

## **Kapitel 3 – Wechselstromlehre**

**Skript zum Kurs Elektrizätslehre 2**

**im Frühlingssemester 2020**

Autor: Martin Schlup

Editor: Martin Weisehorn

Winterthur, im März 2020

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften  
Zentrum für Signalverarbeitung und Nachrichtentechnik  
Technikumstrasse 9  
Postfach  
8401 Winterthur

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Harmonische Signale und Ihre Darstellung</b>	<b>3</b>
2.1. Allgemeine Eigenschaften . . . . .	3
2.2. Zeiger und komplexe Zahlen . . . . .	5
<b>3. Komplexe Widerstände und Leitwerte</b>	<b>7</b>
3.1. Definitionen . . . . .	7
3.2. Widerstand (Eigenschaft) . . . . .	8
3.3. Kapazität . . . . .	9
3.4. Selbstinduktivität . . . . .	10
3.5. Gegeninduktivität . . . . .	11
3.6. Zusammenfassung . . . . .	11
<b>4. Einfache Wechselstromschaltungen</b>	<b>13</b>
4.1. Einführendes Beispiel: RC-Glied . . . . .	13
4.2. Reihen- / Serieschaltung . . . . .	14
4.3. Parallelschaltung . . . . .	16
4.4. Ersatzzweipole . . . . .	17
4.5. Resonanz . . . . .	17
<b>5. Leistungsbegriffe</b>	<b>20</b>
5.1. Momentanleistung . . . . .	20
5.2. Wirkleistung . . . . .	21
5.3. Blindleistung . . . . .	22
5.4. Scheinleistung . . . . .	22
5.5. Anwendungen . . . . .	24
5.5.1. Blindleistungskompensation . . . . .	24
5.5.2. Leistungsanpassung . . . . .	24
<b>A. Komplexe Zahlen</b>	<b>27</b>
A.1. Imaginäre Zahlen . . . . .	27
A.2. Komplexe Zahlen . . . . .	27
A.3. Grundoperationen . . . . .	28
A.4. Weitere Eigenschaften . . . . .	29
<b>B. Mittelwerte</b>	<b>30</b>
B.1. Linearer Mittelwert . . . . .	30
B.2. Quadratischer Mittelwert, Effektivwert . . . . .	30
B.3. Verhältniszahlen . . . . .	31
<b>C. Hinweise zu Matlab</b>	<b>33</b>
C.1. Wechselstromschaltung . . . . .	33

**D. Literaturverzeichnis**

**34**

# 1. Einleitung

In der Energietechnik (elektrische Energieumladung<sup>1</sup> und -verteilung) hat sich der sinusförmige Wechselstrom, kurz **Wechselstrom** (*alternating current*, **AC**) auf Grund seiner technischen Vorteile gegenüber dem **Gleichstrom** (*direct current*, **DC**) durchgesetzt. Des- sen Vorteile liegen in der relativ einfachen technischen Realisierbarkeit der Wechselstrom-, bzw. Drehstromerzeugung<sup>2</sup> (Generator als drehende Maschine) und in der ebenfalls ein- fachen Realisierbarkeit der Spannungstransformation ohne beweglichen mechanische Teile mit Transformatoren (*transformer*).

Die Berechnung von elektrischen Schaltungen mit Wechselstrom ist natürlich um einiges komplizierter als bei Gleichstrom, zum Beispiel:

- Bei der Addition von Wechselgrößen müssen zwei sinusförmige Signale<sup>3</sup> zu jedem Zeitpunkt addiert werden.
- Der Begriff elektrischer Widerstand eines Zweipols, definiert als (momentanes) Ver- hältnis von Spannung zu Stromstärke, ergibt, ausser bei linearen Widerständen, bei Wechselstrom keine zeitunabhängige und eindeutige Zahl wie dies bei Gleichstrom der Fall ist.
- Bei Wechselstrom spielen zusätzlich zur Eigenschaft Widerstand (*resistance*) zwei weitere Eigenschaften der elektrischen Komponenten eine Rolle, nämlich die Kapa- zität (*capacitance*) und die Induktivität (*inductance*).

Die Wechselstromlehre, wie sie heute immer noch hochaktuell ist, wurde durch Charles Proteus Steinmetz (1865-1923) ausgearbeitet und Ende des neunzehnten Jahrhunderts an- lässlich eines Internationalen Elektrischen Kongresses in Chicago der Fachwelt präsentiert<sup>4</sup>. Die Leistung von Charles Steinmetz bestand in der Erkenntnis, dass durch Benutzen von komplexen Zahlen die Berechnung von elektrischen Wechselstromschaltungen auf die Be- rechnungsmethoden von Gleichstromschaltungen zurückgeführt werden konnte. Steinmetz erkannte auch, dass diese Methode nicht nur für die Berechnung von Wechselstromschal- tungen angewendet, sondern auch bei allen physikalischen Aufgaben eingesetzt werden konnte, bei denen stationäre sinusförmige Schwingungen auftreten. Die Theorie der Wech- selstromlehre ist demzufolge eine Methode, die beim Auftreten von sinusförmigen Signalen mit Vorteil zum Einsatz kommt.

---

<sup>1</sup> Energie ist für alle physikalischen Prozesse ein und dasselbe. Sie kann also nicht *umgewandelt*, son- dern nur von einem Energieträger zum anderen *umgeladen* oder *ausgetauscht* werden. Dabei wird sie freigesetzt oder gebunden.

<sup>2</sup> Drehstrom ist eine besondere Form von Wechselstrom: er besteht aus drei zeitlich versetzten Wechsel- stromspannungen.

<sup>3</sup> Unter dem Begriff „Signal“ wird hier der zeitliche Verlauf einer physikalischen Grösse (hier Spannung oder Stromstärke) verstanden.

<sup>4</sup> Charles Steinmetz, *Complex Quantities and Their Use in Electrical Engineering*, 1893. „We are coming more and more to use complex quantities instead of using sines and cosines, and we find great advantage in their use for calculating all problems of alternating currents, and throughout the whole range of physics. Anything that is done in this line is of great advantage to science.“

Damit in einem System wie eine elektrische Schaltung „rein“ sinusförmige oder *harmonische* Signale auftreten, müssen folgende drei Bedingungen erfüllt sein:

**1. Einheitliche, sinusförmige Anregung der Schaltung mit einer festen Frequenz**

In der Schaltung befinden sich eine oder mehrere Wechselstromquellen (Spannungs- oder Stromquellen) die alle mit derselben konstanten (nicht zeitabhängigen) Frequenz schwingen. Die Quellen müssen dabei nicht synchron arbeiten, d. h. die Nulldurchgänge der sinusförmigen Grössen müssen nicht gleichzeitig sein.

**2. Lineare Schaltung**

Die Schaltung enthält nur lineare Komponenten (Bauelemente, Zweipole). Enthält ein Zweipol nichtlineare Elemente, so kann er andere als die Anregungsfrequenz erzeugen.

Beispiel: Einfluss einer nichtlinearen Kennlinie

Eine Glühbirne mit der nichtlinearen Kennlinie  $u(t) = b i(t) + a i^3(t)$  wird an eine Wechselstrom-Stromquelle gehängt. Die Stromstärke betrage dabei  $i(t) = \hat{i} \cos(\omega t)$ . Für den Spannungsverlauf an den Klemmen dieses Zweipols ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(t) &= b \hat{i} \cos(\omega t) + a \hat{i}^3 \cos^3(\omega t) = b \hat{i} \cos(\omega t) + a \hat{i}^3 \frac{3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)}{4} \\ &= \left( b \hat{i} + \frac{3}{4} a \hat{i}^3 \right) \cos \omega t + \frac{1}{4} a \hat{i}^3 \cos(3\omega t) \end{aligned}$$

Die nichtlineare Kennlinie erzeugt also bei Anregung mit der Kreisfrequenz  $\omega$  Signalanteile mit einer zusätzlichen, dreimal so hohen Frequenz  $3\omega$ .

*Nichtlinearitäten erzeugen immer Vielfache der Anregungsfrequenz (Fourier-Reihe).*

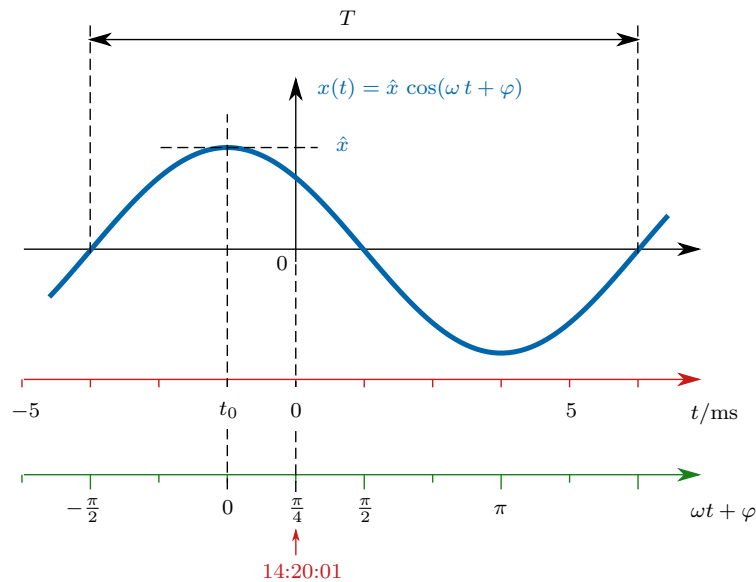
Ende Beispiel

Die Fähigkeit bei harmonischer Anregung weitere Signalfrequenzen als die Anregungsfrequenz zu erzeugen, ist eine typische Eigenschaft von nichtlinearen Komponenten einer Schaltung. In einer linearen Schaltung, d. h. einer Schaltung die nur aus linearen Elementen (und idealen Quellen) besteht, werden keine anderen Frequenzen erscheinen als diese mit denen angeregt wird.

**3. Stationärer Zustand erreicht** (Einschwingphasen abgeklungen)

Nach dem Dazuschalten einer Wechselstromquelle stellen sich nicht sofort sinusförmige Spannungen und Stromstärken in der Schaltung ein. Dieser *stationäre* oder *eingeschwungene* Zustand stellt sich erst nach einer bestimmten Zeit ein: Die Dauer dieses Einschwingvorgangs oder dieser Einschwingtransiente hängt nur von der Schaltung ab und nicht von der anregenden Frequenz.

*Sind die obigen drei Bedingungen erfüllt, so sind sämtliche Spannungen und Stromstärken der Schaltung sinusförmig, bzw. harmonisch.*



**Abbildung 2.1.:** Sinusförmiges Signal mit Periodendauer  $T = 10$  ms,  $f = 100$  Hz,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  und  $t_0 = -\frac{T}{4} = -1.25$  ms. Der Zeitpunkt  $t = 0$  ist willkürlich auf die Uhrzeit 14:20:01 gesetzt.

## 2. Harmonische Signale und Ihre Darstellung

Wenn elektrische Schaltungen mit linearen Bauelementen wie (ideale) Widerstände, Kondensatoren und Spulen (Wicklungen und Leiterschleifen) mit einer harmonischen Spannungs- oder Stromquelle betrieben werden, werden alle Spannungen und Stromstärken in dieser Schaltung nach einer kurzen Einschwingphase ebenfalls harmonisch verlaufen.

