' = -\propto +1$$

En este punto fijo:

Si ∝ = 0 entonces el punto fijo es inestable;

Si ∝ > 0 entonces el punto fijo es estable;

Si ∝ >1 entonces el punto fijo es inestable

El análisis matemático se comprobó graficando la fórmula [2] y dándole valores a ∝ igual, menor o mayor a N_0, verificando su comportamiento a través del tiempo (Figura 1).

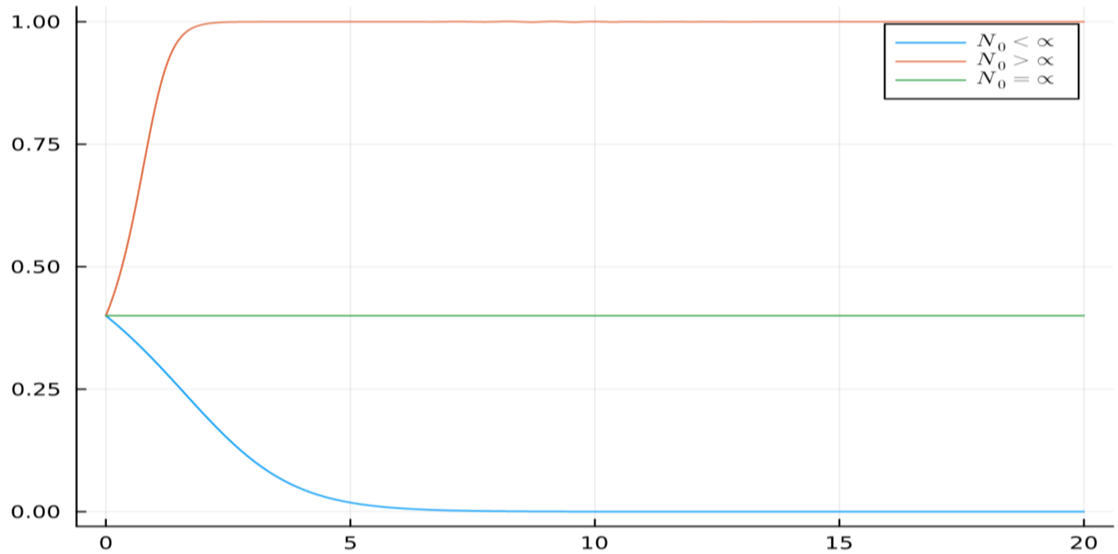

Figura 1. Gráfica de comportamiento de ∝ en la ecuación normalizada del efecto Allee.

Conclusión

En conclusión pudimos comprobar que el modelo propuesto por Allee, puede llegar a predecir el comportamiento de ciertas poblaciones si se cumplen ciertos criterios, también pudimos comprobar el comportamiento de los puntos fijos dados por la fórmula del efecto Allee en un modelo logístico.

Bibliografía

1. Vargas R, Rodríguez S. Dinámica de poblaciones. Manejo plagas en paltos y cítricos Inst Investig Agropecu Colección Libr INIA. 2008;23(200):99–105.
2. Warder C. Allee, The Social Life of Animals. New York Nort. 1938;6:272.
3. Allee WC, Emerson AE. 0. Park, T. Park, and KP Schmidt. 1949. Principles of animal ecology. B Saunders Co, Philadelphia. 1957;
4. Elaydi SN, Sacker RJ. Population models with Allee effect: a new model. J Biol Dyn. 2010;4(4):397–408.