قضیه: اگر رابطه بازگشتی به فرم زیر داشته باشیم:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \text{ where } b>1 \text{ and } a\geq 1$$

آنگاه:

- حالت 1: اگر $f(n)=O(n^{c-\varepsilon})$ باشد، جائیکه $\varepsilon>0$ آنگاه $T(n)=\theta(n^c)$.

- حالت 2: اگر $f(n)=\theta(n^c \log^k n)$ باشد، جائیکه k یک عدد صحیح مثبت باشد آنگاه $T(n)=\theta(n^c \log^{k+1} n)$.

- حالت 3: اگر $f(n)=\Omega(n^{c+\varepsilon})$ باشد جائیکه $\varepsilon>0$ است و همچنین $af(n/b)\leq hf(n)$ باشد برای یک $h<1$ و هر n به اندازه کافی بزرگ، آنگاه $T(n)=\theta(f(n))$.

در هر سه حالت ذکر شده در بالا $c=\log_b^a$ می باشد (با توجه به روش های قبلی ذکر شده برای حل روابط بازگشتی، علت این مقدار برای c واضح است).

نکته 1: برای مشخص کردن حالت های 1، 2 و 3، به نحوی بحث روی n^c است:

* یک ε کمتر،
* یک $\log_n^k$ ضربدر در n^c (تقریباً در مرتبه n^c)
* یک ε بیشتر

سؤال: آیا حالت های بیان شده در قضیه بالا، همه توابع $f(n)$ صعودی را پوشش می دهد؟

پاسخ منفی است، در ادامه با ذکر مثال هایی به این موضوع می پردازیم.

مثال 1:

$$T(n) = 4T(n/2) + \underbrace{n^2}_{f(n)} \quad , a=4, b=2, \underbrace{c=2}_{\log_b a}$$

case1: $n^2 \leq n^{2-\varepsilon}$ ✗

case2: $n^2 = \Theta(n^2)$, $k=0$ ✓ $\rightarrow T(n) = \Theta(n^2 \log n)$

case3: $n^2 \geq n^{2+\varepsilon}$ ✗

مثال 2:

$$T(n) = 4T(n/2) + \underbrace{n^3}_{f(n)} \quad , a=4, b=2, \underbrace{c=2}_{\log_b a}$$

case1: $n^3 \leq n^{2-\varepsilon}$ ✗

case2: $n^3 = \Theta(n^2 \log^k n)$ ✗

case3: $n^3 \geq n^{2+\varepsilon}$ and $\underbrace{a f(n/b) \leq h f(n)}$

$$4 * \frac{n^3}{8} \leq h . n^3$$

$$h = \frac{2}{3} \quad \frac{n^3}{2} \leq h . n^3$$

$T(n) = \Theta(n^3)$ ← درنتیجه داریم

مثال 3:

$$T(n) = 4T(n/2) + \underbrace{n\sqrt{n}}_{f(n) = n^{\frac{3}{2}}} \quad a=4, b=2, c=2$$

case 1: $n^{\frac{3}{2}} \leq n^{2-\varepsilon}$ ✓ $\rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

case 2: $n^{\frac{3}{2}} = \Theta(n^2 \log^k n)$ ✗

case 3: $n^{\frac{3}{2}} \geq n^{2+\varepsilon}$ ✗

مثال ۴:

$$T(n)=2T(n/2)+\underbrace{n\log n}_{f(n)} \qquad a=2,\ b=2,\ c=1$$

case 1: $n\log n \leqslant n^{1-\varepsilon}$ $\times$

case 2: $n\log n = \Theta(n\log n),\ k=1 \longrightarrow T(n)=\Theta(n\log^2 n)$

case 3: $n\log n \geqslant n^{1+\varepsilon}$ and $\underbrace{af(n/b)\leqslant h f(n)}$

$$2*\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}\leqslant h\, n\log n$$

$$(*)\qquad n\log n-n\leqslant h\, n\log n$$

برای $h<1$ رابطه $(*)$ برقرار نیست.

