Universidade do Minho
Escola de Ciências

O Jogo do Solitário: Uma Abordagem Matemática

Alexandra Calafate
a100060

André Sousa
a87999

Moisés Ferreira
a97020

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O jogo do Solitário é um jogo de tabuleiro de regras bastante simples, cuja origem remonta ao século XVII. Embora muitas vezes visto apenas como um passatempo de lógica e paciência, este jogo pode ser analisado sob uma perspetiva algébrica, revelando ligações com a teoria dos corpos finitos. Neste projeto, exploramos como a matemática pode ser utilizada para estudar e resolver configurações do jogo do solitário, com ênfase na aplicação do corpo finito **GF(4)**.

O corpo **GF(4)** que contém exatamente quatro elementos, possui propriedades algébricas específicas que o tornam adequado para representar operações e simetrias presentes em versões abstratas do jogo. A utilização deste corpo permite modelar movimentos e estados do jogo de forma a identificar padrões, invariantes e, eventualmente, determinar a possibilidade de se alcançar uma solução a partir de uma configuração inicial.

Além da análise de como as propriedades do corpo **GF(4)** se relacionam com a resolução do jogo do Solitário, refere-se também uma abordagem geométrica para a resolução do jogo, a qual pode ser útil na análise de jogadas e estratégias.

Capítulo 2

O Jogo do Solitário

2.1 Contexto Histórico e Regras do Jogo

O Solitário (ou Peg's Solitaire) é um jogo de tabuleiro para um só jogador, com origens que remontam ao século XVII. Acredita-se que o jogo tenha sido inventado na França, por volta de 1687. Um dos primeiros registos conhecidos do jogo aparece numa gravura de Claude-Auguste Berey, datada de 1697, que mostra o tabuleiro e as peças do solitário. Por volta da mesma época, o jogo tornou-se popular na corte de Luís XIV, onde era praticado como um passatempo sofisticado, associado à habilidade intelectual. Há uma lenda bastante repetida que afirma que o jogo foi inventado por um prisioneiro francês, talvez encarcerado na Bastilha, embora não existam provas históricas sólidas que confirmem esta origem.

O tabuleiro mais tradicional tem a forma de uma cruz com 33 cavidades, mas existem também tabuleiros circulares, hexagonais ou triangulares. O jogo é composto por um conjunto de peças (ou berlindes) que são colocados em quase todas as cavidades do tabuleiro, deixando-se apenas uma casa vazia no início (Figura 1). Esta casa, tradicionalmente é a casa do meio do tabuleiro (o chamado Problema Central) contudo pode ser uma qualquer.

O Peg's Solitaire desafia o jogador a eliminar progressivamente todas as peças do tabuleiro, de modo a que no final reste apenas uma única peça. O jogo é regido por um conjunto de regras bastante específicas. Cada jogada consiste em deslocar uma peça, fazendo-a saltar sobre uma peça adjacente em linha reta — apenas na horizontal ou na vertical — para uma casa vazia imediatamente a seguir. A peça que é ultrapassada no salto é então retirada do tabuleiro, sendo eliminada do tabuleiro. Os movimentos são válidos apenas quando existe uma peça adjacente para saltar e uma casa livre imediatamente a seguir à peça saltada. O jogo prossegue até não existirem mais movimentos possíveis. Considera-se que o jogador vence quando resta exatamente uma peça no tabuleiro.

Durante o século XIX, o Solitário foi muitas vezes incluído em compilações de jogos matemáticos ou passatempos de lógica, sendo até analisado em publicações científicas. O matemático britânico Ernest Bergholt e o matemático americano John Horton Conway estudaram o jogo, focando-se na questão de quais configurações iniciais permitiriam uma solução perfeita.

