Zurich University
of Applied Sciences

School of Engineering
ISC Institute of Signal Processing
and Wireless Communications



Martin Weisenhorn

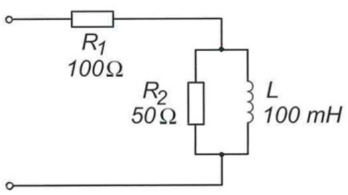
3. April 2020

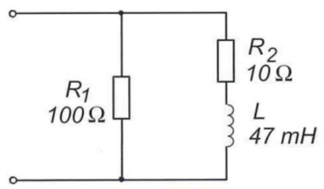
# Uebungsserie 1.3 – RLC-Netzwerke und komplexe Leistung

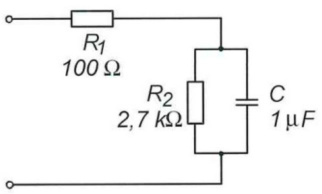
## Aufgabe 1. Komplexe Impedanz von Zweipolen

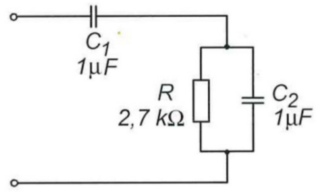
Bestimmen Sie für die nachfolgenden Schaltungen jeweils den komplexen Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ analytisch. Zerlegen Sie den resultierenden Ausdruck analytisch in Real- und Imaginärteil. Berechnen Sie anschliessend die numerischen Wert der Impedanz (komplexer Widerstand) und der Admittanz (komplexer Leitwert) jeweils in kartesischer und in exponentieller Form. Als Frequenz ist in allen Schaltungen $f = 50\,\text{Hz}$ einzusetzen.

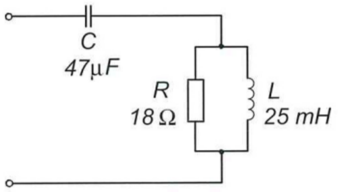
**Bemerkung:** Die Vielzahl an Übungen a) bis h) soll helfen einen sicheren Umgang mit der Algebra und Arithmetik der komplexen Zahlen zu erlernen. Sobald dies erreicht ist, können sie die restlichen Übungen überspringen und zu Aufgabe 2. übergehen.

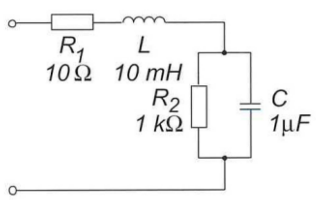
a)


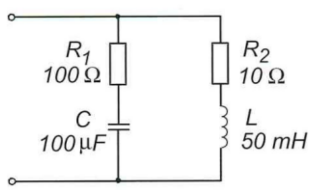

b)


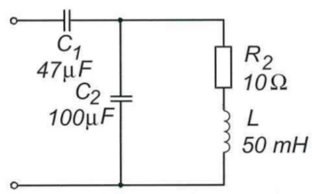

c)



d)



e)


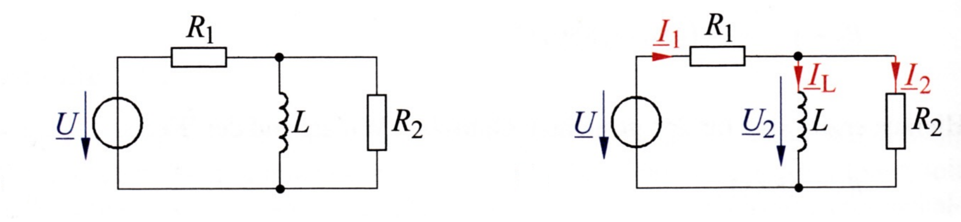

f)



g)



h)


