Classification des surfaces de type Delaunay
Author(s): Ricardo Sa Earp and Eric Toubiana
Source: *American Journal of Mathematics*, Vol. 121, No. 3 (Jun., 1999), pp. 671-700
Published by: The Johns Hopkins University Press
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/25098941
Accessed: 18/12/2014 00:32

CLASSIFICATION DES SURFACES DE TYPE DELAUNAY

By Ricardo Sa Earp and Eric Toubiana

Abstract. We define and study complete and noncomplete rotational special Weingarten surfaces in euclidean space. We prove general existence and uniqueness theorems for such complete surfaces.

Introduction. Au siècle passé (1841) C. Delaunay [4] a découvert et classifie les surfaces de révolution dont la somme des inverses des rayons de courbure est constante. Plus d'un siècle après (1990) N. Kapouleas construisit d'autres exemples de surfaces proprement plongées, de topologie finie et de courbure moyenne constante [9]. Dans cet article nous considérons des surfaces M de classe C^2 dans $\mathbf{R}^3$ orientées par un champ de vecteurs normal unitaire N. Nous supposerons que la courbure moyenne $H = H(N)$ et la courbure de Gauss K satisfont une relation de la forme:

$$H = f(H^2 - K), \tag{1}$$

où f est une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Nous supposerons également que f vérifie la relation:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 4t(f'(t))^2 < 1, \tag{2}$$

nous dirons alors que f est une fonction elliptique. Si une surface M satisfait la relation (1) où f est une fonction elliptique, nous dirons que M est une surface spéciale, ou encore que M est dans la classe de f. Dans [14] l'un des auteurs et H. Rosenberg ont généralisé un outil pour la théorie des surfaces spéciales: la propriété de "height estimates". Plus précisément considérons une surface spéciale compacte à bord M dont le bord est contenu dans le plan horizontal $\{x_3 = 0\}$. Supposons que f satisfasse (en considérant l'orientation contraire au vecteur courbure moyenne):

$$f \leq -\lambda < 0 \quad \text{sur } M, \tag{3}$$

$$f'(1 - 2ff') \leq 0 \quad \text{sur } M, \tag{4}$$

Manuscript received April 17, 1996.
Research of both authors supported in part by the CNPq-BRASIL.
American Journal of Mathematics 121 (1999), 671–700.

dans ces conditions nous avons $|x_3| \leq \frac{2}{\lambda}$ sur M. Nous dirons qu'une surface spéciale M satisfait la propriété de "height estimates" si M satisfait les relations (3) et (4), c'est à dire s'il existe des estimés a priori pour la fonction hauteur sur M. A l'aide des travaux de Meeks [12] et de Korevaar, Kusner et Solomon [11] on peut montrer le résultat suivant (voir le théorème 3.3 de [14]):

Soit M une surface spéciale complète proprement plongée dans $\mathbf{R}^3$ avec deux bouts de type anneau. Supposons que M satisfasse la propriété de "height estimates." Dans ces conditions M est nécessairement une surface de révolution.

Remarquons que pour toute fonction f avec $f(0) \neq 0$, il existe toujours une sphère dans la classe de M. En fait cette sphère est unique et a pour rayon $\frac{1}{|f(0)|}$. Par exemple si M est une surface à courbure moyenne constante $c \neq 0$, les "petites" déformations parallèles de M, $M_t = M + tN$ (N est un champ normal unitaire sur M) satisfont la relation suivante:

$$2aH_t + K_t = b, \quad a,\ b > 0,$$

où les réels a et b ne dépendent que de t et c. La relation précédente est équivalente à la relation (1) avec $f(t) = -a + \sqrt{a^2 + b + t}$ (on peut supposer $H_t > 0$). Lorsque $f(0) \neq 0$ la théorie des surfaces spéciales possède des principes et propriétés équivalents à la théorie des surfaces à courbure moyenne constante non nulle. Par exemple les surfaces spéciales satisfont le principe du maximum suivant (voir [2]): *Considérons deux surfaces M_1 et M_2 tangentes en un point intérieur p avec M_1 au-dessus de M_2 dans un voisinage de p. Supposons que M_1 et M_2 vérifient la même relation (1) par rapport à la même fonction elliptique f et avec la même orientation normale N, dans ces conditions les surfaces M_1 et M_2 sont égales dans un voisinage de p*. Les surfaces spéciales satisfont également le principe du maximum à bord dont l'énoncé est analogue.

Par la suite on supposera $f(0) \neq 0$ et on dira que M est une *surface spéciale de type courbure moyenne constante* ou, plus simplement que M est une *surface spéciale*. Si de plus M est une surface de révolution complète nous dirons que M est une surface de *type Delaunay*.

Les surfaces spéciales complètes de révolution vérifiant $2aH+K = b,\ a,\ b > 0$ ont été traitées dans [14].

On peut énoncer des théorèmes de type Hopf [7] ou Alexandrov [1] suivants pour les surfaces spéciales: *Si M est une surface spéciale compacte sans bord immergée dans $\mathbf{R}^3$ et de même type topologique que la sphère, M est nécessairement la sphère ronde de rayon $\frac{1}{|f(0)|}$*, voir [3]. De plus Meeks nous a fait observer que la seule surface spéciale compacte et plongée est la sphère de la classe de f, c'est à dire la sphère de rayon $\frac{1}{|f(0)|}$. Pour montrer cela nous pouvons appliquer le processus d'Alexandrov en remarquant que la symétrie conserve l'orientation normale intérieure de la surface. Il existe un autre résultat concernant les surfaces spéciales qui est analogue aux surfaces à courbure moyenne constante: *Si M est une surface spéciale complète dont la courbure de Gauss est identiquement nulle, M est forcément un cylindre droit.* En effet l'équation (1) devient $H - f(H^2) = 0$ mais du fait que f est elliptique la fonction $h_1(t) = t - f(t^2)$ est strictement croissante et de ce fait ne possède qu'un zéro. Ceci entraine que M a également la courbure moyenne H constante et de ce fait M est un cylindre droit.

Dans ce travail nous ferons l'étude détaillée des surfaces spéciales de Weingarten complètes ou non, de révolution et de type courbure moyenne constante. Dans le cas complet, nous montrerons des théorèmes généraux d'existence et d'unicité des surfaces de type Delaunay: Nous appellerons ces surfaces d'*ondoloïdes spéciales* lorsqu'elles seront plongées (voir théorèmes 1 et 2) et de *nodoïdes spéciales* dans le cas contraire (voir théorèmes 6 et 7). Parmi les surfaces spéciales de Weingarten non complètes, on trouve des surfaces de révolution analogues aux surfaces de révolution de courbure de Gauss constante positive de $\mathbf{R}^3$ (voir théorème 4).

Toutes les surfaces considérées seront dans chaque cas connexes et de classe C^2. Rappelons que nous supposerons toujours que la fonction f est elliptique, c'est à dire que f vérifie l'inégalité (2), et également $f(0) \neq 0$, le cas $f(0) = 0$ a déjà été traité par les auteurs dans [16] (voir aussi [15]). Egalement toutes les surfaces de révolution auront toujours l'axe des x comme axe central.

Remerciements. Le second auteur souhaite remercier la P.U.C. de Rio de Janeiro pour son hospitalité durant la préparation de ce travail.

Définition 1. Nous appellerons F la fonction définie par:

$$F(\alpha,\beta,\delta) = \frac{\delta}{2(1+\beta^2)^{3/2}} - \frac{1}{2\alpha(1+\beta^2)^{1/2}} - f\left(\left(\frac{\delta}{2(1+\beta^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\alpha(1+\beta^2)^{1/2}}\right)^2\right),$$

où $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$, $\delta \in \mathbf{R}$.

Remarquons que comme f est elliptique, pour tout $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 \in \mathbf{R}$, $\delta_0 \in \mathbf{R}$ nous avons $\frac{\partial F}{\partial \delta}(\alpha_0, \beta_0, \delta_0) > 0$. En conséquence F est strictement croissante par rapport à la troisième variable.

Pour fixer les notations on va établir le lemme suivant.

LEMME 1. *Soit y: $]a, b[\to]0, \infty[$ une fonction strictement positive de classe C^2. Soit M la surface engendrée par la révolution du graphe de y par rapport à l'axe des x. Soient λ_1, λ_2 et H respectivement les courbures principales et la courbure moyenne de M calculées par rapport au champ de vecteurs normal N de M pointé en direction opposée à l'axe de révolution, l'axe des x (nous appellerons ce champ le champ normal extérieur).*

Dans ces conditions nous avons:

$$\lambda_1 = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \text{ et } \lambda_2 = \frac{-cos(\sigma)}{y} = \frac{-1}{y(1+y'^2)^{1/2}},$$

où σ est l'angle que fait l'axe des x avec la tangente du graphe de y, $\frac{-\pi}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$.

En conséquence M est une surface spéciale (i.e. vérifiant $H(N) = f(H^2 - K)$) si et seulement si y vérifie l'équation différentielle:

$$\frac{y''}{2(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{2y(1+y'^2)^{1/2}} = f\left(\left(\frac{y''}{2(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2y(1+y'^2)^{1/2}}\right)^2\right), \tag{5}$$

c'est à dire $F(y, y', y'') = 0$.

Le Lemme 1 est une simple conséquence des propriétés des surfaces de révolution.

Remarque 1. Dans le Lemme 1, λ_1 l'une des courbures principales de la surface de révolution M, est également la courbure du graphe de y, c'est à dire la courbe qui engendre M. Par convention tout au long de ce travail, si M est une surface de révolution, λ_1 désignera toujours la courbure de la courbe qui engendre M et λ_2 l'autre courbure principale de M. De plus les courbures principales seront toujours calculées avec la même orientation normale qu'au Lemme 1, sauf mention du contraire.

COROLLAIRE 1. *Dans les hypothèses du lemme 1 si le graphe de y possède un point horizontal, c'est à dire s'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $y'(x_0) = 0$, le graphe de y est symétrique par rapport à la droite verticale $\{x = x_0\}$. En conséquence la surface de révolution M engendrée par le graphe de y est symétrique par rapport au plan vertical $\{x = x_0\}$.*

Démonstration. Le théorème des fonctions implicites et la remarque suivant la Définition 1 montrent que près de x_0 l'équation (5) est équivalente à dire que y est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre, voir la preuve du Théorème 1. On conclut en remarquant que la fonction $z(x) = y(2x_0 - x)$ est solution de la même équation différentielle avec les mêmes solutions initiales.