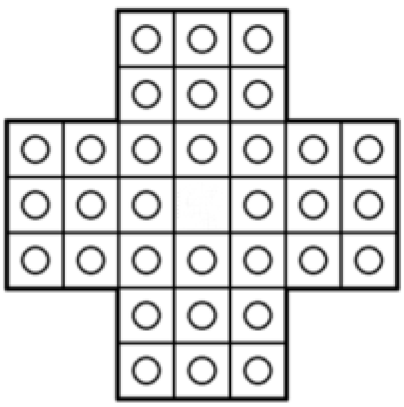
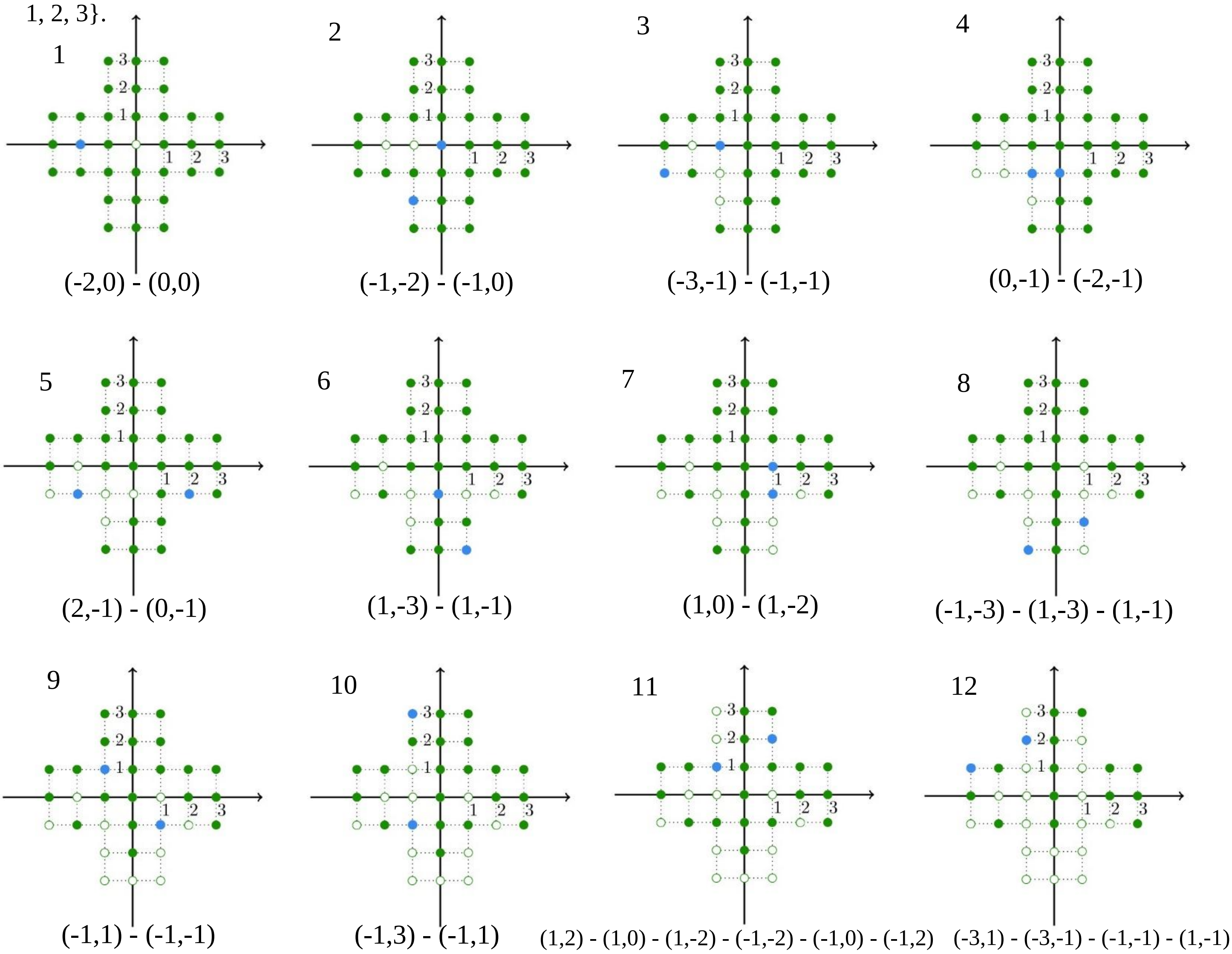


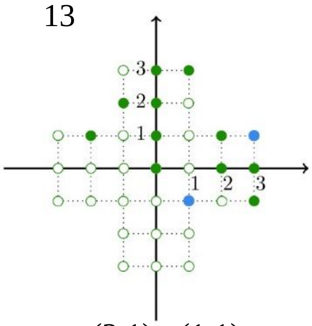
Figura 1 – Tabuleiro Tradicional

2.2 Desafios do Solitário: problemas clássicos e estratégias de resolução

Ao longo dos anos, o jogo do Solitário foi estudado intensivamente, tanto por amadores como por matemáticos, e várias soluções foram descobertas para diferentes versões do jogo. Para o tabuleiro clássico já se conhecem sequências completas de movimentos que permitem terminar o jogo com apenas uma peça. Algumas soluções foram encontradas através de tentativa e erro, enquanto outras foram derivadas com a ajuda de métodos matemáticos rigorosos. A solução mais rápida para o Problema Central envolve 18 movimentos (contando saltos múltiplos consecutivos como movimentos singulares). Esta solução foi encontrada em 1912 por Ernest Bergholt mas foi John Beasley, em 1964, que provou ser essa de facto a solução mais curta. Para apresentarmos esta solução (Figura 2), começamos por introduzir um sistema de coordenadas como tabuleiro. Ao centro do mesmo são atribuídas as coordenadas (0,0) e o resto dos buracos do tabuleiro referenciamos por pares de inteiros (i,j) em que i,j ϵ {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}.

