Jorge Luis Fernández López

# Adaptación del modelo Lotka-Volterra de dos poblaciones compitiendo por recursos al fenómeno de mutualismo

## Introducción

Mutualismo es cuando la interacción entre dos especies distintas de seres vivos trae como consecuencia que ambas obtengan un beneficio mutuo. Algunos ejemplos clásicos de este suceso de la naturaleza son los siguientes:

1.- El pez payaso y la anémona.- En este caso, el pez payaso logra escabullirse entre los tentáculos de la anémona por medio de un recubrimiento. Posteriormente, ambos se defienden mutuamente de diferentes depredadores.

Imagen 1.- Pez payaso y anémona

2.- La flora bacteriana y los humanos.- En este caso, los seres humanos cuentan dentro de su flora intestinal con unas bacterias que ayudan a la digestión de los alimentos. Por lo tanto, ambos obtienen un beneficio ya que mejora el proceso digestivo de los humanos y las bacterias obtienen alimento y refugio para subsistir.

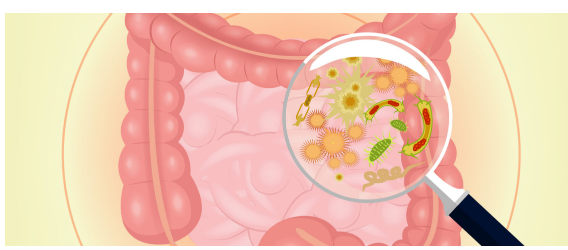


Imagen 2.- Flora intestinal y microbiota

Cómo se menciona en el título de este proyecto, el modelo de Loftka-Volterra que se va a utilizar está realizado para el caso contrario al mutualismo ,y este es el de competitividad entre especies. Esto significa que ambas especies compiten por los recursos de un lugar. Como consecuencia, dependiendo que tan agresiva sea una especie contra otra, es que una va a llevar a la extinción a la otra. Matemáticamente y de forma normalizada, este modelo se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x - \alpha y)$$
$$\frac{dy}{dt} = \rho y(1 - y - \beta x)$$

Aquí se puede destacar que existen dos especies (x e y) y ambas actúan con cierta agresividad contra la otra. Esta agresividad la proporcionan las letras griegas alfa y beta. Alfa es el indicador de qué tan agresiva es la especie y contra la especie x y beta es que tan agresiva es la especie x contra la especie y.

Para el caso de mutualismo, adaptaremos este modelo de Loftka-Volterra de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x + \alpha y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho y(1 - y + \beta x)$$

En este caso, los indicadores alfa y beta informan qué tan útil puede ser una especie para la conservación de la otra.

## Desarrollo

Analizamos la estabilidad de este modelo de la siguiente manera:

1.- Se obtiene el jacobiano del nuevo modelo, teniendo como resultado lo siguiente:

$$J= \begin{pmatrix} 1 - 2x + \alpha y & \alpha x \\ \rho\beta y & \rho(1 - 2y + \beta x) \end{pmatrix}$$

2.- Una vez que se obtiene el jacobiano, se va a analizar la estabilidad de los puntos fijos de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$$

Los casos a analizar son los siguientes:

Caso 1

x=0   y=0

J= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$

$\tau = 1 + \rho$
$\Delta = \rho$

Por lo tanto, como delta es constante este punto es inestable de la misma forma que en el modelo de Loftka-Volterra para la competencia entre especies.

