Cinvestav
Maestría en Ingeniería y Física Biomédicas
Proyecto 3
08 noviembre, 2022

Modelo logístico y efecto Allé

González Rueda Arantxa

1. Introducción

La observación, estudio y análisis de la dinámica de población de organismos ante distintos estímulos es de suma importancia dentro de distintas áreas del conocimiento, como lo son la ecología y la biología evolutiva, entre otras (Vandermeer, J. (2010)). A pesar de que este proceso es de suma importancia, puede volverse demasiado complejo, debido a todos los factores variables que afectan directa o indirectamente esta dinámica de población. Para solucionar este problema, se han descrito diversos métodos matemáticos para modelar el distinto comportamiento de las dinámicas de población al ser afectadas por diferentes parámetros y consideraciones.
Una forma de lograr un acercamiento para los distintos modelos de dinámica de población es comenzando por la ecuación del promedio de crecimiento de población: $\frac{dN}{dT} = rN$ en donde $\frac{dN}{dT}$ se refiere a la tasa de crecimiento en un instante de tiempo; r se refiere a la tasa de aumento *per capita* (Vandermeer, J. (2010)). Sin embargo, esta ecuación es bastante general, por lo que, se han descrito dos distintos acercamientos: el modelo exponencial y el modelo logístico.
El crecimiento exponencial sugiere que la tasa de crecimiento de una población aumenta conforme la misma población lo hace, es decir, la tasa de variación de una población respecto al tiempo es proporcional a la cantidad de individuos dentro de esta (Vandermeer, J. (2010)), por lo que la población crecerá cada vez más rápido conforme el tiempo pasa. Este modelo presenta una gran desventaja, y esta es que se considera que se cuentan con recursos inagotables, la cual, es una consideración imposible dentro de la realidad. Esto no quiere decir que el crecimiento exponencial no sucede en la naturaleza, dentro de ciertas poblaciones se presenta este crecimiento durante un tiempo limitado si esta tiene pocos individuos en comparación con la cantidad de recursos que están presentes en el medio; sin embargo, conforme la población crece el número de recursos disminuye, por lo que el crecimiento de la población se va reduciendo. Esta limitante de los recursos hará que el número de individuos de una población llegue a una meseta, lo cual indica que se llegó a la población máxima que puede soportar un determinado ambiente, también llamada capacidad de carga. Esta consideración de la capacidad de carga pertenece al modelado del crecimiento de una población por medio de un modelo logístico (Vandermeer, J. (2010)). Distintos factores determinan a la capacidad de carga de una población, entre ellos se encuentran la cantidad limitada de recursos y la competencia intraespecie por estos.

Cuando una especie tiene pocos individuos conformándola, se puede presentar el efecto Allé; en el cual, el crecimiento de una población se reduce si la densidad de esta es baja, lo cual quiere decir que el efecto Allé es una asociación positiva entre la aptitud individual media absoluta y el tamaño de una población en un intervalo de tiempo finito (Drake, J. M. and Kramer, A. M. (2011)). Esta asociación positiva puede llevar a una población a llegar a una densidad crítica en donde la misma deja de existir. Este efecto se puede deber a una amplia variedad de mecanismos en donde se ven afectados la reproducción y la supervivencia.

2. Planteamiento

En este trabajo se busca analizar la dinámica de una población cuya densidad es baja y que, además, está experimentando el efecto Allé. También se espera lograr un análisis de los estados estacionarios de la función dada.

3. Metodología

3.1. Normalización de la ecuación que describe el crecimiento de una población con efecto Allé

La **Eq. 1** describe el modelo logistico del crecimiento de una población experimentando el efecto Allé.

$$N' = r(1 - \frac{N}{K})(\frac{N}{a} - 1)N \tag{1}$$

Donde: N' es la tasa de cambio de una población respecto al tiempo; N es el número de individuos; K es la capadidad de carga; a es el punto crítico; r es 1/tiempo.

Se realizó una normalización de la variable dependiente (N) y la variable independiente (tiempo). Con lo que se consiguió la **Ec. 2**:

$$x' = x(1 - x)(\frac{x}{\alpha} - 1) \tag{2}$$

Donde: x es igual a N/K y α es igual a a/K
Se graficó la **Eq. 2** en un intervalo de tiempo de 0 a 10 y considerando distintos valores de α con la condición de que 0 $<\alpha<$1.
Esto con el fin de observar la dinámica de la población estudiada en distintas condiciones de su punto crítico en función de la capacidad de carga.

3.2. Análisis de los estados estacionarios y su estabilidad

Considerando la **Eq. 2**, se llevó a cabo el análisis para identificar los estados estacionarios de la dinámica de la población en cuestión. La **Eq.3** es el caso donde la **Eq. 2** se iguala a cero, esto con el fin de analizar los casos donde esta igualdad se cumple, siendo estos los estados estacionarios de la función.

$$x(1 - x)(\frac{x}{\alpha} - 1) = 0 \tag{3}$$

Luego de obtener los estados estacionarios, estos se analizaron y evaluaron para poder determinar si estos son estables o no.

4. Resultados

De la normalización y graficación de la **Eq. 2** se obtuvo la **gráfica 1**.