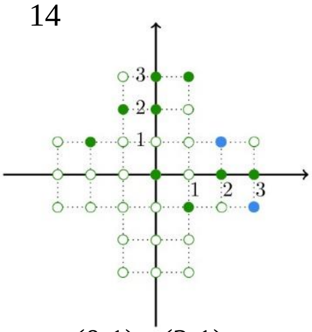


13



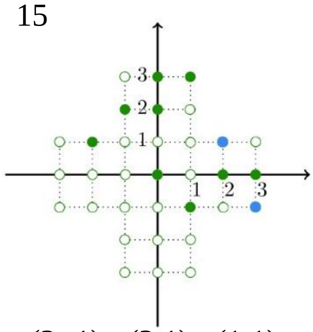
(3,1) - (1,1)

14



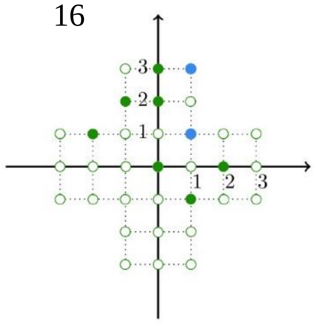
(0,1) - (2,1)

15



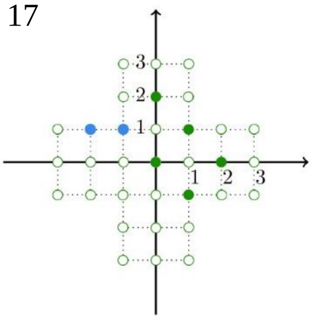
(3,-1) - (3,1) - (1,1)

16



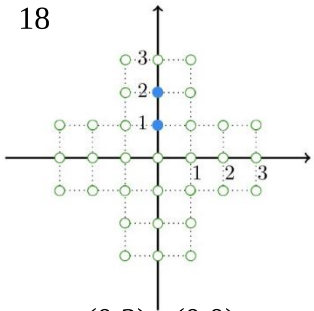
(1,3) - (-1,3) - (-1,1)

17



(-2,1) - (0,1) - (2,1) - (2,-1) - (0,-1) - (0,1)

18



(0,2) - (0,0)

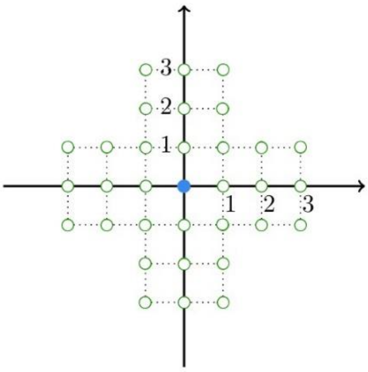
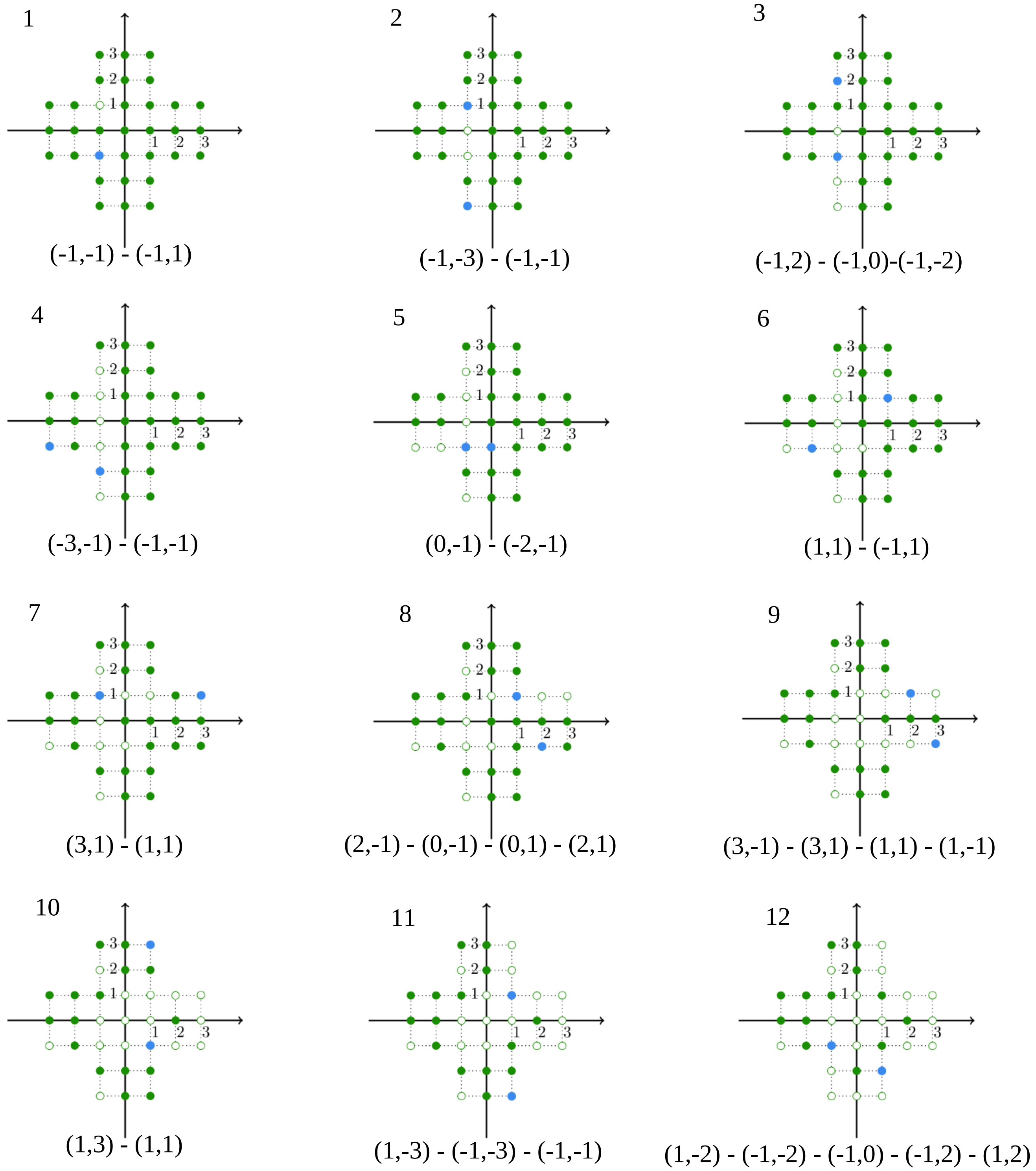


