PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 6

18 de diciembre de 2025

2º semestre 2025 - Profesores M. Arenas - A. Kozachinskiy - M. Romero

Alvaro Panozo - 24664

Respuestas

Pregunta 1

Pregunta 1.1

fof es inyectiva, entonces:
$\forall a, b \in A : f(f(a)) = f(f(b)) \rightarrow a = b$
Tomemos $x, y \in A$ tal que $f(x) = f(y)$, luego como fof es inyectiva, aplicamos f en ambos lados $f(f(x)) = f(f(y))$, y entonces $x = y$. En general, $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \rightarrow x = y$

Pregunta 1.2

Sabemos que fof es sobre, entonces
$\forall b \in A \exists x \in A : f(f(x)) = b$ (Notemos que $f(x) : A \rightarrow A$, entonces $f(x) \in A$) Luego, decimos $a = f(x)$ tal que $f(a) = b$, entonces $\forall b \in A \exists a \in A : f(a) = b$. F es sobre

Pregunta 1.3

f es iny. $\leftrightarrow \forall X_1, X_2 \subseteq A : f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$
$\rightarrow$:
$f(X_1 \cap X_2) = \{f(a) \in B | a \in X_1 \cap X_2\}$ (notemos que $X_1 = X_2$ se cumple trivialmente)
Sea $y \in f(X_1 \cap X_2)$, entonces debe existir $a \in X_1 \cap X_2 : f(a) = y$. Sabemos que $a \in X_1$, osea $y \in f(X_1)$. Analogamente, $a \in X_2$, por lo que $y \in f(X_2)$, por lo que $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$.
Por lo que $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$
Ahora, sea $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$. Entonces $y \in f(X_1) \wedge y \in f(X_2)$, osea $\exists a_1 \in X_1 : f(a_1) = y$, y analogamente $\exists a_2 \in X_2 : f(a_2) = y$. Como f es iny., $a_1 = a_2 = a$, osea $a \in X_1 \cap X_2$, y entonces $y \in f(X_1 \cap X_2)$.
Finalmente, $f(X_1) \cap f(X_2) \subseteq f(X_1 \cap X_2)$. Se concluye que $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$
$\leftarrow$:
Sabemos que $f(X_1) \cap f(X_2) = f(X_1 \cap X_2)$. Sea a_1, a_2 tales que $a_1 \neq a_2$ pero $f(a_1) = f(a_2) = y$.
Si tomamos $X_1 = \{a_1\}$, $X_2 = \{a_2\}$, nos queda que $X_1 \cap X_2 = \emptyset \rightarrow f(X_1) \cap f(X_2) = f(\emptyset) = \emptyset$.
Luego, $f(X_1) \cap f(X_2) = \{f(a_1)\} \cap \{f(a_2)\}$, como $f(a_1) = f(a_2)$, $f(X_1) \cap f(X_2) = \{f(a_1)\}$.
Uniendo, nos queda $\{f(a_1)\} = \emptyset$, lo que es una contradiccion que viene de asumir $a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2)$. Entonces, f es inyectiva.

Pregunta 1.4

f es sobreyectiva $\leftrightarrow \forall Y \subseteq B : f(f^{-1}(Y)) = Y$
$\rightarrow$
Sea $b \in f(f^{-1}(Y))$, entonces $\exists a \in f^{-1}(Y)$ tq $f(a) = b$. Como $a \in f^{-1}(Y)$, entonces $f(a) \in Y$, osea que $b \in Y$. Entonces $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$
Sea $b \in Y$. Como la función es sobreyectiva, toda imagen debe tener preimagen, osea $\exists a \in A$ $\forall b \in B : f(a) = b$. Entonces, $a \in f^{-1}(Y)$. Si tomamos $f(f^{-1}(Y)) = \{f(a) \in B | a \in f^{-1}(Y)\}$, como $b = f(a) \in Y \subseteq B$, y ademas $a \in f^{-1}(Y)$, entonces $b \in f(f^{-1}(Y))$. Entonces $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$.
Se concluye que $Y = f(f^{-1}(Y))$

$\leftarrow$
Como Y ppuede ser cualquier subconjunto, ppodemos tomar $Y = B$. Luego, por hipótesis, $f(f^{-1}(B)) = B$. Notemos que $f^{-1}(B) = \{a \in A | f(a) \in B\}$. Como f es una funcion bien definida, $\forall a \in A \exists! b \in B$ tq $f(a) = b$. Por lo tanto $f^{-1}(B) = A$. Nos queda $f(A) = B$, que es una forma de definir sobreyectividad.