Martin Weisenhorn

20. April 2020

Lernübung – Berechnung und Darstellung des Frequenzganges

Aufgabe 1. (Frequenzgang eines RLC-Filters) Für das elektrische Netzwerk in Abb. 1 sollen die folgenden Aufgabenpunkte bearbeitet werden.

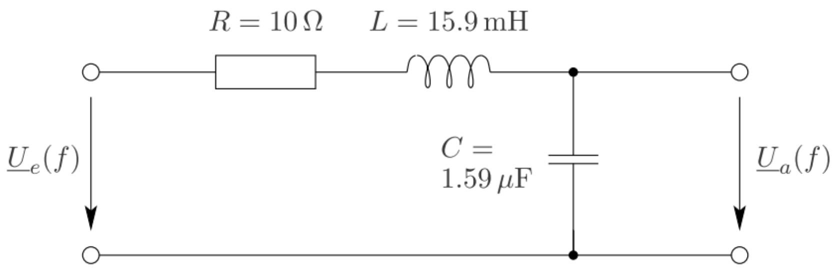

Abbildung 1: RLC-Filter.

a) Bestimmen Sie die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{G}(f) := \frac{\underline{U}_a(f)}{\underline{U}_e(f)}$.

b) Bei welcher Frequenz f_m erwarten Sie in etwa das Maximum des Betrages der Übertragungsfunktion?

c) Berechnen Sie mit Hilfe eines MATLAB-Skripts den Betrag $|\underline{G}(f)|$ der Übertragungsfunktion und stellen Sie diese entlang einer linearen Frequenzachse im Frequenzintervall $[10,\ 100000]\,\mathrm{Hz}$ dar, verwenden Sie die Funktion `plot`.

d) Stellen Sie nun 20 mal den Zehnerlogarithmus des Betrags $|\underline{G}(f)|$ als Funktion der Frequenz dar.

e) Ersetzen Sie die Funktion `plot` durch die Funktion `semilogx`. Welchen Unterschied beobachten Sie?

f) Wie gross sind die Grenzfrequenzen?

g) Stellen Sie die Phase $\varphi(f)$ dar, verwenden Sie eine logarithmische Darstellung der Frequenzachse. *Hinweis:* Diese Darstellung erhalten Sie mit dem Plot Kommando `semilogx`.

h) Am Eingang des Filters liege die Spannung $u_e(t) = 2\,\mathrm{V} \cdot \cos(2\pi f t + \pi/4)$ an, wobei $f = 900\,\mathrm{Hz}$. Berechnen Sie mit Hilfe von $\underline{G}(f)$ die Ausgangsspannung $u_a(t)$.

Loesung 1. (Frequenzgang eines RLC-Filters)

a)

$$\begin{aligned}\underline{G}(f) &= \frac{\underline{U}_a(f)}{\underline{U}_e(f)} = \frac{jX_C}{R + jX_L + jX_C} \\ &= \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{R + j2\pi fL + \frac{1}{j2\pi fC}} \\ &= \frac{1}{1 + j2\pi fRC - 4\pi^2 f^2 LC}\end{aligned} \tag{1}$$

b) Ein Maximum der Übertragungsfunktion sollte in der Nähe der Resonanzfrequenz f_{res} auftreten. Diese tritt dann ein wenn $X_C = -X_L$, das ist bei $f_{\text{res}} = 1\,\text{kHz}$ auf.

c)

```
%Bauteilwerte festlegen
R=10;
C=1.59e-6;
L=15.9e-3;
%Frequenzbereich definieren
f=10.^(1:0.01:4);
w=2*pi*f;
%Übertragungsfunktion definieren
G=(1)./(1+j*w*R*C-w.^2*L*C);
%Graph zeichen
figure;
plot(f,abs(G),'r');
ylabel('$|G|(f)$','interpreter','latex');
xlabel('$f$ [Hz]','interpreter','latex');
```

Das Ergebnis ist in Abb. 2 dargestellt.

d) Die logarithmische Darstellung entsteht durch

```
abs_G_log = 20*log10(abs(G));
figure;
plot(f,abs_G_log,'r');
ylabel('$20 log(|G|(f))$','interpreter','latex');
xlabel('$f$ [Hz]','interpreter','latex');
```

e)

```
semilogx(f,abs_G_log,'r');
```

Das Ergebnis ist in Abb. 3 dargestellt.

f) Die Grenzfrequenz ist definiert als jene Frequenz, bei der die Verstärkung gleich $1/\sqrt{2}$ der maximalen Verstärkung $G_{\max}$ ist. Aus Abb. 2 lässt sich $G_{\max} = 10$ ablesen. Rechnerisch ergeben sich die Grenzfrequenzen wie folgt:

$$\begin{aligned}|G(f_{\text{res}})| &= G_{\max}/\sqrt{2} = 10/\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - f_{\text{res}}^2 4\pi^2 LC)^2 + 4\pi f_{\text{res}}^2 C^2 R^2}} = 10/\sqrt{2}\end{aligned}$$

Löst man diese Gleichung nach f_{res} auf, so ergeben sich die beiden Lösungen $f_{\text{res},1} = 947\,\text{Hz}$, $f_{\text{res},2} = 1047\,\text{Hz}$.