### 2.1. Allgemeine Eigenschaften

Diese Spannungs- und Stromstärkenverläufe unterscheiden sich einzig durch ihre Amplitude und ihre zeitliche Verschiebung. Damit können alle diese Signale durch die folgende Formel<sup>1</sup> dargestellt werden:

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi) = \hat{x} \cos(2\pi f t + \varphi) \quad (2.1)$$

Der entsprechende Funktionsgraph ist in Abb. 2.1 für konkrete Zahlenwerte für  $\varphi$  und die Frequenz  $f$  bzw. die Periodendauer  $T = 1/f$  dargestellt. Die Gleichung (2.1) enthält drei Parameter welche das Signal eindeutig bestimmen:

<b>Amplitude:</b>	$\hat{x} > 0$	mit der Einheit V or A, je nach der Art des Signals
<b>Nullphasenwinkel:</b>	$\varphi$	Einheit: $[\varphi] = \text{rad}$ (Radiant)
<b>Kreisfrequenz:</b>	$\omega = 2\pi f$	Einheit: $[\omega] = \text{s}^{-1}$ or rad/s

<sup>1</sup> Diese Form heisst *verallgemeinerter Cosinus*. Man könnte ebenfalls den verallgemeinerten Sinus  $\hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$  verwenden, wie dies einige Autoren tun.

Es folgen weitere mit diesen Parametern zusammenhängende Größen:

$$\begin{aligned}
 \textbf{Frequenz:} \quad f &= \frac{1}{T} & \text{Einheit: } [f] &= \text{Hz} = \text{s}^{-1} \\
 \textbf{Periodendauer:} \quad T & & \text{Einheit: } [T] &= \text{s} \\
 \textbf{Zeitpunkt des Scheitelwertes:} \quad t_0 &= -\frac{\varphi}{\omega} & \text{Einheit: } [t_0] &= \text{s} \\
 \textbf{Phase:} \quad \omega t + \varphi & & \text{Einheit: } [\omega t + \varphi] &= \text{rad}
 \end{aligned}$$

**Interpretation.** Der Nullphasenwinkel  $\varphi$  hängt von der willkürlichen Wahl des Bezugszeitpunktes  $t = 0$  ab. In Abb. 2.1 wurde der Zeitpunkt  $t = 0$  auf die Tageszeit 14:20:01 gesetzt, auf einen Zeitpunkt also an dem die Phase  $\omega t + \varphi$  gleich  $\frac{\pi}{4}$  ist.

Den Scheitelwert  $\hat{x}$  erreicht der Kurvenverlauf zu dem Zeitpunkt  $t = t_0$  welcher die Phase  $\omega t + \varphi$  gleich null sein lässt:

$$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega} \quad (2.2)$$

Für das Beispiel in Abb. 2.1 ergibt sich  $t_0 = -1.25 \text{ ms}$ .

**Vereinfachte Schreibweise.** Unter der Annahme, dass alle Signale in einer Schaltung dieselbe Frequenz aufweisen, genügt es, die Amplitude und den Nullphasenwinkel für jedes einzelne Signal anzugeben:

Harmonische Signale  $x(t)$  bekannter (einheitlicher) Frequenz können bereits mit dem Parameterpaar  $(\hat{x}, \varphi)$  eindeutig beschrieben werden. Um diese Äquivalenz dieser Schreibweisen auszudrücken wird der Doppelpfeil  $\leftrightarrow$  verwendet:

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi) \quad \leftrightarrow \quad (\hat{x}, \varphi) \quad (2.3)$$

### Bemerkungen

- Dem Scheitelwert  $\hat{x}$  entspricht der **Effektivwert** oder **RMS-Wert**

$$X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}, \quad (2.4)$$

beide sind per Definition positiv. Das Verhältnis  $\hat{x}/X$  wird als crest-Faktor bezeichnet und ist für harmonische Signale gleich der Konstanten  $\sqrt{2}$ . **Ein Wechsignale mit dem Scheitelwert  $\hat{x}$  setzt die selbe mittlere Leistung in einem Ohmschen Widerstand um, wie ein Gleichsignal der Intensität  $X = \hat{x}/\sqrt{2}$ , siehe Anhang B.2 und Abschnitt 5.2.**

- Die Funktion  $\sin(\omega t + \varphi)$  ist äquivalent zu  $\cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$ .
- Ein Vorzeichenwechsel kann mit einer Änderung des Nullphasenwinkels um plus oder minus  $\pi$  berücksichtigt werden:  $-\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi \pm \pi)$ . Die Wahl des Vorzeichens wird so getroffen, dass der resultierende Winkel zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$  liegt.

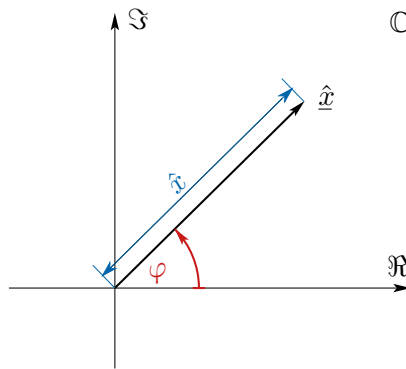
## 2.2. Zeiger und komplexe Zahlen

Das Parameterpaar  $(\hat{x}, \varphi)$  aus Gleichung (2.3) kann als *Polarkoordinaten* eines Punkts in der xy-Ebene interpretiert werden. Die entsprechenden *kartesischen Koordinaten* wären dann  $(\hat{x} \cos \varphi, \hat{x} \sin \varphi)$ . Dieser Punkt wird **Festzeiger** oder kurz **Zeiger** (*phasor*) genannt und kann auch als Vektor vom Koordinatenursprung zum Punkt selbst verstanden werden.

Als nützlicher hat sich jedoch die Interpretation des Parameterpaares  $(\hat{x}, \varphi)$  als Betrag und Winkel einer komplexen Zahl  $\underline{\hat{x}}$  erwiesen, wie *Charles Proteus Steinmetz* sie vorgeschlagen hat und wie sie in Abb. 2.2 dargestellt ist:

$$\underline{\hat{x}} = \hat{x} e^{j\varphi} \quad (2.5)$$

Dementsprechend ist der Ausdruck (2.3) gleichbedeutend mit einer Komplexen Zahl:



**Abbildung 2.2.:** Komplexer Zeiger  $\underline{\hat{x}}$  in der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  mit Betrag  $\hat{x}$  und Winkel bzw. Phase  $\varphi$ .

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi) \quad \leftrightarrow \quad \underline{\hat{x}} = \hat{x} e^{j\varphi} = \hat{x} \cos \varphi + j \hat{x} \sin \varphi \quad (2.6)$$

Die Korrespondenz gemäss der Beziehung (2.6) bedeutet eine **lineare** Abbildung.

Linearität bedeutet, dass gleichzeitig Homogenität und Additivität gelten:

**Homogenität** Durch Multiplizieren eines harmonischen Signals mit einer Konstanten wird dessen Scheitelwert entsprechend multipliziert:

$$y(t) = \alpha x(t) \quad \leftrightarrow \quad \underline{\hat{y}} = \alpha \underline{\hat{x}} = \alpha \hat{x} e^{j\varphi} \quad (2.7)$$

**Additivität** Die Summe mehrerer harmonischer Signale der selben Frequenz lässt sich als Summe der entsprechenden komplexen Zahlen darstellen.

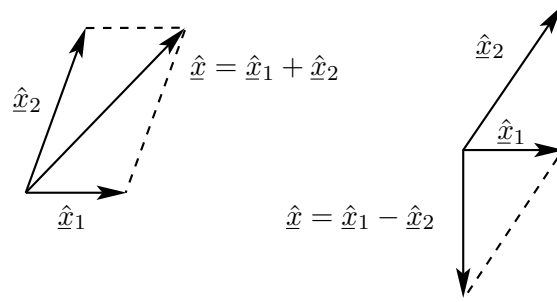
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \leftrightarrow \quad \underline{\hat{y}} = \underline{\hat{x}}_1 + \underline{\hat{x}}_2$$

Die Summe von komplexen Zahlen ergibt sich durch getrennte Addition von Real- und Imaginärteilen:

$$\underline{\hat{x}}_1 + \underline{\hat{x}}_2 = (\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2) + j(\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2)$$

Die Addition bzw. Subtraktion zweier komplexer Zeiger ist in Abb. 2.3 visualisiert.





**Abbildung 2.3.:** Darstellung der Addition und der Differenz zweier Zeiger. Die Spitzen der Vektoren entsprechen den komplexen Größen in der komplexen Zahlenebene (Gauss'sche Zahlenebene). Je nach Zeitbezug (Wahl des Zeitursprungs) können die Zeigerbilder noch um ihren Ursprung gedreht erscheinen.

### Bemerkungen.

- Diese Eigenschaften gelten ebenfalls für Zeiger, sofern diese als Vektoren behandelt werden. Dies sei aus folgender Abbildung ersichtlich:
- Der „Umweg“ über die komplexen Zahlen ist wesentlich einfacher als das direkte Behandeln von trigonometrischen Funktionen oder die Berechnung mit Zeigern, zumal sich durch die Benutzung von komplexen Zahlen weitere Vorteile ergeben.
- Die Korrespondenz (2.6) entspricht einer *eindeutigen* Abbildung<sup>2</sup>. Aus der komplexen Zahl kann die harmonische Zeitfunktion wie folgt zurückgewonnen werden<sup>3</sup>:

$$x(t) = \Re\{\hat{x} \cdot e^{j\omega t}\} = \hat{x} \cdot \Re\{e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.8)$$

- In der komplexen Zahlenebene bewegt sich die zeitveränderliche komplexe Größe  $\hat{x} e^{j\omega t}$  im Gegenuhrzeigersinn auf einem Kreis dessen Zentrum im Ursprung liegt. Der entsprechende Vektor wird als **Drehzeiger** bezeichnet. Der zeitliche Ablauf der harmonischen Funktion  $\hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$  kann als Projektion dieses Drehzeigers auf die reelle Achse dargestellt werden.

**Ableitung des Kurvenverlaufs.** Bildet man die **zeitliche Ableitung** der harmonischen Funktion  $x(t)$  erhält man folgendes:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega \hat{x} \cos\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) \longleftrightarrow \underline{\hat{y}} = \omega \hat{x} e^{j(\varphi_x + \frac{\pi}{2})} = j\omega \hat{x} \quad (2.9)$$

Die Ableitung einer harmonischen Funktion ist wiederum eine harmonische Funktion der selben Frequenz mit einer mit  $\omega$  multiplizierten Amplitude und einem um  $\frac{\pi}{2}$  erhöhten Nullphasenwinkel. Übertragen auf die entsprechende komplexe Zahl bedeutet dies:

Die Ableitung eines harmonischen Signals  $x(t)$  nach der Zeit entspricht einer Multiplikation mit  $j\omega$  des korrespondierenden komplexen Zeigers. Diese Multiplikation entspricht in der komplexen Zahlenebene einer so genannten *Drehstreckung*: eine Streckung um den Faktor  $\omega$  und eine Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  im Gegenuhrzeigersinn.

<sup>2</sup> Die Abbildung und ihre Inverse sind beide eindeutig.

<sup>3</sup> Der Operator  $\Re$  liefert den Realteil einer komplexen Zahl:  $\Re\{\hat{x}\} = \Re\{\hat{x} e^{j\varphi}\} = \hat{x} \cos(\varphi)$ .

