Carolina Siller Cedillo **Biología Matemática**
Maestría en Ingeniería y Física Biomédicas

Reporte 3: Comprobación del efecto Allee por medio del programa Julia

Introducción

En el crecimiento exponencial la tasa de crecimiento por individuo se mantiene sin importar el tamaño de la población lo que hace que la población aumente cada vez más rápido. Aunque la ecuación exponencial nos sirve para modelar la dinámica de poblaciones simples esto solamente es válido para cortos periodos de tiempo o por ejemplo en un laboratorio se puede utilizar para estimar cuánto tardará un cultivo en alcanzar una densidad de población específica, sin embargo, este modelo por sí solo en el mundo real no nos permite describir con precisión la dinámica de las poblaciones ya que conforme avanza el tiempo ocurre un evento que ocasiona que el crecimiento de los organismos se detenga, a este evento se le conoce como competencia intraespecífica, esto indica que el desempeño de los individuos en una población se relaciona con el número de individuos que hay dentro de esta, y a esto se le denomina dependencia en base a la densidad.

Thomas Malthus observó que en poblaciones humanas conforme el número de individuos aumentaba la estimación de la tasa intrínseca de crecimiento natural (r), en un corto período de tiempo, tendía a disminuir y a esto se le llamó crecimiento logístico. En este modelo la tasa de crecimiento por individuo se vuelve cada vez más pequeña a medida que el tamaño de la población se acerca a un máximo impuesto por los recursos limitados del medio ambiente, conocido como capacidad de carga (K) (Vandermeer, 2010).

Para modelar matemáticamente el crecimiento logístico se debe de modificar la ecuación utilizada para el crecimiento exponencial, aquí se utilizará la tasa intrínseca de crecimiento (r) que va a depender del tamaño de la población (N) y que tan cercano se encuentra a la capacidad de carga (K).

Para organismos pequeños como lo son las bacterias, amebas y otros este modelo describe de manera razonable el crecimiento poblacional, sin embargo, para organismos más grandes como son elefantes, humanos, árboles, entre otros se considera que es un modelo muy simple y se han desarrollado modelos más complicados que toman en cuenta más aspectos de la vida de los organismos.

En este proyecto se describe una de las variantes de este modelo el cual se conoce como efecto Allee, este ocurre en ciertas poblaciones de tamaño pequeño y aunque no se detecta frecuentemente se ha visto que es un comportamiento común en la naturaleza. Charles Darwin observó que el tamaño de la población es importante para proteger contra la extinción la cual se puede deber a la presencia de depredadores u otros enemigos naturales, sin embargo, no fue capaz de describir con detalle este fenómeno y no fue hasta años después que se observó que en muchas especies la poca presencia de individuos en una población afectaba más el crecimiento de esta que la competición por los recursos y a esto se le llamó efecto Allee.

Se considera que el efecto Allee se manifiesta de dos formas:

- Los componentes de efecto Allee los cuales son exhibidos por una población en la que existe una asociación positiva entre algún componente de aptitud (como viabilidad, supervivencia juvenil, fecundación, etc.) y el tamaño de la población.
- El efecto Allee demográfico ocurre cuando los componentes producen una asociación positiva entre la tasa de crecimiento poblacional por individuo y el tamaño de la población.

Estos dos puntos se pueden unir para describir el efecto Allee como la asociación positiva entre la media absoluta de la aptitud individual y el tamaño de la población en un intervalo finito (Drake & Kramer, 2011).

Si lo vemos desde el punto de vista evolutivo se espera que los efectos negativos de una densidad poblacional baja, como lo son dificultad en encontrar pareja para aparearse o el incremento en la vulnerabilidad, resulten en la selección de rasgos que reducen la influencia de estos mecanismos y permiten a la población adaptarse para así evitar la extinción. Sin embargo, estas adaptaciones no eliminan el efecto Allee sino que incrementan la densidad poblacional para así evitar que se manifieste este efecto. Debido a esto es razonable concluir que las especies con mayor probabilidad de sufrir los efectos de Allee son aquellas que generalmente tienen poblaciones grandes pero que han sufrido una reducción reciente de tamaño, esto puede ser debido a la fragmentación del hábitat o eventos naturales catastróficos. Es más probable que tales poblaciones sufran de mecanismos que reducen la aptitud a una baja densidad.

