

## **Kapitel 2 – Frequenzverhalten linearer Netzwerke**

**Skript zum Kurs Elektrizätslehre 2**

**im Herbstsemester 2017**

Autor: Martin Schlup

Editor: Martin Weisenhorn, Roland Büchi

Winterthur, im August 2020

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften  
Zentrum für Signalverarbeitung und Nachrichtentechnik  
Technikumstrasse 9  
Postfach  
8401 Winterthur

# Inhaltsverzeichnis

<b>1.</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2.</b>	<b>Frequenzgang, Definitionen und Darstellung</b>	<b>4</b>
2.1.	Definitionen . . . . .	4
2.2.	Darstellung . . . . .	6
2.2.1.	Bodediagramm . . . . .	6
2.2.2.	Ortskurve . . . . .	8
<b>3.</b>	<b>Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen</b>	<b>9</b>
3.1.	Elementare Bausteine . . . . .	9
3.1.1.	Verstärkung, Dämpfung, Differentiation, Integration . . . . .	9
3.1.2.	Systeme erster Ordnung . . . . .	10
3.1.3.	Systeme zweiter Ordnung . . . . .	11
3.1.4.	Elementare und Zusammengesetzte Frequenzgangfunktionen . . . . .	15
3.1.5.	Zerlegung der Übertragungsfunktion zweiter Ordnung . . . . .	16
<b>A.</b>	<b>Logarithmierte Grössenverhältnisse</b>	<b>18</b>
A.1.	Leistungsverhältnisse . . . . .	18
A.2.	Signalverhältnisse . . . . .	18
A.3.	Pegel . . . . .	20
<b>B.</b>	<b>Elementare und Zusammengesetzte Frequenzgangfunktionen</b>	<b>22</b>
<b>C.</b>	<b>Bedeutung des Gütefaktors</b>	<b>26</b>
<b>D.</b>	<b>Hinweise zu MATLAB</b>	<b>30</b>
D.1.	Programmierung einer Frequenzgangfunktion und ihrer Darstellung . . . . .	30
D.2.	Detaillierte Programmierung ohne spezifische Matlab-Funktionen . . . . .	31
<b>E.</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>33</b>

# 1. Einleitung

Im stationären, eingeschwungenen Zustand<sup>1</sup> sind bei harmonischer (sinusförmiger) Anregung mit einer festen Frequenz sämtliche Grössen eines zeitinvarianten, linearen Systems<sup>2</sup> ebenfalls harmonisch, wie z. B. die Spannungen und Stromstärken elektrischer Schaltungen mit (idealen) Widerständen, Kondensatoren und Spulen.

Harmonische Signale<sup>3</sup> der Gestalt  $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)$  sind durch die Angabe der drei Parametern **Amplitude**  $\hat{x}$ , beziehungsweise **Effektivwert**  $X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$ , **Nullphasenwinkel**  $\varphi_x$  und **Kreisfrequenz**  $\omega$ , beziehungsweise **Frequenz**  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  eindeutig und vollständig beschrieben. Bei vorgegebener Frequenz können die Amplitude als *Betrag* und der Nullphasenwinkel als *Winkel* oder *Argument* einer komplexen Zahl  $\underline{X} = X e^{j\varphi_x}$  aufgefasst werden. Diese komplexe Zahl hat physikalisch keine unmittelbare Bedeutung. Man kann sie aber als Beschreibung des zeitlichen Verhaltens der betrachteten Grösse bei der gegebenen Frequenz interpretieren. In diesem Zusammenhang spricht man von der **Darstellung im Frequenzbereich** des harmonischen Signals, im Gegensatz zur expliziten *Darstellung im Zeitbereich*. Die *eindeutige*<sup>4</sup> Zuweisung

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{X} = X e^{j\varphi_x} \quad (1.1)$$

einer harmonischen Schwingung zu einer komplexen Zahl ist eine lineare Abbildung mit den beiden Eigenschaften *Homogenität* (cf. Beziehung (1.2)) und *Additivität* (cf. Beziehung (1.3)):

$$\alpha x(t) \quad \longleftrightarrow \quad \alpha \underline{X} \quad (1.2)$$

$$x_1(t) + x_2(t) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{X}_1 + \underline{X}_2 \quad (1.3)$$

Es gilt demzufolge das Superpositionsprinzip.

Bildet man ausserdem die **zeitliche Ableitung** der harmonischen Funktion  $x(t)$  erhält man folgendes:

$$y(t) = \frac{dx}{dt} = \omega \hat{x} \cos\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{Y} = \omega X e^{j(\varphi_x + \frac{\pi}{2})} = j\omega \underline{X} \quad (1.4)$$

Die Ableitung einer harmonischen Funktion ist wiederum eine harmonische Funktion der selben Frequenz mit einer mit  $\omega$  multiplizierten Amplitude und einem um  $\frac{\pi}{2}$  erhöhten Nullphasenwinkel. Übertragen auf die entsprechende komplexe Zahl bedeutet dies:

<sup>1</sup> d. h. nach Abklingen aller transienten Einschwingvorgänge

<sup>2</sup> LTI-System (linear time invariant): die Eigenschaften des Systems sind nicht zeitabhängig und es gilt das Superpositionsprinzip

<sup>3</sup> Mit dem Begriff *Signal* wird der zeitliche Verlauf einer physikalischen Grösse verstanden. Es kann sich hier um elektrische Grössen wie Stromstärke oder Spannung handeln.

<sup>4</sup> In beiden Richtungen, d. h. für die Abbildung und ihre Inverse, eindeutig

Eine Ableitung im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation mit  $j\omega$  im Frequenzbereich. Dies entspricht in der komplexen Zahlenbebene einer so genannten *Drehstreckung*: eine Streckung um den Faktor  $\omega$  und eine Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  im Gegenuhrzeigersinn.

Systeme welche *Energiespeicher* aufweisen, wie z. B. elektrische Schaltungen mit Kondensatoren und Spulen, werden als *dynamische Systeme* bezeichnet. Die Grössen, mit denen der Energiegehalt dieser Speicher bestimmt werden kann, werden *Zustandsgrössen* genannt, z. B. die Spannungen über Kondensatoren oder die Stromstärken in Spulen. Die Beschreibung des Verhaltens von dynamischen Systemen führt auf Differentiale, d. h. Ableitungen nach der Zeit der Zustandsgrössen. Durch diese Ableitungen im Zeitbereich, werden im Frequenzbereich komplexe Ausdrücke erzeugt, welche Funktionen der Kreisfrequenz  $\omega$ , beziehungsweise der Frequenz  $f$  sind. Ziel dieses Kapitels ist es, diese Abhängigkeiten systematisch zu untersuchen und Methoden vorzustellen mit welchen diese Abhängigkeiten dargestellt werden können.

### Beispiel RC-Glied: komplexe Grössen

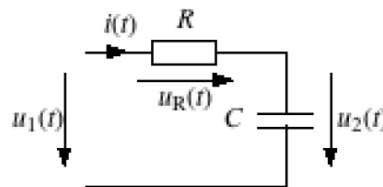


Abbildung 1.1.: RC-Glied

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{u}_1 \cos(\omega t + \varphi_{u1}) \longleftrightarrow \underline{U}_1 = U_1 e^{j\varphi_{u1}} \\ u_2(t) &= \hat{u}_2 \cos(\omega t + \varphi_{u2}) \longleftrightarrow \underline{U}_2 = U_2 e^{j\varphi_{u2}} \\ i(t) &= \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \longleftrightarrow \underline{I} = I e^{j\varphi_i} \end{aligned}$$

Mit diesen Festlegungen ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_2}{dt} \longleftrightarrow \underline{I} = Cj\omega \underline{U}_2 \\ u_1(t) &= u_2(t) + Ri(t) = u_2(t) + RC \frac{du_2}{dt} \longleftrightarrow \underline{U}_1 = \underline{U}_2 + j\omega RC \underline{U}_2 = (1 + j\omega RC) \underline{U}_2 \end{aligned}$$

Ende Beispiel: komplexe Grössen

Wie man in diesem Beispiel feststellen kann, enthalten die komplexen Ausdrücke für  $\underline{I}$  und  $\underline{U}_1$  die Kreisfrequenz, beziehungsweise die Frequenz explizit. Es stellt sich somit die Frage wie sich die einzelnen Grössen (Signale) in Funktion der Frequenz verhalten. Insbesondere interessiert die Abhängigkeit der Amplitude und des Nullphasenwinkels eines Signals von der Frequenz.

Die im Folgenden vorgestellten Methoden erlauben es, lineare Systeme neben ihrer Darstellung mittels (gewöhnlichen) Differentialgleichungen, alternativ auch durch komplexe, frequenzabhängige Zahlen zu beschreiben.

Die Methoden der Wechselstromlehre können so auf beliebige, *periodische* Signale erweitert werden.

Ein beliebiges periodisches Signal kann nämlich durch eine trigonometrische Reihe (**Fourier-Reihe**) angenähert werden, d. h. es kann als Summe von harmonischen Signalen (sinusförmige Signale verschiedener Frequenzen) dargestellt werden. Da für lineare Systeme das *Superpositionsprinzip* gilt, kann die resultierende Systemantwort als Summe der Antworten auf die einzelnen Terme der Reihe des Eingangssignals gebildet werden.

**Bemerkung:** Die hier eingeführten Begriffe und Verfahren sind nicht beschränkt auf lineare elektrische Schaltungen. Sie können bei allen technischen und nicht-technischen linearen oder linearisierten Systemen angewandt werden, welche mit harmonischen Signalen ange-regt werden.

Im Anhang befindet sich ein Literaturverzeichnis zum Thema. Dieses erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und es wurden hier auch nur Werke aufgeführt, welche der angehende Elektroingenieur möglicherweise in Sinne einer Ergänzung zum Studium anschaffen kann. Die Werke von *Führer*, *Heidemann* und *Nerreter* [1], [2], [3] sind ein Lernmittel, welches den gesamten Stoff der Elektrizitätslehre umfasst (ausgenommen die Leitungstheorie) und sich als (umfangreiches und anspruchsvolles) Selbstlernmittel eignet. Das Buch von *Hering*, *Bressler* und *Gutekunst* [4] ist eher ein praxisnahes Nachschlagwerk als ein Lernmittel, aber es deckt so ziemlich alles ab, womit ein heutiger Elektroniker konfrontiert wird. Zuletzt sei noch das Werk von *Lutz* und *Wendt* [5] erwähnt, welches neben vielem mehr das hier behandelte Thema allgemein und ausführlich behandelt und ebenfalls ein (umfassendes) Nachschlagwerk, insbesondere für die Regelungstechnik ist.