### 3. Komplexe Widerstände und Leitwerte

Unter den Voraussetzungen lineare Bauelemente, harmonische Anregung und eingeschwungener Zustand, können Verhältnisse von komplexen Grössen gebildet werden. Unter anderem können so komplexe „Widerstände“ als Verhältnis einer komplexen Spannung zu einer komplexen Stromstärke gebildet werden. Es zeigt sich, dass damit die selben mathematischen Strukturen und Formeln benutzt werden können, wie bei der Gleichstromlehre, sofern eben mit komplexen Zahlen gearbeitet wird.

#### 3.1. Definitionen

In den folgenden Abschnitten werden die folgenden allgemeinen **Festlegungen** und **Definitionen** benutzt:

$$\text{Komplexe Zahl für } u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \leftrightarrow \underline{U} = U e^{j\varphi_u} \quad (3.1)$$

$$\text{Komplexe Zahl für } i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\varphi_i} \quad (3.2)$$

$$\text{Komplexer Effektivwertzeiger: der Spannung } \underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad (3.3)$$

$$\text{Komplexer Effektivwertzeiger: des Stroms } \underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

$$\text{Effektivwert: der Spannung } U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad (3.5)$$

$$\text{Effektivwert: des Stroms } I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad (3.6)$$

$$\text{Komplexer Widerstand oder Impedanz : } \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = R + jX$$

$$\text{Betrag der Impedanz oder Scheinwiderstand : } Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\text{Komplexer Leitwert oder Admittanz : } \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi} = G + jB$$

$$\text{Betrag der Admittanz oder Scheinleitwert : } Y = |\underline{Y}| = \frac{I}{U} = \frac{\hat{i}}{\hat{u}} = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$\text{Phasenverschiebungswinkel : } \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

**Bemerkungen**

- Real- und Imaginärteil von  $\underline{Z}$  sowie von  $\underline{Y}$  lassen sich durch folgende Formeln bestimmen:

$$\textbf{Wirkwiderstand oder Resistanz: } R = Z \cos \varphi$$

$$\textbf{Blindwiderstand oder Reaktanz: } X = Z \sin \varphi$$

$$\textbf{Wirkleitwert oder Konduktanz: } G = Y \cos \varphi$$

$$\textbf{Blindleitwert oder Suszeptanz } B = -Y \sin \varphi$$

- Für die **Umrechnung** zwischen  $\underline{Z}$  und  $\underline{Y}$  ergibt sich:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{Y} e^{j\varphi} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{-B}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2} + j \frac{-B}{Y^2} = R + jX \quad (3.7)$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{-X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} + j \frac{-X}{Z^2} = G + jB \quad (3.8)$$

Achtung: Bei den komplexen Grössen  $\underline{Z}$  und  $\underline{Y}$  sind die Realteile  $R$  und  $G$  nicht reziprok zueinander:  $R \neq 1/G$ . Die Symbole dürfen nicht mit den identischen Symbolen für Widerstand und Leitwert verwechselt werden.

- Der Winkel  $\varphi$  kann auf vielfache Weise berechnet werden:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(\underline{Z}) \\ &= -\arg(\underline{Y}) \\ &= \operatorname{Im} \{\ln(\underline{Z})\} \\ &= \arctan \left( \frac{X}{R} \right), \quad \text{gilt nur für } \underline{Z} = R + jX \text{ im 1. oder 4. Quadranten} \end{aligned}$$

Die Funktion  $\arg()$  – welche den Winkel einer komplexen Zahl liefert – heisst in MATLAB `angle()`.

- Die hier angegebenen Bezeichnungen entsprechen der Norm DIN 1304 [1]. Auch in der Angelsächsischen Literatur werden diese Bezeichnungen laut Wikipedia so verwendet. Abweichend von dieser Norm wird in der deutschsprachigen Literatur zuweilen die Bezeichnung Impedanz für den Scheinwiderstand und die Bezeichnung Admittanz für den Scheinleitwert verwendet.

**3.2. Widerstand (Eigenschaft)**

Für lineare Widerstände<sup>1</sup> (*resistor*) ist die Spannung zu jedem Zeitpunkt zur Stromstärke proportional. Das Verhältnis entspricht dem Widerstandswert  $R$  (*resistance*) oder dem Leitwert  $G$  (*conductance*):

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \frac{u(t)}{i(t)} \\ G &= \frac{i(t)}{u(t)} \end{aligned}}$$

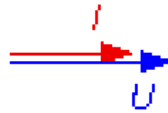
<sup>1</sup> Diese verhalten sich nach dem Ohm'schen Gesetz, d. h. deren Widerstandswert  $R$  hängt nicht von der Stromstärke oder der Spannung ab.

Entsprechend der Definition der Impedanz und der Admittanz oben ergibt sich auf Grund der Homogenitätseigenschaft nach Gleichung (2.7):

$$\begin{array}{l} \underline{Z} = R \\ \underline{Y} = G \\ \varphi = 0 \quad \text{da} \quad \varphi_u = \varphi_i \end{array} \quad (3.9)$$

**Bemerkung:** Hier sind die Symbole für Widerstand und Leitwert identisch mit denen für die Realteile von  $\underline{Z}$  und  $\underline{Y}$ . Dies ist im allgemeinen nicht der Fall!

Im Fall eines Widerstands sind die Zeiger von Spannung und Strom parallel zueinander (cf. Abb. 3.1). Das Verhältnis zwischen  $U$  und  $I$  entspricht dem Widerstandswert und der Phasenwinkel (Phasenverschiebungswinkel)  $\varphi$  ist Null, d. h. die komplexen Größen  $\underline{Z}$  und  $\underline{Y}$  sind hier reell.



**Abbildung 3.1.:** Zeiger von Spannung und Strom für einen linearen Widerstand  
Die beiden Zeiger sind zueinander parallel, unabhängig von ihrer gemeinsamen Richtung.

### 3.3. Kapazität

Für ideale Kondensatoren<sup>2</sup> (*capacitor*) ist die Ladung<sup>3</sup>  $q(t)$  der Spannung  $u(t)$  zu jedem Zeitpunkt proportional. Das Verhältnis entspricht der Kapazität  $C$  (*capacitance*):

$$C = \frac{q(t)}{u(t)}$$

Gemäss dem *Ladungserhaltungsgesetz* ist die Stromstärke in linearen Kondensatoren proportional zur Ladungsänderung und somit auch zur Spannungsänderungsrate:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt} \quad (3.10)$$

Aus der Linearität der Abbildung (2.6) und der Beziehung (2.9) für zeitliche Ableitungen wird klar, dass die folgende Abbildung gilt:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \underline{I} = j\omega C \underline{U} \quad (3.11)$$

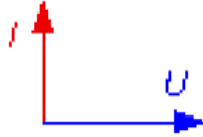
<sup>2</sup> Deren Kapazität  $C$  nicht von der Spannung oder der Ladung abhängt.

<sup>3</sup> In einem Kondensator tragen beide Elektroden bis auf das Vorzeichen die selbe Ladung.

Damit ergibt sich für die komplexen Größen:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{1}{j\omega C} = j \left( -\frac{1}{\omega C} \right) = j X \\ \underline{Y} &= j\omega C = j B \\ \varphi &= -\frac{\pi}{2} \quad \text{da} \quad \varphi_i = \varphi_u + \frac{\pi}{2}\end{aligned}} \quad (3.12)$$

Dargestellt als Zeiger ergibt sich das folgende Bild:



**Abbildung 3.2.:** Spannungs- und Stromzeiger eines linearen Kondensators

Der Zeiger der Stromstärke steht senkrecht auf dem der Spannung und ist gegenüber dem Spannungszeiger um 90 Grad im mathematisch positivem Sinn (Gegenuhrzeigersinn) gedreht. Diese Drehung entspricht einem zeitlichen Vorseilen um eine Viertelperiode.

### 3.4. Selbstinduktivität

Für ideale Spulen<sup>4</sup> (*inductor*) ist der magnetische Fluss (*magnetic flux*) oder Verkettungsfluss (*interlinking flux*)  $\Phi(t)$  der Stromstärke  $i(t)$  zu jedem Zeitpunkt proportional. Das Verhältnis entspricht der Selbstinduktivität  $L$  (*selfinductance*):

$$\boxed{L = \frac{\Phi(t)}{i(t)}}$$

Gemäss dem *Induktionsgesetz* (*induction law*) ist die Spannung über lineare Spulen proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses und somit auch zur Änderungsrate der Stromstärke:

$$u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.13)$$

Aus der Linearität der Abbildung (2.6) und der Beziehung (2.9) für zeitliche Ableitungen wird klar, dass die folgende Abbildung gilt:

$$\boxed{u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \underline{U} = j\omega L \underline{I}} \quad (3.14)$$

Damit ergibt sich für die komplexen Größen:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{Z} &= j\omega L = j X \\ \underline{Y} &= \frac{1}{j\omega L} = j \left( -\frac{1}{\omega L} \right) = j B \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \quad \text{da} \quad \varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}\end{aligned}} \quad (3.15)$$

Dargestellt als Zeiger ergibt sich das folgende Bild:

<sup>4</sup> Verlustlose Spulen (*coil*) oder Leiterschleifen (*circuit loop*) deren Induktivität  $L$  nicht von der Stromstärke oder des magnetischen Flusses abhängt.

### 3.5. Gegeninduktivität

In elektrischen Kreisen, seien es Spulen oder Leiterschleifen, wirkt das Induktionsgesetz unabhängig vom Ursprung des magnetischen Flusses. Im Fall der Selbstinduktivität wird der Fluss durch den im Kreis fließenden Strom erzeugt. Hat der magnetische Fluss einen vom betrachteten Kreis externen Ursprung, spricht man von *Gegeninduktivität* (*mutual inductance*), so dass meistens beide Effekte zusammen auftreten. Die Gegeninduktivität ist analog zur Selbstinduktivität definiert:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}(t)}{i_2(t)}$$

Der erste Index bezeichnet die Leiterschleife auf die der magnetische Fluss wirkt, der zweite bezieht sich auf die Quelle des magnetischen Flusses, d. h. auf die Stromstärke  $i_2(t)$ . Zwei magnetisch gekoppelte Kreise beeinflussen sich stets gegenseitig. Existiert also eine Gegeninduktivität  $L_{12}$  von einem Kreis zum anderen so existiert auch eine Gegeninduktivität  $L_{21}$  in die umgekehrte Richtung. Im Fall von linearen Kreisen zeigt sich, dass die beiden Größen exakt den selben Wert aufweisen<sup>5</sup>:

$$\boxed{L_{12} = L_{21}} \quad (3.16)$$

Im Vorhandensein von Selbst- und Gegeninduktivität ergibt sich für beide gekoppelten Kreise:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + L_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) &= L_{12} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hier sind  $u_1$  die induzierte Spannung in ersten,  $u_2$  die im zweiten Kreis. Der externe magnetische Fluss kann je nach Anordnung der Kreise verschiedene Richtungen aufweisen und so Spannungen mit verschiedenen Vorzeichen erzeugen. Dies wird mit dem *Vorzeichen* von  $L_{12}$  berücksichtigt, welches von den Bezugsrichtungen der Stromstärken, sowie der gegenseitigen Orientierung des Kreise abhängt.

Ferner gilt zwischen den Selbstinduktivitäten  $L_1$  und  $L_2$  und der Gegeninduktivität  $L_{12}$  die Ungleichung

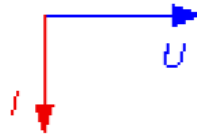
$$\boxed{|L_{12}| \leq \sqrt{L_1 L_2}}, \quad (3.18)$$

mit Gleichheit wenn der gesamte in Kreis 1 erzeugte Fluss den Kreis zwei durchdringt und umgekehrt.