Le résultat suivant, que nous utiliserons par la suite, caractérise la sphère de rayon $\frac{1}{|f(0)|}$, parmi les autres surfaces spéciales (relativement à f) de révolution.

LEMME 2. *Considérons une surface spéciale de révolution M, si M possède un point ombilique M fait forcément partie d'une sphère de rayon $\frac{1}{|f(0)|}$. En conséquence si M n'est pas une surface sphérique, la fonction $(\lambda_1 - \lambda_2)$ n'est jamais nulle et a un signe constant sur M.*

Démonstration. Supposons pour commencer que M possède un point ombilique p au-dehors de l'axe de révolution, i.e., l'axe des x. Soit γ la courbe plane engendrant M et passant par p. Notons que la tangente de γ en p n'est pas orthogonale à l'axe de révolution car sinon la courbure principale $\lambda_2(p)$ de M en p serait nulle et du fait que p est un point ombilique l'autre courbure principale $\lambda_1(p)$ serait également nulle et nous aurions donc $f(0) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $f(0) \neq 0$.

Nous déduisons de ceci que près de p la courbe γ est le graphe d'une fonction y de x et à une translation près nous pouvons supposer que p est un point d'abscisse 0, c'est à dire $p = (0, y(0))$. Comme au Corollaire 1, en utilisant le théorème des fonctions implicites, nous pouvons montrer que, près de $x = 0$, y est l'unique solution d'une équation différentielle du deuxième ordre, $\varphi'' = h(\varphi, \varphi')$, avec les conditions initiales $\varphi(0) = y(0)$ et $\varphi'(0) = y'(0)$. De plus l'hypothèse $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$ entraine que le centre de courbure q de γ en p se trouve sur l'axe des x puis que la distance de p à q est égale au rayon de courbure de γ en p qui est $\frac{1}{|\lambda_1(p)|}$. Finalement du fait que M est une surface spéciale et que p est un point ombilique nous déduisons que:

$$\lambda_1(p) = \lambda_2(p) = f(0).$$

Ceci nous permet de conclure que la fonction $z(x)$ dont le graphe est le demi-cercle orthogonal à l'axe des x de centre q et de rayon $r = \frac{1}{|\lambda_1(p)|} = \frac{1}{|f(0)|}$ est solution de la même équation différentielle que y avec les mêmes conditions initiales au point $x = 0$, et ainsi M est sphérique.

Supposons maintenant que M possède un point ombilique p sur l'axe des x. Appelons de nouveau γ la courbe plane qui engendre M et passant par p. Comme nous supposons M de classe C^2, γ doit être perpendiculaire à l'axe des x au point p. Le même type de raisonnement que précédemment montre alors que M est sphérique.

Remarque 2. (a) R. Bryant [3] a montré que si f est de classe C^1, pour toute surface spéciale M de classe C^3 il existe une structure conforme sur M qui rend holomorphe une certaine forme quadratique Q bien définie. Or, comme dans le cas des surfaces minimales ou à courbure moyenne constante, les zéros de cette forme quadratique sont précisément les points ombiliques de M, ce qui permet de conclure que, si M n'est pas sphérique, les points ombiliques de M sont isolés. En remarquant qu'une surface spéciale de révolution M est forcément de classe C^3 si f est de classe C^1 nous concluons que M n'a pas de points ombiliques au-dehors de l'axe de révolution.

(b) Le Lemme 2 montre que si M est une surface spéciale de révolution non sphérique M ne possède aucun point ombilique. En conséquence si γ est la courbe plane qui engendre M, tout point de γ aura son centre de courbure hors de l'axe des x. De ce fait un résultat de Hsiang (voir [8], Proposition 2) montre que

γ peut être obtenue en faisant rouler sur l'axe des x une courbe bien déterminée qui ne dépend que de γ, tout comme les surfaces de Delaunay [4].

LEMME 3. *Soit M une surface spéciale de révolution non sphérique engendrée par le graphe d'une fonction y de classe C^2 définie sur un intervalle $]a,b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soient λ_1 et λ_2 les courbures principales de M calculées par rapport au champ normal extérieur, c'est à dire dirigé au sens opposé à l'axe de révolution. Nous avons:*

$$\forall x \in \,]a,b[, \quad \lambda_2'(x) = \frac{y'}{y}(\lambda_1 - \lambda_2).$$

En conséquence si y' possède un signe constant les fonctions $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ sont strictement monotones sur l'intervalle $]a,b[$ avec un sens de croissance opposé.

Démonstration. La formule provient d'un simple calcul que nous omettrons. Le seul point non trivial à montrer est que $\lambda_1(x)$ est également monotone avec un sens de croissance opposé à celui de $\lambda_2(x)$. Pour cela il suffit de montrer que $\lambda_1'(x)$ a un signe opposé à celui de $\lambda_2'(x)$ pour tout x dans $]a,b[$. En utilisant le fait que M est une surface spéciale nous avons:

$$\forall x \in \,]a,b[, \quad \frac{\lambda_1(x)}{2} + \frac{\lambda_2(x)}{2} = f\left(\left(\frac{\lambda_1(x)}{2} - \frac{\lambda_2(x)}{2}\right)^2\right).$$

En dérivant la dernière inégalité nous obtenons:

$$|\lambda_1'(x) + \lambda_2'(x)| = |\lambda_1'(x) - \lambda_2'(x)|.|\lambda_1(x) - \lambda_2(x)|.\left|f'\left(\left(\frac{\lambda_1(x)}{2} - \frac{\lambda_2(x)}{2}\right)^2\right)\right|.$$

Comme f est une fonction elliptique nous avons:

$$|\lambda_1'(x) + \lambda_2'(x)| < |\lambda_1'(x) - \lambda_2'(x)|,$$

ce qui permet de conclure que $\lambda_1'(x)$ est toujours différent de zéro puis que $\lambda_1'(x)$ et $\lambda_2'(x)$ ont un signe opposé.

Nous pouvons maintenant enoncer les conditions nécessaire pour l'existence des surfaces spéciales.

PROPOSITION 1. *Supposons qu'il existe une surface spéciale M complète de révolution et plongée telle que la courbe génératrice γ possède un minimum local en un point* $(0,\tau)$, $\tau > 0$.

Dans ces conditions la courbe γ est un graphe au-dessus de l'axe de révolution *entier, de plus f et τ vérifient nécéssairement:*

(a) $$\frac{-1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) \leq 0,$$

(b) $$\lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) > \frac{1}{\tau},$$

(c) $$\lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) < 0,$$

(d) $$f(0) < 0,$$

et la relation (a) est une égalité si et seulement si M est le cylindre spécial de la classe.

Démonstration. Supposons qu'une telle surface M existe. Appelons γ la courbe plane qui engendre M. Par hypothèse γ a un minimum local au point $(0, \tau)$ avec $\tau > 0$, nous allons commencer par montrer que γ est un graphe.

Supposons le contraire, γ a donc un point p_1 où la tangente est verticale, c'est à dire perpendiculaire à l'axe des x. Comme γ est symétrique par rapport à la verticale $\{x = 0\}$ (voir le Corollaire 1), nous pouvons supposer que x_1 l'abscisse de p_1 est positif, $x_1 > 0$. Nous supposerons également que p_1 est le premier point vertical d'abscisse positif. Observons que si γ possédait un autre point horizontal (x_0, y_0), $x_0 > 0$, entre le minimum $p = (0, \tau)$ et le point p_1, la courbe γ serait également symétrique par rapport à la droite verticale $\{x = x_0\}$ (voir le Corollaire 1). De ce fait γ serait invariante par la translation horizontale de vecteur $(2x_0, 0)$, mais alors γ serait un graphe sur l'axe des x et n'aurait pas de point vertical, ce qui contredirait l'existence de p_1. Nous déduisons donc que entre les points p et p_1, γ est le graphe d'une fonction strictement croissante et convexe. Observons également qu'au point p_1 la courbure principale λ_2 de M correspondant à la direction perpendiculaire à γ est nulle car la tangente de γ en ce point est orthogonale à l'axe des x (voir le Lemme 1). Les deux observations précédentes montrent qu'au point p_1 la courbure λ_1 de γ est strictement positive car nous avons en chaque point de γ:

$$\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = f\left(\left(\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}\right)^2\right) \quad \text{avec } f(0) \neq 0.$$

De ce fait la courbe γ est tangente et d'un coté de la verticale $\{x = x_1\}$. Remarquons que γ ne peut plus intersecter l'axe $\{x = 0\}$ après le point p_1. En effet supposons d'une part que cette intersection se fasse avec un angle droit, γ serait une courbe de Jordan plongée engendrant une surface spéciale compacte et plongée de genre 1 ce qui, comme le montre le principe d'Alexandrov est absurde. D'autre part si cette intersection ne se fait pas avec un angle droit, γ ne serait pas plongée (car γ est symétrique par rapport à l'axe $\{x = 0\}$), ce qui montre l'assertion. De plus γ ne peut pas avoir de point horizontal après p_1 entre les droites $\{x = x_1\}$ et $\{x = 0\}$ car sinon γ serait symétrique par rapport à la verticale passant par ce nouveau point et ne serait donc pas plongée. Il ressort de ces observations que l'unique possibilité est que γ possède un autre point vertical p_2 après p_1 avec $0 < x_2 < x_1$, où x_2 est l'abscisse de p_2. En supposant que p_2 est le premier point vertical de γ après p_1 la courbe γ serait, entre ces deux points, le graphe d'une fonction strictement monotone et ainsi le Lemme 3 montre que entre ces deux points la courbure principale λ_2 est une fonction strictement monotone. Nous aboutissons ainsi à une contradiction car, comme nous l'avons déjà remarqué, la courbure λ_2 est nulle à chaque point vertical.

