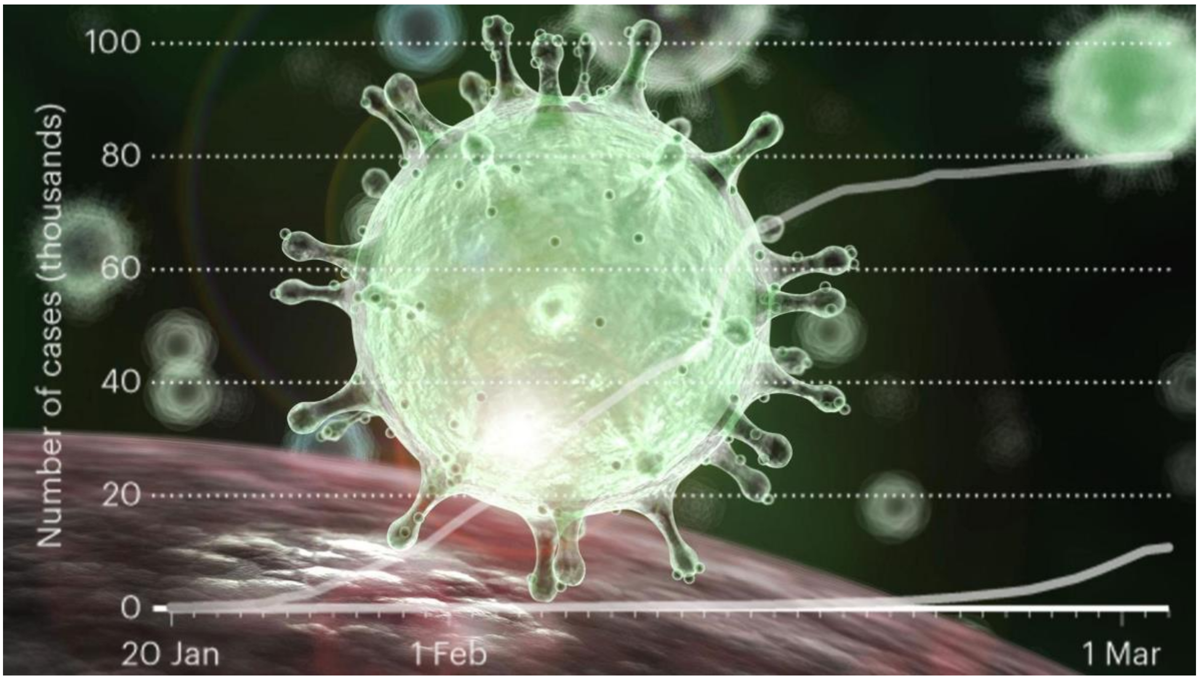
ANÁLIS CUALITATIVA DE LA DINÁMICA DE POBLACIÓN MEDIANTE EL MODELO DEL EFECTO ALLE NORMALIZADO

CINVESTAV UNIDAD MONTERREY

08 DE NOVIEMBRE DE 2022

CARLOS ALBERTO CULEBRO GAMBOA



BIOLOGÍA MATEMÁTICA

DR. MOISÉS SANTILLÁN ZERÓN

Introducción

Todo aquel conjunto de individuos de una especie en especifica es considerada una población, principalmente cuando estos viven o se encuentran en un entorno cercano que permita el poder reproducirse y generar un incremento de dicho espécimen, las poblaciones convergen debido a que existen especies que mantienen un margen estable, mientras que otras tienden a aumentar de forma rápida o incluso existen especies que disminuyen o tienden a tener fluctuaciones en si crecimiento. Derivado a ello podremos realizar un pequeño análisis cualitativo de la dinámica poblacional de una forma general. Teniendo una pequeña perspectiva de los modelos exponenciales y logísticos generando así un criterio desde la perspectiva del efecto Allee tratando de entender estos comportamientos.

Para poder analizar la dinámica de poblaciones se tiene que considerar los puntos en los que cierta población crece de forma acelerada, ya sea de forma acelerada o paulatina, teniendo en cuenta el crecimiento masivo de esta. La forma inversa de lo antes mencionado es el decaimiento o colapso poblacional, el cual se detalla mediante la mayor cantidad de defunciones que de nacimientos en un periodo de tiempo, el cual hace que la especie tienda a tener un colapso poblacional, pudiendo generar la extinción de la especie.