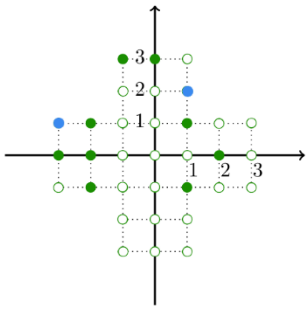
Figura 2 – A solução mais rápida para o Problema Central

Com o problema central resolvido, é natural considerar outras posições inicias e finais que não a casa central.

Uma das menores soluções consiste em colocar a casa vazia na posição (-1,1) e após apenas 15 movimentos é possível terminar o jogo na posição (-1,1), como ilustra a Figura 3.

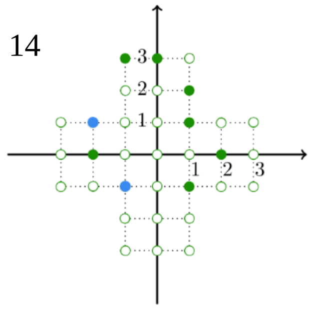


13



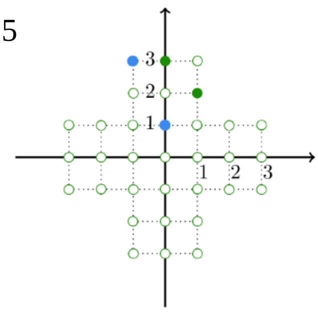
(-3,1) - (-3,-1) - (-1,-1)

14



(-2,1) - (-2,-1) - (0,-1) - (2,-1) - (2,1) - (0,1)

15



(-1,3) - (1,3) - (1,1) - (-1,1)

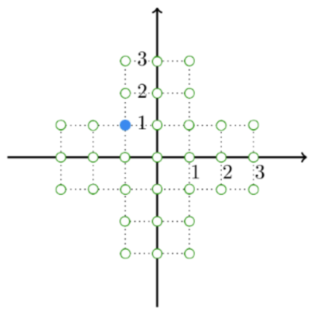


Figura 3

Capítulo 3

Estudo Matemático do jogo do Solitário

3.1 O jogo do Solitário e o corpo GF(4)

Como referido anteriormente, o objetivo do jogo é no final terminar com apenas uma peça no tabuleiro. Se conseguirmos terminar com uma única peça na posição central então também conseguiremos terminar com essa peça noutras posições do tabuleiro. Nesta subsecção analisaremos matematicamente quais são as posições possíveis em que é possível terminar o jogo.

Para isso, iremos ter o auxílio do corpo finito com 4 elementos, **GF(4),** que N.G. de Bruijn, matemático holandês, mostrou que pode ser utilizado para determinar essas mesmas posições.

