دانشکده علوم ریاضی و آمار

مدرس: دکتر مجتبی رفیعی نیمسال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

مبانی کامپیوتر و برنامه‌سازی

جلسه ۱۵

نگارنده: محمدمهدی جعفری

۱۵ آبان ۱۴۰۰

فهرست مطالب

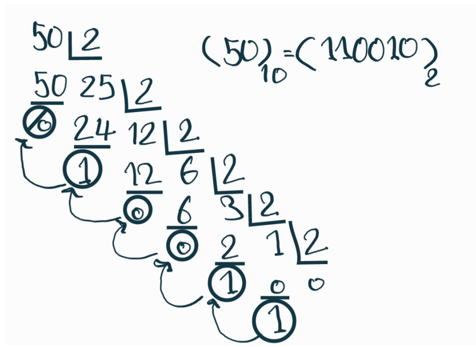
۱ نمایش اعداد اعشاری در قالب استاندارد IEEE 754

در ادامه به کمک یک مثال با نحوه تبدیل آشنا می‌شویم. عدد اعشاری 50.578125 را در قالب استاندارد IEEE 754 بازنویسی کنید.

$\overbrace{s}^{1bit}(sign)$	$\overbrace{e}^{8bit}(exponent)$	$\overbrace{m}^{23bit}(mantissa)$

برای این تبدیل، می‌بایست گام‌های زیر را به ترتیب دنبال کرد:

- **گام یک:** چون عدد + است پس $s = 0$،
- **گام دو:** تبدیل عدد اعشاری به عدد دودویی:



$$
\begin{gathered}
0.578125 \times 2 = 1.15625 \\
0.15625 \times 2 = 0.3125 \\
0.3125 \times 2 = 0.625 \\
0.625 \times 2 = 1.25 \\
0.25 \times 2 = 0.5 \\
0.5 \times 2 = 1.0 \\
(0.578125)_{10} = (0.100101)_2
\end{gathered}
$$

در نتیجه، حاصل نهایی به صورت زیر است:

$$(50.578125)_{10} = (110010.100101)_2$$

- **گام سه:** نرمال‌سازی:

$$[110010.100101]_2 \quad \xrightarrow[normalised]{} \quad \left[1 \cdot \overbrace{10010100101}^{mantissa}\right] \times 2^5$$

- **گام چهار:** محاسبه مقدار e:

$$
\begin{aligned}
e' = 5 \rightarrow e = 5 + 127 = 132 \\
(e)_2 = (10000100)_2
\end{aligned}
$$

- **گام پنج:** تعیین مقدار m:

$$m = \left(\overbrace{100100100101}^{11bit}\overbrace{000000000000}^{12bit}\right)_2$$

در نهایت داریم:

$\overbrace{0}^{1bit}$	$\overbrace{10000100}^{8bit}$	$\overbrace{10010100101000000000000}^{23bit}$

تبدیل روال عکس، یعنی از استاندارد IEEE ۷۵۴ به مقدار ده دهی هم به صورت ساده از گام ۱ تا ۵ قابل محاسبه است وذکر آن خودداری شده است.

نکته

دقت اعشاری که استاندارد IEEE 754 برای حالت ۳۲ بیتی یا دقت ساده دارد، تقریبا ۶ رقم اعشار است.

چرا که مانتیس که برای قسمت کسری است، بزرگترین عددی را که می‌تواند نشان دهد عدد دو به توان بیست و سه است، بنابراین:

$$\log_{10}\left(2^{23}\right) \simeq \log_{10}\left(1000\right) = 2\log_{10}10^{3} = 2\times 3 = 6$$

اطلاعات تکمیلی

تعداد رقم های مورد نیاز برای نمایش یک عدد مثل N در مبنای b از طریق فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\log_b N$$

شهود این رابطه از تقسیم متوالی به b برای تبدیل یک عدد مبنای ده به مبنای b می‌باشد.

- محاسبه اولین رقم کم ارزش با محاسبه $\frac{N}{b}$،
- محاسبه دومین کم ارزش‌ترین رقم با محاسبه $\frac{N}{b^2}$،
- . . . .
- . . . .
- . . . .
- محاسبه k-امین کم ارزش‌ترین رقم با محاسبه $\frac{N}{b^k}$.

از انجاییکه با هر بار تقسیم یک رقم از عدد مورد نظر بدست می‌اید، تعداد ازقام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{N}{b^k} = 1 \Rightarrow N = b^k \overset{\log_b}{\overbrace{\Longrightarrow}} \log_b N = k\log_b b \Longrightarrow k = \log_b N$$

۱.۱ ماکزیمم و مینیمم عدد قابل نمایش

یادآوری-سری هندسی

$$Example: \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}, where \quad a \neq 1$$

صحیح $\quad (\overbrace{1}^{4}\overbrace{1}^{3}\overbrace{1}^{2}\overbrace{1}^{1}\overbrace{1}^{0})_2 \sum_{I=0}^{4} z^i = \frac{2^5-1}{2-1} = 32-1 = 30$

اعشاری $\quad (0.\overbrace{1}^{-1}\overbrace{1}^{-2}\overbrace{1}^{-3}\overbrace{1}^{-4}\overbrace{1}^{-5})_2 = (\sum_{i=0}^{5}(\frac{1}{2})^i) - 1 = (1 - \frac{1^5}{2})$

نزدیک‌ترین اعداد نرمالایز شده مثبت و منفی به صفر: وقتی مانتیس به طورکامل صفر است و e کمترین مقدار خودش را دارد.

$$\pm 1 \times 2^{-126} \simeq \pm 1.17549 \times 10^{-38}$$

دورترین اعداد نرمالایز شده مثبت و منفی از صفر: وقتی‌که مانتیس تمام ۱ باشد و e بزرگترین مقدار خود را داشته باشد.

$$\sum_{i=1}^{23}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\sum_{i=0}^{23}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right) - 1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{24} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{23}\right) - 1$$

$$\pm\left[\left(2 - 2^{-23}\right) - 1 + 1\right] \times 2^{127} \simeq, \pm 3.40282 \times 10^{38}$$

نتایج زیر از مقادیر محاسبه شده قبل، قابل استخراج است:

1,	بزرگ‌ترین عدد اعشاری قابل نمایش	$\longrightarrow$	3.40282	$\times$	10^{38}
2,	کوچک‌ترین عدد اعشاری قابل نمایش	$\longrightarrow$	-3.40282	$\times$	10^{38}
3,	کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت	$\longrightarrow$	1.17549	$\times$	10^{-38}
4,	بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی	$\longrightarrow$	-1.17549	$\times$	10^{-38}

۲.۱ نمایش حالت‌های خاص

اگر $e = 0$ باشد:

$m \neq 0 \longrightarrow$ نمایش کوچکترین عدد صحیح(بدون نرمالایز کردن).

$m = 0 \longrightarrow$ عدد صفر است.

اگر $e = 255$ باشد:

$m \neq 0 \longrightarrow$ حاصل یک عدد نیست و نامعتبر.

$m \neq 0 \longrightarrow \quad s = 0 \rightarrow$ نمایش $+\infty$, $\quad s = 1 \rightarrow$ نمایش $-\infty$