Carolina Siller Cedillo **Biología Matemática**
Maestría en Ingeniería y Física Biomédicas

Reporte 4: Modelo Lotka-Volterra para predecir la dinámica poblacional cuando existe mutualismo

Introducción

Las interacciones entre poblaciones de distintas especies son un factor dependiente de densidad importante para explicar el cambio en las dinámicas poblacionales. Estas interacciones ocurren cuando las acciones de una población resultan en el cambio de alguno de los atributos de otra como pueden ser su mortalidad, reproducción, taza de crecimiento, entre otros. Estas interacciones pueden tener una afectación positiva, neutra o negativa, y entre las interacciones positivas se encuentra el mutualismo. El mutualismo se refiera a cuando existe una dependencia entre dos o más especies para asegurar su supervivencia. Dependiendo del grado de dependencia que presentan las especies estas se pueden clasificar en diferentes tipos de mutualismo los cuáles son mutualismo obligatorio y facultativo. El facultativo se presenta cuando las especies pueden llegar a sobrevivir aun y en la ausencia del mutualismo mientras que el obligatorio se refiere a cuando las especies se extinguen debido a la falta del mutualismo. Pueden existir interacciones obligadas-obligadas donde ambas especies necesitan de la otra para sobrevivir, obligadas-facultativas donde una puede sobrevivir sin la presencia de la otra y facultativas-facultativas donde ambas especies sobreviven, aunque no se presente el mutualismo. Se pueden dar casos donde un gran número de especies pueden proveer los beneficios necesarios para una especie, a esto se le llama mutualismo generalizado, mientras que en otros casos solo una especie puede proveer estos beneficios y a esto se le llama mutualismo específico.
Este tipo de interacciones es necesario para mantener los ecosistemas ya que gran parte de la supervivencia de estos depende de las interacciones entre las especies que los habitan (Holland & Bronstein, 2008).
Cabe recalcar que la palabra mutualismo no es un sinónimo para simbiosis la cual se refiere a cuando existe una asociación estrecha entre dos especies y esta ocurre casi todo el ciclo de vida de las especies. Aunque a veces el mutualismo puede ser simbiosis y existen relaciones simbióticas que también son mutualistas este no es el caso para todas las relaciones simbióticas.
El modelo de Lotka-Volterra fue diseñado para describir las dinámicas poblacionales donde dos especies compiten por los recursos o existe una interacción presa-depredador. La principal característica de este modelo es que el cambio en una población depende del tamaño de la otra ya que mientras más grande sea una población más afecta negativamente a la otra y es por ello que al final solo una de ellas puede sobrevivir, aunque se puede presentar el caso donde ambas especies coexistan sin embargo este es raro. Este modelo nos ayuda a predecir el resultado final dependiendo de la población inicial, la capacidad de carga y el coeficiente de competición (Shorrocks, 2001).
Actualmente no existen muchos modelos que logren predecir el comportamiento de dos poblaciones cuando existe una interacción de mutualismo entre ellas es por ello

que en este proyecto se propone la modificación del moodle Lotka-Volterra para predecir la dinámica poblacional cuando hay mutualismo, esto debido a que este modelo es el más simple para analizar la competencia entre especies y por lo tanto es sencillo adaptarlo para la situación de mutualismo ya que la única diferencia es el cambio del signo asociado a la interacción entre especies.

Metodología

Las ecuaciones obtenidas al adaptar el modelo Lotka-Volterra para mutualismo son las siguientes:

$$x^{\circ} = rxX(1 - \frac{x}{kx} + Ay)$$
$$y^{\circ} = ryY(1 - \frac{y}{ky} + Bx)$$