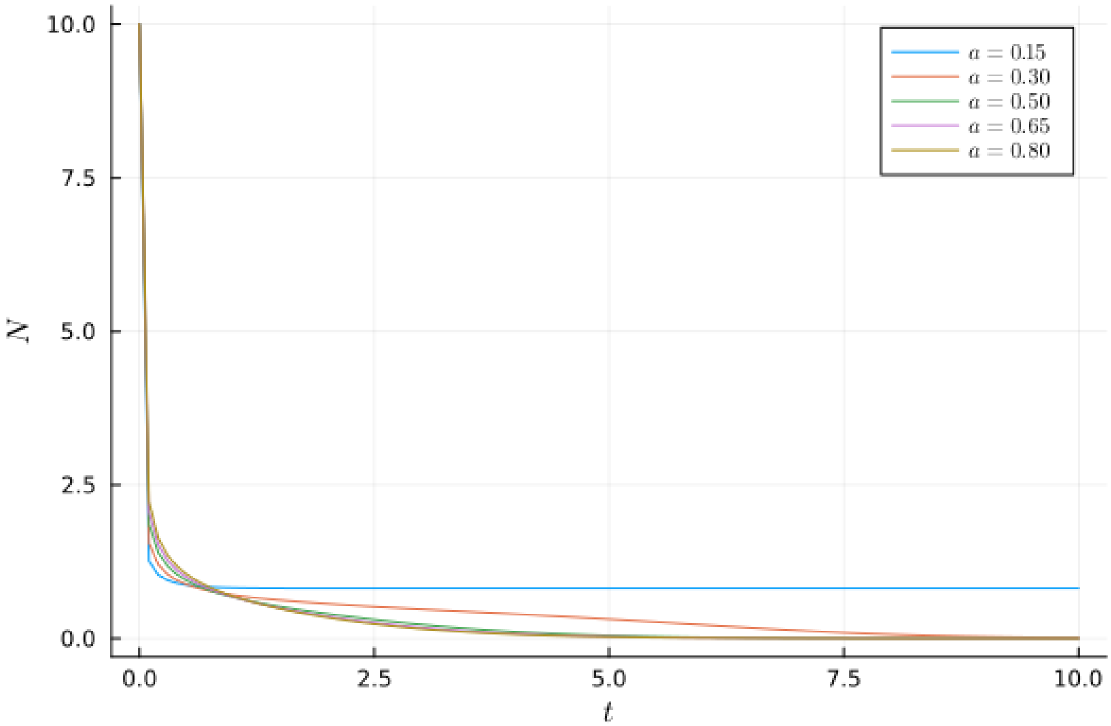

Figura 1: *Gráfica de la dinámica de poblaciones descrita por la **Eq. 2**. La función fue evaluada con distintos valores de α, los cuales se indican en la parte superior derecha de la imágen. Las funciones muestan un decaimiento de población dentro de un tiempo corto de tiempo.*

En la **Figura 1** podemos observar que a pesar de que los valores de α vayan aumentando, la dinámica de la población sigue siendo similar, sufriendo un decaimiento marcado en un intervalo de tiempo corto. Sin embargo, una vez que llega a un punto máximo de decaimiento, estas funciones comienzan a presentar un comportamiento diferente entre ellas. Por ejemplo, cuando el valor de α es de 0.15, la gráfica muestra un comportamiento estable a lo largo del periodo de tiempo definido, mientras que, las demás funciones, dependiendo de que tan cercano es el valor de α a 1, tienden más a 0, tal y como se observa para los casos donde α es igual a 0.80, 0.65 y 0.50. Esto toma un significado, en el cual, si consideramos que α está definido por el cociente entre el punto crítico y la capacidad de carga, conforme este cociente vaya en aumento, el decaimiento de la población será no solo bastante pronunciado, sino que también tenderá a cero dentro del periodo de tiempo definido, por lo cual, esta población experimentará una tendencia a una extinción más pronta, en comparación con aquella dinámica de población definida por un valor pequeño de α.

Luego, al evaluar a la **Eq. 2** en búsqueda de los estados estacionarios. Durante la evaluación se hallaron 3 diferentes puntos, los cuales son: cuando $x = 1$, $x = \alpha$ y $x = 0$. En estos puntos, la tasa de cambio de la población no cambia independientemente del tiempo. Además, se analizó la estabilidad de estos puntos, de lo cuales, $x = 0$ y $x = 1$ es estable, mientras que cuando $x = \alpha$ es insestable.

5. Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se logró observar y analizar el comportamiento de una dinámica de poblaciones de baja densidad que experimentan el efecto Allé, así como el observar que tanto varia este comportamiento mientras se modifica el valor de la variante que se encuentra relacionada con el punto crítico de el efecto Allé. Además, se lograron identificar los estados estacionarios de esta función y analizar si son estables o no.

Como perspectiva, se espera que en futuros trabajos de analice una dinámica de poblaciones que experimenten un efecto Allé fuerte y débil, así como considerar otros factores que podrían afectar a la supervivencia de la población estudiada.

Referencias

01 Vandermeer, J. (2010) How Populations Grow: The Exponential and Logistic Equations. Nature Education Knowledge 3(10):15 Available from: https://www.nature.com/scitable/knowledge/library/how-populations-grow-the-exponential-and-logistic-13240157/

[0] [1] Drake, J. M. Kramer, A. M. (2011) Allee Effects. Nature Education Knowledge 3(10):2 Available from: https://www.nature.com/scitable/knowledge/library/allee-effects-19699394/