Nous avons donc montré que γ ne possède pas de point vertical et de ce fait est le graphe d'une fonction y. Il reste à observer que le cas suivant est également impossible:

$$\lim_{x\to X} y(x) = +\infty, \quad \text{avec} \quad 0 < X \leq +\infty.$$

En effet nous aurions alors:

$$\lim_{x\to X} \lambda_1(x) = \lim_{x\to X} \lambda_2(x) = 0,$$

et nous aurions donc $f(0) = 0$, ce qui est faux. Par conséquent γ est un graphe au-dessus de l'axe de révolution entier.

Montrons maintenant les relations (a)–(d). La courbe γ est le graphe d'une fonction $y(x)$ de classe C^2 définie sur $\mathbf{R}$ vérifiant $F(y, y', y'') = 0$, (voir le lemme 1). Rappelons que par convention les courbures principales de M sont calculées par rapport à l'orientation normale extérieur (voir le lemme 1). En particulier pour $x = 0$ nous avons:

$$F(\tau, 0, y''(0)) = 0.$$

Remarquons que comme $x = 0$ est un minimum local de y, la courbure de γ près de $x = 0$ est dirigée vers le haut, c'est à dire que nous avons $y''(x) \geq 0$ pour x près de 0. En utilisant le fait que $F(\alpha, \beta, \delta)$ est une fonction strictement croissante par rapport à la dernière variable δ (voir la Définition 1) nous déduisons $F(\tau, 0, 0) \leq 0$, c'est à dire:

$$\frac{-1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) \leq 0,$$

ce qui montre (a). Nous montrons l'inégalité (b) concernant τ en observant que l'égalité $F(\tau, 0, y''(0)) = 0$ est équivalente à:

$$\frac{y''(0)}{2} + \frac{1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{y''(0)}{2} + \frac{1}{2\tau}\right)^2\right) = \frac{1}{\tau},$$

c'est à dire $\frac{1}{\tau} = t - f(t^2)$, en posant $t = \frac{y''(0)}{2} + \frac{1}{2\tau}$. De cette manière nous avons $t > 0$ et en utilisant le fait que la fonction $h_1(t) = t - f(t^2)$ est strictement croissante (car f est elliptique) nous obtenons:

$$\frac{1}{\tau} < \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)),$$

et (b) est montré. Nous avons de plus $\lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) = \lim_{t \to +\infty} (-t - f(t^2))$, et en utilisant le fait que la fonction $h_2(t) = t + f(t^2)$ est également strictement croissante nous concluons

$$\lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) < \frac{-1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) < 0,$$

d'où l'inégalité (c). Montrons la dernière inégalité (d). Pour cela remarquons que γ a forcément un point d'inflexion q après le minimum p. Au point q nous avons donc $\lambda_1(x) = 0$ et ainsi:

$$\frac{\lambda_2}{2} - f\left(\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^2\right) = 0,$$

avec $\lambda_2 < 0$. En utilisant le fait que la fonction $h_1(t) = t - f(t^2)$ est strictement croissante nous concluons $f(0) < 0$.

Supposons pour terminer que le minimum local τ de γ satisfasse l'égalité:

$$(*) \qquad \frac{-1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) = 0.$$

En ce cas la fonction constante $\varphi(x) \equiv \tau$ est solution de l'équation (5) et nous déduisons que le cylindre C de rayon τ autour de l'axe des x est une surface spéciale (par rapport à f). De ce fait les fonctions y et φ satisfont la même équation différentielle avec les mêmes conditions initialles au point $x = 0$. Nous concluons que ces fonctions sont égales près de $x = 0$ et, de proche en proche, elle sont partout égales, nous avons ainsi $M = C$. Inversement si M est un cylindre on montre comme précédemment que son rayon r doit satisfaire l'équation $(*)$. Nous concluons donc que le minimum local τ de M satisfait $(*)$ si et seulement si M est un cylindre.

Remarque 3. Considérons une fonction elliptique f vérifiant:

$$f(0) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) < 0.$$

En ce cas du fait que la fonction $h_1(t) = t - f(t^2)$ est strictement croissante et que de plus:

$$h_1(0) = -f(0) > 0, \quad \text{et} \quad \lim_{t \to -\infty} h_1(t) < 0,$$

nous concluons qu'il existe un unique réel positif r, $r > 0$, vérifiant $h_1(\frac{-1}{2r}) = 0$, c'est à dire:

$$\frac{-1}{2r} - f\left(\left(\frac{1}{2r}\right)^2\right) = 0.$$

De ce fait il n'existe qu'un seul cylindre droit spécial et son rayon est entièrement déterminé par l'équation précédente. Ceci montre, avec l'aide de la proposition 1, qu'il existe une surface spéciale complète de révolution plongée engendrée par une courbe possédant un minimum local si et seulement il existe un cylindre droit spécial. De plus en utilisant le fait que la fonction h_1 est strictement croissante, n'importe quel minimum local τ d'une telle surface satisfait l'inégalité $\tau \leq r$, avec égalité si et seulement si cette surface est le cylindre de rayon r.

Nous pouvons maintenant montrer l'existence d'ondoloïdes spéciales sous certaines conditions sur f.

THÉORÈME 1. EXISTENCE D'ONDOLOÏDES SPÉCIALES. *Soit f une fonction elliptique satisfaisant:*

$$f(0) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) < 0.$$

Soit $\tau > 0$ un réel vérifiant:

$$\frac{1}{\tau} < \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) \quad \text{et} \quad \frac{-1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) < 0.$$

Dans ces conditions il existe une unique surface spéciale de révolution $\mathcal{O}_\tau$ complète et plongée, telle que la courbe γ_τ qui l'engendre est le graphe d'une fonction y_τ de classe C^2 définie sur $\mathbf{R}$, avec un minimum τ en 0. De plus γ_τ est une courbe "géométriquement analogue" aux ondoloïdes de Delaunay, plus précisément il existe un réel $T_\tau > 0$ tel que:

(a) $\forall x \in \mathbf{R}, \ y_\tau(x + T_\tau) = y_\tau(x)$.

(b) *γ_τ est symétrique par rapport aux droites $\{x = 0\}$ et $\{x = \frac{T_\tau}{2}\}$.*

(c) *Entre 0 et $\frac{T_\tau}{2}$ la fonction y_τ est strictement croissante avec un maximum R_τ en $\frac{T_\tau}{2}$.*

(d) *Entre 0 et $\frac{T_\tau}{2}$ la courbe γ_τ a un seul point d'inflexion x_τ.*

(e) *Le point d'inflexion x_τ et le maximum R_τ vérifient:*

$$0 < y_\tau(x_\tau) < r, \text{ et } r < R_\tau < \frac{-1}{f(0)},$$

où r est le rayon de l'unique cylindre spécial (voir Remarque 3) et $\frac{-1}{f(0)}$ est le rayon de l'unique sphère spéciale relativement à f.

Démonstration. Nous allons construire la courbe γ_τ. Les conditions sur τ impliquent l'inégalité suivante:

$$F(\tau, 0, 0) = \frac{-1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) < 0.$$

De plus:

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \to +\infty} F(\tau, 0, \delta) &= \lim_{\delta \to +\infty} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\tau}\right)^2\right)\right) \\ &= \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) - \frac{1}{\tau} \\ &> 0,\end{aligned}$$

où l'on a posé $t = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\tau}$. Nous déduisons qu'il existe un unique réel positif, $\tau'' > 0$, vérifiant:

$$F(\tau, 0, \tau'') = 0.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème des fonctions implicites et obtenir ainsi l'existence d'un voisinage U du point $(\tau, 0)$ dans $\mathbf{R}^2$, d'un voisinage V de τ'' dans $\mathbf{R}$ et d'une unique fonction h de classe C^1 de U dans V vérifiant:

$$h(\tau, 0) = \tau'' \text{ et } \forall(\alpha, \beta) \in U, \ \forall \delta \in V, \ \ F(\alpha, \beta, \delta) = 0 \Leftrightarrow \delta = h(\alpha, \beta).$$

Considérons l'équation différentielle:

$$y'' = h(y, y'), \quad \text{avec} \ \ y(0) = \tau, \ \text{et} \ y'(0) = 0. \tag{6}$$

Le théorème de Picard affirme qu'il existe une unique solution y_τ à cette équation, elle est définie sur un intervalle de la forme $]-x_1, x_1[$, avec $x_1 > 0$. Remarquons que $(0, \tau)$ est un minimum local de y_τ car $y''_\tau(0) = \tau'' > 0$. De plus le corollaire 1 montre que y_τ est symétrique par rapport à la droite $\{x = 0\}$. Nous allons maintenant prolonger y_τ au-delà de x_1, par symétrie on prolongera par la même occasion y_τ au-delà de $-x_1$.

Supposons que la dérivée y'_τ s'annule entre 0 et x_1 et appelons x_0 le premier zéro de y'_τ. De ce fait γ_τ, le graphe de y_τ, est symétrique par rapport à la droite $\{x = x_0\}$ et en utilisant la première symétrie le graphe de y_τ peut être prolongé en une courbe complète à l'aide de la translation horizontale de vecteur $(2x_0, 0)$. La fonction y_τ peut donc être prolongée sur tout $\mathbf{R}$ en une fonction périodique de période $2x_0$. Remarquons de plus que entre 0 et x_0 la dérivée y'_τ est strictement positive, ainsi y_τ a un maximum pour $x = x_0$. Observons également que γ_τ a forcément un point d'inflexion entre 0 et x_0, et comme la fonction y_τ est monotone sur ce même intervalle, la courbure λ_1 de γ_τ est strictement monotone (voir le Lemme 3). Nous concluons de ceci que γ_τ a un seul point d'inflexion x_τ entre 0 et x_0 et ainsi, en posant $T_\tau = 2x_0$, la courbe γ_τ possède toutes les propriétés (a)–(d) indiquées à l'énoncé du théorème 1 à l'exception des inégalités (e) concernant le maximum R_τ et le point d'inflexion x_τ de y_τ que nous montrerons à la fin de la démonstration.

