Cinvestav
Maestría en Ingeniería y Física Biomédicas
Proyecto 4
03 enero, 2023

Modelo de Lotka-Volterra aplicado a una relación interespecífica de mutualismo

González Rueda Arantxa

1. Introducción

Dentro de la naturaleza existen distintos tipos de interacciones que permiten a los individuos dentro de un ecosistema sobrevivir y coexistir. Considerando los diferentes tipos de interacciones interespecíficas que pueden presentarse, el mutualismo se caracteriza por resultar en un efecto positivo o benefico para individuos de diferentes especies de forma recíproca. Este efecto positivo se ve reflejado ya sea en la reproducción o supervivencia *per capita* de los individuos que se encuentran interactuando [01]. El mutualismo es un tipo de interacción que juega un papel indispensable dentro de la biodiversidad y la función de los ecosistemas. Existen diversos ejemplos de este tipo de interacción, como lo son: las plantas y sus polinizadores, las micorrizas y las plantas, el coral y los zooxantela, entre muchas otras [01].
Las relaciones interespecíficas son complicadas y deben de considerar un número alto tanto de variables como de consideraciones que afectan la forma en la que se desarrollan a través del tiempo. Para lograr una estimación de estas dinámicas poblacionales se puede hacer uso del modelo Lotka-Volterra [03]. Este es un modelo usado para describir las dinámicas de dos poblaciones que se encuentran interactuando de diversas formas, ya sean de depredación o mutualismo; el segundo caso, esta evaluación se logra mediante el cambio del signo de negativo a positivo para el coeficiente de interacción interespecífica. Considerando esto, el modelo Lotka-Volterra permite un análisis del mutualismo presente entre diferentes especies.

2. Planteamiento de problema

Dentro de las siguientes secciones se describirá el modelo Lotka-Volterra aplicado a dos especies que tengan interacciones de mutualismo. Lo anterior con el objetivo de analizar la dinámica de las interacciones y como variando el coeficiente de interacción interespecífica se afectará la dinámica de poblaciones modeladas.

3. Metodología

Primero se establecieron las ecuaciones que describen el modelo que se estudiará:

$$X = r_x X(1 - \frac{X}{K_x} + AY) \tag{1}$$

$$Y = r_y Y(1 - \frac{Y}{K_y} + BX) \tag{2}$$

La **ecuación 1** y **ecuación 2** describen el desarrollo de las dos poblaciones, considerando lucha intraespecífica; esta es delimitada por la variable $\frac{X}{K_x}$ y $\frac{Y}{K_y}$ respectivamente. La interacción mutualista entre ambas especies se representa mediante la variable A y B respectivamente.
Para obtener una reducción en las variables a considerar, se realizó un proceso de normalización a las **ecuaciones 1 y 2**. En este proceso se obtuvieron las siguientes dos ecuaciones:

$$X' = X(1 - X + \alpha_{yx} Y) \tag{3}$$

$$Y' = PY(1 - Y + \alpha_{xY} X) \tag{4}$$

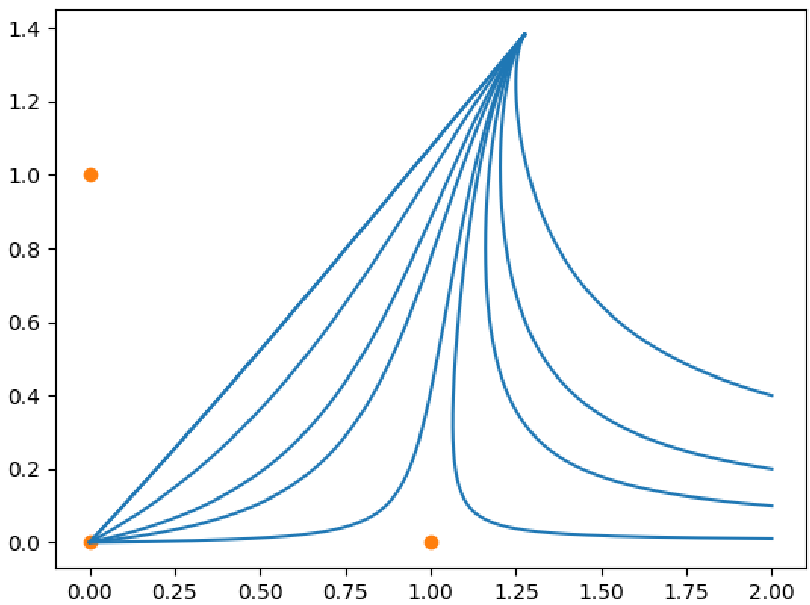
Tomando todo esto en cosideración, se identificaron 4 *steady states*, estos se encuentran en $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y otro cuando α_{yx} y $\alpha_{xy} < 1$. Un *steady state* se refiere a aquellos estados donde la población recibe ciertas perturbaciones pero siempre vuelve al mismo punto. En cuanto al jacobiano computado de las **ecuaciones 3 y 4**, se encontró que este es igual a:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2x + \alpha_{yx} y & \alpha_{yx} x \\ P\alpha_{xy} y & P(1 - 2y + \alpha_{xy} x) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Para determinar la dinámica de poblaciones, se graficó el modelo diseñado variando los valores de α y β. Se graficaron 19 puntos distintos.