Donde Ay y Bx se refiere a como afecta la otra población al desarrollo de la población analizada. Posteriormente se normalizo la ecuación para obtener un menor número de variables, para esto se definieron nuevas variables como lo son:

$$x = \frac{x}{kx}$$
$$y = \frac{y}{ky}$$
$$\alpha = Aky$$
$$\beta = Bkx$$

Donde x y y son variables sin unidad y α y β representa como una población afecta a la otra. De igual manera se normalizo el tiempo introduciendo una nueva variable ρ que se refiere a la comparación de la taza de crecimiento. Una vez normalizadas las ecuaciones finales son:

$$x' = x(1 - x + \alpha y)$$
$$y' = \rho y(1 - y + \beta x)$$

A partir de estas ecuaciones se realizó el análisis cualitativo para poder obtener los puntos fijos. Se igualaron las ecuaciones a 0 y se observó que existían 4 puntos fijos posibles:

$$x' = y' = 0$$
$$x(1 - x + \alpha y) = 0$$
$$y(1 - y + \beta x) = 0$$

ρ no puede ser 0 por lo tanto los puntos fijos no dependen de este valor.
Los puntos fijos obtenidos para este modelo son (0,0), (0,1), (1,0) y existe un cuarto punto fijo ($\frac{1+\alpha}{1-\alpha\beta}$, $\frac{1+\beta}{1-\alpha\beta}$)que solo se presenta cuando α y β son menores a 1.

Una vez obtenidos los puntos fijos se realizó el análisis de estabilidad, para esto se obtuvo una matriz jacobiana general y a partir de esta se sustituyeron los valores para cada caso y así poder conocer la estabilidad de cada uno.

$$J = \begin{Bmatrix} 1-2x+\alpha y & \alpha x \\ \rho\beta y & \rho(1-2y+\beta x) \end{Bmatrix}$$

Por último, se realizó un código en Python para este modelo donde se obtuvieron graficas que representan como se comportan las poblaciones cuando existe una interacción de mutualismo.

Resultados

- El punto fijo (0,0) es un nodo inestable.
- Los puntos fijos (0,1) y (1,0) son nodos silla
- El punto fijo $(\frac{1+\alpha}{1-\alpha\beta}, \frac{1+\beta}{1-\alpha\beta})$ es estable siempre que $\alpha, \beta < 1$

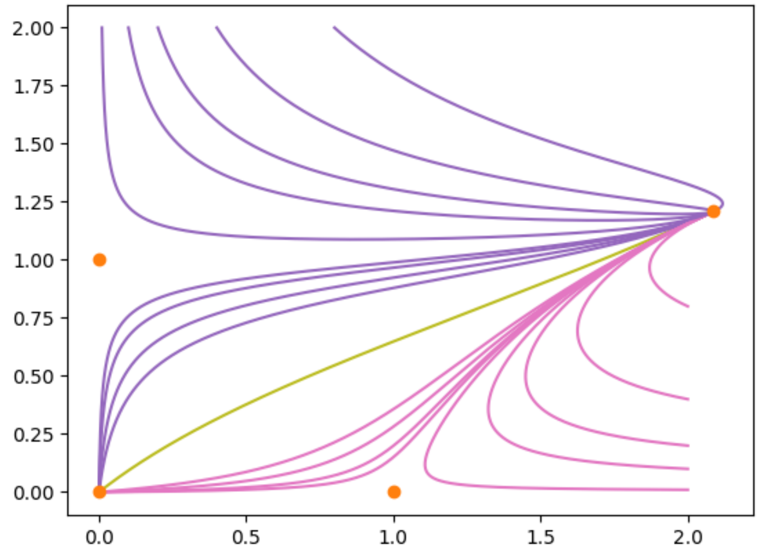

Fig 1. Predicción de la dinámica poblacional del mutualismo utilizando el modelo Lotka-Volterra con un $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.1$ y $\rho = 1$

