دانشکده علوم ریاضی و آمار

مدرس: **دکتر مجتبی رفیعی** نیمسال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

جلسه ۱۷: حل روابط بازگشتی

نگارنده: مریم نظری‌راد

۱۷ آبان ۱۴۰۰

فهرست مطالب

۱ حل روابط بازگشتی

حل یک رابطه بازگشتی بدین معناست که به جای نوشتن تابع برحسب جملات قبلی، یک مقدار مشخص برای آن تابع برحسب پارامتر ورودی آن به دست آوریم. با اینحال، یک روش کلی برای حل تمام توابع بازگشتی وجود ندارد و متناسب با فرم تابع بازگشتی تاکنون راه‌حل هایی ارائه شده است. برخی از این روش‌ها عبارتند از:

۱. روش تلسکوپی،

۲. روش معادله مشخصه،

۳. روش حدس و استقرا،

۴. روش جایگذاری،

۵. روش درخت بازگشت.

تمرکز ما در این درس، بر روی روش‌های زیر است:

- دس و استقرا،
- جایگذاری،
- درخت بازگشت،
- قضیه اساسی [1].

۱.۱ روش حدس و استقرا

یادآوری استقراء قوی: گاهی اوقات برای اثبات حکم استقرا به ازای n، لازم است که حکم استقرا را به ازای هر عدد صحیح کوچکتر از n و بزرگتر یا مساوی m (که m پایه استقراست) صحیح فرض کنیم. به چنین مفهومی استقرای قوی می‌گوییم که به طور دقیق تعریف آن در ادامه آورده شده است.

تعریف ۱ (استقرا قوی) *فرض کنید $p(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی باشد. برای اثبات صحت حکم برای مقادیر طبیعی n، یک اثبات استقراء قوی صحت گزاره‌های زیر را تایید می‌کند.*

1. *پایه استقراء: p(m) درست است.(که m نمونه کوچک ماست)*
2. *گام استقراء: به ازای هر عدد طبیعی $k \geq m$، اگر p(k) درست باشد آن‌گاه p(k+1) نیز درست است.*

مثال روش حدس و استقراء: تابع زیر را در نظر بگیرید

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, \quad T(2) = 1$$

حدس ما می‌تواند یک کران بالا یا یک کران پایین برای رابطه بازگشتی فوق باشد.

- **حدس ۱:** پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$:

  گام ۱: حدس:

  $$\forall\ n \geq 2 \quad T(n) \leq 4n$$

  گام ۲: بررسی و طی کردن گام‌های استقرا:

  پایه استقرا:

  $$n = 2 \longrightarrow T(2) = 1 \leq 4 \times 2 = 8$$

  گام استقرا: فرض می‌کنیم:

  $$\forall 2 < k < n \qquad T(k) \leq 4k$$

  باید بررسی کنیم اگر $k = n$ آنگاه $T(n) \leq 4n$؟

  می‌دانیم $\frac{n}{2} < n$ بنابراین طبق فرض استقراء داریم

  $$T(\frac{n}{2}) \leq (\frac{4n}{2})$$

  در نتیجه

  $$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \leq 2 \times 4 \times \frac{n}{2} + n = 5n \longrightarrow T(n) \leq 5n \leq 4n$$

  بنابراین حدس ۱ اشتباه است.

[1] Master theorem

- **حدس ۲:** پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$:

گام ۱: حدس:

$$\forall n \geq 2 \quad T(n) \leq 5n$$

گام ۲: بررسی و طی کردن گام‌های استقرا:

پایه استقرا:

$$n = 2 \longrightarrow T(2) = 1 \leq 5 \times 2 = 10$$

گام استقرا: فرض می‌کنیم

$$\forall 2 < k < n \quad T(k) \leq 5k$$

باید بررسی کنیم اگر $k = n$ آنگاه $T(n) \leq 5n$؟

می‌دانیم $\frac{n}{2} < n$ بنابراین طبق فرض استقرا داریم:

$$T(\frac{n}{2}) \leq (\frac{5n}{2})$$

در نتیجه

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \leq 2 \times 5 \times \frac{n}{2} + n = 6n \longrightarrow T(n) \leq 6n \leq 5n$$

بنابراین حدس ۲ اشتباه است.