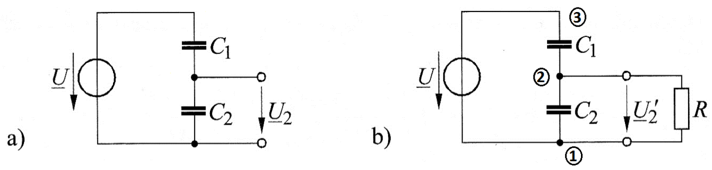

## Aufgabe 2. Ströme in Netzwerk numerisch bestimmen

In der unten abgebildeten Schaltung haben die ohmschen Widerstände die Werte $R_1 = 10\,\Omega$ und $R_2 = 20\,\Omega$. Die vorhandene Spule besitzt die Induktivität $L = 100\,\mathrm{mH}$. Die Schaltung liegt an einer Spannung von $U = 100\,\mathrm{V}$ mit der Frequenz $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Für den Phasenwinkel der Spannung gelte $\varphi_u = 0$. Es sind die numerischen Werte aller auftretenden komplexen Ströme in kartesischen Koordinaten zu berechnen.




## Aufgabe 3. Spannungen in Netzwerk analytisch berechnen

Ein kapazitiver Spannungsteiler nach Abb. a enthält Kondensatoren mit Kapazitäten $C_1 = 5\,\mathrm{nF}$ und $C_2 = 45\,\mathrm{nF}$. Der Lastwiderstand $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$. Die Eingangsspannung hat die Frequenz $f = 1\,\mathrm{kHz}$ und beträgt $\underline{U} = 60\,\mathrm{V}$.




**a)** Berechnen Sie einen analytischen Ausdruck für die Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ des unbelasteten Spannungsteilers nach Abb. a. Stellen Sie den Ausdruck in möglichst einfacher Form dar.

**b)** Setzen Sie nun die numerischen Werte ein und berechnen Sie $\underline{U}_2$ in Polarkoordinaten und interpretieren Sie das Ergebnis.

**c)** Berechnen Sie einen analytischen Ausdruck für die Ausgangsspannung $\underline{U}_2'$ des belasteten Spannungsteilers nach Abb. b. Stellen Sie den Ausdruck in möglichst einfacher Form dar.

**d)** Setzen Sie nun die numerischen Werte ein und berechnen Sie $\underline{U}_2'$ in Polarkoordinaten und interpretieren Sie das Ergebnis.

**e)** Stellen Sie die Spannungen $\underline{U}$, $\underline{U}_2'$ sowie $\underline{U} - \underline{U}_2'$ in einem Zeigerdiagramm dar und numerieren Sie die Knoten wie in der Zeichnung. Es ist keine masstäbliche Zeichnung erforderlich.

**Aufgabe 4.** An einem linearen Zweipol wurden die folgenden stationären Grössen gemessen: $u(t) = 5\,\mathrm{V}\sin(\omega t + 0.2)$ und $i(t) = 20\,\mathrm{mA}\cos(\omega t + 0.1)$. Bestimmen Sie

**a)** die Momentanleistung am Zweipol, für das Verbraucherbezugspfeilsystem

**b)** die mittlere Leistung, d.h. den Mittelwert der Momentanleistung über eine Periode

**c)** die Impedanz des Zweipols in polarer und kartesischer Form

**d)** die Admittanz des Zweipols in polarer und kartesischer Form

**e)** die komplexe Scheinleistung in kartesischer Form.

## Lösung 1.

a) Allgemein gilt für die vorliegende Reihenschaltung:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \quad \text{mit } \underline{Z}_1 = R_1 \quad \text{und } \underline{Z}_2 = R_2 \| \mathrm{j}X_\mathrm{L}$$

($\|$ bedeutet parallelgeschaltet)

Für die darin enthaltene Parallelschaltung aus $R_2$ und $L$ sind zunächst die Admittanzen zu addieren:

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}} = \frac{\mathrm{j}\omega R_2 L}{R_2 + \mathrm{j}\omega L}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega R_2 L \cdot (R_2 - \mathrm{j}\omega L)}{R_2^2 + (\omega L)^2} = \frac{R_2 (\omega L)^2 + \mathrm{j}\omega R_2^2 L}{R_2^2 + (\omega L)^2} \qquad (1)$$

Für die Berechnung der Zahlenwerte unter Benutzung eines Taschenrechners, der die Umformung

Normalform $\Leftrightarrow$ Exponentialform

der komplexen Zahlen ermöglicht, setzt man sinnvollerweise nicht in die Endgleichung (1) ein, sondern schon in die Ausgangsgleichungen:

Zahlenwerte:

$R_1 = 100\,\Omega$,

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}} = \frac{1}{20\,\mathrm{mS} - \mathrm{j}31{,}83\,\mathrm{mS}} = \frac{1}{37{,}6\,\mathrm{mS} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(57{,}86°)}}$$

$$\underline{Z}_2 = 26{,}6\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}(57{,}86°)} = 14{,}15\,\Omega + \mathrm{j}22{,}5\,\Omega$$

In der Normalform lassen sich leicht getrennt Real- und Imaginäranteile addieren:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 100\,\Omega + 14{,}15\,\Omega + \mathrm{j}22{,}5\,\Omega$$

$$\underline{Z} = 114{,}15\,\Omega + \mathrm{j}22{,}5\,\Omega = 116{,}35\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(11{,}1°)}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = 8{,}59\,\mathrm{mS} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(11{,}1°)} = 8{,}43\,\mathrm{mS} - \mathrm{j}1{,}66\,\mathrm{mS}$$

b) Die Gesamtadmittanz der vorliegenden Parallelschaltung aus $R_1$ sowie $R_2$ und $L$ ist:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{R_1} + \frac{R_2 - j\omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2}$$

$$\underline{Y} = \frac{R_1 R_2 + R_2^2 + (\omega L)^2 - \mathrm{j}\omega R_1 L}{R_1 \cdot \left[R_2^2 + (\omega L)^2\right]}$$

Umwandlung in die Gesamtimpedanz:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \mathrm{j}\omega L}} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + \mathrm{j}\omega L)}{R_1 + R_2 + \mathrm{j}\omega L}$$

$$\underline{Z} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + \mathrm{j}\omega L) \cdot (R_1 + R_2 - \mathrm{j}\omega L)}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2}$$

$$\underline{Z} = \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2) + R_1 (\omega L)^2 + \mathrm{j}\omega L\left[R_1 (R_1 + R_2) - R_1 R_2\right]}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2}$$

Zahlenwerte:

$\underline{Z}_1 = R_1 = 100\,\Omega$, $\underline{Y}_1 = 10\,\mathrm{mS}$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}\omega L = 10\,\Omega + \mathrm{j}14{,}76\,\Omega = 17{,}83\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(55{,}89°)}$$

$$\underline{Y}_2 = 56{,}08\,\mathrm{mS} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(55{,}89°)} = 31{,}4\,\mathrm{mS} - \mathrm{j}46{,}4\,\mathrm{mS}$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = 10\,\mathrm{mS} + 31{,}4\,\mathrm{mS} - \mathrm{j}46{,}4\,\mathrm{mS}$$

$$\underline{Y} = 62{,}2\,\mathrm{mS} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(48{,}25°)}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = 16{,}07\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(48{,}25°)} = 10{,}7\,\Omega + \mathrm{j}11{,}99\,\Omega$$

c) Genau wie bei Aufgabe a) setzt man hier wieder an:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \text{ mit } \underline{Z}_1 = R_1 \text{ und } \underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} \text{ mit } \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1 + \mathrm{j}\omega R_2 C}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + \mathrm{j}\omega R_2 C} = \frac{R_2 - \mathrm{j}\omega R_2^2 C}{1 + (\omega R_2 C)^2}$$

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega R_2 C)^2} - \mathrm{j}\frac{\omega R_2^2 C}{1 + (\omega R_2 C)^2}$$

Zahlenwerte:

$$\underline{Z}_1 = R_1 = 100\,\Omega$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{2700\,\Omega} + \mathrm{j}2\pi \cdot 50 \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}$$

$$\underline{Y}_2 = (370{,}4 + \mathrm{j}314{,}16) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{S}$$

$$\underline{Y}_2 = 485{,}67\,\mu\mathrm{S} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(40{,}3°)} \Rightarrow \underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} = 2059\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(40{,}3°)}$$

$$\underline{Z}_2 = 1570\,\Omega - \mathrm{j}1331{,}9\,\Omega$$

$$\underline{Z} = 1670\,\Omega - \mathrm{j}1331{,}9\,\Omega = 2136{,}3\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(38{,}6°)}$$

$$\underline{Y} = 468{,}1\,\mu\mathrm{S} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(38{,}6°)}$$

d)