Metodología

La forma o componente de una población está dada por las proporcionalidades de los individuos que se mantienen en ella, caracterizados ya sea por su edad, tamaño, peso, sexo, etc. En ciertos grupos poblacionales, todo ello esta correlacionado como lo es en los seres humanos. Aunque no es un punto crítico especifico ya que existen variantes como lo son plantas o animales que cambian de sexo de acuerdo con sus necesidades fisiológicas o en su caso el tamaño o complexión de diferenciación entre hombres y mujeres. En la mayoría de las poblaciones la mortalidad es alta entre los organismos jóvenes, esto derivado a las condiciones de su entorno o en su defecto por el peligro que los acecha en su entorno, la defunción en adultos tiende a ser mayor, ya que se han colocado en una estructura de fortaleza el cual los ha permitido llegar hasta donde están. Para poder englobar todo ello se genera el estudio del análisis exponencial y logístico el cual nos ayuda a describir y comprender el comportamiento de esto.

Para poder comprender de una manera más sencilla los modelos que se una para en la dinámica de poblaciones, se debe tener de forma presente la ecuación general de la tasa de crecimiento poblacional, el cual nos detalla el cambio en el número de individuos en una población respecto al tiempo.

$$\frac{dN}{dT} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

En donde dN/dT es la tasa de crecimiento poblacional en un momento determinado, N es el tamaño de la población, T es el tiempo y r es la tasa de crecimiento per cápita. Dicha ecuación es de forma general de la cual se derivan dos tipos de modelos de crecimiento, el exponencial y logístico.

El conocimiento exponencial nos indica cuando la tasa de aumento per cápita toma el mismo valor positivo sin importar el tamaño de la población. A diferencia del crecimiento logístico se entiende que en este caso la tasa de aumento, pero cápita disminuye a medida que la población alcanza su límite máximo.

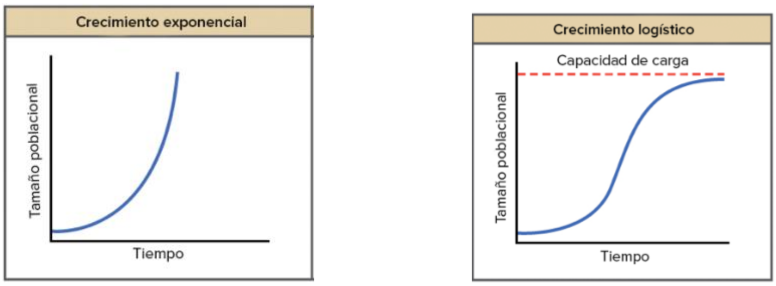


Imagen: "Los límites ambientales del crecimiento poblacional: Figura 1," de OpenStax College, Biology, CC BY 4.0

A su vez podemos considerar el efecto Allee, el cual es considerado ese nombre por W. C. Allee, en donde nos especifica que a partir de cierto umbral. El tamaño poblacional de una especie es tan reducido que la tasa de supervivencia y/o la tasa de reproducción descienden debido a que la quienes conforman la población no se reproducen al no encontrar más individuos de su misma especie para poder llevar a cabo dicha acción, el efecto Allee es producido de manera individual, pero dicho efecto conlleva a una afectación general de la población , esto es generado por que no existe la inmersión de nuevos individuos que puedan seguir generando el ámbito reproductivo.

Normalización de ecuaciones

Para el análisis se tiene que

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(\frac{N}{A} - 1\right)$$

En donde se puede observar la correlación que existe entre el número de individuos respecto al tiempo y la capacidad de carga, al realizar la normalización de ecuaciones con la finalidad de poder reducir el número de variables, se tiene que

$$x' = x(1 - x)\left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)$$

Una vez normalizada la ecuación, tenemos que de ser 3 variables ahora solo se presentan 2 las cuales son

$$x = \frac{N}{K} \quad y \quad \alpha = \frac{A}{K}$$

En este caso los parámetros de α deben estar por debajo de 1 y por arriba del 0, $(0 < \alpha < 1)$, analizando la ecuación con los puntos dados tenemos que

Para todo lo antes mencionado se ha generado un análisis cualitativo mediante un sistema de programación, este nos permite ver de forma gráfica el comportamiento de la dinámica de población.

