

Komplexe Darstellung von Sinusfunktionen

Aufgabe 1. (Addition sinusförmiger Spannungen) Gegeben sind die beiden sinusförmigen Spannungsverläufe

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cos(2\pi ft + \pi/3) \quad (1)$$

und

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \cos(2\pi ft - \pi),$$

wobei $\hat{u}_1 = 14 \text{ V}$ und $\hat{u}_2 = 10 \text{ V}$ und $f = 100 \text{ Hz}$. Es soll die Summe

$$u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

berechnet werden. In den folgenden Teilaufgaben werden Sie schrittweise zur Lösung geführt.

- Geben Sie für die Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ die feststehenden komplexen Zeiger \hat{u}_1 und \hat{u}_2 an.
- Zeichnen Sie die beiden komplexen Zeiger in die komplexe Zahlenebene. Wählen Sie als Maßstab 1 V/cm . Addieren Sie nun die beiden Zeiger geometrisch mit Hilfe der Parallelverschiebung.
- Geben Sie die beiden komplexen Zeiger \hat{u}_1 und \hat{u}_2 in kartesischen Koordinaten an und berechnen Sie die Summe $\hat{u}_3 = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$. Stimmt das Ergebnis mit dem aus Aufgabe (b) überein? Geben Sie nun die komplexe Zahl \hat{u}_3 in Polarkoordinaten an, verwenden Sie dazu die beiden MATLAB Befehle `abs()` und `angle()`.
- Geben Sie zu dem komplexen Zeiger \hat{u}_3 die Zeitfunktion $u_3(t)$ in derselben Form wie in (1) an. Alternativ können Sie den Zusammenhang $u(t) = \Re\{\hat{u} \cdot e^{j\omega t}\}$ nutzen. Der Realteiloperator $\Re\{\}$ lautet in MATLAB `real()`.
- Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie das folgende MATLAB-Skript mit Ihrem Ergebnis ergänzen und ausführen:

```
f=100; % Wahl der Frequenz
t=0:0.0001:0.02; % Wahl von Zeitintervall und Stützstellen

u_1=14*cos(2*pi*f*t+pi/3); % Definition von u1(t)
u_2=10*cos(2*pi*f*t-pi); % Definition von u2(t)
u_3= % <-- Geben Sie hier Ihr Ergebnis für u3(t) ein

figure % Neues Fenster für Bild darstellen
plot(t,u_1,'b:'); % u1(t) plotten, blaue Punktlinie
hold on; % Graph bleibt, wenn neuer Graph hinzukommt
plot(t,u_2,'b--'); % u2(t) plotten, blau strichliert
plot(t,u_1+u_2,'b'); % Summe u2(t)+ u1(t), blaue Linie

plot(t,u_3,'r'); % Ihr Rechenergebnis, rot strichliert
```

```
xlabel('t [s]');           % Abszisse beschriften  
ylabel('u [V]');          % Ordinate beschriften  
legend('u1', 'u2', 'u1+u2 Probe', 'u3'); % Beschriftung der Graphen  
grid on;                  % Horizontale und vertikale Raster anzeigen
```

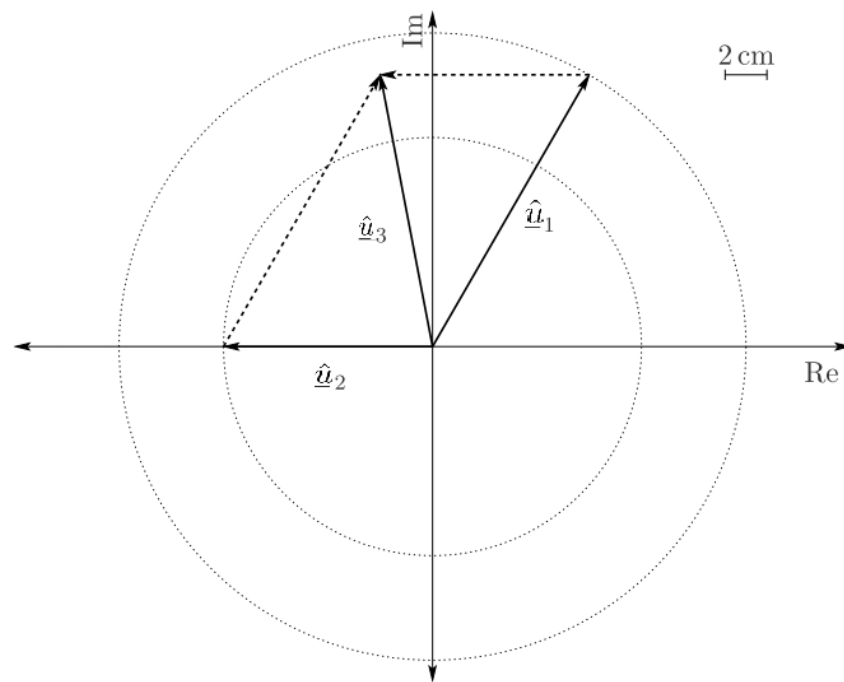


Abbildung 1: Addition der komplexen Zeiger.

