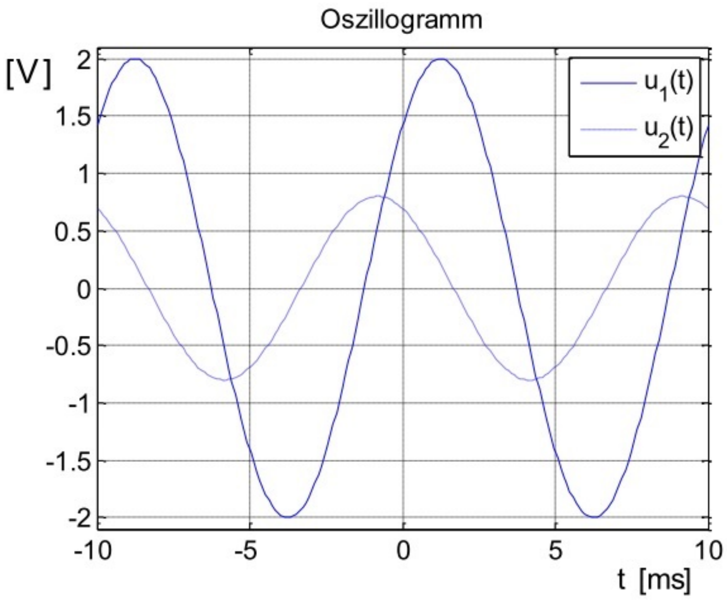
Martin Weisenhorn

29. März 2020

Uebungsserie – Harmonische Signale und Ihre Darstellung

Aufgabe 1. Die nachfolgende Grafik stellt das Oszillogramm zweier sinusförmiger Spannungen dar, die entsprechende mathematische Beschreibung ist

$$u(t) = \hat{u}\cos(2\pi f t + \varphi_u).$$



a) Bestimmen Sie für die beiden Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ die Frequenz f, die Phasenwinkel φ_{u_1} und $\varphi_{u,2}$, sowie die Amplituden $\hat{u}_1$ und $\hat{u}_2$.

b) Wie gross ist der Betrag der Phasenverschiebung zwischen $\hat{u}_1$ und $\hat{u}_2$ in Grad?

c) Drücken Sie die Summe $u_S(t) = u_1(t) + u_2(t)$ in der Form $u(t) = \hat{u}\cos(2\pi f t + \varphi_u)$ aus.

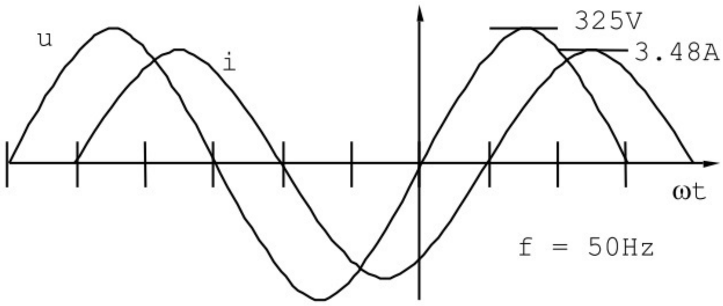
Aufgabe 2. (Phasenverschiebung) Für die skizzierte Sinusgrössen gebe man an:

a) Kreisfrequenz ω und Periodendauer T,

b) den Phasenverschiebungswinkel des Stroms gegenüber der Spannung φ,

c) die reellen Zeitfunktionen $u(t)$ und $i(t)$,

d) die Effektivwertzeiger $\underline{U}$ und $\underline{I}$.



Aufgabe 3. (Komplexe Zahlen) Bestimmen Sie die polaren und kartesischen Formen der komplexen Zahlen $\underline{X}$ und von deren reziproken Werten $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{X}}$. Alle Winkel sind in Einheiten von Radianten anzugeben

a) $\underline{X} = 3 + 4j$

b) $\underline{X} = 3 - 4j$

c) $\underline{X} = 2 + \exp(j\pi)$

d) $\underline{X} = 1 \angle\frac{\pi}{2}$; Das Symbol $\angle\alpha$ bedeutet $e^{j\alpha}$.

e) $\underline{X} = (1 + j)^2$

f) $\underline{X} = \frac{1+j}{1-j}$; Es gibt zwei Lösungsansätze: 1.) Erweiterung des Bruchs mit dem konjugiert komplexen Nenner, 2.) Zähler und Nenner in polarkoordinaten darstellen. Lösen Sie das Problem auf beide Weisen.

