24. Dersom A er hermitisk er egenverdiene reelle

$$Ax = \lambda x \text{ , bevis } \lambda \in \mathbb{R}$$

• ganger med x^H fra høyre side

$$x^H A x = x^H \lambda x$$

$$x^H A x = \lambda x^H x \quad (*) \text{ eq } 1$$

Vi "hermiserer" begge sider

$$(x^H A x)^H = (\lambda x^H x)^H \qquad (\overline{AB}) = \overline{A}\,\overline{B}$$

$$(\overline{x^H A x})^T = (\overline{\lambda x^H x})^T \qquad (AB)^T = B^T A^T$$

$$(\overline{x^H}\,\overline{A}\,\overline{x})^T = (\overline{\lambda}\,\overline{x^H}\,\overline{x})^T \qquad x^{H^H} = x$$

$$(\overline{x}^T \overline{A}^T \overline{x^H}^T) = (\overline{x}^T \overline{x^H}^T \overline{\lambda}^T) \qquad K^T = k \text{ for alle konstanter}, \; A^H = A \text{ for herm. matrise}$$

$$\overline{x}^T A x = \overline{x}^T x \overline{\lambda}$$

$$x^H A x = \overline{\lambda} x^H x \quad (*) \text{ eq } 2$$

$$eq1 = eq2$$

$$\lambda x^H x = \overline{\lambda} x^H x \iff \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Hermitisk matrise, distinkte egenverdier er ortogonale

La x_1 og x_2 være to egenvektorer med $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\lambda_1 x_1^H x_2 = (\lambda_1 x_1)^H x_2 = (Ax_1)^H x_2 = x_1^H A^H x_2 = x_1^H (A x_2)$$

$$= x_1^H (\lambda_2 x_2)$$

$$\implies \lambda_1 x_1^H x_2 = \lambda_2 x_1^H x_2$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) x_1^H x_2 = 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

siden $\lambda_1 \neq \lambda_2$, må $x_1^H x_2$ være lik 0, ergo de er ortogonale