Começamos por relembrar o corpo **GF(4)** que contém os elementos 0, 1, α e β e cujas operações de adição e multiplicação são definidas pelas seguintes tabelas:

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Pela observação das tabelas, concluímos que (**GF(4)**, +) é um grupo comutativo com elemento identidade 0, que é o elemento zero do semigrupo (**GF(4)**, ·). Mais ainda, podemos concluir que (**GF(4)**\{0}, ·) é um grupo comutativo de elemento identidade 1. Finalmente, para concluirmos que (**GF(4)**, +, ·) é um corpo, temos de concluir que a multiplicação é distributiva em relação à adição. Uma vez que as operações estão definidas por tabelas, a verificação da distributividade tem de ser feita por exaustão, considerando todos os casos. Nos casos em que $x \in \{0,1\}$, a verificação é imediata. Também é imediata a verificação no caso em que $y = 0$ ou $z = 0$ e no caso em que $y = z$. Assim, para verificar a distributividade da multiplicação em relação à adição, basta verificarmos que

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

para $x \in \{\alpha, \beta\}$ e $(y, z) \in \{(1, \alpha), (1, \beta), (\alpha, \beta)\}$. De facto, temos que:

- $\alpha \cdot (1 + \alpha) = \alpha \cdot \beta = 1 = \alpha + \beta = \alpha \cdot 1 + \alpha \cdot \alpha$
- $\beta \cdot (1 + \beta) = \beta \cdot \alpha = 1 = \beta + \alpha = \beta \cdot 1 + \beta \cdot \beta$
- $\beta \cdot (1 + \alpha) = \beta \cdot \beta = \alpha = 1 + \beta = \beta \cdot 1 + \beta \cdot \alpha$
- $\alpha \cdot (1 + \beta) = \alpha \cdot \alpha = \beta = \alpha + 1 = \alpha \cdot 1 + \alpha \cdot \beta$
- $\beta \cdot (\alpha + \beta) = \beta \cdot 1 = \beta = \alpha + 1 = \beta \cdot \beta + \beta \cdot \alpha$
- $\alpha \cdot (\beta + \alpha) = \alpha \cdot 1 = \alpha = 1 + \beta = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \alpha$

Do já observado, destacamos que em **GF(4)** se verificam as igualdades

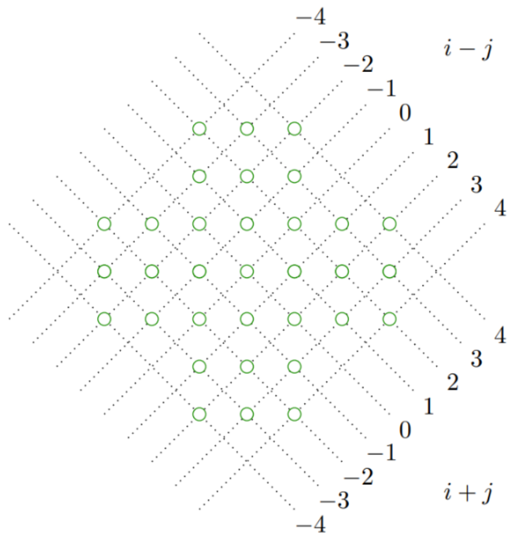
$$1 + \alpha = \alpha^2 \quad e \quad \alpha + \alpha^2 = 1,$$

pelo que podemos trabalhar em função de α.

No sentido de fazermos o estudo pretendido recorrendo ao grupo **GF(4)**, consideramos novamente o tabuleiro no sistema de coordenadas referido anteriormente. Qualquer conjunto de peças no tabuleiro é designado por "situação". Se X for uma situação então definimos os números

$$A(X) = \sum_{(i,j)\in X} \alpha^{i+j} \quad \text{e} \quad B(X) = \sum_{(i,j)\in X} \alpha^{i-j}$$

O esquema



vai ajudar-nos a contabilizar as diferentes potências de α em cada situação.

Suponhamos que um conjunto X de peças no tabuleiro é transformado no conjunto Y por uma jogada em que uma peça salta sobre outra peça adjacente a si na vertical para cima. Se supusermos que a peça está inicialmente na posição (i, j), após a conclusão da jogada, a mesma ficará na posição $(i, j + 2)$ e a peça que está inicialmente na posição $(i, j + 1)$ é retirada do tabuleiro. Então,

