Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

zh
aw School of Engineering

EL2, Lösung Übung 9, Frequenzgang 2

1. Aufgabe

a) $\underline{U}_1 = \frac{1}{j\omega C}\frac{\underline{U}_2}{R} + \underline{U}_2 \quad \rightarrow \quad (j\omega RC + 1)\underline{U}_2 = j\omega RC\underline{U}_1 \quad \rightarrow \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$

b) Ist $\omega \ll \frac{1}{RC} = \omega_g$, so wird $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \approx RCj\omega$, was einer reinen Differentiation entspricht.

c) Oberhalb der Grenzfrequenz $\omega \gg \omega_g = \frac{1}{RC}$ gilt $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \approx 1$. Komponenten von $u_1(t)$ mit Frequenzanteilen weit unterhalb ω_g werden unterdrückt → DC-Entkopplung z.B. am Eingang eines Oszilloskops.

2. Aufgabe

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_2 \parallel \mathrm{j}\omega L_2}{(R_2 \parallel \mathrm{j}\omega L_2) + \mathrm{j}\omega L_1} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega L_1}{R_2 \parallel \mathrm{j}\omega L_2}} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega L_1}{\frac{R_2 \cdot \mathrm{j}\omega L_2}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2}}} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega L_1 \cdot (R_2 + \mathrm{j}\omega L_2)}{R_2 \cdot \mathrm{j}\omega L_2}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{L_1}{L_2} + \frac{\mathrm{j}\omega L_1}{R_2}}$$

Beachte: wir sind noch nicht am Ziel. Der obenstehende Ausdruck entspricht keiner bekannten normierten Form, kann jedoch in eine solche überführt werden:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + \frac{L_1}{L_2} + \frac{\mathrm{j}\omega L_1}{R_2}} \cdot \frac{\frac{1}{1+\frac{L_1}{L_2}}}{\frac{1}{1+\frac{L_1}{L_2}}} = \frac{1}{1 + \frac{L_1}{L_2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega L_1}{R_2\left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right)}}$$

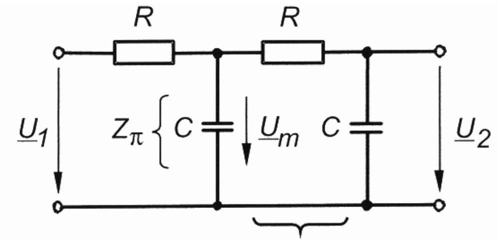
Nun sind wir eigentlich am Ziel, doch noch etwas Kosmetik:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega \frac{L_1 \cdot L_2}{R_2 (L_1 + L_2)}}$$

D.h. es handelt sich um einen Tiefpass mit $\tau = \frac{1}{\omega_0} = \frac{L_2}{R_2 (L_1 + L_2)}$ und vorgängigem Abschwächungsfaktor $\frac{L_2}{L_1 + L_2}$.

3. Aufgabe

a)



π -Glied

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_\mathrm{m}} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$$

Setzt man $\omega RC = \Omega$, so vereinfacht sich der Ausdruck:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_\mathrm{m}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\Omega}$$

Das sogenannte π -Glied aus *C-R-C* hat den Eingangswiderstand $\underline{Z}_\pi$:

$$\underline{Z}_\pi = \frac{\underline{Z}_\mathrm{C} \cdot (\underline{Z}_\mathrm{R} + \underline{Z}_\mathrm{C})}{\underline{Z}_\mathrm{R} + 2\underline{Z}_\mathrm{C}} = \frac{\underline{Z}_\mathrm{R} + \underline{Z}_\mathrm{C}}{(\underline{Z}_\mathrm{R} / \underline{Z}_\mathrm{C}) + 2} = \frac{R + (1/\mathrm{j}\omega C)}{2 + \mathrm{j}\omega RC}$$

$$\underline{Z}_\pi = \frac{1 + \mathrm{j}\omega RC}{\left(2 + \mathrm{j}\omega RC\right) \cdot \mathrm{j}\omega C} = \frac{1 + \mathrm{j}\,\Omega}{(2 + \mathrm{j}\Omega) \cdot \mathrm{j}\omega C} \text{ mit } \omega RC = \Omega$$

