Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of
Engineering
ISC Institute of Signal Processing
and Wireless Communications

Kapitel 1 – Induktion und Selbstinduktion

Skript zum Kurs Elektrizitätslehre 2

Autoren: Aaron Moser, Martin Loeser, Mathis Nussberger

7. Februar 2020

Inhalt

1. Einführung und Motivation

Wird ein Dauermagnet durch eine offene Schlaufe verschoben, siehe Abbildung 1.1, so erscheint an einem Voltmeter, welches an die Enden der Schlaufe angeschlossen ist, eine messbare Spannung $u_S(t)$.

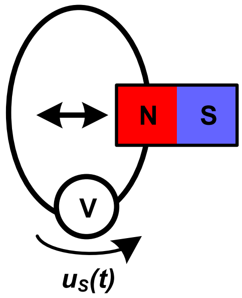

Abbildung 1.1. Experiment mit Leiterschlaufe, Voltmeter und Stabmagnet.

Man nennt diese Spannung «Induktionsspannung», bzw. spricht von einer «induzierten» Spannung. Dabei wird weiter folgendes beobachtet:

- Die Spannungswerte u_S werden grösser je schneller der Magnet bewegt wird. Die zeitliche Dauer T des Spannungsverlaufs wird jedoch kleiner. Man stellt dabei fest, dass der sogenannte **Spannungsstoss** (Zeit-Spannungsfläche) konstant bleibt: $\int_0^T u_S(t) \cdot \mathrm{d}t = const.$
- Das Vorzeichen der Spannung ist verschieden, je nachdem, von welcher Seite der Magnet durch die Schlaufe geschoben wird.
- Das Vorzeichen der Spannung ist verschieden, je nachdem mit welchem Ende, Nord- oder Südpol, voraus der Magnet durch die Schlaufe geschoben wird.

Der Effekt der Induktion ist einer der wichtigsten in der Elektrotechnik: Das überwiegende Mass an elektrischer Energie wird heute durch Induktion aus anderen Energieformen gewonnen, sei es in Wasserkraftwerken, Kernkraftwerken oder Windkraftanlagen.

Das grundlegende Phänomen eines «Magnetfelds» an sich wird im Fach Physik untersucht. Wir fokussieren hier auf den Effekt der Induktion und die daraus folgenden Konsequenzen.

1.1. Definitionen rund ums Magnetfeld

Dieser Abschnitt dient der Definition von Begriffen rund um das Magnetfeld, sofern nicht weiter unten eingeführt, siehe dazu auch die Vorlesung in Physik.

Grösse	**Formelzeichen, Formel**	**Einheit bzw. Wert**
Magnetische Flussdichte	B	$\mathrm{Vs/m^2}$ = Tesla = T
Magnetische Erregung	$H = B / \mu$	A/m
Permeabilität	μ	Vs/(Am) = H/m
Vakuumpermeabilität	μ_0	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H/m
Relative Permeabilität	$\mu_r = \mu / \mu_0$	Zahlenwert > 0

Unter «magnetischen Feldstärke» wird je nach Quelle die Flussdichte oder die Erregung verstanden.

Weiter gelte folgende Konvention:

Bezeichnung	Bedeutung
B	Magnetfeld ist homogen im dargestellten Raum, d.h. die Stärke und Richtung sind unabhängig vom Raumpunkt. Beispiel: Erdmagnetfeld im Laborraum
B_i	Magnetfeld erzeugt durch den Strom *i*
B_M	Magnetfeld erzeugt durch den dargestellten Magneten

1.2. Der magnetische Fluss

Die Stärke der induzierten Spannung kann mit Hilfe des sogenannten magnetischen Flusses Φ berechnet werden. Dazu wird die Leiterschleife *s* als Berandung einer sonst beliebig definierbaren, geschlossenen Oberfläche *A* aufgefasst.