Il suffit donc de montrer que y'_τ possède forcément un zéro à un autre point que 0. Pour ceci supposons que $y'_\tau(x) > 0$ pour x entre 0 et x_1. Supposons de plus que $y''_\tau(x) > 0$ entre 0 et x_1. En ce cas y_τ et y'_τ sont strictement croissantes, positives, et possèdent donc une limite positive en x_1 que nous appellerons respectivement y_1 et y'_1. Comme y_τ est solution de (6) elle vérifira également l'équation équivalente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_\tau(1+y_\tau'^2)^{1/2}} &= \frac{y''_\tau}{2(1+y_\tau'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2y_\tau(1+y_\tau'^2)^{1/2}} \\ &\quad - f\left(\left(\frac{y''_\tau}{2(1+y_\tau'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2y_\tau(1+y_\tau'^2)^{1/2}}\right)^2\right),\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{y_\tau(1+y_\tau'^2)^{1/2}} = h_1(t)$$

en posant $t = \frac{y''_\tau}{2(1+y_\tau'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2y_\tau(1+y_\tau'^2)^{1/2}}$ et $h_1(t) = t - f(t^2)$. En utilisant le fait que t est positif et que h_1 est une fonction croissante nous obtenons:

$$\forall x \in \,]0, x_1[, \quad \frac{1}{y_\tau(1+y_\tau'^2)^{1/2}} > h_1(0) = -f(0) > 0.$$

Nous déduisons que les limites de y_τ et y'_τ en x_1 sont finies. Observons que par continuité et du fait que F est croissante par rapport à la dernière variable, ces limites vérifient:

$$F(y_1, y_1', 0) \leq 0.$$

Nous avons de plus:

$$\lim_{\delta \to +\infty} F(y_1, y_1', \delta) = \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) + \lim_{x \to x_1} \lambda_2(x).$$

Comme la fonction y_τ est croissante la courbure principale $\lambda_2(x)$ est strictement croissante (voir le Lemme 3) et nous concluons à l'aide de l'hypothèse sur τ que

$$\lim_{\delta \to +\infty} F(y_1, y_1', \delta) > 0.$$

Nous déduisons de ce qui précède qu'il existe un unique réel positif $y_1'' \geq 0$ vérifiant $F(y_1, y_1', y_1'') = 0$ et comme précédemment en utilisant le théorème des fonctions implicites nous pouvons étendre y_τ au-delà de x_1 jusqu'à un réel x_2, avec $x_1 < x_2$.

Remarquons maintenant que nous ne pouvons pas étendre y_τ sur $]0, +\infty[$ en ayant les dérivées y_τ' et y_τ'' strictement positives car nous aurions alors:

$$\lim_{x \to +\infty} y_\tau(x) = +\infty.$$

De ce fait les courbures principales λ_1 et λ_2 de la surface spéciale $\mathcal{O}_\tau$ engendrée par la révolution du graphe de y_τ tendraient vers 0 et f satisferait $f(0) = 0$, ce qui est faux.

Si y_τ' est strictement positive au cours des extensions de y_τ, ce qui précède montre que nous devons avoir un point x_τ, $x_\tau > x_1$ où la dérivée seconde s'annule, $y_\tau''(x_\tau) = 0$. De ce fait la courbure λ_1 de γ_τ s'annule aussi. Remarquons que nous avons:

$$\forall x \in]0, x_\tau[, \quad y_\tau'(x) > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1(x) > 0 > \lambda_2(x).$$

De ce fait le Lemme 3 permet de conclure que la coubure λ_1 est une fonction strictement décroissante tant que $y_\tau'(x)$ est strictement positive. Nous déduisons donc que après $x = x_\tau$ la courbure $\lambda_1(x)$ est strictement négative et il en est de même pour la fonction $y_\tau''(x)$. Les mêmes arguments que précédemment montrent que y_τ peut être prolongé sur $\mathbf{R}$. De plus en utilisant le fait que $\lambda_1(x)$ est strictement décroissante tant que $y_\tau'(x)$ est positive nous pouvons montrer que $y_\tau'(x)$ doit avoir un autre zéro. Par conséquent nous concluons comme au début que γ_τ, le graphe de y_τ, possède les propriétés (a)–(d) énoncées. Il ne reste donc plus qu'à montrer les inégalités (e) concernant le point d'inflexion $y_\tau(x_\tau)$ et le maximum R_τ de y_τ.

Au point $x = x_T$ nous avons $\lambda_1 = 0$, la fonction y_T vérifie donc:

$$-\frac{1}{2y_T(1+y_T'^2)^{1/2}}(x_T) - f\left(\left(\frac{1}{2y_T(1+y_T'^2)^{1/2}}(x_T)\right)^2\right) = 0,$$

où encore $h_2(\frac{1}{2y_T(1+y_T'^2)^{1/2}}(x_T)) = 0$ avec $h_2(t) = t+f(t^2)$. Comme la fonction h_2 est strictement croissante et que $h_2(\frac{1}{2r}) = 0$, nous concluons que $\frac{1}{2r} = \frac{1}{2y_T(1+y_T'^2)^{1/2}}(x_T)$, et ainsi:

$$y_T(x_T) < r.$$

Au point du maximum, c'est à dire pour $x = \frac{T}{2}$, nous avons $F(R_T, 0, y_T''(x_T)) = 0$. Nous avons de plus $y_T''(x_T) < 0$, et nous déduisons $F(R_T, 0, 0) > 0$, c'est à dire $h_2(\frac{1}{2R_T}) < 0$. Comme précédemment, du fait que la fonction h_2 est strictement croissante et que $h_2(\frac{1}{2r}) = 0$ nous concluons:

$$r < R_T.$$

Supposons pour terminer que nous ayons:

$$\frac{1}{-f(0)} \leq R_T,$$

c'est à dire $-f(0) \geq \frac{1}{y_T(1+y_T'^2)^{1/2}}(\frac{T_T}{2})$. Remarquons que nous avons au point $x = 0$:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{y_T(1+y_T'^2)^{1/2}}(0) > -f(0),$$

car $\frac{1}{T} \geq \frac{1}{2T} - f((\frac{1}{2T})^2) > -f(0)$. De ce fait par continuité il existe un réel $x_0 \in]0, \frac{T_T}{2}]$ tel que:

$$\frac{1}{y_T(1+y_T'^2)^{1/2}}(x_0) = -f(0).$$

Observons pour conclure que la fonction $W(a,b) = a+b-f((a-b)^2)$ est strictement croissante par rapport au deux variables a et b car f est une fonction elliptique. Remarquons que nous avons

$$W\left(\frac{-1}{2y_T(1+y_T'^2)^{1/2}}(x_0), \frac{-1}{2y_T(1+y_T'^2)^{1/2}}(x_0)\right) = 0.$$

Nous déduisons donc que nous avons nécessairement:

$$\frac{y''_\tau}{y_\tau(1+y'^2_\tau)^{3/2}}(x_0) = -f(0),$$

et de ce fait $(x_0, y_\tau(x_0))$ est un point ombilique de $\mathcal{O}_\tau$, ce qui est absurde car $\mathcal{O}_\tau$ n'est pas sphérique (voir le Lemme 2). Nous avons donc montré également les propriétés (e).

L'unicité de $\mathcal{O}_\tau$ provient de l'unicité de solution des équations différentielles avec des conditions initiales.

Nous pouvons maintenant montrer le premier résultat de classification.

THÉORÈME 2. CLASSIFICATION DES ONDOLOÏDES SPÉCIALES. *Soit f une fonction elliptique et soit M une surface spéciale complète plongée de révolution non sphérique. Dans ces conditions M est nécessairement l'une des ondoloïdes spéciales $\mathcal{O}_\tau$ données par le Théorème 1.*

Démonstration. Soit γ la courbe plane qui engendre M. Observons que γ ne peut pas couper l'axe de révolution, l'axe des x. En effet, cette intersection devrait être orthogonale car M est de classe C^2, mais en ce cas le principe du maximum concernant les surfaces spéciales montre que M est sphérique ce qui est faux. Nous pouvons donc supposer que γ se trouve au-dessus de l'axe des x, c'est à dire dans le demi-plan $\{(x,y),\ y > 0\}$. Observons que à l'aide de la proposition 1 et du Théorème 1 il suffit de montrer que γ possède un minimum local. Supposons le contraire. Les mêmes arguments utilisés à la Proposition 1 montrent que γ possède un arc qui est un graphe et qui converge en décroissant vers une droite horizontale. Cet arc doit donc posséder des points où la courbure λ_1 est positive. Le Lemme 3 montre alors que λ_1 est croissante sur cet arc, ce qui contredit le fait que cet arc est asymptote à une droite.

Nous pouvons maintenant montrer la première application concernant les surfaces spéciales qui étend un résultat de [11] (voir le Théorème 2.11).

COROLLAIRE 2. CARACTÉRISATIONS DES ONDOLOÏDES SPÉCIALES. *Soit f une fonction elliptique vérifiant:*

$$f \leq -\lambda < 0, \quad \text{et } f'(1-2ff') \leq 0.$$

Soit M une surface spéciale (relativement à f) proprement plongée avec deux bouts de type anneau. Dans ces conditions M est nécessairement l'une des ondoloïdes spéciales $\mathcal{O}_\tau$ données par le Théorème 1.

Démonstration. En effet le Théorème 3.3 de [14] montre que M est une surface de révolution et on conclut avec le Théorème 2.

Comme dans le cadre des surfaces à courbure moyenne constante, les surfaces spéciales de révolution non complètes sont également classifiées si l'on suppose d'autres hypothèses sur f.

COROLLAIRE 3. CLASSIFICATION DES SURFACES SPÉCIALES PLONGÉES DE RÉVOLUTION. *Soit f une fonction elliptique vérifiant:*

$$f(0) < 0, \; f \geq f(0), \; \text{ et } \; \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) = +\infty.$$

Soit M une surface spéciale de révolution non sphérique de courbure de Gauss non toujours positive. Plus précisément M est engendrée par une courbe γ dont une portion est le graphe d'une fonction y strictement positive de classe C^2 telle que la dérivée seconde y'' est positive (rappelons que les courbures sont calculées par rapport à la direction normale extérieure voir le Lemme 1).

Dans ces conditions, M fait forcément partie de l'une des ondoloïdes spéciales $\mathcal{O}_T$ données par le Théorème 1.