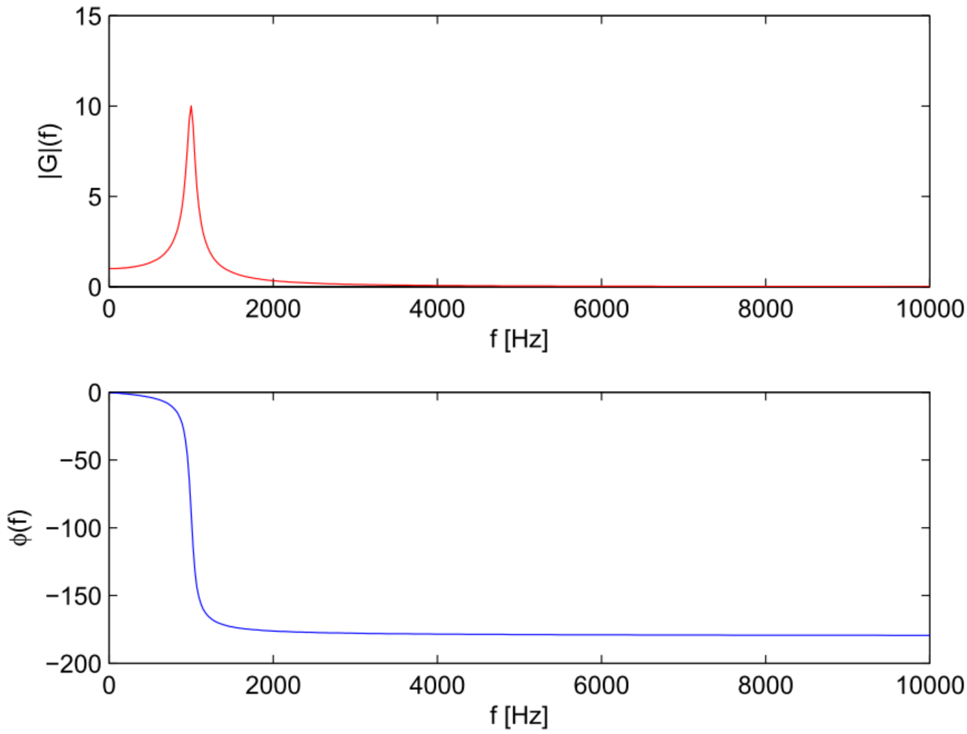

Abbildung 2: Amplituden- und Phasengang, in linearer Darstellung.

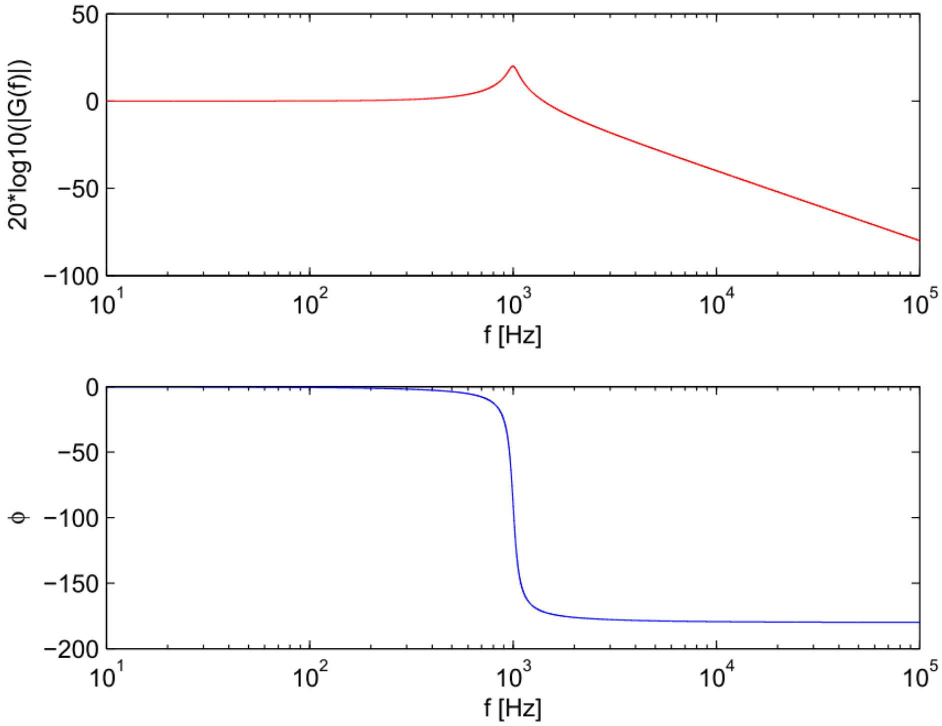

Abbildung 3: Amplituden- und Phasengang, in doppelt logarithmischer bzw. einfach logarithmischer Darstellung.

g)

```
figure;
phi_G=angle(G);
semilogx(f,phi_G*180/pi,'b');
ylabel('$\varphi$','interpreter','latex'); xlabel('$f$ [Hz]','interpreter'
  ,'latex');
```

Das entsprechende Ergebnis ist in Abb. 3 dargestellt.

h) Wir setzen $f_0 := 900\,\mathrm{Hz}$, damit ist $U_e(f_0) = \sqrt{2}\,\mathrm{V} \cdot e^{j\pi/4}$. Mit der Definition von $G(f)$ können wir schreiben

$$\underline{U}_a(f_0) = \underline{G}(f_0) \cdot \underline{U}_e(f_0).$$

Das Zeitsignal erhalten wir durch den folgenden Schritt:

$$\begin{aligned}
u_a(t) &= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}_a(f_0)e^{j2\pi f_0 t}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{G}(f_0)\underline{U}_e(f_0)e^{j2\pi f_0 t}\right\} \\
&= 2\,\mathrm{V} \cdot |\underline{G}(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \pi/4 + \varphi(f_0)) \\
&= 2\,\mathrm{V} \cdot 4.722 \cdot \cos(2\pi f_0 t + 45^\circ - 25.12^\circ) \\
&= 9.444\,\mathrm{V} \cos(2\pi f_0 t + 19.88^\circ)
\end{aligned}$$