Diana Bautista Espinosa
Biología Matemática
Maestría en Ingeniería y Física Biomédicas

SIMULACIÓN DE UNA RELACIÓN DE MUTUALISMO MEDIANTE EL MODELO LOTKA-VOLTERRA

Introducción

Las interacciones entre especies en un ecosistema son complejas, cuyo efecto entre ellas puede ser positivo o negativo. Es decir, las especies pueden ser afectadas o beneficiadas por la presencia de la otra. De esta manera las relaciones interespecíficas se clasifican en tres grupos (Barrera-Rodríguez, Vieira-Salazar y Duque-Oliva, 2020): el primero incluye a las especies que son perjudicadas por estas relaciones, como lo son la competencia, depredación y parasitismo. El siguiente comprende al comensalismo, que son relaciones donde una de las especies se beneficia y la otra no se beneficia ni perjudica. El último grupo se da en las relaciones donde las especies son beneficiadas mutuamente, como es el mutualismo.

En el mutualismo las especies reciben beneficios como el incremento en la capacidad reproductiva, el crecimiento y/o supervivencia de la población de las especies (Pérez, 2007). Estas relaciones, particularmente entre diferentes reinos, han tenido un gran impacto en la generación de la biodiversidad en la Tierra, constituyéndose como un promotor de la biodiversidad (Bascompte y Jordano, 2008). Además, es necesario considerar que estas relaciones son complejas, pues suelen involucrar decenas e incluso cientos de especies en complicadas redes.

Por otro lado, tales relaciones también son de gran importancia en la conservación de especies, pues para preservar especies es necesario considerar qué otras condiciones y especies son necesarias para su supervivencia.

Una de las grandes tareas que existen en la conservación de especies es entender como estas redes serán perturbadas por la pérdida de hábitat, las invasiones biológicas, la sobreexplotación de los recursos naturales y el cambio climático (Bascompte y Jordano, 2008); problemas que son de gran relevancia actual.

Debido a su relevancia ecológica, en busca del entendimiento general predictivo de una relación mutualista de dos especies se modela a continuación en una adaptación del modelo Lotka-Volterra.

Metodología

La ecuación que representa una relación de mutualismo son las siguientes:

$$x' = r_x X(1 - \frac{x}{kx} + A_y)$$

$$y' = r_y Y(1 - \frac{y}{ky} + B_y)$$

Donde:

x' y y' son la cantidad de individuos a lo largo del tiempo.

x y y son la cantidad de individuos de cada población.

kx y ky es la capacidad de carga de cada población.

<u>Normalización de la ecuación</u>

Creando las siguientes nuevas variables:

$$x = \frac{x}{kx} \qquad y = \frac{y}{ky}$$

Se prosigue a derivarlas:

$$x' = \frac{1}{kx}X \qquad y' = \frac{1}{ky}Y$$

Se sustituyen en las ecuaciones originales:

$$k_{\boldsymbol{x}}X = r_x k_x X(1 - x + \alpha_{yx}Y)$$

$$k_{\boldsymbol{y}}Y = r_y k_y Y(1 - y + \alpha_{xy}X)$$

Que se convierten en:

$$x' = r_x X(1 - x + \alpha_{yx}Y)$$

$$y' = r_y Y(1 - y + \alpha_{xy}X)$$

Transformando también el tiempo como unidad adimensional quedan las siguientes ecuaciones normalizadas:

$$x' = \mathrm{x}(1 - x + \alpha_{yx}Y)$$

$$y' = \mathrm{py}(1 - y + \alpha_{xy}X) \qquad \text{donde } p = \frac{ry}{rx}$$

Tales ecuaciones fueron graficadas con la ayuda del lenguaje de programación Python, cuyo análisis es presentado en la sección de Resultados.

Determinación de puntos fijos

Los puntos fijos son soluciones en el tiempo son cuando $x' = y' = 0$:

$$x' = \mathrm{x}\left(1 - x + \alpha_{yx}Y\right) = 0$$

$$y' = \mathrm{y}\left(1 - y + \alpha_{xy}X\right) = 0$$

1. $x' = 0 \qquad y' = 0 \qquad \rightarrow (0,0)$
2. $x = 0 \;\Rightarrow\; 1 - y + 0 = 0 \qquad \rightarrow (0,1)$
   $y' = 1$
3. $y = 0 \;\Rightarrow\; 1 - x + 0 = 0 \qquad \rightarrow (1,0)$
   $x' = 1$
4. $1 - x + \alpha_{yx}Y = 0 \;\Rightarrow\; x' = \dfrac{1 + \alpha_{yx}}{1 - \alpha_{yx}\alpha_{xy}} \qquad y' = \dfrac{1 + \alpha_{yx}}{1 - \alpha_{yx}\alpha_{xy}}$
   $1 - y + \alpha_{xy}X = 0$

Análisis de estabilidad

Se desarrollan las ecuaciones de las derivadas de x y y.