Aufgabe 4. (Harmonische Signale als komplexe Zahlen dargestellt) Geben Sie für die unten stehenden Zeitfunktionen $y(t)$ die Parameter $\hat{y}$ und φ an damit die Gleichung $y(t) = \hat{y}\cos(\omega t + \varphi)$ erfüllt ist. Bestimmen Sie ausserdem die entsprechenden komplexen Zahlen $\underline{y}$, sodass $y(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{y}\, e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{y}\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}\right\}$.

a) $y(t) = -2 \cdot \cos(\omega t + \pi/3)$

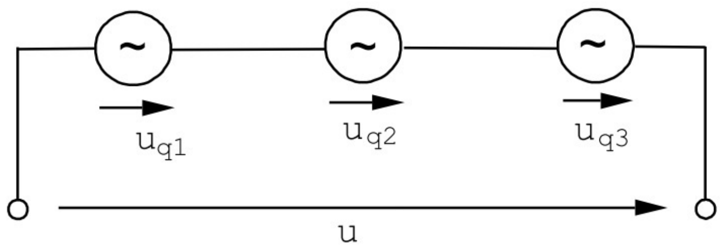
b) $y(t) = 0.5 \cdot \sin(\omega t + \pi/8)$

Aufgabe 5. (Komplexe Zeiger als harmonische Signale darstellen) Bestimmen Sie aus den jeweiligen Angaben der komplexen Effektivwerte die zugehörige reelle Zeitfunktion:

komplexer Eff.Wert	reelle Zeitfunktion
$\underline{I} = 2A \angle \pi/3$ f=50Hz	
$\underline{U} = 5V\, e^{j15°}$ f=100Hz	
$\underline{U} = 85V$ f = 20kHz	
$\underline{I} = 10A \angle 45°$ f=16 2/3Hz	
$\underline{U} = (27+j38)V$ f=50Hz	
$\underline{U} = j141.4\ V$ f=50Hz	
$\underline{I} = (j5+4.2)A$ f=50Hz	

Aufgabe 6. (Superposition) Drei Quellen mit sinusförmiger Quellenspannung und gleicher Frequenz sind in Reihe geschaltet. Die Klemmenspannung hat den Effektivwert 10.0 V und den Nullphasenwinkel 15°.

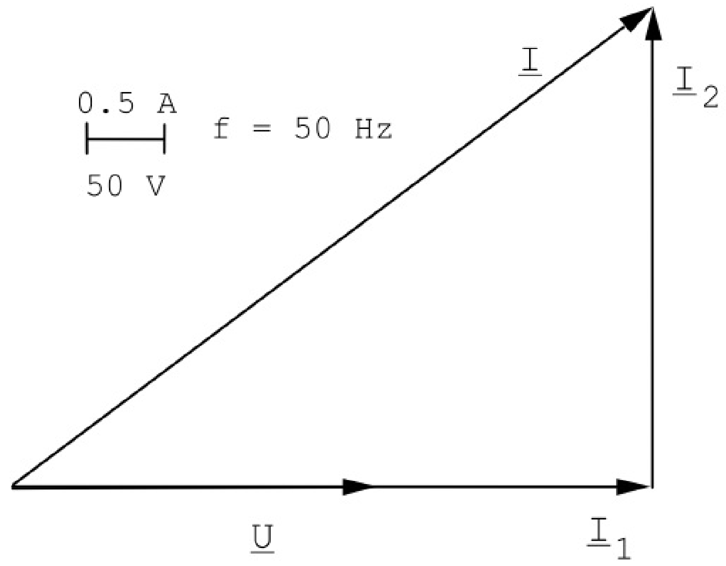
$$U_{q_1} = 30\,\text{V};\ \varphi_{u_1} = 30\,°;\ U_{q_2} = 45\,\text{V};\ \varphi_{u_2} = 60\,°$$



