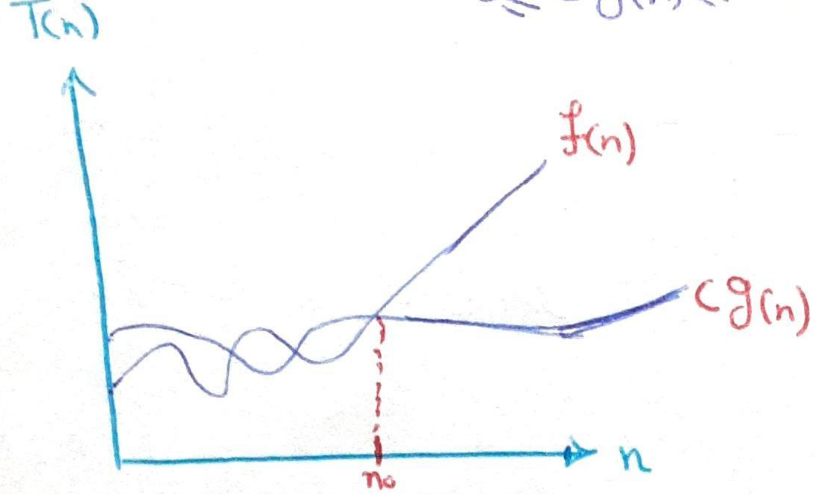
تعریف ۲ :

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) :: \exists n_0, c > 0 \ \text{s.t} \ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq c\,g(n) \leq f(n) \}$$



$$f(n) = \Omega(g(n))$$

مثال :

$$f(n) = 10^9 n^2$$

$$g(n) = n^2$$

نشان دهید که $f(n) = \Omega(g(n))$ و

$g(n) = \Omega(f(n))$.

نماد Θ : بیانگر آن است که هم نماد O را داشته باشیم و هم نماد Ω را داشته باشیم.

مشهود برای عملگرهای مقایسه‌ای روی اعداد ← =

$$a = b \iff a \leq b \ \text{and} \ b \leq a$$

بنابراین به تعریف ۱، فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع باشند، می‌گوییم

$f(n) = \Theta(g(n))$ است اگر ~~[illegible]~~ :

$$f(n) = O(g(n)) \quad \text{and} \quad f(n) = \Omega(g(n))$$

دقیق‌تر رابطه دوطرفه است :

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \ \text{and} \ f(n) = \Omega(g(n))$$

تعریف ۲: فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع باشند. می‌گوییم رشد تابع $f(n)$ محدود (Bound) می‌شود به رشد تابع $g(n)$ و به صورت $f(n)=\Theta(g(n))$ نشان می‌دهیم، اگر

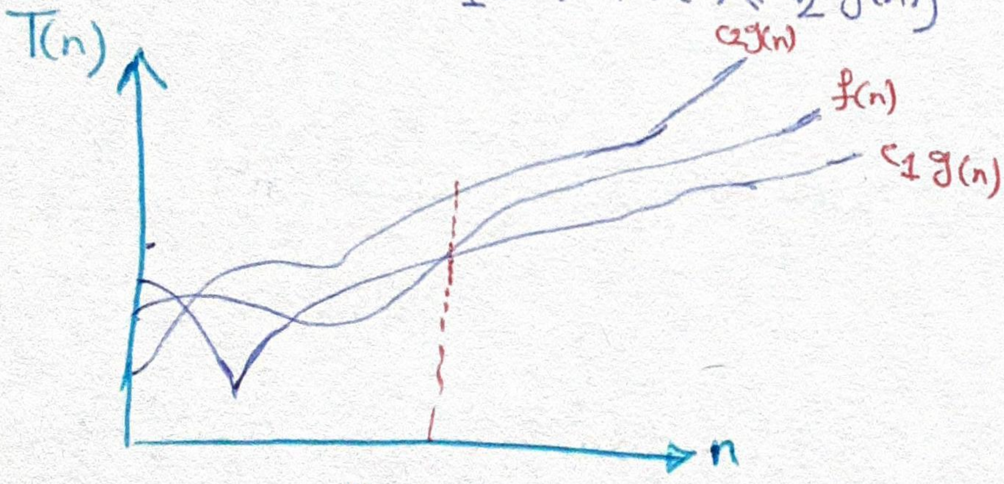
$$\exists c_1, c_2, n_0 > 0 \quad s.t. \quad \forall n \geq n_0$$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

تعریف ۳:

$$\Theta(g(n)) = \{ f(n) : \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \quad s.t. \quad \forall n \geq n_0$$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$$



$f(n) = \Theta(g(n))$

مثال ۱: همان مثال قبلی:

$f(n) = 10^9 n^2$ $\quad f(n) = O(g(n))$

$g(n) = n^2$

مثال ۲: مهم

فرم کلی ←

$f(n) = a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0$

$g(n) = n^k$

و $|a_k| > 0$ است.

