دانشکده علوم ریاضی و آمار

مدرس: **دکتر مجتبی رفیعی** نیمسال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

جلسه ۱۱

نگارنده: صبا عبدی

۱۵ آبان ۱۴۰۰

فهرست مطالب

۱ نماد مجانبی θ

بیانگر آن است که هم نماد O را داشته باشیم و هم نماد Ω را داشته باشیم. شهود برای این عملگر، عملگرهای مقایسه‌ای روی اعداد حقیقی است:

$$a = b \Longleftrightarrow a \leq b \quad \text{and} \quad b \leq a$$

تعریف ۱ *فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع باشند، گوییم $f(n) = \theta(g(n))$ است، اگر*

$$f(n) = O(g(n)) \quad \textit{and} \quad f(n) = \Omega(g(n))$$

بیان دقیق‌تر رابطه بالا به صورت زیر است:

$$f(n) = \theta(g(n)) \Longleftrightarrow f(n) = O(g(n)) \quad \textit{and} \quad f(n) = \Omega(g(n))$$

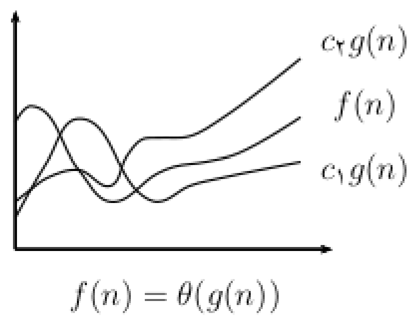
تعریف ۲ *فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع باشند، گوییم رشد تابع $f(n)$ محدود می‌شود به رشد تابع $g(n)$ و به صورت $f(n) = \theta(g(n))$ نشان می‌دهیم اگر*

$$\exists c_1, c_2, n_0 > 0 \ \ s.t. \ \ \forall n \geq n_0, \ \ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

تعریف ۳ *فرض کنید $g(n)$ بیانگر یک تابع پیچیدگی زمانی باشد، مجموعه $\theta(g(n))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\theta(g(n)) = \{f(n) : \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \ \ s.t. \ \ \forall n \geq n_0 \ \ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

شکل زیر، شهود مصوری از نماد مجانبی $\theta(g(n))$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱: شهود مصور نماد مجانبی θ

مثال ۱ *توابع زیر را درنظر بگیرید:*

$$f(n) = 10^9 n^2$$
$$g(n) = n^2$$
$$f(n) = O(g(n))$$

قضیه ۱ *فرض کنید تابع $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ داده شده است، می‌خواهیم نشان دهیم این تابع عضو یک $\theta(n^k)$ است.*

برهان. برای این منظور، باید نشان دهیم که $f(n) = \theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n)) \quad and \quad f(n) = \Omega(g(n))$

Part1.$f(n) = O(g(n))$

$$\exists c, n_0 > 0 \ \ s.t. \ \ \forall n \geq n_0, \ \ 0 \leq a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0 \leq c n^k$$
$$c = \sum_{i=0}^{k} |a_k|, n_0 = 1$$

Part2.$f(n) = \Omega(g(n))$

$$\exists c, n_0 > 0 \ \ s.t. \ \ \forall \ \ n \geq n_0, \ \ 0 \leq c n^k + a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$$

دو طرف را تقسیم بر n^k می‌کنیم

$$0 \leq c \leq a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}$$
$$c = \frac{1}{100} a_k, \quad n_0 = \sum_{i=0}^{k-1} |a_i| \times 1000$$

■

۱.۱ نماد اُی کوچک (little-o)

می‌خواهیم نشان دهیم رشد یک تابع کمتر از یک تابع دیگر است، در واقع می‌خواهیم تساوی را از نماد O (اُی بزرگ) حذف کنیم.

$$f(n) = o(g(n)) \Rightarrow \forall c > 0 \;\; \exists n_0 > 0 \;\; s.t. \;\; \forall n \geq n_0 \;\; 0 \leq f(n) < cg(n)$$

مثال:

$$n^2 < n^3 < 2^n$$

در ادامه سعی داریم، با ارایه راه‌حل‌هایی چنین مفهومی را تعریف کنیم.