## 2. Frequenzgang, Definitionen und Darstellung

### 2.1. Definitionen

Die Abhängigkeit einer komplexen Grösse von der Frequenz oder der Kreisfrequenz wird als **Frequenzgang** dieser Grösse bezeichnet und als **Frequenzgangfunktion** mathematisch beschrieben. Da eine komplexe Grösse in einen *Betrag* (Modul) und ein *Winkel* (Argument) zerlegt werden kann (*polare Darstellung*), kann der Frequenzgang mit dem **Amplitudengang** (Betrag der Frequenzgangfunktion in Funktion der Frequenz) und dem **Phasengang** (Winkel/Argument der Frequenzgangfunktion in Funktion der Frequenz) eindeutig beschrieben werden<sup>1</sup>.

Im Allgemeinen interessiert weniger das Verhalten einer einzelnen Grösse, als das eines Grössenverhältnisses<sup>2</sup>. Ein solches Grössenverhältnis oder **Übertragungsfaktor** ist natürlich auch eine Frequenzgangfunktion. Bei solchen Verhältnissen wird allgemein die Grösse im Nenner als *Ursache* oder *Eingangsgrösse* und die Grösse im Zähler als *Wirkung* oder *Ausgangsgrösse* betrachtet. Was letztlich als Ursache und was als Wirkung betrachtet wird, hängt von der Fragestellung ab und nicht von den Quellen mit denen das System angeregt wird. Dies soll am einführenden Beispiel aus Kapitel 1 verdeutlicht werden: Als Ursache wird dabei die Spannung  $u_1(t)$  am Eingang des RC-Gliedes und als Wirkung die Spannung  $u_2$  über dem (idealen) Kondensator betrachtet (cf. Abbildung 1.1 auf S. 2).

#### Beispiel RC-Glied: Frequenzgangfunktion, Amplituden- und Phasengang

Durch Umformen der Beziehung zwischen  $\underline{U}_1$  und  $\underline{U}_2$  kann die Frequenzgangfunktion  $\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$  gebildet werden. Die Frequenzabhängigkeit dieses Verhältnisses soll hier explizit mit der Klammer ( $\omega$ ) hervorgehoben werden<sup>3</sup>:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (2.1)$$

<sup>1</sup> Es gibt aber auch die Möglichkeit Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl in Funktion der Frequenz zu betrachten (*kartesische Darstellung*). Dies wird z. B. in der Elektrochemie, unter anderem in der Impedanzspektroskopie der Geophysik benutzt.

<sup>2</sup> Gelegentlich wird ein solches auch als *Übertragungsfunktion* bezeichnet. Dies ist aber nicht ganz korrekt, da dieser Begriff eigentlich nur im Zusammenhang mit Transformationen, wie z. B. die Laplace-Transformation, benutzt werden sollte.

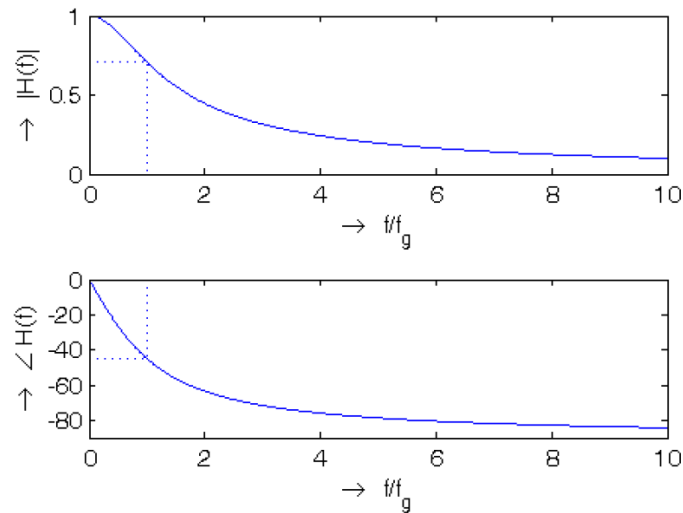
<sup>3</sup> Da  $\omega$  nie ohne begleitendes „j“ auftaucht, könnte man ebenfalls die Kombination ( $j\omega$ ) benutzen.

Der Amplituden und der Phasengang<sup>4</sup> der Grösse  $\underline{H}(\omega)$  lassen sich wie folgt ermitteln:

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{|U_2(\omega)|}{|U_1(\omega)|} = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (2.2)$$

$$\angle \underline{H}(\omega) = \angle U_2(\omega) - \angle U_1(\omega) = \varphi_{u2} - \varphi_{u1} = -\arctan(\omega RC) \quad (2.3)$$

Der Amplitudengang (2.2) beschreibt hier also das Amplitudenverhältnis zwischen Ausgangs- und Eingangssignal und der Phasengang (2.3) die Nullphasenwinkeldifferenz zwischen diesen beiden Signalen als Funktionen der Frequenz. Die Verläufe von Amplituden- und Phasengang sind in der Abbildung 2.1 mit linearen Massstäben dargestellt. **Bemerkung:** Der



**Abbildung 2.1.:** Amplituden und Phasengang gemäss den Beziehungen (2.2) und (2.3) dargestellt mit linearen Massstäben

Die Tangente des Amplitudengangs bei der Frequenz Null ist horizontal.

Die Frequenz wurde hier mit der so genannten *Grenzfrequenz*  $f_g = \frac{1}{2\pi RC}$  normiert (mehr dazu später).

Amplitudengang nach (2.2) ist eine *gerade* Funktion<sup>5</sup>, der Phasengang nach (2.3) eine *ungerade* Funktion<sup>6</sup>.

Ende Beispiel: Frequenzgangfunktion

Der Frequenzgang beschreibt ein lineares, zeitinvariantes dynamisches System (LTI-System) vollständig und eindeutig. Dafür genügt unter bestimmten Bedingungen allein die Angabe des Amplituden- oder des Phasengangs.

<sup>4</sup> In der Beziehung 2.3 wird das Symbol  $\angle$  als Operator benutzt, um den Winkel (Argument) aus der komplexen Zahl  $\underline{H}(\omega)$  „herauszuholen“ und nicht als Identifikationszeichen für den „Versor“ selbst. Man hätte dafür auch  $\arg(\underline{H}(\omega))$  schreiben können.

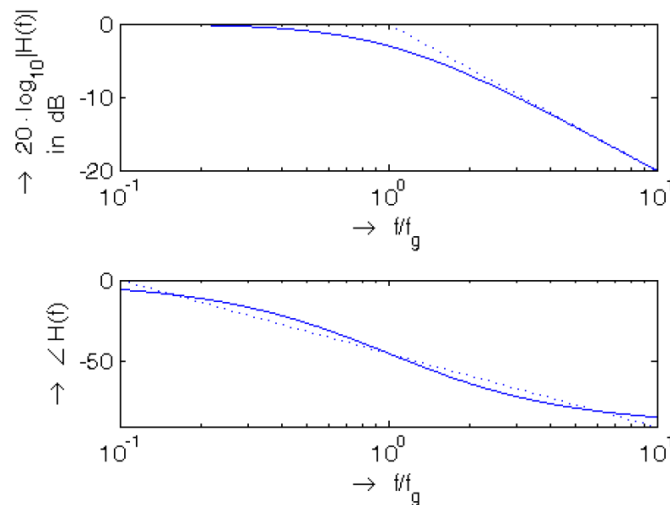
<sup>5</sup> d. h. axialsymmetrisch zur Ordinatenachse:  $f(-x) = f(x)$

<sup>6</sup> d. h. punktsymmetrisch zur Ursprung:  $f(-x) = -f(x)$

## 2.2. Darstellung

### 2.2.1. Bodediagramm

Im sogenannten **Bodediagramm**<sup>7</sup> wird der Amplitudengang logarithmisch und der Phasengang linear gegen eine logarithmische Darstellung der Kreisfrequenz oder der Frequenz aufgetragen. Dabei wird, wie in der Technik üblich, der Logarithmus zur Basis 10 benutzt. Dabei können die betrachteten Grössen auf logarithmischen Skalen aber auch die Logarithmen dieser Grössen auf linearen Skalen dargestellt werden<sup>8</sup>. Für die Amplitudenverhältnisse wird ausserdem die Pseudoeinheit **dB** (Dezibel) benutzt (cf. Anhang A.1). Für das einführende Beispiel des RC-Glieds ergeben sich die Amplituden- und Phasengänge wie sie in der Abbildung 2.2 als Bodediagramm dargestellt sind.



**Abbildung 2.2.:** Frequenzgang des Einführungsbeispiels als Bodediagramm

Amplituden- und Phasengang gemäss den Beziehungen (2.2) und (2.3).

Die Frequenz wurde mit der Grenzfrequenz  $f_g = \frac{1}{2\pi RC}$  normiert.

Ebenfalls wurden Näherungsgeraden als punktierte Linien in der Figur eingetragen (mehr dazu später).

Vorteile der logarithmischen Darstellung, beziehungsweise des Bodediagramms:

- Grosse Wertebereiche einer Grösse, meistens über mehrere Zehnerpotenzen, können in einer Graphik mit einer den jeweiligen Werten entsprechenden Auflösung dargestellt werden. Dies gilt insbesondere für den darzustellenden Frequenzbereich und die Amplituden.
- Produkte und Quotienten von Grössen können in der Graphik als Additionen und Subtraktionen der Ordinatenwerte dieser Grössen gebildet werden:

$$x = x_1 \cdot x_2 \quad \rightarrow \quad \log x = \log x_1 + \log x_2$$

Auf diese Eigenschaft wird später eingegangen.

<sup>7</sup> nach Hendrik Wade Bode (1905-1982)

<sup>8</sup> Mit Matlab entspricht dies den folgenden Plot-Befehlen:

```
loglog(f,abs(H)), bzw.
plot(log10(f),20*log10(abs(H)))
```



- Der Verlauf einer Funktion kann durch einen Polygonzug angenähert werden, wie dies an Hand der gestrichelten Linien in der Abbildung 2.2 gezeigt wird. Die Teilgeraden können dabei nur bestimmte Steigungen aufweisen. Auch auf diese Eigenschaft wird später eingegangen.

