Jorge Luis Fernández López

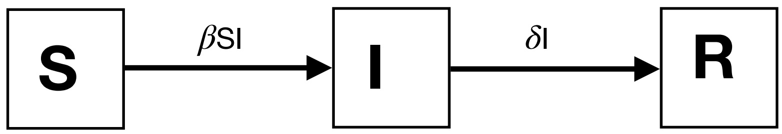
Modelo SIR (Susceptibles, infecciosos y recuperados) de enfermedades contagiosas adaptado para el caso de que la inmunidad de las personas no sea de por vida y se puedan reinfectar

Introducción

El modelo SIR (Susceptibles, infecciosos y recuperados) fue publicado por primera vez en el año 1927 por los científicos kermack y Mckendrick. Durante el paso el tiempo, se ha utilizado para observar el comportamiento de varias enfermedades infecciosas que se han propagado a lo largo de la historia de la humanidad, incluyendo la actual infección de Covid-19 causada por el virus Sars-Cov-2; la cual hasta el día de escritura de este trabajo, la organización mundial de la salud la sigue catalogando como una pandemia de alerta máxima a nivel mundial.

Este modelo se ha ido adaptando a las necesidades de cada investigador o grupo de investigadores conforme van observando la propagación y el comportamiento de las personas a cada enfermedad. Esto debido a que ayuda a tener una noción aproximada de lo que pudiera ocurrir con la propagación de la enfermedad y lograr tomar las medidas necesarias para que los sistemas de salud no se vean sobrepasados y puedan atender a la mayor cantidad de personas posibles.

En especial, para los objetivos finales de este trabajo, vamos a tomar en cuenta un sistema cerrado, donde no existen nacimientos ni muertes por la enfermedad u otra causa. De manera gráfica, nuestro modelo de flujo se puede presentar de la siguiente manera:



Para saber cómo funciona este modelo, debemos de imaginar que una cierta cantidad de personas que salen del cuadro de susceptibles (S) se infectan y pasan al cuadro de infecciosos (I) y estos después pasan a recuperarse (R). Tomando en cuenta esta aseveración, se pueden utilizar tres ecuaciones diferenciales para modelar el cambio del número de susceptibles (S) a infecciosos (I) y también de número de recuperados (R) con respecto al tiempo (t) de la siguiente manera:

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S} = -\beta SI \qquad (1)$$

El término βSI es negativo debido a que se están perdiendo susceptibles que se están infectando.

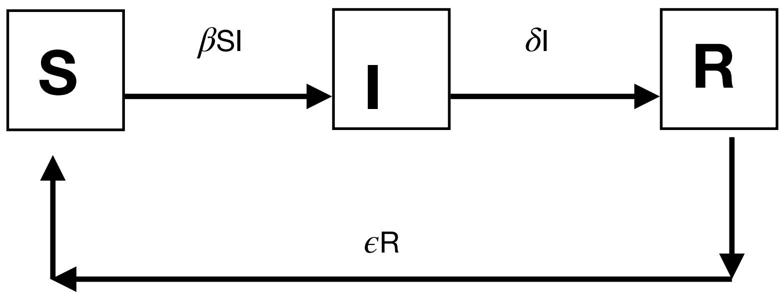
$$\frac{dI}{dt} = \dot{I} = \beta SI - \delta I \qquad (2)$$

En este caso, βSI es positivo ya que este compartimiento está ganando personas infectadas. De ahí, δI es negativo ya que una vez recuperados pierden a esas personas y pasan a la “caja” de recuperados. Por lo tanto, la última ecuación es la siguiente:

$$\frac{dR}{dt} = \dot{R} = \delta I \qquad (3)$$

Aquí, delta es positivo ya que ese compartimiento gana personas que se recuperan de la enfermedad.

