

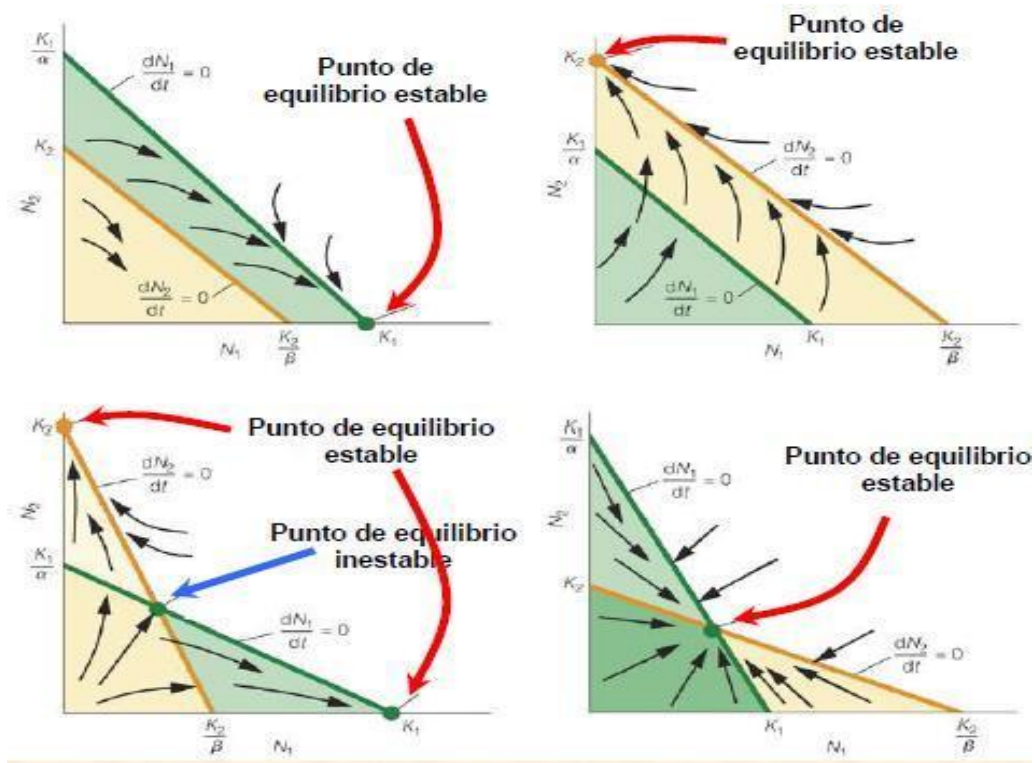
CINVESTAV

MODELO MUTUALISTA

DE LOTKA-VOLTERRA

05 DE ENERO DE 2023

CARLOS ALBERTO CULEBRO GAMBOA



BIOLOGÍA MATEMÁTICA

DR. MOISÉS SANTILLÁN ZERÓN

Introducción

Hay varios modelos de LV, uno es el de presa-depredador

De acuerdo con lo analizado en clases anteriores, el modelo Lotka-Volterra permite realizar una correlación entre las interacciones de presas y depredadores bajo diferentes condiciones. Una de las principales es el mutualismo esto aunado a los factores externos tales como la caza, el alimento de las especies, enfermedades y choques. Pueden ser un conjunto que den pauta a poder explicar el por qué varía el desfase de los registros en el tiempo. Este tipo de modelo en la biología poblacional, son de suma importancia ya que a través de ellos se puede describir la interacción entre varias especies consideradas depredador-presa. El mutualismo es una fuente principal en las interacciones ecológicas de las especies, en donde ambas especies pueden ser benefactoras a través de la interacción que se genera entre ellas, las acciones realizadas entre un mismo espécimen pueden ser considerado como cooperación el cual se conjuntan para poder adquirir cualidades grupales. El mutualismo es uno de los papeles más importantes dentro de la ecología, ya que está a podido impulsar la evolución de una gran parte de la biodiversidad que se tiene en la actualidad.