**Bemerkung:** Der Betrag der betrachteten komplexen Grösse, bzw. des Verhältnisses der Frequenzgangfunktion, sollte für die Logarithmierung einheitslos sein. Dies ist nur bei Verhältnissen gleichartiger Grössen, wie für Spannungs-, Strom- oder Leistungsverhältnisse der Fall. Für eine Grösse wie eine Frequenz, einen Scheinwiderstand oder einen Scheinleitwert, muss ein einheitsloses Grössenverhältnis mit einer konstanten Bezugsgrösse derselben Einheit (z. B.  $f_g = \frac{1}{2\pi RC}$  wie in der Abbildung 2.2, oder auch mit einer Einheit wie  $R_0 = 1 \Omega$ ) gebildet werden. Diese Bezugsgrössen müssen natürlich bekannt sein, bzw. festgelegt werden.

### Beispiel RC-Glied: Normierung einer Frequenzgangfunktion

Betrachtet man z. B. die Frequenzabhängigkeit der Admittanz (komplexer Leitwert) des RC-Glieds

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_1} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}$$

so kann dieser durch Division mit  $G = \frac{1}{R}$  in eine normierte Form gebracht werden<sup>9</sup>:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{G} = Y(\omega)R = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Alle Terme dieses Ausdrucks sind jetzt einheitslos. Die Wahl von  $G = \frac{1}{R}$  als Normierungsfaktor ist willkürlich aber im vorliegenden Beispiel zweckmässig. Man hätte ebenfalls, anstelle von  $G$ , mit  $G_0 = 1 \Omega^{-1}$  normieren können, um so ebenfalls einen einheitslosen Ausdruck zu erhalten.

Die Kreisfrequenz, beziehungsweise die Frequenz kann ebenfalls normiert werden. In diesem Fall kann die so genannte *Grenzfrequenz*<sup>10</sup>  $\omega_g = \frac{1}{RC}$  benutzt werden. Somit erhält man:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_g}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}$$

Da für das Frequenzverhältnis  $\frac{\omega}{\omega_g} = \frac{f}{f_g}$  gilt, kann die normierte Frequenzgangfunktion wahlweise als Funktion der Kreisfrequenz oder der Frequenz betrachtet werden. Dieses Frequenzverhältnis wird auch als **normierte Frequenz** bezeichnet und üblicherweise mit dem Symbol  $\Omega$  (Omega<sup>11</sup>) dargestellt. Auch hier wäre als Normierungsfaktor anstelle von  $\omega_g$  die Wahl  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  möglich gewesen.

Ende Beispiel: Normierung

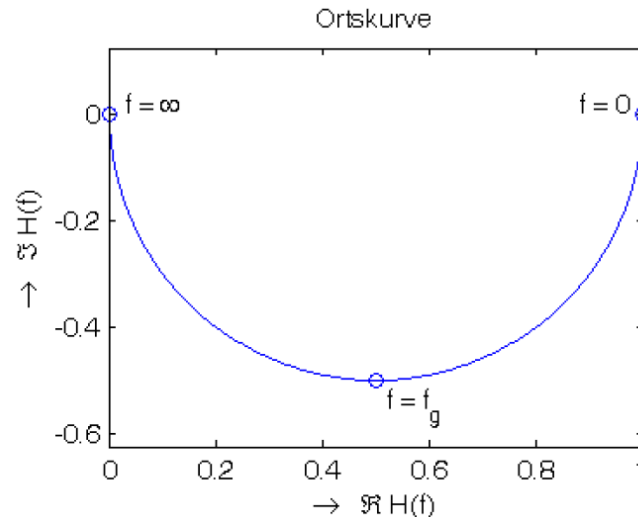
<sup>9</sup> Der Ausdruck im Nenner ist einheitslos aber der Zähler hatte vor der Normierung die Einheit  $\Omega^{-1}$ .

<sup>10</sup> Dieser Begriff wird in einem späteren Abschnitt präziser erläutert.

<sup>11</sup> Dies ist dasselbe Symbol wie für die Widerstandseinheit. Eine Verwechslungsgefahr ist wegen dem Kontext in den es verwendet wird, ausgeschlossen.

### 2.2.2. Ortskurve

Die *Parameterdarstellung* der Frequenzgangfunktion in der komplexen Zahlenebene mit der Kreisfrequenz, bzw. der Frequenz als Parameter, wird **Ortskurve** genannt. Dabei wird die komplexe Zahl der Frequenzgangfunktion als frequenzabhängiger Punkt dargestellt, wobei die Kreisfrequenz/Frequenz von 0 bis  $\infty$  variiert wird. Die resultierende Kurve wird entsprechend mit der Kreisfrequenz/Frequenz als Parameter *skaliert*, d. h. einzelne markante Punkte der Kurve, werden mit den dazugehörigen Kreisfrequenzwerten bezeichnet. Für das einführende Beispiel des RC-Glieds, ergibt sich die Ortskurve der Frequenzgangfunktion (2.1) wie sie in der Abbildung 2.3 dargestellt ist.



**Abbildung 2.3.:** Frequenzgang des Einführungsbeispiels RC-Glied als Ortskurve  
Die Ortskurve bildet hier einen exakten Halbkreis im 4. Quadranten.

Bemerkungen:

- Die Ortskurve hat also einen Richtungssinn (in Richtung zunehmender Frequenzen). Für real existierende Systeme verläuft sie im Allgemeinen im Uhrzeigersinn.
- In der Regelungstechnik werden Ortskurven im Zusammenhang mit Frequenzgangfunktionen **Nyquist-Diagramme**<sup>12</sup> genannt.
- Ortskurven können auch für andere Funktionen als Frequenzgänge benutzt werden, z. B. um den Verlauf einer Impedanz als Funktion einer veränderlichen Kapazität bei einer festen Frequenz darzustellen. In diesem Fall ist der Parameter der Ortskurve die Kapazität welche einen bestimmten Wertebereich durchläuft und nicht die Frequenz.

<sup>12</sup> nach Harry Nyquist (1889-1976)

## 3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

Im Allgemeinen ergeben sich kompliziertere Verhältnisse als diejenigen im einführenden Beispiel des RC-Gliedes. Unter anderem ergeben sich für die Frequenzgangfunktionen *Polynombrüche* in  $j\omega$ , deren Ordnung von der Anzahl *unabhängiger* Energiespeicher im betrachteten System abhängt. Zum Glück zeigt sich jedoch, dass sämtliche Frequenzgangfunktionen in elementare Bausteine zerlegt werden können, so dass es reicht diese näher zu untersuchen.

### 3.1. Elementare Bausteine

#### 3.1.1. Verstärkung, Dämpfung, Differentiation, Integration

Die elementaren zeitlichen Beziehungen *Proportionalität* (Verstärkung, Dämpfung<sup>1</sup>), *Differentiation* und *Integration* mit ihren Frequenzgangfunktionen sind in der Tabelle 3.1 zusammengestellt:

**Tabelle 3.1.:** Elementare zeitliche Beziehungen und ihre Frequenzgangfunktionen

Die Frequenzen wurden hier nicht normiert;  $x(t)$  ist dabei die (harmonische) Eingangs-,  $y(t)$  die (ebenfalls harmonische) Ausgangsgrösse des Systems.

	Zeitbereich $y(t) = f(x(t))$	Frequenzbereich		
		$\underline{H}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{\underline{X}(\omega)}$	Amplitudengang $ \underline{H}(\omega) $	Phasengang $\angle \underline{H}(\omega)$
Verstärkung	$y(t) = k \cdot x(t)$ $k > 0$ $k < 0$	$k$ $k$	$k$ $ k $	$0$ $\pm\pi$
Differentiation	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega$	$\omega$	$\frac{\pi}{2}$
Integration	$y(t) = \int_0^t x(t) dt$ mit $y(0) = 0$	$\frac{1}{j\omega}$	$\frac{1}{\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

<sup>1</sup> Generell wird als **Verstärkung**  $g$  (Englisch: **gain**) das Verhältnis Aus- zu Eingangsgrösse bezeichnet und als **Dämpfung**  $a$  (E: **attenuation**) das reziproke Verhältnis Ein- zu Ausgangsgrösse. Es gilt  $a = \frac{1}{g}$ .

### 3.1.2. Systeme erster Ordnung

Die nächst-„komplizierteren“ Bausteine sind von der Art wie sie im Einführungsbeispiel RC-Glied präsentiert wurden und entstehen bei Systemen erster Ordnung, d. h. Systeme mit nur einem Energiespeicher.

Für das RC-Glied mit  $u_1(t)$  als Eingangs- und  $u_2(t)$  als Ausgangssignal ergibt sich folgende lineare, nichthomogene Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$RC\dot{u}_2(t) + u_2(t) = u_1(t)$$

und daraus durch direkte Übersetzung in den Frequenzbereich die Frequenzgangfunktion<sup>2</sup>:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Mit der so genannten **Zeitkonstante**  $\tau = RC$ , beziehungsweise der **Grenzfrequenz**  $\omega_g = \frac{1}{\tau}$  als Normierungsfaktoren, ergibt sich ferner die allgemeine Form:

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}} \quad (3.1)$$

Amplituden- und Phasengang von (3.1) sind in den Beziehungen (2.2) und (2.3) auf S. 5 zu finden<sup>3</sup>. Für diese können *Näherungen* und *Eckpunkte* gemäss der folgenden Tabelle bestimmt werden:

**Tabelle 3.2.:** Frequenzgang des Systems erster Ordnung  $\underline{H}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}$

Näherungen und Eckpunkte

Aus dieser Tabelle wird die Bedeutung des Begriffs *Grenzfrequenz* ersichtlich.

Kreisfrequenz $\omega$	Frequenzgang- funktion $\underline{H}(\omega)$	Amplituden- gang $ \underline{H}(\omega) $	Amplitudengang (logarithmisch) $20 \cdot \log  \underline{H}(\omega) $	Phasengang $\angle \underline{H}(\omega)$
$\omega \ll \omega_g$	$\underline{H}(\omega) \approx 1$	1	0 dB	0
$\omega = \omega_g$ (Grenzfrequenz)	$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+j}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	-3 dB	$-\frac{\pi}{4}$
$\omega \gg \omega_g$	$\underline{H}(\omega) \approx -j\frac{1}{\omega/\omega_g}$	$\frac{1}{\omega/\omega_g}$	$-20 \log \frac{\omega}{\omega_g} \equiv$ $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dk}}$	$-\frac{\pi}{2}$

<sup>2</sup> Die Frequenzgangfunktion kann man auch direkt durch Anwendung der Techniken der komplexen Wechselstromlehre erhalten, hier durch Herleiten der Spannung  $\underline{U}_2$  für den Spannungsteiler mit Eingangsspannung  $\underline{U}_1$ .