a) Zeichnen Sie ein Zeigerdieagramm mit allen vorkommenden Spannungen

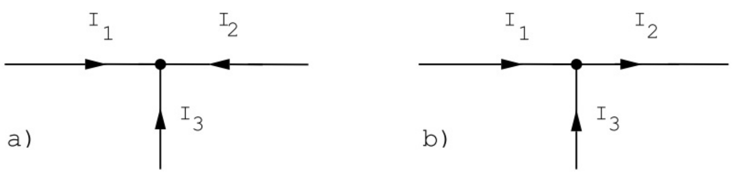
b) und bestimmen Sie die Kenngrössen der dritten Quelle.

Aufgabe 7. (Vom komplexen Zeiger zum Zeitsignal) Wie lauten die zu den Zeigern gehörenden reellen Zeitfunktionen?



Aufgabe 8. (Superposition) An einem Knotenpunkt sind die Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ bekannt:

$\underline{I}_1 = 5.0\,\mathrm{A}\ \angle 0°$; $\underline{I}_2 = 4.2\,\mathrm{A}\ \angle 120°$; $f = 50\,\mathrm{Hz}$



Bestimmen Sie jeweils den unbekannten Strom $\underline{I}_3$.

Aufgabe 9. (Mittelwerte) Für die Mittelwerte eines periodischen Signals $x(t)$ gelten die folgenden Berechnungsformeln:

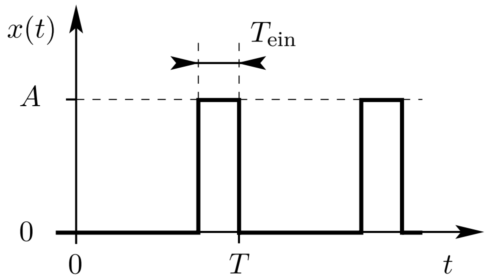
- Linearer Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t) \cdot \mathrm{d}t$
- quadratischer Mittelwert, auch Effektiv- oder RMS-Wert (Root Mean Square) genannt: $X = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T x^2(t) \cdot \mathrm{d}t}$

Die bestimmten Integrale erstrecken sich dabei über je eine Periodendauer T. Bestimmen Sie auf analytischem Weg (d. h. in Funktion der gegebenen Parametern) die linearen und quadratischen Mittelwerte der folgenden Signale:

a) harmonisches Signal $x(t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi)$. Besteht eine Abhängigkeit des Mittelwertes vom Nullphasenwinkel φ?

b) harmonisches Signal mit Offset: $x(t) = x_0 + \hat{x}\sin(2\pi f t)$

c) Rechteckpulsfolge $x(t)$ mit Pegelwerten zwischen 0 und A und einer relativen Einschaltzeit $\frac{T_{\text{ein}}}{T}$:



Unter der relativen Einschaltzeit versteht man das Verhältnis der Dauer T_{ein} des höheren Signalpegels A zur Periodendauer T des Signals.

d) Nun soll der lineare Mittelwert des Rechtecksignals vom Rechtecksignal abgezogen werden. Wie gross ist der lineare Mittelwert des neuen Rechtecksignals? Wie gross ist dessen quadratischer Mittelwert?

Lösung 1.

a) Die Dauer T einer Periode kann aus der Grafik herausgelesen werden. Der Zeitraum $[-10, 0]$ ms enthält genau eine Periode. Das heisst $T = 10\,\mathrm{ms}$.

Damit gilt für die Frequenz $f = 1/T = 100\,\mathrm{Hz}$.

Der Zeitpunk $-t_{u_2}$ des Spitzenwerts von $u_2(t)$ der am nächsten bei $t = 0$ liegt lässt sich per Lineal und Dreisatz bestimmen: $-t_{u_2} = -0.8523\,\mathrm{ms}$. Gleiches gilt für die Bestimmung von $-t_{u_1}$: $-t_{u_1} = 1.25\,\mathrm{ms}$.