مثال ۵:

$$T(n)=2T(n/2)+\underbrace{n\log(\log n)}_{f(n)} \qquad a=2,\ b=2,\ c=1$$

case 1: $n\log(\log n)\leqslant n^{1-\varepsilon}$ $\times$

case 2: $n\log(\log n)=\Theta(n\log^k n)$ $\times$

case 3: $\underbrace{n\log(\log n)\geqslant n^{1+\varepsilon}}_{\text{بررسی این قسمت}}$ and $af(n/b)\leqslant h f(n)$

از دو طرف log بگیریم: $\log n+\log(\log(\log n))\geqslant(1+\varepsilon)\log n$

$\cancel{\log n}\ \log(\log(\log(n)))\ \not\geqslant\ \varepsilon\log n$

پس شرایط case 3 نیز برقرار نیست.

اثبات قضیه اصلی:

حالت ۱:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \quad a \geq 1, b > 1, c = \log_b a$$

if $f(n) = O(n^{c-\varepsilon})$ then $T(n) = \Theta(n^c)$.

طبق رابطه‌ای که برای $T(n)$ از روش های جایگذاری و درخت بازگشت بدست آوردیم، داریم:

$$T(n) = \underbrace{n^{\log_b a} * T(1)}_{T(1) * n^c = \Theta(n^c)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)}_{A^*}$$

طبق $f(n) = O(n^{c-\varepsilon})$ داریم:

$$A^* \leq \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i . h . \left(\frac{n}{b^i}\right)^{c-\varepsilon}$$

$$= h . n^{c-\varepsilon} . \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} \left(\frac{a}{b^{c-\varepsilon}}\right)^i$$

$$= h . n^{c-\varepsilon} . \left(\frac{\left(\frac{a}{b^{c-\varepsilon}}\right)^{\log_b n} - 1}{\frac{a}{b^{c-\varepsilon}} - 1} \right)$$

$$\left(\frac{a}{b^{c-\varepsilon}}\right)^{\log_b n} = n^{\log_b \frac{a}{b^{c-\varepsilon}}} = n^{\log_b a - (c-\varepsilon)} = n^{c-c+\varepsilon} = n^{\varepsilon}$$

در نتیجه داریم:

$$A^* \leq h . n^{c-\varepsilon} . n^{\varepsilon} = h . n^c = \Theta(n^c)$$

و در نهایت داریم

$$T(n) = \Theta(n^c)$$

$T(n)=aT(n/b)+f(n),\quad a\geq 1, b>1, c=\log_b^a$ حالت ۲:

if $f(n)=\theta(n^c \log^k n)$ then $T(n)=\theta(n^c \log^{k+1} n)$.

طبق رابطه بدست آمده برای $T(n)$ با استفاده از درخت بازگشت داریم:

$$T(n)=\underbrace{n^c T(1)}_{\theta(n^c)}+\underbrace{\sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)}_{A^*}$$

طبق $f(n)=\theta(n^c \log^k n)$ ، داریم:

$$A^* \leq \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i h.\left(\frac{n}{b^i}\right)^c \log^k\left(\frac{n}{b^i}\right)$$

از آنجا که می دانیم $\log^k\left(\frac{n}{b^i}\right) \leq \log^k n$ ، داریم:

$$A^* \leq \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} a^i.h.\left(\frac{n}{b^i}\right)^c \log^k n$$

$$= hn^c \log^k n * \sum_{i=0}^{(\log_b n)-1} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i$$

از آنجا که $c=\log_b a$ ، برای b^c داریم $b^{\log_b a}=a$ و در نهایت عبارت بالا برابر است

$$A^* \leq hn^c \log^k n . \log n=\theta(n^c \log^{k+1} n)$$

بنابراین داریم:

$$T(n)=\theta(n^c)+\theta(n^c \log^{k+1} n)$$

$$=\theta(n^c \log^{k+1} n)$$