<sup>3</sup> Dabei ist RC durch  $\frac{1}{\omega_g}$  zu ersetzen.

## Bemerkungen:

- Für „tiefe“ Frequenzen, d.h. Frequenzen welche viel kleiner sind als die so genannte **Grenzfrequenz**  $\omega_g$ , verhält sich die Frequenzgangfunktion (3.1) „neutral“: die Amplitude und der Nullphasenwinkel des Ausgangssignals entsprechen denen des Eingangssignals.
- Bei der Grenzfrequenz  $\omega_g$  ist die Amplitude des Ausgangssignals um den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$  tiefer als die des Eingangssignals. In dB ausgedrückt, entspricht dies  $20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -20 \frac{1}{2} \log 2 \approx -3 \text{ dB}$ . Die Differenz der Nullphasenwinkel beträgt dabei exakt  $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ .
- Bei Frequenzen (weit) oberhalb der Grenzfrequenz nimmt die Amplitude des Ausgangssignals proportional zur Frequenz mit der Steilheit  $-1$  ab, also z.B. um den Faktor 10 bei einer Erhöhung der Frequenz um den selben Faktor. Dies lässt sich in dB mit der Steilheit  $-20 \text{ dB/Dk}$  angeben. Die Abkürzung **Dk** steht dabei für *Dekade*, was einer Zehnerpotenz, hier der Frequenz/Kreisfrequenz, entspricht.
- Das Bodediagramm der normierten Frequenzgangfunktion (3.1) ist in der Abbildung 2.2 auf S. 6 mit den Näherungsgeraden des Amplitudengangs für  $\omega \ll \omega_g$  und für  $\omega \gg \omega_g$  dargestellt. Der Phasengang kann ebenfalls durch eine Gerade angenähert werden, welche den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  innerhalb von zwei Frequenzdekaden überstreicht.
- Die Ortskurve der normierten Frequenzgangfunktion (3.1) ist in der Abbildung 2.3 auf S. 8 dargestellt. Es handelt sich um einen Halbkreis im 4. Quadranten.

## 3.1.3. Systeme zweiter Ordnung

Systeme 2. Ordnung werden hier an Hand des RLC-Serieschwingkreises gemäss der Abbildung 3.1 untersucht.

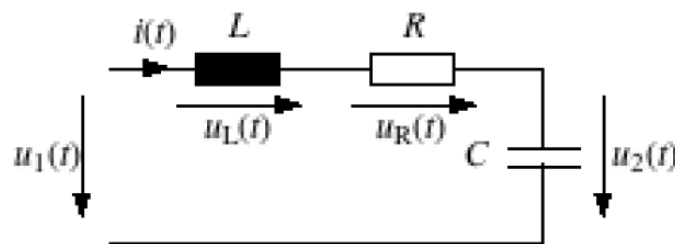


Abbildung 3.1.: RLC-Serieschwingkreis

## Beispiel RLC-Serieschwingkreis: Frequenzgangfunktion, Amplituden- und Phasengang

Für den RLC-Serieschwingkreis mit  $u_1(t)$  als Eingangs- und  $u_2(t)$  als Ausgangssignal ergibt sich folgende lineare, nichthomogene Differentialgleichung 2. Ordnung<sup>4</sup>:

$$LC\ddot{u}_2 + RC\dot{u}_2 + u_2 = u_1$$

<sup>4</sup> Um die Differentialgleichung herzuleiten, müssen sämtliche elektrische Größen der Schaltung durch  $u_2(t)$  und deren zeitlichen Ableitungen nach und nach und von rechts nach links vorgehend, ausgedrückt werden.

und daraus durch direkte Übersetzung in den Frequenzbereich die Frequenzgangfunktion<sup>5</sup>:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

Mit den Normierungsfaktoren **Resonanzfrequenz**<sup>6</sup>  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  und **Gütefaktor**  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  ergibt sich ferner die allgemeine Form (Überprüfung durch Einsetzen):

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} 2\xi + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (3.2)$$

Anstelle des Gütefaktors wird auch das **Dämpfungsmaß**<sup>7</sup>  $\xi$  (griechischer Buchstabe, Aussprache: ksi) benutzt. Es gilt der Zusammenhang:

$$\xi = \frac{1}{2Q} \quad \text{beziehungsweise} \quad Q = \frac{1}{2\xi} \quad (3.3)$$

Der Gütefaktor, beziehungsweise das Dämpfungsmaß können auf verschiedene Arten interpretiert werden, auch auf physikalische. Diese Interpretationsmöglichkeiten sind im Anhang C zusammengestellt und näher erläutert.

**Bemerkung:** Für die hier gemachten Überlegungen wird grundsätzlich  $Q \geq \frac{1}{2}$  beziehungsweise  $0 \leq \xi \leq 1$  angenommen<sup>8</sup>. Für  $0 < Q < \frac{1}{2}$ , bzw.  $\xi > 1$ , ist es nämlich möglich das System zweiter Ordnung als Produkt zweier Systeme erster Ordnung zu betrachten und entsprechend zu behandeln. Dieser Fall wird in Abschnitt 3.1.5 behandelt.

Für Amplituden- und Phasengang ergibt sich formal:

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}\right)^2}} \quad (3.4)$$

$$\angle \underline{H}(\omega) = -\arctan \frac{\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (3.5)$$

Die Verläufe von Amplituden- und Phasengang mit linearen Massstäben sind in der Abbildung 3.2 zu finden. Das Bodediagramm und die Ortskurve sind in den Abbildungen 3.3 auf S. 14 und B.2 im Anhang 3.1.4 in Funktion der normierten Frequenz  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  dargestellt. Die Eckpunkte und Näherungen dieser Funktionen sind in der Tabelle auf S. 14 angegeben.

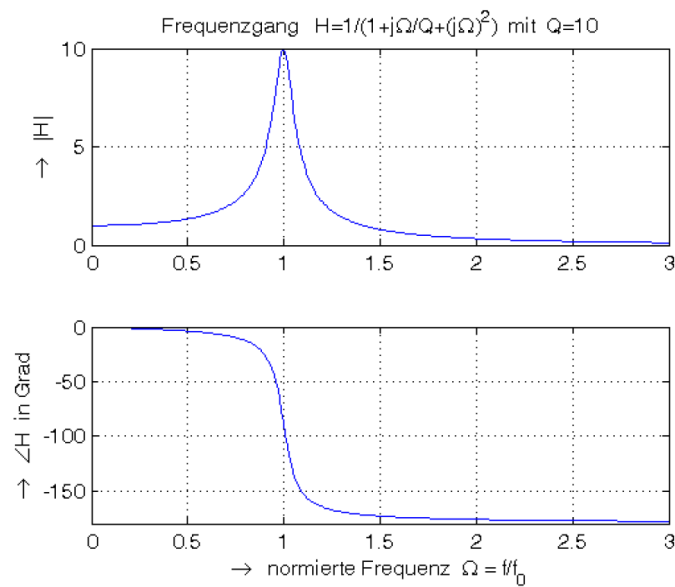
**Bemerkung:** Für Gütefaktoren  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ , bzw.  $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , weist der Amplituden-

<sup>5</sup> Die Frequenzgangfunktion kann man auch direkt durch Anwendung der Techniken der komplexen Wechselstromlehre erhalten, hier durch Herleiten der Spannung  $\underline{U}_2$  für den Spannungsteiler mit Eingangsspannung  $\underline{U}_1$ .

<sup>6</sup> Bei elektrischen Zweipolen ist die Resonanzfrequenz die Frequenz bei der der Zweipol an seinen Klemmen ein reelles Verhalten aufweist, d. h. rein dissipativ wirkt. Die Resonanzfrequenz ist bei mechanischen Systemen definiert als die Frequenz bei der der Amplitudengang sein Maximum erreicht. Diese beiden Definitionen decken sich nicht für Gütefaktoren unterhalb  $Q = 5$ .

<sup>7</sup> auch im deutschen Sprachraum als *Lehr'sches Dämpfungsmaß*, nach Ernst Lehr (1896–1944) bezeichnet

<sup>8</sup> Dies ist im Fall des RLC-Serieschwingkreises bei einem genügend kleinen Wert des Widerstands  $R$  gewährleistet.

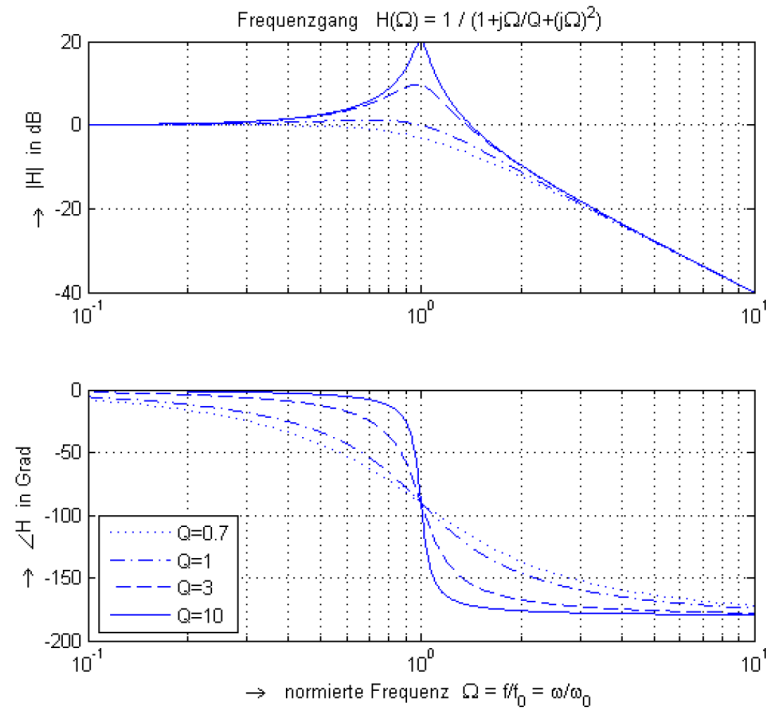


**Abbildung 3.2.:** Amplituden und Phasengang gemäss den Beziehungen (3.4) und (3.5) dargestellt mit linearen Masstäben

Die Tangente des Amplitudengangs bei der Frequenz Null ist horizontal.

