# Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

## *Reporte 1. Modelo de Crecimiento Exponencial*

Biología Matemática
Dr. Moisés Santillán Zerón

*Vanessa Isabel Irigoyen Torres*

14 de Septiembre de 2022

# El Fallo en el Crecimiento Exponencial Bacteriano

## Introducción

Una función exponencial es aquella en la cual el exponente es una variable y la base es una constante, se encuentra definida para todos los reales y es continua, su forma general se expresa como:

$$f(x) = a^x$$

Su uso data desde la época de los griegos, Euclídes fue de los primeros en mencionar la multiplicación de potencias de igual base. Dentro de las funciones exponenciales están aquellas que emplean como base el típico número ($e$) que fue denotado por Euler, quién en 1748 hizo un cálculo aproximado decimal y probó que es irracional. Las funciones exponenciales han tenido diversas aplicaciones en ramas como la economía, la química y la biología; Thomas Robert Malthus utilizó una función de esta naturaleza en su obra Ensayo sobre el principio de población para desarrollar su teoría sobre el crecimiento exponencial de la población frente al crecimiento aritmético de los recursos alimenticios.[1]

En lo que a la biología compete se han empleado funciones exponenciales para expresar un sin número de fenómenos, entre ellos el crecimiento y reproducción. En general se define como crecimiento de un sistema biológico el aumento en la masa celular que permita la multiplicación; el crecimiento microbiano se refiere a la multiplicación del mismo, es decir, es el incremento en la cantidad de individuos, por ejemplo el aumento en la cantidad de bacterias en un cultivo. Dicho proceso como en la mayoría de los microorganismos procariontes es mediante fisión binaria donde la célula o en este caso la bacteria se divide en dos una vez que cuenta con el tamaño adecuado para ello, lo cual se logra cuando el entorno en el que se encuentra es idóneo para su multiplicación y cuenta con los recursos necesarios para ello.

El crecimiento se puede ver tanto a nivel individual como poblacional, lo que compete a este artículo es el crecimiento poblacional, donde para que se lleve a cabo se requieren de puntos específicos como la cinética del crecimiento, las condiciones ambientales y el medio de nutrición o recursos disponibles para el organismo.
Se pueden contemplar cuatro fases en el crecimiento poblacional, la fase de adaptación, la fase exponencial, la fase estacionaria y la muerte. En la primera fase el microorganismo se adapta al entorno, y regula su metabolismo dependiendo de dichas condiciones y los nutrientes disponibles. En la fase exponencial o logarítmica el consumo de nutrientes es máximo y el tiempo de multiplicación mínimo, de tal manera que el crecimiento aumenta aceleradamente. En la fase estacionaria ya no se aumenta el número de bacterias, los nutrientes y el medio comienzan a ser insuficientes y se detiene el crecimiento, teniendo ahora solo un metabolismo de supervivencia. Finalmente al ser los recursos insuficientes comienzan a morir y la población decrece. [4]

## Planteamiento

En base a un modelo exponencial determinar el tiempo que se tomaría para que la población bacteriana igualara la masa de la tierra.

# Resultados

Para dicho planteamiento se considero la masa promedio de una bacteria de E. Coli y la masa de la tierra, ambas medidas en kg.

Masa promedio de E. Coli $= 1 \times 10^{-15}$kg        Masa de la Tierra $= 5.972 \times 10^{24}$kg

De igual manera la reproducción y crecimiento bacteriano se comporta de una forma exponencial dado por (1)

$$N(t) = N_0 e^{\alpha t} \tag{1}$$

Se considera que la población crece el doble de su inicial en un tiempo $t_2$ de 30 minutos, y que la población inicial es de una bacteria.

$$N(t_2) = 2N_0, \qquad N_0 = 1, \qquad t_2 = 30min$$

Dado lo anterior y resolviendo para $t_2$ en segundos se puede encontrar la tasa de crecimiento expresada en la ecuación (3).

$$2N_0 = N_0 e^{\alpha t_2}, \qquad 2 = e^{\alpha t_2}$$

$$\ln 2 = \ln e^{\alpha t_2} \qquad \alpha = \frac{\ln 2}{t_2} \tag{2}$$

$$\alpha \approx 3.8508 \times 10^{-4} [s^{-1}] \tag{3}$$

Con lo anterior la ecuación de crecimiento se expresa como sigue:

$$N(t) = e^{3.8508 \times 10^{-4} t} \tag{4}$$

Donde la representación gráfica del crecimiento se ve como lo muestra la figura 1.

