حل روابط بازگشتی:

حل یک رابطه بازگشتی بدین معناست که به جای نوشتن جملات قبلی یک مقدار مشخص برای آن تابع برحسب پارامتر ورودی اش بدست آوریم. مثال:

تابع برحسب

رابطه بازگشتی

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2$$
$$T(2) = 1$$

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$ رابطه بازگشتی حل شده

نکته: یک روش کلی برای حل تمام توابع بازگشتی وجود ندارد. متناسب با فرم تابع بازگشتی راه حل های ارائه شده که برخی از آنها عبارتند از:

- روش تلسکوپی،
- روش معادله مشخصه،
- روش تغییر متغیر،
- روش حدس و استقرا،
- روش جایگذاری،
- روش درخت بازگشت،

* ما در این درس سه روش:

- حدس و استقرا،
- جایگذاری،
- درخت بازگشت،

و یک قضیه اساسی را مطرح کنیم

Master theorem

روش حدس و استقرا:

* یادآوری استقرای قوی: گام دوم برای اثبات حکم استقرا به ازای n، لازم است که حکم استقرا را به ازای هر عدد صحیح کوچکتر از n و بزرگتر یا مساوی m (که m پایه استقرا است) صحیح فرض کنیم.

!

اثبات استقرای قوی: فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی باشد. برای اثبات صحت حکم برای تمام مقادیر طبیعی n، یک اثبات استقرای قوی صحت گزاره‌های زیر را تایید می‌کند:

* پایه استقرا: $P(m)$ درست است (که m نمونه کوچک ماست)

* گذار استقرا: برای هر عدد طبیعی $k \geq m$، اگر $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k+1)$ نیز درست است.

مثال برای روش حدس و استقرا: تابع بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$
$$T(2) = 1$$

حدس ما می‌تواند یک کران بالا و یک کران پایین برای رابطه بازگشتی فوق باشد

حدس ۱: پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$:

پایه

$\forall n \geq 2 \quad T(n) \leq 4n$ ← ① حدس

پایه استقرا: $T(2) = 1 \leq 4*2 = 8$

گام استقرا: $\forall k<n \quad T(k) \leq 4k$ ← ② بررسی و طی کردن گام‌های استقرا

$k = n \qquad T(n) \overset{?}{\leq} 4n$

$\hookrightarrow T(n) = 2T(n/2) + n \leq \cancel{2} * 4 * \frac{n}{\cancel{2}} + n = 5n \not\leq 4n$

پس حدس اشتباه است.

حدس ۲: پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$:

① حدس ←

$\forall n \geq 2 \quad T(n) \leq 5n$

پایه استقرا $T(2) = 1 \leq 5*2 = 10$

گام استقرا $\forall\ k<n \quad T(k) \leq 5k$

② بررسی و طی کردن گام های استقرا ←

$k = n \quad T(n) \overset{?}{\leq} 5n$

$\hookrightarrow T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \leq 2*5*\frac{n}{\cancel{2}} + n = 6n \nleq 5n$

پس حدس اشتباه است.

جمع بندی از حدس ۱ و ۲: $T(n)$ خطی نیست و یک تابع غیر خطی است. (در حدس ۱ و ۲ می توانستیم به جای عدد 4 و 5، عدد c را بگذاریم و به طور کلی نتیجه گیری کنیم که خطی نیست).

① حدس ←

$\forall n \geq 2 \quad T(n) \leq cn$

② بررسی و طی کردن گام های استقرا ←

پایه استقرا: $T(2) = 1 \leq 2c$

گام استقرا: $\forall\ k<n \quad T(k) \leq ck$

$k = n \quad T(n) \overset{?}{\leq} cn$

$\hookrightarrow T(n) = 2T(n/2) + n \leq 2*c*\frac{n}{\cancel{2}} + n = (c+1)n \nleq cn$

پس حدس اشتباه است. ← نکته: اگر حدس درست بود باید c را به نحوی پیدا می کردیم که هم پایه و هم گام استقرا، رابطه های نوشته شده برایشان صحیح باشد.

