HW10

林宸昊 PB20000034

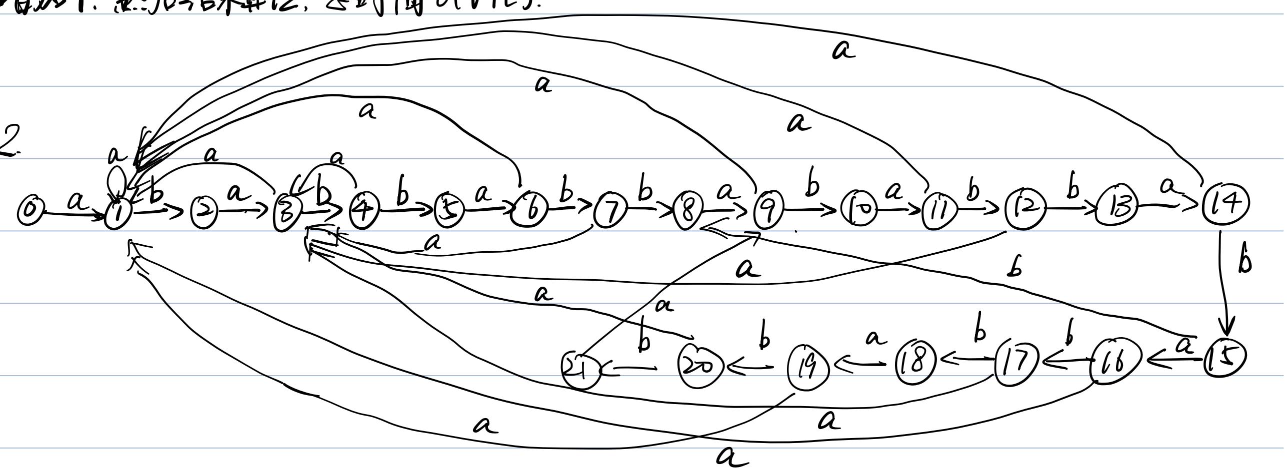
1. a. 如果有一个不包含(u,v)的最小割，那么最大流将不会变化；

如果最小割均包含(u,v)，那么最大流将有增大1的可能：用Ford-Fulkerson算法进行一次迭代，如果存在一条增广路径，则会被找到并进行更新。而由于容量及增量均为整数值，完整运行一次Ford-Fulkerson中的while循环即为最大时间，而该时间恰为一次BFS的时间：$O(V+E)$.

b. 如果(u,v)的流量本就比容量小至少1个单位则最大流不会变化；

如果并非如此那么利用BFS找到一条包含(u,v)的路径$(O(V+E))$，然后将该路径上每边的流量减1. 然后运行Ford-Fulkerson的while循环$(O(V+E))$一次找到增广路径(如果存在)并增加1. 然后结束算法. 总时间$O(V+E)$.

2.



3. a. 定义一个匹配函数：$R(x,y)=[S(x)-P(y)]^2P(y)$. 当$R(x,y)=0$时，意为S串的第x个字符与P的第y个字符匹配. $P(y)$的独立因子用于处理*.

此时有完全匹配函数：$M(x)=\sum_{i=0}^{m-1}R(i,x-m+i+1)$.

$$=\sum_{i=0}^{m-1}[S(i)-P(x-m+i+1)]^2P(x-m+i+1).$$

将S串反转，$S'(x)=S(m-x-1)$. 则此时

$$M(x)=\sum_{i=0}^{m-1}[S'(m-i-1)-P(x-m+i+1)]^2P(x-m+i+1)$$

直接展开有

$$m(x)=\sum_{i=0}^{m-1}S'(m-i-1)^2P(x-m+i+1)+\sum_{i=0}^{m-1}P(x-m+i+1)^3-2\sum_{i=0}^{m-1}S'(m-i-1)P(x-m+i+1)^2$$

$$=\underbrace{\sum_{i+j=x}S'(i)^2P(j)}_{①}+\underbrace{\sum_{j=0}^{x}P(j)^3}_{②}-2\underbrace{\sum_{i+j=x}S'(i)P(j)^2}_{③}.$$

①③项可以利用有限次FFT得到，②可以在$O(n)$时间内完成计算，

则总时间复杂度为$O(n\lg n)$.

并且由于方法的通用性，增大字符种类同样适用.