CINVESTAV MONTERREY

08 de noviembre de 2022

BIOLOGÍA MATEMÁTICA

EFECTO ALLEE

Karina Juárez Navarro

INTRODUCCIÓN

Un ecosistema está constituido por diferentes organismos que se encuentran compitiendo por recursos limitados para evitar la extinción. Esto genera una interacción entre especies, que puede ser beneficiosa para algunas (supervivencia vinculada a la existencia de sus presas) o perjudicial para otras (depredación por parte de otras especies). Así como también la abundancia o escasez de recursos del ecosistema (alimento, agua, luz, espacio, entre otros).

Para analizar las variaciones en el tamaño de una población a través del tiempo son necesarios los modelos poblacionales. Sin embargo, si se toman en cuenta los factores anteriores, su formulación sería muy compleja. Por lo tanto, es conveniente estudiar los modelos poblacionales con una única especie. A finales del siglo XVIII Thomas Malthus propuso el Modelo de crecimiento exponencial, el cual solo considera la tasa de natalidad de los individuos y recursos ilimitados para su crecimiento, siendo uno de los modelos más simples. Al contrario de esto, el modelo Logístico descrito por Verhulst, sugiere que la población no crece ilimitadamente, sino que sigue un crecimiento hasta alcanzar una capacidad máxima (K), representado por:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Donde r corresponde a la tasa de crecimiento y N el número de individuos. Al inicio la población tiene un crecimiento lento, pero a un tiempo determinado este crecimiento es rápido hasta llegar a la fase de crecimiento estacionario. Warder Clyde Allee observó que en una población pequeña tal crecimiento puede existir, pero también puede haber extinción de la especie. Esta observación se relaciona con el número de individuos inicial de la población o densidad de población. Allee concluyó que existe un punto crítico en el que si la densidad inicial de la población está por debajo de este punto crítico, la población se extingue y si está por encima de este punto crítico, la población tiene una fase de crecimiento positivo. Una población con el efecto Allee tiene un umbral de tamaño de población, es decir, si la población esta debajo de ese umbra se extingue. El efecto Allee está descrito con la siguiente formula:

Ec.1
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right)\left(\frac{N}{A}-1\right)$$

N corresponde a la densidad de la población, A al umbral de Allee y t el tiempo.

En este trabajo se analizarán los diferentes comportamientos que una población con efecto Allee puede tener, así mismo se encontraran los puntos fijos y se realizará un análisis de estabilidad de estos.

METODOLOGIA Y RESULTADOS

Normalización de la ecuación del efecto Allee (*Ec. 1*)

Para reducir el número de parámetros de la *Ec.1* se realizó una normalización, obteniendo como resultado la siguiente ecuación (*Ec. 2*).

Ec.2
$$x' = x(1-x)\left(\frac{x}{\propto}-1\right)$$

Donde $\propto = \frac{A}{K}$

Puntos fijos y análisis de estabilidad

Para encontrar los puntos fijos se derivó la *Ec.2.*

$$x' = (x-x^2)\left(\frac{x}{\propto}-1\right)$$

$$x' = (1-2x)\left(\frac{x}{\propto}-1\right)$$

$$x' = -\frac{2x^2}{\propto}-\frac{x^2}{\propto}+\frac{x}{\propto}+\frac{x}{\propto}+2x-1$$

Ec. 3
$$x' = -\frac{3x^2}{\propto}+\frac{2x}{\propto}+2x-1$$

El análisis de estabilidad se evaluó cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, y $x_3 = \propto$, de acuerdo con la *Ec. 3*.

Así para $x_1 = 0$

$$x' = -\frac{3(0)^2}{\propto} + \frac{2(0)}{\propto} + 2(0) - 1$$

$$x' = -1$$

Cuando $x_1 = 0$ es estable.

$x_2 = 1$

$$x' = -\frac{3(1)^2}{\propto} + \frac{2(1)}{\propto} + 2(1) - 1$$

$$x' = -\frac{3}{\propto} + \frac{2}{\propto} + 2 - 1$$

$$x' = -\frac{1}{\propto} + 1$$

Si $\propto = 0$, es inestable; $\propto > 0$, es estable; $\propto < 0$, es inestable; $\propto > 1$ = inestable.

$x_3 = \propto$

$$x' = -\frac{3(\propto)^2}{\propto} + \frac{2(\propto)}{\propto} + 2(\propto) - 1$$

$$x' = -3 \propto + 2 \propto + 2 - 1$$

$$x' = -\propto + 1$$

Si $\propto = 0$, es inestable; $\propto > 0$, es inestable; $\propto < 0$, es inestable $\propto > 1$, es estable.

Se analizaron la densidad de una población con respecto al tiempo, evaluando distintos valores de $\propto$, como se muestra en la Figura 1.

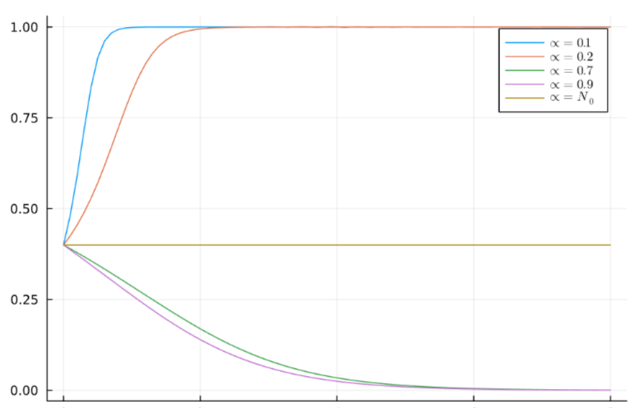

Figura 1. Densidad de la población con diferentes valores de $\propto$.

CONCLUSIÓN

La rapidez con la que pueda crecer o extinguirse una población depende del valor de $\propto$ con respecto al valor inicial del número de individuos (N_0). Cuando $\propto < N_0$ la población tiende al crecimiento hasta alcanzar la capacidad de carga, y la rapidez con la que lo haga dependerá de que tan cerca de 0 sea el valor de este parámetro. Por otra parte, si $\propto > N_0$ la población tenderá a la extinción, y el tiempo que tarde en hacerlo dependerá de que tan cerca esté $\propto$ de 1. Si $\propto = N_0$, el número de individuos se mantendrá constante.

BIBLIOGRAFÍA

dos Santos, L.S., Cabella, B.C.T. & Martinez, A.S. Generalized Allee effect model. *Theory Biosci.* **133**, 117–124 (2014). https://doi.org/10.1007/s12064-014-0199-6

Brian J. Winkel. (2011) Parameter Estimates in Differential Equation Models for Population Growth. PRIMUS 21:2, pages 101-129.