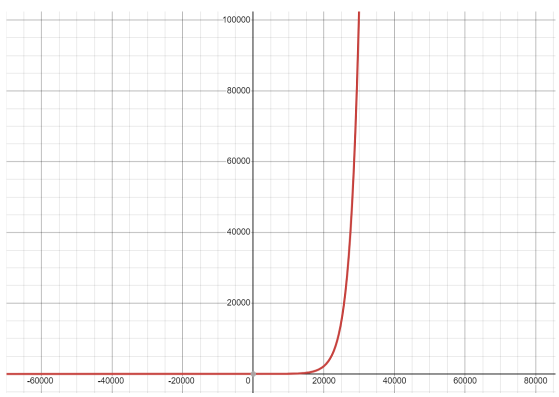


Figura 1: Crecimiento exponencial bacteriano dada la tasa (3)

Por otro lado la cantidad de población bacteriana que se busca tener es la equivalente a la masa de la tierra lo cual se obtiene de dividir la masa de la tierra entre la masa de la bacteria. Lo cual se expresada en (5).

$$N(t) = \frac{5.972 \times 10^{24}}{1 \times 10^{-15}} \qquad N(t) = 5.972 \times 10^{39} \tag{5}$$

A partir de ello se puede expresar la población $N(t)$ en función del valor de $\alpha$ encontrado y el tiempo. De tal manera que se obtienen las ecuaciones siguientes.

$$5.972 \times 10^{39} = e^{3.8508 \times 10^{-4} [s^{-1}] t} \qquad \ln 5.972 \times 10^{39} = \ln e^{3.8508 \times 10^{-4} [s^{-1}] t} \tag{6}$$

Resolviendo para el tiempo se llega a la cantidad de segundos necesarios para que la población bacteriana tenga $5.972 \times 10^{39}$ bacterias.

$$t = \frac{\ln 5.972 \times 10^{39}}{3.8508 \times 10^{-4}[s^{-1}]} \qquad t = 237841.2s \approx 66hrs \qquad t = 132t_2 \tag{7}$$

El tiempo que se tardaría la población bacteriana en igualar la masa de la tierra sería aproximadamente 66 horas.

## Conclusiones

Las ecuaciones exponenciales son ideales a la hora de modelar fenómenos y procesos de todo tipo, entre ellos procesos biológicos como lo es el crecimiento bacteriano, sin embargo, a pesar de lo bueno que pudiera ser, por sí solo no es suficiente para representar todo el proceso de crecimiento, pues como vemos si el crecimiento exponencial se mantuviera, el tiempo en el cual las bacterias consumirían todos los recursos de la tierra sería muy corto, de ser así, hace millones de años que no existiríamos y probablemente ni siquiera hubiera evolucionado la vida a lo que somos y conocemos. Pero ¿Por qué no sucede esto?, bueno sencillamente el medio en el que se desarrollan los microorganismos es muy específico, y todo el planeta no cuenta con todas las condiciones para ello, además en este modelo solo se considera el crecimiento, no se considera la fase estacionaria ni la muerte, para que el modelo estuviera completo y fuera adecuado habría que tomar en cuenta dichos factores como los ambientales y modelar el decaimiento que presentan cuando las condiciones cambian y los recursos son insuficientes.

## Referencias


[1] Matemáticas y sus fronteras -. 2018. La vida exponencial - Matemáticas y sus fronteras. [online] https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2018/05/26/145230

[2] Flores, P., Cárdenas, M. and García, E., 2018. Matemáticas 1 con un enfoque químico biológico. [online] Zaragoza.unam.mx. https://www.zaragoza.unam.mx/wp-content/Portal2015/publicaciones/libros/cbiologicas/libros/MATEMATICASCONUNENFOQUE QUIMICOBIOLOGICO1.pdf

[3] Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas (7.a ed.). Cengage Learning.

[4] Caycedo Lozano, Liliana, Ramírez, Lucía Constanza Corrales, & Suárez, Diana Marcela Trujillo. (2021). Las bacterias, su nutrición y crecimiento: una mirada desde la química. Nova, 19(36), 49-94. Epub 17 de janeiro de 2021.https://doi.org/10.22490/24629448.5293