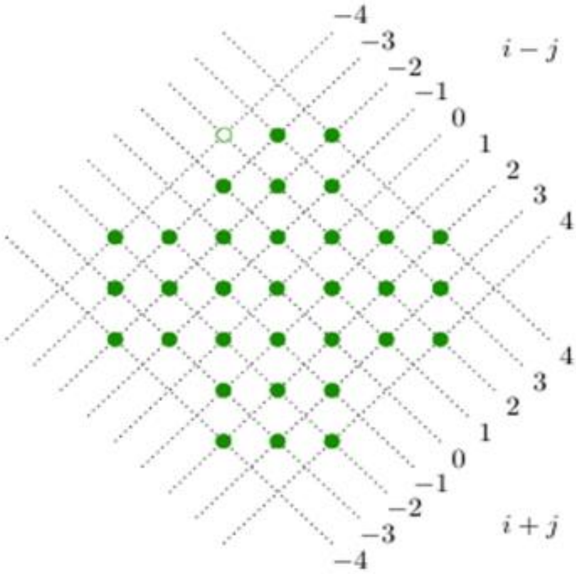
$$A(X) - A(Y) = \alpha^{i+j} + \alpha^{i+j+1} - \alpha^{i+j+2} = \alpha^{i+j}\,(1 + \alpha + \alpha^2) = 0$$

e

$$B(X) - B(Y) = \alpha^{i-j} + \alpha^{i-j-1} - \alpha^{i-j-2} = \alpha^{i-j}\,(1 + \alpha^2 + \alpha) = 0$$

O mesmo se podia verificar se a jogada fosse feita na vertical para baixo ou na horizontal para a esquerda ou para a direita. Portanto, podemos concluir que o par $(A(X), B(X))$ não se altera ao longo do jogo. Esta propriedade é importante para analisar quais poderão ser as posições finais da peça no jogo.

Por exemplo, considerando a situação X_1 em que a posição livre inicial é (-1,3) (tal como indicado na figura seguinte).



Concluímos facilmente, a partir da definição das operações de **GF(4)**, que $A(X_1)$ é igual a

$$
\begin{aligned}
&2\alpha^4 + 4\alpha^3 + 4\alpha^2 + 4\alpha^1 + 3\alpha^0 + 4\alpha^{-1} + 5\alpha^{-2} + 4\alpha^{-3} + 2\alpha^{-4}\\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + \alpha + 0 + 0\\
&= 1 + \alpha = \beta
\end{aligned}
$$

e $B(X_1)$ é igual a

$$
\begin{aligned}
&2\alpha^4 + 4\alpha^3 + 5\alpha^2 + 4\alpha^1 + 3\alpha^0 + 4\alpha^{-1} + 5\alpha^{-2} + 4\alpha^{-3} + 1\alpha^{-4}\\
&= 0 + 0 + \beta + 0 + 1 + 0 + \alpha + 0 + \beta\\
&= \beta + 1 + \alpha + \beta\\
&= \alpha + 1 = \beta
\end{aligned}
$$

Assim, se o jogo terminar com um só berlinde na posição (i,j), do tabuleiro, teremos que

$$A(\{(i,j)\}) = A(X_1) = \beta \qquad \text{e} \qquad B(\{(i,j)\}) = B(X_1) = \beta,$$

ou seja, $\alpha^{i+j} = \beta$ e $\alpha^{i-j} = \beta$.

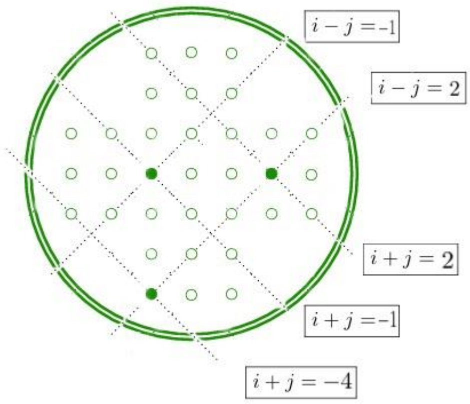
Considerando as igualdades anteriores e as potências sucessivas de α, que são

$$\alpha^4 = \alpha, \quad \alpha^3 = 1, \quad \alpha^2 = \beta, \quad \alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^0 = 1, \quad \alpha^{-1} = \beta,$$
$$\alpha^{-2} = \alpha, \quad \alpha^{-3} = 1, \quad \alpha^{-4} = \beta$$

então a posição da peça final terá de satisfazer

$$i + j \in \{-4, -1, 2\} \text{ e } i - j \in \{-4, -1, 2\}$$

Após a interseção das coordenadas que satisfazem estas condições, concluímos que as únicas posições finais possíveis são (2,0), (-1,0) e (-1,-3).



3.2 Análise geométrica do jogo do Solitário

Na resolução do jogo do Solitário é possível adotar uma abordagem geométrica. Este tipo de abordagem pode ser útil para analisar jogadas e estratégias do jogo. Neste caso, o tabuleiro é dividido em regiões geométricas e estuda-se como a quantidade de peças e movimentos afeta essas regiões. Isso é útil em provas de impossibilidade ou na demonstração de soluções únicas. As simetrias do tabuleiro também ajudam a reduzir o número de jogadas, uma vez que jogadas simétricas têm efeitos equivalentes.