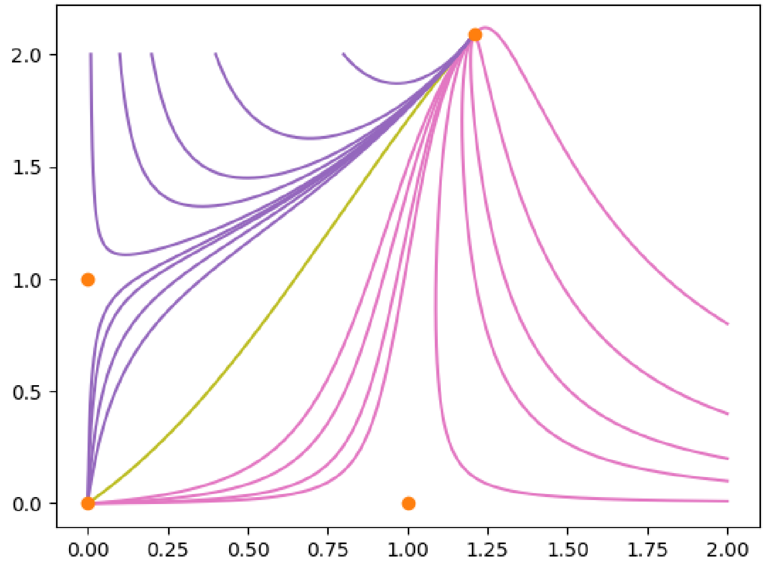

Fig 2. Predicción de la dinámica poblacional del mutualismo utilizando el modelo Lotka-Volterra con un $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.9$ y $\rho = 1$

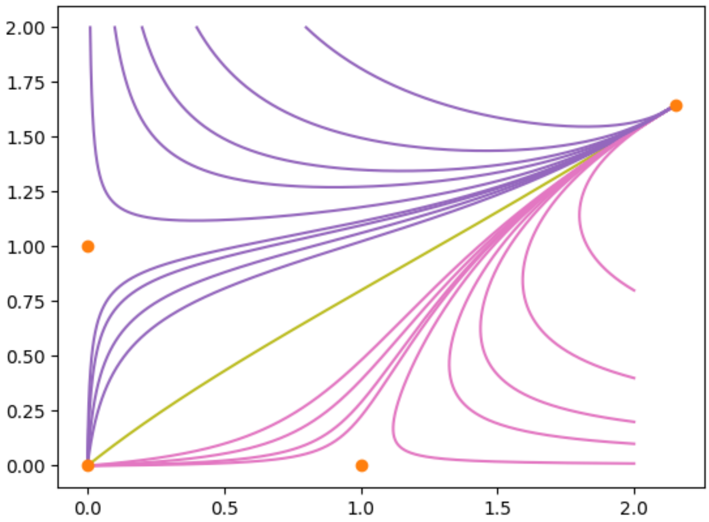

Fig 3. Predicción de la dinámica poblacional del mutualismo utilizando el modelo Lotka-Volterra con un $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.3$ y $\rho = 1$

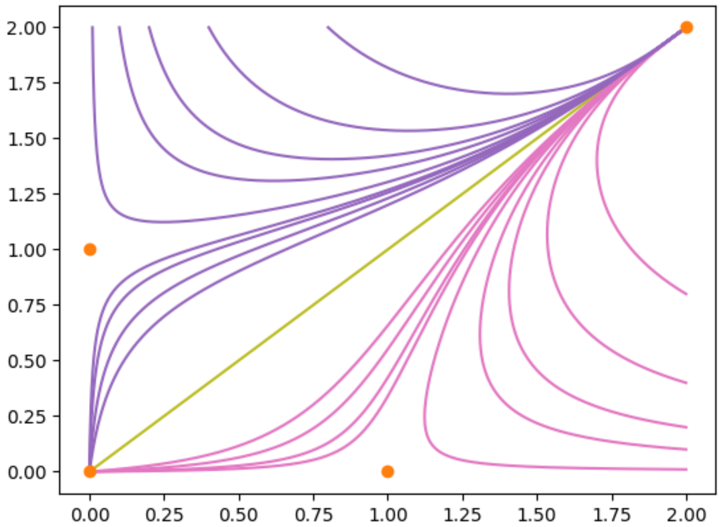

Fig 4. Predicción de la dinámica poblacional del mutualismo utilizando el modelo Lotka-Volterra con un $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ y $\rho = 1$

