



دانشگاه آصفهان
دانشکده علوم ریاضی و آمار

بسمه تعالی

امتحان میان ترم ساختمان داده ها و الگوریتم ها

نیمال اول سال تحصیل ۱۴۰۱-۱۴۰۰

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه

تاریخ امتحان: ۱۱ آذر ۱۴۰۰

نام استاد: دکتر مجتبی رفیعی

- زمان پاسخگویی به سوالات ۱۵۰ دقیقه و ۳۰ دقیقه نیز فرصت برای آپلود پاسخ در نظر گرفته شده است.
 - پس از پایان فرصت آپلود، تا ۱۵ دقیقه همچنان فرصت آپلود با کسر ۵ درصد از نمره نهایی امکان پذیر است.
 - در صورت بروز مشکل در آپلود، پاسخنامه خود را به ایمیل ui.cs.fall2021.ds.rafiie@gmail.com ارسال کنید. با اینحال، سعی کنید در (LMS) نیز بارگذاری نمایید.
 - فهم سوال، بخشی از حل سوال است. لذا سوالات را با دقت خوانده و به تمامی اجزای آن پاسخ دهید.
 - لطفا به سوالات به اختصار و با خطی خوانا پاسخ دهید.
 - با توجه به نمرات کسب شده ممکن است از تعدادی از دانشجویان، امتحان شفافی گرفته شود.
- لطفا فرم زیر را تکمیل و به همراه پاسخنامه خود ارسال نمایید:
- اینجانب با شماره دانشجویی متعهد می شوم در حین شرکت در آزمون و برای پاسخگویی به سوالات
- از راهنمایی و کمک شخص دیگری استفاده نکنم،
 - به شخص دیگری راهنمایی یا کمکی ندهم،
 - تنها آموخته ها و عملکرد خود را بکار بگیرم،
 - و از کتاب، جزوه، اینترنت و منابع مشابه استفاده نکنم.

تاریخ و امضا

۱. (۵ نمره) به سوالات زیر پاسخ کوتاه دهید.

- (الف) (۱ نمره) خصیصه "درجا" و "برون از جا" بودن یک الگوریتم بیانگر چیست؟
- (ب) (۱ نمره) چرا در حالت کلی برای تحلیل کارایی یک الگوریتم ترجیح می دهیم تحلیل مجانبی به جای واقعی ارائه دهیم. ذکر دو مورد کفایت می کند.
- (پ) (۱/۵ نمره) به نظر شما، رابطه بین نمادهای مجانبی O, Ω, θ و پیچیدگی زمانی در "بهترین، متوسط و بدترین" حالت چیست. جواب خود را تحلیل کنید.
- (ج) (۰/۵ نمره) اصلی ترین مزیت استفاده از داده ساختار لیست پیوندی در مقایسه با لیست ساده چیست.
- (د) (۱ نمره) سیاست درج و حذف در داده ساختارهای پشته و صف به چه نحو است.

۲. (۴ نمره) شبه کد مربوط به نسخه بازگشتی مرتب‌سازی درجی در ادامه آورده شده است. پیچیدگی زمانی آن را تحلیل و درستی آن را اثبات کنید.

◁ برای تحلیل پیچیدگی، از فرم کلی پیچیدگی زمانی مربوط به رویکرد تقسیم و غلبه استفاده کرده و بخش‌های آن را به طور دقیق مشخص کرده و سپس اقدام به حل آن نمایید.

◁ برای اثبات درستی، به طور دقیق گام‌های ناوردایی حلقه و استقرا را تعیین نمایید.

Algorithm 1 R-Insertion-Sort($A[1 \dots n], m$)

```

1: if ( $m \leq 1$ ) then
2:   Return
3: R-Insertion-Sort( $A[1 \dots n], m - 1$ )
4:  $key \leftarrow A[m]$ 
5:  $i \leftarrow m$ 
6: while  $i > 1$  and  $A[i - 1] > key$  do
7:    $A[i] \leftarrow A[i - 1]$ 
8:    $i \leftarrow i - 1$ 
9:  $A[i] \leftarrow key$ 

```

۳. (۳ نمره) دو تابع $f(n)$ و $g(n)$ به صورت زیر داده شده است.

$$f(n) = \begin{cases} 2n^2 + n \log n & n \leq 2^{10} * 10^{20} \\ n^2 \log n & n \geq 10 \end{cases},$$

$$g(n) = 2n^2 + \log n.$$

رابطه‌های مجانبی قابل تعریف برای $f(n) = X(g(n))$ را بررسی کنید، جاییکه $X \in \{\mathcal{O}, \theta, o, \omega, \Omega\}$ است.

۴. (۳ نمره) آلیس می‌خواهد با روش حدس و استقرا اقدام به آرایه یک حل مجانبی برای تابع بازگشتی زیر نماید.

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 4n, \quad T(2) = 1.$$

با اینحال آلیس هیچ ایده‌ای برای حدس اولیه خود ندارد و از شما درخواست کمک می‌کند.

