Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre de 2024

MAT1203L ⋆ Laboratorio Álgebra Lineal

Tarea 2

Instrucciones

1. La tarea debe ser entregada en un archivo .ipynb a la plataforma Moodle, con fecha de entrega domingo 27 de octubre hasta las 23:59 horas.

2. Cada pregunta debe ser debidamente respondida. Es decir, debe argumentar de forma correcta mediante código y cada vez que se solicite explicar, argumentar o concluir debe hacerlo comentando el código o escribiendo en una celda de texto su respuesta. Resultados sueltos sin argumentos no serán tomados en cuenta.

3. Lo necesario para responder la tarea, en termino del uso de python, en su totalidad está contenido en los documentos para los laboratorios de este curso y en los archivos que adjuntos de ejemplo. En algunos casos se espera que los mismos estudiantes busquen formas de extender las funcionalidades tratadas en las sesiones de laboratorio.

4. La tarea es individual.

5. Con respecto a la entrega, se subirá una hoja de respuesta estándar que pueden ocupar.

6. Se prohíbe el uso de ChatGPT u otra interfaz similar para responder la tarea.

7. Se prohíbe insertar fotografías de partes del trabajo escritas a mano.

8. Bajo ninguna circunstancia se aceptarán tareas fuera de plazo.

9. Se aconseja una vez realizada la entrega final descargar el archivo entregado y revisar que efectivamente es el correcto (ingresar al buzón nuevamente y descargarlo). Lo anterior significa que solo se corrige el archivo que se encuentre en el buzón (archivos enviados por correo electrónico no serán tomados en cuenta). Si el buzón se encuentra vacío, dado lo anterior, se asume que no se hizo entrega alguna.

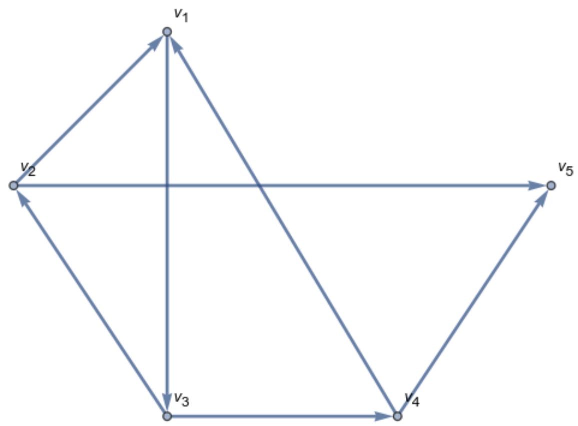
   Bajo ninguna circunstancia se hacen excepciones a esto lo expuesto en este punto.

10. El código debe poder se ejecutado en forma correcta. En caso contrario (que de errores) se evaluara con 0 puntos el item respectivo.

Problemas

Resuelva ocupando exclusivamente Pythom para realizar los cálculos. Fundamente todas sus afirmaciones.

1. Un **grafo dirigido** es una colección de n puntos denominados vértices, denotados por V_1, V_2, ..., V_n, junto con un número finito de aristas que unen distintos pares de vértices. A diferencia de un grafo normal, en un grafo dirigido las aristas tienen sentido y para denotarlas ocupamos flechas.



La ruta de un vértice hacia otro se denomina trayectoria o cadena. La trayectoria $V_3 \to V_2 \to V_5$ que va de V_3 a V_5 se llama 2-cadena porque pasa por dos aristas. En general una trayectoria que atraviesa por n aristas (y por lo tanto pasa por $n+1$ vértices) se llama n-cadena. Un ciclo es una trayectoria cuyo vertice inicial y final son el mismo. Por ejemplo, en el grafo de la figura, tenemos el ciclo $V_3 \to V_4 \to V_1 \to V_3$ cuyo largo es 3. El ciclo anterrior cumple que el ciclo se recorre en el sentido de las aristas. Si este no fuera el caso decimos que el ciclo es no dirigido. Por ejemplo $V_3 \to V_2 \to V_5 \to V_4 \to V_3$ es un ciclo no dirigido de largo 4.

