



دانشکده علوم ریاضی و آمار



نیمسال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

مدرس: دکتر مجتبی رفیعی

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها - طرح سوال جلسه ۳۴ تا ۳۸

زمان اشتراک‌گذاری: ۳۰ آذر ۱۴۰۰

مهلت تحول: ۷ دی ۱۴۰۰

- پاسخ‌ها باید در قالب یک سند PDF و با نام شماره دانشجویی (StudentNumber.pdf) در سامانه LMS بارگذاری شود. هر گونه فایل در قالب تصویر یا زیپ نادیده گرفته خواهد و هیچ نمره‌ای به آن تخصیص داده نخواهد شد.
- به پاسخ‌های مشابه نمره‌ای داده نمی‌شود. لذا بعد از همفکری با دوستان خود، لطفاً با جملات خودتان اقدام به نگارش تکلیف نمایید.
- تمرین‌هایی که به رایانامه درس ارسال می‌شوند مورد بررسی قرار نخواهد گرفت و در نتیجه نمره‌ای هم برای آن لحاظ نمی‌شود.
- حداکثر اندازه مجاز برای فایل ارسالی 3 MB می‌باشد.
- مهلت زمانی ارسال پاسخ‌نامه ساعت ۱۱:۵۵ روز مشخص شده در مستند تمرین است و این زمان قابل تمدید نخواهد بود.
- پاسخ هر سوال می‌بایست دقیق و متناسب با سوال باشد. لذا از ذکر مطالب مبهم، نامرتب و زاید خودداری کنید.
- حداکثر تعداد صفحات پاسخ می‌بایست ۱۰ صفحه باشد.
- در صورت استفاده از منابع خاصی برای پاسخ به سوال، نام منابع را ذکر کنید.
- پاسخ‌ها می‌توانند به طور کامل به زبان فارسی یا به طور کامل به زبان انگلیسی نوشته شوند، و لذا ترکیبی از هر دو مجاز نیست.
- در صورت نقض هر یک از موارد ذکر شده، نمره کسر خواهد شد.

سوال ۱

(۶ نمره) به سوالات زیر پاسخ کوتاه دهید.

- تفاوت بین درخت دودویی جستجو و درخت هرم کمینه چیست؟
- آیا می‌توانیم یک توالی مرتب شده صعودی از عناصر یک درخت هرم کمینه با n نود را در زمان $O(n)$ بدست آوریم؟ پاسخ خود را تحلیل کنید.
- آیا می‌توانیم یک توالی مرتب شده صعودی از عناصر یک درخت دودویی جستجو با n نود را در زمان $O(n)$ بدست آوریم؟ پاسخ خود را تحلیل کنید.

سوال ۲

(۴ نمره) برای مجموعه $\{1, 4, 5, 10, 16, 17, 21\}$ از کلیدها، درخت‌های دودویی جستجو با ارتفاع ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ ترسیم کنید.

سوال ۳

(۵ نمره) فرض کنید یک درخت دودویی جستجو با کلیدهای ۱ تا ۱۰۰۰ به ما داده شده است. از ما خواسته شده است که در این درخت به دنبال کلید ۳۶۳ بگردیم. کدامیک از توالی‌های زیر را در مسیر جستجوی کلید ۳۶۳ بررسی می‌کنیم. برای رد یا قبول هر یک از مسیرها دلیل بیاورید.

الف): ۲، ۲۵۲، ۴۰۱، ۳۹۸، ۳۳۰، ۳۴۴، ۳۹۷، ۳۶۳.

ب): ۹۲۴، ۲۲۰، ۹۱۱، ۲۴۴، ۸۹۸، ۲۵۸، ۳۶۲، ۳۶۳.

پ): ۹۲۵، ۲۰۲، ۹۱۱، ۲۴۰، ۹۱۲، ۲۴۵، ۳۶۳.

ج): ۲، ۳۹۹، ۳۸۷، ۲۱۹، ۲۶۶، ۳۸۲، ۳۸۱، ۲۷۸، ۳۶۳.