- آلیس را برای پیشنهاد یک حدس خوب راهنمایی کنید.
- به کمک یکی از پیشنهادهای خود، راه‌حل خود را آرایه و برای اطمینان آلیس از درستی پیشنهاد خود، آن را اثبات کنید.

۵. (۳ نمره) الگوریتم مرتب‌سازی ادغامی، یک رویکرد تقسیم و غلبه برای مرتب‌سازی یک لیست از اعداد است که به صورت زیر عمل می‌کند:

- به طور مکرر آرایه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند،
- هنگامی اندازه زیر آرایه‌ها به اندازه کافی کوچک شد، آنها را مرتب می‌کند،
- و نهایتاً با ادغام مکرر زیر آرایه‌های مرتب، آرایه کلی مرتب شده را بازسازی می‌کند.

با دقت به سوالات زیر پاسخ دهید:

- اگر به جای تقسیم آرایه به دو قسمت از تقسیم آرایه به سه قسمت استفاده کنیم، پیچیدگی الگوریتم ادغام چه تغییری می‌کند؟
- اگر نمونه‌های کوچک به جای یک عنصر، سه عنصر باشد، پیچیدگی الگوریتم ادغام چه تغییری می‌کند؟
- آیا می‌توانید ادعایی کلی برای تاثیر تعداد تقسیم و اندازه نمونه کوچک (بر حسب اعداد ثابت و مستقل از اندازه آرایه) ارایه دهید. پاسخ خود را توجیه کنید.

۶. (۵ نمره) روابط مجانبی زیر را بررسی و درستی/نادرستی آنها را تحلیل کنید.

- $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) = \theta(g(n))$,
- $2^{n+1} = \theta(2^{n+2})$,
- $n \log n = \theta(n \log \log n)$,
- $O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) = \emptyset$,
- $(n+a)^b = \mathcal{O}(n^b)$, for any integer constants a and $b > 1$.

۷. (۴ نمره) یکی از متداول‌ترین عملیات روی مجموعه‌های پویا، عمل تست عضویت است که یک مجموعه S_1 و مقدار کلید یک عنصر مثل vk را به عنوان ورودی دریافت کرده و در صورتیکه عنصری با کلید vk در مجموعه باشد، آن عنصر را به عنوان خروجی بر می‌گرداند. دو داده‌ساختار متفاوت برای پیاده‌سازی عملیات تست عضویت پیشنهاد داده و آنها را با هم مقایسه کنید. \triangleleft برای پیاده‌سازی‌های پیشنهادی، مشخص کردن نمایش گرافیکی هر عنصر داده‌ساختار، نمایش گرافیکی توالی مربوط به عناصر در داده‌ساختار، و شبه کد مربوط به عمل تست عضویت ضروری است.

۸. (۳ نمره) شبه‌کدی بنویسید که یک لیست پیوندی یکطرفه به طول n را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و آن را به دو لیست پیوندی به نحوی تجزیه می‌کند که عناصر فرد در لیست اول و عناصر زوج در لیست دوم قرار می‌گیرد.

\triangleleft رعایت نکات زیر برای الگوریتم ارایه شده ضروری است:

- فرض بر این است که اندیس عناصر لیست پیوندی ورودی به ترتیب از ۱ تا n (و نه از صفر تا n) است.
- حافظه مصرفی می‌بایست مقداری ثابت (و مستقل از n) باشد،
- پیچیدگی زمانی الگوریتم داده شده می‌بایست از مرتبه $\theta(n)$ باشد.

۹. (۳ نمره) تشریح کنید که چگونه می‌توان دو پشته را در یک آرایه $A[1..n]$ پیاده‌سازی کرد، به نحویکه هیچ یک از پشته‌ها سر ریز نکند مگر اینکه تعداد کل عناصر هر دو پشته برابر با n شود.

\triangleleft برای پیاده‌سازی، نوشتن شبه کد مربوط به عمل Push و شبه کد مربوط به عمل Pop برای هر دو پشته ضروری است.

۱۰. (۳ نمره) می‌دانیم که داده‌ساختار صف از سیاست "اولین ورودی، اولین خروجی" یا FIFO پیروی می‌کند. به عبارت دیگر همواره اضافه شدن و حذف شدن به/از صف از یک سمت صورت می‌پذیرد. داده‌ساختاری طراحی کنید که امکان اضافه و حذف به/از صف از دو سمت آن امکان پذیر باشد. لازم به ذکر است که پیچیدگی زمانی عملیات بر روی داده ساختار جدید می‌بایست در زمان $\mathcal{O}(1)$ انجام شود.

\triangleleft برای پیاده‌سازی مشخص کردن نمایش گرافیکی هر عنصر صف و توالی مربوط عناصر صف، و همچنین شبه کد مربوط به عملیات‌های مورد نیاز، ضروری است.

موفق و سربلند باشید.