### 3.6. Zusammenfassung

Die Zusammenhänge der Funktionsverläufe im Zeitbereich und den entsprechenden Zeigern sind in der Abbildung 3.4 exemplarisch dargestellt.

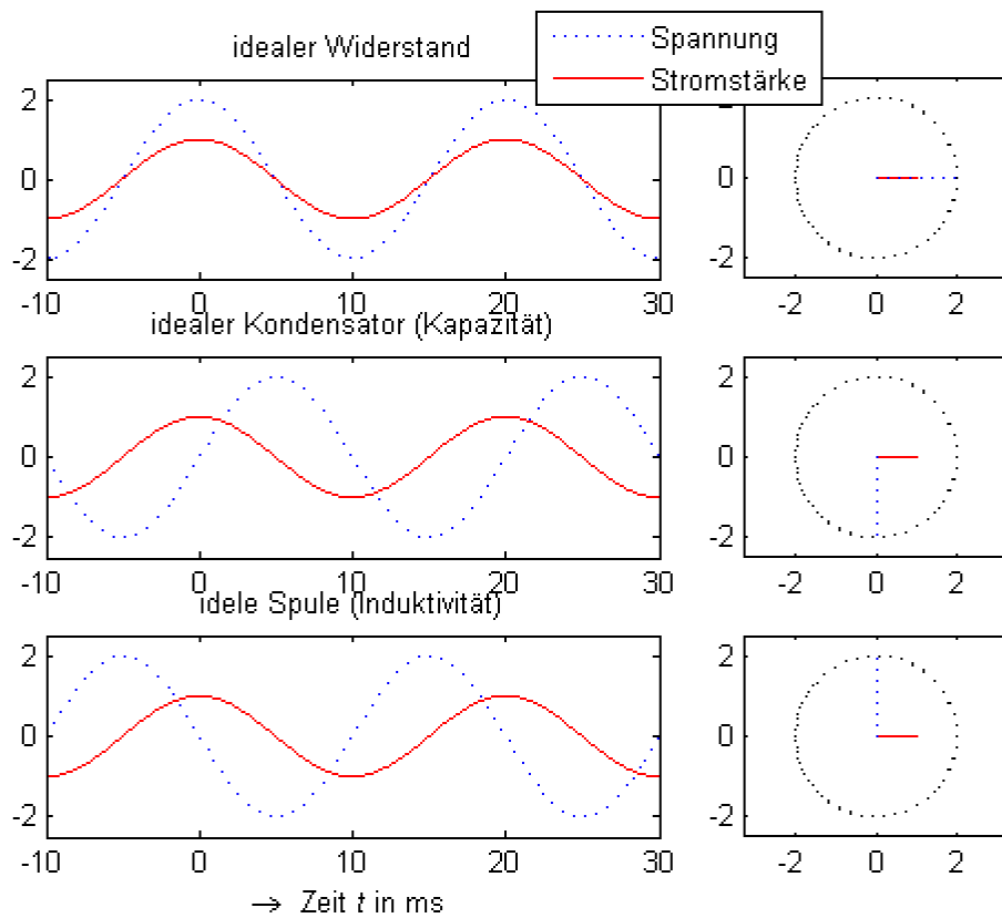
<sup>5</sup> Dies ist der Grund wieso einige Autoren anstelle von  $L_{12}$  das Symbol  $M$  (für *mutual inductance*) benutzen.



**Abbildung 3.3.:** Spannungs- und Stromzeiger einer linearen und verlustlosen Spule

Der Zeiger der Spannung steht senkrecht auf dem der Stromstärke und ist gegenüber dem Stromzeiger um 90 Grad im mathematisch positivem Sinn (Gegenuhreigersinn) gedreht. Diese Drehung entspricht einem zeitlichen Vorseilen um eine Viertelperiode.

Eigenschaft	Widerstand $R$	Kapazität $C$	Induktivität $L$
Impedanz $\underline{Z}$	$R$	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$
Admittanz $\underline{Y}$	$G = \frac{1}{R}$	$j\omega C$	$\frac{1}{j\omega L}$



**Abbildung 3.4.:** Zeitliche Verläufe von Spannung und Stromstärke mit ihren zugehörigen Zeigern. Die Frequenz beträgt hier 50 Hz. Diese Information ist in den Zeigern und den entsprechenden komplexen Größen nicht enthalten. Bei allen Signalen wurde für den Nullphasenwinkel der Stromstärke der Wert Null festgelegt.

## 4. Einfache Wechselstromschaltungen

### 4.1. Einführendes Beispiel: RC-Glied

Gegeben sei die in der Abbildung 4.1 dargestellte Schaltung. Die Quellenspannung verlaufe gemäss  $u_Q(t) = \hat{u}_Q \cos(\omega t)$ . Gesucht wird die Stromstärke  $i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_I)$ .

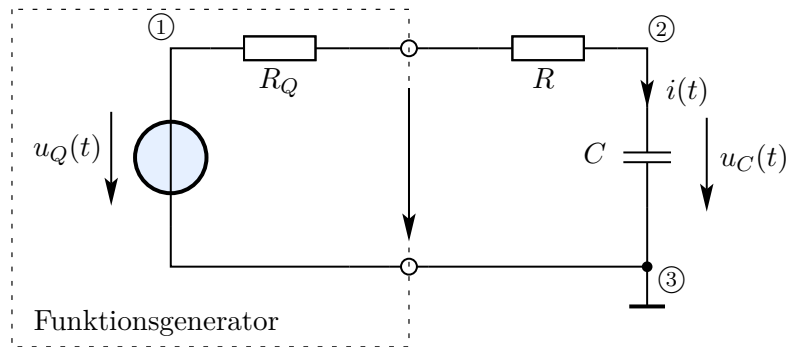


Abbildung 4.1.: RC-Glied mit linearer Quelle

Die „Übersetzung“ in komplexe Grössen lautet:

$$\begin{aligned} u_Q(t) = \hat{u}_Q \cos(\omega t) &\leftrightarrow \underline{U}_Q = U_Q \\ i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_I) &\leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\varphi_I} = I \angle \varphi_I \\ u_C(t) = \hat{u}_C \cos(\omega t + \varphi_C) &\leftrightarrow \underline{U}_C = U_C e^{j\varphi_C} = U_C \angle \varphi_C \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Linearität und der Regel für die Ableitungen erhält man für die „Übersetzung“ des Maschensatzes:

$$u_Q(t) = (R_Q + R) i(t) + u_C(t) \leftrightarrow \underline{U}_Q = (R_Q + R) \underline{I} + \underline{U}_C$$

Mit der Impedanz für die Kapazität wird die (komplexe) Maschengleichung:

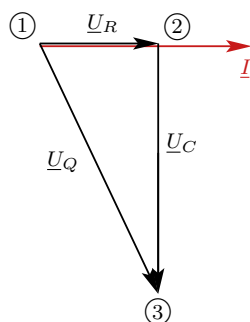
$$\begin{aligned} \underline{U}_Q &= (R_Q + R) \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = \left( R_Q + R + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{I} \\ \rightarrow \underline{I} &= \frac{\underline{U}_Q}{R_Q + R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{U}_Q}{R_Q + R - j \frac{1}{\omega C}} \\ I &= \frac{U_Q}{\sqrt{(R_Q + R)^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \varphi_I &= -\arctan \frac{-1}{\omega C (R_Q + R)} = \arctan \frac{1}{\omega C (R_Q + R)} \end{aligned} \tag{4.1}$$



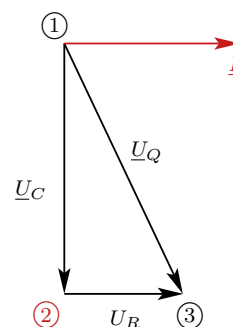
Aus Gleichung (4.1) wird klar, dass Impedanzen wie gewöhnliche Widerstände in Gleichstromfall benutzt werden können. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für Admittanzen. Eine graphische Darstellung der Spannung in der komplexwertigen Maschengleichung (4.1) findet sich in Abb. 4.2. Die Konstruktion erfolgt nach der folgenden Beschreibung.

### Zeigerdiagramm der Spannungen.

- Bei einer Serienschaltung ist der Strom  $\underline{I}$  die gemeinsame in den Bauteilen vorkommende Grösse. Man definiert willkürlich den Winkel des Stromes  $\varphi_i = 0$ . d.h.  $\underline{I} = I$ .
- Multipliziert man den Strom  $\underline{I}$  mit den Impedanzen  $R_Q + R$  und  $1/j\omega C$  der Bauteile der Serienschaltung, so erhält man die Spannungen  $\underline{U}_R = (R_Q + R) \cdot \underline{I}$  und  $\underline{U}_C = \underline{I}/j\omega C$ .
- Die vektorielle Addition der Spannungen  $\underline{U}_Q = \underline{U}_R + \underline{U}_C$  ist in Abb. 4.2a graphisch dargestellt.
- Die Spannungszeiger entsprechen jeweils der Spannung zwischen zwei Knoten des Netzwerks. Die Knoten werden im Spannungszeigerdiagramm eingezeichnet.  
**Achtung:** Bei der graphische Addition von Spannungszeigern ist auf die Reihenfolge zu achten, nur dann entsprechen die Knoten-Potentiale im Zeigerdiagramm denen in der Schaltung, siehe Abb. 4.2.



(a) Korrekte Reihenfolge der Addition.



(b) Falsche Reihenfolge der Addition: der Knoten ② zeigt ein Potential das nicht dem Potential des Knotens ② der Schaltung entspricht.

Abbildung 4.2.: Graphische Addition von Spannungszeigern. Die Reihenfolge der Addition zählt.