د): ۹۳۵، ۲۷۸، ۳۴۷، ۶۲۱، ۲۹۹، ۳۹۲، ۳۵۸، ۳۶۳.

◁ توالی اعداد در گزینه‌های بالا از چپ به راست در نظر گرفته شود.

سوال ۴

(۵ نمره) آلیس بر این باور است که یک خصیصه جالب از درخت‌های جستجوی دودویی یافته است. آلیس در شرح یافته به ظاهر جالب خود، چنین گفته است:
”فرض کنید به دنبال یافتن کلیدی چون k در درخت دودویی جستجو هستیم و نهایتاً جستجوی ما با رسیدن به یک گره برگ خاتمه می‌یابد. ما می‌توانیم سه مجموعه به شرح زیر تعریف کنیم:

- مجموعه A : شامل کلیه کلیدهای سمت چپ مسیر جستجو می‌باشد،

- مجموعه B : شامل کلیه کلیدهای سمت راست مسیر جستجو می‌باشد،

- مجموعه C : شامل کلیه کلیدهای روی مسیر جستجو می‌باشد.

آلیس برای تنظیمات فوق ادعا می‌کند که برای هر $a \in A$ ، $b \in B$ ، $c \in C$ رابطه $a \leq b \leq c$ برقرار است.

یک مثال نقض (تا حد ممکن درخت دودویی جستجو با کمترین نود) برای ادعای او ارائه دهید.

سوال ۵

(۵ نمره) آیا عملیات حذف در درخت دودویی جستجو جایزا پذیر است. پاسخ خود را توجیه کنید. در صورت جواب مثبت، اثبات مربوط به آن را ارائه کنید و در غیر اینصورت با یک مثال نقض پاسخ خود را کامل کنید.
◁ گوییم عملیات حذف در درخت دودویی جستجو جایزا پذیر است، اگر گره x با کلید k_x و سپس گره y با کلید k_y را از درخت حذف کنیم، با ترتیب حذف گره y و سپس x تفاوتی نداشته و درخت دودویی جستجو یکسانی حاصل شود.

سوال ۶

(۵ نمره) یک پیاده‌سازی مناسب برای درخت Max-Heap استفاده از آرایه است. آیا آرایه‌ای با مقادیر [۲۳, ۱۷, ۱۴, ۶, ۱۳, ۱۰, ۱, ۵, ۷, ۱۲] پیاده‌سازی صحیح از یک درخت Max-Heap را نشان می‌دهد، پاسخ خود را تحلیل کنید.
◁ برای جزییات مربوط به پیاده‌سازی یک Max-Heap با استفاده از آرایه به جزوه جلسه ۳۸ مراجعه کنید.

سوال ۷

(۵ نمره) درخت Max-Heap زیر را که به صورت یک آرایه پیاده‌سازی شده است را در نظر بگیرید:

$$MH = [۱۵, ۱۳, ۹, ۵, ۱۲, ۸, ۷, ۴, ۰, ۶, ۲, ۱].$$

ابتدا درخت Max-Heap را به صورت مصور ترسیم کنید و سپس گام‌های مربوط به الگوریتم Delete-Max را بر روی درخت اعمال کنید.
◁ برای جزییات مربوط به الگوریتم Delete-Max با استفاده از آرایه به جزوه جلسه ۳۷ و ۳۸ مراجعه کنید.
◁ هر حذف یا جابجایی در فرایند حذف را در یک درخت مجزا ترسیم نمایید.

سوال ۸

(۵ نمره) ایده مربوط به حل هر یک از سوالات را به اختصار بنویسید.

- چگونه می‌توان یک صف (با سیاست اولین ورودی - اولین خروجی) را با استفاده از یک درخت Max-Heap پیاده‌سازی کرد.
 - چگونه می‌توان یک پشته (با سیاست آخرین ورودی - اولین خروجی) را با استفاده از یک درخت Max-Heap پیاده‌سازی کرد.
-