Dinámicas de población algunas herramientas y efectos para la representación de fenómenos de interés

NOMBRE: Isaac Lehí Sánchez Morales
PROFESOR: Dr. Moisés Santillán Zerón

En la actualidad con el uso de los diversos recursos tecnologicos con los que se nos han facilitado cada vez mas la representacion de diversos comportamientos dentro de nuestro entrono, por medio de un analisis matematico.

Cuando anteriormente estos calculos resultaban ser robustos y tediosos, en la actualidad podemos tomar un fenomeno de interes y comenzar a jugar con algunos modelos matemematicos estudiados, con la facilidad de ingresar y cambiar unos cuantos valores para observar el cambio en el comportamiento, permitiendonos hacer cuestionamientos que nos hagan intuir que es lo que esta pasando, el por que y predecir que pasaria.

A continuacion hablaremos de dos modelos que nos son utiles al representar dinamicas de poblacion en diferentes casos.

MODELO EXPONENCIAL

El crecimiento exponencial es aquel que aumenta proporcionalmente en cuanto el el tiempo aumenta con el cual obtenemos una observacion de crecimiento desmedida en cuanto observamos un evento en determinado intervalo de tiempo.

Este crecimiento podria tomarse como una situacion ideal dentro de una poblacion ya que no hay nada en el medio que lo rodea para evitar que crezca desmesuradamente, lo cual en la realidad dificilmente podria llegar a suceder.

Practicamente es un modelo util de usar hasta cierto punto dentro de un intervalo de tiempo si se quisiera tener alguna nocion o idea de un evento donde todo esta a favor para que siga creciendo.

MODELO LOGISTICO

El modelo logistico es el refinamiento del crecimiento exponencial que inicialmente se se dispara conforme avanza el tiempo, lo cual es posible mientras todo sea favorable en el entorno, pero en evento de dinamica poblacional el crecimiento puede comenzar con pocos individuos y crecer de esta forma por un periodo corto de tiempo despues de verse superados en el numero de individuos contra el numero de recursos es cuando se observara un cambio en el comportamiento del crecimiento en esta poblacion dado por la siguiente ecuacion:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$$

En la cual podemos observar N que representa a la poblacion y K la capacidad de carga del sistema, mientras r es la constante que nos indica el crecimiento maximo.

La curva exponencial comienta a relentizarse y forma una sigmoidea como lo podemos observar en la siguiente representacion por computadora

En el cual contamos con la ecuacion caracteristica del modelo logistico solo que agregamos un factor de un agente externo el cual esta erradicando a nuestra poblacion (par[3] N)

Como se observa tenemos una poblacion N0 = 10 en los tres casos, la reproduccion de nuestra poblacion r=1, K=1000 siendo la capacidad de carga de nuestro sistema y tspan llendo dese un intervalo de tiempo de 0 a 10.

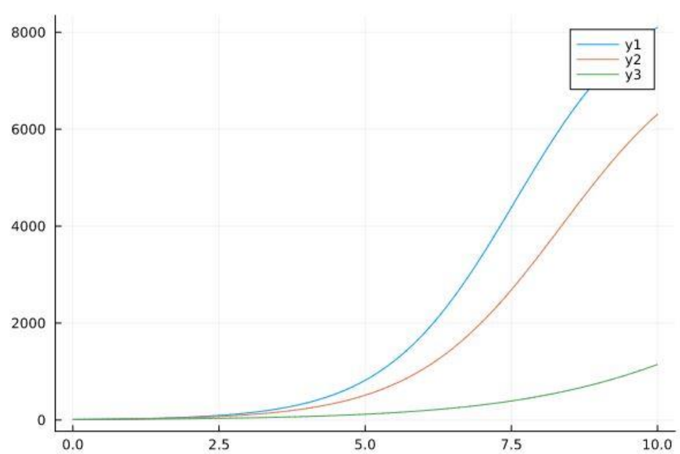
Teniendo todo esto en consideracion observamos las graficas en cada caso siendo el primer caso mas notoria la forma de sigmoide ya que no esta siendo afectado por una mayor proporcion del agente externo.

```
using Plots
using LaTeXStrings
using DifferentialEquations
```

```
LogisticModelBis(N, par, t) = par[1] * N * (1 - N/par[2]) - par[3]*N
```

```
LogisticModelBis (generic function with 1 method)
```

```
tspan = (0, 10)
r = 1
K = 10000

mu = 0.1
par = (r, K, mu)
N0 = 10
prob = ODEProblem(LogisticModelBis,N0,tspan,par)
sol = solve(prob,saveat=0.1)
plot(sol.t, sol.u)

mu = 0.2
par = (r, K, mu)
N0 = 10
prob = ODEProblem(LogisticModelBis,N0,tspan,par)
sol = solve(prob,saveat=0.1)
plot!(sol.t, sol.u)

mu = 0.5
par = (r, K, mu)
N0 = 10
prob = ODEProblem(LogisticModelBis,N0,tspan,par)
sol = solve(prob,saveat=0.1)
plot!(sol.t, sol.u)
```



EFFECTO ALLEE

Ahora tenemos dentro de un evento poblacional el efecto Allee, el cual se presenta despues de haberse establecido el umbral de crecimiento los individuos dentro de la poblacion a pesar de estar manteniendose en un numero este es tan reducido que el sobrevivir de la especie es dificil ya que los individuos ya no se reproducen, son vulnerables, o no pueden engontrar sus alimentos con la facilidad que lo hacian antes.

