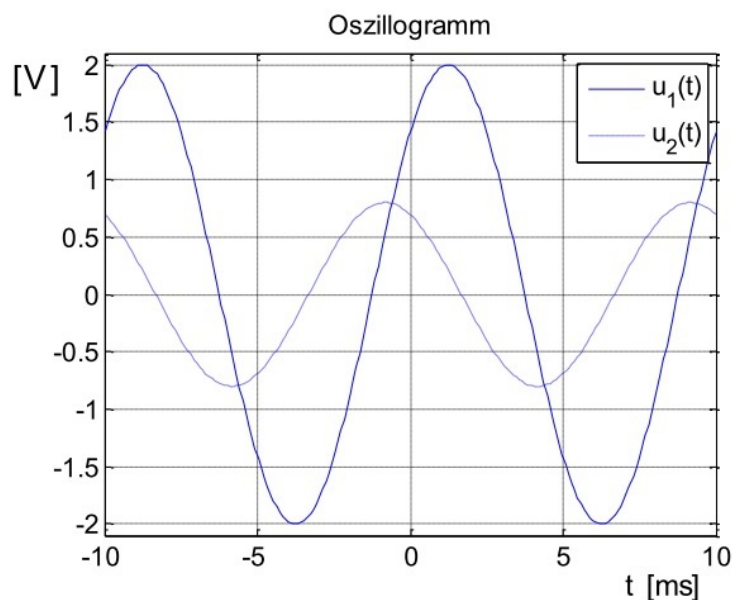


## Übungsserie – Harmonische Signale und Ihre Darstellung

**Aufgabe 1.** Die nachfolgende Grafik stellt das Oszillogramm zweier sinusförmiger Spannungen dar, die entsprechende mathematische Beschreibung ist

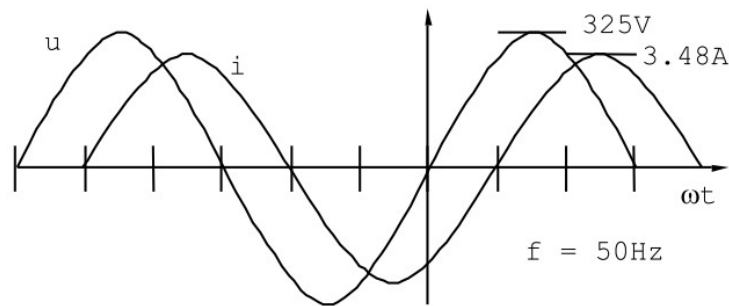
$$u(t) = \hat{u} \cos(2\pi f t + \varphi_u).$$



- a) Bestimmen Sie für die beiden Spannungen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  die Frequenz  $f$ , die Phasenwinkel  $\varphi_{u_1}$  und  $\varphi_{u_2}$ , sowie die Amplituden  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$ .
- b) Wie gross ist der Betrag der Phasenverschiebung zwischen  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  in Grad?
- c) Drücken Sie die Summe  $u_S(t) = u_1(t) + u_2(t)$  in der Form  $u(t) = \hat{u} \cos(2\pi f t + \varphi_u)$  aus.

**Aufgabe 2. (Phasenverschiebung)** Für die skizzierte Sinusgrößen gebe man an:

- a) Kreisfrequenz  $\omega$  und Periodendauer  $T$ ,
- b) den Phasenverschiebungswinkel des Stroms gegenüber der Spannung  $\varphi$ ,
- c) die reellen Zeitfunktionen  $u(t)$  und  $i(t)$ ,
- d) die Effektivwertzeiger  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$ .