جمع‌بندی

جمع بندی از حدس ۱ و ۲: $T(n)$ خطی نیست و یک تابع غیرخطی است. در حدس ۱و۲ می‌توانستیم به جای عدد۴ و ۵، عدد c بگذاریم و به طور کلی نتیجه‌گیری کنیم که خطی نیست.

- **حدس ۳:** پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$:

گام۱: حدس:

$$\forall n \geq 2 \quad T(n) \leq cn \quad c < 0$$

گام۲: بررسی و طی کردن گام‌های استقرا:

پایه استقرا:

$$n = 2 \longrightarrow T(2) = 1 \leq c \times 2 = 2c$$

گام استقرا: فرض می‌کنیم

$$\forall\ 2 < k < n \quad T(k) \leq ck$$

باید بررسی کنیم اگر $k = n$ آنگاه $T(n) \leq cn$ ؟

می‌دانیم $\frac{n}{2} < n$ بنابراین طبق فرض استقرا داریم

$$T(\frac{n}{2}) \leq (\frac{cn}{2})$$

در نتیجه

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \leq 2 \times c \times \frac{n}{2} + n = (c+1)n \longrightarrow T(n) \leq (c+1)n \leq cn$$

به ازای هر $c > 0$ که انتخاب این رابطه برقرار نیست. پس این حدس اشتباه است و تابع $\mathrm{T}(n)$ خطی نیست.

نکته

اگر حدس درست بود، باید c را به نحوی پیدا می‌کردیم که هم پایه و هم گام استقرا رابطه‌های نوشته شده برایشان صحیح باشند.

- **حدس ۴:** پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$:

گام۱: حدس:

$$\forall n \geq 2 \quad T(n) \leq cn^2 \quad c < 0$$

گام ۲: بررسی و طی کردن گام‌های استقرا:

پایه استقرا:

$$n = 2 \longrightarrow T(2) = 1 \leq c \times 2^2 = 4c$$

گام استقرا: فرض می‌کنیم

$$\forall 2 < k < n \quad T(k) \leq ck^2$$

باید بررسی کنیم اگر $k = n$ آنگاه $T(n) \leq cn^2$ ؟

می‌دانیم $\frac{n}{2} < n$ بنابراین طبق فرض استقرا داریم:

$$T(\frac{n}{2}) \leq c(\frac{n}{2})^2$$

در نتیجه

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \leq 2 \times c \times (\frac{n}{2})^2 + n = \frac{cn^2}{2} + n \longrightarrow T(n) \leq \frac{cn^2}{2} + n \leq cn^2$$

اگر فرض کنیم $c = 2$ باشد، آنگاه داریم $n^2 + n \leq 2n^2$، و همچنین برای پایه استقراء هم برقرار است چرا که $T(2) = 1 \leq 2 \times 2^2 = 8$. بنابراین نشان دادیم وقتی $c = 2$ باشد،

$$T(n) \leq cn^2 \longrightarrow T(n) = O(n^2)$$

نکته

برای پیدا کردن حدس خوب (پیدا کردن کوچکترین حد بالا)، تغییر ثابت c مطلوب نیست و در معرفی نمادهای مجانبی علت را متوجه شدیم. پس بهتر است برای حدس خوب روی n (اندازه ورودی) کار کنیم.

نکته

در حدهای قبل دیدیم که حدس cn اشتباه بود و حدس cn^2 درست بود اما ممکن است بهینه نباشد. در حدس بعدی سعی داریم یک پیچیدگی زمانی بین این دو را بررسی کنیم. می دانیم:

$$cn \leq cn \log n \leq cn^2$$

.

