Subject. Day. Month. Year.

علی درویشی

1.1 آیا مجموعه زیر convex است؟

$\{a \in R^k \mid p(0)=1, |p(t)| \le 1 \text{ for } \alpha \le t \le \beta\}$

where

$p(t) = a_1 + a_2 t + \dots + a_k t^{k-1}$

یک مجموعه convex است اگر هر دو نقطه‌ی درون مجموعه را بخواهیم با یک خط به هم متصل کنیم، آن خط درون مجموعه باشد.

* $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in$ مجموعه , $0 \le \theta \le 1$

در این جا، اگر شرایط گفته شده در بالا برای تمام ضرایب a_1 تا a_{k-1} صدق کند، مجموعه ما convex است.

طبق تعریف $p(0)=1$ و $|p(t)| \le 1$

همیشه ترکیب convex از دو نقطه عضو هم مجموعه است.

۱.۷ برای هر یک از cone های زیر، dual cone را تعریف کنید.

الف) $K=\{0\}$ ب) $K=R^2$

ج) $K=\{(x_1,x_2) \mid |x_1| \le x_2\}$ د) $K=\{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2=0\}$

dual cone به صورت زیر تعریف می‌شود

$$K^* = \{y \in R^n \mid \langle x,y \rangle \ge 0 \text{ for } x \in K\}$$

ضرب داخلی

الف) $K^*=R^n$ چرا که هر بردار در فضای R^n شرط $\langle x,y \rangle \ge 0$ را ارضا می‌کند چرا که فقط بردار صفر داریم.

ب) $K^*=\{0\}$ در این حالت cone ما تمام فضای برداری را در بر گرفته و تنها فضایی که شرط $\langle x,y \rangle \ge 0$ را ارضا کند، بردار صفر است.

ج) با فرض $y=(y_1,y_2)$ طبق تعریف بالا اگر $x_2 \ge |x_1|$ باشد، $x_1y_1+x_2y_2 \ge 0$ برقرار است اگر y_1, y_2 علامت یکسان داشته باشند.

اگر $x_2 \ge x_1 , x_2 \ge -x_1$ باشد، شرط ضرب داخلی تنها برقرار است اگر y_1 و y_2 هر دو صفر باشند.

$$K^*=\{(y_1,y_2) \mid y_1,y_2 \ge 0\}$$

د) با توجه به تعریف $x_1=-x_2$

$$K^*=\{(y_1,y_2) \mid y_2 \ge y_1 \text{ or } y_2 \le y_1\}$$

$f(x) = h(g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x))$ ۲.۲

که $h: R^k \to R$ convex است

$g_i: R^n \to R$

نشان دهید f convex است

$z = \theta x + (1-\theta) y \quad , \quad 0 \le \theta \le 1$

I $g_i(z) = \theta g_i(x) + (1-\theta) g_i(y)$, $i = 1, \dots, p$

II $g_i(z) \le \theta g_i(x) + (1-\theta) g_i(y)$, $i = p+1, \dots, q$

III $g_i(z) \le \theta g_i(x) + (1-\theta) g_i(y)$, $i = q+1, \dots, k$

I فرض شده g_i affine است

II III فرض شده g_i convex است

$f(z) = h(g_1(z), g_2(z), \dots, g_k(z))$

غیر کاهشی بودن

$f(z) \le h(\theta g_1(x) + (1-\theta) g_1(y), \dots, \theta g_k(x) + (1-\theta) g_k(y))$

غیر افزایشی بودن

$\le \theta h(g_1(x), \dots, g_k(x)) + (1-\theta) h(g_1(y), \dots, g_k(y))$

$= \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$

علی درویش

۲۰۱

$P = \mathrm{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$

نشان دهید که بیشترین مقدار یک تابع convex روی یکی از رئوس چندوجهی P به دست می‌آید:

یعنی:

$$\sup_{x \in P} f(x) = \max_{i=1,\dots,k} f(v_i)$$

حداکثر مقدار یک تابع محدب که روی یک مجموعه محدب تعریف شده است در extream point به دست می‌آید.

extream point نقطه‌ای است که با هیچ یک دیگر از نقاط مجموعه ترکیب convex نمی‌سازد.

از برهان خلف استفاده می‌کنیم

فرض: فرض می‌کنیم ماکزیمم مقدار یک تابع convex روی نقطه‌ای extream نیست.

$l = \{l_1, \dots, l_k\}$ و $l_i > 0$ و $\sum_{i=1}^{k} l_i = 1$

$$z = \sum_{i=1}^{k} l_i v_i$$

$$f(z) = f(l_1 v_1 + \dots + l_k v_k) \le l_1 f(v_1) + \dots + l_k f(v_k)$$

$$< f(z)$$

تناقض

Subject..........

Day...... Month...... Year......

علی درویشی

۳.۹ نشان دهید که تابع زیر روی $\{x \mid \|x\|_2 < 1\}$ ، Convex است.

$$f(x) = \frac{\|Ax\|_2^2}{1 - x^T x}$$

می توان نشان داد که نسبت دو تابع Convex ، نیز یک تابع Convex را تشکیل می دهد.

فرم درجه دو $(Ax - b)$ و $(1 - x^T x)$ ، روی $\{x \mid \|x\|_2 < 1\}$ Convex است.

راه دیگر این است که می توان از طریق اثبات مثبت بودن ماتریس هسین به Convex بودن تابع پی برد.

$$H_f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nabla f(x)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A^T A x - A^T b\right)$$

$$= A^T A$$

این ماتریس positive semidefinite است برای هر بردار d

$$d^T A^T A d = \|Ad\|_2^2 \geq 0$$

بنابراین تابع $f(x)$ ، Convex است بر $\{x \mid \|x\|_2 < 1\}$

Subject.