Para este problema consideraremos que los grafos dirigidos satisfacen las siguientes dos condiciones:

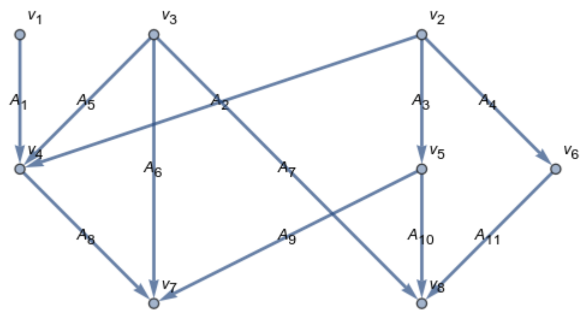
i) Ningún vértice está conectado consigo mismo.

ii) A lo más una arista lleva de un vértice a otro.

La matriz que representa una grafo dirigido que satisface estas dos condiciones se denomina **matriz de incidencia nodo-arista**. Se define como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } j \text{ llega al nodo } i \\ -1 & \text{si la arista } j \text{ sale del nodo } i \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

a) Defina, en Python, la matriz A que representa el siguiente grafo dirigido (la i-esima arista se denota por A_i). Observe que cada arista corresponde a una columna de A y que A será una matriz de $n \times m$, donde n es el número de nodos y m el número de aristas.



b) Encuentre un ciclo cerrado (ciclo no dirigido) en el grafo anterior y observe qué aristas incluye. Verifique la dependencia o independencia de las columnas de A que corresponden a estas aristas. Encuentre tantos ciclos cerrados como pueda reconocer y pruebe la dependencia o independencia de las columnas correspondientes de A.

c) Considere un subconjunto de aristas que no contengan ciclos cerrados. Pruebe la dependencia o independencia de las columnas correspondientes de A.

d) Escriba una conclusión sobre la relación entre ciclos no dirigidos en una digráfica y la dependencia o independencia lineal de las columnas de la matriz de incidencia nodo-arista de la digráfica.

e) Un ciclo se puede representar por un vector de $m \times 1$ en donde cada elemento del vector corresponde al coeficiente de una arista. Por ejemplo, un ciclo en grafo dirigido anterior es: inicio en el nodo V_3, luego arista 5, después por la arista 8 y por el opuesto de la arista 7. Esto se puede expresar como $A_9 - A_8 - A_2 + A_3$, que se puede representar por el vector $m \times 1$: $[0\ \ -1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 0]^t$.

  *e*1) Verifique que este vector está en el espacio nulo de A, la matriz de incidencia nodo-arista.

  *e*2) Forme el vector correspondiente al ciclo que va del nodo [3] al nodo [7] al nodo [4] y de regreso al nodo [3]. Verifique que este vector se encuentra en el espacio nulo de A.

f) Verifique que $[0\ \ -1\ 2\ \ -1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 1\ 1\ \ -1]^t$ está en el espacio nulo de A. Demuestre que este vector corresponde al ciclo que comienza en el nodo [6] y sigue -arista 4 + arista 3 + arista 9 - arista 8 - arista 2 + arista 3+arista 10 -arista 11.

g) Encuentre una base para el espacio nulo de A.

h) Para cada vector en la base, identifique el ciclo que corresponde al vector escribiendo las aristas en el orden que siguen. Modifique el código de la sesión 6 y/o el de la tarea 1 para pintar las aristas de cada ciclo con colores distintos.

i) Forme una combinación lineal de estos vectores básicos (del espacio nulo de A) usando coeficientes de 1 y -1. Identifique el ciclo que describe esta combinación lineal escribiendo las aristas en el orden que siguen, como se hizo en el inciso *f*). Dibuje el ciclo. Repita para otra combinación lineal.

$j)$ Identifique un ciclo en el grafo dirigido que no esté en la base del espacio nulo o uno de los ciclos descritos en el inciso i). Escriba el vector correspondiente en el espacio nulo de A. Encuentre los coeficientes necesarios para expresar el vector como una combinación lineal de los vectores de la base para el espacio nulo. Dibuje su ciclo y los ciclos básicos incluidos en la combinación lineal y muestre que su ciclo está formado por estos ciclos básicos. Repita para otro ciclo.