

نشان دهید  $\log n! = \Theta(n \log n)$

$$\log n! = \Theta(n \log n) \iff \log n! = O(n \log n) \text{ and } \log n! = \Omega(n \log n)$$

$$\log n! = O(n \log n) \quad \leftarrow \text{ساده است}$$

$$\log n! = \Omega(n \log n) \rightarrow \exists n_0, c \text{ s.t. } \forall n \geq n_0$$

تقریب استرلینگ  $\rightarrow n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n}$ , where  $\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n}$   $c n \log n \leq \log n! \quad (*)$

$$\log n! = \underbrace{\frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log n}_{> 0 \text{ and constant}} + n \log n - n \log e + \alpha_n \log e$$

$$= c + \frac{1}{2} \log n + n \log n - n \log e = O(n \log n)$$

$$\exists n'_0, d \text{ s.t. } \forall n \geq n'_0 \quad A \leq d n \log n$$

per  $d, n_0$

~~per~~  $(*) \rightarrow c n \log n \leq d n \log n$   
 $\downarrow$   
 $d = c + 1$   
 $n'_0 = n_0$



مرتب‌سازی حبابی (Bubble-Sort)

در ادامه الگوریتم مرتب‌ساز حبابی با یک مثال تشریح می‌شود.

آرایه 4: 4, 2, 7, 5, 6, 1

مرحله 1: 4, 2, 7, 5, 6, 1

4, 2, 7, 5, 1, 6

4, 2, 7, 1, 5, 6

4, 2, 1, 7, 5, 6

4, 2, 2, 7, 5, 6

1, 4, 2, 7, 5, 6

عناصر کمینه در آرایه پیدا و در اولین خانه آرایه قرار گرفت

مرحله 2: 1, 4, 2, 7, 5, 6

1, 4, 2, 7, 5, 6

1, 4, 2, 5, 7, 6

1, 4, 2, 5, 7, 6

2, 4, 5, 7, 6

در بین عناصر کمینه در آرایه پیدا و در دومین خانه آرایه قرار گرفت.

به عبارت دیگر، عناصر کمینه در آرایه  $A[2..n]$  پیدا و در اولین خانه آرایه  $A[2..n]$  قرار گرفت.

بقیه مراحل را هم به همین منوال پیش می‌رویم.



اهمیتان داریم که عنصر ابتدایی آرایه به طور صعودی مرتب شده است  
 مرحله ۵:  $1, 2, 4, 5, 6, 7 \rightarrow$  (کاهش)  
 $\boxed{1, 2, 4, 5}, 6, 7$

نکته: در پایان مرحله  $i$ -ام،  $i$  عنصر ابتدایی آرایه مرتب بوده و در جاها مشخص خود قرار گرفته اند.

الگوریتم مرتب ساز حبابی:

Bubble-Sort( $A[1..n]$ )

1. for  $i=1$  to  $n-1$  do

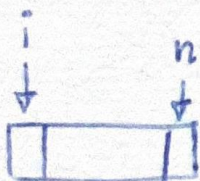
2. for  $j=n$  down to  $i+1$  do

3. if ( $A[j] < A[j-1]$ ) then

4. swap( $A[j], A[j-1]$ )

LI1

LI2



شهود اثبات درستی الگوریتم مرتب ساز حبابی:  
 حلقه درونی (LI2):

حقیقت ناوردایی: در مرحله  $i$ -ام عنصر  $i$ -مین از آرایه  $A[1..n]$  در خانه  $i$ -ام قرار می گیرد.

بررسی گام ها ناوردایی حلقه  
 گام آغاز،  
 گام نگهداری،  
 گام پایان.





حلقه بیرونی (LI1) :

حقیقت ناوردایی : در مرحله  $i$ -ام، آنقدر استیابی  $A$  یعنی

$A[1..i]$  مرتب می شود ~~مطمئن می شود~~ لازم به ذکر

این جبهه تاریک است و ذکر آن ممکن است سبب ابهام گردد در گام آغاز

است که این زیر کارایی، دقیقاً همانی است که در فروری ظاهر می شود به همین ترتیب

بررسی گام هار ناوردایی حلقه گام آغاز، گام نگهداری، گام پایان.

\* تحلیل کارایی الگوریتم مرتب سازی حبابی :

در حبابات قبل دیدیم که هزینه هر خط از ~~الگوریتم~~ از آنجا می آید که یک عدد ثابت است، تا کسری در تحلیل کارایی در حالت کلی ندارد. بنابراین هزینه هر خط از الگوریتم را  $O(1)$  در نظر می گیریم.

$$i=1 \rightarrow 3(n-1) \quad // j=n \dots 2 \rightarrow n-2+1=n-1$$

$$i=2 \rightarrow 3(n-2) \quad // j=n \dots 3 \rightarrow n-3+1=n-2$$

$\vdots$

$$i=n-1 \rightarrow 3(1)$$

$$// j=n \dots n-1 \rightarrow n-n+1$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} 3(n-i) = \theta(n^2)$$