Metodología

Se debe de partir de la ecuación para el efecto Allee la cual es:

$$\dot{N} = rN(1 - \frac{N}{K})(\frac{N}{A} - 1)$$

Donde:

$\dot{N} = Número\ de\ individuos/tiempo$

$N = Número\ de\ individuos$

$K = Número\ de\ individuos\ (capacidad\ de\ carga)$

$A = Número\ de\ individuos$

$r = 1/tiempo$

Posteriormente se normaliza la ecuación para reducir la cantidad de parámetros y facilitar el uso de esta ecuación en el programa Julia obteniendo la siguiente ecuación:

$$x' = x(1 - x)(\frac{x}{\alpha} - 1)$$

En la ecuación normalizada ya solo contamos con 2 parámetros los cuales se refieren a:

$$x = N/K$$
$$\alpha = A/K$$

Tomando en cuenta que los parámetros de α deben de ser menor a 1 y mayor a 0 podemos graficar la solución de este modelo por medio del programa Julia. Aquí se tomó un número pequeño de individuos, 10, para verificar el efecto Allee.
Posteriormente se analizaron los estados estacionarios partiendo de la ecuación normalizada. Primero esta se iguala a 0 y se obtienen 3 puntos:

$$x = 0$$
$$(1 - x) = 0$$
$$\left(\frac{x}{\alpha} - 1\right) = 0$$

Y al despejar x en las tres ecuaciones se obtienen los estados estacionarios:

$$x = 1$$
$$x = \alpha$$
$$x = 0$$

Posteriormente se realiza la solución de la función:

$$\frac{d}{dx} = (x - x^2)\left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)$$

$$\frac{d}{dx} = \left(\frac{x^2}{\alpha} - x\right) - \left(\frac{x^3}{\alpha} - x^2\right)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{x^2}{\alpha} - x - \frac{x^3}{\alpha} + x^2$$

$$\frac{d}{dx}\int \frac{x^2}{\alpha} - \frac{d}{dx}\int x - \frac{d}{dx}\int \frac{x^3}{\alpha} + \frac{d}{dx}\int x^2$$

$$\frac{1}{\alpha}2x - 1 - \frac{1}{\alpha}3x^2 + 2x$$

Siendo la solución final:

$$\frac{2x}{\alpha} - 1 - \frac{3x^2}{\alpha} + 2x$$

Por lo tanto, cuando:

$x = 0\ ;\ -1$ $\Rightarrow$ estable

$x = \alpha\ ; 1 - \alpha$ $\Rightarrow$ inestable

$x = 1\ ;\ -\frac{1}{\alpha} + 1$ $\Rightarrow$ estable

Resultados y Discusión

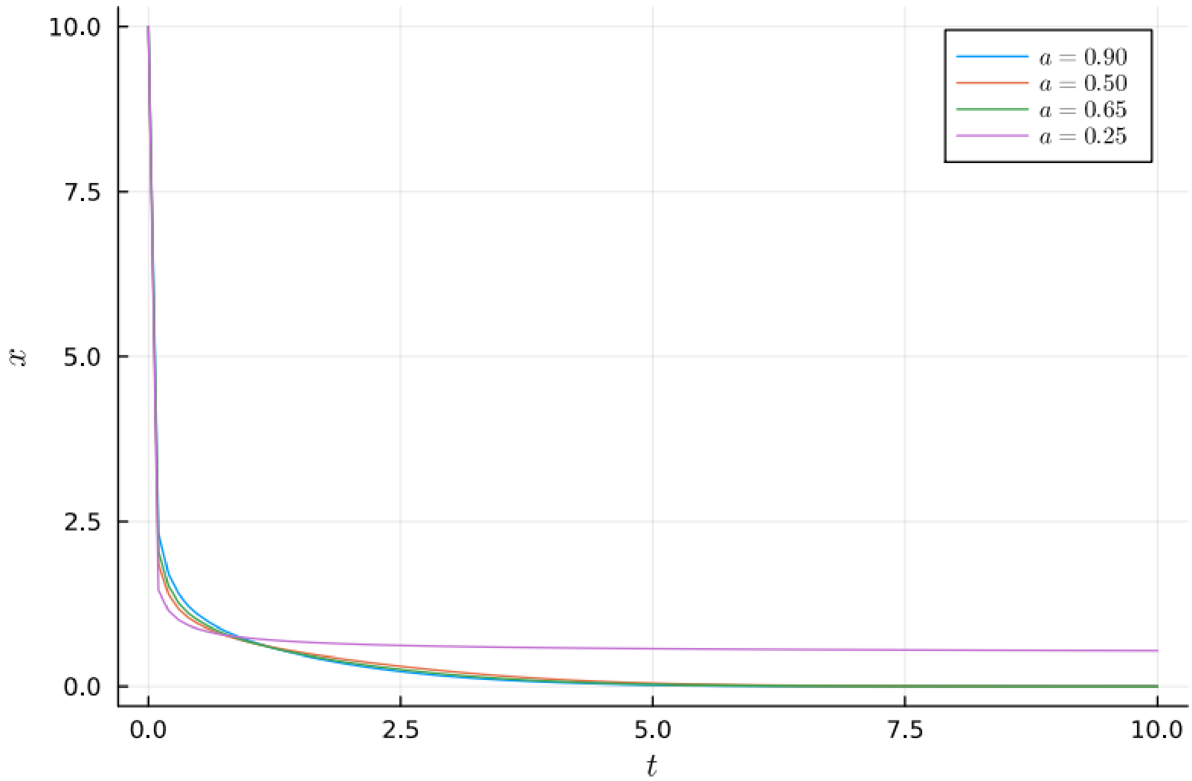

Figura 1. Solución de la ecuación logística incluyendo el efecto Allee variando el alfa y con una población de 10 individuos.