ادعا: $f(n) = \Theta(n^k)$

اثبات د

$$f(n)=\Theta(g(n))$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{f(n)=O(g(n))}_{\text{Part1}} \quad \text{and} \quad \underbrace{f(n)=\Omega(g(n))}_{\text{Part2}}$$

* Part1. $f(n)=O(g(n))$ $\quad \begin{cases} f(n)=a_k n^k+\dots+a_1 n+a_0 \\ g(n)=n^k \end{cases}$

$\exists\, c, n_0>0$ s.t. $\forall n\geq n_0 \quad 0\leq a_k n^k+\dots+a_1 n+a_0\leq c n^k$

$$c=\sum_{i=0}^{k}|a_i|$$

$$n_0=1$$

* Part2. $f(n)=\Omega(g(n))$ $\quad \begin{cases} f(n)=a_k n^k+\dots+a_1 n+a_0 \\ g(n)=n^k \end{cases}$

$\exists\, c, n_0>0$ s.t. $\forall n\geq n_0 \quad 0\leq c n^k\leq a_k n^k+\dots+a_1 n+a_0$

← هر طرف را تقسیم بر n^k می‌کنیم

$$0\leq c\leq a_k+\underbrace{\frac{a_{k-1}}{n}+\dots+\frac{a_1}{n^{k-1}}+\frac{a_0}{n^k}}$$

طبق تعریف $c>0$

وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند
عبارت فوق به صفر میل می‌کند

$0<c<a_k+\dots \xrightarrow{\text{پس}}$ a_k مثبت است.

$$c=\frac{1}{100}a_k\ ,\quad n_0=\left(\sum_{i=0}^{k-1}|a_i|\right)\times 1000$$

← یک حدس برای جواب

$\triangleq$

نماد اُی کوچک (Little-o) : می خواهیم نشان دهیم رشد یک تابع کمتر از یک تابع دیگر است، در واقع می خواهیم تساوی را از نماد O (اُی بزرگ) حذف کنیم.

مثال ← $\boxed{n^2 < n^3 < 2^n}$

$f(n) = o(g(n))$

راه حل ۱:

$\exists c, n_0 > 0 \quad s.t. \quad \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) < c\,g(n)$

* آیا راه حل ۱ انتظار ما از مفهوم بالا را برآورده می کند؟

مثال: $f(n) = n^2 \qquad g(n) = 5n^2$

$f(n) \overset{?}{=} o(g(n))$

$\exists c, n_0 > 0 \quad s.t. \quad \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) < c\,g(n)$

$0 \leq n^2 < c(5n^2)$

$\begin{cases} c = 1 \\ n_0 = 1 \end{cases}$ ← با راه حل ۱ موفق به کسب هدفی که به دنبال می گردیم نشدیم.

راه حل ۲: استفاده از حد (limit) ریاضی:

فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع باشند، گوییم رشد $f(n)$ کمتر از $g(n)$ است و می نویسیم $f(n)=o(g(n))$، اگر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

نکته ← برای رشد یکسان، حد صفر نمی شود.

$f(n) = 2n^2$

$g(n) = 3n^2 + 5n + 6$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3n^2+5n+6} = \frac{2}{3} \neq 0$$

راه حل ۳: فرض کنید f(n) و g(n) دو تابع باشند، گوئیم رشد f(n) کمتر از g(n) است و
می‌نویسیم $f(n)=o(g(n))$ ، اگر

$$\forall c>0 \quad \exists n_0 \quad s.t. \quad \forall n\geq n_0 \qquad 0\leq f(n)<c\,g(n)$$

مثال:

$$f(n)=2n^2$$
$$g(n)=3n^2+5n+6$$

نشان دهید که $\underline{f(n)=O(g(n))}$, $\underline{f(n)\neq o(g(n))}$

قبلاً نشان داده‌ایم

با راه حل ۱: $f(n)\neq o(g(n))$

$$\lim \frac{2n^2}{3n^2+5n+6}=\lim\frac{2n^2}{3n^2}=\frac{2}{3}\neq 0$$

با راه حل ۳: $f(n)\neq o(g(n))$

$$\nexists c>0 \quad \exists n_0 \quad s.t. \quad \forall n\geq n_0 \qquad \underline{0\leq f(n)<c\,g(n)}$$

$$2n^2<c(3n^2+5n+6)$$

دو طرف تقسیم بر n^2 ← $2<c(3+\underbrace{\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}_{}) $ کافی است یک c پیدا کنیم که نقض شود → $c=\frac{1}{21}$

وقتی n به سمت بی‌نهایت می‌رود ← ۰ (صفر)

نماد امگا کوچک ω (little-ω): مشابه o (اُ کوچک) قابل تعریف است. $f(n)=\omega(g(n))$

تعریف ۱:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

تعریف ۲:

$$\forall c>0 \quad \exists n_0 \quad s.t. \quad \forall n \geq n_0$$

$$0 \leq c\,g(n) < f(n)$$

خواص نمادهای معرفی شده:

خاصیت تعدی (Transitivity):

① $f(n)=\Theta(g(n))$ and $g(n)=\Theta(h(n)) \rightarrow f(n)=\Theta(h(n))$

② $f(n)=O(g(n))$ and $g(n)=O(h(n)) \rightarrow f(n)=O(h(n))$

③ $f(n)=\Omega(g(n))$ and $g(n)=\Omega(h(n)) \rightarrow f(n)=\Omega(h(n))$

④ $f(n)=o(g(n))$ and $g(n)=o(h(n)) \rightarrow f(n)=o(h(n))$

⑤ $f(n)=\omega(g(n))$ and $g(n)=\omega(h(n)) \rightarrow f(n)=\omega(h(n))$

⑥ $f(n)=\omega(g(n))$ and

خاصیت بازتابی:

Reflexivity

① $f(n)=\Theta(f(n))$

② $f(n)=O(f(n))$

③ $f(n)=\Omega(g(n))$

خاصیت تقارن:

① $f(n)=\Theta(g(n)) \leftrightarrow g(n)=\Theta(f(n))$

Symmetry

خصیصهٔ تقارن ترانهاده‌ای

Transpose symmetry

① $f(n) = O(g(n)) \longleftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

② $f(n) = o(g(n)) \longleftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$