



دانشکده علوم ریاضی و آمار



مدرس: دکتر مجتبی رفیعی

نیمسال اول ۱۴۰۰-۱۴۰۱

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها - طرح سوال جلسات ۷ تا ۲۰

مهلت تحول: ۱ آذر ۱۴۰۰

زمان اشتراک گذاری: ۱۵ آبان ۱۴۰۰

- پاسخ‌ها باید در قالب یک سند PDF و با نام شماره دانشجویی (StudentNumber.pdf) در سامانه LMS بارگذاری شود. هر گونه فایل در قالب تصویر یا زیپ نادیده گرفته خواهد و هیچ نمره‌ای به آن تخصیص داده نخواهد شد.
- به پاسخ‌های مشابه نمره‌ای داده نمی‌شود. لذا بعد از همفکری با دوستان خود، لطفاً با جملات خودتان اقدام به نگارش تکلیف نمایید.
- تمرین‌هایی که به رایانامه درس ارسال می‌شوند مورد بررسی قرار نخواهد گرفت و در نتیجه نمره‌ای هم برای آن لحاظ نمی‌شود.
- حداکثر اندازه مجاز برای فایل ارسالی 3 MB می‌باشد.
- مهلت زمانی ارسال پاسخ‌نامه ساعت ۱۱:۵۵ روز مشخص شده در مستند تمرین است و این زمان قابل تمدید نخواهد بود.
- پاسخ هر سوال می‌بایست دقیق و متناسب با سوال باشد. لذا از ذکر مطالب مبهم، نامرتبط و زاید خودداری کنید.
- حداکثر تعداد صفحات پاسخ می‌بایست ۱۰ صفحه باشد.
- در صورت استفاده از منابع خاصی برای پاسخ به سوال، نام منابع را ذکر کنید.
- پاسخ‌ها می‌توانند به طور کامل به زبان فارسی یا به طور کامل به زبان انگلیسی نوشته شوند، و لذا ترکیبی از هر دو مجاز نیست.
- در صورت نقض هر یک از موارد ذکر شده، نمره کسر خواهد شد.

سوال ۱

(۵ نمره) حل هر یک از رابطه‌های بازگشتی زیر را در قالب نمادهای مجانبی O و Ω تعیین کنید.
 < لازم به ذکر است که هدف پیدا کردن پایین‌ترین مرز برای نماد O و بالاترین مرز برای نماد Ω می‌باشد.
 < روش‌های مجاز: قضیه اصلی، حدس و استقرا، درخت بازگشت و جایگذاری.

- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^4$,
- $T(n) = T(\frac{7n}{10}) + n$,
- $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n^2$,
- $T(n) = 7T(\frac{n}{3}) + n^2$,
- $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$,

- $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$,
- $T(n) = T(n-2) + n^2$,

سوال ۲

(۵ نمره) شبه کد مربوط به نسخه بازگشتی و نسخه تکراری الگوریتم جستجوی دودویی را نوشته و سپس پیچیدگی زمانی آن را تحلیل و درستی آن را اثبات کنید.

◁ برای تحلیل پیچیدگی نسخه بازگشتی از فرم کلی پیچیدگی زمانی مربوط به رویکرد تقسیم و غلبه استفاده کرده و بخش‌های آن را به طور دقیق مشخص کرده و سپس اقدام به حل آن نمایید.
 ▷ برای اثبات درستی، به طور دقیق گام‌های ناوردایی حلقه (در صورت نیاز) و گام‌های استقرا را تعیین کنید.

سوال ۳

(۵ نمره) رابطه بازگشتی $T(n) = 4T(\frac{n}{4}) + n^2 \log n$ را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.

- آیا قضیه اصلی قابل اعمال روی رابطه بازگشتی فوق می‌باشد؟ حالت‌های مختلف را بررسی و هر یک از آنها را رد یا تایید نمایید.
- برای رابطه بازگشتی فوق، یک حد مجانبی بالا پیدا کنید.
- ◁ در قسمت اول، ذکر جواب بله/خیر کفایت نمی‌کند و می‌بایست حالت‌های مختلف را تحلیل کنید.
- ◁ در قسمت دوم، پایین‌ترین مرز مجانبی بالا مد نظر است.

سوال ۴

(۵ نمره) شرط زیر را که برای حالت سوم قضیه اصلی بیان گردید، در نظر بگیرید.

$$af(\frac{n}{b}) \leq f(n), \text{ for some constant, } c < 1 \quad (*)$$

تابع $f(n)$ ای را پیشنهاد دهید که شرایط زیر برای آن برقرار باشد:

- شرط فوق (*) برای آن برقرار نباشد،
- رابطه $f(n) = \Omega(n^{c+\epsilon})$ برای آن برقرار باشد.
- ◁ علیرغم فرضیاتی که به طور معمول برای تابع $f(n)$ ، مبنی بر صعودی بودن آن لحاظ شد، تابع پیشنهادی شما می‌تواند صعودی نباشد (با اینحال شرط متناوب نبودن تابع همواره می‌بایست برقرار باشد، چرا که در غیر اینصورت مفاهیم مجانبی برای آنها قابل تعریف نیست).

سوال ۵

(۵ نمره) با استفاده از درخت بازگشت، توابع بازگشتی زیر را حل کنید.
≤ بیان پایین‌ترین کران بالا (یا بالاترین کران پایین) کفایت می‌کند و نیاز به ارایه حل دقیق نیست.

- $T(n) = T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) + cn$, where $0 < \alpha < n$ and $c > 0$,
 - $T(n) = T(n - \alpha) + T(\alpha) + cn$, where $1 \leq \alpha$ and $c > 0$.
-

سوال ۶

(۵ نمره) فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع مثبت باشند، بررسی کنید که آیا روابط زیر برقرار است یا خیر؟

- $\max(f(n), g(n)) = \theta((f(n) + g(n)))$,
 - $f(n) + g(n) = \theta(\min(f(n), g(n)))$
 - $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \rightarrow g(n) = \mathcal{O}(f(n))$
 - $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) = \emptyset$,
 - $f(n) = \theta(f(\frac{n}{2}))$
 - $f(n) + o(f(n)) = \theta(f(n))$
 - $2^{n+1} = \mathcal{O}(2^n)$,
 - $2^{2n} = \mathcal{O}(2^n)$,
 - $(n + a)^b = \theta(n^b)$, for any real constants a and $b > 1$,
-

سوال ۷

(۵ نمره) روابط مجانبی زیر را بررسی و درستی/نادرستی آنها را تحلیل کنید.

- $2^{n+1} = \mathcal{O}(2^n)$,
 - $2^{2n} = \mathcal{O}(2^n)$,
 - $(n + a)^b = \theta(n^b)$, for any real constants a and $b > 1$.
-

سوال ۸

(۵ نمره) روابط مجانبی را بررسی و سلول‌های جدول را با بله/خیر پر کنید.

$f(n)$	$g(n)$	\mathcal{O}	o	Ω	ω	θ
$\log^k n$	n^ϵ					
2^n	$2^{\frac{n}{2}}$					
\sqrt{n}	$n^{\sin n}$					
$n^{\log c}$	$c^{\log n}$					

Table 1: $k \geq 1, \epsilon > 0, c > 1$