En los últimos años se ha visto un incremento en la investigación del efecto Allee debido a la relación que tiene este para comprender y predecir la extinción de las especies y sus aplicaciones han generado un gran interés sobre todo para tratar de conservar las poblaciones pequeñas, ya que para prevenir estos eventos primero tenemos que entender lo que esta pasando. Es por esto que se opto por realizar este estudio proponiendo un modelo normalizado del efecto Allee a partir de una modificación en la ecuación del modelo logístico.

Los resultados de la ecuación normalizada para el efecto Allee se presentan en la figura 1, aquí se tomó la decisión de partir de una población pequeña para poder comprobar con mayor precisión el efecto Allee y en efecto como se puede observar en la figura para una población de 10 individuos conforme avanza el tiempo esta disminuye y tiende a 0 lo cual comprueba el efecto Allee.

Aunque este código nos ayuda a probar el efecto Allee todavía existen ciertos factores que no se están considerando ya que como se menciona en Kramer et al. (2017) los componentes del efecto Allee se dividen en dos, los fuertes y los débiles, y estos afectan de manera diferente a las poblaciones y no siempre causan un efecto Allee demográfico que pueda llegar a causar la extinción de la especie, en Drake et al. (2019) se reporta un modelo donde se toman en cuenta diferentes efectos Allee y se visualiza de manera grafica como esto puede afectar a la población en diferentes escenarios y como a veces los efectos pueden provocar un efecto Allee demográfico o en otras ocasiones solo resulta en la disminución de la población sin provocar una extinción. Esto se puede deber a que como se menciono anteriormente se ha visto que evolutivamente las especies tienden a adaptarse para poder sobrellevar los cambios a los que se ven expuestos y para así poder perpetuar la especie y evitar la extinción por lo tanto la mayoría de los efectos Allee aunque si afectan a ciertas poblaciones no necesariamente causan un evento de extinción (Drake & Kramer, 2011). En este estudio ya comprobamos que el uso de esta ecuación nos permite reconocer el efecto Allee que actúa sobre la población, sin embargo, para investigaciones futuras se podría incluir en el modelo la tasa de natalidad, de mortalidad y diferentes efectos Allee ya sean débiles o fuertes para visualizar como estos afectan específicamente a la población y así crear un modelo más complejo que nos permita acercarnos más a la realidad.

Conclusiones

Aunque los modelos exponencial y logístico son muy complejos y nos ayudan a conocer la dinámica de poblaciones, debido a su simplicidad los resultados obtenidos no se asemejan a la realidad principalmente cuando se habla de organismos más grandes y por lo tanto se deben de completar con otros modelos para describir de mejor manera ciertos eventos de la naturaleza. El efecto Allee es un fenómeno que se presenta en las poblaciones pequeñas donde la tasa de crecimiento se reduce debido a la poca presencia de individuos y dependiendo de la fuerza de estos efectos se puede a llegar a ocasionar la extinción de la especie, es por ello que en los últimos años se la ha prestado más atención a realizar modelos que expliquen este fenómeno y que nos permitan aplicarlo para evitar la extinción de ciertas especies endémicas. En este estudio se observo que al resolver y graficar la ecuación normalizada para una población pequeña esta disminuía conforme avanzaba el tiempo comprobando así el efecto Allee, sin embargo, para que este modelo se asemeje más a la realidad en un futuro se podría tomar en cuenta la tasa de natalidad, de mortalidad y diferentes efectos Allee ya sean débiles o fuertes para visualizar como estos afectan específicamente a la población.

Bibliografía

- Drake, J. M. & Kramer, A. M. (2011) Allee Effects. Nature Education Knowledge 3(10):2
- Drake, J. M., Berec, L., & Kramer, A. M. (2019). Allee Effects. Encyclopedia of Ecology, 6–13.
- Kramer, A. M., Berec, L., & Drake, J. M. (2017). Editorial: Allee effects in ecology and evolution. Journal of Animal Ecology, 87(1), 7–10.
- Vandermeer, J. (2010) How Populations Grow: The Exponential and Logistic Equations. Nature Education Knowledge 3(10):15