Martin Weisenhorn

20. April 2020

Uebungsserie 2.1

Aufgabe 1. Normierung

Bringen Sie die folgenden Frequenzgangfunktionen in die passende aus dem Unterricht bekannte normierte Form. Bestimmen Sie dazu die nötigen Normierungskonstanten ω_g und k für Polynome ersten Grades und ω_0, $Q = \frac{1}{2\xi}$ und k für nicht faktorisierbare Polynome 2. Grades.

a) $H(\omega) = \frac{b_0}{a_1 j\omega + a_0}$

b) $H(\omega) = \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_0}$

c) $H(\omega) = \frac{1}{a_2\,(j\omega)^2 + a_1 j\omega + 1}$ für die Fälle

- **c.1)** $Q \leq \frac{1}{2}$
- **c.2)** $Q \geq \frac{1}{2}$

d) $H(\omega) = \frac{b_1 j\omega}{a_2\,(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0}$ für $a_1^2 < 4a_2 a_0$

Aufgabe 2. Ausgewählte Frequenzgangfunktionen

Zeichnen Sie die Bodediagramme (Amplituden- und Phasengang) der folgenden Frequenzgangfunktionen:

a) $H(\omega) = \frac{1}{j\omega/\omega_g}$

b) $H(\omega) = \frac{1 - j\omega/\omega_g}{1 + j\omega/\omega_g}$

c) $H(\omega) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2 + j\omega}{\omega_1 + j\omega}$ mit $\omega_2 = 10\omega_1$

d) $H(\omega) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2 + j\omega}{\omega_1 + j\omega}$ mit $\omega_1 = 10\omega_2$

Aufgabe 3. Verhältnisse und Pegel in Decibel

Diese Übung ist empfohlen wenn Sie unsicher im Umgang mit logarithmischen Massen sind. Bestimmen Sie die Spannungen oder Leistungen aus den folgenden Aufgaben:

a) $\frac{P_2}{P_1} \equiv -20\,\text{dB}$, mit $P_1 = 100\,\text{mW}$
gesucht: $P_2 =$ in mW und dB_{mW}

b) $\frac{P_2}{P_1} \equiv -17.8\,\text{dB}$, mit $P_1 = 10\,\text{mW}$ und $P_2 = U_2^2/600\,\Omega$
gesucht: $U_2 =$ in V und dB_{Volt}

c) $P_2 = G_1 \cdot G_2 \cdot P_1$ mit $G_1 \equiv 8\,\mathrm{dB}$, $G_2 \equiv 19\,\mathrm{dB}$ und $P_1 \equiv -10\,\mathrm{dB_{mW}}$
gesucht: $P_2 =$ in W und $\mathrm{dB_{mW}}$

d) Dämpfung: $A = 2.2\,\mathrm{dB}$, Eingangsspannung: $U_1 \equiv 54\,\mathrm{dB_{\mu V}}$ an $50\,\Omega$
gesucht: Ausgangsspannung U_2 an $75\,\Omega$ in mV und $\mathrm{dB_{\mu V}}$

Lösung 1.
Normierung

Bringen Sie die folgenden Frequenzgangfunktionen in ihre normierte Produktform. Bestimmen Sie dazu die nötigen Normierungskonstanten ω_g und k für Polynome ersten Grades und ω_0, $Q = \frac{1}{2\xi}$ und k für nicht faktorisierbare Polynome 2. Grades.

a) $H(\omega) = \frac{b_0}{a_1 j\omega + a_0} \quad \leftrightarrow \quad H(\omega) = \frac{b_0}{a_0}\frac{1}{1+j\omega\frac{a_1}{a_0}} = k\frac{1}{1+j\omega/\omega_g}$ mit $k = \frac{b_0}{a_0}$ und $\omega_g = \frac{a_0}{a_1}$

b) $H(\omega) = \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_0} \quad \leftrightarrow \quad H(\omega) = \frac{b_0}{a_0}\frac{1+j\omega\frac{b_1}{b_0}}{1+j\omega\frac{a_1}{a_0}} = k\frac{1+j\omega/\omega_{g2}}{1+j\omega/\omega_{g1}}$ mit $k = \frac{b_0}{a_0}$, $\omega_{g1} = \frac{a_0}{a_1}$ und $\omega_{g2} = \frac{b_0}{b_1}$

c) $H(\omega) = \frac{1}{a_2\,(j\omega)^2 + a_1 j\omega + 1} = \frac{1}{1+j\omega/\omega_0\frac{1}{Q} + (j\omega/\omega_0)^2}$, mit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{a_2}}$ und $Q = \sqrt{a_2}/a_1$ für die Fälle