Antecedentes

En los diferentes ecosistemas del planeta tierra, se presentan infinidad de interacciones biológicas entre las especies que comparten un mismo hábitat, una de las principales tiende a ser el de la presa-depredación, que estipula que una de ellas se come a la otra, pero a su vez existen diferentes posibilidades, como lo es el poder luchar por los propios recursos del lugar, o el parasitismo,

La teoría de Lotka-Volterra, fue propuesta en el año 1930, por Alfred J. Lotka y en el año 1931, Vito Volterra. Trabajo que fue generado de manera independiente, pero con una gran similitud en pensamiento respecto a la dinámica poblacional, la cual tiene como principal propósito los siguientes tipos de integración:

- Si la tasa de crecimiento de una población x decrece y la otra población y se incrementa, estas están en una situación de depredador-presa.
- Cuando dos especies compiten por los recursos como alimento, agua, luz y espacio en un ecosistema, se presenta una interacción de competencia. Esto es, la tasa de crecimiento de dichas especies representa un decrecimiento de su población.
- Si para cada población la tasa de crecimiento aumenta, entonces la interacción es de *mutualismo* o simbiosis.

Este modelo matemático supone estos tres tipos de interacción poblacional: depredación, competencia y mutualismo, determinando así en este análisis que las interacciones mutualistas son posibles en un territorio.

Con lo anterior podemos especificar que el mutualismo es simplemente una interacción de dos o más especies, en donde todos se ven favorecidos unos entre sí y por medio de ello pueden mejorar sus aptitudes biológicas, esto ayuda con gran énfasis a poder tener una mayor supervivencia y puedan tener una mejor conservación de su especie.

Resultados

De acuerdo con el análisis matemático realizado, en donde x y y son las poblaciones de ambas especies respecto al tiempo, el modelo de Lotka-Volterra, asume que la presa tiende a generar un comportamiento exponencial, esto derivado a que no tenga presente un depredador que pueda mermarlo, la población de la presa consigue una evolución de acuerdo con la razón de crecimiento que esta va obteniendo. En el caso contrario si el depredador no cuenta con una presa de casa, este podría llegar al punto de la extinción derivado a la falta de alimento, en proporcionalidad con su población.

El modelo de Lotka-Volterra para el mutualismo en un sistema normalizado estará definida por la ecuación

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x(1 - x + \alpha y) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \rho y(1 - y + \beta x)$$

En donde αy y βx es la correlación que existe entre cada una de las especies y el cuanto contribuye una de la otra en cuestión de recursos, siendo ρ la comparativa en tasa de crecimiento poblacional en ambas especies. Para la obtención de los estados estacionarios consideramos

$$J = \begin{bmatrix} 1 - 2x + \alpha y & \alpha x \\ \rho \beta y & \rho(1 - 2y + \beta x) \end{bmatrix}$$

(0,0)

$$J_{y^*}^{x^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$$

$$\tau = 1 + \rho. \quad \tau > 0 \quad \text{No dices si es estable o inestable}$$

$$\Delta = \rho. \quad \Delta > 0$$

(0,1)

$$J_{\substack{x^* = 0 \\ y^* = 1}} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 0 \\ \rho\beta & -\rho \end{bmatrix}$$

$$\tau = 1 + \alpha - \rho.$$

No dices si es estable o inestable

$$\Delta = -\rho(1 + \alpha). \quad \Delta < 0$$

(1,0)

$$J_{\substack{x^* = 1 \\ y^* = 0}} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & \rho(1 + \beta) \end{bmatrix}$$

