Homework 2

林宸昊 PB20000034.

1. 堆排序:
对于一个按升序排列的包含 n 个元素的有序数组 A 来说，HEAPSORT 的时间复杂度是多少？如果 A 是降序的呢？请简要分析并给出结果.

2. 快速排序:
(a) 假设快速排序的每一层所做的划分比例都是 $1-\alpha:\alpha$，其中 $0<\alpha\le 1/2$ 且是一个常数. 试证明：在相应的递归树中，叶结点的最小深度大约是 $-\lg n/\lg\alpha$，最大深度大约是 $-\lg n/\lg(1-\alpha)$ (无需考虑舍入问题).
(b) 试证明：在一个随机输入数组上，对于任何常数 $0<\alpha\le 1/2$，PARTITION 产生比 $1-\alpha:\alpha$ 更平衡的划分的概率约为 $1-2\alpha$.

1. 升序排列:

首先建堆时调用 $O(n)$ 次 MAX-HEAPIFY(A,i)，而由于升序排列与最大堆构成正好相反，每一次调用都需进行最坏操作时间 $\log n$. 故建堆时间复杂度为 $O(n\lg n)$.

然后进行堆排序时 HEAPSORT 复杂度均为 $O(n\log n)$. ($O(n)$ 次交换. 再调用 MAX-HEAPIFY 时间 $\log n$).

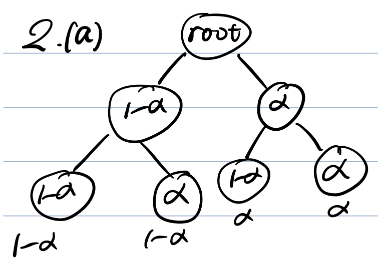
总复杂度: $O(n\log n)+O(n\log n)=O(n\log n)$.

降序排列:

首先仍需建堆. 但建堆时对 MAX-HEAPIFY(A,i) 所需的仅有 $O(1)$ 次比较. 故建堆时间复杂度为 $O(n)$.

同上. 总复杂度: $O(n)+O(n\log n)=O(n\log n)$.

2.(a)



由于 $0<\alpha\le\frac{1}{2}$. 即 $\alpha\le 1-\alpha$. 故最小深度一定出现在 α 分支处. 因为每一次分割比例相同. 故分割至无法分割(即1个元素)必经由且只经由 α.

有 $n\cdot\alpha^k=1 \Rightarrow k=-\frac{\lg n}{\lg\alpha}$.

同理. 对于最大深度. 必经过且只经过 $1-\alpha$ 分支. 有 $n\cdot(1-\alpha)^k=1 \Rightarrow k=-\frac{\lg n}{\lg(1-\alpha)}$

(b) 不妨假设 n 个元素已被划分成比例 $1-\alpha:\alpha$ 的两组. 由于 $0<\alpha\le\frac{1}{2}$. 若所随机选择的主元在 αn 个更大或 αn 个更小的元素中, 所得到的划分比例必不如 $1-\alpha:\alpha$ 平衡. 因为在 αn 个元素中必存在某元素 $\le$ 或 $\ge$ 所选取主元. 从而使另一部分比例继续增大.

(包括本身)

故只有在剩余 $n-2\alpha n$ 个元素中选取，$p=\dfrac{n-2\alpha n}{n}=1-2\alpha$