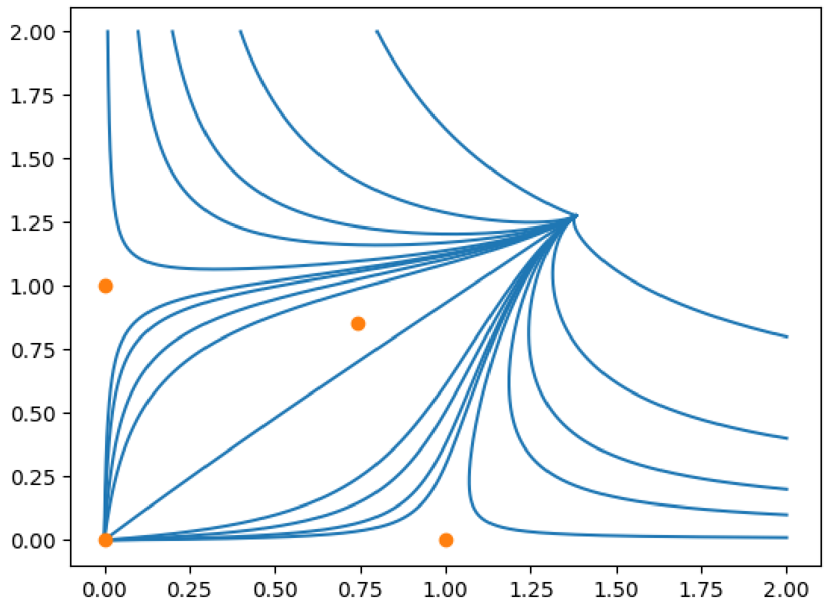
4. Resultados

Figura 1: *Modelo de mutualismo con valor de* $\alpha = 0{,}2$ *y* $\beta = 0{,}3$



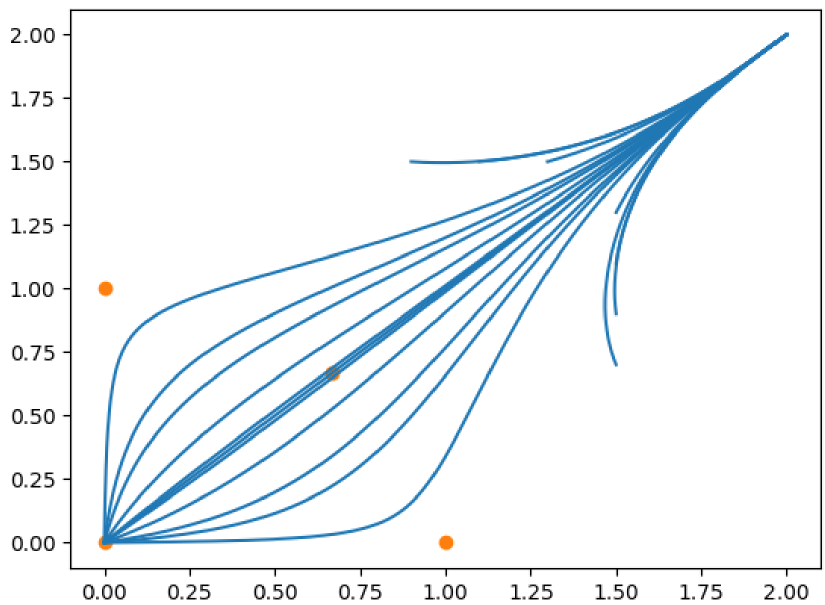
Para la **figura 1**, los valores de las poblaciones se mantienen por debajo de la separatrix. La dinámica se mueve más hacía el *steady state* 1,0, sin embargo, no llega a tocarlos y retoman la dirección hacía la separatrix.

