PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 4

10 de octubre de 2025

2º semestre 2025 - Profesores M. Arenas - A. Kozachinskiy - M. Romero

Alvaro Panozo - 24664057

Respuestas

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Sea $\mathcal{P}(n)$: Dado $A = \{1, 2...n\}$, y $\forall m \in \mathbb{Z}$: $1 \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2}$, m se puede escribir como la suma de todos los elementos de un subconjunto de A.

CB) n=1
Tenemos $A = \{1\}$, $1 \leq m \leq 1$, trivialmente $m = 1$, y podemos tomar $S = \{1\} \subseteq A$, donde todos los elementos de S suman m. Luego $\mathcal{P}(1)$ se cumple.

HI) Asumimos que para $1 \leq k < n$, $\mathcal{P}(k)$ es verdad.

PI) PDQ: $\mathcal{P}(n)$:
Dados $A = \{1, 2, ..n\}$, $1 \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2}$
Existen 2 casos:

- $m \leq \frac{(n-1)n}{2}$
  Tenemos $S = \{1, 2, ...n-1\} \subseteq A$, luego como $n - 1 < n$, podemos tomar cualquier subconjunto necesario para m, y por HI, la propiedad se cumple
- $\frac{(n-1)}{2} < m \leq \frac{n(n+1)}{2}$
  Digamos $m' = m - n$. Entonces podemos decir:
  $m' \leq \frac{n(n+1)}{2} - n$
  $m' \leq \frac{n(n-1)}{2}$
  Tomamos $S = \{1, 2, ...n-1\} \subseteq A$, y por HI podemos escribir m' con algun subconjunto de S, que es subconjunto de A. Dado que $n \notin S$, y $m = m' + n$, basta con tomar

$S' = S \cup \{n\}$, de forma que $S' \subseteq A$, y la suma de todos los elementos de algun subconjunto de S' nos dan m.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

CB)

- $n = 30$
  $30 = 5(6) + 8(0)$
- $n = 31$
  $31 = 5(3) + 8(2)$
- $n = 32$
  $32 = 5(0) + 8(2)$
- $n = 33$
  $33 = 5(5) + 8(1)$
- $n = 34$
  $34 = 5(2) + 8(3)$
- $n = 35$
  $35 = 5(7) + 8(0)$

HI) Asumimos que para $30 \leq k < n$, con $n \geq 35$, k se puede escribir como la suma de multiplos de 5 y 8.

PI) Sabemos que $n - 5 < n$. (Notar que por esto hacemos 5 casos bases, ya que si solo demostramos el 30, $n - 5$ sería menor a 30, saliendonos del rango que estamos trabajando). Luego, por HI, $n - 5$ cumple la propiedad, y como $n = (n - 5) + 5$, n se puede escribir como la suma de multiplos de 5 y 8.

Pregunta 2.2

Sabemos que se cumple para $n \geq 30$, asi que probaremos con los anteriores

- $29 = 5(1) + 8(3)$
- $28 = 5(4) + 8(1)$
- $27 = 5x + 8y$

Sabemos que $x, y \in \mathbb{N}$ (no podemos dar monedas negativas, ni fracciones de monedas). Luego, podemos deducir:
$8y \leq 27$
$y \leq \lfloor \frac{27}{8} \rfloor = 3$
Analogamente para x:
$5x \leq 27$
$x \leq \lfloor \frac{27}{5} \rfloor = 5$
Siguiendo esta logica, podemos despejar para y en función de x, y viceversa, e ir probando los valores permitidos para x e y, y comprobar si existe algun resultaado dentro de los naturales.
$y = \frac{27-5x}{8}$

- $x = 0$,$y = \frac{27}{8}$
- $x = 1$,$y = \frac{22}{8}$
- $x = 2$,$y = \frac{17}{8}$
- $x = 3$,$y = \frac{12}{8}$
- $x = 4$,$y = \frac{7}{8}$
- $x = 5$,$y = \frac{2}{8}$

Como podemos ver, no existe ningun x en el rango permitido que nos entrege un natural.
$x = \frac{27-8y}{5}$

- $y = 0$, $x = \frac{27}{5}$
- $y = 1$, $x = \frac{19}{5}$
- $y = 2$, $x = \frac{11}{5}$
- $y = 3$, $x = \frac{3}{5}$

Analogamente, no existe ningun y dentro del rango que nos de un natural. Entonces, podemos concluir que no existe ningun par x, y en los naturales, que cumpla $27 = 5x + 8y$. Entonces, el n_0 mas pequeño que podemos tomar es $n_0 = 28$