Jorge Luis Fernández López

Modelo Logístico tomando en cuenta el efecto Allee

Introducción

En general, existen diferentes formas de modelar el crecimiento de una población. Una de ellas es utilizando el modelo exponencial. Este nos dice que una población va a crecer sin ningún tipo de limitación (suponiendo que los recursos para que crezca son ilimitados). Sin embargo, en la vida real eso no ocurre debido a que los recursos resultan ser limitados. Por lo tanto, el modelo logístico nos ha ayudado a observar la forma en que una población crece hasta llegar a un punto de saturación; en el cual ya deja de crecer.

Pero, existe un problema en el que hay poblaciones, como por ejemplo, los humanos, los cuales requieren cierto número de individuos para que continue el crecimiento. Si esa cantidad de individuos disminuye abajo de ese número , entonces la población va a tender a la extinción. A este efecto se le conoce como efecto Allee en honor a un ecologista llamado Warder Clyde Allee.

Nuestras preguntas para este proyecto son las siguientes:
1.- ¿Cómo se puede incluir el efecto Allee en el modelo logístico?
2.- ¿Qué ocurre con los estados o el estado fase del modelo logístico cuando se incluye el efecto Allee?

Nuestra hipótesis es que cuando nuestra función se aleje del estado fase de forma positiva va a tender a crecer. Sin embrago, cuando se aleje de forma negativa va a tender a decrecer.

Desarrollo

Nuestro modelo logístico con el efecto Allee es el siguiente:

$$r(n) = r * (1 - \frac{N}{K}) * (\frac{N}{A} - 1)$$

Nuestra solución a esta ecuación es la siguiente:

$$\dot{N} = r * N * (1 - \frac{N}{K}) * (\frac{N}{A} - 1)$$

Donde:

N=número de individuos

$\dot{N}$=$\frac{Numerodeindividuos}{tiempo}$

K=Número de individuos

A=Número de individuos

r= $\frac{1}{tiempo}$

Para poder evaluar esta ecuación, la reducimos utilizando modelos explicativos de la siguiente manera:

Definimos x

$$x = \frac{N}{K}$$

Y tenemos que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{K}\frac{dN}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = r\frac{1}{k}N * (1 - \frac{N}{K}) * (\frac{N}{A} - 1)$$

$$\frac{dx}{dt} = r * x * (1 - x) * (\frac{N}{K} * \frac{K}{A} - 1)$$

$$\frac{dx}{dt} = r * x * (1 - x) * (\frac{x}{\alpha} - 1)$$

0<α=$\frac{A}{K}$<1

Sabemos que:

$$\frac{1}{r} = tiempo$$

Definimos:

$$t' = \frac{t}{\frac{1}{r}} = rt$$

$$f(t) = f(t(t'))$$

$$\frac{df}{dt'} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{df}{dt'} = \frac{1}{r}\frac{df}{dt}$$

Despejamos r:

$$\frac{df}{dt'} = r\frac{df}{dt}$$

$$t(t') = \frac{1}{r}t'$$

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{r}$$

r $\frac{dx}{dt'}$= $rx(1 - x)(\frac{x}{\alpha} - 1)$

$$x' = x(1-x)(\frac{x}{\alpha}-1)$$

$$\alpha = \frac{A}{K}$$

0<α<1

(Primera corrección en base a lo observado)

Obtenemos los puntos fijos de la siguiente manera:

$$0 = x(x-1)(\frac{x}{\alpha}-1)$$

Primer funto fijo

x=0

Segundo punto fijo

0=x-1

x=1

Tercer punto fijo

$$0 = \frac{x}{\alpha}-1$$

$$1 = \frac{x}{\alpha}$$

$$\alpha = x$$

Posteriormente analizamos la estabilidad de estos puntos fijos de la siguiente manera:

$$\frac{df(x')}{dx} = -\frac{3x^2}{\alpha} + 2(\frac{1+\alpha}{\alpha})x - 1$$

Estabilidad del primer punto fijo:

$$f'(0) = -1$$

Por lo tanta, es estable debido a que la pendiente es negativa

Estabilidad del segundo punto fijo:

$$f'(1) = -\frac{3}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} + 2 - 1$$

$$f'(1) = -\frac{1}{\alpha} + 1$$

Como α se encuentra entre 0 y 1, este punto es estable debido a que la pendiente también sale negativa.

Estabilidad del tercer punto fijo:

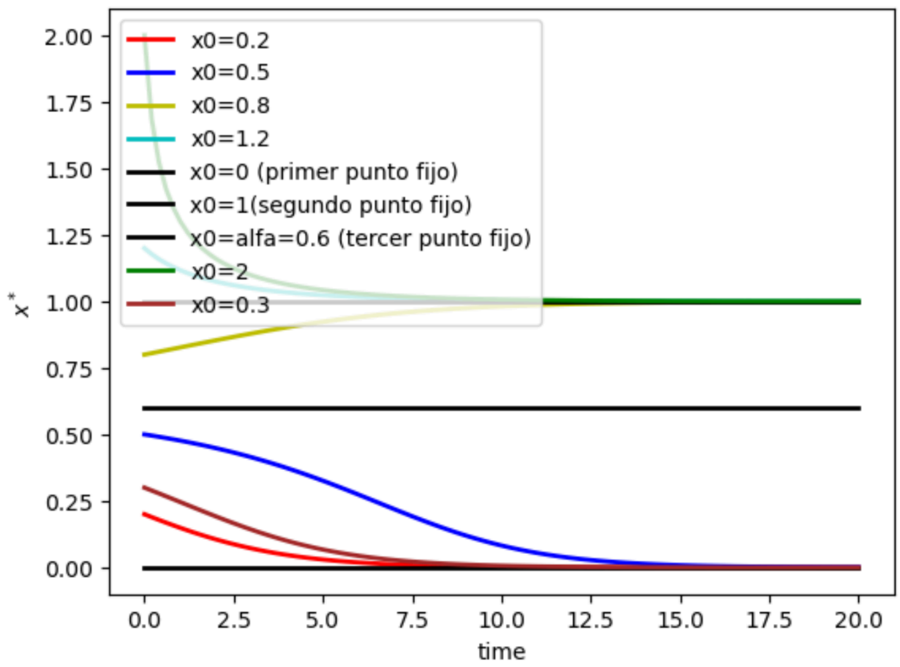
$$f'(\alpha) = -3\alpha + 2 + 2\alpha - 1$$

$$f'(\alpha) = -\alpha + 1$$

Como α se encuentra entre 0 y 1, este punto es inestable debido a que la pendiente siempre va a ser positiva.

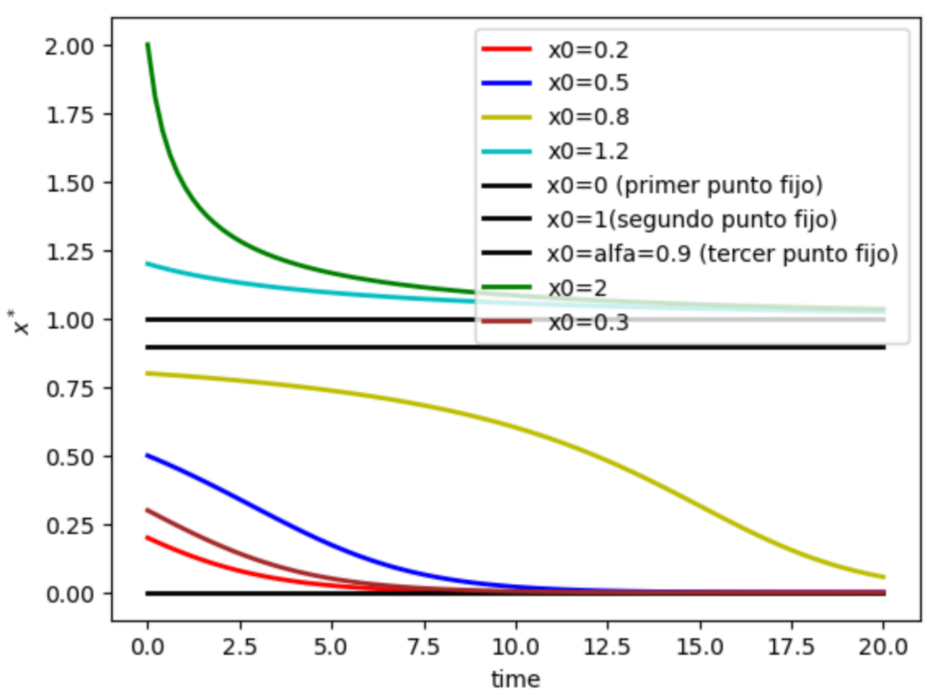
(Segunda corrección en base a lo observado)

Resolviendo x'= x^* y graficando para diferentes valores de α, obtenemos lo siguiente:



En esta primera gráfica, con $\alpha = 0.6$ se puede observar que los valores de x0 mayores a alfa tienden a 1 (el segundo punto fijo). Sin embargo, los valores de x0 menores a alfa tienden a 0 (el primer punto fijo).

Esto mismo se puede observar en la siguiente gráfica:



Donde ahora $\alpha = 0.9$. Por lo tanto, ahora cuando x0=0.8, x' tiende a 0.

Esto implica que cada población tiene su umbral o estado fase, el cual va a estar dado por el punto fijo α. Si se cruza este de forma positiva, la población tiende a crecer. Sin embargo, si se cruza al lado negativo; es decir, que el número de individuos de esa población no sea el suficiente para perpetuar la especie, esta va a tender a la extinción.

Conclusión

En general, nuestra hipótesis se cumplió, ya que se puede observar de manera gráfica y clara este efecto en los diferentes tipos de poblaciones utilizando el modelo explicativo que surge del modelo logístico con efecto Allee. Esto nos da a entender que si, por ejemplo, extrapolamos estos resultados con las poblaciones de algunos países europeos y asiáticos, donde las personas ya no pretenden tener hijos; si llegan a cruzar su propio umbral, en donde ya no exista la suficiente cantidad de gente para que sigan en equilibrio o en crecimiento; va a llegar un momento en que van a estar de cierta forma en peligro de extinción. Esta es una de las principales razones por las cuales los gobiernos de algunos de esos países tratan de incentivar a su población a tener hijos.