Lösung 1. (Addition sinusförmiger Spannungen)

a)

$$\underline{u}_1 = 14 \text{ V} \cdot e^{j\pi/3}$$

$$\underline{u}_2 = 10 \text{ V} \cdot e^{-j\pi}$$

b) Siehe Abb. 1.

c)

```
14*exp(1i*pi/3)+10*exp(-1i*pi)
ans =
-3.0000 +12.1244i
```

Betrag und Phase erhält man durch die Befehle

```
abs(14*exp(1i*pi/3)+10*exp(-1i*pi))
ans =
12.4900
>> angle(14*exp(1i*pi/3)+10*exp(-1i*pi))
ans =
1.8134
```

Dementsprechend gilt:

$$\underline{u}_3 = 12.49 \text{ V} \cdot e^{j \cdot 1.8134}$$

d)

$$\begin{aligned} u_3(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \underline{u}_3 \cdot e^{j2\pi ft} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 12.49 \text{ V} \cdot e^{j(2\pi ft + 1.8134)} \right\} \\ &= 12.49 \text{ V} \cdot \cos(2\pi ft + 1.8134) \end{aligned} \quad (2)$$

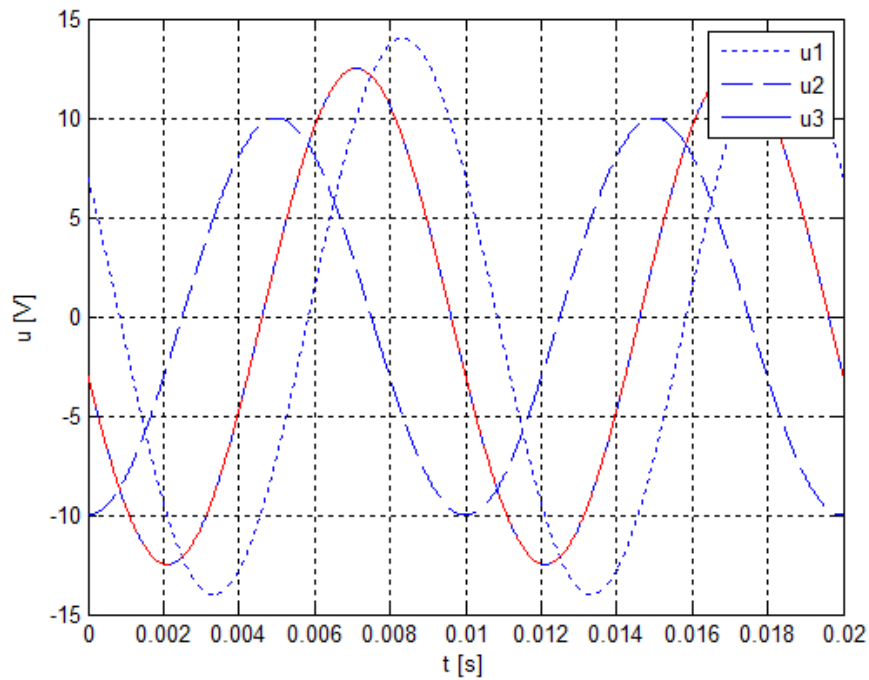


Abbildung 2: Sinusförmige Spannung $u_3(t)$.

e) Siehe Abb. 2.

Im folgenden ist noch ein interessantes Skript zu finden das die Summe der Sinussignale direkt und zum Vergleich mit Hilfe von komplexen Zahlen rechnet

```
% Berechnung der Summe von zwei Cosinus schwingungen
% über den Umweg komplexer Zahlen

% Definition der komplexen Zahlen für u1(t) und u2(t)
u1_=14*exp(1i*pi/3)
u2_=10*exp(1i*(-pi))

% Summ der komplexen Zahlen
u3_=u1_+u2_

% Wahl von f und der Abtastzeitpunkte
f=100;
T=1/f;
t=0:T/50:T;
w=2*pi*f;

%Bestimmung der Zeitsignale zu den komplexen Zahlen
u1t=real(u1_*exp(1i*w*t));
u2t=real(u2_*exp(1i*w*t));
u3t=real((u1_+u2_)*exp(1i*w*t));

%Plotten der Zeitsignale
figure
plot(t,u1t,'b','linewidth',2); hold on
plot(t,u2t,'b--','linewidth',2);
plot(t,u3t,'r','linewidth',2);
% Überprüfung des Ergebnisses durch direkte Addition
% der sinusförmigen Signale.
plot(t,u1t+u2t,'.','linewidth',2);
legend('u1(t)','u2(t)','u3(t)','Probe: u3(t)')
```

```
xlabel('t [s]')  
ylabel('V [V]')  
grid on
```