Расчетное задание по МС
Корнеев Никита, 20931

Вариант 8.
Часть 1. 1.1. Найти MX, DX - ?

Закон распр. - двусторонее экспоненц.
Ф-ция плотности:

$$f(x) = \frac{\alpha}{2\lambda\Gamma(1/\alpha)} \cdot e^{-\left|\frac{x-a}{\lambda}\right|^{\alpha}},$$

где $x \in R$, $a \in R$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$

По усл: изв. парам $\boldsymbol{\lambda = 1}$, $\boldsymbol{\alpha = 2}$
неизв. a - ?

Преобразуем заменой $\lambda = \sigma\sqrt{2}$ (дано лектором) и подставив изв. парам, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

a ← MX
σ – среднее кв. откл.

Получили норм. распр. $\Rightarrow MX = a$, $DX = \sigma^2$

Выразим из п.(1) $\sigma = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow DX = \frac{\lambda^2}{2} = 1/2$

Упростим подставив $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2}$

(1.2) Найти точечную оценку парам a

Метод правдоподобия

Вычисляем логарифм ф-ции правдоподобия:

$$\ln L(X_n, a) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x_i-a)^2}\right) =$$

наша $f(x)$

$$= -n \cdot \ln(\sqrt{\pi}) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$$

частн. произв.

$$\ln' L(X_n, a) = \left(-n \cdot \ln(\sqrt{\pi})\right)' - \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - a)^2\right)' =$$

$\left(-n \cdot \ln(\sqrt{\pi})\right)' = 0$, частн. произв. $= 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)$$

Воспользуемся методом МП:

$$\ln' L(X_n, a) = 0$$

$$2\sum_{i=1}^{n} (x_i - a) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = a \cdot n \Rightarrow a = \bar{X}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

a повторяется n раз, выносим

(1.3) Проверить условия регулярности модели.

Если регул., то выч. инф. кол-во Фишера $i(\alpha)$

1) Обл. опр. не зависит от a, функция дифф. по a

$\Rightarrow$ модель регулярная

2) Использ. формулу из лекции № 2 для инф. Фиш.

$$i(a) = E\left[\left(\frac{d \ln f(X_1, a)}{da}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2} \quad \text{для } N(a, \sigma)$$

$$\Rightarrow i(\alpha) = \frac{1}{1/2} = 2$$

(1.4) Подобрать удобную парам. функцию $\tau(\alpha)$ для свойств оценок. Записать оценку $\hat{\tau}(\alpha)$ на основ. оценки α. Проверить несмещ., сост., R-эфф.

Возьмем функцию $T(X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$

а) $E[T(X_n)] = EX = a$ (оценка несмещенная)

б) $D\bar{X} = D[T(X_n)] = \frac{DX}{n} = \frac{1/2}{n} = \frac{1}{2n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2n} = 0$ (состоятельна)

в) Исп. крит. эффект.

$U = \underset{\text{частн. произв.}}{\ln' L} = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i - 2n \cdot a \,|: n \cdot 2$

Приводим U к виду

$T(X_n) - \tau(a) = a(a) \cdot U(X_n, a)$

$\bar{x} - a = U \cdot (2n)^{-1}$, представление U сущ. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{R-эффективна}}$

(1.5) Построить асимпт. доверит. интервал для a

Интервал имеет вид (лекция МС-4)

$\left(a - \frac{c_\gamma}{\sqrt{n \cdot i(a)}} ; a + \frac{c_\gamma}{\sqrt{n \cdot i(a)}}\right)$ $a = \bar{x}$

$c_\gamma = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)$ $i(a) = 2$, γ не задана $\Rightarrow$ просто подставляем

$\left(\bar{x} - \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{2n}} ; \bar{x} + \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{2n}}\right)$