**Aufgabe 3. (Komplexe Zahlen)** Bestimmen Sie die polaren und kartesischen Formen der komplexen Zahlen  $\underline{X}$  und von deren reziproken Werten  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{X}}$ . Alle Winkel sind in Einheiten von Radianen anzugeben

- a)  $\underline{X} = 3 + 4j$
- b)  $\underline{X} = 3 - 4j$
- c)  $\underline{X} = 2 + \exp(j\pi)$
- d)  $\underline{X} = 1 \angle \frac{\pi}{2}$ ; Das Symbol  $\angle \alpha$  bedeutet  $e^{j\alpha}$ .
- e)  $\underline{X} = (1 + j)^2$
- f)  $\underline{X} = \frac{1+j}{1-j}$ ; Es gibt zwei Lösungsansätze: 1.) Erweiterung des Bruchs mit dem konjugiert komplexen Nenner, 2.) Zähler und Nenner in polarkoordinaten darstellen. Lösen Sie das Problem auf beide Weisen.

**Aufgabe 4. (Harmonische Signale als komplexe Zahlen dargestellt)** Geben Sie für die unten stehenden Zeitfunktionen  $y(t)$  die Parameter  $\hat{y}$  und  $\varphi$  an damit die Gleichung  $y(t) = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi)$  erfüllt ist. Bestimmen Sie ausserdem die entsprechenden komplexen Zahlen  $\underline{y}$ , sodass  $y(t) = \operatorname{Re} \{ \underline{y} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ \hat{y} e^{j\varphi} e^{j\omega t} \}$ .

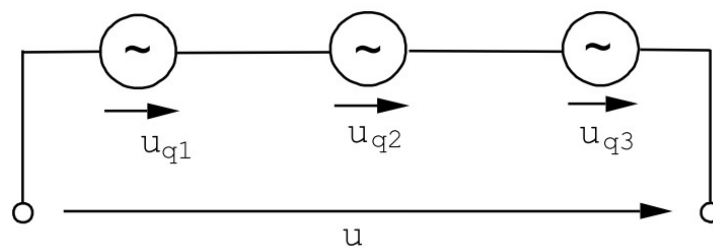
- a)  $y(t) = -2 \cdot \cos(\omega t + \pi/3)$
- b)  $y(t) = 0.5 \cdot \sin(\omega t + \pi/8)$

**Aufgabe 5. (Komplexe Zeiger als harmonische Signale darstellen)** Bestimmen Sie aus den jeweiligen Angaben der komplexen Effektivwerte die zugehörige reelle Zeitfunktion:

komplexer Eff.Wert	reelle Zeitfunktion
$\underline{I} = 2\text{A} \angle \pi/3$ $f=50\text{Hz}$	
$\underline{U} = 5\text{V} e^{j15^\circ}$ $f=100\text{Hz}$	
$\underline{U} = 85\text{V}$ $f = 20\text{kHz}$	
$\underline{I} = 10\text{A} \angle 45^\circ$ $f=16 \frac{2}{3}\text{Hz}$	
$\underline{U} = (27+j38)\text{V}$ $f=50\text{Hz}$	
$\underline{U} = j141.4 \text{ V}$ $f=50\text{Hz}$	
$\underline{I} = (j5+4.2)\text{A}$ $f=50\text{Hz}$	

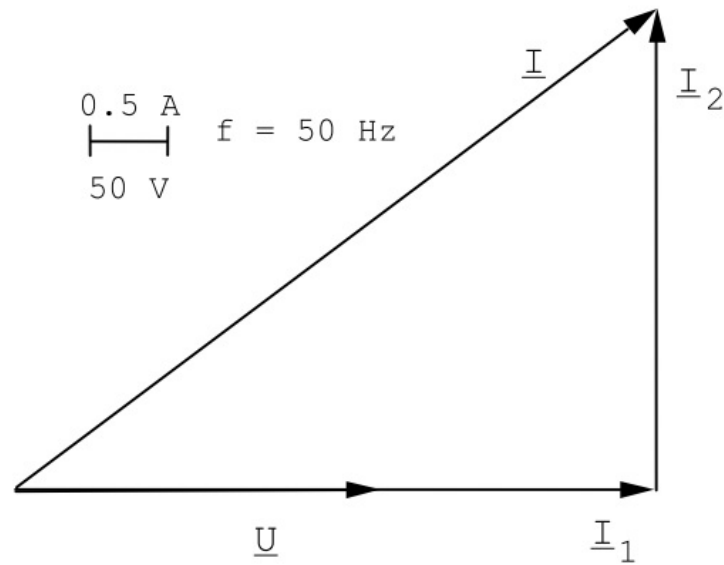
**Aufgabe 6. (Superposition)** Drei Quellen mit sinusförmiger Quellenspannung und gleicher Frequenz sind in Reihe geschaltet. Die Klemmenspannung hat den Effektivwert 10.0 V und den Nullphasenwinkel  $15^\circ$ .