Démonstration. Si la surface M est déjà complète le Corollaire 3 découle du Théorème 2, on peut donc supposer que M n'est pas complète. De ce fait, à une symétrie près et quitte à ne considérer qu'une portion de la courbe génératrice, γ est le graphe d'une fonction y définie sur un intervalle de la forme $]a, x_2[$, avec $-\infty \leq a < x_2 < +\infty$.

Remarquons que si y' avait deux zéros distincts, γ serait symétrique par rapport à deux droites verticales distinctes (voir le Corollaire 1) et serait donc invariante par une translation horizontale, ce qui conclurait la preuve. On peut donc supposer que y' n'a pas de zéro près de x_2. Par hypothèse γ contient un arc dont la courbure (calculée par rapport au champ normal extérieur) est positive. Comme celle-ci est monotone on peut donc supposer qu'il existe un réel x_1, $x_1 < x_2$, tel que entre x_1 et x_2 la dérivée y' a un signe constant et y'' est strictement positive. Nous avons donc deux cas à considérer:

(a) $\forall x \in \,]x_1, x_2[, \quad y'(x) > 0 \;$ et $\; y''(x) > 0.$

(b) $\forall x \in \,]x_1, x_2[, \quad y'(x) < 0 \;$ et $\; y''(x) > 0.$

Au cas (a) la démonstration du Théorème 1 montre que nous pouvons toujours prolonger y au-delà de x_2. De plus au cours de ces extensions nous devons rencontrer successivement un point où y'' s'annule en changeant de signe puis un zéro de y' qui constitue un maximum local de y. De ce fait y est symétrique et près du point symétrique de x_1 nous avons $y'(x) < 0$ et $y''(x) > 0$, ce qui nous ramène au cas (b). Remarquons que pour cette première étape nous n'avons pas utilisé l'hypothèse $\lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) = +\infty$.

Au cas (b) observons que y' est croissante et que y est décroissante. Nous en déduisons que y et y' ont une limite en x_2 que nous appellerons respectivement

y_2 et y_2'. Nous avons

$$0 \leq y_2 \quad \text{et} \quad -\infty < y_2' < 0.$$

En considérant la famille des ondoloïdes de Delaunay de courbure moyenne constante $c = f(0)$ (calculée par rapport au champ normal extérieur) centrées sur la droite verticale $\{x = x_2 - \varepsilon\}$ où ε est proche de zéro et leur translatés horizontaux, nous pouvons montrer que $y_2 \neq 0$. En effet sinon une de ces ondoloïdes serait tangente et au-dessus de M près de x_2, ce qui contredit le principe du maximum usuel car la courbure moyenne de M est supérieure à celle de ces ondoloïdes du fait que $f \geq f(0)$.

Nous avons donc $y_2 > 0$. Remarquons que nous avons $\lambda_1(x) > 0 > \lambda_2(x)$, de ce fait la courbure λ_1 de γ est strictement croissante (voir le Lemme 3). Nous avons d'une part $F(y_2, y_2', 0) < 0$ et d'autre part:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to +\infty} F(y_2, y_2', \delta) &= \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) - \frac{1}{y_2(1 + y_2'^2)^{1/2}} \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

la limite est infinie grâce à l'hypothèse imposée à f. Nous déduisons qu'il existe un unique réel strictement positif $y_2'' > 0$ vérifiant $F(y_2, y_2', y_2'') = 0$ et à l'aide du théorème des fonctions implicites nous pouvons prolonger y au-delà de x_2. Nous concluons donc que tant que y' est négative et y'' est positive nous pouvons étendre y. Observons que nous ne pouvons pas étendre y sur l'intervalle $]x_1, +\infty[$ avec y' négative et y'' positive car alors γ serait asymptote à une droite horizontale et sa courbure λ_1 aurait 0 comme valeur d'adhérence. Cette situation contredirait le fait que λ_1 est une fonction positive et croissante. Nous déduisons donc que, au cours d'une extension, y' doit avoir un zéro au-delà duquel y' devient positive et y'' reste positive, ce qui nous ramène au cas (a).

En conjuguant les deux cas nous concluons que γ peut être étendue à un graphe défini sur $\mathbf{R}$ et ainsi M est étendue à une surface complète spéciale et plongée ce qui, avec l'aide du Théorème 2, achève la preuve.

Remarque 4.

(a) Le Corollaire 3 peut ne pas être satisfait si nous omettons l'hypothèse que M possède des points où la courbure de Gauss est strictement négative. En effet considérons par exemple la fonction constante $f \equiv c$, où $c < 0$. Les surfaces spéciales relativement à f seront donc les surfaces à courbure moyenne constante. Soit $\bar{M}$ l'une des nodoïdes de Delaunay et soit $\bar{\gamma}$ la courbe qui engendre M. Considérons maintenant p l'un des maximum de $\bar{\gamma}$ et prenons un voisinage connexe γ de p. Si γ est assez petit, la surface de révolution M engendrée par γ aura la courbure de Gauss strictement positive. De plus M vérifie la relation $H(N) = f(H^2 - K)$ où N est le champ normal extérieur et f satisfait toutes les hypothèses du Théorème 2. Cependant M ne peut pas être étendue à une surface spéciale complète et plongée.

(b) L'hypothèse du Corollaire 3 concernant le signe de la courbure de Gauss peut être affaiblie de la manière suivante. Supposons que f satisfasse toutes les hypothèses indiquées et que la courbure de Gauss de M soit strictement positive. Dans ces conditions on peut supposer que γ est le graphe d'une fonction croissante y définie sur un intervalle de la forme $]x_1, x_2[$ et vérifiant $y''(x) < 0$ sur cet intervalle. On peut montrer que, quitte à prolonger y au-delà de x_1 ou x_2, γ a un point horizontal. Comme nous avons toujours $y'' < 0$, il est géométriquement clair que ce point est un maximum de γ. Appelons R l'ordonnée de ce maximum, nous avons donc $y(x) \leq R$ pour tout x entre x_1 et x_2. Nous pouvons maintenant énoncer une autre version du Corollaire 3: *Supposons que f vérifie les hypothèses du Corollaire 3 et que le maximum R de γ satisfasse $R < \frac{1}{-f(0)}$. Dans ces conditions M fait partie d'une ondoloïde spéciale $\mathcal{O}_T$ donnée par le Théorème 1.* En effet les mêmes techniques montrent que nous pouvons étendre y et au cours de ces extensions γ doit avoir un point d'inflexion à partir duquel la courbure devient positive, de ce fait M possède des points où la courbure de Gauss est strictement négative et on conclut avec le Corollaire 3.

Par contre l'hypothèse $\lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) = +\infty$ du Théorème 2 ne peut pas être affaiblie comme le montre le Théorème 3 suivant.

THÉORÈME 3. *Soit f une fonction elliptique vérifiant:*

$$f(0) < 0 \text{ et } \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) < +\infty.$$

Dans ces conditions il existe une surface spéciale de révolution plongée M, compacte à bord et de classe C^1 jusqu'au bord, dont la courbure de Gauss tend vers $-\infty$ lorsque l'on s'approche du bord de M. De ce fait M ne peut pas être étendue en une surface complète de classe C^2.

Plus précisément M est engendrée par une courbe plane γ qui est le graphe d'une fonction y de classe C^3 sur un intervalle $]x_4, x_3[$, avec $x_4 < 0 < x_3$ et de classe C^1 sur l'intervalle fermé. La courbe γ est symétrique par rapport à la droite verticale $\{x = \frac{x_3 - x_4}{2}\}$, possède exactement deux points d'inflexion et a un maximum lorsque $x = \frac{x_3 - x_4}{2}$. De plus la direction tangente de γ au bord n'est jamais horizontale et le bord de γ est disjoint de l'axe des x.

Démonstration. Remarquons que l'hypothèse concernant la limite de f implique la relation suivante:

$$\lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) = -\infty.$$

De ce fait il existe un unique réel positif β, $\beta > 0$, vérifiant:

$$-\frac{1}{2\beta} - f\left(\left(\frac{1}{2\beta}\right)^2\right) = 0.$$

Soit $\alpha = \lim_{t\to+\infty}(t - f(t^2))$, nous avons $0 < \alpha < +\infty$. Nous déduisons de la définition de β l'égalité suivante:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2\beta} - f\left(\left(\frac{1}{2\beta}\right)^2\right),$$

et de ce fait nous avons

$$\frac{1}{\beta} < \alpha.$$

Nous concluons qu'il existe deux réels $y_0 > 0$ et $y_0' < 0$ vérifiant:

(a) $$\alpha < \frac{1}{y_0},$$

(b) $$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{y_0(1+y_0'^2)^{1/2}},$$

(c) $$\frac{1}{y_0(1+y_0'^2)^{1/2}} < \alpha.$$

De plus l'inégalité (b) implique $F(y_0, y_0', 0) < 0$, et l'inégalité (c) implique $\lim_{\delta\to+\infty} F(y_0, y_0', \delta) > 0$. Nous déduisons donc qu'il existe un unique réel $y_0'' > 0$ vérifiant $F(y_0, y_0', y_0'') = 0$. Ceci nous permet de construire comme au Théorème 1, à l'aide du théorème des fonctions implicites, une surface spéciale M de révolution engendrée par une courbe γ qui est le graphe d'une fonction y définie sur un intervalle $]x_1, x_2[$ contenant 0 et satisfaisant:

$$F(y, y', y'') = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \text{et} \quad y'(0) = y_0'.$$

Nous pouvons montrer que sur tout l'intervalle $]0, x_2[$ nous avons $y'(x) < 0$ et $y'' > 0$. De ce fait y et y' possèdent une limite en x_2, respectivement y_2 et y_2', avec $0 \leq y_2 < +\infty$ et $y_0' < y_2' < 0$. Observons que $y_2 \neq 0$ car sinon nous aurions $\lim_{x\to x_2} \lambda_2(x) = -\infty$, ce qui implique:

$$\lim_{x\to x_2} (\lambda_1(x) - \lambda_2(x)) = +\infty.$$

De ce fait nous avons $\lim_{t\to+\infty}(t-f(t^2))=+\infty$, ce qui amène à une contradiction. Nous avons donc $y_2 \neq 0$.