3.2.1. Blocos Lineares

Conjuntos de duas a três casas adjacentes em linha reta.

A partir da posição inicial, e depois de três movimentos, podem eliminar-se as três peças alinhadas, e assim, obter a posição final.

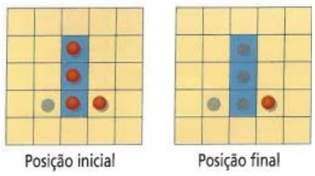


Figura 4 - Bloco Linear A

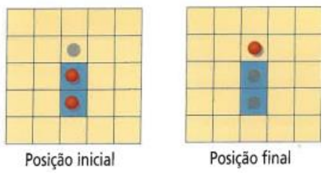


Figura 5 - Bloco Linear B

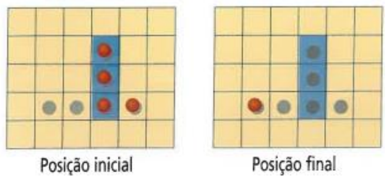


Figura 6 - Bloco Linear C

3.2.2 Blocos Retangulares

Formações com quatro a seis casas organizadas em formato retangular.

A partir da posição inicial, e depois de seis movimentos, obtém-se a posição final.

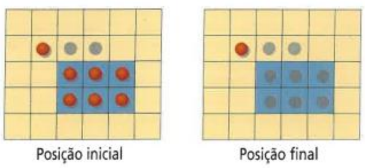


Figura 7 - Bloco Retangular D

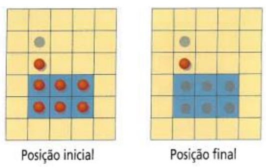


Figura 8 - Bloco Retangular E

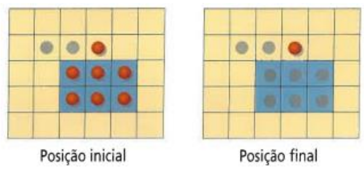


Figura 9 - Bloco Retangular F

3.2.3 Blocos em L

Configurações que formam um ângulo reto, essenciais para jogadas em cantos e transições.
A partir da posição inicial, e depois de seis movimentos, obtém-se a posição final.

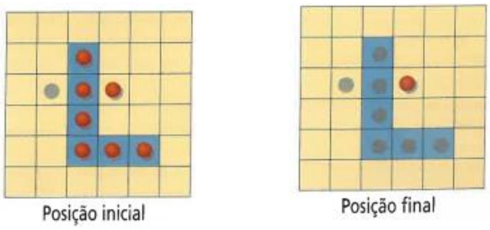


Figura 10 - Pacote em L G

Após a apresentação dos blocos geométricos, apresentamos uma possível solução do jogo com base na junção de todas estas configurações (Figura 11) onde os números representam a ordem em que os blocos são resolvidos e a letras identificam o tipo de pacote. A casa que se encontra, neste caso, inicialmente vazia está assinalada com a cor laranja.

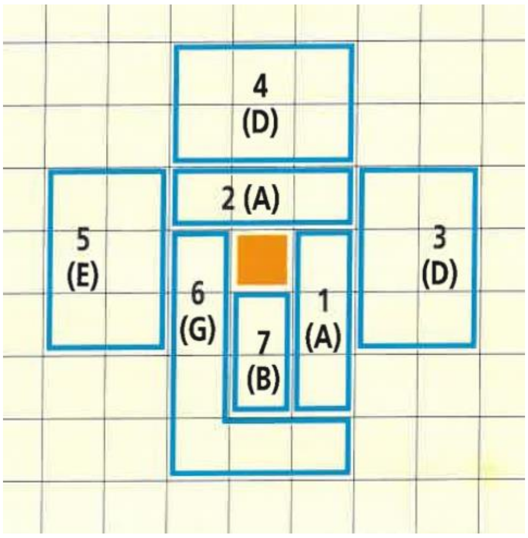


Figura 11

Capítulo 4

O solitário na computação

Apesar de parecer um simples jogo e passatempo, o Solitário pode ser visto como um problema clássico no campo da computação e da ciência computacional. A programação torna-se, assim, a ferramenta que nos permite chegar a soluções para o jogo.

4.1 Algoritmo de Resolução

O primeiro passo na programação do Solitário é representar o tabuleiro, em que, normalmente, se utiliza uma matriz bidimensional (*array* 2D) onde cada posição pode ter 2 estados: estado 1 caso exista uma peça nessa casa e estado 0 caso essa casa esteja vazia.

