

Lernübung – Berechnung und Darstellung des Frequenzganges

Aufgabe 1. (Frequenzgang eines RLC-Filters) Für das elektrische Netzwerk in Abb. ?? sollen die folgenden Aufgabenpunkte bearbeitet werden.

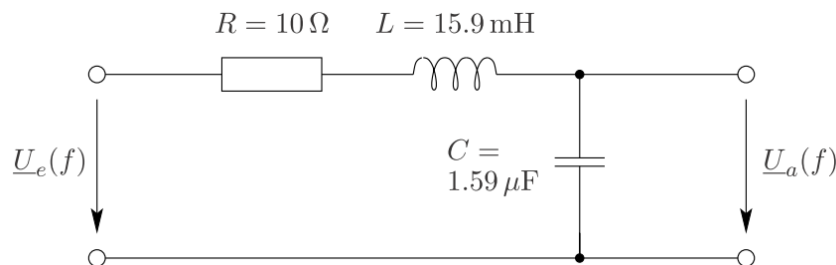


Abbildung 1: RLC-Filter.

- Bestimmen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{G}(f) := \frac{\underline{U}_a(f)}{\underline{U}_e(f)}$.
- Bei welcher Frequenz f_m erwarten Sie in etwa das Maximum des Betrages der Übertragungsfunktion?
- Berechnen Sie mit Hilfe eines MATLAB-Skripts den Betrag $|\underline{G}(f)|$ der Übertragungsfunktion und stellen Sie diese entlang einer linearen Frequenzachse im Frequenzintervall $[10, 100000]$ Hz dar, verwenden Sie die Funktion `plot`.
- Stellen Sie nun 20 mal den Zehnerlogarithmus des Betrags $|\underline{G}(f)|$ als Funktion der Frequenz dar.
- Ersetzen Sie die Funktion `plot` durch die Funktion `semilogx`. Welchen Unterschied beobachten Sie?
- Wie gross sind die Grenzfrequenzen?
- Stellen Sie die Phase $\varphi(f)$ dar, verwenden Sie eine logarithmische Darstellung der Frequenzachse. *Hinweis:* Diese Darstellung erhalten Sie mit dem Plot Kommando `semilogx`.
- Am Eingang des Filters liege die Spannung $u_e(t) = 2\ \text{V} \cdot \cos(2\pi f t + \pi/4)$ an, wobei $f = 900\ \text{Hz}$. Berechnen Sie mit Hilfe von $G(f)$ die Ausgangsspannung $u_a(t)$.

Loesung 1. (Frequenzgang eines RLC-Filters)

a)

$$\begin{aligned}\underline{G}(f) &= \frac{\underline{U}_a(f)}{\underline{U}_e(f)} = \frac{jX_C}{R + jX_L + jX_C} \\ &= \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{R + j2\pi fL + \frac{1}{j2\pi fC}} \\ &= \frac{1}{1 + j2\pi fRC - 4\pi^2 f^2 LC}\end{aligned}\quad (1)$$

b) Ein Maximum der Übertragungsfunktion sollte in der Nähe der Resonanzfrequenz f_{res} auftreten. Diese tritt dann ein wenn $X_C = -X_L$, das ist bei $f_{\text{res}} = 1 \text{ kHz}$ auf.

c)

```
%Bauteilwerte festlegen
R=10;
C=1.59e-6;
L=15.9e-3;
%Frequenzbereich definieren
f=10.^(1:0.01:4);
w=2*pi*f;
%Übertragungsfunktion definieren
G=(1)./(1+j*w*R*C-w.^2*L*C);
%Graph zeichnen
figure;
plot(f,abs(G),'r');
ylabel('$|G|(f)$','interpreter','latex');
xlabel('$f$ [Hz]','interpreter','latex');
```

Das Ergebnis ist in Abb. ?? dargestellt.

d) Die logarithmische Darstellung entsteht durch

```
abs_G_log = 20*log10(abs(G));
figure;
plot(f,abs_G_log,'r');
ylabel('$20 \log(|G|(f))$','interpreter','latex');
xlabel('$f$ [Hz]','interpreter','latex');
```

e)

```
semilogx(f,abs_G_log,'r');
```

Das Ergebnis ist in Abb. ?? dargestellt.

f) Die Grenzfrequenz ist definiert als jene Frequenz, bei der die Verstärkung gleich $1/\sqrt{2}$ der maximalen Verstärkung G_{max} ist. Aus Abb. ?? lässt sich $G_{\text{max}} = 10$ ablesen. Rechnerisch ergeben sich die Grenzfrequenzen wie folgt:

$$\begin{aligned}|G(f_{\text{res}})| &= G_{\text{max}}/\sqrt{2} = 10/\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - f_{\text{res}}^2 4\pi^2 LC)^2 + 4\pi^2 f_{\text{res}}^2 C^2 R^2}} = 10/\sqrt{2}\end{aligned}$$

Löst man diese Gleichung nach f_{res} auf, so ergeben sich die beiden Lösungen $f_{\text{res},1} = 947 \text{ Hz}$, $f_{\text{res},2} = 1047 \text{ Hz}$.

