Zurich University
of Applied Sciences

School of
Engineering
ISC Institute of Signal Processing
and Wireless Communications

Martin Weisenhorn

28. März 2020

Übungsserie: Komplexe Zeiger an Induktivität und Kapazität

Aufgabe 1. Analytische komplexe Zeigerrechnung für Fussgänger

Durch eine Spule mit der Induktivität L fliesst der Strom $i(t) = \hat{\imath}\cos(\omega t)$. Die folgenden Schritte geben eine Anleitung zur Berechnung der Spannung an der Spule mit Hilfe der komplexen Zeigerrechnung:

a) Geben Sie den komplexen Stromzeiger $\underline{\hat{\imath}}$ an.

b) Schreiben Sie die komplexe Bauteilgleichung der Induktivität hin.

c) Berechnen Sie den komplexen Spannungszeiger $\underline{\hat{u}}$.

d) Geben Sie den Spannungsverlauf $u(t)$ an.

Zur Einübung des Umgangs mit verschiedenen Grössen, berechnen Sie bitte

e) die Scheitelwertzeiger $\underline{\hat{\imath}}$ und $\underline{\hat{u}}$,

f) und die Effektivwerte I und U.

Berechnen Sie nun die folgenden Verhältnisse und vergleichen Sie die Ergebnisse miteinander.

g) $\frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{\imath}}}$ und $\frac{\underline{U}}{\underline{I}}$

h) $\frac{\hat{u}}{\hat{\imath}}$ und $\frac{U}{I}$

Was lernen Sie daraus?

Aufgabe 2. Analytische Zeigerrechnung etwas kompakter

An einer Kapazität C liegt die Spannung $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \pi/4)$.

a) Welcher Strom $i(t)$ fliesst durch die Kapazität? Berechnen Sie zuerst den komplexen Spannungszeiger $\underline{\hat{u}}$, dann $\underline{\hat{\imath}}$ und schliesslich $i(t)$.

b) Wie gross sind die Phasenwinkel φ_u und φ_i?

c) Wie gross ist der Phasenverschiebungswinkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$? Eilt der Strom der Spannung voraus oder umgekehrt?

d) Geben Sie die Impedanz $\underline{Z}$, den Scheinwiderstand Z, die Admittanz $\underline{Y}$, den Scheinleitwert Y, den Wirkwiderstand R, den Wirkleitwert G, den Blindwiderstand X, sowie den Blindleitwert B der Kapazität an für $f = 10\,\text{kHz}$ und $C = 10\,\mu\text{F}$.

Aufgabe 3. Numerische Zeigerrechnung

Durch eine Induktivität mit $L = 1\,\mathrm{mH}$ fliesst ein Strom $i(t) = 0.5\,\mathrm{A} \cdot \cos(2\pi \cdot 1\,\mathrm{kHz} + 0.2)$. Beantworten Sie die folgenden Aufgaben indem Sie die komplexe Zeigerrechnung anwenden.

Hinweis: Die numerischen Werte können Sie mit Hilfe von MATLAB oder eines Taschenrechners berechnen. Sie müssen den Umgang mit beiden Werkzeugen beherrschen, den Taschenrechner für die Prüfungen, MATLAB fürs Labor. In der Musterlösung finden Sie MATLAB Anweisungen.

a) Berechnen Sie den komplexen Effektivwertzeiger $\underline{U}$ der Spannung $u(t)$ an der Spule. Geben Sie auch den Absolutbetrag U und den Phasenwinkel φ_u in Einheiten von Grad an.

b) Zeichnen Sie die komplexe Spannung $\underline{\hat{u}}$ und den komplexen Strom $\underline{\hat{\imath}}$ in ein Zeigerdiagramm, es muss nur qualitativ richtig sein. die Längen und Winkel müssen nicht massstäblich sein. Zeichnen Sie die Winkel φ_u, φ_i und die Winkeldifferenz $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ ein.