Day. Month. Year.

۳.۱ شرایط لازم برای $x \in R^n$ را بیابید به طوری که تابع f روی احتمال simplex زیر کمینه شود!

$$\{x \mid 1^T x = 1 ,\ x \geq 0\}$$

فرض : $\nabla f(x)^T (y - x) \geq 0$ برای تمام y های امکان پذیر

$$\min_{i=1,\dots,n} \nabla f(x)_i \geq \nabla f(x)^T x$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \nabla f(x)_i \geq \nabla f(x)^T x \sum_{i=1}^{n} y_i = \nabla f(x)^T x$$

$$\min_{i=1,\dots,n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\boxed{x \geq 0 \ ,\ 1^T x = 1}$$

$$\min_{i=1,\dots,n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$x_k > 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k} = \min_{i=1,\dots,n} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

با فرض $t>0$ ، $Fg \le 0$ ، $y \neq 0$ می‌توان
به صورت زیر نوشت.

$$\min \quad t \max_{i=1,\dots,m} \left(a_i^T \frac{y}{t} + b_i\right)$$

$$\text{sub to} \quad \min_{i=1,\dots,p} \left(c_i^T \frac{y}{t} + d_i\right) \ge \frac{1}{t}$$

$$F\left(\frac{y}{t}\right) \le g$$

$$t \ge 0$$

می‌توان قید اول در بالا را به صورت مساوی نوشت:

$$\left(c_i^T \frac{y}{t} + d_i\right) = \frac{1}{t}$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$\min_{i=1,\dots,p} \left(c_i^T \frac{y}{t} + d_i\right) = \frac{1}{t}$$

و

$$\min \quad \frac{\max_{i=1,\dots,m} \left(a_i^T \frac{y}{t} + b_i\right)}{\min_{i=1,\dots,p} \left(c_i^T \frac{y}{t} + d_i\right)}$$

$$\text{sub to} \quad F\left(\frac{y}{t}\right) \le g$$

$$t \ge 0$$

که

$$\boxed{x = \frac{y}{t}}$$

۳.۵

$$\text{minimize} \quad \frac{\max_{i=1,\dots,m} (a_i^T x + b_i)}{\min_{i=1,\dots,p} (c_i^T x + d_i)}$$

$$\text{sub to} \quad Fx \le g$$

نشان دهید که چگونه مسئله بالا به LP تبدیل می‌شود.

مسئله می‌تواند معادل زیر باشد:

$$\min \quad \max_{i=1,\dots,m} (a_i^T y + b_i t)$$

$$\text{sub to} \quad \min_{i=1,\dots,p} (c_i^T y + d_i t) \ge 1$$

$$Fy \le gt$$

$$t \ge 0$$

مسئله بالا نیز می‌تواند معادل زیر باشد:

$$\min \quad u$$

$$\text{sub to} \quad a_i^T y + b_i t \le u, \quad i=1,\dots,m$$

$$c_i^T y + d_i t \ge 1, \quad i=1,\dots,p$$

$$Fy \le gt$$

$$t \ge 0$$

Subject.

Day. Month. Year.

$$f(x) = (Ax+b)^T (P_0 + x_1 P_1 + \dots + x_n P_n)^{-1} (Ax+b)$$ ۳.۸

$A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $P_i = P_i^T \in R^{m \times m}$

$$\operatorname{dom} f = \{ x \in R^n \mid P_0 + x_1 P_1 + \dots + x_n P_n \succ 0 \}$$

یک ماتریس متقارن معرفی می‌کنیم $F(x,t)$ برای (x,t)

به طوری که

$$x \in \operatorname{dom} f , \quad f(x) \leq t \iff F(x,t) \succeq 0$$

اپی گراف تابع f به صورت زیر است

$$(Ax+b)^T (P_0 + x_1 P_1 + \dots + x_n P_n)^{-1} (Ax+b) \leq t$$

با استفاده از مکمل‌های Schur می‌توان نوشت

$$F(x,t) = \begin{bmatrix} t & (Ax+b)^T \\ Ax+b & P_0 + P_1 x_1 + \dots + P_n x_n \end{bmatrix} \succeq 0$$

۱۲.۳

ابتدا یک تغییر متغیر انجام می‌دهیم

$y = Bp \qquad p = B^{-1}y = y - Cy$

تابع هدف به صورت زیر آمده است:

$$\sum_{i=1}^{n} \log (y_i / (Cy)_i) = \log \prod_i (y_i / (Cy)_i)$$

قید مسئله:

$$y_i \geqslant (Cy)_i \;, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\prod_i^n y_i = 1$$

در نهایت

$$\min \quad \prod_i^n (Cy)_i$$

sub to:

$$y_i \geqslant (Cy)_i$$

$$\prod_i y_i = 1$$

Month. Year.

۱۲.۹ باید نشان بدهیم که تابع هدف convex است

Min C

sub to $p \geq 0 \,,\, Fp \leq g$

می‌دانیم که تابع $f(x) = \log(1+\frac{1}{x})$ یک تابع convex است برای $x>0$. و $f'(x) = -\frac{1}{x^2+x}$ که مشتق‌ها افزایشی است، لذا $f''(x)$ باید بزرگ‌تر از صفر است.

برای g_i^T می‌نویسیم

$$C_i = \alpha f\left(\frac{g_i^T p + \sigma_i^2}{B_i}\right)$$

که نشان می‌دهد تابع C یک تابع convex در p است