- **راه حل ۱ برای تعریف** $f(n) = o(g(n))$:

$$\exists c, n_0 > 0 \;\; s.t. \;\; \forall n \geq n_0 \;\; 0 \leq f(n) < cg(n)$$

آیا راه حل ۱ انتظار ما از مفهوم بالا را برآورده می‌کند؟ برای پاسخ به این سوال به مثال زیر دقت کنید.

$$f(n) = n^2 \qquad g(n) = 5n^2$$
$$f(n) \stackrel{?}{=} o(g(n))$$
$$\exists c, n_0 > 0 \;\; s.t. \;\; \forall n \geq n_0 \;\; 0 \leq f(n) < cg(n)$$

داریم

$$0 \leq n^2 < c(5n^2)$$

بنابراین $c = 1$ ، $n_0 = 1$ با راه حل ۱ موفق به کسب هدفی که دنبال می‌کردیم نشدیم.

- **راه حل ۲ برای تعریف** $f(n) = o(g(n))$:

استفاده از حد (limit) ریاضی است. فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع باشند، گوییم رشد$f(n)$کمتر از $g(n)$ است و می‌نویسیم

$$f(n) = o(g(n))$$

اگر

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

نکته: برای مرتبه‌ی یکسان، حد صفر نمی‌شود.

$$f(n) = 2n^2$$
$$g(n) = 3n^2 + 5n + 6$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2}{3n^2 + 5n + 6} = \frac{2}{3} \neq 0$$

- **راه حل ۳ برای تعریف** $f(n) = o(g(n))$:

فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع باشند، گوییم رشد $f(n)$ کمتر از $g(n)$ است و می‌نویسیم

$$f(n) = o(g(n))$$

اگر داشته باشیم:

$$\forall c > 0 \;\; \exists n_0 \;\; s.t. \;\; \forall n \geq n_0 \;\; 0 \leq f(n) < cg(n)$$

مثال ۲ *دو تابع زیر را در نظر بگیرید:*

$$f(n) = 2n^2$$
$$g(n) = 3n^2 + 5n + 6$$

نشان دهید که

$$f(n) = O(g(n)) \quad \textit{and} \quad f(n) \neq o(g(n))$$

پاسخ. *$f(n) = O(g(n))$ را قبلاً نشان دادیم.*

با استفاده از راه‌حل دوم بیان شده در بالا داریم:

$$\lim \frac{2n^2}{3n^2 + 5n + 6} = \lim \frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3} \neq 0$$

با استفاده از راه‌حل سوم بیان شده در بالا داریم:

$$\forall c > 0 \;\; \exists n_0 \;\; s.t. \;\; \forall n \geq n_0 \;\; 0 \leq f(n) < cg(n)$$

داریم

$$2n^2 < c(3n^2 + 5n + 6)$$

دو طرف تقسیم به n^2 بنابراین

$$2 < c(3 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2})$$

(وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، کسر $\frac{6}{n^2} + \frac{5}{n}$ به صفر میل می‌کند). کافی است یک c پیدا کنیم که نقض شود، در نتیجه

$$c = \frac{1}{2}$$

۲.۱ نماد امگای کوچک (ω)

مشابه با o (اُی کوچک) قابل تعریف است.

تعریف ۱:

$$f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

تعریف ۲:

$$\forall c > 0 \;\; \exists n_0 \;\; s.t. \;\; \forall n \geq n_0 \;\; 0 \leq cg(n) < f(n)$$

۲ خواص نمادهای معرفی شده

فرض کنید سه تابع $h(n), g(n), f(n)$ داده شده است. برخی از مهمترین خواص بین نمادهای مجانبی در ادامه آورده شده است.

- خاصیت تعدی:

$$f(n) = \theta(g(n)) \quad \text{and} \quad g(n) = \theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \theta(h(n))$$
$$f(n) = O(g(n)) \quad \text{and} \quad g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$$
$$f(n) = \Omega(g(n)) \quad \text{and} \quad g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$$
$$f(n) = o(g(n)) \quad \text{and} \quad g(n) = o(h(n)) \Rightarrow f(n) = o(h(n))$$
$$f(n) = \omega(g(n)) \quad \text{and} \quad g(n) = \omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \omega(h(n))$$

- خاصیت بازتابی:

$$f(n) = \theta(f(n))$$
$$f(n) = O(f(n))$$
$$f(n) = \Omega(f(n))$$

- خاصیت تقارنی:

$$f(n) = \theta(g(n)) \Longleftrightarrow g(n) = \theta(f(n))$$

- خاصیت تقارن ترانهاده‌ای:

$$f(n) = O(g(n)) \Longleftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$
$$f(n) = o(g(n)) \Longleftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$$