# Задача А1. Задача трёх кругов

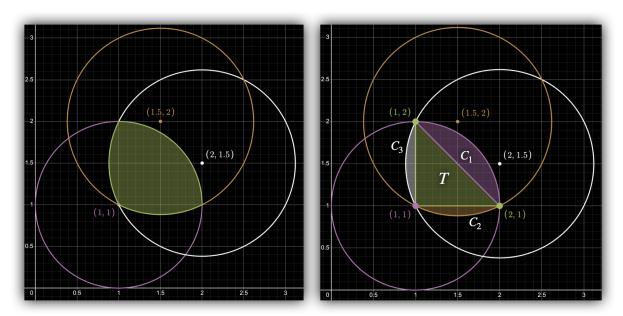
Среди множества возможных применений стохастического метода Монте-Карло особенно выделяется приближенная оценка площадей самых разных геометрических фигур, к которым в том числе относятся фигуры, образуемые пересечением кругов.

### Постановка задачи

Нам даны три окружности:

- с центром в точке (1, 1) и радиусом 1,
- с центром в точке (1.5, 2) и радиусом  $\sqrt{5}/2$  и
- ullet с центром в точке  $(\mathbf{2,\ 1.5})$  и радиусом  $\sqrt{\mathbf{5}}\,/\,\mathbf{2}.$

В рамках этой задачи требуется вычислить приближенное значение площади фигуры, образованной в результате пересечения соответствующих кругов (см. зеленую область на левом рисунке ниже). Кроме того, необходимо оценить, насколько приближенная оценка площади *отклоняется* от ее точного значения в зависимости от параметров работы алгоритма Монте-Карло.



#### Точное вычисление площади пересечения кругов

Вывод общей формулы для вычисления площади пересечения кругов — весьма сложная задача, поэтому для удобства вычислений мы разобьем целевую фигуру на прямоугольный треугольник и три круговых *сегмента*, как показано выше на правом рисунке, а именно на:

- прямоугольный треугольник T с вершинами в точках (1, 1), (1, 2) и (2, 1);
- сегмент  $C_1$ , ограниченный гипотенузой T и кругом с центром в (1, 1);
- сегменты  $C_2$  и  $C_3$ , ограниченные катетами T и кругами с центрами в (1.5, 2) и (2, 1.5).

Площадь кругового сегмента равна  $\frac{\theta - \sin(\theta)}{2} \cdot r^2$ , где r — радиус, а  $\theta$  — величина соответствующего центрального угла (в радианах).

Нетрудно заметить, что площади круговых сегментов  $C_2$  и  $C_3$  совпадают. Поэтому общая площадь фигуры, образованной пересечением заданных кругов, составит  $S=S_T+S_{C_1}+2S_{C_2}=S_T+S_{C_1}+2S_{C_3}$ . Рассмотрим вычисление площади каждого компонента S в отдельности:

- 1. Площадь прямоугольного треугольника T с единичными катетами равна 0.5.
- 2. Центральный угол, который образует сегмент  $C_1$ , составляет  $90^\circ-\pi/2$  радиан. Тогда:  $S_{C_1}=\frac{\pi/2-\sin(\pi/2)}{2}\cdot 1^2=0.25\cdot\pi-0.5.$
- 3. Синус центрального угла, который образует сегмент  $C_2$  ( $C_3$ ), составляет 0.8. Его можно найти по теореме косинусов для треугольника с вершинами (1, 1), (1.5, 2) и (2, 1). Тогда:  $\arcsin(0.8) 0.8 + \left(\sqrt{5}\right)^2$

$$2 \cdot S_{C_2} = 2 \cdot S_{C_3} = 2 \cdot \frac{\arcsin(0.8) - 0.8}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1.25 \cdot \arcsin(0.8) - 1.$$

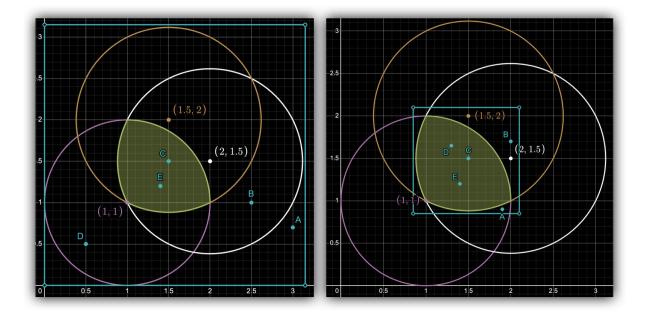
Итак, точная площадь фигуры пересечения трех заданных окружностей составляет:

$$S = S_T + S_{C_1} + 2S_{C_2} = 0.5 + 0.25 \cdot \pi - 0.5 + 1.25 \cdot \arcsin(0.8) - 1 = 0.25 \cdot \pi + 1.25 \cdot \arcsin(0.8) - 1$$

