Martin Weisenhorn

27. März 2020

Lernübungen – Sinusförmige Wechselgrössen

Aufgabe 1. (Den Verlauf einer sinusförmigen Wechselgrösse skizzieren) Gegeben ist die Spannung

$$u(t) = \hat{u}\cos(2\pi f t + \varphi_u),$$

wobei $\hat{u} = 2\,\mathrm{V}$ und $\varphi_u = \pi/4$.

- Zeichnen Sie den Verlauf dieser Spannung für $f = 1\,\mathrm{Hz}$ in dem Intervall $-0.5\,\mathrm{s} \leq t \leq 1\,\mathrm{s}$ in ein Koordinatensystem. Stellen Sie auf der horizontalen Achse die Zeit t und auf der vertikalen Achse die Spannung $u(t)$ dar. Gehen Sie dabei in den folgenden Schritten vor:

  a) Berechnen Sie die Periodendauer T der Spannung.

  b) Berechnen Sie die Zeit t_u an der Maximalwert der Cosinus-förmigen Spannung auftritt. Dabei soll berücksichtigt werden dass der Nullphasenwinkels φ_u von Null verschieden ist..

  c) Zeichnen Sie auf der t-Achse die Dauer einer Periode ein. Teilen Sie diese Periode in 12 gleiche Teile und skizzieren Sie mit deren Hilfe den Verlauf der Spannung $u(t)$ entlang einer Periode.

- Zeichnen Sie in das Koordinatensystem der vorigen Teilaufgabe die Spannung $u(t)$ für $f = 2\,\mathrm{Hz}$ ein. Wiederholen Sie dabei nach Bedarf die obigen Schritte. Die Spannung $u(t)$ besitzt dieselbe Phase φ_u unabhängig ob $f = 1\,\mathrm{Hz}$ oder $f = 2\,\mathrm{Hz}$. Die Zeitverschiebung t_u ist jedoch eine andere. Warum?

Aufgabe 2. (Die mathematische Beschreibung einer sinusförmigen Wechselgrösse aus einem Graphen ablesen) Abb. 1 zeigt den Verlauf einer sinusförmigen Wechselspannungen $u(t)$. Bestimmen Sie für diese Spannung die Konstanten φ_u, $\hat{u}$, sowie f in dem Ausdruck $u(t) = \hat{u}\cos(2\pi f t + \varphi_u)$. Gehen Sie nach den folgenden Punkten vor:

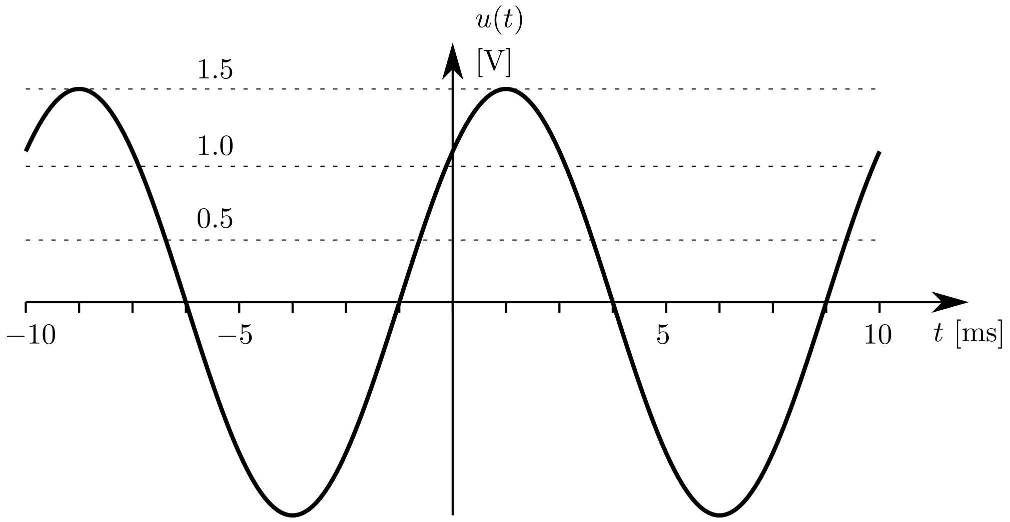


Abbildung 1: Sinusförmiger Spannungsverlauf.

a) Bestimmen Sie die Periodendauer T mit Hilfe eines Lineals.

b) Berechnen Sie aus der Periodendauer T die Frequenz f.