Remarquons que λ_1 aussi possède une limite en x_2 et ainsi y'' possède une limite strictement positive $y_2'' > 0$ en x_2. Si cette limite est finie nous aurons par continuité $F(y_2, y_2', y_2'') = 0$ ce qui nous permet de prolonger y au-delà de x_2. Les discussions précédentes montrent que même après cette extension, les dérivées y' et y'' gardent le même signe. Ceci montre que, au cours des extensions, nous aurons nécessairement un point $x_3 \geq x_2$ tel que la limite de y'' en x_3 est infinie, $\lim_{x\to x_3} y''(x) = +\infty$. En conséquence la courbure λ_1 de γ tendra aussi vers l'infinie car y' est bornée (y' est croissante et négative). En continuant à appeler M la surface de révolution engendrée par γ, nous concluons que la courbure de Gauss de M tendra vers $-\infty$ lorsque l'on s'approche du bord de M, i.e. $\partial M = \{x = x_3\}$. Remarquons que nous pouvons étendre y également au-delà de x_1 jusqu'à obtenir un maximum comme dans la démonstration du Corollaire 3 (discussion du cas (a)) en observant que pour ceci nous n'avions pas utiliser l'hypothèse $\lim_{t\to+\infty}(t-f(t^2)) = +\infty$. De ce fait M est symétrique par rapport à la droite verticale passant par ce maximum et les deux composantes du bord de M possèdent donc une courbure de Gauss infinie.

Observons finalement que du fait que y'' est strictement positive pour x près de x_3, la dérivée y' est croissante et possède donc une limite en x_3. Nous déduisons de ceci que γ est de classe C^1 jusqu'au bord et admet une tangente au bord. Montrons que la tangente au bord de la courbe γ n'est pas horizontale. En effet nous aurions sinon:

$$\lim_{x\to x_3} \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} = \frac{1}{y(x_3)}.$$

Par ailleurs y vérifie l'équation:

$$\frac{y''}{2(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2y(1+y'^2)^{1/2}} - f\left(\left(\frac{y''}{2(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2y(1+y'^2)^{1/2}}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}}.$$

En faisant tendre x vers x_3 dans la relation précédente nous obtenons:

$$\lim_{t\to+\infty}(t-f(t^2)) = \lim_{x\to x_3} \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}},$$

c'est à dire

$$\alpha = \frac{1}{y(x_3)},$$

(rappelons que $\alpha = \lim_{t\to+\infty}(t-f(t^2))$). Nous concluons en remarquant que la dernière égalité est absurde car, du fait que y est une fonction strictement décroissante nous avons:

$$y(x_3) < y(0) < \frac{1}{\alpha}.$$

Remarque 5.

(a) Remarquons d'une part qu'il existe des fonctions elliptiques vérifiant les hypothèses des Théorèmes 1 et 3 et d'autre part que les conclusions de ces deux théorèmes ne sont pas contradictoires. En effet le Théorème 1 montre que, sous certaines hypothèses, il existe des surfaces spéciales *complètes* de révolution, mais n'affirme pas que *toutes* les surfaces spéciales de révolution sont complètes.

(b) Dans le cadre des surfaces de courbure de Gauss K_0 constante et strictement positive, $K_0 > 0$, il est connu qu'il existe également des surfaces de révolution plongées à bord dont la courbure de la courbe plane génératrice γ tend vers $-\infty$ au bord. Observons que ces surfaces vérifient la relation:

$$H = f(H^2 - K) \quad \text{avec} \quad f(t) = -\sqrt{t + K_0},$$

où les courbures sont calculées par rapport à la direction normale extérieure. La fonction f est elliptique et de ce fait ces surfaces entrent dans le cadre des surfaces spéciales de type courbure moyenne constante.

Remarquons que ceci ne contredit pas le Théorème 3 car la fonction f ne satisfait pas l'hypothèse portant sur la limite. Par contre f vérifie:

$$\lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) = 0.$$

Le Théorème 4 suivant montre que si f satisfait une condition plus générale, il existe des surfaces à bord analogues aux surfaces de courbure de Gauss constante positive.

THÉORÈME 4. *Soit f une fonction elliptique vérifiant:*

$$f(0) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) \geq 0.$$

Dans ces conditions pour chaque réel R vérifiant:

$$0 < R < \frac{1}{\lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2))},$$

il existe une surface spéciale M_R de révolution plongée engendrée par une courbe γ_R, symétrique par rapport à la droite verticale $\{x = 0\}$. De plus γ_R est le graphe d'une fonction y_R de classe C^3 définie sur un intervalle $]-x_R, x_R[$, $x_R > 0$, avec

$y_R(0) = R$ et $y_R'(0) = 0$, concave, c'est à dire $y_R'' < 0$, de classe C^1 sur l'intervalle fermé $[-x_R, x_R]$ et vérifiant:

(1) *Si $R > \frac{-1}{f(0)}$ nous avons $\lim_{x \to x_R} y_R(x) > 0$, et la courbure de γ_R (calculée par rapport à la direction normale extérieure) tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_R. De plus la tangente de γ_R au bord est verticale si et seulement si f vérifie:*

$$\lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) = 0.$$

(2) *Si $R = \frac{-1}{f(0)}$ la courbe γ_R est le demi-cercle de rayon $\frac{-1}{f(0)}$ centré à l'origine.*

(3) *Si $R < \frac{-1}{f(0)}$ nous avons $\lim_{x \to x_R} y_R(x) = 0$ et la tangente de γ_R au bord n'est jamais verticale.*

Démonstration. Remarquons que l'hypothèse sur f implique:

$$\lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) = +\infty.$$

Du fait que R est un réel positif nous avons $\frac{-1}{2R} - f((\frac{-1}{2R})^2) > 0$, c'est à dire:

$$F(R, 0, 0) > 0.$$

De plus l'hypothèse sur R est équivalente à:

$$\lim_{\delta \to -\infty} F(R, 0, \delta) < 0.$$

De ce fait il existe un unique réel strictement négatif $y_0'' < 0$ vérifiant $F(R, 0, y_0'') = 0$. Comme au Théorème 1, à l'aide du théorème des fonctions implicites nous pouvons montrer qu'il existe une unique solution y_R de l'équation (5) vérifiant $y_R(0) = R$, $y_R'(0) = 0$ et $y_R''(0) = y_0''$. De plus y_R, qui est de classe C^3, est définie sur un intervalle $]-x_1, x_1[$, $x_1 > 0$ et y_R est symétrique par rapport à la verticale $\{x = 0\}$. De ce fait R est un maximum de y_R pour x proche de 0. Les techniques utilisées lors de la démonstration du Théorème 1 montrent que nous pouvons toujours prolonger y_R. A la fin de ce processus de prolongement nous avons trois possibilités:

(a) y_R est prolongée sur **R** entier.

(b) y_R est prolongée sur un intervalle $]-x_R, x_R[$ avec $\lim_{x \to x_R} y_R(x) > 0$. De plus λ_1, la courbure de γ_R calculée par rapport à la direction normale extérieure, tend vers l'infini au bord.

(c) y_R est prolongée sur un intervalle $]-x_R, x_R[$ et vérifie $\lim_{x \to x_R} y_R(x) = 0$.

Considérons le cas (a). Remarquons tout d'abord que γ_R, le graphe de y_R, n'a aucun point horizontal après le point $(R, 0)$. En effet si y_R possédait un autre point horizontal, γ_R serait une courbe périodique (voir le Corollaire 1) complète et possèderait donc un minimum local. Cette situation et l'hypothèse portant sur la limite de f contredit la Proposition 1. Nous concluons donc que y_R est une fonction strictement décroissante pour $x > 0$. De ce fait λ_1, la courbure de γ_R

est strictement monotone pour $x > 0$ (voir le Lemme 3). De ce fait le cas (a) ne peut pas se produire.

Au cas (b) nous allons montrer que γ_R n'a aucun point d'inflexion. De ce fait la courbure de γ_R sera toujours négative (car $\lambda_1(0) < 0$) et tendra vers $-\infty$ au bord. Nous montrerons également que γ_R est de classe C^1 jusqu'au bord puis que la tangente de γ_R au bord est verticale si et seulement si f vérifie:

$$\lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) = 0.$$

Les courbures principales de M_R satisfont la relation:

$$(*) \qquad -\lambda_1 = \frac{-\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} - f\left(\left(\frac{-\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}\right)^2\right).$$

Si γ_R avait un point d'inflexion nous avons déjà vu que ce point serait unique et que λ_1 serait une fonction croissante et donc positive a partir de ce point d'inflexion. En conséquence la courbure de γ_R tendrait vers $+\infty$ au bord. Par ailleurs comme λ_1 est croissante l'autre courbure principale λ_2 de M_R est décroissante (voir le Lemme 3). Nous déduisons donc que $\lambda_2 - \lambda_1$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_R. En faisant tendre x vers x_R dans l'équation $(*)$ nous obtenons:

$$-\lim_{x \to x_R} \lambda_1(x) = \lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)),$$

et donc

$$\lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) = -\infty,$$

ce qui est contraire aux hypothèses.

De ce fait y_R'' est strictement négative et y_R' est donc décroissante. La fonction y_R' admet donc une limite en x_R et γ_R est de classe C^1 jusqu'au bord. Les courbures principales de M_R satisfont:

$$(**) \qquad -\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2} - f\left(\left(\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}\right)^2\right).$$

En faisant tendre x vers x_R dans l'équation $(**)$ nous obtenons:

$$\lim_{t \to -\infty} (t - f(t^2)) = -\lim_{x \to x_R} \lambda_2(x).$$

Par ailleurs nous déduisons de la définition de λ_2 (voir le Lemme 1) que la tangente au bord de γ_R est verticale si et seulement si la limite de $y_R'(x)$ en x_R est infinie, c'est à dire si et seulement si la limite de $\lambda_2(x)$ en x_R est nulle, ce qui donne le résultat.

Considérons le cas (c). Comme au cas précédent nous pouvons montrer que γ_R ne possède aucun point d'inflexion. Par conséquent la fonction y_R' est strictement décroissante et possède donc une limite lorsque x tend vers x_R. De ce fait γ_R est de classe C^1 jusqu'au bord. Montrons que si la tangente de γ_R au bord est verticale M_R est sphérique.