$$U_{q1} = 30 \text{ V}; \varphi_{u_1} = 30^\circ; U_{q2} = 45 \text{ V}; \varphi_{u_2} = 60^\circ$$



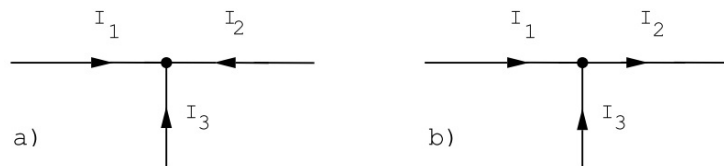
- Zeichnen Sie ein Zeigerdiagramm mit allen vorkommenden Spannungen
- und bestimmen Sie die Kenngrößen der dritten Quelle.

**Aufgabe 7. (Vom komplexen Zeiger zum Zeitsignal)** Wie lauten die zu den Zeigern gehörenden reellen Zeitfunktionen?



**Aufgabe 8. (Superposition)** An einem Knotenpunkt sind die Ströme  $\underline{I}_1$  und  $\underline{I}_2$  bekannt:

$$\underline{I}_1 = 5.0 \text{ A } \angle 0^\circ; \quad \underline{I}_2 = 4.2 \text{ A } \angle 120^\circ; \quad f = 50 \text{ Hz}$$



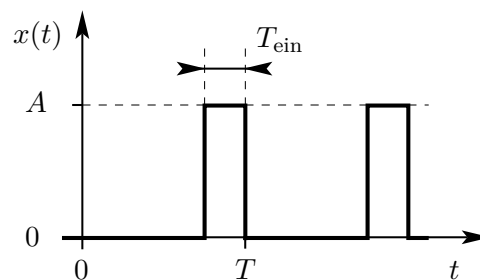
Bestimmen Sie jeweils den unbekannten Strom  $\underline{I}_3$ .

**Aufgabe 9. (Mittelwerte)** Für die Mittelwerte eines periodischen Signals  $x(t)$  gelten die folgenden Berechnungsformeln:

- Linearer Mittelwert:  $\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot dt$
- quadratischer Mittelwert, auch Effektiv- oder RMS-Wert (Root Mean Square) genannt:  $X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) \cdot dt}$

Die bestimmten Integrale erstrecken sich dabei über je eine Periodendauer  $T$ . Bestimmen Sie auf analytischem Weg (d. h. in Funktion der gegebenen Parametern) die linearen und quadratischen Mittelwerte der folgenden Signale:

- harmonisches Signal  $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$ . Besteht eine Abhängigkeit des Mittelwertes vom Nullphasenwinkel  $\varphi$ ?
- harmonisches Signal mit Offset:  $x(t) = x_0 + \hat{x} \sin(2\pi f t)$
- Rechteckpulsfolge  $x(t)$  mit Pegelwerten zwischen 0 und  $A$  und einer relativen Einschaltzeit  $\frac{T_{\text{ein}}}{T}$ :



Unter der relativen Einschaltzeit versteht man das Verhältnis der Dauer  $T_{\text{ein}}$  des höheren Signalpegels  $A$  zur Periodendauer  $T$  des Signals.

- Nun soll der lineare Mittelwert des Rechtecksignals vom Rechtecksignal abgezogen werden. Wie gross ist der lineare Mittelwert des neuen Rechtecksignals? Wie gross ist dessen quadratischer Mittelwert?

**Lösung 1.**

- a) Die Dauer  $T$  einer Periode kann aus der Grafik herausgelesen werden. Der Zeitraum  $[-10, 0]$  ms enthält genau eine Periode. Das heisst  $T = 10$  ms.