## 4.2. Reihen- / Serieschaltung

Die Serieschaltung (Reihenschaltung) von zwei und mehreren Impedanzen kann wegen der Linearität der Abbildung (2.6) genau wie in der Gleichstromlehre behandelt werden. Der

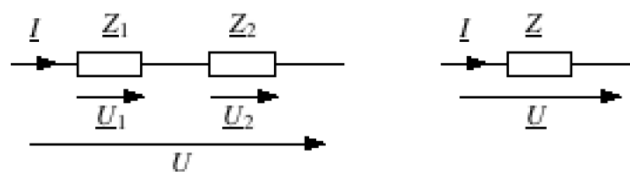


Abbildung 4.3.: Serieschaltung zweier Impedanzen und ihr Ersatzzweipol

Vergleich der Spannungen der Schaltung und des Ersatzzweipols (Abb. 4.3) liefert:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I} = \underline{Z} \underline{I}$$

Verallgemeinert für  $n$  Impedanzen erhält man:

$$\boxed{\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n} \quad (4.2)$$

**Beispiel - Lineares Spulenmodell.** Das Schaltbild in Abb. 4.4 zeigt ein einfaches und lineares Modell einer Spule. für die Impedanz ergibt sich

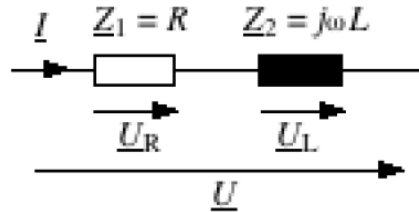


Abbildung 4.4.: Lineares Modell einer verlustbehafteten Spule

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R + j\omega L \\ Z = |\underline{Z}| &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ \varphi = \angle \underline{Z} &= \arctan \frac{\omega L}{R}. \end{aligned}$$

**Beispiel - Spannungsteiler.** Das Schaltbild in Abb. 4.5 zeigt einen Spannungsteiler der aus zwei beliebigen und in Serie geschalteten Impedanzen besteht. Das Verhältnis zwi-

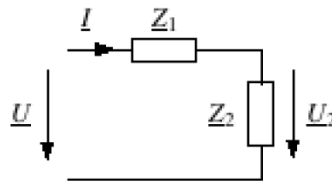


Abbildung 4.5.: Spannungsteiler

schen Ausgangsspannung und Eingangsspannung berechnet sich wie folgt:

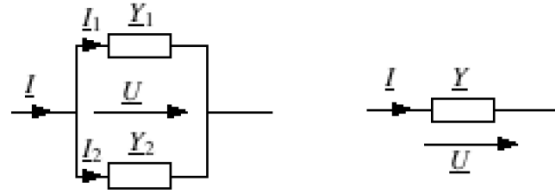
$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}} &= \frac{\underline{Z}_2 \underline{I}}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{U}} \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{U}} \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}} \right| &= \frac{|\underline{Z}_2|}{|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2|} \\ \angle \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}} &= \angle \underline{Z}_2 - \angle (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \end{aligned}$$

**Verallgemeinerung.** Verallgemeinert für die Spannung des  $k$ -ten von  $n$  Impedanzen in Serie erhält man:

$$\boxed{\underline{U}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n} \underline{U}} \quad (4.3)$$

### 4.3. Parallelschaltung

Die Parallelschaltung von zwei und mehreren Impedanzen kann wegen der Linearität der Abbildung (2.6) genau wie in der Gleichstromlehre behandelt werden. In diesem Fall wird sinnvollerweise mit den Admittanzen gerechnet.



**Abbildung 4.6.:** Parallelschaltung zweier Impedanzen bzw. Admittanzen und deren Ersatzzweipol.

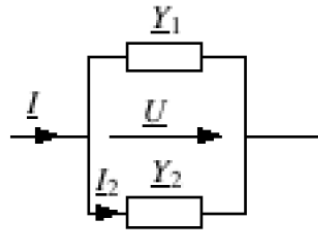
Der Vergleich der Stromstärken der Schaltung und des Ersatzzweipols (Abb. 4.6) liefert:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{Y}_1 \underline{U} + \underline{Y}_2 \underline{U} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{U} = \underline{Y} \underline{U}$$

Verallgemeinert für  $n$  Impedanzen erhält man für deren Admittanzen:

$$\boxed{\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n} \quad (4.4)$$

**Beispiel -Stromteiler.** Das Schaltbild eines Stromteilers mit allgemeinen Admittanzen ist in Abb. 4.7 dargestellt. Das Stromteilerverhältnis errechnet sich wie folgt:



**Abbildung 4.7.:** Stromteiler

$$\begin{aligned} \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}} &= \frac{\underline{Y}_2 \underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{I}} \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{I}} \frac{\underline{I}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \\ \left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}} \right| &= \frac{|\underline{Y}_2|}{|\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2|} \\ \angle \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}} &= \angle \underline{Y}_2 - \angle (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \end{aligned}$$

**Verallgemeinerung.** Verallgemeinert für die Stromstärke im  $k$ -ten von  $n$  parallel geschalteten Impedanzen erhält man:

$$\boxed{\underline{I}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n} \underline{I}} \quad (4.5)$$

Ende Beispiel Stromteiler

## 4.4. Ersatzzweipole

Passive Wechselstromzweipole können aus beliebig vielen linearen R-, L- und C-Elementen bestehen und durch Parallel- und Reihenschaltung in ein Ersatzzweipol zusammengefasst werden. Ihr Klemmenverhalten bei fest gegebener Frequenz kann immer durch die Angabe der Impedanz  $\underline{Z}$  oder der Admittanz  $\underline{Y}$ , beziehungsweise deren Real- und Imaginärteile eindeutig beschrieben werden. Dies führt immer auf eine Kombination von einem Widerstand für den Realteil und einer Kapazität oder Induktivität für den Imaginärteil. Dabei kann ein Serie- oder ein Parallelmodell als Ersatzschaltung gewählt werden. Die Umrechnung soll an Hand des folgenden Beispiels erläutert werden:

**Beispiel - Umrechnung Serie- in Parallelmodell für einen induktiven Zweipol.** Ein linearer Zweipol bestehe aus einer Induktivität  $L_S$  und einem Widerstand  $R_S$  in *Serie* geschaltet. Es stellt sich die Frage welche Werte die *parallel* geschalteten Komponenten  $L_P$  und  $R_P$  annehmen müssen, um das selbe Verhalten für eine festgelegte Frequenz auszuweisen wie die Serieschaltung. Die Umrechnung kann mit Hilfe der Formel (3.8) im Anfang des Kapitels 3 durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= R_S + j\omega L_S \\ \underline{Y} &= \frac{1}{R_P} + \frac{1}{j\omega L_P} = \frac{1}{R_P} + j\frac{-1}{\omega L_P} \\ \text{es muss gelten } \underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{R_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} + j\frac{-\omega L_S}{R_S^2 + (\omega L_S)^2} \\ \text{mit } Z^2 = R_S^2 + (\omega L_S)^2 &\quad \text{erhält man durch Koeffizientenvergleich:} \\ R_P &= \frac{Z^2}{R_S} \\ L_P &= \frac{Z^2}{\omega^2 L_S}\end{aligned}$$

### Bemerkungen.

- Analog kann auch ein Parallel- in ein Serieersatzmodell umgerechnet werden.
- Ähnliche (duale) Betrachtungen gibt es auch für Kapazitäten im Fall von kapazitiven Zweipolen.
- Diese Umrechnungen gelten nur für die Frequenz bei der sie gemacht wurden!

## 4.5. Resonanz

Unter **Resonanz** eines linearen, elektrischen Zweipols versteht man die besondere Betriebsart bei welcher die *Impedanz* oder die *Admittanz* des Zweipols *rein reell* wird<sup>1</sup>. Dies ist dann der Fall, wenn entweder der Imaginärteil oder der Winkel (Argument) der komplexen Grösse verschwinden. Dies kann durch entsprechende Wahl der Frequenz der sogenannten **Resonanzfrequenz** oder durch die Festlegung irgendeines anderen Parameters der Schaltung bewirkt werden.

<sup>1</sup> Diese Definition ist auf elektrische lineare Zweipole beschränkt. Je nach Fachgebiet gibt es andere und möglicherweise leicht verschiedene Definitionen.

**Beispiel - Serieschwingkreis.** Das Schaltbild eines Serieschwingkreises ist in Abb. 4.8 dargestellt. Die Impedanz dieser Serieschaltung errechnet sich wie folgt:

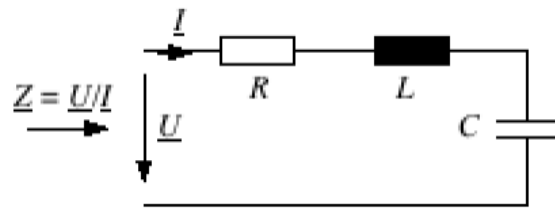


Abbildung 4.8.: RLC-Serieschwingkreis

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Die Impedanz  $\underline{Z}$  wird reell, wenn sein Imaginärteil verschwindet:  $\Im\{\underline{Z}\} = 0$ . Dies ergibt für die Resonanz(kreis)frequenz  $\omega_r$  des Serieschwingkreises:

$$\boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (4.6)$$

#### Bemerkungen.

- Das selbe Ergebnis erhält man auch für den RLC-Parallelschwingkreis, wo die Elemente parallel zueinander geschaltet sind.
- Bei fester Frequenz wird das Phänomen der Resonanz für die **Blindleistungskompensation** benutzt. Dazu mehr im nächsten Kapitel.
- Die Formel 4.6 gilt nicht für alle RLC-Schaltungen, wie im nächsten Beispiel gezeigt wird.

**Beispiel - Resonanztransformator** Das Schaltbild eines Resonanztransformators ist in Abb. 4.9 dargestellt. Die Berechnung des wirksamen Leitwertes liefert den folgenden Aus-

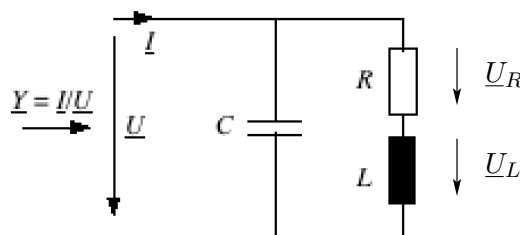


Abbildung 4.9.: Resonanztransformator (auch Boucherot-Schaltung)

druck:

$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}{R + j\omega L}$$

Die Admittanz  $\underline{Y}$  wird reell<sup>2</sup>, wenn sein Winkel (Argument) verschwindet:  $\angle \underline{Y} = 0$ . Unter der Bedingung  $L/R > RC$  erhält man für die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  (die Herleitung wird dem Leser überlassen<sup>3</sup>):

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{RC}{L/R}}$$

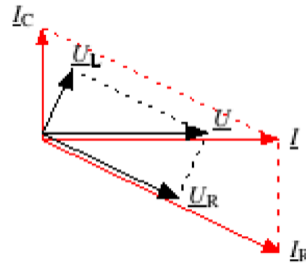
Bei dieser Frequenz erhält man für die Komplexen Größen:

$$\begin{aligned} \underline{Y}(\omega_r) &= R \frac{C}{L} \\ \underline{Z}(\omega_r) &= \frac{1}{R} \frac{L}{C} \end{aligned}$$

Am Eingangs des Zweipols erscheint bei Resonanz ein anderer Widerstand als  $R$ , daher die Bezeichnung Resonanz-Transformator (cf.: <http://de.wikipedia.org/wiki/Resonanztransformator>).

Bei *fester Frequenz* und unter der Bedingung  $\omega < 1/\sqrt{LC}$  kann bei dieser Schaltung Resonanz auch mit der Wahl  $R_r = \sqrt{\frac{L}{C} (1 - \omega^2 LC)}$  erreicht werden. Dabei wird

$$\underline{Y}(R_r) = \sqrt{\frac{C}{L} (1 - \omega^2 LC)}$$



**Abbildung 4.10.:** Zeigerdiagramm des Resonanztransformators bei Resonanz (nicht massstäblich, aber prinzipiell richtig)

In der Abbildung 4.10 sind entsprechend der Resonanzbedingung die Zeiger von  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  parallel. Ausgehend von der Spannung  $\underline{U}$  können die Stromstärken  $\underline{I}_C$  (senkrecht dazu) und  $\underline{I}_R = \underline{I} - \underline{I}_C$  konstruiert werden. Die Spannung  $\underline{U}_L$  steht senkrecht auf  $\underline{I}_R$  und  $\underline{U}_R$  ergibt sich aus  $\underline{U}_R = \underline{U} - \underline{U}_L$ .

<sup>2</sup> Um die Herleitung zu vereinfachen, wird hier wegen der Struktur der Schaltung (Parallelschaltung von C mit RL-Glied) die Admittanz anstelle der Impedanz benutzt.