Hay que tomar en cuenta, que este modelo no contempla el hecho de que la inmunidad a la mayoría de las enfermedades es temporal y en algún momento las personas vuelven a estar susceptibles a volverse a enfermar. Por ejemplo, según datos de Mayo Clinic, la inmunidad al Covid-19 dura aproximadamente 6 meses. Por lo tanto, para tomar en cuenta la reinfección, se hace lo siguiente:



De ahí, las ecuaciones anteriores se vuelven a escribir de la siguiente manera (tomando en cuenta la reinfección):

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S} = -\beta SI + \epsilon R \qquad (4)$$

Aquí ϵR es positiva ya que ese compartimiento vuelve a ganar personas que se pueden volver a infectar.

$$\frac{dI}{dt} = \dot{I} = \beta SI - \delta I$$

En este caso, la ecuación (2) se conserva. De ahí, la ecuación (3) pasa a ser de la siguiente forma:

$$\frac{dR}{dt} = \dot{R} = \delta I - \epsilon R \qquad (5)$$

Aquí, los recuperados pierden personas inmunes (representado por ϵR negativo), los cuales pasan a ser susceptibles.

Desarrollo

Para saber la estabilidad de este modelo, se realiza el siguiente procedimiento:

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S} = -\beta SI + \epsilon R \qquad (4)$$

$$\frac{dI}{dt} = \dot{I} = \beta SI - \delta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \dot{R} = \delta I - \epsilon R \qquad (5)$$

De ahí, sabemos lo siguiente:

S+I+R=N

Siendo N el número total de personas dentro de este sistema cerrado. Se despeja R, obteniendo lo siguiente:

R=N-I-S

Normalizamos sabiendo lo siguiente:

$$s = \frac{S}{N} \quad i = \frac{I}{N} \quad r = \frac{R}{N}$$

De ahí la ecuaciones (4) y (2) quedan de la siguiente manera:

$$s' = -\beta Nsi + \epsilon(1 - s - i)$$
$$i' = \beta Nsi - \delta i$$

De ahí, utilizamos estas ecuaciones de la siguiente manera:

$$0 = -\beta Nsi + \epsilon(1 - s - i)$$
$$0 = \beta Nsi - \delta i$$

Dividimos entre δ

$$0 = -\frac{\beta Nsi}{\delta} + \frac{\epsilon}{\delta}(1 - s - i)$$

$$0 = \frac{\beta Nsi}{\delta} - i$$

$$0 = -R_0 si + \frac{\epsilon}{\delta}(1 - s - i)$$

$$0 = R_0 si - i = (R_0 s - 1)i$$

Siendo $R_0 = \dfrac{\beta N}{\delta}$

Por lo tanto, se tienen dos casos:

Caso 1

$i* = 0$

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos lo siguiente:

$$0 = 0 + \frac{\epsilon}{\delta}(1 - s)$$
$$s* = 1$$

Por lo tanto, este punto es el siguiente:

P1=(1,0)

Caso 2

De la segunda ecuación, obtenemos lo siguiente:

$$R_0 s - 1 = 0$$
$$R_0 s = 1$$
$$s* = \frac{1}{R_0}$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$0 = \frac{\epsilon}{\delta}(1 - \frac{1}{R_0} - i) - i$$

$$(\frac{\epsilon}{\delta}+1)i = \frac{\epsilon}{\delta R_0}(R_0-1)$$

$$(1+\frac{\delta}{\epsilon})i = R_0 - 1$$
$$i = \frac{R_0-1}{R_0(1+\frac{\delta}{\epsilon})}$$

$$i = \frac{(R_0-1)\epsilon}{R_0(1+\delta)}$$
Por lo tanto, el otro punto crítico es el siguiente:

$$P2 = (\frac{1}{R_0}, \frac{\epsilon(R_0-1)}{R_0(\delta+\epsilon)})$$

Para obtener la estabilidad, se obtiene el jacobiano, teniendo como resultado lo siguiente:

J= $\begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{\delta} - R_0 i & -\frac{\epsilon}{\delta} - R_0 s \\ R_0 i & R_0 s - 1 \end{pmatrix}$

Se evalúa P1, obteniendo lo siguiente:

J= $\begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{\delta} & -\frac{\epsilon}{\delta} - R_0 \\ 0 & R_0 - 1 \end{pmatrix}$

$$\Delta = -\frac{\epsilon(R_0-1)}{\delta}$$
$$\tau = -\frac{\epsilon}{\delta} + R_0 - 1$$

R0 no tiene que ser mayor que uno

Como $R_0 > 1$, entonces el determinante siempre es negativo. Por lo tanto, es un punto estable.

Determinante negativo no implica que eo punto fijo sea estable

Evaluando P2, se obtiene lo siguiente:

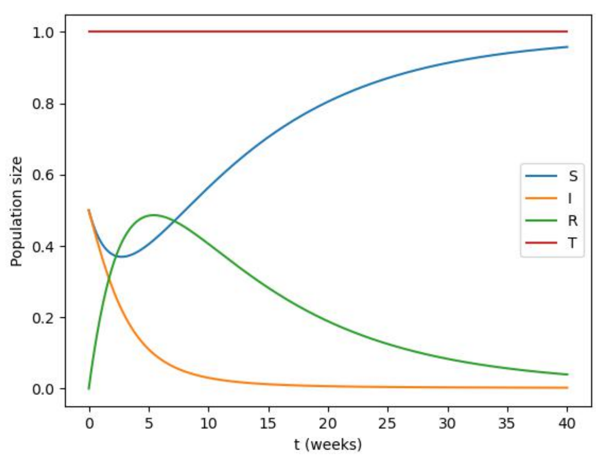
$$j=\begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{\delta}-\frac{(R_0-1)\epsilon}{(\epsilon+\delta)} & \frac{-\epsilon-\delta}{\delta} \\ \frac{\epsilon(R_0-1)}{\epsilon+\delta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau=-\frac{\epsilon}{\delta}-\frac{(R_0-1)\epsilon}{(\epsilon+\delta)}$$

$$\Delta=\frac{\epsilon(R_0-1)}{\delta}$$

Como $R_0>1$, la traza es negativa y el determinante es positivo; por lo tanto, este es un punto de equilibrio estable.

Introduciendo las ecuaciones (4), (2) y (5) al leguaje de programación python para resolverlas y que nos proporcionen el comportamiento de los susceptibles, infecciosos y recuperados; se obtiene lo siguiente:

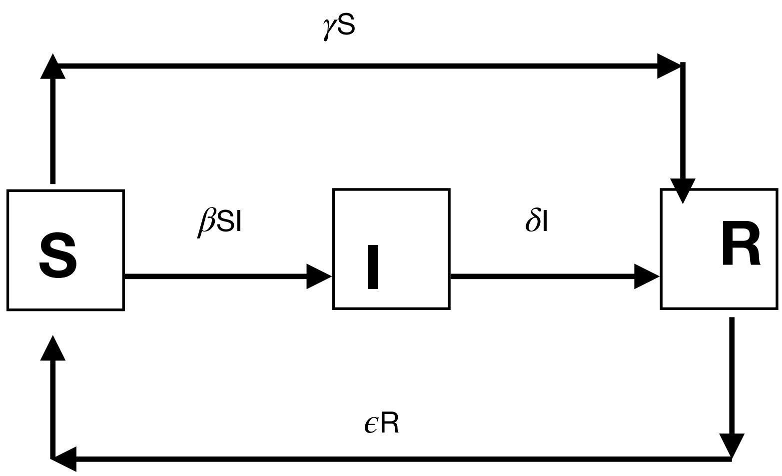


Gráfica1.- $R_0=2,\delta=0.5,\ \beta=0.3,\epsilon=0.1$

La gráfica 1.- nos menciona que aproximadamente a las 25 semanas el número de recuperados, infecciosos y susceptibles va a estabilizarse en tres líneas rectas. Esto significa que la enfermedad nunca se va a erradicar y se va a volver endémica.