Damit gilt für die Frequenz  $f = 1/T = 100$  Hz.

Der Zeitpunkt  $-t_{u_2}$  des Spitzenwerts von  $u_2(t)$  der am nächsten bei  $t = 0$  liegt lässt sich per Lineal und Dreisatz bestimmen:  $-t_{u_2} = -0.8523$  ms. Gleiches gilt für die Bestimmung von  $-t_{u_1}$ :  $-t_{u_1} = 1.25$  ms.

Die Phasenwinkel berechnens sich wie folgt:

$$\varphi_{u_1} = \omega t_{u_1} = -0.7854 \text{ rad} = -45^\circ$$

$$\varphi_{u_2} = \omega t_{u_2} = 0.5355 \text{ rad} = 30^\circ$$

Die Scheitelwerte der Spannungen sind  $\hat{u}_1 = 2$  V und  $\hat{u}_2 = 0.8$  V.

- b)  $\varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} = 75^\circ$
- c) Das folgende MATLAB-Skript beschreibt die nötigen Rechenschritte:

```
u_1_ = 2 * exp(-1i*pi/4);
u_2_ = 0.8*exp(1i*pi/6);
u_s_ = u_1_+u_2_;
u_s = abs(u_s_)
phi = angle(u_s_)
phi_grad = phi*180/pi
% Ergebnis:
% u_s = 2.3384
% phi = -0.4486
% phi_grad = -25.7037
```

Daraus folgt:  $u_S(t) = 2.338 \text{ V} \cdot \cos(2\pi ft - 25.70^\circ)$

**Lösung 2.**

- a)  $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 20$  ms
- b)  $\varphi = \pi/3$
- c)  $u(t) = 325 \text{ V} \cdot \cos(314 \text{ s}^{-1}t - \pi/2)$ ;  $i(t) = 3.48 \text{ A} \cdot \cos(314 \text{ s}^{-1}t - 5\pi/6)$
- d)  $\underline{U} = 230 \text{ V} \angle -\pi/2$ ;  $\underline{I} = 2.46 \text{ A} \angle -5\pi/6$

**Lösung 3.**

$$\underline{X} = 3 + 4j = 5 \cdot e^{j \arctan(4/3)} = 5 \angle 0.9273, \underline{Y} = \frac{1}{5} \angle -0.9273 = 0.12 - 0.16j$$

$$\underline{X} = 3 - 4j = 5 \cdot e^{-j \arctan(4/3)} = 5 \angle -0.9273, \underline{Y} = \frac{1}{5} \angle 0.9273 = 0.12 + 0.16j$$

$$\underline{X} = 2 + \exp(j\pi) = 2 - 1 = 1, \underline{Y} = 1$$

$$\underline{X} = 1 \angle \frac{\pi}{2} = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j, \underline{Y} = 1 \angle -\frac{\pi}{2} = -j$$

$$\underline{X} = (1+j)^2 = \left(\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2\angle\frac{\pi}{2} = 2j, \underline{Y} = 0.5\angle -\frac{\pi}{2} = -0.5j$$

$$\underline{X} = \frac{1+j}{1-j} = \frac{\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}\angle-\frac{\pi}{4}} = 1\angle\frac{\pi}{2} = j, \underline{Y} = \frac{1}{j} = -j = 1\angle -\frac{\pi}{2}$$

#### Lösung 4.

a)  $y(t) = -2 \cdot \cos(\omega t + \pi/3) = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi)$ , wobei  $\hat{y} = 2$ ,  $\varphi = 4\pi/3$ ,  $\underline{y} = 2 \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}$

b)  $y(t) = 0.5 \cdot \sin(\omega t + \pi/8) = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi)$ , wobei  $\hat{y} = 0.5$ ,  $\varphi = \pi/8 - \pi/2$ ,  $\underline{y} = 0.5 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{8}}$