Die Phasenwinkel berechnens sich wie folgt:

$$\varphi_{u_1} = \omega\, t_{u_1} = -0.7854\,\mathrm{rad} = -45°$$

$$\varphi_{u_2} = \omega\, t_{u_2} = 0.5355\,\mathrm{rad} = 30°$$

Die Scheitelwerte der Spannungen sind $\hat{u}_1 = 2\,\mathrm{V}$ und $\hat{u}_2 = 0.8\,\mathrm{V}$.

b) $\varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} = 75°$

c) Das folgende MATLAB-Skript beschreibt die nötigen Rechenschritte:

```
u_1_  = 2 * exp(-1i*pi/4);
u_2_  = 0.8*exp(1i*pi/6);
u_s_  = u_1_+u_2_;
u_s   = abs(u_s_)
phi   = angle(u_s_)
phi_grad = phi*180/pi
% Ergebnis:
% u_s =   2.3384
% phi =   -0.4486
% phi_grad = -25.7037
```

Daraus folgt: $u_S(t) = 2.338\,\mathrm{V} \cdot \cos(2\pi f t - 25.70°)$

Lösung 2.

a) $\omega = 314\,\mathrm{s}^{-1}$; $T = 20\,\mathrm{ms}$

b) $\varphi = \pi/3$

c) $u(t) = 325\,\mathrm{V} \cdot \cos(314\,\mathrm{s}^{-1} t - \pi/2)$; $i(t) = 3.48\,\mathrm{A} \cdot \cos(314\,\mathrm{s}^{-1} t - 5\pi/6)$

d) $\underline{U} = 230\,\mathrm{V} \angle -\pi/2$; $\underline{I} = 2.46\,\mathrm{A} \angle -5\pi/6$

Lösung 3.

$\underline{X} = 3 + 4j = 5 \cdot e^{j \arctan(4/3)} = 5\angle 0.9273$, $\underline{Y} = \frac{1}{5}\angle -0.9273 = 0.12 - 0.16j$

$\underline{X} = 3 - 4j = 5 \cdot e^{-j \arctan(4/3)} = 5\angle -0.9273$, $\underline{Y} = \frac{1}{5}\angle 0.9273 = 0.12 + 0.16j$

$\underline{X} = 2 + \exp(j\pi) = 2 - 1 = 1$, $\underline{Y} = 1$

$\underline{X} = 1\,\angle \frac{\pi}{2} = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, $\underline{Y} = \angle -\frac{\pi}{2} = -j$

$\underline{X} = (1+j)^2 = \left(\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2\angle\frac{\pi}{2} = 2j$, $\underline{Y} = 0.5\angle-\frac{\pi}{2} = -0.5j$

$\underline{X} = \frac{1+j}{1-j} = \frac{\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}\angle-\frac{\pi}{4}} = 1\angle\frac{\pi}{2} = j$, $\underline{Y} = \frac{1}{j} = -j = 1\angle-\frac{\pi}{2}$

Lösung 4.
Zur Lösung dieser Aufgabe werden die beiden folgenden Identitäten benützt:

$$-\cos(x) = \cos(x \pm \pi), \qquad \sin(x) = \cos(x - \pi/2)$$

a) $y(t) = -2 \cdot \cos(\omega t + \pi/3) = \hat{y}\cos(\omega t + \varphi)$, wobei $\hat{y} = 2$, $\varphi = 4\pi/3$, $\underline{y} = 2 \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}$

b) $y(t) = 0.5 \cdot \sin(\omega t + \pi/8) = \hat{y}\cos(\omega t + \varphi)$, wobei $\hat{y} = 0.5$, $\varphi = \pi/8 - \pi/2$, $\underline{y} = 0.5 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{8}}$

Lösung 5.