Caso 2

x=0   y=1

J= $\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ \rho\beta & -\rho \end{pmatrix}$

$\tau = 1 + \alpha - \rho$
$\Delta = \rho(-\alpha - 1)$

En este caso, se puede decir lo siguiente:

$\alpha < -1$ el nodo es estable

No veo de dónde sale esto

$\alpha > -1$ el nodo es inestable

Caso 3

x=1 y=0

J= $\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & \rho(1+\beta) \end{pmatrix}$

$\tau = -1 + \rho\beta + \rho$
$\Delta = \rho(-\beta - 1)$

De la misma forma que el caso 2 pero utilizando beta, se puede decir lo siguiente:

$\beta < -1$ el nodo es estable

$\beta > -1$ el nodo es inestable

Caso 4

Para este caso tenemos lo siguiente:

1-x+$\alpha y$=0
1-y+$\beta x$=0

**(Corrección del cuarto punto fijo)**

1+$\alpha y$=x

Sustituimos en la segunda ecuación y obtenemos lo siguiente:

$$0 = 1 - y + \beta + \alpha\beta y$$

$$y - \alpha\beta y = 1 + \beta$$

$$(1 - \alpha\beta)y = 1 + \beta$$

$$y = \frac{1 + \beta}{1 - \alpha\beta}$$

Sustituimos en la expresión de x, obteniendo lo siguiente:

$$x = 1 + \alpha(\frac{1 + \beta}{1 - \alpha\beta})$$

$$x = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta}$$

$$x = \frac{1 - \alpha\beta + \alpha + \alpha\beta}{1 - \alpha\beta}$$

$$x = \frac{1+\alpha}{1-\alpha\beta}$$

Por lo tanto, el punto queda de la siguiente manera:

$$x = \frac{1+\alpha}{1-\alpha\beta} \quad y = \frac{1+\beta}{1-\alpha\beta}$$

En este caso, de la misma forma que el modelo de competencias, solo puede existir este punto fijo si alfa y beta son mayores o menores que 1. Ya que, como se puede observar, estas expresiones matemáticas se indefinen en 1.

Aquí, el nodo es estable de la siguiente manera:

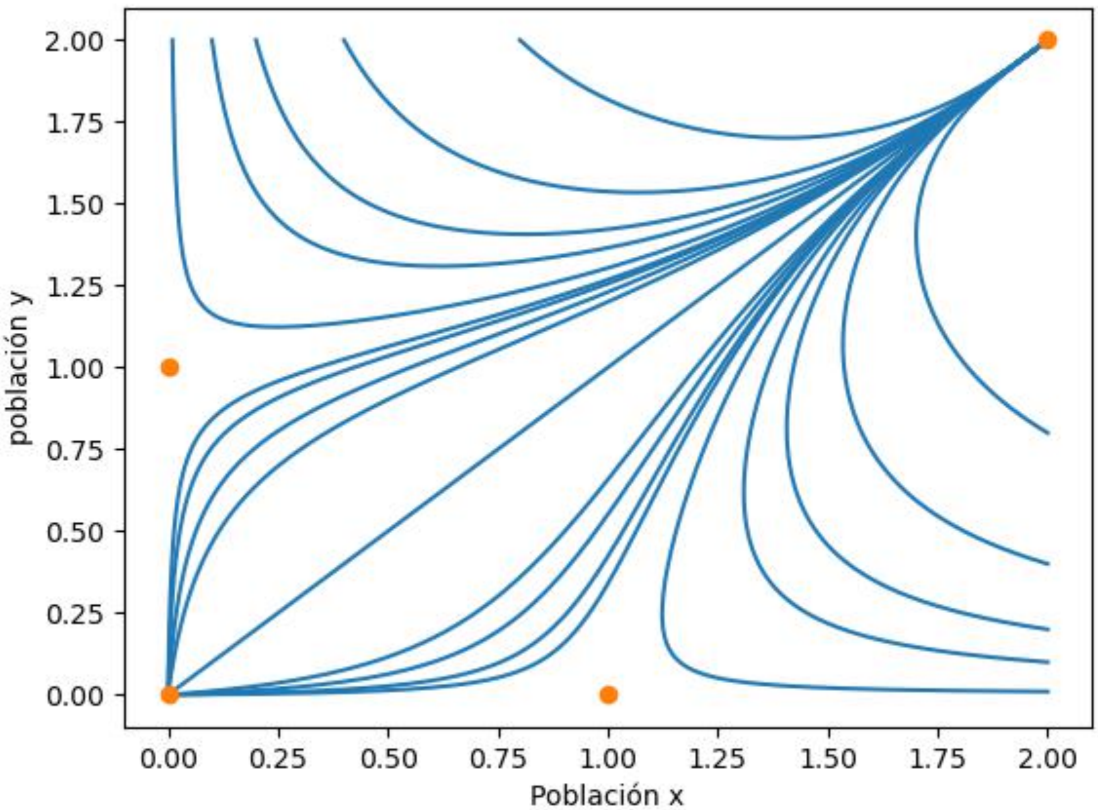
si $\alpha, \beta$ <1

**(Corrección de gráficas)**

Algunos comportamientos de los puntos fijos o nodos se pueden observar en las siguientes gráficas de la resolución de la ecuación diferencial de este nuevo modelo asociado al mutualismo:

**Gráfica 1.-**

$\alpha = 0.5$
$\beta = 0.5$
$\rho = 1$

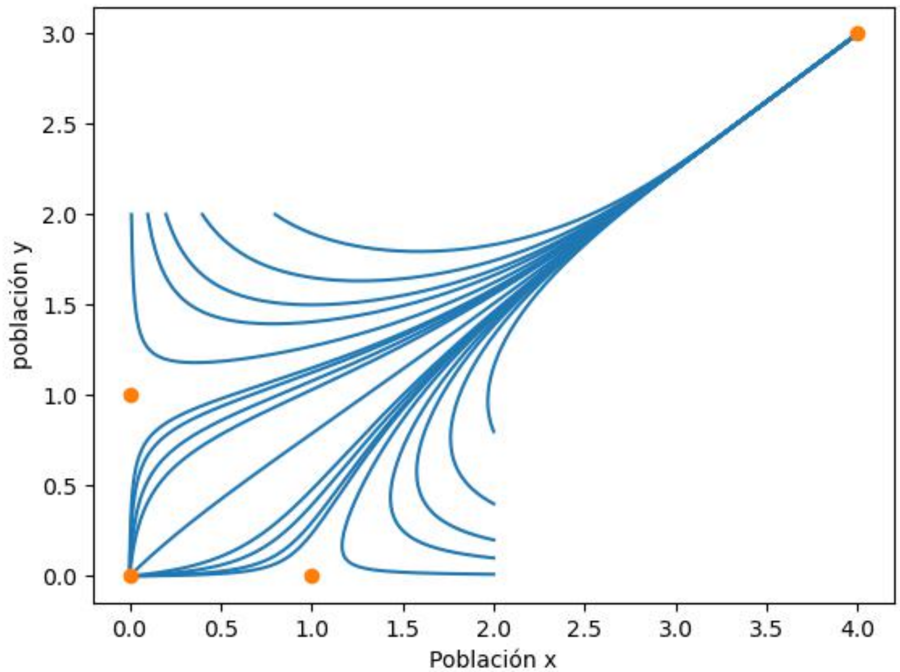



Gráfica 1.-

En la gráfica 1 se puede apreciar los puntos fijos (1,0) y (0,1) son inestables. Aparte, se puede apreciar que las poblaciones x e y se ven atraídas a la directriz y al cuarto punto fijo. Por lo tanto, esto es el equivalente a una coexistencia en el caso de competencias.