<sup>3</sup> Hinweis:  $\angle\{1 - \omega_r^2 LC + j\omega_r RC\} - \angle\{R + j\omega_r L\} = \arctan \frac{\omega_r RC}{1 - \omega_r^2 LC} - \arctan \frac{\omega_r L}{R} = 0$

## 5. Leistungsbegriffe

In diesem Kapitel betrachten wir die Leistung an einer Impedanz  $\underline{Z}$ . Zu diesem Zweck stellen wir sie uns wie in Abb. 5.1a als Parallelschaltung eines Wirkwiderstandes  $R$  und eines Blindwiderstandes  $jX$  vor. Das entsprechende Zeigerdiagramm ist in Abb. 5.1b zu sehen.

Ob der Zweipol zu einem bestimmten Zeitpunkt Energie aufnimmt oder abgibt, hängt vom Vorzeichen der Momentanleistung und vom gewählten Bezugspfeilsystem ab. Wir werden für die folgenden Überlegungen ein Verbraucherpfeilsystem voraussetzen, D.h. bei einem positiven Wert der Momentanleistung  $p(t)$  wirkt der Zweipol *passiv* (nimmt Energie auf), bei einem negativen *aktiv*.

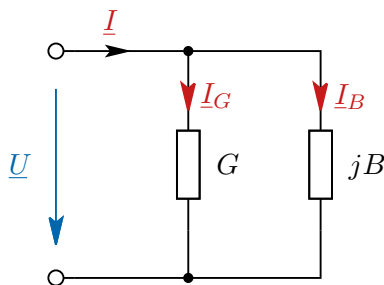
### 5.1. Momentanleistung

Der zeitliche Verlauf des Energiestroms an den Klemmen eines beliebigen Zweipols (*two-terminal device*) wird **Momentanleistung** (*instantaneous power*) genannt. Diese kann aus den zeitlichen Verläufen der Spannung und der Stromstärke wie folgt bestimmt werden.

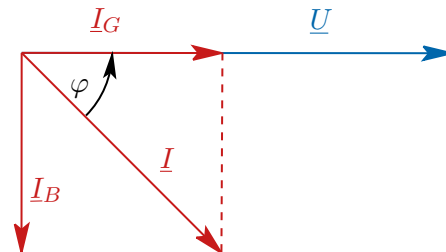
$$\boxed{p(t) = u(t) \cdot i(t)} \quad (5.1)$$

Für einen linearen Zweipol bei harmonischer Anregung ergibt sich

$$p(t) := u(t) \cdot i(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (5.2)$$



(a) Parallel-Ersatzschaltbild der Impedanz.



(b) Zeigerdiagramm,  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ .

Abbildung 5.1.: Wirk und Blindanteil des Stromes.

Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom wird durch  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  ausgedrückt und hängt von der Art des Verbrauchers ab. Wir stellen den Strom entsprechend dem Zeigerdiagramm in Abb. 5.1b als Summe

$$i(t) = i_G(t) + i_B(t), \quad (5.3)$$

zweier Komponenten dar, wobei die Komponente  $i_G(t) = \hat{i}_G \cos(\omega t + \varphi_u)$  dieselbe Phase besitzt wie die Spannung  $u(t)$  und  $i_B(t) = \hat{i}_B \sin(\omega t + \varphi_u)$  eine gegenüber der Spannung um  $90^\circ$  nacheilende Phase besitzt. Für diese Zeitsignale gilt

$$\begin{aligned} i_B(t) &= \hat{i} \sin(\varphi) \sin(\omega t + \varphi_u) \quad \text{und} \\ i_G(t) &= \hat{i} \cos(\varphi) \cos(\omega t + \varphi_u). \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in (5.3) und (5.2) liefert

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot [i_G(t) + i_B(t)] \\ &= \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \hat{i} \cos(\varphi) \cos(\omega t + \varphi_u) + \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \hat{i} \sin(\varphi) \sin(\omega t + \varphi_u) \\ &= \hat{u} \hat{i} \cos(\varphi) \cos^2(\omega t + \varphi_u) + \hat{u} \hat{i} \sin(\varphi) \cos(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_u) \\ &= \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \cos(\varphi) [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)] + \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \sin(\varphi) \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \end{aligned}$$

$$p(t) = UI \cos(\varphi) [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)] + UI \sin(\varphi) \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \quad (5.4)$$

wobei im letzten Schritt die Effektivwerte  $U$  und  $I$  (cf. Anhang B.2) eingesetzt wurden. Aus der letzten Gleichung schliessen wir, die Momentanleistung an den Klemmen eines linearen Zweipols besteht aus einem konstanten Anteil und Wechselanteilen mit jeweils der doppelten Frequenz der harmonischen Anregung (cf. Abbildung 5.2, Mitte, S. 25).

## 5.2. Wirkleistung

Der *lineare Mittelwert der Momentanleistung* wird Wirkleistung (*real power*) genannt und entspricht der im Mittel durch den Zweipol aufgenommenen Energie pro Zeiteinheit:

$$P = \frac{1}{T} \int_T p(t) dt = UI \cos \varphi \quad (5.5)$$

### Interpretation

- An einem Wirkwiderstand gilt für die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Spannung und Strom  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$ . Damit ergibt (5.5) eine Wirkleistung  $P = UI \cos(\varphi)$ . Diese ist gleich der im Mittel aufgenommenen Wärmeleistung eines Widerstandes.
- Für  $P > 0$ , bzw. für  $|\varphi| < \pi/2$ , entspricht die Wirkleistung dem im Zeitmittel durch den Zweipol aufgenommenen Energiestrom.  
Für  $P < 0$ , bzw. für  $\pi/2 < |\varphi| \leq \pi$ , entspricht die Wirkleistung dem im Zeitmittel durch den Zweipol abgegebenen Energiestrom.
- An einem Blindwiderstand gilt  $\varphi = \pm\pi/2$  und damit  $P = 0$ . Mit anderen Worten, ein Blindwiderstand nimmt im zeitlichen Mittel keine Wirkleistung auf.
- Die Einheit der Wirkleistung:  $[P] = \text{J/s} = \text{W}$  (Watt)
- $P$  kann positiv sein, obschon  $p(t)$  zeitweise negativ wird und umgekehrt.



### 5.3. Blindleistung

Bei einem Zweipol, der fähig ist Energie zu speichern<sup>1</sup>, setzt sich der Wechselanteil der Momentanleistung entsprechend (5.4) gemäss folgender Zerlegung zusammen:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \underbrace{UI \cos(\varphi)}_{\text{Wirkleistung } P} + \underbrace{UI \cos(\varphi) \cos(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Wechselanteil aufgrund Wirkanteil}} + \underbrace{UI \sin(\varphi) \sin(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Wechselanteil aufgrund Blindanteil}} \\
 &= P + P \cos(2\omega t + 2\varphi_u) + Q \sin(2\omega t + 2\varphi_u)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Hierbei wurde die so genannte **Blindleistung** (*reactive power*) eingeführt:

$$Q := UI \sin \varphi \tag{5.7}$$

#### Interpretation

- Der Term  $P(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u))$  entspricht der momentanen Wirkleistung im Zweipol. Diese schwingt harmonisch um ihren Mittelwert  $P$  mit der doppelten Anregungsfrequenz zwischen den Extremwerten 0 und  $2P$ .
- Der Term  $Q \sin(2\omega t + 2\varphi_u)$  entspricht der momentan umgespeicherten Leistung im Zweipol. Diese schwingt harmonisch um ihren Mittelwert 0 mit der doppelten Anregungsfrequenz zwischen den Extremwerten  $-|Q|$  und  $+|Q|$ .
- Die Blindleistung hat ein Vorzeichen:
  - positive Phasenverschiebungswinkel ( $0 \leq \varphi < \pi$ ) ergeben positive Q-Werte. In diesem Fall eilt die Spannung der Stromstärke voraus. Der Zweipol zeigt *induktives Verhalten* und die Blindleistung wird als induktiv bezeichnet.
  - negative Phasenverschiebungswinkel ( $-\pi < \varphi < 0$ ) ergeben negative Q-Werte. In diesem Fall eilt die Stromstärke der Spannung voraus. Der Zweipol zeigt *kapazitives Verhalten* und die Blindleistung wird als kapazitiv bezeichnet.
- Die Einheit der Blindleistung wird zur Unterscheidung von der Wirkleistung und der anschliessend definierten Scheinleistung nicht in Watt angegeben, sondern in *Volt-Ampere-reaktiv*:  $[Q] = \text{VAr}$  oder  $\text{var}$

### 5.4. Scheinleistung

Die Amplitude des Wechselanteils der Momentanleistung (cf. Gleichung(5.4) und Abb. 5.2, Mitte) wird **Scheinleistung** (*apparent power*) genannt und mit dem Symbol  $S$  bezeichnet:

$$S = UI \tag{5.8}$$

<sup>1</sup> d. h. der Zweipol enthält kapazitive und/oder induktive Speicher

**Bemerkungen.**

- Die Einheit der Scheinleistung wird zur Unterscheidung von der Wirkleistung nicht in Watt angegeben, sondern in *Volt-Ampere*:  $[S] = \text{VA}$
- Da die Scheinleistung einer Amplitude entspricht, ist sie immer positiv, auch wenn  $P < 0$  ist.
- Mit der Scheinleistung kann für die Wirk- und die Blindleistung geschrieben werden:

$$P = S \cos \varphi$$

$$Q = S \sin \varphi$$

Aus diesen Gleichungen ist offensichtlich, dass gilt:

$$\begin{aligned} S^2 &= P^2 + Q^2 \\ \tan \varphi &= \frac{Q}{P} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Entsprechend der Gleichung (5.9) kann die **komplexe Scheinleistung** definiert werden (Pythagoras):

$$\boxed{\underline{S} = S \angle \varphi = P + jQ} \tag{5.10}$$

**Bemerkungen.**

- Die komplexe Scheinleistung kann *nicht als komplexe Grösse* oder Zeiger für die Momentanleistung interpretiert werden, zumal letztere ein Mischsignal mit doppelter Frequenz ist.
- Das Verhältnis  $\lambda = P/S$  wird **Leistungsfaktor** (*power factor*) und das Verhältnis  $Q/S$  **Blindfaktor** (*reactive factor*) genannt:

$$\begin{aligned} \lambda = \cos \varphi &= \frac{P}{S} \\ \sin \varphi &= \frac{Q}{S} \end{aligned}$$

Die komplexe Scheinleistung kann aus der komplexen Spannung und der komplexen Stromstärke an den Klemmen eines Zweipols direkt bestimmt werden. Von der Stromstärke muss allerdings der konjugierte Wert genommen werden, damit der Phasenverschiebungswinkel stimmt!

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* &&= P + jQ \\ &= (\underline{Z} \underline{I}) \underline{I}^* = \underline{Z} I^2 &&= R I^2 + jX I^2 \\ &= \underline{U} (\underline{Y} \underline{U})^* = \underline{Y}^* U^2 &&= G U^2 + j(-B U^2) \end{aligned}$$

## 5.5. Anwendungen

### 5.5.1. Blindleistungskompensation

Typische industrielle elektrische Anlagen sind im Allgemeinen wegen den Transformatoren und den elektrischen Motoren induktiv. Da in diesem Fall die Blindleistung zwischen Stromlieferant und Abnehmer hin und her „geschoben“ wird, erhöht sich dadurch die Stromstärke gegenüber der nur für die Wirkleistung benötigte (cf. Abb. 5.3). Diese erhöhte Stromstärke führt in den Zuleitungen zu unnötigen Verlusten, welche den grossen Stromkunden als Blindenergie verrechnet werden. So wird allgemein dafür gesorgt, dass der Leistungsfaktor  $\lambda = \cos \varphi$  typischerweise oberhalb 0.9 liegt (cf, z. B.: <http://www.aen.ch/stream/de/download---0--0--0--1181.pdf>). Dies wird durch Kondensatoren bewirkt, die so gewählt werden, dass Sie den Blindstrom der induktiven Last lokal aufnehmen und abgeben können. Für den Lieferanten erscheint so nur noch eine Wirklast am Leitungsende.