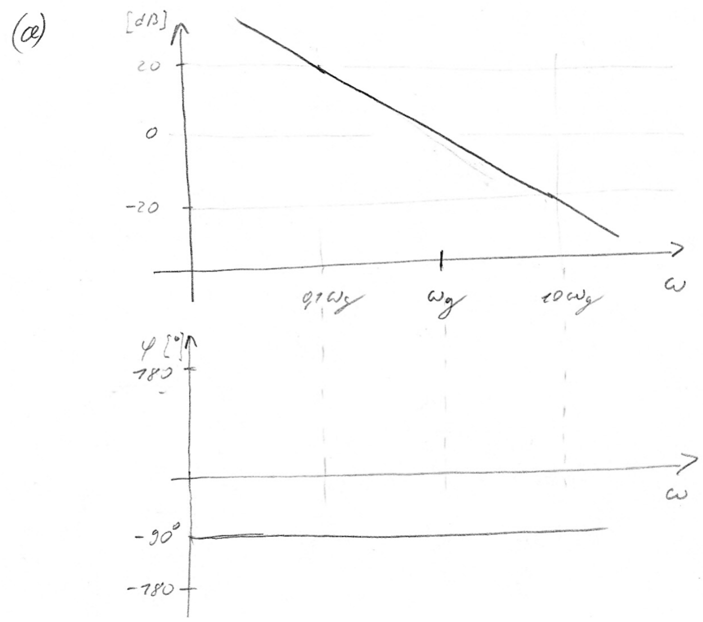
- **c.1)** $a_1^2 \geq 4\,a_2 \quad \leftrightarrow Q \leq \frac{1}{2} \leftrightarrow \quad H(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega/\omega_{g1})(1+j\omega/\omega_{g2})}$ mit $\omega_{g1,2} = \frac{1}{2\,a_2}\left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4\,a_2}\right) = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2}$
- **c.2)** $a_1^2 < 4\,a_2 \quad \leftrightarrow \quad Q > \frac{1}{2}$: D.h. die oben angegebene Form mit einem Nennerpolynom 2. Grades kann verwendet werden, um das Bodediagramm für ein System 2.Ordnung zu skizzieren.

d) $H(\omega) = \frac{b_1 j\omega}{a_2\,(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0}$ für $a_1^2 < 4a_2 a_0 \quad \leftrightarrow \quad H(\omega) = k\frac{\frac{j\omega}{\omega_0}\frac{1}{Q}}{(\frac{j\omega}{\omega_0})^2 + \frac{j\omega}{\omega_0}\frac{1}{Q} + 1}$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$, $Q = \frac{\sqrt{a_0 a_2}}{a_1} > \frac{1}{2}$ und $k = \frac{b_1}{a_1}$

Lösung 2.
Ausgewählte Frequenzgangfunktionen

Zeichnen Sie die Bodediagramme (Amplituden- und Phasengang) der folgenden Frequenzgangfunktionen:

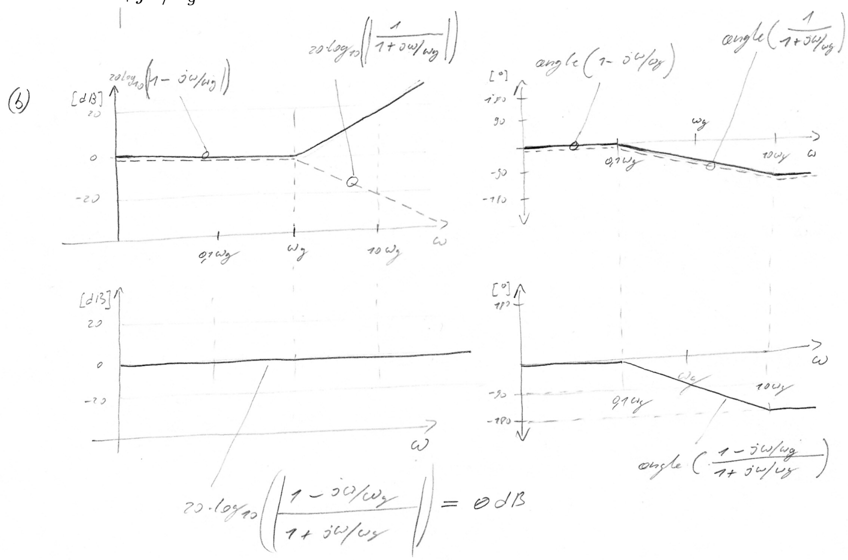
a) $H(\omega) = \frac{1}{j\omega/\omega_g}$