### Приближенное вычисление площади пересечения кругов

Вычислить оценку площади фигуры, образованной пересечением трех заданных кругов, с помощью метода Монте-Карло можно как минимум двумя способами:

- путем случайной генерации точек в широкой прямоугольной области, которая охватывает все три круга полностью (см. на левом рисунке ниже) и
- путем случайной генерации точек в *узкой* прямоугольной области, которая более «плотно» ограничивает пересечение трех кругов (см. на правом рисунке ниже).



В обоих случаях, приближенная оценка отношения площади S целевой фигуры пересечения трех кругов к площади  $S_{rec}$  прямоугольной области составит  $S / S_{rec} \approx M / N$ , где N — общее число сгенерированных точек в рассматриваемой прямоугольной области, а M — число точек, которые попадают внутрь и на границу фигуры пересечения трех кругов. Таким образом, приближенная оценка площади пересечения трех кругов составит  $\widetilde{S} = (M / N) \cdot S_{rec}$ .

1. Реализуйте алгоритм Монте-Карло на основе случайной генерации точек в заданной прямоугольной области для приближенного вычисления площади пересечения трех кругов, заданных координатами центров и радиусами.

## АиСД-1 (2024-2025). SET 3 Россия, Москва, 11 – 25 ноября 2024 г.

- 2. Проведите экспериментальные замеры точности вычисления площади фигуры, рассмотренной 6 задаче, в зависимости от масштаба прямоугольной области для случайной генерации точек, а также от количества случайно сгенерированных точек N, которое изменяется от 100 до 100000 с шагом 500. Представьте результаты проведенных экспериментов в следующем виде:
  - график(-и) первого типа, которые отображают, как меняется приближенное значение площади в зависимости от указанных параметров алгоритма;
  - график(-и) второго типа, которые отображают, как меняется величина относительного отклонения приближенного значения площади от ее точной оценки в зависимости от указанных параметров алгоритма.
- 3. Опишите полученные вами результаты и сформулируйте содержательные выводы.

Язык программирования, который должен использоваться при реализации алгоритмов, — C++. Ограничений на используемые средства обработки и визуализации эмпирических данных нет. Помимо графиков и пояснений, приложите:

- 1. ID своей посылки по задаче A1i в системе CodeForces с реализацией алгоритма Монте-Карло.
- 2. Ссылку на публичный репозиторий с исходными данными, полученными в результате экспериментальных замеров.

# Система оценки

- 1. <u>5 баллов</u> Реализация алгоритма Монте-Карло для приближенного вычисления площади фигуры, образованной пересечением трех кругов.
- 2. <u>6 баллов</u> Представление экспериментальных результатов работы алгоритма в зависимости от параметров его работы.
- 3. 4 балла Сравнительный анализ полученных эмпирических данных.

Обратите внимание, что загрузка реализации алгоритма в задачу **A1i** является *необходимым* условием для получения оценки по другим критериям.

# Задача А1і. Задача трех кругов — реализация

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 1 секунда Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Эта подзадача сопутствует основной задаче A1.

Загрузите реализацию алгоритма Монте-Карло оценки площади фигуры, образованной пересечением трех кругов, которые заданы координатами центров и радиусами соответствующих окружностей.

## Формат входных данных

Три строки, каждая содержит по три вещественных числа  $x_i, y_i, r_i$ , где  $0 \leqslant x_i \leqslant 1$  и  $0 \leqslant y_i \leqslant 1$  — координаты центра окружности, а  $r_i$  — ее радиус.

# Формат выходных данных

Выведите одно число — приближенную оценку площади пересечения трех заданных кругов с абсолютной погрешностью, не превышающей 0.01.

## Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
0.0 0.0 1.0	0.44380799999999998029
1.0 1.0 1.0	
0.0 1.0 1.0	
0.3 0.3 1	2.0146320000000020040
0.3 0.3 0.8	
0.3 0.3 0.9	

#### Замечание

В этой задаче вам нужно внимательно подойти к выбору общего числа генерируемых точек, ориентируясь на значения, приведенные в примере, и требуемую погрешность.