ALG HW01.

林宸昊 PB20000034.

4.5-1.

a. $a=2, b=4.$ $n^{\log_4 a - \frac{1}{2}} = 1$ $f(n) = O(1)$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n})$

b. $a=2, b=4.$ $f(n) = \Theta(n^{\frac{1}{2}})$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n}\lg n)$

c. $a=2, b=4.$ $f(n) = \Omega(n^{\frac{1}{2}+1})$

$2f(\frac{n}{4}) = n/2 \leq 2n \quad (c=2)$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n)$

d. 同c. $T(n) = \Theta(n^2)$.

4.5-4.

$a=4, b=2.$ $n^{\log_b a} = n^2.$ 而 $f(n) = n^2\lg n \neq O(n^{2-\varepsilon})$

故不可应用. $\neq \Omega(n^{2+\varepsilon})$

可以猜测 $T(n)$ 的一个上界 $cn^2\lg n \cdot \lg n$. ($n > \lg n$, 故先猜 $\lg n$).

$T(n) \leq cn^2\lg^2 n.$ $T(\frac{n}{2}) \leq c\frac{n^2}{4}\lg^2(\frac{n}{2})$.

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2\lg n$

$\leq cn^2\lg^2(\frac{n}{2}) + n^2\lg n$

$$
\begin{aligned}
&= cn^2(\lg n-\lg 2)^2+n^2\lg n \\
&= cn^2\lg^2 n-2cn^2\lg 2\lg n+cn^2\lg^2 2+n^2\lg n. \\
&= cn^2\lg^2 n-cn^2\lg 2\lg n-cn^2\lg 2\lg n+cn^2\lg^2 2+n^2\lg n \\
&= cn^2\lg^2 n-cn^2\lg 2\lg n+n^2\lg n(1-c\lg 2)+cn^2\lg^2 2 \\
&= cn^2\lg^2 n-cn^2\lg 2(\lg n-\lg 2)+n^2\lg n(1-c\lg 2) \\
&\le cn^2\lg^2 n-cn^2\lg 2(\lg n-\lg 2)\ ,\quad c\ge 1/\lg 2 \\
&\le cn^2\lg^2 n.
\end{aligned}
$$

得证