Diese Übertragungsfunktion überträgt sinusförmige Signale unabhängig von der Frequenz immer mit derselben Verstärkung. Die Phase ist jedoch nicht für alle Frequenzen gleich.

Übertragungsfunktionen mit dieser Eigenschaft werden als Allpässe bezeichnet, sie finden z.b. in der Regelungstechnik Verwendung wenn nur der Phasengang, nicht aber der Frequenzgang beeinflusst werden soll.

b) $H(\omega) = \frac{1-j\omega/\omega_g}{1+j\omega/\omega_g}$



c) $H(\omega) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2+j\omega}{\omega_1+j\omega}$ mit $\omega_2 = 10\omega_1$

normierte Form herstellen

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2 + j\omega}{\omega_1 + j\omega} = \frac{1 + j\omega/\omega_2}{1 + j\omega/\omega_1} \quad , \quad \boxed{\omega_2 = 10\,\omega_1}$$

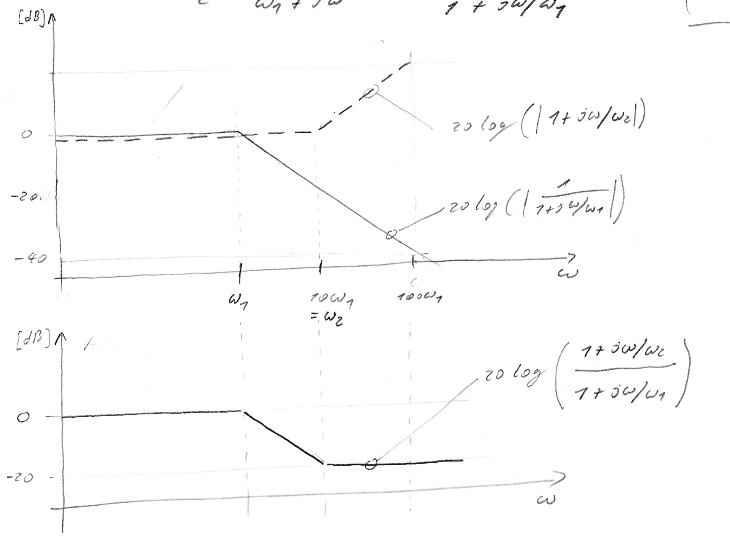
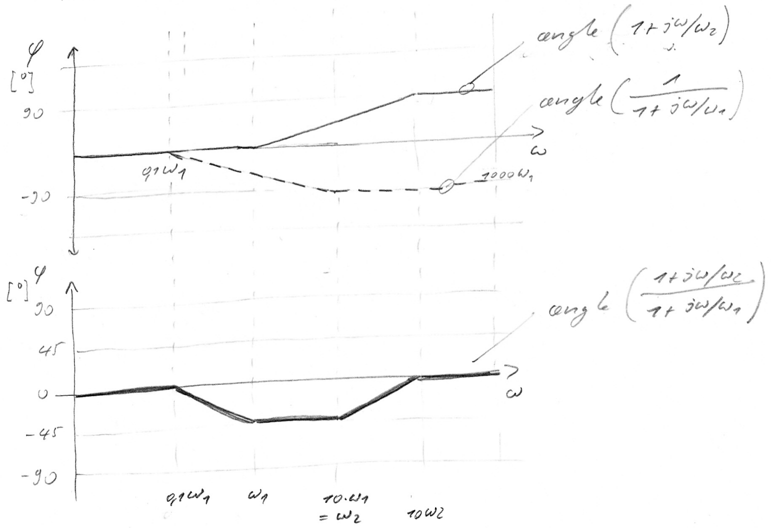