Figura 2: *Modelo de mutualismo con valor de* $\alpha = 0{,}3$ *y* $\beta = 0{,}2$



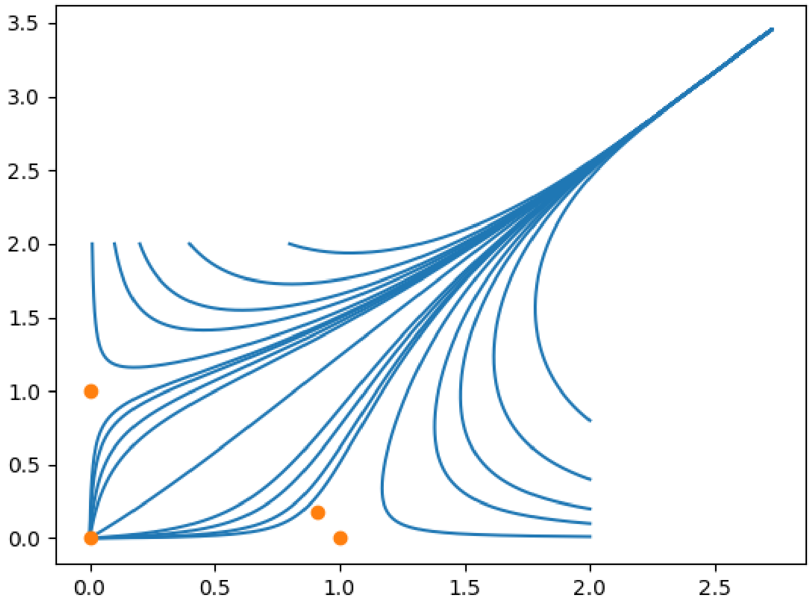
A diferencia del caso anterior, en la **figura 2** la dinámica se acerca hacía ambos *steady state* donde 1,0 y 0,1; sin embargo, la dinámica se dirige nuevamente hacía la separatrix.

Figura 3: *Modelo de mutualismo con valor de* $\alpha = 0{,}5$ *y* $\beta = 0{,}5$



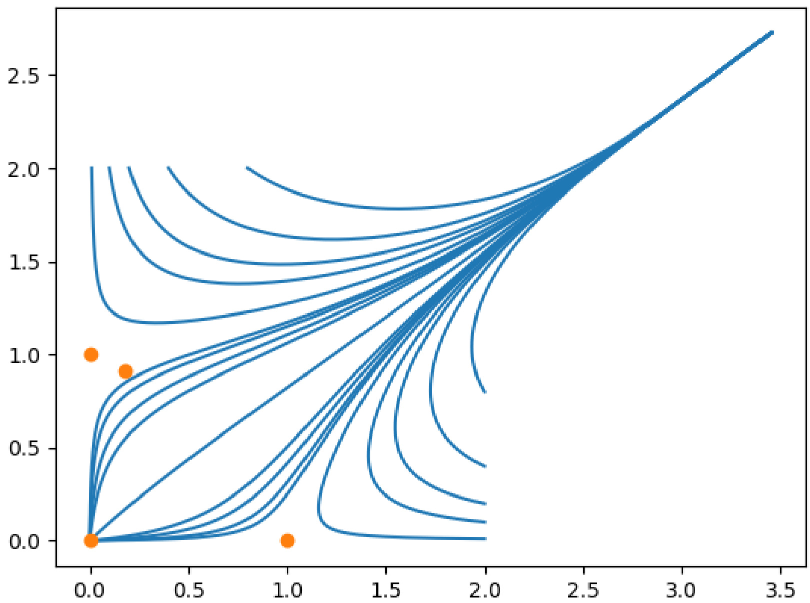
Para la **figura 3**, las dinámicas no se acercan a los valores de *steady state* 1,0 y 0,1, sin embargo, al igual que en la **figura 2** se acercan más a la separatrix conforme la dinámica va avanzando.

Figura 4: *Modelo de mutualismo con valor de* $\alpha = 0{,}5$ *y* $\beta = 0{,}9$ *)*