#### Lösung 5.

komplexer Eff. Wert	reelle Zeitfunktion
$\underline{I} = 2A \angle \pi/3$ $f=50\text{Hz}$	$i(t) = 2,83 A \cdot \cos(314,2 \text{ s}^{-1} \cdot t + \pi/3)$
$\underline{U} = 5V \ e^{j15^\circ}$ $f=100\text{Hz}$	$u(t) = 7,07 V \cdot \cos(628,3 \text{ s}^{-1} \cdot t + \pi/12)$
$\underline{U} = 85V$ $f = 20\text{kHz}$	$u(t) = 120 V \cdot \cos(125664 \text{ s}^{-1} \cdot t)$
$\underline{I} = 10A \angle 45^\circ$ $f=16 \text{ 2/3 Hz}$	$i(t) = 14,1 A \cdot \cos(104,7 \text{ s}^{-1} \cdot t + \pi/4)$
$\underline{U} = (27+j38)V$ $f=50\text{Hz}$	$u(t) = 65,9 V \cdot \cos(314,2 \text{ s}^{-1} \cdot t + 0,3\pi)$
$\underline{U} = j141,4 V$ $f=50\text{Hz}$	$u(t) = 200 V \cdot \cos(314,2 \text{ s}^{-1} \cdot t + \pi/2)$
$\underline{I} = (j5+4,2)A$ $f=50\text{Hz}$	$i(t) = 9,24 A \cdot \cos(314,2 \text{ s}^{-1} \cdot t + 0,872)$

#### Lösung 6.

$$u_{q3} = 64,4 V \angle -127,1^\circ$$

#### Lösung 7.

$$u(t) = 325 V \cdot \cos(314 \text{ s}^{-1} \cdot t)$$

$$i_1(t) = 5,66 A \cdot \cos(314 \text{ s}^{-1} \cdot t)$$

$$i_2(t) = 4,24 A \cdot \cos(314 \text{ s}^{-1} \cdot t + 90^\circ)$$

$$i(t) = 7,07 A \cdot \cos(314 \text{ s}^{-1} \cdot t + 36,9^\circ)$$

#### Lösung 8.

a)  $\underline{I}_3 = 4,65 A \angle -128^\circ$

b)  $\underline{I}_3 = 7,98 A \angle 152,9^\circ$

#### Lösung 9.

a)  $\bar{x} = 0, \quad X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$

b)  $\bar{x} = x_0, \quad X = \sqrt{x_0^2 + 0,5 \hat{x}^2}$

c)  $\bar{x} = A \frac{T_{\text{ein}}}{T}, \quad X = A \sqrt{\frac{T_{\text{ein}}}{T}}$

d)  $\bar{x} = 0, \quad X = \sqrt{A^2 \frac{T_{\text{ein}}}{T} - A^2 \left(\frac{T_{\text{ein}}}{T}\right)^2} = \sqrt{\left(A \sqrt{\frac{T_{\text{ein}}}{T}}\right)^2 - \left(A \frac{T_{\text{ein}}}{T}\right)^2}$

Die Resultate der letzten drei Aufgaben lassen sich viel schneller finden, wenn man den folgenden Zusammenhang benutzt: Jedes Signal  $x(t)$  lässt sich als die Summe seines Gleichanteils  $\bar{x}$  und seines Wechselanteils  $\tilde{x}(t)$  darstellen, d.h.  $x(t) = \bar{x} + \tilde{x}(t)$ . Die Leistungen des Gleichanteils  $\bar{x}$  und des Wechselanteils  $\tilde{x}(t)$  addieren sich zur Gesamtleistung  $P(x(t))$  des Signals:

$$\begin{aligned} P(x(t)) &= \left( \text{RMS}(x(t)) \right)^2 \\ &= \left( \text{RMS}(\bar{x}) \right)^2 + \left( \text{RMS}(\tilde{x}(t)) \right)^2 \\ &= \bar{x}^2 + \left( \text{RMS}(\tilde{x}(t)) \right)^2 \end{aligned}$$

Eine Verallgemeinerung dieses Zusammenhangs auf Wechselanteile mit unterschiedlichen Frequenzen lernen Sie im Kurs *Signale und Systeme* als den Satz von Parseval kennen.