Supposons que la tangente de γ_R au bord est verticale. Si la limite de la courbure λ_1 au bord était finie, la courbe γ_R engendrerait une surface spéciale plongée compacte et sans bord M_R de classe C^3. Dans ces conditions M_R est la sphère de rayon $\frac{-1}{f(0)}$ (voir l'introduction). Il suffit donc de montrer que la limite de λ_1 au bord est finie. Supposons le contraire, nous avons donc:

$$\lim_{x \longrightarrow x_R} \lambda_1(x) = -\infty,$$

et donc $\lim_{x \longrightarrow x_R} \lambda_1(x) < f(0)$. Si nous avions de plus $\lambda_1(0) \geq f(0)$ il existerait un point x_0 entre 0 et x_R tel que $\lambda_1(x_0) = f(0)$. Cette égalité entraine aussitôt que $\lambda_2(x_0) = f(0)$ et M_R admet donc au moins un point ombilique. Le Lemme 2 montre qu'alors M_R est une sphère. Montrons que nous ne pouvons pas avoir $\lambda_1(0) < f(0)$. Considérons la fonction:

$$W(a, b) = a + b - f((a - b)^2).$$

Du fait que f est une fonction elliptique la fonction W est strictement croissante par rapport aux variables a et b. En conséquence comme nous avons $W(\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}) = 0$, l'inégalité $\lambda_1(0) < f(0)$ entraine $\lambda_2(0) > f(0)$, c'est à dire:

$$R > \frac{-1}{f(0)}.$$

De ce fait le maximum R de y_R est strictement supérieur au rayon de la sphère de la classe de f. Dans ces conditions considérons le demi-cercle C orthogonal à l'axe des x, de rayon $\frac{-1}{f(0)}$ et de centre $(\frac{-1}{f(0)} - x_R, 0)$. La courbe C est donc tangente à γ_R au point $(- x_R, 0)$ et près de ce point C se trouve au-dessus de γ_R car la courbure de γ_R est infinie en ce point. Du fait que le maximum de C est est inférieur au maximum de γ_R, la courbe C doit intersecter γ_R avant le point $(0, R)$. En considérant les translations horizontales, l'un des translatés de C aura un point de tangence intérieur avec γ_R. En ce point les deux courbes γ_R et C sont solutions de la même équation différentielle du deuxième ordre avec les mêmes conditions initialles. De ce fait ces deux courbes sont égales, ce qui est absurde car, par exemple, elle n'ont pas le même maximum. Ceci montre donc que $\lambda_1(0) \geq f(0)$ et de ce fait la tangente de γ_R au bord est verticale si et seulement si M_R est sphérique.

Pour conclure la preuve il ne nous reste plus qu'à déterminer sous quelle condition nous avons une surface du type (b) ou (c). Si $R = \frac{-1}{f(0)}$ la théorie des équations différentielles assure l'existence et l'unicité d'une surface spéciale de révolution M_R engendrée par une courbe plane γ_R possédant un maximum au point $(R, 0)$. Comme la sphère de rayon $\frac{-1}{f(0)}$ possède ces propriétés nous concluons que M_R est la sphère de rayon $\frac{-1}{f(0)}$ et que γ_R est le demi-cercle de rayon $\frac{-1}{f(0)}$ centré à l'origine.

Supposons maintenant que $R > \frac{-1}{f(0)}$. Nous voulons montrer que nous avons une surface de type (b), c'est à dire que $\lim_{x \to x_R} y_R(x) > 0$. Supposons au contraire que nous ayons $\lim_{x \to x_R} y_R(x) = 0$. Du fait que M_R n'est pas la sphère de rayon $\frac{-1}{f(0)}$, la courbe γ_R ne peut pas être perpendiculaire à l'axe des x au point $(R, 0)$. Nous avons donc $\lim_{x \to x_R} \lambda_2(x) = -\infty$, et de ce fait:

$$\lim_{x \to x_R} \lambda_2(x) < f(0).$$

Par ailleurs nous avons $\lambda_2(0) = \frac{-1}{R}$, et ainsi $\lambda_2(0) > f(0)$. Comme précédemment nous obtiendrions un point ombilique de M_R ce qui est absurde car M_R n'est pas sphérique (voir le Lemme 2).

Supposons finalement que $R < \frac{-1}{f(0)}$. Nous voulons montrer que M_R est une surface de type (c), c'est à dire que $\lim_{x \to x_R} y_R(x) = 0$. Dans le cas contraire nous avons $\lim_{x \to x_R} y_R(x) > 0$ et la courbure de γ_R tendrait vers $-\infty$ au bord (sinon nous pourrions prolonger y_R au-delà de x_R). Nous avons donc:

$$\lim_{x \to x_R} \lambda_1(x) < f(0).$$

De ce fait comme M_R n'est pas sphérique nous devons avoir $\lambda_1(0) < f(0)$ (sinon M_R aurait un point ombilique). Nous remarquons comme plus haut que la fonction $W(a, b) = a + b - f((a - b)^2)$ est strictement croissante par rapport aux variables a et b car f est une fonction elliptique. De ce fait pour avoir $W(\frac{\lambda_1(0)}{2}, \frac{\lambda_2(0)}{2}) = 0$ nous devons avoir $\lambda_2(0) > f(0)$, c'est à dire:

$$R > \frac{-1}{f(0)},$$

ce qui contredit l'hypothèse sur R.

Le résultat suivant explicite, sous certaines conditions portant sur f, le comportement géométrique de la famille de surfaces $\mathcal{O}_\tau$ donnée par le Théorème 1.

THÉORÈME 5. GÉOMÉTRIE DES ONDOLOÏDES SPÉCIALES $\mathcal{O}_\tau$. *Soit f une fonction elliptique satisfaisant:*

$$f(0) < 0, \;\; f \geq f(0) \;\text{ et } \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) = +\infty.$$

Dans ces conditions les surfaces $\mathcal{O}_\tau$ données par le Théorème 1 sont définies pour tout τ strictement positif, $\tau > 0$ vérifiant $\frac{-1}{2\tau} - f((\frac{1}{2\tau})^2) \leq 0$, c'est à dire $0 < \tau \leq r$

où r est le rayon de l'unique cylindre droit de la classe de f (voir la Remarque 3). De plus lorsque τ tend vers zéro les surfaces $\mathcal{O}_\tau$ convergent vers la sphère de la classe de f, c'est à dire la sphère de rayon $\frac{1}{-f(0)}$.

Démonstration. Le fait que les surfaces $\mathcal{O}_\tau$ existent pour tout τ strictement positif avec $\tau \leq r$ découle du Théorème 1 et de la Remarque 3. Il reste donc à montrer la convergence des surfaces $\mathcal{O}_\tau$ vers la sphère. Pour cela désignons par R le rayon de la sphère de la classe de f, c'est à dire $R = \frac{1}{-f(0)}$. Comme au Théorème 1 appelons γ_τ la courbe qui engendre $\mathcal{O}_\tau$, et R_τ le maximum de γ_τ. Nous allons commencer par montrer que les maximum R_τ convergent vers R.

Pour tout réel τ vérifiant $0 < \tau \leq r$, appelons $\mathcal{D}_\tau$ la surface de Delaunay de courbure moyenne constante égale à $c = f(0)$ engendrée par l'ondoloïde c_τ qui a un minimum au point $(0, \tau)$. Les courbes γ_τ et c_τ sont donc tangentes au point $(0, \tau)$. Considérons les surfaces engendrées par ces courbes, c'est à dire $\mathcal{O}_\tau$ et $\mathcal{D}_\tau$, et remarquons que par rapport à l'orientation normale extérieure la courbure moyenne de $\mathcal{O}_\tau$ est supérieure à celle de $\mathcal{D}_\tau$ (car $f \geq c$). En utilisant le fait que ces surfaces sont de révolution nous pouvons montrer à l'aide du principe du maximum que près du point $(0, \tau)$ la surface $\mathcal{O}_\tau$ se trouve au-dessus de $\mathcal{D}_\tau$. De ce fait la courbe γ_τ se trouve au-dessus de c_τ dans un voisinage du point $(0, \tau)$. Appelons m_τ le maximum de c_τ. En considérant les translatés horizontaux de c_τ et à l'aide du principe du maximum nous pouvons montrer que $R_\tau \geq m_\tau$. Par ailleurs nous savons d'une part que $R_\tau < R$, voir le Théorème 1, et d'autre part il est connu que les maximum m_τ tendent vers R lorsque τ tend vers zéro (voir [4]). Nous concluons donc que:

$$\lim_{\tau \to 0} R_\tau = R.$$

Pour montrer la convergence des surfaces $\mathcal{O}_\tau$ vers la sphère de rayon $\frac{1}{-f(0)} = \frac{1}{-c}$, il suffit de montrer que les courbes γ_τ convergent vers le demi-cercle C_R orthogonal à l'axe des x et de rayon $\frac{1}{-c}$ (ou plus exactement vers la suite de tels demi-cercles tangents deux à deux le long de l'axe des x). Ceci provient de la continuité des solutions des équations différentielles.

Les résultats précédents nous permettent de montrer une autre application concernant les surfaces spéciales en générales.

COROLLAIRE 4. *Soit f une fonction elliptique négative, $f \leq 0$. Dans ces conditions si M est une surface spéciale (relativement à f ou à $-f$) complète et proprement immergée contenue à l'intérieur d'une ondoloïde spéciale $\mathcal{O}_{\tau_0}$ donnée par le Théorème 1, nous avons $M = \mathcal{O}_{\tau_0}$.*

La démonstration utilise le principe du maximum et est analogue à celle du Corollaire 4.1.1 de [13].

Remarque 6. Si f satisfait les mêmes hypothèses qu'au Corollaire 4 nous pouvons montrer également que si M est une surface spéciale complète à bord compact et proprement immergée contenue à l'intérieur d'une ondoloïde spéciale $\mathcal{O}_{\tau_0}$, M doit être une partie de $\mathcal{O}_{\tau_0}$ c'est à dire $M \subset \mathcal{O}_{\tau_0}$. En particulier si E est un bout de type anneau d'une surface spéciale et si E est proprement immergé et contenue à l'intérieur d'une ondoloïde spéciale, E est en fait l'un des bouts de cette ondoloïde.