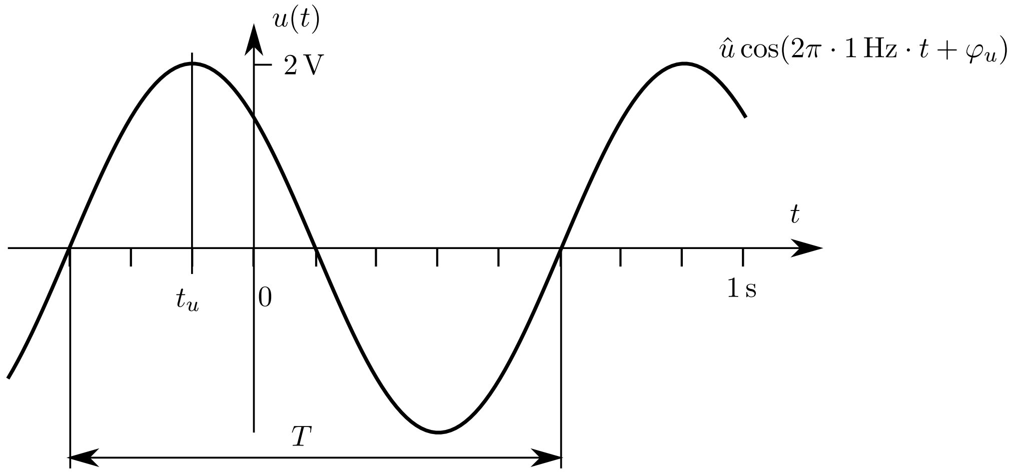
c) Bestimmen Sie den Scheitelwert $\hat{u}$.

d) Zeichnen Sie den Zeitpunkt t_u in Abb. 1 ein.

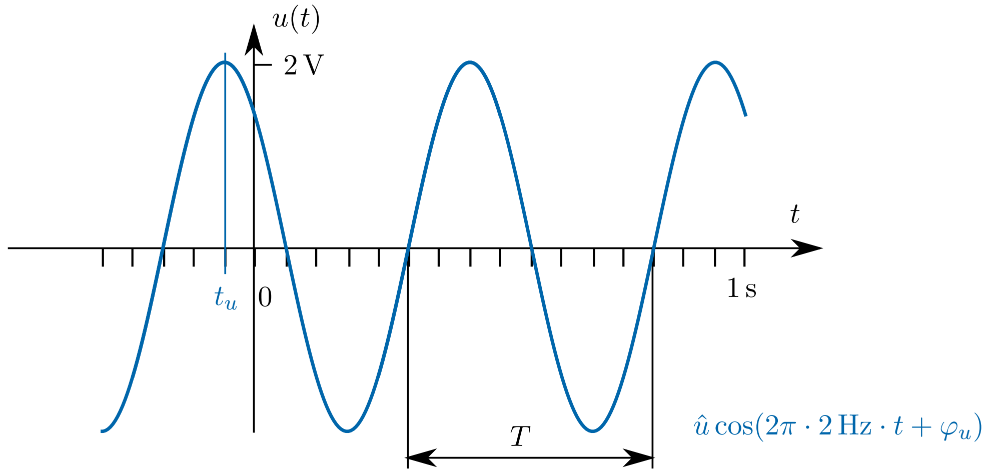
e) Lesen Sie den Wert für t_u ab.

f) Berechnen Sie aus t_u und anderen Konstanten die Sie bereits ermittelt haben den Zahlenwert für φ_u.

g) Achten Sie darauf, dass alle Zahlenwerte mit der jeweils richtigen Einheit versehen sind.