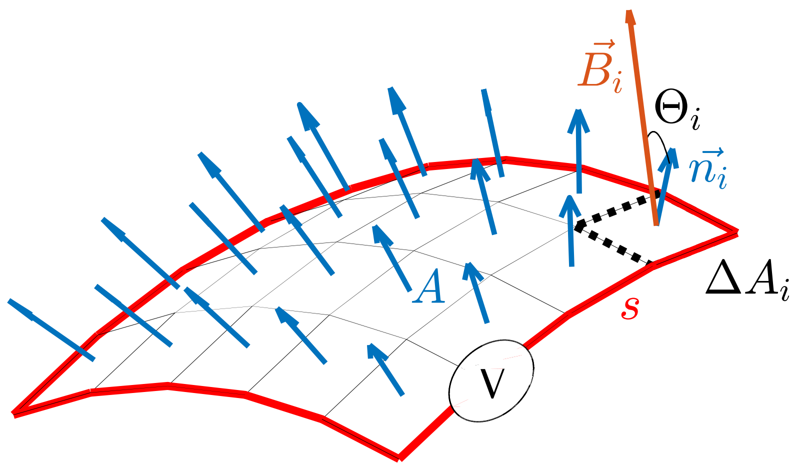

Abbildung 1.2.: Die rote Leiterschleife s berandet die Fläche A. Die Schleife liegt in einem inhomogenen Magnetfeld und ist an ein Voltmeter angeschlossen.

Diese beliebig geformte Oberfläche *A* kann in lauter quasi-ebene Teilstücke ΔA_i zerlegt werden. Umfasst das Teilstück ein homogenes Magnetfeld, so ist der magnetische Fluss für dieses Flächenstück wie folgt definiert:

$$\Phi_{\Delta Ai} = B_i \cdot \Delta A_i \cdot \cos \Theta_i$$

mit dem Zwischenwinkel Θ_i zwischen Flächennormale $\vec{n}_i$ und Magnetfeldvektor $\vec{B}_i$, gemäss Abbildung 1.3.

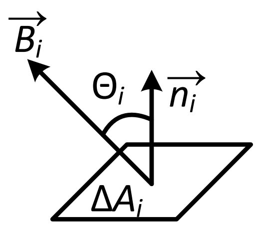

Abbildung 1.3.: Oberflächenteilstück der roten Leiterschleife von Abbildung 1.2.

D.h. der Fluss durch eine ebene Fläche ist gerade das Skalarprodukt aus Flussdichtevektor und Normalenvektor, wenn gilt $\|\vec{n}\| = \Delta A_i$.

Die Summe aller Flüsse durch die Teilflächen ergibt den Gesamtfluss:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} B \cdot \Delta A_i \cdot \cos\Theta_i$$

Im Grenzübergang zu beliebig kleinen Teilflächen folgt daraus das Flächenintegral

$$\Phi = \iint_A \vec{B}\, d\vec{A}$$

Die Einheit des magnetischen Flusses ist $[\Phi]$ = Tm^2 = Vs = Weber = Wb.

1.2.1. Magnetischer Fluss bei einer Spule

Durch Aufwickeln eines Drahtes erhält man eine Spule, z.B. wie in Abbildung 1.4. Verläuft eine im Raum homogene magnetische Flussdichte B mit einem Winkel Θ zur Spulenachse, so ist zwischen dem Fluss durch eine einzelne Windung der Spule

$$\Phi = B \cdot \cos\Theta \cdot A$$

und dem gesamten, abgegriffenen Fluss

$$\Psi = N \cdot \Phi = N \cdot B \cdot \cos\Theta \cdot A$$

genannt «verketteter Fluss» bzw. «Verkettungsfluss» zu unterscheiden. A ist hier die Querschnittsfläche des Innenraums der Spule, N die Anzahl Windungen.

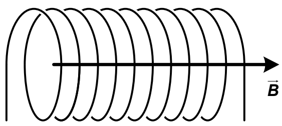

Abbildung 1.4.: Spule durch welche eine externe, magnetische Flussdichte dringt.

1.3. Induktions-Gesetz von Faraday

Mit Hilfe des Begriffes des magnetischen Flusses lässt sich die Induktionsspannung einer Spule wie folgt berechnen:

$$u_S(t) = -N \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{-\,d\Psi(t)}{dt}$$

Diese Beziehung ist auch als das **Faraday'sche Induktionsgesetz** bekannt und basiert auf Experimenten der beiden Physiker Michael Faraday und Joseph Henry. Das negative Vorzeichen ergibt sich aus der Wahl der Spannungspfeil-Richtung: Sie wird so gewählt, dass die Flächennormale und der Spannungspfeil eine rechtsdrehende Schraube bilden, gemäss Abbildung 1.5.