No se discute la concordancia entre las simulaciones y el análisis de estabilidad

Modelo SIR de reinfección con vacuna



Para este caso, las ecuaciones son las siguientes:

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S} = -\beta SI + \epsilon R - \gamma S$$

$$\frac{dI}{dt} = \dot{I} = \beta SI - \delta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \dot{R} = \delta I - \epsilon R + \gamma S$$

Utilizando los mismo cambios de variable que el anterior caso, normalizamos de la siguiente manera:

$$s' = -\beta N s i + \epsilon(1 - s - i) - \gamma s$$
$$i' = \beta N s i - \delta i$$

De ahí, utilizamos estas condiciones de la siguiente manera:

$$0 = -\beta N s i + \epsilon(1 - s - i) - \gamma s$$
$$0 = \beta N s i - \delta i$$

Dividimos entre δ

$$0 = -\frac{\beta N s i}{\delta} + \frac{\epsilon}{\delta}(1 - s - i) - \frac{\gamma}{\delta} s$$

$$0 = \frac{\beta N s i}{\delta} - i$$

$$0 = -R_0 s i + \frac{\epsilon}{\delta}(1 - s - i) - \frac{\gamma}{\delta} s$$

$$0 = R_0 s i - i = (R_0 s - 1) i$$

Siendo $R_0 = \dfrac{\beta N}{\delta}$

Caso 1

$i^* = 0$

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos lo siguiente:

$$0 = 0 + \frac{\epsilon}{\delta}(1 - s) - \frac{\gamma}{\delta}s$$

$$0 = \frac{1}{\delta}(\epsilon - \epsilon s - \gamma s)$$

$$0 = \epsilon - \epsilon s - \gamma s$$

$$(\epsilon + \gamma)s = \epsilon$$

$$s^* = \frac{\epsilon}{\epsilon + \gamma}$$

Por lo tanto, este punto es el siguiente:

$$P1 = (\frac{\epsilon}{\epsilon + \gamma}, 0)$$

Caso 2

De la segunda ecuación, obtenemos lo siguiente:

$$R_0 s - 1 = 0$$
$$R_0 s = 1$$
$$s^* = \frac{1}{R_0}$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$0 = \frac{\epsilon}{\delta}(1 - \frac{1}{R_0} - i) - i - \frac{\gamma}{\delta R_0}$$

$$(\frac{\epsilon}{\delta} + 1)i = \frac{\epsilon}{\delta R_0}(R_0 - 1) - \frac{\gamma}{\delta R_0}$$

$$(\epsilon + \delta)i = \frac{\epsilon}{R_0}(R_0 - 1) - \frac{\gamma}{R_0}$$

$$i* = \frac{\epsilon(R_0 - 1) - \gamma}{R_0(\epsilon + \delta)}$$

Por lo tanto, el otro punto crítico es el siguiente:

$$P2 = (\frac{1}{R_0}, \frac{\epsilon(R_0 - 1) - \gamma}{R_0(\delta + \epsilon)})$$

Para obtener la estabilidad, se obtiene el jacobiano, teniendo como resultado lo siguiente:

J= $\begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{\delta} - R_0 i - \frac{\gamma}{\delta} & -\frac{\epsilon}{\delta} - R_0 s \\ R_0 i & R_0 s - 1 \end{pmatrix}$

Se evalúa P1, obteniendo lo siguiente:

J= $\begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{\delta} - \frac{\gamma}{\delta} & -\frac{\epsilon}{\delta} - \frac{\epsilon R_0}{(\epsilon + \gamma)} \\ 0 & \frac{R_0 \epsilon}{(\epsilon + \gamma)} - 1 \end{pmatrix}$

$$\Delta = \frac{\epsilon(-R_0 + 1) + \gamma}{\delta}$$

$$\tau = \frac{R_0 \epsilon}{(\epsilon + \gamma)} - \frac{\epsilon + \gamma}{\delta} - 1$$

Como $R_0 > 1$, entonces el determinante siempre es negativo. Sin embargo, $\tau < 0$; por lo tanto, es punto inestable. Lo que se considera que puede ser un punto silla.