(a) Verlauf für $f = 1\,\mathrm{Hz}$.



(b) Verlauf für $f = 2\,\mathrm{Hz}$.

Abbildung 2: Verlauf der Funktion $u(t) = \cos(2\pi f t + \varphi_u)$.

Lösung 1.

a)

$$T = \frac{1}{f} = 1\,\mathrm{s}$$

b) Die Spannung $u(t) = \hat{u}\cos(2\pi f t + \varphi_u)$ erreicht ihr Maximum, wenn das Argument $2\pi f t + \varphi_u$ der Sinusfunktion entweder gleich Null oder ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Es gibt also mehrere Zeitpunkte t_u welche die geforderte Bedingung erfüllen. Uns interessiert jedoch nur jener Zeitpunkt der in dem Intervall von $\pm$ einer halben Periode um den Zeitpunkt $t = 0$ liegt. Wir finden diesen Zeitpunkt t_u indem wir die folgende Gleichung nach t_u auflösen:

$$2\pi f(-t_u) + \varphi_u = 0 \Leftrightarrow t_u = \frac{\varphi_u}{2\pi f} = \frac{\pi/4}{2\pi f} = \frac{1}{8f} = 1/8\,\mathrm{s}$$

Es bestätigt sich also die Gleichung $t_u = \frac{\varphi_u}{\omega}$.

c) Siehe Abb. 2a.

d) Siehe Abb. 2b. Es gilt $t_u = \frac{\varphi_u}{\omega}$, damit hängt t_u von der Frequenz ab. Die Phase $\omega t + \varphi_u$ eines Sinussignals $u(t) = \hat{u}\,\cos(\omega t + \varphi_u)$ bzw. der Verlauf von $u(t)$ ändert sich umso schneller, je höher dessen Kreisfrequenz ω ist.

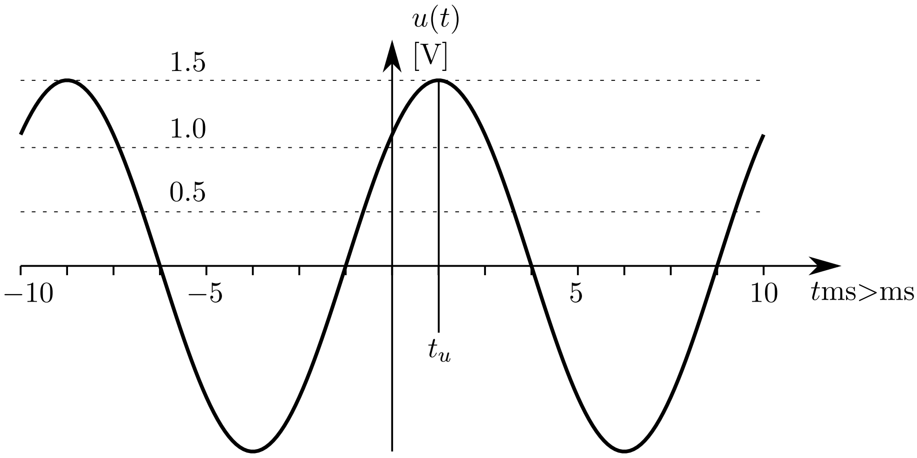


Abbildung 3: Sinusförmiger Spannungsverlauf.

Lösung 2.

a) Die mit Hilfe des Lineals ermittelte Periodendauer T beträgt 10 ms.

b)

$$f = \frac{1}{T} = 100\,\text{Hz}$$

c) Der Scheitelwert kann einfach abgelesen werden, er beträgt $\hat{u} = 1.5\,\text{V}$.

d) Siehe Abb. 3.

e) Der Zeitpunkt $t_u = 5/4\,\text{ms}$.

f)

$$\varphi_u = -\omega\, t_u = -2\pi f t_u = -2\pi\, 100\,\text{Hz}\, 5/4\,\text{ms} = -\frac{\pi}{4} \;\hat{=}\; -45^\circ$$