Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of
Engineering

EL2, Lösung Übung 11, Frequenzgang 4

1. Aufgabe

$$H(\omega) = \frac{j\Omega_1}{1 + j\Omega_2} \cdot \frac{1}{1 + j\Omega_0 \frac{1}{Q} + (j\Omega_0)^2} \quad \text{mit } Q = \sqrt{10} \text{ und } \Omega_1 = 10 \cdot \Omega_0 \text{ und } \Omega_2 = \frac{\Omega_0}{10}$$

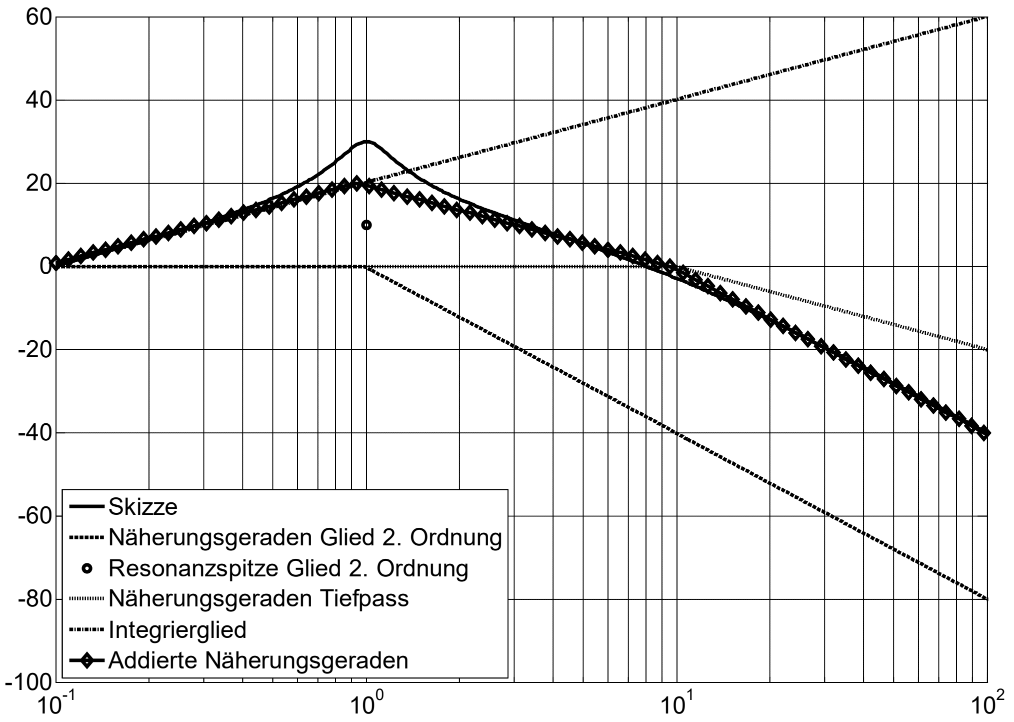
Frequenzgang kann zerlegt werden in: ein Differentierglied, ein Tiefpass und ein Glied 2. Ordnung. (Da $\Omega_1 \neq \Omega_2$ kein Hochpass!)

Das Verhältnis der Frequenzen ω_1 und ω_2 zur Resonanzfrequenz ω_0 beträgt

$$\Omega_1 = \Omega \cdot 10 = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot 10 \rightarrow \omega_1 = \frac{\omega_0}{10} \quad \text{und} \quad \Omega_2 = \frac{\Omega}{10} = \frac{\omega}{\omega_2} = \frac{1}{10}\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \omega_2 = 10 \cdot \omega_0$$

Die Güte des Gliedes 2. Ordnung beträgt in dB:

$$Q(\text{dB}) = 20 \cdot \log_{10} \sqrt{10} = 10 \text{ dB}$$



(Die Spitze kommt auf 10 dB + 20 dB = 30 dB zu liegen)

2. Aufgabe

$$H(\omega)=\frac{j\omega\cdot 9\,\frac{s}{rad}}{9+j\omega\cdot 6\,\frac{s}{rad}+(j\omega)^2\cdot 1\,\frac{s^2}{rad^2}}$$

Normierung:

$$=\frac{j\omega\cdot 1\,\frac{s}{rad}}{1+j\omega\cdot\frac{2}{3}\,\frac{s}{rad}+(j\omega)^2\cdot\frac{1}{9}\,\frac{s^2}{rad^2}}$$