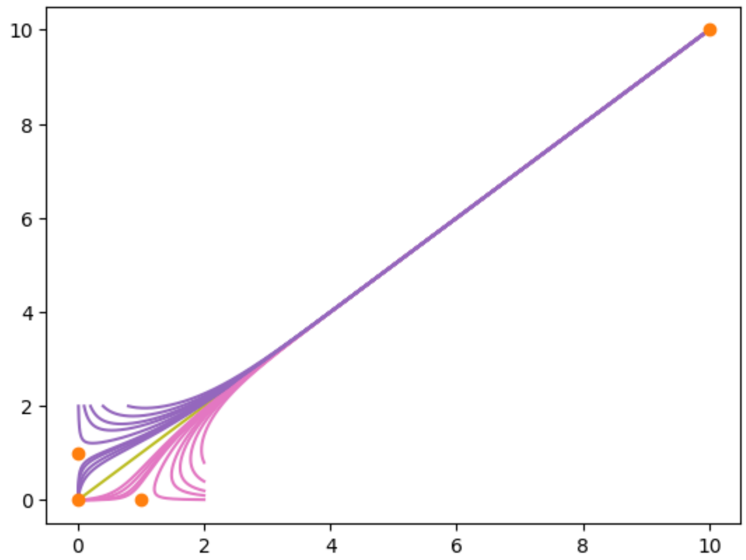

Fig 5. Predicción de la dinámica poblacional del mutualismo utilizando el modelo Lotka-Volterra con un $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.9$ y $\rho = 1$

Discusión

Como se puede visualizar en las gráficas cuando α y β son menores a 1 y asimétricas se observa un crecimiento controlado de ambas poblaciones donde una se puede ver un poco más favorecida de la otra dependiendo de cual ejerza una mayor fuerza de interacción sobre la otra aunque los cambios son mínimos y cómo podemos observar en las figuras 3 y 4 estas son muy similares aun y cuando en una los valores de α y β son asimétricos y en otra no lo cual representa que no existe un gran cambio en la densidad poblacional ocasionado por el mutualismo. Sin embargo, cuando las fuerzas de interacción son simétricas y se acercan más al 1 se ve que el crecimiento de ambas poblaciones aumenta de manera linear. Si los valores de α y β fueran mayores a 1 se observaría un mutualismo inestable donde el crecimiento de las poblaciones estaría descontrolado debido a que ambas poblaciones siempre se estarían retroalimentando positivamente y eso combinado con las funciones lineares del modelo Lotka-Volterra nos daría un resultado muy alejado a la realidad (Holland, 2015). Es por ello que este modelo solamente se puede utilizar cuando las fuerzas de interacción presentes son débiles, sin embargo, estos casos son muy pocos ya que esto significaría que el mutualismo tiene un efecto menor en las dinámicas poblacionales lo cual no es cierto en la naturaleza. Holland (2012) reporta que para que el modelo de Lotka-Volterra pueda simular las interacciones de mutualismo que se presentan en la naturaleza normalmente se debe de incluir un parámetro que permita la saturación en los beneficios del mutualismo.

Aunque el uso del modelo Lotka-Volterra no es el más indicado para predecir como se pueden llegar a comportar las poblaciones que se encuentran en una interacción de mutualismo si es importante el seguir buscando alternativas que nos ayuden a describir el comportamiento poblacional para este caso ya que el mutualismo es de suma importancia en lo que respecta a la densidad poblacional sin embargo si lo comparamos con la competición por recursos esta interacción no ha recibido mucha atención por parte de los ecólogos (Thompson et al. 2006).

Conclusiones

El modelo de Lotka-Volterra solo presenta resultados estables cuando las interacciones de mutualismo son débiles lo cual no concuerdo con lo que observamos en la naturaleza por lo tanto no es el modelo más adecuado para representar este tipo de interacciones. El mutualismo influye mucho en el comportamiento poblacional y es importante para el mantenimiento de los ecosistemas por lo cual se debe de continuar buscando y probando modelos que puedan describir con precisión este tipo de interacciones.

Bibliografía

- Holland, J. N., & Bronstein, J. L. (2008). Mutualism. Encyclopedia of Ecology, 2485–2491. doi:10.1016/b978-008045405-4.00673-x
- Holland, N. J. (2012) Population Dynamics of Mutualism. Nature Education Knowledge 3(10):2
- Holland, J. N. 'Population ecology of mutualism', in Judith L. Bronstein (ed.), Mutualism (Oxford, 2015; online edn, Oxford Academic, 17 Sept. 2015).
- Shorrocks, B. (2001). Competition, Interspecific. Encyclopedia of Biodiversity, 177–191.
- Thompson A., Nisbet R. M., Schmitt R. J. (2006). Dynamics of mutualist populations that are demographically open. Journal of Animal Ecology 2006 75, 1239–1251