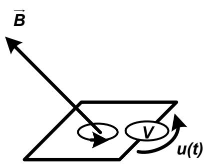

Abbildung 1.5.: Leiterschlaufe mit einem zeitlich veränderbaren magnetischen Feld. Die induzierte Spannung wird durch Einfügen eines Voltmeters irgendwo in der geschlossenen Schlaufe gemessen.

1.3.1. Induktion durch Feldänderung

Es bestehen zwei grundsätzliche Möglichkeiten, eine induzierte Spannung zu bewirken. Bei der ersten Methode wird Orientierung des Magnetfelds zur Fläche nicht geändert. Die Flussänderung entsteht durch Änderung der Stärke des Magnetfelds:

$$\Phi(t) = B(t) \cdot A \cdot \cos\Theta$$

Man spricht bei der dabei induzierten Spannung auch von einer *Transformationsspannung*, da dieser Fall bei Transformatoren auftritt.

1.3.2. Induktion durch Bewegung

Die zweite grundsätzliche Methode, eine induzierte Spannung zu bewirken, ist durch Drehung der Fläche in Bezug auf die Magnetfeldrichtung:

$$\Phi(t) = B \cdot A \cdot \cos\Theta(t)$$

Diese Art der Induktion entsteht bei Generatoren und Motoren. Die resultierende Spannung wird auch *Bewegungsspannung* genannt.

Eine dritte Methode bestünde darin, die Fläche A zeitlich variieren zu lassen, was aber aufgrund der schwierigen Realisierung keine bekannte Anwendung hat.

1.4. Wirbelstrom und Lenz'sche Regel

Wird das Voltmeter in dem initialen Versuch kurzgeschlossen, verschwindet die induzierte Spannung nicht. Sie fällt gleichmässig verteilt über der Schleife an. Dies kann dadurch experimentell bewiesen werden, dass über jedem gleich langen Abschnitt der kurzgeschlossenen Schleife dieselbe Spannung gemessen wird. Dies bedeutet, dass in der Schleife nun ein Strom fliesst, siehe Abbildung 1.5. Dieser Strom, bewirkt durch eine induzierte Spannung, nennt man *Wirbelstrom*.

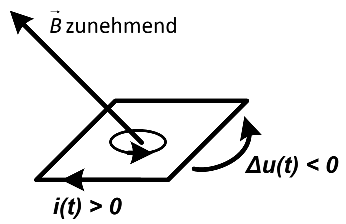

Abbildung 1.6.: Wirbelstrom bei der kurzgeschlossenen Schlaufe.

1.4.1. Lenz'sche Regel

Der Wirbelstrom bewirkt ein Magnetfeld B_i. Die Lenz'sche Regel besagt, dass dieses Magnetfeld B_i der Flussänderung $\Phi(t)$ entgegenwirkt. Dies muss gezwungenermassen so sein, damit der Energiesatz erfüllt ist. Würde B_i die Flussänderung verstärken, ergäbe sich eine positive Rückkopplung mit immer höheren Strömen, d.h. immer mehr Energieumsatz, ohne dass sich etwas an der Anregung geändert hätte.

1.5. Induktion und elektrisches Feld

Der Wirbelstrom bedeutet ein elektrischen Feld E_i entlang der Schleife, die Feldlinien dieses Feldes müssen sich mit den Feldlinien der Stromdichte in der Schleife decken. Dieses Feld heisst induziertes elektrisches Feld. Seine Feldlinien sind in sich geschlossen (!). Dieses elektrische Feld hat also keine Quellen und Senken, d.h. es beginnt weder auf positiven Ladungen noch endet es auf negativen, man spricht auch von einem elektrischen Wirbelfeld.