$\boxed{\text{Puede ser o es un punto de silla?}}$

Evaluando P2, se obtiene lo siguiente:

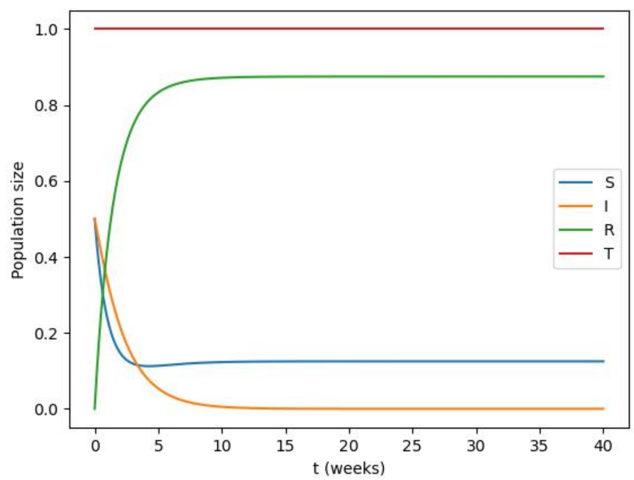
j= $\begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{\delta} - \frac{(R_0-1)\epsilon - \gamma}{(\epsilon+\delta)} - \frac{\gamma}{\delta} & \frac{-\epsilon-\delta}{\delta} \\ \frac{\epsilon(R_0-1)-\gamma}{\epsilon+\delta} & 0 \end{pmatrix}$

$$\tau = -\frac{(\epsilon+\gamma)}{\delta} - \frac{(R_0-1)\epsilon-\gamma}{(\epsilon+\delta)}$$

$$\Delta = \frac{\epsilon(R_0-1)-\gamma}{\delta}$$

Como $R_0 > 1$, la traza es negativa y el determinante es positivo; por lo tanto, este es un punto de equilibrio estable.

Una vez más, R0 no tiene por qué ser mayor que 1



Grafica 2.- $R_0 = 2, \delta = 0.5, \ \beta = 0.3, \epsilon = 0.1, \gamma = 0.7$

En este caso, la gráfica 2.- nos dice que la enfermedad va a tener el mismo comportamiento a ser endémica como en el primer caso. Sin embargo, hay que destacar que gracias a la vacunación, el tiempo en el cual se vuelve endémica es menor al del caso anterior donde no existe la vacunación y las personas solo adquieren la humanidad por medio la infección. Por lo tanto, pasamos de que se vuelva endémica de la semana 25 a la semana 10. Esto trae como consecuencia beneficios al sistema de salud pública, debido a que menos cantidad de personas va a requerir atención médica hospitalaria y subsecuente debido a las secuelas que pudiera dejar la enfermedad.

Conclusión

Eventualmente, cuando una enfermedad que no genera inmunidad de por vida entra a una población, esta va a permanecer por siempre en la misma generando brotes endémicos. Aparte, la vacunación es fundamental para que se llegué la enfermedad se vuelva endémica en menor tiempo y no provoque tanto daño a la población.

Bibliografía

MAYO CLINIC . (Septiembre de 2022). Obtenido de https://www.mayoclinic.org/es-es/diseases-conditions/coronavirus/in-depth/herd-immunity-and-coronavirus/art-20486808

Pliego, Emilene Carmelita. (2011). Modelos Epidemiológicos de Enfermedades Virales Infecciosas. [Tesis de licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/EmileneCarmelitaPliegoPliego.pdf