- **حدس ۵:** پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$:

گام ۱: حدس:

$$\forall n \geq 2 \quad T(n) \leq cn\log n \quad c < 0$$

گام ۲: بررسی و طی کردن گام‌های استقرا:

پایه استقرا:

$$n = 2 \longrightarrow T(2) = 1 \leq 2c\log 2 = 2c$$

گام استقرا: فرض می‌کنیم:

$$\forall 2 < k < n \quad T(k) \leq ck\log k$$

باید بررسی کنیم اگر $k = n$ آنگاه $T(n) \leq cn\log n$ ؟

می‌دانیم $\frac{n}{2} < n$، بنابراین طبق فرض استقرا داریم:

$$T(\frac{n}{2}) \leq c\frac{n}{2}\log(\frac{n}{2})$$

در نتیجه

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \leq 2 \times c \times \frac{n}{2} \times \log(\frac{n}{2}) + n = cn(\log n - \log 2) + n$$

$$T(n) \leq cn\log n - cn + n \leq cn\log n$$

اگر فرض کنیم $c = 1$ آنگاه داری

$$n\log n \leq n\log n$$

و همچنین برای پایه استقرا هم برقرار است چرا که

$$T(2) = 1 \leq 2\log 2 = 2$$

،

بنابراین نشان دادیم وقتی $c = 1$ باشد، آنگاه

$$T(n) \leq cn\log n \longrightarrow T(n) = O(n\log n)$$

تا این‌جا حدس‌مان برای پیدا کردن یک کران بالا برای $T(n)$ بود، در ادامه می‌خواهیم یک کران پایین از آن حدس بزنیم.

- **حدس ۶:** پیدا کردن یک کران پایین برای $T(n)$:

گام ۱: حدس:

$$\forall n \geq 2 \quad T(n) \geq cn\log n$$

گام ۲: بررسی و طی کردن گام‌های استقرا:

پایه استقرا:

$$n = 2 \longrightarrow T(2) = 1 \geq 2c\log 2 = 2c$$

گام استقرا: فرض می‌کنیم:

$$\forall 2 < k < n \quad T(k) \geq ck\log k$$

باید بررسی کنیم اگر $k = n$ باشد، آنگاه $T(n) \geq cn\log n$ ؟

می‌دانیم $n > \frac{n}{2}$ بنابراین طبق فرض استقرا داریم:

$$T(\frac{n}{2}) \geq c\frac{n}{2}\log(\frac{n}{2})$$

در نتیجه

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \geq 2 \times c \times \frac{n}{2} \times \log(\frac{n}{2}) + n = cn(\log n - \log 2) + n$$

$$T(n) \geq cn\log n - cn + n \geq cn\log n$$

اگر فرض کنیم $c = 1$ باشد، داریم:

$$n\log n \geq n\log n$$

با اینحال، پایه استقرا برقرار نیست و $T(2) = 1 \geq 2\log 2 = 2$.

اگر فرض کنیم $c = \frac{1}{2}$ باشد، داریم:

$$T(n) \geq \frac{1}{2}n\log n - \frac{1}{2}n + n = \frac{1}{2}(n\log n + n) \geq \frac{1}{2}n\log n$$

و همچنین پایه نیز بر قرار است چرا که $T(2) = 1 \geq 1$.

بنابراین نشان دادیم وقتی $c = \frac{1}{2}$ باشد،

$$T(n) \geq cn\log n \longrightarrow T(n) = \Omega(n\log n)$$

.

جمع‌بندی

جمع بندی از حدس ۵ و ۶: در این حدس‌ها نشان دادیم که

$T(n) \leq cn\log n \longrightarrow T(n) = O(n\log n)$

$T(n) \geq cn\log n \longrightarrow T(n) = \Omega(n\log n)$

و از آنجایی که

$f(n) = O(g(n)) \quad and \quad f(n) = \Omega(g(n)) \Longleftrightarrow f(n) = \theta(g(n))$

داریم:

$T(n) = \theta(n\log n)$.

نکته

همان‌طور که دیدیم لزومی ندارد که c ای که در حدس ۵ و حدس ۶ استفاده کردیم یکسان باشد.(طبق تعریف Ω و $\mathcal{O}$ واضح است).