Berechnet man entlang einer geschlossenen Feldlinie von E_i das Spannungsintegral

$$u_i = \oint \vec{E}_i \, d\vec{s}$$

so hat dieses einen Wert ungleich Null (!). Damit gilt der Maschensatz, wie bekannt aus den Widerstandsnetzwerken, hier *nicht*, bzw. er muss erweitert werden, um auch hier Gültigkeit zu behalten.

1.5.1. Verallgemeinerung des Maschensatzes

Der Maschensatz erhält allgemeine Gültigkeit, wenn allfällige Induktionsspannungen korrekt mit berücksichtigt werden. Dies kann am einfachsten mit einer Ersatzspannungsquelle erfolgen, siehe Abbildung 1.7. Die Polarität der Quelle wird so gewählt, dass der Wirbelstrom in die korrekte Richtung fliesst.

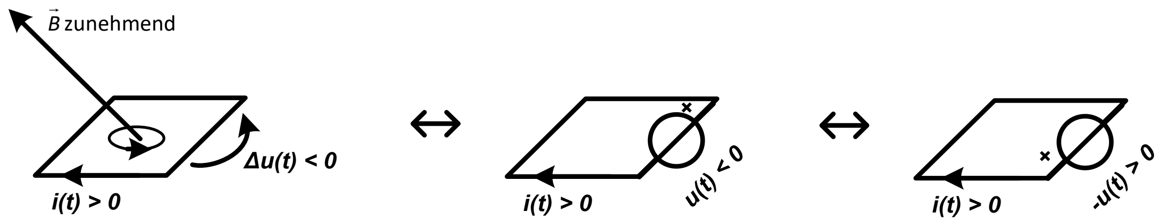

Abbildung 1.7. Die in der Figur in der Mitte bzw. rechts in die Schleife eingebaute ideale Spannungsquelle erzeugt denselben Strom wie die Induktion in der Schleife der Figur links.

Die induzierte Spannung, dargestellt durch eine ideale Spannungsquelle, kann irgendwo in der Masche dargestellt werden. Die Quelle stellt dabei kein Perpetuum Mobile dar. Je mehr Energie von ihr bezogen wird, desto grösser ist der Wirbelstrom und desto stärker das Wirbelstrom-Magnetfeld, welches gemäss Lenz'scher Regel dem anregenden Magnetfeld entgegenwirkt.

1.6. Induktivität

Anhand der Lenz'schen Regel ist erklärbar, warum der Wirbelstrom bei einer nahezu ideal leitenden, kurzgeschlossenen Schlaufe bzw. Spule nicht einen unendlich hohen Wert annimmt. Er kann offensichtlich nicht mit dem ohmschen Gesetz, induzierter Spannung und Drahtwiderstand berechnet werden. Die Frage ist naheliegend, wie sonst die Wirbelstromstärke bestimmbar ist. Führt man Experimente dazu durch, stellt man eine Proportionalität

$$L = \frac{\Phi(t)}{i(t)}$$

fest, mit der sogenannten «Induktivität» L. Die Einheit der Induktivität ist $[L]$ = Vs/A = Henry = H (nach Joseph Henry). Mit einem Trick erhalten wir die Berechnungsformeln für L: Eine Spule kann nicht unterscheiden, ob der Fluss Φ von einem fremden oder vom Magnetfeld eines eigenen Stroms bewirkt wird. Für die Berechnung des magnetischen Flusses in einer stromdurchflossenen Spule sind aber die Formeln bekannt.

1.6.1. Lange Zylinderspule

Für eine Zylinderspule gilt (siehe auch Physik):

$$\Phi = \frac{\mu \cdot A}{\sqrt{\ell^2 + d^2}} \cdot N^2 \cdot I$$

mit Permeabilität μ, Querschnittsfläche A, Länge ℓ, Durchmesser d, Windungszahl N und Stromstärke I.

Ist die Zylinderspule lang und dünn, d.h. $\ell >> \sqrt{A}$, dann darf mit

$$\Phi \approx \frac{\mu \cdot A}{\ell} \cdot N^2 \cdot I$$

gerechnet werden. Indem wir durch den Strom teilen, erhalten wir die Induktivität:

$$L \approx \frac{\mu \cdot A}{\ell} N^2$$

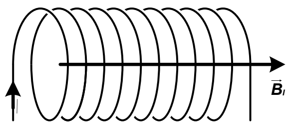

Abbildung 1.8.: Spule mit Strom I und dadurch erzeugtem Magnetfeld B_I.