Die Frequenz wurde hier mit der Resonanzfrequenz des Serieschwingkreises  $f_0 = \frac{1}{2\pi}\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$  normiert.

gang eine Überhöhung auf. Dieses Maximum befindet sich aber nicht bei der Frequenz  $\omega_0$ , sondern bei  $\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ . Allerdings kann  $\omega_{max} \approx \omega_0$  angenommen werden für  $Q > 5$ , bzw  $\xi < \frac{1}{10}$ . Ende Beispiel: Frequenzgangfunktion, Amplituden- und Phasengang



**Abbildung 3.3.:** Bodediagram (Amplituden- und Phasengang) des Systems 2. Ordnung gemäss den Beziehungen (3.4) und (3.5) für verschiedene Werte des Gütefaktors  $Q$

Der Amplitudengang erhält bei der Resonanzfrequenz ( $\Omega = 1$ ) exakt den Wert des Gütefaktors  $Q$ . Das Maximum des Amplitudengangs liegt für  $Q > 5$  praktisch bei  $\Omega = 1$ . Für  $Q$ -Werte unterhalb 5 liegt das Maximum unterhalb  $\Omega = 1$ , wie aus der Kurve für  $Q = 1$  klar ersichtlich ist. Kurven mit  $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  weisen keine Überhöhung mehr auf.

Der Phasengang verläuft steiler mit zunehmendem Gütefaktor.

**Tabelle 3.3.:** Frequenzgang des Systems zweiter Ordnung  $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$  für  $Q \geq \frac{1}{2}$

Näherungen und Eckpunkte

Kreisfrequenz $\omega$	Frequenzgang-funktion $\underline{H}(\omega)$	Amplituden-gang $ \underline{H}(\omega) $	Amplitudengang (logarithmisch) $20 \cdot \log  \underline{H}(\omega) $	Phasengang $\angle \underline{H}(\omega)$
$\omega \ll \omega_0$	$\underline{H}(\omega) \approx 1$	1	0 dB	0
$\omega = \omega_0$ (Resonanzfrequenz)	$\underline{H}(\omega) = \frac{Q}{j} = -jQ$	$Q$	$20 \log Q$	$-\frac{\pi}{2}$
$\omega \gg \omega_0$	$\underline{H}(\omega) \approx -\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$-20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \equiv$ $-40 \frac{\text{dB}}{\text{Dk}}$	$-\pi$



### 3.1.4. Elementare und Zusammengesetzte Frequenzgangfunktionen

Eine beliebige Frequenzgangfunktion (Übertragungsfaktor) lässt sich immer als Produkten der in der Abb. 3.4 gelisteten elementaren Frequenzgangfunktionen oder deren reziproker Funktion darstellen (**Produktform**). Dabei werden die Zusammenhänge ausgenutzt die in den Tabellen 3.4 und 3.5 gelistet sind.

Operation	Auswirkung auf den Amplitudengang
Vorzeichen	$\log( -\underline{H}(f) ) = \log( \underline{H}(f) )$
Kehrwert	$\log\left(\left \frac{1}{\underline{H}(f)}\right \right) = -\log( \underline{H}(f) )$
Multiplikation	$\log( \underline{H}_1(f) \cdot \underline{H}_2(f) ) = \log( \underline{H}_1(f) ) + \log( \underline{H}_2(f) )$
Division	$\log\left(\left \frac{\underline{H}_1(f)}{\underline{H}_2(f)}\right \right) = \log( \underline{H}_1(f) ) - \log( \underline{H}_2(f) )$

**Tabelle 3.4.:** Zusammenhänge für den Logarithmus des Amplitudengangs.

Operation	Auswirkung auf den Phasengang
Vorzeichen	$\text{angle}(-\underline{H}(f)) = \text{angle}(\underline{H}(f)) \pm \pi$
Kehrwert	$\text{angle}\left(\frac{1}{\underline{H}(f)}\right) = -\text{angle}(\underline{H}(f))$
Multiplikation	$\text{angle}\left(\underline{H}_1(f) \cdot \underline{H}_2(f)\right) = \text{angle}(\underline{H}_1(f)) + \text{angle}(\underline{H}_2(f))$
Division	$\text{angle}\left(\frac{\underline{H}_1(f)}{\underline{H}_2(f)}\right) = \text{angle}(\underline{H}_1(f)) - \text{angle}(\underline{H}_2(f))$

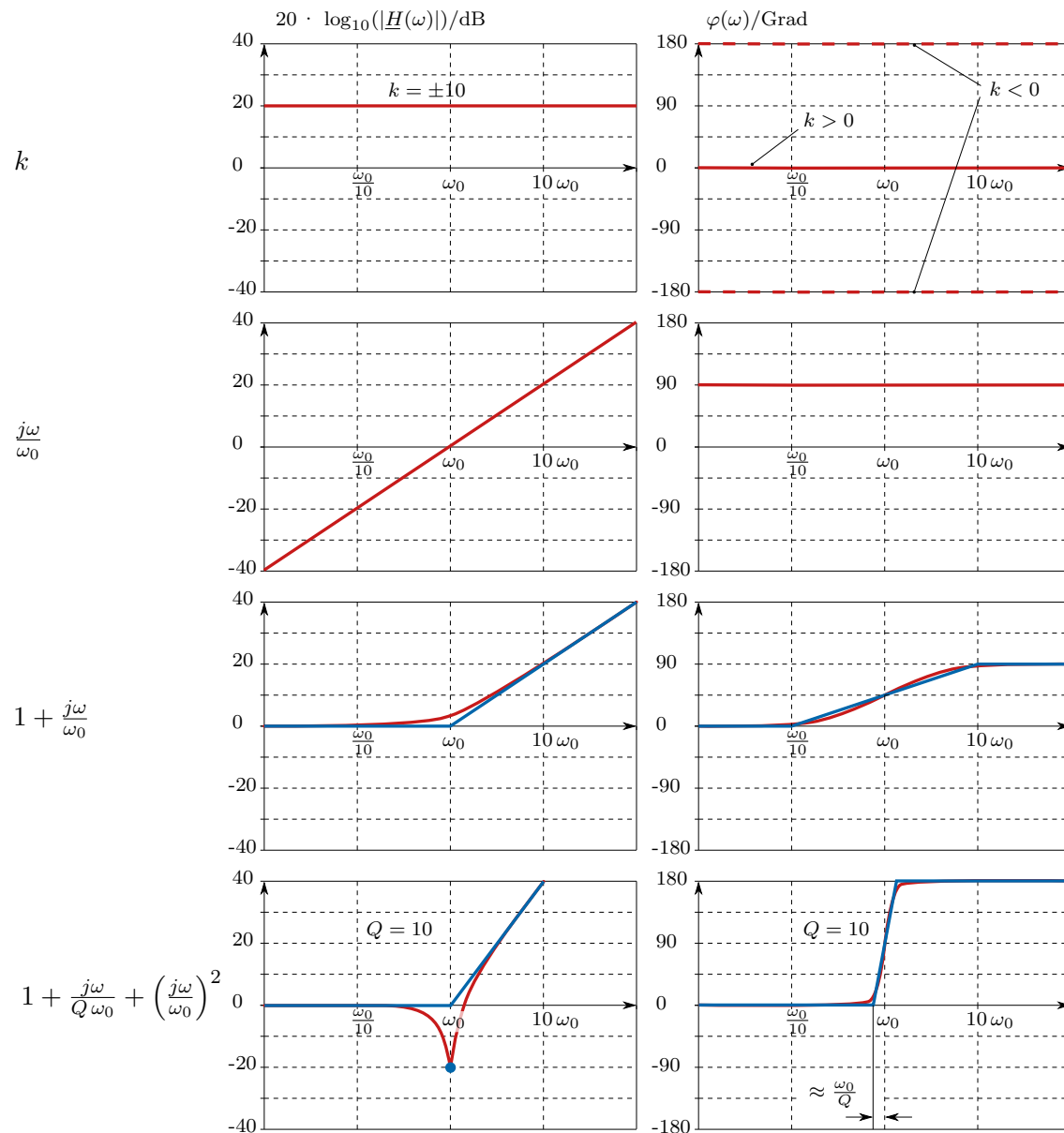
**Tabelle 3.5.:** Zusammenhänge für den Phasengang.

Die elementaren Frequenzgangfunktionen sind in Abbildung 3.4 angegeben. Eine Übersicht über die zusammengesetzten Funktionen enthält Tab. B.1. Darin werden alle Übertragungsfunktionen als Funktionen der **normierten Frequenz** dargestellt:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

Diese Grösse ist einheitslos und hängt nicht davon ab, ob die Kreisfrequenz oder die Frequenz der Betrachtung zugrunde gelegt wird. Dabei ist  $\omega_0$ , beziehungsweise  $f_0$ , eine beliebig aber zweckmässig wählbare *Bezugskreisfrequenz* oder *Bezugsfrequenz*, wie z. B.  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  oder im Fall eines Systems 1. Ordnung eine Grenz(kreis)frequenz<sup>9</sup>  $\omega_g$  oder bei einem schwingfähigen System 2. Ordnung eine Resonanz(kreis)frequenz  $\omega_r$ . Bei den beiden Elementen zweiter Ordnung wird der **Gütefaktor**  $Q$  (kurz *Güte*) oder das **Dämpfungs-mass**  $\xi$  als Parameter verwendet. Es gilt  $\xi = \frac{1}{2Q}$  und entsprechend  $Q = \frac{1}{2\xi}$ . Für diese Glieder gilt die Bedingung  $Q \geq \frac{1}{2}$  oder  $0 \leq \xi \leq 1$ . Ist diese nicht erfüllt (d. h.  $0 < Q < \frac{1}{2}$ , bzw.  $\xi > 1$ ), so muss das Element 2. Ordnung in ein Produkt zweier Elemente 1. Ordnung wie folgt zerlegt werden, siehe Abb. B.2 und B.3.

<sup>9</sup> Die einer Grenzkreisfrequenz  $\omega_g$  reziproken Grösse  $\tau = \frac{1}{\omega_g}$  hat die Einheit einer Zeit und wird üblicherweise als *Zeitkonstante* bezeichnet.



**Abbildung 3.4.:** Bodediagramme der vier elementaren Frequenzgangfunktionen, die roten Linien bedeuten den tatsächlichen, die blauen Linien den angenäherten Verlauf.