حدس ۳: پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$:

$\forall n \geq 2 \quad T(n) \leq cn^2$

① حدس ←

پایه استقرا: $T(2) = 1 \leq 4c$

② بررسی و چک کردن گام های استقرا ←

گام استقرا: $\forall k < n \quad T(k) \leq ck^2$

$k = n \quad T(n) \overset{?}{\leq} cn^2$

$$T(n) = 2T(n/2) + n \leq 2 * c\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n = \frac{cn^2}{2} + n$$

می خواهیم نشان دهیم که

$$\frac{cn^2}{2} + n \leq cn^2$$

اگر $c=2$ فرض کنیم آنگاه داریم:

$$n^2 + n \leq 2n^2$$

و همچنین پایه هم برقرار است چون که

$T(2) = 1 \leq 8$

پس نشان دادیم که $T(n) \leq cn^2$ است (برای $c=2$).

نکته: برای پیدا کردن حدس خوب (پیدا کردن کوچکترین حد بالا)، تغییر ثابت c مطلوب نیست
و در معرفی نمادهای مجانبی علت را متوجه شدیم. پس بهتر است برای حدس خوب
روی n (اندازه ورودی) کار کنیم.

نکته تکمیلی: در حدس های قبلی دیدیم که حدس cn اشتباه بود و حدس cn^2 درست
بود اما ممکن است بهینه نباشد. در حدس بعدی سعی داریم یک پیچیدگی
زمانی بین این دو را بررسی کنیم.

$$cn \leqslant \underbrace{cn\log n}_{\text{حدس ۴}} \leqslant cn^2$$

حدس ۴: پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$:

$\forall n \geqslant 2 \quad T(n) \leqslant cn\log n$ ← ① حدس

پایه استقرا: $T(2) = 1 \leqslant 2c$ ← ② بررسی و چک کردن گام های استقرا

گام استقرا: $\forall k < n \quad T(k) \leqslant ck\log k$

$k = n \quad \underline{T(n)} \overset{?}{\leqslant} cn\log n$

$$T(n) = 2T(n/2) + n = 2 * c * \frac{n}{2}\left(\log \frac{n}{2}\right) + n$$

$$= cn\log n - cn + n$$

می خواهیم نشان دهیم: $cn\log n - cn + n \leqslant cn\log n$

اگر فرض کنیم $c=1$ است آنگاه داریم:

$$n\log n \leqslant n\log n$$

و همچنین پایه نیز برقرار است چرا که $T(2)=1\leqslant 2$.

پس نشان دادیم که $T(n)\leqslant cn\log n$ است (برای $c=1$).

نکته: تا اینجا حدس‌مان برای پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$ بود، در ادامه می‌خواهیم یک کران پایین برای آن حدس بزنیم.

حدس ۵: پیدا کردن یک کران پایین برای $T(n)$:

$\forall n\geqslant 2 \quad T(n)\geqslant cn\log n$ ← ① حدس

② بررسی و حل کردن گام‌های استقرا ←

پایه استقرا: $T(2)=1\geqslant 2c$

گام استقرا: $\forall k<n \quad T(k)\geqslant ck\log k$

$k=n \quad T(n)\overset{?}{\geqslant} cn\log n$

$$\underline{T(n)} \rightarrow T(n)=2T(n/2)+n=2*c*\frac{n}{2}(\log \frac{n}{2})+n$$

$$=cn\log n-cn+n$$

می‌خواهیم نشان دهیم:

$$cn\log n-cn+n\geqslant cn\log n$$

اگر فرض کنیم $c=\frac{1}{2}$ است آنگاه داریم:

$$\frac{1}{2} n\log n + \frac{1}{2} n = \frac{1}{2}(n\log n + n) \geq \frac{1}{2} n\log n$$

و همچنین پایه نیز برقرار است چرا که $T(2) = 1 \geq 1$

پس نشان دادیم که $T(n) \geq cn\log n$ است (برای $c=\frac{1}{2}$).

جمع بندی از حدس ۴ و ۵: ما در این حدس نشان دادیم که

حدس ۴: $T(n) \leq cn\log n \rightarrow T(n) = O(n\log n)$

حدس ۵: $T(n) \geq cn\log n \rightarrow T(n) = \Omega(n\log n)$

و از آنجایی که:

$$f(n) = O(g(n)) \text{ and } f(n) = \Omega(g(n)) \iff f(n) = \Theta(g(n))$$

داریم که:

$$T(n) = \Theta(n\log n).$$

نکته: همانطوری که دیدیم لزومی ندارد که c ای که در حدس ۴ و حدس ۵ استفاده کردیم یکسان باشد ← طبق تعریفی که برای Ω و O نیز در جلسات قبلی ارائه کردیم این امر واضح است.