Bei einer induktiven Last dargestellt durch die Parallelschaltung von einer Induktivität  $L$  und einem Widerstand  $R$  kann die benötigte Kapazität des parallel-geschalteten Kompensationskondensators wie folgt berechnet werden (Resonanz des Parallelschwingkreises):

$$C = \frac{1}{\omega^2 L}$$

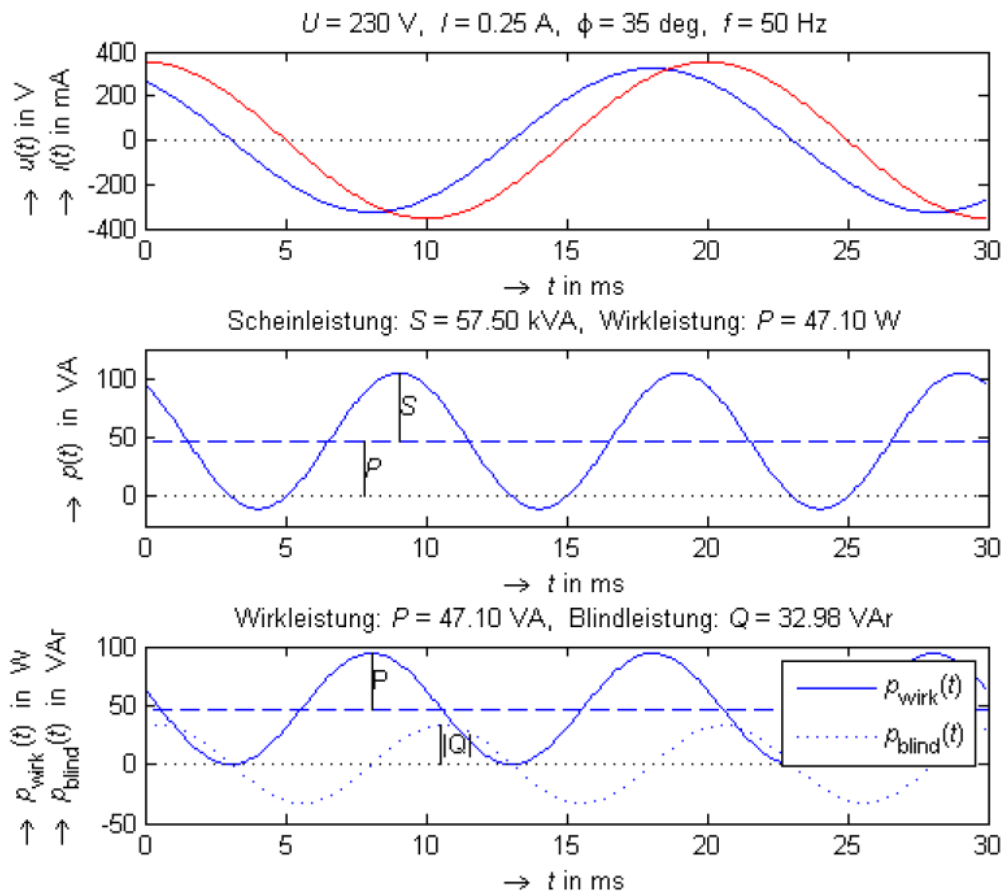
Die selbe Formel gilt auch im Fall der Serieschaltung aller Elemente, ist aber nicht immer oder nur näherungsweise gültig für andere Konfigurationen (cf. Resonanztransformator, Abb. 4.9).

### 5.5.2. Leistungsanpassung

Analog zur Problematik der Leistungsoptimierung bei Gleichstrom, stellt sich auch bei Wechselstrom die Frage nach den Bedingungen unter welchen die Leistungsabgabe an eine komplexe Last maximiert werden kann. Die Abbildung 5.4 zeigt die betrachtete Schaltung.

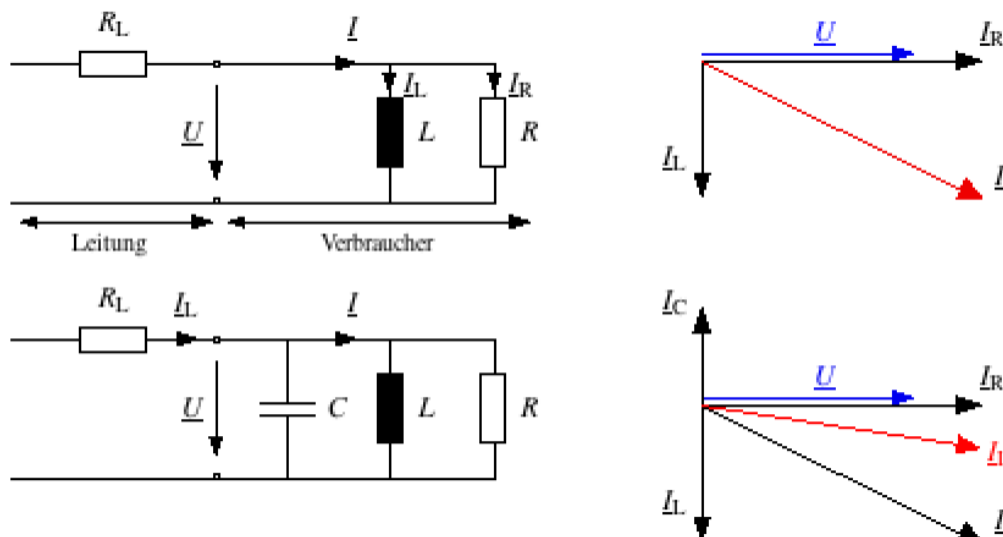
$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}_Q}{\underline{Z}_Q + \underline{Z}} \\ \underline{U} &= \underline{Z} \underline{I} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_Q + \underline{Z}} \underline{U}_Q \\ \underline{I}^* &= \frac{\underline{U}_Q^*}{(\underline{Z}_Q + \underline{Z})^*} \\ \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = \frac{\underline{Z}}{|\underline{Z}_Q + \underline{Z}|^2} \underline{U}_Q^2 = \frac{R + jX}{(R_Q + R)^2 + (X_Q + X)^2} U_Q^2 \\ \underline{S} &= P + jQ = \frac{R}{(R_Q + R)^2 + (X_Q + X)^2} U_Q^2 + j \frac{X}{(R_Q + R)^2 + (X_Q + X)^2} U_Q^2 \end{aligned}$$

**Wirkleistungsanpassung.** Die von der linearen Quelle an die Lastimpedanz abgegebene Wirkleistung wird maximal, wenn  $R = R_Q$  und  $X = -X_Q$  ist, d. h. bei  $\underline{Z} = \underline{Z}_Q^*$ . Diese



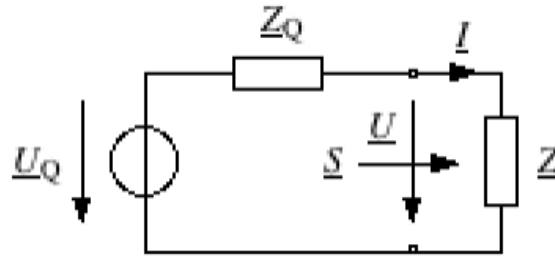
**Abbildung 5.2.:** Momentanleistung und ihre Zerlegung in Wirk- und Blindanteil

Oben sind Spannung und Stromstärke einer induktiv wirkenden Last (Spannung vor Strom) dargestellt, in der mittleren Graphik der zeitliche Verlauf der Momentanleistung und unten die Zerlegung dieses Verlaufs in Wirk- und Blindanteil.



**Abbildung 5.3.:** Blindleistungskompensation

Oben ist die Situation ohne Kompensation mit dem entsprechenden Zeigerdiagramm dargestellt. Unten die Lage mit teilweiser Kompensation. Aus dem Zeigerdiagramm ist ersichtlich, dass die Stromstärke in der Zuleitung bei Kompensation kleiner ist als im Fall ohne Kompensation. Bei einer vollständigen Kompensation wäre die Stromstärke in der Zuleitung gleich  $I_R$ .



**Abbildung 5.4.:** Lineare Quelle mit Lastimpedanz: Die Quelle besitzt einen linearen Widerstand  $\underline{Z}_Q = R_Q + jX_Q$ , die Last die Impedanz  $\underline{Z} = R + jX$ .

Bedingung lässt sich aber nur für eine bestimmte feste Frequenz erfüllen. Dabei erhält man:

$$P_{max} = \frac{U_Q^2}{4R_Q}$$

$$Q = -\frac{X_Q}{4R_Q^2} U_Q^2$$

Im Fall der Wirkleistungsanpassung wird die Blindleistung nur zwischen dem Last- und dem Quelleninnenwiderstand ausgetauscht. Die ideale Quelle sieht eine reelle Last.

**Scheinleistungsanpassung.** Um der Leistungsanpassung in einem möglichst grossen Frequenzbereich näher zu kommen, wird  $R = R_Q$  und  $X = X_Q$  gewählt, d. h.  $\underline{Z} = \underline{Z}_Q$ . Damit ergibt sich:

$$P_{max} = \frac{R_Q}{4Z_Q^2} U_Q^2 = \frac{R_Q}{4(R_Q^2 + X_Q^2)} U_Q^2$$

$$Q = \frac{X_Q}{4Z_Q^2} U_Q^2 = \frac{X_Q}{4(R_Q^2 + X_Q^2)} U_Q^2$$

Die Leistungsanteile  $P$  und  $|Q|$  sind dabei kleiner als im Fall der Wirkleistungsanpassung.

# A. Komplexe Zahlen

## A.1. Imaginäre Zahlen

Um die *Quadratwurzel von negativen Zahlen* bestimmen zu können, braucht es eine Erweiterung des gewohnten Zahlenbegriffs (i. e. *natürliche*  $\mathbb{N}$ , *ganze*  $\mathbb{Z}$ , *rationale*  $\mathbb{Q}$ , *reelle* Zahlen  $\mathbb{R}$ ). Zu diesem Zweck definiert man die **imaginäre Einheit** wie folgt<sup>1</sup>:

$$i = \sqrt{-1} \quad (\text{A.1})$$

Damit gilt:

$$i^2 = -1$$

So kann die Quadratwurzel irgend einer negativen (reellen) Zahl  $a \in \mathbb{R}$  bestimmt werden:

$$\sqrt{a} = \sqrt{(-1)(-a)} = \sqrt{-1}\sqrt{-a} = i\sqrt{-a}$$

**Bemerkung:** Vorwiegend in der Elektrotechnik wird  $j$  anstelle von  $i$  als Symbol für die imaginäre Einheit benutzt.