### 3.1.5. Zerlegung der Übertragungsfunktion zweiter Ordnung

Die elementare Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + \left( j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$$

lässt sich in zwei Faktoren aufteilen:

$$\underline{H}(\omega) = \underline{H}_1(\omega) \cdot \underline{H}_2(\omega)$$

wobei

$$\underline{H}_1(\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$$

und

$$\underline{H}_2(\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_2}$$

jeweils eine elementare Übertragungsfunktion erster Ordnung darstellt mit

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$
$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

Damit die beiden Zahlenwerte  $\omega_1$  und  $\omega_2$  als Grenzfrequenzen im bisher verwendeten Sinne interpretiert werden dürfen, müssen diese reell sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $Q < 1/2$ .

# A. Logarithmierte Grössenverhältnisse

## A.1. Leistungsverhältnisse

In der Wechselstromlehre, der Regelungstechnik und der Nachrichtentechnik werden **Leistungs-** oder **Energieverhältnisse** häufig in logarithmierter Form dargestellt. Ein Zweitor (Vierpol) soll ausgangsseitig (sekundärseitig) an eine Last  $R_2$  angeschlossen sein und eingangsseitig (primärseitig) aus einer Quelle gespeist werden. Der Eingangswiderstand des Zweitores betrage dabei  $R_1$ . Die ans Zweitor eingangsseitig und an die Last ausgangsseitig abgegebenen Leistungen betragen  $P_1$  und  $P_2$ . Man definiert die Logarithmen der Leistungsverhältnisse wie folgt:

$$A_p = 10 \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad \text{Dämpfung in dB} \quad (\text{A.1})$$

$$G_p = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad \text{Verstärkung in dB} \quad (\text{A.2})$$

Nimmt man das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsleistung, so spricht man von einer **Dämpfung** (attenuation), im umgekehrten Fall von einer **Verstärkung** (gain). Der Logarithmus (üblicherweise zur Basis 10) darf nur von einer einheitslosen Grösse berechnet werden. Also muss es sich beim Argument (in diesem Fall z.B.  $\frac{P_1}{P_2}$ ) immer um ein Verhältnis von einheitsgleichen Grössen handeln. Die für die Dämpfung und die Verstärkung benutzte *Pseudoeinheit* nennt man **Dezibel**: Zehntel Bel, wegen dem Faktor 10 der hilft, dass die Zahlenwerte nicht zu klein werden.

Es gilt offensichtlich:  $G_p = -A_p$ .

## A.2. Signalverhältnisse

Obige Leistungsverhältnisse kann man auch mit Spannungen oder Stromstärken ausdrücken, falls man die Werte der Widerstände kennt, an denen die beiden zu vergleichenden Leistungen anfallen (in diesem Fall  $R_1$  und  $R_2$ ). Die Umrechnung in Leistungen ergibt:

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1}$$
$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} A_p &= 10 \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = 20 \log\left(\frac{U_1}{U_2}\right) - 10 \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = A_u - 10 \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \\ G_p &= 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 20 \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) - 10 \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = G_u - 10 \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

Werden die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  am selben Widerstand  $R$  gemessen, so ist das Verhältnis  $A_u = A_p$  und  $G_u = G_p$ .

Häufig wird  $A_u = 20 \log(\frac{U_1}{U_2})$ , bzw.  $G_u = 20 \log(\frac{U_2}{U_1})$  aber auch bei ungleichen Widerständen verwendet und drückt daher nicht das korrekte Leistungsverhältnis aus. Der Faktor 20 vor dem Logarithmus wird aber auf jeden Fall verwendet.

Analog kann man entsprechende Grössen für die Stromstärken  $I_1$  und  $I_2$  definieren. Statt einem Spannungs- oder Stromstärkenverhältnis können auch andere Verhältnisse, z. B. magnetische oder elektrische Feldstärkenverhältnisse logarithmisch ausgedrückt werden. *Immer wenn es sich um Feldgrössen handelt, also um Grössen, deren Quadrat erst proportional zur Leistung ist, muss der Logarithmus mit dem Faktor 20 versehen werden, um ein Ergebnis in Dezibel zu liefern.*

#### Beispiel: Verstärker

Eine Verstärkerstufe (Zweiter) mit  $R_1 = 600 \Omega$  Eingangswiderstand werde aus einem Generator gespeist. Am Verstärker ist sekundärseitig ein Lastwiderstand von  $R_2 = 600 \Omega$  angeschlossen. Die eingangsseitige Spannung beträgt:  $U_1 = 775 \text{ mV}$ . Somit ist  $P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = 1 \text{ mW}$ . Für diverse Ausgangsspannungen ergeben sich folgende Werte:

**Tabelle A.1.:** Verstärkungsfaktoren

$U_2$ in V	0.775	1.096	1.550	2.451	7.750	24.51
$\frac{U_2}{U_1}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{10}$	10	$10\sqrt{10}$
$P_2$ in mW	1	2	4	10	100	1000
$\frac{P_2}{P_1}$	1	2	4	10	100	1000
$G_p = G_u$ in dB	0	3	6	10	20	30

Ende Beispiel

Für den praktischen Gebrauch genügen ein paar wichtige Zahlen: 3 dB bedeutet ein Leistungsverhältnis von 2 bzw. ein Spannungsverhältnis von  $\sqrt{2}$ . Ein Spannungsverhältnis von 2 ergibt 6 dB. Das Verhältnis 10 ergibt bei Leistungen 10 dB und bei Spannungen 20 dB. Kehrt man bei den Dezibelzahlen das Vorzeichen um, so bedeutet dies für die entlogarithmierten Verhältnisse den reziproken Wert: Aus +3 dB, welches dem Leistungsverhältnis 2 entspricht, wird mit −3 dB ein Leistungsverhältnis von  $\frac{1}{2}$  angegeben.

Amplitudengänge von LTI-Systemen werden üblicherweise als „Verstärkung“ angegeben. Dabei sind die Verhältnisse im Allgemeinen kleiner 1, d. h. die Logarithmischen Verhältnisse sind negativ. Es ist dabei üblich die −3 dB-Grenzfrequenzen für die Festlegung der Bandbreiten von Filtern zu benutzen.

### A.3. Pegel

Insbesondere in der Nachrichtentechnik werden als Bezugsgrössen Standardwerte genommen. So nimmt man in der Übertragungstechnik oft eine Bezugsleistung von 1 mW an. Vergleicht man andere Leistungen mit dieser Bezugsleistung, so drückt man damit nicht nur ein Leistungsverhältnis aus, sondern eine absolute Leistung oder einen sogenannten **Pegel**. Um diese Verhältnisse mit festem Bezugswert von anderen unterscheiden zu können, fügt man dem dB einen Zusatz hinzu. So drückt **dBm** eine Leistung aus bezogen auf die Bezugsleistung  $P_{bez} = 1 \text{ mW}$  (cf. Tabelle A.2). Ferner gibt es **dBW** bei denen sich die Pegelangabe auf die Leistung 1 W bezieht. Der Angabe in **dBμV** oder kurz **dBμ**, drückt einen Pegel aus, der sich auf die Spannung  $U_{bez} = 1 \mu\text{V}$  bezieht (cf. Tabelle A.3). Es werden auch Spannungspegel in **dBV** angegeben, welche sich auf 1 V beziehen.

Tabelle A.2.: Leistungspegel

Leistung P in Watt	Leistungspegel in dB Milliwatt
1 W	30 dBm
100 mW	20 dBm
10 mW	10 dBm
4 mW	6 dBm
2 mW	3 dBm
1 mW	0 dBm
100 μW	-10 dBm
10 μW	-20 dBm
1 μW	-30 dBm
1 nW	-60 dBm
1 pW	-90 dBm

Tabelle A.3.: Spannungspegel

Spannung U in Volt	Spannungspegel in dB Microvolt
1 V	120 dBμV
100 mV	100 dBμV
10 mV	80 dBμV
1 mV	60 dBμV
100 μV	40 dBμV
10 μV	20 dBμV
1 μV	0 dBμV

Beispiel: **Kaskade: Hintereinanderschaltung mehrerer Zweitore**

Liegt z. B. die Leistung  $P_{1dBm} = -30 \text{ dBm} \equiv P_1 = 1 \mu\text{W}$  an einer Übertragungsstrecke mit Dämpfung  $A = +3 \text{ dB}$  gefolgt von einem Verstärker mit Leistungsverstärkung  $G =$

+20 dB, so ergibt sich für die Leistung  $P_2$  am Ausgang der Verstärkerstufe:

$$\begin{aligned}P_{2dBm} &= P_{1dBm} - A + G = -30 \text{ dBm} - 3 \text{ dB} + 20 \text{ dB} = -13 \text{ dBm} \\P_2 &= \frac{100}{2} 1 \mu\text{W} = 50 \mu\text{W}\end{aligned}$$

Eine Multiplikation der (nichtlogarithmierten) Verhältnisse entspricht einer Addition der Verhältnissen in dB.