Esto es una desviasion del modelo logistico a lo cual se representa con la siguiente ecuacion:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1-\frac{N}{A})(1-\frac{N}{K})$$

Ahora normalizando esta ultima ecuacion para una representacion un poco mas sencilla asi podremos encotnrar los estados estacionarios de la misma mas adelante.

Entonces tenemos

$$X' = X(1-X)(\frac{X}{\propto}-1)$$

$$\propto = \frac{A}{K}$$

$$0 < \propto < 1$$

Con la ecaucuion anterior podemos partir para su representacion a computadora.

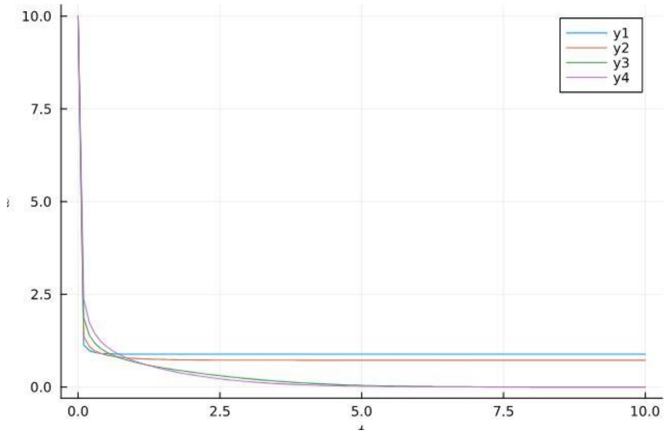
Podemos pensar igualmente como en el primer caso una poblacion reducida de 10 individuos (x0) en todos los casos y alfa seria nuestro efecto effecto alle sobre la capacidad de nuestro sistema.

El efecto que podemos ver en la grafica es como la poblacion decae en los primeros instantes de tiempo y durante el transcurso se mantienen muy sercanos a cero sin llegar a la extincion completa pero permaneciendo en el borde de la misma.

Dinámicas de población algunas herramientas y efectos para la representación de fenómenos de interés

NOMBRE: Isaac Lehí Sánchez Morales
PROFESOR: Dr. Moisés Santillán Zerón

```
using Plots
using LaTeXStrings
using DifferentialEquations

LogisticEquation(x, a, t) = x*((1-x)*(x/a)-1)

tspan = (0,10)
a = 0.10
x0 = 10
prob = ODEProblem(LogisticEquation,x0,tspan,a)
sol = solve(prob,saveat = 0.1)
plot(sol.t,sol.u)

a = 0.20
x0 = 10
prob = ODEProblem(LogisticEquation,x0,tspan,a)
sol = solve(prob,saveat = 0.1)
plot!(sol.t,sol.u)

a = 0.50
x0 = 10
prob = ODEProblem(LogisticEquation,x0,tspan,a)
sol = solve(prob,saveat = 0.1)
plot!(sol.t,sol.u)

a = 0.95
x0 = 10
prob = ODEProblem(LogisticEquation,x0,tspan,a)
sol = solve(prob,saveat = 0.1)
plot!(sol.t,sol.u)

xlabel!(L"t")
ylabel!(L"x")
```



Ahora analizaremos si los estados estacionarios y si estos son estables o inestables

$$x' = x(1-x)(\frac{x}{\propto}-1)$$

$$x(1-x)\left(\frac{x}{\propto}-1\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{x(1-x)\left(\frac{x}{\propto}-1\right)\}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \propto \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\{(x-x^2)\left(\frac{x}{\propto}-1\right)\}$$

$$\frac{d}{dx}\{\left(\frac{x^2}{\propto}-x\right)-\left(\frac{x^3}{\propto}-x^2\right)\}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\propto}-x-\frac{x^3}{\propto}+x^2\right)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2}{\propto}-\frac{d}{dx}x-\frac{d}{dx}\frac{x^3}{\propto}+\frac{d}{dx}x^2$$

$$\frac{2x(\propto)-x^2(0)}{\propto^2}-1-\frac{3x^2(\propto)-x^2(0)}{\propto^2}+2x$$

$$\frac{2x(\propto)}{\propto^2}-1-\frac{3x^2(\propto)}{\propto^2}+2x$$

$$\frac{2x}{\propto}-1-\frac{3x^2}{\propto}+2x$$

Dinámicas de población algunas herramientas y efectos para la representación de fenómenos de interés

NOMBRE: Isaac Lehí Sánchez Morales

PROFESOR: Dr. Moisés Santillán Zerón

Al evaluar las raices obtenemos:

$$\frac{2(0)}{\propto}-1-\frac{3(0)^2}{\propto}+2(0)$$

$$0-1-0+0$$

$$-1$$

ESTABLE

$$\frac{2(1)}{\propto}-1-\frac{3(1)^2}{\propto}+2(1)$$

$$\frac{2}{\propto}-1-\frac{3}{\propto}+2$$

$$-\frac{1}{\propto}+$$

INESTABLE

$$\frac{2(\propto)}{\propto}-1-\frac{3(\propto)^2}{\propto}+2(\propto)$$

$$2-1-3\propto+2\propto$$

$$-\propto+1$$

INESTABLE

Oro, A. M.-A. (2006). Pequeñas poblaciones,grandes problemas. *Quereus 245*, 4.