De acuerdo con el comportamiento que presenta podemos analizar los estados estacionarios para determinar la estabilidad de estos.

$$x^{`} = x(1-x)\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)$$

$$x(1-x)\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[x(1-x)\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)\right]$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=\alpha \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(x-x^2)\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x^2}{\alpha}-x\right)-\left(\frac{x^3}{\alpha}-x^2\right)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x^2}{\alpha}-x-\frac{x^3}{\alpha}+x^2\right)\right]$$

$$\frac{2x(\alpha)-x^2(0)}{\alpha^2}-1-\frac{3x^2(\alpha)-x^2(0)}{\alpha^2}+2x$$

$$\frac{2x}{\alpha}-1-\frac{3x^2}{\alpha}+2x$$

Sustituyendo los valores de 0, 1 y α tenemos que

$$\frac{2(0)}{\alpha}-1-\frac{3(0)^2}{\alpha}+2(0)=-1. \qquad \mathit{Estable}$$

Este análisis está mal. Hay en realidad dos puntos estables, separados por uno inestable.

$$\frac{2(1)}{\alpha}-1-\frac{3(1)^2}{\alpha}+2(1)=-\frac{1}{\alpha}+1. \qquad \mathit{Inestable}$$

$$\frac{2(\alpha)}{\alpha}-1-\frac{3(\alpha)^2}{\alpha}+2(\alpha)=1-\alpha. \qquad \mathit{Inestable}$$

Faltan simulaciones que corroboren el análisis de estabilidad

Conclusión

De acuerdo con lo analizado con anterioridad podemos determinar que cualquier recurso o sistema poblacional tendrá un límite, el cual generará un punto de quiebre que se verá en el decaimiento de dicha población, el sistema de análisis Allee nos especifica que es un fenómeno biológico que tiende a describir la relación entre las densidades de población y la tasa de crecimiento de esta misma dando así al punto de análisis de la dificultad de crecimiento de la población a bajas densidades de esta misma, dicho análisis nos da la pauta de entender cómo se expresa el efecto en la dinámica de los sistemas, y así poder simular soluciones para diferentes casos o valores de parámetros, teniendo así un resultado con veracidad y que permita el caracterizar la estabilidad en sus puntos fijos.

Bibliografía

* *Allee effect in a discrete-time predator-prey system*, Canan Celik, Oktay Duman.

* https://es.khanacademy.org/science/ap-biology/ecology-ap/population-ecology-ap/a/exponential-logistic-growth

* Dinámica de las Poblaciones W.B. Batista.- Cátedra de Ecología, Facultad de Agronomía, Universidad de Buenos Aires

* http://fueib.org/es/investigadors/65/otri/catalogo/4/191/servicio/estudios-de-dinamicas-poblacionales-y-de-demografia-evolutiva-para-la-gestion-y-la-conservacion-de-e

Anexo

Codigo para la obtención de analisis de la dinamica poblacional

```
julia> a = 0.10
0.1

julia> x0 = 10
10

julia> prob = ODEProblem(LogisticEquation,x0,tspan,a)
ODEProblem with uType Int64 and tType Int64. In-place: false
timespan: (0, 10)
u0: 10

julia> sol = solve(prob,saveat = 0.1)
retcode: Success
Interpolation: 1st order linear
t: 101-element Vector{Float64}:
  0.0
  0.1
  0.2
  0.3
  0.4
  0.5
  0.6
  0.7
  0.8
  0.9
  ⋮
  9.2
  9.3
  9.4
  9.5
  9.6
  9.7
  9.8
  9.9
 10.0
u: 101-element Vector{Float64}:
 10.0
  1.1383253374134936
  0.9821041785381515
  0.9299369746561125
  0.9076833009067535
  0.8973017506257237
  0.8922738829309139
  0.8897835717219595
  0.8885439277373963
  0.88792445781113
  ⋮
  0.8873158342932804
  0.887318714312931
  0.887320133074167
  0.8873200905769886
  0.8873185868213959
  0.8873156218073885
  0.8873111955349668
  0.8873055918271467
  0.8873018508329039

julia> plot(sol.t,sol.u)

julia> savefig("Graf03.png")

julia> 
```