Ende Beispiel

## **B. Elementare und Zusammengesetzte Frequenzgangfunktionen**



## EL3, Übersicht Frequenzgangfunktionen

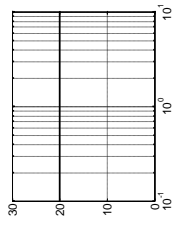
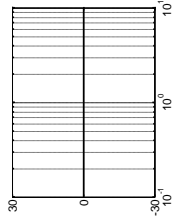
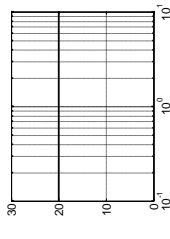
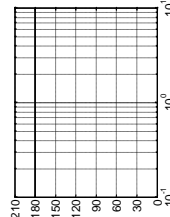
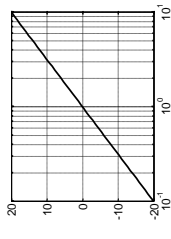
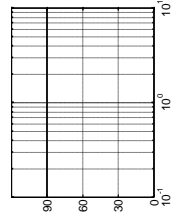
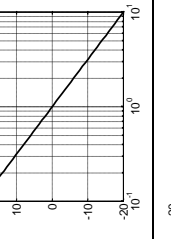
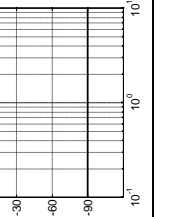
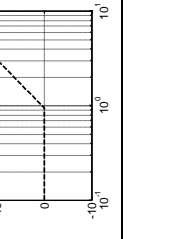
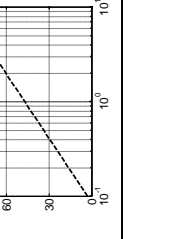
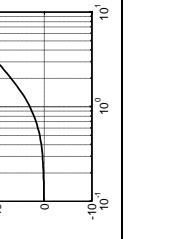
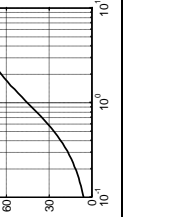
Elementare Frequenzgangfunktionen (nicht weiter zerlegbar)						Schaltung	
Bezeichnung	Frequenzgangfunktion $G(\Omega)$ mit $\Omega = \omega/\omega_0$	Konstruktion im Bode-Diagramm: Amplitudengang in dB (x-Achse: $\Omega$ )	Konstruktion im Bode-Diagramm: Phasengang in Grad (x-Achse: $\Omega$ )	Bode-Diagramm: Amplitudengang in dB (x-Achse: $\Omega$ )	Bode-Diagramm: Phasengang in Grad (x-Achse: $\Omega$ )		
konstanter Faktor $k > 0$	$k$	Verschiebung um $20 \cdot \log_{10} k$	Kein Einfluss	 Für $k = 10$	 Für $k = 10$	Nicht-invertierender Verstärker (realisierbar z.B. mit Operationsverstärker)	
konstanter Faktor $k < 0$	$k$	Verschiebung um $20 \cdot \log_{10}  k $	$\pm 180^\circ$ addieren (Winkel soll möglichst klein werden)	 Für $k = 10$	 Für $k = -10$	Invertierender Verstärker (realisierbar z.B. mit Operationsverstärker)	
Differentienglied	$j\Omega$	Siehe Bode-Diagramm	Siehe Bode-Diagramm	 Für $k = -10$		Nicht physikalisch, zwar gilt z.B. $I = j\omega C \cdot \underline{U}$ , aber beim Einschalten würde ein unendlich hoher Strom fließen. Jedoch ist eine Näherung mit sehr kleinem Seriewiderstand möglich.	
Integrierglied	$\frac{1}{j\Omega}$	Siehe Bode-Diagramm	Siehe Bode-Diagramm			Verhältnis von Strom zur Spannung an der Spule: $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{j\omega L}$	
Glied 1. Ordnung	$1 + j\Omega$					Nicht physikalisch, Näherung jedoch möglich (aktive Schaltung mit Verstärker)	

Abbildung B.1.: Frequenzgangfunktionen 1

Glied 1. Ordnung, Tiefpass	$\frac{1}{1+j\Omega} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$				
Glied 2. Ordnung für $Q > \frac{1}{2}$ (sonst zerlegbar)	$1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2$				Nicht physikalisch, Näherung jedoch möglich (aktive Schaltung mit Verstärker)
Glied 2. Ordnung für $Q > \frac{1}{2}$ (sonst zerlegbar)	$\frac{1}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$				LRC-Serieschwingkreis mit Abgriff am Kondensator
Zerlegbare Frequenzgangfunktionen					
Hochpass	$\frac{j\Omega}{1 + j\Omega}$ Nenner und Zähler haben dasselbe $\Omega$ , $\omega_0$ wie beim Tiefpass				
Glied 2. Ordnung für $Q \leq \frac{1}{2}$	$1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2 = (1 + j\Omega\omega_1) \cdot (1 + j\Omega\omega_2)$ mit $\omega_{1,2} = \omega_0 \left( \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right)$ bzw. $\Omega_{1,2} = \left( \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right)$				$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Diese Faktorisierung liefert elementare Teilglieder, sodass das entsprechende Bodediagramm durch Addition elementarer Bodediagramme bestimmt werden kann.

Abbildung B.2.: Frequenzgangfunktionen 2

LRC-Schwingkreis mit Abgriff an der Spule	$\frac{(j\Omega)^2}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	<p>Für <math>Q = 10</math></p>	<p>Für <math>Q = 10</math></p>	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Bandpass	$\frac{1}{Q} \frac{j\Omega}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	<p>Für <math>Q = 10</math></p>	<p>Für <math>Q = 10</math></p>	<p>LRC-Schwingkreis mit Abgriff am Widerstand</p> $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Bandsperr	$\frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	<p>Für <math>Q = 10</math></p>	<p>Für <math>Q = 10</math></p>	<p>LC-Parallelschwingkreis mit Serienwiderstand</p> $Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$

Hinweise: Bedingung beim Einsatz von Spulen ist Spulenwiderstand  $\ll R$ ; «nicht physikalisch» = kann mit einer Schaltung aus  $R$ ,  $L$  und  $C$  nicht exakt nachgebildet werden; die obige Aufstellung ist nicht abschliessend, sondern exemplarisch (es gibt viele weitere Schaltungen mit gleichen Frequenzgängen)

Abbildung B.3.: Frequenzgangfunktionen 3

## C. Bedeutung des Gütefaktors

Die verschiedenen Interpretationen für die Bedeutung des Gütefaktors bei schwingfähigen Systemen 2. Ordnung werden hier an Hand des RLC-Serieschwingkreises beispielhaft erläutert<sup>1</sup> (cf. Abbildung C.1):

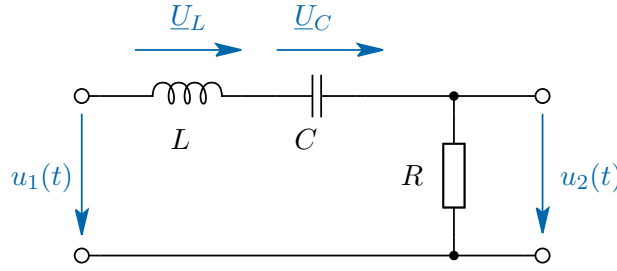


Abbildung C.1.: RLC-Serieschwingkreis

Die Übertragungsfunktion dieser Schaltung ist gegeben. Mit der normierten Frequenz  $\Omega := \frac{\omega}{\omega_0}$  und der Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  erhält man:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\Omega \frac{1}{Q}}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2} = \frac{j\Omega \frac{1}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\Omega \frac{1}{Q}} \quad (\text{C.1})$$

Der Amplitudengang der Übertragungsfunktion (C.1) ist in den Abbildungen C.2 und C.3 dargestellt. Unter der allgemeinen Annahme, dass  $Q \geq \frac{1}{2}$ , bzw.  $0 < \xi \leq 1$ , ergeben sich

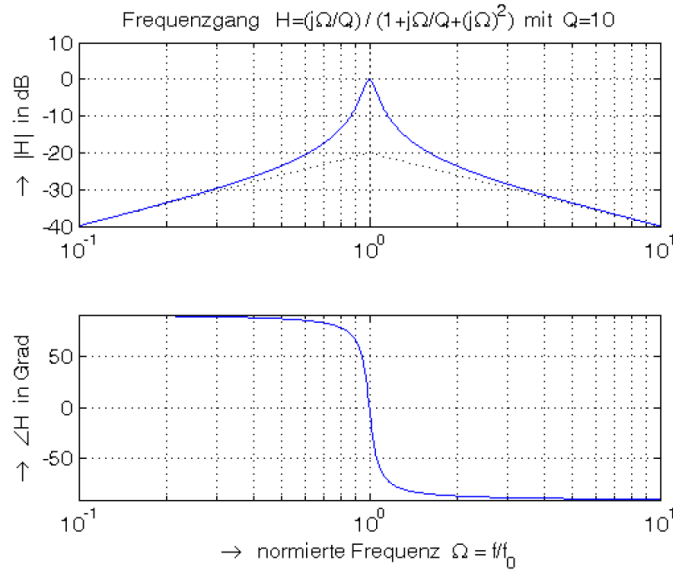


Abbildung C.2.: Amplitudengangs  $|\underline{H}(\omega)|$  der Frequenzgangfunktion (C.1) für  $Q = 10$ , bzw.  $\xi = 0.05$

die folgende Bedeutungen für die Güte  $Q$ :

<sup>1</sup> Für den Parallelschwingkreis gelten duale, zum Teil nicht identische Aussagen.

### 1. Resonanzüberhöhung des Amplitudengangs

Der Abstand zwischen dem Maximum des Amplitudengangs bei  $\Omega = 1$  und dem Wert der beiden Näherungsgeraden bei  $\Omega = 0$  ist exakt gleich  $Q$ . Beim Gütefaktor  $Q = 1$  (bzw. dem Dämpfungsmass  $\xi = \frac{1}{2}$ ), verläuft der Amplitudengang bei Resonanzfrequenz exakt durch den Kreuzungspunkt der Näherungsgeraden, wie dies in der Abbildung 3.3 auf S. 14 zu sehen ist.

### 2. Bandbreite

Der Amplitudengang bildet hier ein *Bandpassfilter*: die Stromstärke bei Frequenzen um die Resonanzfrequenz herum wird kaum unterdrückt, so dass die Spannung  $u_R(t)$  nahezu mit der Spannung  $u_1(t)$  identisch ist. Bei Frequenzen unterhalb und oberhalb der Resonanzfrequenz wird  $u_R(t)$  unterdrückt. Als **Bandbreite** bezeichnet man allgemein das Frequenzintervall in dem die Unterdrückung weniger als den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , d. h.  $-3$  dB (bezogen auf das Maximum des Amplitudengangs) beträgt. Die Berechnung der beiden **Grenzkreisfrequenzen** liefert das folgende Ergebnis (ohne Herleitung):

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left( \sqrt{1 + \xi^2} \mp \xi \right) \quad (\text{C.2})$$

Damit beträgt die Bandbreite:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\xi\omega_0$$

Die Resonanzfrequenz entspricht hier gerade dem *geometrischen Mittelwert* von  $\omega_1$  und  $\omega_2$ :  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$ . Dieser Mittelwert wird auch **Bandmitten(kreis)frequenz** genannt. Die **relative Bandbreite**  $d$  ist die Bandbreite bezogen auf die Bandmittenfrequenz:

$$d = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = 2\xi = \frac{1}{Q} \quad (\text{C.3})$$

Offensichtlich hängt die relative Bandbreite nur von  $Q$  oder  $\xi$  ab.