$$x' = \mathrm{x}\left(1 - x + \alpha_{yx}Y\right) = x - x^2 + \alpha_{yx}XY$$

$$y' = \mathrm{py}\left(1 - y + \alpha_{xy}X\right) = \mathrm{p}(y - y^2 + \alpha_{xy}XY)$$

A partir de las ecuaciones se calcula la matriz Jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2 + \alpha_{yx}Y & \alpha_{yx}X \\ p + \alpha_{xy}Y & p(1 - 2y + \alpha_{xy}X) \end{pmatrix}$$

Al resolver la matriz, calculando la traza y determinante, se obtienen los siguientes resultados:

En el primer punto fijo (0,0) cuando:

La estabilidad no depende del valor de alpha

$\alpha_{yx} < 1 \therefore$ Nodo inestable. Es decir, ninguna población sobrevive.

La inestabilidad no significa eso.

En el segundo punto fijo (0,1) cuando:

$\alpha_{yx} < 1 \therefore$ Punto silla. Es decir, la población y tiene el control de su supervivencia.

La estabilidad no depende de alpha

Que sea punto de silla no significa esto.

En el tercer punto fijo (1,0) cuando:

Mismos comentarios que en el punto fijo anterior.

$\alpha_{xy} < 1 \therefore$ Punto silla. Es decir, la población x tiene el control de su supervivencia.

En el cuarto punto fijo $\left(\frac{1+\alpha_{yx}}{1-\alpha_{yx}\alpha_{xy}}, \frac{1+\alpha_{yx}}{1-\alpha_{yx}\alpha_{xy}}\right)$ cuando:

$\alpha_{xy} < 1 \; y \; \alpha_{yx} < 1 \therefore$ Nodo estable

La condiciones que el producto
de las alphas sea menor que uno.

Resultados

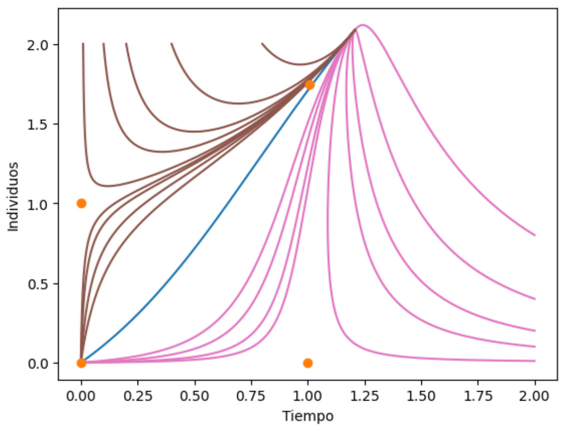


Figura 1. Poblaciones con α_{yx} igual a 0.1 y α_{xy} igual a 0.9 con un p de 1.

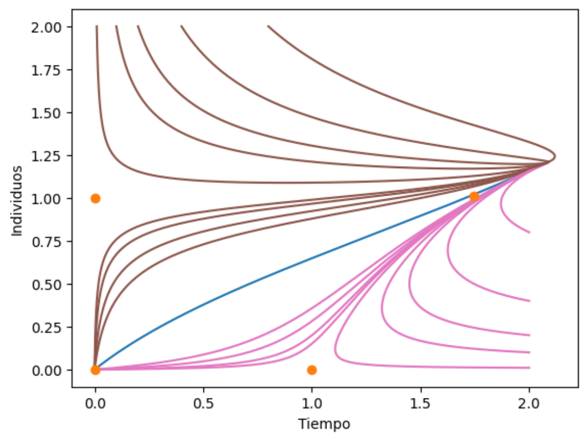


Figura 2. Poblaciones con α_{yx} igual a 0.9 y α_{xy} igual a 0.1 con un p de 1.

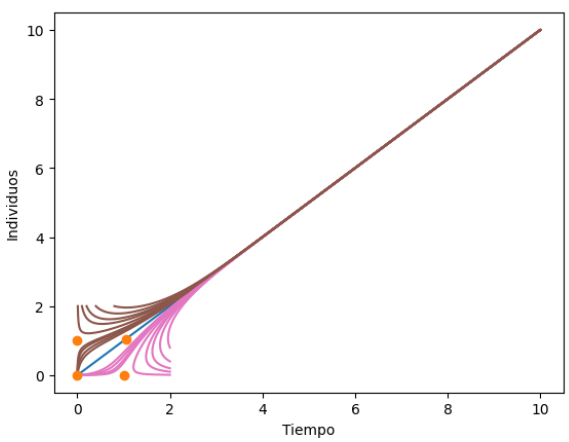


Figura 3. Poblaciones con α_{yx} igual a 0.9 y α_{xy} igual a 0.9 con un p de 1.