Somit ergibt sich für die Spannungsteilung:

$$\frac{\underline{U}_\mathrm{m}}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_\pi}{R + \underline{Z}_\pi} = \frac{1 + \mathrm{j}\,\Omega}{(2 + \mathrm{j}\,\Omega) \cdot \mathrm{j}\omega C} \cdot \frac{1}{R + \dfrac{1 + \mathrm{j}\,\Omega}{(2 + \mathrm{j}\,\Omega) \cdot \mathrm{j}\omega C}}$$

$$\frac{\underline{U}_\mathrm{m}}{\underline{U}_1} = \frac{1 + \mathrm{j}\,\Omega}{1 - \Omega^2 + 3\,\mathrm{j}\,\Omega}$$

Ergebnis Übertragungsfunktion:

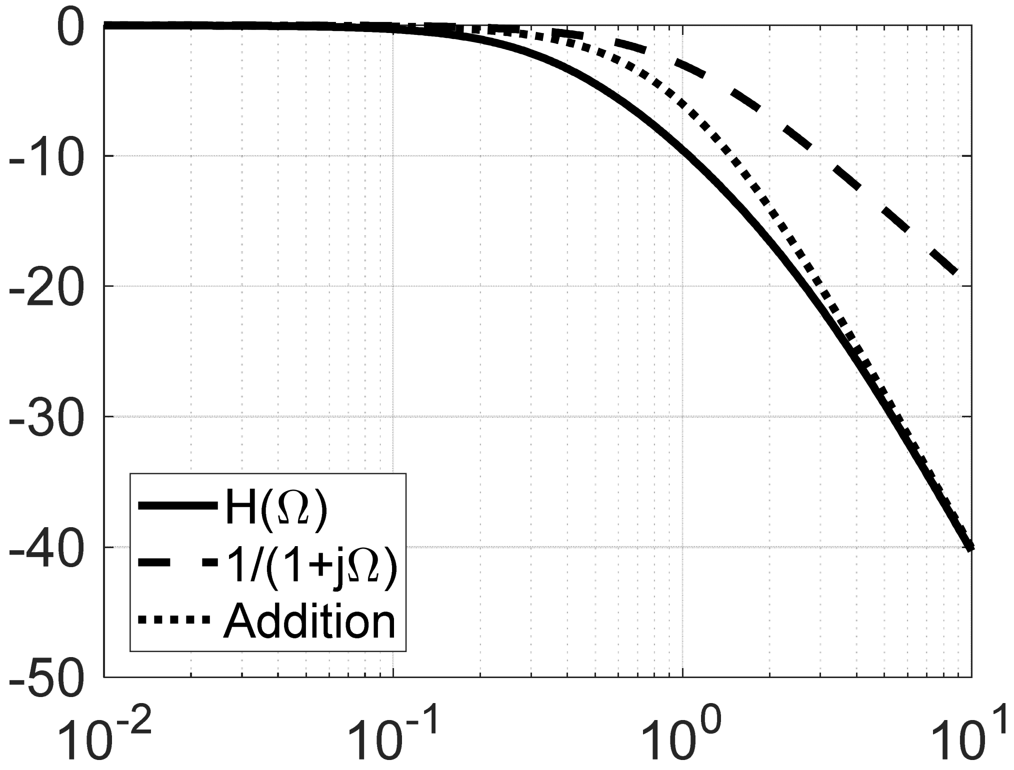
$$H(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{U_2(\omega)}{U_m(\omega)} \cdot \frac{U_m(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + 3\mathrm{j}\Omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}3\Omega + (j\Omega)^2}$$

d.h. $Q = \dfrac{1}{3} = -9{,}5\,\mathrm{dB}$

b) Siehe Diagramm unten.

c) Siehe Diagramm unten.

d) Die Zerlegung von Frequenzgangfunktionen ist zunächst ein reines Hilfsmittel, um Frequenzgänge höherer Ordnung skizzieren zu können. **Die Zerlegung darf nicht als Bauanleitung für eine Schaltung interpretiert werden.** Der Grund liegt darin, dass Schaltungen in der Regel nicht rückwirkungsfrei sind, mathematische Terme aber schon. Im vorliegenden Fall belastet die zweite *RC*-Schaltung die erste. Vermeidet man dies, indem z.B. gewählt wird: $R_2 = 100 \cdot R_1$ (womit folgt: $C_2 = C_1 / 100$), belastet der zweite Tiefpass den ersten nicht mehr nennenswert und man erhält mit der Schaltung die Kurve «Addition» im untenstehenden Diagramm.


0
-10
-20
-30
-40
-50
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
H(Ω)
1/(1+jΩ)
Addition