### 3. Widerstandsverhältnisse

Bei der Resonanzfrequenz entspricht der Gütefaktor dem Verhältnis des Blindwiderstandes  $\omega_0 L$  der Spule zum Wert  $R$  des ohmschen Widerstands des Schwingkreises oder dem Verhältnis des Leitwertes  $G = \frac{1}{R}$  des Widerstands zum Blindleitwert  $\omega_0 C$  der Kapazität:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{G}{\omega_0 C}$$

Für den Parallelschwingkreis gilt dual dazu:

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

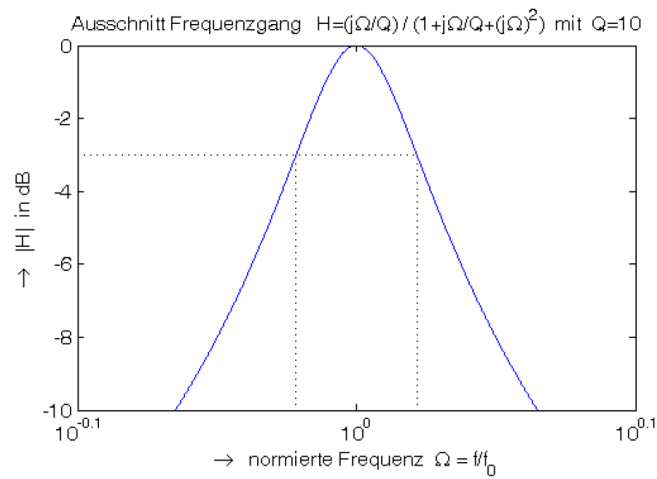
### 4. Energieverhältnis

Wird der Schwingkreis durch eine sinusförmige Spannung mit der Resonanzfrequenz  $f_0$  angeregt, so entspricht der Gütefaktor  $Q$  (im eingeschwungenen Zustand) auch dem Verhältnis zwischen der insgesamt in  $L$  und  $C$  gespeicherten Energie<sup>2</sup> und der mittleren im Zeitintervall  $\frac{1}{2\pi f_0} = \frac{1}{\omega_0}$  in  $R$  dissipierten Energie (ohne Herleitung). Dieses Ergebnis gilt übrigens sowohl für den Serien-, wie auch für den Parallelschwingkreis.

<sup>2</sup> Diese ist im stationären Zustand zeitlich konstant!

### 5. Dynamisches Verhalten (Ein- und Ausschwingen)

Eine weitere Bedeutung von  $Q$  ergibt sich aus der Abklingzeit der Signale (Spannungen, Stromstärke) des frei schwingenden ausschwingenden Kreises. Frei ausschwingend bedeutet, dass Spannungsquellen kurzgeschlossen und alle Stromquellen abgetrennt werden. Die Amplituden der Schwingungen nehmen mit der Zeitkonstante  $\tau = \frac{1}{\xi\omega_0} = \frac{2Q}{\omega_0}$  exponentiell ab (ohne Herleitung). In der Praxis sind nach  $5\tau = Q \frac{10}{2\pi} \frac{1}{f_0} \approx Q \cdot \frac{1}{f_0}$  die Signale abgeklungen, d. h. nach ca.  $Q$  Perioden der freien Schwingung. Die Anzahl der „sichtbaren“ Schwingungen liefert also einen Schätzwert für den Gütefaktor.



**Abbildung C.3.:** Detail des Überhöhung des Amplitudengangs der Frequenzgangfunktion nach Abbildung C.2

Gestrichelt dargestellt ist die  $-3$  dB-Bandbreite und die beiden Grenzfrequenzen nach Gleichung (C.2). Die Bandmittenfrequenz befindet sich hier beim Maximum des Amplitudengangs. Auf einer linearen Frequenzskala sind die Abstände der Grenzfrequenzen von der Mittenfrequenz nicht identisch.

## D. Hinweise zu MATLAB

### D.1. Programmierung einer Frequenzgangfunktion und ihrer Darstellung

Lineare, zeitinvariante Systeme (LTI systems) können mit Matlab auf verschiedene Arten definiert werden. Eine gebräuchliche davon, ist die Darstellung als **Übertragungsfunktion** (transfer function). Dabei werden die Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome der Frequenzgangfunktion in *abnehmender* Reihenfolge (Matlab-Konvention) angegeben. Als Beispiel soll die folgende Frequenzgangfunktion dienen:

$$\underline{H}(\omega) = k \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{b_1 j \omega + b_0}{(j \omega)^2 + a_1 j \omega + a_0}$$

Durch Normierung wird gesorgt, dass der Koeffizient des Nennerpolynoms mit der höchsten Potenz auf 1 normiert wird, in diesem Fall also  $a_2 = 1$ . Dies erfolgt hier durch Multiplikation des Zähler- und des Nennerpolynoms mit dem Koeffizienten  $\omega_0^2$ .

**Listing D.1:** Matlab-Code zur Bestimmung des Frequenzgangs mit den spezifischen Matlab-Funktionen tf, bode und nyquist

```
% Bestimmung eines LTI-Systems als Uebertragungsfunktion (transfer
function)
% und Darstellung des Bodediagramms
%
% © M. Schlup, 6. Mai 2000, 30. Sept. 2005, 30. Aug. 2007, 2. Juli 2008
%
clear all, close all, clc, hold off, format compact

% Parameterwerte
k=1; % Verstaerkungsfaktor
f0=1e3; % Bezugsfrequenz (hier: Resonanzfrequenz)
w0=2*pi*f0; % Bezugskreisfrequenz
Q=10; % Guetefaktor
b1=k/Q/w0;
b0=0;
a2=1/w0^2;
a1=1/Q/w0;
a0=1;
% Frequenzgangfunktion (Koeffizienten des Zaehler- und des
Nennerpolynoms)
num=[b1 b0]/a2; % Nennerkoeffizient mit der hoechsten Potenz auf 1
normiert
den=[a2 a1 a0]/a2;
sys=tf(num,den); % Systemdefinition mit "tf" (transfer function)
% 1. Version: Bodeplot mit automatischer Wahl des Frequenzbereichs
figure(1)
bode(sys);
% 2. Version: Bodeplot mit Vorgabe des Frequenzbereichs
```



```

figure(2)
f=logspace(log10(0.1*f0),log10(10*f0),2^10); % 2^10 Stuetzwerte
w=2*pi*f;
bode(sys,w);
% 3. Version: Amplituden- (Fa in dB) und Phasengang (Fp in Grad)
% explizit,
% ohne Plot, siehe ">> help bode" fr Details
[Fa,Fp,w]=bode(sys);
figure(3)
% Ortskurve
nyquist(sys)
axis equal
%
```

Bemerkung: In den Bode- und Nyquist-Figuren kann mit der rechten Maustaste ein Darstellungsmenu herangezogen werden, bei dem im Untermenu Properties die Darstellungsparameter geändert werden können.

## D.2. Detaillierte Programmierung ohne spezifische Matlab-Funktionen

**Listing D.2:** Matlab-Code zur Bestimmung von Bodediagramm und Ortskurve (ohne Benutzung der eingebauten Matlab-Funktionen)

```

% Darstellung eines Frequenzgangs als Bodediagramm und als Ortskurve
% am Beispiel eines RLC-Serieschwingkreises
%
% © M. Schlup, 6. Mai 2000, 30. Sept. 2005, 30. Aug. 2007, 2. Juli 2008
%
clear all, close all, clc, hold off, format compact

% Werte der Schaltungselemente (RLC-Serieschwingkreis)
R=4.6; % Ohm
C=470e-9; % Farad
L=1e-3; % Henry
% Resonanzfrequenz
w0=1/sqrt(L*C); % Kreisfrequenz in s^-1
f0=w0/2/pi; % Frequenz in Hz
% Wahl des Frequenzbereichs (logarithmische Abstaende)
f=logspace(log10(0.1*f0),log10(10*f0),2^10);
w=2*pi*f;
jw=j*w;
% Frequenzgangfunktion
% 1. Version: direkt der Schaltung entsprechend
H=R./(R+jw*L+1./(jw*C)); % H=R*Y=R*I/U1=UR/U1
% 2. Version: indirekt aus den Parametern des Systems 2. Ordnung
Q=sqrt(L/C)/R; % Guetefaktor
k=1; % Verstaerkungsfaktor
% Frequenzgangfunktion (ausprogrammiert mit Hornerschema)
%H=k*jw/w0/Q./((jw/w0+1/Q).*jw/w0+1);

Ha=abs(H); % Amplitude (Betrag)
Hp=angle(H)*180/pi; % Phase (Argument) in Grad
% Frequenzgang (lineare Darstellung)
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(f,Ha)
```

```

title('Frequenzgang von H(f)')
ylabel('\rightarrow |H|')
grid
subplot(2,1,2)
plot(f,Hp)
xlabel('\rightarrow Frequenz in Hz')
ylabel('\rightarrow \angle H in Grad')
grid
% Bodediagramm (logarithmische Massstaebe)
figure(2)
subplot(2,1,1)
semilogx(f/f0,20*log10(Ha))
title('Frequenzgang von \comp{H}(\omega) bzw. H(f)')
ylabel('\rightarrow |H| in dB')
grid
subplot(2,1,2)
semilogx(f/f0,Hp)
xlabel(['\rightarrow normierte Frequenz (f / f_{0})',...
        ' mit f_{0} \approx ',num2str(f0/1e3,'%4.2f'),' kHz'])
ylabel('\rightarrow \angle H in Grad')
grid
% Ortskurve
figure(3)
plot(H) % Ortskurve, zeichnet automatisch Imaginaerteil gegen Realteil
title('Ortskurve: Frequenzgang von \comp{H}(\omega)')
xlabel('\rightarrow \Re\{H\}')
ylabel('\rightarrow \Im\{H\}')
axis equal
grid

```

## E. Literaturverzeichnis

- [1] A. Führer, K. Heidemann, W. Nerreter: *Grundgebiete der Elektrotechnik*, Band 1: Stationäre Vorgänge  
Hanser, 8. Auflage, ISBN-13: 978-3-446-40668-1, Preis: €19.90
- [2] A. Führer, K. Heidemann, W. Nerreter: *Grundgebiete der Elektrotechnik*, Band 2: Zeitabhängige Vorgänge  
Hanser, 8. Auflage, ISBN-13: 978-3-446-40573-8, Preis: €19.90
- [3] A. Führer, K. Heidemann, W. Nerreter: *Grundgebiete der Elektrotechnik*, Band 3: Aufgaben  
Hanser, 2. Auflage, ISBN-13: 978-3-446-41258-3, Preis: €19.90
- [4] E. Hering, K. Bressler, J. Gutekunst: *Elektronik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*  
Springer, 5. Auflage, ISBN-13: 978-3-540-24309-0, Preis: €44.95
- [5] H. Lutz, W. Wendt: *Taschenbuch der Regelungstechnik*  
Harri Deutsch, 6. Auflage 2005, ISBN: 3-8171-1749-3, Preis: €34.95