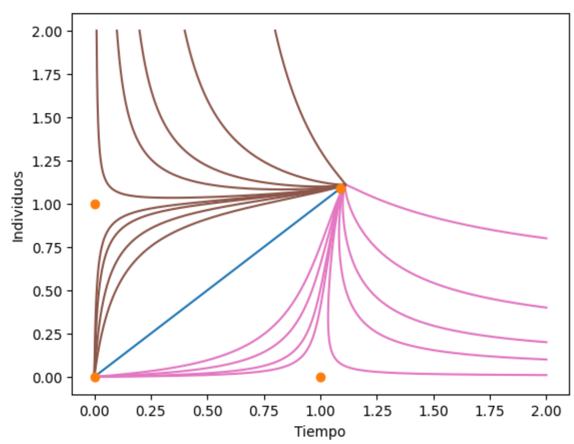
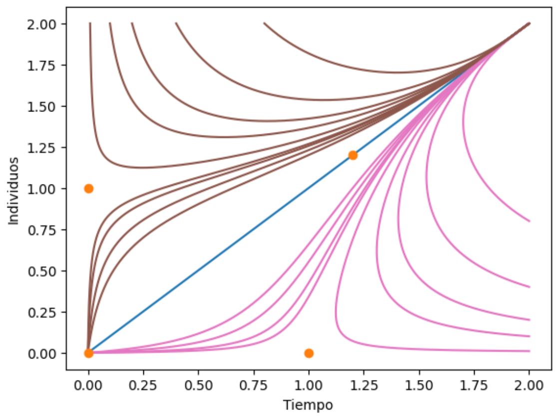


Figura 4. Poblaciones con α_{yx} igual a 0.1 y α_{xy} igual a 0.1 con un p de 1.

En las tres primeras gráficas, la
posición del cuarto punto fijo no
coincide con las simulaciones.



mismo comentario

Figura 5. Poblaciones con α_{yx} igual a 0.5 y α_{xy} igual a 0.5 con un p de 1.

Discusión

El modelo presentado es una adaptación de Lotka-Volterra, el cual busca simular una relación de mutualismo entre dos especies.

Observando las cinco gráficas, se observa que ambas poblaciones tienden a estabilizarse cerca del punto fijo $\left(\frac{1+\alpha_{yx}}{1-\alpha_{yx}\alpha_{xy}}, \frac{1+\alpha_{yx}}{1-\alpha_{yx}\alpha_{xy}}\right)$, lo cual concuerda con lo analizado al ser un nodo estable. En tal punto, como se observa con mayor claridad en la Fig. 3, existe una probabilidad de sobrepasar la capacidad de carga del ecosistema. Tal punto ya había sido discutido con anterioridad por Jaramillo Mejía y colaboradores (2013), donde se expone que el crecimiento de las poblaciones sin límite presentado por el modelo se debe a la falta de consideración de relaciones de competencia con otras especies que limiten la cantidad de recursos disponibles.

Por otro lado, el modelo es inestable en los puntos silla, es decir, donde alguna de las relaciones entre las poblaciones no existe. Esto es debido a que las poblaciones pierden ventajas que apoyan a su supervivencia cuando la otra no existe.

Al analizar el comportamiento de las figuras, puede observarse que el modelo no ajusta el comportamiento correctamente cuando se presentan interacciones fuertes, ya que la densidad poblacional en estos casos no cambia. Por ello, para que este comportamiento sea ecológicamente correcto, la interacción de mutualismo debe ser débil. Tal conclusión ya la habían expuesto Vet y colaboradores (2018), pues su modelo adaptado tampoco simulaba correctamente la estabilidad de las poblaciones.

Tal mal desempeño del modelo puede deberse a su simplicidad, provocando que existan limitaciones en la predicción de las simulaciones.

Conclusión

El modelo adaptado de Lotka-Volterra para simular relaciones de mutualismo no presentó un buen desempeño cuando la interacción era fuerte al no predecir correctamente el cambio de densidad poblacional. Esto puede deberse a la simplicidad del modelo, por lo que debería considerarse la limitante de solo poder simular adecuadamente interacciones débiles.

En el caso de estudios de conservación ecológica sería recomendable diseñar un modelo con mejor predicción que pueda mejorar el entendimiento de las complejas relaciones interespecíficas.

Bibliografía

1. Barrera-Rodríguez, A. M., Vieira-Salazar, J. A., y Duque-Oliva, E. J. (2020). Las relaciones interespecíficas de las universidades con sus grupos de interés: metáfora biológica. *Información tecnológica*, *31*(4), 211-220.
2. Bascompte, J., y Jordano, P. (2008). Redes mutualistas de especies. *Investigación y Ciencia*.
3. Jaramillo Mejía, V. D., Jaramillo Mejía, A. F., y Díaz Arcos, E. (2013). Aproximación matemática a los modelos bioeconómicos: análisis de caso para el modelo mutualista de Lotka-Volterra. *Tendencias*, *14*(2), 98-119.
4. Pérez, V. A. (2007). La importancia del mutualismo para la conservación biológica. *Herreriana 3(2)*.
5. Vet, S., de Buyl, S., Faust, K., Danckaert, J., Gonze, D., & Gelens, L. (2018). Bistability in a system of two species interacting through mutualism as well as competition: Chemostat vs. Lotka-Volterra equations. *PLOS ONE, 13(6), e0197462.*