$$\tau = -1 + \rho(1 + \beta).$$

No dices si es estable o inestable

$$\Delta = -\rho(1 + \alpha). \quad \Delta < 0$$

Existe un cuarto punto fijo el cual lo podemos calcular mediante

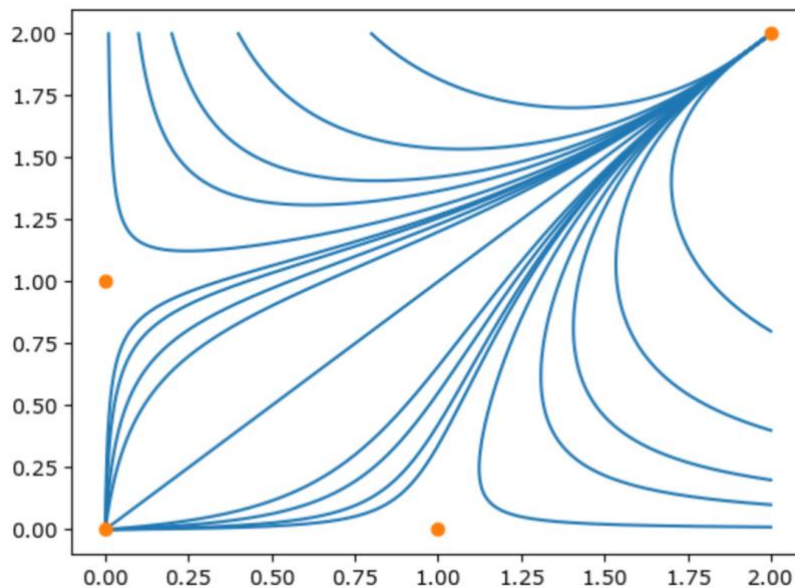
$$J_{\substack{\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha\beta} \\ \frac{1 + \beta}{1 - \alpha\beta}}} = \begin{bmatrix} -\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha\beta} & \frac{\alpha(1 + \alpha)}{1 - \alpha\beta} \\ \frac{\rho\beta(1 + \beta)}{1 - \beta\alpha} & \frac{\rho(-1 - \beta)}{1 - \beta\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\tau = \frac{-\rho(1 + \beta) - (1 + \alpha)}{1 - \beta\alpha}.$$

$$\Delta = \frac{-\rho(1 + \beta)(1 + \alpha)}{1 - \beta\alpha}. \quad \Delta < 0$$

No dices si es estable o inestable

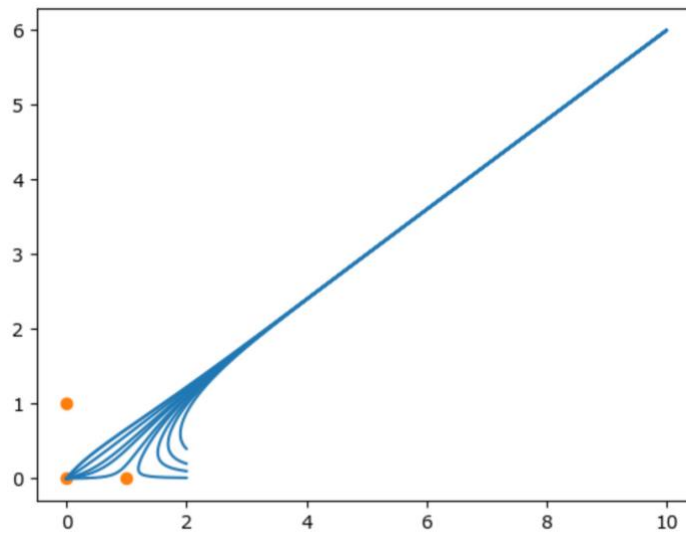
Con los puntos fijos encontrados se puede determinar que en el siguiente grafico podemos apreciar cómo las dos especies que comparten una relación mutualista tienden a generar una estabilidad en el crecimiento de ambas



A través de ello podemos determinar los siguientes puntos

- El punto fijo (0, 0) Nodo inestable.
- El punto fijo (0, 1), (1,0) punto de silla.
- El punto fijo $\left(\frac{1+\alpha_y}{1-\alpha_x\alpha_y}, \frac{1+\alpha_x}{1-\alpha_x\alpha_y}\right)$ Nodo estable.

Esto debería de salir del análisis de



En cada uno de los puntos determinados se observa la estabilidad de estos, si estos tienden a atraerse o alejarse entre si todo ello respecto al tiempo, cuando tienden a exista algún factor que los pueda perturbar, estos se alejaran pero si esta perturbación no ocurre, se mantendrán.

Conclusión

¿Qué significa que en el punto de coexistencia ambas poblaciones superen la capacidad de carga?

En este trabajo podemos describir el modelo de biología mutualista de dos especies de Lotka-Volterra. El modelo de Lotka-Volterra ha podido permitir que se den soluciones a innumerables situaciones de la vida cotidiana, en donde se puede demostrar que, para este tipo de modelos biológicos, las dos especies mutualistas pueden presentar una conexión de existencia estable. De acuerdo con el ejemplo simulado en Python para ilustrar el comportamiento ecológico de ambas especies, determinamos que en conjunto pueden coexistir llevando una estabilidad que permita el éxito en cada una de ellas.