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \text{ mit } \underline{Z}_1 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1},\ \underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C_2} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}\omega R C_2}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} + \frac{R}{1 + \mathrm{j}\omega R C_2} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1} + \frac{R - \mathrm{j}\omega R^2 C_2}{1 + (\omega R C_2)^2}$$

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + (\omega R C_2)^2} - \mathrm{j}\frac{1 + (\omega R C_2)^2 + (\omega R)^2 C_1 C_2}{\omega C_1\left[1 + (\omega R C_2)^2\right]}$$

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + (\omega R C_2)^2} - \mathrm{j}\frac{1 + (\omega R)^2 (C_2^2 + C_1 C_2)}{\omega C_1\left[1 + (\omega R C_2)^2\right]}$$

Zahlenwerte:

$$\underline{Z}_1 = -\mathrm{j}3183{,}1\,\Omega,\ \underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{2700\,\Omega} + \mathrm{j}2\pi\cdot 50\cdot s^{-1}\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{(370+\mathrm{j}314)\cdot 10^{-6}\ \mathrm{S}} = \frac{1}{485\cdot 10^{-6}\ \mathrm{S}\cdot e^{\mathrm{j}(40{,}3^\circ)}}$$

$$\underline{Z}_2 = 2059\,\Omega\cdot e^{-\mathrm{j}(40{,}3^\circ)} = 1570{,}2\,\Omega - \mathrm{j}1331{,}9\,\Omega$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 1570{,}2\,\Omega - \mathrm{j}(3183{,}1\,\Omega + 1331{,}9\,\Omega)$$

$$\underline{Z} = 1570{,}2\,\Omega - \mathrm{j}4515\,\Omega = 4780{,}3\,\Omega\cdot e^{-\mathrm{j}(70{,}8^\circ)}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = 209{,}2\,\mu\mathrm{S}\cdot e^{\mathrm{j}(70{,}8^\circ)} = 68{,}7\,\mu\mathrm{S} + \mathrm{j}197{,}6\,\mu\mathrm{S}$$

e) $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ mit $\underline{Z}_1 = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$ und $\underline{Z}_2 = \frac{R\cdot \mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L}$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega L R\cdot(R - \mathrm{j}\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R\cdot(\omega L)^2 + \mathrm{j}\omega L R^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\underline{Z} = \frac{R\cdot(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} + \mathrm{j}\left[\frac{R^2\,\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C}\right]$$

Zahlenwerte:

$$\underline{Z}_1 = -\mathrm{j}67{,}7\,\Omega,\ \underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{55\ \mathrm{mS} - \mathrm{j}127\ \mathrm{mS}} = \frac{1}{139\ \mathrm{mS}\cdot e^{-\mathrm{j}(66{,}4^\circ)}}$$

$$\underline{Z}_2 = 7{,}2\,\Omega\cdot e^{\mathrm{j}(66{,}4^\circ)} = 2{,}88\,\Omega + \mathrm{j}6{,}6\,\Omega$$

$$\underline{Z} = 2{,}88\,\Omega - \mathrm{j}(67{,}7 - 6{,}6)\,\Omega$$

$$\underline{Z} = 2{,}88\,\Omega - \mathrm{j}61{,}12\,\Omega = 61{,}19\,\Omega\cdot e^{-\mathrm{j}(87{,}3^\circ)}$$

$$\underline{Y} = 16{,}3\ \mathrm{mS}\cdot e^{\mathrm{j}(87{,}3^\circ)} = 768{,}7\,\mu\mathrm{S} + 16{,}3\ \mathrm{mS}$$

f)

$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ mit $\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}\omega L$ und $\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_2}$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + \mathrm{j}\omega C_2 R_2} = \frac{R_2 - \mathrm{j}\omega C_2 R_2^2}{1 + (\omega C_2 R_2)^2}$$

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega C_2 R_2)^2} + \mathrm{j}\left[\omega L - \frac{\omega C_2 R_2^2}{1 + (\omega C_2 R_2)^2}\right]$$