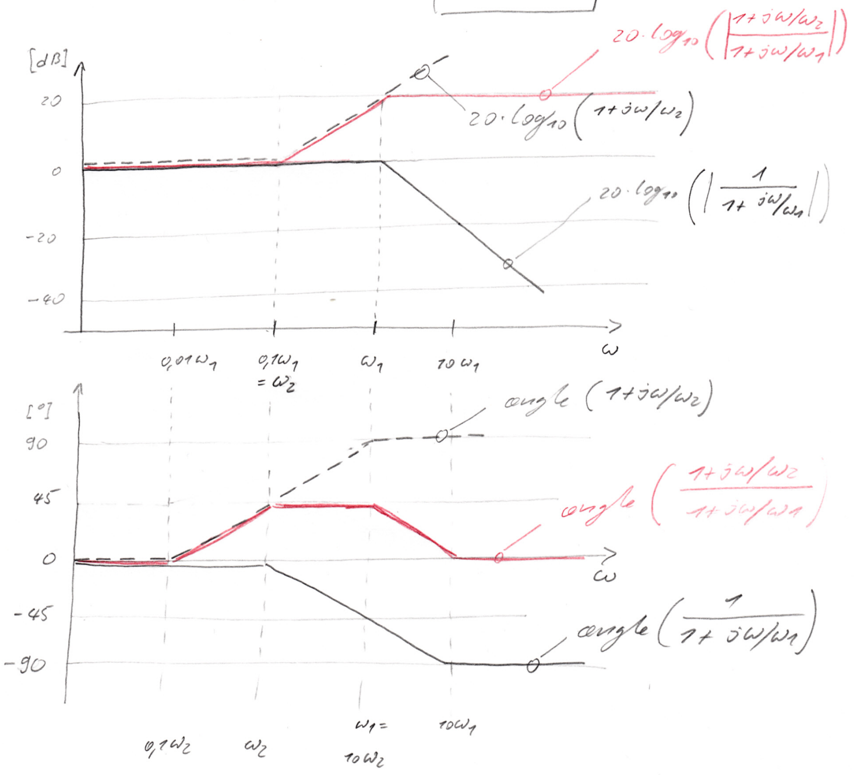
Abb. Konstruktion des Amplitudengangs



d) $H(\omega) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2 + j\omega}{\omega_1 + j\omega}$ mit $\omega_1 = 10\omega_2$

normierte Form herstellen

$\underline{H}(\omega) = \frac{1 + j\omega/\omega_2}{1 + j\omega/\omega_1}$, $\boxed{\omega_2 = 0{,}1\,\omega_1}$



Lösung 3.

Verhältnisse und Pegel in Decibel

Bestimmen Sie die Spannungen oder Leistungen aus den folgenden Aufgaben:

a) $\frac{P_2}{P_1} \equiv -20\,\mathrm{dB}$, mit $P_1 = 100\,\mathrm{mW}$ $\quad\rightarrow\quad$ $P_2 = 1\,\mathrm{mW} \equiv 0\,\mathrm{dB_{mW}}$

b) $\frac{P_2}{P_1} \equiv -17.8\,\mathrm{dB}$, mit $P_1 = 10\,\mathrm{mW}$ und $P_2 = U_2^2/600\,\Omega$ $\quad\rightarrow\quad$ $U_2 = 0.3156\,\mathrm{V} \equiv$ -10.0 $\mathrm{dB_V}$

c) $P_2 = G_1 \cdot G_2 \cdot P_1$ mit $G_1 \equiv 8\,\mathrm{dB}$, $G_2 \equiv 19\,\mathrm{dB}$ und $P_1 \equiv -10\,\mathrm{dB_{mW}}$ $\quad\rightarrow\quad$ $P_2 = 0.05\,\mathrm{W} \equiv 17\,\mathrm{dB_{mW}}$

d) Dämpfung: $A = 2.2\,\mathrm{dB}$, Eingangsspannung: $U_1 \equiv 54\,\mathrm{dB_{\mu V}}$ an $50\,\Omega$ $\quad\rightarrow\quad$ $U_2^2/R_2 = \frac{1}{A}U_1^2/R_1$ $\quad\rightarrow\quad$ $20\log U_2 = 10\log R_2 - A + 54\,\mathrm{dB_{\mu V}} - 10\log R_1 = 53.56\,\mathrm{dB_{\mu V}} \equiv 0.48\,\mathrm{mV}$