Ansatz für die Aufteilung:

$$H(\omega)\overset{?}{=}j\Omega_1\cdot\frac{1}{1+j\Omega_0\frac{1}{Q}+(j\Omega_0)^2}$$

$$\Omega_1=\omega\cdot 1\,\tfrac{s}{rad}\rightarrow \underline{\underline{\omega_1=1\,\tfrac{rad}{s}}}\quad \text{da}\quad \Omega_1=\frac{\omega}{\omega_1}$$

$$\Omega_0^2=\omega_0^2\cdot\tfrac{1}{9}\,\tfrac{s^2}{rad^2}\rightarrow \underline{\underline{\omega_0=\sqrt{9}\,\tfrac{rad}{s}=3\,\tfrac{rad}{s}}}\quad \text{da}\quad \Omega=\frac{\omega}{\omega_0}$$

bzw. $\underline{\underline{\omega_0=j3\,\tfrac{rad}{s}}}$

$$\Omega_0\frac{1}{Q}=\omega\cdot\tfrac{2}{3}\,\tfrac{s}{rad}\rightarrow Q=\frac{\Omega_0}{\omega\cdot\frac{2}{3}\,\frac{s}{rad}}=\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\omega\cdot\frac{2}{3}\,\frac{s}{rad}}=\frac{1}{3\,\frac{rad}{s}\cdot\frac{2}{3}\,\frac{s}{rad}}=\underline{\underline{0.5}}$$

Güte ist gerade ½ , d.h. das Glied 2. Ordnung ist nicht elementar, sondern kann in zwei (identische) Glieder 1. Ordnung zerlegt werden.

Kreisfrequenzen der Glieder 1. Ordnung, Form $\dfrac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_{1,2}}}$:

$$\omega_{2,3}=\omega_0\left(\frac{1}{2Q}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2-1}\right)$$

$$\omega_{2,3}=3\,\tfrac{rad}{s}$$

5. Aufgabe: alternativer Weg

Die Übertragungsfunktion kann wie folgt faktorisiert werden (nach der Normierung):

$$H(\omega)=\frac{j\omega\,\frac{s}{rad}}{1+j\omega\cdot\frac{2}{3}\,\frac{s}{rad}+(j\omega)^2\cdot\frac{1}{9}\,\frac{s^2}{rad^2}}=\frac{j\omega\,\frac{s}{rad}}{(1+j\omega/3\,\frac{rad}{s})(1+j\omega/3\,\frac{rad}{s})}$$

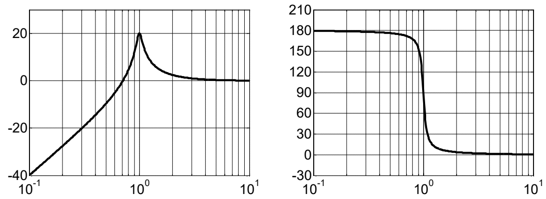
Im Nenner ergeben sich zwei Pole, diese entsprechen jeweils einer Grenzfrequenz, d.h. $\omega_2=3\,\frac{rad}{s},\omega_3=3\,\frac{rad}{s}$

Aus dem Zähler folgt $\omega_1=1\,\frac{rad}{s}$.

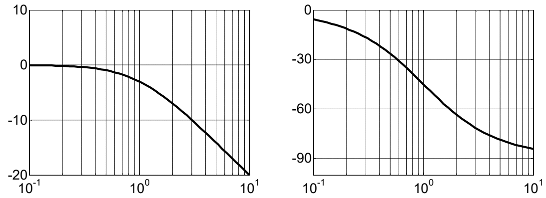
Bemerkung: der Zusammenhang von Polen und Nullstellen zu Grenzfrequenzen wurde in der Vorlesung nicht erläutert, deshalb wird dieser Weg nicht erwartet.

3. Aufgabe

Mit der Übertragungsfunktion $\frac{(j\Omega)^2}{1+j\Omega\frac{1}{Q}+(j\Omega)^2}$ ist man dem erwünschten Amplituden- und Phasengang bereits nahe:



Um oberhalb der Resonanzfrequenz einen Abfall (mit abnehmender Frequenz) der Amplitude von 20 dB/Dk zu erreichen, ohne dass der Amplitudengang vor der Resonanzfrequenz verändert wird, muss ein Tiefpass nachgeschalten werden:



Der Phasengang wird durch den Tiefpass ebenfalls passend verändert.

Eine genaue Inspektion des gegebenen Amplitudengangs ergibt, dass die Resonanzüberhöhung ungefähr 17 dB beträgt. Dies lässt sich erreichen, indem das Glied 2. Ordnung ein Gütefaktor von 10 = 20 dB hat[1] und die Grenzfrequenz des Tiefpasses (-3 dB Punkt) gleich der Resonanzfrequenz ist.

Aus obigem folgt:

$$H(\Omega)=\frac{(j\Omega)^2}{1+j\Omega\frac{1}{Q}+(j\Omega)^2}\cdot\frac{1}{1+j\Omega}$$

Alternativ kann der Frequenzgang auch aus einem Bandpass und einem Hochpass zusammengesetzt werden.

Gemäss Aufgabenstellung müssen die elementaren Frequenzgangfunktionen identifiziert werden:

- 2x identisches Differenzierglied: $j\Omega$

- Tiefpass: $\frac{1}{1+j\Omega}$

- Glied 2. Ordnung: $\frac{1}{1+j\Omega\frac{1}{Q}+(j\Omega)^2}$

[1] Bei einem solchen Gütefaktor ist die Überhöhung praktisch am Ort der Resonanzfrequenz.