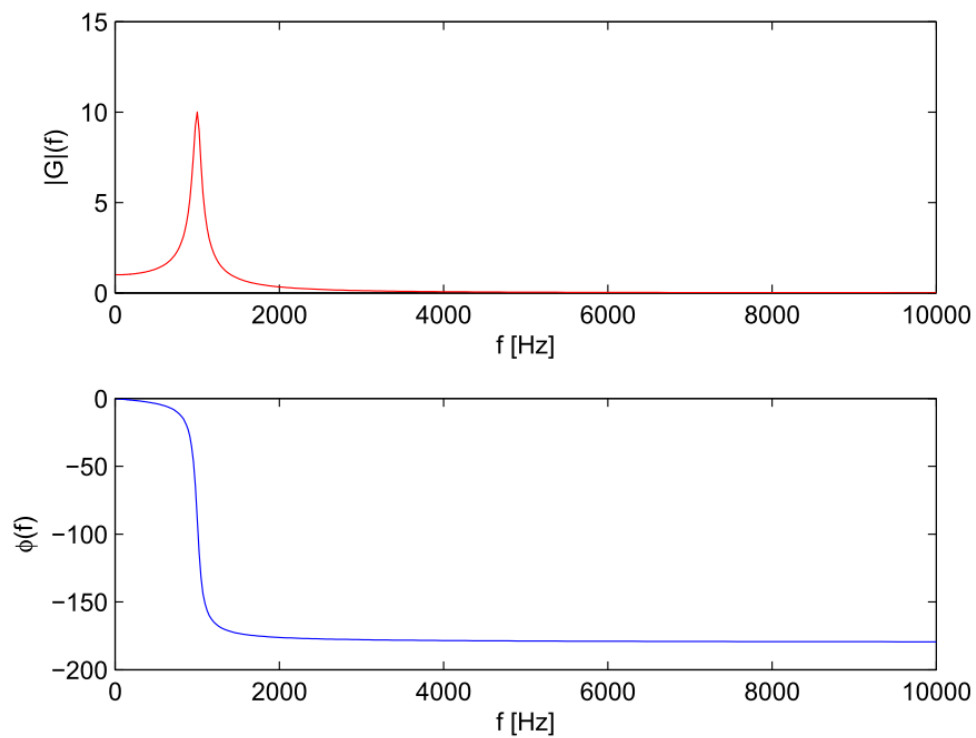


Abbildung 2: Amplituden- und Phasengang, in linearer Darstellung.

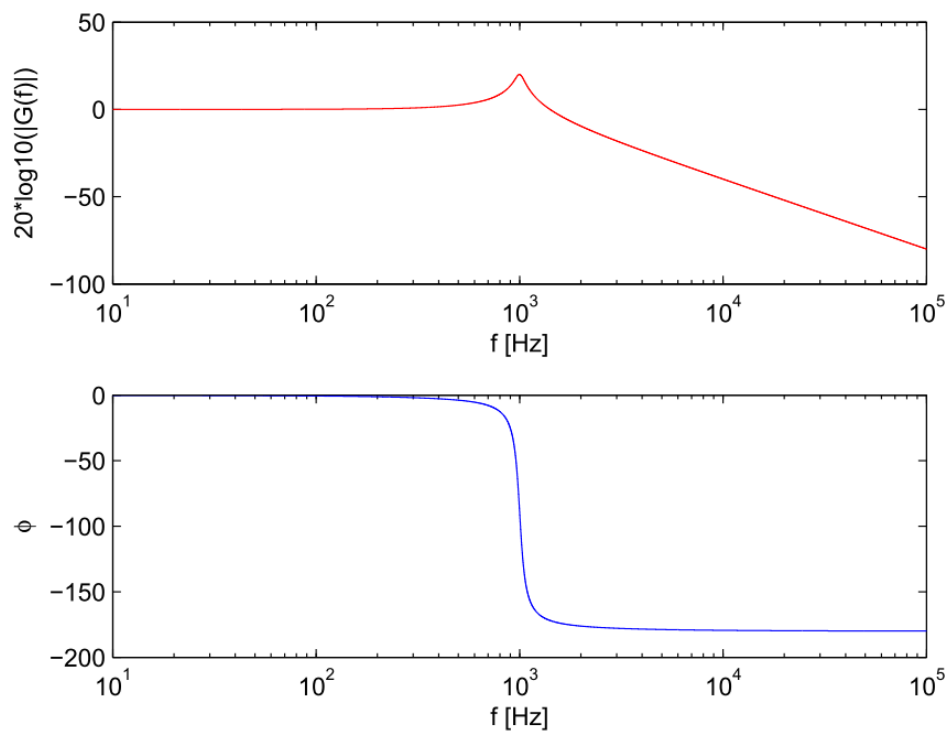


Abbildung 3: Amplituden- und Phasengang, in doppelt logarithmischer bzw. einfach logarithmischer Darstellung.

g)

```
figure;  
phi_G=angle(G);  
semilogx(f,phi_G*180/pi,'b');  
ylabel('$\varphi$', 'interpreter','latex'); xlabel('$f$ [Hz]', 'interpreter'  
, 'latex');
```

Das entsprechende Ergebnis ist in Abb. ?? dargestellt.

- h)** Wir setzen $f_0 := 900$ Hz, damit ist $U_e(f_0) = \sqrt{2} \text{ V} \cdot e^{j\pi/4}$. Mit der Definition von $G(f)$ können wir schreiben

$$\underline{U}_a(f_0) = \underline{G}(f_0) \cdot \underline{U}_e(f_0).$$

Das Zeitsignal erhalten wir durch den folgenden Schritt:

$$\begin{aligned} u_a(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \underline{U}_a(f_0) e^{j2\pi f_0 t} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2} \underline{G}(f_0) \underline{U}_e(f_0) e^{j2\pi f_0 t} \right\} \\ &= 2 \text{ V} \cdot |\underline{G}(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \pi/4 + \varphi(f_0)) \\ &= 2 \text{ V} \cdot 4.722 \cdot \cos(2\pi f_0 t + 45^\circ - 25.12^\circ) \\ &= 9.444 \text{ V} \cos(2\pi f_0 t + 19.88^\circ) \end{aligned}$$