Zahlenwerte:

$$\underline{Z}_1 = 10\,\Omega + \mathrm{j}3{,}14\,\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{1\ \mathrm{mS} + \mathrm{j}0{,}314\ \mathrm{mS}} = \frac{1}{1{,}05\ \mathrm{mS}\cdot e^{\mathrm{j}(17{,}4^\circ)}}$$

$$\underline{Z}_2 = 954\,\Omega\cdot e^{-\mathrm{j}(17{,}4^\circ)} = 910{,}17\,\Omega - \mathrm{j}285{,}9\,\Omega$$

$$\underline{Z} = 920{,}17\,\Omega - \mathrm{j}282{,}8\,\Omega = 962{,}6\,\Omega\cdot e^{-\mathrm{j}(17^\circ)}$$

$$\underline{Y} = 1{,}04\ \mathrm{mS}\cdot e^{\mathrm{j}(17^\circ)} = 993\,\mu\mathrm{S} + 305\,\mu\mathrm{S}$$

g) $\underline{Z} = \underline{Z}_1 \| \underline{Z}_2$ mit $\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ und $\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}\omega L$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\left(R_1 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\right)(R_2 + \mathrm{j}\omega L)}{R_1 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} + R_2 + \mathrm{j}\omega L}$$

$$\underline{Z} = \frac{R_1 R_2 + \frac{L}{C} + \mathrm{j}\left(\omega L\,R_1 - \frac{R_2}{\omega C}\right)}{R_1 + R_2 + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\underline{Z} = \frac{\left[R_1 R_2 + \frac{L}{C} + \mathrm{j}\left(\omega L\,R_1 - \frac{R_2}{C}\right)\right]\left[R_1 + R_2 - \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\underline{Z} = \frac{\left(R_1 R_2 + \frac{L}{C}\right)\cdot(R_1 + R_2) + \left[\omega L\,R_1 - \frac{R_2}{C}\right]\cdot\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} +$$

$$+\mathrm{j}\,\frac{(R_1 + R_2)\cdot\left(\omega L\,R_1 - \frac{R_2}{C}\right) - \left(R_1 R_2 + \frac{L}{C}\right)\cdot\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Dieser sehr unübersichtliche Ausdruck ist so nicht ohne weiteres verwendbar. Wesentlich einfacher ist es, von Anfang an Zahlenwerte einzusetzen, wenn kein allgemeiner Ausdruck verlangt wurde.

$$Z_1 = 100\,\Omega - \mathrm{j}31{,}83\,\Omega = 104{,}9\,\Omega\cdot e^{-\mathrm{j}(39{,}9^\circ)}$$

$$Z_2 = 10\,\Omega + \mathrm{j}15{,}7\,\Omega = 18{,}6\,\Omega\cdot e^{\mathrm{j}(57{,}5^\circ)}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{104{,}9\,\Omega\cdot 18{,}6\,\Omega\cdot e^{\mathrm{j}(57{,}5^\circ - 17{,}6^\circ)}}{100\,\Omega - \mathrm{j}31{,}83\,\Omega + 10\,\Omega + \mathrm{j}15{,}7\,\Omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{1953\,\Omega^2\cdot e^{\mathrm{j}(39{,}9^\circ)}}{110\,\Omega - \mathrm{j}16{,}12\,\Omega} = \frac{1954{,}16\,\Omega^2\cdot e^{\mathrm{j}(39{,}9^\circ)}}{111\,\Omega\cdot e^{-\mathrm{j}(8{,}3^\circ)}}$$

$$\underline{Z} = 17{,}58\,\Omega\cdot e^{\mathrm{j}(48{,}2^\circ)} = 11{,}7\,\Omega + \mathrm{j}13{,}1\,\Omega$$

$$\underline{Y} = 56{,}9\ \mathrm{mS}\cdot e^{-\mathrm{j}(48{,}2^\circ)} = 37{,}9\ \mathrm{mS} - \mathrm{j}42{,}4\ \mathrm{mS}$$

Anmerkung:

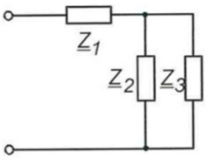
Wesentlich einfacher kommt man zu einer Lösung, wenn man statt der Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ zunächst die Gesamtadmittanz $\underline{Y}$ bestimmt. Da $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ parallelgeschaltet sind, gilt:

$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ mit $\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}}$ und $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2 + \mathrm{j}\omega L}$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_1 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}} + \frac{1}{R_2 + \mathrm{j}\omega L} = \frac{R_1 + \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}}{R_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} + \frac{R_2 - \mathrm{j}\omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2}$$

Man erkennt: Die Fehleranfälligkeit ist bei diesem Lösungsweg wesentlich geringer als bei der zuvor betrachteten Lösung. Deshalb ist bei Parallelschaltungen möglichst zu versuchen, zunächst über die Leitwertfunktionen voranzukommen. Allerdings hat dies Grenzen, wenn die Admittanz $\underline{Y}$ in allgemeiner Form anschließend in die Impedanz $\underline{Z}$ umgewandelt werden muss.

h) Das Bild zeigt die Struktur der vorgegebenen Schaltung:




$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} \text{ mit } \underline{Z}_1 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\ ,\ \underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}\omega L\ ,\ \underline{Z}_3 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(R + \mathrm{j}\omega L)\left(-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_2}\right)}{R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\left(\frac{L \cdot R}{C_2} - \mathrm{j}\frac{R}{\omega C_2}\right)\left[R - \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right]}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\frac{L \cdot R}{C_2} - \frac{R}{\omega C_2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right) - \mathrm{j}\left[\frac{R^2}{\omega C_2} + \frac{L}{C_2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right]}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2}$$

$$\underline{Z} = \frac{\frac{L \cdot R}{C_2} - \frac{R}{\omega C_2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2} - \mathrm{j}\left[\frac{\frac{R^2}{\omega C_2} + \frac{L}{C_2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2} + \frac{1}{\omega C_1}\right]$$

Zahlenwerte:

$\underline{Z}_1 = -\mathrm{j}67{,}7\ \Omega,\ \ \underline{Z}_2 = 10\ \Omega + \mathrm{j}15{,}7\ \Omega = 18{,}6\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(57{,}5°)}$

$\underline{Z}_3 = -\mathrm{j}31{,}8\ \Omega$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{18{,}6\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(57{,}5°)} \cdot 31{,}8\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(90°)}}{10\ \Omega + \mathrm{j}15{,}7\ \Omega - \mathrm{j}31{,}8\ \Omega}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{592{,}7\ \Omega^2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(32{,}5°)}}{18{,}97\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(58{,}2°)}} = 31{,}24\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(25{,}7°)}$$

$\underline{Z}_{23} = 28{,}15\ \Omega + \mathrm{j}13{,}55\ \Omega$

$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 28{,}15\ \Omega - \mathrm{j}54{,}17\ \Omega = 61{,}05\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(62{,}5°)}$

$\underline{Y} = 16{,}4\ \mathrm{mS} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(62{,}5°)} = 7{,}55\ \mathrm{mS} + \mathrm{j}14{,}5\ \mathrm{mS}$

## Lösung 2.

```
f=50;   %Hz
omega=2*pi*f;
Ucomp=100;  %V
L=100e-3;  %Henry
R1=10;%Omega
R2=20;%Omega
```

```
% Impedanz der Induktivität
ZLcomp=1i*omega*L;
% Impedanz der Parallelschaltung aus R2 und L
ZPcomp=(ZLcomp * R2)/(ZLcomp + R2);
% Gesamtimpedanz berechnen
ZGcomp=R1+ZPcomp;
% Gesamtstrom
I1comp=Ucomp/ZGcomp
% Spannung U2comp
U2comp=Ucomp-R1*I1comp;
% Strom durch die Induktivität
ILcomp=U2comp/ZLcomp
% Strom durch Widerstand R2
I2  comp=U2comp/R2
% Ergebnis
% I1comp = 3.6206 - 1.3537i A
% ILcomp = 0.4309 - 2.0306i A
% I2comp = 3.1897 + 0.6769i A
```

**Lösung 3.**

**a)** Wir definieren zuerst die Impedanzen der Kapaztitäten

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}, \qquad \text{und} \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2}.$$

Nun können wir die Formel für den Spannungsteiler anwenden:

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ &= \underline{U} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} \\ &= \underline{U} \cdot \frac{j\omega C_1}{j\omega C_1 + j\omega C_2} \\ &= \underline{U} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}\end{aligned}$$

**b)** Einsetzen in die obige Gleichung liefert

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{U} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} \\ &= \underline{U} \cdot \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Das Teilerverhältnis $\underline{U}_2/\underline{U}$ ist eins zu zehn.