komplexer Eff.Wert	reelle Zeitfunktion
$\underline{I} = 2\text{A}\angle\pi/3$ f=50Hz	$i(t) = 2{,}83\,\text{A} \cdot \cos(314{,}2\,\text{s}^{-1} \cdot t + \pi/3)$
$\underline{U} = 5\text{V}\ e^{j15°}$ f=100Hz	$u(t) = 7{,}07\,\text{V} \cdot \cos(628{,}3\,\text{s}^{-1} \cdot t + \pi/12)$
$\underline{U} = 85\text{V}$ f = 20kHz	$u(t) = 120\,\text{V} \cdot \cos(125664\,\text{s}^{-1} \cdot t)$
$\underline{I} = 10\text{A}\angle 45°$ f=16 2/3Hz	$i(t) = 14{,}1\,\text{A} \cdot \cos(104.7\,\text{s}^{-1} \cdot t + \pi/4)$
$\underline{U} = (27+j38)\,\text{V}$ f=50Hz	$u(t) = 65{,}9\,\text{V} \cdot \cos(314{,}2\,\text{s}^{-1} \cdot t + 0{,}3\pi)$
$\underline{U} = j141.4\ \text{V}$ f=50Hz	$u(t) = 200\,\text{V} \cdot \cos(314{,}2\,\text{s}^{-1} \cdot t + \pi/2)$
$\underline{I} = (j5+4.2)\,\text{A}$ f=50Hz	$i(t) = 9{,}24\,\text{A} \cdot \cos(314{,}2\,\text{s}^{-1} \cdot t + 0.872)$

Lösung 6.
$u_{q3} = 64.4\,\text{V}\ \angle-127.1°$

Lösung 7.
$u(t) = 325\,\text{V} \cdot \cos(314\,\text{s}^{-1} \cdot \text{t})$
$i_1(t) = 5.66\,\text{A} \cdot \cos(314\,\text{s}^{-1} \cdot \text{t})$
$i_2(t) = 4.24\,\text{A} \cdot \cos(314\,\text{s}^{-1} \cdot \text{t} + 90°)$
$i(t) = 7.07\,\text{A} \cdot \cos(314\,\text{s}^{-1} \cdot \text{t} + 36.9°)$

Lösung 8.
a) $\underline{I}_3 = 4.65\,\text{A}\ \angle-128°$

b) $\underline{I}_3 = 7.98\,\text{A}\ \angle 152.9°$

Lösung 9.
a) $\bar{x} = 0, \qquad X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$

b) $\bar{x} = x_0, \qquad X = \sqrt{x_0^2 + 0.5\,\hat{x}^2}$

c) $\bar{x} = A\frac{T_{\text{ein}}}{T}, \qquad X = A\sqrt{\frac{T_{\text{ein}}}{T}}$

d) $\bar{x} = 0, \qquad X = \sqrt{A^2 \frac{T_{\text{ein}}}{T} - A^2 \left(\frac{T_{\text{ein}}}{T}\right)^2} = \sqrt{\left(A\sqrt{\frac{T_{\text{ein}}}{T}}\right)^2 - \left(A\frac{T_{\text{ein}}}{T}\right)^2}$

Die Resultate der letzten drei Aufgaben lassen sich viel schneller finden, wenn man den folgenden Zusammenhang benutzt: Jedes Signal $x(t)$ lässt sich als die Summe seines Gleichanteils $\bar{x}$ und seines Wechselanteils $\tilde{x}(t)$ darstellen, d.h. $x(t) = \bar{x} + \tilde{x}(t)$. Die Leistungen des Gleichanteils $\bar{x}$ und des Wechselanteils $\tilde{x}(t)$ addieren sich zur Gesamtleistung $P(x(t))$ des Signals:

$$\begin{aligned} P(x(t)) &= \Big(\mathrm{RMS}(x(t))\Big)^2 \\ &= \Big(\mathrm{RMS}(\bar{x})\Big)^2 + \Big(\mathrm{RMS}(\tilde{x}(t))\Big)^2 \\ &= \bar{x}^2 + \Big(\mathrm{RMS}(\tilde{x}(t))\Big)^2 \end{aligned}$$

Eine Verallgemeinerung dieses Zusammenhangs auf Wechselanteile mit unterschiedlichen Frequenzen lernen Sie im Kurs *Signale und Systeme* als den Satz von Parseval kennen.