Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 5

22 de octubre de 2025

$2^{\underline{o}}$ semestre 2025 - Profesores M. Arenas - A. Kozachinskiy - M. Romero

Álvaro Panozo - 24664057

Respuestas

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Digamos $R' = R_1 \cap R_2$

- Refleja
  R' es refleja si solo si $\forall a \in A, (a, a) \in R'$
  Sea $a \in A$, sabemos que $(a, a) \in R_1 \wedge (a, a) \in R_2$ (ambas son relaciones de eq sobre A), luego el par $(a, a) \in R_1 \cap R_2$
- Transitiva
  R' es transitiva si solo si $\forall a, b, c \in A((a, b) \in R' \wedge (b, c) \in R' \rightarrow (a, c) \in R')$
  Sea $(a, b), (b, c) \in R'$, luego se cumple $((a, b), (b, c) \in R_1 \wedge (a, b), (b, c) \in R_2)$, como R_1, R_2 son de equivalencia, sabemos que $(a, c) \in R_1 \wedge (a, c) \in R_2$, entonces $(a, c) \in R'$
- Simetrica
  R' es simetrica si solo si $\forall a, b((a, b) \in R' \rightarrow (b, a) \in R')$
  Sea $(a, b) \in R'$, luego $(a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2$, como R_1, R_2 son de eq, sabemos que $(b, a) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_2$, y entonces $(b, a) \in R'$
  Concluimos que $R_! \cap R_2$ es de eq.

Pregunta 1.2

Sea $A = \mathbb{Z}$, luego $(a, b) \in R_1 \leftrightarrow a \equiv_2 b$, y $(a, b) \in R_2 \leftrightarrow a \equiv_3 b$, entonces $(a, b) \in R_1 \cup R_2 \leftrightarrow a \equiv_2 b \vee a \equiv_3 b$. Veamos el siguiente caso:
$(2, 4) \in R_1$, porque $2 \equiv_2 4$, entonces $(2, 4) \in R_1 \cup R_2$
$4, 7 \in R_2$, porque $4 \equiv_3 7$, entonces $(4, 7) \in R_1 \cup R_2$, pero
$(2, 7) \notin R_1$, porque $2 \not\equiv_2 7$, y ademas
$(2, 7) \notin R_2$, porque $2 \not\equiv_3 7$, entonces
$(2, 7) \notin R_1 \cup R_2$. Al no ser transitiva, no puede ser de equivalencia.

Pregunta 1.3

$\forall x, y \in A(((x, y) \in R_1 \to (x, y) \in R_2) \leftrightarrow [x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2})$
$(\to)$
Sabemos que $(x, y) \in R_1 \to (x, y) \in R_2$. Notemos que necesariamente para cualquier relacion R sobre cualquier conjunto A, se cumple que $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \to b \in [a]_R$. Entonces aplicandolo: $y \in [x]_{R_1} \to (x, y) \in R_1 \to (x, y) \in R_2 \to y \in [x]_{R_2}$. Como $\to$ es transitiva, nos quuedamos con $y \in [x]_{R_1} \to y \in [x]_{R_2}$, y entonces $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$
$(\leftarrow)$
Sabemos que $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$, lo que es lo mismo que decir $\forall y \in A, y \in [x]_{R_1} \to y \in [x]_{R_2}$, luego $(y \in [x]_{R_1} \leftrightarrow (x, y) \in R_1) \wedge (y \in [x]_{R_2} \leftrightarrow (x, y) \in R_2)$, y entonces podemos deducir que $(x, y) \in R_1 \to (x, y) \in R_2$

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Supongamos que $R_1 \subseteq R_2$, ambos ordenes totales, y tomemos $(a, b) \in R_1$. Luego, como R_2 es orden total en A, se debe cumplir $(a, b) \in R_2 \vee (b, a) \in R_2$ Entonces:

- $(a, b) \in R_2$
  Estamos listos
- $(b, a) \in R_2$
  Como $R_1 \subseteq R_2$, se debe cumplir que $(b, a) \in R_1$, pero entonces $(a, b) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_1$, y por antisimetria, $a = b$. Y así tenemos $(b, a) = (a, b) \in R_2$

Concluimos entonce que $\forall a, b \in A((a, b) \in R_1 \rightarrow (a, b) \in R_2)$, osea $R_2 \subseteq R_1$, y como $R_1 \subseteq R_2 \wedge R_2 \subseteq R_1$, tenemos que $R_1 = R_2$