1.7. Die Spule als passiver Zweipol

Der Begriff der Induktivität erlaubt uns, das Strom-Spannungs-Verhältnis an einer Spule auch zu beschreiben, wenn kein fremdes Magnetfeld vorhanden ist. Schliessen wir die Spule an eine veränderliche Stromquelle an, folgt

$$\Phi(t) = L \cdot i(t)$$

und mit dem Faradayschen Induktionsgesetz somit:

$$u(t) = \frac{-\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{-\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}t} \cdot L$$

Wie wir auf Abbildung 1.7 sehen befinden wir uns mit $u(t)$ im Erzeugersystem. Durch die Definition $u_L(t)$ = - $u(t)$ erhalten wir den Zusammenhang

$$u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}t}$$

mit den Pfeilrichtungen wie in Abbildung 1.9. passend zu einem Verbraucher

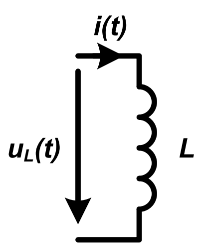

Abbildung 1.9.: Spule in einem Verbraucherzählpfeilsystem mit einem Strom und einer Spannung, welche beide zeitabhängig sind.

1.7.1. Gespeicherte Energie

Zunächst wenden wir uns der gespeicherten Energie in einer Spule zu. Dafür wenden wir den Kirchhoffschen Maschensatz (KVL) für die Schaltung nach Abbildung 1.10 an:

$$u_0(t) = u_R(t) + u_L(t)$$
$$u_0(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \tfrac{di(t)}{dt}$$
$$u_0(t) \cdot i(t) = R \cdot i(t)^2 + L \cdot \tfrac{di(t)}{dt} \cdot i(t)$$
$$P_0(t) = P_R(t) + P_L(t)$$

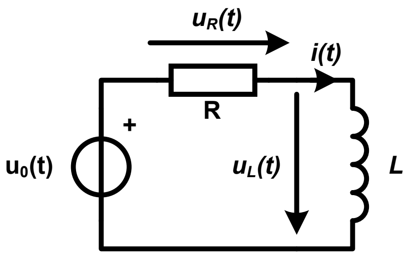

Abbildung 1.10.: Schaltkreis mit Spannungsquelle, Spule L und Widerstand R.

Wir kennen also nun die Leistung einer Spule. Das ist aber ja gerade die Ableitung der Energie nach der Zeit:

$$P_L = L \cdot \tfrac{di(t)}{dt} \cdot i(t) = \frac{dW_L(t)}{dt}$$

Also:

$$W_L(t) = \int L \tfrac{di(t)}{dt} \cdot i(t) dt = \tfrac{1}{2} L \cdot i(t)^2 + \text{Integrationskonstante}$$

Wir verlangen als Anfangsbedingung, dass Spulen, welche keinen Strom führen auch keine Energie haben. Damit ist die Integrationskonstante = 0 und die Energie:

$$W_L(t) = \tfrac{1}{2} L \cdot i(t)^2$$

1.7.2. Verschaltung von Spulen

Wir können jetzt auch die Verschaltung von Spulen ein wenig genauer unter die Lupe nehmen. Ähnlich wie schon beim ohmschen Widerstand und bei Kapazitäten untersuchen wir nun die Serien- und die Parallelschaltung von Spulen. Wie schon beim Kondensator wollen wir stellvertretend für n Spulen ein System mit nur zwei Spulen betrachten.