Para resolver o jogo, usa-se, convencionalmente um tipo de algoritmo, *Backtracking*, que tenta todos os movimentos possíveis recursivamente, voltando atrás se estes não resultarem. Contudo, este algoritmo tem um tempo de execução bastante longo, devido às muitas escolhas possíveis que se pode fazer em cada jogada. A solução para combater este problema é explorar as simetrias presentes no tabuleiro, convertendo-o em 8 simetrias (Figura 11). Após esta conversão aplica-se o algoritmo de *Backtracking*: se um salto leva a uma solução, o algoritmo regista o salto e retorna sucesso, caso contrário, o algoritmo redefine o tabuleiro para seu estado anterior e tenta um salto diferente. Se nenhum dos saltos possíveis levar a uma solução, o algoritmo retorna falha. Este algoritmo encontra-se em pseudocódigo na Figura 12, mostrando, assim uma forma muito simplificada de implementar um programa que encontre soluções para o jogo.

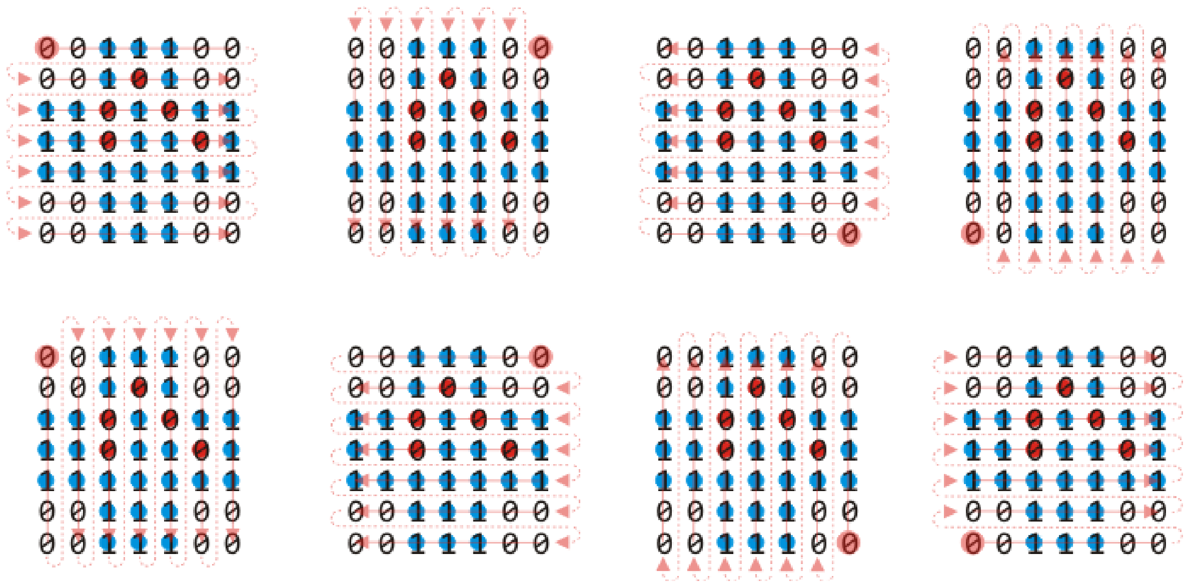


Figura 12

```
função resolver(tabuleiro):
    se tabuleiro está resolvido:
        retornar sucesso
    para cada jogada possível:
        aplicar jogada
        se resolver(tabuleiro):
            retornar sucesso
        desfazer jogada
    retornar falha
```

Figura 13

Capítulo 5

Conclusão

O estudo e análise do Solitário revelou-se uma excelente oportunidade para explorar tanto os aspetos lógicos e estratégicos do jogo, como também os fundamentos da computação e da programação.

Do ponto de vista matemático, destacámos a aplicação do corpo finito **GF(4)**, utilizado para estudar propriedades invariantes ao longo do jogo. Através da álgebra sobre este corpo, foi possível determinar quais são as posições finais possíveis, considerando uma configuração inicial.

A abordagem geométrica complementou a análise algébrica ao permitir a decomposição do tabuleiro em blocos com propriedades estruturais específicas. Estes blocos — lineares, retangulares ou em L — ajudaram a visualizar sequências de jogadas e a desenvolver estratégias racionais baseadas na disposição das peças e nas simetrias do tabuleiro. Esta perspetiva revelou-se especialmente útil na construção de soluções parciais e na validação de movimentos em diferentes regiões do tabuleiro.

Por fim, a componente computacional permitiu transformar o problema em algo programável, mostrando como a lógica do jogo pode ser codificada e automatizada. O algoritmo de backtracking, implementado com base numa representação matricial do tabuleiro, foi utilizado para explorar sistematicamente todas as jogadas possíveis até encontrar uma solução. A computação demonstrou, assim, ser uma extensão natural das abordagens anteriores, tornando viável a resolução de variantes complexas do jogo com rapidez e precisão.