Nous allons maintenant considérer le cas des surfaces spéciales non plongées. Nous commencerons par déduire des conditions nécessaires pour l'existence de surfaces spéciales complètes non plongées de révolution puis nous verrons que ces conditions sont suffisantes pour l'existence de telles surfaces. Les preuves de ces résultats seront omises car elles utilisent les mêmes techniques que pour le cas plongé, voir la proposition 1 et le Théorème 1.

Remarque 7. Considérons une fonction elliptique f et une surface spéciale M complète de révolution non plongée engendrée par une courbe γ qui possède un minimum local p. Du fait que M n'est pas plongée nous ne pouvons plus parler d'orientation normale extérieure sur M. Nous conviendrons en conséquence qu'une telle surface M satisfait la relation $H(N) = f(H^2 - K)$, où N est le champ de vecteurs normal unitaire sur M telle que, au point p le vecteur $N(p)$ est dirigé à l'opposé de l'axe de révolution, i.e. $N(p) = (0, 1, 0)$. Rappelons que par convention les courbures principales λ_1 et λ_2 de M sont calculées par rapport à cette orientation normale.

PROPOSITION 2. *Soit f une fonction elliptique avec $f(0) \neq 0$. Supposons qu'il existe une surface spéciale de révolution complète et non plongée M engendrée par une courbe γ qui possède un minimum local en un point $p = (0, \tau)$, avec $\tau > 0$ (voir la Remarque 7 pour le choix de l'orientation normale).*

Dans ces conditions f et τ vérifient nécessairement:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) > \frac{1}{\tau},$$

$$\text{(b)} \qquad f(0) > 0.$$

THÉORÈME 6. EXISTENCE DE NODOÏDES SPÉCIALES. *Soit f une fonction elliptique vérifiant:*

$$f(0) > 0 \text{ et } \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) > 0,$$

et soit $\tau > 0$ un réel vérifiant:

$$\frac{1}{\tau} < \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)).$$

Dans ces conditions il existe une unique surface spéciale complète de révolution non plongée, $\mathcal{N}_\tau$, engendrée par une courbe ρ_τ ayant un minimum au point $(0, \tau)$. De plus cette courbe est géométriquement analogue aux nodoïdes de Delaunay. Plus précisément il existe un réel $T_\tau > 0$ vérifiant:

(a) *La courbe ρ_τ est périodique de période le vecteur horizontal $(T_\tau, 0)$ où $T_\tau > 0$, c'est à dire:*

$$\rho_\tau + (T_\tau, 0) = \rho_\tau.$$

(b) *La courbe ρ_τ a un minimum au point $p_1 = (0, \tau)$ et un maximum au point $p_3 = (\frac{T_\tau}{2}, R_\tau)$, où $R_\tau > 0$. De plus ρ_τ est symétrique par rapport aux droites verticales $\{x = 0\}$ et $\{x = \frac{T_\tau}{2}\}$.*

(c) *La portion de la courbe ρ_τ comprise entre les points p_1 et p_3 a l'ordonnée y strictement croissante et ne possède qu'un unique point vertical $p_2 = (x_2, y_2)$. De plus l'abscisse de p_2 vérifie $x_2 > \frac{T_\tau}{2}$.*

(d) *Entre les points p_1 et p_2 l'abscisse x de la courbe ρ_τ est une fonction strictement croissante et entre les points p_2 et p_3 elle est strictement décroissante. De plus ρ_τ ne possède aucun point d'inflexion entre le minimum p_1 et le maximum p_3 (et donc ne possède aucun point d'inflexion).*

(e) *Le maximum R_τ de la courbe ρ_τ satisfait l'inégalité:*

$$R_\tau > R,$$

où $R = \frac{1}{f(0)}$ est le rayon de l'unique sphère de la classe de f.

Comme dans le cas des surfaces plongées (c'est à dire pour $f(0) < 0$) les surfaces spéciales de révolution non plongées sont également classifiees.

THÉORÈME 7. CLASSIFICATION DES NODOÏDES SPÉCIALES. *Soit f une fonction elliptique avec $f(0) \neq 0$ et soit M une surface spéciale complète de révolution non plongée (voir la Remarque 7 pour le choix de l'orientation normale). Dans ces conditions f vérifie:*

$$f(0) > 0, \quad \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) > 0,$$

et M est nécessairement l'une des surfaces $\mathcal{N}_\tau$ données par le Théorème 7.

COROLLAIRE 5. *Soit f une fonction elliptique vérifiant:*

$$f(0) > 0, \;\; f \geq -f(0) \;\text{ et }\; \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) = +\infty.$$

Soit M une surface spéciale de révolution engendrée par une courbe plane γ. Supposons que γ possède un arc γ' tel que:

(a) *M a une courbure de Gauss strictement négative en chaque point de γ'.*

(b) *L'arc γ' est un graphe.*

(c) *Le long de γ', la surface M satisfait la relation $H(N) = f(H^2 - K)$, où N est le champ normal extérieur le long de γ'.*

Dans ces conditions M fait partie de l'une des nodoïdes spéciales $\mathcal{N}_\tau$ données par le Théorème 7.

De même si la courbe γ possède des points dont l'ordonnée y est strictement supérieure au rayon de la sphère spéciale de la classe de f, c'est à dire $\frac{1}{f(0)}$ (voir l'introduction), M fait nécessairement partie d'une nodoï de spéciale.

La preuve est analogue à celle du Corollaire 3 dans le cas où l'arc γ' existe. Dans l'autre cas nous faisons un raisonnement analogue à celui rencontré à la Remarque 4(b).

Questions.

(1) Une surface spéciale complète M immergée dans $\mathbf{R}^3$ dont la courbure de Gauss K ne change pas de signe doit-elle être la sphère (si $K > 0$) ou une surface spéciale de type minimal (si $K \leq 0$)? Cela est vrai dans le cadre des surfaces minimales ou à courbure moyenne constante, voir [5] et [10]. Rappelons que lorsque $K \equiv 0$, la surface M est un cylindre droit si $f(0) \neq 0$ (voir l'introduction) et il est clair que si $f(0) = 0$ la surface M est un plan.

(2) Soit M une surface spéciale complète dans $\mathbf{R}^3$. Est-il vrai que si l'image de l'application de Gauss de M est contenue dans une hémisphère ouverte M doit être un plan et que si l'image est contenue dans une hémisphère fermée M doit être un plan ou un cylindre droit? Ce résultat est vrai pour les surfaces minimales ou à courbure moyenne constante dans $\mathbf{R}^3$, voir [6].

(3) Un résultat de Korevaar, Kusner et Solomon (voir [11]) stipule que si A est un anneau à bord compact, complet, proprement plongé dans $\mathbf{R}^3$ et de courbure moyenne constante 1, A doit être asymptote à une ondoloïde de Delaunay de courbure moyenne 1. Ce résultat est-il vrai dans le cadre des surfaces spéciales de type courbure moyenne constante?

(4) La théorie de Kapouleas (voir [9]) est-elle valide dans le cadre des surfaces spéciales de type courbure moyenne constante? Par exemple si f est une fonction elliptique satisfaisant les hypothèses du Théorème 1, existe-t-il une surface spéciale complète plongée de genre 0 avec trois bouts de type anneau convergent chacun vers un bout de type ondoloïde?

Added in proof: Par la suite les auteurs ont étudié les surfaces spéciales de l'espace hyperbolique, voir [17].

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, PONTIFÍCA UNIVERSIDADE CATÓLICA, RUA MARQUÊS DE SÃO VICENTE, 225, 22453-900 GÁVEA RIO DE JANEIRO, BRASIL
Electronic mail: EARP@MAT.PUC-RIO.BR

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ PARIS VII, 2, PLACE JUSSIEU 75251 PARIS-CEDEX 05, FRANCE
Electronic mail: TOUBIANA@MATH.JUSSIEU.FR

RÉFÉRENCES

[1] A. Alexandrov, Uniqueness theorem for surfaces in the large, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1962, pp. 341–344.

[2] F. Braga Brito and R. Sa Earp, On the structure of certain Weingarten surfaces with boundary a circle, *Ann. Fac. Sci. Toulouse 2* **6** (1997), 243–256.

[3] R. Bryant, Complex analysis and a class of Weingarten surfaces, preprint.

[4] C. Delaunay, Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante, *J. Math. Pures Appl. (1)* **6** (1841), 309–320.

[5] D. Hoffman, Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature, *J. Differential Geom.* **8** (1977), 161–176.

[6] D. Hoffman, R. Osserman, and R. Schoen, On the Gauss map of constant mean curvature in $\mathbf{R}^3$ and $\mathbf{R}^4$, *Comment. Math. Helv.* **57** (1982), 519–531.

[7] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1000, Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] W. Y. Hsiang and W. C. Yu. A generalisation of a theorem of Delaunay, *J. Differential Geom.* **16** (1981), 161–177.

[9] N. Kapouleas, Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three space, *Ann. of Math.* **131** (1990), 239–330.

[10] T. Klotz and R. Osserman, Complete surfaces in $\mathbf{E}^3$ with constant mean curvature, *Comment. Math. Helv.* **41** (1966–67), 313–318.

[11] N. Korevaar, R. Kusner, and B. Solomon, The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature, *J. Differential Geom.* **30** (1989), 465–503.

[12] W. H. Meeks, The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature, *J. Differential Geom.* **27** (1988), 539–552.

[13] H. Rosenberg and R. Sa Earp, Some remarks on surfaces of prescribed mean curvature, *Differential Geometry (Symposium in honor of M. do Carmo)*, *Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math.*, vol. 52, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, pp. 123–148.

[14] ———, The geometry of properly embedded special surfaces in $\mathbf{R}^3$; e.g. surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive, *Duke Math. J.* **73** (1994), 291–306.

[15] R. Sa Earp and E. Toubiana, A note on special surfaces in $\mathbf{R}^3$, *Mat. Contemp.* **4** (1993) 108–118.

[16] ———, Sur les surfaces de Weingarten spéciales de type minimal, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **26** (1995), 129–148.

[17] ———, Symmetry of properly embedded special Weingarten surfaces in $\mathbf{H}^3$, *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear).