UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Mojca Božič

KVATERNIONI IN KVATERNIONSKE MATRIKE

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Lucijan Plevnik

Ljubljana, 2025

Kazalo

Kvaternioni in kvaternionske matrike

Povzetek

Kvaternioni so zaradi svoje posebne strukture in lastnosti uporabno orodje v kvantni fiziki, robotiki, sodobnem računalništvu ipd. Obseg kvaternionov je primer nekomutativnega obsega, zato nas študij kvaternionskih matrik pripelje do zanimivih zaključkov. Hitro ugotovimo, da zaradi nekomutativnosti marsikatera lastnost kvaternionskih matrik, ki se na prvi pogled zdi očitna, zahteva bolj poglobljen razmislek. V delu bomo obravnavali osnovne definicije in lastnosti kvaternionov in kvaternionskih matrik ter jih primerjali s kompleksnimi matrikami. Spoznali bomo alternativno definicijo kvaternionov in njeno uporabo pri študiju lastnosti matrik, dotaknili pa se bomo tudi študija lastnih vrednosti teh matrik.

Quaternions and matrices of quaternions

Abstract

Quaternions, due to their unique structure and properties, are a useful tool in quantum physics, robotics, modern computer science, and more. Quaternions are an example of a non-commutative division ring. This leads to interesting insights in the study of quaternionic matrices. A quick observation shows that, due to non-commutativity, many properties of quaternionic matrices that at first glance seem obvious actually require deeper consideration. In this work, we will examine the basic definitions and properties of quaternions and quaternionic matrices and compare them with complex matrices. We will explore an alternative definition of quaternions and its application in the study of matrix properties, and also touch upon the study of eigenvalues of these matrices.

Math. Subj. Class. (2020): 15B33, 20G20

Ključne besede: kvaternioni, kvaternionske matrike, lastne vrednosti, kompleksna adjungirana matrika

Keywords: quaternions, quaternionic matrices, eigenvalues, complex adjoint matrix

1 Uvod

Kvaternione je prvi opisal matematik William Rowan Hamilton leta 1843. Takrat so matematiki nanje gledali le kot na zanimivo algebraično strukturo, v zadnjih letih pa so kvaternioni postali nepogrešljivo orodje v vedno širšem naboru področij. Kot prvi so v začetku 19. stoletja njihovo strukturo začeli uporabljati kvantni fiziki, danes pa se kvaternione uporablja tudi v računalniški grafiki, robotiki in na področju računalnškega vida. Kvaternioni v smislu algebraične stukture so zanimivi, saj so primer nekomutativnega obsega s posebno ciklično strukturo.

O matrikah nad poljem znamo povedati marsikaj. Poznamo njihove lastne vrednosti, znamo izračunati njihove determinante, vemo, kdaj se jih da diagonalizirati itd. Ko želimo te lastnosti študirati na kvaternionskih matrikah, hitro naletimo na oviro, saj elementi matrik ne komutirajo. Začnemo se spraševati, ali imajo lastne vrednosti kvaternionskih matrik podobne lastnosti kot lastne vrednosti kompleksne matrike. A morda to velja le za desne lastne vrednosti? V tem diplomskem delu si bomo skušali odgovoriti na ta in mnoga druga vprašanja. Poskusili bomo ugotoviti, v katerih pogledih so si kompleksne in kvaternionske matrike podobne, in za katere lastnosti je komutativnost ključnega pomena. Prvi del diplomske naloge bomo posvetili osnovnim definicijam v obsegu kvaternionov in njihovim lastnostim. Sledil bo pregled definicij in lastnosti kvaternionskih matrik, kjer bomo spoznali definicijo in pomen kompleksne adjungirane matrike, zadnji del naloge pa bomo posvetili študiju lastnih vrednosti kvaternionskih matrik.

2 Kvaternioni

2.1 Osnovne definicije

Najprej si oglejmo nekaj osnovnih definicij.

Definicija 2.1. **Kvaternion** je vektor oblike

$$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \quad x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{R},$$

pri čemer velja

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \\ ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, \\ ki = -ik = j. \end{aligned}$$

Taki vektorji tvorijo štirirazsežen vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ z bazo $\{1, i, j, k\}$, ki ga imenujemo **kvaternioni** in ga označimo s $\mathbb{H}$.

Definicija 2.2. Naj bosta $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, $y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k \in \mathbb{H}$. V $\mathbb{H}$ defniriramo seštevanje in množenje na naslednji način:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)i + (x_2 + y_2)j + (x_3 + y_3)k \\ xy &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)i \\ &\quad + (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)j + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)k \end{aligned}$$

Definicija 2.3. Naj bo $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$. Število

$$x_0 = \operatorname{Re} x$$

imenujemo **realni del** x, število

$$x_1 + x_2 i = \operatorname{Co} x$$

imenujemo **kompleksni del** x, število

$$x_1 i + x_2 j + x_3 k = \operatorname{Im} x$$

pa imenujemo **imaginarni del** x. **Konjugiran** x definiramo kot

$$x^* = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k,$$

absolutno vrednost x pa definiramo kot

$$|x| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,.$$

2.2 Lastnosti kvaternionov

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj lastnosti kvaternionov.

Trditev 2.4. *V $\mathbb{H}$ veljajo naslednje izjave.*

i. *Naj bo $a \in \mathbb{H}$. Enačba $ax = xa$ velja za vsak $x \in \mathbb{H}$ natanko tedaj, ko je $a \in \mathbb{R}$.*

ii. *Za vsak $x \in \mathbb{H}$ velja $x^2 = (\operatorname{Re} x)^2 - |\operatorname{Im} x|^2 + 2 \operatorname{Re} x \operatorname{Im} x$.*

iii. *Za vsak $x \in \mathbb{H}$ velja $x^*x = xx^* = |x|^2$.*

iv. *Za vsaka $x, y \in \mathbb{H}$ velja $(xy)^* = y^*x^*$.*

v. *Enakost $x^* = x$ velja natanko tedaj, ko je $x \in \mathbb{R}$.*

vi. *Enačba $x^2 = -1$ ima neskončno mnogo rešitev v $\mathbb{H}$.*

vii. *Vsak kvaternion x lahko enolično zapišemo kot $x = c + dj$ za $c, d \in \mathbb{C}$.*

viii. *Za vsak $c \in \mathbb{C}$ velja $jc = \bar{c}j$.*

ix. *Za vsaka $x, y \in \mathbb{H}$ velja $|xy| = |x|\,|y|$.*

Dokaz. Naj bodo $x, y, z \in \mathbb{H}$.

i. Naj bo $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$, kjer $a_i \in \mathbb{R}$ za $i = 0, 1, 2, 3$, in naj za vsak $x \in \mathbb{H}$ velja $ax = xa$. Ker a komutira z i, velja $ai = ia$ oziroma

$$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)i = i(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k).$$

Obe strani razpišemo in dobimo

$$-a_1 + a_0 i + a_3 j - a_2 k = -a_1 + a_0 i - a_3 j + a_2 k.$$

Sledi $a_2 = a_3 = 0$. Sedaj upoštevamo, da a komutira z j, in dobimo

$$(a_0 + a_1 i)j = j(a_0 + a_1 i).$$

Iz tega podobno kot zgoraj sledi $a_1 = 0$. Dobimo $a = a_0$ oziroma $a \in \mathbb{R}$. Obratno, če je $a \in \mathbb{R}$, potem kot skalar komutira z vsakim $x \in \mathbb{H}$, torej $ax = xa$.

ii. Pišimo $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k = \operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x$. Oglejmo si

$$\begin{aligned} x^2 &= (\operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x) \\ &= (\operatorname{Re} x)^2 + (\operatorname{Re} x)(\operatorname{Im} x) + (\operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} x) + (\operatorname{Im} x)(\operatorname{Im} x) \end{aligned}$$

Po točki *i.* je to enako

$$x^2 = (\operatorname{Re} x)^2 + 2 \operatorname{Re} x \operatorname{Im} x + (\operatorname{Im} x)^2.$$

Sedaj izračunamo

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{Im} x)^2 &= (x_1 i + x_2 j + x_3 k)(x_1 i + x_2 j + x_3 k) \\
&= x_1 i^2 + x_1 x_2 ij + x_1 x_3 ik + x_1 x_2 ji + x_2 j^2 \\
&\quad + x_2 x_3 jk + x_1 x_3 ki + x_2 x_3 kj + x_3 k^2 \\
&= -x_1^2 - x_2^2 - x_2^2 \\
&= -|\operatorname{Im} x|^2.
\end{aligned}
$$

Pri tem smo upoštevali enakosti $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji$, $jk = -kj$, $ki = -ik$ in točko *i.* Sledi

$$x^2 = (\operatorname{Re} x)^2 + 2 \operatorname{Re} x \operatorname{Im} x - |\operatorname{Im} x|^2.$$

iii. Pišimo $x = \operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x$ in $x^* = \operatorname{Re} x - \operatorname{Im} x$. Ker je $\operatorname{Re} x \in \mathbb{R}$, po točki *i.* komutira z $\operatorname{Im} x$. Sledi

$$
\begin{aligned}
x^* x &= (\operatorname{Re} x - \operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x) \\
&= (\operatorname{Re} x)^2 + (\operatorname{Re} x)(\operatorname{Im} x) - (\operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} x) - (\operatorname{Im} x)^2 \\
&= (\operatorname{Re} x)^2 - (\operatorname{Re} x)(\operatorname{Im} x) + (\operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} x) - (\operatorname{Im} x)^2 \\
&= (\operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} x - \operatorname{Im} x) \\
&= x x^*.
\end{aligned}
$$

Sedaj upoštevamo še zvezo $(\operatorname{Im} x)^2 = -|\operatorname{Im} x|^2$ iz dokaza točke *ii.* in dobimo

$$
\begin{aligned}
x^* x &= (\operatorname{Re} x - \operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x) \\
&= (\operatorname{Re} x)^2 + \operatorname{Re} x \operatorname{Im} x - \operatorname{Re} x \operatorname{Im} x - (\operatorname{Im} x)^2 \\
&= (\operatorname{Re} x)^2 + |\operatorname{Im} x|^2 \\
&= |x|^2.
\end{aligned}
$$

iv. Naj bosta $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, $y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k \in \mathbb{H}$. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
(xy)^* &= \Big((x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k)\Big)^* \\
&= (x_0 y_0 + x_0 y_1 i + x_0 y_2 j + x_0 y_3 k + x_1 y_0 i - x_1 y_1 + x_1 y_2 k - x_1 y_3 j \\
&+ x_2 y_0 j - x_2 y_1 k - x_2 y_2 + x_2 y_3 i + x_3 y_0 k + x_3 y_1 j - x_3 y_2 i - x_3 y_3)^* \\
&= ((x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3) + (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2) i \\
&+ (x_0 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_0 + x_3 y_1) j + (x_0 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_0) k)^* \\
&= (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3) - (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2) i \\
&- (x_0 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_0 + x_3 y_1) j - (x_0 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_0) k \\
&= (y_0 - y_1 i - y_2 j - y_3 k)(x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k) \\
&= y^* x^*.
\end{aligned}$$

v. Pišimo $x = \operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x$ in $x^* = \operatorname{Re} x - \operatorname{Im} x$. Sledi

$$\begin{aligned}
x = x^* &\iff \operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x = \operatorname{Re} x - \operatorname{Im} x \\
&\iff \operatorname{Im} x = 0 \\
&\iff x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

vi. Naj bo $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Iščemo rešitve enačbe $x^2 = -1$. Ta enačba je po točki *iii.* ekvivalentna enačbi

$$(\operatorname{Re} x)^2 - |\operatorname{Im} x|^2 + 2 \operatorname{Re} x \operatorname{Im} x = -1.$$

Če primerjamo imaginarni del leve in desne strani enačbe, dobimo

$$\operatorname{Re} x \operatorname{Im} x = 0.$$

Če bi bil $\operatorname{Re} x$ neničeln, bi bil $\operatorname{Im} x = 0$, kar je v protislovju z začetno enačbo. Torej je $\operatorname{Re} x = 0$. Zgornja enačba se poenostavi v

$$|\operatorname{Im} x| = 1.$$

V množici rešitev enačbe so torej vsi kvaternioni $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, za katere je

$$\operatorname{Im} x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Ta enačba parametrizira enotsko sfero S^2 v $\mathbb{R}^3$, na kateri leži nešteto mnogo točk, torej ima začetna enačba res nešteto mnogo rešitev v $\mathbb{H}$.

vii. Naj bo $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Ker velja $k = ij$, lahko člen s k zapišemo kot $x_3(ij) = (x_3 i)j$. Tako dobimo

$$x = (x_0 + x_1 i) + (x_2 + x_3 i)j.$$

Tu sta $x_0 + x_1 i \in \mathbb{C}$ in $x_2 + x_3 i \in \mathbb{C}$, zato lahko definiramo kompleksni števili $c := x_0 + x_1 i$, $d := x_2 + x_3 i$ in pišemo $x = c + dj$. Pokazati moramo še, da je tak zapis enoličen. Če je $c + dj = \tilde{c} + \tilde{d}j$ še za neka $\tilde{c}$, $\tilde{d} \in \mathbb{C}$, potem je

$$(c - \tilde{c}) + (d - \tilde{d})j = 0.$$

Če pišemo $c - \tilde{c} = \operatorname{Re}(c - \tilde{c}) + \operatorname{Im}(c - \tilde{c})\, i$ in $d - \tilde{d} = \operatorname{Re}(d - \tilde{d}) + \operatorname{Im}(d - \tilde{d})\, i$ ter upoštevamo $ij = k$, iz zgornje enačbe dobimo

$$\operatorname{Re}(c - \tilde{c}) + \operatorname{Im}(c - \tilde{c})\, i + \operatorname{Re}(d - \tilde{d})\, j + \operatorname{Im}(d - \tilde{d})\, k = 0.$$

Sledi $\operatorname{Re}(c - \tilde{c}) = \operatorname{Im}(c - \tilde{c}) = \operatorname{Re}(d - \tilde{d}) = \operatorname{Im}(d - \tilde{d}) = 0$ oz. $c - \tilde{c} = d - \tilde{d} = 0$. Tako dobimo $c = \tilde{c}$ in $d = \tilde{d}$.

viii. Pišimo $c = a + bi \in \mathbb{C}$. Računamo

$$jc = j(a + bi) = ja + bji = aj - bk.$$

Po drugi strani

$$\bar{c}j = (a - bi)j = aj - bij = aj - bk.$$

ix. Velja $|xy| = \sqrt{(xy)^*(xy)}$. Po točki *iv.* velja $|xy| = \sqrt{y^* x^* x y}$, to pa je po točki *iii.* enako $\sqrt{y^* |x|^2 y} = |x|\sqrt{y^* y} = |x||y|$.

QED

Opremljeni s temi lastnostmi se lahko prepričamo, da kvaternioni zadoščajo lastnostim obsega, kot omenjeno v uvodu.

Trditev 2.5. *Množica* $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ *tvori obseg. Ničla v tem obsegu je enaka* $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$*, enota pa* $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$*.*

Dokaz. To, da $(\mathbb{H}, +)$ zadošča lastnostim Abelove grupe, je očitno. Prav tako je očiten obstoj enote za množenje. Oglejmo si dokaz asociativnosti množenja. Pokazati moramo, da za vse $x, y, z \in \mathbb{H}$ velja $(xy)z = x(yz)$. Pišimo $x = \operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x$, $y = \operatorname{Re} y + \operatorname{Im} y$, $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$. Najprej zmnožimo x in y:

$$\begin{aligned} xy &= (\operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} y + \operatorname{Im} y) \\ &= \operatorname{Re} x \operatorname{Re} y + \operatorname{Re} x \operatorname{Im} y + \operatorname{Im} x \operatorname{Re} y + \operatorname{Im} x \operatorname{Im} y \end{aligned}$$

Sedaj ta izraz pomnožimo z desne z z:

$$\begin{aligned}(xy)z &= (\operatorname{Re} x \operatorname{Re} y + \operatorname{Re} x \operatorname{Im} y + \operatorname{Im} x \operatorname{Re} y + \operatorname{Im} x \operatorname{Im} y)(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\\ &= \operatorname{Re} x \operatorname{Re} y \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} x \operatorname{Im} y \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} x \operatorname{Re} y \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} x \operatorname{Im} y \operatorname{Re} z\\ &\quad + \operatorname{Re} x \operatorname{Re} y \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} x \operatorname{Im} y \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} x \operatorname{Re} y \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} x \operatorname{Im} y \operatorname{Im} z\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da so $\operatorname{Re} x, \operatorname{Re} y, \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$, torej je po točki *i.* trditve 2.4 zgornji izraz enak

$$\begin{aligned}(xy)z &= \operatorname{Re} x \operatorname{Re} y \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} x \operatorname{Im} y \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} x \operatorname{Re} y \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} x \operatorname{Im} y \operatorname{Im} z\\ &\quad + \operatorname{Im} x \operatorname{Re} y \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} x \operatorname{Im} y \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} x \operatorname{Re} y \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} x \operatorname{Im} y \operatorname{Im} z\\ &= (\operatorname{Re} x + \operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} y \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} y \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} y \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} y \operatorname{Im} z)\\ &= x(yz).\end{aligned}$$

Sedaj pokažimo levo distributivnost. Če pokažemo, da velja $u(y+z) = uy + uz$ za $u \in \{i, j, k\}$, bo po definiciji množenja kvaternionov iz tega sledilo $x(y+z) = xy+xz$ za poljuben $x \in \mathbb{H}$. Naj bosta sedaj $y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$, $z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k$ iz $\mathbb{H}$. Oglejmo si

$$\begin{aligned}i(y+z) &= i((y_0+z_0) + (y_1+z_1)i + (y_2+z_2)j + (y_3+z_3)k)\\ &= (y_0+z_0)i - (y_1+z_1) + (y_2+z_2)k - (y_3+z_3)j\\ &= y_0 i + z_0 i - y_1 - z_1 + y_2 k + z_2 k - y_3 j - z_3 j\\ &= iy + iz.\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali definicijo seštevanja in množenja v $\mathbb{H}$, dejstvo, da i komutira z elementi iz $\mathbb{R}$, in pravila množenja za i, j, k. Na enak način pokažemo še $j(y+z) = jy + jz$ in $k(y+z) = ky + kz$. Podobno pokažemo tudi desno distributivnost.

Za konec dokaza pokažimo še, da je vsak neničeln kvaternion obrnljiv. Točka *iii.* trditve 2.4 pove, da velja $xx^* = x^*x = |x|^2 \geq 0$. Posebej, za $x \neq 0$ je $|x|^2 > 0$. Definiramo $x^{-1} := \frac{x^*}{|x|^2}$. Potem velja

$$xx^{-1} = x\,\frac{x^*}{|x|^2} = \frac{xx^*}{|x|^2} = \frac{|x|^2}{|x|^2} = 1.$$

Ker velja $x^*x = xx^*$, res dobimo $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. QED

Izkaže se, da obseg ni edina zanimiva algebraična struktura, ki jo tvorijo kvaternioni. Naslednja trditev pove, da lahko na kvaternione gledamo tudi kot na vektorski prostor.

Trditev 2.6. *Kvaternioni $\mathbb{H}$ so vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ z bazo $\{1, i, j, k\}$. Ta vektorski prostor je izomorfen prostoru $\mathbb{R}^4$.*

Dokaz. Da $\mathbb{H}$ zadošča zahtevam za vektorski prostor, ni težko videti. Definirajmo preslikavo $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^4$ s predpisom

$$\Phi(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = (x_0, x_1, x_2, x_3),$$

kjer so x_0, x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$. Inverz $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}$ te preslikave je enak

$$\Phi^{-1}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k.$$

Preveriti moramo, da za Φ velja

$$\Phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\Phi(x) + \mu\Phi(y)$$

za vse $x, y \in \mathbb{H}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Vzemimo poljubna $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ in $y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$ iz $\mathbb{H}$ ter poljubna skalarja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Sledi

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda x + \mu y) &= \Phi(\lambda(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) + \mu(y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k)) \\
&= \Phi(\lambda x_0 + \mu y_0 + (\lambda x_1 + \mu y_1)i + (\lambda x_2 + \mu y_2)j + (\lambda x_3 + \mu y_3)k) \\
&= (\lambda x_0 + \mu y_0, \lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\
&= \lambda(x_0, x_1, x_2, x_3) + \mu(y_0, y_1, y_2, y_3) \\
&= \lambda\Phi(x) + \mu\Phi(y).
\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da i, j, k komutirajo s skalarji iz $\mathbb{R}$. QED

Definicija 2.7. Kvaterniona x in y sta **podobna**, če obstaja $u \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, tako da velja

$$u^{-1} x u = y.$$

Pišemo $x \sim y$.

Trditev 2.8. *Relacija $\sim$ je ekvivalenčna relacija.*

Dokaz. Dokazati želimo, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija, torej da je refleksivna, simetrična in tranzitivna. Pokažimo najprej refleksivnost. Za vsak kvaternion $x \in \mathbb{H}$ velja $x = 1^{-1}\, x\, 1$, torej je $\sim$ refleksivna. Za dokaz simetričnosti moramo preveriti, ali iz $x \sim y$ sledi $y \sim x$. Recimo, da velja $x \sim y$. Obstaja torej $u \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, da je

$$u^{-1} x u = y.$$

Če to enačbo z leve pomnožimo z u in z desne z u^{-1}, dobimo

$$x = u y u^{-1} = v^{-1} y v$$

za $v := u^{-1}$, torej velja tudi $y \sim x$. Ostane nam dokazati še tranzitivnost. Naj bodo $x, z, y \in \mathbb{H}$ in recimo, da velja $x \sim y$ in $y \sim z$. To pomeni, da obstajata taka

$u, v \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, da velja $u^{-1}xu = y$ in $v^{-1}yv = z$. Sedaj lahko zapišemo

$$v^{-1}u^{-1}xuv = z.$$

Iz dokaza trditve 2.5 vemo, da je $x^{-1} = \dfrac{x^*}{|x|^2}$, zato po točki *iv.* in *ix.* trditve 2.4 sledi

$$(uv)^{-1}xuv = z.$$

Ker sta $u, v \neq 0$, sledi $uv \neq 0$ in res velja $x \sim z$, torej je $\sim$ tranzitivna relacija. QED

Opomba 2.9. Z $[x]$ označimo ekvivalenčni razred, ki pripada elementu x.

Lema 2.10. *Naj bo $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$. Označimo $\tilde{a} = a_0 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\, i$. Potem velja $a \sim \tilde{a}$, torej $a \in [\tilde{a}]$.*

Dokaz. Pokazati moramo, da obstaja $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, ki reši enačbo

$$ax = x\tilde{a}.$$

Če je $a \in \mathbb{R}$, zgornjo enačbo reši $x = 1$. Za $a \in \mathbb{C}$ ločimo dve možnosti. Če je $a_1 > 0$, velja $a = \tilde{a}$ in enačbo reši $x = 1$. Če pa je $a_1 < 0$, velja $\tilde{a} = \overline{a}$ in po točki *viii.* trditve 2.4 enačbo reši $x = j$. Denimo sedaj, da $a \notin \mathbb{C}$. Označimo $r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ in definiramo $x = a_1 + r - a_3 j + a_2 k$. Sledi

$$\begin{aligned}
ax &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(a_1 + r - a_3 j + a_2 k) \\
&= a_0\, a_1 + a_0\, r - a_0\, a_3\, j + a_0\, a_2\, k + a_1^2\, i + a_1\, r\, i - a_1\, a_3\, k - a_1\, a_2\, j \\
&\quad + a_1\, a_2\, j + a_2\, r\, j + a_2\, a_3 + a_2^2\, i + a_1\, a_3\, k + a_3\, r\, k + a_3^2\, i - a_2\, a_3 \\
&= r\,(a_1\, i + a_2\, j + a_3\, k) + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\, i + a_0\,(a_1 + r - a_3\, j + a_2\, k) \\
&= (a_1 + r - a_3 j + a_2 k)(a_0 + r\, i) \\
&= x\tilde{a}.
\end{aligned}$$

Iz $a \notin \mathbb{C}$ sledi $x \neq 0$, torej smo našli tak neničeln x, da velja $x^{-1}ax = \tilde{a}$. QED

Lema 2.11. *Kvaterniona x in y sta podobna natanko tedaj, ko velja $\operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y$ in $|\operatorname{Im} x| = |\operatorname{Im} y|$.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da za $x, y \in \mathbb{H}$ velja $\operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y$ in $|\operatorname{Im} x| = |\operatorname{Im} y|$. Po lemi 2.10 vemo, da velja $x \sim \operatorname{Re} x + |\operatorname{Im} x|\, i = \operatorname{Re} y + |\operatorname{Im} y|\, i \sim y$, torej sta x in y res podobna.

Pokažimo, da velja tudi obratno. Recimo, da sta kvaterniona x in y podobna. Po lemi 2.10 vemo, da velja $x \sim \operatorname{Re} x + |\operatorname{Im} x|\, i$ in $y \sim \operatorname{Re} y + |\operatorname{Im} y|\, i$. Ker je $\sim$ tranzitivna relacija, sledi $\operatorname{Re} x + |\operatorname{Im} x|\, i \sim \operatorname{Re} y + |\operatorname{Im} y|\, i$. Pokazati moramo, da sta dve kompleksni števili z nenegativnima imaginarnima deloma podobni natanko tedaj, ko sta enaki. Vzemimo poljuben $x = a + bi \in \mathbb{C}$, in poglejmo, katera kompleksna števila so v njegovem ekvivalenčnem razredu. Naj bo $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Po nekaj računanja dobimo

$$qxq^{-1} = qaq^{-1} + qbiq^{-1} = a + \frac{b}{|q|^2} qiq^*$$

$$= a + \frac{1}{|q|^2} b((q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)i + 2(q_0 q_3 + q_1 q_2)j + 2(q_1 q_3 - q_0 q_2)k).$$

Nas zanimajo $qxq^{-1} \in \mathbb{C}$, torej mora za q veljati

$$q_0 q_3 + q_1 q_2 = 0, \quad q_1 q_3 - q_0 q_2 = 0.$$

To je ekvivalentno enačbi $(q_1 + iq_0)(q_2 - iq_3) = 0$, torej mora veljati $q_2 = q_3 = 0$ ali $q_0 = q_1 = 0$. V obeh primerih sledi

$$qxq^{-1} = \frac{1}{|q|^2} (|q|^2 a + |q|^2 bi) = a + bi.$$

Iz tega pa dobimo, da je $\operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y$ in $|\operatorname{Im} x| = |\operatorname{Im} y|$. QED

Opomba 2.12. Iz leme 2.11 sledi, da za $x \notin \mathbb{R}$ ekvivalenčni razred $[x]$ vsebuje neskončno mnogo elementov, za $x \in \mathbb{R}$ pa je $[x] = x$.

Za konec tega poglavja si oglejmo še izrek in lemo, ki bosta ključna za dokazovanje nekaterih trditev v nadaljevanju.

Izrek 2.13. *Naj bodo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{H}$. Če α in γ nista podobna, ima enačba*

$$x\alpha - \gamma x = \beta$$

enolično rešitev v $\mathbb{H}$.

Dokaz. Naj bodo $\alpha, \beta, \gamma \in R$ in $\alpha \nsim \gamma$. Definiramo preslikavo $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ s predpisom

$$T(x) = x\alpha - \gamma x.$$

Sledi, da je naša enačba ekvivalentna enačbi $T(x) = b$. Pokazati hočemo, da je ta preslikava bijektivna. Vemo, da za linearne preslikave velja, da so bijektivne natanko tedaj, ko imajo trivialno jedro. Če torej pokažemo, da je T linearna preslikava, za katero velja $\ker T = \{0\}$, bomo s tem dokazali trditev.

Najprej se prepričajmo, da je T res linearna preslikava. Trditev 2.6 pove, da je $\mathbb{H}$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Sedaj pokažimo, da je T aditivna. Naj bosta $x, y \in \mathbb{H}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$. Velja

$$T(x + y) = (x + y)\alpha - \gamma(x + y)$$

$$= x\alpha + y\alpha - \gamma x - \gamma y$$

$$= T(x) + T(y),$$

torej je T aditivna. Sedaj preverimo še, če je T homogena. Oglejmo si

$$\begin{aligned} T(\lambda x) &= (\lambda x)\alpha - \gamma(\lambda x) \\ &= \lambda(x\alpha - \gamma x) \\ &= \lambda T(x). \end{aligned}$$

Sledi, da je preslikava T homogena, torej je res linearna. Sedaj si oglejmo jedro te preslikave. Recimo, da za nek $x \in \mathbb{H}$ velja $T(x) = 0$. Potem velja

$$x\alpha - \gamma x = 0$$

oziroma

$$x\alpha = \gamma x.$$

Torej je x v jedru natanko tedaj, ko je x rešitev enačbe $x\alpha = \gamma x$. Recimo sedaj, da obstaja tak $x \neq 0$, ki reši to enačbo. Potem lahko obe strani z desne pomnožimo z x^{-1} in dobimo

$$\alpha = x^{-1}\gamma x.$$

To pa pomeni, da sta α in γ podobna, kar je v nasprotju s predpostavko. Torej je $x = 0$ edina rešitev enačbe $x\alpha = \gamma x$, oziroma $\ker T = \{0\}$. Iz tega pa že sledi, da je T injektivna preslikava, torej ima enačba $x\alpha - \gamma x = \beta$ res enlično rešitev v $\mathbb{H}$. QED

Opomba 2.14. Zgornji izrek velja tudi za splošne obsege. Dokaz lahko najdete v **johnson**.

2.3 Alternativna definicija kvaternionov

Obseg $\mathbb{H}$ lahko definiramo tudi na naslednji način.

Definicija 2.15. Definiramo množico

$$\mathbb{H}' = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} ;\, a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

ki je podmnožica 2×2 kompleksnih matrik, pri čemer z $\overline{x}$ označujemo konjugirano kompleksno število.

Da sta definiciji ekvivalentni, se lahko prepričamo z vpeljavo preslikave

$$\mathscr{M} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}',$$

$$x = a + bj \longmapsto x' = \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Trditev 2.16. *Množica $\mathbb{H}'$ je obseg in preslikava $\mathscr{M}$ je izomorfizem obsegov $\mathbb{H}$ in $\mathbb{H}'$.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da je preslikava $\mathscr{M} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ izomorfizem. Najprej pokažemo, da ohranja seštevanje in množenje. Naj bosta $x = a + bj$ in $y = c + dj$ iz $\mathbb{H}$. Računamo

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(x+y) &= \mathscr{M}((a+c)+(b+d)j) \\
&= \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -\overline{(b+d)} & \overline{(a+c)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -\overline{d} & \overline{c} \end{bmatrix} \\
&= \mathscr{M}(a+bj) + \mathscr{M}(c+dj) \\
&= \mathscr{M}(x) + \mathscr{M}(y),
\end{aligned} \tag{1}$$

torej $\mathscr{M}$ ohranja seštevanje. Sedaj preverimo, če ohranja tudi množenje. Upoštevamo točko *viii.* trditve 2.4 in dobimo

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(xy) &= \mathscr{M}((ac - b\overline{d}) + (ad + b\overline{c})j) \\
&= \begin{bmatrix} ac - b\overline{d} & ad + b\overline{c} \\ -\overline{(ad + b\overline{c})} & \overline{(ac - b\overline{d})} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ac - b\overline{d} & ad + b\overline{c} \\ -\overline{a}\overline{d} - \overline{b}c & \overline{a}\overline{c} - \overline{b}d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ -\overline{d} & \overline{c} \end{bmatrix} \\
&= \mathscr{M}(a+bj)\mathscr{M}(c+dj) \\
&= \mathscr{M}(x)\mathscr{M}(y).
\end{aligned} \tag{2}$$

Pri tem smo upoštevali, da za kompleksni števili z, w velja $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$. Velja tudi

$$\mathscr{M}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

torej $\mathscr{M}$ ohranja enoto. Sedaj pokažimo še, da je $\mathscr{M}$ bijektivna. Definiramo preslikavo $\mathscr{N} : \mathbb{H}' \to \mathbb{H}$ s predpisom

$$\mathscr{N}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}\right) = a + bj.$$

Ta preslikava je dobro definirana in velja $\mathscr{N} \circ \mathscr{M} = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ and $\mathscr{M} \circ \mathscr{N} = \mathrm{id}_{\mathbb{H}'}$, torej je $\mathscr{M}$ bijektivna. Sledi, da je $\mathscr{M}$ izomorfizem $\mathbb{H} \cong \mathbb{H}'$.

Sedaj pokažimo še, da je $\mathbb{H}'$ obseg. Iz računov (1) in (2) je razvidno, da je množica $\mathbb{H}'$ zaprta za seštevanje in množenje. Poleg tega velja

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} = |a|^2 + |b|^2 \geq 0.$$

Ta izraz je enak 0 natanko takrat, ko je $a = b = 0$, torej ko je matrika enaka 0. Sledi, da je vsak neničeln element množice $\mathbb{H}'$ obrnljiv.

QED

3 Kvaternionske matrike

V prostoru matrik nad splošnim obsegom nimamo teorije podobnosti, lastnih vrednostih, trikotnih form ipd. Na polje lahko gledamo kot na „najbolj obsežno“ algebrsko strukturo, v kateri študiramo lastne vrednosti itd. V tem razdelku bomo poskusili lastnosti matrik posplošiti na primer, ko obseg, nad katerim študiramo matrike, ni komutativen.

3.1 Osnovne definicije

Najprej se spoznajmo z definicijo kvaternionske matrike.

Definicija 3.1. Naj bo $M_{m\times n}(\mathbb{H})$ množica $m \times n$ matrik z elementi iz obsega kvaternionov. Elementom te množice pravimo **kvaternionske matrike**.

Na tej množici poleg navadnega seštevanja in matričnega množenja definiramo še množenje s skalarjem na sledeč način.

Definicija 3.2. Naj bo $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{H})$ in $q \in \mathbb{H}$. **Levo množenje s skalarjem** definiramo kot

$$qA = \begin{bmatrix} qa_{ij} \end{bmatrix}.$$

Analogno definiramo **desno množenje s skalarjem** kot

$$Aq = \begin{bmatrix} a_{ij}q \end{bmatrix}.$$

Ker je množenje v $\mathbb{H}$ asociativno in veljata distributivnostna zakona, je množenje kvaternionskih matrik asociativno. Podobno, ker je 1 enota za množenje v $\mathbb{H}$, je

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

enota za množenje v $M_n(\mathbb{H})$. Enostavno je tudi videti, da za $A \in M_{m\times n}(\mathbb{H})$, $B \in M_{n\times o}(\mathbb{H})$ in $p, q \in \mathbb{H}$ velja

$$(qA)B = q(AB), \quad (Aq)B = A(qB), \quad (pq)A = p(qA).$$

Opazimo, da je $M_{m\times n}(\mathbb{H})$ levi oz. desni vektorski prostor nad $\mathbb{H}$, odvisno od definicije množenja s skalarjem. Na tem prostoru lahko izvajamo vse operacije kot na prostoru kompleksnih matrik, razen tistih, pri katerih je vključena komutativnost, npr.

$$(qA)B \neq A(qB)$$

v splošnem. Začnimo z nekaj osnovnimi definicijami, ki jih poznamo že iz kompleksnih matrik.

Definicija 3.3. Naj bo $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{m\times n}(\mathbb{H})$. **Konjugirano matriko** matrike A definiramo kot

$$\overline{A} = \left[a_{ij}^*\right],$$

transponirano matriko matrike A kot

$$A^T = \left[a_{ji}\right]$$

in **adjungirano matriko** matrike A kot

$$A^H = (\overline{A})^T.$$

Definicija 3.4. Naj bo $A = \left[a_{ij}\right] \in M_n(\mathbb{H})$ kvadratna matrika. Če za A velja

$$AA^H = A^H A,$$

pravimo, da je A **normalna matrika**. Če zanjo velja

$$A^H = A,$$

pravimo, da je **hermitska matrika**. Če je

$$A^H A = I,$$

je A **unitarna matrika**. Če obstaja tak $B \in M_n(\mathbb{H})$, da velja

$$AB = BA = I,$$

pravimo, da je matrika A **obrnljiva**.

3.2 Lastnosti kvaternionskih matrik

Sedaj si oglejmo nekaj lastnosti kvaternionskih matrik.

Trditev 3.5. *Naj bo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{H})$ in $B \in M_{n\times p}(\mathbb{H})$. Veljajo naslednje izjave.*

i. $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$.

ii. $(AB)^H = B^H A^H$.

iii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, *če sta* A *in* B *obrnljivi.*

iv. $(\overline{A})^{-1} \neq \overline{A^{-1}}$ *v splošnem.*

v. $\left(A^T\right)^{-1} \neq \left(A^{-1}\right)^T$ *v splošnem.*

Dokaz. Naj bosta $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{m\times n}(\mathbb{H}), B = \left[b_{jk}\right] \in M_{n\times o}(\mathbb{H})$.

i. Računamo

$$(\overline{A})^T = \left[a_{ij}^*\right]^T = \left[a_{ji}{}^*\right] = \overline{\left[a_{ji}\right]} = \overline{(A^T)}.$$

ii. Upoštevamo točko *iv.* trditve 2.4 in dobimo

$$(AB)^H = \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}^* a_{ji}^*\right] = B^H A^H.$$

iii. Pokazati moramo, da obstaja matrika $C \in M_p(\mathbb{H})$, da velja

$$ABC = CAB = I,$$

in da je $C = B^{-1}A^{-1}$. Upoštevamo, da je I enota za množenje, in dobimo

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Tudi po drugi strani

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BIB^{-1} = BB^{-1} = I.$$

iv. Vzemimo matriko $A = \begin{bmatrix} i & k \\ 0 & j \end{bmatrix}$ z inverzom $A^{-1} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$, in recimo, da zanjo velja $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$. Potem je

$$I = \overline{A}(\overline{A})^{-1} = \overline{A}\,\overline{A^{-1}} = \begin{bmatrix} -i & -k \\ 0 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kar je protislovje.

v. Naredimo analog dokaza točke *iv.*

QED

3.3 Kompleksna adjungirana matrika

Pri študiju kvaternionskih matrik se moramo ustaviti že pri zelo osnovnem vprašanju: Če poznamo desni inverz neke matrike, je to tudi njen levi inverz? Natančneje, ali za kvaternionski matriki A, B, za kateri velja $AB = I$, velja $BA = I$? Izkaže se, da odgovor na to vprašanje ni tako trivialen, kot bi sprva pričakovali. V pomoč pri reševanju tega problema nam je ideja, da kvaternionsko matriko identificiramo s parom kompleksnih matrik. Ta princip je opisan v spodnji definiciji, pred tem pa potrebujemo naslednjo lemo.

Lema 3.6. *Vsako kvaternionsko matriko $A \in M_{m\times n}(\mathbb{H})$ se da enolično zapisati kot*

$$A = A_1 + A_2 j,$$

kjer sta $A_1, A_2 \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Dokaz. Naj bo $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{H})$. Po točki *vii.* trditve 2.4 vemo, da lahko $a_{ij} \in \mathbb{H}$ enolično zapišemo kot

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} j, \quad b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Sledi, da je

$$\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{ij} + c_{ij} j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix} j = A_1 + A_2 j,$$

kjer $A_1, A_2 \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Pokažimo še, da je tak zapis enoličen. Recimo, da obstajata še taki $\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{ij} \end{bmatrix}$, $\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{ij} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, da velja $A = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 j$. Potem bi lahko vsak element A zapisali kot

$$a_{ij} = \tilde{b}_{ij} + \tilde{c}_{ij} j.$$

Ker je tak zapis enoličen, sledi $\tilde{b}_{ij} = b_{ij}$, $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$ za vse elemente a_{ij} matrike A, torej je $\tilde{A}_1 = A_1$ in $\tilde{A}_2 = A_2$. QED

Definicija 3.7. Za matriko $A = A_1 + A_2 j \in M_n(\mathbb{H})$, kjer sta $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$, je $2n \times 2n$ matrika

$$\chi_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix}$$

kompleksna adjungirana matrika matrike A.

Opomba 3.8. Če je A kompleksna matrika, je $A = A_1$, torej je njena adjungiranka enaka

$$\chi_A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix}.$$

Zgled 3.9. Oglejmo si matriko $P = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, kjer je $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k = (x_0 + x_1 i) + (x_2 + x_3 i) j$. Potem je

$$\chi_P = \begin{bmatrix} 1 & x_0 + x_1 i & 0 & x_2 + x_3 i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 + x_3 i & 1 & x_0 - x_1 i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Zgornja definicija zelo spominja na alternativno definicijo kvaternionov, pri kateri kvaternion identificiramo z 2×2 kompleksno matriko. Izkaže se, da nas ta ideja vodi do odgovora na vprašanje o levem in desnem inverzu. Naslednji izrek potrdi domnevo, da je sta v $M_n(\mathbb{H})$ levi in desni inverz matrike enaka.

Izrek 3.10. *Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{H})$. Če velja $AB = I$, potem je $BA = I$.*

Dokaz. Vemo, da trditev velja za kompleksne matrike. Zapišemo $A = A_1 + A_2 j$ in $B = B_1 + B_2 j$, kjer so A_1, A_2, B_1, $B_2 \in M_n(\mathbb{C})$. Enakost $AB = I$ lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} I &= (A_1 + A_2 j)(B_1 + B_2 j) \\ &= A_1 B_1 + A_1 B_2 j + A_2 j B_1 + A_2 j B_2 j \\ &= (A_1 B_1 - A_2 \overline{B_2}) + (A_1 B_2 + A_2 \overline{B_1}) j. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali zvezo $j^2 = -1$ in točko *viii.* trditve 2.4. Sledi

$$A_1\, B_1 - A_2\, \overline{B_2} = I, \quad A_1\, B_2 + A_2\, \overline{B_1} = 0.$$

To lahko v matrični obliki zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\chi_A \chi_B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\overline{A_2}\, B_1 - \overline{A_1}\, \overline{B_2} & -\overline{A_2}\, B_2 + \overline{A_1}\, \overline{B_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Ker sta χ_A, χ_B kompleksni matriki, velja

$$\chi_B \chi_A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Dobimo

$$B_1\, A_1 - B_2\, \overline{A_2} = I, \quad B_1\, A_2 + B_2\, \overline{A_1} = 0,$$

oziroma

$$\begin{aligned} I &= (B_1 A_1 - B_2 \overline{A_2}) + (B_1 A_2 + B_2 \overline{A_1}) j \\ &= (B_1 + B_2 j)(A_1 + A_2 j). \end{aligned}$$

Torej res velja $BA = I$.

QED

Trditev 3.11. *Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{H})$. Označimo z I_n identiteto na prostoru $n \times n$ kvaternionskih matrik. Veljajo naslednje izjave.*

i. $\chi_{I_n} = I_{2n}$.

ii. $\chi_{AB} = \chi_A \chi_B$.

iii. $\chi_{A+B} = \chi_A + \chi_B$.

iv. $\chi_{A^{-1}} = (\chi_A)^{-1}$, *če je* A *obrnljiva.*

v. $\chi_{A^H} = (\chi_A)^H$.

vi. χ_A *je hermitska natanko tedaj, ko je* A *hermitska.*

vii. χ_A *je unitarna natanko tedaj, ko je* A *unitarna.*

viii. χ_A *je normalna natanko tedaj, ko je* A *normalna.*

Dokaz. Naj bosta $A = A_1 + A_2 j, B = B_1 + B_2 j \in M_n(\mathbb{H})$, kjer so $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{C})$.

i. Najprej zapišimo matriko I_n kot $I_n = I_n + 0_n j$, pri čemer je 0_n $n \times n$ ničelna matrika. Sedaj lahko izračunamo

$$\chi_{I_n} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ -\overline{0_n} & \overline{I_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}.$$

ii. Po lemi 3.6 lahko matriko AB zapišemo kot

$$\begin{aligned} AB &= (A_1 + A_2 j)(B_1 + B_2 j) \\ &= (A_1 B_1 - A_2 \overline{B_2}) + (A_1 B_2 + A_2 \overline{B_1}) j. \end{aligned}$$

Sedaj računamo

$$\begin{aligned} \chi_{AB} &= \begin{bmatrix} A_1 B_1 - A_2 \overline{B_2} & A_1 B_2 + A_2 \overline{B_1} \\ -\overline{(A_1 B_2 + A_2 \overline{B_1})} & \overline{A_1 B_1 - A_2 \overline{B_2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 B_1 - A_2 \overline{B_2} & A_1 B_2 + A_2 \overline{B_1} \\ -\overline{A_1 B_2} - \overline{A_2} B_1 & \overline{A_1 B_1} - \overline{A_2} B_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{bmatrix} \\ &= \chi_A \chi_B. \end{aligned}$$

iii. Podobno kot zgoraj zapišimo matriko $A + B$ kot

$$\begin{aligned} A + B &= (A_1 + A_2 j) + (B_1 + B_2 j) \\ &= (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) j. \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\chi_{A+B} &= \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ -\overline{(A_2 + B_2)} & \overline{A_1 + B_1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ -\overline{A_2} - \overline{B_2} & \overline{A_1} + \overline{B_1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{bmatrix} \\
&= \chi_A + \chi_B .
\end{aligned}$$

iv. Naj bo A obrnljiva. Ker velja

$$A\,A^{-1} = I_n \quad \text{in} \quad A^{-1}A = I_n,$$

uporabimo točki *i.* in *ii.* ter dobimo

$$\chi_A\,\chi_{A^{-1}} = \chi_{AA^{-1}} = \chi_{I_n} = I_{2n},$$

in

$$\chi_{A^{-1}}\,\chi_A = \chi_{A^{-1}A} = \chi_{I_n} = I_{2n}.$$

Torej je $\chi_{A^{-1}}$ hkrati levi in desni inverz matrike χ_A, zato

$$\chi_{A^{-1}} = (\chi_A)^{-1}.$$

v. Najprej izračunajmo

$$A^H = (A_1 + A_2 j)^H = (A_1)^H + (A_2 j)^H.$$

Sedaj upoštevamo točko *iv.* trditve 2.4, da dobimo

$$\begin{aligned}
A^H &= A_1^H + j^* A_2^H \\
&= A_1^H - j A_2^H \\
&= A_1^H - A_2^T j.
\end{aligned}$$

Zadnja enakost velja po točki *viii.* trditve 2.4. Sedaj lahko zapišemo

$$\chi_{A^H} = \begin{bmatrix} A_1^H & -A_2^T \\ \overline{A_2^T} & \overline{A_1^H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^H & -\overline{A_2}^H \\ A_2^H & \overline{A_1}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix}^H = (\chi_A)^H.$$

vi. Recimo, da je A hermitska, torej je $A = A^H$. Potem po točki *v.* velja

$$\chi_A = \chi_{A^H} = \chi_A^H,$$

torej je tudi χ_A hermitska. Še obratno, naj bo χ_A hermitska, torej $\chi_A = \chi_A^H$. To je po točki *v.* enako

$$\chi_A = \chi_{A^H}.$$

Sledi $A^H = A$, torej je A hermitska.

vii. Analog dokaza točke *vi*, uporabimo točki *ii.* in *v.*

viii. Analog dokaza točke *vi*, uporabimo točko *v.*

QED

4 Lastne vrednosti kvaternionskih matrik

V tem razdelku se bomo posvetili lastnim vrednostim kvaternionskih matrik. Ker je množenje kvaternionskih matrik nekomutativno, moramo enačbi $Ax = \lambda x$ in $Ax = x\lambda$ obravnavati ločeno.

Definicija 4.1. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{H})$ in $\lambda \in \mathbb{H}$. Če za nek $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ velja

$$Ax = \lambda x,$$

pravimo, da je λ **leva lastna vrednost** matrike A. Če za nek $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ velja

$$Ax = x\lambda,$$

pravimo, da je λ **desna lastna vrednost** matrike A. Množico

$$\sigma_\ell(A) = \{\lambda \in \mathbb{H} \mid \exists\, x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\} : Ax = \lambda x\}$$

imenujemo **levi spekter** matrike A, množico

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{H} \mid \exists\, x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\} : Ax = x\lambda\}$$

pa imenujemo **desni spekter** matrike A.

Zgled 4.2. i. Za matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ velja $\sigma_\ell(A) = \{1, i\}$ in $\sigma_r(A) = \{1\} \cup [i]$.

Preverimo, da so to res leve lastne vrednosti za A. Naj bo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^2$. Oglejmo si

$$Ax = \begin{bmatrix} x_1 \\ ix_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda x = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix},$$

torej velja

$$x_1 = \lambda x_1, \quad ix_2 = \lambda x_2.$$

Zanima nas, za katere $\lambda \in \mathbb{H}$ obstaja $x \in \mathbb{H}^2 \setminus \{0\}$, da sta ti dve enačbi izpolnjeni. Iz prve enačbe dobimo $\lambda = 1$, iz druge pa $\lambda = i$. Sedaj preverimo še desne lastne vrednosti za A. Za $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^2$ velja

$$Ax = \begin{bmatrix} x_1 \\ ix_2 \end{bmatrix}, \quad x\lambda = \begin{bmatrix} x_1\lambda \\ x_2\lambda \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$x_1 = x_1\lambda, \quad ix_2 = x_2\lambda.$$

Spet iščemo take $\lambda \in \mathbb{H}$, za katere obstaja $x \in \mathbb{H}^2 \setminus \{0\}$, da sta ti dve enačbi izpolnjeni. Iz prve enačbe dobimo $\lambda = 1$. Če predpostavimo $x_2 \neq 0$, pa dobimo $\lambda = x_2^{-1} i x_2$. Desne lastne vrednosti matrike A so torej 1 in $[i]$.

ii. Matrika $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ j & 0 \end{bmatrix}$ ima lastne vrednosti $\sigma_\ell(A) = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j), -\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)\}$ in $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{H} : \lambda^4 + 1 = 0\}$. Preverimo najprej, da so to res leve lastne vrednosti za A. Naj bo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^2$. Izračunamo

$$Ax = \begin{bmatrix} ix_2 \\ jx_1 \end{bmatrix}, \quad \lambda x = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$ix_2 = \lambda x_1, \quad jx_1 = \lambda x_2.$$

Prvi izraz zapišemo kot $x_2 = -i\lambda x_1$ in ga vstavimo v drugega:

$$jx_1 = \lambda x_2 = \lambda(-i\lambda x_1) = -\lambda i \lambda x_1.$$

Zanima nas, za katere λ obstaja $x \neq 0$, da zgornji izraz velja. Tako dobimo pogoj

$$j = -\lambda i \lambda. \tag{1}$$

To enačbo moramo rešiti za $\lambda \in \mathbb{H}$. Enačbo (1) z desne pomnožimo z i, da dobimo

$$0 = 2ab,$$

$$0 = -a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

$$1 = 2bc,$$

$$0 = 2bd.$$

Rešitev tega sistema je $a = d = 0$, $b = c = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, torej sta iskani lastni vrednosti enaki $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$. Poiščimo še desne lastne vrednosti za A. Naj bo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^2$. Izračunamo

$$Ax = \begin{bmatrix} ix_2 \\ jx_1 \end{bmatrix}, \quad x\lambda = \begin{bmatrix} x_1\lambda \\ x_2\lambda \end{bmatrix}$$

in dobimo

$$ix_2 = x_1\lambda, \quad jx_1 = x_2\lambda.$$

Prvi izraz lahko zapišemo kot $x_2 = i^{-1}x_1\lambda = -ix_1\lambda$ in ga vstavimo v drugi izraz, da dobimo

$$jx_1 = x_2\lambda = (-ix_1\lambda)\lambda = -ix_1\lambda^2.$$

Če predpostavimo $x_1 \neq 0$, to lahko zapišemo kot

$$\lambda^2 = x_1^{-1}k\,x_1.$$

Velja torej $\lambda^2 \sim k$. Sledi

$$\lambda^4 = \left(x_1^{-1}kx_1\right)^2 = x_1^{-1}k^2x_1 = x_1^{-1}(-1)x_1 = -1.$$

S tem smo pokazali, da vsaka desna lastna vrednost λ matrike A zadošča pogoju $\lambda^4+1 = 0$. Če pokažemo še, da je vsak $\lambda \in \mathbb{H}$, ki reši enačbo $\lambda^4+1 = 0$, desna lastna vrednost za A, smo s tem dobili vse desne lastne vrednosti matrike A. Denimo sedaj, da je $\lambda \in \mathbb{H}$ tak, da velja $\lambda^4 + 1 = 0$. Pišimo $u := \lambda^2$. Potem je $u^2 = -1$, torej je u enotski strogo imaginarni kvaternion, tj. element oblike

$$u = bi + cj + dk, \quad \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = 1.$$

Po lemi 2.11 vemo, da so kvaternioni tega tipa podobni, torej del istega ekvivalenčnega razreda. Posebej to pomeni, da obstaja tak $x_1 \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, da velja

$$x_1^{-1}kx_1 = u.$$

Sedaj definiramo $x_2 := -ix_1\lambda$. Sledi

$$ix_2 = i(-ix_1\lambda) = x_1\lambda$$

in z upoštevanjem $u = x_1^{-1}kx_1$ dobimo

$$x_2\lambda = -ix_1\lambda^2 = -ix_1u = -ix_1(x_1^{-1}kx_1) = -ikx_1 = jx_1.$$

Iz tega pa sledi, da je $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$ lastni vektor za λ. Torej je vsak λ, za katerega velja $\lambda^4 + 1 = 0$, desna lastna vrednost za A.

iii. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$. Potem je $\lambda = k$ leva lastna vrednost matrike A z lastnim vektorjem $x = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$. Velja namreč

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -i \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \lambda x.$$

Recimo, da je k tudi desna lastna vrednost matrike A. Potem obstaja tak $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$, da velja $Ax = xk$ oziroma

$$ix_2 = x_1 k, \quad -ix_1 = x_2 k.$$

Iz tega sledi

$$-i(-ix_2 k) = -x_2 k = x_2 k,$$

zato $x_2 = x_1 = 0$, kar je v protislovju s predpostavko. Velja torej, da je k leva lastna vrednost matrike A, ne pa tudi desna.

$\diamondsuit$

Iz zgornjega zgleda vidimo, da iskanje levih in desnih lastnih vrednosti ni trivialna naloga. V splošnem nimamo povezave med levimi in desnimi lastnimi vrednostmi, opazimo pa zanimivo lastnost desnih lastnih vrednosti.

Lema 4.3. *Naj bo $\lambda \in \mathbb{H}$ desna lastna vrednost matrike A. Potem so tudi vsi elementi v $[\lambda]$ desne lastne vrednosti za A.*

Dokaz. Če velja $Ax = x\lambda$, sledi

$$A(xq) = (Ax)q = x\lambda q = (xq)(q^{-1}\lambda q)$$

za vsak $q \neq 0$, torej je tudi $q^{-1}\lambda q$ desna lastna vrednost. QED

Trditev 4.4. *Če je $A \in M_n(\mathbb{R})$ realna matrika, potem leve in desne lastne vrednosti A sovpadajo, tj.*

$$\sigma_\ell(A) = \sigma_r(A).$$

Dokaz. Naj bo λ leva lastna vrednost A, torej $Ax = \lambda x$ za nek $x \neq 0$. Za vsak $q \in \mathbb{H}$, $q \neq 0$, velja

$$(qAq^{-1})qx = (q\lambda q^{-1})qx$$

in

$$Aqx = (q\lambda q^{-1})qx,$$

saj je A realna matrika. Po lemi 2.10 vemo, da obstaja $q \in \mathbb{H}$ tak, da je $q\lambda q^{-1}$ kompleksno število. Pišimo $qx = y = y_1 + y_2 j,\ y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n$. Sledi

$$Aqx = A(y_1 + y_2 j) = Ay_1 + Ay_2 j.$$

To lahko dalje pišemo kot

$$(q\lambda q^{-1})(y_1 + y_2 j) = \underbrace{(q\lambda q^{-1})}_{\in\mathbb{C}} \underbrace{y_1}_{\in\mathbb{C}} + \underbrace{(q\lambda q^{-1})}_{\in\mathbb{C}} \underbrace{y_2}_{\in\mathbb{C}} j,$$

torej je $Ay_1 = y_1(q\lambda q^{-1})$ in $Ay_2 = y_2(q\lambda q^{-1})$. Iz tega sledi, da je $q\lambda q^{-1}$ desna lastna vrednost matrike A, po lemi 4.3 pa velja, da je tudi λ desna lastna vrednost A. Na podoben način pokažemo tudi, da je vsaka desna lastna vrednost matrike A hkrati tudi njena leva lastna vrednost. QED

Iz leme 4.3 in opombe 2.12 sledi, da ima kvaternionska matrika A končno mnogo desnih lastnih vrednosti natanko tedaj, ko so vse njene desne lastne vrednosti realne. Naslednja lema opisuje odnos med lastnimi vrednostmi kvaternionske matrike in njene kompleksne adjungiranke.

Lema 4.5. *Naj bo $\lambda \in \mathbb{H}$ desna lastna vrednost matrike $A \in M_n(\mathbb{H})$. Potem sta $\mu = \operatorname{Re}\lambda \pm |\operatorname{Im}\lambda|$ i lastni vrednosti matrike χ_A.*

Dokaz. Naj bosta $A \in M_n(\mathbb{H})$ in $x \in \mathbb{H}^n$. Pišimo $A = A_1 + A_2 j$ in $x = x_1 + x_2 j$, kjer so $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$, $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n$. Naj bo $\lambda \in \mathbb{H}$ desna lastna vrednost za A z lastnim vektorjem x. Iz leme 4.3 vemo, da so potem tudi vsi elementi iz $[\lambda]$ desne lastne vrednosti za A. Naj bo μ kompleksno število iz $[\lambda]$. Enačbo $Ax = x\mu$ lahko zapišemo kot

$$(A_1 + A_2 j)(x_1 + x_2 j) = (x_1 + x_2 j)\mu,$$

kar je enako

$$A_1 x_1 + A_1 x_2 j + A_2 j x_1 + A_2 j x_2 j = x_1\mu + x_2 j\mu.$$

Sedaj upoštevamo zvezo $j^2 = -1$ in točko *viii.* trditve 2.4, da dobimo

$$(A_1 x_1 - A_2\overline{x_2}) + (A_1 x_2 + A_2\overline{x_1})j = x_1\mu + x_2\overline{\mu}j.$$

Tako dobimo zvezi

$$A_1 x_1 - A_2\overline{x_2} = x_1\mu, \quad A_1 x_2 + A_2\overline{x_1} = x_2\overline{\mu}.$$

Naj bo sedaj $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\overline{x_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Računamo

$$\chi_A\, v = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ -\overline{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 x_1 - A_2\overline{x_2} \\ -\overline{A_2}x_1 - \overline{A_1}\overline{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 x_1 - A_2\overline{x_2} \\ -\overline{(A_1 x_2 + A_2\overline{x_1})} \end{bmatrix}.$$

Sedaj upoštevamo zgornji zvezi in dobimo

$$\chi_A\, v = \begin{bmatrix} x_1\mu \\ -\overline{(x_2\overline{\mu})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\overline{x_2} \end{bmatrix} \mu = \mu\, v,$$

torej je μ lastna vrednost za χ_A. Dejstvo, da je $\mu = \text{Re}\,\lambda \pm |\text{Im}\,\lambda|\,i$, sledi iz leme 2.11. QED

Opomba 4.6. Iz zgornjega dokaza vidimo, da velja še več: če je λ lastna vrednost za χ_A, potem je λ tudi desna lastna vrednost za A.

Izrek 4.7. *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{H})$. Obstaja taka unitarna matrika $U \in M_n(\mathbb{H})$, da je matrika $U^H AU$ zgornje trikotna, tj. vsi elementi pod diagonalo so enaki 0.*

Za dokaz tega izreka bomo potrebovali naslednji lemi.

Lema 4.8. *Naj bo $A \in M_{m\times n}(\mathbb{H})$, $m < n$. Potem ima enačba $Ax = 0$ neničelno rešitev.*

Dokaz. Pišimo $A = A_1 + A_2 j$ in $x = x_1 + x_2 j$, kjer so $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$, $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n$. Enačbo $Ax = 0$ zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ -\overline{x_2} \end{bmatrix} = 0.$$

Ker je $2m < 2n$, ima ta enačba neničelno rešitev. QED

Lema 4.9. *Naj bo $u_1 \in \mathbb{H}^n$ enotski vektor. Obstajajo enotski vektorji $u_2, \dots, u_n \in \mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, da je*

$$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

ortonormirana množica, tj. velja

$$u_i^* u_j = \begin{cases} 1\,; & i = j \\ 0\,; & i \neq j \end{cases}$$

za vse $i, j = 1, \dots, n$.

Dokaz. Naj bo $u_1 \in \mathbb{H}^n$ enotski vektor. Želimo najti enotski vektor $u_2 \in \mathbb{H}^n$, ki je pravokoten na u_1. Recimo, da je $A = u_i^*$ kvaternionska matrika velikosti $1 \times n$. Iščemo $x \neq 0$, da bo

$$Ax = u_i^* x = 0.$$

Ker je A velikosti $1 \times n$ in velja $1 < n$, po lemi 4.8 obstaja $x \neq 0$, ki reši to enačbo. Ta x normiramo in dobimo u_2. Trditev torej velja za $n = 2$. Denimo sedaj, da imamo ortonormirano množico $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, $k < n$. Sestavimo matriko A, ki naj ima za vrstice vektorje $u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*$. Ta matrika je velikosti $k \times n$. Spet iščemo tak $x \in \mathbb{H}^n$, za katerega bo veljalo

$$Ax = 0$$

oziroma

$$u_1^* x = 0,\ u_2^* x = 0,\ \dots,\ u_k^* x = 0.$$

Ker velja $k < n$, po lemi 4.8 tak $x \neq 0$ obstaja. To rešitev normiramo in dobimo u_{k+1}. Postopek ponavljamo, dokler ne dobimo vseh n elementov ortonormirane množice. QED

Sedaj se lahko lotimo dokaza izreka 4.7.

Dokaz. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{H})$. Dokaz poteka z indukcijo na n. Za $n = 1$ trditev očitno velja. Denimo sedaj, da trditev velja za matrike velikosti $(n-1) \times (n-1)$. Naj bo u_1 lastni vektor matrike A, $\|u_1\| = 1$, za desno lastno vrednost λ_1. Pri tem z $\|\cdot\|$ označujemo evklidsko normo kvaternionskega vektorja. Lema 4.9 zagotavlja, da obstajajo enotski vektorji $u_2, \ldots, u_n$, da je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ortonormirana množica. Definiramo unitarno matriko U_n kot

$$U_n = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Oglejmo si

$$A\,U_n = \begin{bmatrix} A\,u_1 & A\,U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1\lambda_1 & A\,U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Enačbo sedaj pomnožimo z leve z U_n^H in dobimo

$$U_n^H\,A\,U_n = \begin{bmatrix} u_1^* \\ U_{n-1}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1\lambda_1 & A\,U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & u_1^*\,A\,U_{n-1} \\ \vdots & U_{n-1}^H\,A\,U_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times \cdots \times \\ \vdots & A_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Po indukcijski predpostavki obstaja $\widetilde{U}_{n-1} \in M_{n-1}(\mathbb{H})$ unitarna, da je matrika

$$T := \widetilde{U}_{n-1}^H\,A_{n-1}\,\widetilde{U}_{n-1}$$

zgornje trikotna. Če sedaj definiramo

$$U = U_n \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \tilde{U}_{n-1} & \\ 0 & & \end{bmatrix},$$

sledi

$$U^H\,A\,U = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \widetilde{U}_{n-1}^H & \\ 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times \cdots \times \\ \vdots & A_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \widetilde{U}_{n-1} & \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times \cdots \times \\ \vdots & T \\ 0 & \end{bmatrix},$$

torej res velja, da je matrika $U^H A U$ zgornje trikotna. QED

Naslednji izrek opisuje zanimivo lastnost kompleksnih lastnih vrednosti kvaternionske matrike.