**c)** Wir definieren zuerst die Impedanzen

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}, \qquad \text{und} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R\frac{1}{j\omega C_2}}{R + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{R}{1 + j\omega R C_2}.$$

Nun können wir die Formel für den Spannungsteiler anwenden und den resultierenden Ausdruck auf als einfachen Bruch darstellen:

$$\begin{aligned}\underline{U}_2' &= \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ &= \underline{U} \cdot \frac{\frac{R}{1+j\omega R C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R}{1+j\omega R C_2}} \\ &= \underline{U} \cdot \frac{j\omega C_1 R}{j\omega C_1 R + 1 + j\omega C_2 R} \\ &= \underline{U} \cdot \frac{j\omega R C_1}{1 + j\omega R(C_1 + C_2)}\end{aligned}$$

Ergebnisse in analytischer Form wie dieses hier sind sehr nützlich. Es beschreibt $\underline{U}_2$ als Funktion aller Bauteilwerte, dem komplexen Zeiger der Eingangsspannung $\underline{U}$ und der Signalfrequenz $f$ bzw. der Kreisfrequenz $\omega$.

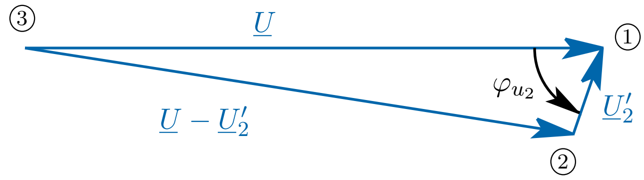
**d)** Berechnung der Ausgangsspannung in Polarkoordinaten bzw. Berechnung von Betrag und Phase der Ausgangsspannung:

```
f=1e3;%Hz
C1=5e-9;%Farad
C2=45e-9;%Farad
R=1000;%Omega
omega=2*pi*f;
Ucomp=60;%Volt
```

```
U2scomp=Ucomp*(1i*omega*C1*R)/(1+1i*omega*R*(C1+C2))
U2s=abs(U2scomp)
phiU2s=angle(U2scomp)*180/pi
% Ergebnisse
% U2scomp =  0.5390 + 1.7156i V
% U2s = 1.7983 V
% phiU2s =  72.5594 Deg
```

Beim unbelasteten Spannungsteiler war die Spannung am Ausgang gleich einem zehntel der Eingangsspannung, die Phasen der beiden Spannungen waren gleich. Im Gegensatz dazu zeigt der belastete Spannungsteiler wie erwartet eine deutliche tiefere Ausgangsspannung. Sie eilt der Eingangsspannung um 72.6° voraus.

**e)**




**Lösung 4.**

**a)** die Momentanleistung am Zweipol (Verbraucherbezugspfeilsystem vorausgesetzt)

$$p(t) = u(t)i(t) \quad = \quad \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\left(\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right) = S\cos\varphi + S\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

$$\text{mit} \quad S = 0.05\,\text{VA}, \quad \varphi_u = 0.2 - \frac{\pi}{2} = -1.37, \quad \varphi = -1.37 - 0.1 = -1.47 \equiv -84.3\,^\circ$$

**b)** die mittlere Leistung (Mittelwert über eine Periode):
$P = S\cos\varphi = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos(\varphi_u - \varphi_i)$

**c)** der komplexe Widerstand des Zweipols in polarer und kartesischer Form:
$\underline{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}\angle\varphi = 24.96\,\Omega - j248.8\,\Omega$

**d)** der komplexe Leitwert des Zweipols in polarer und kartesischer Form:
$\underline{Y} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}}\angle -\varphi = (0.399\ + j3.98)\,m\Omega^{-1}$

**e)** die komplexe Scheinleistung in kartesischer Form:
$\underline{S} = \underline{U}\cdot\underline{I}^* = S\,e^{j\varphi} = 4.992\,\text{mW} - j49.75\,\text{mvar}$