## A.2. Komplexe Zahlen

Reelle und imaginäre Zahlen können zu **komplexen Zahlen** kombiniert werden:

$$x = a_x + ib_x \quad (\text{A.2})$$

Dabei sind

- $x$  komplexe Zahl,  $x \in \mathbb{C}$
- $a_x$  **Realteil** der komplexen Zahl  $x$ ,  $a_x = \Re\{x\}$ ,  $a_x \in \mathbb{R}$
- $b_x$  **Imaginärteil** der komplexen Zahl  $x$ ,  $b_x = \Im\{x\}$ ,  $b_x \in \mathbb{R}$

**Bemerkung:** In der Elektrotechnik werden, insbesondere im Zusammenhang mit der Wechselstromlehre, komplexe Zahlen üblicherweise unterstrichen, um diese Eigenschaft hervorzuheben.

Jeder komplexen Zahl kann man in der so genannten **Gauß'schen Zahlenebene**<sup>2</sup> einen Punkt zuweisen: Dabei wird auf der *reellen Achse* (Abszisse, x-Achse) der Realteil und

---

<sup>1</sup> *imaginär*: eingebildet, vorgestellt, also *nicht reell*

<sup>2</sup> Johann Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855)

auf der *imaginären Achse* (Ordinate, y-Achse) der Imaginärteil der komplexen Zahl aufgetragen. Real- und Imaginärteil können so wie die **kartesischen Komponenten** der komplexen Zahl betrachtet werden. So kann man ebenfalls die **polaren Komponenten** einer komplexen Zahl definieren:

- **Absolutbetrag** oder kurz **Betrag**, sowie auch *Modul* der komplexen Zahl  $x$ :

$$|x| = \sqrt{a_x^2 + b_x^2} \quad (\text{A.3})$$

- **Winkel** oder **Argument** der komplexen Zahl  $x$ :

$$\angle x = \arctan \frac{b_x}{a_x} \quad (4\text{-Quadranten arctan mit } -\pi \leq \angle x \leq +\pi) \quad (\text{A.4})$$

Mit Betrag und Winkel kann die komplexe Zahl also wie folgt angegeben werden:

$$x = a_x + ib_x = |x| \cos \angle x + i|x| \sin \angle x \quad (\text{A.5})$$

Die folgende Identität (A.6) ist bekannt unter dem Namen **Euler'sche Beziehung**<sup>3</sup>:

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha} \quad (\text{A.6})$$

Mit  $r = |x|$  und  $\varphi = \angle x$  kann jede komplexe Zahl auch in der *Euler'schen Form* angegeben werden:

$$x = |x|e^{i\angle x} = re^{i\varphi} \quad (\text{A.7})$$

Ferner definiert man die zu der komplexen Zahl  $x = a_x + ib_x$  **konjugierte** komplexe Zahl:

$$x^* = a_x - ib_x = |x|e^{-i\angle x}$$

Bei der Konjugation wird das Vorzeichen des Imaginärteils und, bei der Euler'schen Form, das des Winkels gewechselt.

### A.3. Grundoperationen

Für die beiden (allgemeinen) komplexen Zahlen  $x = a_x + ib_x$  und  $y = a_y + ib_y$  werden die vier Grundoperationen wie folgt definiert:

- **Addition** und **Subtraktion**

$$x \pm y = (a_x \pm a_y) + i(b_x \pm b_y) \quad (\text{A.8})$$

---

<sup>3</sup> Leonhard Euler (1707 - 1783)

- **Produkt**

$$x \cdot y = (a_x + ib_x) \cdot (a_y + ib_y) = (a_x a_y - b_x b_y) + i(a_x b_y + b_x a_y)$$

$$x \cdot y = |x||y|e^{i(\angle x + \angle y)} \quad (\text{A.9})$$

- **Quotient**

$$\frac{x}{y} = \frac{a_x + ib_x}{a_y + ib_y} = \frac{a_x + ib_x}{a_y + ib_y} \cdot \frac{a_y - ib_y}{a_y - ib_y} = \frac{a_x a_y + b_x b_y}{a_y^2 + b_y^2} + i \frac{-a_x b_y + b_x a_y}{a_y^2 + b_y^2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|} e^{i(\angle x - \angle y)} \quad (\text{A.10})$$

## A.4. Weitere Eigenschaften

- Addition und Multiplikation sind *assoziativ*:  $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$   
und  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z$
- Die Multiplikation ist *kommutativ*:  $x \cdot y = y \cdot x$
- Addition und Multiplikation sind *distributiv*:  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- Für die Konjugation gilt:  $(x^*)^* = x$  und  $(x \cdot y)^* = x^* \cdot y^*$
- Reziproker Wert:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{|x|} e^{-i\angle x} = \frac{a_x}{a_x^2 + b_x^2} + i \frac{-b_x}{a_x^2 + b_x^2}$$

- Summe einer komplexen Zahl mit ihrer Konjugierten:

$$x + x^* = 2\Re\{x\}$$

- Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer Konjugierten:

$$x \cdot x^* = |x|^2$$

- Eulersche Form der imaginären Einheit:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- Eulersche Form der negativen reellen Einheit:

$$-1 = e^{\pm i\pi}$$

- Die Multiplikation mit der imaginären Einheit entspricht in der Gaußschen Zahlenebene einer Rotation des Zahlenpunktes um  $\frac{\pi}{2}$  im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung:

$$ix = xe^{i\frac{\pi}{2}}$$



## B. Mittelwerte

### B.1. Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert eines beliebigen *periodischen* Signals  $x(t)$  mit Periodendauer  $T$  ist wie folgt definiert:

$$X_{\text{lin}} = \frac{1}{T} \int_T x(t) \, dt$$

#### Bemerkungen

- Der Index  $T$  rechts unten neben dem Integralzeichen soll andeuten, dass über die Dauer einer Periode integriert werden soll, egal wo begonnen wird, bzw. wie die Integrationsgrenzen gewählt werden.
- Der Wert von  $X_{\text{lin}} \cdot T$  entspricht der Fläche unter dem Funktionsverlauf von  $x(t)$  für die Dauer einer Periode. Mit dieser Erkenntnis kann in einigen einfachen Fällen der lineare Mittelwert aus der Fläche unter  $x(t)$  bestimmt werden ohne das Integral lösen zu müssen. Insbesondere im Fall einer *ungeraden* Funktion<sup>1</sup> wird der lineare Mittelwert immer Null sein.
- Alle harmonischen Signale haben einen linearen Mittelwert von Null, da sie ebenso viele positive wie negative Funktionswerte aufweisen.

### B.2. Quadratischer Mittelwert, Effektivwert

Der quadratische Mittelwert eines beliebigen *periodischen* Signals  $x(t)$  mit Periodendauer  $T$  ist wie folgt definiert:

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T x^2(t) \, dt}$$

---

<sup>1</sup> Eine ungerade Funktion erfüllt folgende Bedingung:  $x(-t) = -x(t)$ .

**Bemerkungen.**

- Der Index  $T$  rechts unten neben dem Integralzeichen soll andeuten, dass über die Dauer einer Periode integriert werden soll, egal wo begonnen wird, bzw. wie die Integrationsgrenzen gewählt werden.
- In der elektrischen Messtechnik wird allgemein der Begriff **Effektivwert** oder **RMS-Wert** (**r**oot **m**ean **s**quare) für den quadratischen Mittelwert benutzt.
- Alle harmonischen Signale haben einen quadratischen Mittelwert von  $X = \hat{x}/\sqrt{2}$  wie in der Beziehung (2.4) schon angegeben.
- Ein periodisches **Mischsignal** besteht aus einem *mittleren Pegel*  $X_0$  (Offset) und einem periodischen *Wechselanteil*  $x_w(t)$  dessen linearer Mittelwert Null sein soll<sup>2</sup>:

$$x(t) = X_0 + x_w(t)$$

Sofern der Offset  $X_0$  und der Effektivwert  $X_w$  des Wechselanteils bekannt sind, lässt sich der Effektivwert eines Mischsignals vereinfacht berechnen:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T (X_0 + x_w(t))^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_T (X_0^2 + 2X_0x_w(t) + x_w^2(t)) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \left( X_0^2 \int_T dt + 2X_0 \int_T x_w(t) dt + \int_T x_w^2(t) dt \right)} \\ &= \sqrt{X_0^2 + X_w^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow X^2 = X_0^2 + X_w^2$$

- In der Nachrichtentechnik wird das Quadrat des Effektivwerts auch mit *Signalleistung* bezeichnet.

**B.3. Verhältniszahlen**

Für periodische Signale, insbesondere für Mischsignale, sind folgende Begriffe im Zusammenhang mit den Mittelwerten definiert:

---

<sup>2</sup> Jedes periodische Signal kann als Mischsignal zerlegt werden, da ja gemäss Definition sein linearer Mittelwert gerade der Grösse  $X_0$  entspricht.

<b>Scheitelwert</b> ( <i>peak value, crest Value</i> )	maximaler Betrag
<b>Gleichwert</b> ( <i>direct component</i> )	linearer Mittelwert
<b>Gleichrichtwert</b> ( <i>rectified value</i> )	linearer Mittelwert des gleichgerichteten Signals (Ein- oder Zweiweggleichrichtung)
<b>Scheitelfaktor</b> ( <i>crest factor</i> )	Verhältnis Scheitelwert zu Effektivwert
<b>Formfaktor</b> ( <i>form factor</i> )	Verhältnis Effektivwert zu Gleichrichtwert
<b>Schwingungsgehalt</b>	Verhältnis Effektivwert des Wechselanteils zu Effektivwert des Mischsignals
<b>effektive Welligkeit</b>	Verhältnis Effektivwert des Wechselanteils zu Gleichwert des Mischsignals
<b>Riffelfaktor</b> ( <i>ripple</i> )	Verhältnis Scheitelwert des Wechselanteils zu Gleichwert des Mischsignals

## C. Hinweise zu Matlab

### C.1. Wechselstromschaltung

Listing C.1: Matlab-Code zur Berechnung einer einfachen Wechselstrom-Schaltung

```
% Beispiel fuer die Berechnung einer Wechselstromschaltung
%
% ©2009, M. Schlup
%
% gegeben: RC-Glied an Spannung U mit Frequenz f
% gesucht: Stromstaerke I, Phasenwinkel  $\phi = \phi_U - \phi_I$ ,
% Schein- S, Wirk- P und Blindleistung Q

clear all, clc, close all, format compact

% Parameter
f=50; % Frequenz in Hz
w=2*pi*f; % Kreisfrequenz in 1/s
R=10e3; % Widerstand in Ohm
C=220e-9; % Kapazität in Farad
Ueff=230; % Spannung, Effektivwert in Volt
phiU=0; % Nullphasenwinkel der Spannung in Rad (frei wählbar)
U=Ueff*exp(j*phiU); % komplexe Spannung
% Berechnung
Z=1./(1/R+j*w*C); % Impedanz des RC-Glieds (Parallelschaltung)
I=U/Z;
ImA=1e3*abs(I) % Effektivwert der Stromstaerke in Milli-Amp
phi=(angle(U)-angle(I)) % Phasenwinkel in rad
Sk=U*I' % komplexe Scheinleistung
S=abs(Sk) % Scheinleistung in Volt-Ampere
P=real(Sk) % Wirkleistung in Watt
Q=imag(Sk) % Blindleistung in Volt-Ampere reaktiv
```

## D. Literaturverzeichnis

- [1] *Formelzeichen, Formelsatz, mathematische Zeichen und Begriffe: Normen*, 3rd ed., ser. Normung, Konstruktion, Messwesen. Berlin and Wien and Zürich: Beuth, 2009, vol. 202.