Serienschaltung

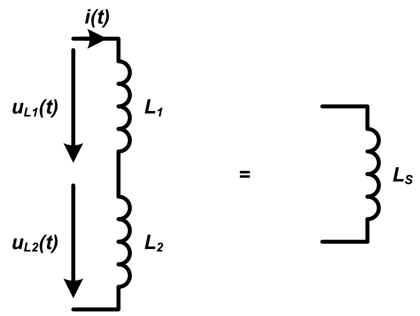

Abbildung 1.11.: Serienschaltung von Spulen

Um die Serienschaltung besser zu verstehen benutzen wir die Spulenspannungen u_1 und u_2. Wenn über dem gesamten System die Spannung u_0 herrscht gilt:

$$u_1 = L_1 \cdot \tfrac{di(t)}{dt}$$
$$u_2 = L_2 \cdot \tfrac{di(t)}{dt} = u_0 - L_1 \cdot \tfrac{di(t)}{dt}$$
$$\Rightarrow u_0 = (L_1 + L_2) \cdot \tfrac{di(t)}{dt}$$

Wenn wir die Spulen L_1 und L_2 durch eine Ersatzinduktivität L_s ersetzen dann gilt aber auch:

$$u_0 = L_S \cdot \tfrac{di(t)}{dt} = (L_1 + L_2) \cdot \tfrac{di(t)}{dt}$$
$$\Rightarrow L_S = L_1 + L_2$$

Parallelschaltung

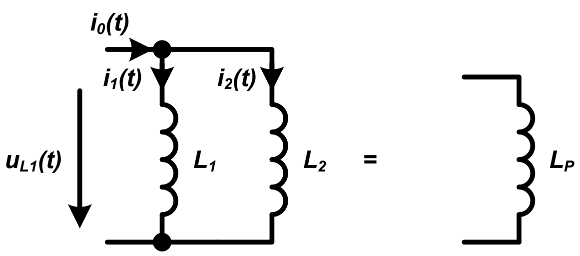

Abbildung 1.12.: Parallelschaltung von Spulen.

Auch hier werden wir nur zwei parallel geschaltete Spule betrachten, um die Parallelschaltung von Spulen zu untersuchen. Nach dem Knotensatz gilt ja:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Wir können nun den gesamten Knotensatz ableiten und erhalten:

$$\tfrac{d}{dt} i(t) = \tfrac{d}{dt} i_1(t) + \tfrac{d}{dt} i_2(t)$$

Wir wissen ausserdem aus der Bauteilgleichung, dass:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) = \frac{u_0}{L_P}$$

Eingesetzt in den abgeleiteten Knotensatz:

$$\frac{u_0}{L_P} = \frac{u_0}{L_1} + \frac{u_0}{L_2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{L_P} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

Wir haben also gezeigt, dass Spulen und Widerstände sich bei Parallel- und Serienschaltung gleich verhalten.

1.7.3. Die reale Spule

Da wir für Spulen eine grosse Menge an Draht wickeln müssen, haben wir dementsprechend bei realen Spulen nicht nur den induktiven Anteil sondern auch immer einen parasitären ohmschen Widerstand dabei.

Damit gilt für die Spannung $u(t)$ einer realen Spule:

$$u(t) = R_S \cdot i(t) + L \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

R_s steht hier für den Spulenwiderstand.

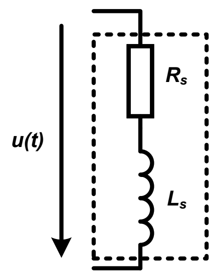

Abbildung 1.13.: Ersatzschaltbild einer realen Spule mit der Induktivität und dem Widerstand, welche eine untrennbare Einheit darstellen.

A Literaturverzeichnis

A. Führer, K. Heidemann, W. Nerreter: Grundgebiete der Elektrotechnik, Band 1: Stationäre Vorgänge, Hanser, 8. Auflage, ISBN-13: 978-3-446-40668-1

A. Führer, K. Heidemann, W. Nerreter: Grundgebiete der Elektrotechnik, Band 2: Zeitabhängige Vorgänge, Hanser, 8. Auflage, ISBN-13: 978-3-446-40573-8

A. Führer, K. Heidemann, W. Nerreter: Grundgebiete der Elektrotechnik, Band 3: Aufgaben, Hanser, 2. Auflage, ISBN-13: 978-3-446-41258-3

E. Hering, K. Bressler, J. Gutekunst: Elektronik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer, 5. Auflage, ISBN-13: 978-3-540-24309-0