Trditev 4.10. *Vsaka matrika $A \in M_n(\mathbb{H})$ ima natanko n desnih lastnih vrednosti* *oblike*

$$\mu = a + bi,\ b \geq 0.$$

Dokaz. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{H})$. Recimo, da je $\lambda \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ desna lastna vrednost za A. Če upoštevamo lemi 4.3 in 2.11, sledi, da sta potem tudi $\mu = \operatorname{Re}\lambda + |\operatorname{Im}\lambda|\, i$, $\overline{\mu} = \operatorname{Re}\lambda - |\operatorname{Im}\lambda|\, i \in \mathbb{C}$ desni lastni vrednosti za A. Za vsako desno lastno vrednost matrike A, ki ni iz $\mathbb{R}$, dobimo torej konjugiran par kompleksnih števil, ki je tudi v desnem spektru matrike A. Hkrati pa po lemi 4.5 vemo, da so ti pari tudi lastne vrednosti za χ_A. Ostane nam pokazati še, da imajo realne lastne vrednosti matrike χ_A sodo kratnost.

To pokažemo z indukcijo na n. Za $n = 1$ trditev velja. Naj bo $n \geq 2$ in naj indukcijska predpostavka velja za matrike velikosti $2(n-1) \times 2(n-1)$. Pokazati hočemo, da predpostavka velja za matrike velikosti $2n \times 2n$. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ lastna vrednost za A, torej $Ax = ax = xa$ za nek enotski vektor $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$. Po lemi 4.9 vemo, da obstajajo $u_2, \ldots, u_n$, da je

$$U = \begin{bmatrix} x & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

unitarna matrika. Označimo

$$U^H A U = \begin{bmatrix} a & \alpha^T \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

pri čemer je $B = B_1 + B_2 j \in M_{n-1}(\mathbb{H})$ in $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 j \in \mathbb{H}^{n-1}$. Oglejmo si matriko

$$\chi_{(U^H A U)} = \begin{bmatrix} a & \alpha_1^T & 0 & \alpha_2^T \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 \\ 0 & -\overline{\alpha_2}^T & a & \overline{\alpha_1}^T \\ 0 & -\overline{B_2} & 0 & \overline{B_1} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Hkrati po točkah *ii.* in *v.* trditve 3.11 velja $\chi_{(U^H A U)} = \chi_U^H \chi_A \chi_U$. Naj bo sedaj

$$T = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} & \vdots \\ \vdots & I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

permutacijska matrika. Potem velja

$$T^{-1}\chi_U^H\chi_A\chi_U T = \begin{bmatrix} a & 0 & \alpha_1^T & \alpha_2^T \\ 0 & a & -\overline{\alpha_2}^T & \overline{\alpha_1}^T \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_a & \chi_{\alpha^T} \\ 0 & \chi_B \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Matrika T je unitarna. Po točki *vii.* trditve 3.11 velja, da je tudi χ_U unitarna. Kompleksni matriki (1) in (2) sta torej podobni, torej imata enake lastne vrednosti. Za χ_B po indukcijski predpostavki vemo, da ima vsaka njena realna lastna vrednost sodo algebraično večkratnost, zato ima lastna vrednost a matrike χ_A sodo algebraično večkratnost.

Ker je χ_A kompleksna matrika velikosti $2n \times 2n$, ima, štetih s kratnostjo, natanko $2n$ lastnih vrednosti. Iz tega sledi, da ima matrika A natanko n desnih lastnih vrednosti, ki so ali konjugirani pari kompleksnih števil ali realna števila s sodo algebraično večkratnostjo. Sledi, da natanko n desnih lastnih vrednosti matrike A leži na zgornji kompleksni polravnini (vključno z realno osjo). QED

Posledica 4.11. *Naj bosta $A, B \in M_n(C)$. Potem ima vsaka realna lastna vrednost matrike*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix},$$

(če obstaja), sodo algebraično večkratnost, in njene kompleksne lastne vrednosti se pojavljajo v konjugiranih parih.

Opomba 4.12. Lastnim vrednostim iz trditve 4.10 pravimo **standardne lastne vrednosti** matrike A.

Trditev 4.13. *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{H})$. Če je A v trikotni obliki, tj. vsi elementi pod ali nad diagonalo so enaki 0, potem je vsak element na diagonali matrike A desna lastna vrednost A. Še več, vsaka desna lastna vrednost matrike A je podobna kateremu od elementov na diagonali A.*

Dokaz. Najprej pokažimo prvi del trditve. Dokaz poteka z indukcijo n. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{H})$ zgornje trikotna z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Oglejmo si najprej primer, ko je $n = 1$, torej $A = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{H}$. Velja

$$\lambda\, 1 = 1\, \lambda,$$

torej je 1 lastni vektor za (desno) lastno vrednost λ. Naj bo sedaj $n \geq 2$. Predpostavimo sedaj, da trditev velja za matrike velikosti $n-1$. Matriko A lahko zapišemo kot

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}.$$

Velja

$$A(1, 0, \ldots, 0)^T = (1, 0, \ldots, 0)^T \lambda_1,$$

torej je λ_1 desna lastna vrednost za A. Po indukcijski predpostavki ima A_1 lastne vrednosti $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Pokazati moramo le še, da so lastne vrednosti matrike A_1 tudi lastne vrednosti matrike A. Recimo, da je $\lambda \in \{\lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Če je λ podobna λ_1, velja

$$\lambda = q^{-1}\lambda_1 q.$$

Iz opombe 4.3 vemo, da so vsi elementi iz $[\lambda_1]$ desne lastne vrednosti za A, torej je λ desna lastna vrednost za A. Predpostavimo torej lahko, da λ in λ_1 nista podobna. Velja $A_1 y = y\lambda$ za nek $y \neq 0$. Po trditvi 2.13 obstaja tak $x \in \mathbb{H}$, da velja

$$\lambda_1 x + \alpha y = x\lambda.$$

Sledi

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x + \alpha y \\ A_1 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\lambda \\ y\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \lambda,$$

torej je λ res desna lastna vrednost za A.

Pokažimo še drugi del trditve. Lema 4.5 pove, da sta za poljubno desno lastno vrednost λ matrike A konjugirani kompleksni števili $\mu, \overline{\mu} \in [\lambda]$ lastni vrednosti za χ_A. Ker so diagonalni elementi A desne lastne vrednosti za A, sledi, da so jim lastne vrednosti χ_A podobne. Iz tranzitivnosti relacije $\sim$ sledi, da je λ podobna enemu od diagonalnih elementov matrike A.

QED

Oglejmo si naslednjo karakterizacijo obrnljivih matrik v $M_n(\mathbb{H})$.

Trditev 4.14. *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{H})$. Naslednje izjave so ekvivalentne.*

i. *A je obrnljiva.*

ii. *Enačba $Ax = 0$ ima enolično rešitev $x = 0$ v $\mathbb{H}^n$.*

iii. *χ_A je obrnljiva.*

iv. *A nima ničelne lastne vrednosti, tj. če za nek $\lambda \in \mathbb{H}$ in $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ velja $Ax = \lambda x$ ali $Ax = x\lambda$, potem je $\lambda \neq 0$.*

Dokaz. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{H})$.

- (*i.* $\Rightarrow$ *ii.*) Trivialno.
- (*ii.* $\Leftrightarrow$ *iv.*) Izjava v točki *ii.* pove, da ne obstaja $x \neq 0$ iz $\mathbb{H}^n$, da bi veljalo

  $$Ax = 0x = x0.$$

  To pa je ekvivalentno temu, da A nima neničelne lastne vrednosti.
- (*iii.* $\Leftrightarrow$ *iv.*) Matrika χ_A je obrnljiva natanko tedaj, ko nima ničelne lastne vrednosti. Iz dokaza trditve 4.10 pa vidimo, da to velja natanko tedaj, ko A nima ničelne lastne vrednosti.

- (*iii.* $\Leftrightarrow$ *i.*) Naj bo χ_A obrnljiva in naj bo

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

  Zapišimo $B = B_1 + B_2 j$. Trivialno je preveriti, da velja $BA = I$ in po trditvi 3.10 sledi, da je A obrnljiva.

QED

Za konec si oglejmo še trditev, ki s pomočjo do sedaj pridobljenih rezultatov karakterizira lastne vrednosti kvaternionskih matrik.

Trditev 4.15. *Naj bo $A \in M_n(\mathbb{H})$. Potem ima A natanko n desnih lastnih vrednosti iz različnih ekvivalenčnih razredov.*

Dokaz. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{H})$. Iz trditve 4.10 vemo, da ima A natanko n standardnih lastnih vrednosti, tj. desnih lastnih vrednosti oblike $\lambda = a + bi$, $b \geq 0$. Recimo, da obstaja $\mu \in \mathbb{H}$, ki ne spada v noben ekvivalenčni razred teh standardnih lastnih vrednosti. Lema 2.10 pove, da obstaja neko kopleksno število $z \in [\mu]$, $|\mathrm{Im}\, z| \geq 0$, različno od ostalih standardnih lastnih vrednosti. Vendar bi po lemi 4.3 to pomenilo, da je tudi z desna lastna vrednost za A, kar je v protislovju s predpostavko, da ima A natanko n standardnih lastnih vrednosti. Tak μ torej ne obstaja, zato vse desne lastne vrednosti spadajo v natanko n ekvivalenčnih razredov. QED