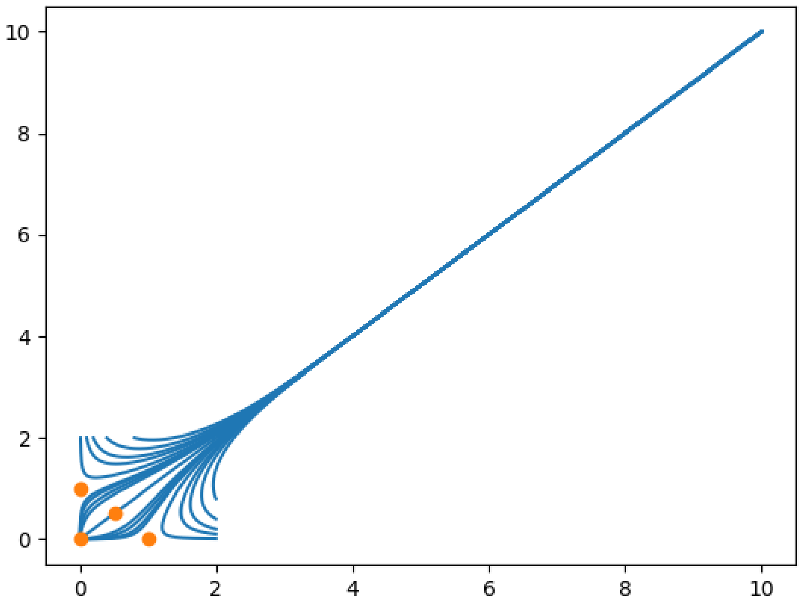
A diferencia de la **figura 3**, la **figura 4**, más dinámicas se acercan a los *steady states*, sin embargo, no los tocan y se dirigen al igual que la otra dinámica a la separatrix.

Figura 5: *Modelo de mutualismo con valor de* $\alpha = 0{,}9$ *y* $\beta = 0{,}5$



El comportamiento de la **figura 5** es bastante similar al de la **figura 4**, en donde los valores de las dinámicas se mueven hacía los *steady states*, sin embargo, no llegan a tocarlos y terminan acercandose a la separatrix.

Figura 6: *Modelo de mutualismo con valor de* $\alpha = 0{,}9$ *y* $\beta = 0{,}9$



El comportamiento de la **figura 6** es bastante similar al de la **figura 4 y 5**, en donde los valores de las dinámicas se mueven hacía los *steady states*, sin embargo, no llegan a tocarlos y terminan acercandose a la separatrix. Sin embargo, estas llegan a un crecimiento constante.
Si observamos el jacobiano **ecuación 5** observamos los elementos no diagonales son no negativos. Este tipo de orden hace referencia a sistemas que se clasifican como cooperativos. Cuando se trata de sistemas cooperativos de dos especies (dos dimensiones), estos convergen a un estado estacionario. Esto puede explicar el comportamiento que se observa en las figuras anteriormente presentadas.

Faltan las expresiones para los puntos fijos. Falta el análisis de estabilidad. La posición del punto fijo de coexistencia no coincide con las simulaciones. Estas son las que están bien.

5. Conclusión

Mediante la aplicación del modelo Lotka-Volterra en un caso de mutualismo, logramos observar la dinámica de dos poblaciones distintas cuando el valor del coeficiente que pertenece a la interacción interespecífica. Conforme este coeficiente se acerca más a 1, las poblaciones crecen de forma constante. Cada vez que el valor de α aumenta, el crecimiento de ambas poblaciones se vuelve constante y líneal. Esto quiere decir que, conforme el valor de la interacción interespecífica de ambas poblaciones aumenta la cantidad de individuos que pertenecen a ambas poblaciones tiene una un crecimiento exponencial. Este tipo de comportamiento es consecuencia del modelo utilizado, ya que, el incremento de la del coeficiente de la interacci´no interespecífica aumenta, la fuerza mutualista lo hace, por lo cual, las especies llegan a un equilibrio de biomasa que tiende al infinito. Por evidentes razones, un crecimiento hasta el infinito es imposible, por lo cual, una consideración importante a tomar es que, conforme la cantidad de individuos dentro de una población aumenta, la fuerza de la interacción debe de disminuir [03].

6. Perspectivas

La aplicación del modelo Lotka-Volterra para mutualismo es útil para demostrar la dinámica de dos ponlaciones que tienen interacción de tipo mutualista, sin embargo, se podría mejorar el modelo agregando otras consideraciones importantes que afecten o modifiquen la dinámica de las poblaciones. Un ejemplo de esto sería la consideración de que, la fuerza de la interacción mutualista debe de disminuir para que el crecimiento de las poblaciones no tienda al infinito.

Referencias

[01] Holland JN, Bronstein JL. *Mutualism*. Encyclopedia of Ecology [Internet]. 2008;2485–91. Available from: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B978008045405400673X

[02] Moore CM, Catella SA, Abbott KC. *Population dynamics of mutualism and intraspecific density dependence: How ζ-logistic density dependence affects mutualistic positive feedback*. Ecological Modelling. 2018 Jan;368:191–7.

[03] Hale KRS, Valdovinos FS. *Ecological theory of mutualism: Robust patterns of stability and thresholds in two-species population models*. Ecology and Evolution. 2021 Dec;11(24):17651–71.