**Gráfica 2.-**

$\alpha = 1$
$\beta = 0.5$
$\rho = 1$



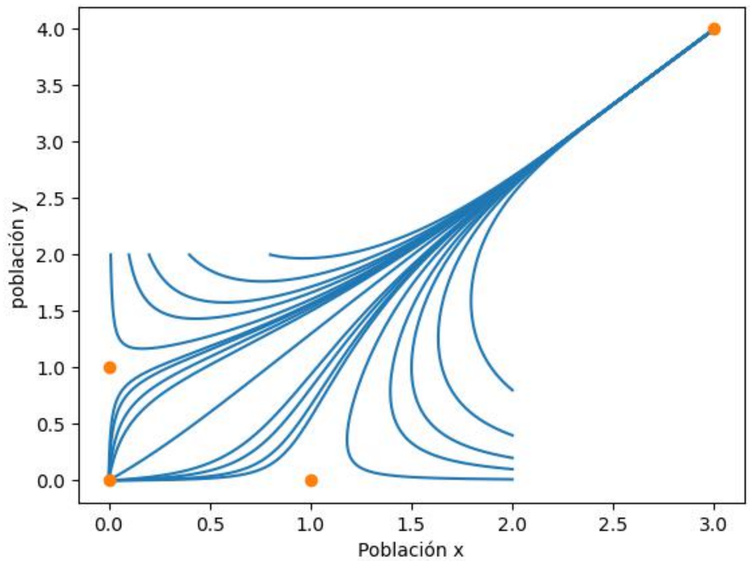

Gráfica 2.-

En la gráfica 2 se puede observar cuando la población y coopera más o es más útil para la conservación de la población x que lo que haga x por y, siendo ambos puntos inestables, se observa claramente una tendencia a la población x de llegar a la directriz para su crecimiento positivo.

**Gráfica 3.-**

$\alpha = 0.5$
$\beta = 1$
$\rho = 1$

¿Qué significa que en el punto de coexistencia ambas poblaciones superen la capacidad de carga? Se supone que el medio no tiene recursos para sustentar tantos individuos.

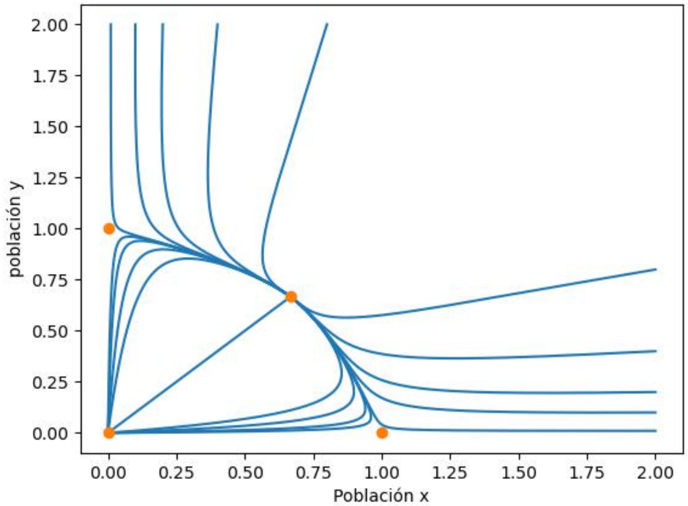



Gráfica 3.-

Curiosamente, aunque la cooperación de la población x aumente con respecto a la cooperación de y, se puede apreciar una gráfica similar a la 2 en donde se aprecia la inestabilidad de los puntos (1,0) y (0,1) con la misma tendencia al crecimiento positivo.

**Gráfica 4.-**

$\alpha = -1.5$
$\beta = -1.3$
$\rho = 1$




Gráfica 4.-

En este último caso, cuando alfa y beta son negativos, deja de ser mutualismo y se regresa al modelo de competencias.

## Conclusión

En términos biológicos, si ambas especies son muy cooperativas, ambas van a tender a crecer de forma positiva y constante sin contar algún otro impedimento ambiental que pudiera influenciar ese crecimiento de ambas. Sin embargo, si alguna de las dos especies decide ya no querer apoyar o cooperar con la otra o una es menos cooperativa que la otra, la que reciba menos ayuda es la que va a tender a la extinción. Este último caso ya se vuelve un modelo de competencias.

## Bibliografía

Lotka-Volterra, M. D.-P. (Septiembre de 2017). *Universidad de la laguna* . Obtenido de https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/6217/Modelo%20depredador-presa%20de%20Volterra-Lotka.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Strogratz, S. H. (1994 ). *NonLinear Dynamica and chaos* . New York: Perseus Books.