Lösung 1.

a) $\underline{\hat{\imath}} = \hat{\imath}$

b) $\frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{\imath}}} = j\omega L$

c) $\underline{\hat{u}} = j\omega L\,\underline{\hat{\imath}} = j\omega L\hat{\imath}$

d)

$$\begin{aligned}
u(t) &= \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{u}} \cdot e^{j\omega t}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{j\omega L\hat{\imath} \cdot e^{j\omega t}\right\} \\
&= \omega L\hat{\imath} \cdot \mathrm{Re}\left\{j \cdot e^{j\omega t}\right\} \\
&= \omega L\hat{\imath} \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega t}\right\} \\
&= \omega L\hat{\imath} \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j(\omega t+\frac{\pi}{2})}\right\} \\
&= \omega L\hat{\imath} \cdot \cos(\omega t + {}^{\pi}/_{2}) \\
&= \hat{u} \cdot \cos(\omega t + {}^{\pi}/_{2}), \qquad (1)
\end{aligned}$$

wobei $\hat{u} = \omega L\hat{\imath}$ der Scheitelwert der Spannung ist.

e) $\underline{\hat{\imath}} = \hat{\imath}$ und $\underline{\hat{u}} = j\omega L\hat{\imath}$

f) $I = \left|\frac{\underline{\hat{\imath}}}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$ und $U = \left|\frac{\underline{\hat{u}}}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\omega L\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$

g) $\frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{\imath}}} = j\omega L$ und $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L$

h) $\frac{\hat{u}}{\hat{\imath}} = \omega L$ und $\frac{U}{I} = \omega L$

Wir lernen daraus: Das Verhältnis von Effektivwertzeigern und von Spitzenwertzeigern ist identisch. Dies gilt unabhängig für die Verhältnisse von komplexen Zeigern und für Verhältnisse von Absolutwerten von Zeigern.

Lösung 2.

a) $\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}, \qquad \underline{\hat{\imath}} = j\omega C\underline{\hat{u}} = \omega C\hat{u} \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}, \qquad i(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{\imath}}e^{j\omega t}\right\} = \hat{u}\omega C\cos(\omega t + {}^{3\pi}/_{4})$

b) Die Phasenwinkel stehen im Argument des Zeitsignals und können einfach ausgelesen werden: $\varphi_u = \frac{\pi}{4}, \qquad \varphi_i = \frac{3\pi}{4}$

c) $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\pi/2$, d.h. die Phase φ_u der Spannung ist kleiner als die Phase φ_i des Stromes. Mit anderen Worten, die Spannung eilt dem Strom hinterher, bzw. der Strom eilt der Spannung voraus.

d) Mit der Bauteilgleichung der Kapazität aus Abschnitt 3.3 und den Definitionen in Abschnitt 3.1 im Skript folgt:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi fC} = -j\frac{1}{2\pi fC} = -j \cdot 1.59156\,\Omega$$

$$Z = |\underline{Z}| = 1.59156\,\Omega$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = j2\pi fC = j \cdot 628.319\,\mathrm{mS}$$

$$Y = |\underline{Y}| = 628.319\,\mathrm{mS}$$

$$R = \mathrm{Re}\left\{\underline{Z}\right\} = 0\,\Omega$$

$$G = \mathrm{Re}\left\{\underline{Y}\right\} = 0\,\mathrm{S}$$

$$X = \mathrm{Im}\left\{\underline{Z}\right\} = -1.59156\,\Omega$$

$$B = \mathrm{Im}\left\{\underline{Y}\right\} = 628.319\,\mathrm{mS}$$

Lösung 3.

a)

```
% Rechnung
omega = 2*pi*1e3; % rad/s
L  = 1e-3; % Henry
I_ = 0.5/sqrt(2)*exp(1i*0.2); % Ampere
U_ = 1i*omega*L*I_; %Volt
U  = abs(U_);
phi_U_grad = (180/pi)*angle(U_);
% Formatierte Ausgabe der Ergebnisse
display(['U_ = ', num2str(U_), ' V']);
display(['U = ', num2str(U), ' V']);
display(['phi_U_grad = ', num2str(phi_U_grad), ' Grad']);
% Ausgabe
% U_   = -0.44133+2.1772i V
% U    =  2.2214 V
% phi_U_grad = 101.4592 Grad
```

b)